

Н. Ф. НЕЛИПА

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
СИЛЬНО-
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ
ЧАСТИЦ



АТОМИЗДАТ
МОСКВА 1970

Не ли па Н. Ф. Введение в теорию сильновзаимодействующих элементарных частиц. М., Атомиздат, 1970.

В книге систематически изложены основные методы, применяемые в теории сильновзаимодействующих элементарных частиц (включая их электромагнитное взаимодействие). Книга состоит из двух частей. Первая часть посвящена нахождению выражений для амплитуд, удовлетворяющих требованиям симметрии физических систем. Во второй части излагаются методы одномерных и двойных дисперсионных соотношений, комплексных моментов, дисперсионных правил сумм, алгебры токов. Применение каждого метода расчета иллюстрируется рассмотрением конкретных процессов. Для проверки теоретических результатов привлекаются имеющиеся экспериментальные данные.

Книга рассчитана на неучных сотрудников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физики элементарных частиц.

Книга иллюстрирована 70 рис., содержит 20 табл. и библиографию из 97 наименований.

В последнее время в физике элементарных частиц большое внимание уделяется изучению процессов с участием сильновзаимодействующих частиц. Хорошо известно, что для анализа таких реакций теория возмущений не применима, и поэтому возникла необходимость в создании новой теории. Несмотря на огромные усилия, построить последовательную теорию сильновзаимодействующих частиц пока не удалось. Разработан лишь ряд методов расчета, каждый из которых имеет довольно ограниченную область применимости. В основе этих методов лежат более или менее правдоподобные гипотезы, которые в основном не противоречат эксперименту, но сейчас трудно сказать, какие из них останутся в последовательной теории. Короче говоря, в разработке теории сильновзаимодействующих частиц сделаны только первые шаги, и поэтому становится ясным условность слова «теория», стоящего в заголовке этой книги.

В книге излагаются наиболее разработанные и широко применяемые методы расчета процессов с участием сильновзаимодействующих элементарных частиц.

При написании книги автор ставил перед собой две задачи: во-первых, дать представление об основных идеях теории сильновзаимодействующих частиц; во-вторых, ознакомить читателя с расчетным аппаратом теории и научить его пользоваться этим аппаратом. Поэтому достаточно подробно излагается не только суть метода, но и технические приемы, применяемые в этой области теоретической физики.

В качестве конкретных примеров выбраны процессы, хорошо исследованные как теоретически, так и экспериментально. Этот выбор носит иллюстрированный характер. Автор не стремился дать полный обзор рассматриваемой области физики, однако надеется, что тот, кто изучит вопросы, затронутые в книге, не встретит больших затруднений при использовании описанных в ней методов в других аналогичных задачах.

Чтобы лучше подчеркнуть тот «выход», который дает теория в эксперимент во всех случаях, когда это возможно, полученные тео-

ретические результаты сравниваются с соответствующими опытными данными.

Автор отлично сознает, что в этой книге, являющейся первой попыткой обобщить и систематизировать огромный и быстро меняющийся материал по теории сильновзаимодействующих элементарных частиц, имеются упущения и недостатки и заранее благодарен тем читателям, которые возьмут на себя труд ознакомиться с этой книгой и пришлют свои замечания.

Таблица элементарных частиц. Известные в настоящее время элементарные частицы перечислены в табл. I Дополнения I. Все эти частицы можно разбить на две группы: 1) стабильные и квазистабильные частицы; 2) резонансы.

К первой группе относятся: фотон, лептоны (электрон, μ -мезон, нейтрино) и их античастицы (антилептоны); псевдоскалярные мезоны (π , K , η), барионы (нуклоны, Λ -, Σ - Ξ -гипероны) и антибарионы.

Вторую группу составляют мезонные резонансы: [векторные мезоны (ρ , ω , ϕ , K_{891}^*), псевдовекторные мезоны (A_1 , C , D , K_{1260}), со спином 2 (f , f' , A_2 , K_{1420}^*) и др., и барионные резонансы (N^* , Y^* , Ξ^* и т. п.).

Типы взаимодействий. Известно три типа взаимодействий (кроме гравитационного) элементарных частиц, резко отличных друг от друга: 1) слабое, 2) электромагнитное, 3) сильное. Каждое из этих взаимодействий характеризуется определенной константой связи. Константа связи сильного взаимодействия $g_s \sim 1 - 10$, электромагнитного $g_e \sim 1/137$ и слабого — на несколько порядков меньше g_e .

Основные типы процессов. Процессы с участием только фотонов и лептонов обусловлены слабым и электромагнитным взаимодействиями.

К наиболее хорошо изученным реакциям с участием фотонов и лептонов относятся: 1) рассеяние электронов на электронах ($e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$); 2) комптон-эффект на электронах ($\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$); 3) образование электрон-позитронных пар на ядре ($\gamma + \text{я} \rightarrow \text{я}' + e^+ + e^-$); 4) аннигиляция электрон-позитронных пар ($e^+ + e^- + \text{я} \rightarrow \text{я}' \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$); 5) тормозное излучение электронов ($e + \text{я} \rightarrow \text{я}' + e' + \gamma$); 6) фотоэффект на ядре ($\gamma + \text{я} \rightarrow \text{я}' + e^-$).

Так как константы связи электромагнитного и слабого взаимодействий меньше единицы, то для теоретического анализа процессов с участием фотонов и лептонов применяется теория возмущений.

Процессы с участием мезонов, барионов и барионных резонансов обусловлены не только слабым и электромагнитным, но и сильным взаимодействиями. Так как сильное взаимодействие является основным, то в этом случае теория возмущений не применима, и поэтому необходимы другие методы расчета.

Сильновзаимодействующие элементарные частицы (мезоны, барионы, резонансы) коротко называют адронами.

Следует различать два типа реакций: 1) с участием только адронов, 2) с участием фотонов и адронов, а также лептонов и адронов.

Для процессов первого типа слабым и электромагнитным взаимодействиями можно пренебречь, а для реакций второго типа необходимо учитывать и электромагнитное, и сильное взаимодействия.

В дальнейшем мы будем рассматривать оба типа процессов с участием адронов. При этом мы сосредоточим внимание на таких реакциях, в которых две элементарные частицы переходят в две, вообще говоря, другие элементарные частицы:

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \quad (1)$$

Эксперимент. Все осуществленные опыты можно разделить на две основные группы:

- 1) эксперименты с неполяризованными частицами,
- 2) эксперименты с поляризованными частицами.

На опыте измерялись следующие величины, относящиеся к реакции (1): полные сечения; дифференциальные сечения (как в случае неполяризованных, так и в случае поляризованных частиц); параметры, характеризующие поляризационные состояния частиц (поляризация бариона отдачи, корреляция] поляризаций барионов и т. п.).

Основным источником получения экспериментальной информации являются ускорители. В табл. 1 и 2 перечислены действующие в настоящее время протонные и электронные ускорители.

Как видно из табл. 1, процессы с участием только адронов изучаются в области кинетических энергий $T \leq 70$ Гэв (в лабораторной системе координат). Более детально исследованы (в некоторых определенных областях энергии) процессы рассеяния: 1) протонов на протонах ($p + p \rightarrow p + p$), 2) протонов на нейтронах ($p + n \rightarrow p + n$), 3) антипротонов на протонах ($\bar{p} + p \rightarrow \bar{p} + p$), 4) антинейтронов на протонах ($\bar{n} + p \rightarrow \bar{n} + p$), 5) π^+ , π^- , π^0 -мезонов на протонах ($\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$, $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$, $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$), 6) K^+ -и K^- -мезонов на протонах ($K^+ + p \rightarrow K^+ + p$, $K^- + p \rightarrow K^- + p$, $K^- + p \rightarrow K^0 + n$).

Сравнительно недавно вступили в строй электронные ускорители, дающие электроны и фотоны с энергией $E \sim 6$ Гэв, и совсем недавно — с энергией 20 Гэв. До этого работали ускорители с энергией $E \lesssim 1$ Гэв. Поэтому процессы с участием фотонов и адронов,

Таблица 1

Протонные ускорители с кинетической энергией ускоренных протонов $T > 200 \text{ Мэв}^*$ (в лабораторной системе координат)

| Энергия протонов | Тип ускорителя | Местонахождение |
|------------------|----------------------|---------------------------------------|
| 245 Мэв | Синхроциклотрон | Рочестер, США |
| 400 | » | Колумбийский университет, США |
| 400** | » | Ливерпуль, Англия |
| 440 | » | Технологический институт Корнеги, США |
| 456 | » | Чикаго, США |
| 600 | » | ЦЕРН, Швейцария |
| 680 | » | ОИЯИ, Дубна, СССР |
| 740 | » | Беркли, США |
| 1 Гэв | Синхрофазотрон | Бирмингем, Англия |
| 1 | Синхроциклотрон | Ленинград, СССР |
| 1 | Синхрофазотрон | Делфт, Голландия |
| 3 | » | Сакле, Франция |
| 3 | » | Принстон, США |
| 6,2 | » | Беркли, США |
| 7 | » | Харуэлл, Англия |
| 7 | » | ИТЭФ, Москва, СССР |
| 10 | » | ОИЯИ, Дубна, СССР |
| 12,5 | » | Аргоннский университет, США |
| 30 | » | ЦЕРН, Швейцария |
| 32 | » | Брукхейвен, США |
| 70 | » | Серпухов, СССР |
| 200** | » | США |
| 1000** | Сталкивающиеся пучки | ЦЕРН, Швейцария |

* При меньших энергиях работает несколько десятков ускорителей в различных странах.

** Ускоритель находится в процессе строительства.

а также электронов и адронов исследовались в основном в области энергий $E \leq 1 \text{ Гэв}$, причем более детально изучались следующие реакции: 1) фотообразование π^+ - и π^0 -мезонов на протонах ($\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$, $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$); 2) $K^+\Lambda^0$ -фотообразование на протонах ($\gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda^0$); 3) комптон-эффект на протоне ($\gamma + p \rightarrow \gamma + p$); 4) рассеяние электронов на протонах ($e + p \rightarrow e + p$); 5) рассеяние электронов на протонах с образованием π^+ - и π^0 -мезонов: $e + p \rightarrow e + p + \pi^0$, $e + p \rightarrow e + n + \pi^+$ (электрообразование π -мезонов).

Электронные ускорители с энергией ускоренных электронов ≥ 100 Мэв
(в лабораторной системе координат)

| Энергия электронов | Тип ускорителя | Местонахождение |
|--------------------|----------------|-------------------|
| 100 Мэв | Синхротрон | Ленинград, СССР |
| 100 | » | Турин, Италия |
| 180 | » | Вашингтон, США |
| 200 | » | Новосибирск, СССР |
| 280 | » | Москва, СССР |
| 300 | » | Томск, СССР |
| 300 | Линейный | Харьков, СССР |
| 320 | » | Токио, Япония |
| 340 | Синхротрон | Глазго, Англия |
| 400 | Линейный | Иллинойс, США |
| 450 | » | Фраскати, Италия |
| 500 | Синхротрон | Бонн, ФРГ |
| 600 | Линейный | Сакле, Франция |
| 680 | Синхротрон | Москва, СССР |
| 1,1 Гэв | » | Фраскати, Италия |
| 1,2 | » | Лунд, Швеция |
| 1,2 | Линейный | Стенфорд, США |
| 1,2 | » | Орсей, Франция |
| 1,3 | Синхротрон | Токио, Япония |
| 1,5 | » | Томск, СССР |
| 1,5 | » | Калифорния, США |
| 2 | » | Корнель, США |
| 2 | Линейный | Харьков, СССР |
| 2,3 | Синхротрон | Бонн, ФРГ |
| 5 | » | Ланкашир, Англия |
| 6,3 | » | Кэмбридж, США |
| 6,25 | » | Гамбург, ФРГ |
| 6,3 | » | Ереван, СССР |
| 10 | » | Корнель, США |
| 20 | Линейный | Стенфорд, США |

В области энергий $E=1-6$ Гэв наряду с исследованием перечисленных выше реакций начато также изучение процессов 1) фотообразования векторных ω -, ϕ - и ρ -мезонов на протонах ($\gamma + p \rightarrow p + \omega^0$, $\gamma + p \rightarrow p + \rho^0$, $\gamma + p \rightarrow n + \rho^+$); 2) фоторождения π^+ и π^0 -мезонов на нуклонах с образованием нуклонной изобары ($\gamma + p \rightarrow N^{*++} + \pi^-$, $\gamma + p \rightarrow N^{*0} + \pi^+$, 3) множественного фотообразования π -мезонов ($\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^-$ и т. п.).

В области энергий $E \sim 6-20$ Гэв пока получены лишь отрывочные опытные результаты.

Теория. Основной задачей теории является вычисление величин (дифференциальные сечения, поляризационные параметры и т. п.), характеризующих данный процесс.

Так как на опыте регистрируются состояния взаимодействующих частиц до и после рассеяния, то процесс рассеяния (1) можно описать следующим образом. Задана начальная система i взаимодействующих частиц 1 и 2, находящихся в состоянии m и характеризуемых волновой функцией Φ_m^i . Найти вероятность того, что начальная система i перейдет в конечную систему f частиц 3, 4, находящуюся в состоянии n и описываемую волновой функцией Φ_n^f .

Введем оператор S_{nm} , переводящий функцию начального состояния Φ_m^i в функцию конечного состояния Φ_n^f

$$\Phi_n^f = S_{nm} \Phi_m^i. \quad (2)$$

Оператор S называется S -матрицей рассеяния, а величина

$$S_{nm} = \Phi_n^{f+} S \Phi_m^i \quad (3)$$

матричным элементом оператора S или амплитудой процесса. Введение последней величины важно потому, что квадрат модуля $|S_{nm}|^2$ определяет вероятность перехода из начального состояния m в конечное состояние n .

В самом деле, состояние системы характеризуется определенным набором динамических переменных (энергия, момент количества движения, спин и т. п.), каждой из которых сопоставляется определенный оператор. Собственные функции Φ_n и собственные значения n какого-либо из этих операторов N определяются уравнением

$$N\Phi_n = n\Phi_n.$$

Разложим волновые функции начальной Φ_i и конечной Φ_f систем реакции (1) по собственным функциям оператора N :

$$\Phi^i = \sum_m C_m^i \Phi_m, \quad \Phi^f = \sum_m C_m^f \Phi_m.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2) и умножая обе части на сопряженную волновую функцию Φ_n^+ , находим, учитывая, что $\Phi_n^+ \Phi_m = \delta_{mn}$

$$C_n^f = \sum_m \Phi_n^+ S \Phi_m C_m^i = \sum_m C_m^i S_{nm}. \quad (4)$$

Если начальное состояние величины m задано, т. е. $m = m_0$ и $C_m^i = \delta_{mm_0}$, то формула (4) дает

$$C_n^f = S_{nm_0} \quad (5)$$

или

$$|C_n^f|^2 = |S_{nm_0}|^2. \quad (6)$$

Величина $|C_n^f|^2$ равна вероятности обнаружить определенное значение n для системы в конечном состоянии f . Вследствие этого равенство (6) имеет следующий смысл: если определенное состояние

m_0 начальной системы i задано, то вероятность найти определенное состояние n конечной системы f определяется квадратом модуля соответствующего матричного элемента S -матрицы или амплитуды процесса. Иначе говоря, с помощью амплитуды процесса или матричного элемента S -матрицы можно вычислить все основные характеристики процесса.

Поэтому одной из основных задач теории является разработка метода, который позволил бы найти с помощью небольшого числа фундаментальных принципов (аксиом) амплитуды различных процессов.

Одним из таких методов является теория возмущений, исходящая из лагранжиана или гамильтониана. Однако теория возмущений не применима к сильным взаимодействиям; поэтому были предложены способы, не использующие теории возмущения.

Наиболее разработаны и широко применяются методы, основанные на унитарности и аналитичности (последняя тесно связана с причинностью). Изложению указанных методов и посвящена эта книга.

План изложения. Книга состоит из двух частей. В первой части для построения амплитуды используются требования симметрии физических систем.

В первых шести главах излагается способ построения амплитуды процесса (1), инвариантной относительно преобразований Лоренца, инверсии пространства, обращения времени, зарядового сопряжения, градиентных преобразований (в случае реальных фотонов). Аналогичная задача для процессов с участием трех частиц решается в гл. 12.

В гл. 7—9 рассматриваются различные формы записи амплитуды в с. ц. м.

Способ построения амплитуды, инвариантной относительно изотопических и унитарных преобразований, обсуждается в гл. 10 и 13.

Существенно, что совокупность использованных требований инвариантности позволяет определить амплитуду лишь с точностью до неизвестных скалярных функций (зависящих от энергетических и угловых переменных).

Свойства амплитуды, вытекающие из требований инвариантности, обычно называют кинематическими. Скалярные функции, входящие в амплитуду, определяют ее динамические свойства.

Для определения динамических скалярных функций, кроме требований симметрии, необходима дополнительная информация.

Первой наиболее простой возможностью является использование экспериментальных данных. Способ определения скалярных функций с помощью опытных данных описан в гл. 14.

Другая возможность получения сведений о динамических скалярных функциях заключается в добавлении к свойствам симметрии амплитуды требований унитарности и аналитичности (тесно связанной с причинностью). Методы, учитывающие эти требования,

излагаются во второй части книги. Сначала (гл. 15) приводятся основные сведения, касающиеся унитарности и аналитичности, а затем рассматриваются одномерные дисперсионные соотношения (гл. 16 и 17), двойные дисперсионные соотношения (гл. 18), метод комплексных угловых моментов (гл. 19), дисперсионные правила сумм (гл. 20) и алгебра токов (гл. 21) (в последнем случае исходным является постулат об алгебре токов, но применяются дисперсионные соотношения).

Сводная таблица. Так как материал книги komponуется по методам расчета, то различные формулы, относящиеся к одному и тому

Таблица 3

Номера глав (жирные цифры) и формул, относящихся к определенному процессу

| Процесс | $\pi N \rightarrow \pi N$ | $NN \rightarrow NN$ | $\gamma N \rightarrow N \pi$ | $\gamma N \rightarrow \gamma N$ | $eN \rightarrow eN$ |
|--|---------------------------|---------------------|------------------------------|---------------------------------|---------------------|
| Инвариантная амплитуда | 3, (2.4) | 3, 2.9 | 3, 1.14 | 4, 3.7 | 16, 4.3 |
| Амплитуда в с. ц. м. . . . | 7, (2.4) | 7, 2.9 | 7, 3.5 | 7, 3.6 | — |
| Разложение по парциальным волнам | 8, (1.17) | 8, 1.25 | 8, 2.9 | 8, 3.18 | — |
| Изотопическая структура амплитуды | 10, (7.4) | — | 10, 8.1 | — | — |
| Кросс-симметрия | 11, (1.6) | — | 11, 2.7 | 11, 1.9 | — |
| Фазовый анализ | 14, §3 | 14, §5 | 14, §4 | — | — |
| Резонансная модель | — | — | 16, §2 | — | 16, §4 |
| Одномерные дисперсионные соотношения | — | — | 17, §2 | 17, §3 | — |
| Двойные дисперсионные соотношения | 18, §2 | — | 18, §2 | 18, §2 | — |
| Метод полюсов Редже . . . | 19, §3 | — | 19, §4 | — | — |
| Дисперсионные правила сумм | 20, §3 | — | 20, §2 | 20, §2 | — |
| Алгебра токов | — | — | 21, §2 | 21, §3 | — |

же процессу, находятся в разных главах. Для облегчения ориентации мы даем табл. 3, в которой указаны номера формул и параграфов, относящихся к определенному процессу.

Единицы и обозначения. Мы используем систему единиц, в которой скорость света и постоянная Планка, деленная на 2π , равны единице:

$$c = \hbar = 1.$$

В этой системе энергия, импульс и масса имеют размерность обратной длины, а время — размерность длины.

Светлыми буквами (p, q, r и т. п.) обозначаются четырехмерные векторы, а жирными (p, q, g и т. п.) — трехмерные векторы.

Четырехмерное суммирование обозначается греческими индексами, а трехмерное — латинскими.

Обычно подразумевается, что по дважды повторяющимся индексам производится суммирование и индекс суммирования не указывается.

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов a и b мы записываем в виде

$$(ab) = a_{\mu} b_{\mu} = a_0 b_0 - ab,$$

т. е. опускаем в скалярном произведении контравариантный индекс с помощью метрического тензора $g_{\mu\nu}$ (например, $x^{\nu} = g^{\mu\nu} x_{\mu}$, так что $x_{\nu} x^{\nu} = x_{\nu} x_{\nu} g^{\nu\nu}$), причем $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ и $g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$ и $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.

Для операций принимаются следующие обозначения: * — комплексное сопряжение; т — транспонирование; † — эрмитово сопряжение.

ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИНВАРИАНТНАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА

ГЛАВА I

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

§ 1. Преобразование четырехмерных величин

Опыт показывает, что имеет место принцип относительности. Согласно этому принципу все физические законы вообще и физики элементарных частиц в частности одинаковы во всех инерциальных системах. Следовательно уравнения, выражающие физические законы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Теория, основанная на принципе относительности, называется релятивистской. В релятивистской теории переход от одной инерциальной системы к другой осуществляется с помощью преобразований Лоренца.

Релятивистская инвариантность означает инвариантность физических законов и соответствующих им уравнений относительно преобразований Лоренца.

Характерным для релятивистской теории является тесная связь между пространством и временем. Поэтому удобно характеризовать какое-либо событие с помощью координат x , y , z и t в четырехмерном пространстве — времени. В дальнейшем мы будем обозначать эти координаты так:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad t = x_0.$$

Преобразование Лоренца выглядит следующим образом:

$$x_1 = \frac{x'_1 + vx'_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3, \quad x_0 = \frac{x'_0 + vx'_1}{\sqrt{1-v^2}},$$

где v — скорость движения (вдоль оси x_1) системы K' относительно системы K .

Все физические величины делятся на классы в зависимости от того, как они ведут себя при преобразованиях Лоренца.

Простейшими являются величины, которые не изменяются при преобразованиях Лоренца. Такие величины называются скалярами. Скаляром является, например, масса частицы.

Следующим по сложности является четырехмерный вектор. Так называется величина, компоненты которой преобразуются при преобразованиях Лоренца так же, как координаты x_μ :

$$B'_\mu = C_{\mu\nu} B_\nu.$$

Четырехмерным вектором является 4-импульс частицы, представляющий совокупность ее полной энергии E и трехмерного импульса \mathbf{p} : $p(E, \mathbf{p})$.

Приведем еще несколько примеров четырехмерных векторов:

$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right)$ или $\left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ — четырехмерный градиент (сокращенно ∇_μ);

(j_0, \mathbf{j}) или (j_0, j_1, j_2, j_3) — 4-вектор плотности тока j_μ ;

(A_0, \mathbf{A}) или (A_0, A_1, A_2, A_3) — 4-вектор-потенциал электромагнитного поля A_μ .

Первая компонента 4-вектора называется временной, а остальные три — пространственными.

Произведение двух 4-векторов образует совокупность шестнадцати величин $B_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 0)$, которые при преобразованиях координат $x'_\alpha = C_{\alpha\gamma}x_\gamma$ преобразуются как произведения координат:

$$B'_{\alpha\beta} = C_{\alpha\gamma} C_{\beta\delta} B_{\gamma\delta}.$$

Так преобразующаяся величина $T_{\alpha\beta}$ называется 4-тензором второго ранга. Пример такой величины — произведение двух 4-векторов p_μ и q_ν : $p_\mu q_\nu$.

Аналогичным образом можно образовать тензоры более высокого ранга. Например, $p_\mu q_\nu k_\alpha$ — тензор третьего ранга и т. п.

Таким образом, при преобразованиях Лоренца четырехмерные величины ведут себя как скаляры, векторы и тензоры.

Релятивистским инвариантом называется величина, которая не меняется при преобразованиях Лоренца. Инвариантом является скалярное произведение двух 4-векторов a_μ и b_μ , которое мы определим так

$$a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 \equiv a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Разные знаки у пространственных и временных компонент подчеркивают, что четырехмерное пространство в теории относительности не евклидово, а псевдоевклидово (заметим, что иногда скалярное произведение определяют и так: $ab = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_0 b_0$). Инвариантом, в частности, является величина

$$p^2 = p_\mu p_\mu = p_0^2 - \mathbf{p}^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2. \quad (1.1)$$

Здесь E — полная энергия; m — масса покоя частицы; \mathbf{p} — трехмерный импульс.

Релятивистскими инвариантами будут также следующие скалярные произведения 4-векторов:

$$p_\mu r_\mu = p_0 x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}; \quad \nabla_\mu j_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} j_0(x_0, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{j}(x_0, \mathbf{x});$$

$$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}; \quad \nabla_\mu A_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial x_0} A_0(x_0, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A}(x_0, \mathbf{x}).$$

Заметим, что для реального фотона $p^2 = 0$, так как масса реального фотона равна нулю. По определению, виртуальной называется частица, для которой не выполняется равенство (1.1). Поэтому для виртуального фотона $p^2 \neq 0$, точнее, $p^2 = \lambda^2$, где λ^2 характеризует «виртуальность» фотона.

Вектор x называют времениподобным, если $x^2 > 0$, пространственноподобным, если $x^2 < 0$, и нулевым, если $x^2 = 0$.

Для частицы 4-вектор p времениподобен ($p^2 = m^2 > 0$), а для реального фотона — нулевой.

§ 2. Преобразование волновых функций частиц

В квантовой механике частицы описываются волновыми функциями. Волновые функции зависят от пространственно-временных координат x_μ и переменной, связанной со спином частицы. Обычно в качестве спиновой переменной выбирают значение проекции спина на какое-либо направление в пространстве. Спин частицы равен целому или полуцелому числу и спиновая переменная пробегает ограниченное число дискретных значений. Таким образом, волновая функция частицы, обладающей спином, представляет собой совокупность не одной, а нескольких различных функций координат, короче говоря, является многокомпонентной. Для частиц с ненулевой массой число компонент равно числу проекций спина, т. е. $(2s + 1)$, где s — величина спина.

Наиболее простой — однокомпонентной — волновой функцией описывается частица, спин которой равен нулю. У частицы со спином $1/2$ имеется два состояния, соответствующие двум возможным проекциям спина: $+1/2$ и $-1/2$. Поэтому для описания такой частицы необходима двухкомпонентная волновая функция. Для описания частицы со спином 1 (имеющим три проекции: $+1, 0, -1$) надо использовать трехкомпонентную волновую функцию, а для описания частицы со спином $3/2$ (имеющим четыре проекции: $3/2, 1/2, -1/2, -3/2$) — четырехкомпонентную волновую функцию.

Волновые функции зависят от координат частиц. Вследствие этого при преобразованиях Лоренца наряду с координатами преобразуются и сами волновые функции. При этом оказывается, что волновые функции преобразуются существенно различным образом, в зависимости от того, какой у них спин — целый или полуцелый.

Волновые функции для частиц с целым спином $s = 0, 1, 2, \dots$ преобразуются при преобразованиях Лоренца так же, как соответствующие четырехмерные величины, т. е. как скаляры ($s = 0$), векторы ($s = 1$) и тензоры ($s \geq 2$). Поэтому такие волновые функции и соответствующие им частицы называют скалярными ($s = 0$), векторными ($s = 1$) и т. п.

По-другому преобразуются волновые функции частиц с полуцелым спином $s = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ Эти волновые функции называются спинорами, а описываемые ими частицы — спинорными. Специфичным для спиноров является то, что если сделать поворот

вокруг какой-либо оси на 2π , то спинор изменит знак (см. § 6), в то время как волновые функции частиц с целым спином возвращаются к своему первоначальному значению.

Частицы с целым спином подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна и поэтому называются бозонами, а частицы с полуцелым спином — статистике Ферми—Дирака и потому называются фермионами.

Каждая из волновых функций, описывающих частицу с данным спином, подчиняется определенному уравнению, ковариантному относительно преобразований Лоренца*.

К краткому рассмотрению ковариантных уравнений, описывающих частицы со спинами $s = 0; 1; 1/2; 3/2; 2$, мы и переходим. Частицы с такими спинами обнаружены экспериментально (см. табл. I Дополнения I).

§ 3. Скалярные частицы

В релятивистской теории имеет место соотношение

$$E^2 - p^2 = m^2, \quad (3.1)$$

или в четырехмерной записи

$$p^2 = m^2.$$

Если считать, что p является оператором, то, действуя обеими частями последнего равенства на волновую функцию скалярной частицы φ , зависящую от импульса p , получим уравнение

$$p^2 \varphi(p) = m_s^2 \varphi(p)$$

или

$$(p^2 - m_s^2) \varphi(p) = 0. \quad (3.2)$$

Это — релятивистски ковариантное уравнение для волновой функции скалярной частицы в импульсном представлении (m_s — масса скалярной частицы).

Производя в (3.1) замену величин операторами

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad p \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial x}$$

и действуя полученными операторами на волновую функцию φ , зависящую от координаты x_μ , получаем уравнение

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \varphi(x) = m_s^2 \varphi(x)$$

* Ковариантным называется уравнение, которое после преобразования координат и функций не изменяет своей формы.

или

$$(\square - m^2) \varphi(x) = 0,$$

где

$$\square = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right).$$

Это — релятивистски ковариантное уравнение для волновой функции скалярной частицы в координатном представлении.

В дальнейшем мы будем использовать в основном уравнения в импульсном представлении.

Уравнение (3.2) имеет два решения:

$$\varphi^{(-)}(x) = N e^{-i p x} \quad \text{и} \quad \varphi^{(+)}(x) = N e^{+i p x}, \quad (3.3)$$

где N — нормировочный множитель.

Одной из основных характеристик частицы является момент количества движения. Собственные функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и соответствующие собственные значения l и m операторов квадрата момента количества движения L^2 и его проекции L_z на ось z определяются уравнениями:

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}; \quad (3.4)$$

$$L_z Y_{lm} = m Y_{lm}, \quad (3.5)$$

где m — проекция момента количества движения на ось z ; $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$.

Как известно, Y_{lm} представляют собой шаровые функции*. Состояние с $l = 0$ называется s -состоянием, с $l = 1$ — p -состоянием и т. д. Величина l характеризует орбитальное движение частицы.

§ 4. Векторные частицы (в частности, виртуальные фотоны)

В четырехмерном пространстве — времени следующей по сложности после скалярной является четырехкомпонентная волновая функция $U_\mu(q)$. Для каждой из ее компонент можно написать уравнение (3.2)

$$(q^2 - m_\nu^2) U_\mu(q) = 0, \quad (4.1)$$

где m_ν — масса векторной частицы, q — 4-импульс вектона. Уравнение (4.1) релятивистски ковариантно.

Так же как уравнение (3.2), уравнение (4.1) имеет два решения:

$$U_\mu^{(\pm)} = N \xi_\mu e^{\pm i q x}, \quad (4.2)$$

где N — нормировочный множитель. Однако в отличие от (3.3), решение (4.2) содержит дополнительный множитель ξ_μ , который

* См. Дополнение III.

характеризует различные спиновые состояния частицы. Обычно говорят об этих состояниях как о состояниях с различной поляризацией и называют ξ_μ четырехмерным вектором поляризации частицы.

Вектор поляризации вектона. Как мы уже говорили, для описания частицы со спином 1 нужна трехкомпонентная волновая функция. Чтобы убрать «лишнюю» компоненту, наложим на компоненты

U_μ следующее дополнительное условие, которое является релятивистски инвариантным:

$$q_\mu U_\mu(q) = 0. \quad (4.3)$$

Его называют обычно условием Лоренца. Подставляя (4.2) в (4.3), получаем

$$q_\mu \xi_\mu = 0 \quad (4.4)$$

или $a_0 - \mathbf{q}\xi = 0.$

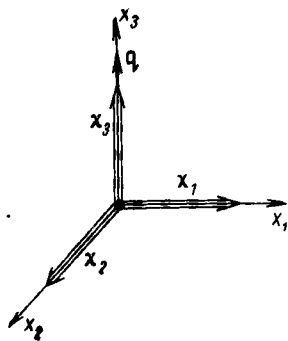


Рис. 1.1. Векторы поляризации вектона (или виртуального фотона).

Эти соотношения показывают, что из четырех компонент вектора поляризации ξ_μ независимы только три. Другими словами, при данном \mathbf{q} у вектона возможны три линейно независимых вектора поляризации.

Пусть \mathbf{q} направлен вдоль оси x_3 (рис. 1.1). Тогда в качестве независимых векторов можно выбрать единичные орты χ_1, χ_2, χ_3 вдоль осей x_1, x_2, x_3 :

$$\chi_1(1, 0, 0); \quad \chi_2(0, 1, 0); \quad \chi_3(0, 0, 1). \quad (4.5)$$

Два первых орты соответствуют поперечной поляризации вектона, а последний — продольной. Вместо векторов χ_1, χ_2 и χ_3 можно выбрать другие ортогональные единичные векторы χ_{+1} и χ_{-1} :

$$\chi_{+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right); \quad \chi_{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right); \quad \chi_0(0, 0, 1). \quad (4.6)$$

Выясним физический смысл наборов векторов (4.5) и (4.6).

Пусть трехмерный вектор поляризации ξ направлен вдоль оси x_1 . Тогда учитывая, что

$$U = U' [\xi e^{i(q_0 x_0 - \mathbf{q}\mathbf{x})}],$$

находим

$$U_1(\mathbf{x}, x_0) = U' \xi_1 \exp i(-\mathbf{q}\mathbf{x} + q_0 x_0);$$

$$U_2(\mathbf{x}, x_0) = 0; \quad U_3(\mathbf{x}, x_0) = 0.$$

В этом случае вектор \mathbf{U} , изменяясь во времени, остается все время направленным по оси x_1 . Поэтому говорят, что вектор \mathbf{U} линейно поляризован вдоль оси x_1 . Аналогичным образом определяется линейная поляризация вектора \mathbf{U} вдоль осей x_2 и x_3 .

Направим вектор ξ вдоль χ_{+1} . Тогда для поперечных компонент U_1, U_2 получим

$$U_1 = \frac{U'}{\sqrt{2}} \xi_{+1} \exp i(q_0 x_0 - q x); \quad U_2 = \frac{U'}{\sqrt{2}} \xi_{+1} \exp i\left(q_0 x_0 - q x + \frac{\pi}{2}\right)$$

или, если $\dot{\chi} = 0$,

$$U_1 = \frac{U'}{\sqrt{2}} \xi_{+1} \exp i q_0 x_0; \quad U_2 = \frac{U'}{\sqrt{2}} \xi_{+1} \exp i\left(q_0 x_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. вектор \mathbf{U} вращается, оставаясь постоянным по величине. Поэтому говорят, что поле \mathbf{U} поляризовано по кругу.

Если вектор ξ направлен по χ_{-1} , то

$$U_1 = \frac{U'}{\sqrt{2}} \xi_{-1} \exp i q_0 x_0, \quad U_2 = -\frac{U'}{\sqrt{2}} \xi_{-1} \exp i\left(q_0 x_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. \mathbf{U} опять поляризовано по кругу, однако направление вращения в этом случае противоположно по сравнению со случаем, когда ξ направлено вдоль χ_{+1} .

Таким образом, векторы (4.5) определяют линейную поляризацию вектора, а векторы (4.6) — его круговую поляризацию.

Векторы (4.5) или (4.6) полностью характеризуют спиновые состояния вектора, т. е. являются его спиновыми волновыми функциями. Эти волновые функции можно переписать в эквивалентной матричной форме следующим образом:

а) в случае линейной поляризации

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (4.7)$$

б) в случае круговой поляризации

$$\chi_{+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Волновая функция вектора с заданным полным моментом. В отличие от бесспиновой частицы, вектор характеризуется полным мо-

ментом количества движения j , равным векторной сумме орбитального l и спинного $s = 1$ моментов:

$$j = \begin{cases} l+1 \\ l \\ l-1. \end{cases}$$

Соответственно оператор M полного момента количества движения вектона состоит из двух слагаемых: из оператора орбитального момента количества движения L и оператора спинного момента S вектона:

$$M = L + S.$$

Собственные функции и собственные значения операторов M^2 и M_L определяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} M^2 Y_{jm_j} &= j(j+1) Y_{jm_j}; \\ M_z Y_{jm_j} &= m_j Y_{jm_j}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Здесь m_j означает проекцию полного момента j вектона на ось x_3 , т. е. сумму проекций его орбитального m_l и спинного μ моментов $m_j = m_l + \mu$.

Как мы уже говорили (§ 3), состояние частицы с данным орбитальным моментом j описывается шаровой функцией Y_{jm_j} . Чтобы описать состояние вектона с импульсом k и полным моментом j , требуется три шаровые функции, соответствующие трем поляризациям вектона. Эти шаровые функции можно рассматривать как компоненты вектора $Y_{jm_j}(\theta, \varphi)$, который назвали шаровым вектором.

Шаровой вектор $Y_{jm_j}(\theta, \varphi)$ должен удовлетворять уравнениям (4.9), и, кроме того, его компоненты должны быть, согласно (4.5), ортогональны друг другу.

Найдем удовлетворяющий обоим этим требованиям шаровой вектор Y_{jm_j} , используя скалярную шаровую функцию Y_{lm} . Для этого введем три ортогональных оператора:

$$L = -i \left[q \frac{\partial}{\partial q} \right]; \quad N = -i [qL] \equiv \frac{\partial j}{\partial q} - q \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right); \quad q. \quad (4.10)$$

Величины L , N и q удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} L_m L_n - L_n L_m &= i \varepsilon_{mnr} L_r; \\ L_m N_n - N_n L_m &= i \varepsilon_{mnr} N_r; \\ L_m q_n - q_n L_m &= i \varepsilon_{mnr} q_r. \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Действуя операторами (4.10) на скалярную шаровую функцию частицы $Y_{jm_j}(\theta, \varphi)$, получаем три векторные функции, зависящие от вектора \mathbf{q} :

$$LY_{jm_j}; \quad NY_{jm_j}; \quad qY_{jm_j}. \quad (4.12)$$

Эти функции являются собственными функциями оператора полного момента M^2 . В самом деле, действуя, например, оператором M на функцию LY_{jm_j} , находим

$$M_r(L_n Y_{jm_j}) = (L_r + S_r)(L_n Y_{jm_j}) = L_r L_n Y_{jm_j} + S_r L_n Y_{jm_j}.$$

Используя первое соотношение в (4.11) и формулу $S_r L_i = -i \epsilon_{rif} L_f$, приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} M_r(L_n Y_{jm_j}) &= L_n L_r Y_{jm_j} + i \epsilon_{rnf} L_f Y_{jm_j} - \\ &- i \epsilon_{rnf} L_f Y_{jm_j} = L_n L_r Y_{jm_j}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Действуя на последнюю функцию еще раз оператором M_r , получаем

$$M^2(L_n Y_{jm_j}) = L_n L^2 Y_{jm_j}. \quad (4.14)$$

Так как Y_{jm_j} является собственной функцией оператора орбитального момента L с моментом j и проекцией m_j , то согласно (3.4) и (3.5)

$$\begin{aligned} L_z Y_{jm_j} &= m_j Y_{jm_j}; \\ L^2 Y_{jm_j} &= j(j+1) Y_{jm_j}. \end{aligned}$$

Тогда из (4.13) и (4.14) следует, что

$$\begin{aligned} M_z(L_n Y_{jm_j}) &= m_j(L_n Y_{jm_j}); \\ M^2(L_n Y_{jm_j}) &= j(j+1)(L_n Y_{jm_j}), \end{aligned}$$

т. е. функция LY_{jm_j} , согласно (4.9), действительно есть собственная функция оператора полного момента M^2 с моментом j и проекцией m_j .

Аналогичным образом доказывается, что функции NY и qY и следовательно шаровой вектор Y_{jm_j} , являются собственными функциями оператора M^2 с моментом j и проекцией m_j . Так как операторы L , N и q ортогональны друг другу, то функции LY , NY , qY взаимно ортогональны. Выберем для них следующее условие нормировки:

$$\int Y_{jm}^{\lambda*}(\mathbf{q}) Y_{j'm'}^{\lambda'}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 4\pi \delta_{\lambda,\lambda'} \delta_{j,j'} \delta_{m,m'}$$

Тогда в явном виде функции LY , NY и qY , удовлетворяющие условиям (4.5) и (4.9), запишутся так:

$$\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} NY_{jm_j}(\theta, \varphi) \equiv Y_{jm_j}^{(+1)} = \frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} \left[\frac{\partial}{\partial q} - q \left(q \frac{\partial}{\partial q} \right) \right] Y_{jm_j}(q);$$

$$\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} LY_{jm_j}(\theta, \varphi) \equiv Y_{jm_j}^{(0)} = -\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} \left[q \frac{\partial}{\partial q} \right] Y_{jm_j}(q); \quad (4.15)$$

$$Y_{jm_j}^{(-1)} = qY_{jm_j}(q).$$

Найденные ортогональные компоненты шарового вектора изображены графически на рис. 1.2. Вектор qY направлен вдоль импульса q и связан с продольной поляризацией вектона, в то время как векторы LY и NY характеризуют поперечно поляризованные вектоны.

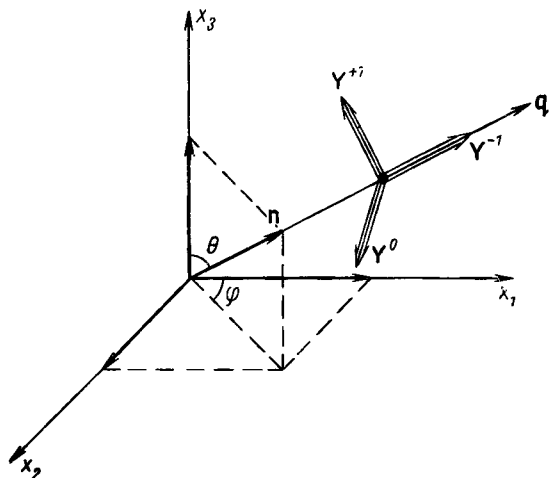


Рис. 1.2. Шаровые векторы вектона (или виртуального фотона).

Таким образом, состояние вектона с импульсом k и полным моментом j описывается шаровым вектором с компонентами:

$$Y_{jm_j}^{(+1)}, \quad Y_{jm_j}^{(-1)}, \quad Y_{jm_j}^{(0)} \quad (4.16)$$

или сокращенно $Y_{jm_j}^{(\lambda)}$, где $\lambda = 0, +1, -1$.

§ 5. Реальные фотоны

Как показывает опыт, электромагнитные волны являются поперечными (т. е. у них отсутствует продольная компонента). Поэтому волновая функция фотона должна быть двухкомпонентной. Кроме того, из опыта следует, что спин фотона равен единице, а масса — нулю.

Чтобы получить уравнение для волновой функции фотона с 4-импульсом k , надо в (4.1) положить $m = 0$, что дает

$$k^2 A_\mu(k) = 0. \quad (5.1)$$

По-прежнему накладывається условие Лоренца (4.4)

$$k_\mu \varepsilon_\mu = k_0 \varepsilon_0 - \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} = 0, \quad (5.2)$$

где ε — 4-вектор поляризации фотона.

Но при этом в уравнении (5.1) остается еще одна «лишняя» компонента. Чтобы ее убрать, надо воспользоваться тем, что уравнение для электромагнитного поля инвариантно относительно градиентных преобразований

$$A'_\mu(k) \rightarrow A_\mu(k) + k_\mu f(k), \quad (5.3)$$

где $f(k)$ — произвольная функция.

Так как на четырехкомпонентную функцию $A_\mu(k)$ наложены два условия (5.2) и (5.3), то в уравнении (5.1) независимыми останутся лишь две компоненты. Используя преобразование (5.3), выберем $A_\mu(k)$ так, что ее временная компонента $A_0(k)$, а следовательно, и ε_0 обратятся в нуль. Тогда вместо (5.2) получим

$$k_0 \varepsilon_0 = 0, \quad \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon} = 0. \quad (5.4)$$

Это условие является условием поперечности фотона. Оно отражает тот факт, что у реального фотона, в отличие от виртуального существуют только две поперечные поляризации, а продольная отсутствует (рис. 1.3).

Поэтому если во всех результатах, полученных для вектора, пренебречь продольной поляризацией, то они станут пригодными для реального фотона. В частности, линейную поляризацию фотона можно характеризовать векторами

$$\chi_1 (1, 0, 0), \quad \chi_2 (0, 1, 0), \quad (5.5)$$

а круговую — векторами

$$\chi_{+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \chi_{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right). \quad (5.6)$$

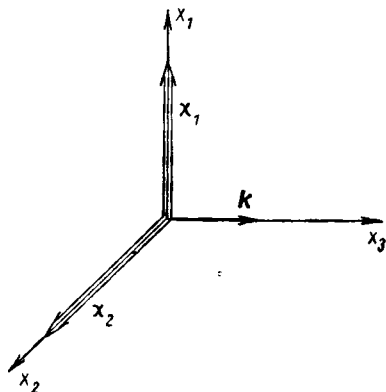


Рис. 1.3. Векторы поляризации реального фотона.

Чтобы получить шаровые векторы $Y_{jm_j}^{(+1)}$ и $Y_{jm_j}^{(0)}$, соответствующие двум поперечным поляризациям фотона (рис. 1.4), надо действовать на функцию Y_{jm_j} двумя первыми операторами (4.10):

$$\left. \begin{aligned} Y_{jm_j}^{(0)} &= -\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} \left[\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right] Y_{jm_j}; \\ Y_{jm_j}^{(+1)} &= \frac{i}{\sqrt{j(j+1)}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} - \mathbf{k} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) \right\} Y_{jm_j}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Следовательно, волновая функция полного момента фотона представляет собой шаровой вектор с компонентами:

$$Y_{jm_j}^{(0)}, \quad Y_{jm_j}^{(+1)}.$$

Эти компоненты можно записать в виде единой [формулы

$$A_{jm_j}^\lambda = -\sqrt{2} \sum_L C_{j-1; 11}^{L0} \delta(L, \lambda) i^{L-j-\lambda} Y_{jLm_j}. \quad (5.8)$$

Здесь $\delta(L, \lambda)$ отлично от нуля для $L = j + 1$ (при $\lambda = 1$) и для $L = j$ (при $\lambda = 0$).

Выражения, относящиеся к процессам, в которых участвуют реальные фотоны, должны быть инвариантны относительно градиентных преобразований. Сформулируем правило, с помощью ко-

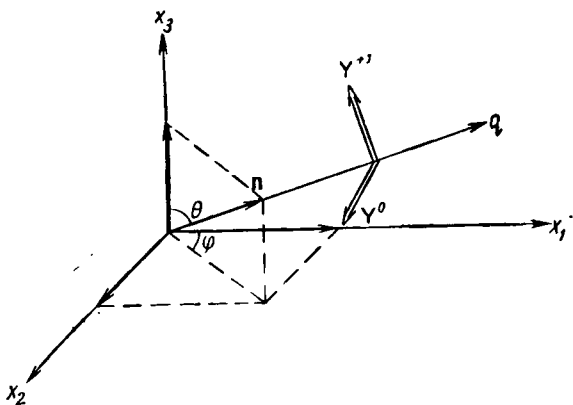


Рис. 1.4. Шаровые векторы реального фотона.

торого можно проверить, является ли выражение градиентно инвариантным. Пусть имеется выражение, в которое наряду с другими величинами входит волновая функция фотона A_μ или 4-вектор поляризации ϵ_μ . Представим заданное выражение в виде произведения A_μ и функции $F(k)$, не зависящей от A_μ . Имея в виду (5.3), находим

$$A'_\mu(k) F(k) = A_\mu(k) F(k) + k_\mu F(k) f(k).$$

Чтобы исходное выражение не изменилось, второй член должен обратиться в нуль. Так как $f(k) \neq 0$, то $k_\mu F(k) = 0$.

Однако выражение $k_\mu F(k)$ получается из исходного $A_\mu F(k)$ заменой $A_\mu \rightarrow k_\mu$ (или $\epsilon_\mu \rightarrow k_\mu$). Следовательно, выражение будет градиентно инвариантным, если после замены $\epsilon_\mu \rightarrow k_\mu$ (или $A_\mu \rightarrow k_\mu$) оно обращается в нуль.

Рассмотрим, например, реакцию $\gamma + N_1 \rightarrow N_2 + \pi$. Пусть k, p_1, p_2, q — векторы энергии — импульса соответственно фотона, нуклонов и π -мезона, а ϵ_μ — вектор поляризации фотона. Из этих величин можно составить различные релятивистски инвариантные комбинации: $p_1 \epsilon, q \epsilon, (p_1 q)(p_2 \epsilon), [(p_1 k)(q \epsilon) - (q k)(p_1 \epsilon)]$.

Легко видеть, что не только релятивистски, но градиентно инвариантна лишь последняя комбинация (так как она обращается в нуль при замене $\epsilon \rightarrow k$).

§ 6. Частицы со спином $1/2$

Уравнение Дирака. Частицы со спином $1/2$, как мы уже отмечали в § 1, описываются двухкомпонентными волновыми функциями. Такие волновые функции преобразуются по-другому по сравнению с тензорными функциями (см. конец этого параграфа), поэтому они получили специальное название — спиноров. Имея в виду уравнение (3.2), уравнение для спинора χ в импульсном представлении запишется так:

$$p^2 \chi(p) = M^2 \chi(p), \quad (6.1)$$

т. е. в виде дифференциального уравнения второго порядка.

Более принята другая, эквивалентная форма уравнения для бариона — в виде дифференциального уравнения первого порядка, но для четырехкомпонентной волновой функции.

Введем двухрядные матрицы Паули σ :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Непосредственным перемножением этих матриц можно убедиться, что они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$1) \sigma_k \sigma_j + \sigma_j \sigma_k = 2\delta_{kj},$$

$$\text{где } \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = j \\ 0, & \text{если } k \neq j. \end{cases}$$

$$2) \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i \sigma_3 \text{ и т. д.}$$

или, если учесть предыдущее соотношение, $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$ и т. д.

$$3) \sigma_k^2 = 1.$$

Кроме того,

$$(\sigma a)(\sigma b) = (ab) + i(\sigma [ab]). \quad (6.3)$$

Чтобы получить уравнение для четырехкомпонентной волновой функции, перепишем (6.1) следующим образом:

$$(p_0^2 - M^2) \chi = p^2 \chi = (\sigma p) (\sigma p) \chi \quad (6.4)$$

или

$$(p_0 - M) (p_0 + M) \chi = (\sigma p) (\sigma p) \chi. \quad (6.5)$$

Обозначим

$$(p_0 + M) \chi = (\sigma p) \varphi, \quad (6.6)$$

тогда вместо (6.5) будем иметь

$$(p_0 - M) \varphi = (\sigma p) \chi. \quad (6.7)$$

Таким образом, вместо одного уравнения второго порядка (6.1) мы получили два уравнения (6.6) и (6.7) первого порядка, т. е. мы произвели «линеаризацию» уравнения (6.1). Два уравнения (6.6) и (6.7) для спинорных функций φ и χ можно записать в виде одного уравнения, но для четырехкомпонентного спинора, который называется биспинором,

$$(\gamma_0 p_0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma}) u - M u = 0 \quad (6.8)$$

или

$$(\hat{p} - M) u = 0, \quad (6.9)$$

где

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (6.9) называется уравнением Дирака.

Матрицы Дирака. Четырехрядные матрицы γ , которые называют матрицами Дирака, имеют вид

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

Эти матрицы удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (6.11)$$

причем

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad \text{если } \mu \neq \nu,$$

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1.$$

Важной является матрица

$$\gamma_5 = i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 = - \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

для которой

$$\gamma_\mu \gamma_5 = - \gamma_5 \gamma_\mu. \quad (6.12)$$

Подчеркнем, что выбранный нами вид матриц γ не единственный; иногда матрицы γ выбирают в другом виде (как говорят, в другом представлении).

Выясним, как ведут себя матрицы γ при комплексном сопряжении, транспонировании и эрмитовом сопряжении.

Комплексное сопряжение матрицы сводится к комплексному сопряжению всех ее элементов. Имея в виду (6.10) и (6.2), получаем

$$\gamma_1^* = \gamma_1, \quad \gamma_2^* = -\gamma_2, \quad \gamma_3^* = \gamma_3, \quad \gamma_0^* = \gamma_0, \quad \gamma_5^* = \gamma_5.$$

При транспонировании столбцы матрицы заменяются строками, так что

$$\gamma_1^T = -\gamma_1, \quad \gamma_2^T = \gamma_2, \quad \gamma_3^T = -\gamma_3, \quad \gamma_0^T = \gamma_0, \quad \gamma_5^T = \gamma_5.$$

При этом транспонированное от произведения нескольких матриц равно произведению транспонированных матриц, взятых в обратном порядке. Например, для произведения двух матриц

$$(\gamma_\mu \gamma_\nu)^T = \gamma_\nu^T \gamma_\mu^T.$$

Эрмитово сопряжение есть произведение комплексного сопряжения и транспонирования, поэтому

$$\gamma_1^\dagger = -\gamma_1, \quad \gamma_2^\dagger = -\gamma_2, \quad \gamma_3^\dagger = -\gamma_3, \quad \gamma_0^\dagger = \gamma_0, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5.$$

Эрмитово сопряженное от произведения нескольких матриц равно произведению эрмитово сопряженных матриц, взятых в обратном порядке. Например, для двух матриц:

$$(\gamma_\mu \gamma_\nu)^\dagger = \gamma_\nu^\dagger \gamma_\mu^\dagger.$$

Сопряженный спинор. Найдем уравнение Дирака для сопряженного спинора. Уравнение, эрмитово сопряженное уравнению (6.9), выглядит так:

$$\begin{aligned} [(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) u]^\dagger &= u^\dagger (\gamma_0^\dagger p_0 - \boldsymbol{\gamma}^\dagger \mathbf{p} - M) = \\ &= u^\dagger (\gamma_0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) = 0. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для того чтобы привести оператор $\gamma_0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}$ к исходному виду $\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p}$, умножим уравнение (6.13) справа на γ_0 . Пользуясь тем, что $\gamma_i \gamma_0 = -\gamma_0 \gamma_i$, будем иметь

$$\begin{aligned} u^+(\gamma_0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) \boldsymbol{\gamma}_0 &= u^+ \boldsymbol{\gamma}_0 (\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) = \\ &= u^+ \boldsymbol{\gamma}_0 (\hat{p} - M) = \bar{u} (\hat{p} - M) = 0. \end{aligned}$$

Спинор $\bar{u} = u^+ \boldsymbol{\gamma}_0$ называется сопряженным (точнее, дираковски сопряженным) относительно u . Если u представляет собой столбец

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix},$$

то \bar{u} является строкой

$$\bar{u} = u^+ \boldsymbol{\gamma}_0 = (u_1^*, u_2^*, -u_3^*, -u_4^*).$$

Решения уравнения Дирака. Найдем решение уравнения (6.9) или уравнений (6.6) и (6.7):

$$\left. \begin{aligned} (p_0 + M) \chi(p) - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \varphi(p) &= 0; \\ (p_0 - M) \varphi(p) - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \chi(p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.13')$$

Эта однородная система уравнений относительно функций φ и χ имеет решение, если равняется нулю определитель

$$\begin{vmatrix} p_0 + M & -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} & p_0 - M \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. система уравнений (6.13') разрешима, если

$$p_0^2 = E^2 = \mathbf{p}^2 + M^2 \quad \text{или} \quad E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}.$$

Отсюда следует, что уравнение Дирака (6.9) имеет два решения $u^{(+)}(p)$ и $u^{(-)}(p)$ — с положительной и отрицательной энергией

$$u^{(+)}(p) = \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \chi^{(+)} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u^{(-)}(p) = \begin{pmatrix} \Phi^{(-)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Четырехкомпонентные волновые функции $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} (\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) u^{(+)}(p) &= 0; \\ (-\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) u^{(-)}(p) &= 0, \end{aligned}$$

которые отличаются друг от друга знаком энергии p_0 .

Две различные волновые функции $u^{(+)}(p)$ и $u^{(-)}(p)$ описывают две различные частицы со спином $1/2$. Обычно функции $u^{(+)}(p)$ сопоставляют частицу (электрон, нейтрон, протон и т. д.), а функции $u^{(-)}(p)$ — античастицу (позитрон, антинейтрон, антипротон и т. д.).

Система уравнений (6.13') для положительной энергии переписывается так:

$$\left. \begin{aligned} (p_0 + M) \chi^{(+)}(p) - (\sigma \mathbf{p}) \varphi^{(+)}(p) &= 0; \\ (p_0 - M) \varphi^{(+)}(p) - (\sigma \mathbf{p}) \chi^{(+)}(p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Чтобы получить аналогичную систему уравнений для отрицательной энергии, надо в (6.15) заменить $p_0 \rightarrow -p_0$.

Из уравнений (6.6) и (6.7) следует, что спиноры φ и χ не являются независимыми. Задавая, например, $\varphi^{(+)}$ и $\chi^{(-)}$, находим $\varphi^{(-)}$ и $\chi^{(+)}$:

$$\chi^{(+)}(p) = \frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 + M} \varphi^{(+)}(p); \quad (6.16)$$

$$\varphi^{(-)}(p) = -\frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 + M} \chi^{(-)}(p). \quad (6.17)$$

Предположим, что волновые функции нормированы следующим образом:

$$\bar{u}^{(+)} u^{(+)} = 1, \quad \bar{u}^{(-)} u^{(-)} = -1, \quad \varphi^{(+)} \varphi = 1, \quad \chi^{(+)} \chi = 1. \quad (6.18)$$

Подставляя функции (6.16) в первую формулу (6.14) и учитывая (6.18), находим явный вид решения уравнения Дирака для положительной энергии с данным импульсом p

$$u^{(+)}(p) = \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{p_0 + M} \varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\ \frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 + M} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Выберем двухкомпонентную функцию в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Первая функция описывает барион с проекцией спина по оси z , а вторая — против оси z .

Подстановка (6.20) в (6.19) приводит к двум различным решениям уравнения Дирака, соответствующим двум проекциям спина частицы:

$$u_1^{(+)}(p) = \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 + M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

$$u_2^{(+)}(p) = \sqrt{\frac{p_0 + M}{2M}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 + M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, для положительного значения энергии существует два различных решения уравнения Дирака. Подставляя функцию (6.17) во вторую формулу (6.14), находим два различных решения уравнения Дирака для отрицательной энергии:

$$u_1^{(-)}(p) = \sqrt{\frac{p_0 - M}{2M}} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 - M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_2^{(-)}(p) = \sqrt{\frac{p_0 - M}{2M}} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma \mathbf{p})}{p_0 - M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

соответствующих двум проекциям спина (по оси z и против оси z).

Для покоящейся частицы ($\mathbf{p} = 0$) четыре различных решения уравнения Дирака выглядят так:

$$\begin{array}{cc} E > 0 & E < 0 \\ s_z = +1 & s_z = -1 & s_z = +1 & s_z = -1 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Таким образом, при заданном значении импульса \mathbf{p} уравнение Дирака имеет четыре различных решения. Каждое из них описывает состояние с определенным знаком энергии и проекции спина.

Билинейные комбинации спиноров. Выясним, как преобразуются волновые функции и их определенные комбинации при преобра-

зованиях Лоренца, исходя из требования ковариантности уравнения Дирака. Для этого удобно использовать уравнение Дирака в координатном представлении

$$\left(i\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - M \right) \psi(x) = 0. \quad (6.22)$$

Координаты x_1, x_2, x_3, x_0 четырехмерного пространства — времени при произвольных вращениях преобразуются так:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{10} x_0; \\ x'_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{20} x_0; \\ x'_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{30} x_0; \\ x'_0 &= a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + a_{03} x_3 + a_{00} x_0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

или коротко

$$x'_{\mu} = a_{\mu\nu} x_{\nu}. \quad (6.24)$$

При вращениях скалярное произведение двух векторов x и y остается неизменным

$$x'_{\mu} y'_{\mu} = x_{\mu} y_{\mu}$$

или

$$a_{\mu\nu} a_{\mu\lambda} x_{\nu} y_{\lambda} = x_{\mu} y_{\mu},$$

т. е. коэффициенты преобразования обладают следующими свойствами:

$$a_{\mu\nu} a_{\nu\alpha}^T = \delta_{\mu\alpha}. \quad (6.25)$$

Пусть при поворотах волновая функция, являющаяся решением уравнения Дирака, преобразуется с помощью оператора \mathcal{L} .

$$\psi'_{\alpha}(x') = \mathcal{L}_{\alpha\beta} \psi_{\beta}(x),$$

что символически можно записать в виде

$$\psi'(x') = \mathcal{L}\psi(x). \quad (6.26)$$

Исходная $\psi(x)$ и преобразованная $\psi'(x')$ волновые функции содержат одну и ту же физическую информацию. Такие преобразования осуществляются унитарными операторами, т. е. оператор \mathcal{L} обладает следующими свойствами:

$$\mathcal{L}^+ \mathcal{L} = 1 \text{ или } \mathcal{L}^+ = \mathcal{L}^{-1}. \quad (6.27)$$

Нашей задачей является определение оператора \mathcal{L} , исходя из требования ковариантности уравнения Дирака.

После поворота уравнение (6.22) перейдет в следующее:

$$\left(i\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} - M \right) \psi'(x') = 0. \quad (6.28)$$

При этом мы предположили, что при преобразованиях Лоренца матрицы γ остаются неизменными (был также рассмотрен вариант, в котором волновые функции остаются постоянными, тогда как матрицы γ меняются).

Умножая обе части (6.28) слева на \mathcal{L}^{-1} (6.26) и учитывая соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x'_{\mu}} = a_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}},$$

получаем

$$\left(\mathcal{L}^{-1} \gamma_{\mu} a_{\mu\nu} \mathcal{L} i \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} - M \right) \psi(x) = 0. \quad (6.29)$$

Уравнения (6.22) и (6.29) совпадают, если выполняется следующее соотношение:

$$\mathcal{L}^{-1} \gamma_{\mu} a_{\mu\nu} \mathcal{L} = \gamma_{\nu} \quad (6.30)$$

или

$$\mathcal{L} \gamma_{\nu} \mathcal{L}^{-1} = \gamma_{\mu} a_{\mu\nu}. \quad (6.31)$$

Иначе говоря, вид оператора \mathcal{L} , входящего в (6.26), определяется соотношением (6.31). Из последнего можно найти явный вид оператора \mathcal{L} [см. формулу (6.38)].

Чтобы установить, как преобразуется сопряженный спинор $\bar{u} = u^+ \gamma_0$, возьмем эрмитово сопряженное от выражения (6.26) и умножим полученный результат справа на γ_0 :

$$\psi'^+ \gamma_0 = \psi^+ \mathcal{L}^+ \gamma_0 = \psi^+ \gamma_0 \gamma_0 \mathcal{L}^+ \gamma_0 = \bar{\psi} \gamma_0 \mathcal{L}^+ \gamma_0, \quad (6.31')$$

т. е. сопряженный спинор преобразуется оператором $\gamma_0 \mathcal{L}^+ \gamma_0$.

Если использовать соотношение

$$\gamma_0 \mathcal{L}^+ \gamma_0 = \mathcal{L}^{-1},$$

то вместо (6.31') получим

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{L}^{-1}. \quad (6.32)$$

Таким образом, при произвольном лоренцевом преобразовании координат (6.24) функции $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ преобразуются следующим образом:

$$\psi'(x') = \mathcal{L} \psi(x) \text{ и } \bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \mathcal{L}^{-1}$$

или в импульсном представлении

$$u'(p') = \mathcal{L} u(p) \quad \bar{u}'(p') = \bar{u}(p) \mathcal{L}^{-1}. \quad (6.33)$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\bar{u}(p_2) O u(p_1), \quad (6.34)$$

где O — произвольный оператор, содержащий матрицы γ .

При лоренцевом преобразовании (6.24) билинейная форма на основании (6.33) преобразуется так:

$$\bar{u}(p_2) O u(p_1) \rightarrow \bar{u}'(p'_2) O u'(p'_1) = \bar{u}(p_2) \mathcal{L}^{-1} O \mathcal{L} u(p_1). \quad (6.35)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. $O = 1$, тогда $\bar{u}'(p'_2) u'(p'_1) = \bar{u}(p_2) u(p_1)$, т. е. форма $\bar{u}(p_2) u(p_1)$ является релятивистским скаляром.

2. $O = \gamma_5$; так как $\mathcal{L}^{-1} \gamma_5 \mathcal{L} = \gamma_5$, то $\bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1)$ также является релятивистским скаляром (см., однако, стр. 45).

3. $O = \gamma_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$); используя (6.31), получим

$$\bar{u}'(p'_2) \gamma_\mu u'(p'_1) = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1) = \sum_{\nu} a_{\mu\nu} A_\nu,$$

т. е. четыре величины $A_\nu \equiv \bar{u}(p_2) \gamma_\nu u(p_1)$ преобразуются, как 4-вектор.

4. $O = \gamma_\mu \gamma_5$; форма $\bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1)$ также преобразуется как четырехмерный вектор.

5. $O = \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$; используя (6.31), получим

$$\begin{aligned} \bar{u}'(p'_2) (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) u'(p'_1) &= \bar{u}(p_2) \{ \sum_{\alpha\beta} a_{\mu\alpha} \gamma_\alpha a_{\nu\beta} \gamma_\beta - \\ &- a_{\nu\beta} \gamma_\beta a_{\mu\alpha} \gamma_\alpha \} u(p_1) = \sum_{\alpha\beta} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} \bar{u}(p_2) (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) u(p_1), \end{aligned}$$

т. е. величины $\bar{u}(p_2) (\gamma_\alpha \gamma_\beta - \gamma_\beta \gamma_\alpha) u(p_1)$ преобразуются как антисимметричный тензор второго ранга, состоящий из шести компонент.

Так как спиноры \bar{u} и u являются четырехкомпонентными величинами, то при их перемножении получится 16 билинейных комбинаций. При преобразованиях Лоренца эти 16 комбинаций разбиваются на пять различных групп, которые мы рассмотрели.

Вследствие соотношения (6.11) для матриц γ все другие более сложные тензоры можно выразить через комбинации пяти рассмотренных величин.

Преобразование спиноров и тензоров. Найдем явный вид оператора \mathcal{L} преобразования спинора, используя соотношение (6.31). Рассмотрим частный случай вращения вокруг оси x_3 на угол φ . Тогда координаты, согласно (6.24), преобразуются так:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi + x_3 0 + x_0 0; \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi + x_3 0 + x_0 0; \\ x'_3 &= x_1 0 + x_2 0 + x_3 1 + x_0 0; \\ x'_0 &= x_1 0 + x_2 0 + x_3 0 + x_0 1, \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

и (6.31) приводит к следующим четырем соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi &= \mathcal{L}^{-1} \gamma_1 \mathcal{L}; \\ -\gamma_1 \sin \varphi + \gamma_2 \cos \varphi &= \mathcal{L}^{-1} \gamma_2 \mathcal{L}; \\ \gamma_3 &= \mathcal{L}^{-1} \gamma_3 \mathcal{L}; \\ \gamma_0 &= \mathcal{L}^{-1} \gamma_0 \mathcal{L}. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Отсюда следует, что при преобразовании координат (6.36) спиноры преобразуются с помощью оператора

$$\mathcal{L}(\varphi) = \cos \frac{1}{2} \varphi + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{1}{2} \varphi, \quad (6.38)$$

причем

$$\mathcal{L}^{-1}(\varphi) = \cos \frac{1}{2} \varphi - \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{1}{2} \varphi. \quad (6.39)$$

Аналогичным образом выглядят операторы, соответствующие повороту оси координат вокруг оси x_2 и x_1 .

Произведем поворот на угол, равный 2π . Такому повороту соответствует оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi + 2\pi) &= \cos\left(\frac{1}{2}\varphi + \pi\right) + \gamma_1 \gamma_2 \sin\left(\frac{1}{2}\varphi + \pi\right) = \\ &= -\cos \frac{1}{2}\varphi + \gamma_1 \gamma_2 \sin \frac{\varphi}{2} = -\mathcal{L}(\varphi). \end{aligned}$$

Как видно, при повороте на 2π спинорная функция меняет знак. Поворот на 2π приводит систему в первоначальное положение, т. е. совпадает с поворотом на нуль градусов, при котором волновая функция знака не меняет. Отсюда следует, что знак у спинорной

функции не определенный. Иначе говоря, спинорные волновые функции с положительным и отрицательным знаком физически эквивалентны.

При преобразовании координат (6.36) компоненты векторной волновой функции преобразуются так же, как координаты:

$$U'_1(x') = U_1(x) \cos \varphi + U_2(x) \sin \varphi;$$

$$U'_2(x') = -U_1(x) \sin \varphi + U_2(x) \cos \varphi.$$

В противоположность спинорной, знак векторной волновой функции при повороте как на нулевой угол, так и на 2π остается неизменным.

§ 7. Частицы со спином $3/2$

Спин $3/2$ получается при сложении спинов 1 и $1/2$. Ясно поэтому, что уравнение для частицы со спином $3/2$ можно получить, комбинируя уравнения для векторной и спинорной частиц.

В самом деле, уравнение для векторной волновой функции U_μ и дополнительное условие, как мы уже говорили, выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} (p_0^2 - \mathbf{p}^2) U_\mu &= m^2 U_\mu; \\ p_\mu U_\mu &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Допустим теперь, что волновая функция U_μ преобразуется одновременно не только как вектор, но и как спинор. Такие величины называются спин-векторами. U вектора U_μ каждая из компонент — функция, а у спин-вектора каждая из «компонент» — спинор. Допустим, что этот спинор двухкомпонентный, тогда уравнение (7.1) перепишется в виде

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2) u_\mu^s = m^2 u_\mu^s. \quad (7.2)$$

Индексы s и μ указывают на то, что волновая функция является как вектором, так и спинором.

Имея в виду только спинорный характер волновой функции, мы можем повторить те же рассуждения, что и при получении уравнения (6.9) из уравнения (6.1). В результате будем иметь:

$$(\gamma p - m) u_\mu^{s'} = 0 \quad \text{или} \quad (\hat{p} - m) u_\mu^{s'} = 0. \quad (7.3)$$

Индекс s заменен s' для того, чтобы подчеркнуть, что в (7.3) спиновая функция, так же как и в уравнении (6.9), есть четырехкомпонентный спинор. Конечно, в уравнения (6.9) и (7.3) входят одни и те же матрицы γ . Волновая функция $u_\mu^{s'}$ содержит всего 12 независимых компонент (3 векторные \times 4 спинорные). А для описания частицы

со спином $3/2$ надо $4 \times 2 = 8$ компонент. Удвоение компонент происходит потому, что при переходе от (7.2) к (7.3) мы перешли от спинора к биспинору. Чтобы убрать лишние компоненты, наложим на $u_\mu^{s'}$ дополнительное условие

$$\gamma_\mu u_\mu^{s'} = 0, \quad (7.4)$$

которое релятивистски инвариантно. Так как матрицы γ четырехрядны, то условие (7.4) эквивалентно четырем линейным уравнениям для компонент $u_\mu^{s'}$, т. е. условие (7.4) убирает 4 компоненты. Следовательно, если учесть условие (7.4), то в уравнении (7.3) остается 8 независимых компонент; иначе говоря, условие (7.4) убирает все лишние компоненты.

В дальнейшем индекс s' у спин-вектора мы будем опускать. Таким образом, уравнение для частицы со спином $3/2$ запишется так:

$$(\hat{p} - m) u_\mu = 0, \quad (7.5)$$

причем волновая функция u_μ подчиняется условию (7.4). Из последнего условия и (7.5) следует, что

$$p_\mu u_\mu = 0.$$

Так же как и в случае уравнения Дирака (см. § 6), получим уравнение для дираковски сопряженного спин-вектора $\bar{u}_\mu = u_\mu^\dagger \gamma_0$:

$$\bar{u}_\mu (\hat{p} - m) = 0 \quad \text{и} \quad \bar{u}_\mu \gamma_\mu = 0; \quad p_\mu u_\mu = 0.$$

Приведем для примера несколько билинейных комбинаций, образованных из волновых функций барионов (спиноры) и частиц с спином $3/2$ (спин-векторы):

- 1) $\bar{u}_\mu(p_2) u_\nu(p_1)$, $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_5 u_\nu(p_1)$ — релятивистские скаляры;
- 2) $\bar{u}_\mu(p_2) u_\nu(p_1)$, $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_5 u_\nu(p_1)$ — векторы;
- 3) $\bar{u}_\mu(p_2) u_\nu(p_1)$, $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_5 u_\nu(p_1)$, $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_\nu u_\nu(p_1)$, $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_5 \gamma_\nu u_\nu(p_1)$ — тензоры второго ранга и т. д.

§ 8. Частицы со спином 2

Частица со спином 2 описывается пятикомпонентной волновой функцией. Чтобы построить такую волновую функцию, возьмем симметричный тензор второго ранга $B_{\mu\nu}^{(s)}$, удовлетворяющий условию Лоренца (отдельно для каждого значения $\nu = 1, 2, 3, 0$)

$$p_\mu B_{\mu\nu}^{(s)} = 0 \quad (8.1)$$

и условию

$$B_{\mu\mu}^{(s)} = 0. \quad (8.2)$$

Симметричный тензор второго ранга $B_{\mu\nu}^{(s)}$ содержит десять независимых компонент. Требования (8.1) и (8.2) налагают на эти компоненты пять условий, т. е. симметричный тензор $B_{\mu\nu}^{(s)}$, удовлетворяющий условиям (8.1) и (8.2), действительно содержит пять независимых компонент. Для каждой из этих компонент можно написать уравнение (3.2). Следовательно, уравнение для частицы со спином 2 и массой m_t , отличной от нуля, запишется так:

$$(p^2 - m_t^2) B_{\mu\nu}^{(s)} = 0, \quad (8.3)$$

причем

$$p_\mu B_{\mu\nu}^{(s)} = 0 \text{ и } B_{\mu\mu}^{(s)} = 0. \quad (8.4)$$

§ 9. Релятивистские инварианты

Из импульсов частиц и волновых функций можно образовать комбинации, инвариантные относительно преобразований Лоренца. Очевидно, такие комбинации будут релятивистскими скалярами. Приведем несколько примеров релятивистских инвариантов:

1. $\bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) U_\mu(q)$ (барионы и вектоны);
2. $\bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1) U_\mu(q)$ (барионы и вектоны);
3. $\bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \varphi$ (барионы и скалярная частица);
4. $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_\nu u(p_1) U_\nu(q) q_\mu$ (частица со спином 3/2 и вектон);
5. $\bar{u}_\mu(p_2) \gamma_\nu u(p_1) B_{\mu\nu}(q)$ (частица со спином 3/2 и спином 2).

Здесь q, p — четырехмерные импульсы частиц.

Как мы увидим далее, не все из этих комбинаций автоматически инвариантны относительно других преобразований (например, второе и третье выражения меняют знак при инверсии пространства и т. п.).

ГЛАВА 2.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ИНВЕРСИИ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Преобразование физических величин и волновых функций

При физических исследованиях выбирают определенную систему координат. Инвариантность физических законов и соответствующих им уравнений относительно инверсии пространства означает, что законы и уравнения останутся неизменными, если перейти к другой системе координат по правилу $x \rightarrow x' = -x$. При этом временная координата остается неизменной: $x_0 \rightarrow x'_0 = x_0$.

Другими словами, инвариантность относительно пространственной инверсии означает равноправность правого и левого.

Выясним, как преобразуются при пространственной инверсии физические величины.

Компоненты трехмерного импульса частицы \mathbf{p} изменяют знак:

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = -\mathbf{p},$$

так как

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt}.$$

Знак энергии частицы не меняется:

$$E \rightarrow E' = E,$$

так как

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}.$$

Момент количества движения, а также спин знака не меняют:

$$\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}, \quad \sigma \rightarrow \sigma, \quad \text{так как } \mathbf{M} = [\mathbf{x}\mathbf{p}].$$

Используя полученные результаты, легко установить, как преобразуются комбинации, составленные из перечисленных величин. Например, скалярное произведение $(\sigma\mathbf{p})$ меняет знак: $(\sigma\mathbf{p}) \rightarrow -(\sigma\mathbf{p})$, а скалярное произведение вектора σ на векторное произведение двух векторов \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 : $\sigma[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]$ не изменяет знака:

$$\sigma[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2] \rightarrow \sigma[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2].$$

Выясним, как преобразуются при пространственной инверсии волновые функции частиц. При этом важно иметь в виду, что преобразованию подвергаются как компоненты волновой функции, так и ее аргументы.

1. Скалярное поле. При инверсии пространства $p_0 \rightarrow p'_0 = p_0$, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, и волновая функция скалярного поля $\Phi(p_0, \mathbf{p})$ преобразуется с помощью оператора P так:*

$$\Phi'(p_0, -\mathbf{p}) = P\Phi(p_0, \mathbf{p}). \quad (1.1)$$

Так как исходная $\Phi(p)$ и преобразованная $\Phi'(p')$ волновые функции дают одинаковую физическую информацию, то оператор P должен быть унитарным, т. е. $P^\dagger P = 1$. Чтобы найти вид унитарного оператора P , используем уравнение для скалярного поля

$$(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m_s^2)\Phi(p_0, \mathbf{p}) = 0, \quad (1.2)$$

* В общем случае для многокомпонентной волновой функции $\Phi(a)$ и оператора O имеем $\Phi'(a') = O\Phi(a)$ и $\Phi(a) \rightarrow \Phi'(a') = O\Phi(a)$.

которое после инверсии пространства переписывается следующим образом:

$$(p_0^2 - p^2 - m_s^2) P \varphi(p_0, p) = 0.$$

Умножим обе части этого уравнения слева на оператор, обратный P , т. е. на P^{-1} (по определению $PP^{-1} = 1$):

$$P^{-1} (p_0^2 - p^2 - m_s^2) P \varphi(p_0, p) = 0. \quad (1.2')$$

Вследствие инвариантности относительно инверсии пространства, уравнения (1.2) и (1.2') должны совпадать. Поэтому оператор P должен быть таким, чтобы выполнялось равенство

$$P^{-1} (p_0^2 - p^2 - m_s^2) P = p_0^2 - p^2 - m_s^2.$$

Выражения, стоящие справа и между операторами P слева, равны. Поэтому в рассматриваемом случае оператор P вырождается в постоянную комплексную величину. Из условия унитарности, которое в данном случае запишется в виде $P^*P = 1$, следует, что модуль этой комплексной величины должен быть равен единице, т. е. P можно представить так: $P = e^{i\alpha} = \eta_p$, где α — число. Тогда формула (1.1) переписывается следующим образом: $\varphi'(p_0, -p) = \eta_p \varphi(p_0, p)$. Действуя на обе части равенства (1.1) еще раз оператором P , т. е. производя двойную инверсию пространства, получаем

$$P \varphi'(p_0, -p) = \varphi(p_0, p) = P^2 \varphi(p_0, p) = \eta^2 \varphi(p_0, p).$$

Двойная инверсия пространства эквивалентна вращению на 2π . При таком преобразовании волновая функция скалярного поля не меняется (см. гл. 1, § 6). Поэтому из последнего соотношения следует, что $\eta_p^2 = 1$ или $\eta_p = \pm 1$, т. е. возможны два типа волновых функций:

$$P \varphi(p_0, p) = + \varphi(p_0, -p) \text{ и } P \varphi(p_0, p) = - \varphi(p_0, -p).$$

Волновая функция, не меняющая знака при пространственной инверсии, называется скалярной, а изменяющая знак — псевдоскалярной.

Величина η_p называется внутренней пространственной четностью частицы.

В настоящее время экспериментально обнаружено (см. табл. I Дополнения I) восемь псевдоскалярных частиц (их обозначают 0^-): π^- , K^- , η -мезоны и имеются указания на существование нескольких скалярных мезонов (их обозначают 0^+).

Если система состоит из нескольких, например из двух, невзаимодействующих частиц, то волновая функция системы равна произведению волновых функций частиц

$$\varphi(p_1, p_2) = \varphi_1(p_1) \varphi_2(p_2).$$

Произведя пространственную инверсию, получим

$$\begin{aligned} P\varphi(\rho_1, \rho_2) &= P\varphi_1(\rho_1)\varphi_2(\rho_2) = \eta_p^{(1)}\varphi_1(\rho_1)\eta_p^{(2)}\varphi_2(\rho_2) = \\ &= \eta_p^{(1)}\eta_p^{(2)}\varphi_1(\rho_1)\varphi_2(\rho_2) = \eta_p^{(1)}\eta_p^{(2)}\varphi(\rho_1, \rho_2), \end{aligned}$$

т. е. четность η_p -системы, состоящей из двух частиц, равна произведению четностей этих частиц: $\eta_p = \eta_p^{(1)}\eta_p^{(2)}$. Вследствие этого четность называют мультипликативным квантовым числом (в отличие от аддитивного квантового числа, примером которого является момент количества движения).

Аналогичным образом можно показать, что четность η_p системы, состоящей из нескольких частиц, равна произведению всех пространственных внутренних четностей частиц.

Определим, какова четность состояния частицы с заданным моментом количества движения l и спином, равным нулю. Как мы уже говорили (гл. 1 § 1), такие состояния описываются шаровой функцией $Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}$. Пространственная инверсия для сферических координат сводится к преобразованию $r \rightarrow r$, $\theta \rightarrow \pi - \theta$, $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$. При замене $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ множитель $e^{im\varphi}$ умножается на $(-1)^m$, а при замене $\theta \rightarrow \pi - \theta$ полином $P_l^m(\cos\theta)$ переходит в $P_l^m(-\cos\theta) = (-1)^{l-m}P_l^m(\cos\theta)$. Поэтому $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ умножается на $(-1)^l$ т. е. четность состояния с данным l есть $(-1)^l$. Все состояния с четным l четны, а с нечетным l — нечетны.

Если спин s частицы отличен от нуля, то ее пространственная четность по-прежнему определяется так: $(-1)^l$, причем $l = j + s$, $j + s - 1 \dots |j - s + 1|$, $|j - s|$, где j — полный момент частицы.

Имеет смысл говорить о результирующей пространственной четности частицы, равной произведению ее внутренней и орбитальной пространственной четности.

Так как внутренняя четность π -, K -, η -мезонов отрицательна, то результирующая четность системы, состоящей, например, из двух π -мезонов в s -состоянии ($l=0$), положительна $(-1)(-1)(-1)^0 = +1$, четность той же системы в p -состоянии ($l=1$) отрицательна: $(-1)(-1)(-1)^1 = -1$ и т. д.

Если имеет место инвариантность относительно пространственной инверсии, то относительно этого преобразования гамильтониан системы H также инвариантен: $P^{-1}HP = H$ или $RH = HR$, т. е. гамильтониан системы H коммутирует с оператором пространственной инверсии P . Это означает, что соответствующая оператору P пространственная четность сохраняется. Иначе говоря, если имеет место инвариантность относительно пространственной инверсии, то результирующая пространственная четность системы до реакции и после реакции должна быть одной и той же. Так формулируется закон сохранения пространственной четности. Этот закон приводит к тому, что некоторые реакции оказываются запрещенными (прави-

ла отбора, обусловленные законом сохранения пространственной четности). Например, процесс рассеяния π -мезонов на π -мезонах $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$ разрешен, если все мезоны одновременно либо скалярные, либо псевдоскалярные, и запрещен, если один из мезонов скалярный, а три остальные — псевдоскалярные. В случае, когда все мезоны, например, псевдоскалярные, внутренние четности начальной системы $(-1)(-1) = +1$ и конечной системы $(1-)(-1) = +1$ равны. Согласно закону сохранения момента количества движения, орбитальные моменты начальной l и конечной l' системы должны быть одинаковы (т. е. $l = l'$). Поэтому результирующая четность начальной системы и конечной системы в рассматриваемом случае одинакова и, следовательно, процесс разрешен. Этого не будет, если, например, в начальном состоянии взять скалярный и псевдоскалярный мезоны.

Аналогичным образом можно установить, что покоящийся ($l = 0$) псевдоскалярный мезон не может распадаться на два псевдоскалярных мезона в s -состоянии ($l = 0$).

2. Векторное поле. Чтобы выяснить, как преобразуется волновая функция вектона при инверсии пространства, рассмотрим уравнение для векторного поля $U_\mu(q_0, \mathbf{q})$

$$(q^2 - m_\nu^2) U_\mu(q_0, \mathbf{q}) = 0.$$

Выделив из этого уравнения четвертую компоненту $U_0(q)$, получим для пространственной части $\mathbf{U}(q_0, \mathbf{q})$

$$(q^2 - m_\nu^2) \mathbf{U}(q_0, \mathbf{q}) = 0.$$

Повторяя те же рассуждения, которые были проведены для скалярной частицы, найдем, что при инверсии пространства волновая функция вектона $U_\mu(q_0, \mathbf{q})$ преобразуется так:

$$U_0(q_0, \mathbf{q}) \rightarrow U'_0(q_0, -\mathbf{q}) = U_0(q_0, \mathbf{q}), \quad \mathbf{U}(q_0, \mathbf{q}) \rightarrow \mathbf{U}'(q_0, -\mathbf{q}) = \eta_p \mathbf{U}(q_0, \mathbf{q})$$

или

$$\xi \rightarrow \xi' = \eta_p \xi; \quad \xi_0 \rightarrow \xi'_0 = \xi_0,$$

т. е. при пространственной инверсии возможны векторные ($\eta_p = -1$) и псевдовекторные ($\eta_p = +1$) частицы.

В настоящее время экспериментально обнаружено (см. табл. I) девять векторных частиц 1^- : ω , ϕ , ρ , K^* -мезоны и девять псевдовекторных мезонов 1^+ : A_1 , D , E , K_{1170} .

Определим, какова четность состояния вектона с заданным полным моментом j и поляризацией λ . Согласно общему правилу, четность определяется орбитальным моментом

$$PY_{jm_j}(\theta, \varphi) = PY_{jLm_j}(\theta, \varphi) = (-1)^{L+1} Y_{jLm_j}(\theta, \varphi),$$

где L — орбитальный момент вектона. Единица в показателе появилась из-за того, что внутренняя четность вектона отрицательна.

Вектоны с поперечной и продольной поляризацией, описываемые выражениями (4.16) гл. 1, преобразуются при пространственной инверсии следующим образом:

$$\begin{cases} PY_{jm_j}^{(+1)} = (-1)^{L+1} Y_{jLm_j}(\cos \theta) = (-1)^{j \pm 1 + 1} Y_{jLm_j}(\cos \theta), \\ PY_{jm_j}^{(-1)} = (-1)^{L+1} Y_{jLm_j}(\cos \theta) = (-1)^{j \pm 1 + 1} Y_{jLm_j}(\cos \theta); \text{ так} \\ \text{как в обоих случаях } L = j \pm 1; \end{cases}$$

$$PY_{jm_j}^{(0)} = (-1)^{L+1} Y_{jLm_j}(\cos \theta) = (-1)^{j+1} Y_{jLm_j}, \text{ так как в этом случае } L = j$$

или сокращенно

$$PY_{jm_j}^{(\lambda)} = (-1)^{j+1+\lambda} Y_{jm_j}^{(\lambda)}, \quad \lambda = +1, -1, 0.$$

Как видно, вектон удобно характеризовать полным, а не орбитальным моментом L .

Таким образом, в зависимости от вида поляризации существует два «сорта» вектонов с данным полным моментом j : а) описываемых волновыми функциями с четностью $(-1)^j$ — к ним относятся продольно ($\lambda = -1$) и один из поперечных поляризованных ($\lambda = +1$) вектонов; б) описываемых волновыми функциями с четностью $(-1)^{j+1}$ — к ним относится другой поперечно, поляризованный ($\lambda = 0$) вектон.

Вектоны с $\lambda = 0$ называют магнитными, а с $\lambda = \pm 1$ — электрическими (продольными, если $\lambda = -1$, и поперечными, если $\lambda = +1$).

Как видно, при определении электрических и магнитных мультиполей учтено, что внутренняя пространственная четность вектора отрицательна (в случае псевдовектона электрические и магнитные мультиполи меняются ролями).

Значение полного момента j определяет величину мультиполя; состояния с $j = 1$ называют дипольными, с $j = 2$ — квадрупольными и т. д. Чтобы различить поперечные электрические, магнитные и продольные электрические мультиполи, употребляют следующие обозначения: $E1, M1, L1$ — для диполей; $E2, M2, L2$ — для квадруполей и т. д.

Пользуясь законом сохранения четности и момента количества движения, можно установить некоторые правила отбора. Рассмотрим процесс образования псевдоскалярных π -мезонов на нуклонах N виртуальными фотонами (или вектонами) V : $V + N \rightarrow N' + \pi$. Предположим, что четность нуклона положительна. Тогда четность начальной системы равна $(-1)^{j+1+\lambda}$, а четность конечной системы, характеризуемой относительным орбитальным моментом l' ,

будет $(-1)^{l'+1}$ (единица в показателе степени появилась потому, что мезон псевдоскалярный). Согласно закону сохранения четности,

$$(-1)^{j+1+\lambda} = (-1)^{l'+1}. \quad (1.3)$$

Отсюда видно, что магнитный диполь ($j = 1, \lambda = 0$) может образовывать мезоны в состояниях $l' = 1, 3, 5$ и т. д. Полный момент начального состояния равен $1 \pm 1/2$, т. е. либо $1/2$, либо $3/2$. К такому же значению полного момента в конечном состоянии приведет лишь $l' = 1$. Иначе говоря, из законов сохранения полного момента и четности следует, что магнитный диполь может образовать мезоны лишь в p -состоянии ($l' = 1$).

Согласно (1.3), электрический поперечный диполь ($j = 1, \lambda = 1$) может образовывать мезоны в состояниях с $l' = 0, 2, 4$ и т. д. Однако закон сохранения момента количества движения допускает лишь значение $l' = 0$, когда полный момент начальной и конечной систем равен $1/2$, и $l' = 2$, когда полный момент равен $3/2$. Другими словами, электрический поперечный диполь может образовывать мезоны лишь в s - и d -состояниях. Все сказанное об электрических поперечных диполях в одной и той же мере применимо к продольному электрическому диполю ($j = 1, \lambda = -1$).

Рассуждая аналогичным образом, получим, что электрический квадруполь ($j = 2, \lambda = 1$) может образовывать мезоны в p -состоянии (когда полный момент системы равен $3/2$) и в состоянии с $l' = 3$ (когда полный момент системы равен $5/2$).

Если ограничиться случаем, когда мезоны образуются лишь в s - и p -состояниях, то необходимо учесть магнитный диполь, а также электрические (поперечные и продольные) диполь и квадруполь.

3. Электромагнитное поле. Принципиальным отличием реального фотона от виртуального (или вектона) является отсутствие продольной поляризации. Поэтому если в результатах, полученных для вектона, пренебречь продольной поляризацией, то получим результаты для фотона. В частности, существует два «сорта» фотонов, оба с поперечной поляризацией — электрические ($\lambda = +1$) и магнитные ($\lambda = 0$), которые описываются шаровыми векторами $Y_{jm_j}^{(+1)}$ и $Y_{jm_j}^{(0)}$.

Из совокупности опытных данных следует, что волновая функция фотона $A_\mu(k)$ преобразуется как четырехмерный вектор:

$$A_0(k_0, \mathbf{k}) \rightarrow A'_0(k_0, -\mathbf{k}) = A_0(k_0, \mathbf{k}), \quad \mathbf{A}(k_0, \mathbf{k}) \rightarrow \mathbf{A}'(k_0, -\mathbf{k}) = -\mathbf{A}(k_0, \mathbf{k})$$

или

$$\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon'_0 = \varepsilon_0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}' = -\boldsymbol{\varepsilon}.$$

4. Барийное поле. Чтобы выяснить, как преобразуются при инверсии пространства спиноры u , рассмотрим уравнение Дирака

$$(\hat{p} - M) u(p_0, \mathbf{p}) = 0$$

или

$$(E\gamma_0 - p\gamma - M)u(p_0, p) = 0. \quad (1.4)$$

При инверсии пространства

$$p_0 \rightarrow p'_0 = p_0, \quad p \rightarrow p' = -p \quad \text{и} \quad u'(p_0, -p) = Pu(p_0, p).$$

Поэтому (1.4) после инверсии пространства переписывается так:

$$(E\gamma_0 + p\gamma - M)Pu(p_0, p) = 0. \quad (1.5)$$

Найдем вид унитарного оператора P , исходя из того, что вследствие инвариантности относительно инверсии пространства, уравнения (1.4) и (1.5) должны совпадать (причем матрицы γ остаются неизменными). Умножим обе части уравнения (1.5) слева на оператор, обратный P , т. е. на P^{-1} (при этом $P^{-1}P = 1$):

$$P^{-1}(E\gamma_0 + p\gamma - M)Pu(p_0, p) = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.4) и (1.6) совпадут, если

$$P^{-1}(E\gamma_0 + p\gamma - M)P = (E\gamma_0 - p\gamma - M).$$

Таким свойством обладает оператор $P = \eta_p \gamma_0$ (где η_p — произвольное число, но $|\eta_p|^2 = 1$):

$$\gamma_0^{-1}(E\gamma_0 + p\gamma - M)\gamma_0 = \gamma_0^{-1}\gamma_0(E\gamma_0 - p\gamma - M) = E\gamma_0 - p\gamma - M.$$

Следовательно,

$$u'(p') = Pu(p) = \eta_p \gamma_0 u(p). \quad (1.7)$$

Чтобы выяснить, как преобразуется при инверсии пространства сопряженный спинор $\bar{u}'(p)$, возьмем эрмитово сопряженное для $u'(p') = \eta_p \gamma_0 u(p)$, что дает

$$u'^+(p') = \eta_p^* u^+(p) \gamma_0^+ = \eta_p^* u^+(p) \gamma_0.$$

Умножив это выражение справа на γ_0 , получим

$$u'^+(p') \gamma_0 = \eta_p^* u^+(p) \gamma_0 \gamma_0$$

или

$$\bar{u}'(p') = \eta_p^* \bar{u}(p) \gamma_0. \quad (1.8)$$

Выясним, какова внутренняя четность бариона η_p . Подействуем на обе части равенства (1.7) еще раз оператором P :

$$P^2 u(p) = \eta_p \gamma_0 Pu(p)$$

или, имея в виду (1.7),

$$u(p) = |\eta_p|^2 \gamma_0 \gamma_0 u(p) = |\eta_p|^2 u(p). \quad (1.9)$$

Произведенная нами двойная инверсия пространства эквивалентна вращению на 2π . При таком преобразовании спинорная волновая функция определена лишь с точностью до знака (см. гл. 1, § 6). Поэтому из (1.9) следует, что

$$|\eta_p|^2 = \pm 1. \quad (1.10)$$

Следовательно, внутренняя четность бариона η_p определена только с точностью до знака. Обычно ее выбирают положительной и обозначают барионы так: $\frac{1}{2}^+$.

Рассмотрим, как преобразуются при инверсии пространства билинейные комбинации спиноров [см. гл. 1, формулы (6.34) и (6.35)]:

$$\bar{u}(p_2) O u(p_1). \quad (1.11)$$

При инверсии пространства

$$\bar{u}(p_2) O u(p_1) \rightarrow \bar{u}'(p'_2) O u'(p'_1).$$

Подставляя сюда (1.7) и (1.8), имеем

$$\bar{u}(p_2) O u(p_1) \rightarrow \bar{u}'(p'_2) O u'(p'_1) = \bar{u}(p_2) \gamma_0 O \gamma_0 u(p_1).$$

В частности,

$$а) \bar{u}(p_2) u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) \gamma_0 \gamma_0 u(p_1) = \bar{u}(p_2) u(p_1),$$

т. е. величина $\bar{u}(p_2) u(p_1)$ — скаляр,

$$б) \bar{u} \gamma_5 u \rightarrow \bar{u} \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 u = -\bar{u} \gamma_0 \gamma_0 \gamma_5 u = -\bar{u} \gamma_5 u,$$

так как $\gamma_0 \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_0$, т. е. величина $\bar{u} \gamma_5 u$ — псевдоскаляр,

$$в) \bar{u} \gamma_\mu u \rightarrow \bar{u} \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 u = \begin{cases} -\bar{u} \gamma_\mu u & \text{для } \mu = 1, 2, 3 \\ +\bar{u} \gamma_\mu u & \text{для } \mu = 0, \end{cases}$$

т. е. величина $\bar{u} \gamma_\mu u$ — вектор,

$$г) \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u \rightarrow \bar{u} \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_0 u = \begin{cases} +\bar{u} \gamma_\mu u & \text{для } \mu = 1, 2, 3 \\ -\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u & \text{для } \mu = 0, \end{cases}$$

т. е. величина $\bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 u$ — псевдовектор.

Таким образом, величины, неразличимые с точки зрения релятивистской инвариантности (например, $\bar{u} u$ и $\bar{u} \gamma_5 u$), становятся различными, если учесть еще инвариантность относительно инверсии пространства.

5. Частицы со спином $3/2$. Волновая функция $u_\mu^s(p)$ частицы со спином $3/2$ является как вектором (индекс μ), так и спинором (индекс s). Поэтому функция $u_\mu^s(p)$ при инверсии пространства будет преобразовываться как вектор по индексу μ :

$$\begin{aligned} u_0^s(p_0, p) &\rightarrow u_0'^s(p_0, -p) = \\ &= u_0^s(p_0, p), \mathbf{u}^s(p_0, p) \rightarrow \mathbf{u}'^s(p_0, -p) = \\ &= \eta_p \mathbf{u}^s(p_0, p) \end{aligned}$$

и как спинор — по индексу s :

$$u_\mu^s \rightarrow u_\mu'^s = \eta_p \gamma_0 u_\mu^s \quad \text{и} \quad \bar{u}_\mu^s \rightarrow \bar{u}_\mu'^s = \eta_p^* \bar{u}_\mu^s \gamma_0.$$

Так как внутренняя четность вектора отрицательна, а бариона — положительна, то внутренняя четность спин-вектора будет отрицательной, а псевдоспин-вектора — положительной. Иначе говоря, $\frac{3^-}{2}$ -частицы описываются спин-вектором $u_\mu(p)$, а $\frac{3^+}{2}$ -частицы — псевдоспин-вектором $\tilde{u}_\mu(p)$. Экспериментально обнаружены как $\frac{3^-}{2}$, так и $\frac{3^+}{2}$ -частицы (см. табл. 1 Дополнения I).

Приведем для примера несколько билинейных комбинаций, образованных из волновых функций бариона и $3/2$ -частицы:

- 1) $u_\mu(p_2) u_\mu(p_1)$ — скаляр,
- 2) $u_\mu(p_2) \gamma_5 u_\mu(p_1)$ — псевдоскаляр,
- 3) $u_\mu(p_2) u(p_1)$ — вектор,
- 4) $u_\mu(p_2) \gamma_5 u(p_1)$ — псевдовектор,
- 5) $u_\mu(p_2) u_\nu(p_1)$ — тензор второго ранга и т. д.

§ 2. Дуальные величины

Как мы видели, при пространственной инверсии наряду с величинами (скаляр, вектор и т. д.) существуют псевдовеличины (псевдоскаляр, псевдовектор и т. д.). В связи с этим возникает задача построения псевдовеличины, если задана величина, и наоборот, — построения величины, если задана псевдовеличина, или, как говорят, задача построения по данной величине ее дуальной. Эта задача может быть решена с помощью полностью антисимметричного

тензора четвертого ранга $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, обладающего следующими свойствами:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 0, & \text{если среди значков } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ имеются одинаковые;} \\ 1, & \text{если значки } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ можно расположить в порядке } 1, 2, 3, 0 \text{ посредством четного числа перестановок;} \\ -1, & \text{если значки } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ можно расположить в порядке } 1, 2, 3, 0 \text{ посредством нечетного числа перестановок.} \end{cases}$$

Например, $\tilde{\varepsilon}_{1210} = 0$, $\tilde{\varepsilon}_{3201} = +1$, $\tilde{\varepsilon}_{3102} = -1$.

При вращениях $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ преобразуется как тензор. Однако при инверсии пространства $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, по определению, не меняет знака, в то время как соответствующий истинный тензор должен менять знак на обратный. Иначе говоря, $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — псевдотензор. В дальнейшем над псевдовеличинами мы будем ставить знак тильда \sim .

С помощью символа $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и четырехмерных величин можно построить псевдовеличины:

а) из тензора четвертого ранга $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — псевдоскаляр \tilde{a}

$$\tilde{a} = \frac{1}{24} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha\beta\gamma\delta};$$

б) из тензора третьего ранга $a_{\beta\gamma\delta}$ — псевдовектор \tilde{a}_α

$$\tilde{a}_\alpha = \frac{1}{6} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\beta\gamma\delta};$$

в) из тензора второго ранга $a_{\gamma\delta}$ — псевдотензор второго ранга $\tilde{a}_{\alpha\beta}$

$$\tilde{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\gamma\delta};$$

г) из вектора a_δ — псевдотензор третьего ранга $\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma}$

$$\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a_\delta;$$

д) из скаляра a — псевдотензор четвертого ранга $\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}$

$$\tilde{a}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} a.$$

Аналогично запишутся обратные формулы для получения величин из псевдовеличин.

Произведение величины на псевдовеличину дает псевдовеличину, произведение двух псевдовеличин дает величину. Например, если задан 4-вектор p_δ , то с его помощью можно образовать псевдотензор третьего ранга

$$\tilde{p}_{\alpha\beta\gamma} = \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} p_\delta.$$

Из тензора четвертого ранга, образованного из векторов p, q, r, ξ , т. е. $p_\alpha q_\beta r_\gamma \xi_\delta$, можно образовать псевдоскаляр

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} p_\alpha q_\beta r_\gamma \xi_\delta.$$

Как мы уже видели, билинейная комбинация спиноров переходит в дуальную, если между спинорами добавить матрицу γ_5 , например, $\bar{u}\gamma_\mu u$ — вектор, $\bar{u}\gamma_\mu \gamma_5 u$ — псевдовектор и т. п.

Напомним, что произведение двух тензоров $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta}$ и $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}$ равно

$$\begin{aligned} -\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta} \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = & (\mu\alpha) [(\nu\beta) (\rho\lambda) (\sigma\delta) + (\rho\beta) (\sigma\lambda) (\nu\delta) + (\sigma\beta) \times \\ & \times (\nu\lambda) (\rho\delta) - (\rho\beta) (\nu\lambda) (\sigma\delta) - (\nu\beta) (\sigma\lambda) (\rho\delta) - (\sigma\beta) \times \\ & \times (\rho\lambda) (\nu\delta)] - (\mu\beta) [(\nu\alpha) (\rho\lambda) (\sigma\delta) + (\rho\alpha) (\sigma\lambda) (\nu\delta) + \\ & + (\sigma\alpha) (\nu\lambda) (\rho\delta) - (\rho\alpha) (\nu\lambda) (\sigma\delta) - (\nu\alpha) (\sigma\lambda) (\rho\delta) - (\sigma\alpha) (\rho\lambda) (\nu\delta)] + \\ & + (\mu\lambda) [(\nu\alpha) (\rho\beta) (\sigma\delta) + (\rho\alpha) (\sigma\beta) (\nu\delta) + (\sigma\lambda) (\nu\beta) (\rho\delta) - (\nu\beta) (\rho\alpha) \times \\ & \times (\sigma\delta) - (\sigma\alpha) (\rho\beta) (\nu\delta) - (\sigma\beta) (\rho\delta) (\nu\alpha)] - (\mu\delta) [(\nu\alpha) (\rho\beta) (\sigma\lambda) + \\ & + (\rho\alpha) (\sigma\beta) (\nu\lambda) + (\sigma\alpha) (\nu\beta) (\rho\lambda) - (\nu\beta) (\rho\alpha) (\sigma\lambda) - (\sigma\alpha) (\rho\beta) (\nu\lambda) - \\ & - (\sigma\beta) (\rho\lambda) (\nu\alpha)], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $(\mu\nu) = g_{\mu\nu}$ и т. д.

Суммирование по одному, двум, трем и четырем индексам дает:

$$\begin{aligned} -\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\nu\beta\sigma} = & (\beta\nu) (\lambda\rho) (\delta\sigma) + (\beta\rho) (\lambda\sigma) (\delta\nu) + (\beta\sigma) \times \\ & \times (\lambda\nu) (\delta\rho) - (\beta\rho) (\lambda\nu) (\delta\sigma) - (\beta\nu) (\lambda\sigma) (\delta\rho) - (\beta\sigma) (\lambda\rho) (\delta\nu); \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\lambda\delta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\rho\sigma} = 2 [(\lambda\rho) (\delta\sigma) - (\lambda\sigma) (\delta\rho)]; \quad (2.3)$$

$$-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\sigma} = 6 (\delta\sigma);$$

$$-\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 24.$$

§ 3. Инварианты относительно инверсии пространства

Из импульсов частиц и их волновых функций можно образовать комбинации, инвариантные относительно инверсии пространства.

Приведем несколько примеров таких инвариантов:

$$1. \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \tilde{\Phi}(q) \quad \left(\text{барион } \frac{1}{2}^+ \text{ и псевдоскалярная частица } 0^- \right).$$

2. $\bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) U_\mu(q)$ (барион $\frac{1}{2}^+$ и векторная частица 1^-).

3. $q_\nu \bar{u}_\nu(p_2) \gamma_\mu u(p_1) U_\mu(q)$ (частицы $\frac{1}{2}^+$, $\frac{3}{2}^+$ и 1^-).

4. $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} k_\mu p_\nu U_\alpha(k) B_{\beta\gamma}(\rho) q_\gamma \tilde{\Phi}^*(q)$ (частицы со спином 2^+ , 1^- , 0^-).

5. $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\delta} q_{1\nu} q_{2\alpha} k_\delta U_\mu^*(k) \Phi(q_1) \tilde{\Phi}(q_2) \Phi(q_3)$ (частица 1^- и три частицы 0^-).

Здесь k, p, q — 4-импульсы частиц.

ГЛАВА 3.

ИНВАРИАНТНАЯ СПИНОВАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУД И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ

§ 1. Метод построения амплитуды

Рассмотрим процесс

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (1.1)$$

в котором две стабильные частицы сталкиваются и превращаются в две другие частицы. Такой процесс можно изобразить схемой, представленной на рис. 3.1, причем p_1, p_2, p_3, p_4 — четырехмерные векторы энергии — импульса частиц, а m_1, m_2, m_3, m_4 — их массы.

Согласно определению, выражение для амплитуды или матричного элемента S -матрицы процесса (1.1) записывается так*:

$$S_{nm} = \Phi_n^{f+} S \Phi_m^i = \langle \Phi_n^f | S | \Phi_m^i \rangle. \quad (1.2)$$

Здесь Φ_m^i и Φ_n^f — волновые функции начального и конечного состояний реакции (1.1), а S — функция только четырехмерных импульсов p и поляризаций ε и ξ частиц, если в реакцию (1.1) не входят фермионы; если же в реакцию (1.1) входят фермионы, то S будет содержать еще матрицы γ .

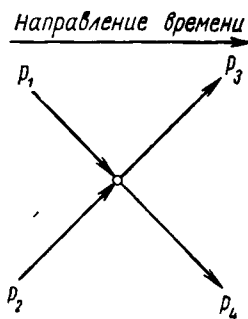


Рис. 3.1. Схема процесса с участием четырех частиц.

* В § 1—3 мы будем выписывать выражения для амплитуд без учета нормировки волновых функций; нормировку мы учтем в § 4.

Если все взаимодействия «выключены», то S -матрица рассеяния будет единичной, так как при этом начальные и конечные состояния одинаковы. Поэтому S -матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S = I + iT. \quad (1.2')$$

Матрица T отлична от нуля лишь в том случае, когда происходит рассеяние.

Если учесть закон сохранения энергии—импульса

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \quad (1.3)$$

то выражение для матричного элемента оператора T можно записать и так:

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) M_{fi}.$$

В дальнейшем мы будем называть амплитудой процесса величину M_{fi} и индексы f и i будем для краткости опускать.

Выясним, от какого числа независимых переменных зависит амплитуда процесса (1.1). Из закона сохранения энергии — импульса (1.3) следует, что независимыми являются лишь три вектора энергии — импульса. Кроме того,

$$p_1^2 = m_1^2, \quad p_2^2 = m_2^2, \quad p_3^2 = m_3^2, \quad p_4^2 = m_4^2. \quad (1.4)$$

Из релятивистской инвариантности следует, что амплитуда может зависеть лишь от релятивистских инвариантов, т. е. от скалярных произведений векторов p_1, p_2, p_3, p_4 . Всего различных попарных произведений из этих векторов можно образовать десять. Но четыре из них, согласно (1.4), — постоянные, а не переменные величины. Кроме того, умножая (1.3) последовательно на p_1, p_2, p_3, p_4 , получим еще четыре соотношения между скалярными произведениями векторов. Таким образом, амплитуда изучаемого процесса зависит от двух инвариантов. Обычно в качестве инвариантов выбирают такие:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2; \quad (1.5)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2. \quad (1.6)$$

Поэтому амплитуду мы будем записывать в виде $M(s, t)$. Так как частицы в начальном и конечном состояниях — свободные, то волновые функции начального или конечного состояния представляют собой произведение волновых функций частиц, образующих начальную или конечную систему реакции (1.1):

$$\Phi_i = \Phi(p_1) \Phi(p_2), \quad \Phi_f = \Phi(p_3) \Phi(p_4).$$

Поэтому выражение для амплитуды процесса выглядит так:

$$M(s, t) = \Phi^+(p_4) \Phi^+(p_3) [S - I] \Phi(p_2) \Phi(p_1). \quad (1.7)$$

Найдем такие выражения для амплитуд процесса (1.1), которые удовлетворяют требованиям релятивистской, градиентной инвариантности и инвариантности относительно инверсии пространства. Для этого надо построить из матриц γ (в случае наличия фермионов), а также из волновых функций Φ , векторов энергии-импульса p и поляризаций ε , ξ частиц, которые входят в реакцию (1.1), выражения, инвариантные относительно указанных преобразований. Такие выражения будут скалярами, так как именно скаляры удовлетворяют одновременно требованию релятивистской инвариантности и инвариантности относительно инверсии пространства. Если в процессе участвуют реальные фотоны, структура каждого члена должна быть такой, чтобы он обращался в нуль при замене поляризации фотона на его 4-вектор энергии-импульса (см. гл. 1, § 5).

Рассмотрим в качестве примера процесс фотообразования π -мезонов на нуклонах:

$$\gamma + N_1 \rightarrow N_2 + \pi. \quad (1.8)$$

Пусть p_1, p_2, k, q — четырехмерные импульсы начального и конечного нуклонов, фотона и π -мезона, а $u(p_1), u(p_2), A_\mu(k)$ и $\tilde{\varphi}(q)$ — волновые функции начального и конечного фермионов, фотона и π -мезона. Вследствие закона сохранения (1.3) независимых будет три импульса, в качестве которых выберем k, q и p_1 . Согласно (1.7), амплитуда рассматриваемого процесса будет такой:

$$M(s, t) = \overbrace{\{\bar{u}(p_2) O u(p_1)\}_\mu} A_\mu \tilde{\varphi}^*(q).$$

Так как $\tilde{\varphi}(q)$ — псевдоскаляр, то, чтобы амплитуда в целом была скаляром, надо $\tilde{\varphi}(q)$ умножить на псевдоскаляры $(\bar{u}(p_2) O u)_\mu A_\mu(k)$ или $\{\bar{u}(p_2) O u(p_1)\}_\mu \varepsilon_\mu$, которые можно образовать из волновых функций фермионов, вектора поляризации фотона и независимых импульсов частиц. Кроме того, комбинации должны быть градиентно инвариантными, так как в процессе участвуют реальные фотоны. Из перечисленных величин можно образовать довольно большое число псевдоскаляров, например

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \varepsilon) u(p_1); \quad \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \varepsilon) (p_1 \gamma) u(p_1); \\ & \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma k) (\gamma \varepsilon) u(p_1); \quad \bar{u}(p_2) \gamma_5 (q \gamma) (\gamma \varepsilon) u(p_1); \\ & \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma \varepsilon) u(p_1); \quad \bar{u}(p_2) \gamma_5 (p_1 \varepsilon) u(p_1) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $(\gamma k) = \gamma_\mu k_\mu$; $(\gamma \varepsilon) = \gamma_\mu \varepsilon_\mu$ и т. д. — скалярные произведения. Однако вторая комбинация сводится к первой:

$$\bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \varepsilon) (\rho_1 \gamma) u(\rho_1) = M \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1),$$

так как, согласно уравнению Дирака,

$$\rho_1 \gamma u(\rho_1) = M u(\rho_1).$$

Третье выражение обращается в нуль, так как

$$(\gamma k) (\gamma k) = k^2 = 0,$$

т. е. в амплитуду может входить лишь первая степень γk .

Так как $q = \rho_1 + k - \rho_2$, то для четвертой комбинации в (1.9) найдем

$$\begin{aligned} \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (k \gamma + \rho_1 \gamma - \rho_2 \gamma) \gamma \varepsilon u(\rho_1) &= \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (k \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) + \\ &+ \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_1 \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) - \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_2 \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1). \end{aligned}$$

Для того чтобы можно было воспользоваться уравнением Дирака, прокоммутируем во втором слагаемом операторы $\rho_1 \gamma$ и $\gamma \varepsilon$,

а в третьем — операторы γ_5 и $\rho_2 \gamma$, имея в виду, что $(\gamma a) (\gamma b) = -(\gamma b) (\gamma a) + ab$:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_1 \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) &= \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 [(-\gamma \varepsilon) (\rho_1 \gamma) + \rho_1 \varepsilon] u(\rho_1) = \\ &= -M \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) + \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_1 \varepsilon) u(\rho_1), \end{aligned}$$

так как $\rho_1 \gamma u(\rho_1) = M u(\rho_1)$; кроме того,

$$\begin{aligned} -\bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_2 \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) &= +\bar{u}(\rho_2) (\rho_2 \gamma) \gamma_5 (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) = \\ &= M \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\gamma \varepsilon) u(\rho_1), \end{aligned}$$

ибо $\bar{u}(\rho_2) \rho_2 \gamma = M \bar{u}(\rho_2)$.

Окончательно для четвертой комбинации в (1.9) получим

$$\begin{aligned} \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (q \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) &= \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (k \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) + \\ &+ \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_1 \varepsilon) u(\rho_1) = \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (k \gamma) (\gamma \varepsilon) u(\rho_1) + \\ &+ \bar{u}(\rho_2) \gamma_5 (\rho_1 \varepsilon) u(\rho_1), \end{aligned}$$

т. е. эта комбинация сводится к первой и последней в (1.9).

Как видно, возможны два типа комбинаций: сводящиеся и не сводящиеся к другим. Естественно, в выражение для амплитуды должны входить те комбинации, которые не сводятся к другим.

Найдем их для рассматриваемой реакции. Из разобранных примеров ясно, что такими комбинациями не могут быть $p_1\gamma$, $p_2\gamma$, $q\gamma$ и может быть $k\gamma$. Далее. Искомые выражения должны содержать ε в первой степени. Умножив обе части выражения $p_1 + k = p_2 + q$ на ε , найдем $p_1\varepsilon + k\varepsilon = p_2\varepsilon + q\varepsilon$, т. е. имеется лишь три независимых скалярных произведения импульса частиц на поляризацию фотона ε ; четвертым будет $\gamma\varepsilon$.

Итак, можно образовать следующие независимые комбинации, содержащие ε :

$$\begin{array}{cccc} p_1\varepsilon, & q\varepsilon, & k\varepsilon, & \gamma\varepsilon, \\ (k\gamma)(p_1\varepsilon), & (k\gamma)(q\varepsilon), & (k\gamma)(k\varepsilon), & (k\gamma)(\gamma\varepsilon). \end{array}$$

Две из них, $k\varepsilon$ и $(k\gamma)(k\varepsilon)$, обращаются в нуль, так как для фотона, согласно условию Лоренца, $k\varepsilon = 0$. Окончательно релятивистски инвариантное и инвариантное относительно инверсии пространства выражение для амплитуды рассматриваемого процесса запишется в виде

$$\begin{aligned} M(s, t) = & \bar{u}(p_2) [f_1(s, t) \gamma_5(p_1\varepsilon) + f_2(s, t) \gamma_5(\gamma\varepsilon) + \\ & + f_3(s, t) \gamma_5(q\varepsilon) + f_4(s, t) \gamma_5(\gamma k)(p_1\varepsilon) + f_5(s, t) \gamma_5(\gamma\varepsilon)(\gamma k) + \\ & + f_6(s, t) \gamma_5(\gamma k)(q\varepsilon)] u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь $f_i(s, t)$ — произвольные инвариантные функции переменных s и t .

Чтобы амплитуда была градиентно инвариантной, при замене $\varepsilon \rightarrow k$ она должна обращаться в нуль:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2) [f_1(s, t) \gamma_5(p_1 k) + f_2(s, t) \gamma_5(\gamma k) + \\ & + f_3(s, t) \gamma_5(qk) + f_4(s, t) \gamma_5(\gamma k)(p_1 k) + f_5(s, t) \gamma_5 \times \\ & \times (\gamma k)(\gamma k) + f_6(s, t) \gamma_5(\gamma k)(qk)] u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q) = 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Это выражение равно нулю, если в нуль обращаются порознь слагаемые, не содержащие матрицы γk и содержащие их (так как эти слагаемые не могут сократиться друг с другом):

$$f_1(s, t)(pk) + f_3(s, t)(qk) = 0; \quad (1.12)$$

$$f_2(s, t) + f_4(s, t)(p_1, k) + f_6(s, t)(qk) = 0. \quad (1.12')$$

Находя из (1.12) выражение для $f_3(s, t)$, а из (1.12') — для $f_2(s, t)$ и подставляя результаты (в 1.10), получаем выражение для амплитуды изучаемого процесса, которое является релятивистски

и градиентно инвариантным, а также инвариантным относительно инверсии пространства:

$$M(s, t) = \bar{u}(p_2) \{T_1(s, t) \gamma_5(\gamma \varepsilon)(\gamma k) + T_2(s, t) \gamma_5[(p_1 \varepsilon)(qk) - (p_1 k)(q\varepsilon)] + T_3(s, t) \gamma_5[(\gamma \varepsilon)(qk) - (\gamma k)(q\varepsilon)] + T_4(s, t) \gamma_5[(\gamma \varepsilon)(p_1 k) - (\gamma k)(p_1 \varepsilon)]\} u(p_1) \tilde{\Phi}^*(q),$$

где

$$T_1 = f_5, \quad T_2 = \frac{f_1}{kq} = -\frac{f_3}{p_1 k}, \quad T_3 = -f_6, \quad T_4 = -f_4.$$

В рассматриваемую реакцию входят две тождественные частицы (начальный и конечный нуклон), поэтому выберем вместо p_1 комбинацию $P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, симметричную относительно импульсов обоих нуклонов (см. подробнее гл. 11). Тогда

$$M(s, t) = i \bar{u}(p_2) \{T_1(s, t) \gamma_5(\gamma k)(\gamma \varepsilon) + 2T_2(s, t) \gamma_5[(P\varepsilon)(kq) - (Pk)(q\varepsilon)] + T_3(s, t) \gamma_5[(\gamma k)(q\varepsilon) - (\gamma \varepsilon)(qk)] + 2T_4(s, t) \gamma_5[(\gamma k)(P\varepsilon) - (\gamma \varepsilon)(Pk)]\} u(p_1) \tilde{\Phi}^*(q). \quad (1.13)$$

Последнее выражение обычно записывают следующим образом*:

$$M(s, t) = \bar{u}(p_2) T u(p_1) \equiv \bar{u}(p_2) \left[\sum_{i=1}^4 T_i(s, t) R_i \right] u(p_1) \tilde{\Phi}^*(q),$$

где R_i — соответствующие инвариантные спиновые комбинации:

$$R_1 = \gamma_5(\gamma k)(\gamma \varepsilon), \quad R_3 = \gamma_5[(\gamma k)(q\varepsilon) - (\gamma \varepsilon)(kq)], \\ R_2 = 2\gamma_5[(P\varepsilon)(kq) - (Pk)(q\varepsilon)], \quad R_4 = 2\gamma_5[(\gamma k)(P\varepsilon) - (\gamma \varepsilon)(Pk)],$$

или в форме, в которой ε_μ выделено в виде общего множителя:

$$M(s, t) = \bar{u}(p_2) T_i R_{i\mu} \varepsilon_\mu u(p_1) \tilde{\Phi}^*(q),$$

$$\text{где } R_{1\mu} = \gamma_5(\gamma k) \gamma_\mu, \quad R_{3\mu} = 2\gamma_5[(\gamma k) q_\mu - \gamma_\mu(kq)], \\ R_{2\mu} = 2\gamma_5[P_\mu(kq) - (Pk) q_\mu], \quad R_{4\mu} = 2\gamma_5[(\gamma k) P_\mu - (Pk) \gamma_\mu].$$

Подчеркнем, что хотя число независимых инвариантных комбинаций для данного процесса строго фиксировано, выбор конкрет-

* Обычно в оригинальных статьях волновые функции мезонов $\Phi(q)$ в выражении для амплитуд опускают. Мы тоже иногда будем это делать.

ного вида спиновых комбинаций не однозначен. В частности, амплитуду рассматриваемой реакции обычно записывают так:*

$$M(s, t) = i \bar{u}(p_2) \{ T_1(s, t) \gamma_5(\gamma k)(\gamma \epsilon) + T_2(s, t) 2\gamma_5[(P\epsilon)(kq) - (Pk)(q\epsilon)] + T_3(s, t) \gamma_5[(\gamma k)(q\epsilon) - (\gamma \epsilon)(qk)] + T_4(s, t) 2\gamma_5 \times \\ \times [(\gamma k)(P\epsilon) - (\gamma \epsilon)(Pk) - M(\gamma k)(\gamma \epsilon)] \} u(p_1) \tilde{\Phi}^*(q). \quad (1.14)$$

Эта формула отличается от (1.13) видом последней спиновой комбинации.

Из приведенного примера видно, что для нахождения инвариантного выражения для амплитуды фактически надо знать: 1) сколько независимых инвариантных комбинаций можно построить для данного процесса, 2) каков конкретный вид этих комбинаций. Поэтому к задаче построения инвариантного выражения для амплитуды можно подойти по-другому: сначала сосчитать, сколько имеется независимых инвариантных комбинаций для изучаемого процесса, а затем найти их конкретный вид.

Для подсчета числа независимых инвариантных комбинаций воспользуемся законами сохранения момента количества движения и четности.

Рассмотрим начальное состояние процесса (1.8). Если полный момент начальной системы равен J , то полный момент фотона принимает два значения: $j = J + 1/2$; $j = J - 1/2$.

Для каждого из значений j существует два типа фотонов (см. гл. 2, § 1): электрические E с четностью $(-1)^j$ и магнитные M с четностью $(-1)^{j+1}$. Поэтому при данном j существует четыре типа начальных состояний: два с четностью $(-1)^{j=(J+1/2)+1+\lambda}$, соответствующих фотонам $E(J+1/2)$ и $M(J+1/2)$ и два с четностью $(-1)^{j=(J-1/2)+1+\lambda}$, соответствующих фотонам $M(J-1/2)$ и $E(J-1/2)$. В конечном состоянии при данном J возможны два значения орбитального момента: $l' = J + 1/2$, $l' = J - 1/2$ или два состояния с четностями $(-1)^{(J+1/2)+1}$ и $(-1)^{(J-1/2)+1}$.

Из закона сохранения момента количества движения и четности следует, что в данном случае разрешены четыре перехода между следующими состояниями:

$$\left. \begin{aligned} E\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}, \quad M\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{1}{2}; \\ E\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{1}{2}, \quad M\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

* Заметим, что в часто упоминаемой работе Чу и др. [(Phys. Rev., 106, 1345 (1957)] используется метрика ($ab = ab - a_0b_0$), отличная от принятой нами. Если, однако, выбрать инварианты в виде (1.14), то все результаты статьи Чу и др. остаются без изменения в нашей метрике (см. гл. 7, § 5; гл. 17, § 2 и т. д.).

Следовательно, в амплитуду процесса (1.8) действительно войдут четыре независимые комбинации.

При подсчете мы не учитывали продольных фотонов и тем самым удовлетворили требованию градиентной инвариантности.

В случае фотообразования π -мезонов виртуальным фотоном к переходам (1.15) надо еще добавить переходы, соответствующие продольным электрическим фотонам:

$$L\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}, \quad L\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{1}{2}, \quad (1.16)$$

и амплитуда будет состоять из шести независимых слагаемых.

Таким образом, для того чтобы определить число возможных независимых комбинаций, релятивистски инвариантных и инвариантных относительно инверсии пространства, надо найти число переходов процесса, допустимых законами сохранения момента количества движения и четности.

В общем случае это правило приводит к следующим формулам для подсчета числа N независимых инвариантных комбинаций в амплитуде.

1. Все спины частиц в реакции (1.1) целые (но фотонов нет)

$$N = \frac{1}{2} [(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)(2s_3 + 1)(2s_4 + 1) + \\ + ii' (-1)^{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}]. \quad (1.17)$$

Здесь i, i' — внутренние четности начальной и конечной систем.

2. Хотя бы у пары частиц в реакции (1.1) спин полуцелый (но фотонов нет)

$$N = \frac{1}{2} (2s_1 + 1)(2s_2 + 1)(2s_3 + 1)(2s_4 + 1). \quad (1.18)$$

3. Для реакции $\gamma + 2 \rightarrow 3 + 4$

$$N = (2s_2 + 1)(2s_3 + 1)(2s_4 + 1). \quad (1.19)$$

4. Для реакции $\gamma + 2 \rightarrow \gamma + 4$

$$N = 2(2s_2 + 1)(2s_4 + 1). \quad (1.20)$$

После подсчета числа инвариантных комбинаций надо найти их явный вид; они должны быть скалярами и обращаться в нуль при замене $\varepsilon \rightarrow k$, если в процессе участвуют реальные фотоны.

Если в реакции участвуют тождественные частицы, то выражение для амплитуды следует записывать в виде, симметричном относительно импульсов тождественных частиц.

Ясно, что структура амплитуды процесса определяется спинами и внутренними четностями частиц. Поэтому в дальнейшем мы будем

обозначать реакции, указывая спины и внутренние четности частиц, например

$$1^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-.$$

Такая схема описывает одновременно несколько реакций; некоторые из них мы будем приводить в скобках, — например

$$\begin{array}{cccc} 1^- & + & \frac{1}{2}^+ & \rightarrow & \frac{1}{2}^+ & + & 0^- \\ \hline k, \xi & p_1 & p_2 & & q & & \end{array} \quad (\text{образование псевдоскалярных мезонов векторами на нуклонах: } VN \rightarrow N\pi, VN \rightarrow K\Lambda \text{ и т. д.}).$$

Под спином стоит обозначение для импульса частицы и вектора поляризации.

Переходим к построению конкретного вида амплитуд для различных процессов. Сначала рассмотрим некоторые процессы, обусловленные сильным взаимодействием. Как показывает опыт, в этом случае имеет место инвариантность относительно инверсии пространства и, следовательно, выполняется закон сохранения четности.

При определении электрических и магнитных мультиполей (см. гл. 2, § 1) мы учли, что внутренняя пространственная четность вектона отрицательна. Поэтому при подсчете числа независимых комбинаций следует заменять в реакциях 1^- на 1^+ (и наоборот в случае псевдовектона).

§ 2. Инвариантная структура амплитуды (сильное взаимодействие)

- $0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-$ (рассеяние псевдоскалярного мезона на псевдоскалярном мезоне: $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $KK \rightarrow KK$, $\pi K \rightarrow \pi K$, $\eta\eta \rightarrow \eta\eta$ и т. п.).

Волновые функции четырех псевдоскалярных частиц образуют скаляр $\tilde{\varphi}(q_1)\tilde{\varphi}(q_2)\tilde{\varphi}^*(q_3)\tilde{\varphi}^*(q_4)$, а 4-импульсы частиц — произвольную скалярную функцию от инвариантов s и t : $T(s, t)$. Поэтому

$$M(s, t) = T(s, t) \tilde{\varphi}^*(q_4) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}(q_1). \quad (2.1)$$

- $0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+$ (рассеяние псевдоскалярных мезонов с образованием скалярного мезона).

Произведение волновых функций дает псевдоскаляр $\varphi^*(q_4)\varphi^*(q_3)\tilde{\varphi}(q_1)\tilde{\varphi}(q_2)$. Чтобы амплитуда была скаляром, надо из 4-импульсов частиц также образовать псевдоскаляр, т. е. $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}q_{1\alpha}q_{2\beta}q_{3\gamma}q_{4\delta}$. Однако в данном случае этого сделать нельзя, так как для такого построения требуется четыре независимых вектора, а из-за закона сохранения энергии — импульса их будет только три. Невозможность построения инвариантной амплитуды указывает на то, что данный процесс запрещен. Как мы видели (гл. 2,

§ 1), рассматриваемый процесс действительно запрещен законом сохранения четности.

3. $0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-$ (образование векторных мезонов при столкновении псевдоскалярных мезонов: $\pi\pi \rightarrow \rho\rho$, $\pi\pi \rightarrow \rho\omega$, $\pi\pi \rightarrow \eta\rho$ и т. п. или образование виртуальным фотоном γ_b псевдоскалярного мезона на мезоне: $\gamma_b \pi \rightarrow \pi\pi$, $\gamma_b \eta \rightarrow \pi\pi$, $\gamma_b \eta \rightarrow \eta\eta$ и т. п.).

При выбранном нами определении мультиполей внутренние четности начальной и конечной систем различны. Поэтому разрешен один переход $M(J) \rightarrow l' = J$, т. е. амплитуда будет состоять из одного члена: $\tilde{C}_\mu U_\mu^*(k) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3)$. Множитель \tilde{C}_μ зависит только от 4-импульсов частиц и должен быть псевдовектором (этим обеспечивается свертка по индексу μ). Из трех независимых векторов, например q_1 , k и $Q = \frac{1}{2}(q_2 + q_3)$, можно образовать тензор $q_{1\alpha} Q_\alpha k_\delta$, для которого дуальной величиной будет псевдовектор $\tilde{C}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\alpha\delta} q_{1\nu} Q_\alpha k_\delta$. Инвариантное выражение для амплитуды запишется в виде

$$M(s, t) = T_1(s, t) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\delta} q_{1\nu} Q_\alpha k_\delta U_\mu^*(k) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) = \\ = T_1(s, t) \varepsilon_{\mu\nu\alpha\delta} q_{1\nu} Q_\alpha k_\delta \xi_\mu \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2). \quad (2.2)$$

4. $0^+ + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-$ (образование векторного мезона при столкновении скалярного и псевдоскалярного мезонов или образование виртуальным фотоном скалярного и псевдоскалярного мезонов).

При выбранном нами определении мультиполей внутренние четности начальной и конечной систем одинаковы. Поэтому допустимы два перехода $E(J) \rightarrow l' = J$ и $L(J) = l' = J$, т. е. амплитуда состоит из двух инвариантных комбинаций:

$$C_\mu^{(1)} U_\mu^*(k) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}(q_2) \varphi(q_1) \quad \text{и} \quad C_\mu^{(2)} U_\mu^*(k) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}(q_2) \varphi(q_1).$$

Множители $C_\mu^{(1)}$ и $C_\mu^{(2)}$ зависят только от 4-импульсов частиц и должны быть векторами, в качестве которых можно выбрать любые два вектора мезонов, но не вектона, так как для вектона $k_\mu U_\mu = 0$ (условие Лоренца). Следовательно, если ввести векторы $Q_1 = (q_2 + q_3)$ и $Q_2 = (q_2 - q_3)$, то

$$M(s, t) = [T_1(s, t) Q_{1\mu} \xi_\mu + T_2(s, t) Q_{2\mu} \xi_\mu] \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}(q_2) \varphi(q_1). \quad (2.3)$$

5. $0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+$ (рассеяние псевдоскалярных мезонов на барнонах: $\pi N \rightarrow \pi N$, $K N \rightarrow K N$, $\pi \Lambda \rightarrow \pi \Lambda$, $\eta N \rightarrow \eta N$, $\pi N \rightarrow \eta N$ и т. п.).

Внутренние четности начальной и конечной системы одинаковы. Разрешены два перехода: $l = J + \frac{1}{2} \rightarrow l' = J + \frac{1}{2}$ и $l = J - \frac{1}{2} \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}$. Амплитуда состоит из двух независимых слагаемых:

$$[\bar{u}(p_2) O_1 u(p_1)] \tilde{\Phi}^*(q_2) \tilde{\Phi}(q_1) \quad \text{и} \quad [\bar{u}(p_2) O_2 u(p_1)] \tilde{\Phi}^*(q_2) \tilde{\Phi}(q_1).$$

Выражения в скобках должны быть скалярными образованиями из волновых функций фермионов, матриц γ и 4-импульсов частиц. В качестве таких комбинаций обычно выбирают: $\bar{u}(p_2)u(p_1)$ и $\bar{u}(p_2)Q_\mu \gamma_\mu u(p_1)$, где $Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$. Таким образом,

$$M(s, t) = [T_1(s, t) \bar{u}(p_2) u(p_1) + T_2(s, t) \bar{u}(p_2) Q_\mu \gamma_\mu u(p_1)] \times \tilde{\Phi}^*(q_2) \tilde{\Phi}(q_1). \quad (2.4)$$

6. $0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^+ + \frac{1}{2}^+$ (рассеяние псевдоскалярного мезона на барионе с образованием скалярного мезона).
 $q_1 \quad p_1 \quad q_2 \quad p_2$

Внутренние четности начальной и конечной систем различны. Разрешены два перехода: $l = J + 1/2 \rightarrow l' = J - 1/2$ и $l = J - 1/2 \rightarrow l' = J + 1/2$. Отличие от предыдущего случая сводится к тому, что спинорные комбинации должны быть псевдоскалярами:

$$\widetilde{[\bar{u}(p_2) O_1 u(p_1)]} \Phi^*(q_2) \tilde{\Phi}(q_1), \quad \widetilde{[\bar{u}(p_2) O_2 u(p_1)]} \Phi^*(q_2) \tilde{\Phi}(q_1).$$

Для этого надо в оба слагаемые выражения (2.4) добавить между спинорами множитель γ_5 (см. гл. 2, § 2):

$$M(s, t) = [T_1(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) + T_2(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 \times Q_\mu \gamma_\mu u(p_1)] \Phi^*(q_2) \tilde{\Phi}(q_1). \quad (2.5)$$

7. $\frac{1}{2}^+ + 1^- \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+$ (образование псевдоскалярным мезоном на барионе векторного мезона: $\pi N \rightarrow N\rho$, $\pi N \rightarrow N\omega$, $\eta N \rightarrow N\rho$, $\eta N \rightarrow N\omega$ и т. п. или образование виртуальным фотоном γ_b на барионе псевдоскалярного мезона: $\gamma_b N \rightarrow N\pi$, $\gamma_b N \rightarrow N\eta$, $\gamma_b N \rightarrow K\Lambda$, $\gamma_b \Lambda \rightarrow \Lambda\pi$ и т. п.).
 $p_1 \quad k, \xi \quad q \quad p_2$

Допустимы шесть переходов [см. (1.15) и (1.16)]. Амплитуда состоит из шести независимых инвариантных комбинаций. Две из

них можно выбрать такими (они обращаются в нуль для реальных фотонов, для которых $k^2 = 0$):

$$\bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) k^2 (q\xi) \tilde{\varphi}^*(q); \quad \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma\xi) u(p_1) k^2 \tilde{\varphi}^*(q),$$

а остальные четыре в виде (1.14), заменив $\varepsilon \rightarrow \xi$, т. е.

$$\begin{aligned} M(s, t) = & \bar{u}(p_2) \{ T_1(s, t) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma\xi) + 2T_2(s, t) \gamma_5 [(P\xi) \times \\ & \times (kq) - (Pk) (q\xi)] + T_3(s, t) \gamma_5 [(\gamma k) (q\xi) - (\gamma\xi) (kq)] + \\ & + 2T_4(s, t) \gamma_5 [(\gamma k) (P\xi) - (\gamma\xi) (Pk)] + T_5(s, t) \gamma_5 (q\xi) k^2 + \\ & + T_6(s, t) \gamma_5 (\gamma\xi) k^2 \} u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q). \end{aligned} \quad (2.6)$$

8. $0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{3^+}{2} + 0^-$ (рассеяние псевдоскалярного мезона на барионе с образованием резонанса $\pi N \rightarrow \pi N^*$, $\eta N \rightarrow \eta N^*$, $\pi \Sigma \rightarrow \pi \Sigma^*$ и т. п.).

Разрешенные переходы: $l = J + \frac{1}{2} \rightarrow l' = J + \frac{1}{2}$, $l = J - \frac{1}{2} \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}$, $l = J + \frac{1}{2} \rightarrow l' = J - \frac{3}{2}$, $l = J - \frac{1}{2} \rightarrow l' = J + \frac{3}{2}$. Амплитуда содержит четыре независимые инвариантные комбинации:

$$T_i(s, t) \tilde{C}_\mu \tilde{u}_\mu(p_2) O_i u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \tilde{\varphi}(q_1), \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Проще всего получить вид амплитуды из формулы (2.4), заменив в ней $\bar{u}(p_2)$ на $\tilde{u}_\mu(p_2) \gamma_5$ и умножив полученное выражение порознь, например, на $Q_{1\mu} = \frac{1}{2} (q_1 + q_2)_\mu$ и $Q_{2\mu} = \frac{1}{2} (q_1 - q_2)_\mu$ (но не на $p_{2\mu}$, так как $p_{2\mu} \tilde{u}_\mu(p_2) = 0$):

$$\begin{aligned} M(s, t) = & \tilde{u}_\mu(p_2) \gamma_5 \{ T_1(s, t) Q_{1\mu} + T_2(s, t) (Q_{1\nu} \gamma_\nu) Q_{1\mu} + \\ & + T_3(s, t) Q_{2\mu} + T_4(s, t) (Q_{1\nu} \gamma_\nu) Q_{2\mu} \} u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \tilde{\varphi}(q_1). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если у резонанса четность противоположна рассмотренной, то в последнем выражении надо опустить множитель γ_5 между спинами и заменить $\tilde{u}_\mu \rightarrow \bar{u}_\mu$.

9. $\frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2}$ (рассеяние барионов на барионах: $pp \rightarrow pp$, $np \rightarrow np$, $\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p$, $\Lambda \Sigma \rightarrow \Lambda \Sigma$, $p \Lambda \rightarrow p \Lambda$ и т. д.).

Спин начальной и конечной системы принимает два значения: $s=0$ и 1, поэтому возможны состояния

$$\left. \begin{array}{l} l=J, \quad s=0 \\ l=J+1 \\ J \\ J-1 \end{array} \right\} s=1 \quad \left. \begin{array}{l} l'=J, \quad s'=0 \\ l'=J+1 \\ J \\ J-1 \end{array} \right\} s'=1$$

Допустимы восемь переходов:

$$\begin{array}{l} s=1 \left\{ \begin{array}{l} l+1 \rightarrow l'+1 \\ l-1 \rightarrow l'+1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} l+1 \rightarrow l'-1 \\ l-1 \rightarrow l'-1 \end{array} \quad l \rightarrow l' \\ s'=1 \left\{ \begin{array}{l} l+1 \rightarrow l'+1 \\ l-1 \rightarrow l'+1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} l+1 \rightarrow l'-1 \\ l-1 \rightarrow l'-1 \end{array} \quad l \rightarrow l' \\ l, s=0 \rightarrow l', s'=0 \quad l, s=0 \rightarrow l', s'=1 \\ l, s=1 \rightarrow l', s'=0. \end{array}$$

Введем три вектора:

$$K = \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad Q = k_2 - k_1 = p_2 - p_1.$$

Тогда амплитуда

$$\begin{aligned} M(s, t) = & T_1(s, t) \bar{u}(p_2) u(p_1) \bar{u}(k_2) u(k_1) + T_2(s, t) \times \\ & \times \bar{u}(p_2) \gamma K u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma P u(k_1) + T_3(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 \times \\ & \times (\gamma K) u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma_5 (\gamma P) u(k_1) + T_4(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 \times \\ & \times u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma_5 u(k_1) + T_5(s, t) [\bar{u}(p_2) \gamma K u(p_1) \bar{u}(k_2) u(k_1) + \\ & + \bar{u}(p_2) u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma P u(k_1)] + T_6(s, t) [\bar{u}(p_2) \gamma K u(p_1) \times \\ & \times \bar{u}(k_2) u(k_1) - \bar{u}(p_2) u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma P u(k_1)] + T_7(s, t) \bar{u}(p_2) \times \\ & \times \gamma_5 u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma_5 (\gamma P) u(k_1) + T_8(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma K) u(p_1) \times \\ & \times \bar{u}(k_2) \gamma_5 u(k_1). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Как мы увидим далее (гл. 4, § 3 и гл. 5, § 2), две последние комбинации не удовлетворяют требованию инвариантности относительно зарядового сопряжения или обращения времени и поэтому должны быть отброшены.

Если все четыре частицы тождественны, то амплитуда (2.8) не должна измениться при одновременной замене частиц с импульсами p_1, p_2 частицами соответственно с импульсами k_1, k_2 (при этом $P \rightleftharpoons K$). Этому требованию не удовлетворяет шестая комбинация, поэтому

в случае тождественных частиц амплитуда будет содержать пять независимых слагаемых:

$$\begin{aligned}
 M(s, t) = & T_1(s, t) \bar{u}(p_2) u(p_1) \bar{u}(k_2) u(k_1) + T_2(s, t) \bar{u}(p_2) \times \\
 & \times \gamma K u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma P u(k_1) + T_3(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma K) u(p_1) \times \\
 & \times \bar{u}(k_2) \gamma_5 (\gamma P) \bar{u}(k_1) + T_4(s, t) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma_5 u(k_1) + \\
 & + T_5(s, t) [\bar{u}(p_2) \gamma K u(p_1) \bar{u}(k_2) u(k_1) + \bar{u}(p_2) u(p_1) \times \\
 & \times \bar{u}(k_2) \gamma P u(k_1)].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

§ 3. Инвариантная структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов)

Переходим к построению структуры амплитуды для процессов, обусловленных сильным и электромагнитным взаимодействиями. Как показывает опыт, в этом случае имеет место инвариантность относительно инверсии пространства, и поэтому мы будем строить амплитуды, предполагая, что четность сохраняется.

При определении электрических и магнитных мультиполей (см. гл. 2, § 1) мы учли, что внутренняя пространственная четность фотона отрицательна. Поэтому при подсчете числа независимых комбинаций следует заменять в реакциях γ^- на γ^+ .

$$\begin{array}{l}
 10. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^- \quad (\text{фотообразование псевдоскалярного мезона на псевдоскалярном мезоне:} \\
 k, \varepsilon \quad q \quad q_1 \quad q_2 \quad \gamma \pi \rightarrow \pi \pi, \gamma \eta \rightarrow \pi \pi).
 \end{array}$$

Разрешен один переход: $M(J) \rightarrow l' = J$. Если выбрать в качестве независимых векторы $k, q, Q = \frac{1}{2}(q_1 + q)$, то амплитуда

$$M(s, t) = T(s, t) \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\delta} \varepsilon_\mu q_\alpha k_\nu Q_\delta \tilde{\varphi}^*(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \tilde{\varphi}(q). \tag{3.1}$$

Это выражение градиентно инвариантно: при замене $\varepsilon_\mu \rightarrow \tilde{k}_\mu$ оно обращается в нуль, ибо произведение антисимметричного $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\delta}$ и симметричного $k_\mu k_\nu q_\alpha Q_\delta$ тензоров равно нулю.

$$\begin{array}{l}
 11. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+ \quad (\text{фотообразование скалярного мезона на псевдо-} \\
 k, \varepsilon \quad q \quad q_1, \quad q_2 \quad \text{скалярном мезоне или фотообразование псевдо-} \\
 \text{скалярного мезона на псевдоскалярном мезоне} \\
 \text{с изменением четности фотона).}
 \end{array}$$

Допустим один переход: $E(J) \rightarrow l' = J$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 M(s, t) = & T_1(s, t) [(Q\varepsilon)(q_2 k) - (Qk)(q_2 \varepsilon)] \varphi^*(q_2) \times \\
 & \times \tilde{\varphi}^*(q_1) \tilde{\varphi}(q).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

При замене $\varepsilon \rightarrow k$ это выражение обращается в нуль, т. е. является градиентно инвариантным.

12. $\gamma_b^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-$ (образование виртуальным фотоном псевдоскалярного мезона на псевдоскалярном мезоне: $\gamma_b \pi \rightarrow \pi\pi$, $\gamma_b \eta \rightarrow \eta\eta$ и т. п.).

Разрешен переход $M(J) \rightarrow l' = J$. Выражение для амплитуды этого процесса уже было найдено [см. формулу (2.2)].

13. $\gamma_b^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+$ (образование виртуальным фотоном скалярного мезона на псевдоскалярном мезоне).

Разрешены переходы: $E(J) \rightarrow l' = J$, $L(J) \rightarrow l' = J$. Выражение для амплитуды этого процесса уже было получено [см. формулу (2.3)].

14. $\gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + \gamma^-$ (рассеяние фотона на псевдоскалярном мезоне: $k_1, \varepsilon_1, q_1 \quad q_2, \varepsilon_2, k_2$ $\gamma\pi \rightarrow \gamma\pi$, $\gamma\eta \rightarrow \gamma\eta$ и т. п.)

Разрешены переходы: $M(J) \rightarrow M(J)$, $E(J) \rightarrow E(J)$.

Амплитуда состоит из двух инвариантных слагаемых. Ее можно записать, например, в таком виде, удовлетворяющем требованиям всех трех инвариантностей*, содержащем линейно векторы ε_1 и ε_2 и симметричном относительно k_1, k_2 , и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$M(s, t) = \left[T_1(s, t) \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{(\varepsilon_1 k_2)(\varepsilon_2 k_1)}{k_1 k_2} \right) + T_2(s, t) \left((\varepsilon_1 Q) \times \right. \right. \\ \times (\varepsilon_2 Q)(k_1 k_2) - (\varepsilon_1 k_2)(\varepsilon_2 Q)(k_1 Q) - (\varepsilon_1 Q)(k_2 Q)(\varepsilon_2 k_1) + \\ \left. \left. + \frac{(\varepsilon_1 k_2)(\varepsilon_2 k_1)(k_1 Q)(k_2 Q)}{k_1 k_2} \right) \right] \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2), \quad (3.3)$$

где

$$Q = \frac{1}{2} (q_2 - q_1).$$

Выражение для амплитуды рассматриваемого процесса можно записать по-другому. Для этого выберем в качестве независимых вместо векторов k_1, k_2, Q следующие:

$$K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2), \quad Q = \frac{1}{2} (k_2 - k_1), \quad P' = P - \frac{PK}{K^2} K, \quad \text{где } P = \frac{1}{2} (q_1 + q_2).$$

Кроме того, имеется еще один независимый псевдовектор $\tilde{N}_\mu = i \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\sigma} P_\nu K_\lambda Q_\sigma$.

Четыре новых вектора ортогональны друг другу, потому что их попарные скалярные произведения равны нулю.

Согласно требованию градиентной инвариантности в данном случае выражение должно обращаться в нуль при одной из замен $\varepsilon_1 \rightarrow k_1$ или $\varepsilon_2 \rightarrow k_2$.

Выражением для амплитуды будет

$$M(s, t) = [T_1(s, t) (P' \varepsilon_1) (P' \varepsilon_2) + T_2(s, t) (\tilde{N} \varepsilon_1) (\tilde{N} \varepsilon_2)] \times \\ \times \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2). \quad (3.4)$$

Это выражение градиентно инвариантно; так как $k_1 = K - Q$ и $k_2 = K + Q$, то $P' k_1 = P' (K - Q) = P' K - P' Q = 0$; $P' k_2 = P' K + P' Q = 0$, вследствие ортогональности векторов P' , K , Q и $\tilde{N} k_1 = i \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\sigma} P'_\nu K_\lambda Q_\sigma k_{1\mu} = i \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\sigma} P'_\nu K_\lambda Q_\sigma (K_\mu - Q_\mu) = 0$, $\tilde{N} k_2 = 0$, ибо произведение антисимметричного тензора $\tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\lambda\sigma}$ на симметричный тензор $P'_\nu K_\lambda Q_\sigma K_\mu$ или $P'_\nu K_\lambda Q_\sigma Q_\mu$ равно нулю.

15. $\gamma^- + 0^- \rightarrow \gamma^- + 0^+$ (рассеяние фотона на псевдоскалярном мезоне с изменением четности мезона).
 $k_1, \varepsilon_1 q_1 \quad k_2, \varepsilon_2 q_2$

Разрешены два перехода $M(J) \rightarrow E(J)$ и $E(J) \rightarrow M(J)$. Выражение для амплитуды, удовлетворяющее требованиям всех трех инвариантностей, запишется так:

$$M(s, t) = [T_1(s, t) (P' \varepsilon_1) (\tilde{N} \varepsilon_2) + T_2(s, t) (P' \varepsilon_2) (\tilde{N} \varepsilon_1)] \varphi^*(q_2) \tilde{\varphi}(q_1); \quad (3.5)$$

16. $\gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$ (фотообразование псевдоскалярного мезона на барлоне: $\gamma N \rightarrow N\pi$, $\gamma N \rightarrow N\eta$, $\gamma N \rightarrow K\Lambda$, $\gamma N \rightarrow K\Sigma$ и т. п.)

Выражение для амплитуды уже было получено [см. формулу (1.14)].

17. $\gamma_b^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$ (образование виртуальным фотоном псевдоскалярного мезона на барионе: $\gamma_b N \rightarrow N\pi$, $\gamma_b N \rightarrow K\Lambda$, $\gamma_b N \rightarrow K\Sigma$, $\gamma_b \Lambda \rightarrow \Lambda\pi$ и т. п.).

Выражение для амплитуды уже получено [см. (2.6)].

18. $\gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \gamma^- + \frac{1^+}{2}$ (рассеяние фотонов на барионах: $\gamma N \rightarrow \gamma N$, $\gamma \Lambda \rightarrow \gamma \Sigma$ и т. п.).

$k_1, \varepsilon_1 p_1 \quad k_2, \varepsilon_2 p_2$

Разрешены переходы:

$$E\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow E\left(J - \frac{1}{2}\right); \quad M\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow E\left(J - \frac{1}{2}\right); \\ E\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow M\left(J - \frac{1}{2}\right); \quad M\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow M\left(J + \frac{1}{2}\right); \\ E\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow E\left(J + \frac{1}{2}\right); \quad M\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow E\left(J + \frac{1}{2}\right); \\ E\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow M\left(J + \frac{1}{2}\right); \quad M\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow M\left(J - \frac{1}{2}\right);$$

Амплитуда состоит из восьми инвариантных комбинаций. Используем (см. процесс 14) ортогональные векторы:

$$\{K, Q, P' = P - \frac{(PK)}{K^2} K, \tilde{N},$$

где $P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что из векторов K, Q, P', \tilde{N} и матрицы γ можно образовать лишь два независимых члена: $\bar{u}(p_2)K\gamma_5 U(p_1)$ и $\bar{u}(p_2)Ku(p_1)$. С другой стороны (см. процессы 14 и 15), из тех же векторов K, Q, P', \tilde{N} можно образовать два скаляра и два псевдоскаляра. Комбинируя эти величины, получаем выражение для амплитуды, которое удовлетворяет требованиям всех трех инвариантностей:

$$\begin{aligned} M(s, t) = & \bar{u}(p_2) \{ T_1(s, t) (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) + T_2(s, t) (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) \hat{K} + \\ & + T_3(s, t) (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) + T_4(s, t) (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \hat{K} + T_5(s, t) (P' \epsilon_2) \times \\ & \times (\tilde{N} \epsilon_1) \gamma_5 + T_6(s, t) (\tilde{N} \epsilon_2) (P' \epsilon_1) \gamma_5 + T_7(s, t) (P' \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \times \\ & \times \gamma_5 \hat{K} + T_8(s, t) (\tilde{N} \epsilon_2) (P' \epsilon_1) \gamma_5 \hat{K} \} u(p_1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Как мы увидим далее (гл. 4, § 3, гл. 5, § 2), из четырех последних комбинаций можно образовать лишь две, инвариантные относительно зарядового сопряжения или обращения времени. Следовательно, если имеет место инвариантность относительно зарядового сопряжения или обращения времени, в амплитуде останется не восемь, а шесть независимых инвариантных слагаемых:

$$\begin{aligned} M(s, t) = & \bar{u}(p_2) \{ T_1(s, t) (P')^{-2} (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) + T_2(s, t) (P')^{-2} (P' \epsilon_2) \times \\ & \times (P' \epsilon_1) \hat{K} + T_3(s, t) (\tilde{N})^{-2} (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) + T_4(s, t) (\tilde{N})^{-2} (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \hat{K} + \\ & + T_5(s, t) (P')^{-2} (K)^{-2} \gamma_5 [(P' \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) - (P' \epsilon_1) (\tilde{N} \epsilon_2)] + \\ & + T_6(s, t) (P')^{-2} (\tilde{K})^{-2} [(P' \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) + (P' \epsilon_1) (\tilde{N} \epsilon_2)] \gamma_5 \hat{K} \} u(p_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

19. $\gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 1^-$ (фотообразование векторного мезона на барионе: $\gamma N \rightarrow N\rho, \gamma N \rightarrow N\omega, \gamma \Lambda \rightarrow \Lambda\rho$ и т. п. или рассеяние фотона на барионе с образованием виртуального фотона: $\gamma N \rightarrow N\gamma_b, \gamma \Lambda \rightarrow \Sigma \gamma_b$ и т. п.).
- k, ϵ p_1 p_2 q, ξ

В этом случае к разрешенным переходам предыдущего процесса надо еще добавить следующие:

$$E\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow L\left(J - \frac{1}{2}\right); \quad M\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow L\left(J - \frac{1}{2}\right);$$

$$E\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow L\left(J + \frac{1}{2}\right); \quad M\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow L\left(J + \frac{1}{2}\right).$$

Амплитуда содержит 12 инвариантных слагаемых. Их можно получить, например, так: умножить четыре комбинации в амплитуде фотообразования (1.14) порознь на $p\xi$, $k\xi$, $\gamma\xi$, заменив в них $\epsilon \rightarrow \xi$.

$$20. \quad \begin{array}{cccc} \gamma^- + \frac{1^+}{2} & \rightarrow & \frac{3^+}{2} & + 0^- \\ k, \epsilon & & p_1 & p_2 \quad q \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(рождение псевдоскалярного мезона на ба-} \\ \text{рионе с образованием резонанса: } \gamma N \rightarrow N^* \pi, \\ \gamma N \rightarrow \Sigma^* K, \gamma \Lambda \rightarrow \Sigma^* \pi \text{ и т. п.).} \end{array}$$

Разрешенными переходами, кроме (1.15), являются

$$M\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{3}{2}; \quad E\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{3}{2};$$

$$M\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{3}{2}; \quad E\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{3}{2}.$$

Амплитуда состоит из восьми независимых инвариантных комбинаций. Проще всего получить вид амплитуды из формулы (1.14), заменив в ней $\bar{u}(p_2)$ на $\tilde{u}_\mu(p_2)$ и умножив полученное выражение порознь на k_μ и q_μ .

Если у резонанса четность отрицательная, то в полученном выражении надо опустить матрицу γ_5 и заменить $\tilde{u}_\mu(p_2) \rightarrow \bar{u}_\mu(p_2)$.

$$21. \quad \begin{array}{cccc} \gamma_b^- + \frac{1^+}{2} & \rightarrow & \frac{3^+}{2} & + 0^- \\ k, \xi & & p_1 & p_2 \quad q \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(рождение виртуальным фотоном псевдо-} \\ \text{скалярного мезона на барлоне с образо-} \\ \text{ванным изобары: } \gamma_b N \rightarrow N^* \pi, \gamma_b N \rightarrow N^* \eta, \\ \gamma_b N \rightarrow \Lambda^* K, \gamma_b N \rightarrow \Sigma^* K \text{ и т. п.).} \end{array}$$

Число инвариантных комбинаций в амплитуде равно 12. Получить вид амплитуды можно например, так: в формуле (2.6) заменить $\bar{u}(p_2)$ на $\tilde{u}_\mu(p_2)$ и умножить полученное выражение порознь на k_μ и q_μ .

§ 4. Выражение для дифференциального сечения

Найдем выражение для дифференциального сечения процесса (1.1). Если все взаимодействия «выключены», то S-матрица рассеяния будет единичной, так как при этом начальные и конечные состояния одинаковы. Поэтому матрицу рассеяния можно представить в виде

$$S = I + iT. \quad (4.1)$$

Матрица T отлична от нуля лишь в том случае, когда происходит рассеяние. Если учесть закон сохранения энергии и импульса, то

$$T_{fi} = (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) M_{fi}. \quad (4.2)$$

Выражения M_{fi} для различных процессов были найдены нами в § 2 и 3 (индексы f и i мы опускали). Вероятность перехода из начального состояния i в конечное f определяется модулем квадрата T_{fi} :

$$w' = |T_{fi}|^2 = [(2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)]^2 |M|^2. \quad (4.3)$$

Так как S -матрица переводит систему из состояния в момент $t = -\infty$ в состояние в момент $t \rightarrow +\infty$, то естественно взять выражение (4.3) также при $t \rightarrow \infty$. Но в этом случае

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} [\delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)]^2 = \\ & = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{i(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)x} \right] = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) Vt, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где Vt — четырехмерный нормировочный объем. Поэтому (4.3) перепишется так:

$$w' = (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) |M|^2 Vt. \quad (4.5)$$

Конкретное выражение для w' зависит от выбора нормировки волновых функций начального и конечного состояний.

Будем нормировать волновые функции так, чтобы в единице объема находилось $2E$ бозонов и E/M фермионов, где E — энергия частицы, M — масса фермиона. При такой нормировке волновые функции различных полей имеют вид:

а) скалярное поле $\varphi = e^{ipx}$, так как действительно в этом случае плотность тока j_0 равна

$$j_0 = i \left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \frac{\partial \varphi^*}{\partial t} \right) = 2p_0 = 2E;$$

б) векторное поле $U_\mu = \xi_\mu e^{-ipx}$, потому что

$$j_0 = -i \left(U_\mu^* \frac{\partial U_\mu}{\partial t} - U_\mu \frac{\partial U_\mu^*}{\partial t} \right) = 2E, \quad \xi_\mu \xi_\mu^* = -1;$$

в) спинорное поле $\psi = u e^{-ipx}$, так как $j_0 = \bar{u} \gamma_0 u = E/M$, причем $u \bar{u} = 1$.

Другими словами, при выбранной нормировке модули квадратов волновых функций равны единице:

$$\varphi^* \varphi = 1; A_\mu^* A_\mu = 1; \bar{u} u = 1 \quad (4.6)$$

и формула (4.5) переписывается так:

$$\omega' = \frac{(2\pi)^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 |M|^2}{(2E_1 V)(2E_2 V)(2E_3 V)(2E_4 V)} V i \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2), \quad (4.7)$$

причем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ для бозонов; $\alpha_1 = \sqrt{2M_1}$, $\alpha_2 = \sqrt{2M_2}$ для фермионов (если $\bar{u} u = 2M$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$).

Чтобы получить вероятность перехода, при которой импульсы конечных частиц 3 и 4 попадают в интервал $p_3 + dp_3$ и $p_4 + dp_4$, надо умножить (4.5) на элемент фазового объема

$$\frac{dp_3 V \cdot dp_4 V}{(2\pi)^3 (2\pi)^3}.$$

Для нормированной вероятности перехода в единицу времени будем иметь

$$\omega = \frac{(2\pi)^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{16E_1 E_2 E_3 E_4 V} |M|^2 \frac{dp_3}{(2\pi)^3} \cdot \frac{dp_4}{(2\pi)^3} \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \quad (4.8)$$

По определению, дифференциальное сечение $d\sigma_p$ процесса равно вероятности (4.8), деленной на плотность потока j_0 начальных частиц*

$$d\sigma_p = \frac{(2\pi)^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2}{16E_1 E_2 E_3 E_4 V j_0} |M|^2 \frac{dp_3}{(2\pi)^3} \cdot \frac{dp_4}{(2\pi)^3} \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \quad (4.9)$$

С помощью этой формулы можно найти величину дифференциального сечения в тех случаях, когда спины частиц имеют определенное направление, т. е. когда частицы поляризованы. Если нас не интересует поляризация частиц, то надо произвести суммирование по проекциям спинов конечных частиц и усреднение по проекциям спинов начальных частиц (обозначим обе эти операции знаком Σ):

$$d\sigma = \sum_{\text{спин}} d\sigma_p. \quad (4.10)$$

Итак, для того чтобы определить дифференциальное сечение рассеяния поляризованных частиц, надо вычислить квадрат модуля амплитуды процесса и подставить его в (4.9). Для определения диф-

* Если среди конечных частиц имеется n тождественных, то в выражение для $d\sigma$ надо добавить множитель $1/n!$, который учитывает тождественность состояний, отличающихся перестановкой частиц.

ференциального сечения рассеяния неполяризованных частиц необходимо еще произвести суммирование по проекциям спинов частиц.

Полезно заметить, что для комплексных функций T_j , обладающих реальной R_j и мнимой I_j частями, т. е. для

$$T_j = R_j + iI_j$$

имеют место следующие соотношения:

$$T_j T_k^* + T_j^* T_k = 2\text{Re } T_j^* T_k = 2\text{Re } T_j T_k^*; \quad (4.11)$$

$$i(T_j T_k^* - T_k T_j^*) = 2\text{Im } T_j^* T_k = -2\text{Im } T_j T_k^*. \quad (4.12)$$

§ 5. Выражения для дифференциальных сечений процессов без участия барионов

Найдем вид $|M|^2 = M^*M$ для нескольких конкретных процессов (нумерация процессов и обозначения те же, что в § 2 и 3).

$$1. 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

$$|M|^2 = M^*M = T^*(s, t) T(s, t) |\tilde{\varphi}_1|^2 |\tilde{\varphi}_2|^2 |\tilde{\varphi}_3|^2 |\tilde{\varphi}_4|^2 = |T(s, t)|^2.$$

$$3. 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-.$$

Используя формулу (2.1) гл. 2, находим, имея в виду, что $k\xi = 0$, но $k^2 \neq 0$:

$$M^*M = |T_1|^2 \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\delta} \tilde{\varepsilon}_{\mu'\nu'\alpha'\delta'} \xi_\mu q_\alpha k_\nu Q_\delta \xi_{\mu'} q_{\alpha'} k_{\nu'} Q_{\delta'} = |T_1|^2 \times \\ \times \{ [k^2 q^2 Q^2 + 2(kq)(kQ)(qQ) - (kq)^2 Q^2 - (kQ)^2 q^2 - (Qq)^2 k^2] \xi^2 + [(kQ)^2 - \\ - k^2 Q^2] (q\xi)^2 + [(kq)^2 - k^2 q^2] (Q\xi)^2 + 2[(Qq)k^2 - (qk)(Qk)] (q\xi)(Q\xi) \}.$$

$$4. 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 1^+.$$

$$M^*M = [T_1^*(Q_1 \xi) + T_2^*(Q_2 \xi)] [T_1(Q_1 \xi) + T_2(Q_2 \xi)] = |T_1|^2 (Q_1 \xi)^2 + \\ + |T_2|^2 (Q_2 \xi)^2 + (T_1^* T_2 + T_2^* T_1) (Q_1 \xi) (Q_2 \xi).$$

Имея в виду (4.11), получаем

$$|M|^2 = |T_1|^2 (Q_1 \xi)^2 + |T_2|^2 (Q_2 \xi)^2 + 2\text{Re}(T_1 T_2^*) (Q_1 \xi) (Q_2 \xi).$$

$$10. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

Используя формулу (2.1) гл. 2, находим, имея в виду, что $k\varepsilon = 0$ и $k^2 = 0$:

$$M^*M = |T_1|^2 \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\delta} \tilde{\varepsilon}_{\mu'\nu'\alpha'\delta'} \varepsilon_\mu q_\alpha k_\nu Q_\delta \varepsilon_{\mu'} q_{\alpha'} k_{\nu'} Q_{\delta'} = |T_1|^2 \{ [2(kq) \times \\ \times (kQ)(qQ) - (kq)^2 Q^2 - (kQ)^2 q^2] \varepsilon^2 + (kQ)^2 (q\varepsilon)^2 + (kq)^2 (Q\varepsilon)^2 - \\ - 2(kq)(kQ)(q\varepsilon)(Q\varepsilon) \}.$$

$$11. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+.$$

$$M^*M = |T_1|^2 [(Q\varepsilon)(q_2 k) - (Qk)(q_2 \varepsilon)]^2.$$

$$14. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + \gamma^-.$$

$$M^*M = |T_1|^2 [(P'\varepsilon_1)(P'\varepsilon_2)]^2 + |T_2|^2 [(\tilde{N}\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)]^2 + 2\text{Re} T_1 T_2^* (P'\varepsilon_1)(P'\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)(\tilde{N}\varepsilon_2).$$

Подставляя найденные формулы для $|M|^2$ в (4.9), получаем соответствующие выражения для $d\sigma$.

Если нас поляризация бозонов не интересует, то надо произвести суммирование по проекциям спинов конечных бозонов и усреднение по проекциям спинов начальных бозонов.

Рассмотрим сначала вектон. Как видно, суммирование по трем компонентам поляризации вектона в общем случае сводится к вычислению выражения $\sum_{\lambda=1}^3 \xi_\mu^\lambda \xi_\nu^\lambda$. Искомая сумма является тензором второго ранга по индексам μ и ν , поэтому ее можно записать с помощью 4-вектора вектона q так:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \xi_\mu^\lambda \xi_\nu^\lambda = A(q^2) \delta_{\mu\nu} + B(q^2) q_\mu q_\nu. \quad (5.1)$$

Здесь $A(q^2)$, $B(q^2)$ — неизвестные коэффициенты. Для их нахождения воспользуемся

а) условием Лоренца

$$q_\mu \xi_\mu = q_0 \xi_0 - \mathbf{q}\xi = 0 \quad (5.2)$$

и

б) условием ортогональности векторов, соответствующих различным состояниям поляризации,

$$\sum_{\mu=1}^4 \xi_\mu^\lambda \xi_\mu^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (5.3)$$

Умножая обе части (5.1) на q_ν и учитывая (5.2), находим

$$q_\nu \sum_{\lambda=0}^3 \xi_\mu^\lambda \xi_\nu^\lambda = q_\mu A + q_\mu q^2 B = q_\mu (A + \mu^2 B) = 0, \quad (5.4)$$

где $q^2 = \mu^2$; μ — масса вектона.

Полагая в обеих частях (5.1) $\mu = \nu$, производя суммирование по μ и учитывая (5.3), приходим к следующему результату:

$$\sum_{\mu=1}^4 \sum_{\lambda=1}^3 \xi_\mu^\lambda \xi_\mu^\lambda = 4A + B\mu^2 = 3. \quad (5.5)$$

Так как $q_\mu \neq 0$, то уравнение (5.4) дает

$$A + \mu^2 B = 0.$$

Используя эту формулу и (5.5), будем иметь $A=1$, $B=-1/\mu^2$. Подставляя последние значения в (5.1), находим формулу для суммирования по проекциям спина вектона:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \varepsilon_{\mu}^{\lambda} \varepsilon_{\nu}^{\lambda} = \delta_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{\mu^2}. \quad (5.6)$$

Для реального фотона имеет место не только условие Лоренца (5.2), но и условие поперечности $\varepsilon_0 = 0$ и $\mathbf{k}\varepsilon = 0$. Поэтому суммирование по двум оставшимся поляризациям фотона сведется к вычислению выражения ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_i^{\lambda} \varepsilon_j^{\lambda} = A(\mathbf{k}^2) \delta_{ij} + B(\mathbf{k}^2) k_i k_j.$$

В этом случае условие ортогональности переписывается так:

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_i^{\lambda} \varepsilon_i^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$$

и вместо (5.5) получим

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_i^{\lambda} \varepsilon_i^{\lambda} = 2 = 3A + B|\mathbf{k}|^2.$$

Отсюда найдем формулу для суммирования по проекциям спина фотона

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_i^{\lambda} \varepsilon_j^{\lambda} = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2}. \quad (5.7)$$

С помощью формул (5.6) и (5.7) можно произвести суммирование по проекциям спинов вектона и фотона (см. также гл. 7, § 7).

§ 6. Выражения для дифференциальных сечений процессов с участием барионов

Найдем вид $|M|^2 = M^* M$ для процессов, в которых участвуют барионы. В этом случае выражение для амплитуды процесса можно записать в общем виде следующим образом:

$$M = \bar{u}(p_2) O u(p_1), \quad (6.1)$$

где O — оператор, содержащий γ -матрицы. Так как

$$\begin{aligned} M^* &= (\bar{u}_2 O u_1)^+ = (u_2^+ \gamma_0 O u_1)^* = \\ &= \bar{u}_1 \gamma_0 O^+ \gamma_0 u_2 = \bar{u}_1 \bar{O} u_2, \quad \bar{O} = \gamma_0 O^+ \gamma_0, \end{aligned}$$

то

$$MM^* = \bar{u}_2 O u_1 \bar{u}_1 \bar{O} u_2 = \bar{u}_2 O \Lambda_1 \bar{O} u_2, \quad (6.2)$$

где $\Lambda_1 = u_1 \bar{u}_1$.

Перепишем формулу (6.2) так:

$$MM^* = \bar{u}_{2\mu} O_{\mu\nu} u_{1\nu} \bar{u}_{1\alpha} \bar{O}_{\alpha\beta} u_{2\beta}. \quad (6.3)$$

Порядок членов в этом выражении можно менять произвольно, потому что правильный порядок членов при умножении определяют сами индексы. Поэтому (6.3) можно переписать в виде

$$MM^* = u_{2\beta} \bar{u}_{2\mu} O_{\mu\nu} u_{1\nu} \bar{u}_{1\alpha} \bar{O}_{\alpha\beta} = \Lambda_{2\beta\mu} O_{\mu\nu} \Lambda_{1\nu\alpha} \bar{O}_{\alpha\beta} = (\Lambda_2 O \Lambda_1 \bar{O})_{\beta\beta},$$

где $\Lambda_2 = u_2 \bar{u}_2$.

Полученная величина представляет собой сумму диагональных элементов матрицы $\Lambda_2 O \Lambda_1 \bar{O}$ и называется следом матрицы, т. е.

$$|M|^2 = \text{Sp } \Lambda(p_2) O \Lambda(p_1) \bar{O}. \quad (6.4)$$

Таким образом, вычисление дифференциальных сечений процессов с участием барионов свелось к нахождению шпуров.

Если нас поляризация барионов не интересует, то для определения явного вида Λ следует произвести суммирование по двум проекциям спина бариона ($s_z = \pm 1/2$). При этом для барионов надо взять волновые функции $u^{(+)}(p)$, соответствующие положительной энергии [см. гл. 1, формула (6.14)], а для антибарионов — волновые функции $u^{(-)}(p)$, соответствующие отрицательной энергии.

Рассмотрим случай положительной энергии, когда

$$\Lambda(p) = \sum_{r=1}^2 u_r^{(+)}(p) \bar{u}_r^{(+)}(p). \quad (6.5)$$

Преобразуем это выражение к виду, в котором суммирование производится как по положительным $u^{(+)}(p)$, так и по отрицательным $u^{(-)}(p)$ состояниям. Для этого введем оператор

$$\Lambda^{(+)}(p) = \frac{\hat{p} + M}{2M}, \quad (6.6)$$

который, действуя на функцию $u^{(+)}(p)$, оставляет ее неизменной, а функцию $u^{(-)}(p)$ обращает в нуль:

$$\Lambda^{(+)}(p) u^{(+)}(p) = u^{(+)}(p), \quad (6.7)$$

$$\Lambda^{(+)}(p) u^{(-)}(p) = 0, \quad (6.8)$$

причем

$$[\Lambda^{(+)}(p)]^2 = \frac{p^2 + 2M\hat{p} + M^2}{4M^2} = \frac{\hat{p} + M}{2M} = \Lambda^{(+)}(p).$$

Мы считаем, что волновые функции u нормированы следующим образом:

$$u(p) \bar{u}(p) = \sum_{r=1}^2 (u_r^{(+)} \bar{u}_r^{(+)} - u_r^{(-)} \bar{u}_r^{(-)}) = 1.$$

Умножение обеих частей этого соотношения на $\Lambda^{(+)}$ дает

$$\sum_{r=1}^2 [\Lambda^{(+)}(p) u_r^{(+)}(p) \bar{u}_r^{(+)}(p) - \Lambda^{(+)}(p) u_r^{(-)}(p) \bar{u}_r^{(-)}(p)] = \Lambda^{(+)}(p).$$

Отсюда, учитывая (6.6) — (6.8), получаем

$$\sum_{r=1}^2 u_r^{(+)} \bar{u}_r^{(+)} = \frac{\hat{p} + M}{2M}. \quad (6.9)$$

Аналогичным образом для состояния с отрицательной энергией (античастица) найдем

$$\sum_{r=1}^2 u_r^{(-)} \bar{u}_r^{(-)} = \Lambda^{(-)} = \frac{\hat{p} - M}{2M}.$$

Таким образом, чтобы найти выражение для дифференциального сечения в случае, когда оба бариона не поляризованы, надо подставить в (6.4)

$$\Lambda_1 = \frac{(\hat{p}_1 + M)}{2M}, \quad \Lambda_2 = \frac{\hat{p}_2 + M}{2M}. \quad (6.10)$$

При усреднении по поляризациям бариона формулы (6.10) надо умножить на $1/2$.

Если спин одной из частиц (например, конечной) равен $3/2$, а начальной $1/2$, то вместо (6.1) будем иметь

$$M = \bar{u}_\nu(p_2) O, u(p_1) \quad \text{и} \quad |M|^2 = \text{Sp } \Lambda_{\mu\nu}(p_2) O \Lambda(p_1) \bar{O}_{\mu\nu},$$

причем

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu}(p) &= \sum_r \bar{u}_\mu^r(p_1) u_\nu^r(p_1) = \\ &= \frac{\hat{p} + M}{2M} \left\{ \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{1}{3M} (p_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu p_\mu) - \frac{2}{3M^2} p_\mu p_\nu \right\}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Если спины и начальной и конечной частицы равны $\frac{3}{2}$, то

$$M = \bar{u}_\mu(p_2) O_{\mu\nu} u_\nu(p_1)$$

и

$$|M|^2 = \text{Sp } \Lambda_{\alpha\beta}(p_2) O_{\beta\gamma} \Lambda_{\gamma\delta}(p_1) \bar{O}_{\delta\alpha}.$$

Если мы интересуемся поляризацией бариона, то величина Λ определяется так:

$$u\bar{u} = \Lambda^s = \frac{1}{4M} (\hat{p} + M) (1 - \gamma_5 \hat{s}).$$

Здесь

$$\hat{s} = s_\alpha \gamma_\alpha$$

и

$$s_0 = \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n})}{M}, \quad \mathbf{s} = \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{n}) \mathbf{p}}{M(M+E)},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении поляризации частицы в той системе координат, в которой частица покоится, причем $s^2 = -1$ и $(s\mathbf{p}) = 0$.

Следовательно, чтобы найти выражение для дифференциального сечения процесса в случае, когда поляризованы и начальный и конечный барион, надо в (6.4) подставить

$$\Lambda_1 = \frac{1}{4M} (\hat{p}_1 + M) (1 - \gamma_5 \hat{s}_1); \quad \Lambda_2 = \frac{1}{4M} (\hat{p}_2 + M) (1 - \gamma_5 \hat{s}_2). \quad (6.12)$$

Приведем для справок некоторые формулы для вычисления шпуров.

1. Шпур от произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю:

$$\text{Sp } \gamma_\mu = 0, \quad \text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = 0 \text{ и т. д.} \quad (6.13)$$

2. Шпур n -матриц не меняется при их циклической перестановке:

$$\text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta = \text{Sp } \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu = \text{Sp } \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu \gamma_\nu \text{ и т. д.,}$$

а также при изменении их порядка на обратный

$$\text{Sp } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \dots \gamma_\rho \gamma_\sigma = \text{Sp } \gamma_\sigma \gamma_\rho \dots \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\mu$$

3. $\text{Sp } I = 4$.

4. $\text{Sp } \gamma_5 = 0$ (так как $\text{Sp } \gamma_5 = \text{Sp } \gamma_0 \gamma_0 \gamma_5 = \text{Sp } \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = -\text{Sp } \gamma_5$).

5. $\text{Sp } \hat{a} \hat{b} = 4 (ab)$.

6. $\text{Sp } \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} = 4 [(ab)(cd) + (ad)(bc) - (ac)(bd)]$.

7. $\text{Sp } \hat{a} \hat{b} \hat{c} \hat{d} \hat{e} \hat{f} = 4 [(ab)(cd)(ef) + (af)(bc)(de) + (ab)(cf)(de) + (ad)(bc)(ef) + (af)(be)(cd) - (ac)(be)(df) + (ad)(bf)(ce) + (ae)(bd)(cf) - (af)(bd)(ce) - (ad)(be)(cf) - (ab)(ce)(df) - (ac)(bd)(ef) - (ac)(bf)(de) - (ae)(bc)(df) - (ae)(bf)(cd)]$.

Множественный шпур, содержащий одинаковые скалярные произведения, можно свести к комбинации шпуров меньшей кратности. Например, $\text{Sp}(\gamma a)(\gamma b)(\gamma a)(\gamma d) = \text{Sp}(\gamma a)[-(\gamma a)(\gamma b) + (ab)](\gamma d) = -a^2 \text{Sp}(\gamma b)(\gamma d) + (ab) \text{Sp}(\gamma a)(\gamma d)$. Кроме того, при вычислении шпуров полезно использовать следующие формулы:

$$\begin{aligned} \gamma, a\gamma, &= 4a; & \gamma, \hat{a}\hat{b}\gamma, &= 4ab; \\ \gamma, \hat{a}\gamma, &= -2\hat{a}; & \gamma, \hat{a}\hat{b}\hat{c}\gamma, &= -2\hat{c}\hat{b}\hat{a}. \end{aligned}$$

Найдем вид $|M|^2$ для некоторых процессов (нумерация процессов и обозначения те же, что в § 2 и 3).

$$5. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^- + \frac{1^+}{2} \quad \text{[см. формулу (2.4)].}$$

Если оба бариона не поляризованы, то, имея в виду выражение для амплитуды (2.4) и формулы (6.4) и (6.10), найдем

$$\begin{aligned} 4M^2 |M|^2 &= \text{Sp}(\hat{p}_2 + M)[T_1 + T_2 \hat{Q}](\hat{p}_1 + M)[T_1^* + T_2^* \gamma_0 \hat{Q}^+ \gamma_0] = \\ &= \text{Sp}[T_1 \hat{p}_2 + T_2 \hat{p}_2 \hat{Q} + T_1 M + T_2 M \hat{Q}][T_1^* \hat{p}_1 + T_2^* \hat{p}_1 \hat{Q} + \\ &+ MT_1^* + MT_2^* \hat{Q}] = \text{Sp}\{|T_1|^2(\hat{p}_2 \hat{p}_1) + MT_2 T_1^*(\hat{Q} \hat{p}_1) + \\ &+ |T_2|^2 \hat{p}_2 \hat{Q} \hat{p}_1 \hat{Q} + T_1 T_2^* M(\hat{p}_1 \hat{Q}) + T_2 T_1^* M(\hat{p}_2 \hat{Q}) + \\ &+ |T_1|^2 M^2 + MT_2^* T_1(\hat{p}_2 \hat{Q}) + M^2 |T_2|^2 \hat{Q} \hat{Q}\}, \end{aligned} \quad (6.14)$$

где $M_1 = M_2 = M$ — массы барионов.

Шпуры, содержащие нечетное число матриц γ , равны нулю и мы их опустили. Вычисление оставшихся слагаемых дает

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\hat{p}_2 \hat{p}_1) &= 4(p_2 p_1); & \text{Sp} \hat{Q} \hat{Q} &= 4Q^2; \\ \text{Sp}(\hat{Q} \hat{p}_1) &= 4(Q p_1); \\ \text{Sp} \hat{p}_2 \hat{Q} \hat{p}_1 \hat{Q} &= 4[2(p_2 Q)(p_1 Q) - (p_2 p_1) Q^2]. \end{aligned}$$

Подставив последние выражения в (6.14) и учитывая (4.11), получим

$$\begin{aligned} 4M^2 |M|^2 &= |T_1|^2 [4(p_1 p_2) + M^2] + |T_2|^2 [4\{2(p_2 Q)(p_1 Q) - \\ &- [(p_1 p_2) - M^2] Q^2\} + 8\text{Re} T_1^* T_2 M [(p_1 Q) + (p_2 Q)]]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$18. \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \gamma^- + \frac{1^+}{2} \quad \text{(см. формулу 3.7).}$$

Производя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем в случае, когда все частицы не поляризованы:

$$\begin{aligned} 4M^2 |M|^2 &= (4M^2 - t)[|T_1|^2 + 2|T_3|^2] + (s - M^2)(M^2 - u)[|T_2|^2 + \\ &+ |T_4|^2] + [2M(s - u)\text{Re}(T_1 T_2^* + T_3 T_4^*) - 2t|T_5|^2 + \\ &+ 2[(s - M^2)(M^2 - u) + M^2 t]|T_6|^2, \end{aligned} \quad (6.16)$$

где $s = (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2$; $u = (p_1 - k_2)^2 = (p_2 - k_1)^2$; $t = (p_2 - p_1)^2 = (k_2 - k_1)^2$.

**ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАРЯДОВОГО
СОПРЯЖЕНИЯ**

§ 1. Частицы и античастицы

Каждой частице с положительным зарядом можно сопоставить такую же частицу с отрицательным зарядом или, говоря по-другому, каждой частице можно сопоставить античастицу. При этом нейтральная частица сопоставляется сама себе. Подчеркнем, что частица отличается от античастицы не только знаками электрического заряда, а следовательно, и магнитного момента, но также знаками и других «зарядовых» квантовых чисел: барионного заряда, странности, гиперзаряда (о которых мы будем говорить далее, в гл. 10).

Операцию замены частицы античастицей обычно называют зарядовым сопряжением.

§ 2. Инвариантность относительно зарядового сопряжения и преобразование волновых функций частиц

Инвариантность относительно зарядового сопряжения означает, что физические законы и соответствующие им уравнения не изменятся, если все частицы заменить античастицами. Иначе говоря, закономерности «мира» и «антимира» эквивалентны.

Рассмотрим, как преобразуются волновые функции частиц при зарядовом сопряжении.

Бозонные поля. Чтобы выяснить, как преобразуется при операции зарядового сопряжения волновая функция электромагнитного $A_\mu(k)$ и скалярного $\phi(q)$ полей, рассмотрим уравнение для скалярного поля $\phi(q)$ в присутствии электромагнитного поля. Для получения такого уравнения, надо в уравнении для свободного скалярного поля заменить 4-импульс $q_\mu \rightarrow q_\mu - eA_\mu(k)$; тогда

$$[q_\mu - eA_\mu(k)]^2 - m_s^2 \phi(q) = 0. \quad (2.1)$$

При комплексном сопряжении ($q_\mu \rightarrow -q_\mu$) это уравнение переходит в следующее

$$[q_\mu + eA_\mu^c(k)]^2 - m_s^2 \phi^*(q') = 0 \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2) инвариантны относительно следующих преобразований волновых функций:

$$\left. \begin{aligned} A_\mu(k) \rightarrow A_\mu^c(k') = -A_\mu(k), \quad (\text{или } \varepsilon_\mu \rightarrow \varepsilon_\mu^c = -\varepsilon_\mu); \\ \phi(q) \rightarrow \phi^c(q') = \eta_c \phi^*(q), \quad \phi^*(q) \rightarrow \phi^{*c}(q') = \eta_c^* \phi(q). \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Выражение для тока J_μ мезонного поля Φ

$$J_\mu = -ie \left[\frac{\partial \Phi^*(x)}{\partial x_\mu} \Phi(x) - \Phi^*(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\mu} \right]$$

при преобразованиях (2.3) меняет знак. Следовательно, преобразование (2.3) волновых функций бозонов соответствует зарядовому сопряжению.

Если $\Phi(q)$ — действительная функция, соответствующая нейтральной частице, то η_c — действительное число, причем $\eta_c^2 = 1$ и $\eta_c = \pm 1$ (см. гл. 2, § 1). Это означает, что $C\Phi = \pm\Phi$, т. е. состояние отдельной нейтральной частицы является собственной функцией оператора C зарядового сопряжения. Собственное значение η_c называется зарядовой четностью частицы.

Правило преобразования волновой функции векторного поля $U_\mu(q)$ при зарядовом сопряжении выглядит следующим образом:

$$U_\mu(q) \rightarrow U_\mu^c(q') = \eta_c U_\mu(q). \quad (2.4)$$

Соответственно $\xi_\mu \rightarrow \xi_\mu^c = \eta_c \xi_\mu^*$; для нейтральных вектонов $\xi_\mu \rightarrow \xi_\mu^c = \pm \xi_\mu$, причем верхний знак относится к зарядово четным ($\eta_c = +1$), а нижний — к зарядово нечетным вектонам ($\eta_c = -1$).

Барионное поле. Волновая функция барионов при зарядовом сопряжении преобразуется более сложным образом из-за ее матричного характера. При зарядовом сопряжении волновая функция $u(p)$ бариона также переходит в комплексно сопряженную функцию $u^*(p)$. Вместо последней обычно используют более удобную дираковски сопряженную функцию $\bar{u}(p) = u^+ \gamma_0$. Однако одного преобразования комплексного сопряжения в данном случае, в отличие от бозонных полей, недостаточно. Действительно, заменив в уравнении Дирака $(\hat{p} - M)u(p) = 0$ для бариона волновую функцию $u(p) \rightarrow \bar{u}(p)$ и импульс $p \rightarrow -p$, получим уравнение Дирака для антибариона

$$\bar{u}(-p)(\hat{p} + M) = 0. \quad (2.5)$$

Как видно, уравнения для бариона и антибариона выглядят поразному. С другой стороны, если имеет место инвариантность относительно зарядового сопряжения, то барион и антибарион должны входить в теорию симметрично, т. е. описываться одним и тем же уравнением Дирака. Чтобы этого добиться, подействуем на $\bar{u}(p)$

дополнительно таким унитарным оператором C , который приведет к зарядово сопряженной функции

$$u^c(p') = u^c(-p) = C\bar{u}^\tau(-p), \quad (2.6)$$

удовлетворяющей тому же уравнению, что и функция $u(p)$:

$$(\hat{p} - M)C\bar{u}^\tau(-p) = 0. \quad (2.7)$$

Для нахождения вида оператора C возьмем от обеих частей уравнения (2.5) транспонированное и умножим полученный результат слева на C :

$$C(\gamma^\tau p)\bar{u}^\tau(-p) + M\bar{u}^\tau(-p) = 0.$$

Функция $C\bar{u}^\tau(-p)$ удовлетворяет уравнению (2.7), если

$$C\gamma_\mu^\tau = \gamma_\mu C \quad \text{или} \quad C^{-1}\gamma_\mu^\tau C = -\gamma_\mu. \quad (2.8)$$

Требуемыми свойствами обладает оператор $C = \eta_c \gamma_2 \gamma_0$, так как $(\gamma_2 \gamma_0)^{-1} \gamma_\mu \gamma_2 \gamma_0 = -\gamma_\mu^\tau$. Кроме того,

$$C^+ = C^{-1} = C, \quad C = -C^\tau, \quad C^* = -C, \quad C^{-1}C = 1. \quad (2.9)$$

Спинор $C\bar{u}^\tau(-p)$ называется зарядово сопряженным к $u(p)$.

Как преобразуется при зарядовом сопряжении спинор $\bar{u}(p)$? Так как

$$u(p) \rightarrow u^c(p') = C\bar{u}^\tau(-p) = C [u^+(\dots) \gamma_0]^\tau = C \gamma_0^\tau u^{+\tau}(-p),$$

то, взяв эрмитово сопряженное, получим

$$u^+(\dots) \rightarrow u^{+c}(p') = u^\tau(-p) \gamma_0^{+\tau} C^+$$

или после умножения обеих частей на γ_0 и учета (2.8) и (2.9)

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) \rightarrow u^{+c}(p') \gamma_0 &= u^\tau(-p) \gamma_0 C^+ \gamma_0 = \\ &= u^\tau(-p) \gamma_0 (-\gamma_0 C^+) = -u^\tau(-p) C. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{u}(p) \rightarrow \bar{u}^c(-p) = -u^\tau(-p) C. \quad (2.10)$$

Преобразования, обратные (2.6) и (2.10), выглядят так:

$$u(p) = C\bar{u}^{\text{CT}}(-p); \quad (2.11)$$

$$\bar{u}(p) = -u^{\text{CT}}(-p)C. \quad (2.12)$$

Частицы со спином 3/2. Волновая функция $u_{\mu}^s(p)$ частицы со спином 3/2 является одновременно и вектором (по индексу μ) и спинором (по индексу s): Поэтому функция $u_{\mu}^s(p)$ при зарядовом сопряжении будет преобразовываться как вектор по индексу μ

$$u_{\mu}^s(p) \rightarrow (u_{\mu}^s)^c(p') = \eta_c u_{\mu}^s(p)$$

и как спинор — по индексу s

$$u_{\mu}^s(p) \rightarrow (u_{\mu}^s)^c(p') = C\bar{u}_{\mu}^{\text{ST}}(-p).$$

§ 3. Инвариантность амплитуд процессов относительно зарядового сопряжения

В гл. 3 были получены для амплитуд различных процессов выражения, удовлетворяющие требованиям релятивистской и градиентной инвариантности, а также инвариантности относительно инверсии пространства. Как показывает опыт, для процессов, обусловленных сильными и электромагнитными взаимодействиями, имеет место инвариантность относительно зарядового сопряжения.

Выясним, какие ограничения на амплитуду процесса налагает требование инвариантности относительно зарядового сопряжения. Напомним, что упругим называют процесс, у которого частицы начального и конечного состояния одинаковы; например рассеяние фотонов на протонах ($\gamma p \rightarrow \gamma p$), рассеяние электронов на протонах ($ep + ep$), рассеяние π -мезонов на протонах ($\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p$, $\pi^- p \rightarrow \pi^- p$) и т. д.

Если же в конечном состоянии образуются другие частицы по сравнению с начальными, то процесс называется неупругим; например фотообразование и электрообразование π -мезонов на нуклонах ($\gamma N \rightarrow N\pi$, $eN \rightarrow eN\pi$), рассеяние электронов на нуклонах с образованием изобары ($eN \rightarrow eN^*$) и т. п.

Для неупругих реакций исходный и зарядово сопряженный процессы различны. В этом случае требование инвариантности относительно зарядового сопряжения приводит лишь к связи между этими различными процессами и их амплитудами и, естественно, дополнительных ограничений на амплитуду не накладывает.

Иной будет ситуация для упругих процессов. Чтобы в этом убедиться, удобнее рассмотреть вместо упругой реакции $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ (см. рис. 4.1) реакцию $2 + \bar{2}' \rightarrow \bar{1} + 1'$ (третий канал исход-

ного процесса — см. гл. 15, § 1), у которой электрический заряд начального и конечного состояний равен нулю; например, вместо $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ рассмотрим $\pi^+\pi^- \rightarrow p\bar{p}$ и т. п. Для нейтральных реакций такого типа исходный и зарядово сопряженный процессы совпадают (частицы и античастицы — тождественные в обобщенном смысле). Тогда из требования инвариантности относительно зарядового сопряжения вытекает, что выражения для амплитуд обеих реакций должны быть одинаковыми. Поэтому те из инвариантных комбинаций, которые при зарядовом сопряжении меняют знак, следует отбросить.

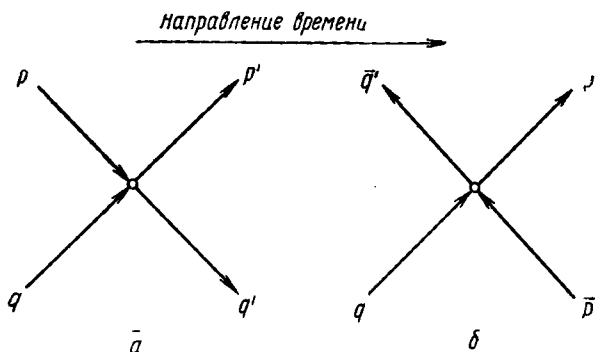


Рис. 4.1. Схема процесса:
 $a - 1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$; $b - 2 + \bar{2}' \rightarrow \bar{1} + 1'$.

Тем самым требование инвариантности относительно зарядового сопряжения может привести к ограничениям на амплитуды некоторых (не всех!) упругих процессов $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$. Для нахождения этих ограничений, установим, как преобразуется выражение для амплитуды процесса (причем за исходную можно выбрать либо реакцию $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$, либо $2 + \bar{2}' \rightarrow \bar{1} + 1'$, так как они простым образом связаны друг с другом).

При зарядовом сопряжении процесс с частицами переходит в процесс с античастицами. Любую входящую линию на рис. 4.1, a можно рассматривать (не изменяя стрелки) как частицу в начальном или античастицу в конечном состоянии, а каждую выходящую линию — как конечную частицу или начальную античастицу. Поэтому амплитуды реакций $1 + 2 \rightarrow 1' + 2'$ и $\bar{1} + \bar{2} \rightarrow \bar{1}' + \bar{2}'$ будут связаны так:

$$\begin{aligned}
 M(p_f, p_i) &\equiv \int e^{ip_f y} \Phi^+(p_f) \mathfrak{M}(y, x) e^{-ip_i x} \Phi(p_i) dx dy \rightarrow \\
 &\rightarrow \int [e^{ip_i x} \Phi^+(p_i)]^c \mathfrak{M}(x, y) [e^{-ip_f y} \Phi(p_f)]^c dx dy. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

Если все частицы — бозоны, то правая часть (3.1) после использования правил преобразования волновых функций при зарядовом сопряжении переписется так

$$M^c(p_f, p_i) \equiv \int e^{-ip_i x} \Phi(p_i') \mathfrak{M}(x, y) e^{ip_f y} \Phi^*(p_f') dx dy = M(-p_i, -p_f), \quad (3.2)$$

т. е. для получения зарядово сопряженной амплитуды надо в исходной амплитуде поменять местами начальные и конечные координаты, 4-импульсы и векторы поляризации частиц (в частности, для фотона $\varepsilon_i \xleftrightarrow{\quad} -\varepsilon_f$). При этом переменные s и t , а следовательно, функции $T_i(s, t)$ остаются без изменения.

Амплитуда процесса будет инвариантной относительно преобразования зарядового сопряжения, если знаки ее исходного и преобразованного выражений совпадут. Те комбинации в амплитуде, которые не удовлетворяют этому требованию, должны быть отброшены.

Легко убедиться, что выражения (2.1), (3.3) гл. 3 для амплитуд упругих процессов инвариантны относительно зарядового сопряжения.

Если две частицы (например 1 и 1') являются барионами, то правая часть формулы (3.1) переходит в такую (волновые функции бозонов опущены):

$$M^c(p_f, p_i) \equiv \int e^{-ip_i x} \bar{u}^c(p_i') \mathfrak{M}(x, y) e^{ip_f y} u^c(p_f') dx dy. \quad (3.3)$$

После замены $x \xleftrightarrow{\quad} y$, подстановки соответствующих формул (2.6), (2.10), использования соотношения $u_a^T(p_2) O_{\alpha\beta} \bar{u}_\beta^T(p_1) = \bar{u}_\beta(p_1) (O^T)_{\beta\alpha} u_\alpha(p_2)$ получим вместо (3.3)

$$M^c(p_f, p_i) = \bar{u}(p_f) C \mathfrak{M}^T(-p_i, -p_f) C u(p_i), \quad (3.4)$$

т. е. в этом случае надо дополнительно транспонировать \mathfrak{M} и умножить его справа и слева на оператор C .

Рассмотрим несколько примеров упругих процессов (нумерация процессов и обозначения те же, что в гл. 3).

$$5. 0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+ \quad [\text{см. гл. 3, формула (2.4)}].$$

При зарядовом сопряжении $Q \rightarrow -Q$ и инвариантные комбинации преобразуются так:

$$\bar{u}(p_2) u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \rightarrow \bar{u}(p_2) u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2);$$

$$R_1 \equiv \bar{u}(p_2) Q_\mu \gamma_\mu u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \bar{u}(p_2) (-Q_\mu) C \gamma_\mu^T C u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) = R_1,$$

т. е. выражение (2.4), гл. 3 для амплитуды инвариантно относительно зарядового сопряжения.

$$9. \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \quad [\text{см. гл. 3, формула (2.8)}].$$

При зарядовом сопряжении

$$K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2) \rightarrow -K, \quad P \rightarrow -P, \quad Q \rightarrow Q$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_5 &\rightarrow C\gamma_5^T C = \gamma_5; \\ \gamma_\mu P_\mu &\rightarrow C\gamma_\mu^T P_\mu C = C\gamma_\mu^T C (-P_\mu) = \gamma_\mu P_\mu; \\ \gamma_\mu K_\mu &\rightarrow \gamma_\mu K_\mu; \\ \gamma_5 \gamma_\mu P_\mu &\rightarrow C\gamma_\mu^T \gamma_5^T (P_\mu) C = C\gamma_\mu^T \gamma_5^T C (-P_\mu) = \\ &= (-\gamma_\mu) \gamma_5 (-P_\mu) = -\gamma_5 \gamma_\mu P_\mu; \\ \gamma_5 \gamma_\mu K_\mu &\rightarrow -\gamma_5 \gamma_\mu K_\mu; \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} R_2 &\equiv \bar{u}(p_2) (\gamma P) u(p_1) \bar{u}(k_2) (\gamma K) u(k_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) C (\gamma^T P) C u(p_1) \times \\ &\quad \times \bar{u}(k_2) C (\gamma^T K) C u(k_1) = R_2; \\ R_3 &\equiv \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma P) u(p_1) \bar{u}(k_2) \gamma_5 (\gamma K) u(k_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) C \times \\ &\quad \times (\gamma^T P) \gamma_5^T C u(p_1) \bar{u}(k_2) C (\gamma^T K) \gamma_5^T C u(k_1) = R_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогичным образом найдем

$$R_4 \rightarrow R_4, \quad R_5 \rightarrow R_5, \quad R_6 \rightarrow R_6, \quad R_7 \rightarrow -R_7, \quad R_8 \rightarrow -R_8. \quad (3.6)$$

Две последние комбинации в (3.6') меняют знак и потому должны быть отброшены. Если все частицы тождественны, то выражение для амплитуды, инвариантной относительно зарядового сопряжения, запишется в виде (2.9), гл. 3.

Для данного процесса требование инвариантности относительно зарядового сопряжения приводит к уменьшению числа независимых инвариантных слагаемых в амплитуде.

$$18. \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \gamma^- + \frac{1^+}{2} \quad [\text{см. гл. 3, формула (3.6)}].$$

При зарядовом сопряжении $\varepsilon_1 \leftrightarrow -\varepsilon_2$, $P \rightarrow -P$, $K \rightarrow -K$, $P' \rightarrow -P'$, $Q \rightarrow Q$, $\tilde{N}_\mu \rightarrow \tilde{N}_\mu$, поэтому

- 1) $\bar{u}(p_2)(P'\varepsilon_2)(P'\varepsilon_1)u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(P'\varepsilon_2)(P'\varepsilon_1)u(p_1)$;
- 2) $\bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)\bar{u}(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)u(p_1)$;
- 3) $R_2 \equiv \bar{u}(p_2)(P'\varepsilon_2)(P'\varepsilon_1)K_\mu\gamma_\mu u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(P'\varepsilon_2) \times$
 $\times (P'\varepsilon_1)CK_\mu\gamma_\mu^\tau Cu(p_1) = R_2$;
- 4) $R_4 \equiv \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)K_\mu\gamma_\mu u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2) \times$
 $\times (\tilde{N}\varepsilon_1)CK_\mu\gamma_\mu^\tau Cu(p_1) = R_4$;
- 5) $R_5 \equiv \bar{u}(p_2)(P'\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)\gamma_5 u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)C(P'\varepsilon_1) \times$ (3.7)
 $\times (\tilde{N}\varepsilon_2)\gamma_5^\tau Cu(p_1) = -R_5$;
- 6) $R_6 \equiv \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2)(P'\varepsilon_1)\gamma_5 u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)(P'\varepsilon_2) \times$
 $\times \gamma_5 u(p_1) = -R_6$;
- 7) $R_7 \equiv \bar{u}(p_2)(P'\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1)\gamma_5\gamma_\mu K_\mu u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2) \times$
 $\times (P'\varepsilon_1)C\gamma_\mu^\tau\gamma_5^\tau K_\mu Cu(p_1) = R_7$;
- 8) $R_8 \equiv \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_2)(P'\varepsilon_1)\gamma_5 K_\mu\gamma_\mu u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2)(\tilde{N}\varepsilon_1) \times$
 $\times (P'\varepsilon_2)\gamma_5 K_\mu\gamma_\mu u(p_1) = R_7$;

т. е. первые четыре комбинации остаются неизменными, пятая переходит в шестую и наоборот с изменением знака, а седьмая — в восьмую и наоборот без изменения знака. Иначе говоря, следующие две независимые комбинации инвариантны относительно зарядового сопряжения:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p_2)\gamma_5[(P'\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1) - (P'\varepsilon_1)(\tilde{N}\varepsilon_2)]u(p_1), \\ & \bar{u}(p_2)\gamma_5(\gamma K)[(P'\varepsilon_2)(\tilde{N}\varepsilon_1) + (P'\varepsilon_1)(\tilde{N}\varepsilon_2)]u(p_1). \end{aligned}$$

Две такие же комбинации с противоположными знаками не удовлетворяют требованиям инвариантности относительно зарядового сопряжения и потому должны быть отброшены. Следовательно, с учетом инвариантности относительно зарядового сопряжения выражение для амплитуды рассматриваемого процесса запишется в виде (3.7), гл. 3.

§ 4. Зарядовая четность. Правила отбора по зарядовой четности

Проанализируем подробнее свойства нейтральных частиц и нейтральных систем частиц.

Относительно операции зарядового сопряжения все нейтральные частицы и нейтральные системы частиц можно разделить на

два класса. К одному из них относятся те элементарные частицы и их системы, которые при зарядовом сопряжении переходят сами в себя. Такие частицы и системы частиц называются истинно нейтральными. Последними являются фотоны, нейтральные мезоны (π^0 , η^0 , ρ^0 , ω^0 , ϕ^0 , K_1^0 , K_2^0), позитроний (e^+e^-), протоний (p^+p^-) и т. п. Другой класс составляют нейтральные частицы и нейтральные системы частиц, которые не переходят сами в себя при зарядовом сопряжении. К ним относятся, например, нейтрон (антинейтрон обладает обратными по знаку магнитным моментом и барионным зарядом), атом водорода (при зарядовом сопряжении переходит в систему из позитрона и антипротона) и т. п.

Особый интерес представляют истинно нейтральные частицы и системы частиц. Так как они при зарядовом сопряжении переходят сами в себя, то волновые функции начальной Φ и преобразованной Φ^c системы могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем

$$\Phi^c = \eta_c \Phi.$$

С помощью оператора зарядового сопряжения C это равенство можно переписать так:

$$\Phi^c = C_c \Phi.$$

Повторяя те же рассуждения, которые были проведены в случае инверсии пространства (гл. 2, § 1), найдем, что при зарядовом сопряжении нейтральных систем возможны два типа волновых функций:

$$C\Phi = \Phi \quad \text{и} \quad C\Phi = -\Phi.$$

Величина η_c называется зарядовой четностью нейтральной системы. Как видно, зарядовая четность системы может быть либо положительной, либо отрицательной.

Зарядовая четность является мультипликативным квантовым числом: зарядовая четность системы, состоящей из нескольких истинно нейтральных частей, равна произведению зарядовых четностей частей.

Выясним, какова зарядовая четность истинно нейтральной системы, состоящей из частицы и античастицы (например, из электрона и позитрона, из π^+ - и π^- -мезонов и т. п.).

Будем описывать систему волновой функцией $\Phi(x_1, s_1, Q_1; x_2, s_2, Q_2)$, зависящей от координат x_1, x_2 , спинов s_1, s_2 и зарядов Q_1, Q_2 частицы и античастицы (причем $Q_1 = -Q_2$).

Для определения зарядовой четности системы используем обобщенный принцип Паули; тогда волновая функция системы из двух тождественных частиц при перестановке всех их характеристик (т. е. x, s и Q) либо не меняет знака (в случае бозонов), либо меняет его (в случае фермионов). С другой стороны, при перестановке заря-

дов ($Q_1 \leftrightarrow Q_2$) у функции Φ , по определению, появляется множитель η_c , характеризующий зарядовую четность системы:

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1; x_2, s_2, Q_2) = \eta_c \Phi(x_1, s_1, Q_2; x_2, s_2, Q_1).$$

При перестановке координат ($x_1 \leftrightarrow x_2$) частиц относительный радиус-вектор частиц меняет знак, поэтому (см. гл. 2, § 1) волновая функция Φ приобретает множитель $(-1)^l$, где l — орбитальный момент системы частица—античастица:

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1; x_2, s_2, Q_2) = (-1)^l \Phi(x_2, s_1, Q_1; x_1, s_2, Q_2).$$

Спиновая волновая функция Φ_s рассматриваемой системы выглядит так (см. Дополнение II):

$$\Phi(s_1 m_{s_1}; s_2 m_{s_2}) = C_{s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2}}^{s m_s} \Phi_1(s_1) \Phi_2(s_2),$$

где C — коэффициент Клебша—Гордана, s — полный спин системы, m_s — проекции спинов, Φ_1, Φ_2 — спиновые волновые функции частицы и античастицы.

Из свойства симметрии (см. Дополнение II) коэффициентов Клебша—Гордана и перестановочности функций Φ_1, Φ_2 следует, что при перестановке спинов частиц ($s_1 \leftrightarrow s_2, m_{s_1} \leftrightarrow m_{s_2}$) у функции появляется множитель $(-1)^{s-s_1-s_2}$, который с учетом равенства спинов частиц и античастиц ($s_1 = s_2$) запишется так: $\pm(-1)^s$; верхний знак относится к бозонам, а нижний — к фермионам, т. е.

$$\Phi(x_1, s_1, Q_1; x_2, s_2, Q_2) = \pm(-1)^s \Phi(x_1, s_2, Q_1; x_2, s_1, Q_2).$$

С учетом сказанного принцип Паули дает

$$\pm 1 = \eta_c (-1)^l [\pm (-1)^s].$$

Отсюда следует, что зарядовая четность η_c системы, состоящей из частицы и античастицы с произвольным спином, равна

$$\eta_c = (-1)^{l+s}, \quad (4.1)$$

где s — полный спин системы. Например, зарядовая четность позитрония, состоящего из электрона и позитрона, в основном состоянии ($l = 0$) с полным спином $s = 0$ (ортопозитроний) положительна. Зарядовая четность $\pi^+\pi^-$ -системы ($s = 0$) в p -состоянии ($l = 1$) отрицательна.

Если имеет место инвариантность относительно зарядового сопряжения, то зарядовая четность сохраняется, т. е. результирующая зарядовая четность системы до и после реакции должна быть одной и той же. Это приводит к определенным правилам отбора для реакций.

Прежде чем приводить примеры выясним, каковы зарядовые четности истинно нейтральных частиц (см. табл. I). Мы уже видели (см. § 2), что при зарядовом сопряжении волновая функция фотона меняет знак, т. е. фотон имеет отрицательную зарядовую четность $C_{\gamma} = -1$.

Из того факта, что покоящийся ($l = 0$) π^0 -мезон распадается на два фотона

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

и не распадается на три фотона

$$\pi^0 \not\rightarrow \gamma + \gamma + \gamma,$$

следует, что π^0 -мезон имеет положительную зарядовую четность: $C_{\pi^0} = +1$. По той же причине положительна зарядовая четность у η -мезона: $C_{\eta} = +1$.

Покоящийся ρ^0 -мезон не распадается на η^0 - и π^0 -мезоны:

$$\rho^0 \not\rightarrow \eta_0 + \pi^0$$

и распадается на π^+ - и π^- -мезоны:

$$\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-,$$

поэтому зарядовая четность ρ^0 -мезона, как следует из (4.1), отрицательна: $C_{\rho^0} = -1$.

Известно, что покоящийся ω^0 -мезон не распадается на три π^0 -мезона

$$\omega^0 \not\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$$

и распадается по схеме

$$\omega^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0,$$

причем система (π^+ , π^-)-мезонов образуется в антисимметричном состоянии. Оба эти факта указывают на то, что ω^0 -мезон имеет отрицательную зарядовую четность: $C_{\omega^0} = -1$.

Наконец, из существования распада ϕ^0 -мезона на K_1^0 - и K_2^0 -мезоны (обладающих противоположной зарядовой четностью): $\phi \rightarrow K_1^0 + K_2^0$ следует, что зарядовая четность ϕ^0 -мезона отрицательна.

Приведем примеры некоторых правил отбора, обусловленных тем, что существует инвариантность относительно зарядового сопряжения, т. е. имеет место закон сохранения зарядовой четности.

1. Некоторые из распадов покоящихся ($l = 0$) псевдоскалярных и векторных мезонов являются разрешенными, например

$$\omega^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma; \quad \omega^0 \rightarrow \pi^0 + e^+ + e^-; \quad \rho^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \gamma,$$

а некоторые — запрещенными, например

$$\omega^0 \rightarrow \rho^0 + \gamma; \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \gamma; \quad \eta^0 \rightarrow \pi^0 + e^+ + e^-; \quad \varphi^0 \rightarrow \omega^0 + \gamma.$$

2. Согласно (4.1), находящийся в основном состоянии ($l = 0$) паразитроний ($s = 0$) обладает положительной зарядовой четностью и может распадаться только на четное число фотонов, а находящийся в том же состоянии ортопозитроний ($s = 1$) обладает отрицательной зарядовой четностью и может распадаться только на нечетное число фотонов.

3. Запрещены все процессы, в которых нечетное число фотонов превращается в четное (так называемая теорема Фарри).

ГЛАВА 5

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ

§ 1. Преобразование физических величин и волновых функций

При физических исследованиях выбирают определенное направление течения времени: из прошлого в будущее. Инвариантность физических законов и соответствующих им уравнений относительно обращения времени означает, что законы и уравнения не изменятся, если изменить направление течения времени, т. е. сделать преобразование

$$x_0 \rightarrow x'_0 = -x_0.$$

При этом пространственные координаты остаются неизменными:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}.$$

Образно говоря, инвариантность относительно обращения времени означает следующее: если мы имеем кинофильм и запускаем его в обратном направлении, то наблюдаемая при этом картина описывается теми же уравнениями движения, что и идущая в прямом направлении.

Определенную так операцию обращения времени обычно называют слабым обращением времени (в отличие от сильного обращения времени, о котором мы скажем ниже).

При обращении времени физические величины преобразуются следующим образом.

1. Компоненты трехмерного импульса \mathbf{p} меняют знак $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, так как $\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt}$.

2. Энергия частицы знака не меняет: $E \rightarrow E' = E$, так как она зависит от импульса \mathbf{p} квадратично: $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

3. Момент количества движения, а также спин частицы изменяют знак $\mathbf{M} \rightarrow -\mathbf{M}$, $\sigma \rightarrow -\sigma$,

потому что

$$M = [gp].$$

Из перечисленных величин можно образовать комбинации, которые при обращении времени меняют знак

$$(\sigma [p_1 p_2]) \rightarrow -(\sigma [p_1 p_2])$$

и не меняют его

$$\sigma p \rightarrow \sigma p.$$

Выясним, как преобразуются волновые функции частиц при обращении времени. Из уравнения движения следует, что оператор T слабого обращения времени представляет собою произведение унитарного оператора T_u на оператор K комплексного сопряжения: $T = T_u K$.

1. **Бозонные поля.** С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые проводились в гл. 2 § 1 и гл. 4 § 2, найдем

$$\Phi(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow \Phi^t(p'_0, \mathbf{p}') = \eta_t \Phi^*(p_0, \mathbf{p}); \quad (1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} U(p_0, \mathbf{p}) &\rightarrow U^t(p'_0, \mathbf{p}') = \eta_t U^*(p_0, \mathbf{p}); \\ U_0(p_0, \mathbf{p}) &\rightarrow U_0^t(p'_0, \mathbf{p}') = \eta_t U_0^*(p_0, \mathbf{p}); \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} A(p_0, \mathbf{p}) &\rightarrow A^t(p'_0, \mathbf{p}') = -A(p_0, \mathbf{p}); \\ A_0(p_0, \mathbf{p}) &\rightarrow A_0^t(p'_0, \mathbf{p}') = A_0(p_0, \mathbf{p}). \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Аналогичным образом преобразуются компоненты векторов ϵ и ξ .

2. **Барийное поле.** Волновая функция барионов при обращении времени преобразуется более сложным образом из-за ее матричного характера. При обращении времени волновая функция бариона также переходит в комплексно сопряженную функцию $u^+(p)$. Вместо последней обычно берут функцию $\bar{u}(p) = u^+(p)\gamma_0$. Однако только преобразования комплексного сопряжения в данном случае недостаточно. Действительно, заменив в уравнении Дирака

$$(\gamma_0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) u_r(p_0, \mathbf{p}) = 0 \quad (1.4)$$

волновую функцию $u_r \rightarrow \bar{u}_{-r}(p_0, -\mathbf{p})$, проекции спина $r \rightarrow -r$ (так как $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^t \rightarrow -\boldsymbol{\sigma}$) и импульс $p_0 \rightarrow p_0$, $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, получим уравнение Дирака, обращенное во времени,

$$\bar{u}_{-r}(p_0, -\mathbf{p}) (\gamma_0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} - M) = 0. \quad (1.5)$$

Как видно, исходное и обращенное во времени уравнения Дирака выглядят по-разному.

С другой стороны, если имеет место инвариантность относительно обращения времени, то барион и «обращенный во времени» барион должны входить в теорию симметрично, т. е. описываться одним и тем же уравнением Дирака. Чтобы этого добиться, подействуем дополнительно на функцию $\bar{u}_r(p_0, \mathbf{p})$ таким унитарным оператором $\gamma_0 B$, который приведет к обращенной во времени функции

$$u_r(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow u_{-r}^t(p_0, -\mathbf{p}) = \gamma_0 B \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p}), \quad (1.6)$$

удовлетворяющей тому же уравнению, что и функции $u_r(p_0, \mathbf{p})$:

$$(p_0 \gamma_0 - \mathbf{p} \boldsymbol{\gamma} - M) \gamma_0 B \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p}) = 0. \quad (1.7)$$

Для нахождения вида оператора $\gamma_0 B$ возьмем от обеих частей уравнения (1.5) транспонированное и умножим полученный результат слева на $\gamma_0 B$:

$$\gamma_0 p_0 B \gamma_0^T \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p}) + \gamma_0 B \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{p} \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p}) - M \gamma_0 B \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p}) = 0. \quad (1.8)$$

Функция $\gamma_0 B \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p})$ будет удовлетворять уравнению (1.7), если

$$B \gamma_0^T = \gamma_0 B, \quad B \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma} B \quad \text{или} \quad B \boldsymbol{\gamma}_\mu = \boldsymbol{\gamma}_\mu B. \quad (1.9)$$

Требуемым свойством обладает оператор $B = i \gamma_3 \gamma_1$, причем

$$B^{-1} B = 1, \quad B^\dagger = B^{-1}, \quad B^T = -B, \quad B^* = -B.$$

Формулу (1.6) можно переписать так

$$u_r(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow u_{-r}^t(p_0, -\mathbf{p}) = \gamma_0 B \gamma_0 u_{-r}^*(p_0, -\mathbf{p}) = B u_{-r}^*(p_0, -\mathbf{p}). \quad (1.10)$$

Проверим, что при таком преобразовании волновой функции меняют также знак и проекции r спина бариона, как этого требует преобразование обращения времени. Для этого надо показать, что соответствующие функциям $u_r(p_0, \mathbf{p})$, а также функциям $\gamma_0 B \bar{u}_{-r}^T(p_0, -\mathbf{p})$ или $B u_{-r}^*(p_0, -\mathbf{p})$ собственные значения оператора S_z проекции спина бариона на ось z имеют противоположные знаки, т. е. если

$$S_z u_r = r u_r, \quad (1.11)$$

то

$$S_z (B u^*) = -r (B u^*). \quad (1.12)$$

Оператор S_z проекции спина на ось z выглядит так:

$$S_z = \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2 \gamma_1}{2i}, \quad (1.13)$$

причем $S_z^\dagger = S_z$, $S_z^* = S_z^T$ и

$$B S_z^T = B \frac{\gamma_2^T \gamma_1^T - \gamma_1^T \gamma_2^T}{2i} = \frac{\gamma_2 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2}{2i} B = -S_z B.$$

Беря от (1.11) комплексно сопряженное

$$S_z^* u_r^* = S_z^T u_r^* = r u_r^*$$

и умножая обе части этого равенства на B

$$B S_z^* u_r^* = -S_z (B u_r^*) = r (B u_r^*),$$

получаем соотношение (1.12).

Чтобы найти, как преобразуется при обращении времени сопряженный спинор $\bar{u}(p_0, \mathbf{p})$, возьмем от (1.10) эрмитово сопряженное и учтем, что $B^+ = B^{-1}$:

$$u^+(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow u^T(p_0, -\mathbf{p}) B^{-1}.$$

Умножение на γ_0 дает

$$u^+(p_0, \mathbf{p}) \gamma_0 \rightarrow u^T(p_0, -\mathbf{p}) B^{-1} \gamma_0,$$

т. е.

$$\bar{u}(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow [\bar{u}(p_0, \mathbf{p})]^t = u^T(p_0, -\mathbf{p}) B^{-1} \gamma_0. \quad (1.14)$$

3. Частицы со спином 3/2. Волновая функция $u_\mu^s(p_0, \mathbf{p})$ частицы со спином 3/2 является одновременно и вектором (по индексу μ), и спинором (по индексу s). Поэтому функция $u_\mu^s(p_0, \mathbf{p})$ при обращении времени преобразуется как вектор по индексу μ :

$$u^s(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow [u^s(p_0, \mathbf{p})]^t = \eta_t u^{*s}(p_0, \mathbf{p});$$

$$u_0^s(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow [u_0^s(p_0, \mathbf{p})]^t = \eta_t u_0^{*s}(p_0, \mathbf{p})$$

и как спинор—по индексу s :

$$u_\mu^s(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow [u_\mu^s(p_0, \mathbf{p})]^t = \gamma_0 B \bar{u}_\mu^{sT}(p_0, -\mathbf{p});$$

$$\bar{u}_\mu^s(p_0, \mathbf{p}) \rightarrow [\bar{u}_\mu^s(p_0, \mathbf{p})]^t = u_\mu^{sT}(p_0, -\mathbf{p}) B^{-1} \gamma_0.$$

§ 2. Инвариантность амплитуд процессов относительно обращения времени

В гл. 3 были получены для амплитуд различных процессов выражения, удовлетворяющие требованиям релятивистской и градиентной инвариантности, а также инвариантности относительно инверсии пространства. Как показывает опыт, для процессов, обусловленных сильными и электромагнитными взаимодействиями, имеет место инвариантность относительно обращения времени.

Выясним, какие ограничения на амплитуду процесса налагает требование инвариантности относительно обращения времени.

Для неупругих реакций (см. гл. 4, § 3) исходный и обращенный во времени процессы различны. В этом случае требование инвариантности относительно обращения времени приводит лишь к связи между этими различными процессами, а, следовательно, их амплитудами, и, естественно, дополнительных ограничений на амплитуды не накладывает.

Для упругих реакций исходный и обращенный во времени процессы совпадают. В этом случае из требования инвариантности относительно обращения времени вытекает, что выражения для амплитуд обоих процессов должны быть одинаковыми. Поэтому те из инвариантных комбинаций, которые меняют знак, следует отбросить. Тем самым требование инвариантности относительно обращения времени может привести к ограничениям на амплитуды некоторых (не всех!) упругих процессов. Чтобы найти эти ограничения, надо установить, как преобразуется выражение для амплитуды.

При обращении времени начальное и конечное состояния меняются местами, т. е. амплитуда преобразуется таким образом:

$$\begin{aligned} & \Phi_4^+(p_{40}, p_4) \Phi_3^+(p_{30}, p_3) \mathfrak{M}(p_{40}, p_4, p_{30}, p_3; p_{20}, p_2, p_{10}, p_1) \times \\ & \times \Phi_2(p_{20}, p_2) \Phi_1(p_{10}, p_1) \rightarrow [\Phi_2^+(p_{20}, p_2)]^t [\Phi_1^+(p_{10}, p_1)]^t \times \\ & \times \mathfrak{M}(p_{20}, -p_2, p_{10}, -p_1; p_{40}, -p_4, p_{30}, -p_3) [\Phi_3(p_{30}, p_3)]^t [\Phi_4(p_{40}, p_4)]^t. \end{aligned}$$

С помощью формулы $\Phi^+(p_i) \mathfrak{M} \Phi(p_f) = \Phi(p_f) \mathfrak{M}^T \Phi^+(p_i)$ правый член последнего соотношения запишется в виде

$$\begin{aligned} & [\Phi_4(p_{40}, p_4)]^t [\Phi_3(p_{30}, p_3)]^t \mathfrak{M}^T(p_{20}, -p_2, p_{10}, -p_1; p_{40}, -p_4, p_{30}, -p_3) \times \\ & \times [\Phi_2^+(p_{20}, p_2)]^t [\Phi_1^+(p_{10}, p_1)]^t. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Если все частицы — бозоны, то $\mathfrak{M}^T = \mathfrak{M}$, и последнее выражение переписется так:

$$\begin{aligned} & \Phi_4^*(p_{40}, p_4) \Phi_3^*(p_{30}, p_3) \mathfrak{M}(p_{20}, -p_2, p_{10}, -p_1; p_{40}, -p_4, p_{30}, -p_3) \times \\ & \times \Phi_2(p_{20}, p_2) \Phi_1(p_{10}, p_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Как видно, в этом случае при обращении времени в исходном выражении для амплитуды надо: 1) поменять местами начальные и конечные четырехмерные импульсы $p_i \leftrightarrow p_f$, а также векторы поляризации $\varepsilon_i \leftrightarrow \varepsilon_f$, 2) изменить на обратный знак у пространственных частей перечисленных векторов. При этом не меняются

1) скалярные произведения четырехмерных векторов

$$(fq) \rightarrow (fq)^t = p_0 q_0 - (-\mathbf{p}) \cdot (-\mathbf{q}) = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (pq);$$

2) переменные s и t : $s = (p_1 + p_2)^2 \rightarrow (p_3 + p_4)^2 = s$; $t = (p_3 - p_1)^2 \rightarrow (p_4 - p_2)^2 = t$, а следовательно, и скалярные функции $T_i(s, t)$.

Амплитуда процесса будет инвариантной относительно обращения времени, если знаки ее исходного и преобразованного выражений совпадут. Поэтому те комбинации в амплитуде, которые не удовлетворяют этому требованию, должны быть отброшены.

Непосредственно видно, что выражения (2.1), (3.3), гл. 3 для амплитуд упругих процессов не меняются при обращении времени.

Если две частицы (например, 1 и 3) — барионы, то вместо (2.1) получаем, учитывая (1.6) и (1.14),

$$\begin{aligned}
 & u^t(p'_3) \Phi_4^t(p'_4) \mathfrak{M}^\tau(p_{20}, -p_2, p_{10}, -p_1; p_{40}, -p_4, p_{30}, -p_3) \times \\
 & \quad \times \bar{u}^t(p'_1) \Phi_2^{+t}(p'_2) = \bar{u}(p_3) B^\tau \gamma_0^\tau \Phi_4^*(p_4) \times \\
 & \times \mathfrak{M}^\tau(p_{20}, -p_2, p_{10}, -p_1; p_{40}, -p_4, p_{30}, -p_3) \gamma_0^\tau B^{-1\tau} u(p_1) \Phi_2(p_2) = \\
 & = \bar{u}(p_3) \Phi_4^*(p_4) B \gamma_0 \mathfrak{M}^\tau(p_{20}, -p_2, p_{10}, -p_1; p_{40}, -p_4, p_{30}, -p_3) \times \\
 & \quad \times \gamma_0 B^{-1} u(p_1) \Phi_2(p_2), \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

т. е. в этом случае при операции обращения времени в исходном выражении для амплитуды процесса надо произвести кроме указанных в случае бозонов операций еще транспонирование \mathfrak{M} и умножение его на оператор $B\gamma_0$ слева и $\gamma_0 B^{-1}$ — справа.

Рассмотрим несколько примеров упругих процессов (нумерация и обозначения те же, что в гл. 3).

$$5. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^- + \frac{1^+}{2} \quad (\text{см. гл. 3, формула 2.4}).$$

Согласно (2.3), при обращении времени инвариантные комбинации преобразуются так:

$$\begin{aligned}
 R_1 & \equiv \bar{u}(p_2) u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \rightarrow \bar{u}(p_2) B \gamma_0 \gamma_0 B^{-1} u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) = R_1; \\
 R_2 & \equiv \bar{u}(p_2) Q_\mu \gamma_\mu u(p_1) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) \rightarrow \bar{u}(p_2) B \gamma_0 (Q_0 \gamma_0^\tau + \mathbf{Q} \boldsymbol{\gamma}^\tau) \times \\
 & \quad \times \gamma_0 B^{-1} \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) = R_2.
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $M^t(s, t) = M(s, t)$.

$$9. \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \quad (\text{см. гл. 3, формула 2.8}).$$

При обращении времени

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 & \rightarrow B \gamma_0 \gamma_5^\tau \gamma_0 B = -\gamma_5; \quad \gamma_\mu P_\mu \rightarrow B \gamma_0 \gamma_\mu^\tau P_\mu \gamma_0 B = \gamma_\mu P_\mu; \\
 \gamma_\mu^\tau K_\mu & \rightarrow \gamma_\mu K_\mu, \quad \gamma_5 \gamma_\mu P_\mu \rightarrow \gamma_5 \gamma_\mu P_\mu; \quad \gamma_5 \gamma_\mu K_\mu \rightarrow \gamma_5 \gamma_\mu K_\mu
 \end{aligned}$$

и инвариантные комбинации преобразуются следующим образом (см. вычисления в случае процесса 5):

$$R_1 \rightarrow R_1, \quad R_2 \rightarrow R_2, \quad R_3 \rightarrow R_3, \quad R_4 \rightarrow R_4, \quad R_5 \rightarrow R_5, \quad R_6 \rightarrow R_6, \\ R_7 \rightarrow -R_7, \quad R_8 \rightarrow -R_8.$$

Как видно, эти комбинации преобразуются при обращении времени так же, как при зарядовом сопряжении [см. формулы (3.5), гл. 4]. Поэтому выражение для амплитуды процесса, если все частицы тождественны, запишется в виде (2.9), гл. 3. Иначе говоря, требование инвариантности как относительно зарядового сопряжения, так и относительно обращения времени приводит к одним и тем же ограничениям на амплитуду.

18. $\gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \gamma^- + \frac{1}{2}^+$ (см. гл. 3, формула 3.6). При обращении времени

$$1) \bar{u}(p_2) (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) u(p_1);$$

$$2) \bar{u}(p_2) (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) u(p_1);$$

$$3) R_2 \equiv \bar{u}(p_2) (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) \hat{K} u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) (P' \epsilon_2) (P' \epsilon_1) \hat{K} u(p_1) = R_2;$$

$$4) R_4 \equiv \bar{u}(p_2) (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \hat{K} u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) (\tilde{N} \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \hat{K} u(p_1) = R_4;$$

$$5) R_5 \equiv \bar{u}(p_2) \gamma_5 (P' \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) u(p_1) \rightarrow -\bar{u}(p_2) \gamma_5 (P' \epsilon_1) (\tilde{N} \epsilon_2) \times \\ \times u(p_1) = -R_6;$$

$$6) R_6 \equiv \bar{u}(p_2) \gamma_5 (P' \epsilon_1) (\tilde{N} \epsilon_2) u(p_1) \rightarrow -\bar{u}(p_2) \gamma_5 (P' \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \times \\ \times u(p_1) = -R_5;$$

$$7) R_7 \equiv \bar{u}(p_2) \gamma_5 (P' \epsilon_2) (\tilde{N} \epsilon_1) \hat{K} u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) \gamma_5 (P' \epsilon_1) (\tilde{N} \epsilon_2) \times \\ \times \hat{K} u(p_1) = R_8;$$

$$8) R_8 \equiv \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\tilde{N} \epsilon_2) (P' \epsilon_1) \hat{K} u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\tilde{N} \epsilon_1) (P' \epsilon_2) \times \\ \times \hat{K} u(p_1) = R_7,$$

т. е. эти комбинации преобразуются при обращении времени так же, как и при зарядовом сопряжении [см. формулы (3.7), гл. 4]. Поэтому выражение для амплитуды процесса запишется в виде (3.7), гл. 3. Другими словами, требование инвариантности относительно зарядового сопряжения приводит к тем же ограничениям на амплитуду, что и требование инвариантности относительно обращения времени.

**ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛЬНОГО
ОТРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ**

§ 1. CPT-теорема

Мы рассмотрели отдельно операции инверсии пространства и обращения времени.

Можно ввести операцию R_s

$$x_\mu \rightarrow x_\mu^R = -x_\mu, \quad (1.1)$$

одновременно изменяющую направление пространственных осей и времени. Операция R_s получила название сильного отражения пространства — времени.

Сильное отражение пространства — времени содержит в себе не только инверсию пространства и обращение времени, но и преобразование, при котором меняют знак четырехмерные величины, в частности 4-импульс, т. е. R_s содержит также и преобразование зарядового сопряжения. Иначе говоря, R_s -преобразование является произведением P -, T - и C -преобразований

$$R_s = CPT.$$

Если существует инвариантность относительно R_s -преобразований, то это означает, что имеет место инвариантность относительно произведения трех преобразований: C , P и T , взятых в любом порядке.

Как показывает анализ, инвариантность относительно R_s -преобразования существует только для теорий, которые обладают следующими свойствами: 1) являются релятивистски инвариантными, 2) в них частицы с полуцелым спином подчиняются статистике Ферми, а с целым — статистике Бозе, 3) они относятся к классу локальных теорий, т. е. в них частицы рассматриваются точечными.

Инвариантность относительно R_s -преобразования получила название *CPT-теоремы*, или теоремы Паули—Людерса. В дальнейшем мы будем предполагать, что *CPT-теорема* выполняется.

Комбинацию сильного отражения пространства — времени R_s и инверсии пространства P называют сильным отражением времени T_s , т. е. $T_s = R_s P$.

Слабое обращение времени, T_w , о котором шла речь в предыдущей главе, связано с сильным обращением пространства — времени так:

$$R_w = R_s C.$$

Слабое обращение пространства — времени R_w представляет собой комбинацию сильного обращения пространства — времени и зарядового сопряжения

$$T_w = R_s CP.$$

§ 2. Следствия *CPT*-теоремы

Перечислим коротко основные следствия *CPT*-теоремы.

1. Отсутствие какой-либо одной инвариантности влечет за собой нарушение по крайней мере одной из двух других инвариантностей. Так, несохранение *P*-четности требует либо отсутствия инвариантности относительно зарядового сопряжения, либо нарушение инвариантности относительно обращения времени (либо того и другого вместе).

2. Если существует инвариантность относительно произведения двух преобразований, то имеется инвариантность и относительно третьего преобразования. Например, из *CP*-инвариантности следует *T*-инвариантность и, наоборот, из *T*-инвариантности следует *CP*-инвариантность и т. д.

Так как *T*-инвариантность полностью эквивалентна *CP*-инвариантности, то вместо комбинированной *CP*-четности можно говорить о временной четности и, следовательно, вместо сохранения комбинированной четности — о сохранении временной четности.

3. Массы частиц и античастиц равны.

4. Полные времена жизни частиц и античастиц равны.

§ 3. Инвариантность относительно сильного отражения пространства — времени и амплитуды процессов

Мы уже установили, как преобразуются физические величины и волновые функции при *C*-, *P*- и *T*-преобразованиях порознь. Беря их произведение, получаем закон преобразования величин и функций при сильном отражении пространства — времени.

Естественно, тот же результат можно получить, используя непосредственно уравнения для свободных частиц.

Операторы уравнений для скалярного, векторного и электромагнитного полей инвариантны относительно замены $x_\mu \rightarrow -x_\mu$, поэтому волновые функции указанных полей преобразуются так:

$$\varphi(p) \rightarrow \varphi^R(-p) = \eta_R \varphi(p); \quad (3.1)$$

$$U_\mu(p) \rightarrow U_\mu^R(-p) = \eta_R U_\mu(p); \quad (3.2)$$

$$A_\mu(p) \rightarrow A_\mu^R(-p) = \eta_R A_\mu(p). \quad (3.3)$$

Уравнение Дирака

$$(\hat{p} - M) u(p) = 0 \quad (3.4)$$

после R_s -преобразования примет вид

$$(-\hat{p} - M) R_s u(p) = 0. \quad (3.5)$$

Чтобы это уравнение сводилось к (3.4), оператор R_s должен удовлетворять условию

$$R_s^{-1}(-\hat{p}-M)R_s = (\hat{p}-M).$$

Таким свойством обладает оператор $R_s = \eta_R \gamma_5$ (где $|\eta_R|^2 = 1$).

$$\gamma_5^{-1}(-\hat{p}-M)\gamma_5 = -\gamma_5^{-1}\hat{p}\gamma_5 - M = \gamma_5^{-1}\gamma_5\hat{p} - M = \hat{p} - M.$$

Следовательно, при сильном отражении пространства — времени спинор $u(p)$ преобразуется следующим образом:

$$u(p) \rightarrow u^R(p') = \eta_R \gamma_5 u(p), \quad (3.6)$$

причем

$$\bar{u}(p) \rightarrow \bar{u}^R(p') = -\eta_R \bar{u}(p) \gamma_5. \quad (3.7)$$

Произвольная билинейная комбинация спиноров, если учесть (3.6) и (3.7), преобразуется так:

$$\bar{u} O u \rightarrow -\bar{u} \gamma_5 O \gamma_5 u. \quad (3.8)$$

Покажем теперь, что выражения для амплитуд, полученные нами в гл. 3, инвариантны относительно сильного обращения пространства — времени. В самом деле, в выражение для амплитуд входят: 1) волновые функции частиц; 2) скалярные произведения 4-векторов; 3) скалярные произведения матрицы γ и 4-вектора (если в реакции участвуют фермионы)

При сильном отражении пространства — времени:

1) волновые функции частиц, согласно (3.1 — 3.3), (3.6) и (3.7), переходят сами в себя;

2) хотя, согласно (1.1), знак у каждого 4-импульса меняется на обратный, скалярное произведение двух 4-векторов не изменится:

$$p_\mu q_\mu \rightarrow (-p_\mu)(-q_\mu) = p_\mu q_\mu;$$

3) скалярные произведения двух векторов p_μ , q_μ или матрицы γ_μ и 4-вектора импульса p_μ преобразуются, согласно (3.8), так:

$$p_\mu q_\mu \rightarrow \gamma_5 (-p_\mu)(-q_\mu) \gamma_5 = \gamma_5^2 p_\mu q_\mu = p_\mu q_\mu;$$

$$p_\mu \gamma_\mu \rightarrow \gamma_5 \gamma_5 (-p_\mu)(-\gamma_\mu) = p_\mu \gamma_\mu,$$

т. е. такие скалярные произведения остаются без изменения.

Следовательно, полученные в гл. 3 выражения для амплитуд процессов инвариантны относительно R_s -преобразования. Иначе

говоря, требование инвариантности относительно R_3 -преобразования дополнительных ограничений на амплитуду процесса не накладывает. Отсюда следует, что если амплитуда инвариантна относительно двух каких-либо преобразований, то она будет автоматически инвариантна относительно третьего. Допустим, амплитуда инвариантна относительно P - и S -преобразований, тогда она инвариантна и относительно T -преобразования. Другими словами, достаточно проверить инвариантность амплитуды относительно двух преобразований. На конкретных примерах мы в этом неоднократно убеждались (см. гл. 4 и 5).

ГЛАВА 7

СПИНОВАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУД И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕЧЕНИЯ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ЧЕТЫРЕХ ЧАСТИЦ В СИСТЕМЕ ЦЕНТРА МАСС

Мы закончили изложение вопросов, связанных с построением инвариантной спиновой структуры амплитуды процесса. При конкретных вычислениях необходимо выбрать определенную систему координат. Наиболее удобна из них система центра масс (с. ц. м.). Сейчас мы переходим к построению амплитуд процесса в с.ц.м.

§ 1. Кинематика процесса в с.ц.м.

Рассмотрим процесс

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4,$$

в котором две стабильные частицы сталкиваются и превращаются в две, вообще говоря, другие частицы. Пусть $E_1, E_2, E_3, E_4, m_1, m_2, m_3, m_4$ — полные энергии и массы частиц, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ — их трехмерные импульсы.

Система центра масс характеризуется тем, что (рис. 7.1)

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \quad \text{и} \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4, \quad (1.1)$$

причем θ — угол рассеяния частиц в с.ц.м.

В с.ц.м. для рассматриваемого процесса имеется только два независимых трехмерных импульса.

Запишем выражения для основных величин в с. ц. м.:

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{p}_1| &= \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = |\mathbf{p}_2| = \sqrt{E_2^2 - m_2^2}; \\ |\mathbf{p}_3| &= \sqrt{E_3^2 - m_3^2} = |\mathbf{p}_4| = \sqrt{E_4^2 - m_4^2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

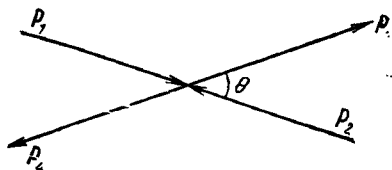


Рис. 7.1. Кинематика процесса в с.ц.м.

поэтому

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = W^2 = \\ = (E_1 + \sqrt{E_1^2 + m_2^2 - m_1^2})^2 = (E_2 + \sqrt{E_2^2 + m_1^2 - m_2^2})^2 = (E_3 + \\ + \sqrt{E_3^2 + m_4^2 - m_3^2})^2 = (E_4 + \sqrt{E_4^2 + m_3^2 - m_4^2})^2. \quad (1.3)$$

Из последней формулы следует, что

$$E_1 = \frac{s - m_2^2 + m_1^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_2 = \frac{s - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{s}}; \\ E_3 = \frac{s - m_4^2 + m_3^2}{2\sqrt{s}}; \quad E_4 = \frac{s - m_3^2 + m_4^2}{2\sqrt{s}}. \quad (1.4)$$

Отсюда

$$p_1^2 = p_2^2 = \frac{(s - m_2^2 + m_1^2)^2}{4s} - m_1^2$$

или в симметричной относительно частиц 1 и 2 форме

$$p_1^2 = p_2^2 = \frac{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}{4s}; \quad (1.5)$$

кроме того,

$$p_3^2 = p_4^2 = \frac{[s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]}{4s}. \quad (1.5')$$

Аналогичным образом получим

$$t = (p_3 - p_1)^2 = m_3^2 + m_1^2 - 2p_3 p_1 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|p_1||p_3| \cos \theta.$$

Подстановка в эту формулу выражений (1.4) и (1.5) дает

$$t = m_1^2 + m_3^2 - \frac{1}{2s} \left\{ [s - m_2^2 + m_1^2][s - m_4^2 + m_3^2] \frac{1}{2s} + \right. \\ \left. + \cos \theta \sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]} \right\}.$$

Отсюда сразу получается выражение для $\cos \theta$ в зависимости от s , t и масс частиц:

$$-\cos \theta = \frac{2s(m_3^2 + m_1^2 - t) - (s - m_2^2 + m_1^2)(s - m_4^2 + m_3^2)}{\sqrt{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]}}. \quad (1.6)$$

Амплитуда рассматриваемого процесса зависит от двух величин (см. гл. 3, § 1), в качестве которых можно выбрать $W = \sqrt{s}$ и $\cos \theta$. Поэтому мы будем записывать амплитуду в виде $F(W, \theta)$.

Выражение для амплитуды в с.ц.м. по-прежнему запишется в виде (1.7), гл. 3, но только теперь надо взять все входящие в эту

формулу функции и величины в с.ц.м., т. е.

$$F(W, \theta) = \Phi_3^+(q_3) \Phi_4^+(q_4) S'_{fi} \Phi_1(q_1) \Phi_2(q_2), \quad (1.7)$$

где $S'_{fi} = S_{fi} - I$; $\Phi(q)$ — волновые функции в с. ц. м.

Если в реакцию фермионы не входят, S_{fi} зависит лишь от трехмерных импульсов и поляризаций частиц; если же в реакцию входят и фермионы, то S_{fi} зависит еще и от спиновых матриц фермиона σ .

Построим выражения для амплитуд в с.ц.м., инвариантные относительно преобразований Лоренца, инверсии пространства и обращения времени. Подчеркнем, что фактически речь идет об инвариантной амплитуде, только записанной в другой форме.

Конечно, в выражение для амплитуды должны входить независимые спиновые комбинации. Их число для инвариантной амплитуды и амплитуды в с.ц.м. одно и то же и может быть подсчитано тем же способом, который был применен в гл. 3.

§ 2. Спиновая структура амплитуды в с.ц.м. (сильное взаимодействие)

Рассмотрим сначала некоторые процессы, обусловленные сильным взаимодействием. Как показывает опыт, в этом случае имеет место инвариантность относительно P -, T - и C -преобразований.

В этой главе мы будем обозначать импульсы начальной и конечной систем соответственно k и k' , а их единичные векторы — \hat{k} и \hat{k}' , так что $\hat{k} = k/|k|$ и $\hat{k}' = k'/|k'|$. Удобно сделать неизвестные функции $F_i(W, \theta)$ безразмерными, поэтому в выражения для амплитуд войдут единичные векторы \hat{k} и \hat{k}' (и соответственно единичные векторы поляризации $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\xi}$).

$$1. 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

Волновые функции $\tilde{\varphi}(q)$ четырех псевдоскалярных частиц образуют скаляр $\tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}^*(q_4)$, а два независимых трехмерных импульса k и k' — произвольную скалярную функцию инвариантов W и $\cos \theta$. Поэтому

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}^*(q_4). \quad (2.1)$$

$$2. 0^- + 0^+ \rightarrow 0^- + 0^-.$$

Волновые функции частиц образуют псевдоскаляр $\tilde{\varphi}(q_1) \times \varphi(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}^*(q_4)$. Из двух трехмерных импульсов k и k' нельзя образовать псевдоскаляр. Реакция запрещена законом сохранения пространственной четности (см. гл. 2, § 1).

$$3. 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-.$$

Из трехмерных импульсов k , k' и вектора поляризации вектона ξ можно образовать один псевдоскаляр $\xi[kk']$.

Следовательно,

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta) (\hat{\xi} [\hat{k} \hat{k}']) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3). \quad (2.2)$$

$$4. 0^+ + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-.$$

Из векторов \hat{k} , \hat{k}' и $\hat{\xi}$ можно образовать два независимых скаляра, содержащих $\hat{\xi}$: $\hat{k}\hat{\xi}$ и $\hat{k}'\hat{\xi}$. Поэтому

$$F(W, \theta) = [F_1(W, \theta) (\hat{k} \hat{\xi}) + F_2(W, \theta) (\hat{k}' \hat{\xi})] \varphi(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3). \quad (2.3)$$

$$5. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^- + \frac{1^+}{2}.$$

Из векторов \hat{k} , \hat{k}' и σ можно образовать два независимых скаляра: 1 и $(\sigma\hat{k})$ $(\sigma\hat{k}')$; следовательно,

$$F(W, \theta) = \chi_f^+ \{F_1(W, \theta) + F_2(W, \theta) (\sigma\hat{k}) (\sigma\hat{k}')\} \chi_i \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_3), \quad (2.4)$$

где χ_f , χ_i — двухкомпонентные волновые функции конечного и начального барионов (см. гл. 1, § 6).

Если в качестве независимых выбрать скаляры $(\hat{k}\hat{k}')$ и $(\sigma[\hat{k}'\hat{k}])$, то

$$F(W, \theta) = \chi_f^+ \{F_1(W, \theta) + iF_2(W, \theta) (\sigma[\hat{k}'\hat{k}])\} \chi_i \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_3). \quad (2.4')$$

Амплитуда инвариантна относительно обращения времени:

$$\sigma[\hat{k}'\hat{k}] \rightarrow (-\sigma)[(-\hat{k})(-\hat{k}')] = \sigma[\hat{k}'\hat{k}].$$

$$6. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^+ + \frac{1^+}{2}.$$

Из векторов \hat{k} , \hat{k}' , σ можно образовать два независимых псевдоскаляра: $\hat{k}\sigma$ и $\hat{k}'\sigma$, тогда

$$F(W, \theta) = \chi_f^+ [F_1(W, \theta) (\hat{k}\sigma) + F_2(W, \theta) (\hat{k}'\sigma)] \chi_i \tilde{\varphi}(q_1) \varphi^*(q_3). \quad (2.5)$$

$$7. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 1^-.$$

Из векторов \hat{k} , \hat{k}' , σ , $\hat{\xi}$ можно образовать шесть независимых псевдоскаляров:

$$(\sigma\hat{k}') (\sigma[\hat{k}\hat{\xi}]), \sigma\hat{\xi},$$

$$(\sigma\hat{k}) (\hat{k}'\hat{\xi}), (\sigma\hat{k}') (\hat{k}'\hat{\xi}), (\sigma\hat{k}) (\hat{k}\hat{\xi}), (\sigma\hat{k}') (\hat{k}\hat{\xi}).$$

Следовательно,

$$F(W, \theta) = \chi_f^+ [F_1 i(\sigma\hat{\xi}) + F_2 (\sigma\hat{k}') (\sigma[\hat{k}\hat{\xi}]) + F_3 (\sigma\hat{k}) (\hat{k}'\hat{\xi}) + F_4 i(\sigma\hat{k}') (\hat{k}'\hat{\xi}) + F_5 i(\sigma\hat{k}) (\hat{k}\hat{\xi}) + F_6 i(\sigma\hat{k}') (\hat{k}\hat{\xi})] \chi_i \tilde{\varphi}(q_1). \quad (2.6)$$

В случае реакции $0^- + 1/2^+ \rightarrow 1/2^+ + 1^+$ из величин $k, k', \sigma, \tilde{\xi}$ можно образовать шесть независимых скаляров, которые получаются из предыдущих заменой $\tilde{\xi} \rightarrow \tilde{\xi}$.

$$8. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{3^-}{2} + 0^-.$$

Выражение для амплитуды процесса можно получить с помощью формулы (2.4), если в ней заменить χ_f^+ на $\chi_{f'}^+$ и умножить полученные выражения порознь на k_i и k_j .

Для частицы $\frac{3^+}{2}$ надо взять вместо (2.4) выражение (2.5)

$$9. \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2}.$$

Введем единичные векторы

$$\hat{K} = \frac{k' - k}{|k' - k|}, \quad \hat{P} = \frac{k' + k}{|k' + k|}, \quad \hat{n} = \frac{[k' k]}{|[k k']|}. \quad (2.7)$$

Из векторов $K, P, n, \sigma^1, \sigma^2$ можно образовать восемь независимых скаляров: $(\sigma^1 n) (\sigma^2 n), \sigma^1 n + \sigma^2 n, \sigma^1 n - \sigma^2 n, (\sigma^1 P) (\sigma^2 P), (\sigma^1 K) \times (\sigma^2 K), (\sigma^1 K) (\sigma^2 P), (\sigma^1 P) (\sigma^2 K), ([\sigma^1 \sigma^2] n)$.

Так как при обращении времени $\sigma \rightarrow -\sigma, K \rightarrow K, n \rightarrow -n, P \rightarrow -P$, то комбинации $([\sigma^1 \sigma^2] n), (\sigma^1 K) (\sigma^2 P), (\sigma^1 P) (\sigma^2 K)$ меняют знак и должны быть отброшены. Следовательно,

$$\begin{aligned} F(W, \theta) = & F_1 \chi_f^{+(1)} \chi_i^{(1)} \chi_f^{+(2)} \chi_i^{(2)} + F_2 \chi_f^{+(1)} (\sigma \hat{n}) \chi_i^{(1)} \chi_f^{+(2)} (\sigma \hat{n}) \chi_i^{(2)} + \\ & + F_3 [\chi_f^{+(1)} (\sigma \hat{n}) \chi_i^{(1)} \chi_f^{+(2)} \chi_i^{(2)} + \chi_f^{+(2)} (\sigma \hat{n}) \chi_i^{(2)} \chi_f^{+(1)} \chi_i^{(1)}] + F_4 \chi_f^{+(1)} \times \\ & \times (\sigma \hat{K}) \chi_i^{(1)} \chi_f^{+(2)} (\sigma \hat{K}) \chi_i^{(2)} + F_5 \chi_f^{+(1)} (\sigma \hat{P}) \chi_i^{(1)} \chi_f^{+(2)} (\sigma \hat{P}) \chi_i^{(2)} + \\ & + F_6 [\chi_f^{+(1)} (\sigma \hat{n}) \chi_i^{(1)} \chi_f^{+(2)} \chi_i^{(2)} - \chi_f^{+(2)} (\sigma \hat{n}) \chi_i^{(2)} \chi_f^{+(1)} \chi_i^{(1)}]. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Если частицы тождественны, то (2.8) не должно меняться при замене частиц $1 \leftrightarrow 2$. Этому требованию не удовлетворяет последнее слагаемое, поэтому оно должно быть отброшено и в случае тождественных частиц:

$$\begin{aligned} F(W, \theta) = & \chi_f^{+(1)} \chi_f^{+(2)} [F_1 + F_2 (\sigma^1 \hat{n}) (\sigma^2 \hat{n}) + F_3 (\sigma^1 \hat{n} + \sigma^2 \hat{n}) + \\ & + F_4 (\sigma^1 \hat{K}) (\sigma^2 \hat{K}) + F_5 (\sigma^1 \hat{P}) (\sigma^2 \hat{P})] \chi_i^{(1)} \chi_i^{(2)}. \quad (2.9) \end{aligned}$$

§ 3. Спinoвая структура амплитуды
в с.ц.м. (электромагнитное взаимодействие адронов)

Теперь построим амплитуды в с.ц.м. для процессов, обусловленных сильным и электромагнитным взаимодействиями. Как показывает опыт, в этом случае имеет место инвариантность относительно инверсии пространства, обращения времени и зарядового сопряжения.

$$10. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

Из векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}' и $\boldsymbol{\varepsilon}$ можно образовать один псевдоскаляр $\boldsymbol{\varepsilon}[\mathbf{k} \mathbf{k}']$, т. е.

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta) (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} [\hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}']) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}^*(q_4). \quad (3.1)$$

$$11. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+.$$

В отличие от процесса 4, в данном случае можно образовать лишь один скаляр $\mathbf{k}' \boldsymbol{\varepsilon}$, так как $\mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon} = 0$. Поэтому

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta) (\mathbf{k}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3) \varphi^*(q_4). \quad (3.2)$$

$$12. \gamma_b^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

Выражение для амплитуды в с. ц. м. уже найдено (см. 2.2).

$$13. \gamma_b^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+.$$

Выражение для амплитуды в с. ц. м. уже получено (см. 2.3).

$$14. \gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + \gamma^-.$$

Из векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}' , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}'$ можно образовать два следующих независимых скаляра, содержащих одновременно $\boldsymbol{\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}'$: $\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}'$ и $(\mathbf{k}' \boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{k} \boldsymbol{\varepsilon}')$. Следовательно,

$$F(W, \theta) = [F_1(W, \theta) (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}') + F_2(W, \theta) (\hat{\mathbf{k}}' \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) (\hat{\mathbf{k}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}')] \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_3). \quad (3.3)$$

$$15. \gamma^- + 0^- \rightarrow \gamma^- + 0^+.$$

Из векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}' , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\varepsilon}'$ можно образовать два независимых псевдоскаляра $\mathbf{k}[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}']$, $\mathbf{k}'[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}']$.

Поэтому

$$F(W, \theta) = [F_1(W, \theta) (\hat{\mathbf{k}} [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}']) + F_2(W, \theta) (\hat{\mathbf{k}}' [\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'])] \tilde{\varphi}(q_1) \varphi^*(q_3). \quad (3.4)$$

$$16. \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-.$$

Из векторов $k, k', \sigma, \varepsilon$ можно образовать четыре независимых псевдоскаляра: $\sigma\varepsilon, (\sigma k')(\sigma[k\varepsilon]), (\sigma k')(k'\varepsilon), (\sigma k)(k'\varepsilon)$, т. е.

$$F(W, \theta) = \chi_f^+ [F_1(W, \theta) i(\sigma\hat{\varepsilon}) + F_2(W, \theta) (\sigma k')(\sigma[\hat{k}\hat{\varepsilon}]) + \\ + F_3(W, \theta) i(\sigma\hat{k})(\hat{k}'\hat{\varepsilon}) + F_4(W, \theta) i(\sigma k')(\hat{k}'\hat{\varepsilon})] \chi_i \tilde{\varphi}^*(q_3). \quad (3.5)$$

Это выражение можно также получить и из (2.6), если в нем заменить $\xi \rightarrow \varepsilon$ и опустить два последних члена, так как для реального фотона $k\varepsilon = 0$. Иногда вторую комбинацию выбирают в виде $i(\varepsilon[k'k])$.

$$17. \gamma_b^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-.$$

Выражение для амплитуды в с. ц. м. уже было получено [см. формулу (2.6)]

$$18. \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \gamma^-.$$

Из векторов $k, k', \varepsilon_1, \varepsilon_2$ можно образовать следующие восемь независимых скаляров: $\varepsilon_1 \varepsilon_2, ss', (\sigma[\varepsilon_2 \varepsilon_1]), (\sigma[ss']), (\sigma k)(s' \varepsilon_1), (\sigma k')(s \varepsilon_2), (\sigma k')(s' \varepsilon_1), (\sigma k)(s \varepsilon_2)$, где

$$s = [k\varepsilon_1], s' = [k' \varepsilon_2].$$

Однако при обращении времени пятая комбинация переходит в шестую, а седьмая — в восьмую с изменением знака в обоих случаях. Другими словами, четыре последние комбинации зависимы и из них можно образовать следующие две независимые комбинации, инвариантные относительно обращения времени:

$$(\sigma k)(s' \varepsilon_1) - (\sigma k')(s \varepsilon_2); (\sigma k')(s' \varepsilon_1) - (\sigma k)(s \varepsilon_2).$$

Тогда

$$F(W, \theta) = \chi_f^+ \{ F_1(W, \theta) (\hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_1) + F_2(W, \theta) (\hat{s} \hat{s}') + F_3(W, \theta) i \times \\ \times (\sigma[\hat{\varepsilon}_2 \hat{\varepsilon}_1]) + F_4(W, \theta) i (\sigma[\hat{s}' \hat{s}]) + F_5(W, \theta) i [(\sigma \hat{k})(\hat{s}' \hat{\varepsilon}_1) - \\ - (\sigma \hat{k}')(\hat{s} \hat{\varepsilon}_2)] + F_6(W, \theta) i [(\sigma \hat{k}')(\hat{s}' \hat{\varepsilon}_1) - (\sigma \hat{k})(\hat{s} \hat{\varepsilon}_2)] \} \chi_i. \quad (3.6)$$

$$19. \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 1^-.$$

Из векторов $k, k', \sigma, \varepsilon, \xi$ можно образовать двенадцать независимых скаляров, например, так: умножить четыре комбинации (3.5) порознь на $k\xi, \sigma[\xi k], k'\xi$.

$$20. \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{3^-}{2} + 0^-.$$

Проще всего получить спиновые комбинации из формулы (3.5), заменив в ней χ_{if}^+ на χ_{if}^+ и умножив полученные выражения порознь на k_j и k_j .

$$21. \gamma_b^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{3^+}{2} + 0^-.$$

Получить структуру амплитуды в с. ц. м. можно, например, так: в формуле (3.6) заменить χ_{if}^+ на χ_{if}^+ и умножить полученное выражение порознь на k_j и k_j .

§ 4. Переход от выражения для инвариантной амплитуды к выражению для амплитуды в с.ц.м. (сильное взаимодействие)

Полученные в гл. 3 инвариантные выражения для амплитуд также могут быть переписаны в с.ц.м. Естественно, при таком переходе можно добиться, чтобы спиновые комбинации совпадали с теми, которые входят в выражения для амплитуд в с.ц.м., найденные непосредственно в двух предыдущих параграфах. Тогда скалярные функции при спиновых комбинациях амплитуды в с.ц.м. будут содержать, вообще говоря, сумму скалярных функций $T_i(s, t)$ с некоторыми множителями. Однако в целом обе амплитуды в с.ц.м., полученные различными путями, должны быть равны друг другу. Поэтому, приравнивая коэффициенты при одинаковых спиновых комбинациях, получаем связь между функциями F_i и T_i .

Рассмотрим сначала амплитуды некоторых процессов, обусловленных сильным взаимодействием.

1. $0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-$ (см. гл. 3, формула 2.1).

При переходе в с. ц. м. $T(s, t)$ переходит в функцию $F_1(W, \theta)$, а волновые функции $\tilde{\varphi}(q)$ — в соответствующие волновые функции $\tilde{\varphi}(q)$ в с. ц. м. Поэтому, имея в виду формулу (2.1) гл. 3, найдем

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3) \tilde{\varphi}^*(q_4).$$

2. $0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-$ [см. гл. 3, формула (2.2)].

Полагая в формуле (2.2), гл. 3 последовательно $\delta = 0$, $\alpha = 0$, $\nu = 0$ и учитывая, что в с. ц. м. $q_1 = k$ и $q_3 = k'$, получим:

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\delta} q_{1\nu} q_{\alpha} k_{\delta} \tilde{\xi}_{\mu} = \frac{1}{2} W ([k k'] \tilde{\xi}).$$

Поэтому формула (2.2) гл. 3 в с. ц. м. запишется так:

$$F(W, \theta) = T_1 W \frac{1}{2} (\tilde{\xi} [k k']) \tilde{\varphi}(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3).$$

Сравнение этого выражения с (2.2) дает

$$\frac{1}{|k| |k'|} F_1 = \frac{1}{2} T_1 W.$$

3. $0^+ + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-$.

Инвариантное выражение для амплитуды определяется формулой (2.3) гл. 3. Так как $k'_\alpha U_\alpha = k'_\alpha \xi_\alpha = k'_0 \xi_0 - k' \xi = 0$, то $\xi_0 = \frac{1}{k'_0} (k' \xi)$.

С другой стороны,

$$Q_{1\mu} U_\mu = Q_{1\mu} \xi_\mu = Q_{10} \xi_0 - Q_1 \xi = Q_{10} \frac{1}{k'_0} (k' \xi) - Q_1 \xi;$$

$$Q_{2\mu} \xi_\mu = Q_{20} \xi_0 - Q_2 \xi = \frac{Q_{20}}{k'_0} (k' \xi) - Q_2 \xi.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.3) гл. 3, получаем

$$F(W, \theta) = \left[T_1 \left(\frac{Q_{10}}{k'_0} + 1 \right) (k' \xi) + T_2 \left(\frac{Q_{20}}{k'_0} - 1 \right) (k' \xi) + (T_1 + T_2) (k \xi) \right] \varphi_1(q_1) \tilde{\varphi}(q_2) \tilde{\varphi}^*(q_3).$$

Сравнение этого выражения с (2.3) дает:

$$\frac{1}{|k|} F_1(W, \theta) = T_1 + T_2;$$

$$\frac{1}{|k'|} F_2(W, \theta) = T_1 \left(\frac{Q_{10}}{k'_0} + 1 \right) + T_2 \left(\frac{Q_{20}}{k'_0} - 1 \right).$$

Тем самым найдено выражение для скалярных функций F_1, F_2 амплитуды в с.ц.м. через скалярные функции T_1, T_2 инвариантной амплитуды. Разрешая полученную систему уравнений относительно T_1, T_2 , находим выражение последних через F_1, F_2 .

4. $0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+$ [см. формулу (2.4), гл. 3].

Чтобы выделить в явном виде трехмерные импульсы частиц, перейдем от четырехкомпонентной записи инвариантной амплитуды [см. гл. 3, формула (2.4)] к двухкомпонентной, используя выражение

четырёхкомпонентных спиноров через двухкомпонентные [см. гл. 1, формулы (6.6) и (6.7)].

$$u(p_1) = N_1 \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix}, \bar{u}(p_2) = N_2 u^\dagger(p_2) \gamma_0 = N_2 (\varphi_2^\dagger, \chi_2^\dagger) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ = N_2 (\varphi_2^\dagger, -\chi_2^\dagger); \quad (4.1)$$

$$\chi_1 = \frac{\sigma p_1}{E_1 + M_1} \varphi_1, \chi_2 = \frac{\sigma p_2}{E_2 + M_2} \varphi_2. \quad (4.2)$$

Здесь $N_1 = \sqrt{\frac{E_1 + M_1}{2M_1}}$, $N_2 = \sqrt{\frac{E_2 + M_2}{2M_2}}$ — нормировочные множители, соответствующие выбранной нами нормировке спиноров: $\bar{u}u = 1$, $\varphi^\dagger \varphi = 1$, $\chi^\dagger \chi = 1$.

Рассмотрим первое слагаемое в формуле (2.4), гл. 3. Полагая $p_1 = -k$, $p_2 = -k'$ и $M_1 = M_2$, находим:

$$T_1 \bar{u}(p_2) u(p_1) = T_1 N_1 N_2 (\varphi_2^\dagger, -\chi_2^\dagger) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} = T_1 N_1 N_2 \varphi_2^\dagger \left[1, \frac{\sigma k'}{E_2 + M_2} \right] \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma k \\ E_1 + M_1 \end{pmatrix} \varphi_1 = T_1 N_1 N_2 \varphi_2^\dagger \left[1 - \frac{(\sigma k)(\sigma k')}{(E_1 + M_1)(E_2 + M_2)} \right] \varphi_1. \quad (4.3)$$

Аналогичным образом, перемножая матрицы во втором слагаемом [гл. 3, формула (2.4)], получаем, учитывая формулу (6.10), гл. 1:

$$T_2 \bar{u}(p_2) Q_\mu \gamma_\mu u(p_1) = T_2 N_1 N_2 \varphi_2^\dagger \left(1, \frac{\sigma k'}{E_2 + M_2} \right) [Q_0 \gamma_0 - \mathbf{Q} \boldsymbol{\gamma}] \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\sigma k \\ E_1 + M_1 \end{pmatrix} \varphi_1.$$

Последовательное перемножение матриц в этой форме дает:

$$Q_0 \gamma_0 - \mathbf{Q} \boldsymbol{\gamma} = \begin{vmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & -Q_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \sigma \mathbf{Q} \\ -\sigma \mathbf{Q} & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{2} (\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \\ \left(1, \frac{\sigma k'}{E_2 + M_2} \right) \left[\begin{vmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & -Q_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \sigma \mathbf{Q} \\ -\sigma \mathbf{Q} & 0 \end{vmatrix} \right] = \left| Q_0 - \frac{Q_0 (\sigma k')}{E_2 + M_2} \right| - \\ - \left| -\frac{(\sigma k') (\sigma \mathbf{Q})}{E_2 + M_2}, \sigma \mathbf{Q} \right| = \left| Q_0 + \frac{(\sigma k') (\sigma \mathbf{Q})}{E_2 + M_2}, -\frac{Q_0 (\sigma k')}{E_2 + M_2} - \sigma \mathbf{Q} \right|.$$

$$\begin{aligned}
& T_2 N_1 N_2 \varphi_2^\dagger \left| Q_0 + \frac{(\sigma \mathbf{k}')(\sigma \mathbf{Q})}{E_2 + M_2}, - \frac{Q_0 (\sigma \mathbf{k}')}{E_2 + M_2} - \sigma \mathbf{Q} \right| \left| \frac{1}{E_1 + M_1} \right| \varphi_1 = \\
& = N_1 N_2 T_2 \varphi_2^\dagger \left\{ Q_0 + \frac{k'^2}{2(E_2 + M_2)} + \frac{k_2}{2(E_1 + M_1)} + \left[\frac{1}{E_2 + M_2} + \frac{Q_0}{(E_2 + M_2)(E_1 + M_1)} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2(E_1 + M_1)} \right] (\sigma \mathbf{k}')(\sigma \mathbf{k}) \right\} \varphi_1 = T_2 N_1 N_2 \varphi_2^\dagger [a + b (\sigma \mathbf{k}')(\sigma \mathbf{k})] \varphi_1. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

Подставляя (4.3) и (4.4) в формулу (2.4), гл. 3 и собирая слагаемые с одинаковыми спиновыми комбинациями, находим

$$\begin{aligned}
F(W, \theta) = N_1 N_2 \varphi_2^\dagger \{ T_1 + a T_2 - [(E_1 + M_1)^{-1} (E_2 + M_2)^{-1} T_1 + \\
+ b T_2] (\sigma \mathbf{k}')(\sigma \mathbf{k}) \} \varphi_1 \tilde{\varphi}^*(q_2) \tilde{\varphi}(q_1).
\end{aligned}$$

Сравнение этого выражения с (2.4) дает

$$\left. \begin{aligned}
\frac{1}{N_1 N_2} F_1 &= T_1 + a T_2; \\
\frac{1}{|k||k'| N_1 N_2} F_2 &= - \frac{1}{(E_1 + M_1)(E_2 + M_2)} T_1 + b T_2
\end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

или после алгебраических преобразований коэффициентов (в случае $M_1 = M_2 = M$)

$$\left. \begin{aligned}
F_1 &= \frac{E + M}{2M} [T_1 + (W - M) T_2]; \\
F_2 &= \frac{E - M}{2M} [-T_1 + (W + M) T_2].
\end{aligned} \right\} \quad (4.5')$$

Так выражаются в данном случае функции F_1, F_2 , входящие в выражение (2.4) для амплитуды F в с.ц.м., через функции T_1, T_2 . Чтобы найти выражение T_i через F_i , надо разрешить систему (4.5') относительно T_i .

§ 5. Переход от выражения для инвариантной амплитуды к выражению для амплитуды в с.ц.м. (электромагнитное взаимодействие адронов)

Рассмотрим несколько примеров перехода от выражения для инвариантной амплитуды к выражению для амплитуды в с.ц.м. в случае процессов, обусловленных сильным и электромагнитным взаимодействиями.

1. $\gamma^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-$ (см. гл. 3, формула (3.1)).

Полагая в (3.1), гл. 3 последовательно $\delta = 0$, $\alpha = 0$, $\nu = 0$ и учитывая, что в с. ц. м. $q_1 = k$ и $q = k'$, а также, что $\varepsilon_0 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\delta} q_{1\nu} Q_\alpha k_\delta \varepsilon_\mu &= k_0 \tilde{\varepsilon}_{in10} q_{1i} Q_n \varepsilon_l + Q_0 \tilde{\varepsilon}_{i0n1} \varepsilon_l q_{1i} k'_n = (k_0 + q_0) \times \\ &\times \tilde{\varepsilon}_{0in1} k_i k'_n \varepsilon_l = (k_0 + q_0) ([kk'] \varepsilon) = W([kk'] \varepsilon). \end{aligned}$$

Подставляя это в формулу (3.1), гл. 3, находим

$$F(W, \theta) = T_1 W(\varepsilon [kk']).$$

Сравнение этого выражения с формулой (3.1) дает

$$F_1 = T_1 W |k ||k'|.$$

2. $1^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$ [см. гл. 3, формула (2.6)].

Для того чтобы выделить в явном виде пространственные части импульсов частиц, перейдем от четырехкомпонентной формы записи амплитуды $M(s, t)$ [см. гл. 3, формула (2.6)] к двухкомпонентной, воспользовавшись выражениями (4.1) и (4.2). Чтобы перейти в с.ц.м., положим $p_1 = -k$, $p_2 = -k'$. Пусть M_1 , M_2 , μ , λ — массы начального и конечного фермиона, мезона и вектона (или виртуального фотона). Рассмотрим первое слагаемое в формуле (2.6) гл. 3. Перемножая матрицы, находим

$$\gamma k = \gamma_0 k_0 - \gamma k = k^0 \begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 - \sigma k \\ \sigma k - k_0 \end{vmatrix};$$

$$\gamma \xi = \gamma_0 \xi_0 - \gamma \xi = \begin{vmatrix} \xi_0 - \sigma \xi \\ \sigma \xi - \xi_0 \end{vmatrix};$$

$$(\gamma k)(\gamma \xi) = \begin{vmatrix} k_0 - \sigma k \\ \sigma k - k_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_0 - \sigma \xi \\ \sigma \xi - \xi_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_0 \xi_0 - (\sigma k)(\sigma \xi) & -k_0 \sigma \xi + \xi_0 \sigma k \\ \xi_0 \sigma k - k_0 \sigma \xi & -(\sigma k)(\sigma \xi) + k_0 \xi_0 \end{vmatrix};$$

$$(\gamma k)(\gamma \xi) u(p_1) = N_1 \begin{vmatrix} a_1 (k_0 \xi_0 - (\sigma k)(\sigma \xi)) + k_0 (\sigma \xi)(\sigma k) - \xi_0 k^2 \\ a_1 (\xi_0 \sigma k - k_0 \sigma \xi) + (\sigma k)(\sigma \xi)(\sigma k) - k_0 \xi_0 \sigma k \end{vmatrix} \Psi_1;$$

$$\bar{u}(p_2) \gamma_5 = -N_2 \varphi_2^+ \begin{vmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{vmatrix} = -N_2 \varphi_2^+ \begin{vmatrix} \sigma k' & a_2 \end{vmatrix},$$

где $a_1^{-1} = E_1 + M_1$, $a_2^{-1} = E_2 + M_2$, $N_1 = \frac{1}{\sqrt{2M_1 a_1}}$, $N_2 = \frac{1}{\sqrt{2M_2 a_2}}$.

Подстановка двух последних выражений в первое слагаемое формулы (2.6), гл. 3 дает

$$T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \xi) u(p_1) = -N_1 N_2 T_1 \varphi_2^+ \{ k_0 a_1 \xi_0 (\sigma k') - \\ - a_1 (\sigma k') (\sigma k) (\sigma \xi) + k_0 (\sigma k') (\sigma \xi) (\sigma k) - k^2 \xi_0 (\sigma k') + a_1 a_2 \xi_0 (\sigma k) - \\ - a_1 a_2 k_0 (\sigma \xi) + a_2 (\sigma k) (\sigma \xi) (\sigma k) - a_2 k_0 \xi_0 (\sigma k) \} \varphi_1. \quad (5.1)$$

С учетом соотношений

$$k^2 = k_0^2 - k^2 = \lambda^2, (\sigma k) (\sigma \xi) = (k \xi) + i (\sigma [k \xi]), (\sigma k) (\sigma k) = k^2, \xi_0 = \\ = \frac{1}{k_0} (k \xi)$$

формула (5.1) переписывается так:

$$1) T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \xi) u(p_1) = N_1 N_2 T_1 \varphi_2^+ \{ - (a_1 + k_0) (\sigma k') (\sigma [k \xi]) - \\ - \frac{\lambda^2}{k_0} i (\sigma k') (k \xi) - a_2 \left(\frac{a_1}{k_0} + 1 \right) i (\sigma k) (k \xi) + a_2 (a_1 k_0 + k^2) i (\sigma \xi) \} \varphi_1.$$

Аналогичным образом получим для остальных слагаемых [см. формулу (2.6), гл. 3]:

$$2) - N_1 N_2 T_2 \varphi_2^+ \{ - a_1 \alpha i (\sigma k') (k \xi) + a_2 \alpha i (\sigma k) (k \xi) - a_1 \beta (\sigma k') \times \\ \times (k' \xi) + a_2 \beta i (\sigma k) (k' \xi) \} \varphi_1;$$

$$3) - N_1 N_2 T_3 \varphi_2^+ \left\{ \left[\left(\frac{a_1}{k_0} + 1 \right) (k q) - \frac{a_1 k_0 + k^2}{k_0} k_0' \right] i (\sigma k') (k \xi) + \right. \\ \left. + a_1 a_2 (k q) i (\sigma \xi) + (k q) (\sigma k') (\sigma [k \xi]) + \left[\frac{a_2}{k_0} (k q) - \frac{a_2 (a_1 + k_0)}{k_0} k_0' \right] \times \right. \\ \left. \times i (\sigma k) (k \xi) + (a_1 k_0 + k^2) i (\sigma k') (k' \xi) + a_2 (a_1 + k_0) i (\sigma k) (k' \xi) \right\} \varphi_1 \equiv \\ \equiv N_1 N_2 T_3 \varphi_2^+ B_3 \varphi_1;$$

$$4) 2N_1 N_2 T_4 \varphi_2^+ \left\{ - B_3 + \frac{2W}{k_0} [- (a_1 k_0 + k^2) i (\sigma k') (k \xi) - \right. \\ \left. - a_2 (a_1 + k_0) i (\sigma k) (k \xi)] + (2(p_1 k) + \lambda^2) \frac{a_1 + k_0}{k_0} \left[i (\sigma k') (k \xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_1 a_2 i (\sigma \xi) + (\sigma k') (\sigma [k \xi]) + \frac{a_2}{k_0} i (\sigma k) (k \xi) \right] \right\} \varphi_1;$$

$$5) N_1 N_2 T_5 \varphi_2^\dagger \lambda^2 \left\{ -a_1 \frac{k'_0}{k_0} i(\sigma k') (k \xi) + a_2 \frac{k'_0}{k_0} i(\sigma k) (k \xi) + \right. \\ \left. + a_1 i(\sigma k') (k' \xi) - a_2 i(\sigma k) (k' \xi) \right\} \varphi_1;$$

$$6) -N_1 N_2 T_6 \varphi_2^\dagger \lambda^2 \left\{ \frac{a_1}{k_0} i(\sigma k') (k \xi) + a_1 a_2 i \sigma \xi + i(\sigma k') (k \xi) + (\sigma k') \times \right. \\ \left. \times (\sigma [k \xi]) + \frac{a_2}{k_0} i(\sigma k) (k \xi) \right\} \varphi_1,$$

$$\text{где } W = E_1 + k_0; \quad \alpha = \frac{2(kq)W - (2k_0W - \lambda^2)k'_0}{k_0}; \quad \beta = 2kW - \lambda^2,$$

$$(kq) = k_\mu q_\mu.$$

Собирая члены при одинаковых спиновых комбинациях, входящих в формулу (2.6), находим выражение для амплитуды $F(W, \theta)$ в с. ц. м., если переопределить $F_i = \frac{4\pi W}{M} F'_i$:

$$NF'_1 = da_2 T_1 + (kq) a_1 a_2 (T_3 - T_4) + a_1 a_2 b T_4 - \lambda^2 a_1 a_2 T_6; \\ \frac{1}{|k' || k|} NF'_2 = -a T_1 + (kq) (T_3 - T_4) + b T_4 - \lambda^2 T_6; \\ \frac{1}{|k' || k|} NF'_3 = a_2 b T_2 + a_2 a (T_3 - T_4) - \lambda^2 a_2 T_5; \\ \frac{1}{|k'|^2} NF'_4 = -a_1 b T_2 + d (T_3 - T_4) + a_1 \lambda^2 T_5; \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{|k|^2} NF'_5 = -\frac{a_2 a}{k_0} T_1 + \frac{a_2 c}{k_0} T_2 + \frac{a_2}{k_0} ((kq) - \alpha k'_0) (T_3 - T_4) + \\ + \frac{a_2}{k_0} (q - 2W a) T_4 + \frac{\lambda^2 a_2 k'_0}{k_0} T_5 - \frac{\lambda^2 a_2}{k_0} T_6;$$

$$\frac{1}{|k' || k|} NF'_6 = -\frac{\lambda^2}{k_0} T_1 - \frac{a_1 c}{k_0} T_2 + \frac{a(kq) - d k'_0}{k_0} (T_3 - T_4) + \\ + \frac{ab - 2W d}{k_0} T_4 - \frac{\lambda^2 a_1 k'_0}{k_0} T_5 - \frac{\lambda^2 a}{k_0} T_6,$$

где $a = \alpha_1 + k_0$; $N = 8\pi W \sqrt{a_1 a_2}$; $d = \alpha_1 k_0 + k^2$; $b = 2(p_1 k) + \lambda^2 =$
 $= 2k_0 W - \lambda^2$; $c = 2W [(kq) - b k'_0]$.

Тем самым найдено выражение функций F_i амплитуды (2.6) в с. ц. м. через функции T_i . Чтобы выразить T_i через F_i , надо разрешить последнюю систему относительно T_i .

$$3. \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^- \text{ [см. формулу (1.14), гл. 3].}$$

Для реального фотона $\epsilon_0 = 0$, $\mathbf{k}\epsilon = 0$, $k^2 = k_0^2 - \mathbf{k}^2 = \lambda^2 = 0$. Поэтому

$$\mathbf{k}^2 = k_0^2, (\sigma\mathbf{k})(\sigma\epsilon) = i(\sigma[\mathbf{k}\xi]), (\sigma\mathbf{k})(\sigma\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 = k_0^2,$$

$$\gamma\mathbf{k} = \gamma_0 k_0 - \gamma\mathbf{k} = \begin{vmatrix} k_0 - \sigma\mathbf{k} \\ \sigma\mathbf{k} - k_0 \end{vmatrix};$$

$$\gamma\epsilon = \gamma_0 \epsilon_0 - \gamma\epsilon = \begin{vmatrix} 0 & -\sigma\epsilon \\ \sigma\epsilon & 0 \end{vmatrix};$$

$$(\gamma\mathbf{k})(\gamma\epsilon) = \begin{vmatrix} -(\sigma\mathbf{k})(\sigma\epsilon) - k_0(\sigma\epsilon) \\ -k_0(\sigma\epsilon) & -(\sigma\mathbf{k})(\sigma\epsilon) \end{vmatrix};$$

$$(\gamma\mathbf{k})(\gamma\epsilon) u(p_1) = N_1 \begin{vmatrix} -a_1(\sigma\mathbf{k})(\sigma\epsilon) + k_0(\sigma\epsilon)(\sigma\mathbf{k}) \\ -a_1 k_0(\sigma\epsilon) + (\sigma\mathbf{k})(\sigma\epsilon)(\sigma\mathbf{k}) \end{vmatrix} \Phi_1;$$

$$\bar{u}(p_2) \gamma_5 = -N_2 \Phi_2^+ | \sigma\mathbf{k}' a_2 |.$$

Подставив эти выражения в первое слагаемое формулы (1.14), гл. 3, получим*

$$1) T_1 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{2M} \Phi_2^+ \left\{ (W - M_1) i(\sigma\epsilon) - \frac{W - M_1}{k(E_2 + M_2)} (\sigma\mathbf{k}')(\sigma[\mathbf{k}\epsilon]) \right\} \Phi_1.$$

Аналогичным образом найдем

$$2) T_2 \frac{(W^2 - M^2) \sqrt{a_1 a_2}}{2M} \Phi_2^+ \left\{ \frac{i(\mathbf{k}'\epsilon)(\sigma\mathbf{k})}{E_1 + M_1} - \frac{i(\mathbf{k}'\epsilon)(\sigma\mathbf{k}')}{E_2 + M_2} \right\} \Phi_1;$$

$$3) T_3 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{2M} \Phi_2^+ \left\{ \frac{W - M_1}{E_2 + M_2} i(\sigma\mathbf{k}')(\mathbf{k}'\epsilon) + \frac{2Mv_1}{a_1 a_2} (\sigma\mathbf{k}')(\sigma[\mathbf{k}\epsilon]) + \right. \\ \left. + 2Mv_1 i(\sigma\epsilon) + \frac{W - M_1}{k} i(\mathbf{k}'\epsilon)(\sigma\mathbf{k}) \right\} \Phi_1;$$

* При этом удобно использовать соотношения:

$$W^2 - M_1^2 = 2k_0 W; \quad q_0 = k_0 + \frac{\mu^2}{2W};$$

$$\frac{k_0}{E_1 + M_1} = \frac{W - M_1}{W + M_1}; \quad v = \frac{W^2 - M_1^2}{2M_1} = v_1.$$

$$4) T_4 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{K} \varphi_2^+ \left\{ -\frac{W - M_1}{2(E_2 + M_2)} i(\sigma k') (k' \varepsilon) + \frac{M(W - M_1)}{k(E_2 + M_2)} \times \right. \\ \times (\sigma k') (\sigma [k \varepsilon]) + \frac{Mv}{a_1 a_2} (\sigma k') (\sigma [k \varepsilon]) + Mv i(\sigma \varepsilon) - \frac{W - M_1}{2k} \times \\ \left. \times (k' \varepsilon) (\sigma k) - M(W - M_1) i(\sigma \varepsilon) \right\} \varphi_1,$$

где

$$v = \frac{Pk}{M_1} = \frac{Pk'}{M_1}; \quad v_1 = \frac{kq}{2M_1} = \frac{k_0 q_0 - kq}{2M_1} = -\frac{t - \mu^2}{4M}.$$

Отсюда получим, собирая члены при одинаковых комбинациях, входящих в (3.5), и переопределяя $2MF_i = 8\pi WF'_i$:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{F'_1}{K_1} = T_1 + (W - M_1) T_4 + \frac{2M_1 v_1}{W - M_1} (T_3 - T_4); \\ P_2 &= \frac{F'_2}{K_2} = -T_1 + (W + M_1) T_4 + \frac{2M_1 v_1}{W + M_1} (T_3 - T_4); \\ P_3 &= \frac{F'_3}{K_3} = (W - M_1) T_2 + (T_3 - T_4); \\ P_4 &= \frac{F'_4}{K_4} = -(W + M_1) T_2 + (T_3 - T_4), \end{aligned} \right\} (5.3)$$

где $K_1 = \frac{W - M_1}{8\pi W} \sqrt{a_1 a_2}$; $k_2 = \frac{|k'|}{a_2} K_1$; $K_3 = |k'| K_1$; $K_4 = |k'| K_2$.

Разрешая последние выражения относительно T_i , будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{W + M}{2W} P_1 - \frac{W - M}{2W} P_2 + \frac{M}{W} \frac{t - \mu^2}{2} \left(\frac{P_3}{W - M} + \frac{P_4}{W + M} \right); \\ T_2 &= \frac{1}{2W} (P_3 - P_4); \\ T_3 &= \frac{1}{2W} (P_1 + P_2) + \frac{W^2 - M^2 - 2Mv_1}{2W} \left(\frac{P_3}{W - M} + \frac{P_4}{W + M} \right); \\ T_4 &= \frac{1}{2W} (P_1 + P_2) + \frac{t - \mu^2}{4W} \left(\frac{P_3}{W - M} + \frac{P_4}{W + M} \right). \end{aligned} \right\} (5.4)$$

Если выбрать выражение для амплитуды в виде (1.13), гл. 3, то формулы для P_3 и P_4 в (5.3) останутся без изменения, а для P_1 и P_2 перепишутся так:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= T_1 + (W + M_1) T_4 + \frac{2M_1 v_1}{W - M_1} (T_3 - T_4); \\ P_2 &= T_1 + (W - M_1) T_4 + \frac{2M_1 v_1}{W - M_1} (T_3 - T_4). \end{aligned} \right\} (5.3')$$

$$4. \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \text{ [см. формулу (3.7), гл. 3].}$$

Производя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем, имея в виду формулу (3.7), гл. 3 и полагая $M_1 = M_2 = M$,

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \theta F_1 &= \frac{1}{4MW} \{ [(M+W)^2 - (W-M)^2 \cos \theta] (T_1 \cos \theta + T_3) + \\ &+ (W^2 - M^2) [(W+M) + (W-M) \cos \theta] (T_2 \cos \theta + T_4) \}; \\ \sin^2 \theta F_2 &= -\frac{1}{4MW} \{ [(W+M)^2 - (W-M)^2 \cos \theta] \times \\ &\times (T_1 + T_3 \cos \theta) + (W^2 - M^2) [(W+M) + (W-M) \cos \theta] \times \\ &\times (T_2 + T_4 \cos \theta) \}; \\ F_3 &= \frac{1}{4MW} \{ (W-M)^2 T_1 - (W-M)^2 (W+M) T_2 \}; \\ F_4 &= \frac{1}{4MW} \{ -(W-M)^2 T_3 + (W-M)^2 (W+M) T_4 \}; \\ \sin \theta F_5 &= \frac{1}{4MW} \{ (W-M)^2 (T_1 \cos \theta + T_3) - (W^2 - M^2) (W-M) \times \\ &\times (T_2 \cos \theta + T_4) - (W^2 - M^2) (1 + \cos \theta) T_5 + W (W^2 - M^2) \times \\ &\times (1 - \cos \theta) T_6 \}; \\ \sin^2 \theta F_6 &= \frac{1}{4MW} \{ -(W-M)^2 (T_1 + T_3 \cos \theta) + (W^2 - M^2) \times \\ &\times (W-M) (T_2 + T_4 \cos \theta) + (W^2 - M^2) (1 + \cos \theta) T_5 + \\ &+ W (W^2 - M^2) (1 - \cos \theta) T_6 \}. \end{aligned} \right\} (5.5)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{2M}{W^2 - M^2} \{ -(W-M) (F_1 \cos \theta + F_2) + [(W+M) + \\ &+ (W-M) \cos \theta] F_3 \}; \\ T_2 &= \frac{2M}{(W^2 - M^2)^2} \{ -(W-M)^2 (F_1 \cos \theta + F_2) - [(W+M)^2 - \\ &- (W-M)^2 \cos \theta] F_3 \}; \\ T_3 &= \frac{2M}{W^2 - M^2} \{ (W-M) (F_1 + F_2 \cos \theta) - [(W+M) + \\ &+ (W-M) \cos \theta] F_4 \}; \\ T_4 &= \frac{2M}{(W^2 - M^2)^2} \{ (W-M)^2 (F_1 + F_2 \cos \theta) + [(W+M)^2 - \\ &- (W-M)^2 \cos \theta] F_4 \}; \end{aligned} \right\} (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} T_5 &= \frac{2WM}{W^2 - M^2} \left\{ 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} (F_5 - F_6) + F_3 - F_4 \right\}; \\ T_6 &= \frac{2M}{W^2 - M^2} \left\{ 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} (F_5 + F_6) + F_3 + F_4 \right\}. \end{aligned} \right\}$$

§ 6. Выражение для дифференциального сечения в с.ц.м.

Выясним, как переписывается формула (4.9), гл. 3 в с. ц. м. Плотность потока сталкивающихся частиц в с.ц.м. (см. рис 7.1) выглядит так:

$$j_0 = \frac{v_1 + v_2}{V},$$

где v_1 и v_2 — скорости частиц начальной системы. Так как

$$v_1 = \frac{|p_1|}{E_1}, \quad v_2 = \frac{|p_2|}{E_2},$$

то

$$j_0 = \frac{1}{V} \cdot \frac{|k| (E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \frac{1}{V} \cdot \frac{|k| W}{E_1 E_2}, \quad (6.1)$$

где k — импульс начальной системы в с.ц.м.; W — полная энергия начальной системы. Произведем в формуле (4.9), гл. 3 интегрирование по импульсам dp_3 и dp_4 . Так как

$$\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4),$$

$$\int dp_3 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = 1$$

и

$$dp_4 = |p_4|^2 d|p_4| d\Omega,$$

то интегрирование в формуле (4.9), гл. 3 по dp_3 дает

$$d\sigma = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{(2\pi)^2 16V j_0} \int |M|^2 \frac{|p_4|^2 d|p_4| d\Omega}{E_1 E_2 E_3 E_4} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4).$$

Переходя в с. ц. м. ($p_1 = -p_2 = k$, $p_3 = -p_4 = k'$, $E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = W$) и учитывая (6.1), получаем

$$d\sigma = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{(2\pi)^2 16} \int |M|^2 \frac{|k'|^2 d|k'| d\Omega}{W |k| E_3 E_4} \delta(E_3 + E_4 - W). \quad (6.2)$$

Из соотношения $E_{3,4}^2 = |k'|^2 + m_{3,4}^2$ следует, что

$$|k'| d|k'| = E_{3,4} dE_{3,4}, \quad |k'| d|k'| = \frac{d(E_3 + E_4) E_3 E_4}{W};$$

поэтому вместо (6.2) будем иметь

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{(8\pi W)^2} |M|^2 d\Omega. \quad (6.3)$$

Заметим, что если начальная и конечная системы частиц одинаковы, то $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$.

Если ввести обозначение

$$F = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{8\pi W} M, \quad (6.4)$$

то окончательно выражение для дифференциального сечения процесса в с.ц.м. запишется так:

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} |F(W, \theta)|^2 d\Omega. \quad (6.5)$$

В дальнейшем множитель $d\Omega$ в выражении для $d\sigma$ мы будем опускать.

Иногда формулу для $d\sigma$ записывают в виде, содержащем вместо $d\Omega$ инвариантную величину

$$t = (k - k')^2 = m_1^2 + m_2^2 - 2k_0' k_0 + 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta,$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}' . В с. ц. м. импульсы определяются только полной энергией k_0 , и если последняя фиксирована, то

$$dt = 2(\mathbf{k} \mathbf{k}') d \cos \theta.$$

Поэтому в (6.3) можно заменить

$$d\Omega = -d(\cos \theta) d\varphi = \frac{d(-t) d\varphi}{2(\mathbf{k} \mathbf{k}')}, \quad (6.6)$$

где φ — азимутальный угол \mathbf{k} относительно \mathbf{k}' . Следовательно, если сечение от φ не зависит и подразумевать знак минус, то

$$d\sigma = \frac{\pi \alpha_1 \alpha_2}{|\mathbf{k}|^2 (8\pi W)^2} |F(W, \theta)|^2 dt. \quad (6.7)$$

Таким образом, чтобы найти выражение для дифференциального сечения рассеяния поляризованных частиц в с.ц.м., необходимо вычислить квадрат модуля $|F|^2$ амплитуды процесса и подставить его в формулу (6.5). В случае неполяризованных частиц надо еще произвести суммирование по проекциям спинов конечных частиц и усреднение по проекциям спинов начальных частиц. Остановимся сначала на процессах с неполяризованными частицами (§ 7 и 8), а затем перейдем к реакциям с поляризованными частицами (§ 9—12).

§ 7. Выражение для дифференциальных сечений процессов без участия барионов

Найдем выражение $|F|^2 = F^*F$ для некоторых процессов, в которых фермионы не участвуют (нумерация процессов и обозначения те же, что и в § 2 и 3).

Сначала предположим, что частицы поляризованы

$$3. \quad 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-.$$

$$|F|^2 = |F_1|^2 (\hat{\xi} [\hat{k} \hat{k}'])^2. \quad (7.1)$$

$$4. \quad 0^+ + 0^- \rightarrow 0^- + 1^-.$$

$$|F|^2 = |F_1|^2 (\hat{k} \hat{\xi})^2 + |F_2|^2 (\hat{k}' \hat{\xi})^2 + (F_1 F_2^* + F_2 F_1^*) (\hat{k} \hat{\xi}) (\hat{k}' \hat{\xi}). \quad (7.2)$$

Учитывая формулу (4.11), гл. 3, находим

$$|F|^2 = |F_1|^2 (\hat{k} \hat{\xi})^2 + |F_2|^2 (\hat{k}' \hat{\xi})^2 + \text{Re } F_1 F_2^* (\hat{k} \hat{\xi}) (\hat{k}' \hat{\xi}). \quad (7.3)$$

$$10. \quad \gamma + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

$$|F|^2 = |F_1|^2 (\hat{\varepsilon} [\hat{k} \hat{k}'])^2. \quad (7.4)$$

$$14. \quad \gamma + 0^- \rightarrow \gamma + 0^-.$$

$$|F|^2 = |F_1|^2 (\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}')^2 + |F_2|^2 (\hat{k}' \hat{\varepsilon})^2 (\hat{k} \hat{\varepsilon}')^2 + 2\text{Re } F_1 F_2^* (\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}') (\hat{k} \hat{\varepsilon}') (\hat{k}' \hat{\varepsilon}). \quad (7.5)$$

Для суммирования по трем проекциям спина вектора

$$\sum_{\lambda=1}^3 \xi_i^\lambda \xi_j^\lambda \quad (7.6)$$

воспользуемся формулой (5.6), гл. 3, которая в трехмерном случае запишется в виде ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\sum_{\lambda=1}^3 \xi_i^\lambda \xi_j^\lambda = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mu^2}. \quad (7.7)$$

Найдем выражения для некоторых произведений векторов, содержащих ξ , используя (7.7):

$$\begin{aligned} 1. \quad \sum_{\lambda=1}^3 (k' \xi^\lambda)^2 &= \sum_{\lambda=1}^3 (k'_i \xi_i^\lambda) (k'_j \xi_j^\lambda) = \sum_{\lambda=1}^3 k'_i k'_j \xi_i^\lambda \xi_j^\lambda = \\ &= k'_i k'_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mu^2} \right) = k'^2 - \frac{(k' k)^2}{\mu^2}; \end{aligned}$$

$$2. \quad \sum_{\lambda=1}^3 (k\xi^\lambda)^2 = k^2 - \frac{k^4}{\mu^2};$$

$$3. \quad \sum_{\lambda=1}^3 (k_i \xi_i^\lambda) (k'_j \xi_j^\lambda) = k_i k'_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mu^2} \right) = (kk') - \frac{k^2 (kk')}{\mu^2} = (kk') \left(1 - \frac{k^2}{\mu^2} \right);$$

$$4. \quad \sum_{\lambda=1}^3 (\xi^\lambda \xi^\lambda) = \sum_{i=1}^3 \sum_{\lambda=1}^3 \xi_i^\lambda \xi_i^\lambda = \sum (\delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{\mu^2}) = 3 - \frac{k^2}{\mu^2};$$

$$5. \quad \sum_{\lambda=1}^3 [k\xi^\lambda]^2 = \sum_{\lambda=1}^3 [k\xi^\lambda] [k\xi^\lambda] = \sum_{\lambda=1}^3 [k^2 \xi_i^\lambda \xi_i^\lambda - (k_i \xi_i^\lambda)^2] = \\ = k^2 \left(3 - \frac{k^2}{\mu^2} \right) - k^2 - \frac{k^4}{\mu^2} = 2k^2,$$

так как $[ab][cd] = (ac)(bd) - (bc)(ad)$.

$$6. \quad \sum_{\lambda=1}^3 (\xi^\lambda [kk'])^2 = [kk']_i (kk')_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mu^2} \right) = \\ = [kk']^2 = k'^2 k^2 \sin^2 \theta.$$

Таким образом, чтобы в формуле для дифференциального сечения произвести суммирование по проекциям спинов вектона, надо сделать в ней следующие замены (в случае единичных векторов: $k^2 = k'^2 = 1$, $(kk') = \cos \theta$):

$$(k' \xi)^2 \rightarrow k'^2 - \frac{(k' k)^2}{\mu^2}; \quad (7.8)$$

$$(k\xi)^2 \rightarrow k^2 \left(1 - \frac{k^2}{\mu^2} \right); \quad (7.9)$$

$$(k\xi)(k' \xi) \rightarrow (kk') \left(1 - \frac{k^2}{\mu^2} \right) \quad (7.10)$$

$$(\xi\xi) \rightarrow 3 - \frac{k^2}{\mu^2}; \quad (7.11)$$

$$[k\xi]^2 \rightarrow 2k^2; \quad (7.12)$$

$$(\xi [kk'])^2 \rightarrow [kk']^2 = k^2 k'^2 \sin^2 \theta. \quad (7.13)$$

При усреднении по проекциям спина вектона надо эти формулы умножить на $1/3$.

Для суммирования по двум поляризациям фотона воспользуемся формулой (5.7), гл. 3:

$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_i^\lambda \varepsilon_j^\lambda = (\delta_{ij}) - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (7.14)$$

Найдем выражения для некоторых произведений векторов, содержащих ε , используя (7.14):

1.
$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{k}' \varepsilon^\lambda) (\mathbf{k}' \varepsilon^\lambda) &= \sum_{\lambda=1}^2 (k'_i \varepsilon_i^\lambda) (k'_j \varepsilon_j^\lambda) = \\ &= \sum_{\lambda=1}^2 k'_i k'_j \varepsilon_i^\lambda \varepsilon_j^\lambda = k'_i k'_j \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) = \\ &= \left[k'^2 - \frac{1}{k^2} (\mathbf{k} \mathbf{k}')^2 \right] = k'^2 (1 - \cos^2 \theta) = k'^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$
2.
$$\sum_{\lambda=1}^2 \varepsilon_\pm^\lambda \varepsilon^\lambda = \sum_\lambda \sum_i \varepsilon_i^\lambda \varepsilon_i^\lambda = \sum_{i=1}^3 \left(\delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{k^2} \right) = 3 - 1 = 2;$$
3.
$$\sum_{\lambda=1}^2 [\mathbf{k} \varepsilon^\lambda] [\mathbf{k} \varepsilon^\lambda] = 2k^2 - \text{см. получение формулы для } \sum_{\lambda=1}^3 [\mathbf{k} \xi]^\lambda;$$
4.
$$\sum_{\lambda=1}^2 (\varepsilon^\lambda [\mathbf{k} \mathbf{k}'])^2 = [\mathbf{k} \mathbf{k}']^2 = k'^2 k^2 \sin^2 \theta.$$

Следовательно, чтобы в формуле для дифференциального сечения произвести суммирование по проекциям спина фотона, надо сделать в ней следующие замены (в случае единичных векторов: $\mathbf{k}^2 = k^2 = 1$, $(\mathbf{k} \mathbf{k}') = \cos \theta$):

$$(\mathbf{k}' \varepsilon)^2 \rightarrow k'^2 \sin^2 \theta; \quad (7.15)$$

$$[\mathbf{k} \varepsilon]^2 \rightarrow 2k^2; \quad (7.16)$$

$$\varepsilon^2 \rightarrow 2; \quad (7.17)$$

$$(\varepsilon [\mathbf{k} \mathbf{k}'])^2 \rightarrow k'^2 k^2 \sin^2 \theta. \quad (7.18)$$

При усреднении по проекциям спина фотона надо эти формулы умножить на 1/2.

§ 8. Выражения для дифференциальных сечений процессов с участием барионов

Если в процессе участвуют барионы, то общее выражение для амплитуды в с.с.м. (см. § 2, 3) можно записать в виде

$$F(W, \theta) = \chi_i^+ F \chi_i, \quad (8.1)$$

где F — оператор, содержащий, в частности, матрицы σ .

Повторяя те же рассуждения, что и в § 6, гл. 3, получаем

$$|F(W, \theta)|^2 = \text{Sp } \lambda_2 F \lambda_1 F^+. \quad (8.2)$$

В случае неполяризованного бариона

$$\lambda = \chi^+ \chi = 1, \quad (8.3)$$

поэтому

$$|F(W, \theta)|^2 = \text{Sp } F^+ F. \quad (8.4)$$

Приведем некоторые формулы для вычисления шпуров.

1. Шпур матриц σ не меняется при циклической перестановке:

$$\text{Sp } \sigma_i \sigma_h \sigma_l = \text{Sp } \sigma_h \sigma_e \sigma_i = \text{Sp } \sigma_e \sigma_i \sigma_h \text{ и т. д.}; \quad (8.5)$$

$$2. \quad \text{Sp } (\sigma a) = 0; \quad (8.6)$$

$$3. \quad \text{Sp } (\sigma a) (\sigma b) = \text{Sp } \{ab + i\sigma [ab]\} = \text{Sp } ab = 2ab \quad (8.7)$$

$$\text{Sp } (\sigma a) (\sigma a) = 2a^2;$$

$$4. \quad \text{Sp } (\sigma a) (\sigma b) (\sigma c) = 2i [ab] c; \quad (8.8)$$

$$5. \quad \text{Sp } (\sigma a) (\sigma b) (\sigma c) (\sigma d) = 2(ab)(cd) - 2[ab][cd] = \\ = 2[(ab)(cd) - (ac)(bd) + (bc)(ad)]; \quad (8.9)$$

$$6. \quad \text{Sp } (\sigma a) (\sigma b) (\sigma c) (\sigma d) (\sigma e) = 2i\{(ab)([cd]e) + \\ + (de)([ab]c) + (bc)([ad]e) - (ac)([bd]e)\}. \quad (8.10)$$

Заметим, что в отличие от γ -матриц шпур нечетного числа матриц σ не равен нулю.

Найдем вид $|F(W, \theta)|^2 = \text{Sp } F^+ F = \text{Sp } FF^+$ для некоторых процессов (нумерация процессов и обозначения те же, что и в § 2 и 3).

$$5. \quad 0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+.$$

Если оба бариона не поляризованы, то для дифференциального сечения $d\sigma$ найдем

$$d\sigma = \frac{|k'|}{2|k|} \text{Sp } F^+ F = \frac{|k'|}{2|k|} \text{Sp } \{F_1 + iF_2(\sigma[\hat{k}'\hat{k}])\} \times \\ \times \{F_1^* - iF_2^*(\sigma[\hat{k}'\hat{k}])\}.$$

Используя формулы (8.7) и (8.6), получаем

$$d\sigma = \frac{|k'|}{2|k|} \text{Sp } [|F_1|^2 + |F_2|^2 (\sigma[\hat{k}'\hat{k}])^2] = \\ = \frac{|k'|}{|k|} [|F_1|^2 + |F_2|^2 [\hat{k}'\hat{k}]^2]. \quad (8.11)$$

$$7. \quad 0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 1^-.$$

В случае, когда начальный и конечный барионы не поляризованы,

$$\begin{aligned} |F|^2 = & \frac{1}{2} \text{Sp} [F_1 i \sigma \hat{\xi} + F_2 (\sigma \hat{k}') (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) + F_3 i (\sigma \hat{k}) (\hat{k}' \hat{\xi}) + \\ & + F_4 i (\sigma \hat{k}') (\hat{k}' \hat{\xi}) + F_5 i (\sigma \hat{k}) (\hat{k} \hat{\xi}) + F_6 i (\sigma \hat{k}') (\hat{k} \hat{\xi})] \times \\ & \times [-F_1^* i \sigma \hat{\xi} + F_2^* (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma \hat{k}') - F_3^* i (\sigma \hat{k}) (\hat{k}' \hat{\xi}) - \\ & - F_4^* i (\sigma \hat{k}') (\hat{k}' \hat{\xi}) - F_5^* i (\sigma \hat{k}) (\hat{k} \hat{\xi}) - F_6^* i (\sigma \hat{k}') (\hat{k} \hat{\xi})]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Вычислим некоторые типичные шпуры, используя формулы (8.7), (8.8) и (4.11), гл. 3:

$$а) \quad \frac{1}{2} |F_1|^2 \text{Sp} (\sigma \hat{\xi}) (\sigma \hat{\xi}) = |F_1|^2 (\hat{\xi} \hat{\xi});$$

$$\begin{aligned} б) \quad \frac{i}{2} \text{Sp} \{F_1 F_2^* (\sigma \hat{\xi}) (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma \hat{k}') - F_2 F_1^* (\sigma \hat{k}') (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma \hat{\xi})\} = \\ = -2 \text{Re} F_1 F_2^* [(k k') (\hat{\xi} \hat{\xi}) - (k \hat{\xi}) (k' \hat{\xi})]; \end{aligned}$$

$$в) \quad |F_2|^2 \frac{1}{2} \text{Sp} (\sigma \hat{k}') (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma \hat{k}') = |F_2|^2 [k \hat{\xi}]^2;$$

$$\begin{aligned} г) \quad \frac{1}{2} \text{Sp} \{F_1 F_3^* (\sigma \hat{\xi}) (\sigma \hat{k}) (k' \hat{\xi}) + F_1^* F_3 (\sigma \hat{k}) (\sigma \hat{\xi}) (k' \hat{\xi})\} = \\ = 2 \text{Re} F_1 F_3^* (k' \hat{\xi}) (k \hat{\xi}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} д) \quad \frac{i}{2} \text{Sp} \{F_2 F_4^* (\sigma \hat{k}') (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma \hat{k}') (k' \hat{\xi}) - \\ - F_2^* F_4 (\sigma \hat{k}') (k' \hat{\xi}) (\sigma [\hat{k} \hat{\xi}]) (\sigma \hat{k}')\} = 0. \end{aligned}$$

Вычисляя аналогичным образом остальные шпуры, находим

$$\begin{aligned} d\sigma = \frac{|k'|}{2|k|} \text{Sp} F + F = \frac{|k'|}{|k|} \{ [|F_1|^2 - 2 \text{Re} F_1^* F_2 \cos \theta] (\hat{\xi} \hat{\xi}) + \\ + |F_2|^2 [\hat{k} \hat{\xi}]^2 + [|F_3|^2 + |F_4|^2 + 2 \text{Re} (F_1^* F_4 + F_2^* F_3) + \\ + 2 \text{Re} F_3^* F_4 \cos \theta] (\hat{k}' \hat{\xi})^2 + [|F_5|^2 + |F_6|^2 + 2 \text{Re} F_1^* F_5 - \\ - 2 \text{Re} (F_2^* F_5 - F_5^* F_6) \cos \theta] (\hat{k} \hat{\xi})^2 + 2 \text{Re} [F_1^* F_3 + F_1^* F_6 + \\ + F_3^* F_5 + F_4^* F_6 + F_1^* F_2 + F_2^* F_5 + \\ + (F_3^* F_6 - F_2^* F_3 + F_4^* F_5) \cos \theta] (\hat{k} \hat{\xi}) (\hat{k}' \hat{\xi}) \}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Чтобы просуммировать по проекциям спина ξ вектора (или виртуального фотона), произведем в этом выражении замены (7.8) — (7.13). Это дает

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{|k'|}{|k|} \left\{ \left(3 - \frac{1}{\mu^2} \right) |F_1|^2 + 2|F_2|^2 + \left(1 - \cos\theta \frac{1}{\mu^2} \right) (|F_3|^2 + |F_4|^2) + \right. \\
 & + \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) (|F_5|^2 + |F_6|^2) - 4 \operatorname{Re}(F_1^* F_2) \cos\theta + 2 \operatorname{Re}(F_2^* F_3) \sin^2\theta + \\
 & + 2 \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\mu^2} \right) \operatorname{Re} F_1^* F_4 + 2 \left(1 - \frac{\cos^2\theta}{\mu^2} \right) \operatorname{Re} F_3^* F_4 \cos\theta + \\
 & + 2 \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \operatorname{Re} F_1^* F_5 + 2 \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \operatorname{Re}(F_3^* F_6 + F_4^* F_5) \cos^2\theta + \\
 & \left. + 2 \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \operatorname{Re}(F_1^* F_6 + F_3^* F_5 + F_4^* F_6 + F_5^* F_6 + F_1^* F_3) \cos\theta \right\}. \quad (8.14)
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+.$$

Если барионы не поляризованы, то, имея в виду (2.9), найдем

$$\begin{aligned}
 d\sigma = & \frac{|k'|}{4|k|} \operatorname{Sp} F^+ F = \frac{|k'|}{4|k|} \operatorname{Sp} F^{(1)+} F^{(1)} \operatorname{Sp} F^{(2)+} F^{(2)} = \\
 = & \frac{|k'|}{|k|} [|F_1|^2 + |F_2|^2 + 2|F_3|^2 + |F_4|^2 + |F_5|^2]. \quad (8.14')
 \end{aligned}$$

$$16. \quad \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-.$$

Вычислим некоторые типичные шпуры, используя формулы (8.7) — (8.9) и (4.11), гл. 3, имея в виду, что $(k\varepsilon) = 0$:

$$а) \quad \frac{1}{2} |F_1|^2 \operatorname{Sp} (\sigma\varepsilon) (\sigma\varepsilon) = |F_1|^2 \varepsilon\varepsilon;$$

$$\begin{aligned}
 б) \quad & \frac{i}{2} \operatorname{Sp} \{ F_1 F_2^* (\sigma\varepsilon) (\sigma[k\varepsilon]) (\sigma k') - F_2 F_1^* (\sigma k') (\sigma[k\varepsilon]) (\sigma\varepsilon) \} = \\
 & = -2 \operatorname{Re} F_1^* F_2 (k k') (\varepsilon\varepsilon);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 в) \quad & |F_2|^2 \frac{1}{2} \operatorname{Sp} (\sigma k') (\sigma[k\varepsilon]) (\sigma[k\varepsilon]) (\sigma k') = \\
 & = |F_2|^2 [k\varepsilon]^2 k'^2 = |F_2|^2 [k\varepsilon]^2 = |F_2|^2 \varepsilon\varepsilon;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 г) \quad & \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \{ F_1 F_3^* (\sigma\varepsilon) (\sigma k) (k' \varepsilon) + F_1^* F_3 (\sigma k) (\sigma\varepsilon) (k' \varepsilon) \} = \\
 & = 2 \operatorname{Re} F_1 F_3^* (k' \varepsilon) (k\varepsilon) = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{д) } \quad & \frac{i}{2} \text{Sp} \{ F_2 F_4^* (\sigma k') (\sigma [k\varepsilon]) (\sigma k') (k' \varepsilon) - \\
 & - F_2^* F_4 (\sigma k') (k' \varepsilon) (\sigma [k\varepsilon]) (\sigma k') \} = 0.
 \end{aligned}$$

Вычисляя остальные шпуры, находим

$$\begin{aligned}
 d\sigma = \frac{|k'|}{2|k|} \{ & |F_1|^2 (\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}) + |F_2|^2 [\hat{k} \hat{\varepsilon}]^2 + (|F_3|^2 + |F_4|^2) (\hat{k}' \hat{\varepsilon})^2 - \\
 & - 2\text{Re} (F_1 F_2^*) (k' k) (\hat{\varepsilon} \hat{\varepsilon}) + [2\text{Re} F_1^* F_4 + 2\text{Re} F_2^* F_3 + \\
 & + 2\text{Re} F_3^* F_4 (k' k)] (\hat{k}' \hat{\varepsilon})^2 \}. \quad (8.15)
 \end{aligned}$$

Чтобы просуммировать по проекциям спина фотона, произведем в этом выражении замены (7.15)–(7.18). В результате получим

$$\begin{aligned}
 d\sigma = \frac{|k'|}{2|k|} \{ & |F_1|^2 + |F_2|^2 + \left[\frac{1}{2} |F_3|^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} |F_4|^2 + \text{Re} F_1^* F_4 + \text{Re} F_2^* F_3 \right] \sin^2 \theta + \\
 & \left. + \text{Re} [F_3^* F_4 - 2F_1^* F_2] \cos \theta - \text{Re} F_3^* F_4 \cos^3 \theta \right\}. \quad (8.16)
 \end{aligned}$$

$$18. \quad \gamma + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \gamma.$$

Если все частицы не поляризованы, то, учитывая (3.6), находим:

$$\begin{aligned}
 d\sigma = \frac{|k'|}{4|k|} \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda_2} \text{Sp} F^+ F = \frac{|k'|}{2|k|} \{ & |F_1 + F_2|^2 (1 + \cos \theta)^2 + \\
 & + |F_1 - F_2|^2 (1 - \cos^2 \theta) + |F_3 + F_4|^2 (3 + 2 \cos \theta - \cos^2 \theta) + \\
 & + |F_3 - F_4|^2 (3 - 2 \cos \theta - \cos^2 \theta) + 2 |F_5 + F_6|^2 (1 + \cos \theta)^3 + \\
 & + 2 |F_5 - F_6|^2 (1 - \cos \theta)^3 + 4 \text{Re} (F_3 + F_4)^* (F_5 + F_6) (1 + \cos^2 \theta)^2 - \\
 & - 4 \text{Re} (F_3 - F_4)^* (F_5 - F_6) (1 - \cos \theta)^2 \}. \quad (8.17)
 \end{aligned}$$

§ 9. Поляризационная матрица плотности

Переходим к анализу процесса

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (9.1)$$

с поляризованными частицами. В общем случае задача ставится так: заданы поляризации начальных частиц, найти угловые распределения и поляризации рассеянных частиц.

На опыте измеряют два типа величин: 1) дифференциальные сечения в случае определенных поляризаций начальных и конеч-

ных частиц, 2) поляризацию одной или обеих частиц в конечном состоянии.

Теоретический анализ поляризационных свойств реакций удобно производить с помощью матрицы плотности. Напомним сначала основные сведения о поляризационной матрице плотности, а затем (§ 10 и 11) получим с ее помощью выражения для дифференциальных сечений и поляризаций.

Вектор поляризации барисона. Спин барисона равен $1/2$. Поэтому компоненты спина в каком-либо определенном направлении z могут принимать два значения: $s_z = \pm 1/2$.

Пучок барисонов называется поляризованным, если состояния с $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$ заполнены неодинаково. Пусть N_+ — число частиц в состоянии $s_z = +1/2$, а N_- — число частиц в состоянии $s_z = -1/2$. Тогда поляризация P_z в направлении z определяется следующим образом:

$$P_z = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-}. \quad (9.2)$$

Если $P_z = 1$, то пучок называется полностью поляризованным. В этом случае спины всех частиц пучка направлены вдоль оси z . Значение $P_z = 0$ характеризует полностью неполяризованный пучок (направления спинов частиц вдоль и против оси z равновероятны).

В общем случае поляризация частицы имеет продольную и поперечную компоненты, т. е. характеризуется вектором поляризации \mathbf{P} . Для полной характеристики вектора поляризации \mathbf{P} пучка надо знать его компоненты вдоль трех осей координат l, m, n , которые удобно выбрать взаимно перпендикулярными:

$$\mathbf{P} = P_l \mathbf{l} + P_m \mathbf{m} + P_n \mathbf{n}. \quad (9.3)$$

Вектор \mathbf{P} определяет направление, вдоль которого преимущественно ориентирован спин частицы. Модуль вектора \mathbf{P} дает численное значение поляризации. Принято считать величину \mathbf{P} положительной или отрицательной, в зависимости от того, параллелен или антипараллелен вектор \mathbf{P} выделенному направлению.

Опыты по рассеянию частиц носят статистический характер. И пучок, и рассеиватель состоят из большого числа частиц. Экспериментатор измеряет среднее рассеяние при большом числе парных столкновений частиц пучка и мишени. Это означает, что можно представить пучок и мишень как статистический ансамбль систем, каждая из которых состоит из пары взаимодействующих частиц. Поэтому экспериментально измеряемая поляризация является средним значением по статистическому ансамблю.

Данная частица всегда поляризована определенным образом. При рассмотрении пучка частиц следует различать два случая:

1) все частицы пучка поляризованы одинаково и описываются одной и той же волновой функцией; пучок частиц, находящихся в одном и том же (как говорят, чистом) спиновом состоянии, называют полностью поляризованным;

2) различные частицы пучка поляризованы по-разному и им соответствуют различные волновые функции; такой пучок представляет собой статистическую смесь различных чистых спиновых состояний с определенными весами и получил название смешанного; он не имеет единой волновой функции и описывается матрицей плотности.

Сначала рассмотрим случай полностью поляризованного пучка частиц.

Частица со спином $1/2$ описывается двухкомпонентной спиновой волновой функцией

$$\varphi = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (a_1^* \ a_2^*). \quad (9.4)$$

Пусть волновые функции нормированы следующим образом:

$$\varphi^+ \varphi = |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1. \quad (9.5)$$

Величины $|a_1|^2$ и $|a_2|^2$ равны вероятности найти частицу соответственно в состояниях с $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$. Поэтому выражение (9.2) можно переписать так:

$$P_z = \frac{|a_1|^2 - |a_2|^2}{|a_1|^2 + |a_2|^2}. \quad (9.6)$$

Спину бариона соответствует оператор σ (см. гл. 1, § 6). С помощью последней формулы (9.6) для P_z можно представить в виде $P_z = \varphi^+ \sigma_z \varphi$, т. е. в виде среднего значения оператора σ_z .

Для вектора поляризации \mathbf{P} будем иметь

$$\mathbf{P} = \varphi^+ \boldsymbol{\sigma} \varphi. \quad (9.7)$$

Иначе говоря, вектор поляризации является средним значением оператора спина $\boldsymbol{\sigma}$.

Вектор \mathbf{P} преобразуется так же, как вектор $\boldsymbol{\sigma}$; в частности, при инверсии пространства знак вектора \mathbf{P} остается неизменным.

Подстановка в (9.7) матриц σ_i в виде (6.2), гл. 1 приводит к следующим выражениям для проекций вектора поляризации \mathbf{P} , которые иногда называют параметрами Стокса бариона:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= a_1^* a_2 + a_1 a_2^* = 2\text{Re } a_1^* a_2; \\ P_y &= \frac{1}{i} (a_1^* a_2 - a_1 a_2^*) = 2\text{Im } a_1^* a_2; \\ P_z &= |a_1|^2 - |a_2|^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Введем спиновые функции

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (9.9)$$

описывающие состояние полной поляризации в двух противоположных направлениях.

Тогда волновую функцию (9.4) можно представить в виде линейной комбинации функций (9.9)

$$\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2. \quad (9.10)$$

Каждое из состояний, описываемых функцией φ_1 и φ_2 (эти функции называют базисными векторами), полностью поляризовано.

Выясним, как направлен вектор поляризации \mathbf{P} относительно импульсов \mathbf{k} и \mathbf{k}' начальной и конечной систем частиц в реакции (9.1). Из трех векторов \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{P} можно образовать следующие комбинации: \mathbf{Pk} ; \mathbf{Pk}' , $\mathbf{P}[\mathbf{k}\mathbf{k}']$.

Две первые комбинации соответствуют продольной поляризации (вдоль векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}'), а последняя — поляризации, перпендикулярной к плоскости рассеяния. Так как, согласно (9.7), $\mathbf{P} \sim \boldsymbol{\sigma}$, то при инверсии пространства две первые комбинации меняют знак (см. гл. 2, § 1). Следовательно, если имеет место инвариантность относительно инверсии пространства, то вектор поляризации должен быть направлен перпендикулярно к плоскости реакции (вдоль вектора $[\mathbf{k}\mathbf{k}']$).

Так обстоит дело в случае, когда первичный пучок не поляризован. Если начальная поляризация не равна нулю, то даже при сохранении четности нельзя исключить появление продольной поляризации. Например, первоначальную поперечную поляризацию с помощью соответствующего магнитного поля можно превратить в чисто продольную, хотя в этом процессе четность сохраняется.

Поляризационная матрица плотности бариона. Переходим к анализу смешанного пучка барионов. Вычислим поляризацию смешанного пучка барионов. Пусть \mathbf{P}^n — значение поляризации бариона в чистом состоянии n и g^n — относительная вероятность, с которой это чистое состояние входит в смешанный пучок.

Тогда поляризация \mathbf{P} смешанного состояния будет средним значением \mathbf{P}^n :

$$\mathbf{P} = \sum_n g^n \mathbf{P}^n, \quad (9.11)$$

причем

$$\sum_n g^n = 1.$$

Подставляя в (9.11) формулы (9.7) и (9.10), находим

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \sum_n g^n \mathbf{P}^n = \sum_n g^n [(a_1^{n*} \varphi_1^\dagger + a_2^{n*} \varphi_2^\dagger) \sigma (a_1^n \varphi_1 + a_2^n \varphi_2)] = \\
 &= \sum_n g^n \{ a_1^{n*} a_1^n \varphi_1^\dagger \sigma \varphi_1 + a_2^{n*} a_1^n \varphi_2^\dagger \sigma \varphi_1 + a_1^{n*} a_2^n \varphi_1^\dagger \sigma \varphi_2 + \\
 &+ a_2^{n*} a_2^n \varphi_2^\dagger \sigma \varphi_2 \} = \sum_n g^n \sum_{ij} a_j^n a_i^{n*} \varphi_i^\dagger \sigma \varphi_j = \\
 &= \sum_{ij} \sum_n g^n a_j^n a_i^{n*} \varphi_i^\dagger \sigma \varphi_j. \tag{9.12}
 \end{aligned}$$

Матрица

$$\rho_{ij} = \sum_n g^n a_i^n a_j^{n*} \tag{9.13}$$

называется поляризационной матрицей плотности смешанного пучка барионов.

Иначе говоря, матрица плотности строится из коэффициентов разложения волновой функции чистого состояния по базисным векторам и относительных вероятностей, с которыми чистое состояние входит в смешанный пучок.

Для чистого состояния $\rho_{ij} = a_i^* a_j$, в случае неполяризованного бариона все направления равновероятны, т. е. $\rho_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$.

Формулу (9.12) можно записать так:

$$\mathbf{P} = \sum_{ij} \rho_{ij} \varphi_i^\dagger \sigma \varphi_j = \text{Sp}(\rho \sigma). \tag{9.14}$$

Как видно, с помощью матрицы плотности можно вычислить среднее значение оператора спина; оно равняется шпуру (сумме диагональных элементов) матрицы $\rho \sigma$, т. е. с помощью матрицы плотности ρ можно полностью охарактеризовать поляризационные свойства смешанного пучка.

В полной аналогии с (9.14) среднее значение произвольного оператора O в смешанном пучке определяется выражением

$$\langle \Phi^f | O | \Phi^f \rangle = \text{Sp} \rho O.$$

Запишем матрицу плотности бариона в виде, удобном для практических приложений. Из (9.13) следует, что

$$\rho = \sum_n g^n \begin{pmatrix} |a_1^n|^2 & a_1^n a_2^{n*} \\ a_1^{n*} a_2^n & |a_2^n|^2 \end{pmatrix}. \tag{9.15}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}\sigma) &= \frac{1}{2} \left[1 + \left(\sum_n g^n \mathbf{P}^n \right) \sigma \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_n g^n (P_x^n \sigma_x + P_y^n \sigma_y + P_z^n \sigma_z) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\sum_n g^n (|a_1^n|^2 + |a_2^n|^2) + \sum_n g^n \begin{pmatrix} |a_1^n|^2 - |a_2^n|^2 & 2a_1^n a_2^{n*} \\ 2a_1^{n*} a_2^n & -|a_1^n|^2 + |a_2^n|^2 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= \sum_n g^n \begin{pmatrix} |a_1^n|^2 & a_1^n a_2^{n*} \\ a_1^{n*} a_2^n & |a_2^n|^2 \end{pmatrix}. \quad (9.16)
 \end{aligned}$$

Сравнение (9.15) и (9.16) дает

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{P}\sigma). \quad (9.17)$$

Тем самым мы связали матрицу плотности ρ с вектором поляризации \mathbf{P} ; при этом $P_i = \text{Sp } \rho \sigma_i$.

Существует четыре независимые двухрядные матрицы σ : $1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. Можно сказать, что (9.17) представляет собой разложение матрицы плотности по четырем матрицам σ_i , нормированным следующим образом:

$$\text{Sp } (\sigma^i \sigma^j) = 2\delta_{ij}, \quad (9.18)$$

По-прежнему в случае полной поляризации $|\mathbf{P}| = 1$, а для неполяризованного пучка $|\mathbf{P}| = 0$.

Заметим, что матрица плотности обладает следующими основными свойствами:

1. Из определения (9.13) следует, что матрица плотности эрмитова

$$\rho_{ij} = \rho_{ji}^\dagger. \quad (9.19)$$

2. Из ортогональности и нормировки (9.5) спиновых волновых функций и условия $\sum_n g^n = 1$ следует, что

$$\text{Sp } \rho = \sum_n g^n (|a_1^n|^2 + |a_2^n|^2) = 1. \quad (9.20)$$

3. Матрица плотности бариона является квадратной двухрядной матрицей, содержащей четыре комплексных числа. Из (9.19) и (9.20) вытекает, что ρ зависит от трех действительных параметров. В общем случае частиц со спином s матрица плотности будет n -рядной, где $n = 2s + 1$, и характеризуется $n^2 - 1$ вещественными независимыми параметрами.

4. Диагональные элементы матрицы ρ_{ij} , соответствующие вероятности определенной поляризации частицы, должны быть положительными величинами.

5. Для чистого состояния квадрат матрицы плотности совпадает с ней самой:

$$(\rho^2)_{ij} = \sum_k a_{ik} a_{kj} = \sum_k a_k^* a_i a_j^* a_k = a_i a_j^* \sum_k |a_k|^2 = a_i a_j^* = \rho_{ij}.$$

Поляризационная матрица плотности фотона. Чистое состояние фотона характеризуется вектором поляризации ϵ . Тогда смешанное состояние можно описать с помощью набора векторов поляризаций ϵ^n и вероятностей g^n , с которыми эти чистые состояния входят в смешанный пучок.

Введем векторы χ_1 и χ_2 , описывающие состояние полной линейной поляризации фотона в двух взаимно перпендикулярных направлениях [см. гл. 1, формула (5.5)]. Тогда вектор ϵ можно представить так (см. рис. 1.3):

$$\epsilon = \epsilon_1 \chi_1 + \epsilon_2 \chi_2. \quad (9.21)$$

В полной аналогии с предыдущим, из коэффициентов разложений ϵ_1 и ϵ_2 и вероятностей g^n построим матрицу плотности фотона

$$\rho_{ij} = \sum_n g^n \epsilon_i^n \epsilon_j^{n*} = \overline{\epsilon_i \epsilon_j^*} = \frac{1}{2} (1 + \epsilon \omega), \quad (9.22)$$

где ω — матрицы, совпадающие с матрицами Паули [см. гл. 1, формула (6.2)].

Матрица плотности фотона по-прежнему зависит от трех параметров. Однако, в отличие от бариона, у фотона отсутствует продольная поляризация. Поэтому физический смысл этих параметров в случае бариона и фотона различен.

Выясним физический смысл элементов поляризационной матрицы плотности фотона. Из (9.22) следует, что $\rho_{11} = \overline{\epsilon_1 \epsilon_1^*}$, т. е. ρ_{11} характеризует вероятность поляризации фотона вдоль оси x (по которой направлен вектор χ_1), а $\rho_{22} = \overline{\epsilon_2 \epsilon_2^*}$ — вдоль оси y (по которой направлен вектор χ_2).

Введем ортогональные орты χ'_1, χ'_2 , составляющие с осью x угол 45° ,

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi'_1 + \chi'_2), \quad \chi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi'_1 - \chi'_2).$$

В новых ортах формула (9.21) переписется так:

$$\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 + \epsilon_2) \chi'_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \chi'_2.$$

Вероятность поляризации, соответствующей ортам χ_1 и χ_2 , будет равна

$$\rho_{11} = \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_1^*} = \frac{1}{2} (\rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{21} + \rho_{12}) = \frac{1}{2} [1 + (\rho_{12} + \rho_{21})],$$

$$\rho_{22} = \frac{1}{2} [1 - (\rho_{12} + \rho_{21})],$$

т. е. сумма $\pm (\rho_{12} + \rho_{21})$ элементов матрицы плотности представляет собой вероятность поляризации фотона вдоль осей χ_1 (верхний знак) и χ_2 .

В ортах χ_1'' и χ_2'' круговой поляризации [см. (5.6) гл. 1]

$$[\chi_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_1'' + \chi_2'') + \frac{1}{i\sqrt{2}} (\chi_1'' - \chi_2'')]$$

вероятность поляризации, соответствующей ортам χ_1'' и χ_2'' , равна

$$\rho_{11}'' = \overline{\varepsilon_1'' \varepsilon_1''^*} = \frac{1}{2} [1 + i(\rho_{12} - \rho_{21})], \quad \rho_{22}'' = \frac{1}{2} [1 - i(\rho_{12} - \rho_{21})],$$

т. е. разность $\pm i(\rho_{12} - \rho_{21})$ элементов матрицы плотности (комплексная величина) является вероятностью правой (верхний знак) и левой круговой поляризации фотона.

Параметры Стокса. Наряду с матрицей плотности для описания характера и степени поляризации фотонов можно использовать вектор ξ (не путать с вектором поляризации). Три его компоненты ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , называют параметрами Стокса фотона. Через последние матрица плотности, согласно (9.22), запишется в ортах (5.5) гл. 1 в виде:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \xi\omega) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \quad (9.23)$$

Параметры ξ_i пробегают значения между -1 и $+1$. Для неполяризованного фотона $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, а для полностью поляризованного фотона $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$.

Из (9.23) следует, что $\rho_{11} = \varepsilon_1 \varepsilon_1^* = \frac{1}{2}(1 + \xi_3)$ и $\rho_{22} = \frac{1}{2}(1 - \xi_3)$, т. е. параметр ξ_3 характеризует линейную поляризацию фотона вдоль осей x и y ; вероятность того, что фотон линейно поляризован вдоль этих осей, равна соответственно $\frac{1}{2}(1 + \xi_3)$ и $\frac{1}{2}(1 - \xi_3)$. При этом значению $\xi_3 = 1$ отвечает полная линейная поляризация вдоль оси x , а $\xi_3 = -1$ — вдоль оси y .

Из формулы $\rho_{12} + \rho_{21} = \xi_1$ вытекает, что параметр ξ_1 характеризует линейную поляризацию фотона вдоль направлений, составляющих 45° с осью x , причем значениям $\xi = \pm 1$ отвечают полные поляризации под углами $\varphi = 45^\circ$ (верхний знак) и $\varphi = -45^\circ$.

Так как $i(\rho_{12} - \rho_{21}) = \xi_2$, то параметр ξ_2 характеризует круговую поляризацию фотона, причем $\xi_2 = \pm 1$ отвечает соответственно полностью право- и лево-циркулярно поляризованным фотонам. Из (9.23) следует, что

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \rho_{12} + \rho_{21} = \overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_1}, & \xi_2 &= i(\overline{\varepsilon_1 \varepsilon_2} - \overline{\varepsilon_2 \varepsilon_1}), \\ \xi_3 &= |\varepsilon_1|^2 - |\varepsilon_2|^2.\end{aligned}\quad (9.24)$$

Для фотона, полностью линейно поляризованного под углом φ к оси x , формула (9.21) выглядит так (см. рис. 7.2):

$$\varepsilon = \cos \varphi \chi_1 + \sin \varphi \chi_2.$$

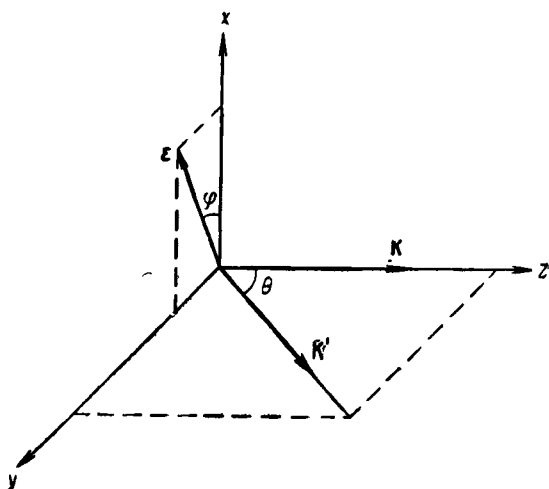


Рис. 7.2. Относительное расположение векторов k , k' и ε .

В этом случае $\varepsilon_1 = \cos \varphi$ и $\varepsilon_2 = \sin \varphi$, и выражения (9.24) для параметров Стокса перепишутся следующим образом:

$$\xi_1 = \sin 2\varphi, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \cos 2\varphi. \quad (9.25)$$

Если фотон полностью циркулярно поляризован, то в рассматриваемом случае (верхний знак — правая круговая поляризация)

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pm 1, \quad \xi_3 = 0. \quad (9.26)$$

Возьмем за исходные не орты (5.5) гл. 1, а циркулярные орты (5.6) гл. 1, тогда $\rho_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3)$ будет вероятностью круговой поляризации, а $\rho'_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)$ и $\rho''_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_2)$ — вероятностями

линейных поляризаций (соответственно по осям x и y и по осям, составляющим угол 45° с осью x). В циркулярных ортах выражение (9.24) для параметров Стокса в случае фотона, полностью линейно поляризованного под углом φ к оси x , выглядит так:

$$\xi_1 = \cos 2\varphi, \quad \xi_2 = \sin 2\varphi, \quad \xi_3 = 0. \quad (9.27)$$

При этом

$$\rho_l = \begin{pmatrix} 1 - \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{2i\varphi} \\ e^{2i\varphi} & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.28)$$

Для полностью циркулярно поляризованного фотона в циркулярных ортах (верхний знак — правая круговая поляризация)

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_3 = \pm 1. \quad (9.29)$$

Матрица плотности системы двух частиц. Система двух частиц $1 + 2$ в общем случае представляет собой статистическую смесь различных чистых состояний. Эту смесь можно описать совокупностью волновых функций чистых состояний Φ^n и относительными вероятностями g^n , с которыми чистые состояния входят в смесь. Волновые функции Φ^n чистых состояний системы можно разложить по базисным функциям $(\Phi_i^1 \Phi_j^2)$

$$\Phi^n = \sum_{ij} a_{ij}^n \Phi_i^1 \Phi_j^2. \quad (9.30)$$

Тогда матрица плотности ρ системы частиц определится следующим образом:

$$\rho_{ij, kl} = \sum_n g^n a_{ij}^n a_{kl}^{n*}. \quad (9.31)$$

Первые два индекса относятся к частице 1, а два других — к частице 2. Если частицы 1 и 2 системы не коррелируют между собой, то среднее значение произведения каких-либо операторов, относящихся к частицам 1 и 2, равно произведению средних значений операторов. В этом случае матрицу плотности ρ системы можно представить в виде произведения матриц плотности частиц 1 и 2:

$$\rho_{ij, kl} = \rho_{ij}^1 \rho_{kl}^2. \quad (9.32)$$

В реакции (9.1) состояния начальных частиц 1 и 2, как правило, не коррелированы, и, следовательно, для них имеет место соотношение (9.32). Напротив, состояния конечных частиц 3 и 4 всегда коррелированы, и для них соотношение (9.32) не применимо. В этом случае, например, для частиц со спином $1/2$

$$\rho = \frac{1}{4} \left[1 + (\xi^3 \sigma^3) + (\xi^4 \sigma^4) + \sum_{i,k} C_{ik} \sigma_i^3 \sigma_k^4 \right].$$

Коэффициенты C_{ik} характеризуют вероятность одновременного измерения i -й компоненты спина частицы 3 и k -й компоненты спина частицы 4, т. е. C_{ik} характеризуют вероятность определенной корреляции спинов частиц.

§ 10. Поляризация барионов отдачи. Тензоры поляризации

Из формулы (9.14) следует, что для вычисления величины поляризации конечных частиц процесса (9.1) надо знать их матрицу плотности ρ' . При этом матрица плотности начальной системы частиц задана. По определению, матрица плотности конечной системы

$$\rho'_{ij} = N \sum_n g^n a_i'^n a_j'^n, \quad (10.1)$$

где N — нормировочный множитель. Заданные начальные состояния a^n преобразуются в соответствующие конечные состояния a'^n с помощью амплитуды перехода F (см. § 2, 3):

$$a_i'^n = F_{ik} a_k^n, \quad a_i'^n = F_{ik}^* a_k^n. \quad (10.2)$$

Подставляя последнее в (10.1), получаем выражение для матрицы плотности ρ' конечных частиц

$$\begin{aligned} \rho'_{ij} &= N \sum_n g^n F_{jl}^* a_l'^n F_{ik} a_k^n = N \sum_n g^n F_{lj}^+ F_{ik} a_k^n a_l'^n = \\ &= N \sum_n F_{lj}^+ F_{ik} g^n a_k^n a_l'^n = N F \rho F^+. \end{aligned}$$

Нормировочный множитель N определим из условия $\text{Sp} \rho = 1$; тогда, если начальные частицы поляризованы,

$$\rho' = \frac{F \rho F^+}{\text{Sp} F \rho F^+}. \quad (10.3)$$

С помощью этой матрицы среднее значение любого оператора, в частности оператора спина s , или поляризация конечной частицы запишется, согласно (9.14), в виде

$$\mathbf{P} = \text{Sp} \rho' s = \frac{\text{Sp} (s F \rho F^+)}{\text{Sp} F \rho F^+} = \frac{\text{Sp} s F \rho F^+}{|k|} d\sigma_p. \quad (10.4)$$

где $d\sigma_p$ — дифференциальное сечение рассеяния поляризованных начальных частиц (см. § 8).

Выражение (10.4) полностью определяет как угловое распределение, так и поляризацию рассеянной частицы.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда начальные частицы не поляризованы, т. е. $\rho_0 = [(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)]^{-1}$, и измеряется поляризация бариона отдачи. В этом случае (см. § 9) вектор поляризации \mathbf{P} бариона направлен перпендикулярно к плоскости рассеяния (рис. 7.3) вдоль единичного вектора

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']}{|[\mathbf{k}\mathbf{k}']|}$$

и (10.4) выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} d\sigma P_n &\equiv P'_n = \rho_0 \text{Sp} F^+(\sigma\mathbf{n}) F = \\ &= \rho_0 \text{Sp} F F^+(\sigma\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Найдем формулы для поляризации P'_n барионов отдачи для некоторых процессов (нумерация процессов и обозначения те же, что в § 2 и 3).

5. $0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+$ (см. формулу 2.4').

$$\begin{aligned} P'_n &= \frac{1}{2} \text{Sp} \{F_1^* - i F_2^*(\sigma[\mathbf{k}'\mathbf{k}])\}(\sigma\mathbf{n}) \{F_1 + i F_2(\sigma[\mathbf{k}'\mathbf{k}])\} = \\ &= -2 \text{Im} F_2 F_1^*([\mathbf{k}'\mathbf{k}]\mathbf{n}). \end{aligned} \quad (10.6)$$

7. $\frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow 1^- + \frac{1}{2}^+$ (см. формулу 2.6).

$$\begin{aligned} P'_n &= \frac{1}{2} \text{Sp} [F_1 i \sigma \xi + F_2 (\sigma \mathbf{k}') (\sigma [\mathbf{k} \xi]) + F_3 i (\sigma \mathbf{k}) (\mathbf{k}' \xi) + \\ &+ F_4 i (\sigma \mathbf{k}') (\mathbf{k}' \xi) + F_5 i (\sigma \mathbf{k}) (\mathbf{k} \xi) + F_6 i (\sigma \mathbf{k}') (\mathbf{k} \xi)] \times \\ &\times [-F_1^* i \sigma \xi + F_2^* (\sigma [\mathbf{k} \xi]) (\sigma \mathbf{k}') - F_3^* (\sigma \mathbf{k}) (\mathbf{k}' \xi) - \\ &- F_4^* i (\sigma \mathbf{k}') (\mathbf{k}' \xi) - F_5^* i (\sigma \mathbf{k}) (\mathbf{k} \xi) - F_6^* i (\sigma \mathbf{k}') (\mathbf{k} \xi)] (\sigma \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Вычислим некоторые типичные шпуры, используя формулы (8.7)–(8.9) и формулу (4.12), гл. 3:

$$\text{а) } \frac{1}{2} \text{Sp} F_1^* F_1 (\sigma \xi) (\sigma \xi) (\sigma \mathbf{n}) = |F_1|^2 i ([\xi \xi] \mathbf{n}) = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \frac{1}{2} i \text{Sp} \{F_1 F_2^* (\sigma \xi) (\sigma [\mathbf{k} \xi]) (\sigma \mathbf{k}') (\sigma \mathbf{n}) - F_1^* F_2 (\sigma \mathbf{k}') \times \\ \times (\sigma [\mathbf{k} \xi]) (\sigma \xi) (\sigma \mathbf{n})\} = i (F_1 F_2^* - F_1^* F_2) \times \\ \times \{(k' [\mathbf{k} \xi]) (|\mathbf{k}' \mathbf{k}| \xi) - (k' \xi) (|\mathbf{k}' \mathbf{k}| [\mathbf{k} \xi])\} = 2 \text{Im} F_1^* F_2 \times \\ \times \{(k \xi) (\mathbf{k}' \xi) (\mathbf{k} \mathbf{k}') - (\xi \xi) (\mathbf{k}' \mathbf{k})^2 - (k \xi)^2 + (\xi \xi)\}; \end{aligned}$$

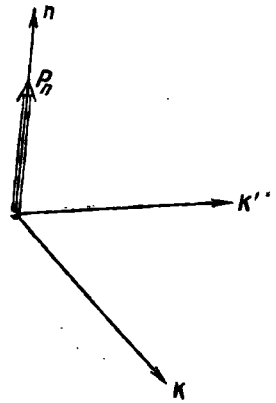


Рис. 7.3. Графическое изображение вектора \mathbf{P}_n .

$$\begin{aligned}
 \text{в) } \frac{1}{2} \text{Sp} \{ F_3 F_5^* (\sigma \mathbf{k}) (\sigma \mathbf{k}) (\sigma \mathbf{n}) (\mathbf{k} \xi) (\mathbf{k}' \xi) + F_3^* F_5 (\sigma \mathbf{k}) (\sigma \mathbf{k}) \times \\
 \times (\sigma \mathbf{n}) (\mathbf{k} \xi) (\mathbf{k}' \xi) \} = (F_3 F_5^* + F_3^* F_5) \times \\
 \times \{ ([\mathbf{k} \mathbf{k}] \mathbf{n}) + ([\mathbf{k}' \mathbf{k}'] \mathbf{n}) \} (\mathbf{k} \xi) (\mathbf{k}' \xi) = 0.
 \end{aligned}$$

Вычисляя аналогичным образом остальные шпуры, находим

$$\begin{aligned}
 P'_n = 2 \frac{1}{\sin \theta} \text{Im} \{ F_1^* F_2 \sin^2 \theta (\xi \xi) + [F_1^* F_3 - F_2^* F_4 + \\
 + (F_1^* F_4 - F_2^* F_3) \cos \theta - F_3^* F_4 \sin^2 \theta] (\mathbf{k}' \xi)^2 + \\
 + [-F_1^* F_4 + F_1^* F_5 - F_2^* F_6 + (F_1^* F_2 - F_1^* F_3 + F_2^* F_4 - \\
 - F_2^* F_5 + F_1^* F_6) \cos \theta + F_2^* F_3 \cos^2 \theta + (F_4^* F_5 - F_3^* F_6) \sin^2 \theta] \times \\
 \times (\mathbf{k}' \xi) (\mathbf{k} \xi) + [-F_1^* F_2 - F_1^* F_6 + (F_2^* F_6 - F_1^* F_5) \cos \theta + \\
 + F_2^* F_5 \cos^2 \theta - F_5^* F_6 \sin^2 \theta] (\mathbf{k} \xi)^2 \}. \quad (10.8)
 \end{aligned}$$

Чтобы просуммировать по проекциям спина вектора (или виртуального фотона), произведем в последнем выражении замены (7.8)–(7.12):

$$\begin{aligned}
 P'_n = 2 \sin \theta \text{Im} \left\{ 2F_1^* F_2 + F_1^* F_3 - F_2^* F_4 - F_2^* F_3 \cos \theta + \right. \\
 \left. + \frac{1}{\mu^2} F_1^* F_4 \cos \theta - F_3^* F_4 \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{\mu^2} \right) - (F_1^* F_6 + F_5^* F_6) \times \right. \\
 \left. \times \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) + \left(1 - \frac{1}{\mu^2} \right) (F_4^* F_5 - F_3^* F_6) \cos \theta \right\}. \quad (10.9)
 \end{aligned}$$

$$9. \quad \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+ \quad [\text{см. формулу (2.9)}].$$

Произведя вычисления, аналогичные предыдущим, найдем

$$P'_n = \frac{1}{4} \text{Sp} F^+ (\sigma^2 \mathbf{n}) F = 2 \text{Im} F_3^* (F_1 + F_2). \quad (10.10)$$

$$16. \quad \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^- \quad [\text{см. формулу (3.5)}].$$

$$\begin{aligned}
 P'_n = \frac{1}{4} \text{Sp} \{ F_1 i (\sigma \mathbf{e}) + F_2 (\sigma \mathbf{k}') (\sigma [\mathbf{k} \mathbf{e}]) + F_3 i (\sigma \mathbf{k}) (\mathbf{k}' \mathbf{e}) + \\
 + F_4 i (\sigma \mathbf{k}') (\mathbf{k}' \mathbf{e}) \} \{ -F_1^* i (\sigma \mathbf{e}) + F_2^* (\sigma [\mathbf{k} \mathbf{e}]) (\sigma \mathbf{k}') - \\
 - F_3^* i (\sigma \mathbf{k}) (\mathbf{k}' \mathbf{e}) - F_4^* i (\sigma \mathbf{k}') (\mathbf{k}' \mathbf{e}) \} (\sigma \mathbf{n}).
 \end{aligned}$$

С помощью формул (8.7)—(8.9) найдем для типичных шпуров

$$а) \quad \frac{1}{2} \text{Sp } F_1^* F_1 (\sigma \varepsilon) (\sigma \varepsilon) (\sigma \mathbf{n}) = i |F_1|^2 ([\varepsilon \varepsilon] \mathbf{n}) = 0;$$

$$б) \quad \frac{1}{2} i \text{Sp} \{ F_1 F_2^* (\sigma \varepsilon) (\sigma [\mathbf{k} \varepsilon]) (\sigma \mathbf{k}') (\sigma \mathbf{n}) - F_1^* F_2 (\sigma \mathbf{k}') (\sigma [\mathbf{k} \varepsilon]) \times \\ \times (\sigma \varepsilon) (\sigma \mathbf{n}) \} = i (F_1 F_2^* - F_1^* F_2) \{ (\mathbf{k}' [\mathbf{k} \varepsilon]) ([\mathbf{k}' \mathbf{k}] \varepsilon) - \\ - (\mathbf{k}' \varepsilon) ([\mathbf{k}' \mathbf{k}] [\mathbf{k} \varepsilon]) \} = -2 \text{Im } F_1 F_2^* (\varepsilon \varepsilon) [(\mathbf{k}' \mathbf{k})^2 - 1];$$

$$в) \quad \frac{1}{2} \text{Sp} \{ F_3 F_4^* (\sigma \mathbf{k}) (\sigma \mathbf{k}') (\sigma \mathbf{n}) (\mathbf{k}' \varepsilon)^2 + F_3^* F_4 (\sigma \mathbf{k}') (\sigma \mathbf{k}) \times \\ \times (\sigma \mathbf{n}) (\mathbf{k}' \varepsilon)^2 \} = i [F_3 F_4^* ([\mathbf{k} \mathbf{k}'] [\mathbf{k} \mathbf{k}']) (\mathbf{k}' \varepsilon)^2 - \\ - F_3^* F_4 ([\mathbf{k} \mathbf{k}'] [\mathbf{k} \mathbf{k}']) (\mathbf{k}' \varepsilon)^2] = -2 \text{Im } F_3 F_4^* [\mathbf{k} \mathbf{k}']^2 (\mathbf{k}' \varepsilon)^2.$$

Вычисляя остальные шпуры, получаем

$$P'_n = (\mathbf{k}' \varepsilon)^2 \frac{1}{\sin \theta} \text{Im} \left\{ \frac{\sin^2 \theta}{(\mathbf{k}' \varepsilon)^2} F_1 F_2^* + (\mathbf{k}' \mathbf{k}) F_1 F_4^* + \right. \\ \left. + F_1 F_3^* - (\mathbf{k}' \mathbf{k}) F_2 F_3^* - F_2 F_4^* - F_3 F_4^* [\mathbf{k} \mathbf{k}']^2 \right\}. \quad (10.11)$$

Чтобы просуммировать по проекциям спина фотона, произведем в этом выражении замены (7.15)—(7.18):

$$P'_n = \sin \theta \text{Im} \{ F_1 F_2^* + F_1 F_3^* - F_2 F_4^* + \\ + \cos \theta (F_1 F_4^* - F_2 F_3^*) - \sin^2 \theta F_3 F_4^* \}. \quad (10.12)$$

$$18. \quad \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + \gamma^- \text{ [см. формулу (3.6)].}$$

Производя вычисления, аналогичные предыдущим, получаем

$$P'_n = \sin \theta \text{Im} \{ (F_3 + F_4) (F_1 + F_2)^* (1 + \cos \theta) - \\ - (F_3 - F_4) (F_1 - F_2)^* (1 - \cos \theta) \}. \quad (10.13)$$

В общем случае поляризованными могут быть как начальный, так и конечный барионы. Введем три ортогональных направления \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} . Тогда для полной характеристики поляризации надо задать тензор P_{ij} , соответствующий определенному состоянию поляризации начальных и конечных частиц; например, P_{lm} характеризует состояние, когда начальный нуклон поляризован вдоль \mathbf{l} , а конечный вдоль \mathbf{m} и т. д.

Выражение для тензора поляризации P_{if} запишется, согласно (10.4), так:

$$\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} d\sigma P_{if} = \frac{1}{4} \text{Sp } \sigma_f F^+ \sigma_i F, \quad (10.14)$$

где σ_i и σ_f обозначает скалярное произведение вектора σ на один из единичных векторов \mathbf{l} , \mathbf{m} , \mathbf{n} .

Рассмотрим для примера процесс рассеяния протонов на протонах

$$p_1 + p_2 \rightarrow p'_1 + p'_2.$$

Пусть один из начальных протонов поляризован вдоль вектора $\mathbf{n} = [\mathbf{k}\mathbf{k}']/|\mathbf{k}\mathbf{k}'|$, перпендикулярного к плоскости реакции, и регистрируется поляризация того же протона после рассеяния в том же направлении \mathbf{n} . Такой процесс характеризуется тензором поляризации

$$\frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} d\sigma P_{nn} = \frac{1}{4} \text{Sp } (\sigma^1 \mathbf{n}) F^+ (\sigma^1 \mathbf{n}) F.$$

Имея в виду (2.9), находим

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} d\sigma P_{nn} = & \frac{1}{2} [|F_1 + F_2|^2 + |F_1 - F_2|^2 + |F_4 + F_5|^2 + \\ & + |F_4 - F_5|^2 + 4|F_3|^2]. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно найти выражение для других тензоров поляризации (см., например, гл. 14, § 5 и 6).

§ 11. Дифференциальные сечения в случае поляризованных частиц

В результате реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ начальная система частиц, находящаяся в смешанном состоянии (Φ_i^n, g_i^n) , перейдет в конечную систему, находящуюся в смешанном состоянии (Φ_f^n, g_f^n) . По аналогии с (1.7) амплитуда такого перехода запишется так:

$$M = \sum_m \sum_n g^n g^m \Phi_f^n (S - I) \Phi_i^m. \quad (11.1)$$

Подставляя в эту формулу разложения (9.30) для начальной и конечной системы и учитывая (9.31), приходим к следующему результату [см. вывод формулы (6.4), гл. 3]:

$$|M|^2 = \text{Sp } \rho' F \rho F^+ = \text{Sp } F^+ \rho' F \rho, \quad (11.2)$$

где ρ и ρ' — матрицы плотности начальной и конечной систем частиц. Подставляя (11.2) в (6.5), находим выражение для дифференциального сечения в случае поляризованных частиц.

Рассмотрим два конкретных процесса (нумерация процессов и обозначения те же, что в § 2 и 3).

$$5. 0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^- + \frac{1^+}{2}.$$

Найдем выражение для дифференциального сечения в случае, когда начальный барион (барион мишени) поляризован вдоль единичного вектора $\mathbf{n} = [\mathbf{k}\mathbf{k}'] / |\mathbf{k}\mathbf{k}'|$, т. е. $\mathbf{P} = P\mathbf{n}$, где P — величина поляризации. В этом случае матрица плотности начальной и конечной систем выглядит так: $\rho = \frac{1}{2} [1 + P(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})]$, $\rho' = 1$.

Подставляя их в формулу (11.2), получаем

$$\begin{aligned} d\sigma_{p_1} &= \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{1}{2} \text{Sp} [1 + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})] [F_1^* - iF_2^*(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}'\mathbf{k}])] \times \\ &\times [F_1 + iF_2(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}'\mathbf{k}])] = d\sigma + \frac{|\mathbf{k}'|}{2|\mathbf{k}|} i (F_2 F_1^* - F_1 F_2^*) \times \\ &\times \text{Sp} (\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{k}'\mathbf{k}]) (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) = d\sigma - 2 \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \text{Im} F_2 F_1^* ([\mathbf{k}'\mathbf{k}]\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Если поляризован конечный барион, то

$$\rho = 1, \quad \rho' = \frac{1}{2} \cdot [1 + P'(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})]$$

и

$$d\sigma_{p_2} = d\sigma - \frac{2|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \text{Im} F_2^* F_1 ([\mathbf{k}'\mathbf{k}]\mathbf{n}).$$

$$9. \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \frac{1^+}{2}.$$

Пусть поляризованы обе начальные частицы. Тогда

$$\rho = \frac{1}{4} (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{P}_1) (1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{P}_2), \quad \rho' = 1$$

и, согласно (11.2),

$$\begin{aligned} d\sigma_{p_1 p_2} &= \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} \frac{1}{4} \text{Sp} F \rho F^+ = d\sigma + \frac{|\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}'|} \left[\frac{1}{4} \text{Sp} F^+ (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{P}_1) F + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \text{Sp} F^+ (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{P}_2) F + \frac{1}{4} \text{Sp} F^+ (\boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{P}_2) (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{P}_1) F \right]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда F , определяемое (2.9), получаем

$$d\sigma_{p_1 p_2} = d\sigma \{ 1 + P^0(\mathbf{P}_1 \mathbf{n}) + P^0(\mathbf{P}_2 \mathbf{n}) + P_{nn}(\mathbf{P}_1 \mathbf{n})(\mathbf{P}_2 \mathbf{n}) + P_{ll}(\mathbf{P}_1 \mathbf{l})(\mathbf{P}_2 \mathbf{l}) + P_{mm}(\mathbf{P}_1 \mathbf{m})(\mathbf{P}_2 \mathbf{m}) + P_{ml}[(\mathbf{P}_1 \mathbf{l})(\mathbf{P}_2 \mathbf{m}) + (\mathbf{P}_1 \mathbf{m})(\mathbf{P}_2 \mathbf{l})] \},$$

где P^0 — поляризация, возникающая при столкновениях неполяризованных барионов.

**РАЗЛОЖЕНИЕ АМПЛИТУДЫ В С.Ц.М.
ПО ПАРЦИАЛЬНЫМ АМПЛИТУДАМ**

При получении выражения для амплитуды в с.ц.м. мы характеризовали состояние системы с помощью трехмерного импульса и проекций спина на произвольное направление z . Входящие в выражение для амплитуды процесса скалярные функции $F_i(W, \theta)$ зависели от энергии и углов.

В приложениях удобно пользоваться таким представлением той же амплитуды, в котором энергетические и угловые переменные в функциях $F_i(W, \theta)$ разделены, т. е. $F_i(W, \theta)$ являются произведением функции, зависящей только от энергии, и функции, зависящей только от угла. Такого разделения переменных можно достичь разложением $F_i(W, \theta)$ по собственным функциям полного момента количества движения, т. е. по шаровым функциям, зависящим только от угла*. В этом случае состояние системы определяется значениями полного момента количества движения и четности.

Идея разложения функций $F_i(W, \theta)$ по шаровым функциям заключается в следующем. С одной стороны, нам задано выражение для амплитуды в с.ц.м., содержащее скалярные функции $F_i(W, \theta)$ (см. примеры в гл. 7), с другой стороны, мы получим для той же амплитуды в с.ц.м. новое выражение в виде разложения по шаровым функциям. Приравнявая обе амплитуды, получаем выражения для функций $F_i(W, \theta)$, разложенных по шаровым функциям.

Мы изложим два способа получения разложения амплитуды по шаровым функциям. Первый основан на использовании коэффициентов Клебша—Гордана, а второй — на дифференцировании амплитуды более простого процесса.

**§ 1. Метод коэффициентов Клебша—Гордана.
Процессы без участия вектонов и фотонов**

Рассмотрим процесс

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \tag{1.1}$$

в котором вектоны и фотоны участия не принимают. Будем характеризовать начальное состояние системы следующими квантовыми числами: l — относительный орбитальный момент; m_l — его проекции; s — полный спин; m_s — его проекции; J — полный момент; M — его проекции, v — четность (при этом $J = l + s, \dots, |l - s|$). Конечное состояние системы определяется теми же квантовыми числами со штрихом.

* Подробнее о шаровых функциях см. в Дополнении III.

Схематически рассматриваемую реакцию можно изобразить так:

$$\left\{ \begin{array}{c} l \\ m_l \\ s \\ m_s \end{array} \right\} \rightarrow \{JM\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} l' \\ m_{l'} \\ s' \\ m_{s'} \end{array} \right\}. \quad (1.2)$$

Разложение амплитуды процесса в с. ц. м.

$$F(W, \theta) = \Phi_f^\dagger(k') S^{ll'} \Phi_i(k)$$

по собственным функциям $\psi^l(\theta)$ и $\psi^{l'}(\theta')$ начального и конечного состояний с заданным значением четности, полного момента и его проекции запишется в виде

$$F(W, \theta) = \sum_{J'M'v'} \sum_{JM\nu} \psi_{J'M'v'}^{J\dagger}(\theta') S_{J'M'v', JM\nu}^{ll'}(W) \psi_{JM\nu}^i(\theta). \quad (1.3)$$

Но вследствие закона сохранения момента и четности $J = J'$, $\nu = \nu'$. Кроме того, матричные элементы $S^{ll'}$ не зависят от M , так как в пространстве нет выделенного направления и в качестве оси z можно выбрать любое направление. Поэтому вместо (1.3) получим

$$F(W, \theta) = \sum_{iJ\nu} S_{J\nu}^{ll'}(W) \sum_{M_i} \bar{\psi}_{J\nu}^{J\dagger}(\theta') \bar{\psi}_{J\nu}^i(\theta). \quad (1.4)$$

Матричные элементы $S_{J\nu}^{ll'}(W)$ не зависят от угловых переменных и являются, таким образом, скалярными функциями только полной энергии системы. Для вычисления матричных элементов требуется знание детального механизма взаимодействия, поэтому они неизвестны.

Матричные элементы $S_{J\nu}^{ll'}(W)$ описывают переходы между состояниями с определенными значениями углового момента и четности и называются парциальными амплитудами или парциальными волнами.

Так как волновая функция системы с моментом l и спиновая функция системы со спином s порознь известны, то волновая функция начального состояния выглядит следующим образом (см. Дополнение II):

$$\psi_{JM_s}^i(\theta) = \sum_{m_s} C_{lM-m_s, m_s}^{JM} Y_{JM-m_s}(\theta) \chi_{s m_s}, \quad (1.5)$$

где $C_{l_1 l_2 m_1 m_2}^{JM}$ — коэффициенты Клебша — Гордана; $\chi_{s m_s}$ — спиновая волновая функция системы.

Аналогичным образом запишется выражение для волновой функции конечной системы

$$\psi_{JM_S}^f(\theta') = \sum_{m_{S'}} C_{l'M-m_{S'}, s'm_{S'}}^{JM} Y_{l'M-m_{S'}}(\theta') \chi_{s'm_{S'}}. \quad (1.6)$$

Подставив формулы (1.5) и (1.6) в (1.4), получим, опуская пока спиновые функции:

$$F(W, \theta) = \sum_{J'} S_{J'}^{Ji}(W) \sum_M C_{l'M-\tilde{m}_{S'}, s'm_{S'}}^{JM} C_{lM-m_{S'}, s'm_{S'}}^{JM} \times \\ \times Y_{l'M-m_{S'}}^*(\theta') Y_{lM-m_{S'}}(\theta). \quad (1.7)$$

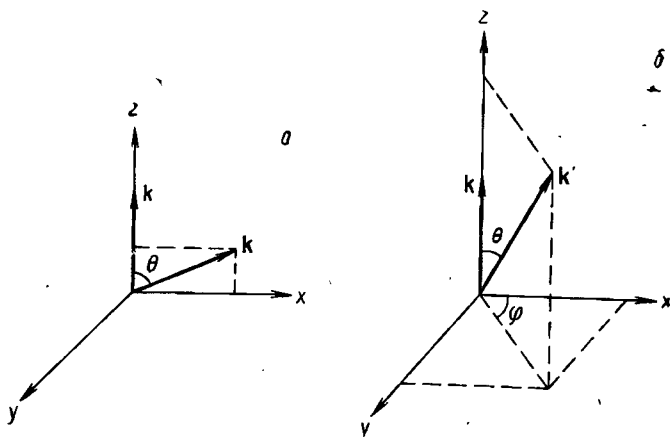


Рис. 8.1. Системы координат, используемые при выводе:
а—формулы (1.16); б—формулы (1.24).

Если начальная частица движется (рис. 8.1) вдоль оси z (т. е. $\theta = \varphi = 0^\circ$), то

$$Y_{lm}(0) = i^l \sqrt{2l+1} \delta_{m0}. \quad (1.8)$$

В этом случае вместо (1.7) будем иметь

$$F(W, \theta) = \sum_{J'} \sqrt{2l+1} S_{J'}^{Ji}(W) \sum_M C_{l'M-m_{S'}, s'm_{S'}}^{JM} \times \\ \times C_{lM-m_{S'}, sm_{S'}}^{JM} Y_{l'M-m_{S'}}(\theta) \delta_{M-m_{S'}, 0}. \quad (1.9)$$

Последнее выражение представляет собой разложение амплитуды в с. ц. м. по шаровым функциям $Y_{l'0}$ или по парциальным волнам $S_{J'}^{Ji}(W)$. Находя вид (1.9) для конкретного процесса и сравнивая

его с выражением для амплитуды того же процесса, содержащим $F_i(W, \theta)$ (см. гл. 7), получаем разложение скалярных функций $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам (или по шаровым функциям, в частности по полиномам Лежандра).

Рассмотрим в качестве примеров несколько конкретных процессов.

$$1. 0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-.$$

Для этой реакции $s = s' = 0$. Из-за множителя $\delta_{M-m_s, 0}$ амплитуда будет отлична от нуля лишь для значения $M = 0$, т. е. в амплитуду (1.9) войдут лишь $Y_{l, 0}(\theta)$. Кроме того, из закона сохранения момента количества движения и четности следует, что $J = l = l'$. Следовательно, имея в виду, что $C_{l, 0, 0}^{l, 0, 0} = 1$:

$$\begin{aligned} F(W, \theta) &= \sum_l \sqrt{2l+1} S_l^{l, 0}(W) Y_{l, 0}(\theta) = \\ &= \sum_l (2l+1) S_l^{l, 0}(W) P_l(\theta). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Сравнивая (1.10) с (2.1), гл. 7, получаем

$$F_1(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) S_l(W) P_l(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(W) P_l(\theta), \quad (1.10')$$

где $f_l(W) \equiv S_l(W)$.

Так выглядит разложение функции $F_1(W, \theta)$ по парциальным амплитудам (или по полиномам Лежандра). Конечно, последнее выражение можно было написать сразу, имея в виду, что в данном случае речь идет о разложении скалярной функции по полиномам Лежандра.

Выражения для нескольких первых полиномов Лежандра приведены в Дополнении III.

Если ограничиться учетом образования мезонов лишь в s - и p -состояниях, т. е. удерживать в сумме слагаемые с $l = 0$ и 1 , то

$$F(W, \theta) = f_0(W) + f_1(W) \cos \theta.$$

$$2. 0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+.$$

В этом случае $s = s' \equiv \frac{1}{2}$; поэтому (1.9) переписывается так:

$$\begin{aligned} F(W, \theta) &= \sum_{J_s} \sqrt{2l+1} S_{J_s}^{l, 0}(W) \sum_M C_{l', M-m_s', 1/2 m_s'}^{J_s M} \times \\ &\times C_{l M-m_s, 1/2 m_s}^{J_s M} Y_{l', M-m_s'}(\theta) \delta_{M-m_s, 0}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Выясним сначала, какие значения M дают вклад в сумму по M . Из-за множителя $\delta_{M-m_s, 0}$ амплитуда будет отлична от нуля лишь для значений $M = m_s$ и, значит, для значений $M - m_{s'} = m_s - m_{s'}$. Так как m_s и $m_{s'}$ принимают значения $\pm \frac{1}{2}$, то в сумму по M дадут вклад

$$M - m_{s'} = m_s - m_{s'} = \begin{cases} 0, & \text{если } m_s = m_{s'} = \frac{1}{2} \text{ или } -\frac{1}{2} \\ 1, & \text{если } m_s = -m_{s'} = \frac{1}{2} \\ -1, & \text{если } m_s = -m_{s'} = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Это означает, что в выражении (1.11) встретятся лишь $Y_{l', 0}$ и $Y_{l', \pm 1}$. Выберем ось x (рис. 8.1) в плоскости единичных векторов* k, k' (в этом случае $\varphi' = 0$); тогда

$$Y_{l', 0} = \sqrt{2l'+1} P_{l'}(\theta); \quad Y_{l', \pm 1} = \pm \sqrt{\frac{2l'+1}{l'(l'+1)}} k'_x P'_{l'}(\theta). \quad (1.12)$$

Из проекций спинов $m_s = \pm \frac{1}{2}$ и $m_{s'} = \pm \frac{1}{2}$ можно составить четыре комбинации $F_{m_s, m_{s'}}$, каждая из которых с учетом (1.11) и (1.12) запишется так (см. Дополнение II):

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2 \ 1/2} &= \sum_J S_{J\nu}^{II}(W) \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} C_{l'0, 1/2 \ 1/2}^{J \ 1/2} C_{l0, 1/2 \ 1/2}^{J \ 1/2} P_{l'}; \\ F_{1/2 \ -1/2} &= \sum_J S_{J\nu}^{II}(W) \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{l'(l'+1)}} C_{l'-1, 1/2 \ 1/2}^{J \ -1/2} \times \\ &\quad \times C_{l0, 1/2 \ -1/2}^{J \ -1/2} k'_x P'_{l'}; \\ F_{-1/2 \ 1/2} &= - \sum_J S_{J\nu}^{II}(W) \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{l'(l'+1)}} C_{l'1, 1/2 \ -1/2}^{J \ 1/2} \times \\ &\quad \times C_{l0, 1/2 \ 1/2}^{J \ 1/2} k'_x P'_{l'}; \\ F_{-1/2 \ -1/2} &= \sum_J S_{J\nu}^{II}(W) \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} C_{l'0, 1/2 \ -1/2}^{J \ -1/2} C_{l0, 1/2 \ -1/2}^{J \ -1/2} P_{l'}. \end{aligned} \right\} (1.13)$$

Какие значения J дают вклад в сумму по J в формулах (1.13)? Из закона сохранения момента следует, что J может принимать следующие значения: $J = l + 1/2 = l' + 1/2$, $J = l + 1/2 = l' - 1/2$, $J = l - 1/2 = l' + 1/2$, $J = l - 1/2 = l' - 1/2$. Из за-

* В этой главе, в отличие от предыдущей, мы будем обозначать единичные векторы через k и k' (опуская значок \wedge).

кона сохранения четности следует, что $(-1)^{l+1} = (-1)^{l'+1}$, т. е. $l = l'$. Этому условию удовлетворяют только $J = l + 1/2 = l' + 1/2$ и $J = l - 1/2 = l' - 1/2$, и, следовательно, лишь они войдут в сумму по J . Подставив указанные значения J в (1.13) и взяв величины коэффициентов Клебша—Гордана из таблицы (см. Дополнение II), получим:

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2 \ 1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} [f_{l+}(l+1)P_l + f_{l-}lP_l]; \\ F_{1/2 \ -1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} [f_{l+}k'_x P'_l - f_{l-}k'_x P'_l]; \\ F_{-1/2 \ 1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} [-f_{l+}k'_x P'_l + f_{l-}k'_x P'_l]; \\ F_{-1/2 \ -1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} [f_{l+}(l+1)P_l + f_{l-}lP_l], \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

где $f_{l+} \equiv S_{J=l+1/2=l'+1/2}(W)$; $f_{l-} \equiv S_{J=l-1/2=l'-1/2}(W)$ —парциальные амплитуды рассеяния в состоянии $J = l \pm \frac{1}{2}$ и четностью $v = (-1)^{l+1}$.

С другой стороны, найдем выражение (2.4'), гл. 7 в выбранной системе координат (см. рис. 8.1, а). Проекции единичных векторов будут такими: $k(0, 0, 1)$, $k'(k'_x, 0, k'_z)$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} (\sigma[k'k]) &= (k'_x k_y - k'_y k_x) \sigma_z + (k'_z k_x - k'_x k_z) \sigma_y + \\ &+ (k'_y k_z - k'_z k_y) \sigma_x = -\sigma_y k'_x. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2 \ 1/2} &= (1 \ 0) [F_1 - F_2 i \sigma_y k'_x] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 0) \left[F_1 - F_2 i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} k'_x \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = F_1; \\ F_{1/2 \ -1/2} &= (1 \ 0) [F_1 - F_2 i \sigma_y k'_x] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -k'_x F_2; \\ F_{-1/2 \ 1/2} &= (0 \ 1) [F_1 - F_2 i \sigma_y k'_x] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k'_x F_2; \\ F_{-1/2 \ -1/2} &= (0 \ 1) [F_1 - F_2 i \sigma_y k'_x] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = F_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Сравнение одинаковых амплитуд в (1.14) и (1.16) дает

$$\left. \begin{aligned} F_1(W, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+} + lf_{l-}] P_l; \\ F_2(W, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} (f_{l-} - f_{l+}) P_l'. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

В s -, p -волновом приближении

$$F_1(W, \theta) = f_{0+} + (2f_{1+} + f_{1-}) \cos \theta; \quad F_2(W, \theta) = f_{1-} - f_{1+}.$$

Тем самым найдено разложение коэффициентов $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам (или по полиномам Лежандра).

Этот же результат можно получить, если записать амплитуду (1.11) в форме, содержащей те же спиновые комбинации, которые имеются в формуле (2.4'), гл. 7. Чтобы этого добиться, запишем (1.11), имея в виду (1.13), следующим образом:

$$F(W, \theta) = \left\{ \frac{1}{2} (1 + \sigma_z) F_{1/2 \ 1/2} + \frac{1}{2} (\sigma_x + i \sigma_y) F_{1/2 - 1/2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\sigma_x - i \sigma_y) F_{-1/2 \ 1/2} + \frac{1}{2} (1 - \sigma_z) F_{-1/2 - 1/2} \right\}. \quad (1.18)$$

Амплитуда $F_{m_s, m_s'}$ описывает переходы из состояния, соответствующего m_s , в состояние m_s' . Поэтому множители, содержащие матрицы σ , подобраны так, чтобы сделать отличными от нуля именно те переходы, при которых они стоят. Так, отличный от нуля переход из состояния $m_s = 1/2$ в состояние $m_s' = 1/2$ дает матричный элемент оператора $\frac{1}{2}(1 + \sigma_z)$ и т. д.

Производя в последнем выражении суммирование по J , находим в случае

$$J = l + 1/2 = l' + 1/2$$

$$F'(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{l+}(W) \{ (l+1) P_l - i (\sigma [k' k]) P_l' \};$$

и в случае $J = l - \frac{1}{2} = l' - \frac{1}{2}$.

$$F''(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{l-}(W) \{ l P_l + i (\sigma [k' k]) P_l' \}.$$

При этом мы воспользовались формулой (1.15). Таким образом,

$$F(W, \theta) = F'(W, \theta) + F''(W, \theta). \quad (1.19)$$

Сравнение этого выражения с формулой (2.4'), гл. 7 дает

$$F_1(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+} + lf_{l-}] P_l; \quad (1.20)$$

$$F_2(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [f_{l-} - f_{l+}] P_l'. \quad (1.21)$$

Разумеется, эти формулы совпадают с выражениями (1.17).

$$3. 0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^+ + \frac{1}{2}^+.$$

В отличие от предыдущего процесса возможными будут другие значения J : $J = l + 1/2 = l' - 1/2$ и $J = l - 1/2 = l' + 1/2$.

Проделав те же вычисления, что и в предыдущем случае, найдем

$$а) \text{ в случае } J = l + \frac{1}{2} = l' - \frac{1}{2}$$

$$F'(W, \theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} f_{l+}(\sigma k') [(l+1)P_l - i(\sigma[k'k])P_l'];$$

$$б) \text{ в случае } J = l - \frac{1}{2} = l' + \frac{1}{2}$$

$$F''(W, \theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} f_{l-}(\sigma k') [lP_l + i(\sigma[k'k])P_l'].$$

Таким образом,

$$F(W, \theta) = F'(W, \theta) + F''(W, \theta). \quad (1.22)$$

Как видно, амплитуда рассматриваемого процесса отличается от амплитуды предыдущего процесса множителем $(-\sigma k')$.

Сравнение (1.22) и (2.5), гл. 7 приводит к формулам (1.20) и (1.21), взятым с обратным знаком.

$$4. \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + \frac{1}{2}^+.$$

В этом случае полный спин начальной или конечной системы может принимать два значения: $s = 0$ (синглетное состояние) и $s = 1$ (триплетное состояние). Пусть частицы — нуклоны, тогда возможны следующие переходы:

$$s = s' = 1 \begin{cases} l+1 \rightarrow l'+1, & l+1 \rightarrow l'-1; & l \rightarrow l' \\ l-1 \rightarrow l'+1, & l-1 \rightarrow l'-1; \end{cases}$$

$$(l, s = 0) \rightarrow (l', s' = 0).$$

Введем функции $T_{m_s', m_s}(W, \theta)$, описывающие переходы из состояния с проекцией полного спина m_s в состояние с проекцией полного спина m_s' .

Из выражения (1.9) следует, что функции T_{m_s', m_s} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} T_{0,-1} &= -T_{0,1}, & T_{-1,1} &= T_{1,-1}, \\ T_{-1,0} &= -T_{1,0}, & T_{-1,-1} &= T_{1,1}. \end{aligned}$$

Переходы из триплетного состояния в триплетное характеризуются функциями $T_{1,1}, T_{1,0}, T_{1,-1}, T_{0,1}, T_{0,0}$, а из синглетного состояния в синглетное — функцией $T_{s,s}$.

Функции T_{m_s', m_s} , соответствующие переходу из синглетного состояния в триплетное (и наоборот), обращаются в нуль.

Спиновые функции системы из двух барионов в триплетном и синглетном состояниях выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} s=1 & \begin{cases} m_s = +1 & \chi_i(1) \chi_i(2); \\ m_s = 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_i(1) \chi_j(2) + \chi_j(1) \chi_i(2)]; \\ m_s = -1 & \chi_j(1) \chi_j(2); \end{cases} \\ s=0, \quad m_s=0 & \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_i(1) \chi_j(2) - \chi_j(1) \chi_i(2)]. \end{aligned}$$

Здесь индексы 1 и 2 относятся к барионам, а

$$\chi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти разложение амплитуд (2.9), гл. 7 по парциальным амплитудам, выразим сначала функции F_i через функции T_{m_s', m_s} , а затем определим явный вид последних с помощью (1.9). Для нахождения связи между функциями F_i и T_{m_s', m_s} воспользуемся соотношением

$$T_{m_s', m_s} = \chi_{m_s'} F(W, \theta) \chi_{m_s}.$$

Отсюда, например, для функции $T_{1,0}$ следует

$$T_{1,0} = \chi_i^+(1) \chi_i^+(2) F(W, \theta) \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_i(1) \chi_j(2) + \chi_j(1) \chi_i(2)]. \quad (1.23)$$

Введем прямоугольную систему координат (рис. 8.1, б), в которой компонентами единичных векторов \mathbf{n} , \mathbf{P} , \mathbf{K} (см. формулу (2.9), гл. 7) будут

$$\begin{aligned} \mathbf{n} & -\sin \varphi, & \cos \varphi, & 0; \\ \mathbf{P} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi, & \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi, & \cos \frac{\theta}{2}; \\ \mathbf{K} & -\cos \frac{\theta}{2} \cos \varphi, & -\cos \frac{\theta}{2} \sin \varphi, & \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

После перемножения матриц в выражении (1.23) придем к следующему результату:

$$T_{1,0} = \sqrt{2} F_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta F_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta F_5.$$

Аналогичные вычисления дают*

$$T_{s,s} = F_1 - F_2 - F_4 - F_5;$$

$$T_{1,1} = T_{-1,-1} = F_1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} F_4 + F_5 \cos^2 \frac{\theta}{2};$$

$$T_{1,-1} = T_{-1,1} = -F_2 + \cos^2 \frac{\theta}{2} F_4 + \sin^2 \frac{\theta}{2} F_5;$$

$$T_{0,1} = -T_{0,-1} = -\sqrt{2} F_3 - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} F_4 + \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} F_5;$$

$$T_{0,0} = F_1 + F_2 + \cos \theta F_4 - \cos \theta F_5.$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{4} (2T_{1,1} + T_{0,0} + T_{s,s}); \\ F_2 &= \frac{1}{4} (-2T_{1,-1} + T_{0,0} - T_{s,s}); \\ F_3 &= \frac{\sqrt{2}}{4} (T_{1,0} - T_{0,1}); \\ F_4 &= \frac{1}{4} [T_{1,1} + T_{1,-1} - T_{s,s} - \sec \theta (T_{1,1} - T_{1,-1} - T_{0,0})]; \\ F_5 &= \frac{1}{4} [T_{1,1} + T_{1,-1} - T_{s,s} + \sec \theta (T_{1,1} - T_{1,-1} - T_{0,0})]. \end{aligned} \right\} (1.24)$$

* Непосредственной проверкой можно убедиться, что между функциями T_{m_s, m_s} существует отношение

$$T_{1,1} - T_{1,-1} - T_{0,0} = \sqrt{2} \operatorname{ctg} \theta (T_{1,0} - T_{0,1});$$

оно следует из инвариантности относительно слабого обращения времени.

Для нахождения конкретного вида T_{m_s, m_s} воспользуемся формулой (1.9).

Так как для триплетного состояния $j = l + 1, l, l - 1$, то, например, в случае $T_{1,1}$, когда $M = m_s = m_s = 1$, с помощью (1.9) найдем

$$T_{1,1} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [S_l^{l+1}(W) C_{l011}^{l+1} + S_l^l(W) C_{l011}^l + S_l^{l-1}(W) C_{l011}^{l-1}].$$

Подставляя сюда значение коэффициентов Клебша—Гордана (см. Дополнение II) и вводя новые обозначения для парциальных амплитуд $a_l(W) = \frac{1}{2} S_l(W)$, будем иметь

$$T_{1,1} = \sum_{l=0}^{\infty} [(l+2)a_l^{l+1}(W) + (2l+1)a_l^l(W) + (l-1)a_l^{l-1}(W)] P_l(\cos\theta).$$

Аналогичным образом получим

$$\left. \begin{aligned} T_{0,0} &= 2 \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)b_l^{l+1}(W) + lb_l^{l-1}(W)] P_l^0(\cos\theta); \\ T_{1,-1} &= \sum_{l=2}^{\infty} \left[\frac{1}{l+2} a_l^{l+1}(W) - \frac{2l+1}{l(l+1)} a_l^l(W) + \frac{1}{l} a_l^{l-1}(W) \right] \times \\ &\quad \times P_l^2(\cos\theta); \\ T_{1,0} &= \sqrt{2} \sum_{l=1}^{\infty} [b_l^{l+1}(W) - b_l^{l-1}(W)] P_l^1(\cos\theta); \\ T_{0,1} &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[-\frac{l+2}{l+1} a_l^{l+1}(W) + \frac{2l+1}{l(l+1)} a_l^l(W) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{l-1}{l} a_l^{l-1}(W) \right] P_l^1(\cos\theta); \\ T_{s,s} &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l(W) P_l^0, \end{aligned} \right\} (1.25)$$

где a_l^j, b_l^j, c_l^j — парциальные амплитуды переходов

$$a_l^j: l+1 \rightarrow l+1, \quad l-1 \rightarrow l'-1, \quad l \rightarrow l' \quad \text{и} \quad s=1;$$

$$b_l^j: l+1 \rightarrow l'-1, \quad l-1 \rightarrow l'+1 \quad \text{и} \quad s=1;$$

$$c_l^j: l \rightarrow l' \quad \text{и} \quad s=0,$$

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d}{dx^m} P_l(x)$$

присоединенные полиномы Лежандра (см. Дополнение III).

В случае рассеяния протонов на протонах (тождественные частицы) вместо формул (1.25) получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{m_s, m_s}(W, \cos \theta) &= T_{m_s, m_s}(W, \cos \theta) - \\ &- (-1)^{m_s' + m_s} T_{m_s, m_s}(W, \cos(\pi - \theta)); \\ \bar{T}_{s, s}(W, \cos \theta) &= T_{s, s}(W, \cos \theta) + T_{s, s}(W, \cos(\pi - \theta)). \end{aligned} \right\} (1.26)$$

Подставляя (1.25) или (1.26) в (1.24), находим разложение функций $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам.

Таким образом, для того чтобы получить разложение амплитуды процесса по парциальным волнам с помощью выражений (1.7) или (1.9), надо: 1) выбрать систему координат; 2) найти значения M , дающие вклад в сумму; 3) найти значения J , дающие вклад в сумму; 4) зафиксировать определенные величины проекций спинов (m_s, m_s') и произвести суммирование по допустимым J и M , используя таблицы для коэффициентов Клебша—Гордана.

Чтобы найти разложение функций $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам, надо: 1) переписать входящие в амплитуду $F(W, \theta)$ спиновые комбинации в ранее выбранной системе координат; 2) найти выражение амплитуды $F(W, \theta)$ для различных комбинаций проекций спинов; 3) приравнять значения амплитуд при одинаковых спиновых комбинациях (m_s, m_s'); 4) разрешить полученную систему относительно $F_i(W, \theta)$.

§ 2. Метод коэффициентов Клебша—Гордана. Процессы с участием реальных фотонов

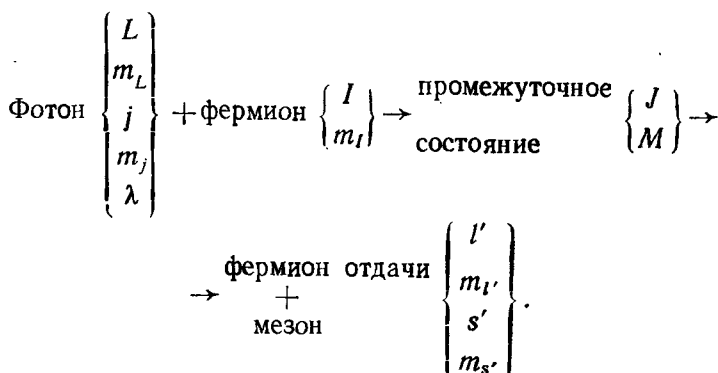
Как мы уже говорили (гл. 1, § 5), состояние вектона (или виртуального фотона) и реального фотона удобно описывать полным моментом и четностью. Поэтому систему из двух частиц, содержащую вектон или фотон, удобно описывать не относительным орбитальным моментом и суммарным спином, как это мы делали в предыдущем параграфе, а полным моментом вектона или фотона и спином другой частицы. В этом случае полный момент системы равен векторной сумме полного момента фотона и спина другой частицы.

Рассмотрим подробнее процесс образования реальными фотонами псевдоскалярных мезонов M на фермионах F (величины спинов фермионов произвольны):

$$\gamma + F \rightarrow F' + M.$$

Пусть L, m_L — орбитальный момент фотона и его проекции; j, m_j — полный момент фотона и его проекции; $\lambda = 0$ и $+1$ соответственно для магнитных и электрических фотонов; I, m_I — спин начального фермиона и его проекции; μ — проек-

ции спина фотона. Схематически рассматриваемую реакцию можно изобразить так:



Разложение амплитуды по парциальным волнам по-прежнему запишется в виде (1.4), а волновая функция конечного состояния — в виде (1.6). Волновая функция начального состояния, если учесть формулу (5.8), гл. 1, будет выглядеть следующим образом:

$$\psi_{JMl}^i(\theta) = \sum_{m_I} C_{jm_j, Im_I}^{JM} A_{jm_j}^\lambda \chi_{Im_I}, \quad (2.1)$$

где χ_{Im_I} — спиновая волновая функция фермиона.

Подставляя (1.6) и (2.1) в (1.4), находим, опуская спиновые функции,

$$F(W, \theta) = \sum_{j\nu} S_{j\nu}^i(W) \sum_M C_{IM-m_I, Im_I}^{JM} C_{l'M-m_{s'}, s'm_{s'}}^{JM} \times$$

$$\times A_{l'm_{l'}}^{M-m_I} Y_{l', M-m_{s'}}(\theta'). \quad (2.2)$$

Если фотон движется вдоль оси z , то последнее выражение переписывается так:

$$F(W, \theta) = -\sqrt{2} \sum_{JMj\lambda l'} S_{j\nu}^i(W) i^{L-l-\lambda} \sqrt{2L+1} \delta(L, \lambda) C_{l'M-m_{s'}, s'm_{s'}}^{JM} \times$$

$$\times C_{jm_j, Im_I}^{JM} C_{L0j\mu}^{l'm_j} C_{j-1, 11}^{L0} Y_{l'm_I}(\theta'). \quad (2.3)$$

Так как сумму по L в этом выражении можно вычислить

$$\sum_{L=0}^{\infty} \sqrt{2L+1} \delta(L, \lambda) C_{j-1, 11}^{L0} C_{L0j\mu}^{l'm_j} = \mu^\lambda \frac{\sqrt{2j+1}}{2},$$

то окончательное выражение для амплитуды рассматриваемого процесса, разложенной по парциальным волнам, запишется так:

$$F(W, \theta) = - \sum_{JMj\lambda l'} \sqrt{\frac{2j+1}{2}} \mu^\lambda i^{L-j-\lambda} S_{j\nu}^i(W) \times$$

$$\times C_{l'M-m_{s'}, s'm_{s'}}^{JM} C_{jm_j, Im_I}^{JM} Y_{l', M-m_{s'}}(\theta'). \quad (2.4)$$

Найдя вид (2.4) для конкретного процесса и сравнив его с выражением для амплитуды того же процесса, содержащим $F_i(W, \theta)$ (см. гл. 7), получим разложение $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам.

Рассмотрим в качестве примера процесс

$$\frac{1}{2}\gamma^- + \frac{1}{2}\pi^+ \rightarrow \frac{1}{2}\pi^+ + 0^-.$$

Мы не будем проводить детально довольно громоздких в этом случае вычислений, так как в следующем параграфе эта же задача будет решена другим, более компактным методом.

Для рассматриваемой реакции $I = s' = 1/2$. Вклад в сумму по M в выражении (2.4) будут давать значения $M = m_j + m_l$. Пусть фотон поляризован по кругу и $m_j = \mu = +1$, тогда

$$M - m_{s'} = \begin{cases} 0, & \text{если } m_l = -m_{s'} = -\frac{1}{2} \\ 1, & \text{если } m_l = m_{s'} = \frac{1}{2} \text{ или } -\frac{1}{2} \\ 2, & \text{если } m_l = -m_{s'} = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Найдем те значения J , которые будут давать вклад в сумму (2.4).

Так как спин нуклона равен $1/2$, то при данном J полный момент фотона принимает два значения: $j = J + 1/2$ и $j = J - 1/2$. Для каждого из значений j существует два типа фотонов: электрические E с четностью $(-1)^j$ и магнитные M с четностью $(-1)^{j+1}$. Значит, при данном j существует четыре типа начальных состояний: два с четностью $(-1)^{(J-1/2)+1+\lambda}$, соответствующих фотонам $E(J - 1/2)$ и $M(J - 1/2)$, и два с четностью $(-1)^{(J+1/2)+1+\lambda}$, соответствующих фотонам $E(J + 1/2)$ и $M(J + 1/2)$.

В конечном состоянии при данном J возможны два значения относительного орбитального момента $l' : l' = J + \frac{1}{2}$, $l' = J - \frac{1}{2}$, а соответствующие четности равны $(-1)^{l'+1} = (-1)^{(J-1/2)+1}$ и $(-1)^{l'+1} = (-1)^{(J+1/2)+1}$.

Из закона сохранения момента и четности следует, что возможными являются следующие переходы:

$$E\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}, \quad M\left(J + \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{1}{2};$$

$$E\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J + \frac{1}{2}, \quad M\left(J - \frac{1}{2}\right) \rightarrow l' = J - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, в сумму по J будут давать вклад $J = j \pm \frac{1}{2}$ и $J = l' \pm \frac{1}{2}$.

Введем парциальные амплитуды, соответствующие указанным переходам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{i}{2\sqrt{l'(l'+1)}} S_{J=l'-1/2, \lambda=1} = E_{l-}; & \quad \frac{-i}{2\sqrt{l'(l'+1)}} \times \\ & \quad \times S_{J=l'-1/2, \lambda=0} = M_{l-}; \\ \frac{i}{2\sqrt{(l'+1)(l'+2)}} S_{J=l'+1/2, \lambda=1} = E_{l+}; & \quad \frac{-i}{2\sqrt{l'(l'+1)}} \times \\ & \quad \times S_{J=l'+1/2, \lambda=0} = M_{l+}. \end{aligned} \right\} (2.5)$$

Парциальная амплитуда E_{l-} описывает переход, при котором электрический фотон образует конечную систему мезон — нуклон с $J = l' - 1/2$ (именно поэтому l в E_{l-} содержит знак минус); аналогичный смысл имеют и другие парциальные амплитуды.

Выберем ось x в плоскости kk' (рис. 8.1). Тогда вычисление в (2.4) слагаемых, отличных от нуля, дает

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2 \ 1/2} &= - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{2}} \{ (l+2)(M_{l+} - E_{l+}) + (l-1) \times \\ & \quad \times (M_{l-} + E_{l-}) \} \sin \theta P'_l; \\ F_{1/2 - 1/2} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{2}} \{ (l+1)[lM_{l+} + (l-2)E_{l+}] - \\ & \quad - l[(l+1)M_{l-} - (l-1)E_{l-}] \} P_l; \\ F_{-1/2 \ 1/2} &= \sum_{l=2}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{2}} (M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-}) \sin^2 \theta P''_l; \\ F_{-1/2 - 1/2} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{2}} [lM_{l+} + (l+2)E_{l+} + (l+1)M_{l-} - \\ & \quad - (l-1)E_{l-}] \sin \theta P'_l. \end{aligned} \right\} (2.6)$$

С другой стороны, используя (3.5), гл. 7, можно найти для тех же спиновых комбинаций выражения, в которые входят $F_i(W, \theta)$. Для этого перепишем формулу (3.5), гл. 7 в той же системе координат, что и (2.4). Направим k вдоль оси z и расположим k' в плоскости xz (см. рис. 8.1); проекциями векторов k и k' будут

$$k(0, 0, 1), \quad k'(k'_x, 0, k'_z).$$

Выберем орты поляризации фотона в виде (5.6), гл. 1:

$$\chi_{+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \chi_{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \sigma \mathbf{e} &= \sigma_x \mathbf{e}_x + \sigma_y \mathbf{e}_y + \sigma_z \mathbf{e}_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma \mathbf{k} &= \sigma_z k_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{k}' \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} k'_x; \\ \sigma \mathbf{k}' &= \sigma_x k'_x + \sigma_z k'_z = k'_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k'_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k'_z & k'_x \\ k'_x & -k'_z \end{pmatrix}; \\ (\sigma [\mathbf{k} \mathbf{e}]) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} (2.7)$$

Подставляя (2.7) в (3.5), гл. 7 и производя перемножение матриц, находим

$$\left. \begin{aligned} F_{1/2 \ 1/2} &= (1 \ 0) [F(W, \theta)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} (F_3 + F_4 \cos \theta) \sin \theta; \\ F_{1/2 \ -1/2} &= (1 \ 0) [F(W, \theta)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} [2F_1 - 2F_2 \cos \theta + \\ &\quad + F_4 (1 - \cos^2 \theta)]; \\ F_{-1/2 \ 1/2} &= (0 \ 1) [F(W, \theta)] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} F_4 \sin^2 \theta; \\ F_{-1/2 \ -1/2} &= (0 \ 1) [F(W, \theta)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} [2F_2 + F_3 + \\ &\quad + F_4 \cos \theta] \sin \theta. \end{aligned} \right\} (2.8)$$

Приравнявая в (2.6) и (2.8) выражения для $F_{m_s, m_s'}$ при одних и тех же значениях m_s и m_s' и разрешая полученную систему относительно $F_i(W, \theta)$, находим разложение последних по парциальным амплитудам:

$$F_1 = \sum_{l=0}^{\infty} \{ [(l+1) M_{l-} + E_{l-}] P'_{l-1} + [l M_{l+} + E_{l+}] P'_{l+1} \}; \quad (2.9a)$$

$$F_2 = \sum_{l=1}^{\infty} [(l+1) M_{l+} + l M_{l-}] P'_l; \quad (2.9б)$$

$$F_3 = \sum_{l=1}^{\infty} [(E_{l+} - M_{l+}) P''_{l+1} + (E_{l-} + M_{l-}) P''_{l-1}]; \quad (2.9в)$$

$$F_4 = \sum_{l=2}^{\infty} (M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-}) P''_l. \quad (2.9г)$$

Если мезоны образуются лишь в s ($l=0$)- и p ($l=1$)-состояниях, то в s -, p -волновом приближении

$$F_1 = E_{0+} + 3(M_{1+} + E_{1+}) \cos \theta; \quad F_2 = 2M_{1+} + M_{1-}; \quad (2.10)$$

$$F_3 = 3(E_{1+} - M_{1+}); \quad F_4 = 0.$$

Найдем выражение для парциальных амплитуд через функции F_l , т. е. разложение, обратное (2.9). Для этого умножим правые и левые части выражений (2.9а-г) соответственно на один из следующих множителей: P_l , P_{l+1} , $P_{l-1} + P_{l+1}$ и $P_l - P_{l-2}$ и возьмем от обеих частей равенств интеграл по $\cos \theta$ в пределах от -1 до $+1$.

Если использовать соотношения для полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{+1} dx P'_j(x) P_{l-1}(x) = \delta_{jl}; \quad \int_{-1}^{+1} dx P''_j(x) [P_{l-2}(x) - P_l(x)] = (2l-1) \delta_{jl};$$

$$\int_{-1}^{+1} dx P'_j(x) P_{l+1}(x) = -\delta_{jl}; \quad \int_{-1}^{+1} dx P''_j(x) [P_l(x) - P_{l+2}(x)] = \\ = -(2l+3) \delta_{jl},$$

то придем к системе уравнений для парциальных амплитуд, которая дает (если обозначить $\cos \theta = x$)

$$\left. \begin{aligned} M_{l+} &= \frac{1}{2(l+1)} \int_{-1}^{+1} dx \left\{ F_1 P_l(x) - F_2 P_{l+1}(x) - \right. \\ &\quad \left. - F_3 \frac{P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)}{2l+1} \right\}; \\ M_{l-} &= \frac{1}{2l} \int_{-1}^{+1} dx \left\{ -F_1 P_l(x) + F_2 P_{l-1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + F_3 \frac{P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)}{2l+1} \right\}; \\ E_{l-} &= \frac{1}{2l} \int_{-1}^{+1} dx \left\{ F_1 P_l(x) - F_2 P_{l-1}(x) - \right. \\ &\quad \left. - F_3(l+1) \frac{P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)}{2l+1} - l F_4 \frac{P_{l-2}(x) - P_l(x)}{2l-1} \right\}; \\ E_{l+} &= \frac{1}{2(l+1)} \int_{-1}^{+1} dx \left\{ F_1 P_l(x) - F_2 P_{l+1}(x) + \right. \\ &\quad \left. + F_3 l \frac{P_{l-1}(x) - P_{l+1}(x)}{2l+1} + F_4(l+1) \frac{P_l(x) - P_{l+2}(x)}{2l+3} \right\}. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Изложенным способом можно найти разложение по парциальным волнам для амплитуд других процессов с участием вектонов и фотонов. Однако в этом случае можно применить другой метод, который приводит к более компактным вычислениям. К его изложению мы и перейдем.

§ 3. Дифференциальный метод. Процессы с участием вектонов и фотонов

Рассмотрим процессы, в которых участвуют вектоны и фотоны. Разложение амплитуд этих процессов в с. п. м. по парциальным волнам можно произвести другим способом, без использования коэффициентов Клебша—Гордана. Этот метод основан на том, что шаровые векторы $Y_{jm_j}^{(0)}$, $Y_{jm_j}^{(+1)}$, $Y_{jm_j}^{(-1)}$ можно представить в виде производных от шаровой функции $Y_{jm_j}(kk')$ (см. гл. 1, § 4):

$$Y_{jm_j}^{(0)} = -\frac{i}{V j(j+1)} \left[k \frac{\partial}{\partial k} \right] Y_{jm_j}(kk'); \quad (3.1)$$

$$Y_{jm_j}^{(+1)} = \frac{1}{V j(j+1)} \cdot \frac{\partial'}{\partial k} Y_{jm_j}(kk'), \quad \text{где} \quad \frac{\partial'}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} - k \left(k \frac{\partial}{\partial k} \right); \quad (3.2)$$

$$Y_{jm_j}^{(-1)} = k Y_{jm_j}(kk'), \quad (3.3)$$

где k, k' — единичные векторы; $(kk') = \cos \theta$. Другими словами, если задана шаровая функция $Y_{jm_j}(k, k')$, то, действуя на нее операторами $\left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]$, $\frac{\partial'}{\partial k}$ и k , получаем шаровые векторы, описывающие магнитные ($\lambda = 0$) и электрические (продольные и поперечные: $\lambda = \pm 1$) мультиполи.

Будем характеризовать спиновое состояние вектона не проекцией вектора поляризации на выбранную ось, а направлением самого вектора поляризации ξ . Тогда проекция шарового вектора на вектор ξ будет описывать вектон в определенном спиновом состоянии. Поэтому, чтобы зафиксировать определенное спиновое состояние вектонов, вместо операторов $\left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]$, $\frac{\partial'}{\partial k}$ и k следует взять операторы $\xi \left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]$, $\left(\xi \frac{\partial'}{\partial k} \right)$, ξk . Аналогичным образом обстоит дело и в случае реальных фотонов с той, однако, разницей, что для фотона $k\mathbf{e} = 0$ и поэтому $\partial'/\partial k \rightarrow \partial/\partial k$.

Мы проиллюстрируем идею метода разложения по парциальным амплитудам на конкретном примере с процессом

$$1^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-. \quad (3.4)$$

Последний получается из реакции

$$0^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^-, \quad (3.5)$$

если в ней заменить псевдоскалярную-частицу 0^- векторной частицей 1^- .

Допустим, что амплитуда процесса (3.5) в с. ц. м., разложенная по шаровым функциям, в частности по полиномам Лежандра, нам известна:

$$F(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(W) P_l(kk'). \quad (3.6)$$

Действуя на последнее выражение операторами $\left(\xi \left[\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right]\right)$, $\left(\xi \frac{\partial'}{\partial \mathbf{k}}\right)$ и $(\xi \mathbf{k})$, мы получим, имея в виду (3.1) — (3.3), выражение для амплитуды процесса (3.4), когда вектор (или виртуальный фотон) является соответственно магнитным и электрическим (как поперечным, так и продольным). Очевидно, из этих возможностей допустимы лишь те, которые не противоречат закону сохранения четности. Четность двух псевдоскалярных мезонов в конечном состоянии с относительным орбитальным моментом $l' = J$ равна $(-1)^{J'}$, а вектона и псевдоскалярного мезона равна $(-1)(-1)^{J'+1+\lambda}$, так как $j = J$. Согласно закону сохранения четности

$$(-1)^{J'} = (-1)^{J'+1+\lambda} (-1). \quad (3.7)$$

Это равенство возможно только тогда, когда $\lambda = 0$. Другими словами, реакция (3.4) разрешена лишь в том случае, когда псевдоскалярные мезоны заменяются магнитными вектонами.

Чтобы перейти к магнитным вектонам, надо, согласно (3.1), подействовать на амплитуду (3.6) процесса (3.5) оператором $\left(\xi \left[\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right]\right) = \left([\xi \mathbf{k}] \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\right)$. Заменяя также парциальные амплитуды $f_l \rightarrow M_l$, находим

$$F(W, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} M_l(W) P'_l(kk') (\xi [kk']), \quad (3.8)$$

где $P'(x) = \frac{\partial}{\partial x} P(x)$.

Это выражение является разложением амплитуды процесса (3.4) в с. ц. м. по парциальным волнам. Как видно, мы получили это разложение способом, отличным от того, который был использован в предыдущих параграфах.

Чтобы получить разложение по парциальным амплитудам функции $F_1(W, \theta)$, входящей в выражение (2.2), гл. 7 для амплитуды рассматриваемого процесса, сравним (3.8) и (2.2), гл. 7:

$$F_1(W, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} M_l(W) P'_l(\theta). \quad (3.9)$$

В s -, p -волновом приближении $F_1 = M_1$.

Рассмотрим еще процесс

$$1^- + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+; \quad (3.10)$$

он получается из реакции

$$0^+ + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+,$$

если в ней заменить скалярную частицу 0^+ векторной частицей 1^- . В случае (3.10) вместо (3.7) будем иметь

$$(-1)^J = (-1)^{J+1+\lambda},$$

т. е. реакция (3.10) разрешена лишь для электрических поперечных и продольных вектонов.

Разложение амплитуды процесса $0^+ + 0^- \rightarrow 0^- + 0^+$ дается тоже выражением (3.6); поэтому, действуя на (3.6) операторами $(\xi \frac{\partial'}{\partial k})$ и $k\xi$ и заменяя парциальные амплитуды, получаем

$$F(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \{E_l(W) P_l'(kk') [(k' \xi) - (k\xi)(kk')] + L_l(W) P_l(kk')(k\xi)\}. \quad (3.11)$$

Приравнивая члены при одинаковых спиновых комбинациях в (3.11) и (2.3), гл. 7, находим разложение скалярных функций $F_1(W, \theta)$ и $F_2(W, \theta)$ по парциальным амплитудам:

$$F_1(W, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [L_l(W) P_l(\theta) - E_l(W) P_l'(\theta) \cos \theta]; \quad (3.12)$$

$$F_2(W, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} E_l(W) P_l'(\theta). \quad (3.13)$$

В s -; p -волновом приближении

$$F_1(W, \theta) = L_0 + L_1 \cos \theta - E_1 \cos \theta; \quad F_2(W, \theta) = E_1.$$

Аналогично можно получить разложение $F_i(W, \theta)$ для реакций с участием не вектона, а реального фотона. Отличие будет заключаться лишь в том, что у реального фотона отсутствует продольная поляризация, и поэтому $\frac{\partial'}{\partial k} \rightarrow \frac{\partial}{\partial k}$.

Если задано разложение $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам в случае вектонов, то, пренебрегая в нем вкладом продольных мультиполей, т. е. полагая $L_l = 0$, и заменяя $\xi \rightarrow \epsilon$, находим соответствующие выражения для фотонов.

Итак, дифференциальный метод позволяет получить разложение по парциальным волнам амплитуд процессов с участием вектонов и фотонов, если известно аналогичное разложение для амплитуды более простого процесса, в котором вектону и фотону сопоставляется мезон. При этом псевдоскалярные мезоны заменяются магнитными вектонами или фотонами, а соответствующее выражение для амплитуды получается путем действия оператором $\left(\xi \left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]\right)$ или $\left(\varepsilon \left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]\right)$ на амплитуду процесса с участием псевдоскалярного мезона. Скалярные же мезоны заменяются электрическими вектонами и фотонами и выражение для амплитуды получается действием операторов $\left(\xi \frac{\partial'}{\partial k}\right)$, $\varepsilon \frac{\partial}{\partial k}$ и $k\xi$ на амплитуду процесса с участием скалярного мезона, причем действие операторов $\xi \frac{\partial'}{\partial k}$ или $\varepsilon \frac{\partial}{\partial k}$ приводит к поперечным электрическим вектонам или фотонам, а оператора $k\xi$ — к продольным электрическим вектонам.

Полученное таким способом разложение выражений для амплитуд процессов с участием вектонов и фотонов можно привести к виду, который содержит такие же спиновые комбинации, какие входят в формулы для тех же амплитуд, содержащих функции $F_i(W, \theta)$. Приравнивая в выражениях для обеих амплитуд коэффициенты при одинаковых спиновых комбинациях, находим разложение $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам.

Прежде чем переходить к следующим примерам, приведем некоторые вспомогательные формулы, которыми удобно пользоваться.

Пусть a, b, c, d, e, f — трехмерные векторы, тогда

$$[a [b, c]] = b(ac) - c(ab);$$

$$([ab] c) = ([bc] a) = ([ca] b) = -([ac] b) = -([ba] c) = -([cb] a);$$

$$([ab]) ([cd]) = (ac)(bd) - (bc)(ad);$$

$$([ab]) ([cd]) = (a [b [cd]]);$$

$$(a [bc]) (d [ef]) = (ad)(be)(cf) + (bd)(ce)(af) + (cd)(ae)(bf) - (cd)(be)(af) - (ad)(ce)(bf) - (bd)(ae)(cf);$$

$$[[ab] [cd]] = b(a [cd]) - a(b [cd]);$$

$$(\sigma a)(\sigma b) = ab + i(\sigma [ab]);$$

$$(\sigma a)(\sigma b) + (\sigma b)(\sigma a) = 2(ab).$$

Рассмотрим еще несколько примеров.

$$1. \quad \gamma^- + 0^- \rightarrow \gamma^- + 0^-.$$

Начальный и конечный фотоны, согласно закону сохранения четности, должны быть одного типа: либо электрического, либо

магнитного. В случае фотонов магнитного типа надо действовать на амплитуду (3.6) последовательно обоими операторами $\left(\mathbf{e}_1 \left[\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right]\right)$ и $\left(\mathbf{e}_2 \left[\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}'} \right]\right)$:

$$\begin{aligned} F(W, \theta) &= \sum_{l=2}^{\infty} M_l(W) (\mathbf{e}_1 [kk']) (\mathbf{e}_2 [k'k]) P_l''(\theta) = \\ &= \sum_{l=2}^{\infty} M_l(W) [(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) (kk')^2 + (\mathbf{k} \mathbf{e}_2) k'^2 (\mathbf{k} \mathbf{e}_1) + (\mathbf{k}' \mathbf{e}_1) (k' \mathbf{e}_2) k^2 - \\ &- (\mathbf{k}' \mathbf{e}_2) (kk') (\mathbf{k} \mathbf{e}_1) - (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) k'^2 k^2 - (\mathbf{e}_2 \mathbf{k}) (k' \mathbf{e}_1) (kk')] P_l''(\theta) = \\ &= \sum_{l=2}^{\infty} M_l(W) [-(1 - \cos^2 \theta) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - (\mathbf{k} \mathbf{e}_2) (k' \mathbf{e}_1) \cos \theta] P_l''(\theta), \end{aligned}$$

так как $\mathbf{k} \mathbf{e}_1 = 0$, $\mathbf{k}' \mathbf{e}_2 = 0$, $kk' = \cos \theta$.

Сравнивая это выражение с формулой (3.3), гл. 7, получаем

$$\begin{aligned} F_1(W, \theta) &= - \sum_{l=2}^{\infty} M_l (1 - \cos^2 \theta) P_l''(\theta); \\ F_2(W, \theta) &= - \sum_{l=2}^{\infty} M_l \cos \theta P_l''(\theta). \end{aligned}$$

В s -, p -волновом приближении $F_1 = 0$; $F_2 = 0$.

В случае фотонов электрического типа надо действовать на ту же амплитуду последовательно обоими операторами $\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ и $\mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}'}$:

$$F(W, \theta) = \sum_{l=2}^{\infty} E_l P_l''(\theta) (\mathbf{e}_1 k') (\mathbf{e}_2 k).$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.3), гл. 7, находим

$$F_1(W, \theta) = 0; \quad F_2(W, \theta) = \sum_{l=2}^{\infty} E_l P_l''(\theta).$$

В s -, p -волновом приближении: $F_1 = F_2 = 0$.

2. $\gamma + 0^- \rightarrow 1^- + 0^-$.

В случае фотонов и вектонов магнитного типа надо действовать на амплитуду (3.6) последовательно обоими операторами $\left(\boldsymbol{\varepsilon} \left[\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right]\right)$ и $\left(\boldsymbol{\xi} \left[\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}'} \right]\right)$:

$$\begin{aligned} F(W, \theta) &= \sum_{l=2}^{\infty} M_l (\boldsymbol{\varepsilon} [kk']) (\boldsymbol{\xi} [k'k]) P_l''(\theta) = \\ &= \sum_{l=2}^{\infty} M_l \{ -\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\xi} (1 - \cos^2 \theta) + (\mathbf{k}' \boldsymbol{\xi}) (k' \boldsymbol{\varepsilon}) - \cos \theta (\mathbf{k} \boldsymbol{\xi}) (k' \boldsymbol{\varepsilon}) \} P_l''(\theta). \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с соответствующим выражением для амплитуды в с.ц.м.

$$F(W, \theta) = F_1(W, \theta) (\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\xi}) + F_2(W, \theta) (\mathbf{k}' \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{k}' \boldsymbol{\varepsilon}) + F_3(W, \theta) (\mathbf{k} \boldsymbol{\xi}) (\mathbf{k}' \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (3.13')$$

получаем

$$F_1 = - \sum_{l=2}^{\infty} M_l (1 - \cos^2 \theta) P_l''(\theta); \quad F_2 = \sum_{l=2}^{\infty} M_l P_l''(\theta);$$

$$F_3 = - \sum_{l=2}^{\infty} M_l \cos \theta P_l''(\theta).$$

В случае фотонов и вектонов электрического типа надо действовать на амплитуду (3.6) последовательно обоими операторами $\boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ и $\boldsymbol{\xi} \frac{\partial'}{\partial \mathbf{k}'}$, а также операторами $\boldsymbol{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}$ и $\boldsymbol{\xi} \mathbf{k}'$:

$$F(W, \theta) = \sum_l E_l [(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k}') (\mathbf{k} \boldsymbol{\xi}) P_l'' + (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{k}') (\mathbf{k}' \boldsymbol{\xi}) P_l'' - \cos \theta (\mathbf{k}' \boldsymbol{\varepsilon}) (\mathbf{k}' \boldsymbol{\xi}) P_l''] .$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.13'), будем иметь

$$F_1(W, \theta) = 0;$$

$$F_2(W, \theta) = \sum_{l=1}^{\infty} [E_l P_l'(\theta) - \cos \theta E_l P_l''];$$

$$F_3(W, \theta) = \sum_{l=2}^{\infty} E_l P_l''(\theta).$$

$$3. \quad 1^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-. \quad (3.14)$$

В качестве исходных надо взять сразу обе амплитуды (1.19) и (1.22) процессов

$$0^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^- + \frac{1^+}{2}; \quad (3.15)$$

$$0^+ + \frac{1^+}{2} \rightarrow 0^- + \frac{1^+}{2}. \quad (3.16)$$

На амплитуду процесса (3.15) надо действовать оператором $\boldsymbol{\xi} \left[\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right]$, при этом псевдоскалярные мезоны заменяются вектоном магнитного типа, а на амплитуду процесса (3.16) — операторами $\boldsymbol{\xi} \partial' / \partial \mathbf{k}$ и $\mathbf{k} \boldsymbol{\xi}$,

причем скалярный мезон заменится вектоном электрического типа соответственно поперечным и продольным). В результате получим

$$\left. \begin{aligned}
 F_1(W, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \{ [(l+1) M_{l-} + E_{l-}] P'_{l-1} + [l M_{l+} + E_{l+}] P'_{l+1} \}; \\
 F_2(W, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} [(l+1) M_{l+} + l M_{l-}] P'_l; \\
 F_3(W, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} [(E_{l+} - M_{l+}) P''_{l+1} + (E_{l-} + M_{l-}) P''_{l-1}]; \\
 F_4(W, \theta) &= \sum_{l=2}^{\infty} [M_{l+} - E_{l+} - M_{l-} - E_{l-}] P''_l; \\
 F_5(W, \theta) &= -F_1 - x F_3 + \sum_{l=0}^{\infty} [L_{l+} P'_{l+1} - L_{l-} P'_{l-1}]; \\
 F_6(W, \theta) &= -x F_4 + \sum_{l=1}^{\infty} (L_{l-} - L_{l+}) P'_l, \quad x \equiv \cos \theta.
 \end{aligned} \right\} (3.17)$$

В s -, p -волновом приближении:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= E_{0+} + 3(M_{1+} + E_{1+}) \cos \theta; & F_4 &= 0; \\
 F_2 &= 2M_{1+} + M_{1-}; & F_5 &= -E_{0+} + L_{0+} + 3 \cos \theta (L_{1+} - 2E_{1+}); \\
 F_3 &= 3(E_{1+} - M_{1+}); & F_6 &= L_{1-} - L_{1+}.
 \end{aligned}$$

Действуя тем же способом, с помощью которого была получена формула (2.11), находим разложение, обратное (3.17). Выражения для поперечных мультиполей M_{l+} , M_{l-} , E_{l+} , E_{l-} совпадают с (2.11), а для продольных мультиполей запишутся так:

$$L_{l+} = \frac{1}{2(l+1)} \int_{-1}^{+1} [(F_1 + x F_3 + F_5) P_l(x) + (x F_4 + F_6) P_{l+1}(x)] dx;$$

$$L_{l-} = \frac{1}{2l} \int_{-1}^{+1} [(F_1 + x F_3 + F_5) P_l(x) + (x F_4 + F_6) P_{l-1}(x)] dx.$$

$$4. \quad \gamma + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-.$$

Разложение функций, входящих в выражение (3.5), гл. 7, можно получить либо непосредственным вычислением с помощью излагаемого метода, либо из результатов предыдущей задачи, если в них положить $L_{l\pm} = 0$ и опустить F_5 и F_6 (это соответствует переходу к реальному фотону). В результате получим формулы (2.9).

$$5. \quad \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \gamma^- + \frac{1^+}{2}.$$

В этом случае надо действовать на амплитуду (1.19) последовательно обоими операторами $\varepsilon_1 \left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]$ и $\varepsilon_2 \left[k' \frac{\partial}{\partial k'} \right]$ и на амплитуду (1.22) — операторами $\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial k}$ и $\varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial k'}$.

Ограничимся переходами, для которых полный момент $J=1/2$ и $3/2$:

$$\mathcal{E}_1 = \langle 1 \mathcal{E} \left| \frac{1}{2} \right| 1 \mathcal{E} \rangle, \quad \mathfrak{M}_1 = \langle 1 \mathfrak{M} \left| \frac{1}{2} \right| 1 \mathfrak{M} \rangle,$$

$$\mathcal{E}_2 = \langle 2 \mathcal{E} \left| \frac{3}{2} \right| 2 \mathcal{E} \rangle, \quad \mathfrak{M}_2 = \langle 2 \mathfrak{M} \left| \frac{3}{2} \right| 2 \mathfrak{M} \rangle,$$

$$\mathcal{E}_3 = \langle 1 \mathcal{E} \left| \frac{3}{2} \right| 1 \mathcal{E} \rangle, \quad \mathfrak{M}_3 = \langle 1 \mathfrak{M} \left| \frac{3}{2} \right| 1 \mathfrak{M} \rangle,$$

$$C_1 = \langle 1 \mathfrak{M} \left| \frac{3}{2} \right| 2 \mathcal{E} \rangle = \langle 2 \mathcal{E} \left| \frac{3}{2} \right| 1 \mathfrak{M} \rangle,$$

$$C_2 = \langle 2 \mathfrak{M} \left| \frac{3}{2} \right| 1 \mathcal{E} \rangle = \langle 1 \mathcal{E} \left| \frac{3}{2} \right| 2 \mathfrak{M} \rangle.$$

Величины в скобках справа налево означают угловой момент и характер мультиполя подающего фотона, полный угловой момент системы, угловой момент и характер мультиполя рассеянного фотона. Тогда F_i запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_2 \cos \theta - \mathfrak{M}_3; \\ F_2 &= \mathfrak{M}_1 + 2\mathfrak{M}_3 + 2\mathfrak{M}_2 \cos \theta - \mathcal{E}_2; \\ F_3 &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_2 \cos \theta + \frac{1}{2} \mathfrak{M}_2 + 2\sqrt{3}C_2; \\ F_4 &= \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_3 + 2\mathfrak{M}_2 \cos \theta + \frac{1}{2} \mathcal{E}_2 + 2\sqrt{3}C_1; \\ F_5 &= -\mathcal{E}_2 - 2\sqrt{3}C_1; \\ F_6 &= -\mathfrak{M}_2 - 2\sqrt{3}C_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$6. \quad \gamma^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 1^-.$$

В этом случае надо действовать на амплитуду (1.19) последовательно обоими операторами $\varepsilon \left[k \frac{\partial}{\partial k} \right]$ и $\xi \left[k' \frac{\partial}{\partial k'} \right]$, а на амплитуду (1.22) — операторами $\varepsilon \frac{\partial}{\partial k}$, $\xi \frac{\partial}{\partial k'}$, а также $\varepsilon \frac{\partial}{\partial k}$ и $k' \xi$.

§ 4. Выражения для дифференциальных сечений

В гл. 7, § 7, 8, 10, 11 были получены выражения для дифференциальных сечений и тензоров поляризации в с.д.м., содержащие функции $F_i(W, \theta)$. Заменяв последние их разложением по парциальным амплитудам, получим выражения для дифференциальных сечений и тензоров поляризации через парциальные волны. Рассмотрим, например, процесс

$$\gamma + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-.$$

Ограничимся s -, p -волновым приближением.

Если фотон не поляризован, то подставляя (2.10) в (8.16), гл. 7, находим:

$$d\sigma = \frac{|k'|}{|k|} \left\{ |E_{0+}|^2 + \frac{1}{2} (|u|^2 + |v|^2) (1 - \cos^2 \theta) + |w|^2 \cos^2 \theta + 2 \operatorname{Re} (E_{0+}^* w) \cos \theta \right\}, \quad (4.1)$$

где $u = M_{1-} + 2M_{1+}$; $v = M_{1+} + 3E_{1+} - M_{1-}$; $w = M_{1+} + 3E_{1+} - M_{1-}$.

Аналогичным образом подстановка формулы (2.10) в (10.12), гл. 7 приводит к следующему результату:

$$P' = \sin \theta \left\{ \operatorname{Im} [E_{0+} (2M_{1-} + M_{1+} + 3E_{1+})^*] + 3 \cos \theta \operatorname{Im} [M_{1-}^* (M_{1+} + 3E_{1+})] \right\}. \quad (4.2)$$

Как видно из формулы (8.15), гл. 7, в случае поляризованного фотона распределение мезонов асимметрично по углу φ (рис. 7.2), так как

$$(k' \varepsilon)^2 = \sin^2 \theta \sin^2 \varphi.$$

Для характеристики этой асимметрии введем величину

$$A = \frac{d\sigma_{\perp} - d\sigma_{\parallel}}{d\sigma}, \quad (4.3)$$

где $d\sigma_{\perp}$, $d\sigma_{\parallel}$ — дифференциальные сечения образования мезонов в плоскостях, перпендикулярных и параллельных плоскости поляризации фотона.

Подставляя формулу (2.10) в (8.15), гл. 7 и полагая φ , равным 0 и $\pi/2$, получаем

$$A = \frac{d\sigma_{\perp} - d\sigma_{\parallel}}{d\sigma} = -\frac{dN}{d\sigma}. \quad (4.4)$$

Здесь $d\sigma$ определяется выражением (4.1), а $dN = a + c \cos^2 \theta$,
 $a = \frac{1}{2} L$, $c = -\frac{1}{2} L$, $L = |v|^2 - |u|^2$.

Выражение для дифференциального сечения можно записать в другой форме — через коэффициенты Раха. Мы, однако, не будем на этом останавливаться и отошлем интересующихся к специальной литературе (см. например, Н. Ф. Н е л л и а. Связь фотообразования π -мезонов с рассеянием. М., Атомиздат, 1959).

ГЛАВА 9

СПИРАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА

§ 1. Спиральные амплитуды*

При получении выражений для амплитуд в с.ц.м. в гл. 7 мы характеризовали состояние частицы с помощью трехмерного импульса и проекции ее спина на произвольное направление z . В приложениях иногда удобно пользоваться таким представлением той же амплитуды, в котором спиновое состояние частицы характеризуется по-прежнему импульсом и проекцией спина, но не на произвольную ось, а на ее импульс.

Состояние, соответствующее определенному значению импульса и проекции спина на импульс той же частицы, называют спиральным состоянием, а компоненту спина вдоль импульса — спиральным квантовым числом или просто спиральностью.

Число спиральных состояний частицы равно числу проекций ее спина. У скалярной частицы имеется одно спиральное состояние, у фермиона — два ($+1/2$, $-1/2$), у вектона — три (-1 , $+1$, 0), у фотона — два (-1 , $+1$), у частиц со спином $3/2$ — четыре ($+3/2$, $+1/2$, $-1/2$, $-3/2$) и т. д.

Рассмотрим в с.ц.м. процесс

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

Если обозначить спиральности частиц $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, а их трехмерные импульсы — $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$, то можно говорить о спиральной амплитуде $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(W, \theta)$, соответствующей переходу системы из состояния со спиральностями λ_1, λ_2 в состояние со спиральностями λ_3, λ_4 :

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(W, \theta) = \langle \mathbf{p}_3 \mathbf{p}_4; \lambda_3 \lambda_4 | S - I | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2; \lambda_1 \lambda_2 \rangle.$$

* Некоторые важные формулы этой главы приводятся без выводов. Последние можно найти, например, в книге Верле (см. литературу).

Приведем для примера возможные спиральные амплитуды для двух процессов:

$$1. \frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow 1^- + \frac{1}{2}^+.$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ -1^-}, \\ M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ 0^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ 0^-} \end{array} \right\} (1.1)$$

$$2. \gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + \gamma^-.$$

$$\left. \begin{array}{l} M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ -1^-}, \\ M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ -1^-}, \\ M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ -1^-}, \\ M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ -1^-}, M_{-\frac{1}{2}^+ 1^-}^{-\frac{1}{2}^+ -1^-} \end{array} \right\} (1.2)$$

Однако не все из приведенных спиральных амплитуд для данного процесса являются независимыми, так как они связаны соотношениями, вытекающими из инвариантности относительно инверсии пространства (для упругих и неупругих процессов)

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \eta (-1)^{(\lambda_1 - \lambda_2) - (\lambda_3 - \lambda_4)} M_{-\lambda_1 - \lambda_2}^{-\lambda_3 - \lambda_4} \quad (1.3)$$

и обращения времени (для упругих процессов):

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = (-1)^{\lambda_1 - \lambda_2 - (\lambda_3 - \lambda_4)} M_{\lambda_3 \lambda_4}^{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (1.4)$$

где $\eta = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3 \eta_4} (-1)^{s_3 + s_4 - s_1 - s_2}$; η_i , s_i — внутренние четности и спины частиц.

Из формулы (1.3) следует, что для процесса (1.1) имеется шесть независимых амплитуд, а для процесса (1.2) — восемь*. Однако в последнем случае из-за того, что процесс упругий, необходимо еще учесть соотношение (1.4), вследствие чего число независимых спиральных амплитуд (1.2) снижается до шести:

$$M_{\frac{1}{2} \ 1}^{\frac{1}{2} \ 1}, \quad M_{\frac{1}{2} \ 1}^{\frac{1}{2} \ -1}, \quad M_{\frac{1}{2} \ 1}^{-\frac{1}{2} \ 1}, \quad M_{\frac{1}{2} \ 1}^{-\frac{1}{2} \ -1}, \quad M_{\frac{1}{2} \ -1}^{\frac{1}{2} \ 1}, \quad M_{\frac{1}{2} \ -1}^{-\frac{1}{2} \ 1}.$$

Остальные десять спиральных амплитуд связаны с перечисленными следующим образом:

$$M_{\frac{1}{2} \ -1}^{\frac{1}{2} \ 1} = M_{\frac{1}{2} \ 1}^{\frac{1}{2} \ -1},$$

$$M_{-\frac{1}{2} \ 1}^{\frac{1}{2} \ 1} = -M_{\frac{1}{2} \ 1}^{-\frac{1}{2} \ 1}, \quad M_{-\frac{1}{2} \ 1}^{-\frac{1}{2} \ 1} = M_{\frac{1}{2} \ -1}^{\frac{1}{2} \ -1} \quad \text{и т. д.}$$

§ 2. Разложение спиральной амплитуды по парциальным волнам

Спиральные амплитуды $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$, так же как и скалярные функции $F_i(W, \theta)$, зависят от энергетических и угловых переменных. Поэтому возникает задача разделения угловых и энергетических переменных для спиральной амплитуды, т. е. разложения последней по парциальным амплитудам. Эта задача может быть решена с помощью следующей формулы:

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \sum_J \left(J + \frac{1}{2} \right) (F^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} e^{i(\lambda - \mu)\varphi} d_{\lambda \mu}^J(\theta). \quad (2.1)$$

Здесь $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; $\mu = \lambda_3 - \lambda_4$; J — полный момент системы; φ — азимутальный угол, $(F^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ — спиральная парциальная амплитуда, описывающая переходы между состояниями с определенными значениями спиральности и четности; $d_{\lambda \mu}^J(\theta)$ — функции, зависящие только от угла.

* Очевидно, что число независимых спиральных амплитуд для данного процесса совпадает с числом независимых комбинаций, входящих в выражение для инвариантной амплитуды (см. гл. 3). Этим обстоятельством можно воспользоваться при подсчете числа независимых инвариантных комбинаций (см. гл. 3).

Конкретный вид функций $d_{\lambda\mu}^J$ определяется так:

а) если J — полуцелое

$$d_{\lambda \frac{1}{2}}^J = \left(J + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[\sqrt{J + \lambda} d_{\lambda - \frac{1}{2}, 0}^{J - \frac{1}{2}}(\theta) \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + \sqrt{J - \lambda} d_{\lambda + \frac{1}{2}, 0}^{J - \frac{1}{2}}(\theta) \sin \frac{\theta}{2} \right], \quad (2.2)$$

в частности для $J = l + \frac{1}{2}$, если использовать (2.5) и формулы

Дополнения III:

$$\left. \begin{aligned} d_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J &= \frac{1}{l+1} \cos \frac{\theta}{2} (P'_{l+1} - P'_l); \\ d_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^J &= \frac{1}{l+1} \sin \frac{\theta}{2} (P'_{l+1} + P'_l); \\ d_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^J &= \frac{1}{l+1} \sin \frac{\theta}{2} \left(\sqrt{\frac{l}{l+2}} P'_{l+1} + \sqrt{\frac{l+2}{l}} P'_l \right); \\ d_{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^J &= \frac{1}{l+1} \cos \frac{\theta}{2} \left(-\sqrt{\frac{l}{l+2}} P'_{l+1} + \sqrt{\frac{l+2}{l}} P'_l \right); \end{aligned} \right\} (2.3)$$

б) если $J = l$ — целое

$$d_{\lambda, \mu \pm 1}^J = [(J \pm \mu + 1)(J \pm \mu)]^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{\lambda}{\sin \theta} + \mu \operatorname{ctg} \theta \pm \frac{\partial}{\partial \theta} \right) d_{\lambda\mu}^J(\theta), \quad (2.4)$$

в частности,

$$\left. \begin{aligned} d_{m0}^l(\theta) &= (-1)^m d_{0m}^l(\theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} P_{lm}(\theta); \\ d_{00}^l &= P_l; \\ d_{10}^l &= -\frac{\sin \theta}{\sqrt{l(l+1)}} P'_l; \\ d_{20}^l &= \frac{1}{\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}} [2P'_{l-1} - l(l-1)P'_l]; \end{aligned} \right\} (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned}
 d_{m1}^l &= \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ -m \left[(1 + \cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right] d_{m0}^l - \right. \\
 &- \left. \sqrt{(l-m)(l+m+1)} d_{m+1,0}^l \right\} = \frac{1}{2\sqrt{l(l+1)}} \times \\
 &\times \left\{ - \left[\sqrt{(l-m)(l+m+1)} d_{m+1,0}^l + \right. \right. \\
 &+ \left. \sqrt{(l+m)(l-m+1)} d_{m-1,0}^l + \right. \\
 &+ \left. \sqrt{(l-m)(l-m-1)} d_{m+1,0}^{l-1} + \right. \\
 &+ \left. \left. \sqrt{(l+m)(l+m-1)} d_{m-1,0}^{l-1} \right\}. \quad (2.6)
 \end{aligned} \right\}$$

Функции $d_{\mu\lambda}^l$ обладают следующим свойством:

$$d_{\mu\lambda}^l(\theta) = d_{-\mu, -\lambda}^l(\theta) = (-1)^{\lambda-\mu} d_{\mu\lambda}^l(\theta).$$

С помощью формул (2.3), (2.5) можно записать разложение выражений для конкретных спиральных амплитуд по парциальным волнам. Приведем два примера.

1. $0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+$. Используя (2.3), найдем, имея в виду (1.3) и (1.4):

$$M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-} = \sum_J \left(J + \frac{1}{2} \right) (F^J)_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-} d_{\frac{1}{2}^+ \frac{1}{2}^-}^J = \sum_J (F^J)_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-} \cos \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+\frac{1}{2}} - P'_{J-\frac{1}{2}} \right);$$

$$M_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-} = - \sum_J (F^J)_{-\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 0^-} \sin \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+\frac{1}{2}} + P'_{J-\frac{1}{2}} \right).$$

2. $\frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow 1^- + \frac{1}{2}^+$.

С помощью (2.3) получим, имея в виду (1.3) и (1.4):

$$M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-} = \sum_J (F^J)_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{\frac{1}{2}^+ 1^-} \sin \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+\frac{1}{2}} + P'_{J-\frac{1}{2}} \right);$$

$$M_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-} = \sum_J (F^J)_{\frac{1}{2}^+ 0^-}^{-\frac{1}{2}^+ 1^-} \cos \frac{\theta}{2} \left(P'_{J+\frac{1}{2}} - P'_{J-\frac{1}{2}} \right) \text{ и т. д.}$$

§ 3. Выражения для дифференциального сечения и поляризационной матрицы плотности

Дифференциальное сечение процесса, характеризующее переход начальной системы со спиральностями λ_1, λ_2 в конечную систему со спиральностями λ_3, λ_4 , запишется в выбранной нами нормировке (см. гл. 7, § 6) так*:

$$d\sigma = \frac{|k'|}{|k|} N' |M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(W, x)|^2, \quad (3.1)$$

где N' — нормировочный множитель, $N' = \frac{\alpha_1^2 \alpha_2^2}{64 \pi^2 W^2}$, $x = \cos \theta$.

Если начальные и конечные частицы не поляризованы, то в (3.1) надо произвести усреднение по начальным и суммирование по конечным спиральностям. Поэтому дифференциальное сечение для неполяризованных частиц будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{|k'| N'}{|k| (2s_1 + 1) (2s_2 + 1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_3 \lambda_4} |M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}|^2 = \\ &= \frac{|k'|}{|k|} N \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_3 \lambda_4} |M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}|^2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где s_1, s_2 — спины начальных частиц.

В том случае, когда в начальном состоянии имеется фотон (со спином s_1), множитель $(2s_1 + 1)$ надо заменить на 2.

Как видно из (3.2), дифференциальное сечение равно сумме квадратов модулей независимых спиральных амплитуд данного процесса.

Если начальные частицы поляризованы и характеризуются матрицей плотности ρ_i (удовлетворяющей условию $\text{Sp} \rho_i = 1$), то дифференциальное сечение принимает вид (см. также гл. 7, § 11):

$$\begin{aligned} \frac{|k'|}{N'|k'|} d\sigma_p &= \text{Sp} M^\dagger \rho_i M = \\ &= \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_1' \lambda_2'} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \rho_i^{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} M_{\lambda_3 \lambda_4}^{*\lambda_1' \lambda_2'}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Матрица плотности ρ^f конечной системы определяется с помощью матрицы плотности ρ^i начальной системы следующей формулой:

$$\frac{|k'|}{N'|k'|} d\sigma \rho^f_{\lambda_3 \lambda_4; \lambda_3' \lambda_4'} = \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_1' \lambda_2'} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \rho^i_{\lambda_1 \lambda_2; \lambda_1' \lambda_2'} M_{\lambda_3' \lambda_4'}^{*\lambda_1' \lambda_2'}. \quad (3.4)$$

* Множитель $d\Omega$ мы по-прежнему опускаем; переход к $d\sigma/dt$ можно произвести с помощью формул (6.6) и (6.7) гл. 7.

Выражение для поляризации конечной частицы через спиральные амплитуды выглядит так (s — оператор спина):

$$\frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} d\sigma P = \text{Sp} (s M \rho^i M^+). \quad (3.5)$$

Рассмотрим процесс фотообразования π -мезонов на нуклонах: $\gamma + N \rightarrow N + \pi$. Он характеризуется четырьмя независимыми спиральными амплитудами, в качестве которых выберем следующие

$$M_{\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0}, \quad M_{\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0}, \quad M_{-\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0}, \quad M_{-\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0}. \quad (3.6)$$

Согласно (3.2), выражение для дифференциального сечения рассматриваемого процесса запишется в виде (m — масса нуклона)

$$d\sigma = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{m^2}{32 \pi^2 W^2} \times \left\{ \left| M_{\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0} \right|^2 + \left| M_{\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0} \right|^2 + \left| M_{-\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0} \right|^2 + \left| M_{-\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0} \right|^2 \right\}. \quad (3.7)$$

Пусть фотон линейно поляризован, а остальные частицы неполяризованы, и φ — угол между вектором поляризации фотона и осью x . Выберем матрицу плотности фотона ρ_γ в виде (9.28) гл. 7, тогда

$$\rho_{11} = \frac{1}{2}, \quad \rho_{1-1} = \frac{1}{2} e^{-2i\varphi}, \quad \rho_{-11} = \frac{1}{2} e^{2i\varphi}, \quad \rho_{-1-1} = -\frac{1}{2}, \quad (3.8)$$

и матрица плотности начальной системы $\rho_i = \rho_\gamma/2$. Подставляя (3.6) и (3.8) в (3.3) и производя суммирование, найдем выражение $d\sigma_p$ для дифференциального сечения образования π -мезонов линейно поляризованным фотоном

$$d\sigma_p = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{m^2}{32 \pi^2 W^2} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_4} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{* \lambda_3 \lambda_4} \rho_{\lambda_2' \lambda_2} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \frac{m^2}{64 \pi^2 W^2} \times \left\{ \left| M_{\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0} \right|^2 + \left| M_{\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0} \right|^2 + \left| M_{-\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0} \right|^2 + \left| M_{-\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0} \right|^2 + 2 \cos 2\varphi \text{Re} \left[M_{-\frac{1}{2} 1}^{* -\frac{1}{2} 0} M_{\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0} - M_{-\frac{1}{2} 1}^{* \frac{1}{2} 0} M_{\frac{1}{2} 1}^{-\frac{1}{2} 0} \right] \right\}. \quad (3.9)$$

Подставляя (2.1) в (3.2), получаем выражение для дифференциального сечения в случае неполяризованных частиц через спиральные парциальные амплитуды:

$$d\sigma = \frac{|k'|N}{|k|(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \sum_J \sum_{J'} \left(J + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times \left(J' + \frac{1}{2}\right) d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda'\mu'}^{J'}(\theta) (F^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} (F^{J'})_{\lambda_1 \lambda_2}^{*\lambda_3 \lambda_4}. \quad (3.10)$$

Так как в случае неполяризованных частиц $\lambda = \lambda'$, $\mu = \mu'$, то

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) = d_{00}^J(\theta) = P_J(\cos \theta). \quad (3.11)$$

Кроме того, воспользуемся выражением для произведения двух функций $d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda'\mu'}^{J'}(\theta)$ через сумму по одной функции $d_{\lambda-\lambda', \mu-\mu'}^I(\theta)$:

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda'\mu'}^{J'}(\theta) = \sum_I C_{J\lambda, J'-\lambda'}^I C_{J\mu, J'-\mu'}^{I'} (-1)^{\lambda'-\mu'} d_{\lambda-\lambda', \mu-\mu'}^I, \quad (3.12)$$

где $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^I$ — коэффициенты Клебша — Гордана (см. Дополнение II).

Подстановка (3.11) и (3.12) в (3.10) приводит к следующему выражению для дифференциального сечения через парциальные спиральные амплитуды в случае неполяризованных частиц:

$$d\sigma = \frac{|k'|N'}{|k|(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \sum_{\lambda_3 \lambda_4} \left(J + \frac{1}{2}\right) \left(J' + \frac{1}{2}\right) \times \\ \times (-1)^{\lambda-\mu} (F^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} (F^{J'})_{\lambda_1 \lambda_2}^{*\lambda_3 \lambda_4} \sum_I C_{J\lambda; J'-\lambda}^I C_{J\mu; J'-\mu}^{I'} P_I(\cos \theta). \quad (3.13)$$

§ 4. Связь между спиральными амплитудами и скалярными функциями $F_i(W, \theta)$

Выясним, как связаны между собой спиральные амплитуды $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ и скалярные функции $F_i(W, \theta)$.

В гл. 7 мы получили выражения для амплитуд процессов в с.ц.м. в виде суммы произведений скалярных функций $F_i(W, \theta)$ и спиновых комбинаций. При этом мы характеризовали спины частиц их проекциями вдоль произвольной оси z , не совпадающей с направлениями импульсов частицы. Найдем теперь выражение для указанных амплитуд, спроектировав спины на направления импульсов частиц (так сказать, приведем амплитуду к спиральной форме). Соберем в приведенной амплитуде члены, дающие вклад в данную спиральную амплитуду $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$. Полученное выражение будет со-

держат скалярные функции $F_i(W, \theta)$. Тем самым будет найдено выражение определенной спиральной амплитуды $M_{\lambda_1, 2}^{\lambda_1, 2}$ через скалярные функции $F_i(W, \theta)$. Разрешая полученную систему относительно $F_i(W, \theta)$, находим выражение последних через спиральные амплитуды.

Рассмотрим для примера амплитуды некоторых конкретных процессов.

$$1. 1^- + \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-.$$

Как мы уже говорили, этот процесс характеризуется шестью независимыми спиральными амплитудами:

$$M_{-\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0}, \quad M_{\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0}, \quad M_{-\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} 0}, \quad M_{\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} 0}, \quad M_{\frac{1}{2} 1}^{\frac{1}{2} 0}, \quad M_{-\frac{1}{2} -1}^{\frac{1}{2} 0}.$$

С другой стороны, выражение в с.ц.м. для амплитуды рассматриваемого процесса, содержащее функции $F_i(W, \theta)$, определяется формулой (2.6), гл. 7. Приведем это выражение к спиральной форме.

Направим (см. рис. 8.1) импульс k' по оси z и расположим k в плоскости xz , тогда единичные векторы k и k' будут иметь следующие проекции (если учесть, что отсчет ведется от k' и потому угол θ — отрицательный): $k'(0, 0, 1)$, $k(-\sin \theta, 0, \cos \theta)$. Выберем орты вектора поляризации вектора ξ в виде (4.6), гл. 1. Орты $\xi_{\pm 1}$ удовлетворяют условию поперечности, так как

$$k' \xi_{+1} = k' \xi_{-1} = 0.$$

Волновые функции конечного нуклона, соответствующие проекциям спина по оси z , т. е. $\lambda = +1/2$ и против оси z , т. е. $\lambda = -1/2$, выглядят так:

$$\chi_{\lambda = \frac{1}{2}}^f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\lambda = -\frac{1}{2}}^f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом запишутся волновые функции начального нуклона, соответствующие проекциям спина по оси z (т. е. $\lambda = 1/2$) и против оси z (т. е. $\lambda = -1/2$). Однако, чтобы каждая из этих волновых функций соответствовала определенному спиральному состоянию, ее надо спроектировать на импульс k' , т. е. повернуть на угол θ вокруг оси y (см. Дополнение IV):

$$\begin{aligned} \chi' &= e^{\frac{i\sigma_y \theta}{2}} \chi = \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sigma_y \sin \frac{\theta}{2} \right) \chi = \\ &= \left[\cos \frac{\theta}{2} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \right] \chi = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \chi. \end{aligned}$$

Окончательно получим для спиральных функций начального нуклона:

$$\chi_{\lambda=\frac{1}{2}}^i = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\chi_{\lambda=-\frac{1}{2}}^i = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Чтобы определить вклад амплитуды (2.6), гл. 7, например, в спиральную амплитуду $M_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}0}$, надо найти вид формулы (2.6), гл. 7, зафиксировав указанные значения спиральностей частиц

$$M_{\frac{1}{2}1}^{\frac{1}{2}0} = (1, 0) [i F_1(\sigma \xi) + F_2(\sigma k') (\sigma [k \xi]) + F_3 i(\sigma k) (k' \xi) + F_4 i(\sigma k') (k' \xi) + F_5 i(\sigma k) (k \xi) + F_6 i(\sigma k') (k \xi)] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma \xi_{+1} &= \sigma_x \xi_{+1x} + \sigma_y \xi_{+1y} + \sigma_z \xi_{+1z} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ \sigma k' &= \sigma_x k'_x + \sigma_y k'_y + \sigma_z k'_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \\ \sigma k &= \sigma_x k_x + \sigma_y k_y + \sigma_z k_z = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} (-\sin \theta) + \\ &+ \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} 0 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cos \theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix}; \\ k \xi_{+1} &= k_x \xi_{+1x} + k_y \xi_{+1y} + k_z \xi_{+1z} = (-\sin \theta) \frac{1}{\sqrt{2}} + \\ &+ 0 \frac{i}{\sqrt{2}} = -\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$

$$k' \xi_{+1} = 0;$$

$$\begin{aligned} \sigma [k \xi_{+1}] &= \sigma_x [k \xi_{+1}]_x + \sigma_y [k \xi_{+1}]_y + \sigma_z [k \xi_{+1}]_z = \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \frac{i \cos \theta}{\sqrt{2}} + \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} - \\ &- \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -\sin \theta & -2 \cos \theta \\ 0 & \sin \theta \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Подставляя последние выражения в (4.3) и производя перемножение матриц, находим

$$M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{matrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 \left(F_1 + F_2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + (1 + \cos \theta) (F_5 + F_6) \right].$$

Для спиральной амплитуды $M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{matrix}$ будем иметь

$$M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{matrix} = (1 \ 0) [F(W, \theta)] \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma \xi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \sigma k' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \quad \sigma k = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{vmatrix};$$

$$k \xi_{-1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta; \quad k' \xi_{-1} = 0; \quad (\sigma [k \xi_{-1}]) = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ 2 \cos \theta & -\sin \theta \end{vmatrix},$$

$$\text{или } M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix} = \frac{i \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta}{\sqrt{2}} (F_2 + F_5 - F_6).$$

Аналогичным образом получим

$$M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix} = \frac{i \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2}} [2F_1 - (1 + \cos \theta) F_2 + (1 - \cos \theta) (F_2 - F_6)];$$

$$M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{matrix} = \frac{i \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta}{\sqrt{2}} (F_2 - F_5 - F_6);$$

$$M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{matrix} = i \sin \frac{\theta}{2} [F_1 - (1 + \cos \theta) F_2 - (F_3 - F_4) - \cos \theta (F_5 - F_6)];$$

$$M \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{matrix} = i \cos \frac{\theta}{2} [F_1 + F_3 + F_4 + \cos \theta (F_5 + F_6) + (1 - \cos \theta) F_2].$$

Тем самым найдено выражение спиральных амплитуд процесса через функции $F_i(W, \theta)$. Разрешая эту систему относительно $F_i(W, 0)$, находим выражение последних через спиральные амплитуды.

$$2. \quad 0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+.$$

Амплитуда этого процесса представляет собой сумму двух независимых спиральных амплитуд: $M_{\frac{1}{2}^0}^{\frac{1}{2}^0}$ и $M_{-\frac{1}{2}^0}^{\frac{1}{2}^0}$. С другой стороны, выражение в с.с.м. для амплитуды определяется формулой (2.4), гл. 7.

Направим по-прежнему k' по оси z и расположим k в плоскости xz . Тогда, используя выражения для спиновых функций и скалярных произведений $\sigma k'$ и σk , найденных в предыдущем примере, имеем

$$\begin{aligned} M_{\frac{1}{2}^0}^{\frac{1}{2}^0} &= (1 \ 0) [F_1(W, \theta) + F_2(W, \theta) (\sigma k') (\sigma k)] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} (f_1 + f_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{-\frac{1}{2}^0}^{\frac{1}{2}^0} &= (1 \ 0) [F_1(W, \theta) + F_2(W, \theta) (\sigma k') (\sigma k)] \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \sin \frac{\theta}{2} (f_1 - f_2). \end{aligned}$$

$$3. \quad \frac{1}{2}^+ + 0^- \rightarrow \gamma^- + \frac{1}{2}^+.$$

Так как в данном случае фотон является реальным (отсутствует продольная компонента поляризации), то в отличие от примера 1 амплитуда процесса содержит только четыре независимые спиральные амплитуды:

$$M_{\frac{1}{2}^0}^{\frac{1}{2}^1}, \quad M_{\frac{1}{2}^0}^{-\frac{1}{2}^1}, \quad M_{\frac{1}{2}^0}^{-\frac{1}{2}^1}, \quad M_{\frac{1}{2}^0}^{\frac{1}{2}^1}.$$

Выражения для этих амплитуд через функции $F_i(W, \theta)$, входящие в (3.5), гл. 7, можно получить из вычислений примера 1, если в них пренебречь вкладом продольной компоненты ξ_0 (это равносильно тому, что $F_5 = F_6 = 0$).

ИЗОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ И ИЗОТОПИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА

§ 1. Внутренние свойства симметрии элементарных частиц. Изотопическое пространство

До сих пор мы рассматривали такие свойства физических систем, которые остаются инвариантными при преобразовании четырехмерного пространства — времени. Наряду с этими существуют преобразования, при которых пространственно-временные координаты остаются неизменными

$$x \rightarrow x' = x,$$

а изменяются лишь волновые функции $\Phi_\alpha(x) \rightarrow \Phi'_\alpha(x)$.

Такие преобразования связаны с внутренними свойствами полей и соответствующих им элементарных частиц и потому могут быть названы внутренними преобразованиями.

Свойства физических систем, которые остаются инвариантными при внутренних преобразованиях, обычно называют внутренними свойствами симметрии. Чтобы подчеркнуть, что внутренние преобразования совершаются не в обычном четырехмерном пространстве—времени, наряду с последним вводят другое пространство, которое было названо изотопическим. Анализировались как четырехмерные, так и трехмерные изотопические пространства. Мы ограничимся рассмотрением случая трехмерного изопространства. В таком изопространстве можно ввести три оси 1, 2, 3 и рассматривать следующие преобразования: вращение вокруг одной оси (например, 3), вращение вокруг двух осей (1, 3 или 2, 3), вращение вокруг трех осей.

При построении изотопических свойств частиц вводятся те же понятия, которые используются при изучении пространственно-временных свойств частиц: изотопические операторы, волновая функция, преобразование, инвариантность. Однако из сказанного видно, что аналогия является сугубо формальной.

Остановимся сначала на вопросах, касающихся изотопических волновых функций и операторов, а затем перейдем к преобразованиям в изопространстве и инвариантности относительно этих преобразований.

§ 2. Изотопические операторы и волновые функции

Опыт показывает, что если пренебречь электромагнитными взаимодействиями, то адроны можно объединить в определенные группы (мультиплеты) частиц, тождественных по своим свойствам. Такие мультиплеты могут состоять (см. табл. I) из одной частицы (напри-

мер, Λ , η , ω , Ω^-), из двух частиц (n , p ; K^+ , K^0 ; K^- , \bar{K}^0 ; Ξ^- , Ξ^0), из трех частиц (π^+ , π^- ; π^0 ; ρ^+ , ρ^- , ρ^0 ; Σ^+ , Σ^- , Σ^0 ; Σ^{*+} , Σ^{*-} , Σ^{*0}), из четырех частиц (Δ^- , Δ^0 , Δ^+ , Δ^{++}). Небольшая разница в массах частиц данного мультиплета обусловлена электромагнитными взаимодействиями.

Следовательно, в рамках только сильных взаимодействий частицы мультиплета можно рассматривать как различные состояния одной и той же частицы, причем каждое состояние характеризуется (маркируется) определенным значением заряда. Чтобы описать эту ситуацию математически, сопоставим каждому мультиплету число, имеющее столько же проекций, сколько содержится частиц в мультиплете, а каждой проекции — частицу с определенным зарядом. Такое число получило название изотопического спина. Изотопический спин мультиплета, состоящего из одной частицы, равен нулю, из двух — $1/2$, из трех — единице, из четырех — $3/2$ и т. д. Чтобы зафиксировать частицу с данным зарядом, надо задать ее изоспин I и его определенную проекцию I_3 . Сопоставление знака проекции знаку заряда произвольно. Обычно выбирают для протона $I_3 = +1/2$, для нейтрона $I_3 = -1/2$, для π^+ , π^- , π^0 -мезонов $I_3 = +1, -1, 0$ соответственно и т. д., т. е. при таком выборе знаки проекции изоспина совпадают со знаками заряда.

Волновая функция частиц данного мультиплета, помимо координат и обычного спина, должна зависеть еще от изоспина и его проекции. По аналогии с обычным спином последнюю зависимость можно описать с помощью многокомпонентных изотопических волновых функций. Тогда частицам с изоспином нуль можно сопоставить однокомпонентную изотопическую волновую функцию (изоскаляр в изопространстве), с изоспином $1/2$ — двухкомпонентную волновую функцию (изоспинор)

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

со спином 1 — трехкомпонентную (изовектор)

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Волновая функция частицы является произведением изотопической функции и функций координат и обычного спина.

Так как в квантовой механике каждой физической величине ставится в соответствие оператор, то по аналогии с обычным спином, мы введем операторы изотопического спина в виде матриц, которые по виду полностью совпадают с матрицами обычного спина. Например, изотопическому спину $1/2$ мы сопоставим три двухрядные матрицы (совпадающие с матрицами Паули):

$$\tau_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

изоспину 1 — три трехрядные матрицы (совпадающие с матрицами орбитального момента $l = 1$):

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad T_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

Имея в виду (2.1) и (2.2), получаем волновые функции для частиц с изоспином $1/2$ (например, нуклона и протона):

$$\psi_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

а также для частиц с изоспином 1:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Волновую функцию частиц с изоспином 1 можно рассматривать как изовектор с компонентами $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, через которые волновые функции ω_+, ω_- и ω_0 положительного, отрицательного и нейтрального мезонов выражаются следующим образом:

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 + i\omega_2), \quad \omega_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 - i\omega_2), \quad \omega_0 = \omega_3 \quad (2.7)$$

и матрицы (2.4) приобретают другой вид: $T_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2), T_0 = T_3$.

Если использовать символы Кронекера $\delta_{\rho i}$ (где $\rho = 1, 2, 3$ соответственно для π^+, π^- и π^0 -мезонов), то

$$\omega_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\rho 1} + i\delta_{\rho 2}), \quad \omega_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_{\rho 1} - i\delta_{\rho 2}), \quad \omega_0 = \delta_{\rho 3}$$

или в компонентах

$$\omega_+ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \omega_- \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \omega_0 = (0, 0, 1). \quad (2.8)$$

Собственные значения оператора I_3 определяют проекцию изоспина на ось 3. Если учесть, что волновые функции изоспинорных частиц (например, нейтрона и протона) определяются (2.5), то собственные значения оператора τ_3 будут равны ± 1 :

$$\tau_3 \psi_p = 1 \cdot \psi_p, \quad \tau_3 \psi_n = -1 \cdot \psi_n.$$

Так как, с другой стороны, заряд изоспиновых частиц (например, протона и нейтрона) равен соответственно 1 и 0, то видно, что в данном случае собственные значения оператора $1/2\tau_3$ отличаются от значений заряда протона и нейтрона и потому физического смысла не имеют. Поэтому введем оператор

$$Q' = \frac{1 + \tau_3}{2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.9)$$

собственные значения которого совпадают с зарядом изоспиновых частиц (например, протона и нейтрона), т. е. равны 1 и 0:

$$Q' \psi_p = +1 \cdot \psi_p, \quad Q' \psi_n = 0 \cdot \psi_n.$$

Следовательно, в случае изоспинора физический смысл имеет именно оператор Q' ; его называют оператором заряда. Для частиц с изоспином 1 оператором заряда является T_3 , так как его собственные значения $(1, -1, 0)$ совпадают с зарядами частиц $(\pm 1, 0)$:

$$T_3 \omega_+ = +1 \cdot \omega_+, \quad T_3 \omega_- = -1 \cdot \omega_-, \quad T_3 \omega_0 = 0 \cdot \omega_0.$$

До сих пор мы рассматривали изотопические характеристики отдельных частиц. Выясним теперь, как построить оператор изотопического спина и изотопическую волновую функцию для системы из двух частиц.

Рассмотрим систему, состоящую из частиц с изоспином 1 и $1/2$, например систему из мезона и нуклона или из Σ - и Ξ -частиц и т. п. Оператор полного изотопического спина I системы складывается из операторов изотопического спина нуклона и мезона

$$I = \frac{1}{2} \tau + T. \quad (2.10)$$

Аналогичным образом оператор Q полного заряда системы равен

$$Q = T_3 + Q'. \quad (2.11)$$

Из (2.10) следует, что изотопические спины складываются так же, как обычные моменты количества движения, например, сумма двух изоспинов 1 и $1/2$ равна $1 + 1/2 = 3/2$ и $1 - 1/2 = 1/2$.

Состояние системы частиц можно характеризовать либо с помощью зарядов, либо с помощью полного изотопического спина и его проекций I_3 . Волновыми функциями, соответствующими определенным зарядовым состояниям, в рассматриваемом случае будут

$$\left. \begin{aligned} (p^+) &= \psi_p \omega_+, & (p^-) &= \psi_p \omega_-, & (p^0) &= \psi_p \omega_0; \\ (n^+) &= \psi_n \omega_+, & (n^-) &= \psi_n \omega_-, & (n^0) &= \psi_n \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Здесь (p^+) — функция системы, состоящей из положительного мезона и протона и т. д. Функции (2.12), вообще говоря, не являются

собственными функциями квадрата оператора полного изотопического спина I^2 и его проекции I_z . Чтобы найти указанные собственные функции, воспользуемся их выражением через изофункции нуклона ψ и мезона ω :

$$\Phi^{I_3'} = \sum_{T_3, \tau_3} C_{TT_3, \tau_3}^{II_3} \omega_{TT_3} \psi_{\tau_3}, \quad (2.13)$$

где Φ^{I_3} — собственные функции квадрата оператора I^2 полного изоспина системы; $C_{TT_3, \tau_3}^{II_3}$ — коэффициенты Клебша—Гордана (см. Дополнение II). Найдем, например, волновую функцию $\Phi^{3/2, 1/2}$, описывающую систему с $I = 3/2$ и $I_z = 1/2$:

$$\Phi^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} = \sum_{T_3, \tau_3} C_{TT_3, \frac{1}{2}, \tau_3}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \omega_{1T_3} \psi_{\frac{1}{2}, \tau_3}.$$

Величину $I_3 = 1/2$ можно получить с помощью значений T_3 и τ_3 в двух случаях, когда $T_3 = 1$ и $\tau_3 = -1/2$ и когда $T_3 = 0$ и $\tau_3 = 1/2$. Поэтому (см. Дополнение II)

$$\begin{aligned} \Phi^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} &= C_{11, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \omega_{11} \psi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + C_{10, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} \omega_{10} \psi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\pi^+ n + \sqrt{2} (\pi^0 p)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Аналогично

$$\left. \begin{aligned} \Phi^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} &= -\sqrt{\frac{1}{3}} \omega_0 \psi_p + \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_+ \psi_n, & \Phi^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}} &= \omega_+ \psi_p, \\ \Phi^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \omega_- \psi_p + \sqrt{\frac{1}{3}} \omega_0 \psi_n, & \Phi^{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}} &= \omega_- \psi_n, \\ \Phi^{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} &= \sqrt{\frac{1}{3}} \omega_- \psi_p + \sqrt{\frac{2}{3}} \omega_0 \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Функции Φ ортогональны и нормированы на единицу.

С помощью (2.14) и (2.15) можно найти выражение «зарядовых» функций (2.12) через функции полного изоспина

$$\begin{aligned} (p^+) &= \Phi^{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}, & (p^-) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \Phi^{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}, \\ (p^0) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \Phi^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, & (n^+) &= \sqrt{\frac{1}{3}} \Phi^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \\ (n^-) &= \Phi^{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}}, & (n^0) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi^{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} \Phi^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Переходим к рассмотрению преобразований в изотопическом пространстве. Начнем с наиболее простой операции вращения вокруг третьей оси.

§ 3. Электрический заряд. Гиперзаряд. Странность

Известно, что физический смысл имеют лишь билинейные комбинации волновых функций $\Phi^* \Phi$.

Эти комбинации остаются инвариантными относительно следующего внутреннего преобразования (α — произвольное число):

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi e^{i\alpha}, \quad (3.1)$$

получившего название калибровочного преобразования*. Инвариантность относительно калибровочного преобразования (3.1) приводит к закону сохранения электрического заряда (см. любой курс по квантовой механике).

С другой стороны, калибровочные преобразования можно представить в виде вращения вокруг третьей оси в изопространстве. Действительно, комплексное поле (описывающее заряженную частицу), например, изовекторной частицы является комбинацией его вещественной Φ_1 и мнимой Φ_2 частей

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 + i \Phi_2), \quad \Phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_1 - i \Phi_2).$$

С учетом этого калибровочное преобразование

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\alpha} \Phi$$

примет вид

$$\Phi'_1 + i \Phi'_2 = e^{i\alpha} (\Phi_1 + i \Phi_2) = (\cos \alpha + i \sin \alpha) (\Phi_1 + i \Phi_2).$$

Приравнявая вещественные и мнимые части, получаем

$$\Phi'_1 = \cos \alpha \Phi_1 - \sin \alpha \Phi_2; \quad \Phi'_2 = \sin \alpha \Phi_1 + \cos \alpha \Phi_2,$$

т. е. функции Φ_1 и Φ_2 преобразуются как две первые компоненты вектора при вращении на угол α вокруг третьей оси в изотопическом пространстве. Другими словами, калибровочное преобразование эквивалентно вращению вокруг третьей оси в изопространстве. Соответственно инвариантность относительно калибровочного преобразования эквивалентна инвариантности относительно вра-

* Подчеркнем, что калибровочное и градиентное (см. гл. 1, § 5) преобразования являются двумя существенно различными преобразованиями. Иногда их называют соответственно преобразованиями первого и второго рода.

щения вокруг третьей оси в изопространстве. Последняя инвариантность приводит к закону сохранения третьей компоненты изотопического спина. Следовательно,

$$Q = I_3. \quad (3.2)$$

Закон сохранения электрического заряда выполняется для всех взаимодействий, поэтому всегда имеет место инвариантность относительно калибровочного преобразования, а следовательно, относительно вращения вокруг третьей оси в изопространстве.

Однако как показывает опыт, у адронов наряду с электрическим зарядом существует еще два сохраняющихся квантовых числа — барионный заряд B и странность S . Другими словами, для волновых полей адронов должна существовать еще инвариантность относительно двух калибровочных преобразований:

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha B}, \quad \Phi \rightarrow \Phi e^{i\alpha S}.$$

С учетом квантовых чисел B , S формулу (3.2) надо обобщить, в соответствии с опытными данными так:

$$Q = I_3 + \frac{B+S}{2} = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (3.3)$$

Величина $Y = B + S$ называется гиперзарядом. Значения Q , B и S для адронов приведены в табл. I (см. Дополнение I). Антиадронам соответствуют значения Q , B , S и Y с противоположными знаками.

Электрический заряд, барионный заряд и странность системы, состоящей из нескольких частиц, равна алгебраической сумме соответствующих величин. Иначе говоря, Q , B , S и Y являются аддитивными квантовыми числами.

Барионный заряд сохраняется при всех взаимодействиях. Так как барионный заряд мезонов и лептонов равен нулю, то барионы не могут превращаться в мезоны и лептоны. Этот переход разрешен, однако, для системы, состоящей из бариона и антибариона (суммарное барионное число которой равно нулю).

Как показывает опыт, странное число сохраняется для сильного и электромагнитного взаимодействий. Поэтому для указанных взаимодействий:

1) странная частица не может распадаться на частицы, странность которых равна нулю; например, запрещены следующие распады, обусловленные сильным взаимодействием

$$\Lambda \rightarrow p + \pi^-, \quad \Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0 \text{ и т. п.,}$$

а также распады, обусловленные электромагнитным взаимодействием

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \gamma, \quad \Sigma^+ \rightarrow p + \gamma \text{ и т. п.,}$$

но разрешены распады

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma \text{ и т. д.}$$

2) при столкновении двух частиц с нулевой странностью не может происходить образование одной странной частицы (например, $\pi p \rightarrow pK$ и т. п.); возможно образование по крайней мере двух странных частиц с равными по величине, но противоположными по знаку странностями или образование системы странных частиц с суммарной странностью, равной нулю, например

$$\pi p \rightarrow K\Lambda, \quad \gamma p \rightarrow K\Sigma \text{ и т. д.}$$

§ 4. Зарядовая симметрия

Мы рассмотрели вращение вокруг оси 3 в изотопическом пространстве. Рассмотрим теперь вращение в изопространстве вокруг осей 1 и 2, а также инвариантность относительно этого преобразования.

Пусть $T_1(\pi)$, $T_2(\pi)$, $T_3(\pi)$ — операторы поворота в изопространстве на 180° вокруг осей 1, 2 и 3. Операция $T_1(\pi)$ эквивалентна отражению второй и третьей осей, $T_2(\pi)$ — отражению первой и третьей осей, $T_3(\pi)$ — отражению первой и второй осей. Поэтому три операции связаны соотношением

$$T_2(\pi) = T_1(\pi) T_3(\pi).$$

Инвариантность относительно $T_3(\pi)$ -преобразования имеет место для всех взаимодействий, поэтому инвариантность относительно $T_2(\pi)$ -преобразования эквивалентна инвариантности относительно $T_1(\pi)$ -преобразования. Однако для наших целей, как будет видно из дальнейшего, удобнее использовать оператор $T_2(\pi)$, который называется оператором зарядовой симметрии.

Выясним, как преобразуются изотопические волновые функции частиц при $T_2(\pi)$ -поворотах.

При поворотах вокруг оси 2 изоспиноры преобразуются (см. Дополнение IV) следующим образом:

$$\psi' = e^{\frac{1}{2} i \tau_2 \pi} \psi; \quad \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-\frac{1}{2} i \tau_2 \pi}.$$

Так как $(i \tau_2)^2 = -\tau_2^2 = -1$, то

$$e^{\frac{1}{2} i \tau_2 \pi} = \cos \frac{\pi}{2} + i \tau_2 \sin \frac{\pi}{2} = i \tau_2,$$

т. е.

$$\psi \rightarrow i \tau_2 \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} (-i \tau_2).$$

Действуя оператором $i\tau_2$ на изовольные функции (2.5) протона и нейтрона, а также антипротона $\bar{\psi}_p$ и антинейтрона $\bar{\psi}_n$, получаем

$$i\tau_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i\tau_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (частицы);}$$

$$(1 \ 0)(-i\tau_2) = -(0 \ 1), \quad (0 \ 1)(-i\tau_2) = (1 \ 0) \text{ (античастицы).}$$

Следовательно, при $T_2(\pi)$ -поворотах волновые функции нуклонов (изоспиноров) преобразуются так:

$$\left. \begin{aligned} \psi_p &\rightarrow -\psi_n; & \psi_n &\rightarrow \psi_p; \\ \bar{\psi}_p &\rightarrow -\bar{\psi}_n; & \bar{\psi}_n &\rightarrow \bar{\psi}_p. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

При $T_2(\pi)$ -поворотах компоненты изовекторной функции преобразуются следующим образом:

$$\omega_1 \rightarrow -\omega_1, \quad \omega_2 \rightarrow \omega_2, \quad \omega_3 \rightarrow -\omega_3,$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned} \omega_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 + i\omega_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-\omega_1 + i\omega_2) = -\omega_-; \\ \omega_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1 - i\omega_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(-\omega_1 - i\omega_2) = -\omega_+; \\ \omega_0 &= \omega_3 \rightarrow -\omega_3 = -\omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Если имеет место зарядовая симметрия, т. е. инвариантность относительно $T_2(\pi)$ -преобразования, то, как видно из (4.1) и (4.2), процессы, которые получаются друг из друга заменой

$$p \rightleftharpoons n, \quad \bar{p} \rightleftharpoons \bar{n}, \quad \pi^+ \rightleftharpoons \pi^-, \quad \pi^0 \rightarrow \pi^0,$$

будут эквивалентными. Например, эквивалентны следующие два процесса: $n + \pi^+ \rightarrow n + \pi^+$, $p + \pi^- \rightarrow p + \pi^-$.

Как показывают опыты, зарядовая симметрия имеет место для процессов, обусловленных сильными взаимодействиями, и отсутствует в случае электромагнитных взаимодействий.

§ 5. G-Преобразование и G-четность

Как видно из (4.2), при T_2 -повороте волновая функция π^0 -мезона переходит сама в себя и меняет знак, а волновые функции π^+ - и π^- -мезонов — друг в друга с обратными знаками.

Если имеет место инвариантность относительно T_2 -преобразования, то, согласно (4.2), π^0 -мезон обладает отрицательной T_2 -четностью, а π^+ и π^- — не имеют ее.

• Дополним T_2 -преобразование операцией зарядового сопряжения C , при которой $\pi^+ \rightarrow \pi^-$, $\pi^- \rightarrow \pi^+$, $\pi^0 \rightarrow \pi^0$.

При CT_2 -преобразовании изовекторные волновые функции π^+ , π^- , π^0 -мезонов преобразуются таким образом:

$$\omega_{\pi^+} \rightarrow -\omega_{\pi^+}, \quad \omega_{\pi^-} \rightarrow -\omega_{\pi^-}, \quad \omega_{\pi^0} \rightarrow -\omega_{\pi^0}. \quad (5.1)$$

Произведение операций C и T_2 называется G -преобразованием

$$G = CT_2.$$

Из (5.1) видно, что волновые функции всех трех π -мезонов при G -преобразовании переходят сами в себя со знаком «минус»:

$$G\omega_{\pi} \rightarrow -\omega_{\pi}.$$

Следовательно, все три π -мезона имеют отрицательную G -четность, хотя отдельно T_2 -четностью и C -четностью π^{\pm} -мезоны не обладают.

Очевидно, что определенной G -четностью обладают лишь те адроны и системы адронов, барионный заряд и странность которых равны нулю, так как при зарядовом сопряжении знак этих квантовых чисел меняется, а при T_2 -преобразовании — не меняется. Другими словами, определенной G -четностью обладают все мезоны и мезонные резонансы, у которых странность равна нулю (π -, η -, ω -, ρ -, ϕ -, f -мезоны), а также системы, состоящие из нуклона и антинуклона, бариона и антибариона, K -мезона и анти- K -мезона.

Выясним, какова G -четность системы, состоящей из частицы и античастицы. Зарядовая четность η_c такой системы определяется формулой (4.1), гл. 4. Изоволновая функция системы частица—античастица с полным изоспином I преобразуется при T_2 -повороте так:

$$\Phi^I = (-1)^I \Phi^I. \quad (5.2)$$

Последнее следует из того, что изоволновые функции Φ^I удовлетворяют уравнениям (\hat{I} и \hat{I}_3 — операторы изоспина)

$$\hat{I}^2 \Phi^I = I(I+1) \Phi^I \quad \text{и} \quad \hat{I}_3 \Phi^I = I_3 \Phi^I,$$

которые математически эквивалентны уравнениям для шаровых функций Y_{l0} с проекцией $m = 0$ (так как проекции изоспинов частицы и античастицы равны и противоположны по знаку). При T_2 -повороте ($x \rightarrow -x$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow -z$ и $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$) шаровая функция $Y_{l0}(\cos \theta) \rightarrow (-1)^l Y_{l0}(\cos \theta)$, что приводит к (5.2).

Учитывая формулы (4.1) гл. 4 и (5.2) получим, что G -четность системы, состоящей из частицы и античастицы с произвольными спином и изоспином, равна

$$\eta_G = \eta_c (-1)^I = (-1)^{l+s+I}, \quad (5.3)$$

где η_c — зарядовая четность, l — орбитальный момент, s, I — полные спин и изоспин системы.

G-Четность и сильные взаимодействия. В случае сильных взаимодействий имеет место зарядовая симметрия и инвариантность относительно зарядового сопряжения. Следовательно, сильные взаимодействия инвариантны относительно G -преобразования. Поэтому для сильных взаимодействий имеет место закон сохранения G -четности: результирующая G -четность системы до реакции и после реакции должна быть одинаковой. Приведем несколько следствий, которые вытекают из закона сохранения G -четности.

1. Так как G -четность π -мезона отрицательна, то четное число π -мезонов может переходить лишь в четное число π -мезонов, а нечетное — в нечетное. Иначе говоря, амплитуда процесса с участием только π -мезонов будет отлична от нуля лишь в том случае, если в процессе участвует четное число π -мезонов.

2. Если G -четность частицы положительна (ρ -, f -мезоны и т. п.), то такая частица распадается на четное число π -мезонов.

3. Если G -четность частицы отрицательна (ω -, ϕ -мезоны и т. п.), то такая частица распадается на нечетное число π -мезонов.

G -четность и электромагнитные взаимодействия. Для электромагнитных взаимодействий зарядовая симметрия отсутствует, следовательно, отсутствует инвариантность относительно G -преобразования. Другими словами, в процессах с участием электромагнитных взаимодействий G -четность не сохраняется. Поэтому, в частности, отлична от нуля амплитуда процесса с участием любого числа π -мезонов, если при этом присутствует фотон. Однако в процессах с участием электромагнитных взаимодействий сохраняется проекция изоспина на ось 3, иначе говоря, остается инвариантность относительно вращений вокруг оси 3 в изопространстве. Следовательно, изотопическая амплитуда процесса с участием электромагнитных взаимодействий должна быть в наиболее простом случае суммой двух величин:

$$M^I = \langle \Phi_f^I | S_0 + V_3 | \Phi_i^I \rangle = \langle \Phi_f^I | S_0 | \Phi_i^I \rangle + \langle \Phi_f^I | V_3 | \Phi_i^I \rangle, \quad (5.4)$$

преобразующихся при вращении вокруг оси 3 в изопространстве как изоскаляр и как третья компонента изовектора (обе эти величины не меняются при вращении вокруг третьей оси).

Слагаемое $\langle \Phi_f^I | S_0 | \Phi_i^I \rangle$ в (5.4) описывает взаимодействие изотопически скалярной части фотона; при поглощении или испускании такого фотона изоспин системы не меняется. Член $\langle \Phi_f^I | V_3 | \Phi_i^I \rangle$ в (5.4) соответствует взаимодействию изотопически векторной части фотона, испускание или поглощение которой может либо не менять, либо изменить изоспин системы на единицу.

Выясним, какова G -четность изоскалярной и изовекторной частей фотона. Зарядовая четность фотона отрицательна. При T_2 -поворотах изоскалярная часть фотона не меняет знака, поэтому она

обладает отрицательной G -четностью. При T_2 -преобразованиях изовекторная часть меняет знак, поэтому ее G -четность положительна. Отсюда следует важный вывод: переход фотона в нечетное число π -мезонов может быть обусловлен лишь его изоскалярной частью, а в четное число π -мезонов — только изовекторной частью.

К интересным следствиям приводит закон сохранения G -четности при распаде η -мезона. Последний может распадаться несколькими способами:

$$\eta \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + \pi^- + \pi^0 & 25; \\ 2\gamma & 39; \\ \pi^+ + \pi^- + \gamma & 5,5; \\ 3\pi^0, \pi^0 + \gamma + \gamma & 30,5. \end{cases} \%$$

Допустим, что распад η -мезона обусловлен сильными взаимодействиями (т. е. G -четность сохраняется). Так как G -четность η -мезона положительна, то в рассматриваемом случае он может распадаться только на четное число π -мезонов. Масса η -мезона меньше массы четырех π -мезонов (~ 550 Мэв), поэтому η -мезон может распадаться лишь на два π -мезона. Однако этот распад запрещен законом сохранения пространственной четности. Другими словами, распад η -мезона на нечетное число π -мезонов не может быть обусловлен сильными взаимодействиями. Следовательно, экспериментально наблюдаемые распады η -мезона на нечетное число π -мезонов могут быть обусловлены электромагнитными взаимодействиями, для которых G -четность не сохраняется (см. также гл. 4, § 4).

§ 6. Изотопическая инвариантность.

Изотопические инварианты

Переходим к рассмотрению произвольных вращений в трехмерном изотопическом пространстве. С этим преобразованием связано понятие изотопической инвариантности (или зарядовой независимости).

Изотопическая инвариантность аналогична инвариантности относительно вращения в обычном трехмерном пространстве. Согласно последней физические законы и соответствующие им выражения остаются неизменными при вращениях в трехмерном пространстве. С инвариантностью относительно вращений в трехмерном пространстве связан закон сохранения полного момента количества движения.

Изотопическая инвариантность означает, что физические законы и соответствующие им выражения остаются неизменными при произвольных вращениях в изотопическом пространстве.

Изотопическая инвариантность приводит к закону сохранения изотопического спина: полный изотопический спин системы до реак-

ции должен быть равен полному изотопическому спину системы после реакции.

Из рассмотренных в § 2 изотопических операторов и волновых функций можно построить величины, которые ведут себя при вращении в изопространстве

1) как изотопические скаляры:

$$\bar{\psi}\psi, (\bar{\psi}\tau\psi)\omega, \omega^{(1)}\omega^{(2)}, \quad (6.1)$$

где ω — изовекторные волновые функции;

2) как изотопические векторы

$$\bar{\psi}\tau\psi, [\omega^{(1)}\omega^{(2)}] \text{ и т. п.}$$

Если имеет место изотопическая инвариантность, то в выражение для амплитуды могут входить лишь изотопические инварианты, т. е. такие комбинации изотопических величин, которые не меняются при вращениях в изотопическом пространстве. Изинвариантом будет любой изотопический скаляр, например скалярное произведение двух изовекторов и т. п.

§ 7. Изотопическая структура амплитуды (сильное взаимодействие)

Для построения изотопической структуры амплитуды процесса можно использовать тот же метод, с помощью которого находилась инвариантная спиновая структура амплитуды (см. гл. 3).

Рассмотрим реакцию

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4. \quad (7.1)$$

С учетом требований изотопической инвариантности вместо формулы (1.7), гл. 3 будем иметь

$$\mathfrak{M} = \Phi_3^+ \Phi_3^+ I \Phi_4^+ \Phi_4^+ I \sum_i T_i(s, t) R_i \Phi_1 \Phi_1^I \Phi_2 \Phi_2^I, \quad (7.2)$$

где R_i — независимые инвариантные спиновые комбинации. Так как операторы γ и изотопические операторы I действуют в различных пространствах, то они коммутируют между собой. Поэтому амплитуду (7.2) можно записать в виде суммы произведений:

$$\mathfrak{M} = \sum (\Phi_3^+ \Phi_4^+ I T_i \Phi_1^I \Phi_2^I) (\Phi_3^+ \Phi_4^+ R_i \Phi_1 \Phi_2). \quad (7.3)$$

Следовательно, требование изотопической инвариантности приводит к тому, что каждая функция $T_i(s, t)$ в формуле (1.7), гл. 3 имеет определенную, одну и ту же для данного процесса изотопическую структуру. Чтобы определить эту изотопическую структуру в том случае, когда имеет место изотопическая инвариантность, надо

построить изоскаляры из изотопических операторов и изотопических волновых функций частиц, участвующих в процессе. Причем эти изоскаляры должны быть независимыми. Целесообразнее сначала подсчитать число независимых изоскаляров, используя закон сохранения полного изоспина, а затем искать их явный вид. С учетом сказанного выражение (7.3) переписывается так:

$$\mathfrak{M} = \sum_i (\Phi_3^{+I} \Phi_4^{+I} \sum_j T_j^I(s, t) r^j \Phi_1^I \Phi_2^I) (\Phi_3^+ \Phi_4^+ R_i \Phi_1 \Phi_2),$$

где r^j — независимые инвариантные изоспиновые комбинации.

Изотопическая структура амплитуды процесса определяется не конкретным видом частиц, а их изоспинами. Поэтому мы будем указывать лишь изоспины частиц, участвующих в реакции, а некоторые из конкретных реакций будем приводить в скобках.

Рассмотрим сначала некоторые процессы, обусловленные сильным взаимодействием. В этом случае имеет место изотопическая инвариантность, т. е. полный изотопический спин сохраняется.

1. $0 + 0 \rightarrow 0 + 0$ (рассеяние изоскалярных частиц на изоскалярных частицах: $\Lambda\Lambda \rightarrow \Lambda\Lambda$, $\omega\omega \rightarrow \omega\omega$ и т. д.). Полные изотопические спины начальной и конечной системы равны нулю. Из закона сохранения изотопического спина следует, что возможен только один переход, т. е. изоамплитуда состоит из одного независимого скаляра

$$M^I = T_i^I \varphi^{*I} \varphi^{*I} \varphi^I \varphi^I,$$

где φ^I — изотопическая скалярная функция.

2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow 0 + 0$ (аннигиляция двух изоспинорных частиц в две скалярные частицы $N\bar{N} \rightarrow \eta\eta$ и т. д.). Полный изоспин начальной системы равен $1/2 \pm 1/2 = 0$ или 1, а конечной системы — нулю. Из закона сохранения изотопического спина следует, что возможен лишь один переход, т. е. амплитуда содержит один независимый изоскаляр:

$$M^I = T_i^I \bar{\varphi}^{*I} \varphi^{*I} \psi\psi.$$

3. $1 + 1 \rightarrow 0 + 0$ (превращение двух изовекторных частиц в две изоскалярные: $\pi\pi \rightarrow \eta\eta$, $\rho\rho \rightarrow \omega\omega$ и т. п.). Изоамплитуда состоит из одного независимого изоскаляра:

$$M^I = T_i^I (\omega^{(1)} \omega^{(2)}) \varphi^{*I} \bar{\varphi}^{*I}.$$

4. $0 + 1/2 \rightarrow 0 + 1/2$ (рассеяние изоскалярной частицы на спинорной $\pi\eta \rightarrow \pi\eta$, $K\eta \rightarrow K\eta$ и т. д.). Изоамплитуда содержит один независимый изоскаляр

$$M^I = T_i^I \bar{\psi}\psi \varphi^{*I} \varphi^I.$$

5. $0 + \frac{1}{2} \rightarrow 1 + \frac{1}{2}$ ($\rho\eta \rightarrow \pi\pi$, $\rho\eta \rightarrow \rho\rho$). Изоамплитуда состоит из одного независимого изоскаляра ($\bar{\omega} \equiv \omega^*$)

$$M^I = T_i^1 ((\bar{\psi}\tau\psi)\bar{\omega})\varphi^I.$$

6. $0 + 1 \rightarrow 0 + 1$ ($\pi\eta \rightarrow \pi\eta$, $\omega\pi \rightarrow \omega\pi$, $\rho\eta \rightarrow \rho\eta$). Изоамплитуда содержит один независимый изоскаляр

$$M^I = T_i^1 (\omega^{(1)} \bar{\omega}^{(2)}) \bar{\varphi}^{*I} \varphi^I.$$

7. $0 + 1 \rightarrow 1 + 1$ ($\eta\pi \rightarrow \pi\pi$, $\eta\rho \rightarrow \rho\rho$). Изоамплитуда содержит один независимый изоскаляр

$$M^I = T_i^1 ([\omega^{(1)} \bar{\omega}^{(2)}] \bar{\omega}^{(3)}) \varphi^I.$$

8. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ($NN \rightarrow NN$, $KN \rightarrow KN$). Возможны два перехода ($0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$).

Изоамплитуда состоит из двух независимых изоскаляров:

$$M^I = T_i^1 (\bar{\psi}_1 \psi_1) (\bar{\psi}_2 \psi_2) + T_i^2 (\bar{\psi}_1 \tau_1 \psi_1) (\bar{\psi}_2 \tau_2 \psi).$$

9. $\frac{1}{2} + 1 \rightarrow \frac{1}{2} + 1$ ($\pi N \rightarrow \pi N$, $\rho N \rightarrow \rho N$ и т. д.). Возможны два перехода ($\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$). Выражение для изоамплитуды, симметричное по операторам τ , запишется так:

$$M^I = \bar{\psi} (T_i^1 \tau_\rho \tau_{\rho'} + T_i^2 \tau_{\rho'} \tau_\rho) \psi \omega_\rho \bar{\omega}_{\rho'}, \quad \rho = 1, 2, 3.$$

Так как

$$\tau_\rho \tau_{\rho'} = \frac{1}{2} (\tau_\rho \tau_{\rho'} + \tau_{\rho'} \tau_\rho) + \frac{1}{2} (\tau_\rho \tau_{\rho'} - \tau_{\rho'} \tau_\rho) = \delta_{\rho\rho'} + \frac{1}{2} [\tau_\rho \tau_{\rho'}],$$

то, переходя к новым функциям T_i , получаем

$$M^I = \bar{\psi} \left\{ T_i^1 \delta_{\rho\rho'} + T_i^2 \frac{1}{2} [\tau_\rho \tau_{\rho'}] \right\} \psi \omega_\rho \bar{\omega}_{\rho'}. \quad (7.4)$$

Выражение для изоамплитуды можно записать в другом виде, используя векторы τ и T :

$$M^I = \bar{\psi} \bar{\omega}' \{ T_i^1 - T_i^2 (\tau T) \} \psi \omega. \quad (7.5)$$

10. $1 + 1 \rightarrow 1 + 1$ ($\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\rho\rho \rightarrow \rho\rho$ и т. п.).

Возможны три перехода ($0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 2$). Изоамплитуду можно записать в следующем виде:

$$M^I = [T_i^1 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + T_i^2 \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\nu} + T_i^3 \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\mu}] \omega_\alpha \omega_\beta \bar{\omega}_\mu \bar{\omega}_\nu. \quad (7.6)$$

Каждый изотопический индекс α, β, μ, ν принимает значение 1, 2, 3 соответственно для π^+ , π^- и π^0 -мезонов.

§ 8. Изотопическая структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов)

В этом случае изотопическая инвариантность не имеет места и изотопическая амплитуда будет суммой изоскаляра и изовектора (см. § 5).

При практическом построении изоструктуры амплитуды процессов с участием фотонов удобно пользоваться следующим правилом. Чтобы найти изовекторную часть амплитуды, надо рассматривать фотон как π^0 -мезон (именно π^0 -мезону соответствует оператор T_3) и считать, что при этом полный изотопический спин сохраняется. Изоскалярной части будут соответствовать изоскаляры, которые можно построить из операторов и волновых функций трех адронов, участвующих в реакции.

Найдем изотопическую структуру амплитуд M^I некоторых процессов с участием фотонов; при этом

$$M^I = \Phi_f^+ S_0 \Phi_i^+ + \Phi_f^+ V_3 \Phi_i \equiv \langle S_0 \rangle + \langle V_3 \rangle.$$

1. $\gamma + 0 \rightarrow 0 + 0.$

$$\langle V_3 \rangle = 0; \quad \langle S_0 \rangle = T_i^2 \varphi^{+I} \bar{\varphi}^{+I} \bar{\varphi}^I.$$

2. $\gamma + 1 \rightarrow 0 + 0.$

$$\langle V_3 \rangle = T_i^1 \varphi^{+I} \varphi^{+I} \delta_{3\rho} \omega_\rho, \quad \langle S_0 \rangle = 0.$$

3. $\gamma + 1 \rightarrow 1 + 0.$

$$\langle V_3 \rangle = T_i^1 [\omega_1 \bar{\omega}_2]_3 \omega_3 \varphi^{*I}, \quad \langle S_0 \rangle = T_i^2 (\omega_1 \omega_2) \varphi^{*I}.$$

4. $\gamma + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + 0.$

$$\langle V_3 \rangle = T_i^1 \bar{\psi} \tau_3 \psi \varphi^{*I}, \quad \langle S_0 \rangle = T_i^2 \bar{\psi} \psi \varphi^{*I}.$$

5. $\gamma + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + 1.$

$$\left. \begin{aligned} \langle V_3 \rangle &= \bar{\psi} \left\{ T_i^1 \delta_{3\rho'} + T_i^3 \frac{1}{2} [\tau_{\rho'} \tau_3] \right\} \psi \omega_3 \bar{\omega}_{\rho'}, \\ \langle S_0 \rangle &= T_i^2 \bar{\psi} \tau_{\rho'} \psi \bar{\omega}_{\rho'}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

§ 9. Зарядовая структура амплитуды процесса

При вычислениях удобно пользоваться тем видом изотопической амплитуды, который был получен в двух предшествующих параграфах. Однако указанные амплитуды не соответствуют физическому процессу с определенными зарядами частиц. На опыте же изучают именно последние процессы. Поэтому возникает задача — выразить амплитуду процесса с определенными зарядами частиц через изотопические амплитуды T_i^l . Например, изоструктура амплитуды процесса рассеяния π -мезонов на нуклонах, согласно (7.4), выглядит так:

$$M^l = \bar{\psi} \left\{ T_i^l \delta_{\rho\rho'} + T_i^2 \frac{1}{2} [\tau_{\rho'} \tau_{\rho}] \right\} \psi \omega_{\rho} \bar{\omega}_{\rho'}. \quad (9.1)$$

С другой стороны, возможны следующие процессы рассеяния π -мезонов на нуклонах:

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p; \quad (9.2)$$

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p; \quad (9.3)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (9.4)$$

Для того чтобы получить изоамплитуду каждого из этих процессов, надо заменить волновые функции, входящие в выражение (9.1), волновыми функциями, соответствующими данному зарядовому состоянию. Например, в случае процесса (9.2), согласно (2.5) и (2.8), будем иметь

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi} = (1 \ 0),$$

$$\omega_{-}^{\rho} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \bar{\omega}_{-}^{\rho} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

Подставляя эти функции в (9.1) и учитывая (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \langle (\pi^- p) | T | \pi^- p \rangle &= \bar{\psi} \left\{ T_i^l \omega_{\rho} \bar{\omega}_{\rho'} \delta_{\rho\rho'} + T_i^2 \frac{1}{2} [\tau_{\rho'} \omega^{\rho'}, \tau_{\rho} \omega^{\rho}] \right\} \psi = \\ &= (1 \ 0) \left\{ T_i^l + T_i^2 \frac{1}{2} [(\tau_1 \bar{\omega}_-^1 + \tau_2 \bar{\omega}_-^2 + \tau_3 \bar{\omega}_-^3), \right. \\ &\quad \left. (\tau_1 \omega_-^1 + \tau_2 \omega_-^2 + \tau_3 \omega_-^3)] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 0) \left\{ T_i^l + T_i^2 \frac{1}{2} \left[\left(\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}} + \tau_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \right), \left(\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - \tau_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T_i^l + T_i^2. \end{aligned} \quad (9.4')$$

Тем самым получено выражение амплитуды конкретного физического процесса через изотопические амплитуды T_i^l .

Аналогичным образом найдем

$$\left. \begin{aligned} \langle \pi^+ p | T_i^1 | \pi^+ p \rangle &= (T_i^1 - T_i^2); \\ \langle \pi^- p | T_i^1 | \pi^0 n \rangle &= -\sqrt{2} T_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.4'')$$

Рассмотрим еще процессы фотообразования π -мезонов на нуклонах

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+; \quad (9.5)$$

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0; \quad (9.6)$$

$$\gamma + n \rightarrow p + \pi^-; \quad (9.7)$$

$$\gamma + n \rightarrow n + \pi^0. \quad (9.8)$$

Учитывая изотопическую структуру амплитуды, определяемую (8.1),

$$T_i^1 = \bar{\psi} \left\{ \delta_{\rho^3} T_i^1 + \tau_{\rho^3} T_i^2 + \frac{1}{2} [\tau_{\rho^3} \tau_3] T_i^3 \right\} \psi \omega_3 \bar{\omega}_{\rho^3} \quad (9.9)$$

и формулы (2.3), (2.5) и (2.8), находим, например, для процесса $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$

$$\begin{aligned} & \langle n \pi^+ | T_i^1 | p \gamma \rangle = \\ &= \bar{\psi} \left\{ T_i^1 \bar{\omega}_+^{\rho^3} \omega_3 \delta_{\rho^3} + T_i^2 \bar{\omega}_+^{\rho^3} \tau_{\rho^3} \omega_3 + \frac{1}{2} T_i^3 [\tau_{\rho^3} \bar{\omega}_+^{\rho^3}, \tau_3 \omega_3] \right\} \psi = \\ &= (0 \ 1) \left\{ T_i^1 \cdot 0 + T_i^2 (\bar{\omega}_+^1 \tau_1 + \bar{\omega}_+^2 \tau_2 + \bar{\omega}_+^3 \tau_3) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} T_i^3 [(\tau_1 \bar{\omega}_+^1 + \tau_2 \bar{\omega}_+^2 + \tau_3 \bar{\omega}_+^3), \tau_3 \omega_3] \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= (0 \ 1) \left\{ T_i^2 \left(\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - \tau_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} T_i^3 \left[\left(\tau_1 \frac{1}{\sqrt{2}} - \tau_2 \frac{i}{\sqrt{2}} \right), (\tau_3 \omega_3) \right] \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \sqrt{2} (T_i^2 + T_i^3). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Аналогичные вычисления дают

$$\langle p \pi^0 | T_i^1 | p \gamma \rangle = T_i^1 + T_i^2; \quad (9.11)$$

$$\langle n \pi^0 | T_i^1 | n \gamma \rangle = T_i^1 - T_i^2; \quad (9.12)$$

$$\langle p \pi^- | T_i^1 | n \gamma \rangle = \sqrt{2} (T_i^2 - T_i^3). \quad (9.13)$$

§ 10. Структура амплитуды по полному изотопическому спину

Состояние системы можно описывать не только зарядом, но и полным изотопическим спином. Вследствие этого амплитуда одного и того же процесса может быть записана в двух различных формах. Выясним, как связаны между собой скалярные функции, входящие в эти различные формы амплитуды.

Рассмотрим для примера процессы (9.2) — (9.4). Подставляя в (7.5) функцию $\Phi^{3/2}$, описывающую систему мезон — нуклон с полным моментом $I = 3/2$, получаем

$$\left\langle \Phi^{\frac{3}{2}} \left| T_i^t \right| \Phi^{\frac{3}{2}} \right\rangle = \left\langle \Phi^{\frac{3}{2}} \left| T_i^1 \delta_{\rho' \rho} \delta_{t' t} - (\mathbf{T}\boldsymbol{\tau}) T_i^2 \right| \Phi^{\frac{3}{2}} \right\rangle, \quad (10.1)$$

где t, t' — изоиндексы нуклонов.

Чтобы найти собственные значения оператора $(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau})$, возведем в квадрат оператор (2.10) полного изотопического момента системы:

$$I^2 = \left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \mathbf{T}^2 + (\mathbf{T}\boldsymbol{\tau}), \quad (10.2)$$

причем собственные значения оператора I^2 равны $I(I + 1)$. Формула (10.2) дает

$$(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau}) = I^2 - \mathbf{T}^2 - \left(\frac{\tau}{2} \right)^2.$$

Отсюда следует, что собственное значение оператора $(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau})$ в состоянии с полным изотопическим спином $I = \frac{3}{2}$ равно $\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{11}{4} = 1$, т. е. $(\mathbf{T}\boldsymbol{\tau}) \Phi^{\frac{3}{2}} = 1 \cdot \Phi^{\frac{3}{2}}$.

С учетом этого соотношения формула (10.1) переписывается так:

$$T_i^{\frac{3}{2}} = \left\langle \Phi^{\frac{3}{2}} \left| T_i \right| \Phi^{\frac{3}{2}} \right\rangle = T_i^1 - T_i^2. \quad (10.3)$$

Действуя тем же способом, получаем для случая $I = 1/2$

$$T_i^{\frac{1}{2}} = T_i^1 + 2T_i^2. \quad (10.4)$$

Разрешая (10.3) и (10.4) относительно T_i^1 и T_i^2 , находим выражения последних через амплитуды полного изоспина $T_i^{3/2}$ и $T_i^{1/2}$

$$T_i^1 = \frac{1}{3} \left(T_i^{\frac{1}{2}} + 2T_i^{\frac{3}{2}} \right), \quad T_i^2 = \frac{1}{3} \left(T_i^{\frac{1}{2}} - T_i^{\frac{3}{2}} \right). \quad (10.5)$$

Подставляя (10.5) в (9.1), будем иметь

$$T_i^I = T_i^2 \frac{1}{3} \left(\delta_{\rho' \rho} + \frac{1}{2} [\tau_{\rho'} \tau_{\rho}] \right) + \\ + T_i^2 \frac{1}{3} \left(2\delta_{\rho' \rho} - \frac{1}{2} [\tau_{\rho'} \tau_{\rho}] \right) = T_i^2 P^{\frac{1}{2}} + T_i^2 P^{\frac{3}{2}}.$$

Операторы $P^{1/2}$ и $P^{3/2}$ называются проекционными операторами для состояний с $I = 1/2$ и $I = 3/2$.

Формулы (10.3) — (10.5) устанавливают связь между скалярными функциями T^1 , T^2 , и $T^{1/2}$, $T^{3/2}$ для процесса рассеяния π -мезонов на нуклонах. Найдем аналогичную связь для скалярных функций, относящихся к реакциям (9.5)—(9.8) фотообразования π -мезонов на нуклонах. Для этого надо подставить в (5.4) волновые функции (2.16) полного изотопического спина соответствующей системы мезон — нуклон. Например, для реакции $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ получим

$$\left\langle \sqrt{\frac{1}{3}} \Phi^{\frac{3}{2} \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \Phi^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \mid S + V_3 \mid \Phi^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \right\rangle.$$

Вычисление этого выражения с помощью формул:

$$\langle I' I_3' \mid S \mid I I_3 \rangle = -\sqrt{3} \delta_{I' I} \delta_{I_3' I_3} T^s;$$

$$\left\langle \frac{1}{2} I_3' \mid V_3 \mid \frac{1}{2} I_3 \right\rangle = \sqrt{3} \delta_{I_3' I_3} I_3 T^{\frac{1}{2}};$$

$$\left\langle \frac{3}{2} I_3' \mid V_3 \mid \frac{1}{2} I_3 \right\rangle = \delta_{I_3' I_3} \sqrt{3} \sqrt{\frac{9}{4} - I_3^2} T^{\frac{3}{2}}$$

приводит к следующему результату:

$$\langle n\pi^+ \mid T_i \mid p\gamma \rangle = -\sqrt{2} T_i^s + \sqrt{2} T_i^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} T_i^{\frac{3}{2}}. \quad (10.6)$$

Здесь T_i^s и $T_i^{\frac{1}{2}}$ — амплитуды, соответствующие образованию системы мезон — нуклон с полным изотопическим спином $I = \frac{1}{2}$,

а $T_i^{\frac{3}{2}}$ — с полным изотопическим спином $I = \frac{3}{2}$. Аналогичным образом найдем

$$\langle p\pi^0 \mid T_i \mid p\gamma \rangle = T_i^s - \frac{1}{2} T_i^{\frac{1}{2}} + 2T_i^{\frac{3}{2}}; \quad (10.7)$$

$$\langle n\pi^0 | T_i | n\gamma \rangle = -T_i^1 - \frac{1}{2} T_i^{\frac{1}{2}} + 2T_i^{\frac{3}{2}}; \quad (10.8)$$

$$\langle p\pi^- | T_i | n\gamma \rangle = \sqrt{2} T_i^s + \sqrt{2} T_i^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} T_i^{\frac{1}{2}}. \quad (10.9)$$

Сравнение выражений для амплитуд одинаковых реакций в (10.6)—(10.9) и (9.10)—(9.13) дает

$$T_i^{\frac{1}{2}} = T_i^1 + 2T_i^3, \quad T_i^s = T_i^2, \quad T_i^{\frac{3}{2}} = T_i^1 - T_i^3 \quad (10.10)$$

или

$$T_i^1 = \frac{1}{3} \left(T_i^{\frac{1}{2}} + 2T_i^{\frac{3}{2}} \right), \quad T_i^2 = T_i^s, \quad T_i^3 = \frac{1}{3} \left(T_i^{\frac{1}{2}} - T_i^{\frac{3}{2}} \right). \quad (10.11)$$

Подставляя (10.11) в (9.9), находим выражение для изоамплитуд через проекционные операторы

$$T_i = \sum_{l=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, s} T_i^l P^l = T_i^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \tau_\rho \tau_3 + T_i^s \tau_\rho + T_i^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\delta_{\rho 3} - \frac{1}{3} \tau_\rho \tau_3 \right).$$

Подставляя (10.5) в (9.4') и (9.4''), получаем выражения для амплитуд процессов (9.2)—(9.4) через амплитуды перехода $T^{3/2}$ и $T^{1/2}$ с данным полным изоспином

$$\begin{aligned} \langle p\pi^+ | T_i | p\pi^+ \rangle &= T_i^{\frac{3}{2}}; & \langle p\pi^- | T_i | n\pi^0 \rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left(T_i^{\frac{3}{2}} - T_i^{\frac{1}{2}} \right); \\ \langle p\pi^- | T_i | p\pi^- \rangle &= \frac{1}{3} \left(T_i^{\frac{3}{2}} + 2T_i^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (10.12)$$

§ 11. Следствия изотопической инвариантности

Изотопическая инвариантность приводит к определенным соотношениям между величинами (амплитудами, сечениями процессов, константами связи, магнитными моментами, форм-факторами, вероятностями распада частиц). Получим некоторые из этих соотношений.

Соотношения между сечениями. Исключая из выражений (9.4') и (9.4'') или (10.12) функции T_i^l , получим следующее соотношение между амплитудами процессов рассеяния π -мезонов на нуклонах:

$$M(p\pi^+ \rightarrow p\pi^+) = M(p\pi^- \rightarrow p\pi^-) + \sqrt{2} M(p\pi^- \rightarrow n\pi^0). \quad (11.1)$$

Это соотношение означает, что три комплексные амплитуды

$$M(p\pi^+ \rightarrow p\pi^+), \quad M(p\pi^- \rightarrow p\pi^-), \quad M(p\pi^- \rightarrow n\pi^0)$$

образуют замкнутый треугольник в комплексной плоскости. Так как длина одной стороны треугольника всегда меньше суммы длин двух других и больше их разности, то, например,

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{\sigma(p\pi^- \rightarrow p\pi^-)} - \sqrt{2\sigma(p\pi^- \rightarrow n\pi^0)} \right| \leq \\ & \leq \sqrt{\sigma(p\pi^+ \rightarrow p\pi^+)} \leq (\sqrt{\sigma(p\pi^- \rightarrow p\pi^-)} + \sqrt{2\sigma(p\pi^- \rightarrow n\pi^0)}). \end{aligned} \quad (11.2)$$

Такие неравенства называются неравенствами треугольника.

Аналогичным образом, имея в виду формулы (9.10)—(9.13) или (10.6)—(10.9), находим соотношения между амплитудами процессов фотообразования π -мезонов на нуклонах

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} M(\gamma n \rightarrow n\pi^0) + M(\gamma n \rightarrow p\pi^-) = \\ & = \sqrt{2} M(\gamma p \rightarrow p\pi^0) + M(\gamma p \rightarrow n\pi^+). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Соотношения между константами взаимодействия. Рассмотрим взаимодействие π -мезона с нуклоном. Из волновых функций этих частиц можно составить следующий инвариант:

$$g_{NN\pi} \bar{\psi} \gamma_5 \tau_i \psi \omega_i,$$

где $g_{NN\pi}$ — константа связи π -мезона с нуклоном.

Подставив в последнее выражение волновые функции (2.1) и (2.7), получим

$$\begin{aligned} g_{NN\pi} [& \sqrt{2} \bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n \omega_- + \sqrt{2} \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_p \omega_+ + \\ & + (\bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_p - \bar{\psi}_n \gamma_5 \psi_n) \omega_0]. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Отсюда следует, что константа взаимодействия с нуклоном заряженного π -мезона в $\sqrt{2}$ раз больше той же величины для нейтрального π^0 -мезона.

Соотношения между форм-факторами и магнитными моментами. Форм-фактором называется матричный элемент оператора тока между двумя состояниями, соответствующими частицам (частицы могут быть и различными). Если их импульсы равны p_1 и p_2 , то квадрат импульса отдачи $q^2 = (p_2 - p_1)^2$.

Для форм-фактора изоспинора, в частности нуклона N , имеем

$$\langle N | J^0 + J^3 | N \rangle = \frac{1}{2} (F^0 \bar{N} N + F^1 \bar{N} \tau_3 N).$$

Подставив в это выражение волновые функции (2.1), найдем, что как электрические, так и магнитные форм-факторы протона F_p и нейтрона F_n выражаются через два независимых форм-фактора F^0 (изоскалярный) и F^1 (изовекторный):

$$F_p = \frac{1}{2}(F^0 + F^1); \quad F_n = \frac{1}{2}(F^0 - F^1). \quad (11.5)$$

Другими словами, в данном случае изотопическая инвариантность не приводит к новым соотношениям.

Аналогичным образом для форм-фактора изовекторной частицы, например Σ -гиперона, получим

$$\langle \Sigma | J^0 + J^3 | \Sigma \rangle = F^0 \bar{\Sigma} \Sigma + F^1 \bar{\Sigma} T_3 \Sigma$$

или, если выбирать знаки форм-факторов по знаку заряда частицы,

$$F_{\Sigma^+} = (F^0 + F^1); \quad F_{\Sigma^0} = F^0; \quad F_{\Sigma^-} = -(F^0 - F^1). \quad (11.6)$$

Отсюда найдем следующие соотношения между форм-факторами Σ -гиперонов:

$$F_{\Sigma^+} - F_{\Sigma^-} = 2F_{\Sigma^0}. \quad (11.7)$$

Форм-факторы зависят от квадрата q^2 переданного импульса частиц. Если $q^2 = 0$, то магнитные форм-факторы переходят в магнитные моменты частиц. Поэтому между магнитными моментами частиц существуют такие же соотношения, как и между форм-факторами. В частности, магнитные моменты Σ -гиперонов, согласно (11.7), связаны так:

$$\mu_{\Sigma^+} - \mu_{\Sigma^-} = 2\mu_{\Sigma^0}.$$

§ 12. Изотопическая инвариантность и SU_2 -симметрия

Как мы уже говорили, изотопическая инвариантность есть инвариантность относительно произвольных вращений в трехмерном изопространстве. Такие вращения образуют группу (см. Дополнение IV), и поэтому изотопическую инвариантность можно трактовать как инвариантность относительно группы вращения в изопространстве. Генераторами этой группы являются изооператоры (2.4), а простейшими спинорным и векторным представлениями — матрицы (2.3) и (2.4) или изоспинорные и изовекторные волновые функции (2.1) и (2.2). Другими словами, волновые функции изотопических мультиплетов являются неприводимыми представлениями группы вращений в трехмерном изопространстве.

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что трехмерные вращения описываются также с помощью двухрядных унитарных матриц, которые определяются так:

$$VV^+ = 1. \quad (12.1)$$

Иначе говоря, унитарные двухрядные матрицы образуют группу, и эта группа эквивалентна (изоморфна) группе трехмерных вращений.

Напомним основные свойства унитарных матриц.

Из унитарности матрицы следует, что ее определитель равен по модулю единице, так как согласно (12.1),

$$\det VV^+ = \det V \det V^+ = |\det V|^2 = 1,$$

откуда

$$|\det V| = 1. \quad (12.2)$$

Представим V в виде

$$V = Ue^{i\alpha}, \quad (12.3)$$

где U — унитарная матрица с единичным определителем (такую матрицу называют унимодулярной). Тогда вместо (12.1) получим

$$UU^+ = 1, \quad \det U = 1.$$

Следовательно, каждое унитарное преобразование можно разбить на два. Первое сводится к умножению на $e^{i\alpha}$; оно образует калибровочную группу (см. § 3). Второе преобразование осуществляется матрицей U . Совокупность этих матриц образует группу SU_n (индекс S подчеркивает, что определитель матрицы U равен единице, а индекс n характеризует размерность матрицы). Унитарную матрицу можно представить в виде

$$U = e^{iH}.$$

Матрицы H , являющиеся генераторами унитарной группы, эрмитовы, так как

$$UU^+ = e^{iH} e^{-iH^+} = 1$$

только в том случае, если $H = H^+$. Кроме того, след матрицы H , т.е. $\text{Sp } H = 0$. Это следует из того, что $\det U = 1$, а матрица U , бесконечно близкая к единице, выглядит так:

$$U \approx I + iH + \dots$$

В частности, генераторами группы SU_2 являются двухрядные эрмитовы матрицы, след которых равен нулю.

Так как в математическом отношении группа SU_2 эквивалентна (изоморфна) группе вращения в трехмерном изопространстве, то формальный математический аппарат группы SU_2 целиком совпадает с аппаратом группы вращений в трехмерном пространстве (см. Дополнение IV).

Генераторами группы SU_2 являются изооператоры \hat{t} , определяемые (2.3), а простейшим спинорным и векторным представлением — матрицы (2.3) и (2.4) или изоспинорные и изовекторные волновые функции (2.1) и (2.2).

У обеих групп имеются неприводимые представления любой размерности, т. е. обе группы предсказывают существование изотопических мультиплетов с произвольным числом частиц. Низшие из этих мультиплетов (синглет, дублет, триплет, квартет) реализуются в природе. Мультиплеты частиц с большей размерностью пока не обнаружены.

Естественно, что группа SU_2 приводит к тем же следствиям, что и группа трехмерных вращений в изопространстве (см. § 11).

В основе изотопической инвариантности лежит предположение, что частицы изомультиплета тождественны, иначе говоря, система частиц изомультиплета вырождена по заряду. Это вырождение на математическом языке формулируется как инвариантность относительно группы SU_2 или группы трехмерных вращений в изопространстве.

Вырождение частиц в изотопическом мультиплете имеет место до тех пор, пока пренебрегается электромагнитным взаимодействием. Учет последнего ведет к расщеплению масс внутри мультиплета. Тем самым вырождение по заряду снимается и изотопическая инвариантность нарушается. Так как электромагнитное расщепление масс невелико, то небольшим будет и нарушение изотопической инвариантности.

ГЛАВА 11

ПЕРЕКРЕСТНАЯ СИММЕТРИЯ (КРОСС-СИММЕТРИЯ)

§ 1. Перекрестная симметрия для бозонов

Рассмотрим процесс, в котором участвуют два тождественных бозона, например процесс рассеяния π -мезонов на нуклонах (рис. 11.1, а):



Поменяем местами мезоны π_1 и π_2 (рис. 11.1, б)



В результате приходим к реакции рассеяния антимезонов на нуклонах.

Процесс (1.2), получающийся из (1.1) перестановкой бозонов, называется перекрестным по отношению к прямому процессу (1.1).

Если амплитуда прямого процесса (1.1) задана, то от нее можно перейти к амплитуде перекрестного процесса (1.2). Для этого в общем случае надо в выражении для амплитуды прямого процесса: 1) заменить волновые функции бозонов волновыми функциями антибозонов и затем поменять волновые функции местами;

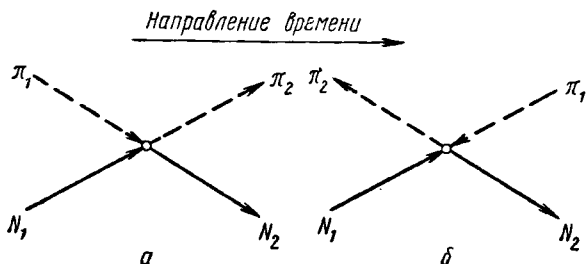


Рис. 11.1. Схема процесса:

a—до кросс-преобразования; *b*—после кросс-преобразования.

2) поменять местами операторы изотопических спинов бозонов.

В результате, для получения амплитуды перекрестного процесса надо (см. гл. 4) в амплитуде прямого процесса произвести замену векторов поляризации и энергии — импульса начального и конечного бозонов

$$q_i \rightarrow -q_f, \quad q_f \rightarrow -q_i. \quad (1.3)$$

При этом инвариантная величина

$$s = (p_1 + q_1)^2 = (p_2 + q_2)^2$$

заменяется новой:

$$u = (p_1 - q_2)^2 = (p_2 - q_1)^2,$$

а t остается без изменения:

$$t = (p_2 - p_1)^2 \rightarrow t.$$

Но согласно обобщенному принципу Паули амплитуда процесса не изменится, если переставить два тождественных бозона. Поэтому амплитуды прямого $M_{rq}(s, t)$ и перекрестного $M_{qr}(u, t)$ процессов с участием двух тождественных бозонов должны удовлетворять следующему условию (r, q — изотопические индексы бозонов):

$$M_{rq}(p_1, p_2; q_1, q_2) = M_{qr}(p_1, p_2; -q_2, -q_1) \quad (1.4)$$

или

$$M_{rq}(s, t) = M_{qr}(u, t). \quad (1.5)$$

Это свойство амплитуды называется перекрестной симметрией, или кросс-симметрией.

С точки зрения перекрестной симметрии удобно записывать амплитуду прямого процесса в виде суммы таких комбинаций, которые при кросс-преобразовании переходят либо сами в себя, либо в другие, но уже имеющиеся в исходной амплитуде. Этому условию удовлетворяют, в частности, выражения для амплитуд, найденные в гл. 3.

Выясним, к каким следствиям приводит требование (1.4) или (1.5) для амплитуды процесса (1.1), определяемой формулами (2.4), гл. 3 и (7.4), гл. 10.

Так как при кросс-преобразовании

$$Q = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) \rightarrow -Q, \quad [\tau_\beta \tau_\alpha] \rightarrow [\tau_\alpha \tau_\beta] = -[\tau_\beta \tau_\alpha],$$

то амплитуда для кросс-процесса (1.2) запишется так *:

$$M(u, t) = \bar{u}(p_2) \left\{ T_1^1(u, t) - [\tau_\beta \tau_\alpha] T_1^2(u, t) - \right. \\ \left. - [T_2^1(u, t) - [\tau_\beta \tau_\alpha] T_2^2(u, t)] \hat{Q} \right\} u(p_1).$$

Чтобы выполнялось требование (1.5), функции T_i^j должны удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} T_1^1(s, t) &= T_1^1(u, t), & T_1^2(s, t) &= -T_1^2(u, t); \\ T_2^1(s, t) &= -T_2^1(u, t), & T_2^2(s, t) &= T_2^2(u, t). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Как видно, некоторые из функций T_i^j меняют знак. Обычно функции T_i^j , не изменяющие знака при кросс-преобразовании, называют четными, а изменяющие знак — нечетными; иначе говоря, функции T_1^1, T_2^2 — четные, а функции T_1^2, T_2^1 — нечетные.

Рассмотрим, к каким следствиям приводит требование (1.4) или (1.5) для амплитуд некоторых других процессов.

$$1. \eta^0 + N \rightarrow \eta^0 + N.$$

В отличие от разобранный реакции $\pi N \rightarrow \pi N$ в этом случае амплитуда (гл. 10, § 7) является изоскаляр, поэтому вместо (1.6) получим

$$T_1(s, t) = T_1(u, t); \quad T_2(s, t) = -T_2(u, t). \quad (1.7)$$

* В этой главе в выражениях для амплитуды извольные (всех частиц) и волновые функции бозонов мы выписывать не будем.

$$2. \begin{matrix} \pi & + & \pi & \rightarrow & \pi & + & \pi \\ \alpha & & \beta & & \mu & & \nu \end{matrix}$$

Меняя в формуле (7.6), гл. 10 местами изотопические индексы α и μ , получаем, имея в виду (2.1), гл. 3,

$$T^2(s, t) = T^1(u, t), \quad T^3(s, t) = T^3(u, t).$$

$$3. \eta^0 + \eta^0 \rightarrow \eta^0 + \omega^0 \text{ [см. гл. 3, формула (2.2)].}$$

При замене $q_2 \leftrightarrow -q_3$ четырехмерный импульс $Q \rightarrow -Q$, поэтому, имея в виду (2.2), гл. 3, находим

$$T(s, t) = -T(u, t).$$

$$4. \gamma + \pi \rightarrow \pi + \gamma \text{ [см. гл. 3, формула (3.4)].}$$

При замене $k_1 \leftrightarrow -k_2$

$$K \rightarrow -K, \quad Q \rightarrow Q, \quad P \rightarrow P, \quad P' \rightarrow P', \quad \tilde{N} \rightarrow -\tilde{N}. \quad (1.7')$$

Поэтому при заменах $k_1 \leftrightarrow -k_2$ и $\varepsilon_1 \leftrightarrow -\varepsilon_2$ спиновые комбинации, входящие в формулу (3.4), гл. 3, остаются неизменными и

$$T_1(s, t) = T_1(u, t) \quad \text{и} \quad T_2(s, t) = T_2(u, t).$$

$$5. \gamma + N \rightarrow N + \gamma \text{ [см. гл. 4, формула (3.7)].}$$

Учитывая соотношения (1.7') и заменяя в (3.7), гл. 4 $\varepsilon_1 \leftrightarrow -\varepsilon_2$, получаем

$$T_1(s, t) = T_1(u, t), \quad T_2(s, t) = -T_2(u, t), \quad T_3(s, t) = T_3(u, t),$$

$$T_4(s, t) = -T_4(u, t), \quad T_5(s, t) = T_5(u, t), \quad T_6(s, t) = T_6(u, t) \quad (1.8)$$

или

$$T_i(s, t) = \eta_i T_i(u, t), \quad (1.9)$$

где $\eta_i = +1$ для $i = 1, 3, 5, 6$ и $\eta_i = -1$ для $i = 2, 4$.

§ 2. Перекрестная симметрия для барионов

Рассмотрим процесс, в котором участвует два тождественных бариона, например, процесс рассеяния π -мезонов на нуклонах (см. рис. 11.1, а).

$$\pi_1 + N_1 \rightarrow \pi_2 + N_2. \quad (2.1)$$

Поменяем местами нуклоны N_1 и N_2 (рис. 11.2):

$$\pi_1 + \bar{N}_2 \rightarrow \pi_2 + \bar{N}_1. \quad (2.2)$$

В результате получается реакция рассеяния π -мезонов на анти-нуклонах. Процесс (2.2) называется перекрестным по отношению к прямому процессу (2.1).

Если амплитуда прямого процесса (2.1) задана, то из нее можно получить амплитуду перекрестного процесса (2.2). Для этого надо в общем случае в выражении для амплитуды прямого процесса заменить пространственные и изотопические волновые функции барионов волновыми функциями антибарионов (с учетом их пространственных и изотопических свойств), и после этого поменять волновые функции местами.

Согласно принципу Паули, амплитуда процесса при перестановке двух тождественных фермионов лишь меняет знак. Это означает, что в рассматриваемом нами случае амплитуда рассеяния π -мезона на нуклоне с импульсом p_1 должна быть равна взятой с обратным знаком амплитуде рассеяния π -мезона на антинуклоне с импульсом p_2 :

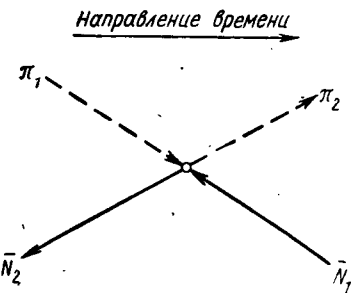


Рис. 11.2. Схема процесса после кросс-преобразования.

$$\int e^{ip_2 y} \bar{u}(p_2) \mathfrak{M}(y, x) e^{-ip_1 x} u(p_1) dx dy = - \int e^{-ip_1 x} \bar{u}^c(p_1^c) \mathfrak{M}(x, y) e^{ip_2 y} u^c(p_2^c) dx dy. \quad (2.3)$$

Свойство (2.3) амплитуды называется перекрестной симметрией.

При зарядовом сопряжении изоволновая функция нуклонов переходит в комплексно-сопряженную функцию; при этом меняются местами проекции изоспинов частиц (так как проекции изоспинов частицы и античастицы противоположны по знаку). Умножение преобразованной функции на оператор $i\tau_2$ приводит, как видно из (4.1), гл. 10, к исходному расположению проекций изоспинов (этого же можно добиться с помощью матрицы $i\tau_1$, но обычно используют $i\tau_2$). Следовательно, чтобы изоволновые функции нуклонов входили в теорию симметрично (как этого требует C -инвариантность), они должны преобразовываться при C -преобразовании так (см. также гл. 4, § 2)

$$\Phi^I \rightarrow (\Phi^I)^c = i\tau_2 \Phi^I. \quad (2.4)$$

Преобразовав (2.3), получим (см. гл. 4, §3):

$$T_i(s, t) \bar{u}(p_2) \mathfrak{M}(p_2, p_1) u(p_1) = B_{ij} T_j(u, t) \bar{u}(p_2) C' \mathfrak{M}^T(-p_1, -p_2) C' u(p_1), \quad (2.5)$$

где $C' = C\tau_2$.

Выясним, к каким следствиям приводит требование перекрестной симметрии для амплитуды процесса (2.1), определяемой (2.4), гл. 3 и (7.4), гл. 10.

При кросс-преобразовании $Q \rightarrow Q$ и

$$Q_\mu \gamma_\mu \rightarrow C Q_\mu \gamma_\mu^T C = -Q_\mu \gamma_\mu, \quad [\tau_\alpha \tau_\beta] \rightarrow \tau_2 [\tau_\beta \tau_\alpha]^T \tau_2 = -[\tau_\alpha \tau_\beta].$$

Поэтому, как и в случае перестановки бозонов, получим, что вследствие кросс-симметрии функции T_i должны удовлетворять соотношениям (1.6).

Рассмотрим, к каким следствиям приводит требование перекрестной симметрии для некоторых других процессов.

1. $\eta^0 + N \rightarrow \eta^0 + N$. Функции T_i удовлетворяют условию (1.7).

2. $\gamma_b + N \rightarrow N + \pi$.

Амплитуда определяется выражениями (2.6), гл. 3 и (8.1), гл. 10. При кросс-преобразовании

$$P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \rightarrow -\frac{1}{2} (p_2 + p_1) = -P;$$

$$\gamma_5 (\gamma k) (\gamma \xi) \rightarrow C (\gamma^T \xi) (\gamma^T k) \gamma_5^T C = (-\gamma \xi) (-\gamma k) \gamma_5 =$$

$$= -\gamma_5 (\gamma k) (\gamma \xi), \quad \text{ибо } (\gamma k) (\gamma \xi) = -(\gamma \xi) (\gamma k);$$

$$\gamma_5 (\gamma \xi) \rightarrow C \gamma^T \xi \gamma_5^T C = \gamma_5 (\gamma \xi);$$

$$[\tau_\beta \tau_3] \rightarrow \tau_2 [\tau_3 \tau_\beta]^T \tau_2 = -[\tau_\beta \tau_3]. \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.6), гл. 3 и (8.1), гл. 10, находим, что $T_1^{1,2}, T_2^{1,2}, T_3^3, T_4^{1,2}, T_5^3, T_6^3$ являются четными, а $T_1^3, T_2^3, T_3^{1,2}, T_4^3, T_5^{1,2}, T_6^{1,2}$ — нечетными функциями.

3. $\gamma + N \rightarrow N + \pi$.

Заменяя в (2.6) $\xi \rightarrow \varepsilon$ и подставляя полученный результат в (1.14), гл. 3 и (8.1), гл. 10, находим, что

$$\begin{aligned} T_1^{1,2}, T_2^{1,2}, T_3^3, T_4^{1,2} &\text{— четные,} \\ T_1^3, T_2^3, T_3^{1,2}, T_4^3 &\text{— нечетные функции.} \end{aligned} \quad (2.7)$$

4. $\gamma + N \rightarrow \eta^0 + N$.

Так как в этом случае η_0 -мезон является изоскаляром, то вместо (2.7) будем иметь

T_1, T_2, T_4 — четные, T_3 — нечетные функции.

5. $\gamma + N \rightarrow \gamma + N$ [см. гл. 4, формула (3.7)].

При замене $p_1 \rightleftharpoons -p_2$

$$K \rightarrow K, \quad Q \rightarrow Q, \quad P \rightarrow -P, \quad P' \rightarrow -P', \quad \bar{N} \rightarrow -\bar{N} \quad (2.8)$$

и

$$\gamma_5 K_\mu \gamma_\mu \rightarrow C \gamma_\mu^T K_\mu \gamma_5^T C = \gamma_5 K_\mu \gamma_\mu,$$

т. е. функции T_i удовлетворяют условиям (1.9).

ГЛАВА 12

АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССОВ С УЧАСТИЕМ ТРЕХ ЧАСТИЦ

§ 1. Кинематика процесса

Рассмотрим процесс

$$1 \rightarrow 2 + 3, \quad (1.1)$$

в котором одна частица переходит в две частицы. Такой процесс можно изобразить схемой, представленной на рис. 12.1. Пусть p_1, p_2, p_3 — четырехмерные векторы энергии — импульса частиц, а m_1, m_2, m_3 — их массы. Из закона сохранения энергии — импульса

$$p_1 = p_2 + p_3 \quad (1.2)$$

следует, что независимы два 4-вектора.

Выясним, от какого числа независимых релятивистски инвариантных переменных зависит амплитуда процесса (1.1). Из двух независимых векторов, например p_1, p_2 , можно образовать три различных скалярных произведения $p_1^2,$

Рис. 12.1. Схема процесса с участием трех частиц.

$p_2^2, p_1 p_2$. Если частицы 1 и 2 — реальные, то $p_1^2 = m_1^2$ и $p_2^2 = m_2^2$ — постоянны. Следовательно, амплитуда изучаемого процесса будет функцией одного инвариантного переменного, в качестве которого обычно выбирают квадрат переданного 4-импульса:

$$t = (p_2 - p_1)^2. \quad (1.3)$$

Поэтому мы будем записывать амплитуду процесса (1.1) в виде $M(t)$.

Выражение для амплитуды процесса (1.1) запишется в виде, аналогичном (1.7), гл. 3:

$$M(t) = \Phi^+(p_3) \Phi^+(p_2) (S-I) \Phi(p_1), \quad (1.4)$$

причем оно должно удовлетворять требованиям всех рассмотренных нами инвариантностей (см. гл. 2, 4, 5, 10).

Выражение (1.4) для амплитуды данного процесса будет суммой определенного числа независимых спиновых комбинаций:

$$M(t) = \sum_i T_i(t) R_i, \quad (1.5)$$

где $T_i(t)$ — неизвестные функции (в данном случае их называют форм-факторами), R_i — инвариантные спиновые комбинации.

Число независимых комбинаций можно определить, используя закон сохранения момента количества движения и четности.

В частном случае, когда и частица 3 реальная ($t_0 = \mu^2$, где μ — масса частицы), форм-факторы превращаются в постоянные величины $T_i(\mu^2)$, равные константам связи. Другими словами, в случае реальных частиц форм-факторы $T_i(t)$ следует заменить константами связи g_i ; последние характеризуют интенсивность взаимодействия частиц между собой.

Переходим к построению амплитуд различных процессов с участием трех частиц, предполагая, что все три частицы реальные. ♪

В § 2—4 мы выпишем выражения для амплитуд без учета нормировки волновых функций. Учет выбранной нами (см. гл. 3, § 4) нормировки функций приведет к тому, что выражения для амплитуд надо умножить на множитель $\frac{\alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{2E_i V 2E_f V}}$, где E_i, E_f — энергии начальной и конечной частиц, V — нормировочный объем, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ для бозонов и $\alpha_1 = \sqrt{2M_1}$, $\alpha_2 = \sqrt{2M_2}$ — для фермионов, M_1, M_2 — массы фермионов.

Произведение g_i на нормировочный множитель обозначим T_i .

§ 2. Инвариантная структура амплитуды (сильное взаимодействие)

Сначала рассмотрим некоторые процессы, обусловленные сильным взаимодействием.

$$1^- \rightarrow 0^- + 0^- \\ k, \xi \quad q_1 \quad q_2$$

В системе покоя начальной частицы ($l = 0$) полный момент количества движения J конечной системы должен быть равен единице. Спин конечной системы $s' = 0$, а ее орбитальный момент $l' = 1$. Внутренние четности начальной и конечной системы противоположны.

ны. Поэтому, вследствие закона сохранения четности, разрешен лишь один переход ($l = 0 \rightarrow l' = 1$); амплитуда содержит одно слагаемое:

$$M(t) = T_1 (q_{1\mu} - q_{2\mu}) \xi_\mu \tilde{\Phi}^*(q_1) \tilde{\Phi}^*(q_2). \quad (2.1)$$

Это выражение симметрично относительно перестановки импульсов двух мезонов.

$$2. 1^+ \rightarrow 0^- + 0^-.$$

$$k, \xi \quad q_1 \quad q_2$$

Процесс запрещен законом сохранения момента количества движения и четности. Именно поэтому нельзя образовать из имеющихся величин скаляра: произведение волновых функций дает псевдовектор $\tilde{U}_\mu(k) \tilde{\Phi}^*(q_1) \tilde{\Phi}^*(q_2)$, для образования псевдовектора $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\gamma\delta} p_\delta q_{1\nu} q_{2\gamma}$ из импульсов необходимы три независимых 4-вектора, а в рассматриваемом случае их имеется лишь два.

$$3. 1^- \rightarrow 1^- + 0^-.$$

$$k_1, \xi_1 \quad k_2, \xi_2 \quad q$$

В системе покоя начальной частицы ($l = 0$) полный момент конечной системы равен единице. Так как спин конечной системы $s' = 1$, то ее орбитальный момент l' принимает следующие значения:

$$l' = 2, 1, 0.$$

Внутренние четности начальной и конечной системы противоположны. Поэтому, вследствие закона сохранения четности, разрешен лишь один переход ($l = 0 \rightarrow l' = 1$) и амплитуда состоит из одного члена, содержащего $\xi_{1\mu}$ и $\xi_{2\mu}$:

$$M(t) = T_1 \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \xi_{1\mu} \xi_{2\nu} k_{1\alpha} k_{2\beta} \tilde{\Phi}^*(q). \quad (2.2)$$

Это выражение симметрично относительно перестановки импульсов и поляризаций вектонов.

$$4. 1^+ \rightarrow 1^- + 0^-.$$

$$k_1, \xi_1 \quad k_2, \xi_2 \quad q$$

Внутренние четности начальной и конечной систем одинаковы. Поэтому разрешены два перехода ($l = 0 \rightarrow l' = 0$, $l = 0 \rightarrow l' = 2$) и амплитуда содержит две независимые инвариантные комбинации:

$$M(t) = [T_1 (k_1 \xi_2) (k_2 \xi_1) + T_2 (\xi_1 \xi_2)] \tilde{\Phi}^*(q). \quad (2.3)$$

$$5. 1^- \rightarrow 1^- + 1^-.$$

$$k_1, \xi_1 \quad k_2, \xi_2 \quad k_3, \xi_3$$

В системе покоя начальной частицы ($l = 0$) полный момент конечной системы равен единице. Так как спин конечной системы принимает три значения: $s' = 2, 1, 0$, то ее орбитальный момент l' будет равен

$$l' = \begin{cases} 1, & \text{если } s' = 0; \\ 2, 1, 0, & \text{если } s' = 1; \\ 3, 2, 1, & \text{если } s' = 2. \end{cases}$$

Так как внутренние четности начальной и конечной системы противоположны, то разрешены следующие переходы:

$$l = 0 \rightarrow \begin{cases} l' = 1, & s = 0; \\ l' = 1, & s = 1; \\ l' = 3, & s = 2; \\ l' = 1, & s = 2. \end{cases}$$

Амплитуда состоит из четырех слагаемых, каждое из которых содержит ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$M(t) = T_1(\xi_1 \xi_2)(\xi_3 Q^+) + T_2(\xi_2 \xi_3)(\xi_1 Q^-) + T_3(\xi_1 \xi_3)(\xi_2 Q^-) + T_4(\xi_1 Q^-)(\xi_3 Q^+)(\xi_2 Q^-), \quad (2.4)$$

где $Q^\pm = (k_1 \pm k_2)$.

$$6. 1^+ \rightarrow 1^- + 1^-.$$

$$k_1, \xi_1 \quad k_2, \xi_2 \quad k_3, \xi_3$$

Разрешены следующие переходы:

$$l = 0 \rightarrow \begin{cases} l' = 0, & s' = 1; \\ l' = 2, & s' = 1; \\ l' = 2, & s' = 2. \end{cases}$$

Амплитуда состоит из трех независимых комбинаций, каждая из которых содержит ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$M(t) = T_1(\tilde{\xi}_1 k_2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \xi_{2\mu} \xi_{3\nu} k_{2\rho} k_{3\lambda} + T_2(\xi_2 k_3) \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \xi_{3\mu} \tilde{\xi}_{1\nu} k_{2\rho} k_{3\lambda} + T_3(\xi_3 k_2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \tilde{\xi}_{1\mu} \xi_{2\nu} k_{2\rho} k_{3\lambda}. \quad (2.5)$$

$$7. \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-.$$

$p_1 \quad p_2 \quad q$

В системе покоя начальной частицы полный момент конечной системы равен $1/2$, а ее орбитальный момент $l' = 0$ и 1 . Разрешен лишь один переход: $l = 0 \rightarrow l' = 1$. Амплитуда содержит одно слагаемое:

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q). \quad (2.6)$$

$$8. \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 1^-.$$

$p_1 \quad p_2 \quad q, \xi$

В системе покоя начальной частицы, полный момент конечной системы равен $1/2$. Спин конечной системы $s' = 1/2, 3/2$, а ее орбитальный момент

$$l' = \begin{cases} 0, 1, & \text{если } s' = \frac{1}{2}; \\ 2, 1, & \text{если } s' = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Разрешены следующие переходы:

$$l=0 \rightarrow \begin{cases} l' = 1, s' = \frac{1}{2}; \\ l' = 1, s' = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Амплитуда состоит из двух слагаемых ($q = p_2 - p_1$):

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \xi_\mu + T_2 \bar{u}(p_2) \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) u(p_1) q_\mu \xi_\nu. \quad (2.7)$$

$$9. \frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-.$$

$p_1 \quad p_2 \quad q$

Разрешен переход $l = 0 \rightarrow l' = 1$. Амплитуда содержит одну спиновую комбинацию (напомним, что $\frac{3^+}{2}$ -частица описывается псевдоспин-вектором — см. гл. 2, § 1):

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) \tilde{u}_\mu(p_1) q_\mu \tilde{\varphi}^*(q). \quad (2.8)$$

$$10. \frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-.$$

$p_1 \quad p_2 \quad q$

Разрешен один переход: $l=0 \rightarrow l'=2$ ($\frac{3^-}{2}$ -частица описывается спин-вектором—см. гл. 2, § 1)

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 u_\mu(p_1) q_\mu \tilde{\varphi}^*(q). \quad (2.9)$$

$$11. \frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 1^-.$$

$p_1 \quad p_2 \quad k, \xi$

Разрешены переходы:

$$l=0 \rightarrow \begin{cases} l'=1, s'=\frac{1}{2}; \\ l'=1, s'=\frac{3}{2}; \\ l'=3, s'=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Амплитуда состоит из трех спиновых комбинаций

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \tilde{u}_\nu(p_1) \xi_\nu + T_2 \bar{u}(p_2) p_{2\nu} \gamma_5 \tilde{u}_\nu(p_1) [(p_1 + p_2) \xi] + \\ + T_3 \bar{u}(p_2) (\gamma \xi) \gamma_5 p_{2\nu} \tilde{u}_\nu(p_1). \quad (2.10)$$

$$12. \frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{3^+}{2} + 0^-.$$

$p_1 \quad p_2 \quad q$

Разрешены переходы:

$$l=0 \rightarrow \begin{cases} l'=1, s'=\frac{3}{2}; \\ l'=3, s'=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

Амплитуда состоит из двух спиновых комбинаций ($P^\pm = p_1 \pm p_2$):

$$M(t) = [T_1 \tilde{u}_\mu(p_2) \gamma_5 \tilde{u}_\mu(p_1) + T_2 \tilde{u}_\mu(p_2) \gamma_5 P_\nu^- P_\mu^+ \tilde{u}_\nu(p_1)] \tilde{\varphi}^*(q). \quad (2.11)$$

$$13. 2^+ \rightarrow 0^- + 0^-.$$

$p \quad q_1 \quad q_2$

Разрешен переход $l=0 \rightarrow l'=2$, поэтому

$$M(t) = T_1 q_{1\mu} q_{2\nu} \tilde{\varphi}^*(q_1) \tilde{\varphi}^*(q_2) B_{\mu\nu}(p),$$

где $B_{\mu\nu}(p)$ —волновая функция 2^+ -частицы (см. гл. 1, § 8).

$$14. \begin{matrix} 2^+ \\ p \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1^- \\ k \end{matrix} + \begin{matrix} 0^- \\ q \end{matrix}.$$

Разрешен переход $l=0 \rightarrow l'=2$, поэтому

$$M(t) = T \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} Q_\mu^- p_\nu U_\alpha^* \tilde{\Phi}^*(q) B_{\beta\gamma} Q_\gamma^-, \quad (2.12)$$

где $Q^- = k - q$.

§ 3. Инвариантная структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов)

Переходим к построению амплитуд для процессов, обусловленных сильным и электромагнитным взаимодействиями.

Для этого заменим в формулах предыдущего параграфа вектор поляризации вектона вектором поляризации фотона и потребуем, чтобы полученное выражение было градиентно инвариантным.

$$1. \begin{matrix} \gamma \rightarrow 0^- + 0^- \\ k, \varepsilon \quad q_1 \quad q_2 \end{matrix}$$

Выражение для амплитуды запишется так:

$$M = C_\lambda A_\lambda \tilde{\Phi}^*(q_1) \tilde{\Phi}^*(q_2).$$

Из условия Лоренца $k_\lambda A_\lambda = (q_1 + q_2)_\lambda A_\lambda = 0$ следует, что в C_λ могут входить лишь комбинации $(q_1 - q_2)_\lambda$. Однако последние в случае нейтральных мезонов не удовлетворяют требованию симметрии амплитуды по импульсам q_1 и q_2 и должны быть отброшены. Поэтому в наиболее общем случае

$$C_\lambda = a q_{1\lambda} + b q_{2\lambda}.$$

Но в силу градиентной инвариантности

$$C_\lambda k_\lambda = a (q_1 k) + b (q_2 k) = 0.$$

Отсюда следует, что $a = b = 0$.

Следовательно, фотон не может превращаться в два нейтральных мезона.

$$2. \begin{matrix} 1^- \rightarrow \gamma^- + 0^- \\ k_2, \xi \quad k_1, \varepsilon \quad q \end{matrix}$$

Согласно (2.2), амплитуда состоит из одного члена:

$$M(t) = T_1 \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_\mu k_{1\nu} \xi_\alpha k_{2\beta} \tilde{\Phi}^*(q). \quad (3.1)$$

Это выражение градиентно инвариантно: при замене $\varepsilon \rightarrow k_1$ оно обращается в нуль.

$$3. 1^+ \rightarrow \gamma^- + 0^-.$$

$$k_2, \xi, k_1, \varepsilon \quad q$$

Согласно (2.3), амплитуда состоит из двух инвариантных комбинаций, содержащих линейно ε и $\tilde{\xi}$:

$$M(t) = [T_1(k_1 \tilde{\xi})(k_2 \varepsilon) + T_2(\varepsilon \tilde{\xi})] \tilde{\varphi}^*(q).$$

Условие градиентной инвариантности дает

$$T_1(k_1 \tilde{\xi})(k_2 k_1) + T_2(k_1 \tilde{\xi}) = 0.$$

Отсюда $T_2 = -T_1(k_2 k_1)$. Поэтому градиентно инвариантное выражение для амплитуды запишется так:

$$M(t) = T_1 [(k_1 \tilde{\xi})(k_2 \varepsilon) - (\varepsilon \tilde{\xi})(k_2 k_1)] \tilde{\varphi}^*(q). \quad (3.2)$$

$$4. 1^- \rightarrow 1^- + \gamma^-.$$

$$k_1, \xi_1, k_2, \xi_2, k, \varepsilon$$

Заменяя в (2.4) $\xi_3 \rightarrow \varepsilon$ и учитывая требование градиентной инвариантности, получаем

$$M(t) = T_1(\xi_1 \xi_2)(Q^+ \varepsilon) + T_2(\xi_1 Q^-)(\xi_2 Q^-)(\varepsilon Q^+) +$$

$$+ T_3[(\xi_1 \varepsilon)(\xi_2 Q^-) - (\xi_2 \varepsilon)(\xi_1 Q^-)], \quad (3.3)$$

где $Q^\pm = k_1 \pm k_2$.

$$5. \frac{1^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \gamma^-.$$

$$p_1, p_2, k, \varepsilon$$

Согласно (2.7), амплитуда должна содержать две независимые спиновые комбинации:

$$M(t) = \bar{u}(p_2) \left\{ T_1 \gamma_\mu \varepsilon_\mu + T_2 \frac{1}{2} [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu] k_\mu \varepsilon_\nu \right\} u(p_1), \quad (3.4)$$

где $T_1 = Ne$, $T_2 = N\mu$, e , μ — заряд и аномальный магнитный момент бариона, N — нормировочный множитель. Это выражение удовлетворяет требованиям градиентной инвариантности, так как при замене $\varepsilon \rightarrow k = p_1 - p_2$ в случае равных масс барионов ($M_1 = M_2 = M$)

$$\bar{u}(p_2)(\gamma \varepsilon)u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) \gamma_\mu k_\mu u(p_1) = \bar{u}(p_2) [p_{1\mu} \gamma_\mu - p_{2\mu} \gamma_\mu] u(p_1) =$$

$$= \bar{u}(p_2) [M - M] u(p_1) = 0;$$

$$\bar{u}(p_2) [\gamma_\mu k_\mu \gamma_\nu \varepsilon_\nu - \gamma_\nu \varepsilon_\nu \gamma_\mu k_\mu] u(p_1) \rightarrow \bar{u}(p_2) [\gamma_\mu k_\mu \gamma_\nu k_\nu -$$

$$- \gamma_\nu k_\nu \gamma_\mu k_\mu] u(p_1) = 0.$$

В случае виртуального фотона надо в (3.4) заменить константы ϵ и μ соответственно электрическим и магнитным факторами F_1 и F_2 :

$$M(t) = N\bar{u}(p_2) \left\{ F_1(t) \gamma_\mu \epsilon_\mu + F_2(t) \frac{1}{2} [\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu] k_\mu \epsilon_\nu \right\} u(p_1). \quad (3.4')$$

$$6. \frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \gamma^-. \\ p_1 \quad p_2 \quad k, \epsilon$$

Согласно (2.10), градиентно не инвариантная амплитуда состоит из трех спиновых комбинаций:

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \tilde{u}_\nu(p_1) \epsilon_\nu + T_2 \bar{u}(p_2) p_{2\nu} \gamma_5 \tilde{u}_\nu(p_1) ((p_1 + p_2)_\mu \epsilon_\mu) + \\ + T_3 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \gamma_\mu \epsilon_\mu p_{2\nu} \tilde{u}_\nu(p_1). \quad (3.5)$$

Заменим в этом выражении $\epsilon_\mu \rightarrow k_\mu = (p_1 - p_2)_\mu$ и приравняем полученный результат нулю. Так как

$$u_\mu(p_1) p_{1\mu} = 0, \quad \bar{u}(p_2) (p_2 \gamma) = M_2 \bar{u}(p_2), \quad u(p_1) (p_1 \gamma) = M_1 u(p_1),$$

то получим

$$-T_1 \bar{u}(p_2) \gamma_5 p_{2\nu} \tilde{u}_\nu(p_1) + T_2 \bar{u}(p_2) \gamma_5 p_{2\nu} \tilde{u}_\nu(p_1) (M_1^2 - M_2^2) - \\ - T_3 \bar{u}(p_2) \gamma_5 p_{2\nu} \tilde{u}_\nu(p_1) (M_1 - M_2) = 0$$

$$\text{или } -T_1 + T_2 (M_1^2 - M_2^2) - T_3 (M_1 - M_2) = 0.$$

Находя отсюда T_1 и подставляя его в (3.5), получаем градиентно инвариантное выражение для амплитуды

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) [(\gamma \epsilon) \gamma_5 k_\nu - (\gamma k) \gamma_5 \epsilon_\nu] \tilde{u}_\nu(p_1) + \\ + T_2 \bar{u}(p_2) [(p_2 k) \epsilon_\nu - (p_2 \epsilon) k_\nu] \gamma_5 \tilde{u}_\nu(p_1). \quad (3.6)$$

$$7. \frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + \gamma^-.$$

$$M(t) = T_1 \bar{u}(p_2) [(M_1^2 - M_2^2) \epsilon_\nu + p_{2\nu} (p_1 + p_2)_\mu \epsilon_\mu] u_\nu(p_1) + \\ + T_2 \bar{u}(p_2) [(\gamma \epsilon) p_{2\nu} - (M_1 - M_2) \epsilon_\nu] u_\nu(p_1).$$

$$8. \gamma^- \rightarrow \gamma^- + 0^-. \\ k_1, \epsilon_1 \quad k_2, \epsilon_2 \quad q$$

Согласно (2.2) амплитуда состоит из одного члена:

$$M(t) = T \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{1\mu} k_{1\nu} \epsilon_{2\alpha} k_{2\beta} \tilde{\Psi}^*(q). \quad (3.7)$$

Эта амплитуда градиентно инвариантна и симметрична относительно перестановки двух фотонов.

$$9. 1^- \rightarrow \gamma^- + \gamma^- \\ q \quad k_1 \quad k_2$$

Выражение для амплитуды запишется так:

$$M = C_{\lambda\mu\nu} U_\lambda A_\mu A_\nu.$$

Из условия Лоренца

$$q_\lambda u_\lambda = (k_1 + k_2) U_\lambda = 0$$

следует, что в $C_{\lambda\mu\nu}$ могут входить лишь комбинации $(k_1 - k_2)$. Однако последние не удовлетворяют требованию симметрии амплитуды по импульсам k_1 и k_2 и должны быть отброшены. Поэтому в наиболее общем случае

$$C_{\lambda\mu\nu} = a\delta_{\lambda\nu} k_{2\mu} + b\delta_{\lambda\mu} k_{1\nu}.$$

Но в силу градиентной инвариантности

$$k_{1\mu} C_{\lambda\mu\nu} = a\delta_{\lambda\nu} (k_1 k_2) + b(k_{1\lambda} k_{1\nu}) = 0;$$

$$k_{2\nu} C_{\lambda\mu\nu} = ak_{2\lambda} k_{2\mu} + b\delta_{\lambda\mu} (k_1 k_2) = 0.$$

Положив здесь $\lambda = \nu$ и $\lambda = \mu$ и просуммировав по λ , найдем $a = b = 0$. Следовательно, вектон не может распасться на два фотона.

$$10. 2^+ \rightarrow 0^- + \gamma. \\ p \quad q \quad k, \varepsilon$$

Согласно (2.12), градиентно инвариантное выражение для амплитуды запишется так:

$$M(t) = T_1 \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_\mu p_\nu k_\alpha B_{\beta\gamma} k_\gamma \tilde{\varphi}^*(q).$$

§ 4. Изотопическая структура амплитуды

Изотопическую структуру амплитуды можно определить тем же методом, который использовался при решении аналогичной задачи, для процессов с участием четырех частиц (см. гл. 10, § 7 и 8).

Сильное взаимодействие. В этом случае имеет место изотопическая инвариантность, и поэтому для определения изотопической структуры амплитуды надо построить независимые изоскаляры из изооператоров и изоволновых функций. Приведем выражения для изоструктуры амплитуд некоторых процессов:

$$1. \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + 1$$

$$M^I = T_i^1 \bar{\psi} \tau_\rho \psi \bar{\omega}_\rho.$$

$$2. \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} + 0.$$

$$M^I = T_i^1 \bar{\psi} \psi \varphi^{*I}.$$

$$3. 1 \rightarrow 1 + 0.$$

$$M^I = T_i^1 (\omega_1 \omega_2^*) \varphi^{*I}.$$

Электромагнитное взаимодействие адронов. В этом случае изотопическая инвариантность не имеет места и изотопическая амплитуда будет суммой изоскаляра и изовектора (см. гл. 10, § 5 и 8). Выпишем изоструктуру амплитуд некоторых процессов, причем

$$M^I = \langle S_0 \rangle + \langle V_3 \rangle.$$

$$1. [\gamma + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$$\langle V_3 \rangle = T_i^1 \bar{\psi} \tau_3 \psi \omega_3, \quad \langle S_0 \rangle = T_i^2 \bar{\psi} \psi.]$$

$$2. \gamma + 1 \rightarrow 1.$$

$$\langle V_3 \rangle = T_i^1 [\omega_1^1 \bar{\omega}_2^2]_3 \omega_3, \quad \langle S_0 \rangle = T_i^2 (\omega_1^1 \bar{\omega}_2^2).]$$

$$3. \gamma + 0 \rightarrow 0.$$

$$\langle V_3 \rangle = 0, \quad \langle S_0 \rangle = T_i^2 \varphi \varphi^{*I}.$$

Наконец, приведем выражения для некоторых найденных в § 2 и 3 амплитуд процессов с учетом изотопических свойств

$$1. N \rightarrow N + \pi.$$

$$M^{SI}(t) = g_{NN\pi} \bar{\psi}_2 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \tau_\rho u(p_1) \psi_1 \bar{\omega}_\rho. \quad (4.1)$$

$$2. N \rightarrow N + \gamma.$$

$$M^{SI} = \bar{\psi}_2 \bar{u}(p_2) \left[\hat{e} \gamma_\mu + \frac{1}{2} \hat{\mu} \sigma_{\mu\nu} k_\nu \right] u(p_1) \psi_1 \varepsilon_\mu, \quad (4.2)$$

где $\hat{e} = e \frac{1 + \tau_3}{2}$, e — электрический заряд и $\hat{\mu} = \mu'_p \frac{1 + \tau_3}{2} + \mu_n \frac{1 - \tau_3}{2}$, μ'_p и μ_n — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона.

§ 5. Выражение для вероятности распада

По аналогии с формулой (4.8), гл. 3 нормированное выражение для вероятности распада одной частицы на две (рис. 12.1) запишется так

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{d\mathbf{p}_2}{2E_1 2E_2} \cdot \frac{d\mathbf{p}_3}{2E_3} \delta(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1). \quad (5.1)$$

В системе покоя начальной частицы (в данном случае совпадающей с с.ц.м. конечных частиц), когда $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}$ и $E_2 + E_3 = m$ (где m — масса начальной частицы), имеем

$$dw = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{4E_2 E_3} \delta(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \delta(E_2 + E_3 - m) d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3. \quad (5.2)$$

Проинтегрируем эту формулу по $d\mathbf{p}_2$ и $d\mathbf{p}_3$. Интегрирование по $d\mathbf{p}_3$ устраняется с помощью $\delta(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)$. Подставив в (5.2)

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}^2 d|\mathbf{p}| d\Omega = |\mathbf{p}| d\Omega \frac{E_2 E_3 d(E_2 + E_3)}{E_2 + E_3}, \quad (5.3)$$

получим после интегрирования по $d(E_2 + E_3)$ искомое выражение для вероятности распада одной частицы на две

$$dw = \frac{1}{32\pi^2 m^2} |M_{fi}|^2 |\mathbf{p}| d\Omega. \quad (5.4)$$

Найдем, например, вероятность распада вектона на два одинаковых псевдоскалярных мезона: $1^- \rightarrow 0^- + 0^-$. Подставим в (5.4) выражение (2.1) для амплитуды и просуммируем с помощью (5.6), гл. 3 по поляризациям вектона. Это дает в с.ц.м. конечных частиц ($q_1 = -q_2 = \mathbf{q}$)

$$\begin{aligned} dw &= \frac{g^2}{32\pi^2 m^2} |\mathbf{q}| (q_1 - q_2)_\mu (q_1 - q_2)_\nu \frac{1}{3} \sum_\lambda \xi_\mu^\lambda \xi_\nu^\lambda = \\ &= \frac{g^2}{96\pi^2 m^2} |\mathbf{q}| (q_1 - q_2)_\mu (q_1 - q_2)_\nu \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right) = \\ &= \frac{g^2}{96\pi^2 m^2} |\mathbf{q}| (q_1 - q_2)^2 = \frac{g^2}{24\pi^2 m^2} |\mathbf{q}|^3 = \frac{g^2}{24\pi^2 m^2} \left(\frac{m^2 - 4\mu^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

потому что $\mathbf{q}^2 = \frac{m^2 - 4\mu^2}{4}$ (последнее следует из соотношения

$m = 2(q^2 + \mu^2)^{\frac{1}{2}}$, m, μ — массы векторного и псевдоскалярного мезонов).

Рассмотрим еще процесс распада псевдоскалярного мезона на два фотона: $0^- \rightarrow \gamma^- + \gamma^-$. Имея в виду (3.7) и формулы (2.1) гл. 2 и (5.7) гл. 3, найдем выражение для вероятности распада в системе покоя начальной частицы

$$dw = \frac{g_{\pi\gamma\gamma}^2}{32\pi^2\mu^2} \sum_{\text{спин}} |(\epsilon[k'\epsilon']) + (\epsilon[k\epsilon])|^2 = \frac{g_{\pi\gamma\gamma}^2 \mu^3}{64\pi}, \quad (5.6)$$

где μ — масса мезона.

ГЛАВА 13

УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ И УНИТАРНАЯ СТРУКТУРА АМПЛИТУДЫ ПРОЦЕССА *

§ 1. Унитарные мультиплеты адронов

Как мы уже говорили (гл. 10, § 1), адроны группируются в определенные изотопические мультиплеты.

Опыт показывает, что наряду с изотопическими мультиплетами элементарных частиц существуют более сложные мультиплеты, получившие название унитарных. Так, барионы (пространственный спин $1/2$, четность положительная, т. е. $(1/2)^+$) образуют унитарный октет, барионные резонансы $(3/2)^+$ — унитарный декуплет (табл. 13.1),

Таблица 13.1

Мультиплеты барионов

| $Y=S+B$ | | 1 | | 0 | | -1 | -2 |
|---------|---------|--------------|--------------|--------------------|-------------------|-----------------|----------|
| | | $1/2$ | $3/2$ | 0 | 1 | $1/2$ | 0 |
| S^P | $1/2^-$ | N_{1550}^* | | Λ_{1670}^* | | | |
| | $1/2^+$ | N | | Λ | Σ | Ξ | |
| | $3/2^+$ | | N_{1240}^* | | Σ_{1385}^* | Ξ_{1530}^* | Ω |
| | $3/2^-$ | N_{1520}^* | | Λ_{1690}^* | Σ_{1660}^* | $\Xi_{1820}^*?$ | |

а псевдоскалярные (0^-), векторные (1^-) и 2^+ -мезоны группируются в девятки (нонеты), состоящие из унитарного октета и синглета (табл. 13.2) и т. д.

* Основные понятия теории групп, которые необходимы при чтении этой главы, изложены в Дополнении IV.

Мультиплеты бозонов

| $Y=S$ | 0 | | ± 1 |
|-------------|----------------|--|------------------|
| s^P | $I=1$ | $I=0$ | $I=1/2$ |
| $0^-, C=+1$ | π | $\begin{Bmatrix} \eta \\ X^0 \end{Bmatrix}$ | K |
| $0^+, C=+1$ | δ_{960} | $\begin{Bmatrix} \sigma_{750} \\ S_{1080}^* \end{Bmatrix}$ | $(K \pi)_{1100}$ |
| $1^-, C=-1$ | ρ | $\begin{Bmatrix} \omega \\ \varphi \end{Bmatrix}$ | K_{890}^* |
| $1^+, C=+1$ | A_1 | $\begin{Bmatrix} D \\ E \end{Bmatrix}$ | K_{1230}^* |
| $1^+, C=-1$ | B | | K_{1320}^* |
| $2^+, C=+1$ | A_2 | $\begin{Bmatrix} f_{1200} \\ f'_{1515} \end{Bmatrix}$ | K_{1420}^* |

Унитарные мультиплеты, в свою очередь, состоят из изотопических мультиплетов с различными значениями изотопического спина I и странности S (или гиперзаряда $Y = B + S$). Так, в октет барионов и мезонов входят два изотопических дублета ($I = 1/2, Y = +1$ и $I = 1/2, Y = -1$), изотопические триплет ($I = 1, Y = 0$) и синглет ($I = 0, Y = 0$), в декуплет барионных резонансов — изотопические кватер ($I = 3/2, Y = 1$), триплет ($I = 1, Y = 0$), дублет ($I = 1/2, Y = -1$) и синглет ($I = 0, Y = -2$). Иначе говоря, каждый унитарный мультиплет имеет строго определенную изотопическую структуру.

Следовательно, каждый унитарный мультиплет характеризуется набором двух квантовых чисел: I и Y , для которых имеют место законы сохранения (если учитывать только сильное взаимодействие).

Как мы уже говорили (гл. 10, § 12), вырождению частиц по заряду соответствует инвариантность относительно группы SU_2 . Эта инвариантность приводит к различным изотопическим мультиплетам, простейшие из которых реализуются в природе.

Допустим, что имеет место вырождение не только по заряду, но и по гиперзаряду. Такому вырождению будет соответствовать другая, более высокая инвариантность. С этой инвариантностью можно связать существование унитарных мультиплетов.

В случае изотопической инвариантности имело место вырождение по одной переменной. Поэтому изотопической инвариантности

соответствовала группа вращений, или группа SU_2 , т. е. группа первого ранга. Других групп первого ранга нет.

Вырождению по двум переменным I_3 и Y будут соответствовать группы второго ранга (две сохраняющиеся величины, два оператора Казимира).

Математиками было показано, что существует лишь четыре группы второго ранга:

O_4 — группа вращений в четырехмерном пространстве;

O_5 — группа вращений в пятимерном пространстве;

SU_3 — группа унитарных унимодулярных преобразований в пространстве трех измерений;

G_2 — одна из так называемых исключительных групп.

Перечисленные группы приводят к различным мультиплетам (табл. 13.3). Выяснить, какая из этих групп имеет отношение к действительности, может только опыт.

Определенный изотопический мультиплет описывается изоволновой функцией, которая является одним из неприводимых представлений группы трехмерных вращений или изоморфной ей группы SU_2 . Число компонент (или размерность) изоволновой функции равняется числу частиц в изомultiплете.

Аналогичным образом определенный унитарный мультиплет можно описать многокомпонентной унитарной волновой функцией, которая будет неприводимым представлением одной из перечисленных выше групп второго ранга. Размерность этого представления (или число компонент) по-прежнему будет равна числу частиц, входящих в мультиплет. Но при этом представление должно удовлетворять еще одному важному требованию — оно должно содержать определенные изотопические мультиплеты (именно те, которые наблюдаются на опыте).

Итак, задача заключается в следующем. Надо найти неприводимые представления (мультиплеты) каждой из перечисленных выше групп второго ранга, разбить унитарные мультиплеты на изотопические мультиплеты и попробовать расположить имеющиеся частицы по мультиплетам.

Как показывает анализ, лучше всего согласуются с имеющимися опытными данными предсказания SU_3 -симметрии. Именно поэтому мы остановимся на ней подробнее.

Если выключить все взаимодействия, кроме сильного, то массы частиц, входящих в мультиплет, строго одинаковы. Учет электромагнитного взаимодействия ведет к расщеплению масс внутри изотопических мультиплетов, тем самым снимается вырождение по I_3 и нарушается изотопическая инвариантность. Чтобы объяснить разницу масс частиц, входящих в различные изотопические мультиплеты данного унитарного мультиплета, надо ввести дополнительное взаимодействие; оно получило название полусильного. Полусильное взаимодействие ведет к снятию вырождения частиц по Y , т. е. к нарушению унитарной симметрии («сломанная унитарная

Группы второго ранга и их характеристики

| Группа | Размерность унитарного мультиплетта | Размерность изотопического мультиплетта | I | $Y = B + S$ |
|--------|-------------------------------------|---|----------|-------------|
| SU_3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 3 | {2 1 | 1/2 | 1 |
| | | | 0 | 0 |
| | 6 | {1 2 3 | 0 | 2 |
| | | | 1/2 | 1 |
| | | | 1 | 0 |
| | | | 1/2 | 1 |
| | 8 | {3; 1 2 | 1; 0 | 0 |
| | | | 1/2 | -1 |
| | | | 0 | 2 |
| | 10 | {2 3 4 | 1/2 | 1 |
| | | | 1 | 0 |
| | | | 3/2 | -1 |
| | | | 1 | 2 |
| | 15 | {3 4; 2 3; 1 2 | 3/2; 1/2 | 1 |
| 1, 0 | | | 0 | |
| 1/2 | | | -1 | |
| 1 | | | 2 | |
| 27 | {3 4; 2 5; 3, 1 4; 2 3 | 3/2; 1/2 | 1 | |
| | | 2; 1; 0 | 0 | |
| | | 3/2; 1/2 | -1 | |
| | | 1 | -2 | |
| G_2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 7 | {2 3 | 1/2 | ± 1 |
| | | | 1 | 0 |
| | 14 | {1 4 3; 1 | 0 | ± 2 |
| 3/2 | | | ± 1 | |
| O_5 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| | 4 | {2 1 | 1/2 | ± 1 |
| | | | 0 | ± 2 |
| | 5 | {3 2 | 1 | 0 |
| | | | 1/2 | ± 1 |
| | 5 | {1 1 | 0 | 0 |
| | | | 0 | ± 2 |
| 10 | {2 3; 1 | 1/2 | ± 1 | |
| | | 1; 0 | 0 | |

симметрия»). Отклонение массы ΔM частицы от среднего значения \bar{M} масс частиц, например октета барионов, равно $1150 Mэв$, составляет $110 Mэв$, т. е. $\Delta M/M \sim 10\%$. Иначе говоря, полусильное взаимодействие примерно в 10 раз слабее сильного взаимодействия.

Мы сначала рассмотрим предельный случай точной SU_3 -симметрии, а затем выясним, к каким изменениям приводит учет полусильного взаимодействия.

§ 2. SU_3 -Симметрия

Унитарная SU_3 -симметрия означает, что сильное взаимодействие элементарных частиц инвариантно относительно группы SU_3 -преобразований.

Рассмотрим подробнее группу SU_3 — ее алгебру Ли, неприводимые представления (унитарные волновые функции), выражения для амплитуд, удовлетворяющих требованию SU_3 -инвариантности; установим следствия, вытекающие из SU_3 -инвариантности, и сравним их с имеющимися опытными данными.

Алгебра Ли группы SU_3 . Каждому независимому вещественному параметру группы соответствует генератор. Подсчитаем число независимых вещественных параметров группы Ли, а следовательно, число генераторов алгебры Ли группы SU_3 . Группе Ли соответствует матрица a_{ik} с n^2 комплексными или $2n^2$ вещественными числами. Требование унитарности

$$\sum a_{ik}^* a_{kj} = \delta_{ij}$$

налагает на элементы матрицы n^2 условий, а требование унимодулярности $\det a_{ik} = 1$ — еще одно условие. Таким образом, матрица группы SU_n содержит $n^2 - 1$ независимых вещественных параметров, а алгебра Ли группы SU_n состоит из $N = n^2 - 1$ генераторов. Отсюда следует, что алгебра Ли группы SU_3 состоит из восьми генераторов. Обычно эти генераторы выбираются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \lambda_2 &= \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \lambda_3 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\ \lambda_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \lambda_5 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{vmatrix}; & \lambda_6 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; & (2.1) \\ \lambda_7 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}; & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Матрицы λ_k удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\lambda_k, \lambda_j] = \lambda_k \lambda_j - \lambda_j \lambda_k = 2if_{kjn} \lambda_n. \quad (2.2)$$

Константы f_{kln} полностью антисимметричны по отношению к перестановке индексов. Отличные от нуля независимые константы f_{kln} принимают следующие значения:

$$f_{123} = 1, f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \quad (2.3)$$

$$f_{548} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Матрицы λ_k нормированы так, что

$$\text{Sp}(\lambda_k \lambda_j) = 2\delta_{kj}. \quad (2.4)$$

Кроме того, матрицы λ_k удовлетворяют следующим антикоммутиационным соотношениям:

$$\{\lambda_k, \lambda_j\} = \lambda_k \lambda_j + \lambda_j \lambda_k = 2d_{kln} \lambda_n + \frac{4}{3} \delta_{kj}. \quad (2.5)$$

Здесь константы d_{kln} полностью симметричны относительно перестановки индексов; отличные от нуля d_{kln} равны:

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{334} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Выбор генераторов в виде (2.1) удобен тем, что первые три матрицы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ являются матрицами Паули (они образуют алгебру Ли группы SU_2). Иначе говоря, в группе SU_3 содержится как подгруппа группа SU_2 .

Матрицы λ_3 и λ_8 коммутируют между собой, т. е. SU_3 действительно является группой второго ранга. Из генераторов группы SU_3 можно образовать два оператора Казимира; это — другая формулировка того обстоятельства, что ранг группы SU_3 равен двум.

Неприводимые представления группы SU_3 . Найдем неприводимые представления группы SU_3 . Простейшим неприводимым представлением группы SU_3 является унитарный скаляр. Он описывает частицы, являющиеся унитарными синглетами.

Далее следует унитарный контравариантный спинор

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Он описывает унитарный триплет частиц.

Неприводимым также является ковариантный спинор:

$$\psi_a = (\psi_1 \psi_2 \psi_3). \quad (2.8)$$

Эрмитово сопряженный ковариантный спинор $\bar{\psi}_\alpha$ преобразуется как контравариантный: $\bar{\psi}_\alpha = \psi^\alpha$. Так как эрмитово сопряженная волновая функция соответствует античастицам (см. гл. 4, § 2), то ковариантный спинор (2.8) описывает триплет античастиц*.

В отличие от группы SU_2 , ко- и контравариантные спиноры группы SU_3 являются существенно различными. Поэтому представления группы SU_3 характеризуются двумя числами $D(p, q)$, соответствующими числу контравариантных (p) и ковариантных (q) индексов. Названные выше представления запишутся так: $D(0, 0)$, $D(1, 0)$, $D(0, 1)$.

Более сложные представления группы SU_3 являются, вообще говоря, приводимыми**.

Чтобы найти неприводимые представления, надо разбить тензор на антисимметричные и симметричные части и выделить из последних скаляры (синглеты), образуемые суммой диагональных элементов (т. е. $\text{Sp } \psi$).

1. Тензор ψ_i^k имеет девять компонент

$$\begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 & \psi_1^3 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 & \psi_2^3 \\ \psi_3^1 & \psi_3^2 & \psi_3^3 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

След этого тензора $\text{Sp } \psi_i^k = \psi_1^1 + \psi_2^2 + \psi_3^3$ является скаляром и не меняется при преобразованиях. Выделяя из (2.9) след, получаем уже неприводимый восьмикомпонентный тензор

$$\begin{pmatrix} \psi_1^1 + \psi_3^3 & \psi_1^2 & \psi_1^3 \\ \psi_2^1 & -\psi_1^1 + \psi_3^3 & \psi_2^3 \\ \psi_3^1 & \psi_3^2 & -2\psi_3^3 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Иначе говоря, тензор ψ_i^k , если иметь в виду размерность неприводимых представлений, запишется в виде прямой суммы*** (см. Дополнение IV): $9 = 1 + 8$.

Тензор ψ_i^k можно рассматривать как прямое произведение (см. Дополнение V) двух спиноров: ψ_i и ψ^k . Как видно, это произведение приводимо (хотя ψ_i и ψ^k неприводимы) и распадается на два неприводимых представления. Следовательно, прямое произведение двух тензоров ψ_i и ψ^k (или тензор ψ_i^k) распадается на следующие неприводимые представления: $3 \times \bar{3} = 1 + 8$

* Обычно эрмитово сопряжение унитарных функций обозначается чертой (а не +).

** Размерность представления $D(p, q)$ равна $\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)$.

*** В этой главе мы будем обозначать прямую сумму и прямое произведение значками + и \times , а не \oplus и \otimes .

или

$$D(1, 0) \times D(0, 1) = D(0, 0) + D(1, 1). \quad (2.11)$$

Как видно, среди неприводимых представлений группы SU_3 есть восьмимерное; его можно использовать для описания октетов частиц.

Тензор ψ_i^k можно представить в виде восьмивектора V_1, V_2, \dots, V_8 . Связь между компонентами тензора (2.10) и компонентами V_1, V_2, \dots, V_8 может быть найдена с помощью матриц λ , определяемых (2.1). Умножая скалярно λ на V , получаем

$$\psi_i^k = \lambda V = \begin{vmatrix} V_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_8 & V_1 - iV_2 & V_4 - iV_5 \\ V_1 + iV_2 & -V_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_8 & V_6 - iV_7 \\ V_4 + iV_5 & V_6 + iV_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} V_8 \end{vmatrix}, \quad (2.12)$$

т. е. $\psi_1^2 = V_1 - iV_2$ и т. д.

Иначе говоря, для описания октета частиц можно пользоваться либо смешанным тензором второго ранга, либо восьмивектором.

2. Тензор ψ_{ik} содержит девять компонент: шесть симметричных $\psi_{11}, \psi_{22}, \psi_{33}, \psi_{12} + \psi_{21}, \psi_{13} + \psi_{31}, \psi_{23} + \psi_{32}$ и три антисимметричных $\psi_{12} - \psi_{21}, \psi_{13} - \psi_{31}, \psi_{23} - \psi_{32}$. Поэтому*

$$\bar{3} \times \bar{3} = 3 + \bar{6}$$

или

$$D(0, 1) \times D(0, 1) = D(1, 0) + D(0, 2).$$

Аналогичным образом получим для тензора ψ^{ik}

$$3 \times 3 = \bar{3} + 6 \quad (2.13)$$

или

$$D(1, 0) \times D(1, 0) = D(0, 1) + D(2, 0).$$

3. Тензор ψ_i^{jk} содержит 27 компонент. Среди них имеются 18 симметричных по i и k :

$$[\psi^{11} + \psi^{22} + \psi^{33} + (\psi^{12} + \psi^{21}) + (\psi^{23} + \psi^{32}) + (\psi^{13} + \psi^{31})] [\psi_1 + \psi_2 + \psi_3].$$

* Если учесть, что антисимметричный ковариантный спинор второго ранга эквивалентен контравариантному спинору первого ранга

$$\psi^i = \varepsilon^{ijk} \psi_{[jk]}; \quad (\text{кроме того, } \psi_i = \varepsilon_{ijk} \psi^{[jk]}).$$

из которых независимы 15, так как равны нулю три их следа:

$$(\psi_1^{1k} + \psi_2^{2k} + \psi_3^{3k}) = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Среди компонент ψ_l^{ik} имеется также девять антисимметричных по i, k

$$[(\psi^{12} - \psi^{21}) + (\psi^{13} - \psi^{31}) + (\psi^{23} - \psi^{32})] (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3),$$

из которых независимы шесть, так как равны нулю три их следа (2.14).

Следовательно, тензор ψ_l^{ik} , или произведение спиноров ψ^i, ψ^k, ψ_l , распадается на следующие неприводимые представления:

$$3 \times 3 \times \bar{3} = 3 \times (1 + 8) = 3 + 3 + \bar{6} + 15 \quad (2.15)$$

или

$$D(1, 0) \times D(1, 0) \times D(0, 1) = D(1, 0) + D(1, 0) + D(0, 2) + D(2, 1).$$

4. Тензор третьего ранга ψ^{ikl} содержит 27 компонент. Среди них имеется десять компонент, симметричных по всем трем индексам:

$$\psi^{[ijk]} = \frac{1}{6} (\psi^{ijk} + \psi^{jik} + \psi^{kji} + \psi^{kij} + \psi^{ikj} + \psi^{ikj}),$$

одна компонента, антисимметричная по всем трем значкам:

$$\psi^{[ijk]} = \frac{1}{6} (\psi^{ijk} - \psi^{jik} + \psi^{kji} - \psi^{kij} + \psi^{ikj} - \psi^{ikj}),$$

восемь компонент, симметричных по i, j и антисимметричных по j, k :

$$\psi^{[i[j]k]} = \frac{1}{3} (\psi^{ijk} + \psi^{jik} - \psi^{ikj} - \psi^{kij}),$$

восемь компонент, антисимметричных по i, j и симметричных по j, k :

$$\psi^{[i\{j\}k]} = \frac{1}{3} (\psi^{ijk} + \psi^{ikj} - \psi^{jik} - \psi^{kij}).$$

Следовательно, тензор ψ^{ikl} , или произведение трех тензоров ψ^i, ψ^k, ψ^l , распадается на следующие неприводимые представления:

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10 \quad (2.16)$$

или

$$D(1, 0) \times D(1, 0) \times D(1, 0) = D(0, 0) + D(1, 1) + D(1, 1) + D(3, 0).$$

Как видно, среди неприводимых представлений группы SU_3 имеется десятимерное; его можно использовать для описания декуплетов частиц.

Аналогичным образом можно найти произведение неприводимых представлений некоторых других тензоров; они приведены в табл. 13.4.

Разбиение на неприводимые представления можно произвести и другим методом. Для этого надо воспользоваться тем, что у группы SU_3 есть два инвариантных тензора: δ_i^k — тензор Кронекера, ϵ_{ikl} (или ϵ^{ikl}) — полностью антисимметричный тензор. Действительно, эти тензоры преобразуются так:

$$\begin{aligned}\delta_i^{\prime k} &= U_i^+{}^j U_j^k \delta_i^l = \\ &= U_i^+{}^l U_l^k = (UU^+)_i^k;\end{aligned}$$

$$\epsilon^{\prime ikl} = U_p^i U_q^k U_r^l \epsilon^{pqr} = \det U \epsilon^{ikl}.$$

Используя в первой формуле условие $(UU^+)_i^k = \delta_i^k$, а во второй — условие $\det U = 1$, получаем

$$\delta_i^{\prime k} = \delta_i^k; \quad \epsilon^{\prime ikl} = \epsilon^{ikl}.$$

Умножение произвольного приводимого тензора на δ_i^k и ϵ_{ikl} дает снова тензор, но с меньшим числом компонент. Тем самым исходное приводимое представление сведется к представлению меньшей размерности. Продолжая этот процесс, мы приходим в конце

Таблица 13.4

Умножение неприводимых представлений SU_3

| | 3 | 6 | 8 | 10 | 10 |
|-----|-----|----------|----------------|-------------|-------------|
| 3 | | | | | |
| 3+6 | 1+8 | 8+10 | 15+6+3 | 15'+15 | 24+6 |
| | 3+6 | 3+15 | 15+6+3 | 24+6 | 15'+15 |
| | | 6+15'+15 | 24+15+6+3 | 24+21+15 | 42+15+3 |
| | | | 24+15+6+3 | 42+15+3 | 24+21+15 |
| | | | 1+8+8+10+10+27 | 8+10+27+35 | 8+10+27+35 |
| | | | | 10+27+28+35 | 1+8+27+64 |
| | | | | | 10+27+28+35 |
| | | | | | 10 |
| | | | | | 10 |
| | | | | | 6 |
| | | | | | 6 |
| | | | | | 8 |
| | | | | | 8 |
| | | | | | 10 |
| | | | | | 10 |

концов к неприводимым представлениям. Очевидно, тензор будет неприводим в том случае, если умножение его на все три тензора δ_i^k , ε_{ikl} , ε^{ikl} даст нуль. Если учесть, что произведение симметричного тензора на полностью антисимметричный тензор ε_{ikl} или ε^{ikl} равно нулю, то это правило можно сформулировать по-другому: неприводимый тензор должен быть симметричным отдельно по верхним и нижним индексам, а его след (умножение на δ_i^k) должен обращаться в нуль.

Рассмотрим, например, тензор ψ_{lm}^{ik} , равный произведению тензоров ψ_i^i и ψ_m^k . Неприводимые представления получатся, если произвести:

1) двойное суммирование (и по i , m и по l , k) $\psi_i^i \psi_i^i$ (скаляр, одна компонента);

2) одно суммирование (либо по i и m , либо по l и k) и обратиться след в нуль:

$$\psi_i^i \psi_i^k - \frac{1}{3} \delta_i^k \psi_n^i \psi_i^n \text{ и } \psi_i^i \psi_m^l - \frac{1}{3} \delta_i^m \psi_n^i \psi_i^n \text{ (каждая по восемь компонент);}$$

3) умножение на тензор ε_{ikp} и симметризацию по индексам p , l , m

$$D_{plm} = \varepsilon_{ikp} \psi_{lm}^{ik} \text{ (десять компонент);}$$

4) умножение на ε^{imp} и симметризацию по p , i , k

$$D^{pik} = \varepsilon^{imp} \psi_{lm}^{ik} \text{ (десять компонент);}$$

5) симметризацию по верхним и нижним индексам

$$\psi_{\{im\}}^{\{ik\}} = \psi_i^i \psi_m^k + \psi_m^i \psi_i^k + \psi_i^k \psi_m^i + \psi_m^k \psi_i^i$$

и обратиться след в нуль

$$\psi_{\{im\}}^{\{ik\}} = \frac{1}{6} \left(\delta_l^i \psi_{\{rm\}}^{\{rk\}} + \delta_m^i \psi_{\{rl\}}^{\{rk\}} + \delta_l^k \psi_{\{rm\}}^{\{ri\}} + \delta_m^k \psi_{\{rl\}}^{\{ri\}} \right).$$

Итак,

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \overline{10} + 27 \quad (2.17)$$

или

$$D(1, 1) \times D(1, 1) = D(0, 0) + D(1, 1) + D(1, 1) + D(3, 0) + \\ + D(0, 3) + D(2, 2).$$

Изотопическая структура мультиплетта. Выясним, какие изотопические мультиплеты могут входить в данный унитарный мультиплет. Рассмотрим триплет частиц. Две его компоненты образуют изотопический спинор с изоспином $I = 1/2$, а третья — изотопический синглет с изоспином $I = 0$, т. е. изотопическую структуру унитарного триплетта можно изобразить так: $3 = 2 + 1$. Тогда изоструктура произведения двух унитарных триплетов будет выглядеть следующим образом:

$$3 \times 3 = \left(\frac{1}{2} + 0\right) \times \left(\frac{1}{2} + 0\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (00) = \\ = 3 + 1 + 2 + 2 + 1'$$

Последнее слагаемое соответствует унитарному синглету, а остальные войдут в унитарный октет, состоящий из триплетта, двух дублетов и синглета. Аналогичным образом можно найти изотопическую структуру более сложных унитарных мультиплетов.

Мультиплеты SU_3 -симметрии. Из табл. 13.3 видно, что SU_3 -симметрия предсказывает целый ряд мультиплетов частиц с вполне определенной размерностью и изотопической структурой. Очень важно, что среди этих мультиплетов есть именно те, которые наблюдаются на опыте.

Частицы, образующие унитарный синглет, описываются с помощью однокомпонентного SU_3 -скаляра. Такой частицей является, например, ω^0 -мезон.

Для описания унитарного октета частиц используем восьмимерное представление группы SU_3 . Тогда обычно октет барионов представляют в виде такой матрицы:

$$B = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \Lambda^0 \end{vmatrix}. \quad (2.18)$$

Коэффициенты в матрице выбраны так, чтобы в выражении

$$\text{Sp } \bar{B}B = \bar{p}p + \bar{n}n + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \bar{\Sigma}^- \Sigma^- + \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \bar{\Xi}^- \Xi^- + \bar{\Lambda} \Lambda$$

все коэффициенты были бы равны 1 и чтобы $\text{Sp } B = 0$.

Аналогично выглядят октеты для псевдоскалярных мезонов

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \eta^0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \eta^0 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

и векторных мезонов:

$$V = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi^0 & \rho^+ & K^{*+} \\ \rho^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi^0 & K^{*0} \\ K^{*-} & \bar{K}^{*0} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \varphi^0 \end{vmatrix} \quad (2.20)$$

Заметим, что матрицы P и V эрмитовы: они переходят сами в себя при транспонировании и замене частиц на античастицы $\bar{P} = P$, $\bar{V} = V$.

Барионные мультиплеты этим свойством не обладают, т. е. барионы и антибарионы образуют независимые мультиплеты, при этом

$$\bar{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}^0 & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Sigma}^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}^0 & \bar{\Xi}^0 \\ \bar{p} & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \bar{\Lambda}^0 \end{vmatrix} \quad (2.21)$$

Для описания барионного декуплета 3^+ используем полностью симметричный тензор третьего ранга, выбрав следующее соответствие между компонентами тензора и частицами:

$$\begin{aligned} D^{223} &= N^{*-}, \quad D^{123} = \frac{1}{\sqrt{3}} N^{*0}, \quad D^{112} = \frac{1}{\sqrt{3}} N^{*+}, \quad D^{111} = N^{*++}, \\ D^{223} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^{*-}, \quad D^{123} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Sigma^{*0}, \quad D^{113} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Sigma^{*+}, \\ D^{223} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^{*-}, \quad D^{133} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Xi^{*0}, \\ D^{333} &= \Omega^-. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Модели составных частиц. Так как имеется довольно много элементарных частиц, то были предприняты попытки построения их из небольшого числа фундаментальных частиц.

Авторы наиболее радикальной из этих попыток исходят из того, что все наблюдаемые элементарные частицы и взаимодействия между ними являются проявлением одного поля (нелинейного, спинорного). К сожалению, при конкретной реализации этой программы возникают существенные трудности, которые пока не удалось преодолеть.

Согласно другой точке зрения, все элементарные частицы можно «составить» из нескольких, так сказать, «основных» элементарных частиц. Главный вопрос, который возникает при таком подходе, заключается в том, какие частицы выбрать за основные.

8-Симметрия. В качестве основных можно выбрать октеты барионов и антибарионов (такой подход получил название 8-симметрии или восьмеричного пути). Слияние указанных октетов приводит, согласно табл. 13.4, к следующим мультиплетам:

$$8 \times \bar{8} = 8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \bar{10} + 27.$$

Барионные заряды перечисленных мультиплетов равны нулю; поэтому восьмеричные мультиплеты можно отождествить с мезонными октетами. Иначе говоря, с помощью октетов барионов и антибарионов можно построить мезонные октеты.

Для того чтобы получить барионные резонансы, составим систему из мезона (8×8) и бариона (8):

$$\bar{8} \times 8 \times 8 = (1 + 8 + 8 + 10 + \bar{10} + 27) \times 8.$$

При этом наряду с другими мультиплетами получается и декуплет (согласно табл. 13.4, он содержится в повторных произведениях 8×8 , 10×8 , 27×8).

Таким образом, из октета барионов и антибарионов можно построить все наблюдаемые другие мультиплеты.

Однако при таком подходе остается неясным, почему реализуется октетное представление группы SU_3 и не реализуется ее низшее (триплетное) представление. Поэтому были предприняты попытки построения всех элементарных частиц из триплетов частиц и античастиц (такой подход получил название 3-симметрии).

3-Симметрия. Пусть этими частицами будут нейтрон, протон и Λ^0 -гиперон (модель Сакаты — Маркова — Окуня). Из триплетов этих частиц и античастиц можно образовать, согласно (2.11), следующие мезонные мультиплеты:

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8,$$

т. е. как раз те, которые наблюдаются на опыте.

Так как в рассматриваемой модели p, n, Λ образуют триплет, то Σ^- - и Ξ^- -частицы должны быть отнесены к другим унитарным мультиплетам. Из трех триплетов можно образовать, согласно (2.15), следующие мультиплеты:

$$3 \times 3 \times \bar{3} = 3 + 3 + \bar{6} + 15.$$

Из табл. 13.3 видно, что Σ^- -гиперон ($I = 1, Y = 0$) может быть размещен как в 6-, так и в 15-мультиплете, а частица Ξ^- ($I = 1/2, Y = -1$) — только в 15-мультиплете. С другой стороны, в 15-мультиплет должны входить частицы с $I = 1, Y = 2$; однако они до сих пор на опыте не обнаружены.

Аналогичная ситуация имеет место и для барионных мультиплетов большей размерности, которые получаются при использовании большого числа триплетов ($\bar{3} \times \bar{3} \times 3 \times 3 \times 3$ и т. п.).

Таким образом, существование мезонных октетов одинаково хорошо согласуется как с 3-, так и с 8-симметрией. Объяснение же октетов барионов в рамках 3-симметрии встречает трудности.

Модель кварков. Можно обойти эту трудность, если составлять барионы только из триплетов частиц, без использования триплета античастиц. Тогда вместо (2.15) получим, согласно (2.16):

$$3 \times 3 \times 3 = 1 + 8 + 8 + 10,$$

т. е. синглет, октеты и декуплет. Но при этом заряды, странности и барионные числа частиц исходного триплета перестают быть целыми числами. Действительно, возьмем три частицы со спином $s = 1/2$ и значениями заряда, странности и барионного числа, приведенными в табл. 13.5. Эти частицы называют кварками. Из кварков p', n', λ' каждую частицу барионного мультиплета и мультиплета барионных резонансов можно построить так:

| | | | | | | | |
|---------------|---------------|------------------------|---------------|----------------------|----------------------------|----------------|----------|
| | Ξ^0 | Ξ^- | | $p'\lambda'\lambda'$ | $n'\lambda'\lambda'$ | | |
| | Σ^+ | $\Sigma^0 (\Lambda^0)$ | Σ^- | $p'p'\lambda'$ | $n'p'\lambda'$ | $n'n'\lambda'$ | |
| | | p | n | $p'p'n'$ | $p'n'n'$ | | |
| | | Ω^- | | | $\lambda'\lambda'\lambda'$ | | |
| | Ξ^{*0} | Ξ^{*-} | | $p'\lambda'\lambda'$ | $n'\lambda'\lambda'$ | | |
| | Σ^{*+} | Σ^{*0} | Σ^{*-} | $p'p'\lambda'$ | $p'n'\lambda'$ | $n'n'\lambda'$ | |
| Δ^{++} | Δ^+ | Δ^0 | Δ^- | $p'p'p'$ | $p'p'n'$ | $p'n'n'$ | $n'n'n'$ |

При этом мезонные октеты строятся из кварков и антикварков:

| | | | | | |
|---------|------------------|---------|--|---|--------------------|
| | \bar{K}^0 | K^- | | $\lambda'\bar{n}'$ | $\lambda'\bar{p}'$ |
| π^+ | $\pi^0 (\eta^0)$ | π^- | | $p'\bar{n}' (p'\bar{p}', n'\bar{n}', \lambda'\bar{\lambda}')$ | $n'\bar{p}'$ |
| | K^+ | K^0 | | $p'\bar{\lambda}'$ | $n'\bar{\lambda}'$ |

Кварки и их характеристики

| Кварк | Электрический заряд | Странность | Барийонное число | Гиперзаряд | Пространственный спин |
|------------|---------------------|------------|------------------|------------|-----------------------|
| p' | 2/3 | 0 | 1/3 | 1/3 | 1/2 |
| n' | -1/3 | 0 | 1/3 | 1/3 | 1/2 |
| λ' | -1/3 | -1 | 1/3 | -2/3 | 1/2 |

Таким образом, с помощью кварков можно одинаково хорошо объяснить существование как мезонных, так и барионных мультиплетов.

К сожалению, в настоящее время предположение о том, что кварки существуют, не получило экспериментального подтверждения.

SU_3 -Инварианты. Унитарными SU_3 -инвариантами называются такие комбинации унитарных волновых функций, которые не меняются при SU_3 -преобразованиях. Унитарный SU_3 -инвариант должен быть SU_3 -скаляром.

Чтобы построить из унитарных волновых функций унитарный инвариант (скаляр), надо взять произведение волновых функций и произвести в нем суммирование по всем парам верхних и нижних индексов волновых функций. При этом, вообще говоря, суммирование может быть произведено в различном порядке и каждой такой возможности будет соответствовать свой скаляр.

Приведем несколько примеров SU_3 -инвариантов (большие цифры обозначают размерность мультиплетов, P, V, B, D — волновые функции мультиплетов псевдоскалярных, векторных мезонов, барионов, барионных резонансов).

1. Заданы волновые функции δ_P, δ_{P_1} .

Из двух волновых функций P_k^i и P_l^m можно образовать один унитарный скаляр:

$$P_k^i P_{il}^k = \text{Sp } \bar{P} P_1.$$

2. Заданы волновые функции δ_B, δ_{B_1} . Из них можно образовать один унитарный скаляр

$$B_k^i B_{il}^k = \text{Sp } \bar{B} B_1.$$

3. $O_V, \delta_P, \delta_{P_1}$.

$$V_0 P_k^i P_{il}^k = \text{Sp } (V_0 \bar{P} P_1),$$

где V_0 — волновая функция унитарного скаляра.

4. $\delta_P, \delta_{P_1}, \delta_{P_2}$.

Из трех волновых функций P можно образовать два унитарных скаляра, различающихся порядком суммирования:

$$P_k^i (P_1)_i^k (P_2)_i^l = \text{Sp } (P P_1 P_2) \text{ и } \text{Sp } P_1 P P_2. \quad (2.23)$$

5. $8_P, 8_B, 8_{B_1}$.

$$\text{Sp } \bar{B}_1 P B \text{ и } \text{Sp } \bar{B}_1 B P. \quad (2.24)$$

6. $10_D, 8_P, 8_B$.

Декуплет барионных резонансов описывается полностью симметричным тензором $D^{(ikl)}$; последний можно представить в форме

$$\varepsilon_{[irs]} D^{(ikl)} = D_{[rs]}^{(kl)},$$

содержащей четное число верхних и нижних индексов. Таким видом D^{ikl} удобно пользоваться при нахождении унитарных скаляров. Тогда можно образовать такой инвариант:

$$P_k^i \bar{B}_m^l \varepsilon_{[qil]} D^{(qkm)} = P_k^i B_m^l D_{[il]}^{(km)}. \quad (2.25)$$

7. $8_{P_1}, 8_{P_2}, 8_{B_1}, 8_{B_2}$.

Из четырех волновых функций можно образовать девять унитарных скаляров, соответствующих различным порядкам суммирования:

$$\begin{aligned} & \text{Sp } \bar{B}_2 B_1 \text{Sp } P_2 P_1, \quad \text{Sp } \bar{B}_2 P_2 \text{Sp } B_1 P_1, \quad \text{Sp } \bar{B}_2 P_1 \text{Sp } B_1 P_2, \\ & \text{Sp } \bar{B}_2 B_1 P_2' P_1, \quad \text{Sp } \bar{B}_2 B_1 P_1 P_2, \quad \text{Sp } B_1 \bar{B}_2 P_2 P_1, \quad \text{Sp } B_1 \bar{B}_2 P_1 P_2, \quad (2.26) \\ & \text{Sp } \bar{B}_2 P_2 B_1 P_1, \quad \text{Sp } \bar{B}_2 P_1 B_1 P_2. \end{aligned}$$

Заметим, что эти инварианты удовлетворяют следующему соотношению: сумма трех первых комбинаций равна сумме остальных шести. Другими словами, число независимых комбинаций равно восьми.

8. $8_{B_1}, 8_{B_2}, 8_{B_3}, 8_{B_4}$.

Чтобы получить вид инвариантов, в данном случае надо произвести в (2.26) замену $P_1 \rightarrow B_3, P_2 \rightarrow B_4$.

§ 3. Унитарная структура амплитуды (сильное взаимодействие)

Структура амплитуды процесса. Для нахождения унитарной структуры амплитуды процесса можно использовать тот же метод, с помощью которого находилась инвариантная изотопическая структура амплитуды (см. гл. 10, § 7).

Учитывая унитарные волновые функции Φ^s , получаем вместо формулы (1.7), гл. 3 следующее выражение для матричного элемента процесса:

$$M' = \bar{\Phi}_i^s \Phi_j^\dagger S \Phi_i^s \Phi_j. \quad (3.1)$$

Так как пространственная и унитарная части разделяются, то амплитуда запишется в виде произведений

$$M' = \bar{\Phi}_i^s \Phi_i^s \Phi_j^\dagger S \Phi_i = M^s \Phi_j^\dagger S \Phi_i = M^s M \quad (3.2)$$

или

$$M' = \sum_s \sum_i T_i^s \Gamma^s R_i. \quad (3.3)$$

Здесь Γ^s , R_i — инвариантные унитарные и спиновые комбинации; i, s — индексы суммирования по возможным спиновым и унитарным комбинациям; $T_i^s(s, t)$ — произвольные функции.

Чтобы найти унитарную структуру амплитуды процесса, надо построить из унитарных волновых функций частиц, входящих в реакцию, унитарные инварианты (скаляры). Причем эти скаляры должны быть независимыми. Целесообразно сначала подсчитать число допустимых независимых скаляров, а затем искать их явный вид. Число независимых инвариантных комбинаций может уменьшиться, если дополнительно учесть требование других инвариантностей (перекрестной, относительно обращения времени и т. п.).

Рассмотрим процесс рассеяния октета псевдоскалярных мезонов на октете барионов

$$P + B \rightarrow P' + B'. \quad (3.4)$$

Предположим, что начальные и конечные октеты как мезонов так и барионов одинаковы. Чтобы найти число независимых инвариантных амплитуд для реакции (3.4), воспользуемся тем, что произведение волновых функций начального, а также конечного состояния (т. е. 8×8) разбивается на следующие неприводимые представления (см. табл. 13.4):

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8' + 10 + \bar{10} + 27. \quad (3.5)$$

Так как унитарная симметрия разрешает переходы только между одинаковыми представлениями, вследствие их ортогональности, то из (3.5) видно, что в данном случае разрешены восемь переходов:

$$1 \rightarrow 1, \quad 8 \rightarrow 8, \quad 8' \rightarrow 8, \quad 8 \rightarrow 8', \quad 8' \rightarrow 8', \quad 10 \rightarrow 10, \quad \bar{10} \rightarrow \bar{10}, \quad 27 \rightarrow 27.$$

Иначе говоря, амплитуда процесса (3.4) состоит из восьми независимых унитарных скаляров.

Из произведений четырех волновых функций можно образовать следующие восемь независимых инвариантов, отличающихся друг от друга порядком суммирования [см. (2.26)]:

$$\begin{aligned} & \text{Sp}(\bar{B}' B) \text{Sp}(\bar{P}' P), \text{Sp}(\bar{B}' \bar{P}') \text{Sp}(BP), \text{Sp}(\bar{B}' P) \text{Sp}(B\bar{P}'), \\ & \text{Sp}(\bar{B}' B\bar{P}' P), \text{Sp}(\bar{B}' B P \bar{P}'), \text{Sp}(B\bar{B}' \bar{P}' P), \\ & \text{Sp}(B\bar{B}' P \bar{P}'), \text{Sp}(\bar{B}' \bar{P}' BP) - \text{Sp}(\bar{B}' P B\bar{P}'). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Это число уменьшается, если учесть требование инвариантности относительно обращения времени. Рассматриваемый нами процесс (начальные и конечные октеты как барионов, так и мезонов одинаковы) при обращении времени переходит сам в себя. При обращении времени начальные частицы переходят в конечные и наоборот, поэтому унитарные функции преобразуются при T -обращении так:

$$B_k^i \rightarrow \bar{B}_i^k, \bar{B}_k^i \rightarrow B_i^k, P_k^i \rightarrow \bar{P}_i^k, \bar{P}_k^i \rightarrow P_i^k.$$

Выясним, как преобразуются при T -обращении независимые комбинации (3.6), имея в виду, что в нашем случае

$$B' = B, P' = P.$$

Например,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\bar{B} \bar{P} B P) &= \bar{B}_i^k \bar{P}_k^l B_l^m P_m^i \rightarrow B_k^i P_i^k \bar{B}_m^l \bar{P}_l^m = \bar{B}_m^l P_l^k B_k^i \bar{P}_i^m = \\ &= \text{Sp}(\bar{B} P B \bar{P}) \end{aligned}$$

и

$$\text{Sp}(\bar{B} P B \bar{P}) \rightarrow \text{Sp}(\bar{B} \bar{P} B P),$$

т. е. при обращении времени последняя комбинация в (3.6) меняет знак. Аналогичным образом можно показать, что знак оставшихся семи комбинаций (3.6) остается при T -обращении без изменения.

Как мы уже говорили (см. гл. 5, § 2), при T -обращении пространственные спиновые комбинации процесса (3.4) знака не меняют. Следовательно, последняя комбинация (3.6) не удовлетворяет требованию инвариантности относительно T -обращения и потому должна быть отброшена. Другими словами, амплитуда упругого процесса (3.4) состоит из семи независимых слагаемых:

$$\begin{aligned} M &= \{T_1^1 \text{Sp}(\bar{B}' B) \text{Sp}(\bar{P}' P) + T_1^2 \text{Sp}(\bar{B}' \bar{P}') \text{Sp}(B P) + \\ &+ T_1^3 \text{Sp}(\bar{B}' P) \text{Sp}(B \bar{P}') + T_1^4 \text{Sp}(\bar{B}' B \bar{P}' P) + \\ &+ T_1^5 \text{Sp}(\bar{B}' B P \bar{P}') + T_1^6 \text{Sp}(B \bar{B}' \bar{P}' P) + T_1^7 \text{Sp}(B \bar{B}' P \bar{P}')\} R_i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим еще рассеяние мезонного октета на барионном октете с образованием барионного резонанса

$$P + B \rightarrow P' + D. \quad (3.8)$$

Так как (см. табл. 13.4)

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8' + 10 + \bar{10} + 27;$$

$$8 \times 10 = 8 + 10 + 27 + 35,$$

то амплитуда процесса (3.8) будет состоять из четырех независимых унитарных инвариантов (соответствующих переходам $8 \rightarrow 8$, $8 \rightarrow 8'$, $10 \rightarrow 10$ и $27 \rightarrow 27$):

$$M = \{T_i^1 P_l^q B_s^l \bar{D}_{jqk} \bar{P}_m^k \varepsilon^{jms} + T_i^2 P_l^s B_l^q \bar{D}_{iqk} \bar{P}_m^k \varepsilon^{jms} + \\ + T_i^3 P_l^q B_s^r \bar{D}_{qrk} \bar{P}_t^k \varepsilon^{lst} + T_i^4 P_l^q B_s^r \bar{D}_{qrk} \bar{P}_m^l \varepsilon^{kms}\} R_i. \quad (3.9)$$

Соотношение между амплитудами процессов. Рассмотрим, например, процесс

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p. \quad (3.10)$$

В данном случае, согласно (2.18), (2.19) и (2.21),

$$B_1^3 = \bar{B}_3^1 = P_1^2 = \bar{P}_2^1 = 1.$$

Остальные компоненты равны нулю. Поэтому амплитуда процесса (3.10) запишется так:

$$M_i^2(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = T_i^1 + T_i^7.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для амплитуд реакций с участием других частиц.

Исключая из выражений для амплитуд коэффициенты T_i^5 , находим соотношения между амплитудами различных процессов. Приведем некоторые из них:

$$M^s(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = M^s(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + \sqrt{2} M^s(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n);$$

$$M^s(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M^s(K^0 p \rightarrow K^0 p) + M^s(K^0 p \rightarrow K^+ n);$$

$$M^s(K^- p \rightarrow K^- p) - M^s(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = M^s(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+); \quad (3.11)$$

$$M^s(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M^s(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = M^s(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+); \quad (3.12)$$

$$M^s(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = M^s(K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-) - M^s(\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-); \quad (3.13)$$

$$M^s(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = M^s(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0); \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{6} M^s(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0) = \\ & = 2M^s(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) - 2M^s(K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n) + \sqrt{2} M^s(\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0); \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{6} M^s(\pi^- p \rightarrow n \eta) = \\ & = 2M^s(K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n) - 2M^s(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) + \sqrt{2} M^s(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Первые два из приведенных соотношений являются следствием изотопической инвариантности (см. гл. 10, § 11), остальные же могут быть получены только с помощью SU_3 -симметрии.

Аналогичным образом подстановка (2.18), (2.19), (2.22) в (3.9) дает выражения для амплитуд реакций, входящих в (3.8). Эти выражения приводят к соотношениям между амплитудами процессов, например (Δ обозначает нуклонный резонанс N_{1238}^*):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} M^s(p\pi^- \rightarrow \Delta^- \pi^+) &= M^s(p\pi^- \rightarrow \Sigma^{*-} K^+) = \\ &= M^s(pK^- \rightarrow \Sigma^{*-} \pi^+) = M^s(pK^- \rightarrow \Xi^- K^+); \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} M^s(pK^+ \rightarrow \Delta^{++} K^0) &= \sqrt{2} M^s(p\pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \pi^0) + \\ + 2\sqrt{6} M^s(p\pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \eta^0) &- 3\sqrt{3} M^s(p\pi^+ \rightarrow \Sigma^{*+} K^+); \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$-2M^s(pK^- \rightarrow \Delta^+ K^-) = \sqrt{3} M^s(pK^- \rightarrow \Sigma^{*0} \eta^0). \quad (3.19)$$

Сравнение теории с опытом. К сожалению, сравнение полученных соотношений для амплитуд с опытом может быть сделано лишь в небольшом числе случаев из-за недостаточности опытных данных и их низкой точности. Переходя в (3.11) — (3.13) и (3.17), (3.18) от амплитуд к сечениям, получаем следующие неравенства:

$$\sqrt{\sigma(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)} \geq |\sqrt{\sigma(K^- p \rightarrow K^- p)} - \sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)}|; \quad (3.20)$$

$$\sqrt{\sigma(p\pi^+ \rightarrow K^+ \Sigma^+)} \geq |\sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)} - \sqrt{\sigma(K^+ p \rightarrow K^+ p)}|; \quad (3.21)$$

$$\sqrt{\sigma(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-)} \leq (\sqrt{\sigma(K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-)} + \sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-)}); \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sigma(p\pi^- \rightarrow \Delta^- \pi^+) &= \sigma(p\pi^- \rightarrow K^+ \Sigma^{*-}) = \\ &= \sigma(pK^- \rightarrow \Sigma^{*-} \pi^+) = \sigma(pK^- \rightarrow \Xi^{*-} K^+); \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \sigma(pK^+ \rightarrow \Delta^{++} K^0) &= \sigma(p\pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \pi^0) + \\ + 3\sigma(p\pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \eta^0) &- 3\sigma(p\pi^+ \rightarrow \Sigma^{*+} K^+). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Если бы SU_3 -симметрия выполнялась строго, то массы частиц в каждом унитарном мультиплете были бы равны и при сравнении надо было бы брать соответствующие опытные данные при одной и той же энергии. Однако в действительности массы частиц в мульти-

плете различны, поэтому обычно сравниваются экспериментальные сечения при одном и том же значении Q , равном $Q = \sqrt{s} - \Sigma m_f$, где \sqrt{s} — полная энергия частиц в с.ц.м., Σm_f — сумма масс конечных частиц. При таком способе сравнения все рассматриваемые реакции отстоят одинаково далеко от порога. Кроме того надо учесть кинематический множитель F , связывающий квадрат матричного элемента M с сечением σ (см. формулу (6.3) гл. 7)

$$|M|^2 = F\sigma \equiv \bar{\sigma}, \quad (3.25)$$

где $F = W^2 |k|/|k'|$; W — полная энергия; k, k' — импульсы начальных и конечных частиц в с. ц. м.

Экспериментальные данные для процессов, входящих в соотношение (3.20), приведены для различных значений Q на рис. 13.1 (для полных сечений) и на рис. 13.2 (для дифференциальных сечений). Неравенство (3.20) выполняется для полных сечений и не выполняется для дифференциальных сечений.

Экспериментальные данные для реакций, входящих в соотношения (3.21) — (3.24), приведены соответственно на рис. 13.3. Как показывает опыт, сечение реакции $\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$ меньше сечений каждой из реакций, входящих в (3.21), поэтому должно быть

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \approx \sigma(K^+ p \rightarrow K^+ p).$$

Из рис. 13.3, а видно, что это соотношение на опыте не выполняется. Не выполняется (рис. 13.3, б) также соотношение (3.22).

Соотношение (3.23) резко противоречит опытным данным рис. 13.3, в, г, в то время как соотношение (3.24) согласуется с ними, причем в области одних и тех же значений Q .

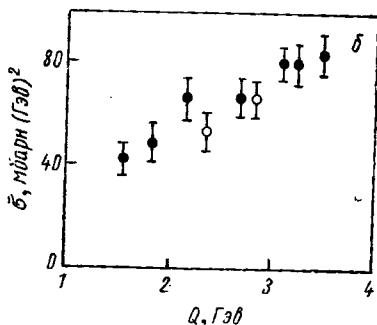
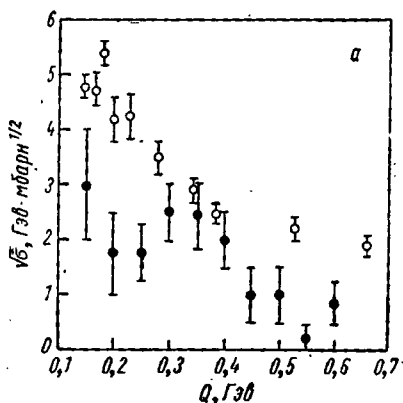
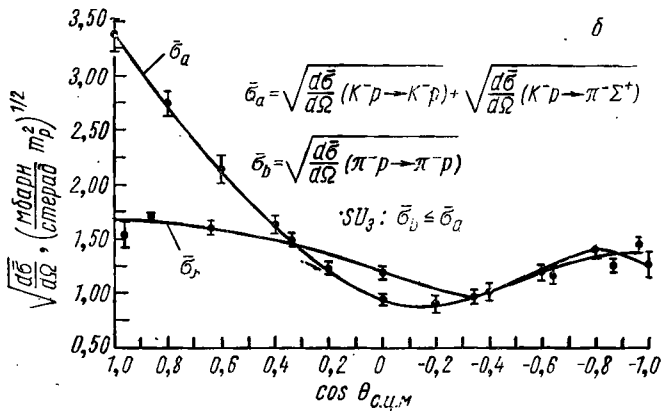
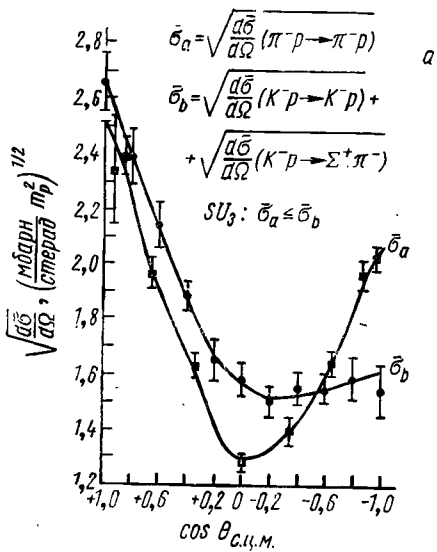


Рис. 13.1. Сравнение соотношения (3.20) с опытными данными для полных сечений при различных значениях Q :

а — \circ — значения $[\bar{\sigma}(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)]^{1/2}$; \bullet — значения $|\bar{\sigma}(K^- p \rightarrow K^- p)|^{1/2}$ — $[\bar{\sigma}(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)]^{1/2}$; б — \circ — значения $\bar{\sigma}(K^- p \rightarrow K^- p)$; \bullet — значения $\bar{\sigma}(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)$.



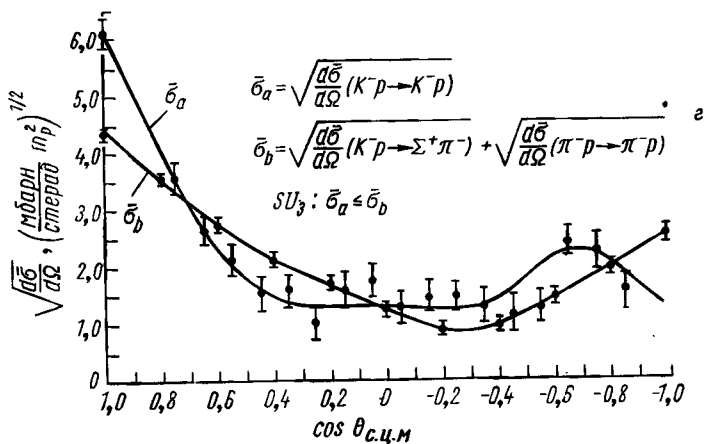
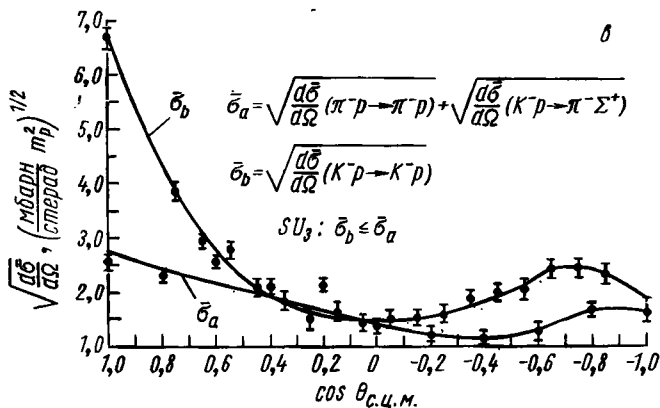
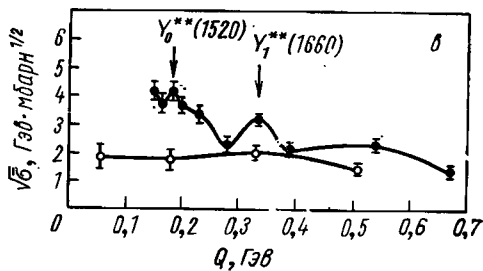
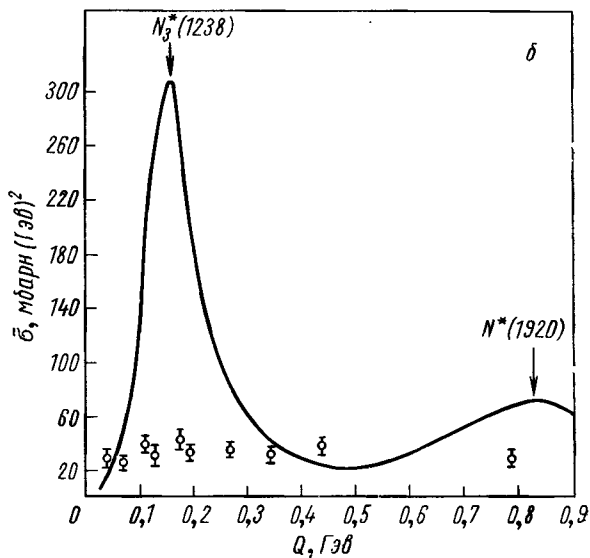
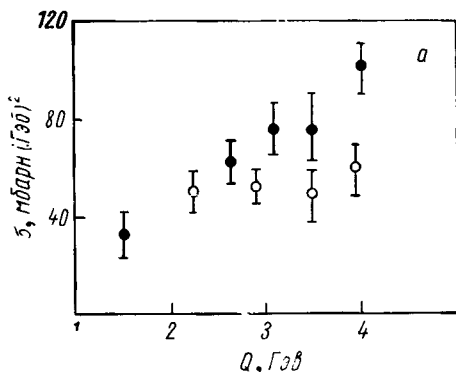


Рис. 13.2. Сравнение соотношения (3.20) с опытными данными для дифференциальных сечений:

а—для $Q=0,198$ М; б—для $Q=0,305$ М; в—для $Q=0,380$ М;

г—для $Q=0,455$ М.



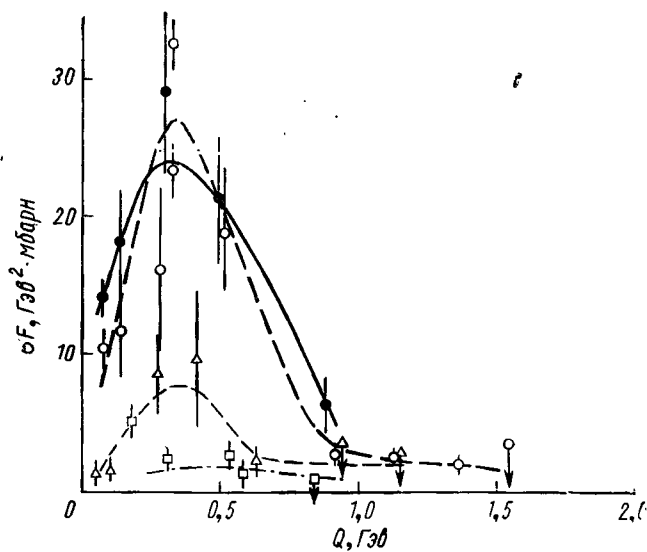
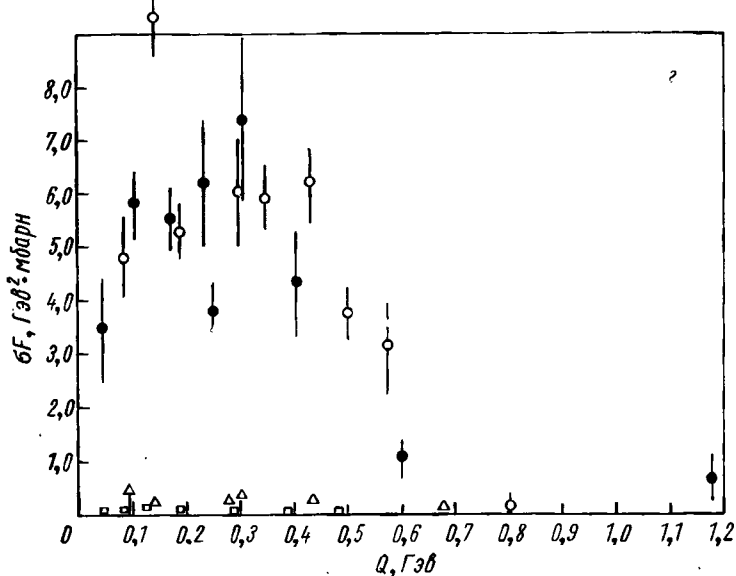


Рис. 13.3. Сравнение соотношений (3.21) — (3.24) с опытными данными:
 а — \circ — значения $\bar{\sigma}(K^+p \rightarrow K^+p)$; \bullet — $\bar{\sigma}(\pi^+p \rightarrow \pi^+p)$; б — \circ — значения $\bar{\sigma}(K^+p \rightarrow K^+p)$;
 — — — — $\bar{\sigma}(\pi^+p \rightarrow \pi^+p)$; в — \bullet — значения $[\bar{\sigma}(K^-p \rightarrow \pi^+\Sigma^-)]^{1/2}$; \circ — значения
 $[\bar{\sigma}(K^-p \rightarrow K^+\Xi^-)]^{1/2} + [\bar{\sigma}(\pi^-p \rightarrow K^+\Sigma^-)]^{1/2}$; г — \circ — значения $\bar{\sigma}(K^-p \rightarrow \Sigma^*-\pi^+)$;
 \bullet — значения $1/3 \bar{\sigma}(\pi^-p \rightarrow N^*-\pi^+)$; Δ — $\bar{\sigma}(\pi^-p \rightarrow \Sigma^*-K^+)$; \square — $\bar{\sigma}(K^-p \rightarrow \Xi^*-K^+)$;
 д — — — — $\bar{\sigma}(\pi^+p \rightarrow N^*++\pi^0)$; — — — — $\bar{\sigma}(K^+p \rightarrow N^*++K^0)$; — — — — $3\bar{\sigma}(\pi^+p \rightarrow N^*++\eta)$;
 $3\bar{\sigma}(\pi^+p \rightarrow \Sigma^*+K^+)$.

Таким образом, при сравнении предсказаний SU_3 -симметрии для различных процессов с соответствующими экспериментальными данными имеет место довольно пестрая картина. Причины такой пестрой картины пока не ясны.

§ 4. Унитарная структура вершины (сильное взаимодействие)

Чтобы найти унитарную структуру амплитуды процессов с участием трех адронов, надо по-прежнему образовать из унитарных волновых функций частиц независимые унитарные инварианты (скаляры).

Структура амплитуды. Рассмотрим для конкретности процесс с участием октета псевдоскалярных мезонов и октета барионов $\frac{1}{2}^+$

$$B \rightarrow B + P. \quad (4.1)$$

Амплитуда процесса (4.1) состоит из двух независимых комбинаций (см. 2.24):

$$M^s = \frac{1}{\sqrt{2}} g^F [\bar{B}_i^k B_k^i - \bar{B}_k^i B_i^k] \bar{P}_i^l + \frac{1}{\sqrt{2}} g^D [\bar{B}_i^k B_k^i + \bar{B}_k^i B_i^k] \bar{P}_i^l, \quad (4.2)$$

где B — волновая функция барионов; \bar{B} — функция, сопряженная к B ; P — волновая функция псевдоскалярных мезонов.

Соотношение между константами связи. Подставляя в (4.2) матрицы (2.18), (2.19), (2.21) для B и P , получаем

$$\left. \begin{aligned} g_{nn\pi^0} &= -\frac{1}{2} (g^D - g^F); & g_{\pi^- \pi^+ \pi^0} &= \frac{1}{2} (g^D + g^F); \\ g_{pp\eta^0} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D); & g_{\pi^0 \pi^0 \eta^0} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D); \\ g_{\Sigma^+ \Sigma^+ \pi^0} &= -g^F; & g_{\Sigma \Sigma \eta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} g^D; \\ g_{\Lambda \Lambda \eta} &= -\sqrt{\frac{1}{3}} g^D; & g_{\pi \Sigma \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}} g^D; \\ g_{nK^0 \Sigma^0} &= -\frac{1}{2} (g^D + g^F); & g_{K^0 \Sigma^0 \pi^0} &= -\frac{1}{2} (g^D - g^F); \\ g_{nK^0 \Lambda^0} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D); & g_{K^0 \Lambda^0 \pi^0} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D). \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Как видно, константы связи выражаются через два параметра: g^D и g^F . Исключая эти параметры, находим соотношения между константами связи. Приведем одно из них:

$$2g_{nn\pi^0} = g_{nK^0 \Sigma^0} + \sqrt{3} g_{nK^0 \Lambda^0}. \quad (4.4)$$

Подставляя сюда опытные значения констант связи, получаем, что это предсказание унитарной симметрии неплохо согласуется с результатами эксперимента.

Аналогично можно проанализировать сильные вершины с участием других мультиплетов.

§ 5. Унитарная структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов)

Электромагнитный ток в SU_3 -симметрии. Как мы уже отмечали (гл. 10, § 5), электромагнитный ток адронов имеет следующую изотопическую структуру:

$$J_\mu = J_\mu^0 + J_\mu^3,$$

где J_μ^0 — изотопический скаляр, J_μ^3 — третья компонента изотопического вектора, а индекс μ характеризует пространственные компоненты вектора тока. Кроме того, гиперзаряд Y обеих компонент тока должен равняться нулю, потому что ток не меняет гиперзаряда системы частиц.

Так как октет является унитарным мультиплетом наименьшей размерности, содержащим изотопический скаляр и изотопический вектор с гиперзарядом $Y = 0$, то естественно предположить, что компоненты электромагнитного тока принадлежат именно унитарному октету $(V_\mu)_\beta^\alpha$ или [см. формулу (2.12)] соответствующему ему восьмивектору $V_\mu^i = (V_\mu)_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta$. При этом компоненте октета с $I = Y = 0$ соответствует восьмая компонента вектора V_μ^8 , а с $Y = 0, I = 1, T_z = T_3$ — третья компонента восьмивектора V_μ^3 . Другими словами, электромагнитный ток в SU_3 -симметрии представляет собой линейную комбинацию компонент V_μ^3 и V_μ^8 восьмивектора V_μ^i :

$$J_\mu = aJ_\mu^3 + bJ_\mu^8 = aV_\mu^3 + bV_\mu^8. \quad (5.1)$$

Здесь a и b — постоянные числа, общие для всех частиц. Чтобы найти a и b , рассмотрим соответствующее выражение для свободных кварков. Так как заряды кварков p', n', Λ' равны $2/3, -1/3, -1/3$, то выражение для вектора тока J_μ запишется так:

$$J_\mu = \frac{2}{3} \bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi^1 - \frac{1}{3} \bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi^2 - \frac{1}{3} \bar{\psi}_3 \gamma_\mu \psi^3, \quad (5.2)$$

где ψ^α — волновые функции кварков.

С другой стороны, для свободных кварков

$$(V_\mu)_\beta^\alpha = \bar{\psi}_\beta \gamma_\mu \psi^\alpha. \quad (5.3)$$

Поэтому J_μ выражается через $(V_\mu)_\beta^\alpha$ следующим образом:

$$J_\mu = (V_\mu)_\beta^\alpha (\lambda^t)_\alpha^\beta. \quad (5.4)$$

Здесь λ^t — диагональная матрица с элементами, равными зарядам кварков: $2/3$, $-1/3$, $-1/3$. С помощью λ_3 и λ_8 , определяемых (2.1), матрица λ^t запишется так:

$$\lambda^t = \frac{1}{2} \lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8. \quad (5.5)$$

Сравнение (5.1) и (5.5) дает $a = 1/2$, $b = 1/2\sqrt{3}$. Константы a и b общие для всех частиц, поэтому выражение для электромагнитного тока в SU_3 -симметрии выглядит так:

$$J_\mu = \frac{1}{2} \left(V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8 \right) = \frac{1}{2} (V_\mu)_\beta^\alpha \left[(\lambda_3)_\alpha^\beta + \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda_8)_\alpha^\beta \right]. \quad (5.6)$$

Последнюю формулу можно переписать в более удобном виде. Так как

$$(V_\mu)_\alpha^\alpha = (V_\mu)_1^1 + (V_\mu)_2^2 + (V_\mu)_3^3 = 0,$$

то

$$-(V_\mu)_2^2 - (V_\mu)_3^3 = (V_\mu)_1^1.$$

Подставляя последнее соотношение в (5.6), находим

$$J_\mu = \frac{2}{3} (V_\mu)_1^1 - \frac{1}{3} (V_\mu)_2^2 - \frac{1}{3} (V_\mu)_3^3 = (V_\mu)_1^1. \quad (5.7)$$

Структура амплитуды. Рассмотрим процесс фотообразования мезонов M на барионах B : $\gamma + B_1 \rightarrow B_2 + P$, предполагая, что B_1 и B_2 — один и тот же октет барионов, а фотон и M описываются одним и тем же октетом. Так как электромагнитный ток принадлежит октету, то выражение для амплитуды запишется в виде (3.7), если считать, что

$$P = (V_\mu)_1^1. \quad (5.8)$$

Рассмотрим еще реакцию фоторождения мезонного октета на барионах с образованием барионного резонанса $\gamma + B \rightarrow D + P$. Выражение для амплитуды этого процесса запишется в виде (3.9), если в нем произвести замену (5.8).

Соотношения между сечениями. Рассмотрим процесс

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0. \quad (5.9)$$

В данном случае, согласно (2.18), (2.19), (2.21),

$$B_1^3 = 1, \quad \bar{B}_3^1 = 1, \quad P_1^1 = -P_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Остальные компоненты равны нулю. Поэтому амплитуда процесса (5.9) запишется так:

$$M^s(\gamma p \rightarrow p\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(T^1 + T^6 + T^7).$$

Аналогичным образом можно получить выражения для амплитуд процессов с участием других частиц.

Исключая из этих выражений коэффициенты T_i^s , находим соотношения между амплитудами различных процессов, например

$$\begin{aligned} \sqrt{2} M^s(\gamma n \rightarrow n\pi^0) + M^s(\gamma n \rightarrow p\pi^-) &= \sqrt{2} M^s(\gamma p \rightarrow p\pi^0) - \\ &- M^s(\gamma p \rightarrow n\pi^+); \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$-\sqrt{2} M^s(\gamma p \rightarrow n\pi^+) + M^s(\gamma p \rightarrow \Sigma^0 K^+) = \sqrt{3} M^s(\gamma p \rightarrow K^+\Lambda^0); \quad (5.11)$$

$$\sqrt{2} M^s(\gamma p \rightarrow \Sigma^+ K^0) + M^s(\gamma p \rightarrow p\pi^0) = \sqrt{3} M^s(\gamma p \rightarrow p\eta); \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} M^s(\gamma n \rightarrow n\pi^0) - \sqrt{3} M^s(\gamma n \rightarrow n\eta^0) &= \\ = \sqrt{3} M^s(\gamma n \rightarrow K^0\Lambda) - M^s(\gamma n \rightarrow \Sigma^0 K^0); \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} M^s(\gamma n \rightarrow \Sigma^0 K^0) + M^s(\gamma n \rightarrow \Sigma^- K^+) &= \\ = \sqrt{2} M^s(\gamma p \rightarrow \Sigma^0 K^+) + M^s(\gamma p \rightarrow \Sigma^+ K^0). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Первое из этих соотношений является следствием изотопической инвариантности (см. гл. 10, § 11), остальные получаются лишь в рамках SU_8 -симметрии.

Подставляя (2.18), (2.19), (2.22) и (5.8) в (3.9), получаем выражение для амплитуд процессов $\gamma B \rightarrow B^* M$. Эти выражения приводят к определенным соотношениям между амплитудами реакций, например

$$M^s(\gamma p \rightarrow \Delta^0 \pi^+) = \sqrt{2} M^s(\gamma p \rightarrow \Sigma^{*0} K^+). \quad (5.15)$$

Сравнение теории с опытом. Переходя в (5.11) и (5.15) от амплитуд к сечениям, получаем следующие неравенства:

$$\sqrt{\sigma(\gamma p \rightarrow n\pi^+)} \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma(\gamma p \rightarrow K^+ \Sigma^0)} + \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma(\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda^0)} \right); \quad (5.16)$$

$$\sigma(\gamma p \rightarrow \Delta^0 \pi^+) = 2\sigma(\gamma p \rightarrow \Sigma^{*0} K^+). \quad (5.17)$$

Имеющиеся опытные данные позволяют проверить правильность соотношения (5.16) для значения $Q = 38 \text{ Мэв}$. На рис. 13.4 изображена зависимость от угла (в с.ц.м.) величины

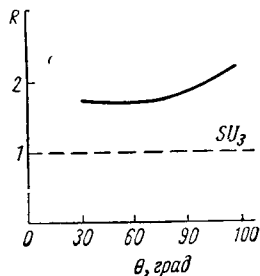


Рис. 13.4. Сравнение соотношения (5.18) с опытными данными.

$$R = \frac{\sqrt{\sigma(\gamma p \rightarrow \pi \pi^+)}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sigma(\gamma p \rightarrow K^+ \Sigma^0) + \frac{2}{3} \sigma(\gamma p \rightarrow K^+ \Lambda^0)}}. \quad (5.18)$$

Из рис. 13.4 видно, что в данном случае опытные данные не согласуются с предсказаниями SU_3 -симметрии.

Для отношения, следующего из (5.17):

$$R' = \frac{\sigma(\gamma p \rightarrow \Delta^0 \pi^+)}{\sigma(\gamma p \rightarrow \Sigma^{*0} K^+)} = 2,$$

опыт дает значение $R' = 2,0 \pm 1,7$.

Как видно, при сравнении теоретических и опытных результатов для процессов фотообразования наблюдается та же пестрая картина, что и для реакций рассеяния.

§ 6. Унитарная структура вершины (электромагнитное взаимодействие адронов)

Рассмотрим процесс с участием трех частиц, одна из которых — фотон. Для того чтобы получить унитарную структуру амплитуды такого процесса, надо взять выражение для амплитуды с участием трех адронов, один из которых — мезон, и заменить его волновую функцию P_a^B током $(V_\mu)_1^1: P_a^B \rightarrow V_1^1$. Так, например, амплитуда процесса с участием двух частиц, входящих в октет барионов, запишется так:

$$\begin{aligned} M_\mu = & \left(\bar{B}_i^1 B_1^i - \bar{B}_1^i B_i^1 \right) \left[\bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^F(k^2) + \bar{u}(p_2) \times \right. \\ & \left. \times \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right] + \left(\bar{B}_i^1 B_1^i + \bar{B}_1^i B_i^1 - \frac{2}{3} \bar{B}_i^i B_i^i \right) \times \\ & \times \left[\bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^D(k^2) \right], \quad (6.1) \end{aligned}$$

где f — соответствующие форм-факторы, $k = p_2 - p_1$.

Подставляя в (6.1) матрицы (2.18), (2.19) и (2.21), получаем

$$\begin{aligned}
 M_{\mu} = & (\bar{p}p + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Xi}^- \Xi^-) \times \\
 & \times \left[\bar{u}(p_2) \gamma_{\mu} u(p_1) f_1^F(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} K_{\nu}}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right] + \\
 & + \left[\frac{1}{3} \bar{p}p - \frac{2}{3} \bar{n}n - \frac{1}{3} \bar{\Lambda}\Lambda + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{3} \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \frac{1}{3} \bar{\Xi}^- \Xi^- + \frac{1}{3} (\bar{\Sigma}^0 \Lambda + \bar{\Lambda} \Sigma^0) \right] \times \\
 & \times \left[\bar{u}(p_2) \gamma_{\mu} u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} K_{\nu}}{2M} u(p_1) f_2^D(k^2) \right]. \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых комбинациях волновых функций, находим выражения форм-факторов барионов через функции f^F и f^D ($i = 1, 2$):

$$\left. \begin{aligned}
 f_i^p(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2); & f_i^{\Sigma^+}(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2); \\
 f_i^n(k^2) &= -\frac{2}{3} f_i^D(k^2); & f_i^{\Sigma^-}(k^2) &= -f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2); \\
 f_i^{\Xi^-}(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2); & f_i^{\Sigma^0}(k^2) &= \frac{1}{3} f_i^D(k^2); \\
 f_i^{\Xi^0}(k^2) &= -\frac{2}{3} f_i^D(k^2); & f_i^{\Lambda}(k^2) &= -\frac{1}{3} f_i^D(k^2); \\
 f_i^{\Sigma^{\Lambda}}(k^2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_i^D(k^2).
 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Исключая функции f^F и f^D , получаем соотношения между форм-факторами барионов, например

$$\left. \begin{aligned}
 f_i^p(k^2) &= f_i^{\Sigma^+}(k^2); & f_i^{\Xi^-}(k^2) &= f_i^{\Sigma^-}(k^2); \\
 f_i^n(k^2) &= -2f_i^{\Sigma^0}(k^2); & f_i^{\Xi^0}(k^2) &= 2f_i^{\Lambda}(k^2),
 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

или аналогичные соотношения между магнитными моментами барионов

$$\begin{aligned}
 \mu_p &= \mu_{\Sigma^+}; & \mu_{\Xi^-} &= \mu_{\Sigma^-}; \\
 \mu_n &= -2\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = 2\mu_{\Lambda}.
 \end{aligned}$$

§ 7. Метод тензорных операторов

Наряду с тензорным методом, которым мы до сих пор пользовались, при вычислениях можно использовать другой способ, получивший название метода тензорных операторов. Его суть сводится к следующему.

Рассмотрим систему, состоящую из двух унитарных мультиплетов. Будем характеризовать мультиплет числами Y, I, I_z — гиперзарядом, изоспином и проекцией изоспина частиц. Если волновые функции октетов заданы $\psi_{YII_z}, \psi_{Y'I'I'_z}$, то волновая функция ψ , системы запишется следующим образом:

$$\psi = \sum C_{YII_z; Y'I'I'_z} \psi_{YII_z} \psi_{Y'I'I'_z}, \quad (7.1)$$

где $C_{YII_z; Y'I'I'_z}$ — унитарные коэффициенты Клебша — Гордана.

Явный вид разложений (7.1) для произведений различных мультиплетов при фиксированных значениях YII_z и $Y'I'I'_z$, приведен в журнале *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 1005 (1964). Например, для системы, состоящей из π^0 -мезона ($Y = 0, I = 1, I_z = 0$) и протона ($Y = 1, I = I_z = 1/2$) разложение (7.1) выглядит так (обе частицы принадлежат октету, поэтому надо пользоваться таблицей 8×8):

$$\begin{aligned} \langle p\pi^0 | \rightarrow & \left(\begin{array}{c} 8 \\ 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 8 \\ 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \right) = \sqrt{\frac{1}{3}} a_{27}^{I=\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{60}} a_{27}^{I=\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{3}} a_{10}^{I=\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{12}} a_{10}^{I=\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{20}} a_8^{I=\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{12}} a_8^{I=\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

В случае системы, состоящей из π^0 -мезона и резонанса N^* ($Y = 1, I = 3/2, I_z = 1/2$), разложение (7.1) запишется следующим образом (одна частица принадлежит к октету, а другая — к декуплету, поэтому надо пользоваться табл. 8×10):

$$\begin{aligned} \langle N^*\pi^0 | = & \frac{1}{\sqrt{48}} a_{27}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{15}} a_{27}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{24}} a_{10}^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{\sqrt{15}} a_8^{\frac{1}{2}} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{240}} a_{35}^{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{5}} a_{35}^{\frac{5}{2}}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Волновая функция фотона (см. § 5) состоит из двух слагаемых: $J^0(Y = I = I_z = 0)$ и $J^3(Y = 0, I = 1, I_z = 1)$, и для системы, содержащей фотон и протон ($Y = 1, I = 1/2, I_z = 1/2$), разложе-

ние запишется в виде (обе частицы принадлежат к октету, поэтому надо пользоваться табл. 8×8):

$$\begin{aligned} \langle p j_3 | = & \frac{1}{\sqrt{3}} a_{27}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{60}} a_{27}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} a_{10}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\sqrt{12}} a_{10}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \sqrt{\frac{3}{20}} a_8^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} a_{8'}^{\frac{1}{2}}; \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\langle p j_0 | = \frac{\sqrt{3}}{20} a_{27}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{10}^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} a_8^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a_{8'}^{\frac{1}{2}}.$$

Представляя начальную и конечную системы в виде (7.1), получаем следующее выражение для унитарной амплитуды процесса:

$$M = \sum_{in} a_i C_{in} C_{ni}.$$

При переименовании надо иметь в виду, что отличны от нуля лишь произведения одинаковых представлений (вследствие ортогональности представлений). Так, например, для унитарной амплитуды процесса

$$\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + N^*,$$

имея в виду (7.2) и (7.3), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} M(\pi^0 p \rightarrow \pi^0 N^*) = & \frac{1}{12} a_{27}^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{30} a_{27}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}} a_{10}^{\frac{3}{2}} + \\ & + \frac{1}{5} a_8^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3\sqrt{5}} a_{88'}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для унитарной амплитуды процесса

$$\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p,$$

учитывая (7.2), находим

$$\begin{aligned} M(\pi^0 p \rightarrow \pi^0 p) = & \frac{1}{3} a_{27}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{60} a_{27}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} a_{10}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12} a_{10}^{\frac{1}{2}} + \\ & + \frac{3}{20} a_8^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} a_{8'}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4\sqrt{5}} a_{88'}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Унитарная амплитуда процесса

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$$

с учетом (7.4) и (7.2) запишется так:

$$M(\gamma p \rightarrow p \pi^0) = \left\langle \left(p j_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} p j_0 \right) \middle| p \pi^0 \right\rangle = \\ = \frac{2}{5} a_{27} + 0 \cdot a_{10} + \frac{1}{3} a_{10} + \frac{1}{10} a_8 + \frac{1}{6} a_8 + \frac{1}{6\sqrt{5}} a_{88} + \frac{1}{2\sqrt{5}} a_{8 \cdot 8}.$$

Аналогичным образом могут быть найдены выражения для амплитуд других процессов. Эти выражения приводят к тем же соотношениям, которые были получены ранее [см. § 3—6].

§ 8. Нарушенная SU_3 -симметрия

Пока полусильное и электромагнитное взаимодействия «выключены» имеет место точная SU_3 -симметрия. Учет полусильного и электромагнитного взаимодействий ведет к тому, что унитарная симметрия нарушается. Рассмотрим некоторые эффекты, связанные с нарушением симметрии.

1. Расщепление масс. Возьмем для определенности барионный октет. В точной SU_3 -симметрии массы всех частиц октета строго одинаковы и равны m_0 . Из волновых функций свободных частиц можно построить унитарный инвариант $m_0 \text{Sp } \bar{B}B$. Учтем полусильное взаимодействие. Предположим, что оно преобразуется как компонента $(V_\mu)_3^3$ с равными нулю изотопическим спином, странностью и зарядом.

Предположим также, что полусильное взаимодействие мало по сравнению с сильным и для учета полусильного взаимодействия можно воспользоваться теорией возмущений. Тогда члены, учитывающие полусильное взаимодействие в первом порядке теории возмущений, запишутся следующим образом:

$$\Delta m = a \text{Sp } \bar{B}B V_3^3 + b \text{Sp } \bar{B}V_3^3 B,$$

где a и b — неизвестные постоянные числа.

Полная масса частицы m будет равна

$$m = m_0 \text{Sp } \bar{B}B + a \text{Sp } \bar{B}B V_3^3 + b \text{Sp } \bar{B}V_3^3 B. \quad (8.1)$$

Подставив (2.18) и (2.21) в (8.1), получим

$$m_{\Xi} = m_0 + b; \quad m_{\Sigma} = m_0;$$

$$m_N = m_0 + a; \quad m_{\Lambda} = m_0 + \frac{2}{3}(a + b).$$

Исключение констант m_0 , a , b приводит к следующему соотношению между массами частиц (формула Гелл-Манна — Окубо):

$$\frac{1}{2} (m_{\Sigma} + m_N) = \frac{1}{4} (m_{\Sigma} + 3m_{\Lambda}). \quad (8.2)$$

Аналогичным образом могут быть получены массовые формулы для других мультиплетов.

Учет расщепление масс, обусловленное электромагнитным взаимодействием. Последнее преобразуется как компонента V_1^1 . Если учесть его в первом и втором приближении теории возмущений, т. е. учесть V_1^1 и V_{11}^1 , то унитарно инвариантное взаимодействие запишется так:

$$\delta M = \alpha \bar{B}_1^i B_1^i + \beta \bar{B}_i^1 B_i^1 - 2\gamma \bar{B}_1^1 B_1^1. \quad (8.3)$$

Объединение (8.1) и (8.3) дает

$$\left. \begin{aligned} m_{\Sigma^-} &= m_0 + b + \alpha; & m_{\Lambda} &= m_0 + \frac{2}{3}(a+b) + \frac{1}{6}(\alpha+\beta) - \frac{1}{3}\gamma; \\ m_{\Sigma^0} &= m_0 + b; & m_n &= m_0 + \alpha; \\ m_{\Sigma^-} &= m_0 + \alpha; & m_p &= m_0 + a + \beta; \\ m_{\Sigma^0} &= m_0 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta) - \gamma; & m_{\Lambda\Sigma} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}(\alpha+\beta) - \frac{2}{\sqrt{3}}\gamma; \\ m_{\Sigma^+} &= m_0 + \beta. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Из соотношения

$$\gamma = m_{\Sigma^0} - \frac{1}{2} (m_{\Sigma^+} + m_{\Sigma^-})$$

следует, что $\gamma = -0,95 \pm 0,20$, т. е. можно положить $\gamma = 0$. Тогда из (8.4) следует еще одно соотношение [наряду с (8.2)]:

$$(m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^0}) - (m_p - m_n) = m_{\Sigma^-} - m_{\Sigma^+}. \quad (8.5)$$

Аналогично могут быть найдены расщепления масс, обусловленные электромагнитным взаимодействием, для других мультиплетов.

Все полученные массовые формулы очень хорошо согласуются с экспериментальными данными, несмотря на то что при их определении было сделано несколько произвольных существенных предположений (полусильное взаимодействие преобразуется как $(V_{\rho})_3^3$, возможность пренебрежения вкладом V_{33}^{33} и т. д.)

2. Амплитуды процессов. Учет полусильных взаимодействий ведет к изменению выражений для амплитуд процессов, полученных в рамках точной SU_3 -симметрии (§ 3—6).

Рассмотрим для примера процесс

$$B \rightarrow B + P. \quad (8.6)$$

Если учесть полусильное взаимодействие, то выражение для амплитуды этого процесса будет состоять из двух частей:

$$M = M_0 + M'. \quad (8.7)$$

Первое слагаемое определяется выражением (4.2). Второй член в (8.7) описывает вклад полусильного взаимодействия. Чтобы определить явный вид M' в первом порядке теории возмущения, надо найти независимые комбинации, которые можно построить из λ_8 , B , B' , P' . Так как λ_8 принадлежит к октету, то в данном случае число независимых унитарных скаляров равно восьми (см. процесс $BP \rightarrow B'P'$ в § 3), поэтому M' можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} M' = & g_1 \text{Sp}(\bar{B}B) \text{Sp}(P\lambda_8) + g_2 \text{Sp}(\bar{B}P) \text{Sp}(B\lambda_8) + g_3 \text{Sp}(\bar{B}\lambda_8) \times \\ & \times \text{Sp}(BP) + g_4 \text{Sp}(\bar{B}BP\lambda_8) + g_5 \text{Sp}(\bar{B}B\lambda_8 P) + g_6 \text{Sp}(B\bar{B}P\lambda_8) + \\ & + g_7 \text{Sp}B\bar{B}\lambda_8 P + g_8 [\text{Sp}(\bar{B}P B\lambda_8) - \text{Sp}(\bar{B}\lambda_8 BP)]. \quad (8.8) \end{aligned}$$

Так как при зарядовом сопряжении

$$\text{Sp}\bar{B}BP\lambda_8 \rightarrow \text{Sp}\bar{B}B\lambda_8 P, \quad \text{Sp}\bar{B}P \text{Sp}B\lambda_8 \rightarrow \text{Sp}\bar{B}\lambda_8 \text{Sp}BP,$$

то окончательно матричный элемент процесса (8.6) запишется в виде

$$\begin{aligned} M' = & g_1 \text{Sp}(\bar{B}B) \text{Sp}'(P\lambda_8) + g_2' [\text{Sp}(\bar{B}P) \text{Sp}(B\lambda_8) + \text{Sp}(\bar{B}\lambda_8) \text{Sp}(BP)] + \\ & + g_4' [\text{Sp}(\bar{B}BP\lambda_8) + \text{Sp}\bar{B}B\lambda_8 P] + g_6' [\text{Sp}(B\bar{B}P\lambda_8) + \\ & + \text{Sp}(B\bar{B}\lambda_8 P)] + g_8 [\text{Sp}(\bar{B}P B\lambda_8) - \text{Sp}(\bar{B}\lambda_8 BP)]. \quad (8.9) \end{aligned}$$

Подставляя в эту формулу матрицы (2.18), (2.19) и (2.21), находим выражение констант связи частиц через параметры g_i . Исключение последних приводит к соотношениям между константами связи, например

$$\begin{aligned} g_{\bar{p}\Lambda K^+} - g_{\bar{\Sigma}^+ \Lambda \pi^-} + \frac{2}{\sqrt{6}} g_{\bar{n}p\pi^+} - \frac{1}{\sqrt{3}} g_{\bar{p}\Sigma^0 K^-} = \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} g_{\bar{\Sigma}^+ \Sigma^0 \pi^-} - \frac{2}{\sqrt{3}} g_{\bar{\Sigma}^0 \Xi^- K^-}. \quad (8.10) \end{aligned}$$

Для того чтобы записать амплитуду процесса $B + P \rightarrow B' + P'$ с учетом полусильного взаимодействия, следует добавить к формуле (3.7) член, соответствующий вкладу полусильного взаимодействия.

Для получения последнего в первом порядке теории возмущений, надо каждое слагаемое формулы (3.7) заменить суммой всех возможных для него сверток по V_3^3 . Например, вместо $\text{Sp } \bar{B}P'BP$ получим

$$\text{Sp } \bar{B}P'BP \rightarrow \text{Sp } \bar{B}^3 P'_3 BP + \text{Sp } \bar{B}^3 P' B_3 P' + \dots$$

Как видно, в этом случае число произвольных функций в выражении для амплитуды существенно возрастает. С помощью матриц (2.18), (2.19) и (2.21) можно найти вид амплитуд для конкретных процессов через эти произвольные функции. Исключая последние, приходим к соотношениям между амплитудами процессов, например

$$\begin{aligned} 2 \{ (K^- p \rightarrow K^0 n) + (K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) \} + \sqrt{3} \{ (K^- p \rightarrow \Sigma^0 \eta) + \\ + (K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda) \} - 3 (K^- p \rightarrow \eta \Lambda) - (K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0) - \\ - \sqrt{6} \{ (\pi^- p \rightarrow \eta n) + (\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda) \} + \\ + \sqrt{2} \{ (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) + (\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0) \} = 0. \end{aligned}$$

3. ω — ϕ -смешивание. Вычисления в рамках нарушенной SU_3 -симметрии в случае векторных мезонов дают для массы мезона с $Y = I = 0$ величину 931 Мэв . С другой стороны, на опыте наблюдается два мезона с $Y = I = 0$: ω^0 и ϕ^0 с массами 783 и 1020 Мэв . Если считать, что даваемые SU_3 -симметрией массовые формулы правильны, то указанное расхождение можно объяснить так. Будем считать, что ω^0 является унитарным синглетом, а ϕ^0 , K^* , \bar{K}^* , ρ образуют унитарный октет. Если имеет место точная SU_3 -симметрия, то эти мультиплеты не взаимодействуют. В случае нарушенной SU_3 -симметрии возможен переход $\omega^0 \rightleftharpoons \phi^0$, т. е. становятся отличными от нуля недиагональные элементы оператора квадрата массы \mathfrak{M}^2 , равные $\langle \omega^0 | \mathfrak{M}^2 | \phi^0 \rangle$. Другими словами, ω^0 и ϕ^0 являются нефизическими состояниями. Физическими состояниями будут комбинации ω^0 и ϕ^0 , приводящие к диагональным матричным элементам оператора \mathfrak{M}^2 :

$$\varphi = \cos \alpha \phi^0 + \sin \alpha \omega^0, \quad \omega = -\sin \alpha \phi^0 + \cos \alpha \omega^0, \quad (8.11)$$

где α — угол смешивания.

По определению,

$$\begin{aligned} m_{\varphi^0}^2 &= \langle \varphi^0 | \mathfrak{M}^2 | \varphi^0 \rangle, & m_{\omega^0}^2 &= \langle \omega^0 | \mathfrak{M}^2 | \omega^0 \rangle \\ m_{\varphi}^2 &= \langle \varphi | \mathfrak{M}^2 | \varphi \rangle, & m_{\omega}^2 &= \langle \omega | \mathfrak{M}^2 | \omega \rangle. \end{aligned}$$

Подставляя в последние формулы (8.11), получаем три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha m_{\varphi^0}^2 + \sin^2 \alpha m_{\omega^0}^2 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \delta_{\varphi\omega} &= m_{\varphi}^2; \\ \sin^2 \alpha m_{\varphi^0}^2 + \cos^2 \alpha m_{\omega^0}^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha \delta_{\varphi\omega} &= m_{\omega}^2; \\ \langle \varphi | \mathfrak{M}^2 | \omega \rangle = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \delta_{\varphi\omega} + \sin \alpha \cos \alpha (m_{\omega^0}^2 - m_{\varphi^0}^2) &= 0, \end{aligned} \right\} (8.12)$$

где

$$\delta_{\varphi\omega} = \langle \varphi^0 | \mathfrak{M}^2 | \omega^0 \rangle = \langle \omega^0 | \mathfrak{M}^2 | \varphi^0 \rangle.$$

Из этих уравнений можно определить три неизвестные величины; $m_{\omega^0}^2$, $\cos \alpha$ и $\delta_{\varphi\omega}$, в частности, угол смешивания

$$\cos 2\alpha = \frac{2m_{\varphi^0}^2 - m_{\varphi}^2 - m_{\omega}^2}{m_{\varphi}^2 - m_{\omega}^2}, \quad \alpha \sim 39^{\circ}40'.$$

Поэтому выражение (8.11) переписется так:

$$\varphi^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \varphi - \sqrt{\frac{1}{3}} \omega; \quad \omega^0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \varphi + \sqrt{\frac{2}{3}} \omega. \quad (8.13)$$

Иначе говоря, можно ввести все вычисления с нефизическими ω^0 и φ^0 , но в конечных результатах надо их заменить выражениями (8.13).

§ 9. SU_6 -симметрия

Элементарные частицы обладают пространственными и внутренними свойствами симметрии. Эти свойства связаны с инвариантностью относительно пространственных групп (группа трехмерных вращений пространства, группа Лоренца, Пуанкаре — см. Дополнение IV) и групп внутренней симметрии (группа трехмерных вращений в изопространстве или SU_2 , группа SU_3 и т. п.). До сих пор мы анализировали пространственные и внутренние свойства симметрии раздельно. Следующим шагом является совместное рассмотрение их. Для этого необходимо объединить группы пространственной и внутренней симметрии.

Наиболее полным решением задачи было бы нахождение такой группы, которая объединила бы группу Пуанкаре с группой внутренней симметрии (например, SU_3). Такой синтез удовлетворял бы требованиям теории относительности. Однако при решении этой задачи возникают трудности, которые пока не удалось преодолеть.

Более простым вариантом является объединение группы пространственного спина SU_2 с одной из групп внутренней симметрии (например, SU_3). Такой подход будет существенно нерелятивист-

ким: в нем полностью пренебрегается спин-орбитальным взаимодействием. Так как такое пренебрежение можно сделать лишь в ограниченном числе случаев, то указанный подход имеет весьма ограниченную область применения.

Мы не будем подробно останавливаться на вопросах, связанных с SU_6 -симметрией и отсылаем интересующихся к специальным обзорам и книгам (см. литературу к этой главе).

ГЛАВА 14

ФАЗОВЫЙ АНАЛИЗ ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Как мы видели, использование общих свойств симметрии позволяет построить только такие выражения для амплитуды процесса, которые содержат неизвестные скалярные функции.

Вычисление этих функций составляет дальнейшую задачу теории. Однако, прежде чем излагать теоретические методы вычисления скалярных функций, мы остановимся на способе определения этих функций с помощью опытных данных. Такой метод получил название фазового анализа.

Наиболее удобной для фазового анализа является запись амплитуды в виде разложения по парциальным волнам (см. гл. 8).

Как будет видно (§ 2), число неизвестных величин, входящих в выражение для амплитуды, можно существенно уменьшить, если воспользоваться свойством унитарности S -матрицы рассеяния. Поэтому мы сначала, используя условие унитарности, преобразуем амплитуду к виду, содержащему минимальное число неизвестных параметров, а затем перейдем к определению этих параметров с помощью опытных данных.

§ 1. Унитарность S -матрицы

Рассмотрим физическую систему, которая может находиться в различных n дискретных состояниях. Если вероятность найти рассматриваемую систему в каком-либо одном состоянии l равна ω_l (где $l = 1, 2, \dots, n$), то полная вероятность найти систему во всех возможных состояниях равна единице

$$\sum_{l=1}^n \omega_l = 1. \quad (1.1)$$

Если на систему наложить дополнительное взаимодействие, то она перейдет в другие состояния. При этом вероятность найти систему в состоянии l , вообще говоря, изменится, однако полная вероятность по-прежнему останется равной единице

$$\sum_{l=1}^n \omega'_l = 1. \quad (1.2)$$

Пусть состояние l описывается волновой функцией Φ_l ; тогда (1.1) и (1.2) можно также записать с помощью Φ_l в следующем виде:

$$\sum_{i=1} (\Phi_i^* \Phi_l) = 1; \quad (1.3)$$

$$\sum_{i=1} (\Phi_i^* \Phi'_i) = 1. \quad (1.4)$$

С помощью S -матрицы рассеяния находим волновую функцию системы после взаимодействия, зная волновую функцию Φ_i системы до взаимодействия

$$\Phi_f = S_{fi} \Phi_i. \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и учитывая (1.3), будем иметь

$$\sum S_{ik}^* \Phi_k^* S_{il} \Phi_l = \sum \Phi_k^* \Phi_l S_{ik}^* S_{il} = \sum \Phi_l^* \Phi_l. \quad (1.6)$$

Так как это соотношение должно выполняться для произвольной волновой функции Φ_l , то

$$\sum S_{ik}^* S_{il} = \delta_{kl}. \quad (1.7)$$

Таким свойством должна обладать S -матрица, чтобы сохранялась как вероятность, т. е. нормировка волновых функций, так и их ортогональность ($\Phi_i^* \Phi_m = \delta_{im}$).

Матрицу, удовлетворяющую (1.7), называют унитарной. В символической форме (1.7) запишется в следующем виде:

$$S^+ S = S S^+ = 1. \quad (1.8)$$

Свойство унитарности S -матрицы приводит к важным следствиям. В частности, условие унитарности позволяет упростить выражения для дифференциальных сечений процессов, найденных в гл. 8.

§ 2. Условие унитарности и параметризация S -матрицы

Входящие в выражение для дифференциального сечения парциальные амплитуды являются комплексными величинами, и потому каждая из них характеризуется двумя вещественными параметрами: действительной и мнимой частями. Другими словами, для определения каждой парциальной амплитуды надо найти два вещественных параметра. Число этих параметров можно уменьшить, если использовать унитарность S -матрицы и ее инвариантность относительно отражения времени. В явном виде матрица S_{fi} запишется:

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \dots \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \dots \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

В общем случае, когда имеется n физических состояний, могущих переходить друг в друга, S -матрица характеризуется $2n^2$ вещественными параметрами.

Если имеет место инвариантность относительно обращения времени, то S -матрица симметрична, т. е.

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}. \quad (2.2)$$

Учет этого ведет к некоторому уменьшению числа параметров, определяющих S -матрицу.

К дальнейшему уменьшению числа параметров приводит условие унитарности.

Проиллюстрируем это несколькими примерами.

Упругое рассеяние бесспиновых частиц (например, $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$). В этом случае состояние системы характеризуется орбитальным моментом l и его проекцией m . S -матрица, вследствие закона сохранения момента и энергии, запишется в виде

$$S_l(W) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(W' - W) \equiv F_l(W) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(W' - W),$$

а матрица (2.1) вырождается в функцию. Требование унитарности такой S -матрицы дает

$$F_l(W) F_l^*(W) = 1.$$

Отсюда следует, что парциальные амплитуды можно записать, например, в таком виде:

$$F_l(W) = e^{2i\delta_l(W)}, \quad (2.3)$$

где $\delta_l(W)$ — вещественные функции энергии. Они называются фазами рассеяния и полностью характеризуют рассматриваемый процесс. Иначе говоря, использование условия унитарности приводит к тому, что для характеристики парциальных амплитуд требуется не два параметра (вещественная и мнимая части), а одна фаза.

Упругое рассеяние π -мезонов на нуклонах. Для этой реакции отличны от нуля переходы $l + 1/2 \rightarrow l' + 1/2$ и $l - 1/2 \rightarrow l' - 1/2$, в случае когда полный изотопический спин системы равен либо $1/2$, либо $3/2$, т. е. переходы с определенным значением полного момента J и изотопического спина I , поэтому S -матрица запишется следующим образом:

$$S_{IJ}(W) \delta_{JJ'} \delta_{II'} \delta_{MM'} \delta_{ll'} \delta(W' - W) \equiv F_{IJ}(W) \delta_{JJ'} \delta_{II'} \delta_{MM'} \delta_{ll'} \delta(W' - W)$$

или в виде диагональной матрицы

$$\begin{vmatrix} \langle l + \frac{1}{2} | S_{IJ} | l + \frac{1}{2} \rangle & 0 \\ 0 & \langle l - \frac{1}{2} | S_{IJ} | l - \frac{1}{2} \rangle \end{vmatrix}.$$

Из требования унитарности этой S -матрицы

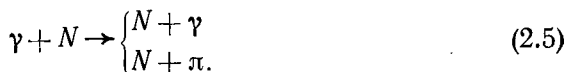
$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cc} \langle l + \frac{1}{2} | S_{IJ} | l + \frac{1}{2} \rangle & 0 \\ 0 & \langle l - \frac{1}{2} | S_{IJ} | l - \frac{1}{2} \rangle \end{array} \right| \times \\
 & \times \left| \begin{array}{cc} \langle l + \frac{1}{2} | S_{IJ}^* | l + \frac{1}{2} \rangle & 0 \\ 0 & \langle l - \frac{1}{2} | S_{IJ}^* | l - \frac{1}{2} \rangle \end{array} \right| = \\
 & = \left| \begin{array}{cc} \langle + | S_{IJ} | + \rangle \langle + | S_{IJ}^* | + \rangle & 0 \\ 0 & \langle - | S_{IJ} | - \rangle \langle - | S_{IJ}^* | - \rangle \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

следует, что $F_{IJ}(W)F_{IJ}^*(W) = 1$. Таким образом, парциальные амплитуды процесса $\pi N \rightarrow \pi N$ можно представить в виде

$$F_{IJ}(W) = e^{2i\delta_{IJ}(W)}. \quad (2.4)$$

где $\delta_{IJ}(W)$ — фаза рассеяния π -мезонов на нуклоне в состоянии с данными полным моментом J и изотопическим спином I . В данном случае, благодаря использованию условия унитарности, число неизвестных параметров уменьшилось вдвое.

Фотообразование π -мезонов на нуклонах. Когда фотон налетает на нуклон возможны следующие реакции:



Поэтому для этого процесса (2.1) представляет собой матрицу

$$\begin{vmatrix} N\gamma | N\gamma & N\gamma | N\pi \\ N\pi | N\gamma & N\pi | N\pi \end{vmatrix}.$$

В отличие от двух предыдущих примеров, в этом случае элементами S -матрицы являются амплитуды не одного и того же, а различных процессов. Ее диагональные члены соответствуют амплитудам упругих реакций ($p\gamma \rightarrow p\gamma$ и т. п.), а недиагональные — амплитудам неупругих реакций ($p\gamma \rightarrow p\pi^0$ и т. п.). Каждая из двух частиц определяет соответствующий канал реакции. Канал реакции в (2.5), определяемый $p\gamma$, называется входным. Каналы реакции, определяемые $p'\gamma'$, $p\pi^0$, $n\pi^+$, называются выходными. Реакция (2.5) — многоканальная, а рассмотренные выше процессы $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, $\pi N \rightarrow \pi N$ — одноканальные.

Для многоканальных реакций условие унитарности может привести к связи между амплитудами различных процессов. В частности, покажем, что парциальную амплитуду процесса фотообразования (2.5) можно представить в виде

$$iN e^{i\delta(W)}, \quad (2.6)$$

где N — модуль парциальной амплитуды фотообразования, $\delta(W)$ — фаза рассеяния образовавшихся π -мезонов на нуклоне. При этом мы воспользуемся, кроме унитарности S -матрицы, еще тем, что она симметрична [см. формулу (2.2)].

«Выключим» сначала все взаимодействия; тогда S -матрица будет единичной:

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.7)$$

Если «включить» сильное взаимодействие, то станет возможным процесс рассеяния мезонов на нуклонах и поэтому вместо (2.7) получаем, учитывая (2.4):

$$S = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2i\delta_{22}} \end{vmatrix}. \quad (2.8)$$

Здесь δ_{22} — фаза рассеяния π -мезонов на нуклонах. До тех пор, пока энергия фотонов меньше порога реакции парного рождения мезонов $\gamma N \rightarrow N\pi\pi$, величины δ будут вещественными.

Наконец, «включим» электромагнитное взаимодействие, пропорциональное только первой степени константы связи e ; тогда S -матрица примет вид

$$S = \begin{vmatrix} 1 & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & S_{12} \\ S_{21} & e^{2i\delta_{22}} \end{vmatrix}; \quad S_{12} \text{ и } S_{21} \sim e. \quad (2.9)$$

Матричный элемент S_{11} , описывающий процесс $\gamma p \rightarrow \gamma p$, становится отличным от единицы лишь после учета электромагнитного взаимодействия, пропорционального квадрату константы связи e . Вкладами взаимодействия $\sim e^2$ мы будем пренебрегать. Поэтому, имея в виду (1.8) и (2.2), найдем

$$\begin{aligned} SS^+ &= \begin{vmatrix} 1 & S_{12} \\ S_{21} & e^{2i\delta_{22}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & S_{21}^* \\ S_{21}^* & e^{-2i\delta_{22}} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 + |S_{12}|^2 & S_{12}^* + S_{12} e^{-2i\delta_{22}} \\ S_{12} + S_{12}^* e^{2i\delta_{22}} & 1 + |S_{12}|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В рассматриваемом нами приближении величиной $|S_{12}|^2 \sim e^2$ надо пренебречь, тогда (2.10) даст

$$S_{12} + S_{12}^* e^{2i\delta_{22}} = 0. \quad (2.11)$$

$$S_{12} + S_{12} e^{-2i\delta_{22}} = 0. \quad (2.12)$$

Умножая обе части (2.11) на S_{12} , имеем

$$S_{12}^2 = -|S_{12}|^2 e^{2i\delta_{22}}, \quad (2.13)$$

откуда

$$S_{12} = \pm i |S_{12}| e^{i\delta_{22}}, \quad (2.14)$$

т. е. амплитуда фотообразования определяется фазой $\delta(W)$ упругого πN -рассеяния. Причем фаза соответствует той энергии, которой обладает образовавшийся в конечном состоянии мезон.

В частности

$$\text{Im } S_{12} = |S_{12}| \sin \delta_{22}$$

или

$$\text{Im } S_{12} = S_{12} e^{-i\delta_{22}} \sin \delta_{22}. \quad (2.14')$$

С помощью (2.6) слагаемые, входящие в выражения (10.6) — (10.9), гл. 10 переписываются так:

$$\left. \begin{aligned} T^{\frac{3}{2}}\left(J = \frac{1}{2}, l = 0, e_1\right) &= e^{i\delta_2} E_3; & T^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}, 1, e_2\right) &= e^{i\delta_{22}} E_{33}; \\ T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, 0, e_1\right) &= e^{i\delta_1} E_1; & T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, 1, e_2\right) &= e^{i\delta_{13}} E_{13}; \\ T^s\left(\frac{1}{2}, 0, e_1\right) &= \frac{1}{2} e^{i\delta_1} E'_1; & T^s\left(\frac{3}{2}, 1, e_2\right) &= \frac{1}{2} e^{i\delta_{13}} E'_{13}; \\ T^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}, 1, m_1\right) &= e^{i\delta_{33}} M_{33}; & T^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}, 1, m_1\right) &= e^{i\delta_{31}} M_{31}; \\ T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{2}, 1, m_1\right) &= e^{i\delta_{13}} M_{13}; & T^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}, 1, m_1\right) &= e^{i\delta_{11}} M_{11}; \\ T^s\left(\frac{3}{2}, 1, m_1\right) &= \frac{1}{2} e^{i\delta_{13}} M'_{13}; & T^s\left(\frac{1}{2}, 1, m_1\right) &= \frac{1}{2} e^{i\delta_{11}} M'_{11}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Здесь M_{IJ} , E_{IJ} — модули соответствующих парциальных амплитуд образования фотоном πN -системы с полным изоспином I и полным моментом J , δ_{IJ} — соответствующие фазы рассеяния мезонов на нуклонах, e_i , m_i — мультиполи (электрические и магнитные).

Используя (2.15), запишем, имея в виду формулы (10.6) и (10.7), гл. 10, парциальные амплитуды фотообразования в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_d^+ &= \sqrt{2} e^{i\delta_3} E_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_1} (E_1 - E'_1); \\ M_d^+ \left(\frac{1}{2} \right) &= \sqrt{2} e^{i\delta_{31}} M_{31} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_{11}} (M_{11} - M'_{11}); \\ M_d^+ \left(\frac{3}{2} \right) &= \sqrt{2} e^{i\delta_{33}} M_{33} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_{13}} (M_{13} - M'_{13}); \\ E_q^+ &= \sqrt{2} e^{i\delta_{33}} E_{33} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\delta_{13}} (E_{13} - E'_{13}); \end{aligned} \right\} (2.16)$$

$$\left. \begin{aligned} E_d^0 &= 2e^{i\delta_3} E_3 - \frac{1}{2} e^{i\delta_1} (E_1 - E'_1); \\ M_d^0 \left(\frac{1}{2} \right) &= 2e^{i\delta_{31}} M_{31} - \frac{1}{2} e^{i\delta_{11}} (M_{11} - M'_{11}); \\ M_d^0 \left(\frac{3}{2} \right) &= 2e^{i\delta_{33}} M_{33} - \frac{1}{2} e^{i\delta_{13}} (M_{13} - M'_{13}); \\ E_q^0 &= 2e^{i\delta_{33}} E_{33} - \frac{1}{2} e^{i\delta_{13}} (E_{13} - E'_{13}). \end{aligned} \right\} (2.17)$$

Тем самым парциальные амплитуды фотообразования мезонов выражены через амплитуды образования системы мезон — нуклон с соответствующим полным моментом и изотопическим спином.

Упругое рассеяние нейтронов на протонах. Парциальная амплитуда (см. гл. 8, § 1) перехода из синглетного состояния ($s = 0$) в синглетное состояние ($s' = 0$), симметричная по индексам s , s' , запишется по аналогии со случаем πN -рассеяния в виде

$$C_l(W) = e^{2i\delta_l(W)}. \quad (2.18)$$

Функции $T_{m_s m_{s'}}$, описывающие переход из триплетного состояния в триплетное, образуют недиагональную матрицу (наряду с функциями с $m_s = m_{s'}$ имеются функции с $m_s \neq m_{s'}$). Поэтому парциальные амплитуды $a_l(W)$ и $b_l(W)$ будут иметь более сложную структуру по сравнению с (2.18). Обычно парциальные амплитуды a_l и b_l , если учесть требование унитарности, выражают через фазы δ_a и δ_b следующим образом (такой выбор не единственный):

для $l = J$

$$a_J^J = \sin \delta_J^J e^{i\delta_J^J}; \quad (2.19)$$

для $l = J - 1$

$$\begin{aligned} a_{J-1}^J &= \alpha^J \cos^2 \varepsilon_J + \beta^J \sin^2 \varepsilon_J - \sqrt{\frac{J}{J+1}} \cdot \frac{1}{2} (\alpha^J - \beta^J) \sin^2 \varepsilon_J; \\ b_{J-1}^J &= \alpha^J \cos^2 \varepsilon_J + \beta^J \sin^2 \varepsilon_J + \sqrt{\frac{J+1}{J}} \cdot \frac{1}{2} (\alpha^J - \beta^J) \sin^2 \varepsilon_J; \end{aligned} \quad (2.20)$$

для $l = J + 1$

$$\begin{aligned} a_{J+1}^J &= \alpha^J \sin^2 \varepsilon_J + \beta^J \cos^2 \varepsilon_J - \sqrt{\frac{J+1}{J}} \cdot \frac{1}{2} (\alpha^J - \beta^J) \sin^2 \varepsilon_J; \\ b_{J+1}^J &= \alpha^J \sin^2 \varepsilon_J + \beta^J \cos^2 \varepsilon_J + \sqrt{\frac{J}{J+1}} \cdot \frac{1}{2} (\alpha^J - \beta^J) \sin^2 \varepsilon_J, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\alpha^J = \sin \delta_\alpha^J e^{i\delta_\alpha^J}, \quad \beta^J = \sin \delta_\beta^J e^{i\delta_\beta^J}.$$

Величину ε называют параметром связи. Он появляется вследствие того, что из данного состояния, например $l + 1, s = 1$, возможен не один, а два перехода: в состоянии $l + 1, s = 1$ и $l - 1, s = 1$, причем ε характеризует относительную вероятность перехода в каждое из этих состояний.

Подставляя полученные формулы для парциальных амплитуд в выражения для соответствующих дифференциальных сечений, находим вид последних через неизвестные параметры (фазы, модули парциальных амплитуд и т. п.). Вычисление этих параметров и составляет задачу теории.

Однако прежде чем излагать теоретические методы вычисления указанных неизвестных параметров, мы остановимся на способе, в котором эти параметры определяются с помощью опытных данных. Такой метод получил название фазового анализа.

Идея этого метода довольно проста. С одной стороны, заданы теоретические выражения для дифференциальных сечений, содержащие неизвестные параметры. С другой стороны, для тех же дифференциальных сечений имеются опытные данные. Подставляя в левые части теоретических выражений значения соответствующих экспериментальных величин, получаем систему уравнений для определения неизвестных параметров.

§ 3. Рассеяние π -мезонов на протонах

Опытные данные. Экспериментально изучены следующие процессы рассеяния мезонов на протонах:

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p; \quad (3.1)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p; \quad (3.2)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (3.3)$$

Для каждого из этих процессов измерялись: а) полные сечения σ для неполяризованных протонов (мишени); б) дифференциальные сечения $d\sigma$ для неполяризованных протонов; в) поляризация протонов отдачи P .

Сравнительно хорошо указанные процессы изучены для π -мезонов с кинетической энергией $T_\pi \lesssim 2$ Гэв (в лабораторной системе координат). Наиболее детальная информация получена для π -мезонов с кинетической энергией $T_\pi \leq 350$ Мэв.

Теоретические формулы. Когда энергия начального π -мезона становится больше порога образования двух π -мезонов (~ 200 Мэв), то наряду с упругими процессами возможны неупругие. При этом вероятность того, что процесс будет упругим, становится меньше единицы. Чтобы учесть это обстоятельство, формулу (2.4) записывают так:

$$F_{IJ}(W) = \eta_{IJ}(W) e^{2i\delta_{IJ}(W)}. \quad (3.4)$$

Здесь $\eta_{IJ}(W)$ — так называемый коэффициент поглощения. До порога неупругих процессов $\eta_{IJ} = 1$, за порогом $\eta_{IJ} < 1$.

С учетом (3.4) формулы (1.20) и (1.21), гл. 8 переписутся следующим образом:

$$F_1(W, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[(l+1) \left(\eta_{i+}^i e^{2i\delta_{i+}^i(W)} - 1 \right) + l \left(\eta_{i-}^i e^{2i\delta_{i-}^i(W)} - 1 \right) \right] P_i; \quad (3.5)$$

$$F_2(W, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\left(\eta_{i-}^i e^{2i\delta_{i-}^i(W)} - 1 \right) - \left(\eta_{i+}^i e^{2i\delta_{i+}^i(W)} - 1 \right) \right] P_i'. \quad (3.6)$$

Подставляя их в формулы (8.11) и (10.6), гл. 7, находим выражения для дифференциальных сечений и поляризаций нуклонов отдачи через фазы рассеяния δ_{IJ} .

В табл. 14.1 перечислены фазы, которые удерживались в (3.4) при практическом анализе опытных данных. Первый индекс у букв S, P, D, F, G соответствует удвоенному значению полного изотопического спина, второй — удвоенному значению полного момента.

Таблица 14.1
Учитываемые состояния πN -системы

| J | I | Состояния | | J | I | Состояния | |
|-----|-----|-----------|----------|-----|-----|-----------|----------|
| 1/2 | 1/2 | P_{11} | S_{11} | 5/2 | 3/2 | F_{35} | D_{35} |
| 1/2 | 3/2 | P_{31} | S_{31} | 7/2 | 1/2 | F_{17} | G_{17} |
| 3/2 | 1/2 | P_{13} | D_{13} | 7/2 | 3/2 | F_{37} | G_{37} |
| 3/2 | 3/2 | P_{33} | D_{33} | 9/2 | 1/2 | — | G_{39} |
| 5/2 | 1/2 | F_{15} | D_{15} | | | | |

Чтобы можно было однозначно сопоставить теоретические и экспериментальные величины, составим из амплитуд, описывающих состояния с полным изотопическим спином, амплитуды, соответствующие процессам (3.1) — (3.3), воспользовавшись соотношениями (10.12), гл. 10

$$\langle p\pi^+ | T_i | p\pi^+ \rangle = T_i^{\frac{3}{2}}, \quad \langle p\pi^- | T_i | p\pi^- \rangle = \frac{1}{3} \left(T_i^{\frac{3}{2}} + 2T_i^{\frac{1}{2}} \right),$$

$$\langle p\pi^- | T_i | n\pi^0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} \left(T_i^{\frac{3}{2}} - T_i^{\frac{1}{2}} \right).$$

Подставив в теоретические выражения экспериментальные величины $d\sigma$ и P для процессов (3.1) и (3.3) при определенной энергии π -мезонов, получим систему трансцендентных уравнений, в которую в качестве неизвестных входят фазы рассеяния $\delta_{IJ}(W)$, перечисленные в табл. 14.1

Метод анализа. При решении системы уравнений отыскивается такой набор фаз $\delta_{IJ}(W)$, который приводит к теоретическим величинам f_T , лежащим ближе всего к соответствующим экспериментальным значениям f_s , т. е. набор фаз, приводящий к минимуму величины χ^2 , определяемой суммой

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{(f_s)_k - (f_T)_k}{\Delta (f_s)_k} \right]^2, \quad (3.7)$$

где n — полное число экспериментальных точек для $d\sigma^+$, $d\sigma^{-/0}$, $d\sigma^-$, P^+ , P^- , $P^{-/0}$, Δf_s — экспериментальные ошибки для данной точки.

При этом трансцендентная система уравнений аппроксимируется линейной системой, а последняя решается методом последовательных приближений.

Расчеты производились с помощью электронной счетной машины.

Результаты анализа. Определения фаз рассеяния для мезонов с энергией $T_\pi \leq 350$ Мэв проводились многими авторами, и все они получили довольно близкие результаты. Как выяснилось, опытные данные для фиксированной энергии π -мезонов допускают несколько наборов фаз рассеяния. Значения основных фаз одного из таких наборов приведены в табл. 14.2. Соответствующие фазы других наборов отличаются друг от друга на величину $\leq 2^\circ$.

Опытные данные при более высоких энергиях π -мезонов (вплоть до $T_\pi \leq 2,2$ Гэв) анализировались несколькими группами авторов, которые пришли к различающимся результатам. В качестве примера на рис. 14.1 и 14.2 приведены полученные одной из групп значения некоторых фаз рассеяния и соответствующих коэффициентов поглощения η для различных энергий.

Фаза рассеяния, град

| $T_{\pi},$ $M_{\text{эв}}$ | S_{11} | S_{31} | P_{11} | P_{31} | P_{13} | P_{33} |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 6 | 2,599 | -1,078 | -0,082 | -0,044 | -0,018 | 0,231 |
| 20 | 4,414 | -2,257 | -0,429 | -0,246 | -0,104 | 1,446 |
| 31 | 5,295 | -3,031 | -0,755 | -0,455 | -0,193 | 2,862 |
| 58 | 6,780 | -4,795 | -1,549 | -1,083 | -0,457 | 7,952 |
| 98 | 8,235 | -7,345 | -2,249 | -2,203 | -0,909 | 20,954 |
| 120 | 8,855 | -8,766 | -2,189 | -2,887 | -1,167 | 32,360 |
| 140 | 9,356 | -10,077 | -1,762 | -3,544 | -1,400 | 46,310 |
| 170 | 10,036 | -12,079 | -0,318 | -4,589 | -1,736 | 72,383 |
| 194 | 10,542 | -13,709 | 1,643 | -5,481 | -1,985 | 92,650 |
| 200 | 10,665 | -14,120 | 2,257 | -5,713 | -2,044 | 97,059 |
| 220 | 11,070 | -15,500 | 4,680 | -6,514 | -2,231 | 109,472 |
| 240 | 11,471 | -16,892 | 7,703 | -7,362 | -2,400 | 118,748 |
| 270 | 12,073 | -18,996 | 13,365 | -8,738 | -2,617 | 128,477 |
| 290 | 12,480 | -20,406 | 17,832 | -9,737 | -2,736 | 133,116 |
| 310 | 12,896 | -21,817 | 22,746 | -10,811 | -2,835 | 136,780 |
| 333 | 13,388 | -23,439 | 28,765 | -12,149 | -2,823 | 140,143 |
| 345 | 13,652 | -24,283 | 31,978 | -12,894 | -2,958 | 141,624 |

Основной особенностью фазового анализа является то, что он позволяет обнаружить резонансные состояния πN -системы. В изученной области энергий ($T_{\pi} \leq 2,2$ Гэв) анализ дает около 20 резонансных πN -состояний (резонансу соответствует прохождение фазы через 90°). Некоторые из этих резонансов обнаружены всеми группами авторов и потому являются установленными; к таким резонансам относятся (см. табл. I, Дополнение I) P_{33} (1236), S_{31} (1640), F_{37} (1950), P_{11} (1470), D_{13} (1520), S_{11} (1550), D_{15} (1680), F_{15} (1690), S_{11} (1710). Другая часть резонансов получается у одних групп авторов и не получается у других и потому нуждается в дальнейшем изучении. (Дальнейшие сведения можно найти, например, в обзоре Donnachie — см. литературу к этому параграфу.)

Однозначность определения фаз. Рассмотрим два процесса:

$$0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+; \quad (I)$$

$$0^+ + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{1}{2}^+, \quad (II)$$

отличающихся друг от друга четностью падающих мезонов. Амплитуды этих выражений, согласно формулам (2.4') и (2.5), гл. 7, выглядят так:

$$F_1 = \chi_f^+ [F_1 + i F_2 (\sigma[\mathbf{k}'\mathbf{k}])] \chi_i \tilde{\varphi}(\mathbf{q}_1) \tilde{\varphi}^*(\mathbf{q}_3);$$

$$F_{II} = (\sigma\mathbf{k}') F_1.$$

Поскольку $(\sigma k')^2 = 1$, то выражения для дифференциальных сечений обоих процессов одинаковы. Иначе говоря, если произвести преобразование амплитуды

$$F \rightarrow (\sigma k') F, \quad (3.8)$$

то выражение для дифференциального сечения процесса (I) не меняется (теорема Минами).

Аналогичным образом из сравнения выражений (1.20) и (1.21), гл. 8 для амплитуд процессов (I) и (II) следует, что формулы для

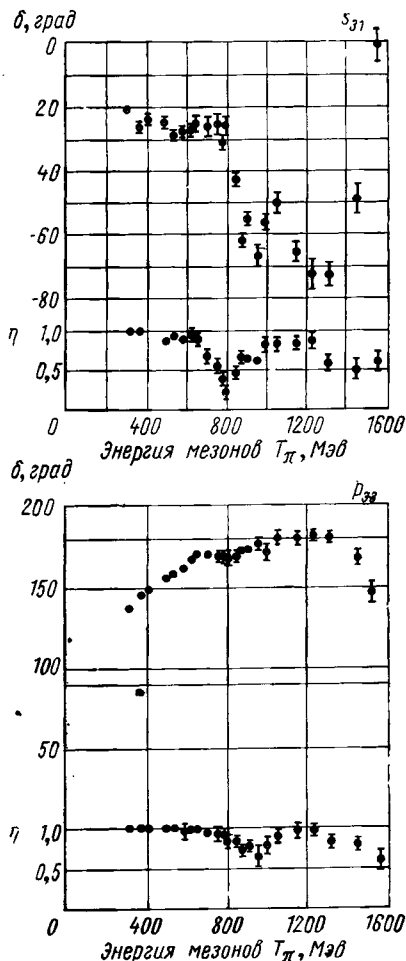


Рис. 14.1. Значения фаз s_{31} и p_{32} рассеяния мезонов на нуклонах и коэффициента поглощения для кинетических энергий мезона $T \leq 1,6$ Гэв.

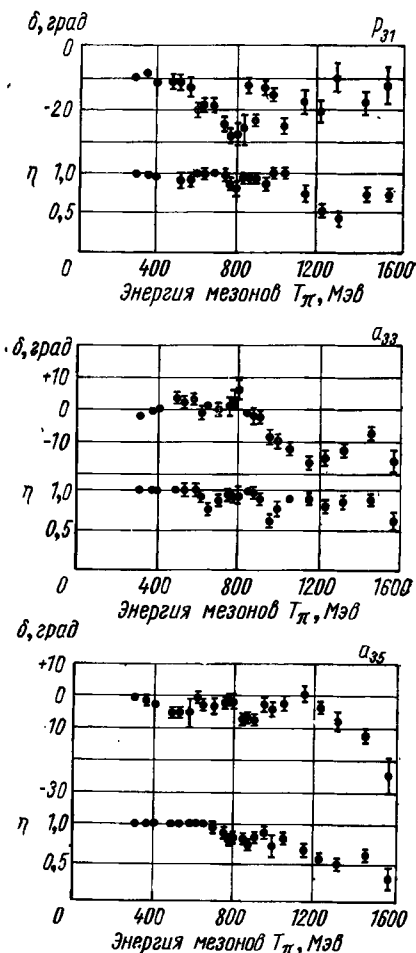


Рис. 14.2. Значения фаз рассеяния мезонов на нуклонах и коэффициента поглощения для кинетических энергий мезона $T \leq 1,6$ Гэв.

дифференциальных сечений указанных реакций не изменятся, если произвести следующую замену парциальных волн:

$$f_{l+\frac{1}{2}} \rightarrow f_{l-\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

или, согласно (2.3), такую замену фаз рассеяния

$$\delta_{l+} \rightarrow \delta_{l-}. \quad (3.10)$$

Иными словами, с помощью опытных значений только дифференциальных сечений $d\sigma$ фазы рассеяния δ однозначно определить нельзя. Так, например, если за основные принять фазы $p_{1/2}$, $p_{3/2}$, то, согласно (3.10), равным образом основными могут быть фазы $p_{1/2}$, $d_{3/2}$. Однако выражение (10.6), гл. 7 для поляризации нуклонов отдачи не инвариантно относительно замены (3.10). Поэтому если при анализе использовать одновременно опытные данные по дифференциальным сечениям $d\sigma$ и поляризациям P нуклонов отдачи, то указанная неоднозначность в определении фаз устраняется.

Следовательно, приведенные на рис. 14.3 и 14.4 наборы фаз в указанном смысле однозначны.

§ 4. Фотообразование π -мезонов на протонах

Опытные данные. Экспериментально изучены следующие процессы фотообразования π -мезонов на протонах;

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0; \quad (4.1)$$

$$\gamma + p \rightarrow n + \pi^+. \quad (4.2)$$

Ограничимся рассмотрением области энергий фотона $E \leq 400$ Мэв (в лабораторной системе координат). Для каждого из этих процессов в указанной области энергий измерялись: а) полные сечения σ для неполяризованных частиц; б) дифференциальные $d\sigma$ сечения для неполяризованных частиц; в) асимметрия A угловых распределений π -мезонов, обусловленная поляризованными фотонами, г) а для реакции (4.1) — поляризация нуклонов отдачи P .

Теоретические формулы. Предположим, что фотоны с энергией $E \leq 400$ Мэв образуют мезоны лишь в s - и p -состояниях. Тогда в случае фотообразования π^0 -мезонов неполяризованными фотонами выражение для дифференциального сечения запишется в виде (4.1), гл. 8, а для поляризации протонов отдачи P — в виде (4.2), гл. 8. Если же фотоны поляризованы, то асимметрия углового распределения π^0 -мезонов описывается формулой (4.4), гл. 8.

В случае фотообразования π^+ -мезонов необходимо учесть взаимодействие фотона с образовавшимся мезоном. Это ведет к появлению в выражении для амплитуды (3.5), гл. 7 дополнительного члена,

который получил название «запаздывающего». Его физический смысл заключается в следующем. Представим себе нуклон в виде частицы, окруженной заряженным мезонным облаком. Это облако можно рассматривать как результат испускания и поглощения мезонов нуклонами. Пусть на протон падает пучок фотонов. Допустим, что в лабораторной системе протон покоится. Тогда после испускания π^+ -мезона протон перейдет в нейтрон (рис. 14.3), а фотон будет взаимодействовать с образовавшимся π^+ -мезоном. В с.ц.м. амплитуда, соответствующая запаздывающему члену, запишется так

$$b \cdot \frac{\chi_f^+ \sigma(k-k')(k'_\varepsilon) \chi_i}{1 - \beta \cos \theta}, \quad (4.3)$$

$\beta = \frac{1}{q_0} |\mathbf{k}'|$; k' , q_0 — импульс и энергия мезона, \mathbf{k} — импульс фотона, θ — угол между направлениями движения фотона и мезона. Как видно, роль запаздывающего члена характеризуется коэффициентом b , причем

$$b^2 = f_{NN\pi} e^2 \lambda^2 \frac{\mu}{k_0} \cdot \frac{k'}{k_0} \cdot \frac{M}{W} \cdot \frac{\beta^2}{\mu^2 - (k_0 - q_0)^2}, \quad (4.4)$$

где $f_{NN\pi}$ — константа связи мезона с нуклоном; λ — комптоновская длина волны мезона; μ , M — массы мезона и нуклона; W — полная энергия системы; k_0 — энергия фотона.

С учетом запаздывающего члена дифференциальное сечение образования π^+ -мезонов неполяризованным фотоном в s -, p -волновом приближении будет выглядеть следующим образом:

$$(1 - \beta \cos \theta)^2 d\sigma^+ = \frac{1}{2} b^2 \beta^2 (1 + \beta^2 \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos \theta) \sin^2 \theta - \\ - \operatorname{Re} E_{0+}^* b \beta^2 \gamma \sin^2 \theta (1 - \beta \cos \theta) + \beta \operatorname{Re} (v^+ b) (1 - \beta\gamma \cos \theta) \sin^2 \theta \times \\ \times (1 - \beta \cos \theta) + \beta^2 \gamma \sin^2 \theta \cos \theta (1 - \beta \cos \theta) \operatorname{Re} (w^+ b) + d\sigma^+, \quad (4.5)$$

где $\gamma = q_0/k_0$, а u^+ , v^+ , w^+ , $d\sigma^+$ получаются из аналогичных формул для π^0 -мезона при замене индекса «0» на «+».

Асимметрия углового распределения π^+ -мезонов, обусловленная поляризованными фотонами, определяется выражением

$$A^+ = \frac{d\sigma^+ + dN^+}{d\sigma^+ - dN^+}. \quad (4.6)$$

Здесь $d\sigma^+$ задается формулой (4.5), а $dN^+ \sim L^+$, где

$$L^+ = |v^+|^2 - |u^+|^2.$$

Подставляя в формулы (4.1), (4.2), (4.4), гл. 8 и (4.5), (4.6) парциальные амплитуды в виде (2.16) и (2.17), находим выражения, в которые будут входить двенадцать неизвестных вещественных величин M и E , если считать заданными фазы рассеяния π -мезонов на нуклонах.

Если подставить в левые части формул (4.1), (4.2), (4.4), гл. 8 и (4.5), (4.6) соответствующие опытные данные, то получим систему уравнений для определения величин M и E . Константа связи $f_{NN\pi}$, входящая в выражение (4.4) для b , известна: $\frac{1}{4\pi} f_{NN\pi}^2 = 0,08 \pm 0,002$, поэтому известной является и величина b .

Решение системы уравнений находилось тем же методом, который применялся в предыдущем параграфе при определении фаз πN -рассеяния.

Результаты анализа. С помощью имеющихся опытных данных удастся определить восемь неизвестных величин:

$$E_3, M_{31}, M_{33}, E_{33}, \mathcal{E}_1 = E_1 - E'_1,$$

$$\mathfrak{M}_{11} = M_{11} - M'_{11}, \mathfrak{M}_{13} = M_{13} - M'_{13},$$

$$\mathcal{E}_{13} = E_{13} - E'_{13}.$$

Найденные значения модулей парциальных амплитуд (умноженные на

$$(2\pi)^4 \frac{k' q_0}{\left(1 + \frac{k_0}{M}\right)^2} \cdot 10^{-15}) \text{ для } E_\gamma = 320 \text{ Мэв}$$

приведены в табл. 14.3.

Как видно из табл. 14.3, парциальные амплитуды E_1 , E_3 и M_{33} больше остальных амплитуд. Однако, если попытаться описать опытные данные лишь с помощью этих трех больших амплитуд, то χ^2

Таблица 14.3

Значения парциальных амплитуд фотообразования

| E, ν | Варианты | χ^2 | E_3 | M_{31} | M_{33} | E_{33} | \mathcal{E}_1 | \mathfrak{M}_{11} | \mathfrak{M}_{13} | \mathcal{E}_{13} |
|----------|---|-------------------------------|---|---|---|---|--|---|--|---|
| 320 | $M_{31} = E_{33} = M_{11} = M_{13} = E_{13} = 0$ $b = 0$ $\alpha_{13} = \alpha_{31} = \alpha_{11} = 0$ Уменьшены $\alpha_{33}, \alpha_1, \alpha_3$ | 44 173 58 44 43,5 | $0,94 \pm 0,13$ $1,12 \pm 0,06$ $0,78 \pm 0,19$ $0,93 \pm 0,12$ $0,71 \pm 0,06$ | $0,13 \pm 0,12$ 0 $0,11 \pm 0,34$ $0,12 \pm 0,10$ $0,15 \pm 0,08$ | $1,52 \pm 0,03$ $1,47 \pm 0,05$ $1,58 \pm 0,03$ $1,52 \pm 0,03$ $1,51 \pm 0,03$ | $0,084 \pm 0,1$ 0 $0,068 \pm 0,36$ $0,083 \pm 0,1$ $0,1 \pm 0,11$ | $2,69 \pm 0,27$ $1,17 \pm 0,06$ $2,36 \pm 0,45$ $2,7 \pm 0,23$ $3,26 \pm 0,11$ | $0,39 \pm 0,28$ 0 $0,39 \pm 0,89$ $0,45 \pm 0,31$ $0,73 \pm 0,28$ | $-0,8 \pm 0,27$ 0 $-0,41 \pm 0,21$ $-0,75 \pm 0,25$ $-0,86 \pm 0,16$ | $-0,51 \pm 0,52$ 0 $-0,58 \pm 3,4$ $-0,5 \pm 0,51$ $-0,21 \pm 0,46$ |

заметно возрастает. Это означает, что малые амплитуды не являются пренебрежимо малыми. Вклад запаздывающего члена составляет 10 — 15%.

Если положить нерезонансные фазы πN -рассеяния равными нулю, то результат практически не меняется. Уменьшение резонансных фаз πN -рассеяния на 10% изменяет значения M и E на величину, в основном не выходящую за пределы ошибок.

Следовательно, с помощью имеющихся опытных данных основные парциальные амплитуды можно определить с точностью $\sim 10\%$.

Однозначность определения парциальных амплитуд. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что выражение для дифференциального сечения $d\sigma$ процесса

$$\gamma^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 0^-$$

в случае неполяризованных фотонов не изменится, если произвести одно из следующих преобразований амплитуды (3.5), гл. 7:

$$F \rightarrow (\sigma k') F(\epsilon k); \quad (1)$$

$$F \rightarrow (\sigma k') F(\sigma k); \quad (2)$$

$$F \rightarrow F(\sigma k)(\epsilon k). \quad (3)$$

Это приводит к тому, что выражение для дифференциального сечения рассматриваемого процесса останется неизменным, если произвести соответственно одну из следующих замен парциальных амплитуд:

$$1) M_{J+} \rightarrow E_{J-}, E_{J+} \rightarrow M_{J-}, M_{J-} \rightarrow M_{J+}, E_{J-} \rightarrow M_{J+};$$

$$2) M_{J+} \rightarrow -bE_{J-} + aM_{J-}, E_{J+} \rightarrow aE_{J-} + bM_{J-},$$

$$E_{J-} \rightarrow -bM_{J+} + aE_{J+}, M_{J-} \rightarrow aM_{J+} + bE_{J+},$$

$$M_{\frac{1}{2}^+} \rightarrow -E_{\frac{1}{2}^-}, E_{\frac{1}{2}^-} \rightarrow -M_{\frac{1}{2}^+};$$

$$3) M_{J+} \rightarrow -bM_{J+} + aE_{J+}, E_{J+} \rightarrow aM_{J+} + bE_{J+},$$

$$E_{J-} \rightarrow -bE_{J-} - aM_{J-}, M_{J-} \rightarrow aE_{J-} + bM_{J-},$$

$$M_{\frac{1}{2}^+} \rightarrow -M_{\frac{1}{2}^+}, E_{\frac{1}{2}^-} \rightarrow E_{\frac{1}{2}^-},$$

где

$$a = \frac{\sqrt{(2J+3)(2J-1)}}{2J+1}; \quad b = \frac{2}{2J+1}.$$

Иначе говоря, с помощью опытных значений только дифференциальных сечений $d\sigma$ образования мезонов неполяризованными фотонами парциальные амплитуды M и E однозначно определить нельзя.

Выражение для дифференциального сечения $d\sigma_p$ образования мезонов поляризованными фотонами остается неизменным лишь при преобразовании (2) амплитуды, а для поляризации P нуклонов отдачи — только при преобразовании (3) амплитуды.

Следовательно, для однозначного определения парциальных амплитуд надо одновременно использовать опытные значения для $d\sigma$, $d\sigma_p$ и P . В этом смысле приведенные в табл. 14.3 парциальные амплитуды являются однозначными.

Поскольку исходная система алгебраических уравнений является нелинейной, то она может иметь, вообще говоря, несколько наборов решений. Для отыскания этих решений выбирались различные начальные наборы искомых величин. При этом в результате итерационной процедуры не было обнаружено других наборов парциальных амплитуд, отличных от приведенного в табл. 14.3.

§ 5. Рассеяние нуклонов на нуклонах

Для различных кинетических энергий T нуклона (в области $T \ll \leq 600$ Мэв в лабораторной системе координат) экспериментально были определены следующие величины (либо все, либо некоторые из них для каждой энергии): 1) полные сечения σ для неполяризованных частиц; 2) дифференциальные сечения $d\sigma$ для неполяризованных частиц; 3) поляризация P нуклонов отдачи; 4) параметры корреляции поляризаций C_{nn} , C_{mi} ; 5) параметры тройного рассеяния D , R , R' , A , A' (для данного процесса четыре последние параметра связаны одним соотношением).

Поясним смысл поляризационных параметров.

Возможные поляризационные опыты определяются тем, что поляризация, возникающая при столкновениях неполяризованных частиц, ортогональна плоскости рассеяния, а анализирующее рассеяние также позволяет определить только нормальную к его плоскости компоненту поляризации (см. гл. 7, § 9).

Схема опыта по измерению параметра C_{nn} показана на рис. 14.4. неполяризованный пучок, например, протонов падает на неполяризованную мишень водорода H . Рассеянный протон и протон отдачи становятся поляризованными (перпендикулярно плоскости

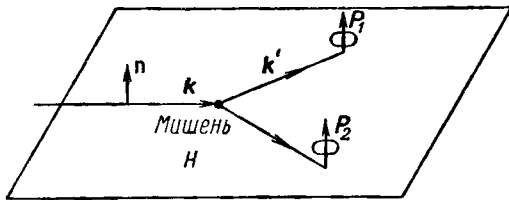


Рис. 14.4. Схема опыта по измерению параметра корреляции поляризаций C_{nn} .

рассеяния). Введем три единичных ортогональных орта

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']}{|[\mathbf{k}\mathbf{k}']|}, \quad \mathbf{l} = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{k} - \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|},$$

где \mathbf{k} , \mathbf{k}' — импульсы начальных и конечных нуклонов в с.ц.м.

В нерелятивистском приближении в лабораторной системе координат векторы \mathbf{l} и \mathbf{m} совпадают с направлениями импульсов рассеянного нуклона и нуклона отдачи соответственно.

Параметр C_{nn} связан с вероятностью того, что рассеянный протон и протон отдачи будут поляризованы вдоль вектора \mathbf{n} , т. е. перпендикулярно к плоскости рассеяния. В этом случае плоскости анализирующего и основного рассеяний совпадают.

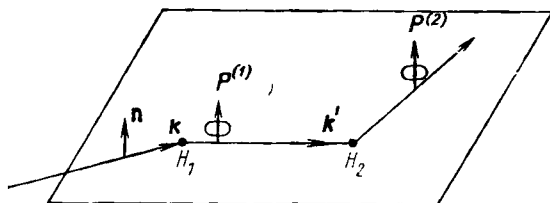


Рис. 14.5. Схема опыта по измерению параметра D .

Аналогичным образом параметр C_{ml} связан с вероятностью того, что рассеянный протон и протон отдачи будут поляризованы соответственно вдоль векторов \mathbf{m} и \mathbf{l} . В этом случае плоскости анализирующего и основного рассеяний перпендикулярны.

Согласно формулам (2.9), (10.14), гл. 7 выражения для параметров C_{nn} и C_{ml} запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{|k'|}{|k|} d\sigma C_{nn} &= \frac{1}{4} \text{Sp } F^+ (\sigma_1 \mathbf{n}) (\sigma_2 \mathbf{n}) F = \\ &= \frac{1}{2} [|F_1 + F_2|^2 - |F_1 - F_2|^2 - |F_4 + F_5|^2 + |F_4 - F_5|^2 + 4 |F_3|^2]; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma C_{ml} = \frac{1}{4} \text{Sp } F^+ (\sigma_1 \mathbf{m}) (\sigma_2 \mathbf{l}) F = 2 \text{Im} (F_4 - F_5) F_3^*. \quad (5.2)$$

Схема типичного опыта по измерению параметров тройного рассеяния изображена на рис. 14.5 и 14.6. Неполаризованный пучок протонов после первого рассеяния на водородной мишени H_1 становится поляризованным (перпендикулярно к плоскости рассеяния). Поляризованный пучок вторично рассеивается на второй водородной мишени H_2 . После третьего рассеяния на анализаторе протоны регистрируются счетчиками.

Параметр D_{nn} (рис. 14.5) связан с вероятностью того, что первично и вторично рассеянные протоны поляризованы вдоль вектора n . В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{|k'|}{|k|} d\sigma D_{nn} &= \frac{1}{4} \text{Sp } F^+ (\sigma_1 n) F (\sigma_1 n) = \\ &= \frac{1}{2} \{ |F_1 + F_2|^2 + |F_1 - F_2|^2 - |F_4 + F_5|^2 - |F_4 - F_5|^2 + 4 |F_3|^2 \}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Параметр R связан с вероятностью того, что вторично рассеянный протон поляризован в направлении m , а первично рассеянный

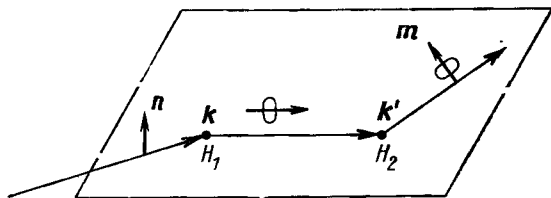


Рис. 14.6. Схема расположения плоскостей рассеяния для параметра R .

протон — в направлении $x = [n\hat{k}]$, где \hat{k} — орт вектора k ; в этом случае все три рассеяния происходят в последовательно перпендикулярных плоскостях и

$$\begin{aligned} \frac{|k'|}{|k|} d\sigma R &= \frac{1}{4} \text{Sp } F^+ (\sigma_1 m) F (\sigma_1 x) = \\ &= -\cos \frac{\theta}{2} \text{Re} [(F_1^* + F_2^*) (F_1 - F_2) + (F_4^* + F_5^*) (F_4 - F_5)] + \\ &\quad + 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{Im} (F_1^* - F_2^*) F_3, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где θ — угол между векторами k и k' .

Если дополнительно повернуть с помощью магнита вектор поляризации вторично рассеянного протона вдоль направления l и направить вектор поляризации первичного протона вдоль x , то станет возможным измерение параметра R' , выражение для которого выглядит так:

$$\begin{aligned} \frac{|k'|}{|k|} d\sigma R' &= \frac{1}{4} \text{Sp } F^+ (\sigma_1 l) F (\sigma_1 x) = \\ &= \sin \frac{\theta}{2} [|F_1|^2 - |F_2|^2 - 2 \text{Re} (F_4 + F_5) (F_4^* - F_5^*)] + \\ &\quad + 2 \cos \frac{\theta}{2} \text{Im} (F_1^* - F_2^*) F_3. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Повернем с помощью магнита вектор поляризации первично рассеянного протона вдоль его направления движения \mathbf{k} . В этом случае параметр A (рис. 14.6) связан с вероятностью того, что вторично рассеянный протон поляризован вдоль вектора \mathbf{m} и

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} d\sigma A &= \frac{1}{4} \text{Sp } F^+(\sigma_1 \mathbf{m}) F(\sigma_1 \mathbf{k}) = \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \cdot \text{Re} [(F_1^* + F_2^*)(F_1 - F_2) + (F_4^* + F_5^*)(F_4 - F_5)] + \\ &\quad + 2 \cos \frac{\theta}{2} (F_1^* - F_2^*) F_3. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Если дополнительно повернуть вектор поляризации вторично рассеянного протона вдоль направления \mathbf{l} , то такой случай будет характеризоваться параметром A' , т. е.

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} d\sigma A' &= \frac{1}{4} \text{Sp } F^+(\sigma_1 \mathbf{l}) F(\sigma_1 \mathbf{k}) = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} [|F_1|^2 - |F_2|^2 - \text{Re}(F_4 + F_5)(F_4^* - F_5^*)] - \\ &\quad - 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{Im}(F_1^* - F_2^*) F_3. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Подставляя выражения (2.18) — (2.21) в формулу (1.24), гл. 8 и полученный результат — в (8.14'), (10.10), гл. 7 и (5.1) — (5.6), находим выражения для измеренных величин через фазы рассеяния δ и параметр связи ε .

Как показывает анализ, в области энергий $T \leq 1 \text{ Гэв}$ можно ограничиться учетом нескольких первых состояний (s -, p -, d -, f -, g -волн). Вклад отброшенных волн можно учесть с помощью однорезонанного полюсного приближения (см. гл. 16), которое содержит один параметр: константу связи $NN\pi$. Пусть этот параметр произволен. Если в результате анализа для него будут получены значения, близкие к тем, которые определены из других независимых опытов, то это будет указанием на правильность такого способа анализа (получившего название модифицированного фазового анализа).

Таким образом, в теоретических выражениях для измеренных величин будут учтены слагаемые, зависящие от фаз рассеяния и учитывающие вклад однорезонанного полюсного приближения. Подставляя в левые части этих выражений экспериментальные значения величин, получаем систему уравнений для определения фаз рассеяния, параметров связи ε и константы $NN\pi$ -взаимодействия f^2 (из других опытов $f^2 = 0,081 \pm 0,002$).

В качестве примера приведем величины фаз рассеяния и параметра связи в случае рассеяния протонов с кинетической энергией $T = 400 \text{ Мэв}$ (в лабораторной системе координат). Учитывались

s -, p -, d -, f -, g -волны и использовались опытные значения $d\sigma^0$, P , D , R , A , A' , C_{nn} , C_{ml} , σ (для pp -рассеяния), $d\sigma$, σ , P (для pn -рассеяния). Было найдено семь различных наборов фаз, однако шесть из них маловероятны по сравнению с тем, который приведен в табл. 14.4.

Таблица 14.4

Фазы рассеяния нуклонов на нуклонах для энергии 400 Мэв

| Состояния | Фазы | Состояния | Фазы |
|-----------------|-------------------|-----------------------|-------------------|
| 1S_0 | $-12,58 \pm 1,57$ | 3F_3 | $-1,95 \pm 0,40$ |
| 3S_1 | $5,63 \pm 3,25$ | 3F_4 | $3,37 \pm 0,19$ |
| 3P_0 | $-12,65 \pm 1,44$ | ε_3 | $8,01 \pm 0,68$ |
| 1P_1 | $-43,29 \pm 2,50$ | 3G_3 | $-0,14 \pm 1,40$ |
| 3P_1 | $-32,66 \pm 0,65$ | 1G_4 | $2,61 \pm 0,20$ |
| 3P_2 | $18,90 \pm 0,39$ | 3G_4 | $-1,80 \pm 0,82$ |
| ε_1 | $-0,65 \pm 2,35$ | 3G_5 | $-4,78 \pm 1,57$ |
| 3D_1 | $-35,50 \pm 2,42$ | | |
| 1D_2 | $13,17 \pm 0,30$ | f^2 | $0,083 \pm 0,007$ |
| 3D_2 | $11,82 \pm 3,44$ | | |
| 3D_3 | $-1,74 \pm 1,82$ | $\chi^2/\bar{\chi}^2$ | $0,91$ |
| ε_2 | $0,80 \pm 0,55$ | | |
| 3F_2 | $0,79 \pm 0,40$ | | |
| 1F_3 | $-4,08 \pm 1,03$ | | |

§ 6. Полный опыт

При фазовом анализе важным является понятие полного опыта. Рассмотрим для конкретности процесс фотообразования псевдоскалярных π -мезонов на нуклонах:

$$\gamma + N \rightarrow N + \pi. \quad (6.1)$$

Выражение (1.14), гл. 3 для амплитуды этого процесса содержит четыре неизвестные комплексные функции или восемь действительных функций. Если отбросить одну из них, являющуюся общим множителем, то останется семь неизвестных функций*. Для нахождения этих функций надо осуществить по меньшей мере семь независимых экспериментов для всех энергий и углов. Чтобы определить правильный знак при извлечении квадратного корня из модулей квадратов, следует добавить еще один эксперимент. Другими словами, для определения неизвестных функций, входящих в выражение для амплитуды процесса (6.1), необходимо провести восемь независимых опытов.

Минимальный набор экспериментов, который необходим для определения амплитуды (с точностью до знака), получил название

* В некоторых случаях комплексные функции могут входить в выражение для измеримых величин лишь квадратично.

полного опыта. Иначе говоря, полный опыт процесса (6.1) состоит из семи экспериментов. Отсюда следует, что в полный опыт должны входить и эксперименты с поляризованными частицами.

Всего в случае процесса (6.1) возможно 64 опыта, отличающихся друг от друга различными поляризациями (проекциями спинов) частиц. Действительно, матрица плотности нуклона определяется четырьмя независимыми матрицами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0$ (см. гл. 7, § 9), а фотона — четырьмя матрицами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_0$. Следовательно, из матриц, относящихся к начальному и конечному нуклонам, а также к фотону, можно образовать $4 \times 4 \times 4 = 64$ независимые комбинации. (Правда, число этих комбинаций существенно уменьшается, если учесть инвариантность относительно инверсии пространства и обращение времени.)

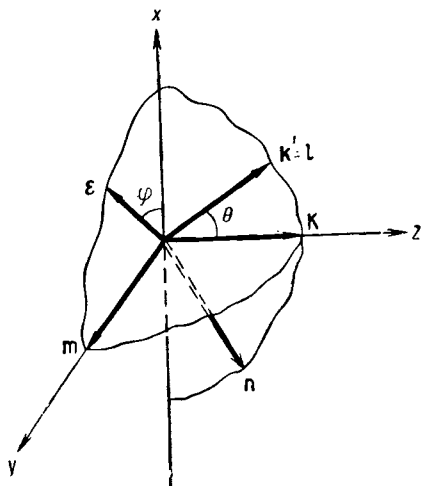


Рис. 14.7. Система координат, использованная при записи формулы (6.2).

Выберем систему координат (рис. 14.7), определяемую ортогональными осями $l = k', m = \frac{[kk']}{|[kk']|}, n = \frac{[k'm]}{|[k'm]|}$. В этой системе координат выражение для

амплитуды процесса (6.1) выглядит так:

$$F(W, \theta) = F_1(\epsilon m) + F_2 i(\sigma l)(\epsilon l) + F_3 i(\sigma m)(\epsilon m) + F_4 i(\sigma n)(\epsilon l). \quad (6.2)$$

Здесь ϵ вектор поляризации фотона, причем для линейно поляризованного фотона (рис. 14.7)

$$\epsilon l = \sin \theta \cos \varphi, \quad \epsilon m = \sin \varphi;$$

$\varphi = 0^\circ$ соответствует параллельной (\parallel), а $\varphi = 90^\circ$ — перпендикулярной (\perp) поляризации фотона по отношению к плоскости реакции.

В случае линейно поляризованного фотона возможно измерение следующих шестнадцати величин (см. гл. 7, § 10):

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma = \frac{1}{2} \text{Sp } F^+ F \quad (\text{начальный и конечный нуклоны не поляризованы}),$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma P_j^f = \frac{1}{2} \text{Sp } F^+ \sigma_j F \quad (\text{поляризован конечный нуклон } f \text{ в направлении } j \sim n, l, m),$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma P_j^i = \frac{1}{2} \text{Sp } F^+ F \sigma_j \quad (\text{поляризован начальный нуклон } i \text{ в направлении } j \sim n, l, m),$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma T_{jq} = \frac{1}{2} \text{Sp } F^+ \sigma_j F \sigma_q \quad (\text{начальный и конечный нуклоны поляризованы в направлении } j \sim l, m, n, q \sim l, m, n).$$

Приведем явный вид некоторых из этих выражений:

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma^0 = |F_1|^2 + |F_3|^2 \sin^2 \varphi + (|F_2|^2 + |F_4|^2) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi;$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma P_l^i = 2 \text{Im} (F_3^* F_4 - F_1^* F_2) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma P_l^i = -2 \text{Im} (F_3^* F_4 + F_1^* F_2) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi;$$

$$\frac{|k'|}{|k|} d\sigma T_{nl} = 2 \text{Re } F_1^* F_3 \sin^2 \varphi + 2 \text{Re } F_2^* F_4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Полагая $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$, получаем 32 величины, соответствующие параллельно и перпендикулярно поляризованному фотону.

Аналогичным образом можно найти выражения для величин реакций (6.1), соответствующих двум другим состояниям фотона (например, двум циркулярно поляризованным фотонам).

Из указанных 64 опытов можно выбрать различные наборы из семи экспериментов, необходимых для определения амплитуды процесса (6.1). Например, в случае неполяризованного фотона можно взять набор из опытов по измерению $d\sigma$, P_m^i , P_m^i и любых четырех (из девяти) величин T_{jq} .

Аналогичный анализ можно привести для других процессов.

Как мы уже видели, число неизвестных функций, входящих в выражение для амплитуды, существенно уменьшается, если использовать условие унитарности и некоторые дополнительные предположения (учет лишь нескольких первых парциальных амплитуд и т. п.).

МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИТИЧНОСТИ
И УНИТАРНОСТИ

ГЛАВА 15

УНИТАРНОСТЬ И АНАЛИТИЧНОСТЬ

§ 1. Каналы реакции

Кинематика. Рассмотрим процесс с участием четырех частиц (см. рис. 3.1). Обозначим направление движения частиц стрелками. Выберем определенное направление оси времени — слева направо. Тогда одна и та же стрелка будет описывать либо частицу (если направление стрелки совпадает с направлением оси времени), либо античастицу (если направления стрелок и оси времени противоположны — см. гл. 4, § 3).

Изобразим начальные частицы реакции входящими стрелками, а конечные частицы — выходящими. Если в этом случае входящая частица становится выходящей (или наоборот), то частицу надо заменить античастицей.

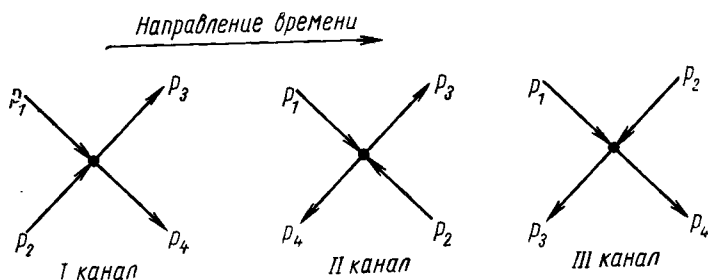


Рис. 15.1. Каналы реакции с участием четырех частиц.

Из рис. 3.1 видно, что в случае процесса с участием четырех стабильных частиц возможны следующие различные реакции, в зависимости от того, какие частицы являются начальными (рис. 15.1):

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (\text{прямой канал}); \quad (1.1)$$

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3 \quad (\text{перекрестный, или кросс-канал}); \quad (1.2)$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow 4 + \bar{2} \quad (\text{аннигиляционный канал}). \quad (1.3)$$

Возможны также процессы, обратные перечисленным.

Три реакции (1.1) — (1.3) составляют три различных канала, которые называют соответственно прямым (или первым), перекрестным (или вторым) и аннигиляционным (или третьим).

Выпишем для всех каналов закон сохранения энергии — импульса и выражения для переменных s , t , u :

I канал

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= p_3 + p_4; \\ s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2; \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2; \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

II канал

$$\begin{aligned} p_1 + \bar{p}_4 &= \bar{p}_2 + p_3; \\ s &= (p_1 - \bar{p}_2)^2 = (p_3 - \bar{p}_4)^2; \\ u &= (p_1 + \bar{p}_4)^2 = (\bar{p}_2 + p_3)^2; \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (\bar{p}_2 - \bar{p}_4)^2, \end{aligned} \quad (1.5)$$

III канал

$$\begin{aligned} p_1 + \bar{p}_3 &= p_4 + \bar{p}_2; \\ s &= (p_1 - \bar{p}_2)^2 = (p_4 - \bar{p}_3)^2; \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (\bar{p}_2 - \bar{p}_3)^2; \\ t &= (p_1 + \bar{p}_3)^2 = (\bar{p}_2 + p_4)^2. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Если в (1.4) произвести замену $p_1 \rightarrow \bar{p}_1$, $p_2 \rightarrow \bar{p}_4$, $p_3 \rightarrow \bar{p}_2$, $p_4 \rightarrow p_3$ и одновременно перейти к новым обозначениям

$$s \rightarrow u, \quad t \rightarrow s, \quad u \rightarrow t, \quad (1.7)$$

то получим выражение (1.5) для переменных s , u , t во втором канале. Аналогичным образом, производя в (1.4) замену $p_1 \rightarrow p_1$, $p_2 \rightarrow \bar{p}_3$, $p_4 \rightarrow \bar{p}_2$, $p_3 \rightarrow p_4$ и переходя к новым переменным

$$s \rightarrow t, \quad t \rightarrow u, \quad u \rightarrow s, \quad (1.8)$$

приходим к выражениям (1.6) для s , u и t третьего канала.

Следовательно, для описания всех трех каналов можно пользоваться одними и теми же переменными. Иначе говоря, за исходную можно взять любую из трех реакций, а затем перейти от нее к двум другим. Поэтому при графическом изображении удобно пользоваться косоугольной системой координат (рис. 15.2), симметричной

относительно переменных s , u , t (треугольник abc — равносторонний). Каждая точка на плоскости определяется тремя координатами, равными расстоянию точки до сторон треугольника abc или их продолжений. Положительное направление для отсчета s , u и t указано стрелками (направленными внутрь треугольника).

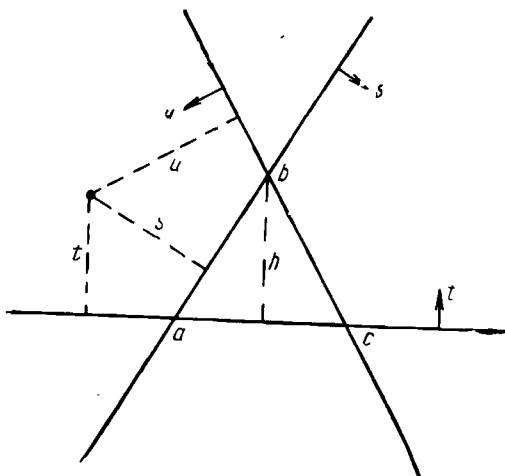


Рис. 15.2. Косоугольная система координат, симметричная относительно переменных s , u , t .

Легко также проверить, для любых значений s , u , t имеет место соотношение

$$s + u + t = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \quad (1.9)$$

Поэтому удобно выбрать высоту треугольника равной

$$h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2.$$

Вследствие указанной симметрии s , u - и t -каналов, все три канала можно изобразить одной диаграммой. В частности, из рис. 15.1. видно, что если на диаграмму s -канала смотреть со стороны импульсов p_1 и p_3 , то она одновременно является диаграммой t -канала.

Выясним, каков физический смысл переменных s , u , t в различных каналах.

Выражения (1.4) — (1.6) переписутся в с. ц. м. следующим образом:

I канал

$$\left. \begin{aligned} s &= (E_1 + E_2)^2 = W^2; \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2E_1E_4 + 2|p_1||p_4| \cos \theta_1; \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2|p_1||p_3| \cos \theta_1; \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

II канал

$$\left. \begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2E_1 E_2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta_{II}; \\ u &= (E_1 + E_4)^2; \\ t &= m_1^2 + m_3^2 - 2E_1 E_3 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_3| \cos \theta_{II}; \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

III канал

$$\left. \begin{aligned} s &= m_1^2 + m_2^2 - 2E_1 E_2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_2| \cos \theta_{III}; \\ u &= m_1^2 + m_4^2 - 2E_1 E_4 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_4| \cos \theta_{III}; \\ t &= (E_1 + E_3)^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

Из формул (1.10) — (1.12) видно, что в с. ц. м. s , u , t являются квадратом полной энергии соответственно в первом, втором и третьем каналах, а две остальные переменные в каждом канале играют роль квадрата импульса отдачи. Поэтому часто первый, второй и третий каналы называют соответственно s -, u -, t -каналами.

Производя в формулах (1.4) — (1.6), гл. 7 замену переменных (1.7) и масс — в соответствии с (1.1) — (1.3), получаем выражение для соответствующих величин в с. ц. м. во втором канале; замены переменных (1.8) и масс дают выражение для тех же величин в третьем канале.

Выражения для амплитуд. Выражения для инвариантной спиновой структуры амплитуд s -канала для некоторых процессов были получены в гл. 3, а перекрестного канала — в гл. 11. Остановимся на амплитудах t -канала. Чтобы получить вид инвариантных амплитуд в третьем канале, надо в выражениях для амплитуд s -канала произвести те замены четырехмерных векторов и волновых функций, которые соответствуют переходу от s - к t -каналу. Например, амплитуда процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$, являющегося t -каналом реакции $\pi N \rightarrow \pi N$, запишется так:

$$M(t, s) = \bar{u}(p_2) \{T_1(t, s) + T_2(t, s)(q_1 - q_2)_\mu \gamma_\mu\} u^c(-p_1). \quad (1.13)$$

Она получается из амплитуды (2.4), гл. 3 процесса $\pi N \rightarrow \pi N$, если в последней произвести замену импульсов $q_2 \rightarrow \bar{q}_2 = -q_2$ и $p_1 \rightarrow \bar{p}_1 = -p_1$ и волновой функции $u(p_1)$ частицы на волновую функцию $u^c(-p_1)$ античастицы.

Амплитуда процесса $\pi\gamma \rightarrow \bar{N}\bar{N}$ (t -канал реакции $\gamma N \rightarrow N\pi$) получается из (1.14), гл. 3, если в последней произвести замену $p_1 \rightarrow \bar{p}_1 = -p_1$, $q \rightarrow \bar{q} = -q$ и $u(p_1) \rightarrow u^c(-p_1)$:

$$M(t, s) = \bar{u}(p_2) T(-p_1, p_2, k, -q) u^c(-p_1). \quad (1.14)$$

Выражения для амплитуд s -канала в с. ц. м. для некоторых процессов были получены в гл. 7, § 2,3. Аналогичным образом можно

найти вид амплитуд в с. ц. м. t -канала. Например, амплитуда $F(W_t, \theta_t)$ процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$ в с. ц. м. выглядит так:

$$M(W_t, \theta_t) = \chi_2^+ [H_1(W_t, \theta_t)(\sigma\mathbf{k}) + H_2(W_t, \theta_t)(\sigma\mathbf{k}')] \chi_1^c, \quad (1.15)$$

где \mathbf{k}' , \mathbf{k} — импульс нуклона и мезона в с. ц. м.; χ , χ^c — волновые функции нуклона и антинуклона.

Амплитуда процесса $\pi\gamma \rightarrow N\bar{N}$ в с. ц. м. запишется следующим образом:

$$M(W_t, \theta_t) = \chi_2^+ [H_1(W_t, \theta_t)(\mathbf{k}'\boldsymbol{\varepsilon}) + H_2(W_t, \theta_t)i(\sigma[\mathbf{k}'\boldsymbol{\varepsilon}]) + \\ + H_3(W_t, \theta_t)i(\sigma\mathbf{k}')(\mathbf{k}'[\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}]) + H_4(W_t, \theta_t)i(\sigma[\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}])] \chi_1^c, \quad (1.16)$$

где \mathbf{k}' , \mathbf{k} — импульс нуклона и фотона в с. ц. м.

Используя соотношение

$$\bar{u}(p_2) \left(\sum_i T_i R_i \right) u^c(-p_1) \sim \chi_2^+ \left(\sum_i H_i r_i \right) \chi_1^c,$$

находим (см. гл. 7, § 4, 5) связь инвариантных функций T_i с функциями $H_i(W_t, \theta_t)$ в с. ц. м.:

а) для процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$

$$\left. \begin{aligned} H_1(W_t, \theta_t) &= -\frac{1}{M} \left[T_1 + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')}{E+M} T_2 \right]; \\ H_2(W_t, \theta_t) &= \frac{E}{M} T_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

где E — энергия нуклона (или антинуклона) в с. ц. м.;

б) для процесса $\pi\gamma \rightarrow NN$, если умножить H_i на $\frac{M}{8\pi E}$

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= -\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}{8\pi E} (T_1 + tT_2); \\ H_2 &= -\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}{4\pi} T_3; \\ H_3 &= -\frac{(M-E)|\mathbf{k}'|}{8\pi E} (T_1 + \sqrt{t}T_4); \\ H_4 &= \frac{|\mathbf{k}'|}{16\pi E} (2MT_1 - tT_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где E , \mathbf{k} , \mathbf{k}' — соответственно энергия нуклона (или антинуклона) и величины импульсов фотона и нуклона в с. ц. м.

Функции H_i t -канала следующим образом выражаются через спиральные амплитуды (способ получения такой связи изложен в гл. 9, § 4):

а) для процесса $\pi\pi \rightarrow N\bar{N}$

$$\left. \begin{aligned} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00}(W_t, \theta_t) &= H_1(W_t, \theta_t) |k| + H_2(W_t, \theta_t) |k'| \cos \theta_t; \\ M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{00}(W_t, \theta_t) &= H_2(W_t, \theta_t) |k'| \sin \theta_t; \end{aligned} \right\} (1.19)$$

б) для процесса $\pi\gamma \rightarrow N\bar{N}$

$$\left. \begin{aligned} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10}(W_t, \theta_t) &= -\frac{1}{2} [H_1(W_t, \theta_t) + H_3(W_t, \theta_t) + \\ &\quad + H_4(W_t, \theta_t)] \sin \theta_t; \\ M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (H_2 + H_4) (1 + \cos \theta_t); \\ M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (H_2 - H_4) (1 - \cos \theta_t); \\ M_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (H_1 - H_3 - H_4) \sin \theta_t. \end{aligned} \right\} (1.20)$$

Подставляя в (1.19) и (1.20) формулы (2.1), (2.2), гл. 9, получаем разложение функций $H_i(W_t, \theta_t)$ по парциальным спиральным амплитудам (или по полиномам Лежандра), например, для процесса $\pi\gamma \rightarrow N\bar{N}$

$$H_1(W_t, \theta_t) = -\sum_J \left(J + \frac{1}{2} \right) (F^{J-})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} P_J'(\cos \theta_t);$$

$$\begin{aligned} H_2(W_t, \theta_t) &= -\frac{1}{2} \sum_J \left\{ (F^{J-})_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} [JP_{J+1}'' + (J+1)P_{J-1}''] + \right. \\ &\quad \left. + (2J+1)(F^{J+})_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} P_J'' \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3(W_t, \theta_t) &= \frac{1}{2} \sum_J \left\{ (F^{J+})_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} [JP_{J+1}'' + (J+1)P_{J-1}''] - \right. \\ &\quad \left. - (2J+1)(F^{J-})_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} P_J'' - (2J+1)(F^{J+})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} P_J' \right\}; \end{aligned}$$

$$H_4(W_t, \theta_t) = -\frac{1}{2} \sum_J \left\{ (F^{J+})^{\frac{10}{2}-\frac{1}{2}} [JP_{J+1}'' + (J+1)P_{J-1}''] - (2J+1)(F^{J-})^{\frac{10}{2}-\frac{1}{2}} P_J'' \right\};$$

где

$$(F^{J\pm})^{\frac{10}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{(F^J)^{\frac{10}{2}} \pm (F^J)^{-\frac{10}{2}}}{J(J+1)(2|k||k'|)^{1/2}};$$

$$(F^{J\pm})^{\frac{10}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{(F^J)^{\frac{10}{2}} \pm (F^J)^{-\frac{10}{2}}}{[J(J+1)]^{1/2}(2|k||k'|)^{1/2}}.$$

§ 2. Физические и нефизические значения переменных

Физическими значениями переменных, характеризующих данный канал, называются такие их величины, при которых может происходить реальный физический процесс. Область физических значений переменных определяется физическими значениями а) энергии и б) угла в данном канале. Найдем области физических значений переменных для каждого канала реакции, используя оба условия.

I канал. Энергия частицы в физической области должна быть больше или в предельном случае равна массе покоя частиц

$$E_1 + E_2 \geq m_1 + m_2 \quad \text{и} \quad E_3 + E_4 \geq m_3 + m_4,$$

что дает, согласно (1.10),

$$s \geq (m_1 + m_2)^2; \quad s \geq (m_3 + m_4)^2. \quad (2.1)$$

Кроме того, угол рассеяния частиц в физической области в с. ц. м. должен лежать в интервале $0 - 180^\circ$. Этим углам соответствуют значения $\cos \theta$ в интервале от 1 до -1 . Учтывая, что $|\cos \theta| \leq 1$, получаем с помощью формулы (1.6), гл. 7.

$$[2s(m_3^2 + m_1^2 - t) - (s - m_2^2 + m_1^2)(s - m_4^2 + m_3^2)]^2 \leq$$

$$\leq [s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2] \quad (2.2)$$

или

$$\{st^2 + [s^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)s + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)]t +$$

$$+ (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)s + (m_1^2 - m_2^2 + m_3^2 - m_4^2)(m_1^2 m_4^2 -$$

$$- m_2^2 m_3^2)\} \leq 0. \quad (2.3)$$

II канал. Производя замены переменных согласно (1.7) и масс, находим

$$u \geq (m_1 + m_4)^2, \quad u \geq (m_2 + m_3)^2, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \{us^2 + [u^2 - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2)u + (m_1^2 - m_4^2)(m_2^2 - m_3^2)]s + \\ & + (m_1^2 - m_2^2)(m_4^2 - m_3^2)u + (m_1^2 - m_4^2 + m_3^2 - m_2^2)(m_1^2 m_3^2 - \\ & - m_4^2 m_2^2)\} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

III канал. Производя замены переменных согласно (1.8) и масс, будем иметь

$$t \geq (m_1 + m_3)^2, \quad t \geq (m_2 + m_4)^2, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} & \{tu^2 + [t^2 - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)^2 t + (m_1^2 - m_3^2)(m_4^2 - m_2^2)]u + \\ & + (m_1^2 - m_4^2)(m_3^2 - m_2^2)t + (m_1^2 - m_3^2 + m_2^2 - m_4^2)(m_1^2 m_2^2 - \\ & - m_3^2 m_4^2)\} \leq 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Каждое из неравенств (2.3), (2.5) и (2.7), если учесть (1.9), можно записать в следующем виде, симметричном относительно s, u, t :

$$stu \geq as + bt + cu, \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{(m_1^2 m_2^2 - m_3^2 m_4^2)(m_1^2 + m_2^2 - m_3^2 - m_4^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}; \\ b &= \frac{(m_1^2 m_3^2 - m_2^2 m_4^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 - m_4^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}; \\ c &= \frac{(m_1^2 m_4^2 - m_2^2 m_3^2)(m_1^2 + m_4^2 - m_2^2 - m_3^2)}{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2}. \end{aligned}$$

В случае знака равенства формула (2.8) определяет границу области физических значений s, u и t .

Найдем области физических значений s, u и t для некоторых реакций. Расположение физических областей удобно изображать на плоскости Мандельстама.

1. Реакция, в которой участвуют частицы с равными массами: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$. К таким реакциям относится процесс рассеяния π -мезонов на π -мезонах, нуклонов на нуклонах и т. п.

В этом случае неравенства (2.1), (2.4), (2.6) и (2.8) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} s &\geq 4m^2 \text{ для } s\text{-канала;} \\ u &\geq 4m^2 \text{ для } u\text{-канала;} \\ t &\geq 4m^2 \text{ для } t\text{-канала} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

и

$$stu \geq 0 \text{ для всех каналов.}$$

Уравнение $stu = 0$ имеет три решения:

$$s = 0; t = 0; u = 0. \quad (2.10)$$

Области физических значений переменных в каждом канале, определяемые условиями (2.9) и (2.10), на рис. 15.3 заштрихованы.

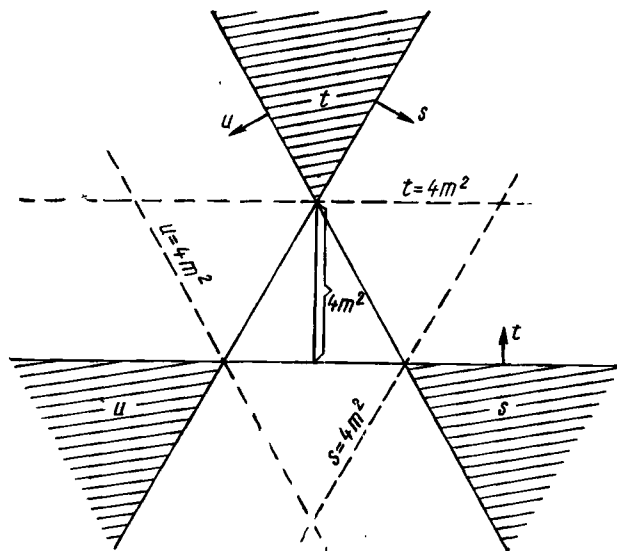


Рис. 15.3. Области (заштрихованы) физических значений переменных для процесса $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$.

2. Реакция, в которой участвуют частицы с массами $m_1 = m_3 = \mu$ и $m_2 = m_4 = M$, например процесс $\pi N \rightarrow \pi N$ и т. п. В этом случае неравенства (2.1), (2.4), (2.6) и (2.8) запишутся так:

$$s \geq (M + \mu)^2; u \geq (M + \mu)^2; t \geq 4M^2 \quad (2.11)$$

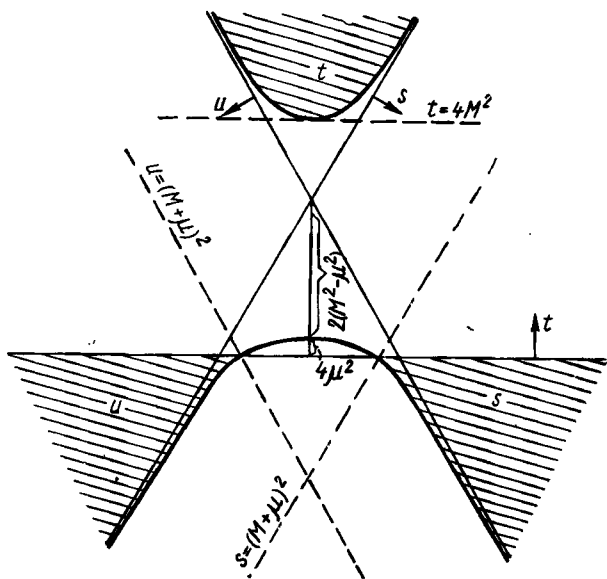


Рис. 15.4. Области (заштрихованы) физических значений переменных для процесса $\pi + N \rightarrow \pi + N$.

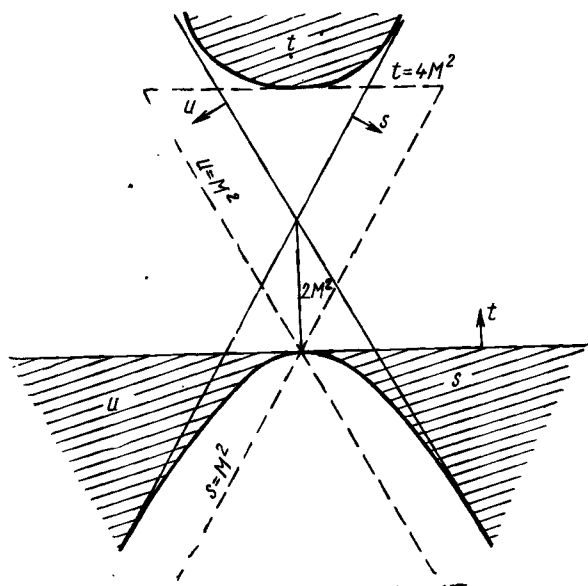


Рис. 15.5. Области (заштрихованы) физических значений переменных для процесса $\gamma + N \rightarrow N + \gamma$.

и

$$stu \geq (M^2 - \mu^2)^2 t. \quad (2.12)$$

Уравнение $stu - (M^2 - \mu^2)^2 t = 0$ имеет два решения:

$$su = (M^2 - \mu^2)^2; \quad t = 0. \quad (2.13)$$

Определяемые условиями (2.11) и (2.13) физические области на рис. 15.4 заштрихованы.

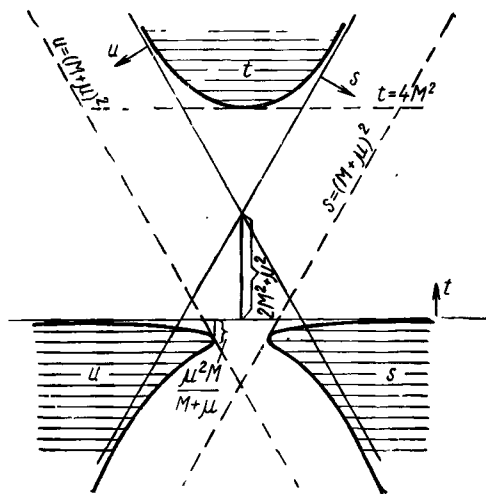


Рис. 15.6. Области (заштрихованы) физических значений переменных для процесса $\gamma + N \rightarrow N + \pi$.

(2.8) будут выглядеть так (если принять $m_1 = 0$, $m_2 = m_4 = M$, $m_3 = \mu$):

$$s \geq (M + \mu)^2; \quad u \geq (M + \mu)^2; \quad t \geq 4M^2 \quad (2.14)$$

$$stu \geq \frac{M^2}{2M^2 + \mu^2} [\mu^4 (s + u) + M^2 (2M^2 - \mu^2) t]. \quad (2.15)$$

Физические области рассматриваемого процесса заштрихованы на рис. 15.6.

§ 3. Унитарность S -матрицы и абсорбтивная часть амплитуды процесса. Оптическая теорема

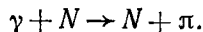
В физической области переменных амплитуда процесса является, вообще говоря, комплексной величиной, состоящей из действительной и мнимой частей. Амплитуда может зависеть от переменных,

3. Реакция $\gamma N \rightarrow \gamma N$ (комpton-эффект на нуклоне).

Границы физической области этой реакции получатся из результатов предыдущего примера, если в них положить $m_1 = m_3 = 0$ (рис. 15.5).

Таковыми же будут физические области у процесса рассеяния электронов на протоне, если положить массу электрона равной нулю.

4. Реакция фотообразования π -мезонов на нуклонах:



В этом случае неравенства (2.1), (2.4), (2.6) и

лежащих и в нефизической области. Чтобы подчеркнуть последнее обстоятельство, обычно называют части амплитуды не действительной и мнимой, а дисперсивной $D = \frac{1}{2}(T + T^*)$ и абсорбтивной $A = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ (в физической области последние совпадают соответственно с действительной и мнимой частями).

С помощью условия унитарности S -матрицы (см. гл. 14, § 1)

$$SS^+ = 1 \quad (3.1)$$

абсорбтивная часть амплитуды данного процесса может быть выражена через полные амплитуды некоторых других процессов.

В самом деле, подставим формулу (1.2'), гл. 3 в (3.1)

$$SS^+ = (1 + iT)(1 - iT^+) = 1. \quad (3.2)$$

Отсюда

$$i(T - T^+) = -TT^+, \quad (3.3)$$

что дает выражение для абсорбтивной части амплитуды T

$$2 \operatorname{Im} T_{fi} = \sum_n T_{fn} T_{ni}^* \quad (3.4)$$

или амплитуды процесса M

$$2 \operatorname{Im} M_{fi} = \sum_n M_{fn} M_{ni}^* (2\pi)^4 \delta(p_3 + p_4 - p_n). \quad (3.4')$$

Здесь n означает те состояния, в которые могут переходить начальные и конечные состояния i и f . Обычно n называют промежуточными состояниями. Они характеризуются числом частиц, их массой, импульсами, спинами и внутренними квантовыми числами (странностью, четностью и т. п.).

Состояния, отличающиеся только направлением или величиной импульсов частиц, считаются различными. Поэтому в (3.4) кроме суммирования по состояниям с различными числами частиц, спинами, проекциями спинов, массами и т. п. надо производить также интегрирование по импульсам (фазовым объемам) промежуточных частиц.

Подчеркнем, что матричные элементы M_{fn} и M_{ni} , согласно (3.4'), содержат $\delta(p_3 + p_4 - q)$ и $\delta(p_1 + p_2 - q)$, соответствующие закону сохранения энергии — импульса; поэтому в формулу (3.4') входят только такие промежуточные состояния, которые разрешены этим законом сохранения. Кроме того, частицы в промежуточном состоянии — реальные, т. е. для них выполняется условие $q_i^2 = \mu_i^2$, или, как говорят, частицы лежат на массовой поверхности (случай одночастичного промежуточного состояния изображен на рис. 15.7).

С какими массами допустимы частицы в промежуточном состоянии? Рассмотрим для конкретности процесс рассеяния π -мезонов на нуклонах

$$\pi + N \rightarrow \begin{pmatrix} N \\ N\pi \\ N\pi\pi \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow \pi + N. \quad (3.5)$$

Если в промежуточном состоянии имеется π -мезон и нуклон, то этот процесс является реальным и характеризуется амплитудой $M(s, t)$, которая зависит от переменной s , лежащей в физической области:

$$s \geq (M + \mu)^2. \quad (3.6)$$

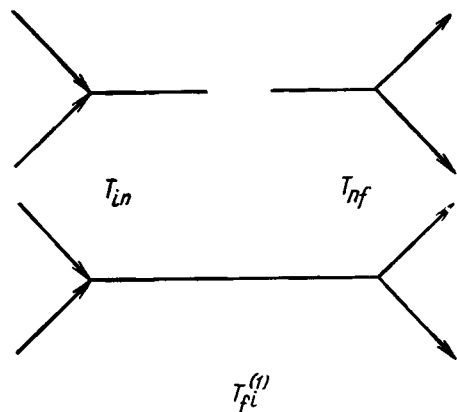


Рис. 15.7. Диаграмма процесса с одночастичным промежуточным состоянием.

Если в промежуточном состоянии имеется один нуклон, то процесс (3.5) в физической области запрещен (промежуточный нуклон не может реально превратиться в нуклон и мезон). Однако такой процесс допустим в нефизической области $s < (M + \mu)^2$. Следовательно, если рассматривать амплитуду во всей области изменения ее аргументов, как физических, так

и нефизических, то в промежуточных состояниях возможны частицы с любыми массами. При этом чем больше отклонение от условия (3.6), тем дальше от физической области располагается состояние.

Что касается других характеристик частиц, то допустимы лишь те промежуточные состояния, внутренние квантовые числа которых совпадают с соответствующими числами начального и конечного состояний, т. е. лишь те промежуточные состояния, которые разрешены соответствующими законами сохранения.

Абсорбтивную часть амплитуды процесса, определяемую (3.4), удобно изображать графически. Рассмотрим, например, процесс рассеяния π_0 -мезонов на π_0 -мезонах. Некоторые из промежуточных состояний по первому каналу изображены на рис. 15.8. Превращение двух π_0 -мезонов

а) в нечетное число π_0 -мезонов, в ω -мезон, в ρ , η , ω -систему запрещено законом сохранения G -четности (см. гл. 10, § 5); б) в один или несколько K или K^* -мезонов — законом сохранения странности (см. гл. 10, § 5); в) в барион или барионный резонанс — законом сохранения барионного числа (см. гл. 10, § 3). Поэтому перечисленные промежуточные состояния должны быть отброшены.

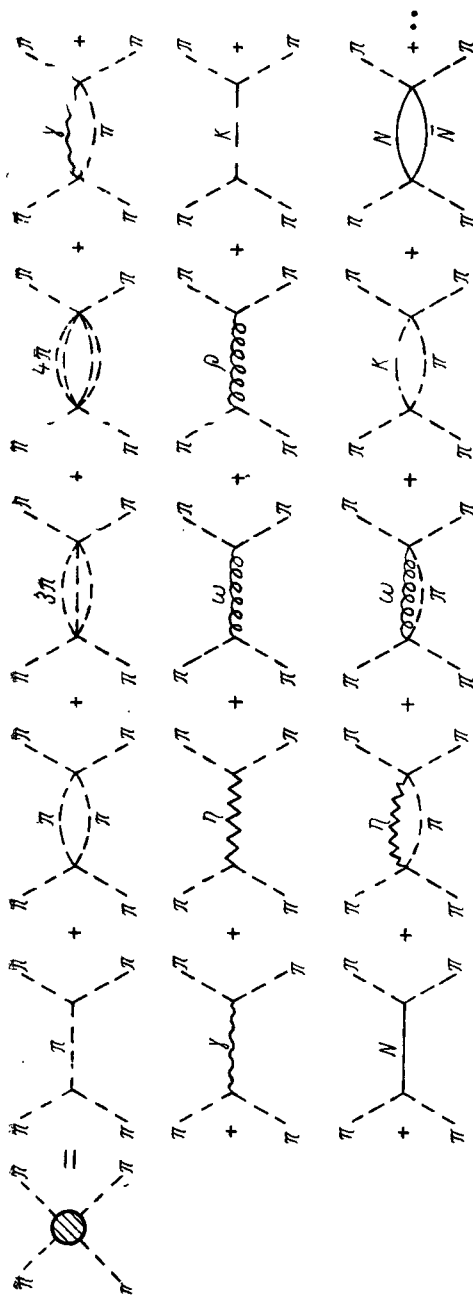


Рис. 15.8. Некоторые промежуточные состояния (разрешенные и запрещенные) в первом канале процесса $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$.

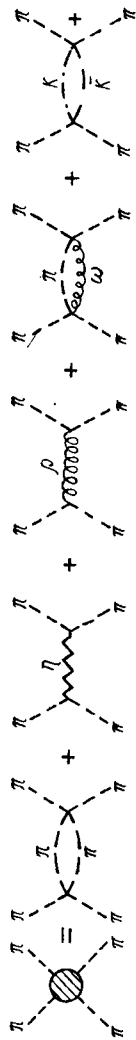


Рис. 15.9. Наиболее простые разрешенные промежуточные состояния, дающие вклад в абсорбтивную часть амплитуды процесса $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ в первом канале.

Промежуточные состояния, содержащие только фотоны, а также фотоны и сильновзаимодействующие частицы, являются допустимыми. Однако вкладом этих состояний, вследствие малости константы электромагнитного взаимодействия, можно пренебречь по сравнению с вкладом состояний, содержащих только сильновзаимодействующие частицы.

Следовательно, в рассматриваемом случае надо учесть промежуточные состояния (рис. 15.9), состоящие из четного числа π -мезонов, η -мезонов, ρ -мезона, $K\bar{K}$, $\omega\pi$, NN и т. п.

Вследствие тождественности всех частиц в рассматриваемом процессе структура абсорбтивной части амплитуды у перекрестного и третьего каналов будет такой же, как у прямого канала.

На рис. 15.10 изображены графически абсорбтивные части амплитуд некоторых процессов с учетом нескольких наиболее простых допустимых промежуточных состояний.

Находим вид (3.4), предполагая, что в промежуточном состоянии имеется одна частица с массой μ и 4-импульсом q (см. рис. 15.7). Подстановка формулы (4.2), гл. 3 в (3.4') дает ($q_{10} > 0$)

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} M_{fi} &= (2\pi)^4 \sum_{\text{спинам}} \int M_{f1} M_{1i}^* \delta(q - p_i) \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \delta(q^2 - \mu^2) = \\ &= 2\pi \sum_{\text{спинам}} M_{f1} M_{1i}^* \delta(q^2 - \mu^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким образом, в случае одночастичного промежуточного состояния в выражении для абсорбтивной части амплитуды интегрирование по промежуточному импульсу отсутствует.

Вычислим (3.7), предполагая, что в промежуточном состоянии имеются две частицы с массами μ_1 , μ_2 и 4-импульсами q_1 и q_2 (рис. 15.11). Подставляя формулу (4.2), гл. 3 в (3.7), имеем ($q_{10}, q_{20} > 0$)

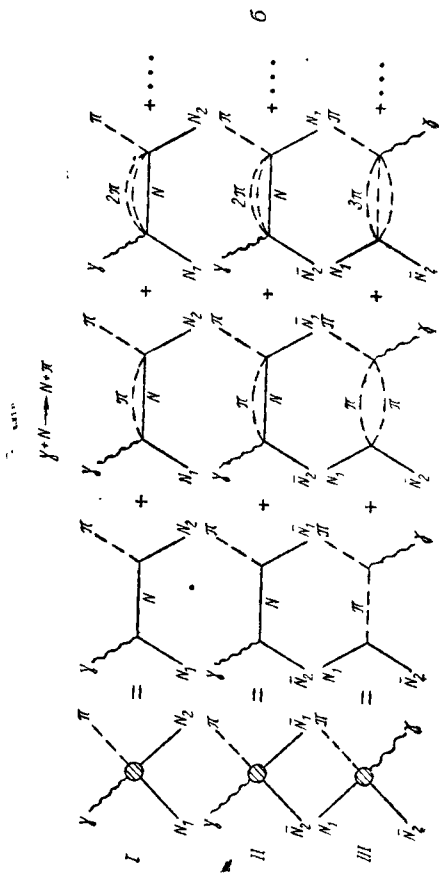
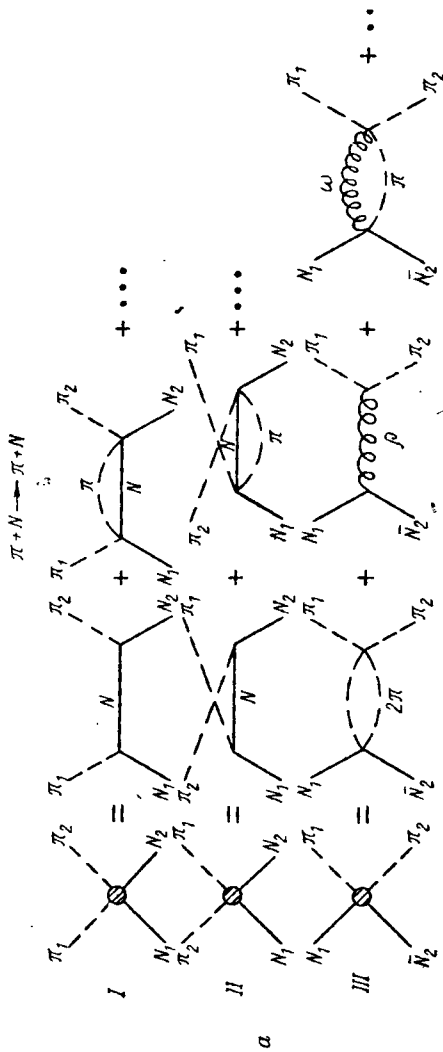
$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} M_{fi} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum \int M_{f2} M_{2i}^* d^4 q_1 d^4 q_2 \delta(q_1^2 - \mu_1^2) \times \\ &\times \delta(q_2^2 - \mu_2^2) \delta(q_1 + q_2 - p_i). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Это выражение инвариантно, поэтому его можно вычислять в любой системе координат, в частности в с. ц. м. промежуточных частиц ($\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_2$). Переход к трехмерному интегрированию дает

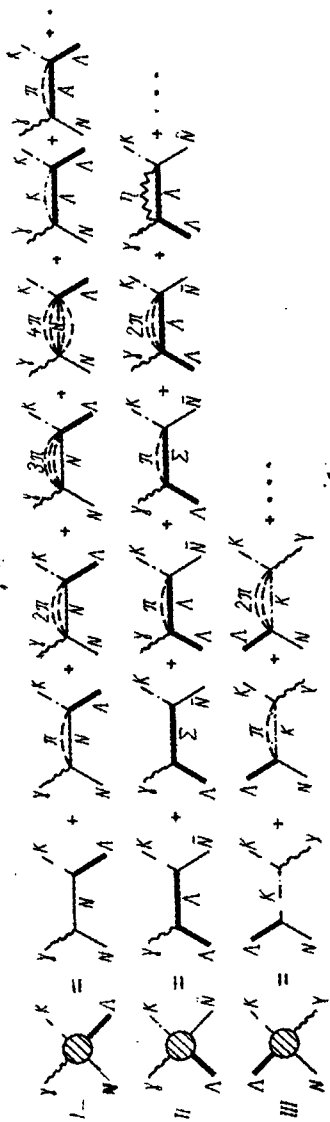
$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Im} M_{fi} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum \int M_{f2} M_{2i}^* \frac{d^3 \mathbf{q}_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3 \mathbf{q}_2}{2E_2} \delta^3 \times \\ &\times \delta(E_1 + E_2 - E_i) \end{aligned}$$

или

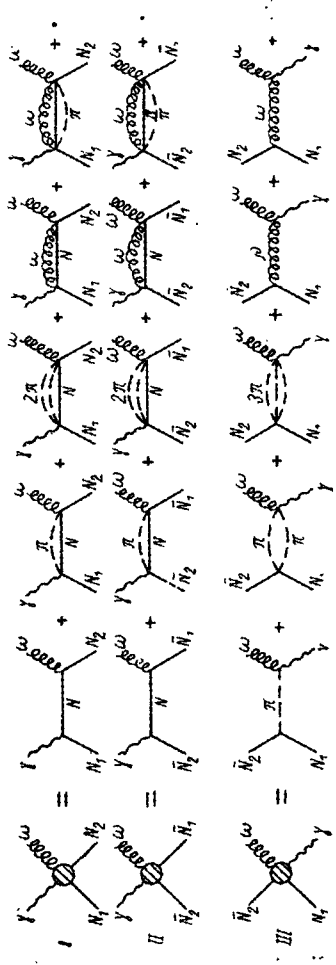
$$\operatorname{Im} M_{fi} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{p^c}{W^c} \sum \int M_{f2} M_{2i}^* d\Omega, \quad (3.9)$$



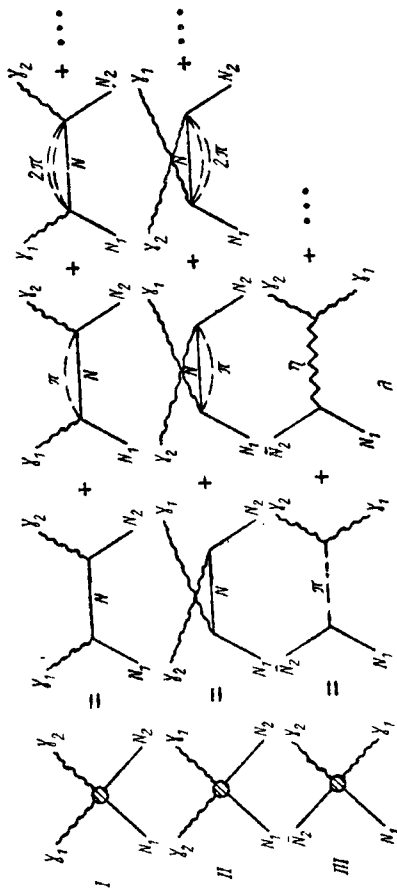
$$Y + N \rightarrow K + \Lambda$$



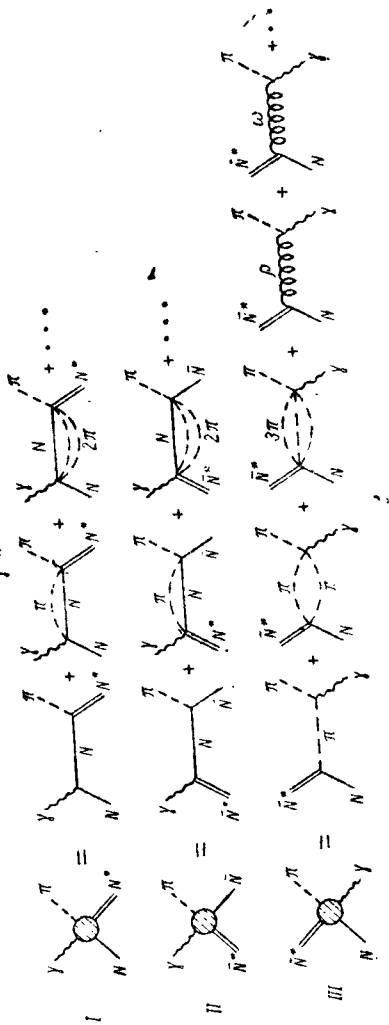
$$Y + N \rightarrow N + \omega$$



$$Y \cdot N \longrightarrow Y \cdot N$$



$$Y \cdot N \longrightarrow N^* \cdot \pi$$



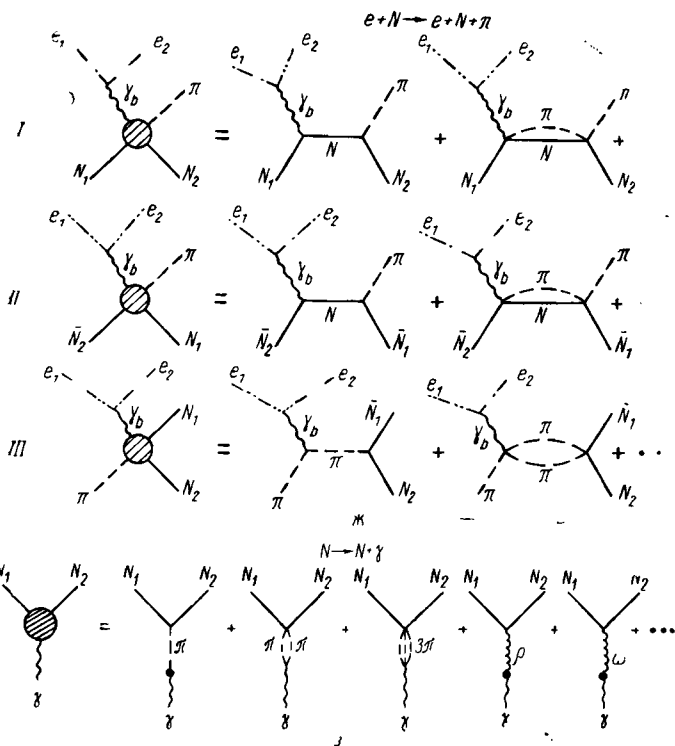


Рис. 15.10. Наиболее простые разрешенные промежуточные состояния, дающие вклад в абсорбтивные части различных процессов (графическое изображение условия унитарности для различных процессов).

где $d\Omega$ — элемент телесного угла; p^c — импульс; W^c — полная энергия (все величины в с. ц. м. промежуточных частиц).

Как видно, в случае двухчастичных промежуточных состояний выражение для абсорбтивной части амплитуды представляет собой интеграл по $d\Omega$, т. е. выглядит значительно сложнее по сравнению со случаем одночастичного промежуточного состояния.

Оптическая теорема.

При столкновении двух частиц, например, протона и π^+ -мезона возможно образование большого числа различных конечных состояний.

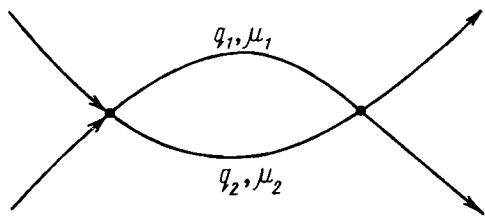


Рис. 15.11. Диаграмма процесса с двухчастичным промежуточным состоянием.

$$\begin{aligned} \pi^+ + p &\rightarrow \pi^+ + p \\ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + p \\ &\rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 + p \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Первый из этих процессов—упругий, остальные — неупругие.

Рассмотрим упругие рассеяния двух частиц (протона и π -мезона) вперед (на нулевой угол когда $k = k'$). В этом случае начальное i и конечное f состояния совпадают. Такой процесс описывается амплитудой M_{ii} , для которой условие унитарности (3.4') выглядит так:

$$2 \operatorname{Im} M_{ii}(0) = \sum_n M_{in} M_{ni}^* (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_n) = \sum_n |M_{in}|^2 (2\pi)^4 \times \\ \times \delta(p_1 + p_2 - p_n). \quad (3.10)$$

Покажем, что правая сторона этого равенства лишь множителем отличается от полного сечения $\sigma_t = \sigma_{2 \rightarrow 2} + \sigma_{2 \rightarrow 3} + \sigma_{2 \rightarrow 4} + \dots$, представляющего собой сумму полных сечений $\sigma_{2 \rightarrow n}$ всех возможных процессов рассеяния из данного начального состояния i в конечное состояние f с произвольным числом частиц n . Действительно, после суммирования в формуле (4.5), гл. 3 по конечным состояниям f , перехода в с. ц. м. и деления полученного результата на время t и плотность потока j_0 начальных частиц найдем

$$\sigma_t = \frac{V}{j_0} \sum_n |M_{in}|^2 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_n).$$

Сравнение этого выражения с (3.10) дает

$$\operatorname{Im} M_{ii}(0) = \frac{j_0}{2V} \sigma_t.$$

Подставляя сюда (6.1) гл. 7 и учитывая нормировочные множители (см. гл. 3, § 4), имеем

$$\operatorname{Im} M_{ii}(0) = \frac{2kW}{\alpha_1^2 \alpha_2^2} \sigma_t, \quad (3.11)$$

где k —модуль импульса налетающей частицы в с. ц. м.

Учитывая связь амплитуд F и M , даваемую формулой (6.4), гл. 7, получаем вместо (3.11)

$$\operatorname{Im} F(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_t. \quad (3.12)$$

Как видно из (3.11) и (3.12), мнимая часть амплитуды рассеяния вперед пропорциональна полному сечению. Так формулируется оптическая теорема.

В общем случае поляризационное состояние частиц удобно характеризовать с помощью поляризационной матрицы плотности ρ (см. гл. 7, § 9).

В случае поляризованных частиц левая часть (3.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} F(0) &= \operatorname{Im} \Phi^{i+} F \Phi^i = \operatorname{Im} \Phi_n^{i+} F_{nn} \Phi_n = \operatorname{Im} \Phi_n^{i+} \Phi_n^i F_{nn} = \\ &= \operatorname{Im} \operatorname{Sp} \rho F, \end{aligned} \quad (3.13)$$

и (3.12) переписывается так:

$$\operatorname{Im} \operatorname{Sp} \rho F = \frac{k}{2\pi} \sigma_t, \quad (3.14)$$

где ρ — поляризационная матрица плотности системы.

Если просуммировать обе части (3.12) и (3.14) по проекциям спинов, то получим

$$\operatorname{Im} \operatorname{Sp} \Lambda F(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_t, \quad (3.15)$$

где σ_t^0 — полное сечение рассеяния неполяризованных частиц; в случае барионов оператор Λ определяется формулой (6.10) гл. 3.

Важно подчеркнуть, что соотношения (3.14) и (3.15) справедливы как в с. ц. м., так и в лабораторной системе. Соответственно k означает импульс падающей частицы в одной из этих систем.

§ 4. Аналитичность

Напомним некоторые сведения из теории функций комплексного переменного. Рассмотрим для простоты случай функции $f(z)$ от одной комплексной переменной z .

По определению, функция называется аналитической в точке a комплексной плоскости z , если в окрестности этой точки она может быть разложена в бесконечный степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n. \quad (4.1)$$

Последняя функция ограничена в точке a . Действительно, при $z \rightarrow a$ первый член ряда (4.1) становится постоянной величиной, а остальные слагаемые исчезают.

Функция (4.1) также однозначна в точке a . В самом деле, при обходе точки a аргумент разности $(z-a)$ увеличивается на 2π , т. е.

$$(z-a) \rightarrow (z-a) e^{2\pi i}. \quad (4.2)$$

Подставив последнее в (4.1), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-a)^n e^{2\pi i n}.$$

Но $e^{i2\pi n} = 1$ при любом n , поэтому после обхода точки a мы придем к первоначальному значению функции $f(z)$.

Если хотя бы одно из двух перечисленных свойств в какой-либо точке нарушается, функция перестает быть аналитической, а эта точка становится особой. Функция

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \quad (4.3)$$

неограниченно растет при $z \rightarrow a$, т. е. точка a является особой точкой функции $f(z)$. Особая точка такого типа называется полюсом. Функция

$$\sqrt{z-a} \quad (4.4)$$

при обходе точки a переходит в другую функцию, отличающуюся от начальной знаком:

$$\sqrt{z-a} \rightarrow \sqrt{z-a} e^{2\pi i} = e^{\pi i} \sqrt{z-a} = -\sqrt{z-a}.$$

Особая точка такого типа называется точкой ветвления (точнее, корневой точкой ветвления). Функция $f(z) = \ln(z-a)$ при обходе точки a также отличается от исходной:

$$\begin{aligned} \ln(z-a) &\rightarrow \ln[(z-a) e^{2\pi i}] = \\ &= \ln(z-a) + 2\pi i. \end{aligned}$$

В этом случае точка a называется логарифмической точкой ветвления.

Различные функции, получающиеся из исходной в результате обхода точки ветвления, называются ветвями многозначной функции. Чтобы выделить одну ветвь неоднозначной функции, произведем в плоскости z разрез, начинающийся в точке ветвления (рис. 15.12). При переходе через разрез функция изменяется. Если же в разрезанной плоскости переходы через разрезы запретить, то функция станет однозначной.

Область, в каждой точке которой функция $f(z)$ аналитическая, называется областью аналитичности функции. Аналитичность функции является настолько сильным ее свойством, что позволяет находить ее значения в любой внутренней точке z области аналитич-

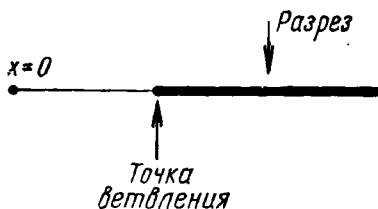


Рис. 15.12. Графическое изображение точек ветвления и разрезов.

ности, если задано значение функции лишь на границе (рис. 15.13). Такая связь устанавливается формулой Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z') dz'}{z' - z} = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \text{ лежит внутри контура } C \\ 0, & \text{если } z \text{ лежит вне контура } C. \end{cases} \quad (4.5)$$

Величина интеграла не зависит от выбора контура интегрирования. Другими словами, формула (4.5) справедлива для любого контура C , лежащего в области аналитичности и окружающего точку z .

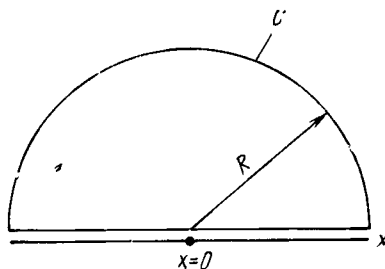
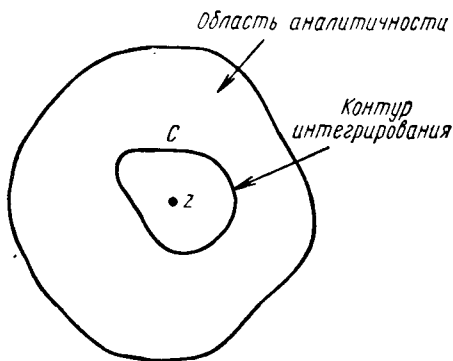


Рис. 15.13. Графическое изображение области аналитичности и контура интегрирования.

Рис. 15.14. Выбор контура интегрирования при получении дисперсионных соотношений.

Рассмотрим область комплексного переменного z (рис. 15.14). Пусть x — ось, на которой z принимает только вещественные значения. Допустим, что функция комплексного переменного $f(z)$ обладает следующими свойствами:

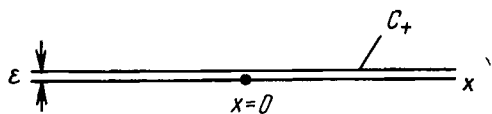


Рис. 15.15. Вид контура интегрирования при $R \rightarrow \infty$.

А) $f(z)$ не имеет в комплексной плоскости z особенностей нигде, кроме действительной оси x ;

Б) $f(z)$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$, т. е. $f(z)$

при $z \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем $1/|z|$. Согласно условию А, контур C можно выбрать так, как указано на рис. 15.14. При $R \rightarrow \infty$ интеграл по кругу из-за условия Б обратится в нуль и потому может быть отброшен (рис. 15.15). Тогда устремив $z' \rightarrow x'$, получим вместо (4.5)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_+} \frac{f(x') dx'}{x' - z}. \quad (4.5')$$

В предельном случае, когда точка z переходит на ось x , полагая $z = x + i\epsilon$, устремляя $\epsilon \rightarrow 0$ (рис. 15.15) и используя соотношение

$$\frac{1}{x' - x \mp i\epsilon} = P \frac{1}{x' - x} \pm i\pi\delta(x' - x), \quad (4.6)$$

получаем вместо (4.5')

$$f(x) = \frac{\mathcal{P}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x') dx'}{x' - x} + \frac{1}{2} f(x)$$

или

$$f(x) = \frac{\mathcal{P}}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x') dx'}{x' - x}. \quad (4.7)$$

Символ \mathcal{P} означает, что интеграл берется в смысле главного значения. Интегрирование производится вдоль действительной оси x .

Беря действительную часть от (4.7), приходим к соотношению между действительной и мнимой частями функции $f(x)$:

$$\operatorname{Re} f(x) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x') dx'}{x' - x}. \quad (4.8)$$

С помощью (4.6) последнюю формулу можно записать еще и так:

$$f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x') dx'}{x' - x - i\epsilon}. \quad (4.9)$$

Такого типа соотношения называются дисперсионными. Как видно, в дисперсионные соотношения (4.8) входят функции, зависящие только от действительного переменного.

Выясним, как запишется теорема Коши для функции $f(x)$, которая удовлетворяет условию А, но не стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Допустим, что $f(z) \rightarrow \text{const}$ при $z \rightarrow \infty$. В этом случае можно ввести функцию $F(x) = f(x) - f(x \rightarrow \infty)$, для которой уже справедливо соотношение (4.9)

$$F(x) = f(x) - f(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x') dx'}{x' - x - i\epsilon}. \quad (4.10)$$

Полагая в этом выражении $x = x_0$, получаем

$$F(x_0) = f(x_0) - f(x \rightarrow \infty) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} F(x') dx'}{x' - x_0 - i\epsilon}. \quad (4.11)$$

Вычитая почленно (4.11) из (4.10), находим

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} f(x') \left[\frac{1}{x' - x - i\varepsilon} - \frac{1}{x' - x_0 - i\varepsilon} \right] dx' = \\ &= \frac{x - x_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x') dx'}{(x' - x - i\varepsilon)(x' - x_0 - i\varepsilon)}. \end{aligned}$$

или

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(x') dx'}{(x' - x - i\varepsilon)(x' - x_0 - i\varepsilon)}. \quad (4.12)$$

Это выражение называется дисперсионным соотношением с одним вычитанием в точке $x = x_0$. В рассматриваемом случае для определения функции $f(x)$ необходимо знать не только ее мнимую часть $\operatorname{Im} f(x)$, но и величину функции в точке $x = x_0$.

Как видно, в дисперсионных соотношениях с вычитаниями появляются дополнительные неизвестные константы. Причем число этих констант тем больше, чем больше вычитаний.

Важным свойством аналитических функций является возможность их аналитического продолжения. Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области g , то возникает вопрос — нельзя ли расширить область определения функции, т. е. нельзя ли создать более широкую область G , содержащую g внутри себя, и в этой более широкой области определить новую аналитическую функцию $F(z)$, которая в первоначальной области g совпадает с $f(z)$? Такое расширение области определения аналитической функции $f(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Можно доказать, что если аналитическое продолжение возможно, то оно единственно.

Поясним сказанное на примере. Примем за область g_1 круг радиуса единицы с центром в нулевой точке, так что $|z| < 1$, а за область g_2 — круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке, равной мнимой единице i , т. е. $|z - i| < \sqrt{2}$. Пусть в области g_1 дана аналитическая функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Надо построить новую аналитическую в области $G = g_1 \cup g_2$ функцию $F(z)$, которая совпадала бы с $f(z)$ во всех точках области g_1 . Такой функцией будет

$$F(z) = \frac{1}{(1-i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n, \quad (4.13)$$

так как этот ряд сходится при $\left| \frac{z-i}{1-i} \right| < 1$ или, что то же, при $|z - i| < \sqrt{2}$. Таким образом (4.13) есть аналитическое продолже-

ние $f(z)$ в область $G = g_1 + g_2$, причем функция $F(z)$ — единственная. Постепенно увеличивая область g_2 , найдем, что функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в область любых z (за исключением $z = 1$). Этот результат следует непосредственно из того, что $f(z) = \sum z^n = \frac{1}{1-z}$, а функция $\frac{1}{1-z}$ аналитична не только при $|z| < 1$, но во всей плоскости z , кроме точки $z = 1$. Следовательно, аналитическим продолжением функции $f(z) = \sum z^n$ в область $|z| > 1$ является функция $\frac{1}{1-z}$.

Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей области z , за исключением точки z_0 , являющейся простым полюсом $f(z)$. Такую функцию можно представить в виде $f(z) = \overset{\circ}{f}(z)/(z-z_0)$, где $\overset{\circ}{f}(z)$ — всюду аналитическая функция z . В этом случае интеграл от $f(z)$ может быть вычислен стягиванием контура к малой окружности вокруг полюса z_0 . В результате получается

$$\oint \frac{\overset{\circ}{f}(z)dz}{z-z_0} = 2\pi i \overset{\circ}{f}(z_0), \quad (4.14)$$

$\overset{\circ}{f}(z_0)$ называется вычетом функции $f(z)$ относительно полюса z_0 .

§ 5. Дисперсионные соотношения для амплитуды процесса

Вернемся к изучению амплитуд физических процессов. Рассмотрим для конкретности амплитуды процессов с участием четырех частиц. Как мы уже говорили (см. гл. 3), такая амплитуда $M(s, t)$ зависит от двух вещественных переменных, например s и t . Зафиксируем одну из этих переменных; тогда амплитуда $M(s, t)$ будет функцией другой вещественной переменной. Чтобы для такой амплитуды написать дисперсионные соотношения, надо знать выполняются ли для нее условия А и Б.

Так как $M(s, t)$ зависит от вещественного переменного, например s , то условие А для $M(s, t)$ будет выполнено лишь в том случае, если при замене s комплексным переменным s^c вновь полученная функция $M(s^c, t)$ комплексного переменного не будет иметь особенностей во всей плоскости s^c ; иначе говоря, функция $M(s, t)$ при продолжении ее во всю область комплексных значений s^c должна быть аналитической. Выполняется ли это условие? В общем случае доказать возможность аналитического продолжения амплитуды во всю область комплексных значений переменных s^c пока не удалось. Однако для некоторых процессов доказана возможность аналитического продолжения по s до определенных значений фиксированного переменного t . Другими словами, проблема доказательства дисперсионных соотношений пока решена лишь частично. Несмотря на это дисперсионными соотношениями широко пользуются и в тех случаях, когда они не доказаны. При этом исходят из того, что на самом

деле имеется возможность аналитического продолжения $M(s, t)$ по одной переменной, но мы пока не умеем этого доказать. Таким образом, мы будем предполагать, что для амплитуды, зависящей от одного переменного (при другом фиксированном), условие А выполняется (хотя строго это доказано лишь для небольшого числа процессов и в ограниченных пределах).

Заметим, что при доказательстве дисперсионных соотношений существенно используется принцип причинности.

Вопрос выполнения условия Б для амплитуды $M(s, t)$ также является в настоящее время открытым. Обычно используют дисперсионные соотношения без вычитаний. В некоторых случаях используются дисперсионные соотношения с вычитаниями.

Как мы уже говорили, в дисперсионных соотношениях с вычитаниями появляются дополнительные неизвестные константы. Нахождение этих вычитательных констант является, вообще говоря, довольно трудной задачей, в связи с отсутствием какой-либо дополнительной физической информации.

Итак, дисперсионные соотношения для амплитуды $M(s, t)$ по переменной s (при фиксированном t) запишутся следующим образом:

1) без вычитания

$$M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } M(s', t) ds'}{s' - s - i\epsilon}; \quad (5.1)$$

2) с одним вычитанием

$$M(s, t) = \frac{s - s_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } M(s', t) ds'}{(s' - s - i\epsilon)(s' - s_0 - i\epsilon)} + M(s_0, t). \quad (5.2)$$

Подставляя в последние формулы выражения для амплитуд $M(s, t)$ (см. гл. 3) и сравнивая в обоих частях равенства члены при одинаковых спиновых комбинациях, получаем дисперсионные соотношения для функций $T_i^j(s, t)$:

1) без вычитания

$$T_i^j(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } T_i^j(s', t) ds'}{s' - s - i\epsilon}; \quad (5.3)$$

2) с одним вычитанием

$$T_i^j(s, t) = \frac{s - s_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im } T_i^j(s', t) ds'}{(s' - s - i\epsilon)(s' - s_0 - i\epsilon)} + T_i^j(s_0, t). \quad (5.4)$$

Для дальнейшего удобно в последних соотношениях произвести замену s переменной $v = s - u$. Тогда вместо (5.3) имеем

$$T_i^j(v, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} T_i^j(v', t)}{v' - v - i\varepsilon} dv' \quad (5.5)$$

или, согласно (4.6) и (4.9),

$$\text{Re} T_i^j(v, t) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} T_i^j(v', t) dv'}{v' - v}. \quad (5.6)$$

Соотношение (5.4) после замены $s \rightarrow v$ переписывается следующим образом:

$$\text{Re} T_i^j(v, t) = \frac{v - v_0}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} T_i^j(v', t) dv'}{(v' - v)_+ (v' - v_0)} + T_i^j(v_0, t). \quad (5.7)$$

Одновременное использование условий унитарности и аналитичности позволяет вычислить функции $T_i^j(s, t)$, а, следовательно, и амплитуду процесса.

Особенно просто вычисления можно провести в том приближенном случае, когда в условии унитарности учитываются только одночастичные промежуточные состояния.

В случае учета в условии унитарности двухчастичных и особенно многочастичных промежуточных состояний ситуация существенно усложняется. Поэтому сначала мы изложим приближенный метод вычисления амплитуды процесса, в котором все сводится к нахождению амплитуды для одночастичных промежуточных состояний. Такой подход обычно называют резонансной моделью; ее частным случаем является модель одномезонного обмена.

ГЛАВА 16

РЕЗОНАНСНАЯ МОДЕЛЬ

§ 1. Резонансная модель

Вычислим амплитуду, соответствующую одночастичному состоянию в условии унитарности. Для этого надо подставить выражение (3.7), гл. 15, в формулу (5.1), гл. 15

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im} M_{fi}}{s' - s - i\varepsilon} ds' = \sum_{\text{спином}} \int_{-\infty}^{\infty} ds' \frac{M_{fi} M_{if}^*}{s' - s - i\varepsilon} \delta(s' - \mu^2) = \\ &= \sum_{\text{спином}} \frac{(M_{fi} M_{if}^*)_{s=\mu^2}}{\mu^2 - s}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В точке $s = \mu^2$ амплитуда $M^{(1)}$ имеет полюс. Поэтому такие амплитуды, а также соответствующие им диаграммы с одночастичным промежуточным состоянием называют полюсными. Коэффициент у дроби $1/(\mu^2 - s)$ называется вычетом функции относительно полюса $s = \mu^2$ (или вычетом в полюсе $s = \mu^2$).

Как следует из (1.1), для вычисления полюсной амплитуды надо умножить амплитуду превращения двух начальных частиц в промежуточную на амплитуду превращения промежуточной частицы в две конечные, в полученном выражении сделать замену $s \rightarrow \mu^2$ и произвести суммирование по спинам промежуточных частиц.

Проиллюстрируем идею вычисления амплитуды в рамках резонансной модели на примере процесса фотообразования π -мезонов на нуклонах. В мнимую часть амплитуды этого процесса дают вклад (см. рис. 15.10) кроме одночастичных промежуточных состояний многочастичные: двухчастичные, трехчастичные и т. д. Заменяем последние наблюдающимися на опыте резонансными состояниями (рис. 16.1). Тем самым многочастичные промежуточные состояния будут сведены к одночастичным резонансным состояниям. Этим объясняется название модели. Ясно, что результаты, полученные с помощью резонансной модели, будут тем точнее, чем меньше ширина резонанса, которым аппроксимируется многочастичное состояние. Как показывает опыт (см. табл. I Дополнение I), ширины резонансов действительно малы.

Если пренебречь шириной распада резонанса, то выражение для резонансной амплитуды выглядит так:

$$M^{(1)} = \sum_{\text{спинам}} \frac{(M_{f1} M_{i1}^*)_{s=s_R}}{s_R - s}, \quad (1.2)$$

где s_R — энергия, соответствующая резонансному состоянию.

В случае учета ширины распада Γ резонанса выражение для резонансной амплитуды запишется следующим образом:

$$M^{(1)} = \sum_{\text{спинам}} \frac{(M_{f1} M_{i1}^*)_{s=s_R}}{s_R - s - i\Gamma}. \quad (1.3)$$

Из (1.1) следует, что $(M_{f1} M_{i1}^*)_{s=s_R}$ является в случае реальных частиц произведением двух постоянных величин*. Каждая из них

* В случае виртуальных частиц константы заменяются соответствующими форм-факторами.

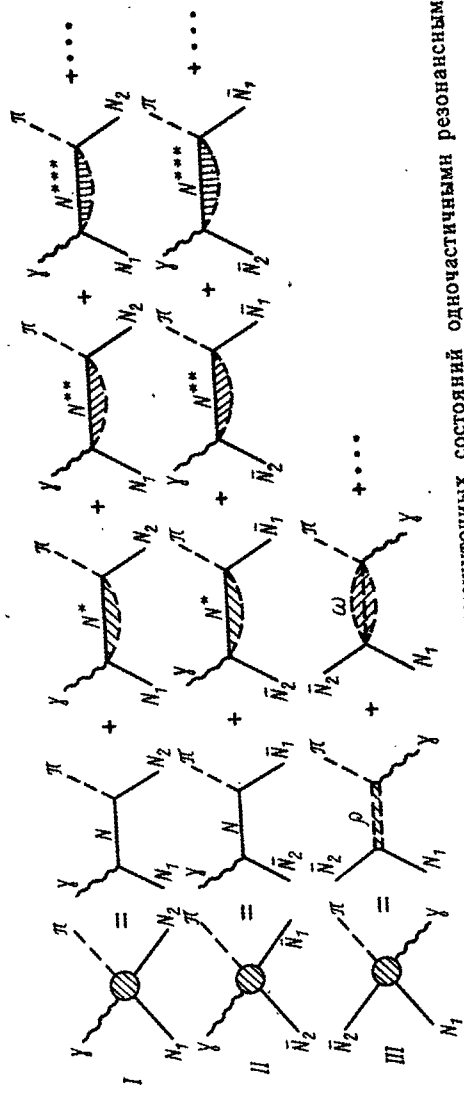


Рис. 16.1. Замена многочастичных промежуточных состояний одночастичными резонансными состояниями.

связана с константами связи в вершинах, так что величина $\lambda = (M_{f_1} M_{i_1}^*)_{s=s_R}$ содержит произведение указанных констант связи, и (1.2) и (1.3) можно переписать в виде

$$M^{(1)} = \frac{\lambda}{s_R - s} \quad (1.4)$$

и

$$M^{(1)} = \frac{\lambda}{s_R - s - i\Gamma}. \quad (1.4')$$

Чтобы найти выражение для амплитуды процесса в рамках резонансной модели надо: 1) отобрать те диаграммы, вклады которых будут учтены, и заменить в них многочастичные промежуточные состояния соответствующими резонансами; 2) записать инвариантные выражения для амплитуд отобранных диаграмм, используя (1.1); 3) произвести в выражениях для амплитуд суммирование по проекциям спина промежуточной частицы.

Для определения функций $T_i^{(1)}(s, t)$ надо преобразовать полученное выражение к виду, содержащему те же спиновые комбинации, которые входят в инвариантное выражение для амплитуды рассматриваемого процесса (см. гл. 3), и приравнять коэффициенты при одинаковых спиновых комбинациях (см. § 2, вычисление полюсных членов, а также резонансного члена в третьем канале). С помощью функций $T_i(s, t)$ можно найти функции $F_i(W, \theta)$, если использовать связь $F_i(W, \theta)$, с $T_i(s, t)$ (см. гл. 7).

Функции F_i можно найти прямо: переписать полученное в п. 3 выражение сразу в с. ц. м. (см. гл. 7, § 5) в виде, содержащем те же спиновые комбинации, которые входят в выражение для амплитуд рассматриваемого процесса в с.ц.м. (см. гл. 7 § 2, 3), и приравнять в обоих выражениях коэффициенты при одинаковых спиновых комбинациях (см. вычисление резонансных членов первого канала в § 2).

Вычисления можно вести и таким способом. Так как полный момент промежуточного состояния известен, то с помощью разложения функций $F_i(W, \theta)$ по парциальным амплитудам (см. гл. 8) можно определить, какие парциальные волны $F_i(W)$ отличны от нуля. Представляя эти парциальные амплитуды в виде, аналогичном (1.4)

$$F_i(W) = \frac{\lambda}{s_R - s},$$

и подставляя их в $F_i(W, \theta)$, получаем выражение для $F_i(W, \theta)$ через неизвестные параметры λ , s_R (см. вычисление резонансных членов в § 3).

Рассмотрим несколько конкретных процессов с помощью резонансной модели.

§ 2. Фотообразование π -мезонов на нуклонах

Ограничимся областью энергий фотонов $E_\gamma \leq 500$ Мэв (в лабораторной системе координат).

Учтем (см. рис. 15.10, б и 16.1): 1) одночастичные состояния по всем трем каналам; 2) двухчастичные πN -состояния по прямому каналу, заменив их (см. табл. 1) первым $N^*(J = 3/2^+, p\text{-волна}, I = 3/2, \sqrt{s_R} = 1236$ Мэв, $\Gamma = 120$ Мэв) и вторым $N^*(J = 3/2^-, d\text{-волна}, I = 1/2, \sqrt{s_R} = 1518$ Мэв, $\Gamma = 125$ Мэв) резонансами; вклад этих состояний в кросс-канал невелик и ими можно пренебречь; 3) двухмезонное состояние по третьему каналу, заменив его ρ -мезоном.

Найдем выражения, описывающие вклад каждого из перечисленных состояний.

Полюсные члены

Прямой канал. Подставляя (см. рис. 16.1) выражения (4.1) и (4.2), гл. 12 в (1.1), получаем (опуская изотопические функции)

$$\hat{T}_1^0 = \frac{1}{M^2 - s} g_{NN\pi} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \tau_p u(p) \bar{u}(p) [\hat{e}(\gamma\varepsilon) + \hat{\mu}(\gamma k)(\gamma\varepsilon)] u(p_1).$$

После суммирования по проекциям спина промежуточного нуклона, согласно формуле (6.9), гл. 3, и учета того, что $p = p_1 + k$, имеем

$$\begin{aligned} \hat{T}_1^0 &= \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - s} \bar{u}(p_2) \gamma_5 \tau_p (\gamma p_1 + \gamma k + M) [\hat{e}(\gamma\varepsilon) + \hat{\mu}(\gamma k)(\gamma\varepsilon)] u(p_1) = \\ &= \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - s} \bar{u}(p_2) \{ \tau_p \hat{e} [\gamma_5 (\gamma p_1)(\gamma\varepsilon) + \gamma_5(\gamma\varepsilon) M] + \\ &+ \tau_p \hat{e} \gamma_5 (\gamma k)(\gamma\varepsilon) + \hat{\mu} \gamma_5 \tau_p (\gamma p_1 + \gamma k + M) (\gamma k)(\gamma\varepsilon) \} u(p_1) = \\ &= \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - s} \bar{u}(p_2) \{ \tau_p \hat{e} \gamma_5 2(p_1 \varepsilon) + \tau_p \hat{e} \gamma_5 (\gamma k)(\gamma\varepsilon) + 2\tau_p \hat{\mu} \gamma_5 \times \\ &\times [(p_1 k)(\gamma\varepsilon) - (p_1 \varepsilon)(\gamma k)] + 2\tau_p \hat{\mu} M \gamma_5 (\gamma k)(\gamma\varepsilon) \} u(p_1), \end{aligned}$$

где $f_{NN\pi} = \frac{g_{NN\pi}}{2M}$.

Так как $t - \mu^2 = -2(kq)$, то непосредственной проверкой можно убедиться, что при $s = M^2$

$$(p_1 \varepsilon) \gamma_5 = - \frac{2\gamma_5 [(P\varepsilon)(kq) - (Pk)(q\varepsilon)]}{t - \mu^2},$$

где $P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)$,

$$-2\gamma_5 [(p_1 \varepsilon) (k\gamma) - (p_1 k) (\gamma\varepsilon)] = -\gamma_5 [(\gamma k) (q\varepsilon) - (\gamma\varepsilon) (kq)] - \\ -2\gamma_5 [(\gamma k) (P\varepsilon) - (\gamma\varepsilon) (Pk)],$$

поэтому

$$\hat{T}_1^{\circ} = \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - s} \bar{u}(p_2) \left[\tau_p \hat{e} \left(R_1 - \frac{2R_2}{t - \mu^2} \right) - \tau_p \hat{\mu} (R_3 + R_4) \right] u(p_1), \quad (2.1)$$

где R_i — спиновые комбинации, стоящие в формуле (1.14), гл. 3 при функциях T_i .

Для изотопических операторов имеют место соотношения

$$\hat{e}\tau_p = e \frac{1 + \tau_3}{2} \tau_p = \frac{e}{2} \left\{ \delta_{3p} + \tau_p - \frac{1}{2} [\tau_p \tau_3] \right\}; \quad (2.1')$$

$$\hat{\mu}\tau_p = \frac{1}{2} \left\{ (\mu'_p - \mu_n) \delta_{3p} + (\mu'_p + \mu_n) \tau_p - \frac{1}{2} (\mu'_p - \mu_n) [\tau_p \tau_3] \right\}.$$

Сравнивая выражения при одинаковых спиновых и изоспиновых комбинациях в (1.14), гл. 3 (8.1) гл. 10 и (2.1), находим вид неизвестных функций T_i^j в первом канале в полюсном приближении:

$$\left. \begin{aligned} \hat{T}_1^{1,2} &= \frac{1}{2} \frac{ef_{NN\pi}}{M^2 - s}, & \hat{T}_1^3 &= -\frac{1}{2} \frac{ef_{NN\pi}}{M^2 - s}, \\ \hat{T}_2^{1,2} &= -\frac{ef_{NN\pi}}{(\mu^2 - t)(M^2 - s)}, & \hat{T}_2^3 &= \frac{1}{2} \frac{ef_{NN\pi}}{(\mu^2 - t)(M^2 - s)}, \\ \hat{T}_{3,4}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{f_{NN\pi}(\mu'_p - \mu_n)}{M^2 - s}, & \hat{T}_{3,4}^2 &= -\frac{1}{2} \frac{f_{NN\pi}(\mu'_p + \mu_n)}{M^2 - s}, \\ \hat{T}_{3,4}^3 &= \frac{1}{2} \frac{f_{NN\pi}(\mu'_p - \mu_n)}{M^2 - s}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Кросс-канал. Вычисления для кросс-канала производятся аналогичным образом. Имея в виду, что в случае $p = p_2 - k = p_1 - q$ (рис. 16.1), получаем

$$\hat{T}^{\circ 11} = \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - u} \bar{u}(p_2) \left[\hat{e}(\gamma\varepsilon) + \hat{\mu}(\gamma k)(\gamma\varepsilon) \right] u(p) \bar{u}(p) \gamma_5 \tau_p u(p_1) = \\ = \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - u} \bar{u}(p_2) \left[\hat{e}(\gamma\varepsilon) + \hat{\mu}(\gamma k)(\gamma\varepsilon) \right] (\gamma p_2 - \gamma k + M) \gamma_5 \tau_p u(p_1) = \\ = \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - u} \bar{u}(p_2) \left\{ \hat{e}\tau_p [(\gamma\varepsilon)(\gamma p_2) \gamma_5 + M(\gamma\varepsilon) \gamma_5] - \right. \\ \left. - \hat{e}\tau_p(\gamma\varepsilon)(\gamma k) \gamma_5 + \hat{\mu}(\gamma k)(\gamma\varepsilon)(\gamma p_2 - \gamma k + M) \gamma_5 \tau_p \right\} u(p_1).$$

Так как

$$(\gamma \varepsilon) (\gamma p_2) \gamma_5 - (\gamma \varepsilon) (\gamma k) \gamma_5 = -\frac{2R_2}{\mu^2 - t};$$

$$(\gamma k) (\gamma \varepsilon) (\gamma p_2 - \gamma k + M) \gamma_5 = R_3 - R_4,$$

то

$$\hat{T}^{\text{II}} = \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - u} \bar{u}(p_2) \left\{ (\hat{\varepsilon} \tau_\rho)_{\text{кр}} \left(R_1 - \frac{2R_2}{t - \mu^2} \right) + (\hat{\mu} \tau_\rho)_{\text{кр}} (R_3 - R_4) \right\} u(p_1).$$

Множители $(\hat{\varepsilon} \tau_\rho)_{\text{кр}}$ и $(\hat{\mu} \tau_\rho)_{\text{кр}}$ отличаются от (2.1') знаком у $[\tau_\rho \tau_3]$.

Из сравнения последней формулы с (2.1) следует, что для получения выражений \hat{T}_i^j для кросс-канала надо в (2.2) заменить $s \rightarrow u$ и изменить на обратные знаки у тех членов, у которых либо верхний, либо нижний индекс (но не оба одновременно) равен трем, а остальные члены оставить без изменения. Этот результат следует также из формулы (2.7) гл. 11.

Третий канал. Подставляя (см. рис. 15.10,б) в (1.1) выражение для вершины $NN\pi$ (2.6), гл. 12 и выражение для вершины $\pi\pi\pi$ в виде $\frac{1}{M} e(q\varepsilon)$, находим

$$\hat{T}^{\text{III}} = \frac{2f_{NN\pi}}{\mu^2 - t} (q\varepsilon) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1). \quad (2.3)$$

Это выражение отлично от нуля лишь в случае образования положительных π -мезонов; оно получило название запаздывающего члена (см. гл. 14, § 4). В процесс фотообразования π^0 -мезонов положительный член по третьему каналу вклада не дает.

Выражение для \hat{T}^{III} градиентно неинвариантно, так же как и выражение для \hat{T}^{I} :

$$\hat{T}^{\text{I}} = \frac{f_{NN\pi}}{M^2 - s} \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma p_1 + \gamma k + M) e(\gamma \varepsilon) u(p_1).$$

Однако сумма \hat{T}^{I} и \hat{T}^{III} градиентно инвариантна. В самом деле, представим \hat{T}^{I} так:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{\text{I}} = & \frac{ef_{NN\pi}}{M^2 - s} \bar{u}(p_2) \gamma_5 (\gamma k) (\gamma \varepsilon) u(p_1) + \\ & + \frac{2ef_{NN\pi}}{M^2 - s} (p_1 \varepsilon) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1). \end{aligned}$$

Первое слагаемое в этом равенстве градиентно инвариантно. Складывая второй член с $\overset{\circ}{T}^{III}$, получаем также градиентно инвариантное выражение

$$\frac{2ef_{NN\pi}}{M^2 - s} (p_1 \varepsilon) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) + \frac{\{2ef_{NN\pi}\}}{\mu^2 - t} (q\varepsilon) u(p_2) \gamma_5 u(p_1),$$

так как $s - M^2 = (p_1 + k)^2 - M^2 = 2p_1 k$, $t - \mu^2 = (k - q)^2 - \mu^2 = -2kq$.

При «разноске» выражения для полюсного члена первого канала по инвариантам T_i мы пользовались градиентно инвариантным выражением (1.14), гл. 3 для амплитуды процесса. Поэтому в выражении для полюсного члена первого канала был автоматически учтен полюсной член и третьего канала. Как видно, этот член (запаздывающий член) вошел в $\overset{\circ}{T}_2$. Иначе говоря, вклад третьего канала в выражениях (2.2) уже учтен и его не надо рассматривать дополнительно.

Резонансные члены

Прямой канал. Учтем сначала вклад N^* -резонанса. Подставляя (3.6) и (2.8), гл. 12 в (1.1), суммируя по спинам промежуточного резонанса и переходя в с.ц.м. (см. гл. 7, § 5), получаем, имея в виду (3.5), гл. 7:

$$P_{N^*} = \frac{K_1}{s_R - s - i\Gamma} \left(I_3 - \frac{I_2}{3} \right) + \frac{K_2}{s_R - s - i\Gamma} \left(\cos \theta I_1 + \frac{I_2}{3} \right), \quad (2.4)$$

где I_i — спиновые комбинации, стоящие в (3.5), гл. 7 при F_i ;

$$K_1 = -\frac{2Wkq}{E_1 + M} g_{N^* N \pi} g_{\gamma N N^*}^{(1)}, \quad K_2 = 2Wkq g_{N^* N \pi} g_{\gamma N N^*}^2; \quad (2.5)$$

M, μ — масса нуклона, мезона; E_1, E_2 — энергии начального и конечного нуклонов; g — соответствующие константы связи, k, q — модули импульсов фотона и нуклона.

Сравнивая (2.4) с разложением амплитуды P_{N^*} по мультиполям [которое получается, если удержать в формуле (2.9), гл. 8 состояние $l_+ = 1_+$, соответствующее первому резонансу]:

$$P_{N^*} = 3(M_{1+} + E_{1+}) \cos \theta I_1 + 2M_{1+} I_2 + 3(E_{1+} - M_{1+}) I_3,$$

находим

$$M_{1+} = -\frac{K_1 - K_2}{6(s_R - s - i\Gamma)}, \quad E_{1+} = \frac{K_1 + K_2}{6(s - s - i\Gamma)}. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом для $P_{N^{**}}$ будем иметь

$$P_{N^{**}} = \frac{L_1}{s_R - s - i\Gamma'} \left(\frac{I_1}{3} - I_4 \right) + \frac{L_2}{s_R - s - i\Gamma'} \left(I_2 \cos \theta + \frac{I_1}{3} \right), \quad (2.7)$$

$$P_{N^{**}} = (E_{2-} + 3M_{2-}) I_1 + 6M_2 \cos \theta I_2 - 3(E_{2-} + M_{2-}) I_4, \quad (2.8)$$

где

$$L_1 = - \frac{2Wq^2}{E_2 + M} g_{NN^{**}} \pi g_{\gamma NN^{**}}^{(1)},$$

$$L_2 = - \frac{2Wk^2 q^2}{(E_1 + M)(E_2 + M)} (g_{NN^{**}} \pi g_{\gamma NN^{**}}^2).$$

Сравнив (2.7) и (2.8), получим

$$M_{2-} = \frac{L_2}{6(s_R - s - i\Gamma')}, \quad E_{2-} = \frac{2L_1 - L_2}{6(s_R - s - i\Gamma')}.$$

Если не переходить в с. ц. м., то подстановка (2.8) и первого члена (3.6), гл. 12 в (1.1) дает*

$$P_{N^{**}} = \frac{g_{NN^{**}} \pi g_{NN^{**}}}{M^{*2} - s} \bar{u}(p_2) q_\mu u_\mu(p) \bar{u}_\nu(p) \gamma_\lambda \gamma_5 \times \\ \times (k_\lambda \varepsilon_\lambda - k_\lambda \varepsilon_\nu) u(p_1) \tilde{\varphi}^*(q). \quad (2.9)$$

Чтобы произвести суммирование по проекциям спина промежуточного N^*_{1238} -резонанса, воспользуемся тем, что, согласно (6.11), гл. 3:

$$\sum_\lambda u_\mu^\lambda(p) \bar{u}_\nu^\lambda(p) = \frac{\hat{p} + M^*}{2M^*} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \right. \\ \left. - \frac{1}{3M^*} (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu) - \frac{2}{3} \frac{p_\mu p_\nu}{M^{*2}} \right].$$

Подставим эту формулу в (2.9) и преобразуем полученное выражение к виду, содержащему те же инвариантные спиновые комбинации, которые входят в (1.14), гл. 3. Это приводит к следующему результату:

* Как показывает анализ, второе слагаемое (3.6) гл. 12 дает пренебрежимо малый вклад.

$$\begin{aligned}
P_{N^*} = & \frac{1}{M^{*2} - s} g_{NN^*} \pi g_{NN^*} \frac{1}{2M^*} \bar{u}(p_2) \left\{ \left[-\frac{t}{2} - \frac{\mu^2}{6} - \frac{M}{3M^*} \mu^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{M^* M + M^2 - \mu^2}{6M^{*2}} (M^{*2} - M^2) \right] T_1 + T_2 + \right. \\
& \left. + \left[\frac{1}{3} (M^* + M) + \frac{M^{*2} - M^2}{6M^*} - \frac{(M^{*2} - M^2 + \mu^2) M}{6M^{*2}} \right] T_3 - \right. \\
& \left. - \left[\frac{2}{3} (M^* + M) - \frac{M^{*2} - M^2}{6M^*} + \frac{(M^{*2} - M^2 + \mu^2) M}{6M^{*2}} \right] T_4 \right\} u(p_1). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Кросс-канал. Вкладом резонансных состояний в кросс-канал мы пренебрежем (как показывает сравнение с опытными данными, этот вклад мал).

Третий канал. Подставляя (2.7) и (3.1), гл. 12 в (1.1), получаем

$$\frac{g_{\gamma\pi\rho}}{m_\rho^2 - t} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\rho\sigma} \varepsilon_\beta k_\rho q_\sigma \bar{u}(p_2) [F_1 \gamma_\mu + iF_2 \sigma^{\mu\nu} (p_2 - p_1)_\nu] u(p_1) \sum_\lambda \xi_\mu^\lambda \xi_\nu^\lambda. \quad (2.11)$$

Для того чтобы просуммировать по проекциям спина промежуточного вектона, надо согласно формуле (5.6), гл. 3 в (2.11) заменить

$$\sum_\lambda \xi_\mu^\lambda \xi_\nu^\lambda \rightarrow \delta_{\mu\nu} - \frac{(p_2 - p_1)_\mu (p_2 - p_1)_\nu}{m_\rho^2}.$$

Так как $p_2 - p_1 = k - q$, то подстановка второго члена этой формулы в (2.11) приводит к произведению полностью антисимметричного тензора $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\rho\sigma}$ на симметричные тензоры (например, $\varepsilon_\beta k_\rho q_\sigma k_\alpha$); такие произведения равны нулю. Поэтому формула (2.11) переписывается так:

$$\frac{1}{m_\rho^2 - t} \bar{u}(p_2) [C_1' \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\sigma} \gamma_\alpha q_\sigma k_\rho \varepsilon_\beta + iC_2' \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\sigma} q_\sigma k_\rho \varepsilon_\beta \sigma_{\alpha\nu} (p_2 - p_1)_\nu] u(p_1), \quad (2.11')$$

где

$$C_i' = g_{\gamma\pi\rho} F_i.$$

Представим первое слагаемое (2.11') в виде суммы тех же инвариантных спиновых комбинаций, которые входят в амплитуду (1.14), гл. 3. Для этого воспользуемся соотношениями

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \gamma_5 = \frac{1}{4!} \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\tau\lambda} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\lambda.$$

Тогда получим

$$J_1 = \gamma_5^2 \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} \gamma_\alpha q_\sigma k_\rho \varepsilon_\beta = \frac{1}{4!} \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\tau \gamma_\lambda \gamma_\alpha q_\sigma k_\rho \varepsilon_\beta \tilde{\varepsilon}_{\mu\nu\tau\lambda} \tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\rho\sigma}.$$

Используя формулу (2.1), гл. 2, находим

$$J_1 = -\frac{1}{6} \gamma_5 (-\hat{q}\hat{k}\hat{\varepsilon} + \hat{q}\hat{\varepsilon}\hat{k} + \hat{k}\hat{q}\hat{\varepsilon} - \hat{k}\hat{\varepsilon}\hat{q} - \hat{\varepsilon}\hat{q}\hat{k} + \hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{q}).$$

Учитывая соотношения

$$q = k + p_1 - p_2, \quad -2p_1 = k - q - 2P, \quad 2p_2 = k - q + 2P,$$

$$\hat{k}\hat{\varepsilon}\hat{k} = -\hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{k} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{6} \gamma_5 [-2\hat{q}\hat{\varepsilon}\hat{k} - 2\hat{\varepsilon}\hat{k}\hat{q} + \hat{\varepsilon}\hat{q}\hat{k} - \hat{k}\hat{q}\hat{\varepsilon}] = \\ &= \frac{1}{6} \gamma_5 [2(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)\hat{\varepsilon}\hat{k} + 2\hat{\varepsilon}\hat{k}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) + \hat{\varepsilon}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)\hat{k} + \\ &+ \hat{k}(\hat{p}_2 - \hat{p}_1)\hat{\varepsilon}] = \frac{1}{6} \gamma_5 [-6M\hat{\varepsilon}\hat{k} - 6(p_1\varepsilon)\hat{k} + 6\hat{\varepsilon}(p_1k) - \\ &- 6M\hat{\varepsilon}\hat{k} + 6\varepsilon(p_2k) - 6(p_2\varepsilon)\hat{k}] = -R_4. \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления для второго члена в (2.11') дают $J_2 = tR_1 - R_2$.

Следовательно, вычеты r_i в полюсе по третьему каналу запишутся следующим образом: $r_1 = C_2't$; $r_3 = 0$; $r_2 = -C_2'$; $r_4 = -C_1'$.

Выражение для полной амплитуды

Чтобы получить выражение для амплитуды процесса, надо сложить члены, соответствующие вкладу полюсных и резонансных диаграмм. Имея в виду изотопическую структуру амплитуды

$$F = \delta_{3\rho} F^1 + \frac{1}{2} [\tau_\rho \tau_3] F^3 + \tau_\rho F^2,$$

находим выражения для амплитуд фотообразования π^+ - и π^0 -мезонов

$$F_{\pi^+} = \frac{F^3 + F^2}{\sqrt{2}} = \hat{F}_{\pi^+} - \frac{1}{3} F_{N^*} + \frac{1}{2} F_{N^{**}} + F_\rho^2; \quad (2.12)$$

$$F_{\pi^0} = F^1 + F^2 = \hat{F}_{\pi^0} + \frac{2}{3} F_{N^*} + \frac{1}{2} F_{N^{**}} + F_\rho^2 + F_\rho^1. \quad (2.13)$$

Как видно, в полученные выражения входят следующие константы*:

$$g_{NN\pi}, e, \mu'_p, \mu'_n, s_{N^*} \text{ (или } E_{\gamma N^*}), \Gamma_{N^*}, K_1, K_2, A, g_{\pi\gamma}, \\ L_1, L_2, s_{N^{**}}, \Gamma_{N^{**}}.$$

Первые шесть из них мы будем считать известными:

$$\frac{g_{NN\pi}^2}{4\pi} = 14,5; \quad \frac{e^2}{4\pi} = \frac{1}{137}; \quad \mu'_p = 1,78; \quad \mu'_n = -1,91;$$

$$E_{\gamma N^*} = 340 \text{ Мэв}; \quad \Gamma_{N^*} = 120 \text{ Мэв},$$

а остальные определим, исходя из требования, чтобы теоретические значения $d\sigma$ были максимально близки к соответствующим опытным данным.

Анализ опытных данных по фотообразованию π^+ -мезонов

На рис. 16.2 приведены для нескольких энергий фотонов E_γ (л.с.к.) теоретические значения для $d\sigma$, которые получаются, если

* Как показывает анализ, для удовлетворительного описания опытных данных к вычету r_1 надо добавить некоторую неизвестную константу A .

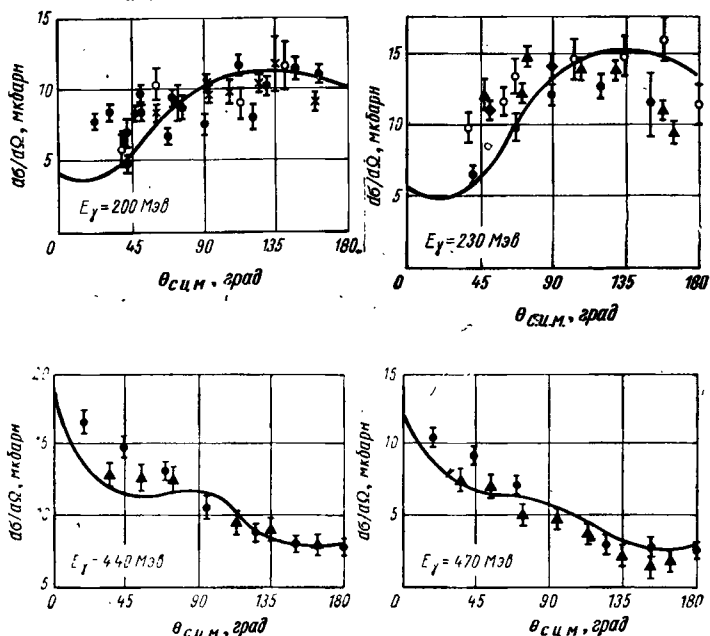


Рис. 16.2. Сравнение опытных значений дифференциальных сечений процесса $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными по резонансной модели для различных значений энергии фотона.

ограничиться учетом только первого πN -резонанса и положить

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= -3,15 eg_{NN\pi}, & K_2 &= 2,88 eg_{NN\pi}, \\ A &= -0,0066 eg_{NN\pi}, & g_{\gamma p} &\simeq 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

На рис. 16.2 приведены также соответствующие экспериментальные данные.

Подставив в (2.6) значения (2.14), получим

$$\frac{E_{1+}}{M_{1+}} \simeq -4,5\%$$

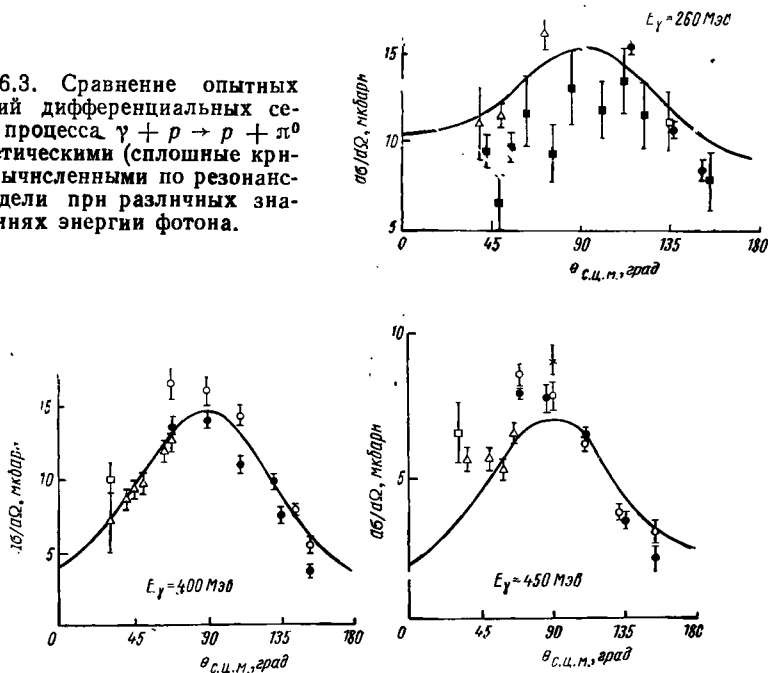
т. е. основную роль в рассматриваемой области энергий играет переход M_{1+} . Из (2.14) также следует, что вклад резонансного p -состояния, характеризуемый константой $g_{\gamma p}$, в третьем канале пренебрежимо мал.

Анализ опытных данных по фотообразованию π^0 -мезонов

В этом случае необходимо учитывать не только первый, но и второй πN -резонанс.

На рис. 16.3 приведены для нескольких энергий фотонов E_γ экспериментальные данные и результаты теоретических вычисле-

Рис. 16.3. Сравнение опытных значений дифференциальных сечений процесса $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными по резонансной модели при различных значениях энергии фотона.



ний, в которых взяты следующие значения констант:

$$K_1 = -3,3 eg_{NN\pi}, \quad K_2 = 3 eg_{NN\pi}, \quad A = 0,02 eg_{NN\pi},$$

$$L_1 = 2,2 eg_{NN\pi}, \quad L_2 = 0,1 eg_{NN\pi}, \quad \Gamma = 120 \text{ Мэв},$$

$$E_{\gamma N^{**}}^R = 750 \text{ Мэв}.$$

И в этом случае можно довольно хорошо описать экспериментальные результаты (дополнительные сведения — в литературе к этому параграфу).

§ 3. $K^+\Lambda$ -фотообразование на протонах

Рассмотрим область энергий фотонов $\sim 1 \text{ Гэв}$, близкую к порогу фотообразования $K\Lambda$ -частиц.

Учтем следующие состояния:

1) по первому каналу — полюсный член и третий πN -резонанс (рис. 16.4, а), т. е. N^{***} ($J = 5/2^+$, f -волна, $I = 1/2$, $W_R = 1682 \text{ Мэв}$,

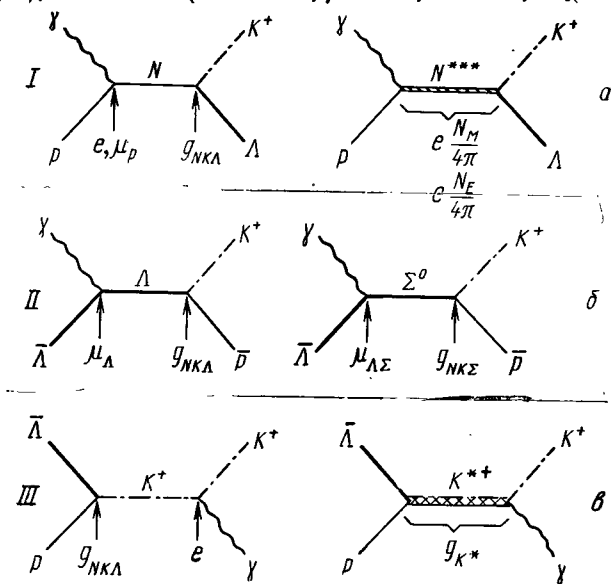


Рис. 16.4. Диаграммы процесса $\gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda^0$ в резонансном приближении.

$\Gamma = 100 \text{ Мэв}$); эти диаграммы характеризуются константами: $e, \mu_p, g_{NK\Lambda}, eN_M/4\pi, eN_E/4\pi$ (две последние константы представляют собой произведение констант в вершинах соответственно для электрических и магнитных фотонов);

2) по второму каналу — полюсные члены, соответствующие Λ, Σ^0 -частицам (рис. 16.4, б); эти диаграммы характеризуются

константами: $g_{NK\Lambda}$, μ_{Λ} (аномальный магнитный момент Λ -гиперона), $g_{NK\Sigma}$, $\mu_{\Lambda\Sigma}$ (переходный магнитный момент);

3) по третьему каналу (рис. 16.4, в) — K -мезонный полюс, K^* -резонанс ($J=1$, $I=1/2$, $M_{K^*} = 885 \text{ Мэв}$); эти диаграммы характеризуются константами: e , $g_{NK\Lambda}$, g_{K^*} , где $g_{K^*} = g_{\gamma K K^*}$, $g_{NK\Lambda}$.

Из перечисленных параметров неизвестны следующие:

$$\frac{g_{NK\Lambda}}{\sqrt{4\pi}}, \quad \frac{g_{NK\Sigma}}{\sqrt{4\pi}} \mu_{\Lambda\Sigma}, \quad \frac{g_{K^*}}{\sqrt{4\pi}}, \quad \frac{N_M}{\sqrt{4\pi}}, \quad \frac{N_E}{\sqrt{4\pi}}. \quad (3.1)$$

Так как полный изотопический спин конечной системы равен $1/2$, то в промежуточном состоянии не может быть πN -резонанса с $J = I = 3/2$. Резонанс N^{***} учитывается потому, что он лежит в физической области.

Выражения, соответствующие полюсным членам и K^* -резонансу, могут быть найдены тем же способом, который применялся в предыдущем параграфе.

Резонансному состоянию N^{***} соответствуют парциальные амплитуды M_{3-} , E_{2+} . Тогда с помощью (2.9), гл. 8 найдем

$$F_1(N^{***}) = 3 \left[4M_{3-} \cos \theta + \frac{1}{2} E_{2+} (5 \cos^2 \theta - 1) \right],$$

$$F_2(N^{***}) = \frac{9}{2} M_{3-} (5 \cos^2 \theta - 1),$$

$$F_3(N^{***}) = 3 (M_{3-} + 5E_{2+} \cos \theta),$$

$$F_4(N^{***}) = -3 (5M_{3-} \cos \theta + E_{2+}).$$

Мультиполи запишем в виде (1.4')

$$M_{3-}(W) = e \frac{N_M}{4\pi} \cdot \frac{q^3}{M_K^2} \cdot \frac{1}{s_R - s - i\Gamma},$$

$$E_{2+}(W) = e \frac{N_E}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{q^3}{M_K^2} \cdot \frac{1}{s_R - s - i\Gamma},$$

где M_K — масса K -мезона; s_R — положение резонанса. Амплитуда будет суммой полюсных и резонансных членов: $F_i(W, \theta) = F_i$ (полюсные) + $F_i(K^*)$ + $F_i(N^{***})$.

Экспериментально измерены (см. рис. 16.5 и 16.6) для энергий $E_{\gamma} \leq 1200 \text{ Мэв}$: а) дифференциальные сечения процесса; б) поляризация Λ -гиперонов P_{Λ} вдоль направления $[\mathbf{p}_{\gamma}, \mathbf{p}_K]$.

Возьмем следующие значения известных параметров:

$$\mu_p' = 1,78 \frac{e}{2M}, \quad \mu_{\Lambda} = 0,75 \frac{e}{2M}, \quad \Gamma_{N^{***}} = 100 \text{ Мэв}.$$

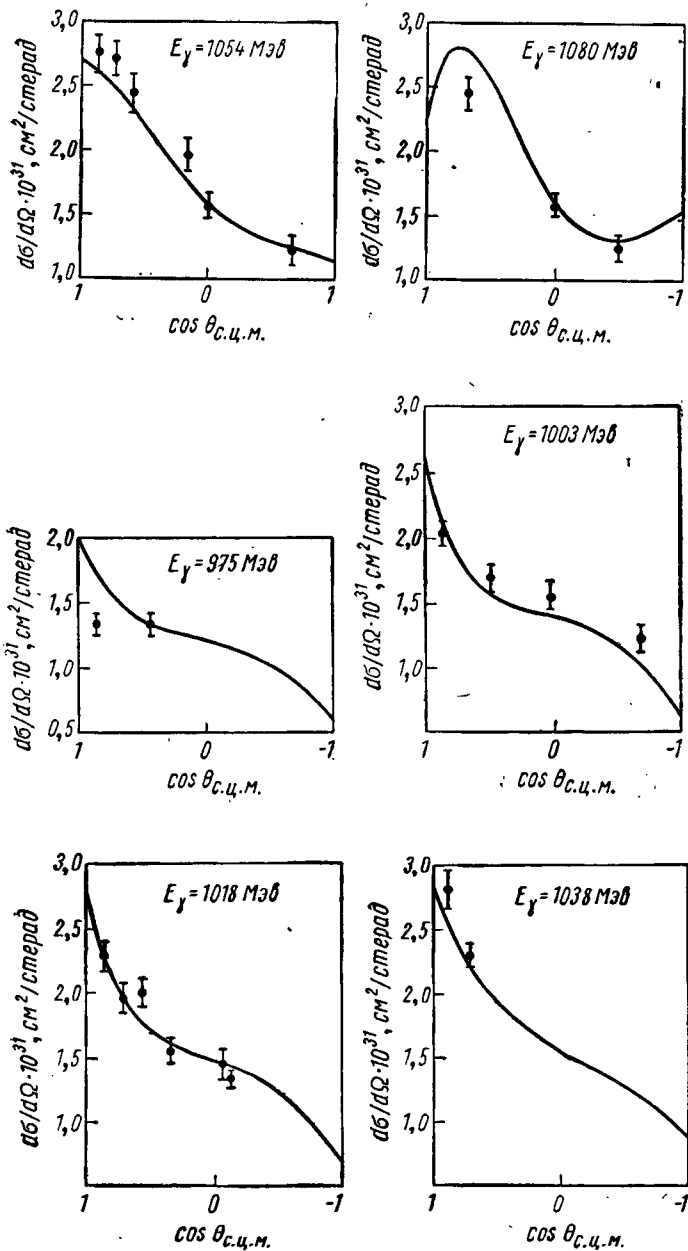


Рис. 16.5. Сравнение опытных значений дифференциальных сечений процесса $\gamma + p \rightarrow K^+ + \Lambda^0$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными по резонансной модели для различных энергий фотона.

Сравнивая теоретические выражения с имеющимися опытными данными, находим набор неизвестных параметров, приводящий к минимуму χ^2 (см. гл. 14, § 2):

$$\left. \begin{aligned} \chi^2 = 1,86, \quad \frac{g_{N\kappa\lambda}^2}{4\pi} = 5,11, \quad \frac{g_{N\kappa\lambda} \mu_T}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{e}{2M} = 0,42, \\ \frac{g_{K^*}}{\sqrt{4\pi}} = 0,18, \quad \frac{N_M}{\sqrt{4\pi}} = 0,01, \quad \frac{N_E}{\sqrt{4\pi}} = -0,077. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Вычисленные с помощью этих параметров значения дифференциальных сечений $K\lambda$ -фотообразования и поляризации протонов для отдачи различных энергий фотонов E_γ приведены на рис. 16.5 и 16.6. Там же даны соответствующие опытные данные. Как видно, найденный набор параметров (3.2) довольно хорошо описывает имеющиеся опытные данные.

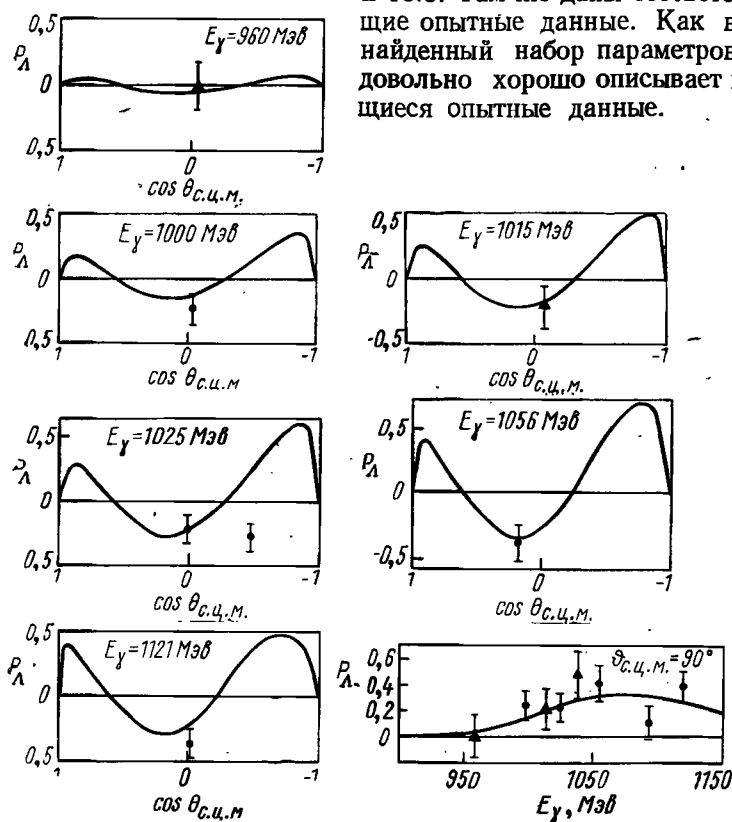


Рис. 16.6. Сравнение опытных значений поляризации Λ^0 -частицы с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными по резонансной модели при различных значениях энергии фотона.

§ 4. Форм-факторы нуклонов

Дифференциальное сечение рассеяния электронов на нуклонах (в однофотонном приближении). Рассмотрим процесс рассеяния электронов на нуклонах

$$e(k_1) + N(p_1) \rightarrow e'(k_2) + N'(p_2). \quad (4.1)$$

Соответствующие этой реакции диаграммы изображены на рис. 16.7. Специфичным для каждой из этих диаграмм является то, что одна

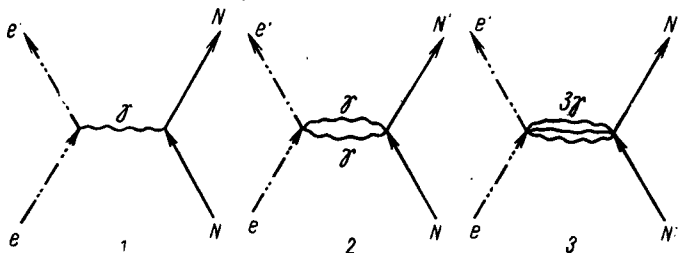


Рис. 16.7. Диаграммы процесса $e + N \rightarrow e' + N'$.

из ее вершин, соответствующая взаимодействию фотонов с электронами, является чисто электромагнитной (с константой связи $e^2/\hbar c \sim \sim 1/137$).

Поэтому основной вклад будет давать диаграмма (1), содержащая в промежуточном состоянии один фотон (однофотонное приближение). Вкладом остальных диаграмм мы пренебрежем (как выяснится, это предположение согласуется с имеющимися опытными данными).

Обе вершины диаграммы (1) описываются, вообще говоря, выражением (3.4'), гл. 12. Однако в случае электромагнитной вершины это выражение упрощается. Аномальный магнитный момент электрона пренебрежимо мал, поэтому второе слагаемое в (3.4), гл. 12 в случае электромагнитной вершины следует опустить. Если, кроме того, считать, что электрон является точечной частицей, то форм-фактор электрона $F_1(q^2)$ можно заменить его зарядом e . Следовательно, выражение для электромагнитной вершины запишется так:

$$\bar{e}u(k_2) \gamma_\mu u(k_1) A_\mu(q). \quad (4.2)$$

Подставив (4.2) и (3.4), гл. 12 в (1.1) получим выражение для амплитуды процесса (4.1), учитывая, что масса фотона равна нулю:

$$M(s, t) = eu(k_2) \gamma_\mu u(k_1) A_\mu \bar{u}(p_2) \times \\ \times \left[T_1(t) \gamma_\nu + \frac{\mu_N}{2M} T_2(t) q_\alpha \sigma_{\alpha\nu} \right] u(p_1) \frac{1}{q^2}. \quad (4.3)$$

где $q^2 = (p_2 - p_1)^2$; μ'_N — аномальный магнитный момент нуклона в ядерных магнетонах; M — масса нуклона.

Если подставить это выражение для амплитуды в (4.9), гл. 3, вычислить след и перейти в лабораторную систему координат, то получится следующая формула для дифференциального сечения процесса (4.1) в однофотонном приближении (формула Розенблюта):

$$d\sigma = \sigma_0 \left\{ F_1^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} \times \right. \\ \left. \times \left[2(F_1(q^2) + \mu'_N F_2(q^2))^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} + (\mu'_N F_2(q^2))^2 \right] \right\}. \quad (4.4)$$

$$\text{Здесь } \sigma_0 = \frac{e^4}{4E^2} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \theta} = \frac{e^4}{q^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}}$$

сечение рассеяния электрона на нуклоне, обладающем точечным зарядом; θ — угол рассеяния; E, E' — энергия налетающего и рассеянного электронов (все величины в лабораторной системе координат). Кроме того, мы положили массу электрона равной нулю.

Из выражения для

$$q^2 = - \frac{4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + (2E/M) \sin^2 \frac{\theta}{2}} = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

видно, что для всех углов рассеяния передаваемый четырехмерный импульс $q^2 < 0$, т. е. q^2 пространственноподобный четырехвектор.

Входящие в (4.4) функции $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ называются соответственно дираковским и паулевским форм-факторами нуклона, причем

$$F_1^p(0) = F_2^p(0) = 1, \quad \mu'_p = 1,79; \quad F_1^n(0) = 0, \quad F_2^n(0) = 1, \quad \mu'_n = -1,91.$$

Более удобны не функции $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$, а следующие их линейные комбинации:

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{q^2}{4M^2} \mu'_N F_2(q^2); \quad (4.5)$$

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \mu'_N F_2(q^2), \quad (4.6)$$

которые называются соответственно электрическим и магнитным форм-факторами нуклона, при этом

$$G_E^p(0) = 1, \quad G_M^p(0) = 1 + \mu'_p, \quad (4.7)$$

$$G_E^n(0) = 0, \quad G_M^n(0) = \mu'_n, \quad (4.8)$$

т. е. G_M совпадают с величинами полных магнитных моментов нуклонов.

Помимо форм-факторов G_E и G_M используются также форм-факторы F_E и F_M : $F_E = G_E$, $F_M^p = G_M^p \frac{1}{1+\mu_p}$, $F_M^n = \frac{1}{\mu_n} G_M^n$ с нормировкой $F_E^p(0) = F_M^p(0) = F_M^n(0) = 1$, $F_E^n(0) = 0$.

С учетом (4.5) и (4.6) вместо (4.4) получим

$$d\sigma = \sigma_0 \left\{ \frac{G_E^2(q^2) - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2(q^2)}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q}{2M^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} G_M^2(q^2) \right\}. \quad (4.9)$$

Эта формула обладает рядом особенностей.

1. Если откладывать по оси ординат $\frac{1}{\sigma_0} d\sigma$, а по оси абсцисс — значения $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$, то $\frac{1}{\sigma_0} d\sigma$ изобразится при $q^2 = \text{const}$ в виде прямой линии; наклон ее равен $-\frac{q^2}{2M^2} G_M^2(q^2)$, ордината в точке $\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2(1 - q^2/4M^2)}$ равна $(1 - \frac{q^2}{4M^2})^{-1} G_E^2$. Другими словами, наклон прямой дает значение $G_M^2(q^2)$, а ордината — значение $G_E^2(q^2)$. Правда, при этом определяются лишь квадраты форм-факторов и остаются неопределенными их знаки. Однако, если учесть значения форм-факторов при $q^2 = 0$, определяемые формулами (4.7) и (4.8), то можно определить и знаки всех форм-факторов, за исключением $G_E^n(q^2)$, так как $G_E^n(0) = 0$.

2. При рассеянии электронов назад ($\theta = 180^\circ$) дифференциальное сечение (4.9) переписется так:

$$d\sigma = \frac{e^4}{q^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}} \frac{q^2}{2M^2} \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} G_M^2(q^2) = \frac{\alpha^4}{M^2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 G_M^2(q^2),$$

т. е. в этом случае $d\sigma$ зависит от магнитного форм-фактора $G_M^2(q^2)$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для непосредственного определения величины $G_M^2(q^2)$.

3. При больших значениях q^2 вклад $G_E^2(q^2)$ будет существенно подавлен, так как при G_E^2 стоит множитель $(1 - \frac{q^2}{4M^2})^{-1}$, а перед G_M^2 — множитель $(-\frac{q^2}{4M^2})$.

4. Форм-факторы G_E и G_M входят в формулу (4.9) отдельно, в то время как при использовании $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ в (4.4) возникает перекрестный член $F_1 F_2$. Поэтому при определении форм-факторов из экспериментальных данных более удобно использовать G_E и G_M .

Экспериментальное определение форм-факторов. Для этого надо подставить в формулы (4.9) имеющиеся опытные значения $d\sigma$ и найти затем величины G_E и G_M .

Величину q^2 можно измерять как в энергетических переменных, так и в обратных длинах; в качестве единицы обратной длины выбирается обычно 1 ферми = 10^{-13} см; при этом $(1 \text{ ферми})^{-1} = 197 \text{ Мэв}$ или $1 \text{ Гэв}/c = 25,7 (\text{ферми})^{-2}$.

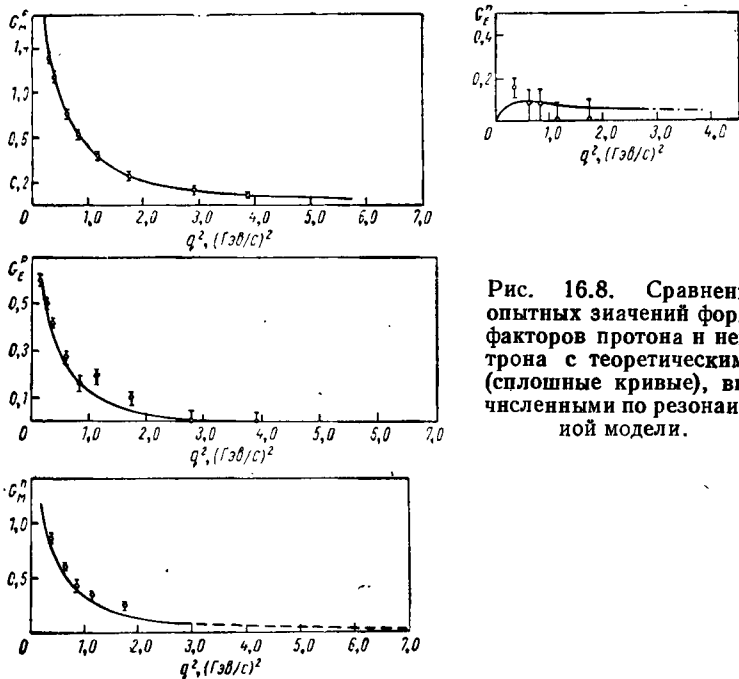
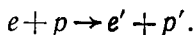


Рис. 16.8. Сравнение опытных значений форм-факторов протона и нейтрона с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными по резонансной модели.

Форм-факторы протонов G_E^p и G_M^p можно определить из опытных данных по упругому рассеянию электронов на протонах:



Найденные с помощью опытных данных величины форм-факторов G_E^p и G_M^p протона в зависимости от q^2 приведены на рис. 16.8.

Интересно заметить, что величины $G_E^p(q^2)$ и $G_M^p(q^2)/(1 + \mu_p)$ равны друг другу в пределах экспериментальных ошибок во всем интервале измеренных q^2 .

Нейтронные форм-факторы G_E^n , G_M^n можно определить главным образом из опытных данных по рассеянию электронов на дейтронах (упругому $e + d \rightarrow e' + d'$ и неупругому $e + d \rightarrow e' + n + p$). Точное выделение нейтронных форм-факторов в этом случае явля-

ется довольно сложной задачей. Во-первых, потому, что в электрон-дейтронном рассеянии преобладает вклад от рассеяния на протоне, и малый вклад рассеяния на нейтроне трудно выделить. Во-вторых, нейтрон хотя бы слабо, но связан с протоном; это приводит к значительным теоретическим неопределенностям, так как при выделении нейтронных форм-факторов мы вынуждены делать малообоснованные предположения (использование нерелятивистской волновой функции дейтрона и т. п.). Вследствие этого нейтронные форм-факторы определены с худшей точностью, чем протонные.

Опытные значения нейтронных форм-факторов для $q^2 \leq 1,8$ $(\Gamma_{\theta\theta}/c)^2$ даны на рис. 16.8. Как видно, электрический нейтронный форм-фактор близок к нулю и измерен с плохой точностью. Кроме того, соотношение $G_E^n = \frac{1}{\mu_n} G_M^n$ не выполняется, напротив, вплоть до $q^2 \leq 1$ $(\frac{\Gamma_{\theta\theta}}{c})^2$

$$(G_E^n)^2 \leq \left(\frac{1}{\mu_n} G_M^n \right)^2.$$

Вычисление форм-факторов с помощью резонансной модели. Применим для вычисления форм-факторов резонансную модель. Как мы уже говорили (гл. 10, § 5 и 11), форм-фактор нуклона состоит из изоскалярной F^s и изовекторной F^v частей, причем

$$G_M^v = \frac{1}{2} (G_M^p - G_M^n); \quad G_E^v = \frac{1}{2} (G_E^p - G_E^n);$$

$$G_M^s = \frac{1}{2} (G_M^p + G_M^n); \quad G_E^s = \frac{1}{2} (G_E^p + G_E^n),$$

с нормировкой

$$G_E^s(0) = G_E^v = 0,5; \quad G_M^s(0) = \frac{1}{2} (1 + \mu_p' + \mu_n') = 0,44;$$

$$G_M^v(0) = \frac{1}{2} (1 + \mu_p' - \mu_n') = 2,35.$$

В изоскалярную часть будут давать вклад промежуточные состояния с нечетным числом π -мезонов, а в изовекторную — с четным числом π -мезонов (см. рис. 15.10). Ограничимся учетом промежуточных состояний с двумя и тремя π -мезонами и заменим двухмезонное состояние ρ^0 -мезоном, и трехмезонное — ω^0 - и ϕ^0 -мезонами.

Тогда изоскалярный и изовекторный форм-факторы можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} G_E^v &= \frac{\alpha_e^v}{1 + \frac{q^2}{m_p^2}} + C_e^v, & C_M^v &= \frac{\alpha_M^v}{1 + \frac{q^2}{m_p^2}} + C_M^v; \\ G_E^s &= \frac{\alpha_{1e}^s}{1 + \frac{q^2}{m_\omega^2}} + \frac{\alpha_{2e}^s}{1 + \frac{q^2}{m_\phi^2}} + C_e^s, & G_M^s &= \frac{\alpha_{1M}^s}{1 + \frac{q^2}{m_\omega^2}} + \frac{\alpha_{2M}^s}{1 + \frac{q^2}{m_\phi^2}} + C_M^s, \end{aligned} \right\} (4.10)$$

где C_i , α_i — неизвестные параметры. В формулы (4.10), кроме C_i , входят шесть параметров α_i . С другой стороны, форм-факторы удовлетворяют семи условиям: а) $G_E^s, G_E^v, G_M^s, G_M^v$ равны статическим значениям при $q^2=0$; б) $G_E^{s,v} = G_M^{s,v}$ при $q^2 = -4M^2$; в) производные форм-факторов, по q^2 при $q^2=0$ равны определенной величине:

$$\left(\frac{dG_E^n}{dq^2} \right)_{q^2=0} = (0,0178 \pm 0,0099) \text{ ферми}^2.$$

Иначе говоря, в формуле (4.10) нет ни одного свободного параметра. Подстановка экспериментальных значений масс ρ -, ω - и ϕ -мезонов в (4.10) приводит к результатам, плохо согласующимся с опытными значениями форм-факторов как в случае $C_i = 0$, так и в случае $C_i \neq 0$. В связи с этим было предпринято много различных попыток добиться согласия теоретических и экспериментальных результатов. В частности этого можно достичь (см. рис. 16.8, сплошная линия), если предположить, что наряду с ρ^0 -мезоном существует еще один векторный мезон ρ'^0 с массой 875 Мэв. Однако такой мезон пока не наблюдался на опыте.

Изложенные вычисления представляют собою пример использования модели векторной доминантности. Так называют модель, в основе которой лежит предположение о том, что электромагнитный ток можно представить в виде линейной суперпозиции полей нейтральных векторных мезонов (ω^0, ϕ^0, ρ^0). Фотон (см. рис. 15.10) сначала превращается в векторный мезон (этот процесс характеризуется константой связи $g_{\gamma\rho}$), а затем векторный мезон взаимодействует с протоном (адроном). В рамках модели векторной доминантности рассматривалось большое количество различных процессов и в большинстве случаев было получено неплохое согласие вытекающих из модели следствий с экспериментальными данными. Ситуация с форм-факторами нуклонов является одним из немногих примеров, когда предсказания модели не согласуются с опытом (подробнее о модели векторной доминантности см. обзор Сакураи в литературе к этому параграфу).

Справедливость однофотонного приближения. До сих пор мы пользовались формулой (4.4), в которой не учитываются вклады

многофотонных, в частности двухфотонных, промежуточных состояний:

Если учесть двухфотонный обмен, то в амплитуде процесса (4.1) наряду с членом eA_1 , пропорциональным e , появится и слагаемое $e^2 A_2$, пропорциональное e^2

$$F(W, \theta) \sim eA_1 + e^2 A_2, \quad (4.11)$$

так что дифференциальное сечение

$$d\sigma \sim |eA_1 + e^2 A_2|^2. \quad (4.12)$$

Поскольку амплитуда A_1 однофотонного обмена действительна, а амплитуда A_2 двухфотонного обмена комплексна, то (4.12) приводит к следующему результату:

$$d\sigma \sim (eA_1 + e^2 \operatorname{Re} A_2)^2 + (e^2 \operatorname{Im} A_2)^2 \sim e^2 A_1^2 + 2e^3 A_1 \operatorname{Re} A_2. \quad (4.13)$$

Наличие вклада двухфотонного обмена экспериментально может проявиться тремя путями.

1. Как мы уже отмечали, из формулы (4.9) следует, что зависимость $d\sigma$ от $\operatorname{tg}^2 \theta/2$ должна изображаться прямой линией. Отклонение от прямой линии могло бы быть, в частности, обусловлено двухфотонным обменом*.

2. Второй способ выяснения роли двухфотонного обмена заключается в сравнении упругого рассеяния электронов и позитронов на протоне. Из формулы (4.13) видно, что знаки интерференционного члена будут разными в случае рассеяния электронов и позитронов на протоне. Иначе говоря, если бы сечения электрон-протонного и позитрон-протонного рассеяний отличались друг от друга, то это свидетельствовало бы о вкладе двухфотонного обмена. Опыт показывает, что указанные сечения в пределах ошибок равны друг другу.

3. Из выражения (4.11) для амплитуды вытекает, что поляризация P протона отдачи

$$P \sim e^3 A_1 \operatorname{Im} A_2.$$

Если вклад двухфотонного обмена мал, то малой должна быть и величина P . Опыт дает для P величину, равную в пределах ошибок нулю.

Таким образом, эксперименты показывают, что вклад двухфотонного обмена пренебрежимо мал по сравнению с вкладом однофотонного обмена.

* Можно показать, что к одному и тому же отклонению от прямой линии приводит обмен как двумя фотонами, так и более сложным комплексом, если полный спин комплекса равен единице. Поэтому, строго говоря, отклонение от прямой линии нельзя объяснить однозначно вкладом лишь двухфотонного промежуточного состояния.

§ 5. Модель одномезонного обмена (ОРЕ-модель)

Как показывает опыт, дифференциальные сечения большинства процессов имеют максимум при малых значениях передаваемого импульса $\sim 0,1, - 0,15$ ($\text{Гэв}/c$)². Малая величина переданного импульса указывает на то, что в процессах большую роль играют «далекие», периферические соударения.

Размер области взаимодействия Δx , соответствующий обмену n частицами с массой m , равен

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{nmc}$$

Следовательно, наибольший радиус действия сил получается при обмене одной наиболее легкой частицей. Среди адронов такой частицей является π -мезон.

На языке диаграммы этот периферический характер взаимодействия соответствует тому, что основной вклад в амплитуду дает диаграмма с одномезонным обменом (рис. 15.10, третий канал для различных процессов).

В приближении одномезонного обмена были проанализированы опытные данные по многим процессам. При этом картина оказалась пестрой: для одних процессов результаты теории и опыта довольно хорошо согласуются, для других — резко расходятся. Чтобы устранить это расхождение, модель одномезонного обмена модифицировалась в направлении учета взаимодействия между конечными частицами (модель с поглощением) учета дифракционного механизма взаимодействия (дифракционная модель) и т. п. Однако эти модификации не улучшили ситуации, соответствующей модели одномезонного обмена.

ГЛАВА 17

ОДНОМЕРНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 1. Одномерные дисперсионные соотношения

В предыдущей главе мы изложили приближенный метод определения скалярных функций $T_i^j(s, t)$, в котором промежуточные состояния в условии унитарности заменялись одночастичными состояниями.

Переходим к вычислению функций $T_i^j(s, t)$ с учетом в условии унитарности двухчастичных промежуточных состояний. Для этого используем дисперсионные соотношения (5.6) или (5.7), гл. 15.

Преобразуем формулу (5.6), гл. 15 к более удобному для практических приложений виду.

Для этого перепишем ее так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu} d\nu' = \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu} d\nu' + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu} d\nu'. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом интегрирование производится по отрицательным энергиям (что соответствует левой оси рис. 15.15). Чтобы избавиться от интегрирования по физически бессмысленным отрицательным энергиям, произведем во втором интеграле замену переменной интегрирования $\nu \rightarrow -\nu$ (при этом $\operatorname{Im} T(\nu) = -\operatorname{Im} T(-\nu)$)

$$\operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(\nu', t)}{\nu' - \nu} d\nu' + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(-\nu', t)}{\nu' + \nu} d\nu'. \quad (1.1)$$

Так как $\nu = s - u$, то замена $\nu \rightarrow -\nu$ эквивалентна замене $s \leftrightarrow u$, т. е. замена $\nu \rightarrow -\nu$ эквивалентна переходу к кросс-каналу (см. гл. 11). С другой стороны, если в реакции участвуют две тождественные частицы, то в простейшем случае функция перекрестного канала с точностью до знака равна функции прямого канала (см. гл. 11):

$$T_i^j(-\nu, t) = \eta_i^j T_i^j(\nu, t) \quad (1.2)$$

или

$$T_i^j(s, t) = \eta_i^j T_i^j(u, t). \quad (1.2')$$

Поэтому, подставив (1.2) в (1.1), получим дисперсионные соотношения, в которых отсутствует интегрирование по отрицательным энергиям:

$$\operatorname{Re} T_i^j(\nu, t) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} T_i^j(\nu', t) \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \eta_i^j \frac{1}{\nu' + \nu} \right] d\nu'. \quad (1.3)$$

Иначе говоря, нефизическую абсорбтивную часть функций прямого процесса мы заменили физической абсорбтивной частью, но функций перекрестного канала.

В том случае, когда в реакции две тождественные частицы отсутствуют (например, $\gamma p \rightarrow K\Lambda$), по-прежнему функцию прямого процесса, зависящую от отрицательных ν (левая ось рис. 15.15), можно заменить функцией перекрестного процесса, зависящей от положительных ν , но тогда соотношение (1.2) не имеет места и поэтому функции прямого и перекрестного каналов должны рассматриваться как две независимые функции.

Если в абсорбтивную часть амплитуды дают вклад одночастичные промежуточные состояния, то в дисперсионных соотношениях им соответствуют полюсные члены \hat{T}_i^j . Способ вычисления полюсных членов был подробно рассмотрен в предыдущей главе.

После выделения полюсных членов дисперсионные соотношения запишутся так:

$$\operatorname{Re} T_i^j(v, t) = \hat{T}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} \operatorname{Im} T_i^j(v', t) \left[\frac{1}{v' - v} + \eta_i^j \frac{1}{v' + v} \right] dv' \quad (1.4)$$

или после перехода от v к переменной s с учетом (1.2')

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_i^j(s, t) &= \hat{T}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(s', t)}{s' - s} ds' + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_i^j(u', t)}{u' - u} du' = \\ &= \hat{T}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \operatorname{Im} T_i^j(s', t) \left[\frac{1}{s' - s} + \eta_i^j \frac{1}{s' - u} \right] ds'. \end{aligned} \quad (1.4')$$

Определим величину нижнего предела интегрирования в последнем выражении, используя условие унитарности. Согласно этому условию, вклад двухчастичного промежуточного состояния в абсорбтивную часть амплитуды описывается выражением (3.9), гл. 15. Последнее обращается в нуль при $q = 0$, что соответствует $W = \sqrt{s} = (\sqrt{q^2 + \mu_1^2} + \sqrt{q^2 + \mu_2^2}) = \mu_1 + \mu_2$, т. е. порогу реакции с образованием двух частиц в промежуточном состоянии. При $q > 0$ функция отлична от нуля. Таким образом, абсорбтивная часть амплитуды в нефизической области $s_0 < s_1 \leq (\mu_1 + \mu_2)^2$ равна нулю (рис. 17.1, а) и становится отличной от нуля в физической области при $s_1 \geq (\mu_1 + \mu_2)^2$; т. е. нижний предел интегрирования в (1.4) равен порогу реакции с образованием двух частиц в промежуточном состоянии, т. е. $s_1 = (\mu_1 + \mu_2)^2$.

Из (3.9), гл. 15 также видно, что $\operatorname{Im} T_i^j(s, t)$ неоднозначны (из-за корня $\sqrt{s} = W$ в знаменателе). Следовательно, точка $s_1 = (\mu_1 + \mu_2)^2$ является точкой ветвления. Чтобы сделать функции $T_i^j(s, t)$ однозначными, проведем разрез вдоль вещественной оси от $s_1 = (\mu_1 + \mu_2)^2$ до ∞ (см. рис. 17.1, а).

При написании дисперсионных соотношений важно иметь в виду, что возможны два случая: 1) сумма масс частиц $\mu_1 + \mu_2$ в промежуточном состоянии n больше суммы масс частиц $m_3 + m_4$ в конечном состоянии (см. рис. 17.1, б); 2) сумма масс частиц в промежуточном состоянии n меньше суммы масс частиц в конечном состоянии (см. рис. 17.1, в).

В первом случае физическая область процесса превращения промежуточной частицы в две конечные лежит при $s > (\mu_1 + \mu_2)^2$ (см. рис. 17.1, б), а физическая область реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ — при $s > (m_3 + m_4)^2$. Другими словами, точка ветвления функций T_i^j лежит внутри физической области реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, и, следовательно, в первом случае мы будем использовать условие унитарности для $\text{Im } T_i^j$ в физической области процесса $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$.

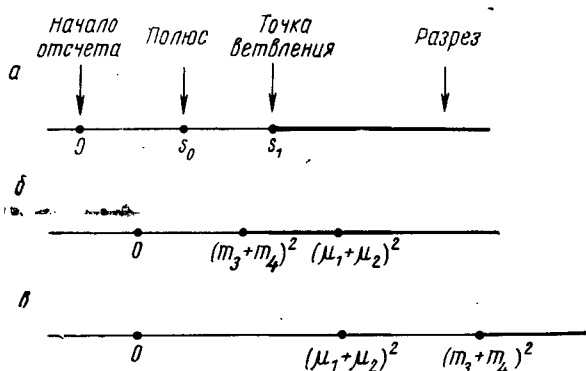


Рис. 17.1. Возможные соотношения между суммой масс частиц в промежуточном и конечном состояниях.

Во втором случае точка ветвления лежит вне физической области реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ (см. рис. 17.1, в) и возникает область, $(\mu_1 + \mu_2)^2 < s < (m_3 + m_4)^2$, в которой условие унитарности не имеет физического смысла.

В первом случае дисперсионные соотношения без вычитаний по переменной s (при фиксированном t) запишутся так:

$$\text{Re } T_i^j(s, t) = \bar{T}_i^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{(\mu_1 + \mu_2)^2}^{\infty} \text{Im } T_i^j(s', t) \left[\frac{1}{s' - s} + \eta_i^j \frac{1}{s' - u} \right] ds'. \quad (1.5)$$

Можно записать дисперсионные соотношения: 1) для функций $T_i^j(s, t)$, входящих в выражение для инвариантной структуры амплитуды (см. гл. 3); 2) для функций $F_i^j(W, \theta)$, входящих в выражение для амплитуды процесса в с.ц.м. (см. гл. 7); 3) для парциальных или спиральных парциальных амплитуд (см. гл. 8 и 9).

При доказательстве дисперсионных соотношений используется инвариантное выражение для амплитуды процесса. Поэтому естественно положить в основу дисперсионные соотношения для функций $T_i^j(s, t)$.

При практических вычислениях удобно пользоваться с.ц.м. Поэтому необходимо получить также дисперсионные соотношения для функций $F_i^l(W, \theta)$, если заданы дисперсионные соотношения для $T_i^l(s, t)$.

С помощью дисперсионных соотношений для $F_i^l(W, \theta)$ можно получить дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд. Ценность этих соотношений заключается в том, что с помощью условия унитарности они могут быть превращены в интегральные уравнения.

Конечно, при анализе конкретных процессов эта схема может меняться. Особенно это относится к тому случаю, когда может быть найдена независимо (например, из опытных данных) мнимая часть амплитуды процесса. Тогда, подставляя последнюю сразу в дисперсионные соотношения для $F_i^l(W, \theta)$ в с. ц. м., можно вычислить реальную часть амплитуды и, следовательно, найти выражение для дифференциального сечения без обращения к парциальным амплитудам.

Если экспериментально определены действительная и мнимая части амплитуды, то подстановка экспериментальных значений мнимой части в дисперсионные соотношения для $F_i^l(W, \theta)$ в с.ц.м. позволяет вычислить реальную часть амплитуды. Сравнение последней с экспериментально измеренной действительной частью амплитуды дает возможность проверить правильность дисперсионных соотношений.

§ 2. Фотообразование π -мезонов на нуклонах

Чтобы вычислить дифференциальное сечение указанного процесса с помощью дисперсионных соотношений: 1) запишем дисперсионные соотношения для функций $T_i^l(s, t)$; 2) получим дисперсионные соотношения для функций $F_i^l(W, \theta)$; 3) найдем дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд; 4) получим интегральные уравнения для парциальных амплитуд; 5) решим интегральные уравнения для парциальных амплитуд; 6) подставим найденные значения парциальных амплитуд в выражение для дифференциальных сечений (см. гл. 8, § 4).

Дисперсионные соотношения для функций $T_i(s, t)$. Пусть по-прежнему p_1, p_2, k, q векторы энергии — импульса начального и конечного нуклонов, фотона и π -мезона; M, μ — массы нуклона и π -мезона. Введем в качестве независимых переменных следующие (вместо s и t):

$$v = \frac{1}{2M}(p_1 + p_2)k = \frac{1}{2M}(p_1 + p_2)q,$$

и

$$v_1 = \frac{kq}{2M} \frac{1}{2M}(k_0 q_0 - kq).$$

$$v = \frac{1}{2M} (W^2 - M^2) - v_1.$$

Здесь W — полная энергия начальной и конечной системы.

Дисперсионные соотношения (1.4) для функций $T_i^j(v, v_1)$, входящих в выражения (1.14), гл. 3 и (9.9), гл. 10 для инвариантной амплитуды рассматриваемого процесса, запишутся следующим образом:

$$\operatorname{Re} T_i^j(v, v_1) = \overset{\circ}{T}_i^j + \frac{P}{\pi} \int_{v_m}^{\infty} \operatorname{Im} T_i^j(v', v_1) \left[\frac{1}{v' - v} + \eta_i^j \frac{1}{v' + v} \right] dv', \quad (2.1)$$

где

$$\overset{\circ}{T}_i^j = R_i^j \left(\frac{1}{v_0 - v} + \eta_i^j \frac{1}{v_0 + v} \right). \quad (2.2)$$

Коэффициенты η_i^j были найдены в гл. 11, § 2, а вычеты R_i^j — в гл. 16, § 2. Чтобы получить формулы для v_0 и v_m , надо подставить в выражение для v соответственно $W = M$ и $W = M + \mu$:

$$v_0 = -v_1 = -\frac{1}{2M} (kq), \quad v_m = \mu + \frac{1}{2M} (\mu^2 - kq).$$

Дисперсионные соотношения в с. ц. м. Чтобы получить дисперсионные соотношения для функций $P_i^j(W, v_1) = \frac{1}{K_i} F_i(W, v_1)$:

1) воспользуемся выражением (5.3), гл. 7 функций P_i^j через T_i^j

$$P_i^j(W, v_1) = \sum A_i^j T_i^j(v, v_1); \quad (2.3)$$

2) возьмем для обеих частей (2.3) действительную часть

$$\operatorname{Re} P_i^j(W, v_1) = \sum A_i^j \operatorname{Re} T_i^j(v, v_1); \quad (2.4)$$

3) заменим $\operatorname{Re} T_i^j(v, v_1)$ в правой части (2.4) с помощью (2.1);

4) подставим в полученном выражении под интегралы вместо $\operatorname{Im} T_i^j(v, v_1)$ функции $\operatorname{Im} P_i^j(W, v_1)$, используя выражение (5.4) гл. 7 функций $T_i^j(v, v_1)$ через $P_i^j(W, v_1)$. В результате получим дисперсионные соотношения для $P_i^j(W, v_1)$.

Найдем дисперсионные соотношения, например, для функции $P_1^1(W, v_1)$. Согласно (5.3), гл. 7

$$P_1^1(W, v_1) = \frac{1}{K_1} F_1^1(W, v_1) = T_1^1(v, v_1) + (W - M) T_4^1(v, v_1) + \frac{2Mv_1}{(W - M)} \times \\ \times [T_3^1(v, v_1) - T_4^1(v, v_1)],$$

отсюда

$$\operatorname{Re} P\{W, v_1\} = \operatorname{Re} T_1^i(v, v_1) + (W - M) \operatorname{Re} T_4^i(v, v_1) + \frac{2Mv_1}{(W - M)} \times \\ \times [\operatorname{Re} T_3^i(v, v_1) - \operatorname{Re} T_4^i(v, v_1)].$$

Подставим в последнее равенство соотношение (2.1). Тогда, удерживая под интегралом в (2.1) сначала только первое слагаемое и имея в виду, что в с. ц. м.

$$\frac{dv'}{v' - v} = \frac{2W' dW'}{W'^2 - W^2},$$

получаем

$$\operatorname{Re} P_1^i(W, v_1) = \dot{P}_1^i + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} \frac{2W' dW'}{W'^2 - W^2} \left\{ \operatorname{Im} T_1^i(v', v_1) + \right. \\ \left. + (W - M) \operatorname{Im} T_4^i(v', v_1) + \frac{2Mv_1}{(W - M)} [\operatorname{Im} T_3^i(v', v_1) - \operatorname{Im} T_4^i(v', v_1)] \right\}, \quad (2.5)$$

$$\text{где } \dot{P}_1^i = \dot{T}_1^i + (W - M) \dot{T}_4^i + \frac{2Mv_1}{(W - M)} (\dot{T}_3^i - \dot{T}_4^i).$$

Возьмем от равенств (5.4), гл. 7 мнимые части и подставим их в (2.5):

$$\operatorname{Re} [P_1^i(W, v_1)]_1 = [\dot{P}_1^i]_1 + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} \frac{2W' dW'}{W'^2 - W^2} \left\{ \frac{W' + M}{2W'} \times \right. \\ \times \operatorname{Im} P_1^i(W', v_1) - \frac{W' - M}{2W'} \operatorname{Im} P_2^i(W', v_1) - \frac{2M^2 v_1}{W'} \\ \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^i(W', v_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^i(W', v_1)}{W' + M} \right] + \\ + \frac{W - M}{2W'} \operatorname{Im} P_1^i(W', v_1) + \frac{W - M}{2W'} \operatorname{Im} P_2^i(W', v_1) - \\ - \frac{W - M}{2W'} 2Mv_1 \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^i(W', v_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^i(W', v_1)}{W' + M} \right] + \frac{2Mv_1}{W - M} \times \\ \left. \times \frac{W' + M}{2W'} \operatorname{Im} P_3^i(W', v_1) + \frac{2Mv_1}{W - M} \cdot \frac{W' - M}{2W'} \operatorname{Im} P_4^i(W', v_1) \right\}.$$

Приведение подобных членов даст

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [P_1^j(W, \nu_1)]_1 &= [\dot{P}_1^j]_1 + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \frac{\operatorname{Im} P_1^j(W', \nu_1)}{W' - W} - \right. \\ &\left. - \frac{\operatorname{Im} P_2^j(W', \nu_1)}{W' + W} + \frac{2M\nu_1}{W - M} \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^j(W', \nu_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^j(W', \nu_1)}{W' + M} \right] \right\}. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Аналогичным образом если учесть только второе слагаемое (соответствующее кросс-каналу) под интегралом в (2.1), получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [P_1^j(W, \nu_1)]_2 &= [\dot{P}_1^j]_2 + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_1^j(W', \nu_1) \times \right. \\ &\times \frac{W' + W + 2M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} - \operatorname{Im} P_2^j(W', \nu_1) \frac{W' - W + 2M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} - \\ &- \frac{2M\nu_1}{W - M} \frac{W'^2 - M^2 - 2M\nu_1}{W'^2 + Z} \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^j(W', \nu_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^j(W', \nu_1)}{W' + M} \right] - \\ &- \frac{2M\nu_1}{(W - M)(W'^2 + Z)} \operatorname{Im} P_1^j(W', \nu_1) - \operatorname{Im} P_2^j(W', \nu_1) \frac{2M\nu_1}{(W - M)(W'^2 + Z)} - \\ &\left. - \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^j(W', \nu_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^j(W', \nu_1)}{W' + M} \right] \frac{2M\nu_1}{W - M} \frac{W'^2 - M^2 - 2M\nu_1}{W'^2 + Z} \right\}, \quad (2.6') \end{aligned}$$

где $Z = W^2 - 2M^2 - 4M\nu_1$.

Если изотопический индекс $j=1,2$, то $\eta_i^{1,2} = 1$ и дисперсионные соотношения для $P_1^{1,2}$ будут суммой выражений (2.6) и (2.6')

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_1^{1,2}(W, \nu_1) &= \dot{P}_1^{1,2} + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_1^{1,2}(W', \nu_1) \times \right. \\ &\times \left[\frac{1}{W' - W} + \frac{W' + W - 4M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] - \operatorname{Im} P_2^{1,2}(W', \nu_1) \times \\ &\times \left[\frac{1}{W' + W} + \frac{W' - W + 4M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

Если изотопический индекс $j=3$, то $\eta_i^3 = -1$ и дисперсионные соотношения для P_1^3 запишутся в виде разности (2.6) и (2.6'):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_1^3(W, \nu_1) = & \dot{P}_1^3 + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_1^3(W', \nu_1) \left[\frac{1}{W' - W} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{W' + W - 4M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] - \operatorname{Im} P_2^3(W', \nu_1) \left[\frac{1}{W' + W} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{W' - W + 4M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] + \frac{4M\nu_1}{W - M} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^3(W', \nu_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^3(W', \nu_1)}{W' + M} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Оба последних соотношения можно записать в виде одного для $j=1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_1^j(W, \nu_1) = & \dot{P}_1^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_1^j(W', \nu_1) \left[\frac{1}{W' - W} \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{W' + W - 4M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] - \right. \\ & \left. - \operatorname{Im} P_2^j(W', \nu_1) \left[\frac{1}{W' + W} \pm \frac{W' - W + 4M\nu_1(W - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] + \binom{0}{1} \frac{4M\nu_1}{W - M} \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^j(W', \nu_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^j(W', \nu_1)}{W' + M} \right] \right\}. \quad (2.7a) \end{aligned}$$

Верхние знаки относятся к значениям изотопического индекса $j=1, 2$, а нижние знаки — к значениям $j=3$.

Аналогичные вычисления приводят к дисперсионным соотношениям для остальных функций $P_i^j(W, \nu_1)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_2^j(W, \nu_1) = & \dot{P}_2^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_2^j(W', \nu_1) \left[\frac{1}{W' - W} \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{W' + W - 4M\nu_1(W + M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] - \operatorname{Im} P_1^j(W', \nu_1) \left[\frac{1}{W' + W} \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{W' - W + 4M\nu_1(W + M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] + \right. \\ & \left. + \binom{0}{1} \left[\frac{\operatorname{Im} P_3^j(W', \nu_1)}{W' - M} + \frac{\operatorname{Im} P_4^j(W', \nu_1)}{W' + M} \right] \frac{4M\nu_1}{W' + M} \right\}; \quad (2.7b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_3^j(W, v_1) = & \dot{P}_3^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_3^j(W', v_1) \left[\frac{1}{W' - W} \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{-W' + M - 2M + 4Mv_1(W' - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] + \operatorname{Im} P_4^j(W', v_1) \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{W' + W} \pm \frac{2M - W' - W + 4Mv_1(W' + M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] \mp 2 \left[\operatorname{Im} P_1^j(W', v_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{Im} P_2^j(W', v_1) \right] \frac{1}{W'^2 + Z} \right\}; \end{aligned} \quad (2.7B)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} P_4^j(W, v_1) = & \dot{P}_4^j + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \operatorname{Im} P_4^j(W', v_1) \left[\frac{1}{W' - W} \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{-W' + W + 2M + 4Mv_1(W' + M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] + \operatorname{Im} P_3^j(W', v_1) \left[\frac{1}{W' + W} \pm \right. \right. \\ & \left. \left. \pm \frac{-2M - W' - W + 4Mv_1(W' - M)^{-1}}{W'^2 + Z} \right] \mp 2 \left[\operatorname{Im} P_1^j(W', v_1) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{Im} P_2^j(W', v_1) \right] \frac{1}{W'^2 + Z} \right\}. \end{aligned} \quad (2.7Г)$$

Дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд. Чтобы получить дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд, надо:

1) взять в разложении (2.11), гл. 8 парциальных амплитуд $F_i(W)$ по функциям $F_i(W, v_1)$

$$F_i(W) = \sum_i \int_{-1}^{+1} B_i(\cos \theta) F_i(W, \cos \theta) d(\cos \theta)$$

от обеих частей действительную часть

$$\operatorname{Re} F_i(W) = \sum_i \int_{-1}^{+1} B_i(\cos \theta) \operatorname{Re} F_i(W, \cos \theta) d(\cos \theta); \quad (2.8)$$

2) заменить в правой части $\operatorname{Re} F_i(W, \cos \theta)$ с помощью (2.7);

3) подставить в полученном выражении под интегралами вместо функций $\operatorname{Im} F_i$ их разложение по парциальным амплитудам (2.9), гл. 8.

В результате получим дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд.

Ограничимся учетом лишь s - и p -волн. Найдем дисперсионные соотношения, например, для парциальной амплитуды E_{0+}^j , удерживая в дисперсионных соотношениях (2.7) только член, соответст-

вующий прямому каналу. Так как в s -, p -волновом приближении $F_4 = 0$, то согласно (2.11), гл. 8

$$E'_{0+}(W) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) [P_1'(W, \cos \theta) - P_2'(W, \cos \theta) \cos \theta],$$

отсюда

$$\text{Re } E'_{0+}(W) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) [\text{Re } P_1'(W, \cos \theta) - \text{Re } P_2'(W, \cos \theta) \cos \theta].$$

Подставляя в это выражение формулы (2.7а) и (2.7б), получаем

$$\begin{aligned} \text{Re } E'_{0+}(W) = & \mathring{E}'_{0+} + \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \frac{\text{Im } P_1'(W', \cos \theta)}{W' - W} - \right. \\ & - \frac{\text{Im } P_2'(W', \cos \theta)}{W' + W} + \frac{2M\nu_1}{W - M} \left[\frac{\text{Im } P_3'(W', \cos \theta)}{W' - M} + \frac{\text{Im } P_4'(W', \cos \theta)}{W' + M} \right] - \\ & - \cos \theta \left[\frac{\text{Im } P_2'(W', \cos \theta)}{W' - W} - \frac{\text{Im } P_1'(W', \cos \theta)}{W' + W} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{2M\nu_1}{W + M} \left(\frac{\text{Im } P_3'(W', \cos \theta)}{W' - M} + \frac{\text{Im } P_4'(W', \cos \theta)}{W' + M} \right) \right] \right\}, \quad (2.9) \end{aligned}$$

$$\text{где } \mathring{E}'_{0+} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) [P_1' - \cos \theta P_2'].$$

Возьмем от равенств (2.10), гл. 8 мнимую часть и подставим полученный результат в (2.9); тогда, с учетом того, что $2M\nu_1 = k_0 q_0 - (kq)$ (где k , q — импульсы фотона и мезона, k_0 , q_0 — их энергии в с. ц. м), найдем, введя обозначение $\cos \theta = x$:

$$\begin{aligned} \text{Re } E'_{0+}(W) = & \mathring{E}'_{0+} + \frac{\mathcal{P}}{2\pi} \int_{-1}^{+1} dx \times \\ & \times \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \frac{\text{Im } E'_{0+}(W') + 3x' \text{Im} [M'_{+1}(W') + E'_{+1}(W')]}{W' - W} - \right. \\ & - \frac{\text{Im} [2M'_{+1}(W') + M'_{-1}(W')]}{W' + W} - \frac{(|k||q|x - k_0 q_0) 3 \text{Im} [E'_{+1}(W') - M'_{+1}(W')]}{(W - M)(W' - M)} \left. \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varphi}{2\pi} \int_{-1}^{+1} x dx \int_{M+\mu}^{\infty} dW' \left\{ \frac{2 \operatorname{Im} M'_{1+}(W') + \operatorname{Im} M'_{1-}(W')}{W' - W} - \right. \\
& \left. \frac{\operatorname{Im} E'_{0+}(W') + 3x' \operatorname{Im} [M'_{1+}(W') + E'_{1+}(W')]}{W' + W} - \right. \\
& \left. \frac{(|k||q|x - k_0 q_0) 3 \operatorname{Im} [E'_{1+}(W') - M'_{1+}(W')]}{(W+M)(W'-M)} \right\}. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Так как v_1 инвариант, то $|k||q| \cos \theta - q_0 k_0 = |k'||q'| \cos \theta' - q'_0 k'_0$ или

$$x' = \frac{|k||q|x + q'_0 k'_0 - q_0 k_0}{|k'||q'|},$$

поэтому

$$\left. \begin{aligned}
\int_{-1}^1 x' dx &= \frac{2(q'_0 k'_0 - q_0 k_0)}{|k'||q'|}, & \int_{-1}^1 dx \frac{3x^2 - 1}{2} x' &= 0, \\
\int_{-1}^1 x x' dx &= \frac{2}{3} \cdot \frac{|k||q|}{|k'||q'|}, & \int_{-1}^1 dx (1 - x^2) x' &= \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{q'_0 k'_0 - q_0 k_0}{|k'||q'|}.
\end{aligned} \right\} (2.11)$$

Производя с помощью этих формул интегрирование в (2.10), получаем, переходя к новой переменной $\omega = W - M$,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} E_{0+}(W) &= \dot{E}_{0+} + \frac{\varphi}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} d\omega' \left\{ \frac{\operatorname{Im} E_{0+}(\omega')}{\omega' - \omega} - \frac{\operatorname{Im} M_{1-}(\omega')}{\omega' + \omega} + \right. \\
&+ \operatorname{Im} M_{1+}(\omega') \left[\frac{3(k'_0 q'_0 - k_0 q_0)}{|k'||q'|(\omega' - \omega)} + \frac{|k||q| - 2|k'||q'|}{|k'||q'|(\omega' + \omega)} - \right. \\
&\left. \left. - \frac{k}{\omega'} \left(\frac{3q_0}{\omega} + \frac{|q|}{\omega + M} \right) \right] + \operatorname{Im} E_{1+}(\omega') \left[\frac{3(|k'|q'_0 - |k|q_0)}{|k'||q'|(\omega' - \omega)} + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{|k||q|}{|k'||q'|(\omega' + \omega)} + \frac{k}{\omega'} \left(\frac{3q_0}{\omega} + \frac{|q|}{W + M} \right) \right] \right\}. \quad (2.12)
\end{aligned}$$

Если учесть в дисперсионных соотношениях член, соответствующий перекрестному каналу, то вместо последнего соотношения най-

дем более сложное выражение, которое мы не будем выписывать из-за его громоздкости.

Аналогичным образом могут быть найдены дисперсионные соотношения для других парциальных амплитуд.

Интегральные уравнения для парциальных амплитуд и их решение. Рассмотрим сначала случай, когда отлична от нуля лишь парциальная волна E_{0+} . Имея в виду (4.6), гл. 15, переписываем (2.12) так (опуская изоспиновый индекс j):

$$E_{0+}(W) = \dot{E}_{0+} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dW' \frac{\text{Im} E_{0+}(W')}{W' - W - i\epsilon}. \quad (2.13)$$

Используя выражение (2.14'), гл. 14 абсорбтивной части амплитуды фотообразования через фазы рассеяния π -мезонов на нуклонах, получаем интегральное уравнение для парциальной амплитуды $E_{0+}(W)$:

$$E_{0+}(W) = \dot{E}_{0+} + \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dW' \frac{E_{0+}(W') e^{-i\delta_{0+}} \sin \delta_{0+}}{W' - W - i\epsilon}. \quad (2.14)$$

В общем виде последнее уравнение запишется так:

$$f(x) = f^0(x) + \frac{1}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{f(x') h^*(x')}{ix' - x - i\epsilon} dx', \quad (2.15)$$

где для удобства выбрано $h = e^{i\delta} \sin \delta$, так что

$$e^{-2i\delta} = 1 - 2ih^*.$$

Функции $f^0(x)$ и $h(x)$ заданы. Надо найти функцию $f(x)$. Так как в (2.15) неизвестная функция $f(x)$ входит под интеграл, то (2.15) является интегральным уравнением. Заметим также, что искомая функция зависит от вещественного переменного x .

При $x = x'$ подынтегральная функция уравнения (2.15) обращается в бесконечность, поэтому такое интегральное уравнение называется сингулярным.

Для того чтобы найти функцию $f(x)$, введем вспомогательную функцию $F(z)$ комплексного переменного z :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(x') h^*(x')}{ix' - z} dx'. \quad (2.16)$$

Предположим при нахождении решения, что все подынтегральные функции на бесконечности обращаются в нуль, т. е. что они удовлетворяют условию B (см. гл. 15, § 4). Поэтому интегралы по окруж-

ности можно отбрасывать и оставлять интеграл только по контуру Γ вдоль разреза. С помощью соотношения

$$\frac{1}{x' - x \mp i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x' - x} \pm i\pi\delta(x' - x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0$$

из (2.16) получим

$$F(x_+) = \frac{1}{2\pi i} \left[\mathcal{P} \int \frac{f(x') h^*(x')}{x' - x} dx' + i\pi f(x) h^*(x) \right]; \quad (2.17)$$

$$F(x_-) = \frac{1}{2\pi i} \left[\mathcal{P} \int \frac{f(x') h^*(x')}{x' - x} dx' - i\pi f(x) h^*(x) \right]. \quad (2.17')$$

Функции $F(x_+)$ и $F(x_-)$ соответствуют предельным значениям комплексной функции $F(z)$ при переходе на действительную ось соответственно сверху и снизу. Из (2.17) и (2.17') следует, что

$$F(x_+) - F(x_-) = f(x) h^*(x) \quad (2.18)$$

или

$$f(x) = \frac{1}{h^*} [F(x_+) - F(x_-)]. \quad (2.19)$$

Тем самым найдено выражение искомой функции через $F(x_+)$ и $F(x_-)$.

Подставляя (2.19) в (2.15), получаем

$$e^{-2i\delta} F(x_+) - F(x_-) = h^*(x) f^0(x). \quad (2.20)$$

Чтобы найти $F(x_+)$ и $F(x_-)$, положим, что

$$F(z) = \Phi(z) \Omega(z), \quad (2.21)$$

причем $\Omega(z)$ удовлетворяет уравнению

$$e^{-2i\delta} \Omega(x_+) - \Omega(x_-) = 0. \quad (2.22)$$

Чтобы определить функции Ω , логарифмируем последнее уравнение

$$(\ln \Omega)_+ - (\ln \Omega)_- = 2i\delta(x). \quad (2.23)$$

Решение этого уравнения, согласно (2.17), запишется так:

$$\ln \Omega(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (2.24)$$

$$\text{или } \Omega(z) = \exp \left\{ \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(\xi)}{\xi - z} d\xi \right\} \equiv \exp [u(z)], \quad (2.25)$$

$$\text{где } u(z) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\delta(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (2.26)$$

причем

$$u(x_+) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int \frac{\delta(\xi) d\xi}{\xi - x} + i\delta(x) = \rho(x) + i\delta(x); \quad (2.27)$$

$$u(x_-) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int \frac{\delta(\xi) d\xi}{\xi - x} - i\delta(x) = \rho(x) - i\delta(x), \quad (2.28)$$

$$\text{где } \rho(x) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int \frac{\delta(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (2.29)$$

С помощью (2.27) и (2.28) находим, учитывая (2.25), функции $\Omega(x_+)$ и $\Omega(x_-)$:

$$\Omega(x_+) = \exp u(x_+) = e^{\rho(x) + i\delta(x)}, \quad \Omega(x_-) = e^{\rho(x) - i\delta(x)} \quad (2.29')$$

Отсюда

$$\Omega(x_+) = \Omega(x_-) e^{2i\delta}. \quad (2.30)$$

Чтобы определить $\Phi(x_+)$ и $\Phi(x_-)$, подставим $F(x_{\pm}) = \Phi(x_{\pm}) \times \times \Omega(x_{\pm})$ в (2.20); имея в виду (2.30), получаем

$$\begin{aligned} e^{-2i\delta} F(x_+) - F(x_-) &= e^{-2i\delta} \Omega(x_-) e^{2i\delta} \Phi(x_+) - \Phi(x_-) \Omega(x_-) = \\ &= \Omega(x_-) [\Phi(x_+) - \Phi(x_-)] = f^0 h^* \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\text{или } \Phi(x_+) - \Phi(x_-) = f^0 h^* \frac{1}{\Omega(x_-)} = f^0(x) \sin \delta(x) e^{-\rho(x)}. \quad (2.32)$$

Решение этого уравнения, согласно (2.17), запишется в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f^0(\xi) \sin \delta(\xi) \exp[-\rho(\xi)]}{\xi - z} d\xi, \quad (2.33)$$

откуда следуют выражения для $\Phi(x_+)$ и $\Phi(x_-)$:

$$\Phi(x_+) = \frac{\mathcal{P}}{2\pi i} \int \frac{f^0(\xi) \sin \delta(\xi) \exp[-\rho(\xi)] d\xi}{\xi - x} + \frac{1}{2} f^0(x) \sin \delta(x) e^{-\rho(x)}, \quad (2.34)$$

$$\Phi(x_-) = \frac{\mathcal{P}}{2\pi i} \int \frac{f^0(\xi) \sin \delta(\xi) \exp[-\rho(\xi)] d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2} f^0(x) \sin \delta(x) e^{-\rho(x)}. \quad (2.35)$$

С помощью (2.17) уравнение (2.15) переписывается следующим образом:

$$f(x) = f^0(x) + 2i F(x_+) \quad (2.36)$$

$$\text{или } f(x) = f^0(x) + 2i \Phi(x_+) \Omega(x_+). \quad (2.37)$$

Подставив в это выражение формулы (2.29') и (2.34), получим иско-
мое решение уравнения (2.15):

$$f(x) = e^{i\delta(x)} \left[f^0(x) \cos \delta(x) + \frac{1}{\pi} e^{\rho(x)} \wp \int \frac{f^0(\xi) \sin \delta(\xi) e^{-\rho(\xi)}}{\xi - x} d\xi \right]. \quad (2.38)$$

Важно подчеркнуть, что у уравнения (2.15) наряду с решением (2.38) существует другое, равное сумме (2.38) и решению однородного уравнения

$$f_0(x) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f_0(x') h^*(x') dx'}{x' - x - i\varepsilon},$$

т. е. решение уравнения (2.15) выглядит так:

$$f'(x) = f(x) + f_0(x) = f(x) + L(x) e^{\rho(x) + i\delta(x)}. \quad (2.39)$$

Здесь $L(x) = \frac{P(x)}{(x-a)^n}$, где $P(x)$ — произвольные полиномы; n — произвольные целые числа.

Неоднозначность можно исключить, если потребовать, чтобы 1) решение (2.39) было регулярным в точке $x = a$; тогда n должно обращаться в нуль, 2) решение (2.39) при $x \rightarrow \infty$ совпадало с решением (2.38); тогда должно быть $P(x) = 0$, так как при $x \rightarrow \infty$ интегралы в правой части (2.38) обращаются в нуль.

Рассмотрим более сложное интегральное сингулярное уравнение

$$f(x) = f^0(x) + \frac{1}{\pi} \int dx' f(x') \left[\frac{h^*(x')}{x' - x - i\varepsilon} + K(x, x') \right], \quad (2.40)$$

в котором $K(x, x')$ является функцией, не имеющей особенностей. Для этого уравнения нельзя найти решения в виде, аналогичном (2.38), т. е. в квадратурах, но его можно свести к регулярному уравнению (уравнение типа Фредгольма). Методы решения уравнений Фредгольма хорошо разработаны. Обозначая

$$\bar{f}^0(x) = f^0(x) + \frac{1}{\pi} \int K(x, x') f(x') dx'$$

и предполагая, что $f(x)$ — непрерывная и ограниченная функция, и $K(x', x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, получаем, используя (2.38), вместо сингулярного уравнения (2.40) следующее регулярное уравнение:

$$f(x) = \mu(x) + \frac{1}{\pi} \int N(x, x') f(x') dx',$$

где

$$\mu(x) = e^{i\delta(x)} \left[f^0(x) \cos \delta(x) + \frac{1}{\pi} e^{i\delta(x)} \oint \frac{f^0(\xi) \lambda(\xi)}{\xi - x} d\xi \right];$$

$$N(x, x') = \left[K(x, x') \cos \delta(x) + e^{i\delta(x)} \oint \frac{K(x', \xi) \lambda(\xi)}{\xi - x} d\xi \right] e^{i\delta(x)};$$

$$\lambda(\xi) = \sin \delta(\xi) e^{-i\delta(\xi)}.$$

Определение парциальных амплитуд. Если кроме E_{0+} удерживать другие парциальные амплитуды, то получим систему интегральных сингулярных уравнений. Эта система может быть регуляризована тем же способом, который применялся при регуляризации уравнения (2.40). Следовательно, для нахождения парциальных амплитуд надо решить систему регулярных интегральных уравнений. Структуру этой системы уравнений можно изобразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} V_l^i(W) = \dot{V}_l^i + \frac{\rho}{\pi} \int_a^\infty dW' \left\{ \frac{f_l^i(W, W') \operatorname{Im} V_l^i(W')}{W' - W} + \right. \\ \left. + \sum_n K_{ln}^i(W, W') \operatorname{Im} V_n^i(W') \right\}, \end{aligned}$$

где V_l^i — парциальные амплитуды; f и K — регулярные функции. Суммирование по n определяется тем, какие парциальные амплитуды учитываются.

Чтобы найти решение системы интегральных уравнений для парциальных амплитуд, необходимо знать фазы δ рассеяния π -мезонов на нуклонах для всех энергий π -мезонов вплоть до бесконечности и пользоваться в тех же пределах энергий записью для парциальных амплитуд фотообразования в форме $Ne^{i\delta}$.

Фактически же фазы δ определены лишь в интервале энергий до 1 Гэв (см. гл. 14, § 3). Кроме того, при энергии, большей порога реакции $\pi N \rightarrow N\pi\pi$ (170 Мэв), фазы δ становятся комплексными, и поэтому парциальные амплитуды фотообразования при энергии фотона, большей порога процесса $\gamma N \rightarrow N\pi\pi$ (~ 325 Мэв), строго говоря, не могут быть записаны в форме $Ne^{i\delta}$.

Однако, как показывает анализ (см. гл. 14, § 3), коэффициенты поглощения η для всех фаз, за исключением p_{11} , близки к единице для мезонов с энергией до 550 Мэв. Поэтому мы можем пользоваться для всех амплитуд фотообразования, за исключением тех, которые приводят к p_{11} -состоянию, записью в форме $Ne^{i\delta}$ до энергий фотона ≤ 700 Мэв.

Учтя сказанное, рассмотрим область энергий фотонов $E_\gamma \leq 500$ Мэв и сделаем следующие предположения: 1) ограничимся учетом фотообразования мезонов в S -, P - и D -состояниях; мультиполи, образующие эти состояния, перечислены в табл. 17.1,

из которой видно, что искомыми являются восемь парциальных амплитуд; 2) так как фазы p_{13} , p_{31} , d_{15} , d_{33} , d_{35} малы, то пренебрежем мнимыми частями амплитуд, ведущих к образованию соответствующих состояний (см. табл. 17.1); вследствие этого система интегральных уравнений существенно упростится; 3) пренебрежем мнимыми частями амплитуд, ведущими к образованию состояния D_{13} (в этом случае подынтегральная функция быстро убывает); 4) пренебрежем мнимой частью фазы p_{11} , так как уже при энергии фотона ~ 450 Мэв она становится существенной и поэтому ее учет затруднителен; это пренебрежение может привести к заметной ошибке вычислений; 5) при вычислении амплитуды E_{1+}^1 учтем вклад только полюсного члена; это является вторым источником ошибок в вычислении; 6) пренебрежем запаздывающим членом, так как анализ показывает, что его вклад невелик.

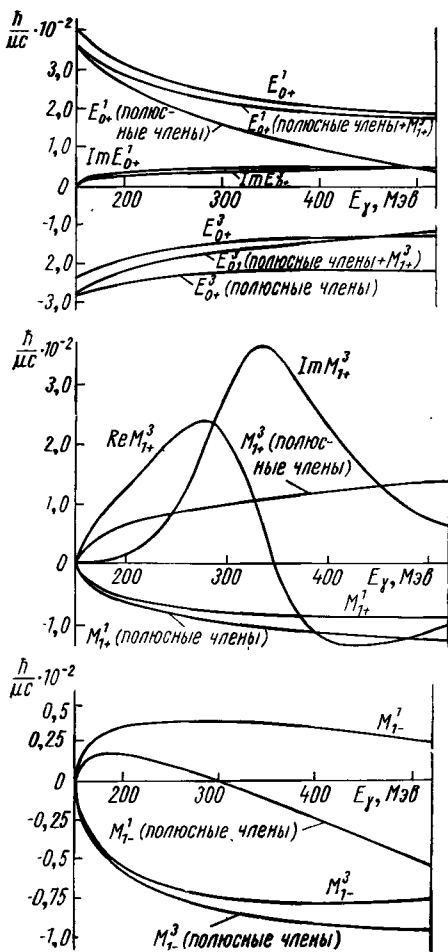


Рис. 17.2. Вычисленные значения парциальных амплитуд процесса $\gamma + N \rightarrow N + \pi$ для различных E_γ .

нов). Как видно, для фотообразования π^0 -мезонов имеется довольно хорошее согласие. В случае фотообразования π^+ -мезонов также в основном наблюдается согласие, за исключением некоторых расхождений; для энергии $E_\gamma = 220$ и 300 Мэв в случае $\theta = 90^\circ$ теоретические кривые лежат ниже экспериментальных, плохо согласуются результаты в случае фотообразования вперед. Причи-

тствующих состояний (см. табл. 17.1); вследствие этого система интегральных уравнений существенно упростится; 3) пренебрежем мнимыми частями амплитуд, ведущими к образованию состояния D_{13} (в этом случае подынтегральная функция быстро убывает); 4) пренебрежем мнимой частью фазы p_{11} , так как уже при энергии фотона ~ 450 Мэв она становится существенной и поэтому ее учет затруднителен; это пренебрежение может привести к заметной ошибке вычислений; 5) при вычислении амплитуды E_{1+}^1 учтем вклад только полюсного члена; это является вторым источником ошибок в вычислении; 6) пренебрежем запаздывающим членом, так как анализ показывает, что его вклад невелик.

Вычисленные значения некоторых парциальных амплитуд в зависимости от энергии фотонов изображены графически на рис. 17.2.

Сравнение с опытными данными. Сравнение теоретических результатов с опытными данными произведено на рис. 17.3. (фотообразование π^0 -мезонов) и рис. 17.4 (фотообразование π^+ -мезонов).

Разрешенные конечные состояния (в случае $l' < 2$)

| Мультиполи | Разрешенные состояния | | |
|------------------------------------|-----------------------|------------------------------|------------------------------|
| | $l'=0$ | $l'=1$ | $l'=2$ |
| Электрический диполь | $S_1 (E_{0+})$ | — | $D_3 (E_{2-})$ |
| Магнитный диполь | — | $P_1 (M_{1-}), P_3 (M_{1+})$ | — |
| Электрический квадруполь | — | $P_3 (E_{1+})$ | — |
| Магнитный квадруполь | — | — | $D_3 (M_{2-}), D_5 (M_{2+})$ |
| Электрический октуполь | — | — | $D_5 (E_{2+})$ |

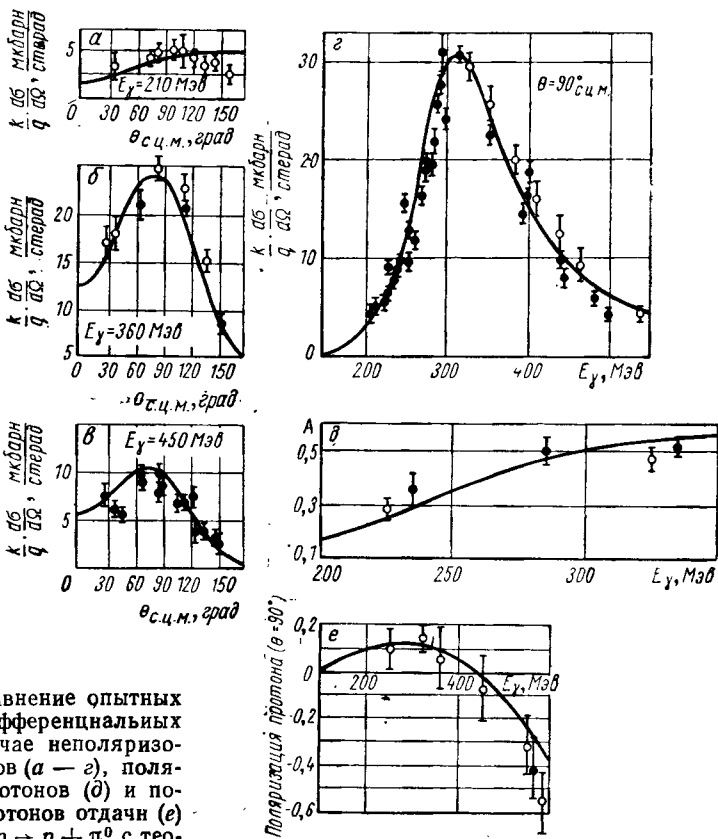


Рис. 17.3. Сравнение опытных значений дифференциальных сечений в случае неполяризованных фотонов (а — с), поляризованных фотонов (д) и поляризации протонов отдачи (е) процесса $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными с помощью дисперсионных соотношений;

где $d\sigma_{\perp}, d\sigma_{\parallel}$ — дифференциальные сечения образования мезонов в плоскости, перпендикулярной и параллельной плоскости поляризации фотона:

$$A = \frac{d\sigma_{\perp} - d\sigma_{\parallel}}{d\sigma}$$

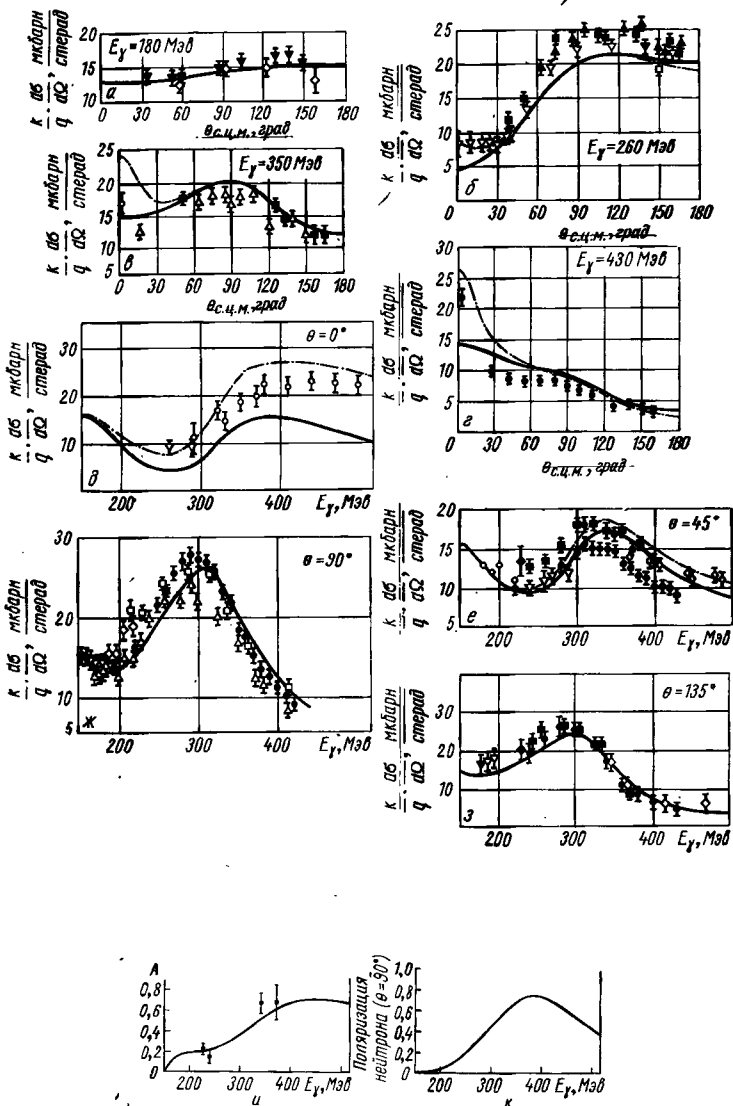


Рис. 17.4. Сравнение опытных значений дифференциальных сечений в случае неполяризованных фотонов (а — з), поляризованных фотонов (и) и поляризации нейтрона отдачи (к) процесса $\gamma + p \rightarrow n + l^{+} +$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными с

помощью дисперсионных соотношений; $A = \frac{d\sigma_{\perp} - d\sigma_{\parallel}}{d\sigma}$, где $d\sigma_{\perp}$, $d\sigma_{\parallel}$ — дифференциальные сечения образования мезонов в плоскости, перпендикулярной и параллельной плоскости поляризации фотона.

ной такого расхождения может быть пренебрежение, сделанное при вычислении парциальных амплитуд $M_{1-}^{0,1}$ и E_{1+}^3 .

Подчеркнем, что, в отличие, например, от резонансной модели, в рассматриваемом расчете не было ни одного свободного параметра.

§ 3. Комптон-эффект на протоне

Анализ комптон-эффекта на протоне можно было бы провести по схеме, близкой к той, которая применялась при рассмотрении процесса фотообразования π -мезонов.

Мы изложим несколько другой подход. В этом подходе исходными по-прежнему являются дисперсионные соотношения для инвариантных функций $T_i(s, t)$. Затем с помощью условия унитарности получают выражения для $\text{Im} T_i(s, t)$. Последние подставляются в дисперсионные соотношения для $T_i(s, t)$ и вычисляются $\text{Re} T_i(s, t)$. Тем самым определяются комплексные функции $T_i(s, t)$. Как видно, при таком подходе используются дисперсионные соотношения непосредственно для инвариантных функций $T_i(s, t)$, а не для парциальных амплитуд, как это было в двух предыдущих случаях.

Переходим к вычислениям.

Дисперсионные соотношения без вычитания для функций $T_i(s, t)$. Дисперсионные соотношения для функций $T_i(s, t)$, входящих в выражение (3.7), гл. 4 для инвариантной амплитуды процесса, запишутся так:

$$\begin{aligned} \text{Re} T_i(s, t) = R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s} + \eta_i \frac{1}{M^2 - u} \right) + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \text{Im} T_i(s', t) \times \\ \times \left[\frac{1}{s' - s} + \eta_i \frac{1}{s' - u} \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где, согласно (1.9), гл. 11,

$$\eta_{1, 3, 5, 6} = +1, \quad \eta_{2, 4} = -1. \quad (3.2)$$

Вычислим полюсные члены, например, по перекрестному каналу (см. рис. 15.10, ∂). В рассматриваемом случае формулу (3.4), гл. 12 можно переписать следующим образом:

$$e\bar{u}(p_2) \left[(1 + \mu'_p) (\gamma e) - \frac{\mu'_p}{M} (\varepsilon P) \right] u(p_1), \quad P = \frac{1}{2} (p_1 + p_2). \quad (3.3)$$

Подставляя последнее выражение в (1.1), гл. 16, будем иметь

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T} = e^2 \bar{u}(p_2) & \left[(1 + \mu'_p) (\gamma \varepsilon) - \frac{\mu'_p}{M} (p_2 \varepsilon) \right] u(P-K) \bar{u}(P-K) \times \\ & \times \left[(1 + \mu'_p) (\gamma \varepsilon') - \frac{\mu'_p}{M} (\varepsilon' p_1) \right] u(p_1), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $K = \frac{1}{2} (k_1 + k_2)$.

Используя соотношение ($a = \hat{a}_\mu \gamma_\mu$)

$$\sum u(P-K) \bar{u}(P-K) = (\hat{P} - \hat{K} + M) \frac{1}{2M}, \quad (3.5)$$

получаем (опуская множитель $1/2M$)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T} = e^2 \bar{u}(p_2) & \left[(1 + \mu'_p) (\gamma \varepsilon) - \frac{\mu'_p}{M} (p_2 \varepsilon) \right] [\hat{P} - \hat{K} + M] \times \\ & \times \left[(1 + \mu'_p) (\gamma \varepsilon') - \frac{\mu'_p}{M} (p_1 \varepsilon') \right] u(p_1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Последнее выражение можно разложить по основным инвариантам [см. формулу (3.7), гл. 3]:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T} = \frac{(\varepsilon' P') (\varepsilon P')}{P'^2} A_1^0 + \frac{(\varepsilon' N) (\varepsilon N)}{N^2} A_2^0 + \frac{(\varepsilon' P') (\varepsilon N) - (\varepsilon' N) (\varepsilon P')}{(P'^2 N^2)^{1/2}} A_3^0 + \\ + \frac{(\varepsilon' P') (\varepsilon N) + (\varepsilon' N) (\varepsilon P')}{(P'^2 N^2)^{1/2}} A_4^0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь A_i^0 — неизвестные коэффициенты. Чтобы найти коэффициент A_1^0 , произведем в (3.6) и (3.7) замену $\varepsilon' \rightarrow P'$ и $\varepsilon \rightarrow P'$ и приравняем полученные результаты друг другу:

$$\begin{aligned} A_1^0 P'^2 = e^2 \bar{u}(p_2) & \left[(1 + \mu'_p) \hat{P}' - \frac{\mu'_p}{M} (P' p_2) \right] \times \\ & \times [\hat{P} - \hat{K} + M] \left[(1 + \mu'_p) \hat{P}' - \frac{\mu'_p}{M} (P' p_1) \right] u(p_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Воспользуемся следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
 & \text{a) } (P' p_2) = (P' p_1) = P'^2; \\
 & \text{b) } \bar{u}(p_2) [\hat{P}' (\hat{P} - \hat{K} + M) \hat{P}'] u(p_1) = \bar{u}(p_2) \left\{ \hat{K} P'^2 + 2P'^2 M - \right. \\
 & \quad \left. - 2 \frac{(PK)}{K^2} \hat{K} P'^2 \right\} u(p_1); \\
 & \text{c) } \bar{u}(p_2) \hat{P}'^7 [\hat{P} - \hat{K} + M] u(p_1) = u(p_2) \left[M \left(M - \frac{PK}{K^2} \hat{K} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + [P^2 + (PK)] - \hat{P} \hat{K} - \frac{(PK)}{K^2} \hat{K} \hat{P} \right] u(p_1); \\
 & \text{d) } \bar{u}(p_2) [\hat{P} - \hat{K} + M] \hat{P}' u(p_1) = \bar{u}(p_2) \times \\
 & \quad \times \left[M \left(M - \frac{(PK)}{K^2} \hat{K} \right) + [P^2 + (PK)] - (\hat{K} \hat{P}) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{PK}{K^2} \hat{P} \hat{K} \right] u(p_1); \\
 & \text{e) } \bar{u}(p_2) [\hat{P} - \hat{K} + M] u(p_1) = \bar{u}(p_2) [-\hat{K} + 2M] u(p_1),
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

а также тем, что в полюсе ($u = M^2$) $(P - K)^2 = P^2 + K^2 - 2(PK) = 2K^2 - 2(PK) + M^2 = M^2$

или

$$K^2 = (PK). \tag{3.10}$$

Тогда для неизвестного коэффициента A_1^0 найдем

$$A_1^0 = e^2 \bar{u}(p_2) (2M - \hat{K}) u(p_1). \tag{3.11}$$

Аналогичным образом, производя соответствующие замены, получаем

$$A_2^0 = e^2 \bar{u}(p_2) \hat{K} u(p_1) (1 + \mu_p')^2; \tag{3.12}$$

$$(A_3^0 + A_4^0) (P'^2 N^2)^{1/2} = e^2 (1 + \mu_p') \bar{u}(p_2) \left[\frac{P'^2}{M} \hat{N} (M - \hat{K}) \right] u(p_1); \tag{3.13}$$

$$(A_4^0 - A_3^0) (P'^2 N^2)^{1/2} = e^2 (1 + \mu_p') \bar{u}(p_2) \left[\frac{P'^2}{M} (M - \hat{K}) \hat{N} \right] u(p_1). \tag{3.14}$$

Сравнение (3.13) и (3.14) дает

$$\begin{aligned}
 (P'^2 N^2)^{1/2} A_4^0 &= e^2 (1 + \mu_p') (P'^2) \bar{u}(p_2) \hat{N} u(p_1); \\
 (P'^2 N^2)^{1/2} A_3^0 &= -e^2 (1 + \mu_p') \frac{P'^2}{M} \bar{u}(p_2) \hat{N} \hat{K} u(p_1).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

С помощью равенств

$$\bar{u}(p_2) \hat{N} \hat{K} u(p_1) = (P'^2 N^2)^{1/2} u(p_2) \gamma_5 u(p_1);$$

$$\bar{u}(p_2) \hat{N} u(p_1) = -K^2 \bar{u}(p_2) \gamma_5 \hat{K} u(p_1),$$

выражения (3.15) переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A_3^0 &= -Me^2 (1 + \mu'_p) \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1); \\ A_4^0 &= e^2 (1 + \mu'_p) u(p_2) \gamma_5 \hat{K} u(p_1). \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Окончательно, учитывая множитель $1/2M$, (3.11) (3.12) и (3.16), находим вычеты R_i^0 для полюсных членов кросс-канала:

$$\left. \begin{aligned} R_1^0 &= 2e^2 M; & R_4^0 &= -e^2 (1 + \mu'_p)^2; \\ R_2^0 &= e^2; & R_5^0 &= -Me^2 (1 + \mu'_p); \\ R_3^0 &= 0; & R_6^0 &= e^2 (1 + \mu'_p). \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Вычисление полюсных членов для прямого канала производится аналогично и приводит к тем же выражениям, причем знаки у T_2^0 и T_4^0 будут противоположными, что согласуется с (3.2).

Дисперсионные соотношения с одним вычитанием для функций $T(s, t)$. Можно показать, используя условие релятивистской и градиентной инвариантности, что амплитуда комптон-эффекта в с.ц.м. в пределе малых энергий ($s \rightarrow M^2$, $t \rightarrow 0$) выглядит так:

$$\begin{aligned} M_s^0 &= -\frac{e^2}{M} (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}) + \frac{e^2}{M^2} \left(\frac{1}{2} + \mu'_p \right) \omega i (\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}]) + \frac{e^2}{2M^2} (1 + \mu'_p)^2 \omega i \times \\ &\times (\boldsymbol{\sigma} [s s']) + \frac{e^2}{2M^2} (1 + \mu'_p) \omega i \{ (\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{k}') (\mathbf{s}' [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}']) - (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{s}) [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}] \}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\mathbf{s} = [k\boldsymbol{\epsilon}]$, $\mathbf{s}' = [k'\boldsymbol{\epsilon}']$. Сравнивая это выражение с формулой (3.6), гл. 7, находим*

$$\left. \begin{aligned} F_1^b(M^2, 0) &= -\frac{e^2}{M}; & F_4^b(M^2, 0) &= -\frac{e^2}{2M^2} (1 + \mu'_p)^2 \omega; \\ F_2^b(M^2, 0) &= 0; & F_5^b(M^2, 0) &= 0; \\ F_3^b(M^2, 0) &= -\frac{e^2}{2M^2} \omega; & F_6^b(M^2, 0) &= \frac{e}{2M^2} (1 + \mu'_p) \omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

* При этом

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}') (\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{k}') - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{s}) (\boldsymbol{\epsilon}' \mathbf{k}) = (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}') (\mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}) - (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}') - 2(\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}]).$$

Подставляя последние формулы в (5.6), гл. 7, получаем при $s \rightarrow M^2$ (или $\omega = \frac{s-M^2}{2\sqrt{s}} \rightarrow 0$), $t \rightarrow 0$ (или $\cos \theta \rightarrow 1$)

$$\left. \begin{aligned} T_1^b(M^2, 0) &= 0; & T_4^b &= -\frac{e^2}{M\omega} (1 + \mu_p')^2; \\ T_2^b(M^2, 0) &= \frac{e^2}{M} \cdot \frac{1}{\omega}; & T_5^b &= \frac{e^2}{2M} \mu_p' (2 + \mu_p'); \\ T_3^b &= \frac{e^2}{M} \mu_p' (2 + \mu_p'); & T_6^b &= -\frac{e^2}{2M^2} \mu_p'^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Очевидно, что функции T_i , определяемые (3.1), также должны в пределе малых энергий ($s \rightarrow M^2$, $t \rightarrow 0$) переходить в (3.20).

Для нечетных функций, когда $\eta_i = -1$, т. е. для T_2 и T_4 это требование выполняется. Действительно, в этом случае при $s \rightarrow M^2$, $t \rightarrow 0$

$$\lim_{s, u \rightarrow M^2} \left(\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' - u} \right) = 0, \quad (3.21)$$

и потому интегральные члены в T_2 и T_4 в (3.1) обращаются в нуль. Выражение же для полюсного члена

$$R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s} - \frac{1}{M^2 - u} \right) = R_i^0 \frac{s - u}{(M^2 - s)(M^2 - u)}$$

с учетом соотношений

$$\left. \begin{aligned} s &= (E + \omega)^2 = W^2; \\ u &= M^2 - 2\omega(E + \omega \cos \theta); \\ t &= -2\omega^2(1 - \cos \theta), \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

где ω — энергия фотона, $E = \sqrt{\omega^2 + M^2}$, θ — угол рассеяния, в с. ц. м. запишется так:

$$-R_i^0 \frac{2E + \omega(1 + \cos \theta)}{2\omega W(E + \omega \cos \theta)}. \quad (3.23)$$

Так как условие $s \rightarrow M^2$, $t \rightarrow 0$, согласно (3.22), эквивалентно условию $\omega \rightarrow 0$, $\cos \theta \rightarrow 1$, то в пределе малых энергий (3.23) переписывается в виде

$$-R_i^0 \frac{1}{M\omega}. \quad (3.24)$$

Подставляя сюда значения R_2^0 и R_4^0 из (3.17), получаем выражения, совпадающие с (3.20),

$$T_2 = \frac{e^2}{M\omega}; \quad T_4 = -\frac{e^2}{M\omega} (1 + \mu_p')^2. \quad (3.25)$$

Следовательно, функции T_2 и T_4 имеют правильный низкоэнергетический предел.

Для четных функций, когда $\eta = +1$, т. е. для T_1, T_3, T_5 и T_6 вместо (3.21) и (3.24) найдем

$$\lim_{s, u \rightarrow M^2} \left(\frac{1}{s' - s} + \frac{1}{s' - u} \right) = \lim_{s, u \rightarrow M^2} \left[\frac{s' - u + s' - s}{(s' - s)(s' - u)} \right] = \frac{2}{s' - M^2}$$

и

$$R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right) = R_i^0 \frac{1 - \cos \theta}{2W(E + \omega \cos \theta)} \rightarrow 0,$$

т. е. функции T_1, T_3, T_5 и T_6 не стремятся к своим низкоэнергетическим пределам. Это означает, что для четных функций необходимо использовать дисперсионные соотношения с одним вычитанием. В таких дисперсионных соотношениях для каждой T_i появится с необходимостью неизвестная константа (см. гл. 15, § 4), и ее надо выбрать так, чтобы каждая T_i имела правильный низкоэнергетический предел.

Дисперсионные соотношения с одним вычитанием по s запишутся так:

$$T_i(s, t) = \overset{\circ}{T}_i + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \operatorname{Im} T_i(s', t) \left[\frac{s - s_0}{(s' - s)(s' - s_0)} + \frac{u - u_0}{(s' - u_0)(s' - u)} \right] + B_i(s_0, t_0), \quad (3.26)$$

где $\overset{\circ}{T}_i = R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right) - R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s_0} + \frac{1}{M^2 - u_0} \right)$,

$B_i(s_0, u_0, t)$ — вычитательные функции.

Положим $t_0 = 0$, $s_0 = M^2$, $u_0 = M^2$ и устремим $s \rightarrow M^2$, $u \rightarrow M^2$, $t \rightarrow 0$. Тогда

$$\overset{\circ}{T}_i = R_i^0 \frac{2M^2 - s - u}{(M^2 - s)(M^2 - u)} - R_i^0 \frac{2M^2 - s_0 - u_0}{(M^2 - s_0)(M^2 - u_0)} = 0,$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} T_i(s', t)}{s' - M^2} \left[\frac{s - M^2}{s' - s} + \frac{u - M^2}{s' - u} \right] = 0$$

и вычитательные функции $B_i(s_0, u_0, t_0)$ перейдут в константы $B_i(M^2, M^2, 0)$, равные низкоэнергетическому пределу функций $T_i(s, t)$:

$$\left. \begin{aligned} T_1(M^2, 0) &= 0; & T_5(M^2, 0) &= \frac{e^2}{2M} \mu_p' (2 + \mu_p'); \\ T_3(M^2, 0) &= \frac{e^2}{M} \mu_p' (2 + \mu_p'); & T_6(M^2, 0) &= -\frac{e^2}{2M^2} \mu_p'^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.27)$$

Так как дисперсионные соотношения, не учитывающие вклада третьего канала, приводят к расхождению с опытными данными, то было предложено учесть вклад одномезонных (π^0 , η^0 и т. п.) состояний по третьему каналу.

Ограничимся учетом π^0 -мезонной диаграммы в третьем канале (см. рис. 15.10, д). Чтобы вычислить ее амплитуду, подставим (2.6) и (3.7), гл. 12 в (1.1) гл. 16

$$g_{NN\pi} g_{\gamma\gamma\pi} \bar{u}^c(p_2) \gamma_5 u^c(p_1) \tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\nu k_{1\lambda} k_{2\sigma}. \quad (3.28)$$

В с. ц. м. последнее выражение переписется так:

$$g_{NN\pi} g_{\gamma\gamma\pi} [i[(\sigma\mathbf{k})(\varepsilon\mathbf{s}') - (\sigma\mathbf{k}')(\varepsilon\mathbf{s})] - i[(\sigma\mathbf{k}')(\varepsilon\mathbf{s}') - (\sigma\mathbf{k})(\varepsilon\mathbf{s})]]. \quad (3.29)$$

Сравнив коэффициенты при одинаковых спиновых комбинациях в (3.6), гл. 7 и (3.29), получим

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0, \quad F_5 = -F_6 \approx \pm g_{NN\pi} g_{\gamma\gamma\pi}. \quad (3.30)$$

У $F_{5,6}$ взяты оба знака потому, что знак константы $g_{\gamma\gamma\pi}$ не известен.

С помощью (3.30), имея в виду формулы (5.6) гл. 7, найдем выражение для инвариантных функций $T_i(s, t)$:

$$T_5 \approx \pm g_{NN\pi} g_{\gamma\gamma\pi}, \quad T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_6 = 0. \quad (3.30')$$

Константу связи $g_{\gamma\gamma\pi}$ можно выразить через время жизни τ нейтрального π^0 -мезона. Для этого воспользуемся выражением (5.6) гл. 12 для вероятности распада π^0 -мезона на два фотона:

$$\omega = \frac{m_{\pi^0}^3}{64\pi} g_{\gamma\gamma\pi}^2 \equiv \frac{1}{\tau_{\pi^0}}, \quad (3.31)$$

где τ_{π^0} — время жизни π^0 -мезона. Из (3.31) следует, что

$$g_{\gamma\gamma\pi}^2 = \frac{1}{\tau_{\pi^0}} \cdot \frac{64\pi}{m_{\pi^0}^3}. \quad (3.32)$$

Подставив (3.32) в (3.30'), получим

$$T_5 = \frac{r_5}{\mu^2 - t}, \quad (3.33)$$

где

$$r_5 = \pm 8\pi\mu_\pi \left(\frac{1}{\mu\tau} \cdot \frac{g_{\gamma\gamma\pi}^2}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33')$$

Таким образом, окончательно дисперсионные соотношения для функций $T_i(s, t)$ для комптон-эффекта запишутся так: для $i = 2, 4$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_i(s, t) = & R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s} - \frac{1}{M^2 - u} \right) + \\ & + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \operatorname{Im} T_i(s', t) \left[\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' - u} \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

для $i = 1, 3, 5, 6$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_i(s, t) = & R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right) + r_5 \frac{t}{(\mu^2 - t)\mu^2} + T_i(M^2, 0) + \\ & + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} T_i(s', t)}{M^2 - s'} \left[\frac{s - M^2}{s' - s} + \frac{u - M^2}{s' - u} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

В последних соотношениях слагаемые описывают вклад: 1) полюсных членов по прямому и перекрестному каналам; 2) полюсного члена по третьему каналу; 3) вычитательной константы (низкоэнергетический предел); 4) интегрального члена.

Вычисление $\operatorname{Im} T_i(s, t)$. Из выражений (5.6), гл. 7, (3.18), гл. 8 видно, что нахождение $\operatorname{Im} T_i(s, t)$ сводится к определению мнимых частей парциальных амплитуд комптон-эффекта.

Ограничимся рассмотрением комптон-эффекта в области энергий фотона $E_\gamma \leq 350 \text{ Мэв}$ (в лабораторной системе координат). Тогда в выражении для абсорбтивной части амплитуды комптон-эффекта (см. рис. 15.10, e) можно ограничиться учетом фотообразования только одного мезона, и, согласно (3.9), гл. 15,

$$\operatorname{Im} T_{fi} = \frac{k}{32\pi^2 W} \int \mathcal{R}_{fn}^+(\gamma p \rightarrow \pi N) \mathcal{R}_{ni}(\gamma p \rightarrow \pi N) d\Omega. \quad (3.36)$$

Подставим сюда разложение амплитуд комптон-эффекта T_{fi} и фоторождения π -мезонов \mathcal{R}_{fn} , \mathcal{R}_{ni} по «полиномам Лежандра»:

$$\left. \begin{aligned} u(p_2) T_{fi} u(p_1) &= \sum_{n, m} \mathcal{E}_{n, m} L_{n, m}; \\ \bar{u}(p_2) \mathcal{R}_{fn} u(p) &= \sum_{l, n} E_{l, n}^+ \mathcal{L}_{l, n}^+; \\ \bar{u}(p) \mathcal{R}_{ni} u(p_1) &= \sum_{l, m} E_{l, m} \mathcal{L}_{l, m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Используя ортогональность полиномов Лежандра, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n, m} \text{Im} \mathcal{E}_{n, m} L_{n, m} &= \frac{k}{W} \sum E_{l, n}^+ E_{l, m} \int \mathcal{L}_{l, n}^+ \mathcal{L}_{l, m} d\Omega = \\ &= \frac{k}{W} \sum E_{l, n}^+ E_{l, m} 2\pi L_{nm}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Приравнивая множители при одинаковых L_{nm} , находим

$$\text{Im} \mathcal{E}_{nm} = \frac{k}{16\pi W} \sum_l E_{l, n}^+ E_{l, m}. \quad (3.39)$$

т. е. абсорбтивные части парциальных амплитуд комптон-эффекта выражаются через билинейные комбинации полных парциальных волн фотообразования π -мезонов. Приведем выражения для абсорбтивных частей некоторых парциальных амплитуд комптон-эффекта (см. гл. 15, § 3)

$$\left. \begin{aligned} &\text{Im} \left\langle 1\mathcal{E} \left| \frac{1}{2} \right| 1\mathcal{E} \right\rangle = \\ &= a \left\langle 1E \left| \frac{1}{2} \right| 0 \right\rangle \left\langle 0 \left| \frac{1}{2} \right| 1E \right\rangle = a |E_1|^2; \\ &\text{Im} \left\langle 1\mathfrak{M} \left| \frac{1}{2} \right| 1\mathfrak{M} \right\rangle = \\ &= a \left\langle 1M \left| \frac{1}{2} \right| 1 \right\rangle \left\langle 1 \left| \frac{1}{2} \right| 1M \right\rangle = a |M_1|^2; \\ &\text{Im} \left\langle 1\mathcal{E} \left| \frac{3}{2} \right| 2\mathfrak{M} \right\rangle = \\ &= a \left\langle 2E \left| \frac{3}{2} \right| 1 \right\rangle \left\langle 1 \left| \frac{3}{2} \right| 1M \right\rangle = a \text{Re} M_3 E_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

где $a = Mk/8\pi W$, а E , M — парциальные амплитуды фотообразования π -мезонов на нуклонах.

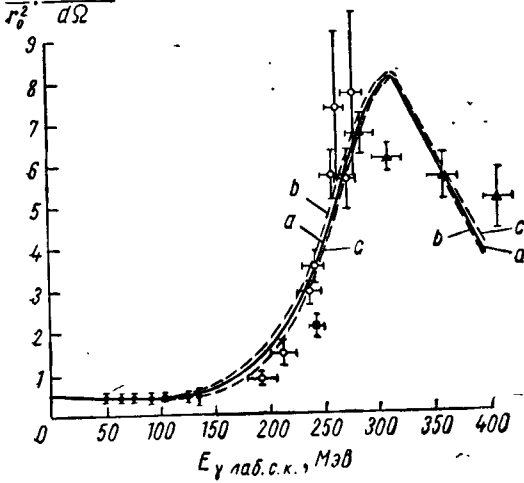
Таким образом, для определения абсорбтивных частей парциальных амплитуд комптон-эффекта надо знать полные парциальные амплитуды фотообразования π -мезонов на нуклонах.

Для амплитуд фотообразования интегрирование по энергиям фотонов в (3.1) производится до $s' = \infty$. До порога фотообразования π -мезонов (~ 150 Мэв) абсорбтивная часть парциальных амплитуд комптон-эффекта равна нулю, т. е. в этой области энергий фотонов интегральный член вклада не дает.

В области энергий фотонов от 150 до 600 Мэв основной вклад в амплитуду фотообразования дают парциальные амплитуды E_s и M_{ss} . Для определения этих двух парциальных амплитуд можно воспользоваться опытными данными по полным сечениям σ^0 и σ^+

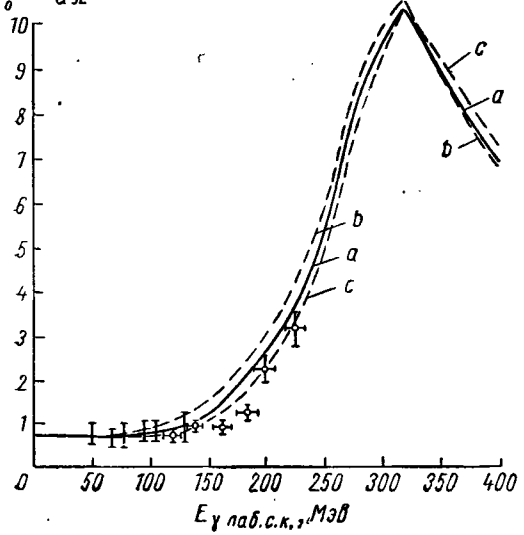
$$\frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma(90^\circ)}{d\Omega}$$

a



$$\frac{1}{r_0^2} \frac{d\sigma(135^\circ)}{d\Omega}$$

б



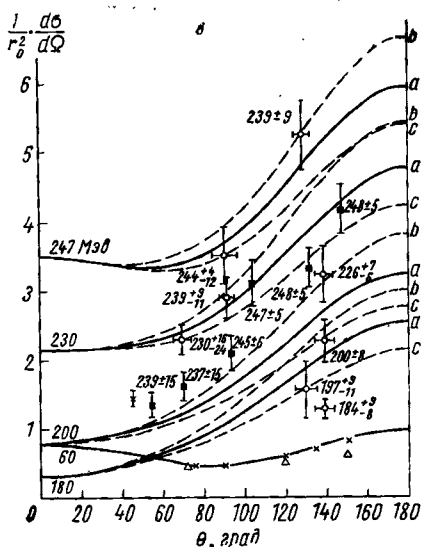


Рис. 17.5. Сравнение опытных значений дифференциальных сечений процесса $\gamma + p \rightarrow \gamma' + p'$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными с помощью дисперсионных соотношений (r_0 — классический радиус протона).

фотообразования π^0 - и π^+ -мезонов, так как, согласно (4.1), гл. 8, если пренебречь вкладом запаздывающего члена (см. гл. 14, § 4)

$$|M_{33}|^2 = a_{33} \sigma^0; \quad |E_J|^2 = \frac{\sigma^+}{a_1} - \frac{4}{9} |M_{33}|^2, \quad (3.41)$$

где a_{33} , a_1 — нормировочные множители, зависящие от энергии. В случае учета запаздывающего члена последнее выражение становится более громоздким.

В интервале энергий фотонов от 600 до 1200 МэВ основной вклад в амплитуду фотообразования π -мезонов дают парциальные амплитуды E_{13} и E_{15} , которые можно определить с помощью опытных данных по полным сечениям фотообразования π^0 -мезонов:

$$|E_{13}|^2 = a_{13} \sigma^0, \quad |E_{15}|^2 = a_{15} \sigma^0, \quad (3.42)$$

где a_{13} , a_{15} — нормировочные множители. Вычисляя с помощью найденных значений парциальных амплитуд фотообразования π -мезонов абсорбтивные части парциальных амплитуд комптон-эффекта, соответствующих полному моменту $J = 1/2$ и $3/2$, и подставляя последние в (3.18), гл. 8 и полученный результат — в (5.6), гл. 7, находим величины $\text{Im } T_i(s, t)$ для функций, относящихся к комптон-эффекту.

Вычисление $\text{Re } T_i(s, t)$. Подставляя найденные значения $\text{Im } T_i(s, t)$ в дисперсионные соотношения (3.1), вычисляем $\text{Re } T_i(s, t)$. Тогда функции $T_i(s, t)$ для комптон-эффекта определяются так:

$$T_i(s, t) = \text{Re } T_i(s, t) + i \text{Im } T_i(s, t). \quad (3.43)$$

Чтобы получить дифференциальные сечения комптон-эффекта, надо подставить (3.43) в формулу (6.16), гл. 3.

Сравнение с опытом. На рис. 17.5 приведены вычисленные дифференциальные сечения для комптон-эффекта на протоне для значений $\tau_{\pi^+} = \infty$ (кривая *a*) и $\tau_{\pi^+} = 1 \cdot 10^{-16}$ сек (кривые *b* и *в* соответствуют положительным и отрицательным значениям константы $g_{\gamma\pi^+}$ в одномезонном члене).

На рис. 17.5, *a, б* дана зависимость сечения комптон-эффекта от энергии γ -кванта E_γ (в лабораторной системе координат) для углов $\theta = 90$ и 135° , а на рис. 17.5, *в* — угловые распределения рассеянных фотонов для различных энергий. Для окончательного сравнения теоретических результатов с опытными данными необходимо учесть более детально вклад третьего канала (см. также гл. 18, § 2).

§ 4. Рассеяние π -мезонов на π -мезонах. *N/D*-метод

Рассмотрим процесс рассеяния π -мезонов на π -мезонах

$$\pi(q_1) + \pi(q_2) \rightarrow \pi(q_3) + \pi(q_4). \quad (4.1)$$

Инвариантная спиновая и изотопическая структура амплитуды процесса (4.1), амплитуда в с.ц.м. и ее разложение по парциальным волнам определяется формулами (2.1), гл. 3, (7.6), гл. 10, (2.1), гл. 7 и (1.10'), гл. 8. Дисперсионные соотношения в с.ц.м. для парциальных амплитуд $f_l^j(z)$ запишутся в виде

$$f_l^j(z) = \frac{1}{\pi} \int_1^\infty \frac{\text{Im } f_l^j(z')}{z' - z} dz' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } f_l^j(z')}{z' - z} dz', \quad (4.2)$$

где $z = 2v + 1$; $v = \frac{q^2}{\mu^2}$; q — импульс начального мезона в с. ц. м.; $s = 4\mu^2(v + 1)$; $t = -2\mu^2 v(1 - \cos \theta)$; θ — угол рассеяния в с. ц. м.; j — изотопический индекс.

Первый и второй интегралы в (4.2) учитывают соответственно вклады прямого и перекрестного каналов (т. е. правого и левого разрезов).

Согласно (2.3), гл. 14, парциальные амплитуды, нормированные определенным образом, можно представить в виде

$$f_l^j(z) = \frac{1}{2iK(z)} \left(e^{2i\delta_l^j(z)} - 1 \right), \quad K(z) = \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}, \quad (4.3)$$

т. е. характеризовать процесс фазами рассеяния $\delta_l^j(z)$.

Согласно условию унитарности (в выбранной нами нормировке)

$$\text{Im } f_l^j(z) = K(z) |f_l^j(z)|^2. \quad (4.4)$$

После подстановки последнего в (4.2) получим нелинейное, в отличие от (2.15), сингулярное интегральное уравнение. Однако его можно свести к системе регулярных (типа Фредгольма) интегральных уравнений. Для этого представим парциальную амплитуду $f_l^j(z)$ в виде

$$f_l^j(z) = \frac{N_l^j(z)}{D_l^j(z)}. \quad (4.5)$$

Пусть $N_l^j(z)$ имеет только левый разрез, а $D_l^j(z)$ — только правый разрез. Кроме того, функция $D_l^j(z)$ не содержит нулей. С учетом этих аналитических свойств интегральная теорема Коши для функций $N_l^j(z)$ и $D_l^j(z)$ запишется следующим образом

$$D_l^j(z) = 1 - \frac{z-z_0}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') N_l^j(z')}{(z'-z_0)(z'-z)} dz'; \quad (4.6)$$

$$N_l^j(z) = \frac{z-z_0}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im } f_l^j(z') D_l^j(z')}{(z'-z_0)(z'-z)} dz', \quad (4.7)$$

т. е. вместо интегрального сингулярного нелинейного уравнения получалась система уравнений (4.6) и (4.7), которую можно разрешить, если известна функция $\text{Im } f_l^j(z)$ на левом разрезе.

Функцию $f_l^j(z)$ можно представить в форме, отличной от (4.5):

$$f_l^j(z) = \frac{\bar{N}_l^j(z)}{\bar{D}_l^j(z)}, \quad (4.8)$$

где

$$\bar{N}_l^j(z) = \frac{P_n(z)}{P_m(z)} N_l^j(z); \quad (4.9)$$

$$\bar{D}_l^j(z) = \frac{P_n(z)}{P_m(z)} D_l^j(z); \quad (4.10)$$

а $P_n(z)$ и $P_m(z)$ — полиномы n -й и m -й степеней по z с действительными коэффициентами. Функции $\bar{N}_l^j(z)$ и $D_l^j(z)$ могут иметь как нули, так и полюсы.

Выберем функцию $D_l^j(z)$ в виде (опуская z_0)

$$D_l^j(z) = \exp \left\{ -\frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\delta_l^j(z') dz'}{z'(z'-z)} \right\}, \quad (4.11)$$

содержащем только правый разрез. Тогда функции $N_l^j(z)$, входящие в (4.5), действительно не имеют правого разреза. В самом деле, из (4.3) следует, что при $z \geq 1$

$$f_l^j(z + i\varepsilon) = \frac{1}{2iK(z)} \left(e^{2i\delta_l^j(z)} - 1 \right) = \frac{N_l^j(z + i\varepsilon)}{D_l^j(z + i\varepsilon)}, \quad (4.12)$$

а (4.11) дает

$$e^{2i\delta_l^j(z)} = \frac{D_l^j(z - i\varepsilon)}{D_l^j(z + i\varepsilon)} = \frac{D_l^{j*}(z + i\varepsilon)}{D_l^j(z + i\varepsilon)}. \quad (4.13)$$

Поэтому

$$N_l^j(z + i\varepsilon) = \frac{D_l^{j*}(z + i\varepsilon) - D_l^j(z + i\varepsilon)}{2iK(z)}. \quad (4.14)$$

Из (4.14) видно, что функция $N_l^j(z + i\varepsilon)$ при $z \geq 1$ действительна. Так как $f_l^{j*}(z) = f_l^j(z^*)$ и $D_l^{j*}(z) = D_l^j(z^*)$, то $N_l^{j*}(z) = N_l^j(z^*)$. Если бы функция $N_l^j(z)$ имела правый разрез, то при $z \geq 1$ ее мнимая часть (равная половине скачка на правом разрезе) была бы отлична от нуля. Этого не может быть для действительной функции, и, следовательно, функция $N_l^j(z)$ не имеет правого разреза. Функция $\bar{N}_l^j(z)$ обладает тем же свойством, так как она отличается от $N_l^j(z)$ только отношением полиномов с действительными коэффициентами.

Из условия унитарности и действительности $N_l^j(z)$ при $z \geq 1$, следует, что

$$\text{Im } D_l^j(z) = -K(z) N_l^j(z), \quad \text{Im } \bar{D}_l^j(z) = -K(z) \bar{N}_l^j(z). \quad (4.15)$$

Рассмотрим для конкретности рассеяние π -мезонов в p -состоянии ($l = 1$). Такой процесс, согласно (7.6), гл. 10, описывается тремя амплитудами $f_1^0(z)$, $f_1^1(z)$, $f_1^2(z)$ или тремя фазами $\delta_1^0(z)$, $\delta_1^1(z)$, $\delta_1^2(z)$, которые соответствуют рассеянию с полным изоспином $I = 0, 1, 2$ начальной и конечной системы.

Предположим, что фазы $\delta(z)$ при $z \rightarrow \infty$ стремятся к конечному пределу, иначе говоря, парциальные волны имеют конечное число нулей и резонансов. Пусть парциальные волны $f_1^0(z)$ и $f_1^1(z)$ — резонансные; для них (4.6) и (4.7) переписываются так:

$$D_1^{0;1}(z) = 1 - zg^{0;1} - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') N_1^{0;1}(z')}{z'(z'-z)} dz'; \quad (4.16)$$

$$N_1^{0;1}(z) = f_1^{0;1}(0) + \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im} f_1^{0;1}(z') D_1^{0;1}(z')}{z'(z'-z)} dz', \quad (4.17)$$

причем для $z=0$ (пороговое условие)

$$f_1^1(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^1 \frac{\text{Im} f_1^1(z') D_1^1(z')}{z'(z'-z)} dz', \quad (4.18)$$

а $g^{0;1}$ — неизвестные коэффициенты.

Нерезонансную волну $f_1^2(z)$ удобнее характеризовать функциями \bar{N}_1^2 , \bar{D}_1^2 , для которых

$$\bar{D}_1^2(z) = 1 - zg^2 - \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') \bar{N}_1^2(z')}{z'(z'-z)} dz'; \quad (4.19)$$

$$\bar{N}_1^2(z) = f_1^2(0) + \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{-1} \frac{\text{Im} f_1^2(z') \bar{D}_1^2(z')}{z'(z'-z)} dz'. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.16) в (4.17) и (4.20) в (4.19), получаем систему уравнений Фредгольма для функций $D_1^{0;1}$ и \bar{D}_1^2

$$d_1^j(z) = 1 + zg^j + z f_1^j(0) K(z, y=0) + \\ + \frac{z}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{dz'}{z'} K(z, z') \varphi_1^j(z') d_1^j(z'). \quad (4.21)$$

Здесь $d_1^j(z) = D_1^j(-z)$ для $j=0; 1$ и $d_1^2 = \bar{D}_1^2(-z)$;

$$\varphi_1^j = \text{Im} f_1^j(-z); \quad K(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{K(z') dz'}{(z'+x)(z'+y)}.$$

Коэффициенты $g_1^{0,1}$ определяются из условия сохранения положения резонансов в амплитудах f_1^1 и f_1^0 :

$$d_1^1(-z_j) = 0,$$

а коэффициент g_1^2 — из асимптотического поведения функций $f_1^2(z)$.

Систему уравнений (4.21) можно решать с помощью электронной вычислительной машины методом итераций. Задаваясь определенным видом функций $\text{Im } f_1^1(-z)$ на левом разрезе и подставляя его в (4.21), находим функции $d_1^1(z)$ в первом приближении. Из полученного решения выбираем $\text{Im } f_1^1(-z)$ для следующей итерации. Процедура продолжается до тех пор, пока функции $\text{Im } f_1^1(-z)$, найденные после n -й итерации, не окажутся достаточно близкими к функциям $\text{Im } f_1^1(-z)$, полученным после $(n-1)$ -й итерации.

ГЛАВА 18

ДВОЙНЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 1. Двойные дисперсионные соотношения (представление Мандельштама)

Рассмотрим процесс

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

Как мы уже говорили (гл. 15, § 1), у этой реакции имеется три канала. Каждый из этих каналов можно описать с помощью одной и той же функции $M(s, u, t)$, но заданной в физической области каждого канала. Так как физические области каналов не перекрываются, то функция $M(s, u, t)$, описывающая каналы, фактически распадается на три разные функции, соответствующие различным каналам.

Ситуация существенно меняется, если предположить, что функция $M(s, u, t)$ — аналитическая функция переменных s, u и t . Тогда задание $M(s, u, t)$ в физической области одного из каналов определяет ее значение во всей области аналитичности, включающей физические и нефизические области всех каналов, в том числе области комплексных значений переменных s, u и t . Иначе говоря, $M(s, u, t)$ становится единой функцией комплексных s, u, t . Она описывает одновременно процессы во всех трех каналах. Выделение же конкретного канала производится заданием значений s, u, t и его физической области.

Возможность аналитически продолжить амплитуду процесса $M(s, u, t)$ одновременно по двум переменным в область комплексного переменного пока не доказана. Поэтому предполагается, что такое продолжение одновременно по двум переменным возможно.

Кроме того, предполагается, что единственными особенностями, которые могут быть у амплитуды, являются полюса и точки ветвления; причем одночастичному промежуточному состоянию в условии унитарности соответствует полюс амплитуды, а двухчастичным и многочастичным состояниям — точки ветвления.

Предположим также, что функции $T_i(s, u, t)$ стремятся к нулю, когда обе независимые комплексные переменные стремятся к бесконечности. Тогда с помощью теоремы Коши для функции двух комплексных переменных получим (опуская $i\epsilon$ в знаменателе)

$$T_i(s, u, t) = \overset{\circ}{T}_i + \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t')}{(s' - s)(t' - t)} + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{\rho_{12}(s', u')}{(s' - s)(u' - u)} + \frac{1}{\pi^2} \int_{u_0}^{\infty} du' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{23}(u', t')}{(u' - u)(t' - t)}. \quad (1.1)$$

В это выражение переменные s, u, t входят симметрично. Члены $\overset{\circ}{T}_i$ соответствуют одночастичным промежуточным состояниям (полюсы). Нижние пределы интегрирования определяются минимальной суммой масс в промежуточном состоянии. Функции ρ_{ik} вещественны.

Соотношения (1.1) называют двойными дисперсионными соотношениями или представлением Мандельштама.

Если функции $T_i(s, u, t)$ не стремятся к нулю, когда обе независимые комплексные переменные стремятся к бесконечности, то необходимо использовать двойные дисперсионные соотношения с вычитанием, которые выглядят следующим образом:

$$T_i(s, u, t) = \overset{\circ}{T}_i + \\ + \frac{(s - s_0)(t - t_0)}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{t_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t')}{(s' - s)(s' - s_0)(t' - t)(t' - t_0)} + \\ + \frac{(s - s_0)(u - u_0)}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{\rho_{12}(s', u')}{(s' - s)(s' - s_0)(u' - u)(u' - u_0)} + \\ + \frac{(t - t_0)(u - u_0)}{\pi^2} \int_{t_0}^{\infty} dt' \int_{u_0}^{\infty} du' \frac{\rho_{23}(u', t')}{(t' - t)(t' - t_0)(u' - u)(u' - u_0)} + \\ + \frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{f_1(s') ds'}{(s' - s)(s' - s_0)} + \frac{u - u_0}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{f_2(u') du'}{(u' - u)(u' - u_0)} + \\ + \frac{t - t_0}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{f_3(t') dt'}{(t' - t)(t' - t_0)} + \text{const.} \quad (1.1')$$

Двойные дисперсионные соотношения (1.1) можно также получить из одномерных

$$T_i(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im } T_i^I(s', u, t)}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{\text{Im } T_i^{II}(s, u', t)}{u' - u} du', \quad (1.2)$$

если предположить, что абсорбтивные части $\text{Im } T_i^I(s', u, t)$ и $\text{Im } T_i^{II}(s, u', t)$ являются аналитическими функциями переменной t .

Поясним сначала, как абсорбтивные части становятся комплексными. В случае, например, двухчастичного промежуточного состояния в s -канале (рис. 18.1, а) в t -канале промежуточные состояния

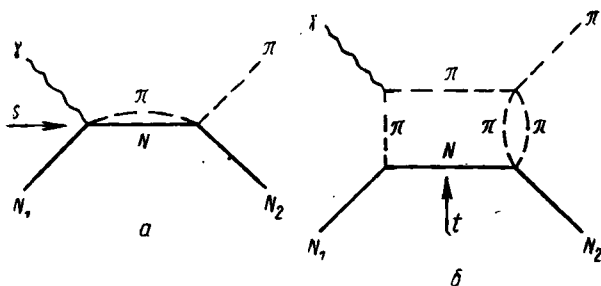


Рис. 18.1. Двухчастичные промежуточные состояния в s - и t -каналах процесса $\gamma + N \rightarrow N + \pi$.

отсутствуют, если $t < 0$, и существуют, если $t > 0$ (рис. 18.1, б), т. е. в физической области первого канала ($s > 0, t < 0$) промежуточные состояния в t канале отсутствуют и абсорбтивная часть $\text{Im } T_i(s, u, t)$ — вещественная функция t . В нефизической области первого канала ($s > 0, t > 0$) появляются промежуточные состояния по t -каналу, и поэтому абсорбтивная часть $\text{Im } T_i(s, u, t)$ по переменной t становится комплексной (у мнимой части возникает мнимая часть). Поэтому в общем случае для $\text{Im } T_i(s, u, t)$ можно написать дисперсионные соотношения по t , так как мы предположили, что $\text{Im } T_i(s, u, t)$ есть аналитическая функция t

$$\text{Im } T_i^I(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\rho_{12}(t', s)}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{\rho_{12}(s, u')}{u' - u} du'. \quad (1.3)$$

Аналогичным образом получим дисперсионные соотношения для $\text{Im } T_i^{II}$:

$$\text{Im } T_i^{II}(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_{12}(u, s')}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{\rho_{12}(u, t')}{t' - t} dt'. \quad (1.4)$$

Подстановка в (1.2) первого члена из (1.3) и второго из (1.4) дает первый и третий члены в (1.1), остальные слагаемые в (1.3) и (1.4) дают второй член в (1.1).

Соотношения (1.3) и (1.4) устанавливают связь между абсорбтивными частями функций $\text{Im } T_i$ и спектральными функциями ρ_{ik} . Как видно, спектральные функции ρ_{ik} отличны от нуля в области, для которой $s > 0, t > 0$ и $u > 0, t > 0$, т. е. в нефизической области. Естественно, что из (1.1) можно получить одномерные дисперсионные соотношения (1.2). Для этого надо в (1.1) зафиксировать одну из переменных.

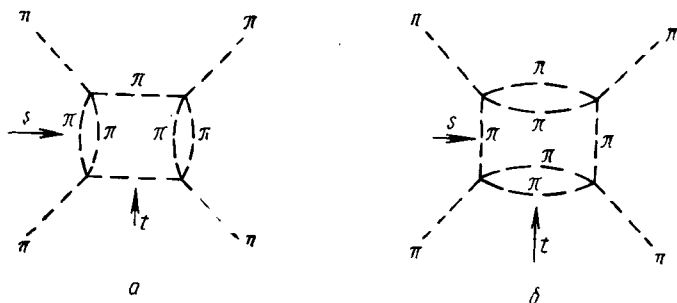


Рис. 18.2. Диаграммы с низшими промежуточными состояниями для процесса $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$.

Нахождение областей, в которых отличны от нуля спектральные функции $\rho_{13}, \rho_{23}, \rho_{12}$, представляет довольно громоздкую задачу. Мы приведем лишь конечные результаты для некоторых процессов.

Рассеяние π -мезонов на π -мезонах. Амплитуда рассеяния нейтральных мезонов симметрична относительно замены любой пары переменных s, u, t . Поэтому все три спектральные функции равны между собой, и симметричны по своим аргументам. Рассмотрим для определенности $\rho_{13}(s, t)$. Диаграммы с нижними промежуточными состояниями изображены на рис. 18.2. Для диаграммы *a* уравнение для граничной кривой области, в которой ρ_{13} отлична от нуля, выглядит так:

$$st - 4\mu^2(4s + t) = 0,$$

где μ — масса мезона.

Асимптоты этой кривой (рис. 18.3)

$$s = 4\mu^2, \quad t = 16\mu^2. \quad (1.5)$$

Граничная кривая, соответствующая диаграмме *b* на рис. 18.2, получается из (1.5) перестановкой s и t :

$$st - 4\mu^2(s + 4t) = 0.$$

Ее асимптоты (рис. 18.3)

$$s = 16\mu^2, \quad t = 4\mu^2.$$

Область, в которой ρ_{13} отлична от нуля, на рис. 18.3 заштрихована. Области, в которых отличны от нуля спектральные функции ρ_{12} и ρ_{23} , выглядят аналогичным образом (рис. 18.3).

Рассеяние π -мезонов на нуклонах. Амплитуда процесса рассеяния нейтральных мезонов на скалярных нуклонах симметрична относительно переменных s и u . Поэтому спектральные функции ρ_{13} и ρ_{23} равны, а ρ_{12} — симметричная функция s и u .

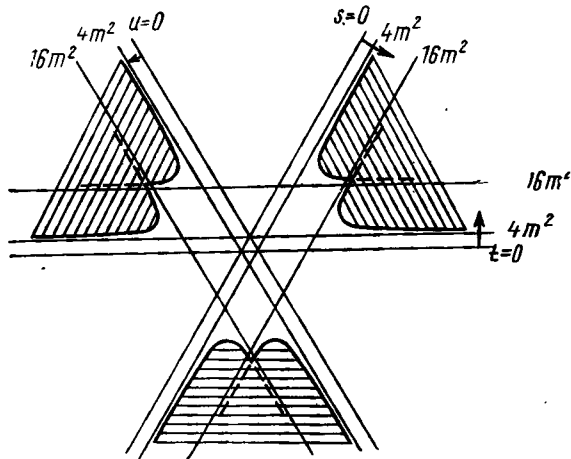


Рис. 18.3. Области (заштрихованы), в которых отличны от нуля спектральные функции процесса $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$.

Граничные кривые C_{12} , C_{13} , C_{23} , соответствующие диаграммам с низшими промежуточными состояниями (рис. 18.4), определяют следующими уравнениями:

$$C_{13}^a : (t - 16\mu^2) [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] - 64\mu^4 s = 0,$$

асимптоты: $s = (M + \mu)^2$, $t = 16\mu^2$;

$$C_{13}^b : (t - 4\mu^2) [s - (M + 2\mu)^2] [s - (M - 2\mu)^2] - 16\mu^4 (s + 3M^2 - 3\mu^2) = 0,$$

асимптоты: $s = (M + 2\mu)^2$, $t = 4\mu^2$;

$$C_{12}^a : [u - (M + 2\mu)^2] [u - (M - 2\mu)^2] [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] - 16suM^2\mu^2 - 16\mu^2 (M^2 - \mu^2) (s - u - M^2 - 2\mu^2) = 0,$$

асимптоты: $s = (M + \mu)^2$, $u = (M + 2\mu)^2$;

$$C_{12}^a : [u - (M + \mu)^2] [u - (M - \mu)^2] [s - (M + 2\mu)^2] [s - (M - 2\mu)^2] - 16suM^2\mu^2 = 0;$$

асимптоты: $s = (M + 2\mu)^2$, $u = (M + \mu)^2$.

Области, в которых отличны от нуля спектральные функции, на рис. 18.5 заштрихованы.

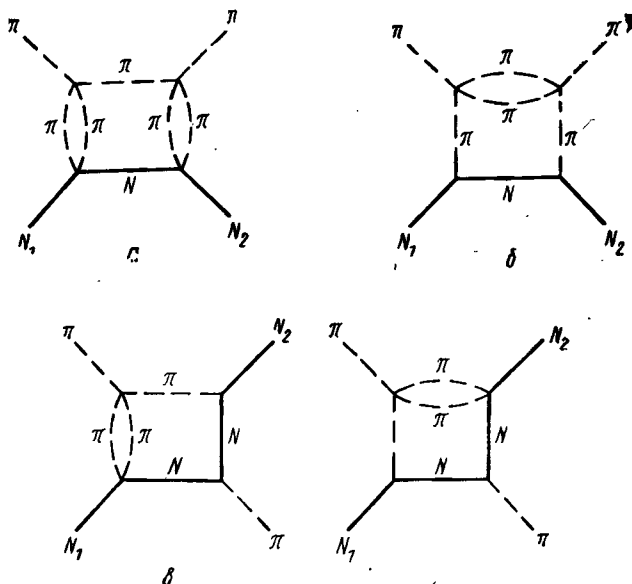


Рис. 18.4. Диаграммы с низшими промежуточными состояниями для процесса $\pi + N \rightarrow \pi + N$.

Фотообразование π -мезонов на нуклонах. Амплитуда процесса является симметричной функцией s и u . Поэтому спектральные функции ρ_{13} и ρ_{23} равны, а функция ρ_{12} симметрична относительно переменных s и u .

Граничные кривые C_{12} , C_{13} , соответствующие диаграммам с низшими промежуточными состояниями (рис. 18.6), определяются уравнениями:

$$C_{13}^a : [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] (t - 9) - 8(3s - M^2 + \mu^2) = 0,$$

асимптоты: $s = (M + \mu)^2$, $t = (3\mu)^2$;

$$C_{13}^b : [s - (M + 2\mu)^2] [s - (M - 2\mu)^2] t(t - 4) - 2t(9s + 31M^2 - 28) - (4M^2 - \mu^2) = 0;$$

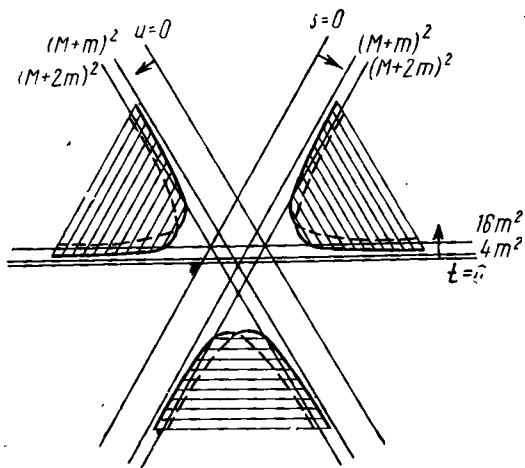


Рис. 18.5. Области (заштрихованы), в которых отличны от нуля спектральные функции процесса $\pi + N \rightarrow \pi + N$.

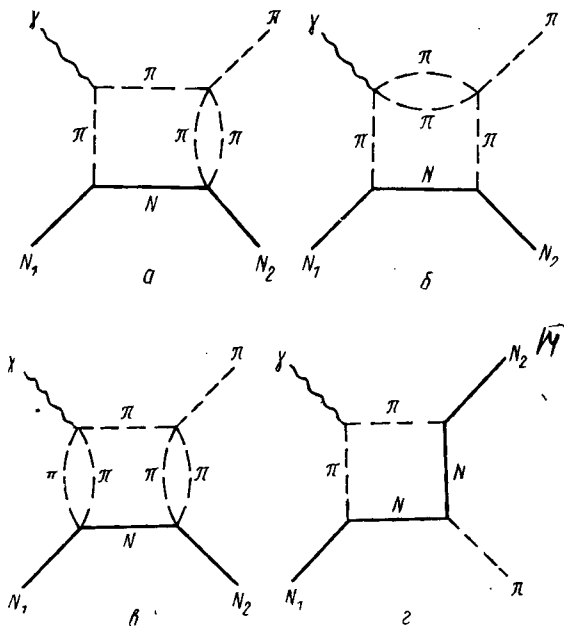


Рис. 18.6. Диаграммы с низшими промежуточными состояниями для процесса $\gamma + N \rightarrow N + \pi$.

асимптоты: $s = (M + 2\mu)^2$, $t = (2\mu)^2$;

$$C_{13}^a : [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] t (t - 16) - \\ - 8t (9s + M^2 - \mu^2) - 16 (M^2 - \mu^2) = 0,$$

асимптоты: $s = (M + \mu)^2$, $t = (4\mu)^2$;

$$C_{12}^a : [u - (M + \mu)^2] [u - (M - \mu)^2] [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] - \\ - (4M^2 - \mu^2) [2su - 2(M^2 - \mu^2)(s + u) + 2M^4 - \mu^4] = 0,$$

асимптоты: $s = (M + \mu)^2$, $u = (M + \mu)^2$.

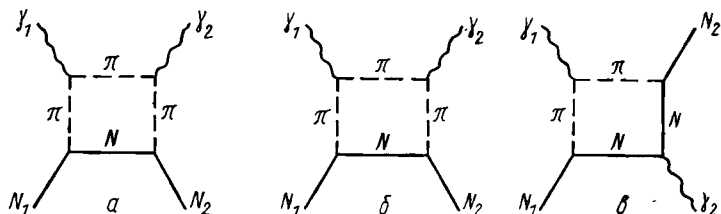


Рис. 18.7. Диаграммы с низшими промежуточными состояниями для процесса $\gamma + N \rightarrow \gamma + N$.

Комптон-эффект на нуклоне. Амплитуда является симметричной функцией s и u . Граничные кривые, соответствующие диаграммам с низшими промежуточными состояниями (рис. 18.7), определяются уравнениями:

$$C_{13}^a : t [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] - 4\mu^2 (s - M^2)^2 = 0,$$

асимптоты: $t = 4\mu^2$, $s = (M + \mu)^2$;

$$C_{23}^b : t [u - (M + \mu)^2] [u - (M - \mu)^2] - 4\mu^2 [(u - M^2)] = 0,$$

асимптоты: $t = 4\mu^2$, $u = (M + \mu)^2$;

$$C_{12}^c : [s - (M + \mu)^2] [s - (M - \mu)^2] [u - (M + \mu)^2] [(u - (M - \mu)^2)] - \\ - 2\mu^2 (4M^2 + \mu^2) us + 2(u + s) \mu^2 [4M^4 - 3M^2 \mu^2 + \mu^4] - \\ - \mu^2 [8M^6 + 2\mu^2 M^4 - 4M^2 \mu^4 + \mu^6] = 0,$$

асимптоты: $s = (M + \mu)^2$, $u = (M + \mu)^2$.

§ 2. Сведение двойных дисперсионных соотношений к одномерным

Если ограничиться в условии унитарности учетом лишь двухчастичных промежуточных состояний, то двойные дисперсионные соотношения можно свести к одномерным. Метод сведения основан на использовании одного важного свойства диаграмм, которое мы проиллюстрируем на примере нескольких процессов.

$\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$. Низшими допустимыми многочастичными промежуточными состояниями во всех трех каналах являются двухмезонные состояния. Рассмотрим диаграмму a (рис. 18.8) с двумя мезонами в s -канале; найдем для нее ближайшее возможное промежуточное состояние, например, по переменной t . Вообще говоря, оно может не совпадать с низшим, двухмезонным промежуточным состоянием в t -канале. С точки зрения t -канала диаграмма a представляется в виде, изображенном на рис. 18.8, б. Вследствие закона сохранения G -четности, в каждой вершине должно быть четное число π -мезонов. Как видно из рис. 18.8, б, ближайшим возможным промежуточным состоянием диаграммы a по t -каналу является не двухмезонное, а четырехмезонное состояние. Другими словами, если для процесса $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$ задано низшее значение переменной $s = (2\mu)^2$, то ближайшим возможным значением переменной t будет $t = (4\mu)^2$, а не $t = (2\mu)^2$, соответствующее низшему значению t .

Можно сказать по другому: ближайшая особенность (точка ветвления) амплитуды, соответствующей диаграмме a по переменной t , лежит при $t = (4\mu)^2$.

Ближайшим возможным промежуточным состоянием той же диаграммы по переменной u будет четырехмезонное состояние, что соответствует особенности в амплитуде при $u = (4\mu)^2$. Аналогичная ситуация имеет место в рассматриваемом случае для любой пары переменных s, u, t : никакая пара из этих трех переменных не может достигать одновременно низшего предела, равного $(2\mu)^2$.

$\pi N \rightarrow \pi N$. Диаграмма, соответствующая двухчастичному промежуточному состоянию в s -канале, изображена на рис. 18.8, в. Ее вид с точки зрения t -канала представлен на рис. 18.8, г. В этом случае ближайшим возможным промежуточным состоянием диаграммы 18.8, г по переменной t будет также четыре π -мезона, хотя низшим допустимым промежуточным состоянием t -канала является двухмезонное состояние.

Аналогичным образом найдем, что ближайшим промежуточным состоянием в u -канале по переменной t будет также четырехмезонное состояние, т. е. ближайшая особенность в u -канале по переменной t расположена при $t = (4\mu)^2$.

Ближайшие возможные промежуточные состояния по переменной u в s -канале и по переменной s в u -канале одинаковы и совпадают с низшим промежуточным состоянием в этих каналах, равным $(M + \mu)^2$.

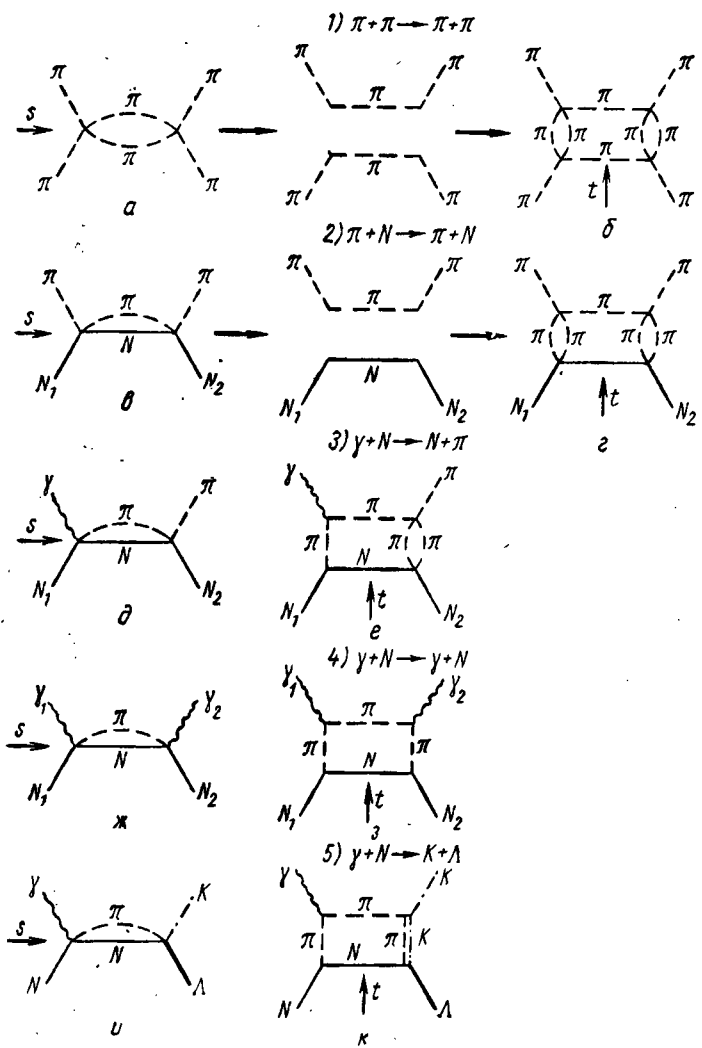


Рис. 18.8. Определение ближайшей особенности в t -канале, если особенность в s -канале задана, для процессов:

- 1) $\pi + \pi \rightarrow \pi + \pi$, 2) $\pi + N \rightarrow \pi + N$, 3) $\gamma + N \rightarrow N + \pi$, 4) $\gamma + N \rightarrow \gamma + N$, 5) $\gamma + N \rightarrow K + \Lambda$.

Наконец, ближайшими возможными промежуточными состояниями в t -канале по переменной s и u будут два мезона и нуклон, что соответствует особенностям при $s = (M + 2\mu)^2$ и $u = (M + 2\mu)^2$.

$\gamma + N \rightarrow N + \pi$. Диаграмма для двухчастичного промежуточного состояния в s -канале изображена на рис. 18.8, *д*, а соответствующая ей диаграмма по t -каналу — на рис. 18.8, *е*. Как видно, в этом случае возможное ближайшее промежуточное состояние диаграммы 18.8, *е* по переменной t состоит из трех π -мезонов, в то время как низшим допустимым промежуточным состоянием в t -канале является одномезонное состояние, т. е. ближайшая особенность в s -канале по переменной t лежит при $t = (3\mu)^2$.

Ближайшими возможными промежуточными состояниями в u -канале по переменной t будет три мезона, в u -канале по переменной s , в s -канале по переменной u , в t -канале по переменной s и u — мезон и нуклон.

$\gamma + N \rightarrow \gamma + N$. Как видно из диаграмм (рис. 18.8, *ж*, *з*), ближайшие возможные промежуточные состояния в s - и u -каналах по переменной t состоят из двух π -мезонов; в u -канале по переменной s , в s -канале по переменной u , в t -канале по переменной s и u — из мезона и нуклона.

$\gamma + N \rightarrow K + \Lambda$. Из диаграмм (рис. 18.8, *и*, *к*) видно, что возможными ближайшими промежуточными состояниями в s - и u -каналах по переменной t являются два π -мезона и K -мезон, в t -канале по переменной s и u — два π -мезона и нуклон, в u -канале по переменной s — мезон и гиперон, в s -канале по переменной u — мезон и нуклон. Подчеркнем, что в отличие от предыдущих примеров, в данном случае ближайшие возможные промежуточные состояния лежат в нефизической области процесса (ниже его порога).

Характерным для всех рассмотренных процессов является то, что некоторые пары из трех переменных s , u , t не могут достигать одновременно их низшего предела. Именно это обстоятельство можно использовать для сведения двойных дисперсионных соотношений к одномерным.

Рассеяние нейтральных π -мезонов на π -мезонах

Двойные дисперсионные соотношения для инвариантной функции $T(s, u, t)$, если учесть установленные нижние пределы интегрирования, выглядят так:

$$\begin{aligned}
 T(s, u, t) = & \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \int_{16\mu^2}^{\infty} du' \frac{\rho_{12}(s', u', t)}{(s' - s - i\epsilon)(u' - u - i\epsilon)} + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} du' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\rho_{23}(u', t', s)}{(u' - u - i\epsilon)(t' - t - i\epsilon)} + \\
 & + \frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} ds' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t', u)}{(s' - s - i\epsilon)(t' - t - i\epsilon)}. \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

Так как амплитуда рассеяния симметрична относительно замены любой пары переменных s, u, t , то все три спектральные функции $\rho_{12}, \rho_{13}, \rho_{23}$ равны

$$\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = \rho_0.$$

До тех пор пока $t < 16\mu^2$, знаменатель выражения $1/(t' - t)$ не обращается в нуль, т. е. для $t < 16\mu^2$ подынтегральные выражения являются аналитической функцией по t , поэтому по t можно произвести интегрирование:

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{4\mu^2}^{\infty} du' \int_{16\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\rho(u', s, t')}{(u' - u - i\varepsilon)(t' - t - i\varepsilon)} = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} du' \frac{\rho_0(u')}{u' - u - i\varepsilon}.$$

После аналогичных интегрирований по s и u в двух оставшихся слагаемых двойные дисперсионные соотношения (2.1) сведутся к следующим одномерным:

$$T(s, u, t) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)}{x - s - i\varepsilon} dx + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)}{x - u - i\varepsilon} dx + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x)}{x - t - i\varepsilon} dx. \quad (2.2)$$

Эти соотношения применимы до тех пор, пока $|s|, |u|, |t| < 16\mu^2$, т. е. лишь в физических областях всех трех каналов, вплоть до порога рождения двух π -мезонов.

Вещественная функция ρ_0 неизвестна. Для ее определения подставим в (2.2) значения s, u, t в с. п. м.:

$$s = 4(k^2 + \mu^2) = 4(\nu + \mu^2); \quad u = -2k^2(1 - \cos \theta) = -2\nu(1 - \cos \theta);$$

$$t = -2k^2(1 + \cos \theta) = -2\nu(1 + \cos \theta).$$

Это дает

$$F(\nu, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x) dx}{x - 4\mu^2 - 4\nu - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x) dx}{x + 2\nu(1 - \cos \theta) - i\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{\rho_0(x) dx}{x + 2\nu(1 + \cos \theta) - i\varepsilon}. \quad (2.3)$$

В физической области первого канала в нуль обращается лишь знаменатель в первом интеграле, поэтому

$$F(\nu, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dx \frac{\rho_0(x)}{x - 4\mu^2 - 4\nu - i\varepsilon} + \left\{ \begin{array}{l} \text{члены, с не обращающимися} \\ \text{в нуль знаменателями} \\ \text{при } \nu > 0. \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

С помощью формулы

$$\frac{1}{\nu' - \nu - i\varepsilon} = \frac{\mathcal{P}}{\nu' - \nu} + i\pi\delta(\nu' - \nu) \quad (2.5)$$

и замены переменной интегрирования $\nu' = \frac{1}{4}(x - 4\mu^2)$ первый член выражения (2.4) переписывается так:

$$\operatorname{Re} F(\nu, \theta) + i \operatorname{Im} F(\nu, \theta) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\rho_0(\nu') d\nu'}{\nu' - \nu} + i\rho_0(\nu).$$

Приравнявая члены, имеющие множитель i , находим

$$\rho_0(\nu) = \operatorname{Im} F(\nu, \theta), \quad (2.6)$$

т. е. неизвестная функция $\rho_0(\nu)$ равна абсорбтивной части амплитуды прямого канала.

С учетом (2.6) одномерные дисперсионные соотношения (2.2) запишутся так:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(\nu, \theta) = & \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\nu' \frac{\operatorname{Im} F(\nu', \theta)}{\nu' - \nu - i\varepsilon} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} d\nu' \frac{\operatorname{Im} F(\nu', \theta)}{4\nu' + 4\mu^2 + 2\nu(1 - \cos \theta)} + \\ & + \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} d\nu' \frac{\operatorname{Im} F(\nu', \theta)}{4\nu' + 4\mu^2 + 2\nu(1 + \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

В отличие от одномерных дисперсионных соотношений, соотношения (2.7) содержат дополнительный член, соответствующий вкладу третьего канала в первый.

Появление дополнительного члена в (2.7) является вполне естественным, так как исходные двойные дисперсионные соотношения записаны для аналитической функции, единой для всех трех каналов.

Фотообразование π -мезонов на нуклонах

Заменяя в (1.3) и (1.4) переменную s и u переменной t и подставляя полученные выражения в (1.2), получаем выражение для двойных дисперсионных соотношений в виде (опуская $i\varepsilon$ в знаменателе)

$$T_i^j(s, u, t) = \dot{T}_i + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{1}{s'-s} \times \\ \times \frac{1}{\pi} \left[\int_{i_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{13}(s', t')}{t'-t} - \int_{i_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{12}(s', t')}{t'-t} \right] + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \frac{1}{u'-u} \cdot \frac{1}{\pi} \left[\int_{i_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{23}(u', t')}{t'-t} - \int_{i_0}^{\infty} dt' \frac{\rho_{12}(u', t')}{t'-t} \right]. \quad (2.8)$$

Разобьем интегрирование по s и u в (2.8) на два интервала (рис. 18.9) от $(M+\mu)^2$ и от $(M+2\mu)^2$:

$$T_i^j(s, u, t) = \dot{T}_i + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \{1\} + \frac{1}{\pi} \int_{(M+2\mu)^2}^{\infty} \{1\} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} \{2\} + \frac{1}{\pi} \int_{(M+2\mu)^2}^{\infty} \{2\}. \quad (2.9)$$

Так как для $s = (M+\mu)^2$ ближайшим возможным значением является $t = (3\mu)^2$, то, пока $t < 9\mu^2$, в первом и третьем интеграле в (2.9) можно произвести интегрирование по t , что приведет к следующему результату:

$$\frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{f_1}{s'-s} + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \frac{f_2}{u'-u}.$$

Пока $s, u < (M+2\mu)^2$, можно произвести интегрирование по s и u во втором и четвертом интегралах (2.9), что дает

$$\frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} \frac{f_3(t')}{t'-t} dt'.$$

Следовательно, двойные дисперсионные соотношения (2.9) для функции $T_i^j(s, u, t)$ сводятся к следующим одномерным:

$$T_i^j(s, u, t) = \dot{T}_i + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{f_1(s')}{s'-s} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} du' \frac{f_2(u')}{u'-u} + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{f_3(t')}{t'-t}. \quad (2.10)$$

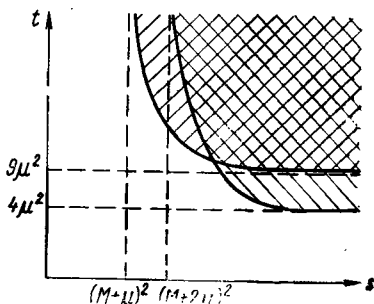


Рис. 18.9. Области интегрирования по переменным s и u для процесса $\gamma + N \rightarrow N + \pi$ при сведении двойных дисперсионных соотношений к одномерным.

Эти соотношения применимы для $|t| < 9\mu^2$ и $4\mu^2$, $|s|, |u| < (M + 2\mu)^2$ или $|s - M^2|, |u - M^2| \lesssim 4M\mu$, т. е. в физической области прямого и перекрестного процессов и в нефизической области аннигиляционного канала.

Подставляя в (2.10) формулы для s, u, t в первом канале, получаем

$$T_i^I(s, u, t) = \\ = \overset{\circ}{T}_i^I + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{f_1(s', t)}{s' - W^2 - i\epsilon} + \left\{ \begin{array}{l} \text{члены, знаменатели которых} \\ \text{не обращаются в нуль в фи-} \\ \text{зической области первой} \\ \text{реакции.} \end{array} \right\} \quad (2.11)$$

Отсюда, используя (2.5), находим, что неизвестная функция $f_1(s, t)$ равна абсорбтивной части амплитуды первого канала:

$$f_1(s, t) = \{\text{Im } T_i^I(s, u, t)\}_I, \quad (2.12)$$

причем $\{\text{Im } T\}_I$ с помощью условия унитарности выражаются через полные амплитуды процессов фотообразования и рассеяния π -мезонов на нуклонах.

Аналогичным образом, подставляя в (2.11) выражения для s, u, t в третьем канале, находим, что функция $f_3(t)$ равна абсорбтивной части амплитуды третьего канала

$$f_3(t) = \{\text{Im } T_i^I(t, s, u)\}_{III}, \quad (2.13)$$

при этом $\{\text{Im } T\}_{III}$ выражается через полные амплитуды аннигиляции нуклонной пары на два π -мезона и фотообразования π -мезонов на π -мезонах. Если учесть (2.12) и (2.13), то (2.10) переписывается следующим образом:

$$T_i^I(s, u, t) = \overset{\circ}{T}_i^I + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \{\text{Im } T_i^I(s', t)\}_I \left[\frac{1}{s' - s} + \eta_i^I \frac{1}{s' - u} \right] + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{4\mu^2}^{\infty} dt' \frac{\{\text{Im } T_i^I(t', s)\}_{III}}{t' - t}. \quad (2.14)$$

Полученные дисперсионные соотношения отличаются от (2.1), гл. 17 наличием дополнительных членов, учитывающих вклад реакции $N\bar{N} \rightarrow \pi\gamma$ в процесс $\gamma N \rightarrow N\pi$.

Запишем двойные дисперсионные соотношения без вычитаний для функций $T_i(s, t)$ комптон-эффекта в виде (2.8).

В § 1 было найдено, что ближайшие особенности s - и u -каналов по переменной t расположены при $t_0 = (2\mu)^2$. На самом деле из условия сходимости разложений абсорбтивных частей, входящих в (2.8), по полиномам Лежандра следует, что ближайшая особенность по переменной t расположена при $t_0 \simeq 12\mu^2$. Поэтому пока $t > -12\mu^2$ в (2.8), можно произвести интегрирование по t , и тогда двойные дисперсионные соотношения сведутся к следующим одномерным:

$$T_i(s, t) = \overset{\circ}{T}_i + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' f(s', t) \left[\frac{1}{s' - s} + \eta_i \frac{1}{s' - u} \right]. \quad (2.15)$$

Подчеркнем, что в этом выражении никаких ограничений на s и u не накладывается. Подставляя в (2.15) значение s, u, t для прямого канала, находим

$$f(s, t) = \text{Im } T_i(s, t),$$

причем с помощью условия унитарности $\text{Im } T_i(s, t)$ выражается через сумму квадратов модулей амплитуд фотообразования одного, двух и т. п. мезонов на протоне:

$$\begin{aligned} \text{Im } T_i(s, t) &\sim \langle \gamma_2 p_2 | \pi N \rangle \langle \pi N | \gamma_1 p_1 \rangle + \\ &+ \langle \gamma_2 p_2 | \pi \pi N \rangle \langle \pi \pi N | \gamma_1 p_1 \rangle + \dots \end{aligned}$$

Для нечетных инвариантных функций T_1, T_3, T_5 и T_6 необходимо использовать дисперсионные соотношения с одним вычитанием (см. гл. 17, § 3). Эти соотношения содержат неизвестные вычитательные функции. Их можно определить с помощью двойных дисперсионных соотношений следующим образом. Двойные дисперсионные соотношения (1.1') для функций $T_i(s, u, t)$ с одним вычитанием по s, u и t сводятся к следующим одномерным дисперсионным соотношениям по переменным s и u при фиксированном t :

$$\begin{aligned} T_i(s, t) = \overset{\circ}{T}'_i + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \text{Im } T_i(s', t) &\left[\frac{s - s_0}{(s' - s_0)(s' - s)} + \right. \\ &\left. + \frac{u - u_0}{(s' - u_0)(s' - u)} \right] + T_i(s_0, u_0, t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь

$$\hat{T}_i' = R_i^0 \left[\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right] - R_i^0 \left[\frac{1}{M^2 - s_0} + \frac{1}{M^2 - u_0} \right],$$

$T_i(s_0, t)$ — вычитательные функции.

Наряду с этим из двойных дисперсионных соотношений (1.1') можно получить одномерные дисперсионные соотношения по t при фиксированных s и u с вычитанием в точке $t_0 = 0$:

$$T_i(s_0, t) = T_i(s_0, 0) + r_i^\pi \frac{t}{\mu_\pi^2 (\mu_\pi^2 - t)} + \\ + \frac{t}{\pi} \left[\int_{4\mu_\pi^2}^{\infty} dz \frac{\text{Im } T_i^{\text{III}}(s_0, z)}{z(z-t)} - \int_{-\infty}^{z_0} dz \frac{\text{Im } T_i^{\text{III}}(s_0, z)}{z(z-t)} \right], \quad (2.17)$$

где $\text{Im } T_i^{\text{III}}(s_0, t)$ — абсорбтивная часть функций третьего канала; r_i — вычеты в полюсе по третьему каналу, соответствующие л-мезону, $z = \cos \theta$.

Представим $T_i(s_0, u_0, t)$ в виде

$$T_i(s_0, u_0, 0) = R_i^0 \left(\frac{1}{M^2 - s_0} + \frac{1}{M^2 - u_0} \right) + F_i(s_0, u_0, 0), \quad (2.18)$$

где $F(s_0, u_0, 0)$ — аналитическая функция s_0 и u_0 .

Подставляя (2.17) и (2.18) в (2.16), получаем

$$T_i(s, t) = R_i^0 \left[\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right] + r_i^\pi \frac{t}{\mu_\pi^2 (\mu_\pi^2 - t)} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \text{Im } T_i(s', t) \left[\frac{s - s_0}{(s' - s)(s' - s_0)} + \right. \\ \left. + \frac{u - u_0}{(s' - u_0)(s' - u)} \right] + \frac{t}{\pi} \left[\int_{4\mu_\pi^2}^{\infty} dz \frac{\text{Im } T_i^{\text{III}}(s_0, z)}{z(z-t)} - \int_{-\infty}^{z_0} dz \frac{\text{Im } T_i^{\text{III}}(s_0, z)}{z(z-t)} \right] + \\ + F_i(s_0, u_0, 0).$$

Устремим s_0 и u_0 к M^2 . Тогда функции $F_i(s_0 = M^2, u_0 = M^2, 0)$ будут равны низкоэнергетическому пределу функций T_i :

$$T_1(M^2, 0) = 0; \quad T_5(M^2, 0) = \frac{e^2}{2M} \mu_p' (2 + \mu_p');$$

$$T_3(M^2, 0) = \frac{e^2}{M} \mu_p' (2 + \mu_p'); \quad T_6(M^2, 0) = \frac{e^2}{2M^2} \mu_p'.$$

Следовательно, окончательные дисперсионные соотношения для функций $T_i(s, u, t)$ комптон-эффекта сведутся к следующим одномерным соотношениям по s (при фиксированном t): для $i = 2, 4$

$$\operatorname{Re} T_i(s, t) = R_i^0 \left[\frac{1}{M^2 - s} - \frac{1}{M^2 - u} \right] + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \operatorname{Im} T_i(s', t) \times \\ \times \left[\frac{1}{s' - s} - \frac{1}{s' - u} \right];$$

для $i = 1, 3, 5, 6$

$$\operatorname{Re} T_i(s, t) = R_i^0 \left[\frac{1}{M^2 - s} + \frac{1}{M^2 - u} \right] + r_i^{\pi} \frac{t}{\mu_{\pi}^2 (\mu_{\pi}^2 - t)} + \\ + T_i(M^2, 0) + \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds' \frac{\operatorname{Im} T_i(s', t)}{M^2 - s'} \left[\frac{s - M^2}{s' - s} + \right. \\ \left. + \frac{u - M^2}{s' - u} \right] + \frac{t}{\pi} \left[\int_{4\mu^2}^{\infty} dz \frac{\operatorname{Im} T_i^{\text{III}}(M^2, z)}{z(z-t)} - \int_{-\infty}^{z_0} dz \frac{\operatorname{Im} T_i^{\text{III}}(M^2, z)}{z(z-t)} \right].$$

В последнем выражении слагаемые описывают вклад: 1) полюсных членов по всем трем каналам, 2) низкоэнергетического предела, 3) интегральных членов, соответствующих первому и второму каналам, 4) вычитательного интегрального члена.

Характерной особенностью одномерных дисперсионных соотношений, полученных из двойных, является наличие члена, характеризующего вклад третьего процесса в основной процесс. Тем самым становится возможным учет вклада третьего канала в первый канал.

§ 3. Учет вклада третьего канала

В качестве примера оценим вклад процесса аннигиляции нуклонной пары $N\bar{N} \rightarrow \pi\gamma$ в процесс фотообразования π -мезонов на нуклонах $\gamma N \rightarrow \pi N$. Ограничимся в условии унитарности

$$\operatorname{Im} \langle \gamma\pi | N\bar{N} \rangle = \langle \gamma\pi | \pi\pi \rangle \langle \pi\pi | N\bar{N} \rangle + \\ + \langle \gamma\pi | \pi\pi\pi \rangle \langle \pi\pi\pi | N\bar{N} \rangle + \dots \quad (3.1)$$

двухмезонным приближением. В этом случае отличной от нуля будет лишь изовекторная часть амплитуды процесса. Предположим также, что $\pi\pi$ -систему можно аппроксимировать с помощью ρ -мезона.

Условие унитарности (3.1) для парциальных амплитуд запишется следующим образом:

$$\text{Im } T_J(N\bar{N} \rightarrow \pi\gamma) \sim T_J(N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) T_J(\pi\pi \rightarrow \pi\gamma), \quad (3.2)$$

т. е. для определения парциальных амплитуд процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\gamma$ надо знать парциальные амплитуды процессов $\pi\pi \rightarrow \pi\gamma$ и $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ для $J = 1$.

Парциальные амплитуды процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ можно выразить (рис. 18.10) через изовекторные форм-факторы нуклона и форм-фактор ρ -мезона F_ρ , который

можно представить в виде (рис. 18.11):

$$F_\rho = \frac{\gamma + t_R}{t_R - t - i\gamma q^2}, \quad (3.3)$$

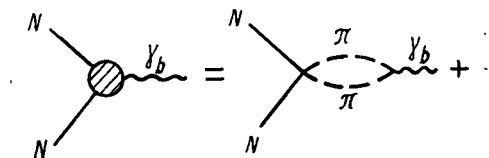


Рис. 18.10. Условие унитарности для вершины $N \rightarrow N + \gamma$.

где $q = \sqrt{\frac{t}{4} - 1}$ — импульс промежуточного мезона; t_R — местоположение ρ -резонанса; $\Gamma = \gamma q^2$; Γ — ширина ρ -резонанса.

Парциальные амплитуды процесса $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ можно найти, решив соответствующее интегральное уравнение. Решение запишется в виде произведения функции, зависящей от t , на амплитуду ρ -рассеяния, которую можно представить в виде (3.3). В решение войдет также неизвестная константа $g_{\gamma\rho\rho}$, характеризующая $\pi\rho$ -взаимодействие.

Подставляя парциальные амплитуды процессов $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ и $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ в (3.2), получаем выражение для мнимой части парциальной амплитуды процесса $N\bar{N} \rightarrow \pi\gamma$, содержащее два параметра t_R и γ и неизвестную константу взаимодействия $g_{\gamma\rho\rho}$. Возьмем для t_R и γ значения, соответствующие ρ -мезону, и положим $g_{\gamma\rho\rho} = 1$. Тогда, имея в виду (2.14), можно вычислить добавки к парциальным амплитудам процесса $\gamma N \rightarrow N\pi$, обусловленные процессом $N\bar{N} \rightarrow \pi\gamma$. Как показывают расчеты, эти добавки составляют $\sim 10\%$.

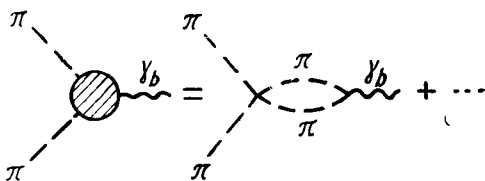


Рис. 18.11. Условие унитарности для вершины $\pi \rightarrow \pi + \gamma$.

§ 4. Аналитические свойства парциальных амплитуд

Парциальные амплитуды $F_i(W)$ процесса можно выразить (см. гл. 7, § 4, 5) через инвариантные функции $T_i(s, u, t)$.

Используя для функций $T_i(s, u, t)$ формулу (1.1), находим выражения для парциальных амплитуд через двойные дисперсионные интегралы. С помощью этого выражения можно исследовать аналитические свойства парциальных амплитуд. Зная последние, можно написать дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд. Такие дисперсионные соотношения будут зависеть от одной переменной, так как парциальные амплитуды являются функцией одной переменной.

Рассмотрим, например, парциальную амплитуду E_{0+} фоторождения π -мезонов на нуклонах. Она выражается через инвариантные функции $T_i(s, u, t)$ того же процесса следующим образом:

$$E_{0+}(W) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d \cos \theta [F'_1(W, \cos \theta) - \cos \theta F'_2(W, \cos \theta)], \quad (4.1)$$

где, согласно (5.3), гл. 7,

$$F'_1(W, \cos \theta) = (W - M) T_4 + \frac{2 M v_1}{W - M} (T_3 - T_4) + T_1;$$

$$F'_2(W, \cos \theta) = (W + M) T_4 + \frac{2 M v_1}{W + M} (T_3 - T_4) - T_1. \quad (4.2)$$

Подставив в (4.2) формулу (1.1) и полученный результат — в (4.1), получим выражение для парциальных амплитуд через интегралы, содержащие выражения

$$\frac{1}{s' - s}, \quad \frac{1}{u' - u} \quad \text{и} \quad \frac{1}{t' - t}.$$

Найдем особенности E_{0+} в комплексной плоскости s .

Обращение в нуль знаменателей, содержащих $s' - s$, дает ряд точек ветвления на положительной реальной оси s ; крайняя левая из них появляется при $s = (M + \mu^2)$ (рис. 18.12). Обращение в нуль знаменателя $u' - u$ дает, если положить $\cos \theta = 1$

$$u' - u = u' - 2M^2 - \mu^2 + s + t = u' - 2M^2 - \mu^2 + s$$

или

$$s^2 u' + s (u'^2 + M^2 \mu^2 - M^4 - u' \mu^2 - 2u' M^2) + M^2 (-u' M + 2M^4 + u' \mu^2 - M^2 \mu^2) = 0. \quad (4.3)$$

Аналогичным образом найдем для $t' - t = 0$

$$s^2 + s (t' - M^2 - \mu^2) + \frac{1}{t'} \mu^4 M^2 + M^4 - \mu^2 M^2 = 0. \quad (4.4)$$

Полагая в (4.3) и (4.4) $u' = M^2$ и $t' = \mu^2$, находим особенности в плоскости s , обусловленные полюсными членами второго и третьего каналов; эти особенности лежат на реальной оси в точке $s = M^2$ (см. рис. 18.12). Для $\mu^2 < t' < 4M^2$ особенности, определяемые (4.4), лежат в комплексной плоскости переменного s (см. рис. 18.12, окружность C), а для $t' > 4M^2$ — на реальной оси s в интервале от $-M^2$ до $-\infty$.

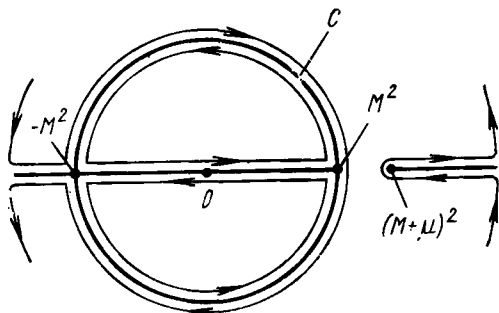


Рис. 18.12. Особенности парциальных амплитуд процесса $\gamma + N \rightarrow N + \pi$ в плоскости s .

Если $u' \geq (M + \mu)^2$, то особенности, определяемые уравнением (4.3), лежат на реальной оси s в интервале от M^2 до $-\infty$ (см. рис. 18.12).

В случае $\cos \theta = 0$ вместо уравнений (4.3) и (4.4) получим

$$s^2 + 2 \left(u' - M^2 - \frac{\mu^2}{2} \right) s - M^4 + M^2 \mu^2 = 0$$

и

$$s^2 + 2 \left(t' - M^2 - \frac{\mu^2}{2} \right) s + M^4 - M^2 \mu^2 = 0.$$

Эти уравнения приводят к особенностям, которые перекрываются с ранее найденными.

Таким образом, парциальная амплитуда E_{0+} является аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного s за исключением линии разреза вдоль вещественной оси от $(M + \mu)^2$ до ∞ и от M^2 до $-\infty$, а также дуги окружности C . У других парциальных амплитуд будут те же особенности.

Так как аналитические свойства парциальных амплитуд выяснены, то в принципе для них можно написать одномерные дисперсионные соотношения. Однако из-за особенностей, лежащих в комплексной плоскости, работа с этими соотношениями усложняется.

Заметим, что такие особенности появляются не всегда; например, особенности парциальных амплитуд процесса $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -рассеяния лежат только на вещественной оси. Для этих парциальных амплитуд одномерные дисперсионные соотношения не содержат контуров, лежащих в комплексной плоскости.

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ МОМЕНТОВ

До сих пор мы рассматривали процессы с участием частиц сравнительно небольших энергий ($\lesssim 1$ Гэв). В настоящее время ведется интенсивное экспериментальное изучение реакций при более высоких энергиях. В связи с этим представляют интерес теоретические методы, специально приспособленные для анализа процессов при больших энергиях.

Остановимся на одном из таких методов, получившем название метода комплексных моментов, или метода Редже.

§ 1. Асимптотическое выражение для амплитуды процесса в случае бесспиновых частиц

Постановка задачи. Рассмотрим реакцию

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4, \quad (1.1)$$

предполагая сначала для простоты, что спины частиц равны нулю и их массы одинаковы и равны m . Амплитуда $F(s, t)$ такого процесса в s -канале в с. ц. м., разложенная по парциальным волнам $F_l(s)$, выглядит так [см. формулу (1.10), гл. 8]:

$$F(s, t) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(s) (2l+1) P_l(\cos \theta_s), \quad (1.2)$$

где

$$s = 4E_1^2; \quad (1.3)$$

$$t = -2k_1^2(1 - \cos \theta_s), \quad (1.4)$$

E_1, k_1, θ_s — энергия, импульс и угол рассеяния налетающей частицы в с. ц. м. s -канала. Из (1.3) и (1.4) следует, что в физической области s -канала $s > 0$ и $t < 0$.

Амплитуда того же процесса (1.1) в третьем канале запишется следующим образом:

$$F(t, \theta_t) = \sum_{l=0}^{\infty} F_l(t) (2l+1) P_l(\cos \theta_t), \quad (1.5)$$

где

$$t = 4E^2; \quad (1.6)$$

$$s = -2k^2(1 - \cos \theta_t); \quad (1.7)$$

E, k, θ_t — энергия, импульс и угол рассеяния налетающей частицы в с. ц. м. в t -канале, причем

$$k^2 = \frac{1}{4} (t - 4m^2); \quad (1.8)$$

$$\cos \theta_t = 1 + \frac{2s}{t - 4m^2}. \quad (1.9)$$

Из (1.6) и (1.7) следует, что в физической области третьего канала $t > 0$ и $s < 0$.

Предположим, как и в случае двойных дисперсионных соотношений (см. гл. 18), что амплитуды различных каналов, в частности прямого и третьего, являются единой аналитической функцией переменных s, u, t . В этом случае амплитуду одного канала можно аналитически продолжить в другой канал. Иначе говоря, в этом случае одна и та же функция $F(s, t)$ будет амплитудой как прямого (когда $s > 0, t < 0$), так и третьего каналов (когда $t > 0, s < 0$). При этом энергия s первого канала, согласно (1.9), связана просто с углом рассеяния в третьем канале.

Поставим следующую задачу: найти выражение амплитуды (1.2) в первом канале при больших энергиях ($s \rightarrow \infty$) и малых углах ($t/s \rightarrow 0$). Из (1.9) следует, что эта задача соответствует следующей: найти выражение для амплитуды в t -канале при $\cos \theta_t \rightarrow \infty$. Другими словами, выражению для амплитуды первого канала при $s \rightarrow \infty$ соответствует выражение амплитуды третьего канала при $\cos \theta_t \rightarrow \infty$.

Найдем сначала асимптотическое ($\cos \theta_t \rightarrow \infty$) выражение для амплитуды t -канала. Легко убедиться, что для этой цели нельзя использовать непосредственно выражение (1.5) для амплитуды t -канала. В самом деле, асимптотическое выражение полиномов Лежандра (при $\cos \theta \rightarrow \infty$) выглядит так:

$$P_l(\cos \theta) \approx \frac{\Gamma(2l+1)}{2^l \Gamma^2(l+1)} \cos^l \theta. \quad (1.10)$$

Подставим это выражение в (1.5) и предположим, что парциальные амплитуды $F_l(t)$ в (1.5) убывают с ростом l не быстрее экспоненты. Тогда при $|\cos \theta_t| < 1$ члены ряда (1.5) убывают; в противном случае $|\cos \theta_t| > 1$ всегда найдутся столь большие $\cos \theta_t$, что члены ряда (1.5) будут расти с увеличением l .

Преобразование Зоммерфельда — Ватсона. Чтобы найти асимптотическое выражение для амплитуды (1.5) третьего канала, запишем ее в другой эквивалентной форме. Для этого допустим, что l являются не вещественными, а комплексными числами α . Тогда парциальные амплитуды $F_l(t)$ станут функциями комплексного углового момента $\alpha: F(\alpha, t)$ и в (1.5) можно заменить сумму по дискретным вещественным значениям l интегралом по некоторому контуру в плоскости комплексных угловых моментов α .

Это делается так. Поскольку в (1.5) сумма по l берется по дискретным вещественным точкам $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, то каждый член суммы можно заменить интегралом по маленькому контуру C_l (рис. 19.1, а), вокруг соответствующей точки l , лежащему в плоскости комплексного α :

$$F(t, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) F_l(t) P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_l} \frac{\pi (-1)^2 F(\alpha, t)}{\sin \pi \alpha} (2\alpha+1) P_\alpha(\cos \theta) d\alpha. \quad (1.11)$$

Действительно, подынтегральная функция при целых вещественных $\alpha = l$, когда $\sin \pi l$ обращается в нуль, имеет полюсы. Заменяем $\sin \pi \alpha$ его разложением около полюса l :

$$\sin \pi \alpha \sim \sin \pi l + \pi (\alpha - l) \cos \pi l = \pi (-1)^l (\alpha - l).$$

Тогда, согласно формуле (4.14), гл. 15, интеграл в (1.11) сведется к сумме вычетов, причем вычет при $1/(\alpha - l)$ равен l -му члену ряда

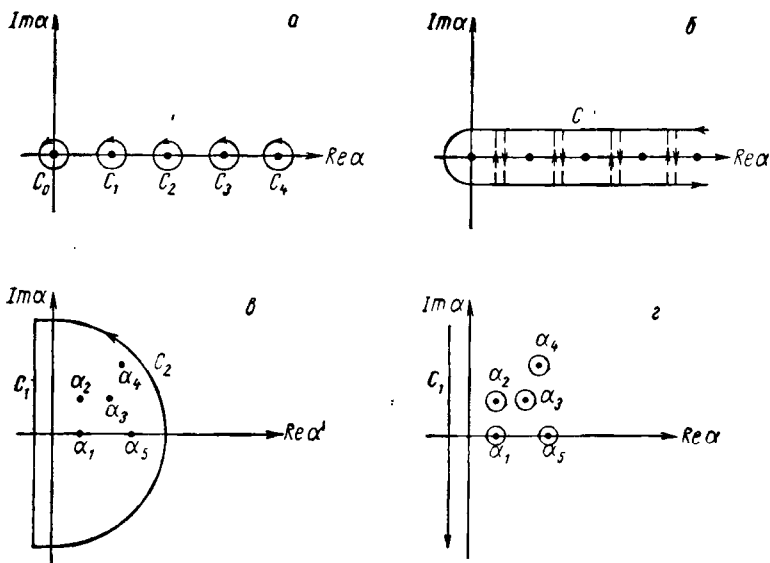


Рис. 19.1. Деформация контура интегрирования при получении асимптотического выражения для амплитуды.

(1.5). Так как интегралы по вертикальным контурам рис. 19.1, а попарно сокращаются, то, заменив в (1.11) сумму по контурам одним контуром C (см. рис. 19.1, б), получим следующий интеграл

по комплексному α (если предположить, что $F(\alpha, t)$ не имеет полюсов на вещественной оси):

$$F(t, \theta_t) = \frac{1}{2i} \int_C \frac{e^{-i\alpha t} F(\alpha, t) (2\alpha + 1) P_\alpha(\cos \theta_t)}{\sin \pi \alpha} d\alpha, \quad (1.12)$$

так как $(-1)^\alpha = e^{-i\pi\alpha}$.

Тем самым мы нашли выражение для амплитуды третьего канала процесса (1.1) в виде интеграла по контуру в плоскости комплексного углового момента α . Интеграл (1.12) по-прежнему расходуется при больших значениях $\cos \theta_t$.

Преобразуем контур C так, чтобы интеграл (1.12) имел смысл при любых $\cos \theta_t$ (такое преобразование называется преобразованием Зоммерфельда — Ватсона). Для этого исследуем аналитические свойства (1.12) по переменной α . Они определяются аналитическими свойствами функций $F(\alpha, t)$ и $P_\alpha(\cos \theta_t)$ комплексного переменного α .

Функция $(\sin \pi \alpha)^{-1} P_\alpha(\cos \theta_t)$ не имеет комплексных особенностей в конечной плоскости α [полином $P_\alpha(\cos \theta_t)$ обладает особенностью при $\alpha \rightarrow \infty$].

Сигнатура. Остановимся подробнее на аналитических свойствах парциальных амплитуд $F(\alpha, t)$ по переменной α . Прежде всего покажем, что эти амплитуды растут неограниченно при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Для этого найдем выражение для парциальных амплитуд $F(\alpha, t)$, предположив, что для них можно написать одномерные дисперсионные соотношения.

Рассмотрим сначала случай вещественных l . Из (1.5) следует, что

$$F_l(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\cos \theta_t) F(t, \theta_t) d(\cos \theta_t). \quad (1.13)$$

С другой стороны, дисперсионные соотношения для $F(t, \theta_t)$ по $\cos \theta_t$ при фиксированном t запишутся, если ввести обозначение $x = \cos \theta_t$, так:

$$F(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx' A_1(x', t)}{x' - x} + \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx' A_2(x', t)}{x' + x}, \quad (1.14)$$

где $A_1(x, t)$ и $A_2(x, t)$ — абсорбтивные части функции $F(t, x)$ в прямом и перекрестном каналах; x связано с s формулой (1.9); первый интеграл берется по правому разрезу (где $s > 0$, $x > 0$), а во второй — по левому (где $s < 0$ и $x < 0$); $x_0 = 1 + \frac{8 m^2}{t - 4 m^2}$.

Подставим (1.14) в (1.13). Имея в виду соотношения, связывающие полиномы Лежандра $P_l(x)$ с функциями Лежандра второго рода $Q_l(x)$ для целых l

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) dx}{x' - x} = Q_l(x'),$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x) dx}{x' + x} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(-x) dx}{x' - x} = (-1)^l Q_l(x'),$$

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x),$$

получаем вместо (1.13) следующие выражения для парциальных амплитуд $F_l(t)$ третьего канала:

$$F_l(t) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} Q_l(x') A_1(x') dx' + (-1)^l \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} Q_l(x') A_2(x') dx'. \quad (1.15)$$

В случае комплексных α при $\alpha \rightarrow \infty$ полиномы $Q_\alpha(x) \sim \exp [(-\operatorname{Re} \alpha - i \operatorname{Im} \alpha) \operatorname{ar} \operatorname{ch} x]$, т. е. при $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{const}$ полиномы $Q_\alpha(x)$ осциллируют. Множитель $(-1)^l$ переходит в функцию $(-1)^\alpha = e^{i\pi\alpha}$, которая становится неограниченной при $\operatorname{Im} \alpha \rightarrow -\infty$. Поэтому если в (1.15) произвести замену вещественных l на комплексные α , то второе слагаемое, а следовательно, и функции $F(\alpha, t)$ при $\alpha \rightarrow \infty$ становятся бесконечными. Чтобы получить ограниченные парциальные амплитуды, введем две функции: симметричную $F^+(\alpha, t)$, совпадающую с $F_l(t)$ при l четном (когда $(-1)^l = +1$), и антисимметричную $F^-(\alpha, t)$, равную $F_l(t)$ при нечетном l (когда $(-1)^l = -1$):

$$F^{(\sigma)}(\alpha, t) = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} Q_\alpha(x') A_1(x') dx' + \sigma \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{\infty} Q_\alpha(x') A_2(x') dx',$$

где $\sigma = \pm 1$. Как видно, у $F^+(\alpha, t)$ и $F^-(\alpha, t)$ множитель $e^{i\pi\alpha}$ отсутствует, поэтому функции $F^+(\alpha, t)$ и $F^-(\alpha, t)$ экспоненциально убывают при $|\alpha| \rightarrow \infty$: $F^\pm(\alpha, t) \sim \exp(-\alpha \operatorname{ar} \operatorname{ch} x_0)$.

Следовательно, нельзя построить единую аналитическую функцию $F(\alpha, t)$, убывающую при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Этому требованию удовлетворяют лишь отдельно симметричная $F^+(\alpha, t)$ и антисимметричная $F^-(\alpha, t)$ функции.

Зная парциальные амплитуды $F^\pm(\alpha, t)$, можно построить симметричную $F^+(t, x)$ и антисимметричную $F^-(t, x)$ амплитуды третьего канала:

$$F^+(t, x) = F(t, x) + F(t, -x); \quad F^-(t, x) = F(t, x) - F(t, -x).$$

Для этого надо в формуле (1.12) произвести следующие замены:

$$F(\alpha, t) \rightarrow F^{\pm}(\alpha, t).$$

$$P_{\alpha}(\cos \theta_i) \equiv P_{\alpha}(x) \rightarrow P_{\alpha}(x) \pm P_{\alpha}(-x) = P_{\alpha}(x) + \sigma P_{\alpha}(-x).$$

Тогда

$$F^{\pm}(t, x) = \frac{1}{2i} \int_C \frac{F^{\pm}(\alpha, t)(2\alpha+1)}{\sin \pi \alpha} [P_{\alpha}(-x) + \sigma P_{\alpha}(x)] d\alpha. \quad (1.16)$$

Таким образом, аналитическое продолжение амплитуды (1.5) в область комплексных моментов α при $|\alpha| \rightarrow \infty$ возможно лишь отдельно для функций $F^{+}(t, x)$ и $F^{-}(t, x)$. Величину σ в (1.16), принимающую значения ± 1 , называют сигнатурой. Если $\sigma = +1$, то сигнатура называется четной, если $\sigma = -1$, то — нечетной. Из определения $F^{+}(\alpha, t)$ и $F^{-}(\alpha, t)$ следует, что четная сигнатура соответствует четному $\alpha = l$, а нечетная сигнатура — нечетному $\alpha = l$.

Модель полюсов Редже. Итак, мы исследовали аналитические свойства парциальных амплитуд $F(\alpha, t)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Задача исследования особенностей парциальных амплитуд $F(\alpha, t)$ при произвольных α довольно сложна и в настоящее время еще не решена. Однако есть указания на то, что функция $F(\alpha, t)$ имеет в плоскости комплексного α не только полюсы, но и более сложные особенности (точки ветвления и даже существенно особые точки).

Сделаем существенное предположение — ограничимся учетом только простых полюсов парциальных амплитуд $F(\alpha, t)$ третьего канала (модель полюсов). Тогда функции $F^{\pm}(\alpha, t)$ можно представить в виде суммы полюсных членов:

$$F^{\pm}(\alpha, t) = \sum_i \frac{r_i^{\pm}(t)}{\alpha - \alpha_i(t)} + f^{\pm}(\alpha, t). \quad (1.17)$$

Здесь $\alpha_i(t)$ — полюс в плоскости комплексного α при данной энергии t , а $r_i^{\pm}(t) f^{\pm}(\alpha, t)$ — функции, не имеющие особенностей в правой полуплоскости α .

Как видно из (1.17), при изменении t положение полюсов $\alpha_i(t)$ изменяется; они движутся в комплексной плоскости α вдоль некоторых линий, которые получили название полюсных траекторий. При этом все возможные полюсные особенности и соответствующие им траектории можно разбить на два независимых класса: с четной ($\sigma = +1$) и нечетной ($\sigma = -1$) сигнатурой.

Рассмотрим такие значения t , которые меньше порога образования двух частиц в t -канале (для частиц с равными массами это соответствует $t < 4m^2$). Тогда полюсы лежат либо попарно в комплексно сопряженных точках плоскости α , либо на вещественной оси. В последнем случае вычеты будут вещественными. Модель, учитывающую только простые полюсы, лежащие на вещественной оси, называют моделью полюсов Редже.

Асимптотическое выражение для амплитуды t -канала. Найдем асимптотический вид выражения (1.16), т. е. его вид при больших значениях $x = \cos \theta_1$. Для этого используем аналитические свойства (1.16) по переменной x . Деформируем контур C так, как это показано на рис. 19.1, в. При $\alpha \rightarrow \infty$

$$P_\alpha(-x) + \sigma P_\alpha(x) \sim [\exp(-i\pi\alpha) + \sigma] \exp(\alpha \operatorname{arch} x),$$

$$F^\pm(\alpha, t) \sim \exp(-\alpha \operatorname{arch} x_0).$$

Если $x < x_0$, то при $\alpha \rightarrow \infty$ подынтегральное выражение $(2\alpha + 1) \exp[-\alpha(\operatorname{arch} x_0 - \operatorname{arch} x)] [\exp(-i\pi\alpha) + \sigma] (\sin \pi\alpha)^{-1}$ в (1.16) экспоненциально убывает, интеграл по полуокружности C_2 исчезает и остается интеграл J_{C_1} по контуру C_1 .

Интеграл J_{C_1} абсолютно сходится в области $\alpha \rightarrow \pm i\infty$ при любых комплексных x . Чтобы в этом убедиться, удобно представить x так: $x = \cos(\theta_1 + i\theta_2)$. Тогда при $\alpha \rightarrow \infty$ $P_\alpha(-x) + \sigma P_\alpha(x) \sim \exp\{\alpha[(i\theta_1 - \theta_2) - i\pi]\} + \sigma \exp[\alpha(i\theta_1 - \theta_2)]$ и подынтегральное выражение J_{C_1} принимает вид

$$(2\alpha + 1) \exp(-\alpha \operatorname{arch} x_0) \{ \exp \alpha(i\theta_1 - \theta_2 - i\pi) + \sigma \exp[\alpha(i\theta_1 - \theta_2)] - \exp i\pi\alpha - \exp(-i\pi\alpha) \}^{-1}.$$

В случае $0 < \theta_1 < \pi$, $\alpha = i|\alpha|$ и $|\alpha| \rightarrow \infty$ интеграл J_{C_1} экспоненциально убывает. В случае $\theta_1 = 0$ и $\theta_1 = \pi$ интеграл J_{C_1} конечен, так как при $\alpha \rightarrow \infty$ из-за осциллирующего множителя $\exp[\pm i|\alpha| \operatorname{arch} x_0 + \theta_2]$ в нем существуют не бесконечно большие α , а конечные — порядка $(\operatorname{arch} x_0 + \theta_2)^{-1}$.

Таким образом, J_{C_1} представляет собой аналитическую функцию любого комплексного x . Так как в области $x < |x_0|$ интеграл J_{C_1} совпадает с интегралом J_C по контуру C , то J_{C_1} есть аналитическое продолжение (см. гл. 15, § 4) J_C на любые значения x , в частности $x \gg 1$. Поэтому асимптотическое выражение для амплитуды $F(t, \theta_1)$ третьего канала в модели полюсов сводится к интегралу вдоль вертикальной прямой C_1 (см. рис. 19.1, г) и к сумме вычетов в полюсах, лежащих справа от прямой C_1 :

$$F^\pm(t, x) = J_{C_1} + \sum_i \beta_i^\pm(t) \frac{2\alpha_i + 1}{\sin \pi\alpha_i} [P_{\alpha_i}(-x) + \sigma P_{\alpha_i}(x)].$$

Здесь $\beta_i^\pm(t)$ — вычеты в полюсе. Если учесть, что

$$P_{\alpha_i}(+x) = (-1)^{\alpha_i} P_{\alpha_i}(-x) \text{ и } (-1)^{\alpha_i} = e^{-i\pi\alpha_i},$$

то последняя формула переписется так:

$$F^\pm(t, x) = J_{C_1} + \sum_i (2\alpha_i + 1) \beta_i^\pm(t) \left(\frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i}}{\sin \pi\alpha_i(t)} \right) P_{\alpha_i}(-x). \quad (1.18)$$

Выражение $\frac{1}{\sin \pi\alpha_i} (1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i})$ называется сигнатурным множителем.

Если $\cos \theta_i \rightarrow \infty$, то, имея в виду формулу (1.10) и пренебрегая асимптотически убывающим интегралом J_{C_1} , получаем вместо (1.18)

$$F^{\pm}(t, x) = \sum \beta_i^{\pm}(t) (2\alpha_i + 1) \frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i(t)}}{\sin \pi\alpha_i(t)} (-\cos \theta_i)^{\alpha_i t}. \quad (1.19)$$

Так выглядит асимптотическая амплитуда процесса (1.1) в t -канале в модели полюсов, когда спины всех частиц равны нулю.

Реджионы и реджизация амплитуды. Выясним, каков физический смысл полюсных траекторий. В наиболее простом случае одного полюса в t -канале (в точке $t = t_0$) амплитуда (1.18), если опустить слагаемое J_{C_1} , переписывается так:

$$F(t, x) = [2\alpha(t) + 1] \beta(t) \frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha(t)}}{\sin \pi\alpha(t)} P_{\alpha}^l(-x). \quad (1.20)$$

Выясним, как будет выглядеть выражение (1.20) при различных значениях сигнатуры и целых значениях орбитального момента l . Рассмотрим случай четной сигнатуры ($\sigma = +1$) и $\alpha \rightarrow l$, где l четно. Так как

$$\alpha(t) \sim \alpha(t_0) + \alpha'(t_0)(t - t_0) \equiv l + \alpha'(t - t_0)$$

или $\alpha(t) - l = \alpha'(t - t_0)$,

то

$$\frac{1 + e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} = \frac{2}{\pi(\alpha - l)} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha'(t - t_0)},$$

и в случае бесспиновой частицы ($l = 0$) выражение для амплитуды (1.20) переходит в следующее:

$$F(t, x) = \frac{2\beta(t)}{\pi\alpha'(t_0)} \cdot \frac{1}{t - t_0} = g^2 \frac{1}{t - t_0}, \quad (1.21)$$

где

$$g^2 = \frac{2\beta}{\pi\alpha'(t_0)}. \quad (1.21')$$

Формула (1.21) является выражением для полюсной амплитуды t -канала в случае, когда в промежуточном состоянии имеется стабильная частица с массой $t_0 = \mu^2$ и спином l , равным нулю (см. формулу (1.1), гл. 16). Такой амплитуде мы сопоставляли диаграмму, изображенную на рис. 19.2, а. Аналогичным образом амплитуде (1.20) можно сопоставить диаграмму (см. рис. 19.2, б) с промежуточным состоянием, обладающим переменным спином $\alpha(t)$, зависящим от квадрата энергии t . Такое состояние называется реджионом, а амплитуда (1.20) — реджизованной полюсной амплитудой. Из формулы (1.21) также видно, что вычету $\beta(t)$ диаграммы 19.2, б соответствует произведение констант связи в вершинах диаграммы

19.2, а, т. е. вычет характеризует интенсивность взаимодействия реджионов в вершинах диаграммы 19.2, б. Если сигнатура по-прежнему положительна ($\sigma = +1$), но $\alpha \rightarrow l$ нечетно, то

$$\frac{1 + e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} = e^{-i\pi\alpha/2} \frac{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\pi\alpha}{2} \sin \frac{\pi\alpha}{2}} = \frac{e^{-i\pi\alpha/2}}{\sin \frac{\pi\alpha}{2}} = -i.$$

В этом случае сигнатурный множитель, а также амплитуда не имеют полюса и становятся конечными и чисто мнимыми.

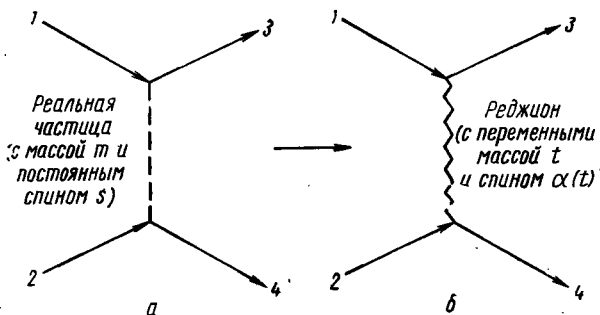


Рис. 19.2. Реджизация полюсной амплитуды.

Аналогично можно установить, что в случае нечетной сигнатуры реджизованная полюсная амплитуда имеет полюса при нечетных l и становится чисто мнимой при четных l .

Как видно, обычная полюсная диаграмма содержится в реджизованной диаграмме как частный случай. Реджизованная диаграмма и соответствующая ей реджизованная амплитуда учитывают вклад всех полюсов, лежащих на данной траектории, или, как говорят, вклад данной траектории.

Сигнатурный множитель — величина комплексная. Поэтому, в отличие от (1.21), амплитуда (1.20) существенно комплексна.

Асимптотическое выражение для амплитуды s -канала. Чтобы найти выражение для амплитуды процесса (1.1) в s -канале, перейдем из t -канала в s -канал. Как мы уже говорили, в случае бесспиновых частиц амплитуды в s - и t -каналах являются одной и той же инвариантной функцией, но взятой для различных значений s и t . Поэтому, для того чтобы вернуться из t -канала в s -канал, надо, используя формулу (1.9), заменить в (1.19) $\cos \theta_t$ на s и считать, что $s > 0$, $t < 0$:

$$F^\pm(s, t) = \sum_i (2\alpha_i + 1) \beta_i^\pm(t) \frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i}}{\sin \pi\alpha_i(t)} s^{\alpha_i(t)}. \quad (1.22)$$

Так выглядит асимптотическая амплитуда процесса (1.1) в s -канале в модели полюсов, когда спины всех частиц равны нулю.

Из (1.22) следует, что асимптотический вид амплитуды процесса (1.1) в s -канале определяется суммой вкладов полюсов $\alpha_i(t)$ парциальных волн в t -канале.

Предположим, что при $t < 0$ полюса амплитуды третьего канала располагаются так, как это указано на рис. 19.1, e (т. е. не по вертикальной линии). Тогда вклад каждого полюса t -канала или соответствующей ему полюсной траектории в асимптотическую амплитуду первого канала будет тем больше, чем больше величина $\text{Re } \alpha_i(t)$, т. е. чем правее лежит полюс. Поэтому в асимптотической амплитуде s -канала достаточно учесть несколько траекторий t -канала с наибольшими $\text{Re } \alpha(t)$. Если s очень велико, то самой существенной будет траектория с наибольшим $\text{Re } \alpha(t)$.

Теория не может дать того значения энергии s , при котором можно ограничиться учетом лишь одной вакуумной траектории. Как показывает анализ имеющихся опытных данных (см. § 3 и 4), в области энергий $\leq 30 \text{ Гэв}$ (в лабораторной системе координат) дают заметный вклад несколько траекторий.

§ 2. Асимптотическое выражение для амплитуды в случае частиц со спином

Связь между спиральными амплитудами s - и t -каналов. До сих пор мы рассматривали процесс (1.1), предполагая, что спины частиц равны нулю. Найдем асимптотическое выражение для амплитуды в том случае, когда спины частиц отличны от нуля. Наличие спина у частиц удобно учитывать с помощью спиральных амплитуд (см. гл. 9). Будем обозначать амплитуды процесса (1.1) в с. ц. м. s - и t -каналов так:

$${}^s M_{\lambda_1^{\lambda_3} \lambda_2^{\lambda_4}}(s, t), \quad M_{\lambda_1^{\lambda_2} \lambda_3^{\lambda_4}}(t, s).$$

Спиральные амплитуды $M_{\lambda_1^{\lambda_2} \lambda_3^{\lambda_4}}$ в t -канале отличаются от спиральных амплитуд ${}^s M_{\lambda_1^{\lambda_3} \lambda_2^{\lambda_4}}$ в s -канале. Чтобы перейти от спиральных амплитуд в t -канале $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ к спиральным амплитудам в s -канале $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, надо воспользоваться связью между этими амплитудами:

$${}^s M_{\lambda_1^{\lambda_3} \lambda_2^{\lambda_4}}(s, t) = \sum_{\lambda_1' \lambda_2' \lambda_3' \lambda_4'} \left[(-1)^{\lambda_2' - \lambda_4'} d_{\lambda_4' \lambda_4}^{s_4} (y_4) d_{\lambda_2' \lambda_2}^{s_2} (y_2) \right] M_{\lambda_1' \lambda_3' \lambda_2' \lambda_4'}(t, s) \times \\ \times \left[(-1)^{\lambda_1' - \lambda_3'} d_{\lambda_3' \lambda_3}^{s_3} (y_3) d_{\lambda_1' \lambda_1}^{s_1} (y_1) \right], \quad (2.1)$$

где

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{s_{12} t_{13}}} [(s + m_1^2 - m_2^2)(t + m_1^2 - m_3^2) - 2m_1^2(m_4^2 - m_2^2 + m_1^2 - m_3^2)];$$

$$y_2 = \frac{1}{\sqrt{s_{12} t_{24}}} [-(s + m_2^2 - m_1^2)(t + m_2^2 - m_4^2) - 2m_2^2(m_4^2 - m_2^2 + m_1^2 - m_3^2)];$$

$$y_3 = \frac{1}{\sqrt{s_{34} t_{13}}} [-(s + m_3^2 - m_4^2)(t + m_3^2 - m_1^2) - 2m_3^2(m_4^2 - m_2^2 + m_1^2 - m_3^2)];$$

$$y_4 = \frac{1}{\sqrt{s_{34} t_{24}}} [(s + m_4^2 - m_3^2)(t + m_4^2 - m_2^2) - 2m_4^2(m_4^2 - m_2^2 + m_1^2 - m_3^2)],$$

причем

$$s_{ik} = [s - (m_i - m_k)^2][s - (m_i + m_k)^2],$$

$$t_{ik} = [t - (m_i - m_k)^2][t - (m_i + m_k)^2],$$

а функции $d_{\lambda'\lambda}^s$ определяются выражениями (2.2) и (2.4), гл. 9.

Для процессов $\pi N \rightarrow \pi N$ или $KN \rightarrow KN$ формулы (2.1) дают следующую связь между ${}^s M_{\lambda}$ и $M_{\lambda'}$:

$$\left. \begin{aligned} {}^s M_{\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} 0} &= \sqrt{1-y^2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} + y M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{00}; \\ {}^s M_{\frac{1}{2} 0}^{-\frac{1}{2} 0} &= y M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} - \sqrt{1-y^2} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{00}, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где

$$y = -\sqrt{\frac{t}{t-4m_N^2}} \cdot \frac{s + m_N^2 - \mu_\pi^2}{[s^2 - 2s(m_N^2 + \mu_\pi^2) + (m_N^2 - \mu_\pi^2)^2]^{1/2}}$$

(если $s \gg m_N^2$, то $y = -\sqrt{\frac{t}{t-4m_N^2}}$), m_N, μ_π — массы нуклона и π -мезона.

Пять спиральных амплитуд процесса $NN \rightarrow NN$ в первом и третьем каналах связаны, согласно (2.1), так:

$$\begin{aligned}
{}^s M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} &= \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{1 + \cos^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}} - \frac{\sin 2\beta}{2} 2M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}}; \\
{}^s M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}} &= \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \frac{1 + \cos^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} - \\
&- \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{\sin 2\beta}{2} 2M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}}; \\
{}^s M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} &= \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{1 - \cos^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} - \\
&- \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{\sin 2\beta}{2} 2M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}}; \\
{}^s M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}} &= \frac{1 + \cos^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{\sin^2 \beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \frac{\sin 2\beta}{2} 2M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}}; \\
2^s M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}} &= -\frac{\sin 2\beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{\sin 2\beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \frac{1}{2}} - \frac{\sin 2\beta}{2} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} + \\
&+ \frac{\sin 2\beta}{2} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}} + \cos 2\beta \cdot 2M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}};
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

где $\cos \beta = \sqrt{\frac{t}{t-4m_N^2}} \sqrt{\frac{s}{s-4m_N^2}}$, если $s \gg m_N^2$, то $\cos \beta =$
 $= \sqrt{\frac{t}{t-4m_N^2}}$.

Все соотношения остаются справедливыми при замене ${}^s M_\lambda \leftrightarrow M_\lambda$, так как матрица из коэффициентов в правой части равенства (2.1) симметрична и унитарна.

Различные спиральные амплитуды ведут себя по-разному при $t \rightarrow 0$. Чтобы выяснить это поведение, удобно сначала найти вид спиральных амплитуд при $t \rightarrow 0$ в s -канале, а затем, пользуясь формулами (2.1), перейти в t -канал.

При рассеянии на углы, близкие к нулю ($\theta_s \rightarrow 0$), амплитуды ${}^s M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$ в s -канале пропорциональны, согласно формуле (2.1), гл. 9 ($k_0 \sin \theta$) $^{\mu-\nu}$. Если $m_1 = m_3$, то $k_0 \sin \theta = \sqrt{-t}$, поэтому

$${}^s M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1 \lambda_2}(s, t) \sim \left(\frac{-t}{4m^2} \right)^{\frac{|\mu-\nu|}{2}}, \quad (2.4)$$

где m — величина порядка масс частицы.

Для процессов $\pi N \rightarrow \pi N$ при $t \rightarrow 0$ в s -канале

$${}^s M_{\frac{1}{2} 0}^{\frac{1}{2} 0} \sim \text{const}; \quad {}^s M_{\frac{1}{2} 0}^{-\frac{1}{2} 0} \sim \sqrt{\frac{-t}{4m_N^2}}. \quad (2.5)$$

С помощью формулы (2.1) или (2.2) можно найти вид амплитуд $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_1 \lambda_2}$ в t -канале при $t \rightarrow 0$:

$$M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} \sim \text{const}; \quad M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} \sim \sqrt{\frac{-t}{4m_N^2}}. \quad (2.6)$$

Как видно, амплитуда $M_{\frac{1}{2} 0}^{-1/2 0}$ и в s - и в t -канале пропорциональна \sqrt{t} , т. е. она исчезает при $t \rightarrow 0$ в обоих каналах.

Из формул (2.4), (2.1) и (2.3) следует, что при $t \rightarrow 0$

$$\sin^2 \beta \rightarrow 1, \quad \sin 2\beta \sim \sqrt{\frac{-t}{4m_N^2}}$$

и

$$M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \sim \sqrt{\frac{-t}{4m_N^2}} \quad M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \sim \text{const}. \quad (2.7)$$

Формулы для полного и дифференциального сечений имеют один и тот же вид для спиральных амплитуд как в s -, так и в t -каналах. Мы в дальнейшем будем рассматривать процессы в t -канале.

Кинематические особенности спиральных амплитуд. Детальный анализ аналитических свойств спиральных амплитуд в случае частиц с произвольным спином показывает, что у этих амплитуд наряду с динамическими особенностями, следующими из условия унитарности (см. гл. 15, § 3), имеются дополнительные сингулярности, получившие название кинематических. Наличие кинематических сингулярностей может внести дополнительные осложнения. Чтобы избежать этих осложнений, кинематические особенности следует устранить. Мы изложим один из методов, позволяющих получить спиральные амплитуды, свободные от кинематических сингулярностей.

Рассмотрим спиральные амплитуды s -канала. Ее разложение по спиральным парциальным амплитудам выглядит так (см. гл. 9, § 2):

$${}^s M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(s, t) = \sum_J (2J+1) [(T^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(s) d_{\lambda \mu}^J(\theta_s)]. \quad (2.8)$$

Здесь θ_s — угол рассеяния в s -канале, т. е. угол между частицами 1 и 3, $d_{\lambda \mu}^J(\theta_s)$ — функции, определяемые соотношением (2.2) и (2.4), гл. 9, при этом

$$\cos \theta_s = \frac{1}{s_{12} s_{34}} \left[2st + s^2 - s \sum_i m_i^2 + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \right], \quad (2.9)$$

где

$$s_{12}^2 = [s - (m_1 - m_2)^2] [s - (m_1 + m_2)^2];$$

$$s_{34}^2 = [s - (m_3 - m_4)^2] [s - (m_3 + m_4)^2].$$

Как видно, $\cos \theta_s$ является аналитической функцией t .

Выясним аналитические свойства функций $d_{\lambda \mu}^J(\theta_s)$; последние в общем случае выражаются через полиномы Якоби P_{J-M}

$$\begin{aligned} d_{\lambda \mu}^J(\theta_s) = & \pm \sqrt{\frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+N)!(J-N)!}} \left(\cos \frac{\theta_s}{2} \right)^{|\lambda+\mu|} \times \\ & \times \left(\sin \frac{\theta_s}{2} \right)^{|\lambda-\mu|} P_{J-M}^{|\lambda-\mu|, |\lambda+\mu|}(\cos \theta_s), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где M — максимальное из чисел $|\lambda|, |\mu|$; N — минимальное из чисел $|\lambda|, |\mu|$. С учетом (2.10) формула (2.8) переписется следующим образом

$$\begin{aligned} {}^s M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(s, t) = & \left(\sqrt{2} \cos \frac{\theta_s}{2} \right)^{|\lambda+\mu|} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta_s}{2} \right)^{|\lambda-\mu|} \times \\ & \times \sum_J (2J_1+1) (T^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(s) P_{J-M}^{|\lambda-\mu|, |\lambda+\mu|}(\cos \theta_s). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Все постоянные множители включены в $T^J(s)$.

Хотя $\cos \theta_s$ является аналитической функцией t , более сложные множители $\left(\cos \frac{\theta_s}{2} \right)^{|\lambda+\mu|}$ и $\left(\sin \frac{\theta_s}{2} \right)^{|\lambda-\mu|}$ как видно из (2.9), при определенных значениях t обращаются в нуль, а также становятся сингулярными точками. Иначе говоря, спиральные амплитуды s -канала, описывающие процессы с произвольными спинами частиц, перестают быть аналитическими функциями t .

Если спины всех частиц равны нулю, то спиральная амплитуда разлагается просто по полиномам Лежандра P_J :

$${}^s M_{00}^{00}(s, t) = \sum_J (2J+1) (T^J)_{00}^{00}(s) P_J(\cos \theta_s), \quad (2.12)$$

т. е. в этом случае указанные выше сингулярности в спиральных амплитудах отсутствуют.

Из сравнения (2.11) и (2.12) следует, что причиной появления сингулярности в (2.11) является более сложная кинематика процесса, обусловленная наличием спина у частиц. Поэтому указанные сингулярности получили название кинематических, в отличие от динамических сингулярностей, вытекающих из условия унитарности.

Введем вместо (2.11) новые спиральные амплитуды s -канала:

$$\begin{aligned} {}^s \bar{M}_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4} &= {}^s M_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\theta_s}{2} \right)^{-|\lambda+\mu|} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta_s}{2} \right)^{-|\lambda-\mu|} = \\ &= \sum_J (2J+1) (T^J)_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4}(s) P_{J-M}^{|\lambda-\mu|, |\lambda+\mu|}(\cos \theta_s). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Как видно, у этих амплитуд кинематические сингулярности по переменной t отсутствуют. Аналогичным образом можно устранить кинематические сингулярности по переменной s в спиральных амплитудах $M_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4}$ t -канала, если ввести новые спиральные амплитуды t -канала:

$$\bar{M}_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4} = M_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\theta_t}{2} \right)^{-|\lambda+\mu|} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta_t}{2} \right)^{-|\lambda-\mu|}, \quad (2.14)$$

где $\lambda = \lambda_1 - \lambda_3$, $\mu = \lambda_2 - \lambda_4$.

Спиральные амплитуды s -канала имеют наряду с кинематическими сингулярностями по переменной t также кинематические сингулярности по переменной s .

Чтобы найти последние надо использовать выражение, связывающее спиральные амплитуды s -канала, свободные от t -особенностей, со спиральными амплитудами t -канала, свободными от s -особенностей. Тогда все s -особенности s -канала содержит матрица перехода от s - к t -каналу, вид которой известен.

Введем спиральные амплитуды с фиксированной J -четностью, которые определяются так (подробнее о них мы скажем ниже):

$${}^s \bar{M}_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4} \pm {}^s \bar{M}_{\lambda_1 \lambda_3}^{-\lambda_2 - \lambda_4}. \quad (2.15)$$

Для устранения кинематических s -сингулярностей спиральных амплитуд с фиксированной четностью s -канала надо умножить (2.15) на дополнительный множитель $(N^\pm)_{\lambda_1 \lambda_3}^{\lambda_2 \lambda_4}$, который зависит от масс частиц и их спиральностей:

1. Массы всех частиц равны: $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$

$$N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = (s - 4m^2)^{\frac{1}{2} \alpha_1} s^{-\frac{1}{2} \beta_1}, \quad (2.16)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) +$$

$$+ \left\{ \max \text{ по } \eta_a \text{ из } \left[s_1 + s_2 + s_3 + s_4 - \frac{1}{2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \right] - \right. \\ \left. - |\lambda - \mu| - |\lambda + \mu|; \beta_1 = \max \text{ по } \eta_b \text{ из } [(|s_4 - s_2| - |s_1 - s_3|) + 1]; \right. \\ \left. \lambda = \lambda_1 \lambda_2; \mu = \lambda_3 - \lambda_4; \eta_a = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3 \eta_4} (-1)^{2(s_1 + s_2)}; \eta_b = \eta_a (-1)^{|\lambda - \mu|}; \right.$$

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{если } s_i \text{ — полуцелое} \\ 0, & \text{если } s_i \text{ — целое,} \end{cases}$$

max по η из $[n]$ равно наибольшему четному числу, содержащемуся в n (в частности, равному n), если $\eta = +1$, и наибольшему нечетному числу, содержащемуся в n (в частности, равному n), если $\eta = -1$. Например, в случае рассеяния нуклонов на нуклонах

$$[s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = \frac{1}{2}; \quad v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1; \quad \eta_N = +1;$$

$$\eta_{\bar{N}} = -1; \quad \eta_a = 1.$$

Для спиральной амплитуды ${}^s M_{++}^{++}$ s -канала получим

$$\lambda = \mu = 0, \quad \eta_a = \eta_b = 1, \quad \alpha_1 = 2 + \{ \max \text{ по } (+1) \text{ из } (0) \} - 0 = 2,$$

$$\beta_1 = \{ \max \text{ по } (+1) \text{ из } (0 + 1) \} = 0,$$

поэтому

$$N_{++}^{++} = (s - 4M^2). \quad (2.17)$$

Для остальных спиральных амплитуд s -канала аналогичные вычисления дают

$$N_{--}^{++} = (s - 4M^2), \quad N_{+-}^{+-} = 1, \quad N_{-+}^{+-} = 1, \quad N_{+-}^{+-} = s^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.17')$$

В данном случае множители N для спиральных амплитуд и амплитуд с фиксированной четностью совпадают. Для спиральных амплитуд третьего канала, т. е. для процесса $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$, вид $N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ совпадает с (2.16) и (2.17).

2. $m_1 = m_3 = m_a, m_2 = m_4 = m_b$ (для реакций $BB \rightarrow BB, FB \rightarrow FB, FF \rightarrow FF$, где B — бозон, F — фермион).

$$N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \{ [s - (m_a + m_b)^2] [s - (m_a - m_b)^2] \}^{\frac{1}{2} \alpha_1} s^{\frac{1}{2} \beta_1}, \quad (2.18)$$

где $\beta_2 = |\lambda - \mu|$; α_1 — те же, что в предыдущем случае. Например, для процесса рассеяния мезонов на нуклонах

$$s_1 = s_3 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = s_4 = 0, \quad v_1 = v_3 = 1, \quad v_2 = v_4 = 0.$$

Для спиральной амплитуды ${}^s M_{+0}^{+0}$ s -канала будем иметь

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}, \quad \eta_a = -1, \quad \eta_b = -1, \quad \beta_2 = 0, \\ \alpha_1 = 1 + \{\max \text{ по } (-1) \text{ из } (0)\} - 1 = 0,$$

поэтому

$$N_{+0}^{+0} = 1. \quad (2.19)$$

Аналогичным образом

$$N_{-0}^{\pm 0} = s^{\frac{1}{2}}. \quad (2.20)$$

В данном случае множители N для спиральных амплитуд и амплитуд с фиксированной четностью совпадают.

3. $m_1 = m_2 = m_a$, $m_3 = m_4 = m_b$ (для реакций $BB \rightarrow BB$, $\bar{F}F = BB$, $\bar{F}F \rightarrow FF$)

$$(N^{\pm})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = (s - 4m_a^2)^{\frac{1}{2} \alpha_a(\pm)} (s - 4m_b^2)^{\frac{1}{2} \beta_b(\pm)} s^{-\frac{1}{2} \gamma_s}, \quad (2.21)$$

где

$$\alpha_a(\pm) = -|\lambda - \mu| + \left\{ \max \text{ по } (\pm \eta_{ab}) \text{ из} \right.$$

$$\left[s_1 + s_2 - \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(|\lambda - \mu| - |\lambda + \mu|) \right] + \frac{1}{2}(v_1 + v_2),$$

$$\beta_b(\pm) = -|\lambda - \mu| + \left\{ \max (\pm \eta_{cd}) \right. \quad (2.22)$$

$$\text{из } \left[s_3 + s_4 - \frac{1}{2}(v_3 + v_4) + \frac{1}{2}(|\lambda - \mu| - |\lambda + \mu|) \right] + \frac{1}{2}(v_3 + v_4);$$

$$\gamma_s = \left\{ \max \text{ по } \eta_b \text{ из } [(|s_4 - s_2| - |s_3 - s_1|) | + 1] \right\};$$

$$\eta_{ab} = \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2 \eta_4} (-1)^{s_1 + s_2 + \lambda_3 + \lambda_4};$$

$$\eta_{cd} = (-1)^{s_1 + s_2 + \lambda_3 + \lambda_4}; \quad \eta_b = \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2 \eta_4} (-1)^{2(s_1 + s_2) + (\lambda - \mu)}$$

Рассмотрим процесс $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$, т. е. третий канал реакции $N\pi \rightarrow N\pi$. Для его спиральной амплитуды $\bar{M}_{++}^{00} + \bar{M}_{++}^{00}$ в t -канале $\lambda = \mu = 0$, $\eta_b = +1$, $\eta_{ab} = 1$, $\eta_{cd} = 1$, $\gamma = 0$, $\alpha_3(+)=1$, $\beta_3(+)=0$, поэтому

$$(N^+)_{++}^{00} = (t - 4M^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.23)$$

Таким же путем вычислим

$$(N^+)_{+-}^{00} = (t - 4\mu^2)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.24)$$

4. $m_1 \neq m_2$, $m_3 \neq m_4$ и одновременно не имеет места $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$ (для процессов $BB \rightarrow BB$, $\bar{F}\bar{F} \rightarrow BB$, $FF \rightarrow FF$)

$$(N^\pm)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = [s - (m_1 + m_2)^2]^{\frac{1}{2} \alpha_4} [s - (m_1 - m_2)^2]^{\frac{1}{2} \alpha'_4} \times \\ \times [s - (m_3 + m_4)^2]^{\frac{1}{2} \beta_4} [s - (m_3 - m_4)^2]^{\frac{1}{2} \beta'_4} s^{\frac{1}{2} \gamma_4}, \quad (2.25)$$

где

$$\alpha_4 = \alpha'_4 = \alpha(\mp), \quad \beta_4 = \beta'_4 = \beta(\pm) \quad \text{для } BB \rightarrow BB;$$

$$\alpha_4 = \alpha'_4 = \alpha(\mp), \quad \beta_4 = \beta(\pm), \quad \beta'_4 = \beta(\mp) \quad \text{для } BB \rightarrow \bar{F}\bar{F} \text{ (частицы} \\ \text{3, 4 — фермионы);}$$

$$\alpha_4 = \alpha(\pm), \quad \alpha'_4 = \alpha(\mp), \quad \beta_4 = \beta'_4 = \beta(\pm) \quad \text{для } \bar{F}\bar{F} \rightarrow BB \text{ (частицы} \\ \text{3, 4 — бозоны);}$$

$$\alpha_4 = \alpha(\pm), \quad \alpha'_4 = \alpha(\mp), \quad \beta_4 = \beta(\pm), \quad \beta'_4 = \beta(\mp) \quad \text{для } FF \rightarrow FF;$$

$$\alpha(\pm) = -|\lambda - \mu| + \left\{ \max \text{ по } (\pm \eta_{ab}) \text{ из } \left[s_1 + s_2 - \frac{1}{2} (v_1 + v_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (|\lambda - \mu| - |\lambda + \mu|) \right] \right\} + \frac{1}{2} (v_1 + v_2);$$

$$\beta(\pm) = -|\lambda - \mu| + \left\{ \max \text{ по } (\pm \eta_{cd}) \text{ из } \left[s_3 + s_4 - \frac{1}{2} (v_3 + v_4) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} (|\lambda - \mu| - |\lambda + \mu|) \right] \right\} + \frac{1}{2} (v_3 + v_4);$$

$$\eta_{ab} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3 \eta_4} (-1)^{s_1 + s_4 + \lambda_1 + \lambda_4}; \quad \eta_{cd} = (-1)^{s_3 + s_4 + \lambda_3 + \lambda_4};$$

$$\gamma_4 = \max \text{ из } (|\lambda - \mu|, |\lambda + \mu|).$$

Рассмотрим процесс $N_{\frac{3}{2}}^* \bar{N} \rightarrow \omega \pi$ (третий канал реакции $\pi N \rightarrow N_{\frac{3}{2}}^* \omega$). Для спиральной амплитуды $\bar{M}_{\frac{3}{2} \frac{1}{2}}^{1 0} - \bar{M}_{\frac{3}{2} \frac{1}{2}}^{-1 0}$ получим

$$\lambda = \mu = 1, \quad |\lambda - \mu| = 0, \quad |\lambda + \mu| = 2, \quad \gamma_4 = \max(0, 2) = 2,$$

$$\eta_{ab} = +1, \quad \eta_{cd} = +1, \quad \alpha_4 = \alpha(-) = \{\max \text{ по } (-1) \text{ из } (0)\} + 1 = 0,$$

$$\alpha'_4 = \alpha(+) = 1, \quad \beta_4 = \beta'_4 = \beta(-) = -1,$$

поэтому

$$(N^-)_{\frac{3}{2} \frac{1}{2}}^{1 0} = [t - (m_{N^*} - M)^2]^{\frac{1}{2}} \{ [t - (m_\omega + \mu)^2] [t - (m_\omega - \mu)^2] \}^{-\frac{1}{2}} t. \quad (2.26)$$

Аналогичные вычисления дают для некоторых других амплитуд:

$$(N^-)_{\frac{3}{2} \frac{1}{2}}^{1 0} = [t - (m_{N^*} + M)^2]^{-\frac{1}{2}} \{ [t - (m_\omega + \mu)^2] [t - (m_\omega - \mu)^2] \}^{-1} t^{\frac{3}{2}};$$

$$(N^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{1 0} = [t - (m_{N^*} - M)^2]^{\frac{1}{2}} \{ [t - (m_\omega + \mu)^2] [t - (m_\omega - \mu)^2] \}^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}};$$

$$(N^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{1 0} = [t - (m_{N^*} - M)^2]^{-\frac{1}{2}} \{ [t - (m_\omega + \mu)^2] [t - (m_\omega - \mu)^2] \}^{-\frac{1}{2}} t.$$

(2.27)

Полагая в (2.26) и (2.27) массу ω -мезона равной нулю ($m_\omega = 0$), получаем соответствующие выражения N для процесса $N_{\frac{3}{2}}^* \bar{N} \rightarrow \gamma \pi$.

5. $m_1 = m_2, m_3 \neq m_4$ или $m_1 = m_2 = m_3 \neq m_4$

$$(N^\pm)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = (s - 4m_1^2)^{\frac{1}{2} \alpha_4} [s - (m_3 + m_4)^2]^{\frac{1}{2} \beta_4} \times$$

$$\times [s - (m_3 - m_4)^2]^{\frac{1}{2} \beta'_4} \times s^{\frac{1}{2} \alpha_4}, \quad (2.28)$$

где $\alpha_4, \beta'_4, \beta_4$ те же, что в предыдущем случае,

$$\alpha_5 = \left\{ \max \text{ по } (\pm \eta_{ab}) \text{ из } \left[s_1 + s_2 - \frac{1}{2} (v_1 + v_2) \right] \right\} + \frac{1}{2} (v_1 + v_2)$$

$$\text{для } v_1 = v_2 = 1;$$

$$\alpha_5 = \max \text{ по } (\pm \eta_{ab}) \text{ из } [s_1 + s_2] \text{ для } v_1 = v_2 = 0.$$

Рассмотрим процесс $N\bar{N} \rightarrow \rho$ (третий канал реакции $\pi N \rightarrow N\rho$).
 Для спиральной амплитуды $\bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{1 0} + \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{-1 0}$ будем иметь

$$\lambda = 0, \quad \mu = 1, \quad |\lambda - \mu| = 1, \quad |\lambda + \mu| = 1, \quad \eta_{ab} = +1, \quad \eta_{cd} = +1, \\
\alpha_3 = \{\max \text{ по } (-1) \text{ из } (0)\} + 1 = 0, \quad \alpha_4 = \alpha(+)=0, \\
\beta_4 = \beta'_4 = \beta(+)= -1,$$

поэтому

$$(N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} = [t - (m_\rho + m_\pi)^2]^{-\frac{1}{2}} [t - (m_\rho - m_\pi)^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.29)$$

Аналогично найдем:

$$\left. \begin{aligned} (N^-)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= (N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} t^{\frac{1}{2}}, & (N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= \left[(N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} \right]^{-1} t^{\frac{1}{2}}, \\ (N^-)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= (t - 4M^2)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}, & (N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= (t - 4M^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Полагая в (2.29) и (2.30) массу ρ -мезона равной нулю ($m_\rho = 0$), получаем соответствующие выражения N для процесса $N\bar{N} \rightarrow \gamma\pi$:

$$\left. \begin{aligned} (N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= (t - \mu^2)^{-1}; & (N^-)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= t^{\frac{1}{2}} (t - 4M^2)^{-\frac{1}{2}}; \\ (N^-)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= t^{\frac{1}{2}} (t - \mu^2); & (N^+)^{\frac{1 0}{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}} &= (t - 4M^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.30')$$

Спиральные амплитуды с фиксированной J -четностью. Они определяются формулой (2.15). Остановимся подробнее на их свойствах.

Состояние с полным моментом J и спиральностями λ_3 и λ_4 преобразуется при инверсии пространства следующим образом:

$$P |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle = \eta_3 \eta_4 (-1)^{J-s_3-s_4} |JM; -\lambda_3 -\lambda_4\rangle, \quad (2.31)$$

где s_3, s_4 — спины; η — внутренние четности частиц. Введем состояния $|JM; \lambda_3, \lambda_4\rangle_+$, обладающие четностью $(-1)^J$ или, как говорят, положительной J -четностью:

$$P |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_+ = (-1)^{J-v} |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_+, \quad (2.32)$$

и состояния с четностью $(-1)^{J+1}$ или отрицательной J -четностью:

$$P |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_- = (-1)^{J+1-v} |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_-, \quad (2.33)$$

где $v = 1/2$ для J полуцелых и $v = 0$ для J целых. Имея в виду (2.31), запишем состояние с определенной J -четностью так:

$$\sqrt{2} \cdot |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_+ = |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_+ \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4-v} \times \\ \times |JM; -\lambda_3 -\lambda_4\rangle; \quad (2.34)$$

$$\sqrt{2} \cdot |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_- = |JM; \lambda_3 \lambda_4\rangle_- \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4-v} \times \\ \times |JM; -\lambda_3 -\lambda_4\rangle. \quad (2.35)$$

Рассмотрим матричный элемент перехода из начального состояния в конечное. Если четность сохраняется, то возможны лишь переходы между состояниями с одинаковой J -четностью, т. е. отличными от нуля будут следующие матричные элементы перехода (или парциальные спиральные амплитуды):

$$(F^{J+})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \equiv_+ \langle JM; \lambda_3 \lambda_4 | F | JM; \lambda_1 \lambda_2 \rangle_+ = \langle JM; \lambda_3 \lambda_4 | F | JM; \\ \lambda_1 \lambda_2 \rangle_+ \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4-v} \langle JM; -\lambda_3 -\lambda_4 | F | JM; \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ = \langle \lambda_3 \lambda_4 | F^J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle_+ + \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4-v} \langle -\lambda_3 -\lambda_4 | F^J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \quad (2.36)$$

$$(F^{J-})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \equiv_- \langle JM; \lambda_3 \lambda_4 | F | JM; \lambda_1 \lambda_2 \rangle_- = \\ = \langle \lambda_3 \lambda_4 | F^J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle_- - \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4-v} \langle -\lambda_3 -\lambda_4 | F^J | \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \quad (2.36')$$

Из (2.34) и (2.35) следует, что в случае когда обе спиральности λ_3 и λ_4 равны нулю и $\eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4} = 1$, то состояния с отрицательной J -четностью отсутствуют, а если $\eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4} = -1$, то отсутствуют состояния с положительной J -четностью. Поэтому не дают вклада и соответствующие амплитуды $(F^{J\pm})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$.

Наконец, введем спиральные амплитуды с фиксированной четностью, которые определяются формулой

$$(\overline{M}^\pm)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \overline{M}_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \pm (-1)^{\lambda + \lambda_{\max}} \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3+s_4+v} \overline{M}_{\lambda_1 \lambda_2}^{-\lambda_3 -\lambda_4}, \quad (2.37)$$

где s_3, s_4 — спины частиц; $\eta_3 \eta_4$ — их внутренние четности; $\lambda_{\max} = \max(|\lambda|, |\mu|)$; $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; $v = 0$, если $s_3 + s_4$ — целое и $v = \frac{1}{2}$, если $s_3 + s_4$ — полуцелое.

Используя (2.37) и разложение спиральных амплитуд $\overline{M}_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ по парциальным спиральным амплитудам $(F^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ [см. глава 9, формула (2.1)]

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = N \sum_J (2J+1) (F^J)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} d_{\lambda\mu}^J(\theta),$$

находим аналогичное разложение для спиральных амплитуд $(\bar{M}^\pm)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ с фиксированной четностью:

$$(\bar{M}^+)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = N' \sum_J (2J+1) [e_{\lambda\mu}^{J+}(x) (F^{J+})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} + e_{\lambda\mu}^{J-}(x) (F^{J-})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}], \quad (2.38)$$

$$(\bar{M}^-)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = N' \sum_J (2J+1) [e_{\lambda\mu}^{J+}(x) (F^{J-})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} + e_{\lambda\mu}^{J-}(x) (F^{J+})_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}], \quad (2.39)$$

где

$$e_{\lambda\mu}^{J\pm}(x) = \left(\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^{-|\lambda+\mu|} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}\right)^{-|\lambda-\mu|} d_{\lambda\mu}^J(\theta) \pm \pm (-1)^{\lambda+\lambda_{\max}} \left(\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2}\right)^{-|\lambda+\mu|} \cdot \left(\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}\right)^{-|\lambda-\mu|} d_{\lambda, -\mu}^J; \quad (2.40)$$

N' — нормировочный коэффициент.

Парциальные спиральные амплитуды F^{J+} и F^{J-} имеют определенную четность. Спиральные амплитуды \bar{M}^+ и \bar{M}^- в общем случае таким свойством не обладают, так как каждая из них, согласно (2.38), представляет собой комбинацию F^{J+} и F^{J-} . Однако, как мы увидим, в асимптотическом пределе (когда $\cos \theta \gg 1$) в амплитуду \bar{M}^+ основной вклад дает F^{J+} , а в амплитуду \bar{M}^- — величина F^{J-} , т. е. в асимптотическом пределе J -четность амплитуд \bar{M}^+ и \bar{M}^- также становится фиксированной. Отсюда происходит название амплитуд с фиксированной J -четностью.

В разложение (2.38) вместо функций $d_{\lambda\mu}^J$ входят функции $e_{\lambda\mu}^{J\pm}$, которые обладают следующими свойствами:

$$\left. \begin{aligned} e_{-\mu}^{J\pm-\lambda}(x) &= e_{\lambda\mu}^{J\pm}(x); & e_{\mu\lambda}^{J\pm}(x) &= (-1)^{\lambda-\mu} e_{\lambda\mu}^{J\pm}(x); \\ e_{\lambda, -\mu}^{J\pm}(x) &= \pm (-1)^{\lambda+\lambda_m} e_{\lambda\mu}^{J\pm}(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

В частности ($x \equiv \cos \theta$),

$$\left. \begin{aligned} e_{00}^{J+} &= P_J; & e_{00}^{J-} &= 0; \\ -e_{10}^{J+} &= e_{01}^{J+} = [J(J+1)]^{-\frac{1}{2}} P_J'; & -e_{10}^{J-} &= e_{01}^{J-} = 0; \\ e_{20}^{J+} &= e_{02}^{J+} = [(J-1)(J+1)(J+2)]^{-\frac{1}{2}} P_J''; \\ \bar{e}_{20}^{J-} &= e_{02}^{J-} = 0; \\ e_{11}^{J+} &= [J(J+1)]^{-1} (P_J' + xP_J''); & e_{11}^{J-} &= -\frac{P_J''}{J(J+1)}; \end{aligned} \right\} \downarrow$$

$$\begin{aligned}
 -e_{21}^{J+} &= e_{12}^{J+} = \frac{2P_J'' + xP_J'''}{J(J+1)[(J-1)(J+2)]^{\frac{1}{2}}}; \\
 -e_{21}^{J-} &= e_{12}^{J-} = \frac{-P_J'''}{J(J+1)[(J-1)(J+2)]^{\frac{1}{2}}}; \\
 e_{22}^{J+} &= \frac{2P_J'' + 4xP_J''' + (x^2+1)P_J''}{(J-1)J(J+1)(J+2)}; \\
 e_{22}^{J-} &= \frac{-4P_J''' - 2xP_J^{IV}}{(J-1)J(J+1)(J+2)}.
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Асимптотическое выражение для спиральных амплитуд t -канала. Из (2.38) следует, что в выражение для спиральной амплитуды с фиксированной четностью входят как e^{J+} , так и e^{J-} . Однако, как видно из (2.42), степень $\cos \theta$ в e^{J-} всегда меньше степени $\cos \theta$ в e^{J+} и поэтому при реджизации (когда $\cos \theta \gg 1$) вкладом второго слагаемого в (2.38) можно пренебречь. С учетом этого обстоятельства асимптотическое выражение для спиральных амплитуд с фиксированной четностью в t -канале в модели полюсов запишется по аналогии с (1.18), так:

$$(\bar{M}^\pm)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \approx \sum_i [2\alpha_i(t) + 1] \frac{1 + \sigma e^{-i\pi\alpha_i(t)}}{\sin \pi\alpha_i(t)} (\beta^\pm(t))_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} E_{\lambda\mu}^{\alpha_i, \pm}(x). \tag{2.43}$$

Здесь суммирование производится по всем полюсным траекториям i , дающим вклад в данную амплитуду, а $E_{\lambda\mu}^{J+}$ означает асимптотические выражения для $e_{\lambda\mu}^{J+}$, определяемые (2.42). Так как

$$\cos \theta_t = \frac{2s + t - \sum_{i=1}^4 m_i^2}{k_t k_t'} + \frac{(m_4^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_1^2)}{4t k_t k_t'}, \quad k_t \equiv |\mathbf{k}_t|,$$

то при больших $s \rightarrow \infty$

$$2 \cos \theta_t \approx \frac{s}{k_t k_t'}, \tag{2.44}$$

где k_t и k_t' — импульсы начальной и конечной системы в t -канале. Используя (2.44) и формулу

$$P_\alpha(\cos \theta) \approx \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)} (2 \cos \theta)^\alpha,$$

получаем, имея в виду (2.42):

$$\begin{aligned}
 E_{00}^{\alpha+}(\cos \theta_t) &\approx \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^\alpha, \\
 E_{01}^{\alpha+}(\cos \theta_t) &\approx \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha-1}, \\
 E_{02}^{\alpha+}(\cos \theta_t) &\approx \frac{4\alpha(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)(\alpha-1)(\alpha+2)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha-2}, \\
 E_{11}^{\alpha+}(\cos \theta_t) &\approx \frac{2\alpha^2}{\alpha(\alpha+1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha-1}, \\
 E_{12}^{\alpha+}(\cos \theta_t) &\approx \frac{4\alpha^2(\alpha-1)}{\alpha(\alpha+1)\sqrt{(\alpha-1)(\alpha+2)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + 1)} \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha-2}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Траектории полюсов Редже. Выясним, какие траектории возможны и какие из них дают вклад в данный процесс. Как мы уже говорили, основной характеристикой траектории является сигнатура. Для полного описания траектории кроме сигнатуры надо задать значение электрического заряда Q , барионного заряда B , странности S , изотопического спина I , пространственной четности P и G -четности (если $B = 0$ и $S = 0$), зарядовой четности (для истинно нейтральных систем). Вместо G -четности удобнее пользоваться $G' = (-1)^I G$. Обычно траектории называют именем тех частиц, которые имеют такие же квантовые числа, как и траектории; иногда траекториям присваивают специальные названия. Например, траектория с квантовыми числами ω -мезона $\sigma = -1$, $P = -1$, $G = -1$, $I = 0$, $B = 0$, $Q = 0$ называется ω -траекторией и т. п. Вакуумную траекторию с квантовыми числами $\sigma = +1$, $P = +1$, $G = +1$, $I = 0$, $B = 0$, $Q = 0$ называют P -траекторией (или траекторией Померанчука) и т. п.

Возможны следующие бозонные траектории (рядом указано принятое обозначение траектории) с $I = 0$ и 1 и различными относительными знаками у σ , P и G' : 1 знаки σ , P , G' одинаковы (такие траектории образуют вакуумную группу):

$$\left. \begin{aligned}
 &\sigma = P = G' = \pm 1 \\
 I = 0 \quad \sigma = P = G = +1 & \quad P, P' \text{-траектория;} \\
 I = 0 \quad \sigma = P = G = -1 & \quad \omega \text{-траектория;} \\
 I = 1 \quad \sigma = P = -G = +1 & \quad A_2 \text{-траектория;} \\
 I = 1 \quad \sigma = P = -G = -1 & \quad \rho \text{-траектория;}
 \end{aligned} \right\} \tag{2.46}$$

2) знак P противоположен знаку σ и G' (траектории псевдоскалярной группы):

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= -P = G' = \pm 1 \\ I=0 \quad \sigma &= -P = G = +1 \quad \eta\text{-траектория}; \\ I=0 \quad \sigma &= -P = G = -1 \quad \eta'\text{-траектория (не наблюдалась)}; \\ I=1 \quad \sigma &= -P = -G = +1 \quad \pi\text{-траектория}; \\ I=1 \quad \sigma &= -P = -G = -1 \quad B\text{-траектория}; \end{aligned} \right\} (2.47)$$

3) знаки P и G' противоположны знаку σ (траектории аксиальной группы):

$$\left. \begin{aligned} I=0 \quad \sigma &= -P = -G = +1 \quad D'\text{-траектория (не наблюдалась)}; \\ I=0 \quad \sigma &= -P = -G = -1 \quad D\text{-траектория}; \\ I=1 \quad \sigma &= -P = G = 1 \quad A_1'\text{-траектория (не наблюдалась)}; \\ I=1 \quad \sigma &= -P = G = -1 \quad A_1\text{-траектория}. \end{aligned} \right\} (2.48)$$

Как показывает анализ, для удовлетворительного описания имеющихся опытных данных одной вакуумной траектории P (в комбинации с другими) недостаточно. Поэтому была введена вторая вакуумная траектория P' , обладающая теми же квантовыми числами, что и P . Обычно P -траектории сопоставляют f_{1254} -частицу, а P' -траектории — f_{1500} -частицу.

Так как сохраняющиеся квантовые числа начальной и конечной системы должны быть одинаковыми, то в промежуточном состоянии для данного процесса допустимы лишь определенные реджионные состояния, общие для начальной и конечной систем частиц. Найдем допустимые реджионные состояния для некоторых процессов. Рассмотрим для примера процессы, начальное и конечное состояние которых по s -каналу содержат нуклон

$$1 + N \rightarrow 3 + N.$$

По третьему каналу таким реакциям соответствуют процессы, в начальном состоянии которых имеется пара нуклон — антинуклон $N\bar{N}$:

$$N + \bar{N} \rightarrow \bar{1} + 3.$$

Покажем, что начальная система $N\bar{N}$ может находиться в любом из перечисленных выше реджионных состояний, и, следовательно, допустимые промежуточные состояния для процесса $N + \bar{N} \rightarrow \bar{1} + 3$ определяются конечной системой частиц. Полный изотопический спин начальной системы $I = 0, 1$, а ее полный спин $s = 0, 1$. Пусть орбитальный момент системы нуклон—антинуклон равен l , а полный момент J . Система $N\bar{N}$ может находиться в синг-

летном ($s = 0$) и триплетном ($s = 1$) состояниях: ${}^1l_{J=l}$ (синглет) ${}^3l_{J=l}$ и ${}^3l_{J=l\pm 1}$ (триплет). Если задано l , то сигнатура $\sigma = (-1)^l$ для состояний ${}^1l_{J=l}$, ${}^3l_{J=l}$ и $\sigma = (-1)^{l+1}$ для состояний ${}^3l_{J=l\pm 1}$.

Нуклон и антинуклон имеют противоположные пространственные четности, поэтому пространственная четность $N\bar{N}$ -системы с заданным l есть $(-1)^{l+1}$. Так как, согласно формуле (5.3), гл. 10,

$$G' = (-1)^l G = (-1)^{l+s},$$

то для синглетных состояний $G' = (-1)^l$, а для триплетных $G' = (-1)^{l+1}$. Таким образом, система $N\bar{N}$ с данным значением l может находиться в следующих состояниях:

- а) $\sigma = G' = P = (-1)^{l+1} = \pm 1$, если ${}^3l_{J=l\pm 1}$;
- б) $\sigma = -G' = -P = (-1)^l = \pm 1$, если ${}^3l_{J=l}$;
- в) $\sigma = G' = -P = (-1)^l = \pm 1$, если ${}^1l_{J=l}$,

т. е. система $N\bar{N}$ может находиться в любом из состояний, перечисленных выше.

Найдем допустимые промежуточные реджионные состояния (из обнаруженных) для нескольких конкретных реакций в t -канале.

1. $p\bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^-$. Изотопический спин $\pi^+\pi^-$ -системы может принимать два значения: 0 и 1 (значение $I = 2$ запрещено законом сохранения изоспина). Для $\pi^+\pi^-$ -системы, обладающей орбитальным моментом l :

$$\sigma = (-1)^l = \pm 1, \quad P = (-1)^l = \pm 1, \quad G' = (-1)^l = \pm 1.$$

Так как G -четность $\pi^+\pi^-$ -системы положительна, $G = +1$, то в процесс $N\bar{N} \rightarrow \pi^+\pi^-$ дают вклад такие реджионные состояния:

$$\sigma = P = G = +1, \quad I = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{вакуумная траектория } P \\ \text{вакуумная траектория } P' \end{array} \right); \quad (2.49)$$

$$\sigma = P = -G = -1, \quad I = 1 \quad (\rho\text{-траектория}). \quad (2.50)$$

Следовательно, в процесс $p\bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^-$ дают вклад P -, P' - и ρ -траектории.

2. $p\bar{n} \rightarrow \pi^+\pi^0$. Изотопический спин $\pi^+\pi^0$ -системы может принимать только одно значение $I = 1$ (так как суммарная проекция $I_z = 1$ содержится только в $I = 1$). Поэтому для реакции $p\bar{n} \rightarrow \pi^+\pi^0$ допустимо лишь промежуточное реджионное состояние (2.50).

3. $\bar{p}p \rightarrow K^+K^-$. Изотопический спин K^+K^- -системы $I = 0, 1$. Так, как K^+K^- -система не имеет определенной G -четности, то в процесс $\bar{p}p \rightarrow K^+K^-$ дают вклад не только промежуточные состояния (2.49) и (2.50) с положительной G -четностью, но и состояния с отрицательной G -четностью:

$$\sigma = P = G = -1, \quad I = 0 \quad (\omega\text{-мезонная траектория}); \quad (2.51)$$

$$\sigma = P = -G = +1, \quad I = 1 \quad (A_2\text{-траектория}). \quad (2.52)$$

4. $\bar{p}\bar{n} \rightarrow K^+\bar{K}^0$. Так как проекция изоспина системы $I_z = 1$, то для реакции $\bar{p}\bar{n} \rightarrow K^+\bar{K}^0$ допустимы лишь промежуточные реджионные состояния с $I = 1$, т. е. состояния (2.50) и (2.52).

5. $\bar{p}p \rightarrow \gamma\pi^0$. Для $\gamma\pi^0$ -системы, обладающей орбитальным моментом l , $\sigma = (-1)^l$ и $(-1)^{l\pm 1}$, $P = -(1)^l$ и $(-1)^{l\pm 1}$. В случае изовекторных фотонов C - и G -четности π^0 - γ -системы отрицательны (так как $G_\pi = -1$, $G_\gamma^v = +1$ и $C_\pi = +1$, $C_\gamma^v = -1$). Изоспин $I = 0, 1$, однако возможно лишь значение $I = 0$ (суммарная проекция $I_z = 0$). Поэтому в случае изовекторных фотонов в реакцию $\bar{p}p \rightarrow \gamma\pi^0$ дают вклад следующие промежуточные реджионные состояния:

$$\left. \begin{aligned} I=0, \sigma = P = -1, G = -1, C = -1 & \quad (\omega\text{-траектория}); \\ I=0, \sigma = -P = -1, G = -1, C = -1 & \quad (\eta'\text{-траектория}); \\ I=0, \sigma = -P = 1, G = -1, C = -1 & \quad (D'\text{-траектория}). \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

В случае изоскалярных фотонов $I = 1$ (так как $I = 0$ запрещено законом сохранения изоспина), $G = +1$ (ибо $G_\gamma^s = -1$) и в реакции $\bar{p}p \rightarrow \gamma\pi^0$ допустимы такие промежуточные реджионные состояния:

$$\left. \begin{aligned} I=1, \sigma = P = -1, G = +1, C = -1 & \quad (\rho\text{-траектория}); \\ I=1, \sigma = -P = -1, G = +1, C = -1 & \quad (B\text{-траектория}); \\ I=1, \sigma = -P = 1, G = +1, C = -1 & \quad (A_1'\text{-траектория}); \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

следовательно, в процесс $\bar{p}p \rightarrow \gamma\pi^0$ дают вклад состояния (2.53) и (2.54).

6. $\bar{p}\bar{n} \rightarrow \gamma\pi^+$. Изотопический спин $\bar{p}\bar{n}$ -системы принимает только одно значение $I = 1$, а ее зарядовая четность не фиксирована. В случае изовекторных фотонов $G = -1$, и допустимыми промежуточными состояниями являются:

$$\left. \begin{aligned} I=1, \sigma = P = 1, G = -1, C = 1 & \quad (A_2\text{-траектория}); \\ I=1, \sigma = -P = -1, G = -1, C = 1 & \quad (A_1\text{-траектория}); \\ I=1, \sigma = -P = 1, G = -1, C = 1 & \quad (\pi\text{-траектория}). \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

В случае изоскалярных фотонов разрешены промежуточные состояния (2.54).

Таким образом, в процесс $\rho\bar{n} \rightarrow \gamma\pi^+$ (или $n\bar{r} \rightarrow \gamma\pi^-$) дают вклад состояния (2.54) и (2.55).

Допустимые промежуточные реджионные состояния для некоторых реакций приведены в табл. 19.1. Из этой таблицы, в частности, следует, что число допустимых реджионных состояний для неупругих процессов меньше, чем для упругих реакций.

Т а б л и ц а 19.1

Допустимые промежуточные реджионные состояния для некоторых процессов числа (из обнаруженных)

| Процесс | Допустимые состояния | Процесс | Допустимые состояния | |
|--|---------------------------|---|----------------------|------------------|
| | | | изоскаляр | изовектор |
| $\pi^\pm N \rightarrow \pi^\pm N$ | P, P', ρ | $\gamma N \rightarrow N\pi^\pm$ | ρ, B | A_2, π, A_1 |
| $\pi^\pm N \rightarrow \rho^\pm N$ | ω, A_2, π, A_1 | $\gamma N \rightarrow N\rho^\pm$ | A_2, π, A_1 | B, ρ |
| $\pi^\pm N \rightarrow A_1^\pm N$ | P, P', ρ, η, B, D | $\gamma N \rightarrow NA_1^\pm$ | ρ, B | A_2, π, A_1 |
| $\pi^\pm N \rightarrow \pi^\pm N_{3/2}^*$ | ρ | $\gamma N \rightarrow \pi^\pm N_{3/2}^*$ | ρ, B | A_2, π, A_1 |
| $\pi^\pm N \rightarrow \rho^\pm N_{3/2}^*$ | A_2, π, A_1 | $\gamma N \rightarrow \rho^\pm N_{3/2}^*$ | A_2, π, A_1 | B, ρ |
| $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ | ρ | $\gamma N \rightarrow N\pi^0$ | B, ρ | ω |
| $\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$ | A_2, π, A_1 | $\gamma N \rightarrow N\rho^0$ | A_2, π, A_1 | P, P', η, D |
| $\pi^\pm N \rightarrow \pi^0 N_{3/2}^*$ | ρ | $\gamma N \rightarrow \pi^0 N_{3/2}^*$ | B, ρ | — |
| $\pi^\pm N \rightarrow \rho^0 N_{3/2}^*$ | A_2, π, A_1 | $\gamma N \rightarrow \rho^0 N_{3/2}^*$ | A_2, π, A_1 | — |
| $\pi^- p \rightarrow \eta^0 n$ | A_2 | $\gamma N \rightarrow N\eta^0$ | ω | B, ρ |
| $\pi^- p \rightarrow \omega^0 n$ | ρ, B | $\gamma N \rightarrow N\omega^0$ | P, P', η, D | A_2, π, A_1 |
| $\pi^\pm N \rightarrow \eta^0 N_{3/2}^*$ | A_2 | $\gamma N \rightarrow \eta^0 N_{3/2}^*$ | — | B, ρ |
| $\pi^\pm N \rightarrow \omega^0 N_{3/2}^*$ | ρ, B | $\gamma N \rightarrow \omega^0 N_{3/2}^*$ | — | A_2, π, A_1 |

Вклад полюсов Редже в спиральные амплитуды. Выясним, в какие спиральные амплитуды с фиксированной четностью дает вклад данный полюс Редже.

Как мы уже говорили, в асимптотическом пределе спиральная амплитуда $(M^+)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ описывает переход из начального состояния с положительной J -четностью, равной $(-1)^J$, в конечное состояние с такой же четностью. Поэтому если четность сохраняется, то

в промежуточных состояниях допустимы лишь реджионы с положительной J -четностью. Другими словами, в спиральные амплитуды \bar{M}^+ дают вклад лишь реджионы с положительной J -четностью, или состояния с $\sigma P = +1$. Аналогичным образом получим, что в спиральную амплитуду $(\bar{M}^-)^{\lambda_1 \lambda_2}$ дают вклад состояния с отрицательной J -четностью, или состояния с $\sigma P = -1$. В некоторых случаях вследствие специфики процесса наряду с указанным появляются дополнительные правила отбора. Рассмотрим, например, систему $\bar{p}n$ (или $\bar{n}p$). Ее состояние с определенной J -четностью описывается, согласно (2.34) и (2.35), так:

$$\sqrt{2} |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm} = |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm} |JM; -\lambda_1 -\lambda_2\rangle. \quad (2.56)$$

Специфично для $\bar{p}n$ -системы то, что ее изоспин принимает лишь одно значение: $I = 1$, и поэтому (2.56) преобразуется при G -преобразовании следующим образом:

$$G |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm} = \begin{cases} (-1)^{J+1} |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm}, & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2; \\ \pm (-1)^{J+1} |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm}, & \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2. \end{cases} \quad (2.57)$$

Для системы $p\bar{p}$ (или $n\bar{n}$) специфично то, что она нейтральна; при C -преобразованиях состояния (2.56) преобразуются так:

$$C |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm} = \begin{cases} (-1)^J |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm}, & \text{если } \lambda_1 = \lambda_2; \\ \pm (-1)^J |JM; \lambda_1 \lambda_2\rangle_{\pm}, & \text{если } \lambda_1 \neq \lambda_2. \end{cases} \quad (2.58)$$

Условия (2.57) и (2.58) могут привести к запрету перехода системы $N\bar{N}$ в некоторые состояния, которые разрешались при учете только знака σP (см. § 4 и 5).

«Призрачные» состояния и их устранение. При малых t траекторию $\alpha(t)$ можно представить в виде

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t + \dots \quad (2.59)$$

Как видно, траектория $\alpha(t)$ при некоторых отрицательных значениях $t = t_0$ может обращаться в нуль. Выясним, каковы аналитические свойства спиральных амплитуд при $\alpha \rightarrow 0$. Сигнатурный множитель

$$\xi = -\frac{1 + \sigma e^{i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha}$$

ведет себя при $\alpha \rightarrow 0$ так:

а) если сигнатура положительна ($\sigma = +1$)

$$\xi = -\frac{1 + e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} = i - \operatorname{ctg} \frac{\pi\alpha}{2} \rightarrow \frac{1}{\alpha}; \quad (2.60)$$

б) если сигнатура отрицательна ($\sigma = -1$)

$$\xi = \frac{1 - e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} = i + \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2} \rightarrow \operatorname{const}. \quad (2.61)$$

Иначе говоря, у спиральных амплитуд с положительной сигнатурой при $\alpha = 0$ появляется полюс. Соответствующая ему масса $m_0 = \sqrt{-t_0}$ является мнимой, т. е. этот полюс отвечает нефизическому, как говорят, «призрачному» состоянию.

Для устранения нефизических полюсов в спиральных амплитудах надо предположить такое поведение вычетов при $\alpha \rightarrow 0$, которое компенсирует указанные полюса. Правильность этого предположения можно проверить экспериментально.

В случае бесспиновых частиц, когда все спиральности равны нулю и процесс описывается одной спиральной амплитудой, для компенсации нефизических полюсов (если $\sigma = +1$) надо предположить, что вычет β амплитуды (1.22) при $\alpha \rightarrow 0$ исчезает пропорционально α :

$$\beta \sim \alpha. \quad (2.62)$$

Для частиц со спином ситуация, естественно, усложняется. Пусть две частицы со спиральностями λ_1 и λ_3 переходят в определенное реджионное состояние R : $1 + 3 \rightarrow R$. Назовем переход, если $\alpha = 0$ а) s -переходом (от английского sense), если $|\lambda_1 - \lambda_3| = 0$; б) n -переходом (от английского non-sense), если $|\lambda_1 - \lambda_3| > 0$. Если $\alpha \neq 0$, то определения переписуются так: $|\lambda_1 - \lambda_3| \leq \alpha$ и $|\lambda_1 - \lambda_3| > \alpha$; мы в дальнейшем будем рассматривать только случай $\alpha = 0$.

К s -переходам $(\lambda_1, \lambda_3) \rightarrow R$ относятся $(0, 0) \rightarrow R$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow R$, $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow R$, $(1, 1) \rightarrow R$, $(-1, -1) \rightarrow R$ и т. д., а n -переходами являются $(0, 1) \rightarrow R$, $(0, -1) \rightarrow R$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \rightarrow R$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow R$, $(-1, 1) \rightarrow R$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow R$, $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) \rightarrow R$ и т. д.

Соответственно возможны три типа спиральных амплитуд для описания переходов частиц 1, 3 в частицы 2, 4 в t -канале.

а) T_{ss} -амплитуда, у которой оба перехода $1 + 3 \rightarrow$ реджион и реджион $\rightarrow 2 + 4$ являются s -переходами, например M_{00}^{00} , $M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{00}$,

$M_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $M_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ и т. д. (в частности, процесс с бесспиновыми частицами описывается T_{ss} -амплитудой);

б) T_{sn} -амплитуда, содержащая один s - и один n -переход, например $M \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{smallmatrix}$ и т. д.;

в) T_{nn} -амплитуда, у которой оба перехода относятся к n -переходам, например $M \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}$, $M \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{smallmatrix}$ и т. д.

Из (2.45) следует, что при $\alpha \rightarrow 0$ амплитуды ведут себя следующим образом (множители, не содержащие особенностей по α мы опустили):

$$T_{ss} \sim \beta_{ss} \xi s^\alpha; \quad (2.63)$$

$$T_{sn} \sim \sqrt{\alpha} \beta_{sn} \xi s^\alpha; \quad (2.64)$$

$$T_{nn} \sim \alpha \beta_{nn} \xi s^\alpha, \quad (2.65)$$

т. е. при $\alpha \rightarrow 0$ амплитуды ведут себя по-разному; при этом у T_{sn} появляется дополнительная нефизическая особенность (точка ветвления $\sqrt{\alpha}$).

Установим, как должны вести себя вычеты β_{ss} , β_{sn} , β_{nn} при $\alpha \rightarrow 0$, чтобы скомпенсировать нефизические особенности. Для этого воспользуемся тем, что квадрат вычета полюсной диаграммы равен произведению вычетов в вершинах, в частности

$$\beta_{sn}^2 = \beta_{ss} \beta_{nn}. \quad (2.66)$$

В случае положительной сигнатуры ($\sigma = +1$), как мы уже говорили, при $\alpha \rightarrow 0$ сингулярный множитель $\xi \rightarrow 1/\alpha$. Чтобы скомпенсировать этот полюс в амплитуде T_{sn} , произведение $\sqrt{\alpha} \beta_{sn}$ должно быть пропорционально целой степени α .

В простейшем случае, когда произведение $\sqrt{\alpha} \beta_{sn}$ пропорционально α , вычет β_{sn} должен быть пропорционален:

$$\beta_{sn} \sim \sqrt{\alpha}. \quad (2.67)$$

Тогда возможны два следующих варианта, с различным поведением β_{ss} и β_{nn} при $\alpha \rightarrow 0$, удовлетворяющих условию (2.66) (в скобках указано общепринятое английское название варианта):

$$\beta_{ss} \sim \text{const}, \quad \beta_{sn} \sim \sqrt{\alpha}, \quad \beta_{nn} \sim \alpha \quad (\text{choosing sense mechanism}); \quad (2.68)$$

$$\beta_{ss} \sim \alpha, \quad \beta_{sn} \sim \sqrt{\alpha}, \quad \beta_{nn} \sim \text{const} \quad (\text{choosing non-sense mechanism}). \quad (2.69)$$

Если предположить, что при $\alpha \rightarrow 0$ вычеты ведут себя по первому варианту, то мы не добьемся устранения нефизического полюса, так как, согласно (2.62), для этого надо, чтобы $\beta_{ss} \sim \alpha$, а не $\beta_{ss} \sim \text{const}$. Выбор поведения вычетов при $\alpha \rightarrow 0$ по второму варианту приводит к устранению нефизических особенностей.

В более сложном случае, когда произведение $\sqrt{\alpha} \beta_{sn}$ в (2.64) пропорционально α^2 и, следовательно,

$$\beta_{sn} \sim \alpha^{\frac{3}{2}}, \quad (2.70)$$

возможны четыре варианта, удовлетворяющие условию (2.66)

$$\beta_{ss} \sim \alpha, \beta_{sn} \sim \alpha^{\frac{3}{2}}, \beta_{nn} \sim \alpha^2 \text{ (Chew mechanism);} \quad (2.71)$$

$$\beta_{ss} \sim \alpha^2, \beta_{sn} \sim \alpha^{\frac{3}{2}}, \beta_{nn} \sim \alpha \text{ (non-compensating mechanism);} \quad (2.72)$$

$$\beta_{ss} \sim \text{const}, \beta_{sn} \sim \alpha^{\frac{3}{2}}, \beta_{nn} \sim \alpha^3; \quad (2.73)$$

$$\beta_{ss} \sim \alpha^3, \beta_{sn} \sim \alpha^{\frac{3}{2}}, \beta_{nn} \sim \text{const.} \quad (2.74)$$

Аналогично можно рассмотреть варианты с более высокой степенью α .

В случае отрицательной сигнатуры ($\sigma = -1$) возможны те же варианты, которые имеют место для положительной сигнатуры. Отличие заключается в том, что если $\sigma = -1$, то нефизический полюс в β_{ss} отсутствует и становится пригодным также и первый вариант, для которого $\beta_{ss} \sim \text{const}$.

Задавая определенный вариант поведения вычетов при $\alpha \rightarrow 0$, мы тем самым задаем поведение спиральных амплитуд. Так, для варианта (2.69) в случае $\sigma = +1$

$$T_{ss}, T_{sn}, T_{nn} \sim \text{const},$$

в случае $\sigma = -1$

$$T_{ss}, T_{sn}, T_{nn} \sim \alpha.$$

Как видно, спиральные амплитуды ведут себя по-разному при различных вариантах и сигнатурах.

В настоящее время нет метода, который позволил бы ответить на вопрос о том, какой вариант сопоставить данной траектории Редже. Поэтому делаются попытки решить проблему с помощью эксперимента: одной и той же траектории сопоставляются различные варианты и выясняется, какой из них лучше всего удовлетворяет опытным данным. Идея такого сравнения основывается на том,

что экспериментально в дифференциальном сечении процесса $d\sigma/dt$ при определенных $t = t_0$ наблюдаются провалы. Предположим, что эти провалы обусловлены тем, что при $t = t_0$ траектории обращаются в нуль: $\alpha = 0$. Тогда различные варианты поведения спиральных амплитуд при $t = t_0$ приводят к различному ходу $d\sigma/dt$ при $t = t_0$ и появляется возможность отобрать более предпочтительный вариант. Пока на этом пути получены лишь некоторые предварительные результаты.

Таким образом, для того чтобы устранить призрачные состояния, надо умножить вычеты $\beta_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$, соответствующие определенной траектории, на множитель $g_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$, вид которого определяется тем, какой вариант сопоставляется траектории. Например, если сопоставить P' -траектории вариант (2.69), то β_{ss} надо умножить на α , β_{sn} — на $\sqrt{\alpha}$, а β_{nn} оставить без изменения.

Кинематические нули. Как следует из (2.45), в асимптотические выражения для некоторых спиральных амплитуд входят такие комбинации Γ -функций, которые обращаются в нуль при определенных

значениях α . Например, при $\alpha \rightarrow -1$ выражение $\frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + 1)} \sim (\alpha + 1)$ равно нулю. Для устранения этого нуля обычно пред полагают, что при $\alpha = -1$ вычет для соответствующей спиральной амплитуды пропорционален $1/(\alpha + 1)$.

Аналогичным образом можно устранить другие нули, порожденные Γ -функциями.

Итак, при решении задачи методом комплексных моментов в приближении полюсов Редже сначала сделаем для t -канала рассматриваемого процесса следующее: 1) выберем независимые спиральные амплитуды; 2) образуем из последних спиральные амплитуды с фиксированной четностью (свободные от кинематических особенностей по s); 3) выделим из амплитуд с фиксированной четностью кинематические сингулярности по переменной t ; 4) определим те полюса Редже, которые дают вклад в данный процесс; 5) установим, в какие амплитуды дают вклад допустимые полюса Редже; 6) реджируем каждую амплитуду с фиксированной четностью, т. е. запишем ее в виде (2.43); 7) умножим входящие в (2.43) вычеты на множители, устраняющие кинематические особенности по t , призрачные состояния, кинематические нули.

Затем следует перейти из t -канала в s -канал. Так как выражения для дифференциальных сечений и поляризации вторичных частиц выглядят в обоих каналах одинаково, то переход сводится к тому, что переменные в третьем канале ($t > 0, s < 0$) следует считать переменными первого канала ($s > 0, t < 0$).

С помощью реджизованных спиральных амплитуд найдем асимптотический вид (в s -канале) сечений и поляризации вторичных барионов. Последние будут содержать неизвестные функции: вычеты $\beta^{\pm}(t)$ и траектории $\alpha(t)$. В настоящее время нет способов теоре-

тического вычисления этих функций. Поэтому их определяют сравнением теоретических выражений с соответствующими опытными данными (в этом смысле подход является сугубо феноменологическим).

Приведем два примера; оба они носят чисто иллюстративный характер.

§ 3. Рассеяние мезонов на протонах

Рассмотрим для конкретности процесс упругого рассеяния π^+ -мезонов на протонах

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p, \quad (3.1)$$

которому в третьем канале соответствует реакция:

$$p + \bar{p} \rightarrow \pi^+ + \pi^-. \quad (3.2)$$

Последняя характеризуется двумя независимыми спиральными амплитудами, в качестве которых выберем следующие:

$$M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0 \quad (s, t), \quad M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^0 \quad (s, t).$$

В данном случае, как следует из (2.15), возможны лишь спиральные амплитуды с положительной фиксированной четностью:

$$(\overline{M}^+)^0_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = 2\overline{M}^0_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}, \quad (\overline{M}^+)^0_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}} = 2\overline{M}^0_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}. \quad (3.3)$$

Чтобы удалить из амплитуд (3.3) кинематические сингулярности по t , каждую из них надо умножить соответственно на (2.23) и (2.24).

В процесс (3.1) дают вклад P -, P' и ρ -траектории (см. табл. 19.1). Для каждой из этих траекторий $\sigma P = +1$, поэтому все они могут давать вклад в каждую из амплитуд (3.3). Так как для ρ -траектории $C = -1$ и $J = 1$, то из (2.58) следует, что ρ -траектория дает вклад в обе амплитуды. Аналогичная ситуация имеет место для P - и P' -траекторий (напомним, что для P -траекторий $C = +1$ и $J = 0$), т. е. в рассматриваемом случае условие (2.58) к дополнительным запретам не приводит.

Асимптотические выражения для амплитуд в t -канале в случае, например, ρ -траектории запишутся, согласно (2.43), так:

$$\overline{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0 \quad (s, t) \approx (2\alpha_\rho + 1) \frac{1 - \exp(-i\pi\alpha_\rho)}{2 \sin \pi\alpha_\rho} \beta_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0 \quad (t) E_{00}^{\alpha_\rho}(\cos \theta_t); \quad (3.4)$$

$$\overline{M}_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^0 \quad (s, t) \approx (2\alpha_\rho + 1) \frac{1 - \exp(-i\pi\alpha_\rho)}{2 \sin \pi\alpha_\rho} \beta_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^0 \quad (t) E_{10}^{\alpha_\rho}(\cos \theta_t).$$

Введем функции $\gamma(t)$, свободные от кинематических сингулярностей по t :

$$\gamma_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}(t) = \frac{\beta_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}(t) N_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}}{g_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}(k_t k'_t)^\alpha} \cdot \frac{\left(\alpha_\rho + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha_\rho + \frac{1}{2}\right)}{\pi} s_0^{\alpha_\rho};$$

$$\gamma_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0}(t) = \frac{\beta_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0} N_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0}}{g_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0}(k_t k'_t)^{\alpha-1}} \cdot \frac{\left(\alpha_\rho + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\alpha_\rho + \frac{1}{2}\right)}{2\pi \sqrt{\alpha_\rho + 1}} s_0^{\alpha_\rho - 1}.$$

Здесь, согласно (2.23) и (2.24), $N_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0} = (t - 4M^2)^{\frac{1}{2}}$, $N_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0} = (t - 4\mu^2)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}$; если сопоставить ρ -траектории (с отрицательной сигнатурой) ss -амплитуду, то (2.68) дает $g_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0} = 1$, $g_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0} = \sqrt{\alpha}$. Тогда получим вместо (3.4);

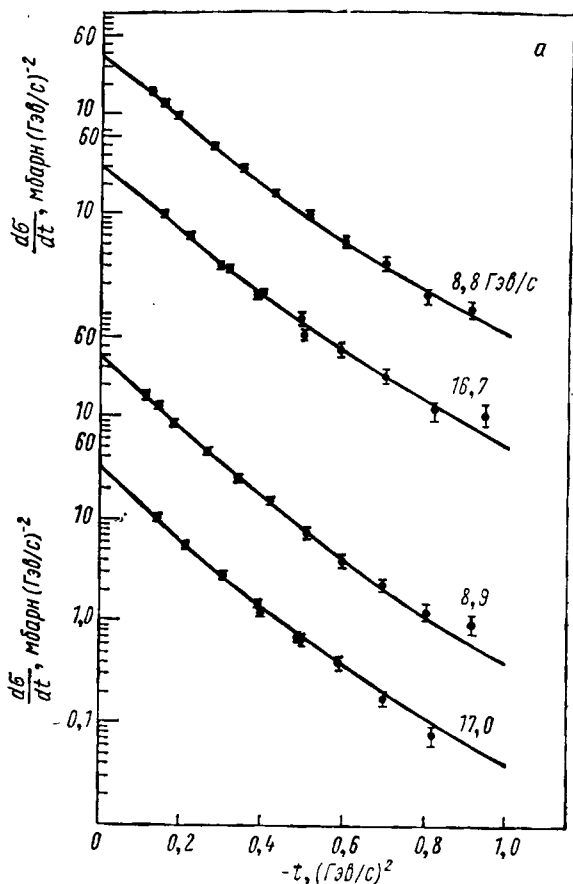
$$\overline{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}(s, t) \approx (1 - e^{-i\pi\alpha_\rho}) \frac{1}{\Gamma(\alpha_\rho + 1) \sin \pi\alpha_\rho} \times \\ \times (t - 4M^2)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\rho};$$

$$\overline{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 0}(s, t) = (1 - e^{-i\pi\alpha_\rho}) \frac{1}{\Gamma(\alpha_\rho + 1) \sin \pi\alpha_\rho} \times \\ \times \sqrt{t - 4\mu^2} \sqrt{t} \gamma_{\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}}^{0 \ 0}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\rho - 1}.$$

Аналогичным образом запишутся асимптотические выражения для спиральных амплитуд в случае P - и P' -траекторий.

При практическом анализе вместо спиральных амплитуд (3.3) использовались другие амплитуды A и B , асимптотические выражения для которых записывались в виде:

$$\left. \begin{aligned} A &= C_0 e^{C_1 t} \alpha (\alpha + 1) \xi^+ \left(\frac{E_L}{E_0}\right)^\alpha \text{ для } P \text{ и } P' \text{-траектории;} \\ A &= C_0 [(1 + C_2) e^{C_1 t} - C_2] (\alpha + 1) \xi^- \left(\frac{E_L}{E_0}\right)^\alpha \text{ для } \rho \text{-траектории;} \\ B &= D_0 e^{D_1 t} \alpha^2 (\alpha + 1) \xi^+ \left(\frac{E_L}{E_0}\right)^{\alpha-1} \text{ для } P \text{ и } P' \text{-траектории;} \\ B &= D_0 e^{D_1 t} \alpha (\alpha + 1) \xi^- \left(\frac{E_L}{E_0}\right)^{\alpha-1} \text{ для } \rho \text{-траектории,} \end{aligned} \right\} (3.5)$$



где E_L — полная энергия мезона в лабораторной системе координат;
 $E_0 = 1 \text{ Мэв}$; $\xi_{\pm} = \frac{1 \pm e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha}$.

Дифференциальное сечение процесса и поляризация протона отдачи выражается через A и B так:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\pi s} \left(\frac{M}{4k} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{t}{4M^2} \right) |A|^2 - \frac{t}{4M^2} \left(\frac{4M^2 p^2 + st}{4M^2 - t} \right) |B|^2 \right]; \quad (3.6)$$

$$\frac{d\delta}{dt} P_n = -\frac{\sin \theta}{16\pi \sqrt{s}} \text{Im}(AB^*), \quad (3.7)$$

где p , k — импульс мезона соответственно в лабораторной системе координат и в с.ц.м.

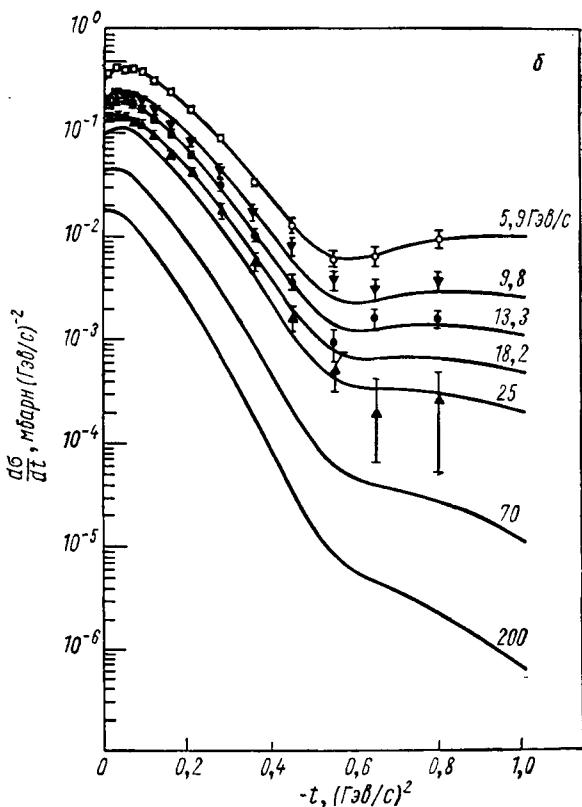


Рис. 19.3. Значения дифференциальных сечений, вычисленных с помощью параметров табл. 19.2:
 а—для процессов $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ и $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$; б—для процесса $\pi^-p \rightarrow \pi^0+n$.

При малых t траекторию $\alpha(t)$ можно представить в виде

$$\alpha(t) = \alpha(0) + \alpha'(0)t, \quad (3.8)$$

т. е. каждая траектория характеризуется двумя числами $\alpha(0)$ и $\alpha'(0)$.

В формулы (3.6) и (3.7) войдут неизвестные величины C_i , D_i , $\alpha_i(0)$ и $\alpha'_i(0)$, характеризующие вычеты и траектории. Для определения этих величин надо подставить в левые части (3.6) и (3.7) имеющиеся опытные значения $d\sigma/dt$ и P_n . Такой анализ был произведен не для одного процесса $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$, а для совокупности а) трех процессов πp -рассеяния ($\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$, $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$), б) рассеяния протонов на протонах и в) рассеяния протонов на антипротонах

(в последних двух реакциях учитывался вклад P -, P' - и ω -траекторий).

Из-за наличия большого числа параметров было найдено четыре набора, несколько отличающихся друг от друга. Набор параметров C_i , D_i , $\alpha_i(0)$, $\alpha'_i(0)$, дающих наилучшие совпадения с опытными

Таблица 19.2

Значения параметров, входящих в формулы (3.5)

| Состояние | $\alpha(0)$ | $\alpha'(0)$, $\Gamma_{\omega\omega}^{-2}$ | C_0 , $\text{мбарн} \cdot \Gamma_{\omega\omega}$ | C_1 , $\Gamma_{\omega\omega}^{-2}$ | D_0/C_0 , $\Gamma_{\omega\omega}^{-1}$ | $D_1 - C_1$, $\Gamma_{\omega\omega}^{-2}$ | |
|-----------|-------------|--|---|---|---|--|---------------------------------------|
| P | 1 | 0,12 | 7,23 | 2,36 | -3,69 | 7,02 | |
| P' | 0,73 | 1,5 | 16,35 | 0,44 | -3,52 | 3,42 | |
| ρ | 0,58 | 0,94 | 1,47 | 0,20 | C_2 | D_0 , мбарн | D_1 $\Gamma_{\omega\omega}^{-2}$ |
| | | | | | 15,2 | 26,3 | 0,34 |

Примечание. Для $\alpha(0)$ и $\alpha'(0)$, относящихся к ω -траектории, анализ дает следующие значения: $\alpha_{\omega}(0) = 0,45$; $\alpha'_{\omega}(0) = 0,31$.

данными, приведен в табл. 19.2. Вычисленные с помощью этих параметров значения дифференциальных сечений процессов $\pi^{\pm}p \rightarrow \pi^{\pm}p$ и $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ изображены на рис. 19.3.

§ 4. Фотообразование π -мезонов на нуклонах

Рассмотрим третий канал процесса фотообразования π -мезонов на нуклонах:



Этот процесс описывается четырьмя независимыми спиральными амплитудами, в качестве которых выберем следующие:

$$M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0(s, t), M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0(s, t), M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0(s, t), M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^0(s, t).$$

Согласно (2.14'), последние амплитуды, свободные от кинематических сингулярностей по переменной s , запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} &= \frac{1}{\sin \theta_t} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}, \quad \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1} = \frac{1}{\sin \theta_t} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1}, \\ \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} &= \left(2 \sin^2 \frac{\theta_t}{2}\right)^{-1} \cdot M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}, \quad \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1} = \\ &= \left(2 \cos^2 \frac{\theta_t}{2}\right)^{-1} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

С помощью (2.15) найдем спиральные амплитуды t -канала с фиксированной четностью:

$$\left. \begin{aligned} (\bar{M}^{\pm})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} &= \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} \pm \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1}, \\ (\bar{M}^{\pm})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} &= \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} \mp \bar{M}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Учитывая (2.30'), получаем спиральные амплитуды \tilde{M} , свободные от кинематических сингулярностей по s и по t :

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} &= (t - \mu^2)^{-1} (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}, \quad (\tilde{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} = \\ &= t^{\frac{1}{2}} (t - \mu^2)^{-1} (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}, \\ (\tilde{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} &= t^{\frac{1}{2}} (t - 4M^2)^{-\frac{1}{2}} (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}, \quad (\tilde{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1} = \\ &= (t - 4M^2)^{-\frac{1}{2}} (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Рассмотрим для конкретности процесс фотообразования π^0 -мезонов на протонах: $\bar{p}p \rightarrow \gamma\pi^0$. Учтем только ω - и B -траектории (см. табл. 19.1). Для B -траектории $\sigma P = -1$, поэтому она может давать вклад в амплитуды $(\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}$ и $(\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1}$. Так как для B -траектории $C = -1$ и $J = 1$, то из (2.58) следует, что B -траектория дает вклад лишь в амплитуду $(\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ 1}$. (В амплитуду $(\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{0 \ -1}$ может дать вклад только состояние с $C = 1$.) Для

ω -траектории $\sigma P = +1$, и она дает вклад в амплитуды $(\overline{M}^+)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ и $(\overline{M}^+)^{0\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$, ибо условие (2.58) к дополнительным запретам не приводит (напомним, что для ω -траектории $C = -1, J = 1$).

Имея в виду (2.43)–(2.45), получаем следующие асимптотические выражения для спиральных амплитуд:

$$(\overline{M}^+)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(s, t) \approx -\xi(\alpha_\omega) \frac{2\alpha_\omega}{\sqrt{\alpha_\omega(\alpha_\omega+1)}} (\beta^+)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha_\omega-1}; \quad (4.5)$$

$$(\overline{M}^+)^{0\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(s, t) \approx \xi(\alpha_\omega) \frac{2\alpha_\omega^2}{\alpha_\omega(\alpha_\omega+1)} (\beta^+)^{0\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha_\omega-1}; \quad (4.6)$$

$$(\overline{M}^-)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(s, t) \approx -\xi(\alpha_B) \frac{2\alpha_B^2}{\sqrt{\alpha_B(\alpha_B+1)}} (\beta^-)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{s}{k_t k_t'}\right)^{\alpha_B-1}, \quad (4.7)$$

$$\text{где } \xi(\alpha) = \frac{1 + \sigma \exp(-i\pi\alpha)}{\sin \pi\alpha}.$$

Введем функции $\gamma(t)$, свободные от кинематических особенностей;

$$\gamma_{\lambda_i}(t) = \frac{\beta_{\lambda_i}(t) N_{\lambda_i}}{g_{\lambda_i}(\alpha) (k_t k_t')^{\alpha-\lambda_m}} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(2\alpha_i+1) \Gamma\left(\alpha_i + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)},$$

где g_{λ_i} — множители, устраняющие нефизические особенности, а N определяются (2.30'). Тогда формулы (4.5)–(4.7) переписутся так:

$$\begin{aligned} (\overline{M}^+)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(s, t) &\approx -\xi(\alpha_\omega) \frac{2\alpha_\omega}{\sqrt{\alpha_\omega(\alpha_\omega+1)}} (g_\omega^+)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\alpha) (t - \mu^2) \times \\ &\quad \times (\gamma_\omega^+)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\omega-1}; \\ (\overline{M}^+)^{0\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(s, t) &\approx \xi(\alpha_\omega) \frac{2\alpha^2}{\alpha_\omega(\alpha_\omega+1)} (g_\omega^+)^{0\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(\alpha_\omega) t^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times (t - 4M^2)^{\frac{1}{2}} (\gamma_\omega^+)^{0\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\omega-1}; \quad (4.8) \\ (\overline{M}^-)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(s, t) &\approx -\xi(\alpha_B) \frac{2\alpha_\omega}{\sqrt{\alpha_B(\alpha_B+1)}} (g_B^-)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\alpha_B) t^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times (t - 4M^2)^{\frac{1}{2}} (\gamma_B^-)^{0\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_B-1}. \end{aligned}$$

Выражение для дифференциального сечения процесса $\gamma N \rightarrow \rightarrow N\pi$ в s -канале через парциальные амплитуды с фиксированной четностью выглядит следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{12\pi s k^2} \left\{ \frac{\sin^2 \theta_t}{2} \left[\left| (\overline{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{01} + (\overline{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{01} \right|^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| (\overline{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{01} - (\overline{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{01} \right|^2 \right] + \sin^4 \frac{\theta_t}{2} \left| (\overline{M}^+)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{01} + (\overline{M}^-)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{01} \right|^2 + \right. \\ \left. + \cos^4 \frac{\theta_t}{2} \left| (\overline{M}^-)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{01} - (\overline{M}^+)_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{01} \right|^2 \right\}. \quad (4.9)$$

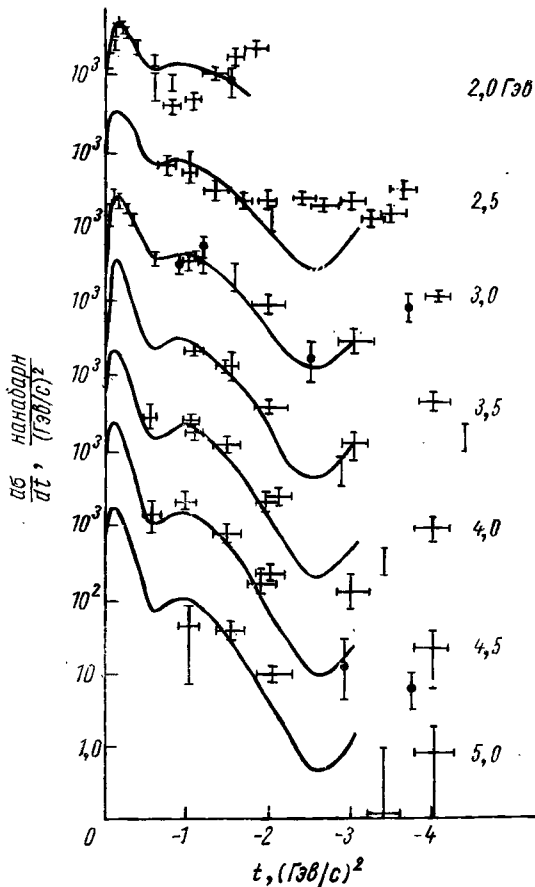


Рис. 19.4. Сравнение экспериментальных значений дифференциальных сечений процесса $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ с теоретическими (сплошные кривые), вычисленными с помощью полюсной модели Редже с учетом ω и V -траекторий.

Подставляя сюда (4.8), находим выражение для дифференциального сечения, содержащее в качестве неизвестных две траектории $\alpha_\omega(t)$ и $\alpha_B(t)$ и три вычета. Положим, что траектории $\alpha_\omega(t)$ и $\alpha_B(t)$ известны: $\alpha_\omega = 0,56 + t$, $\alpha_B = -0,3 + t$. Тогда, подставив в выражение (4.9) имеющиеся опытные данные для $d\sigma/dt$, найдем величины вычетов.

На рис. 19.4 произведено сравнение вычисленных значений дифференциальных сечений (сплошные кривые) с соответствующими экспериментальными величинами.

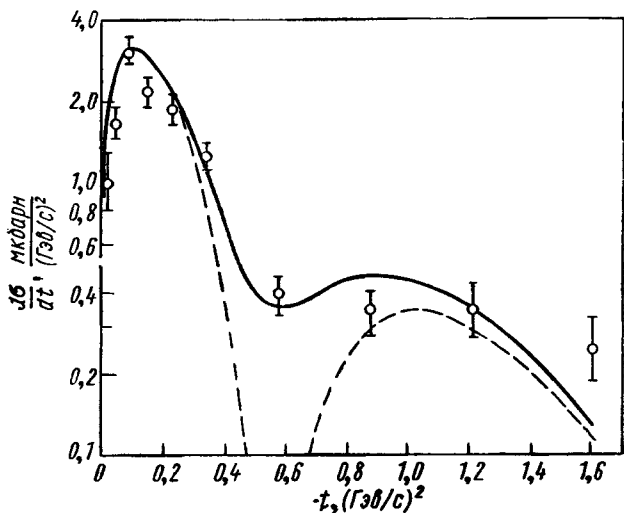


Рис. 19.5. Сравнение экспериментальных значений дифференциальных сечений процесса $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ при $E_\gamma = 3 \text{ ГэВ}$ с теоретическими величинами, вычисленными с учетом ω - и B -траекторий (сплошная кривая), с учетом только ω -траектории (пунктирная кривая).

На рис. 19.5 произведено аналогичное сравнение при энергии фотона, равной 3 ГэВ , в случае, когда учтены: а) ω - и B -траектории (сплошная кривая) и б) только ω -траектория (пунктирная кривая). Как видно, B -траектория существенно влияет на результаты.

Более детальный анализ (см. обзор Рихтера в литературе к этому параграфу) опытных данных по образованию π^0 -мезонов неполяризованными и поляризованными фотонами на протоне показывает, что фоторождение π^0 -мезонов нельзя описать ω и B -траекториями, взятыми в форме (3.8).

§ 5. Квазидвухчастичные процессы

Квазидвухчастичными называют реакции $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, в которых одна или обе частицы в конечном состоянии являются резонансными. К таким реакциям относятся процессы образования векторного мезона ($\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$, $\pi^\pm p \rightarrow \rho^\pm p$, $\pi^+ n \rightarrow \omega^0 p$, $K^\pm p \rightarrow K^{*\pm} p$, $\gamma p \rightarrow \rho \omega^0$, $\gamma p \rightarrow n \rho^+$ и т. п.), процессы с образованием барионного резонанса ($\pi^+ p \rightarrow \pi^0 N^{*++}$, $K^+ p \rightarrow K^0 N^{*++}$, $\gamma p \rightarrow N^{*+} \pi^0$ и т. п.), процессы в которых мезонные и барионные резонансы рождаются совместно ($\pi^+ p \rightarrow \omega^0 N^{*++}$, $\pi^+ p \rightarrow \rho^0 N^{*++}$; $\gamma p \rightarrow N^{*++} \pi^-$ и т. п.).

Для указанных реакций можно дополнительно измерить угловое распределение продуктов распада резонансов. Как оказывается, это угловое распределение выражается через элементы поляризационной матрицы плотности (см. гл. 7, § 9) распадающегося резонанса. Иначе говоря, с помощью экспериментального углового распределения продуктов распада резонанса можно определить элементы поляризационной матрицы плотности резонанса. В свою очередь, элементы матрицы плотности выражаются через спиральные амплитуды t -канала. Поэтому для определения параметров, входящих в спиральные амплитуды, можно использовать наряду с дифференциальными сечениями и элементы поляризационной матрицы плотности резонанса (или хотя бы угловое распределение продуктов распада резонанса). При этом оказывается, что элементы поляризационной матрицы плотности весьма чувствительны к предположениям о свойствах особенностей в l -плоскости. Приведем соответствующие формулы (без вывода).

Пусть плоскостью реакции является плоскость xz и все частицы, кроме изучаемого резонанса, не поляризованы. Тогда элементы поляризационной матрицы плотности $\rho_{\lambda\mu}$ резонанса (например, частицы 4) в системе ее покоя ($\mathbf{p}_4 = 0$) при выборе оси квантования вдоль импульса налетающей частицы запишутся через спиральные амплитуды t -канала после суммирования и усреднения по спиновым состояниям нерезонансных частиц следующим образом:

$$\rho_{\lambda\mu}(s, t) = N_p \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda} (s, t) M_{\lambda_1 \lambda_2}^{* \lambda_3 \mu}, \quad (5.1)$$

где N_p — нормировочный множитель. Согласно (1.3), гл. 9, матрица плотности $\rho_{\lambda\mu}$ обладает свойством:

$$\rho_{\lambda\mu} = (-1)^{\lambda - \mu} \rho_{-\lambda, -\mu}. \quad (5.2)$$

Кроме того, надо иметь в виду (см. гл. 7, § 9), что матрица плотности $\rho_{\lambda\mu}$ эрмитова

$$\rho_{\lambda\mu} = \rho_{\mu\lambda}^* \quad (5.3)$$

и нормирована на единицу

$$\text{Sp} \rho = 1. \quad (5.4)$$

Если учесть условия (5.2)—(5.4), то матрица плотности для резонанса со спином $s_4 = 1$ запишется в виде

$$\rho_{\lambda\mu}^{(1)} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{10} & \rho_{1,-1} \\ \rho_{10}^* & 1 - 2\rho_{11} & -\rho_{10}^* \\ \rho_{1,-1} & -\rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Два ее элемента (ρ_{11} и $\rho_{1,-1}$)—вещественные и один (ρ_{10})—комплексная функции.

Рассмотрим процесс

$$0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+ + 1^-.$$

В этом случае, например, элемент $\rho_{1,-1}$ матрицы плотности выражается через спиральные амплитуды t -канала, согласно (5.1), следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_{1,-1} = N_p \left[M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{*-10} + M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{*-10} + \right. \\ \left. + M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{*-10} + M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{*-10} \right]. \quad (5.6) \end{aligned}$$

Для спина $s_4 = 3/2$ матрица плотности имеет вид

$$\rho_{\lambda\mu}^{(3/2)} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{31} & \rho_{3,-1} & i\rho_{3,-3} \\ \rho_{31}^* & -\frac{1}{2} - \rho_{33} & i\rho_{1,-1} & \rho_{3,-1}^* \\ \rho_{3,-1}^* & -i\rho_{1,-1} & \frac{1}{2} - \rho_{33} & -\rho_{31}^* \\ -i\rho_{3,-3} & \rho_{3,-1} & -\rho_{31} & \rho_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Элементы ρ_{33} , $\rho_{3,-3}$, $\rho_{1,-1}$ являются вещественными, а остальные—комплексными функциями.

Рассмотрим процесс

$$0^- + \frac{1}{2}^+ \rightarrow 0^- + \frac{3}{2}^+.$$

С помощью (5.1) найдем вид, например, элемента ρ_{31} матрицы плотности через спиральные амплитуды t -канала:

$$\rho_{31} = N_p \left[M_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{00} M_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{*00} + M_{-\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{00} M_{-\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{*00} + M_{-\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{00} M_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{*00} + M_{\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{00} M_{-\frac{1}{2} \frac{3}{2}}^{*00} \right]. \quad (5.8)$$

Угловое распределение $W(\theta, \varphi)$ продуктов распада резонанса $4 \rightarrow a + b$ на две частицы a и b со спиральностями λ_a и λ_b выражается через элементы поляризационной матрицы плотности ρ резонанса следующим образом:

$$W(\theta, \varphi) = N_W \sum_{\substack{\lambda_a \lambda_b \\ \lambda, \mu}} |M_4(\lambda_a \lambda_b)|^2 \cos[(\lambda - \mu)\varphi] d_{\lambda\delta}^{s_a}(\theta) d_{\mu\delta}^{s_b}(\theta) \operatorname{Re} \rho_{\lambda\mu}. \quad (5.9)$$

Здесь θ и φ — полярный и азимутальный углы вылета одной из распадных частиц в выбранной нами системе координат, $d_{\lambda\delta}^{s_a}$ — функции, определяемые (2.2) и (2.4), гл. 9; $\delta = \lambda_a - \lambda_b$; $M_4(\lambda_a, \lambda_b)$ — амплитуда процесса $4 \rightarrow a + b$, для которой

$$M_4(\lambda_a, \lambda_b) = \eta_a \eta_b \eta_4 (-1)^{s_a - s_a - s_b} M_4(-\lambda_a, -\lambda_b),$$

т. е. если $s_a = s_b = 0$ или $s_a = 1/2$ и $s_b = 0$, то имеется лишь одна константа M_4 и ее можно объединить с N_W .

Если в конечном состоянии образуется нестабильная частица со спином $s = 1$ и она распадается на два псевдоскалярных мезона, то угловое распределение мезонов, согласно (5.9) и (5.5) запишется в виде:

$$\begin{aligned} W(\theta, \varphi) &= N_W \left\{ \sum_{\lambda, \mu} \cos(\lambda - \mu) \varphi d_{\lambda 0}^1 d_{\mu 0}^1 \operatorname{Re} \rho_{\lambda\mu} \right\} = \\ (m=1, m'=1, 0, -1) &= N_W \left\{ \frac{1}{2} \rho_{11} \sin^2 \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \operatorname{Re} \rho_{10} \times \right. \\ &\quad \times \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos 2\varphi \rho_{1,-1} \sin^2 \theta - \\ (m=0, m'=1, 0, -1) &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \rho_{10} \cos \varphi \cos \theta \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + (1 - 2\rho_{11}) \cos^2 \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \rho_{10} \cos \varphi \cos \theta \sin \theta - \right. \\ (m=-1, m'=1, 0, -1) &\quad \left. - \frac{1}{2} \rho_{1,-1} \cos 2\varphi \sin^2 \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Re} \rho_{10} \cos \varphi \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \rho_{11} \sin^2 \theta \right\} = N_W \left[\rho_{11} \sin^2 \theta - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{2} \operatorname{Re} \rho_{10} \cos \varphi \sin 2\theta - \rho_{1,-1} \sin^2 \theta \cos 2\varphi + (1 - 2\rho_{11}) \cos^2 \theta \right]. \quad (5.10) \end{aligned}$$

С помощью углового распределения $W(\theta, \varphi)$ можно определить элементы ρ_{11} , $\rho_{1,-11}$, но величина $\text{Im} \rho_{10}$ остается неизвестной.

Если в конечном состоянии образуется барионный резонанс, который распадается на барион и псевдоскалярный мезон, то угловое распределение мезонов (после суммирования по спиновым состояниям образовавшегося бариона), согласно (5.9) и (5.7), выглядит так:

$$W_{\frac{3}{2}}(\theta, \varphi) = N_w \left\{ \rho_{33} \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{2} - \rho_{33} \right) \left(\frac{1}{3} + \cos^2 \theta \right) - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Re} \rho_{3,-1} \sin^2 \theta \cos 2\varphi - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Re} \rho_{31} \sin 2\theta \cos \varphi \right\}.$$

Как видно, элементы $\rho_{3,-3}$ и $\rho_{1,-1}$ в выражение для $W_{\frac{3}{2}}(\theta, \varphi)$ не вошли.

Проанализируем с помощью полученных формул конкретный процесс образования ρ^0 -мезона π^- -мезоном на протоне: $\pi^- + p \rightarrow \rho^0 + n$ или в t -канале $p + \bar{n} \rightarrow \rho^0 + \pi^+$. Эта реакция описывается шестью независимыми спиральными амплитудами:

$$M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}, M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10}, M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00}, M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{00}, M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{-10}, M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{-10}.$$

Из последних можно образовать, согласно (2.15), четыре амплитуды с отрицательной J -четностью:

$$\begin{aligned} (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} &= \frac{1}{\sin \theta_t} \left(M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} - M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{-10} \right); \\ (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} &= \frac{1}{1 + \cos \theta_t} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} + \frac{1}{1 - \cos \theta_t} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{-10}; \\ (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} &= M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} + M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{-10}; \\ (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{00} &= \frac{1}{\sin \theta_t} \left(M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{00} + M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{-10} \right) \end{aligned}$$

и две амплитуды — с положительной J -четностью:

$$\begin{aligned} (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} &= \frac{1}{\sin \theta_t} \left(M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} + M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{-10} \right); \\ (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} &= \frac{1}{1 + \cos \theta_t} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} - \frac{1}{1 - \cos \theta_t} M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{-10}. \end{aligned}$$

Будем учитывать только A_2 - и π -траектории (см. табл. 19.1). Для A_2 -траектории $\sigma P = +1$, поэтому она может давать вклад в амплитуды M^+ . Так как для A_2 -траектории $G = -1$ и $J = 2$, то из (2.57) следует, что A_2 -траектория дает вклад в обе амплитуды $(\bar{M}^+)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}$ и $(\bar{M}^+)^{10}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$.

Для π -траектории $\sigma P = -1$; она дает вклад, если учесть условие (2.57), в амплитуды $(\bar{M}^-)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}$ и $(\bar{M}^-)^{00}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}$.

Сопоставим A_2 - и π -траектории соответственно pp - и ss -амплитуды; это дает, если иметь в виду (2.69) и (2.68):

$$(g_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}, \quad (g_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 1, \quad (g_\pi^-)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \sqrt{\alpha}, \quad (g_\pi^-)^{00}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = 1.$$

Множители N^\pm в данном случае определяются (2.29) и (2.30). Поэтому асимптотическое выражение для спиральных амплитуд в t -канале, свободное от кинематических особенностей, запишется так:

$$\begin{aligned} (\bar{M}_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}(s, t) &\approx \xi(\alpha_A) \alpha_A(t) \sqrt{\frac{t}{t-4M^2}} (\gamma_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_A(t)}; \\ (\bar{M}_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}(s, t) &\approx \xi(\alpha_A) \alpha_A^2(t) \frac{t}{\sqrt{t-4M^2}} (\gamma_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_A(t)}; \\ (\bar{M}_\pi^-)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}(s, t) &\approx \xi(\alpha_\pi) \frac{\alpha_\pi(t)}{s_{\pi p}} i (\gamma_\pi^-)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\pi(t)}; \\ (\bar{M}_\pi^-)^{00}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}(s, t) &\approx \xi(\alpha_\pi) \frac{1}{s_{\pi p}} \sqrt{t} (\gamma_\pi^-)^{00}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\pi(t)}; \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $s_{\pi p}^2 = [t - (m_p - m_\pi)^2][t - (m_p + m_\pi)^2]$;

$$(\gamma_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = - \frac{(\beta_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}}{\sqrt{\alpha_A(\alpha_A+1)} (k_i k_i')^{\alpha_A-1} s_{\pi p}} \cdot \frac{2\Gamma\left(\alpha_A + \frac{1}{2}\right) (2\alpha_A + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_A + 1)} s_0^{\alpha_A};$$

$$(\gamma_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = - \frac{(\beta_A^+)^{10}_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}}{s_{\pi p} \sqrt{t} (k_i k_i')^{\alpha_A-1}} \cdot \frac{(2\alpha_A + 1) 2\Gamma\left(\alpha_A + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha_A + 1) \alpha_A(\alpha_A + 1)} s_0^{\alpha_A};$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_{\pi}^{-})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} &= \frac{(\beta_{\pi}^{-})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}}{\sqrt{\alpha_{\pi}(\alpha_{\pi}+1)} \sqrt{t(t-4M^2)} (k_t k_t')^{\alpha_{\pi}-1}} \times \\
&\times \frac{2(2\alpha_{\pi}+1) \Gamma\left(\alpha_{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha_{\pi}+1)} S_0^{\alpha_{\pi}}; \\
(\gamma_{\pi}^{-})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} &= - \frac{(\beta_{\pi}^{-})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00}}{\sqrt{t} (k_t k_t')^{\alpha_{\pi}}} \cdot \frac{(2\alpha_{\pi}+1) \Gamma\left(\alpha_{\pi} + \frac{1}{2}\right)}{2 \sqrt{\pi} \Gamma(\alpha_{\pi}+1)} S_0^{\alpha_{\pi}}.
\end{aligned}$$

Выпишем еще выражения для элементов поляризационной матрицы плотности вектона.

Для процесса аннигиляции антифермиона \bar{F} и фермиона F в бозон B и π -мезон спиральные амплитуды с противоположными знаками спиральностей в асимптотическом случае связаны следующими соотношениями:

$$M_{-\lambda_{\bar{F}} \lambda_F}^{\lambda_B} (s, t) = (-1)^{\lambda_{\bar{F}} - \lambda_F} \sigma_P \eta_F (-1)^{s_F - \frac{1}{2}} M_{\lambda_{\bar{F}} \lambda_F}^{\lambda_B} (s, t), \quad (5.12)$$

$$M_{\lambda_{\bar{F}} \lambda_F}^{-\lambda_B} (s, t) = (-1)^{\lambda_B} \sigma_P \eta_B (-1)^{s_B - 1} M_{\lambda_{\bar{F}} \lambda_F}^{\lambda_B} (s, t), \quad (5.13)$$

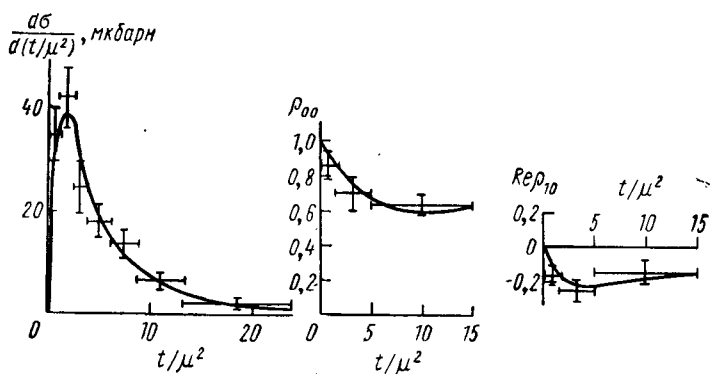
где η — внутренние четности частиц.

Из (5.12), в частности, получим, что, если $\sigma_P = +1$, $M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} = M_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10}$, $M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} = M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}$, и если $\sigma_P = -1$, $M_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} = -M_{-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10}$, $M_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} = -M_{-\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}$ и т. д. С учетом этих

соотношений элементы поляризованной матрицы плотности (5.6) вектона упрощаются:

$$\left. \begin{aligned}
\rho_{11} &= -2N \left\{ \left| (M_A)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} \right|^2 + \left| (M_A)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} \right|^2 + \left| (M_{\pi})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} \right|^2 \right\}; \\
\rho_{1-1} &= 2N \left\{ \left| (M_A)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} \right|^2 + \left| (M_A)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} \right|^2 - \left| (M_{\pi})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} \right|^2 \right\}; \\
\rho_{00} &= 2N \left| (M_{\pi})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{00} \right|^2, \quad \rho_{10} = 2N (M_{\pi})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10} \cdot (M_{\pi})_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{*00}.
\end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

В формулы (5.11) и (5.14) входят полюсные траектории $\alpha(t)$ и вычеты $\gamma(t)$. Полюсные траектории для A_2 и π -реджионов будем считать известными. Значения неизвестных вычетов можно определить с помощью имеющихся опытных данных (рис. 19.6, а) по дифферен-



а

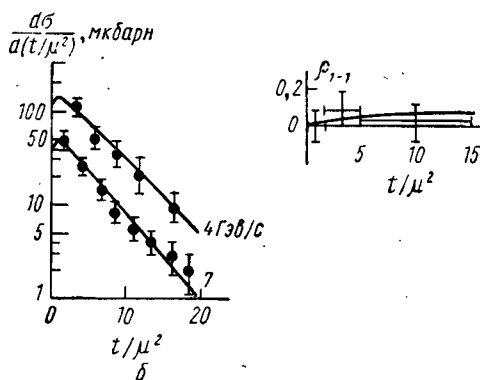


Рис. 19.6. Величины дифференциальных сечений и элементов поляризационной матрицы плотности ρ -мезона:

а — использованные при определении вычетов; б — вычисленные с помощью найденных значений вычетов (μ — масса π -мезона).

циальным сечениям и элементам ρ_{00} , $Re \rho_{10}$ матрицы плотности при импульсе π -мезона $q_\pi = 8$ ГэВ/с.

С помощью найденных значений параметров можно получить величины ρ_{1-1} при том же импульсе π -мезона и величины дифференциальных сечений при $q_\pi = 4$ ГэВ/с и $q_\pi = 7$ ГэВ/с (рис. 19.6, б).

В рамках модели полюсов Редже было проанализировано большое количество процессов. В результате выяснилось, что удовлетворительно описать опытные данные, учитывая только наблюдаемые траектории, удается не во всех случаях.

Предложено два основных выхода из создавшейся ситуации:
1) учитывать наряду с полюсами вклад точек ветвления, т. е. расширить простую модель полюсов Редже;

2) сохраняя модель полюсов Редже, предположить, что в процессы дают вклад траектории, которые пока не наблюдались (но в дальнейшем, возможно, будут наблюдаемы).

В настоящее время ведется интенсивная разработка обоих указанных возможностей.

ГЛАВА 20

ДИСПЕРСИОННЫЕ ПРАВИЛА СУММ

Как мы видели (см. гл. 17), с помощью одномерных дисперсионных соотношений можно найти (по крайней мере в двухчастичном приближении) неизвестные функции $T_i(s, t)$, входящие в выражение для инвариантной амплитуды данной реакции, т. е. определить амплитуду процесса полностью.

Наряду с этим с помощью одномерных дисперсионных соотношений и предположения об определенном поведении амплитуд при больших энергиях можно получить некоторые соотношения для интегралов от абсорбтивных частей неизвестных функций $T_i(s, t)$, входящих в выражение для инвариантной амплитуды данного процесса. Эти соотношения получили название дисперсионных правил сумм.

§ 1. Дисперсионные правила сумм

Найдем вид дисперсионных правил сумм для процесса

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4.$$

Пусть некоторые функции $T_i(s, t)$, входящие в выражение для амплитуды этой реакции, при больших энергиях s и фиксированном t удовлетворяет условию

$$T_i(s, t) < \frac{\text{const}}{s^n}, \text{ где } n > 1, \quad (1.1)$$

т. е. $T_i(s, t)$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/s$. Тогда для функций $T_i(s, t)$, $sT_i(s, t)$ и т. д. можно написать одномерные дисперсионные соотношения без вычитаний (см. гл. 15, § 5); в частности

$$T_i(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{\text{Im } T_i(s', t)}{s' - s} \quad (1.2)$$

и

$$sT_i(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ds' \frac{s' \operatorname{Im} T_i(s', t)}{s' - s}. \quad (1.3)$$

Умножая обе части (1.2) на s и вычитая полученный результат из (1.3), получаем искомое дисперсионное правило сумм

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Im} T_i(s', t) ds' = 0 \quad (1.4)$$

или

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{Im} T_i^I(s', t) ds' - \int_0^{+\infty} \operatorname{Im} T_i^{II}(u', t) du' = 0, \quad (1.5)$$

где T_i^I и T_i^{II} — функции прямого и перекрестного каналов (см. гл. 11 и 15).

В случае процессов с тождественными частицами следует учесть инвариантность относительно перекрестного преобразования (см. гл. 11), и тогда (1.5) упрощается. Для функций, четных относительно перекрестного преобразования (когда $T_i^I = +T_i^{II}$), условие (1.5) удовлетворяется автоматически. Для функций, нечетных относительно перекрестного преобразования (когда $T_i^I = -T_i^{II}$), условие (1.5) приводит к нетривиальному соотношению

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Im} T_i(s', t) ds' = 0. \quad (1.6)$$

Функции, удовлетворяющие условию (1.1), называют сверхсходящимися, а соотношения (1.4) — (1.6) — сверхсходящимися дисперсионными правилами сумм.

При практическом применении соотношения (1.6) имеется две возможности. В некоторых специальных случаях удается выразить точно абсорбтивную часть функций $T_i(s, t)$ через сечения процессов (пример такого низкоэнергетического правила сумм для комптон-эффекта мы приведем в § 2). Вследствие ограниченного характера первой возможности идут по другому пути: используя условие унитарности, аппроксимируют абсорбтивную часть одночастичным и несколькими ближайшими многочастичными состояниями, заменяют последние резонансами и находят вклад учтенных состояний в сверхсходящиеся функции $T_i(s, t)$. В результате получаются (см. § 2) определенные соотношения между константами связи и массами частиц. Недостаток такого подхода заключается в том, что конечный результат может довольно сильно зависеть от способа насыщения правил сумм, т. е. от того или иного выбора промежуточ-

ных состояний, а сказать однозначно, какие из этих состояний надо учитывать, мы не можем.

Если функция не удовлетворяет условию (1.1), т. е. не обращается в нуль при $s \rightarrow \infty$, то необходимо учитывать вклад высокоэнергетической области. Для этого введем функции $T_{ia}(s, t)$, которые при больших энергиях $s > s_a$ совпадают с функциями $T_i(s, t)$, и образуем разность

$$T'_i(s, t) = T_i(s, t) - T_{ia}(s, t). \quad (1.7)$$

Для последней уже можно написать безвычитательные дисперсионные соотношения и получить дисперсионные правила сумм. При этом удобно разбить область интегрирования на две части: $s < s_a$ и $s > s_a$; в первой области $T_i(s, t)$ совпадают с низкоэнергетическими функциями $T_{in}(s, t)$, а во второй — с $T_{ia}(s, t)$. Например, правила сумм для функций $T(s, t)$ и $sT(s, t)$ в полной аналогии с (1.6) запишутся следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \text{Im } T'_i(s', t) ds' = \int_0^{s_a} \text{Im } T_{in}(s', t) ds' - \int_{s_a}^{\infty} \text{Im } T_{ia}(s', t) ds' = 0; \quad (1.8)$$

$$\int_0^{\infty} s' \text{Im } T'_i(s', t) ds' = \int_0^{s_a} s' \text{Im } T_{in}(s', t) ds' - \int_{s_a}^{\infty} s' \text{Im } T_{ia}(s', t) ds' = 0. \quad (1.9)$$

Как показывает анализ опытных данных (см. гл. 19), функцию $T_a(s, t)$ в области больших энергий $s_a \gtrsim 5$ Гэв можно довольно хорошо описать в виде суммы нескольких полюсов Редже (см. гл. 19, § 2)

$$T_a(s, t) \approx \sum_j \xi_j \beta_j(t) s_a^{\alpha_j(t) - n_j}, \quad (1.10)$$

где n_j — целое число; ξ_j — сигнатурный множитель; $\beta_j(t)$ — вычет; $\alpha_j(t)$ — траектория реджиона.

Подставляя эту формулу во второй интеграл в (1.8) и (1.9), приходим к следующим дисперсионным правилам сумм:

$$\int_0^{s_a} \text{Im } T_{in}(s', t) ds' - \sum_j \xi_j \frac{\text{Im } \beta_j(t)}{\alpha_j(t) - n_j + 1} s_a^{\alpha_j(t) - n_j + 1} = 0, \quad (1.11)$$

$$\int_0^{s_a} s' \text{Im } T_{in}(s', t) ds' - \sum_j \xi_j \frac{\text{Im } \beta_j(t)}{\alpha_j(t) - n_j + 2} s_a^{\alpha_j(t) - n_j + 2} = 0. \quad (1.12)$$

Последние соотношения, в отличие от (1.6), назовем реджевскими дисперсионными правилами сумм.

Реджевские правила сумм связывают интеграл по низкоэнергетической области с параметрами полюсов Редже. Поэтому они позволяют вычислять параметры траекторий Редже, используя экспериментальные данные при низких энергиях (и наоборот).

Найдем дисперсионные правила сумм обоих типов для конкретных процессов.

§ 2. Сверхсходящиеся дисперсионные правила сумм

Чтобы найти сверхсходящиеся дисперсионные правила сумм для данного процесса: 1) напишем инвариантное выражение для амплитуды процесса, содержащее функции $T_i(s, t)$; 2) выясним, как ведут себя функции $T_i(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t , учитывая кинематические особенности функций $T_i(s, t)$ по переменной s ; 3) отберем сверхсходящиеся функции $T_i(s, t)$ и для тех из них, которые меняют знак при кросс-преобразовании, напишем правила сумм в виде (1.6); например, если $T_i(s, t) \sim s^{-3}$ при $s \rightarrow \infty$, то правила сумм надо писать как для $T_i(s, t)$, так и для $sT_i(s, t)$; 4) зафиксируем те промежуточные состояния, которые будут учтены; пользуясь резонансной моделью, найдем выражения, описывающие вклад учитываемых состояний в сверхсходящиеся функции $T_i(s, t)$, и подставим полученные формулы в сверхсходящиеся правила сумм.

В результате придем к определенным соотношениям между константами связи и массами частиц.

Фотообразование π -мезонов. Получим правила сумм для процесса фотообразования π -мезонов на нуклонах

$$\gamma(k_1) + N(p_1) \rightarrow \pi(q) + N(p_2).$$

1. Инвариантную спиновую структуру амплитуды процесса выберем в виде (1.14), гл. 3, а изотопическую — в форме (8.1), гл. 10.

2. Существуют различные способы определения поведения функций $T_i(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$ (использующие условие унитарности, гипотезу Редже и т. п.*). Мы предположим, что высокоэнергетические свойства инвариантных функций $T_i(s, t)$ в s -канале определяются ведущим, т. е. обладающим максимальным значением $\text{Re } \alpha$ полюсом Редже в t -канале. Поэтому воспользуемся связью инвариантных

* Заметим, что каждое из этих условий приводит к разному поведению функций $T_i(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$.

функций $T_i(s, t)$ с функциями $H_i(W_t, \theta_i)$ в с.п.м. t -канала (см. гл. 15, § 1):

$$\left. \begin{aligned} H_1(W_t, \theta_i) &= -\frac{kp}{16\pi E} (T_1 + tT_2); \\ H_2(W_t, \theta_i) &= -\frac{kp}{4\pi} T_3; \\ H_3(W_t, \theta_i) &= -\frac{M-E}{8\pi E} (T_1 + \sqrt{t}T_4); \\ H_4(W_t, \theta_i) &= -\frac{k}{16\pi E} (2MT_1 - tT_4), \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где E, k, p — соответственно энергия нуклона (или антинуклона) и модули трехмерных импульсов фотона и нуклона.

Функции H_i определенным образом связаны со спиральными амплитудами \bar{M}^\pm с фиксированной четностью (см. гл. 19, § 2) t -канала (способ получения такой связи изложен в гл. 9, § 4):

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}; \\ H_2 &= (\bar{M}^-)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10}; \\ H_3 &= (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10} - (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}}^{10}; \\ H_4 &= (\bar{M}^+)_{\frac{1}{2} -\frac{1}{2}}^{10}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Спиральные амплитуды \bar{M}^\pm свободны от кинематических особенностей по переменной s (см. гл. 19, § 2).

Для нахождения асимптотического ($s \rightarrow \infty$) вида парциальных амплитуд $(M)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(t, s)$ удобно пользоваться следующей формулой, вытекающей из выражений (2.38), (2.39), (2.42), (2.45), гл. 19:

$$\begin{aligned} (\bar{M}^\pm)_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}(t, s) &\sim \sum_J [(F^{J^\pm}(t))_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} E_{\lambda \mu}^{J^\pm}(\cos \theta_t) + \\ &+ (F^{J^\mp}(t))_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} E_{\lambda \mu}^{J^\mp}(\cos \theta_t)] \sim s^{\alpha_\mp(t) - n} + s^{\alpha_\mp(t) - n - 1}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_1 - \lambda_3, \quad \mu = \lambda_2 - \lambda_4, \quad n = \frac{|\lambda - \mu|}{2} + \frac{|\lambda + \mu|}{2} = \\ &= \max\{|\lambda|, |\mu|\}. \end{aligned}$$

В рассматриваемый процесс дают вклад полюса Редже (2.53) — (2.55), гл. 19. Ведущим (обладающим максимальным $\text{Re } \alpha$) из них является ρ -реджион; для него $\sigma P = +1$. Учитывая это обстоятель-

ство, подставляя (2.3) в (2.2) и полученный результат — в (2.1), находим, что при $s \rightarrow \infty$ и фиксированном t функции $T_i(s, t)$ ведут себя следующим образом:

$$T_{1, 2, 4}(s, t) \sim s^{\alpha(t)-1}$$

и

$$T_3(s, t) \sim s^{\alpha(t)-2}.$$

3. Так как $\alpha(t) < 1$ для $t \sim 0$, то сверхсходящейся является функция $T_3(s, t)$. Из трех ее изотопических компонент нечетными относительно кросс-преобразования являются $T_3^1(s, t)$ и $T_3^2(s, t)$ (см. гл. 11, § 2). Для последних сверхсходящиеся дисперсионные правила сумм запишутся так:

$$\int_0^{\infty} \text{Im } T_3^1(s', t) ds' = 0; \quad (2.4)$$

$$\int_0^{\infty} \text{Im } T_3^2(s', t) ds' = 0. \quad (2.5)$$

4. Используя резонансную модель, учитываем однонуклонное и резонансное N_{1238}^* промежуточные состояния. Вычисляя вклад этих состояний в функции T_3^1 и T_3^2 (см. гл. 16, § 2) и подставляя полученный результат в (2.4) и (2.5), находим

$$f_{NN\pi}(\mu_p' - \mu_n) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\lambda}{M^* + M} \left\{ \mu^* \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{t - \mu^2}{M^* + M} + \frac{\mu^2 - (M^* + M)}{2M^*} \right] + e^* \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{t - \mu^2}{M^* - M} (3M^* + M) + 3(q_{0*} + M^* + M) \right] \right\}; \quad (2.6)$$

$$f_{NN\pi}(\mu_p' + \mu_n) = 0. \quad (2.7)$$

Здесь $\frac{f_{NN\pi}^2}{4\pi} = 0,08$; $\mu_p' = 1,79$; $\mu_n = -1,91$ — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона (в ядерных магнетонах);

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 = \frac{12\pi}{p_{0*}' + M} \cdot \frac{M^* \Gamma^*}{q_*^3}; \quad \frac{\mu^*}{M^{*2} - \mathbb{W}^2 - i M^* \Gamma^*} = M_{1+} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{kq}{12\pi} \cdot \frac{e\lambda}{\mu} \sqrt{\frac{p_{0*}' + M}{p_0 + M}} \right]^{-1}; \quad \frac{e^*}{M^{*2} - \mathbb{W}^2 - i M^* \Gamma^*} = E_{1+} \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \times \right. \\ \left. \times \frac{kq}{12\pi} \cdot \frac{e\lambda}{\mu} \sqrt{\frac{p_{0*}' + M}{p_0 + M}} \right]^{-1}; \quad p_0, p_{0*}' — энергии начального и конеч-$$

ного нуклонов в с. ц. м.; q_{0*}, q_*, p_{0*} — энергия, импульс мезона, энергия нуклона в системе покоя резонанса, а величины M_{1+} и E_{1+} определяются формулами (2.11), гл. 8.

Так как $\frac{e^*}{\mu^*} \sim 0,045$, то вторым слагаемым в (2.6) пренебрежем. Кроме того, положим $t = 0$. Тогда (2.6) переписывается в виде

$$f_{NN\pi}(\mu'_p - \mu_n) = \frac{1}{3} \lambda \frac{M^* + M}{M^*} \mu^*. \quad (2.8)$$

Если положить $\Gamma^* = 120 \text{ Мэв}$, то $\lambda = 2,15$. Поэтому из (2.8) следует, что

$$\mu^* = 1,12 \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu_p.$$

Эксперимент дает

$$\mu^* = (1,28 \pm 0,02) \frac{2\sqrt{2}}{3} \mu_p.$$

Из (2.7) вытекает соотношение

$$\mu'_p = -\mu_n,$$

близкое к тому, которое наблюдается на опыте.

Комптон-эффект на нуклоне. Рассмотрим процесс упругого рассеяния фотонов на протонах

$$\gamma(k_1) + N(p_1) \rightarrow \gamma(k_2) + N(p_2). \quad (2.9)$$

Выберем в качестве независимых инварианты

$$v = \frac{(k_1 + k_2)(p_1 + p_2)}{4M}, \quad t = (p_2 - p_1)^2. \quad (2.10)$$

При $t = 0$ величина v совпадает с энергией ω налетающего фотона в лабораторной системе координат.

Покажем, что в случае рассеяния фотонов малой энергии ($v \rightarrow 0$ или $\omega \rightarrow 0$) вперед ($t = 0$) можно получить точные свержсходящиеся правила сумм (если воспользоваться низкоэнергетической теоремой для комптон-эффекта).

Инвариантную спиновую структуру амплитуды процесса запишем в виде (3.7), гл. 4. Инвариантные функции $T_i(s, t)$ связаны со спиральными амплитудами t -канала так:

$$\left. \begin{aligned} k'^2 M \frac{1}{2} \frac{1}{2}^{-1} &= k(T_2 - T_1) + k' M \cos \theta_t (T_4 - T_5); \\ k'^2 M \frac{1}{2} \frac{1}{2}^{11} &= k(T_2 + T_1) - k' M \cos \theta_t (T_4 + T_5) + 2k' T_3; \\ k'^2 M \frac{1}{2} \frac{1}{2}^{-1-1} &= k(T_2 + T_1) - k' M \cos \theta_t (T_4 + T_5) - 2k' T_3; \\ k' M \frac{1}{2} \frac{1}{2}^{-1-1} &= \sin \theta_t [(T_4 - T_5) k' - 2k T_6]; \end{aligned} \right\} (2.11)$$

$$k' M_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{-11} = \sin \theta_t [(T_4 - T_5) k' + 2kT_6];$$

$$M_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^{11} = -\sin \theta_t (T_4 + T_5),$$

где k, k' — модули трехмерных импульсов начальной и конечной системы; $\cos \theta_t = \frac{u-s}{\sqrt{t(t-4M^2)}}$.

Образуя из (2.11) спиральные амплитуды \bar{M}^\pm с фиксированной J -четностью и пользуясь формулой (2.3), находим, что свержсходящейся является функция $T_6(v, t) \sim v^{\alpha(t)-2}$. Поэтому для $T_6(v, t)$ можно записать одномерные дисперсионные соотношения без вычитаний, которые в случае рассеяния вперед ($t = 0$) выглядят так:

$$\operatorname{Re} T_6(v) = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} T_6(v')}{v' - v} dv' \quad (2.12)$$

или, учитывая, что $T_6(v) = T_6(-v)$ и $v = \omega$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_6(v) &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} \operatorname{Im} T_6(v') \left(\frac{1}{v' - v} + \frac{1}{v' + v} \right) dv' = \\ &= \frac{2v}{\pi} \mathcal{P} \int_{v_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_6(v')}{v'^2 - v^2} dv' = \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} T_6(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В с. ц. м. в случае рассеяния вперед ($k = k'$) в выражении (3.6), гл. 7 для амплитуды рассматриваемого процесса остается лишь два независимых слагаемых:

$$F(v_c) = \bar{F}_1(v_c) (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) + i \bar{F}_2(v_c) (\boldsymbol{\sigma} [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1]), \quad (2.14)$$

где

$$\bar{F}_1 = F_1 + F_2; \quad \bar{F}_2 = F_3 + F_4 + 2F_5 + 2F_6. \quad (2.14')$$

Тогда, согласно (5.6), гл. 7, если $k = k'$,

$$vT_6(\omega) = \bar{F}_2(\omega). \quad (2.15)$$

Подставив (2.15) в (2.13), получим

$$\operatorname{Re} \bar{F}_2(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \bar{F}_2(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \quad (2.16)$$

Дифференцирование последнего выражения по ω и переход к пределу малых энергий $\omega \rightarrow 0$ дает

$$\bar{F}'_2(0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\text{Im} \bar{F}_2(\omega')}{\omega'^2} d\omega'. \quad (2.17)$$

Константа $\bar{F}'_2(0)$ определяется, согласно (2.14'), формулами (3.19), гл. 17:

$$\bar{F}'_2(0) = \left. \frac{\partial \bar{F}_2(\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=0} = \frac{e^2}{2M^2} \mu_p'^2. \quad (2.18)$$

Пусть падающий фотон циркулярно поляризован. Тогда согласно оптической теореме (3.14), гл. 15

$$\text{Im Sp} [\rho_i F(\omega)] = \frac{\omega}{4\pi} \text{Sp} F^* \rho_i F, \quad (2.19)$$

где ρ_i — поляризационная матрица плотности частиц в начальном состоянии (см. гл. 7, § 9).

Из (2.19) и (2.14) следует, что

$$\text{Im} \bar{F}_2(\omega) = \frac{\omega}{4\pi} \cdot \frac{\sigma_R(\omega) - \sigma_L(\omega)}{2}, \quad (2.20)$$

где σ_R — полное сечение взаимодействия циркулярно поляризованного фотона со спиральностью $+1$ (т. е. правополяризованного фотона) с нуклоном, полностью поляризованным вдоль направления падающего фотона; σ_L — полное сечение для левополяризованного фотона при той же поляризации нуклона.

После подстановки (2.18) и (2.20) в (2.17) получим окончательно искомое правило сумм:

$$\frac{2\pi^2 e^2}{M^2} \mu_p'^2 = \int_{\omega_0}^{\infty} \frac{\sigma_R(\omega) - \sigma_L(\omega)}{\omega} d\omega. \quad (2.21)$$

Как видно, это точное правило сумм связывает константы взаимодействия частиц с интегралом от полных сечений рассеяния поляризованных частиц.

Подстановка значений констант в левую часть (2.21) дает величину, равную 205 мкбарн, а подстановка экспериментальных значений сечений в правую часть — величину 180 ± 30 мкбарн.

§ 3. Реджевские дисперсионные правила сумм

Получим реджевские дисперсионные правила сумм для процесса рассеяния π -мезонов на нуклонах

$$\pi(q_1) + N(p_1)_i \rightarrow \pi(q_2) + N(p_2) \quad (3.1)$$

в том случае, когда рассеяние происходит вперед (т. е. при $t = 0$).

Чтобы найти реджевские дисперсионные правила сумм: 1) напишем инвариантное выражение для амплитуды процесса, содержащее функции $T_i^j(s, t)$; 2) введем вместо функций $T_i^j(s, t)$ их комбинации $A_i^j(s, t)$ [смысл такой замены выяснится позже — см. формулу (3.7)]; 3) выясним, какие полюса Редже, участвующие в процессе, дают вклад в кросс-четные, а какие — в кросс-нечетные функции $A_i^j(s, t)$; 4) запишем правила сумм, используя (1.11) или (1.12); 5) с помощью оптической теоремы выразим абсорбтивные части функций A_i^j через полные сечения $\pi\rho$ -рассеяния.

1. Инвариантную структуру амплитуды этого процесса выберем в виде [см. формулы (2.4), гл. 3 и (7.4), гл. 10)]

$$M(s, t) = \bar{u}(p_2) \{ T_1^1(s, t) + T_2^1(s, t) \hat{Q} + \\ + [T_1^2(s, t) + T_2^2(s, t) \hat{Q}] [\tau_\beta, \tau_\alpha] \} u(p_1).$$

Верхние индексы характеризуют изотопические свойства амплитуд.

В качестве энергетической переменной выберем инвариантную величину $\nu = \frac{(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)}{4M}$, которая в случае рассеяния вперед совпадает с энергией ω налетающего мезона в лабораторной системе координат.

2. Вместо функций $T_1^{1,2}(\nu, t)$ и $T_2^{1,2}(\nu, t)$ удобно ввести следующие их комбинации:

$$\left. \begin{aligned} A^1(\nu, t) &= T_1^1(\nu, t) + \nu T_2^1(\nu, t); \\ A^2(\nu, t) &= T_1^2(\nu, t) + \nu T_2^2(\nu, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Первая из них является четной, а вторая — нечетной относительно кросс-преобразований (см. гл. 11, § 1).

3. В высокоэнергетическую амплитуду рассматриваемого процесса дают вклад P -, P' - и ρ -полюса Редже (см. гл. 19, § 3), обладающие различными сигнатурами.

Рассмотрим асимптотическое выражение для функции F_- с отрицательной сигнатурой

$$F_- \sim (-\nu)^\alpha - \nu^\alpha.$$

При кросс-преобразовании $v \rightarrow -v$, и поэтому

$$(F_-)_{кр} \rightarrow v^\alpha - (-v)^\alpha = -F_-,$$

т. е. функция с отрицательной сигнатурой является нечетной относительно кросс-преобразования.

Аналогично получим, что функция с положительной сигнатурой является четной относительно кросс-преобразования. Поэтому полюса с положительной сигнатурой (в нашем случае P - и P' -траектории) дадут вклад в кросс-четные функции, а с нечетной сигнатурой (т. е. ρ -траектория) — в кросс-нечетные функции.

4. С учетом сказанного дисперсионные правила сумм (1.11) и (1.12) для функций $A^2(v, t)$ и $vA^1(v, t)$ запишутся так:

$$\int_0^v \text{Im } A^2(v', t) dv' = R_1, \quad (3.3)$$

а

$$\int_0^v v' \text{Im } A^1(v', t) dv' = R_2. \quad (3.4)$$

Согласно соотношению (2.5), гл. 19, πN -рассеяние вперед характеризуется одной спиральной амплитудой, поэтому

$$R_1 = \frac{2\beta_p}{\alpha_p + 1} \left(\frac{s_a}{s_0} \right)^{\alpha_p - 1} s_a^2,$$

$$R_2 = \frac{2\beta_P}{\alpha_P + 2} \left(\frac{s_a}{s_0} \right)^{\alpha_P - 1} \frac{s_a^3}{M} + \frac{2\beta_{P'}}{\alpha_{P'} + 2} \left(\frac{s_a}{s_0} \right)^{\alpha_{P'} - 1} \frac{s_a^3}{M},$$

α, β' — параметры полюсов Редже; $s_0 = 1 \text{ Мэв}$.

Преобразуем первый интеграл в формулах (3.3) и (3.4) к другому виду.

Согласно формуле (9.4), гл. 10, изотопические функции A^1 и A^2 выражаются через функции $A(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)$, $A(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)$ процессов рассеяния мезонов с определенным зарядом следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} A^1 &= \frac{1}{2} [A(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + A(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)]; \\ A^2 &= \frac{1}{2} [A(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) - A(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)] \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } A^1 &= \frac{1}{2} [\text{Im } A(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + \text{Im } A(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)]; \\ \text{Im } A^2 &= \frac{1}{2} [\text{Im } A(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) - \text{Im } A(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

5. Из оптической теоремы (3.15), гл. 15 следует, что

$$\text{Im } A(\pi p \rightarrow \pi p) = k\sigma(\pi p \rightarrow \pi p), \quad (3.7)$$

где k — импульс мезона в лабораторной системе координат; $\sigma(\pi p \rightarrow \pi p)$ — полное сечение πp -рассеяния.

Как видно, абсорбтивные части функций A (а не T) просто связаны с полными сечениями рассеяния мезонов вперед. Именно поэтому удобно пользоваться функциями A . Подставляя (3.7) в (3.6), получаем

$$\text{Im } A^1(\omega) = \frac{k}{2} [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)]; \quad (3.8)$$

$$\text{Im } A^2(\omega) = \frac{k}{2} [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) - \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)], \quad (3.9)$$

причем при больших энергиях ($s > s_a$), когда $k \sim \omega$

$$\left. \begin{aligned} \text{Im } A^1(\omega) &= \frac{\omega}{2} [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)]; \\ \text{Im } A^2(\omega) &= \frac{\omega}{2} [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) - \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

6. Выделим в выражениях (3.3) и (3.4) полюсные члены и подставим в них (3.10). В результате получим реджевские правила сумм в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} -\frac{g_{NN\pi}^2}{4\pi} 2\pi^2 \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 + \int_{\mu}^{s_a} \omega [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p; \omega) - \\ - (\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p; \omega)] d\omega = R_1; \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} g_{NN\pi}^2 \pi^2 \left(\frac{\mu}{M}\right)^4 + \int_{\mu}^{s_a} \frac{\omega^2}{M} [\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p; \omega) + \\ + \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p; \omega)] d\omega = R_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Вычислим левые части последних формул, используя опытные значения полных сечений πp -рассеяния, а правые части — используя известные величины $\alpha(0)$ и $\beta(0)$: $\beta_p(0) = 2,75$ мбарн, $\alpha_p(0) = 0,54$, $\alpha_{p'}(0) = 1$, $\alpha_{p''}(0) = 0,5$, $\beta_p(0) = 19,7$, $\beta_{p'}(0) = 19,6$ мбарн.

Результаты вычислений для энергий $s_a = 3; 5$ и 7 Гэв приведены в табл. 20.1, в которой L_1, L_2, R_1 и R_2 — соответственно левые и правые части формул (3.11) и (3.12). Как видно, дисперсионные правила сумм справедливы при энергиях $s_a = 5$ и 7 Гэв, где наступает реджевское поведение амплитуды.

Т а б л и ц а 20.1

Значения величин L_i и R_i при различных энергиях s_a

| s_a , Гэв | L_1 | R_1 | L_2 | R_2 | $\frac{L_1}{R_1}$ | $\frac{L_2}{R_2}$ |
|----------------|-----------------|-------|------------------|--------|-------------------|-------------------|
| 3 | $36,8 \pm 10,7$ | 59,8 | $1\ 600 \pm 15$ | 1 628 | $0,62 \pm 0,18$ | $0,98 \pm 0,01$ |
| 5 | $98 \pm 11,5$ | 109 | $6\ 750 \pm 20$ | 6 863 | $0,90 \pm 0,1$ | $0,98 \pm 0,01$ |
| 7 | $172 \pm 12,7$ | 183 | $17\ 400 \pm 30$ | 17 826 | $0,94 \pm 0,07$ | $0,98 \pm 0,01$ |

Из реджевских правил сумм (3.11) и (3.12) можно найти параметры высокоэнергетического рассеяния. Так, если $\alpha_p(0) = 0,54$, то $\beta_p(0) = 2,47 \pm 0,29$ мбарн при $s_a = 5$ Гэв и $\beta_p(0) = 2,60 \pm \pm 0,19$ мбарн при $s_a = 7$ Гэв. Независимый анализ сечений при больших энергиях дает $\beta_p(0) = 2,75 \pm 0,25$ мбарн. Как видно, реджевские правила сумм могут быть использованы для получения параметров высокоэнергетического рассеяния из данных о сечениях при низких энергиях. Дальнейшие сведения о реджевских правилах сумм, в частности о модели Венециано, можно найти в обзорах Чена, Фрезера, Джекоба (см. литературу к этому параграфу).

ГЛАВА 21

АЛГЕБРА ТОКОВ

В предыдущей главе мы получили правила сумм, т. е. определенные соотношения для интегралов от абсорбтивных частей неизвестных функций $T_i(s, t)$, используя одномерные дисперсионные соотношения и предположение об определенном поведении амплитуд процесса при больших энергиях.

Правила сумм можно также получить другим методом, основанным на гипотезе о том, что электромагнитные и слабые токи, взятые для одинаковых времен, образуют алгебру Ли. В этой главе мы изложим суть метода алгебры токов и получим с его помощью типичные правила сумм. Последние, в отличие от дисперсионных, мы будем называть токовыми правилами сумм.

§ 1. Алгебра токов и токовые правила сумм

Электромагнитные и слабые токи адронов. В квантовой теории поля каждой частице приписывается свое локальное поле и свой локальный ток, при этом взаимодействие между частицами можно описать с помощью их токов.

У адронов наряду с токами, характеризующими сильное взаимодействие, имеются токи, соответствующие электромагнитным и слабым взаимодействиям. В дальнейшем мы сосредоточим внимание именно на электромагнитных и слабых взаимодействиях адронов и на токах, связанных с этими взаимодействиями.

В обычном пространстве — времени плотность электромагнитного тока $J_\mu(x)$ представляет собой четырехмерный вектор, пространственной частью которого является плотность трехмерного тока $\mathbf{J}(x)$, а временной — плотность заряда $J_0(x)$. В том же пространстве слабый ток, согласно общепринятой сейчас точке зрения, является комбинацией векторного $(J_w)_\mu(x)$ и аксиального векторного (или псевдовекторного) $\tilde{J}_\mu(x)$ токов (напомним, что значком \sim мы обозначаем псевдовеличину). Электромагнитный ток сохраняется, что математически формулируется так:

$$\frac{\partial J_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0, \quad (1.1)$$

т. е. дивергенция электромагнитного тока равна нулю. В противоположность этому аксиальный векторный ток слабого взаимодействия не сохраняется, т. е. $\frac{\partial \tilde{J}_\mu(x)}{\partial x_\mu} \neq 0$. Так как свертка $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{J}_\mu(x)$ преобразуется как псевдоскаляр, то дивергенция аксиального вектора в общем случае может быть пропорциональна произвольной комбинации полей, преобразующейся как псевдоскаляр. Обычно используют наиболее простую возможность, предполагая, что дивергенция аксиального тока пропорциональна полю псевдоскалярного π -мезона

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{J}_\mu(x) = c \tilde{\Phi}_\pi(x). \quad (1.2)$$

Коэффициент пропорциональности

$$c = \mu^2 g_{\pi \rightarrow \mu\nu} = \frac{\sqrt{2} M \mu^2 g_{NNA}}{g_{NN\pi}},$$

где $g_{\pi \rightarrow \mu\nu}$ — константа распада $\pi \rightarrow \mu + \nu$; M, μ — массы нуклона и π -мезона; $g_{NN\pi}$ — константа πN -взаимодействия $\left(\frac{1}{4\pi} g_{NN\pi}^2 = 14,6\right)$; g_{NNA} — константа слабого взаимодействия аксиального векторного мезона с нуклоном ($g_{NNA} \sim 1,18$).

Предположение (1.2) называют гипотезой частичного сохранения аксиального тока или сокращенно гипотезой РСАС (от английского partial conservation of axial current).

Наряду с пространственными свойствами токи обладают определенными изотопическими и унитарными свойствами, т. е. наряду с пространственным индексом ток обладает еще либо изотопическим, либо унитарным индексом. Как мы уже говорили (см. гл. 10, § 5), в трехмерном изотопическом пространстве электромагнитный ток является комбинацией изоскаляра ($j = 0$) и третьей ($j = 3$) компоненты изовектора:

$$J_{\mu}^i = J_{\mu}^0 + J_{\mu}^3. \quad (1.3)$$

Предположим, что двум оставшимся компонентам изовектора соответствуют векторные токи (сохраняющие странность) слабого взаимодействия. Тогда можно сказать, что векторный электромагнитный ток и векторные токи (сохраняющие странность) слабого взаимодействия образуют в изопространстве изовектор.

Электромагнитный ток в SU_3 -симметрии представляется линейной комбинацией третьей и восьмой компонент октета (см. гл. 13, § 5)

$$J_{\mu} = J_{\mu}^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} J_{\mu}^8. \quad (1.4)$$

Если предположить, что остальным компонентам октета соответствуют векторные токи (сохраняющие и несохраняющие странность) слабого взаимодействия, то можно сказать, что векторный электромагнитный ток и векторные токи слабого взаимодействия образуют октет. Аналогичным образом группируются в октет аксиальные векторные токи слабого взаимодействия. Вместо октета плотностей зарядов $J_0^k(x)$ можно ввести октет полных векторных зарядов

$$Q^k(x_0) = \int d^3x J_0^k(x) \quad (1.5)$$

и аналогично — октет полных аксиальных зарядов $\tilde{Q}_k(x_0)$

$$\tilde{Q}^k(x_0) = \int d^3x \tilde{J}_0^k(x). \quad (1.6)$$

Гипотеза РСАС (1.2) для октета аксиальных векторных токов, если принять во внимание формулы (2.12) и (2.19), гл. 13, формулируется так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\tilde{J}_{\mu}^1 - i\tilde{J}_{\mu}^2) &= c_{\pi^+} \tilde{\Phi}_{\pi^+}, & \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (\tilde{J}_{\mu}^1 + i\tilde{J}_{\mu}^2) &= c_{\pi^-} \tilde{\Phi}_{\pi^-} \\ \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \tilde{J}_{\mu}^3 &= c_{\pi^0} \tilde{\Phi}_{\pi^0} \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Как видно, гипотеза РСАС позволяет заменить дивергенцию аксиально-векторного тока полем соответствующего мезона (и наоборот).

Коммутаторы токов. Рассмотрим простую модель (типа кварковой), в которой векторный ток возникает только за счет тока барионов со спином $1/2$ и изотопическим спином $1/2$, т. е.

$$J_{\mu}^k(x) = \frac{1}{2} \bar{u}(x) \gamma_{\mu} \tau^k u(x). \quad (1.8)$$

Здесь через τ^k обозначены матрицы τ_1, τ_2, τ_3 (см. гл. 10, § 2), причем эти матрицы подчиняются следующим перестановочным соотношениям:

$$\tau^k \tau^l - \tau^l \tau^k \equiv [\tau^k, \tau^l] = i \varepsilon_{klm} \tau^m. \quad (1.9)$$

Возьмем временную $J_0^k(x)$ компоненту этого тока и образуем из нее коммутатор

$$[J_0^k(x), J_0^l(y)] \equiv J_0^k(x) J_0^l(y) - J_0^l(y) J_0^k(x). \quad (1.10)$$

Положим, что времена у токов одинаковые, т. е. $x_0 = y_0 = t$, и вычислим коммутатор.

Спинорные волновые функции, входящие в (1.8), являются операторами (вторично квантованные волновые поля) и подчиняются следующим одновременным перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned} [u_{\mu}^{+}(x, t), u_{\nu}(y, t)] &\equiv u_{\mu}^{+}(x, t) u_{\nu}(y, t) + \\ &+ u_{\nu}(y, t) u_{\mu}^{+}(x, t) = \delta_{\mu\nu} \delta(x-y); \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$[u_{\mu}(x, t), u_{\nu}(y, t)]_{+} = [u_{\mu}^{+}(x, t), u_{\nu}^{+}(y, t)]_{+} = 0. \quad (1.12)$$

С учетом этих соотношений получим (учитывая, что $\gamma_0^2 = 1$)

$$\begin{aligned} [J_0^k(x, t), J_0^l(y, t)] &= \bar{u}(x, t) [\gamma_0 \tau^k \tau^l - \gamma_0 \tau^l \tau^k] u(x, t) \delta(x-y) - \\ &- \bar{u}_a(x, t) (\tau^k)_{ab} u^+(y, t) u_b(x, t) (\tau^l)_{cd} u_d(y, t) + \\ &+ u_c^+(y, t) (\tau^l)_{cd} u_a^+(x, t) u_d(y, t) (\tau^k)_{ab} u_b(x, t). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Два последних члена в этом выражении, если учесть (1.12), сокращаются:

$$u^+(y, t) u^+(x, t) [\tau^l \gamma_0 \gamma_0 \tau^k - \tau^l \gamma_0 \gamma_0 \tau^k] u(y, t) u(x, t) = 0.$$

Оставшиеся два члена в формуле (1.13) преобразуются к следующему виду; $\bar{u}(x, t) \gamma_0 (\tau^k \tau^l - \tau^l \tau^k) u(x, t) \delta(x-y)$, т. е. окончательно рассматриваемый одновременной коммутатор токов, если

принять во внимание (1.9), запишется в случае SU_2 -симметрии так:

$$[J_0^k(\mathbf{x}, t), J_0^l(\mathbf{y}, t)] = i\varepsilon_{klm} J_0^m(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

или, если использовать свойства тензора ε_{klm} и ввести матрицы τ^+ , τ^- , τ^0 , то

$$[J_0^+(\mathbf{x}, t), J_0^-(\mathbf{y}, t)] = 2J_0^0(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (1.14)$$

Как видно, коммутатор временной компоненты векторного тока для одинаковых времен выражается через исходные токи, т. е. набор токов $J_0^k(\mathbf{x}, t)$ и $J_0^l(\mathbf{y}, t)$, взятых для одного и того же времени $x_0 = y_0 = t$, образует алгебру Ли (см. Дополнение IV) по унитарным индексам k и l .

В случае точной SU_3 -симметрии ток является восьмивектором (см. гл. 13, § 5)

$$J_\mu^k(x) = \bar{u}(x) \gamma_\mu \lambda^k u(x), \quad \tilde{J}_\mu^k(x) = \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \lambda^k u(x),$$

причем матрицы λ подчиняются коммутационным соотношениям (2.2), гл. 13.

Заменяя в предыдущих вычислениях матрицы τ матрицами λ , получаем вид интересующего нас одновременного коммутатора токов в случае SU_3 -симметрии:

$$[J_0^k(\mathbf{x}, t), J_0^l(\mathbf{y}, t)] = if_{klm} J_0^m(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (1.15)$$

Аналогичным образом можно найти выражения для коммутаторов временной $J_0^k(\mathbf{x}, t)$ и пространственной $J_n^l(\mathbf{y}, t)$ частей векторного тока (1.8):

$$\begin{aligned} & [J_0^k(\mathbf{x}, t), J_n^l(\mathbf{y}, t)] = \\ & = if_{klm} J_n^m(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i \frac{\partial}{\partial x_r} [S_{nr}^{kl}(x) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})], \end{aligned} \quad (1.16)$$

а также пространственных частей векторного тока (1.8)

$$\begin{aligned} & [J_k^l(\mathbf{x}, t), J_i^s(\mathbf{y}, t)] = -i\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \times \\ & \times \left\{ g^{kl} f_{rsm} J_0^m(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^{klit} \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \delta_{rs} \tilde{J}^{0t}(\mathbf{x}, t) + d_{rsm} \tilde{J}^{mt}(\mathbf{x}, t) \right] \right\} - \\ & - i \frac{\partial}{\partial x_q} [S_{klq}^{rs}(x) \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})] \end{aligned} \quad (1.17)$$

(при получении этого коммутатора удобно использовать соотношение $\gamma_k \gamma_l = g_{kl} + i\epsilon_{klm} \gamma_0 \gamma_m \gamma_5$). Обычно второе слагаемое в этой формуле (как специфичное для кварковой модели) во внимание не принимают.

В отличие от (1.14) в правой части (1.16) и (1.17) помимо члена, пропорционального току, появляется дополнительное слагаемое, содержащее производные (в общем случае любого порядка) от δ -функции и симметричное относительно индексов r и n . На наличие таких сингулярных членов впервые указал Швингер, и поэтому они получили название швингеровских членов. Можно показать, что швингеровские члены обязательно должны присутствовать в коммутаторах, содержащих пространственную часть тока.

Рассмотрим наряду с векторным током (1.8) аксиальный векторный ток, связанный со слабым взаимодействием:

$$\tilde{J}_\mu^k(x) = \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \tau^k u(x), \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.18)$$

Действуя тем же способом, что и при получении (1.14) — (1.17), находим выражения для одновременных коммутаторов различных компонент векторного и аксиально векторного токов; например для временных частей векторного и аксиально векторного токов:

$$[J_0^k(x, t), \tilde{J}_0^l(y, t)] = i\epsilon_{klm} \tilde{J}_0^m(x, t) \delta(x-y), \quad (1.19)$$

для временной части аксиального векторного \tilde{J}_0^k и пространственной части векторного J_n^l токов

$$\begin{aligned} & [\tilde{J}_0^k(x, t), J_r^l(y, t)] = \\ & = i\epsilon_{klm} \tilde{J}_r^m(x, t) \delta(x-y) - i \frac{\partial}{\partial x_s} [S_{rs}^{kl}(x) \delta(x-y)]. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Конечно, токи, соответствующие не модельным, а реальным физическим электромагнитным и слабым взаимодействиям, имеют более сложный вид, чем (1.8) и (1.18). Гипотеза алгебры токов является обобщением рассмотренной модели.

Гипотеза алгебры токов заключается в том, что для компонент векторного и аксиально векторного октета физических токов независимо от конкретной модели имеют место следующие коммутационные соотношения: а) для временных компонент токов

$$\left. \begin{aligned} [J_0^k(x, t), J_0^l(y, t)] &= i f_{klm} J_0^m(x) \delta(x-y); \\ [J_0^k(x, t), \tilde{J}_0^l(y, t)] &= i f_{klm} \tilde{J}_0^m(x) \delta(x-y); \\ [\tilde{J}_0^k(x, t), \tilde{J}_0^l(y, t)] &= i f_{klm} J_0^m(x) \delta(x-y); \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

б) для полных зарядов (1.5) и (1.6):

$$\left. \begin{aligned} [Q^k(t), Q^l(t)] &= if_{klm} Q^m(t); \\ [Q^k(t), \tilde{Q}^l(t)] &= if_{klm} \tilde{Q}^m(t); \\ [\tilde{Q}^k(t), \tilde{Q}^l(t)] &= if_{klm} Q^m(t); \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

в) для временных и пространственных компонент токов (S —швингеровские члены)

$$\left. \begin{aligned} [J_0^k(x, t), J_r^l(y, t)] &= if_{klm} J_r^m(x) \delta(x-y) + S; \\ [J_0^k(x, t), \tilde{J}_r^l(y, t)] &= if_{klm} \tilde{J}_r^m(x) \delta(x-y) + S; \\ [\tilde{J}_0^k(x, t), \tilde{J}_r^l(y, t)] &= if_{klm} J_r^m(x) \delta(x-y) + S; \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

г) для полных зарядов и пространственных компонент токов

$$\left. \begin{aligned} [Q^k(t), J_r^l(y, t)] &= if_{klm} J_r^m(y) + S; \\ [Q^k(t), \tilde{J}_r^l(y, t)] &= if_{klm} \tilde{J}_r^m(y) + S; \\ [\tilde{Q}^k(t), \tilde{J}_r^l(y, t)] &= if_{klm} J_r^m(y) + S; \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

д) для пространственных компонент токов

$$\left. \begin{aligned} [J_r^k(x, t), J_s^l(y, t)] &= if_{klm} J_0^m(x) g_{rs} \delta(x-y) + S; \\ [J_r^k(x, t), \tilde{J}_s^l(y, t)] &= if_{klm} \tilde{J}_0^m(x) g_{rs} \delta(x-y) + S; \\ [\tilde{J}_r^k(x, t), \tilde{J}_s^l(y, t)] &= if_{klm} J_0^m(x) g_{rs} \delta(x-y) + S. \end{aligned} \right\} \quad (1.25)$$

Как видно, векторные и аксиальные векторные токи образуют алгебру Ли по унитарным индексам.

Наряду с выписанными коммутаторами двух токов можно постулировать коммутаторы тока $J_\mu^k(x)$ и локального оператора поля $\Phi^l(x)$. Например, в случае оператора псевдоскалярного поля $\tilde{\Phi}^l(y)$

$$[J_0^k(x, t), \tilde{\Phi}^l(y, t)] = h_{klm} \tilde{\Phi}^m(x) \delta(x-y). \quad (1.26)$$

Соотношение (1.11), вследствие его одновременного характера, не зависит от масс частиц. Поэтому было сделано важное предположение, что перечисленные одновременные коммутационные соотношения имеют место как для точной, так и для нарушенной SU_3 -симметрии.

Заметим, что сначала гипотеза формулировалась лишь для временных компонент токов и полных зарядов, а затем она была расширена и на пространственные компоненты токов.

Токовые правила сумм. Нашей задачей является получение правил сумм с помощью постулированных одновременных коммутационных соотношений (1.21) — (1.25). Существует несколько способов получения токовых правил сумм. Мы изложим один из них, суть которого в общих чертах сводится к следующему.

1. С одной стороны, показывается, что произведение импульса и амплитуды, записанной через коммутатор токов для разных времен, сводится к одновременному коммутатору токов; затем последний, согласно (1.21) — (1.25), заменяется током (на этом этапе используется алгебра токов).

2. С другой стороны, записывается инвариантное выражение (см. гл. 3) для той же амплитуды, содержащее неизвестные функции $B_i(s, t)$, простым образом связанные с функциями $T_i(s, t)$, и образуется та же комбинация (произведение импульса и амплитуды).

3. Сравнение обеих комбинаций дает определенные равенства между неизвестными функциями $B_i(s, t)$.

4. Для функций $B_i(s, t)$ пишутся одномерные безвычитательные дисперсионные соотношения; подстановка последних в полученные равенства для функций $B_i(s, t)$ приводит к определенной связи между интегралами от абсорбтивных частей функций $B_i(s, t)$, а следовательно, функций $T_i(s, t)$, т. е. приводит к токовым правилам сумм.

5. Далее, как и при получении дисперсионных правил сумм, имеется две возможности.

а) Можно аппроксимировать абсорбтивную часть одночастичным и несколькими низшими многочастичными промежуточными состояниями, заменить последние соответствующими резонансами и найти их вклад в функции $B_i(s, t)$ или $T_i(s, t)$, входящие в правила сумм (см. пример в § 2).

Основной недостаток такого подхода заключается в том, что он приводит к результату, который зависит от способа насыщения, т. е. от учета тех или иных резонансных состояний, а указать однозначно, какие из этих состояний надо учитывать, мы не можем.

б) В специальном случае малых энергий для некоторых процессов удается получить точные правила сумм, без использования методики насыщения (см. пример в § 3).

§ 2. Фотообразование π -мезонов на нуклонах

Получим приближенные правила сумм для процесса фотообразования π -мезонов на нуклонах:

$$\gamma(k) + N(p_1) \rightarrow N(p_2) + \pi(q). \quad (2.1)$$

Введем следующие инвариантные величины:

$$s = (p_1 + k)^2 = M^2 + 2v + (qk), \quad v = \frac{1}{2} (p_1 + p_2)q = Pq = Pk, \quad (2.2)$$

$$t = (p_1 - p_2)^2 = (q - k)^2, \quad u = (p_1 - q)^2 = M^2 - 2v + (kq).$$

Выберем в качестве независимых переменных величины v и t .

1. Пусть $J_\mu^k(x)$, $\Phi^l(y)$ — электромагнитный и псевдоскалярный токи в вершинах $NN\gamma$ и $NN\pi$. Образует выражение, которое содержит коммутатор токов, взятых для разных времен, и связано с амплитудой процесса (2.1):

$$V_\mu = e^{i(kx - qy)} \langle p_2 | \theta(x_0 - y_0) [J_\mu^k(x), \tilde{\Phi}^l(y)] | p_1 \rangle. \quad (2.3)$$

Здесь $\langle p_2 |$ и $| p_1 \rangle$ — волновые функции конечного и начального нуклонов.

Так как сначала происходит поглощение фотона (в точке x), а затем испускание мезона (в точке y), то функция $\theta(x_0 - y_0)$ должна обладать следующим свойством:

$$\theta(x_0 - y_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 < y_0 \quad (\text{или } x_0 - y_0 < 0); \\ 0, & \text{если } x_0 > y_0 \quad (\text{или } x_0 - y_0 > 0). \end{cases} \quad (2.4)$$

Благодаря функции $\theta(x_0 - y_0)$, обеспечивается выполнение принципа причинности.

Выражение (2.3) преобразуется как вектор, для которого теорема Гаусса выглядит так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_\mu ds_\mu + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_\mu} V_\mu d^4x = 0. \quad (2.5)$$

При $t \rightarrow \pm \infty$ взаимодействие исчезает, и поэтому вкладом первого интеграла в процесс рассеяния можно пренебречь. Производя дифференцирование во втором слагаемом и вводя обозначение

$$H_\mu = i \int d^4x d^4y e^{i(kx - qy)} \langle p_2 | \theta(x_0 - y_0) [J_\mu^k(x), \tilde{\Phi}^l(y)] | p_1 \rangle, \quad (2.6)$$

получаем (опуская так называемые квазилокальные члены):

$$\begin{aligned} H_\mu^{kl} k_\mu + \int d^4x d^4y e^{i(kx - qy)} \langle p_2 | \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x_0 - y_0) \right\} [J_\mu^k(x), \tilde{\Phi}^l(y)] | p_1 \rangle + \\ + \int d^4x d^4y e^{i(kx - qy)} \langle p_2 | \theta(x_0 - y_0) \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} J_\mu^k(x), \tilde{\Phi}^l(y) \right] | p_1 \rangle + \\ + \int d^4x d^4y e^{i(kx - qy)} \langle p_2 | \theta(x_0 - y_0) \left[J_\mu^k(x), \frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{\Phi}^l(y) \right] | p_1 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Последнее слагаемое обращается в нуль, потому что $\frac{\partial}{\partial x_\mu} \tilde{\Phi}^l(y) = 0$.

Так как электромагнитный ток $J_\mu^k(x)$ сохраняется, то

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} J_\mu^k(x) = 0.$$

Кроме того, производная от θ -функции равна δ -функции

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x_0 - y_0) = \delta_{\mu 0} \delta(x_0 - y_0).$$

Учитывая две последние формулы, получаем вместо (2.7)

$$H_\mu^{kl} k_\mu + \int d^4 x d^4 y e^{i(kx - qy)} \delta(x_0 - y_0) \langle p_2 [J_0^k(x), \tilde{\Phi}^l(y)] | p_1 \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Мы видим, что определенную комбинацию для амплитуды H_μ , а именно $H_\mu k_\mu$, можно выразить через одновременный коммутатор токов, так как под интегралом появляется $\delta(x_0 - y_0)$, отличная от нуля лишь при $x_0 = y_0$.

Аналогичным образом получим, имея в виду (2.6):

$$\text{Im } H_\mu^{kl} k_\mu = 0. \quad (2.9)$$

Заменяя в (2.8) одновременной коммутатор его выражением (1.21), приходим к следующему окончательному результату (опуская швингеровские члены):

$$H_\mu^{kl} k_\mu = - \int d^4 x d^4 y e^{i(kx - qy)} \delta(x_0 - y_0) \delta(x - y) \times \\ \times \langle p_2 | i f_{klr} \tilde{\Phi}^r(y) | p_1 \rangle = i f_{klr} F^r(t). \quad (2.10)$$

Из (2.10) следует, что $H_\mu^{kl} k_\mu \neq 0$, т. е. амплитуда H градиентно не инвариантна (см. гл. I, § 5). Сумма же обоих членов в (2.10) — градиентно инвариантна.

2. Градиентно не инвариантное выражение для амплитуды $H(v, t)$ процесса (2.1) запишем в виде, аналогичном формуле (1.10), гл. 3:

$$H^{kl}(v, t) = H_\mu^{kl}(v, t) \varepsilon_\mu,$$

где

$$H_\mu^{kl}(v, t) = \langle p_2 | \gamma_5 \{ [B_1^{kl}(v, t) P_\mu + B_2^{kl}(v, t) q_\mu + B_3^{kl}(v, t) \gamma_\mu] + \\ + (\gamma k) [B_4^{kl}(v, t) P_\mu + B_5^{kl}(v, t) q_\mu + B_6^{kl}(v, t) \gamma_\mu] \} | p_1 \rangle, \quad P = \frac{1}{2}(p_1 + p_2). \quad (2.11)$$

Отсюда найдем мнимую часть амплитуды;

$$\text{Im } H^{kl}(v, t) = \text{Im } H_\mu^{kl}(v, t) \varepsilon_\mu,$$

где

$$\text{Im } H_\mu^{kl}(v, t) = \langle p_2 | \gamma_5 \{ [b_1^{kl}(v, t) P_\mu + b_2^{kl}(v, t) q_\mu + b_3^{kl}(v, t) \gamma_\mu] + \\ + (\gamma k) [b_4^{kl}(v, t) P_\mu + b_5^{kl}(v, t) q_\mu + b_6^{kl}(v, t) \gamma_\mu] \} | p_1 \rangle. \quad (2.12)$$

3. Умножим (2.11) на k_μ и приравняем в полученном выражении и формуле (2.10) коэффициенты при γ_5 и $\gamma_5(\gamma k)$; это дает

$$\nu B_1^{kl} = f_{klr} F^r(t); \quad (2.13)$$

$$B_3^{kl} + \nu B_4^{kl} = 0. \quad (2.14)$$

Аналогичным образом умножая (2.12) на k_μ и сравнивая его с (2.9), получаем

$$\nu b_1^{kl} = 0; \quad (2.15)$$

$$b_3^{kl} + \nu b_4^{kl} = 0. \quad (2.16)$$

4. Предположим, что для функций $B_i(\nu, t)$ можно записать одномерные дисперсионные соотношения по ν (при фиксированном t) без вычитания (см. гл. 15, § 5):

$$B_i(\nu, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu' \frac{\text{Im } B_i(\nu', t)}{\nu' - \nu}. \quad (2.17)$$

Подставляя эти соотношения в (2.13) и (2.14) и учитывая (2.15) и (2.16), получаем искомые токовые правила сумм для процесса (2.1):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_4^{kl}(\nu', t) d\nu' = 0; \quad (2.18)$$

$$M \int_{-\infty}^{+\infty} b_1^{kl}(\nu', t) d\nu' = f_{klr} F^r(t). \quad (2.18')$$

Соотношение между коэффициентами $B_i(\nu, t)$ найдено с помощью равенства (2.10), тем самым удовлетворено требование градиентной инвариантности амплитуды. Поэтому в правилах сумм можно заменить функции $B_i(\nu, t)$ функциями $T_i(\nu, t)$, учитывая связь между ними:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= B_6 - MB_4, & T_3 &= B_5, \\ T_2 &= \frac{-2B_1}{t - \mu^2} = \frac{4B_3}{s - M^2 - 2\nu + (kq)}, & T_4 &= \frac{1}{2} B_4. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Правила сумм (2.18) для функций $T_i(s, t)$ переписуются так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } T_4^{kl}(\nu', t) d\nu' = 0; \quad (2.20)$$

$$2(kq) \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Im } T_2^{kl}(\nu', t) d\nu' = f_{klr} F^r(t). \quad (2.21)$$

Учитывая свойства перекрестной симметрии (см. гл. 11, § 2) для $T_i(v, t)$, будем иметь

$$\int_0^{+\infty} \text{Im} [T_4^{kl}(v', t) + \eta T_4^{kl}(v', t)] dv' = 0; \quad (2.22)$$

$$2(kq) \int_0^{\infty} \text{Im} [T_2^{kl}(v', t) + \eta T_2^{kl}(v', t)] dv' = f_{klr} F^r(t). \quad (2.23)$$

5. Если аппроксимировать абсорбтивную часть $T_i(v', t)$ резонансными состояниями (см. гл. 16, § 2), то правило сумм сведется к соотношению между константами связи.

Используя резонансную модель, учитываем в прямом и перекрестном каналах (см. рис. 16.1): полюсные члены и резонансное N_{1238} -состояние.

Рассмотрим случай изотопической инвариантности. Тогда $k = +$, $l = -$. К нетривиальным правилам сумм приведут лишь функции, нечетные относительно кросс-преобразования, к которым относятся T_2^3 и T_4^3 . Поэтому (2.22) и (2.23) дают

$$\int_0^{\infty} \text{Im} T_4^3(v', t) dv' = 0; \quad (2.24)$$

$$2(kq) \int_0^{\infty} \text{Im} T_2^3(v', t) dv' = F(t). \quad (2.25)$$

Вклад учитываемых состояний в функции $T_i^3(v, t)$ вычислен в § 2, гл. 16.

Подставляя в (2.18') выражения для $T_i^3(v, t)$ и приравнявая члены при одинаковых степенях t , получаем искомые правила сумм

$$g_{NN^*\gamma}^{(2)} = 0 \quad (2.26)$$

и

$$\frac{\mu_p' - \mu_n}{2} = \frac{g_{NN^*\pi} g_{NN^*\gamma}}{g_{NN\pi} \sqrt{6} \mu^2} 2M \left\{ \frac{(M^* + M)^2}{6M^{*2}} (3M^* - M) + \frac{M\mu^2}{6M^{*2}} \right\}. \quad (2.27)$$

Здесь μ_p' , μ_n — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона g -константы взаимодействия; μ , M , M^* — массы мезона, нуклона, N_{1238} -резонанса.

Соотношение (2.26) находится в хорошем согласии с опытом. Подставляя в (2.27) экспериментальные значения $g_{NN\pi} = 13,5$, $g_{NN^*\pi} = 1,8$, $g_{NN^*\gamma}^{(1)} = 0,26$, находим $\frac{1}{2}(\mu_p' - \mu_n) = 3,1$. Этот результат не согласуется с экспериментальными данными; по-видимому, произведенное нами насыщение правил сумм не вполне удовлетворительно.

§ 3. Правило сумм Кабибо—Радикати

Найдем точные правила сумм для процесса рассеяния реального изовекторного фотона γ^v на нуклоне

$$\gamma^v(k_1) + N(p_1) \rightarrow \gamma^v(k_2) + N(p_2). \quad (3.1)$$

Для изовекторного фотона $k = +$ и $l = -$. Выберем в качестве независимых переменных величины

$$v = \frac{Pk_2}{2M} \quad \text{и} \quad t = (p_2 - p_1)^2,$$

где

$$P = (p_1 + p_2).$$

1. Выражение для амплитуды $H(v, t)$ процесса (3.1) выглядит так:

$$H^{+-}(v, t) = H_{\mu\alpha}^{+-}(v, t) \varepsilon_{1\mu} \varepsilon_{2\alpha},$$

где

$$\begin{aligned} H_{\mu\alpha}^{+-}(v, t) = & i \int d^4x d^4y e^{i(k_1 x - k_2 y)} \times \\ & \times \langle p_2 | \theta(x_0 - y_0) [J_\mu^+(x), J_\alpha^-(y)] | p_1 \rangle; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$J_\mu(x)$, $J_\alpha(y)$ — векторные электромагнитные токи.

Учитывая, что электромагнитный ток сохраняется, и используя коммутационные соотношения (1.23), получаем следующие формулы, аналогичные (2.10):

$$k_{1\mu} H_{\mu\alpha}^{+-} = -\langle p_2 | i f_{+-0} J_\alpha^0 | p_1 \rangle \equiv -\Gamma_\alpha^0(t); \quad (3.3)$$

$$k_{2\alpha} H_{\mu\alpha}^{+-} = -\langle p_2 | i f_{+-0} J_\mu^0 | p_1 \rangle \equiv -\Gamma_\mu^0(t). \quad (3.4)$$

2. Инвариантную амплитуду $H_{\mu\alpha}$, усредненную по спинам начального и конечного нуклонов, можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 f_{\mu\alpha}^{+-}(\nu, t) &= \frac{1}{4M^2} \text{Sp}(\hat{p}_2 + M) H_{\mu\alpha}^{+-}(\hat{p}_1 + M) = \\
 &= B_1^{+-}(\nu, t) \delta_{\mu\alpha} + B_2^{+-}(\nu, t) k_{1\alpha} k_{2\mu} + B_3^{+-}(\nu, t) P_\alpha k_{2\mu} + \\
 &+ B_4(\nu, t) P_\mu k_{1\alpha} + B_5(\nu, t) P_\mu P_\alpha + B_6(\nu, t) k_{2\mu} k_{2\alpha} + B_7(\nu, t) k_{1\mu} k_{1\alpha} + \\
 &+ B_8(\nu, t) k_{1\mu} k_{2\alpha} + B_9(\nu, t) k_{2\alpha} P_\mu + B_{10}(\nu, t) P_\alpha k_{1\mu}. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

При этом для правых частей равенства (3.3) и (3.4) имеем

$$\frac{1}{4M^2} \text{Sp}(\hat{p}_2 + M) \Gamma_\mu^0(\hat{p}_1 + M) = \frac{1}{M} P_\mu G_E^0(t);$$

$$\frac{1}{4M^2} \text{Sp}(\hat{p}_2 + M) \Gamma_\alpha^0(\hat{p}_1 + M) = \frac{1}{M} P_\alpha G_E^0(t),$$

где $G_E^0(t)$ — электрический изовекторный форм-фактор нуклона.

3. Имея в виду, что для реального фотона $k_1^2 = k_2^2 = 0$, придем к соотношениям, аналогичным (2.13), (2.14):

$$\left. \begin{aligned}
 (k_1 k_2) B_3(\nu, t) + (Pk_2) B_5(\nu, t) &= -\frac{2}{M} G_E^0(t); \\
 B_1(\nu, t) + (k_1 k_2) B_2(\nu, t) + (Pk_2) B_3(\nu, t) &= 0; \\
 B_3(\nu, t) &= -B_4(\nu, t); \\
 (k_1 k_2) B_6(\nu, t) + (Pk_1) B_9(\nu, t) &= \\
 = (k_1 k_2) B_7(\nu, t) + (Pk_2) B_{10}(\nu, t) &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Рассмотрим первое из этих равенств; оно записывается через инварианты ν , t следующим образом:

$$-B_3(\nu, t) \frac{Mt}{4} + B_5(\nu, t) M^2 \nu = -G_E^0(t), \quad (3.7)$$

или, если положить $\nu = 0$,

$$B_3(0, t) \frac{Mt}{4} = G_E^0(t). \quad (3.8)$$

4. Так как $B_3(v, t) = B_3(-v, t)$, то безвычитательные дисперсионные соотношения по v для $B_3(v, t)$ запишутся в виде

$$B_3(v, t) = \overset{\circ}{B}_3(v, t) + \frac{2}{\pi} \int_{v_0}^{\infty} v' \frac{\text{Im} B_3(v', t)}{v'^2 - v^2} dv', \quad (3.9)$$

где $v_0 = \mu + \frac{2\mu^2 + t}{4M}$; μ — масса π -мезона; $\overset{\circ}{B}_3$ — полюсной (одно-нуклонный) член, который при $v=0$ равен

$$\overset{\circ}{B}_3(0, t) = \frac{4}{Mt} + \frac{1}{2M^2} [1 - (\mu'_p - \mu_n)^2], \quad (3.10)$$

где μ'_p и μ_n — аномальные магнитные моменты протона и нейтрона. Подстановка (3.9) в (3.8) приводит к следующему результату, если учесть (3.10):

$$G_E^0(t) = 1 + \frac{t}{8M^2} [1 - (\mu'_p - \mu_n)^2] + \frac{Mt}{2\pi} \int_{v_0}^{\infty} \frac{\text{Im} B_3(v', t)}{v'} dv'. \quad (3.11)$$

5. Положим в этой формуле $t = 0$. Тогда из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} \text{Im} f_{\mu\mu}(v, 0) &= 4 \text{Im} B_1(v, 0) + 2(Pk_2) \text{Im} B_3(v, 0) + \\ &+ 4M^2 \text{Im} B_5(v, 0) = -4Mv \text{Im} B_3(v, 0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим последнее в (3.11). Учитывая, что $\text{Im} B_3(v, 0)$, согласно оптической теореме, выражается через полное сечение поглощения изовекторного фотона, придем к правилу сумм Кабибо — Радикати

$$\begin{aligned} \left. \frac{dG_E^0(t)}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{1}{8M^2} [1 - (\mu'_p - \mu_n)^2] + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 e} \int_{\mu + \frac{\mu^2}{2M}}^{\infty} \frac{dv}{v} \left[2\sigma_{\frac{1}{2}}(v) - \sigma_{\frac{3}{2}}(v) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $\sigma_{3/2}$ и $\sigma_{1/2}$ — полные сечения поглощения изовекторного фотона нуклоном в состояниях с изотопическим спином $3/2$ и $1/2$.

Соотношение (3.13) неплохо согласуется с имеющимися опытными данными.

ТАБЛИЦА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

В табл. I для каждой частицы приведены: символ, которым она обозначается в книге, значения пространственного спина s , изотопического спина I , странности S , барионного заряда B , пространственная внутренняя четность P , зарядовая четность C_n (для истинно нейтральных частиц), G -четность, величина массы, время жизни или ширина распада Γ ; N означает набор состояний $s^P = 0^+, 1^-, 2^+$ и т. д., A —набор состояний $s^P = 0^-, 1^+, 2^-$ и т. д.

Экспериментальные ошибки в определении величин в табл. I опущены.

Таблица I

1. Стабильные и квазистабильные частицы

| Символ | s | P | I | G | C_n | B | S | Масса, Мэв | Время жизни, сек |
|----------------|---------------|-----|---------------|-----|-------|-----|---------|---------------------------|------------------------------------|
| Фотон | | | | | | | | | |
| γ | 1 | - | | | - | 0 | 0 | 0 | Стабилен |
| Лептоны | | | | | | | | | |
| ν_e | $\frac{1}{2}$ | | | | | 0 | 0 | $0 (< 0,2 \cdot 10^{-3})$ | Стабилен |
| ν_μ | $\frac{1}{2}$ | | | | | 0 | 0 | $0 (< 1,6)$ | Стабилен |
| e^\pm | $\frac{1}{2}$ | | | | | 0 | 0 | 0,511006 | Стабилен |
| μ^\pm | $\frac{1}{2}$ | | | | | 0 | 0 | 105,659 | $2,1983 \cdot 10^{-6}$ |
| Мезоны | | | | | | | | | |
| π^\pm | 0 | - | 1 | - | | 0 | 0 | 139,578 | $2,604 \cdot 10^{-8}$ |
| π^0 | 0 | - | 1 | - | + | 0 | 0 | 134,974 | $0,89 \cdot 10^{-16}$ |
| K^\pm | 0 | - | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | ± 1 | 493,82 | $1,234 \cdot 10^{-8}$ |
| K^0 | 0 | - | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | 497,76 | 50% K_L^0 +50% K_S^0 |
| K_S^0 | 0 | - | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | | $0,862 \cdot 10^{-10}$ |
| K_L^0 | 0 | - | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | | $5,29 \cdot 10^{-8}$ |
| η | 0 | - | 0 | + | + | 0 | 0 | 548 | $\Gamma = 2,3 \pm 0,5 \text{ кэв}$ |

| Символ | <i>s</i> | <i>P</i> | <i>I</i> | <i>B</i> | <i>S</i> | Масса, <i>Мэв</i> | Время жизни, <i>сек</i> |
|----------------|---------------|----------|---------------|----------|----------|-------------------|-------------------------|
| Барions | | | | | | | |
| <i>p</i> | $\frac{1}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 938,256 | Стабилен |
| <i>n</i> | $\frac{1}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 939,550 | $0,96 \cdot 10^8$ |
| Λ | $\frac{1}{2}$ | + | 0 | 1 | -1 | 1115,57 | $2,52 \cdot 10^{-10}$ |
| Σ^+ | $\frac{1}{2}$ | + | 1 | 1 | -1 | 1189,43 | $0,810 \cdot 10^{-10}$ |
| Σ^0 | $\frac{1}{2}$ | + | 1 | 1 | -1 | 1192,55 | $< 1,0 \cdot 10^{-14}$ |
| Σ^- | $\frac{1}{2}$ | + | 1 | 1 | -1 | 1197,42 | $1,64 \cdot 10^{-10}$ |
| Ξ^0 | $\frac{1}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | -2 | 1314,7 | $3,03 \cdot 10^{-10}$ |
| Ξ^- | $\frac{1}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | -2 | 1321,25 | $1,66 \cdot 10^{-10}$ |
| Ω^- | $\frac{3}{2}$ | + | 0 | 1 | -3 | 1672,4 | $1,3 \cdot 10^{-10}$ |

2. Мезонные резонансы

| Символ | <i>s</i> | <i>P</i> | <i>I</i> | <i>G</i> | <i>C_n</i> | <i>B.</i> | <i>S</i> | Масса, <i>Мэв</i> | Ширина, <i>Мэв</i> |
|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------------------|-----------|----------|-------------------|--------------------|
| ρ^\pm | 1 | - | 1 | + | - | 0 | 0 | 775—770 | 110—150 |
| ρ^0 | 1 | - | 1 | + | - | 0 | 0 | 764 | 90—150 |
| ω | 1 | - | 0 | - | - | 0 | 0 | 783,4 | 12,2 |
| η' (или, X^0) | 0? | -? | 0 | + | + | 0 | 0 | 958,3 | < 4 |
| π_N | 0? | +? | 1 | - | +? | 0 | 0 | 1016 | 25 |
| φ | 1 | - | 0 | - | - | 0 | 0 | 1019,5 | 3,4 |
| η_{0+} | 0 | + | 0 | + | + | 0 | 0 | 1069 | ~80 (?) |
| A_1 | 1? | +? | 1 | - | + | 0 | 0 | 1070 | 80 |
| <i>B</i> | 1? | +? | 1 | + | - | 0 | 0 | 1221 | 123 |
| <i>f</i> | 2' | + | 0 | + | + | 0 | 0 | 1264 | 145 |

| Символ | s | P | I | G | C _π | B | S | Масса, Мэв | Ширина, Мэв |
|--|----------------|----------------|---------------|---|----------------|---|----|------------|-------------|
| D | (A) | | 0 | + | + | 0 | 0 | 1285 | 32 |
| A _{2L} | (N) | | 1 | - | + | 0 | 0 | 1269 | 26 |
| A _{2H} [?] | 2 | + | 1 | - | + | 0 | 0 | 1315 | 29 |
| E | 0 [?] | - [?] | 0 | + | + | 0 | 0 | 1424 | 71 |
| f' | 2 | + | 0 | + | + | 0 | 0 | 1514 | 73 |
| π _A | (A) | | 1 | - | + | 0 | 0 | 1633 | 93 |
| ρ _N | (N) | | 1 | + | - | 0 | 0 | 1650 | 120 |
| ρ ₁₇₀₀ | (A) | | 1 | + | - | 0 | 0 | 1700 | 110 |
| K* | 1 | - | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | 891,4 | 49,7 |
| K _A [?] (или C) | 1 | + | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | ~1240 | ~60 |
| K _{A1320} [?] | 1 | + | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | ~1330 | ~70 |
| K _N [?] | 2 | + | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | 1 | 1422 | 89 |
| K _{A1780} [?] | (A) | | $\frac{1}{2}$ | | | 0 | -1 | 1775 | 72 |

3. Барийные резонансы

| Символ | s | P | I | B | S | Масса, Мэв | Ширина, Мэв |
|--------------------|---------------|---|---------------|---|---|------------|-------------|
| N' ₁₄₇₀ | $\frac{1}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1470 | 210 |
| N ₁₅₁₈ | $\frac{3}{2}$ | - | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1525 | 115 |
| N ₁₅₅₀ | $\frac{1}{2}$ | - | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1550 | 130 |
| N ₁₆₆₀ | $\frac{5}{2}$ | - | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1680 | 170 |
| N ₁₆₈₈ | $\frac{5}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1690 | 130 |
| N' ₁₇₁₀ | $\frac{1}{2}$ | - | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 1710 | 300 |

| Символ | s | P | I | B | S | Масса, Мэв | Ширина, Мэв |
|-------------------|----------------|-----|---------------|-----|-----|------------|-------------|
| N_{2190} | $\frac{7}{2}$ | — | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 2200 | 250 |
| N_{2650} | ? | — | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 2650 | 360 |
| N_{3030} | ? | ? | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 | 3030 | 400 |
| N_{1236}^* | $\frac{3}{2}$ | + | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 1236 | 120 |
| N_{1640}^* | $\frac{1}{2}$ | — | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 1640 | 180 |
| N_{1950}^* | $\frac{7}{2}$ | + | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 1950 | 220 |
| N_{2420}^* | $\frac{11}{2}$ | + | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 2420 | 310 |
| N_{2850}^* | ? | + | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 2850 | 400 |
| N_{3230}^* | ? | + | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 3230 | 440 |
| Λ_{1405} | $\frac{1}{2}$ | — | 0 | 1 | —1 | 1405 | 40 |
| Λ_{1620} | $\frac{3}{2}$ | — | 0 | 1 | —1 | 1518,8 | 16 |
| Λ'_{1670} | $\frac{1}{2}$ | — | 0 | 1 | —1 | 1670 | 18 |
| Λ'_{1690} | $\frac{3}{2}$ | — | 0 | 1 | —1 | 1695 | 40 |
| Λ_{1815} | $\frac{5}{2}$ | + | 0 | 1 | —1 | 1815 | 75 |
| Λ_{1830} | $\frac{5}{2}$ | — | 0 | 1 | —1 | 1830 | 80 |
| Λ_{2100} | $\frac{7}{2}$ | — | 0 | 1 | —1 | 2100 | 140 |
| Λ_{2350} | ? | ? | 0 | 1 | —1 | 2350 | 210 |
| Σ_{1385} | $\frac{3}{2}$ | + | 1 | 1 | —1 | 1382,2 | 36 |

| Символ | ν | P | I | B | S | Масса, $M_{\text{эв}}$ | Ширина, $M_{\text{эв}}$ |
|-----------------|---------------|-----|---------------|-----|-----|------------------------|-------------------------|
| Σ_{1660} | $\frac{3}{2}$ | — | 1 | 1 | —1 | 1660 | 50 |
| Σ_{1700} | ? | ? | 1 | 1 | —1 | 1700 | 110 |
| Σ_{1770} | $\frac{5}{2}$ | — | 1 | 1 | —1 | 1765 | 100 |
| Σ_{1910} | $\frac{5}{2}$ | + | 1 | 1 | —1 | 1910 | 60 |
| Σ_{2030} | $\frac{7}{2}$ | + | 1 | 1 | —1 | 2030 | 120 |
| Σ_{2250} | ? | ? | 1 | 1 | —1 | 2250 | 200 |
| Σ_{2465} | ? | ? | 1 | 1 | —1 | 2455 | 120 |
| Σ_{2595} | ? | ? | 1 | 1 | —1 | 2595 | ~140 |
| Ξ_{1580} | $\frac{3}{2}$ | + | $\frac{1}{2}$ | 1 | —2 | 1528,9 | 7,3 |
| Ξ_{1815} | ? | ? | $\frac{1}{2}$ | 1 | —2 | 1815 | 16 |
| Ξ_{1980} | ? | ? | $\frac{1}{2}$ | 1 | —2 | 1915 | 120 |

ДОПОЛНЕНИЕ II

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША — ГОРДАНА

Волновая функция Ψ_{JM} системы с моментом J и его проекциями M , состоящей из двух невзаимодействующих подсистем (описываемых функциями $\Psi_{j_1 m_1}$ и $\Psi_{j_2 m_2}$) с моментами j_1 и j_2 и их проекциями m_1 и m_2 , выглядит так:

$$\Psi_{JM} = \sum_{M=m_1, m_2} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM} \Psi^{JM}. \quad (\text{II.1})$$

Входящие в это выражение коэффициенты $C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM}$ называются коэффициентами Клебша—Гордана*. Нижние индексы соответствуют слагаемым моментам и их проекциям, верхние — суммарному моменту и его проекциям. Коэффициенты Клебша—Гордана характеризуют относительную роль состояния с данными j_1 и j_2 и их проекциями m_1 и m_2 .

* Часто коэффициенты Клебша—Гордана обозначают так:

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M).$$

Коэффициенты Клебша—Гордана обладают свойствами:
 а) ортогональности

$$\sum_{m_1 m_2} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{J' M'} = \delta_{JJ'} \delta_{MM'};$$

$$\sum_{JM} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM} C_{j_1 m_1, j_2 m_2'}^{JM} = \frac{2J+1}{2j_2+1} \delta_{j_2 j_2'} \delta_{m_2 m_2'};$$

б) симметрии

$$\begin{aligned} C_{j_1 m_1, j_2 m_2}^{JM} &= C_{j_2 -m_2, j_1 -m_1}^{J-M} = (-1)^{j_1+j_2-J} C_{j_2 m_2, j_1 m_1}^{JM} = \\ &= (-1)^{j_1+j_2-J} C_{j_1 -m_1, j_2 -m_2}^{J-M} = (-1)^{j_1-m_1} \sqrt{\frac{2J+1}{2j_2+1}} C_{j_1 m_1, j_2 -m_2}^{J-M}. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов Клебша—Гордана для некоторых наиболее простых комбинаций j_1 и j_2 приведены в табл. II.1; в вертикальном столбце даны величины J и M , в горизонтальном — значения m_{j_1} и m_{j_2} , а на пересечении столбцов — значения коэффициентов Клебша—Гордана, у которых опущен знак квадратного корня (например, вместо $(-8/15)$ надо брать $-\sqrt{\frac{8}{15}}$ и т. д.)

Выражения для коэффициентов Клебша—Гордана $C_{lm_1 \mu}^{JM}$ и $C_{lm \frac{1}{2} \mu}^{JM}$ даны соответственно в табл. II.2 и II.3

Таблица II.2

Выражения для $C_{lm_1 \mu}^{JM}$

| $\mu \backslash J$ | $l+1$ | l | $l-1$ |
|--------------------|---|--|--|
| -1 | $\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$ | $\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M)}{2l(l+1)}}$ | $\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{2l(2l+1)}}$ |
| 0 | $\sqrt{\frac{(l+M+1)(l-M+1)}{(2l+1)(l+1)}}$ | $\frac{M}{\sqrt{l(l+1)}}$ | $-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M)}{l(2l+1)}}$ |
| 1 | $\sqrt{\frac{(l+M)(l+M+1)}{(2l+1)(2l+2)}}$ | $-\sqrt{\frac{(l+M)(l-M+1)}{2l(l+1)}}$ | $\sqrt{\frac{(l-M)(l-M+1)}{2l(2l+1)}}$ |

Выражения для $C_{lm}^{JM} \frac{1}{2} \mu$

| μ \ J | $l + \frac{1}{2}$ | $l - \frac{1}{2}$ |
|----------------|---------------------------------------|--|
| $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$ | $-\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$ |
| $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{\frac{l-M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$ | $\sqrt{\frac{l+M+\frac{1}{2}}{2l+1}}$ |

Более подробные таблицы коэффициентов Клебша—Гордаана можно найти в книгах:

Н. Ф. Нелп а. Связь фотообразования л-мезонов с рассеянием, М., Атомиздат, 1959 г.,

А. М. Балдин, В. И. Гольданский, В. М. Максименко, И. Л. Розенталь. Кинематика ядерных реакций. М., Атомиздат, 1968 г.

ДОПОЛНЕНИЕ III

ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ

Шаровая функция $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ определяется так:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

Здесь

$$P_{lm}(\cos \theta) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}} (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(\cos \theta)$$

нормированные обобщенные полиномы Лежандра; $P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \times$
 $\times \frac{d^l (\cos^2 \theta - 1)^l}{d(\cos \theta)^l}$ — полиномы Лежандра.

Функции $P_l(x)$ для нескольких конкретных значений l выглядят следующим образом:

$$P_0(x) = 1; P_1(x) = x; P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1) = \frac{1}{4} (3 \cos 2\theta + 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) = \frac{1}{8} (5 \cos 5\theta + 3 \cos \theta);$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Для обобщенных полиномов Лежандра имеют место следующие рекуррентные соотношения.

$$\begin{aligned} 2(l+1)P_l^m &= P_{l+1}^{m+1} - P_{l-1}^{m+1}; & (2l+1)xP_l^m + (2l+1)mP_l^{m-1} &= \\ &= (l+1)P_{l+1}^m + lP_{l-1}^m; & (2l+1)xP_l^m &= (l-m+1)P_{l+1}^m + \\ &+ (l+m)P_{l-1}^m; & P_{l-1}' &= xP_l' - lP_l; \end{aligned}$$

$$lP_l - xP_l' + P_{l-1}' = 0; \quad P_l' - xP_{l-1}' - lP_{l-1} = 0.$$

Выражение для полиномов Лежандра при больших значениях индекса или аргумента записываются в виде

$$P_l(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2l+1)}{\Gamma^2(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^l, & \text{если } x \gg 1, l \sim 1, \\ (2\pi l \sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\left(l + \frac{1}{2}\right) [\operatorname{ar} \operatorname{ch} x]\right], & \text{если } l \gg 1, x \sim 1, \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

и аналогично для функций $Q_l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_l(x')}{x-x'} dx'$:

$$Q_l(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma^2(l+1)}{2\Gamma(2l+2)} \left(\frac{2}{x}\right)^{l+1} & \text{если } x \gg 1, l \sim 1 \\ \pi (2\pi l \sqrt{x^2-1})^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(l + \frac{1}{2}\right) \operatorname{ar} \operatorname{ch} x\right], & \text{если } l \gg 1, x \sim 1. \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

ДОПОЛНЕНИЕ IV

ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИММЕТРИИ

Волновые функции частиц зависят от координат. Поэтому при преобразованиях координат определенным образом преобразуются и волновые функции. Пусть характер преобразования координат задан. Выясним, как при этом преобразуются волновые функции частиц. Для этой цели удобно использовать теорию групп.

Мы рассмотрим сначала более простой случай вращения трехмерного пространства (что соответствует нерелятивистской квантовой механике), а затем перейдем к преобразованиям Лоренца в четырехмерном пространстве.

Группа вращений трехмерного пространства

Группа вращений трехмерного пространства. Рассмотрим все вращения трехмерного пространства вокруг фиксированной точки O , которую будем считать началом координат.

Любое вращение можно представить в виде произведения трех последовательных вращений вокруг ортогональных осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 на углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.

При вращении вокруг оси Ox_1 на угол θ_1 координаты x_1, x_2, x_3 преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 0x_2 + 0x_3; \\ x'_2 &= 0x_1 + \cos \theta_1 x_2 + \sin \theta_1 x_3; \\ x'_3 &= 0x_1 - \sin \theta_1 x_2 + \cos \theta_1 x_3. \end{aligned} \right\} \quad (IV.1)$$

Это вращение можно характеризовать с помощью матрицы

$$g_{\theta_1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{vmatrix}. \quad (IV.2)$$

Аналогичным образом запишутся матрицы, характеризующие вращения вокруг осей Ox_2 и Ox_3 :

$$g_{\theta_2} = \begin{vmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{vmatrix}, \quad g_{\theta_3} = \begin{vmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (IV.3)$$

Чтобы получить матрицу вращения вокруг произвольной оси, надо перемножить матрицы (IV.1) — (IV.3).

Совокупность всех вращений трехмерного пространства обладает следующими свойствами.

1) Два последовательных вращения (или, как говорят, произведение вращений) есть снова вращение; произведению вращений соответствует произведение матриц, которое снова является матрицей того же типа.

2) Среди вращений имеется такое, при котором пространство переходит само в себя (единичное вращение); такому вращению соответствует единичная матрица.

3) Каждому вращению g можно сопоставить обратное вращение g^{-1} , которое задается углами $-\theta_i$. Произведение исходного и обратного вращений эквивалентно единичному вращению: $gg^{-1} = I$. Обратному вращению соответствует матрица g^{-1} , обратная исходной.

Совокупность вращений, обладающих тремя перечисленными свойствами, образует группу вращений; матрицы вращений образуют также группу.

Определение. Группой называется множество элементов G , которое удовлетворяет следующим условиям.

1. На множестве G определено групповое действие — назовем его условно «умножение», ставящее в соответствие каждой паре элементов f и g некоторый элемент h из этого же множества; это записывается так: $fg = h$. Элемент h называется произведением элементов f и g . Произведение fg , вообще говоря, зависит от порядка f и g .

2. Множество содержит единичный элемент I , т. е. такой, что для любого элемента f из G имеет место соотношение

$$If = fI = f.$$

3. Наряду с любым элементом f множество G содержит элемент f^{-1} , обратный данному, т. е. такой, что

$$f^{-1}f = f \cdot f^{-1} = I. \quad (IV.4)$$

Если число элементов группы конечно, то группа называется конечной; в противном случае группа называется бесконечной. Группа трехмерных вращений бесконечна.

Если элементы группы могут принимать дискретное число значений, группа называется дискретной, если непрерывное число значений — непрерывной. Группа трехмерных вращений непрерывна.

Число независимых параметров, которые определяют группу, называют порядком группы. Группа трехмерных вращений — группа третьего порядка (ее независимые параметры: $\theta_1, \theta_2, \theta_3$).

Порядок матрицы (двухрядная, трехрядная и т. п.) определяет размерность группы. Размерность группы трехмерных вращений, согласно (IV.2) и (IV.3), равна трем.

Вообще говоря, порядок группы и ее размерность различны; совпадение этих характеристик в случае трехмерных вращений случайно (например, порядок группы Лоренца равен шести, а размерность — четырем).

Непрерывные группы конечного порядка (т. е. с конечным числом параметров) называются группами Ли. Группа трехмерных вращений является примером группы Ли.

Алгебра Ли группы трехмерных вращений. Матрицы (IV.2), (IV.3) характеризуют вращение трехмерного пространства на конечные углы.

Удобно изучать бесконечно малые вращения и соответствующие им матрицы. Чтобы получить вид матриц бесконечно малых вращений, разложим каждый элемент матрицы конечного вращения в ряд Тейлора по углам $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ и удержим члены первого порядка малости. Например, для матрицы g_{θ_1} , имея в виду (IV.2), имеем

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial \theta_1} g_{\theta_1} \Big|_{\theta_1=0} = \frac{1}{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (IV.5)$$

Матрицы бесконечно малых преобразований координат называются генераторами группы; A_1 — один из генераторов группы трехмерных вращений.

Аналогично найдем остальные генераторы группы вращений вокруг осей Ox_2 и Ox_3

$$A_2 = \frac{1}{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \frac{1}{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (IV.6)$$

Число генераторов группы равно порядку группы, т. е. числу независимых параметров группы. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы вращений удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$[A_1, A_2] \equiv A_1 A_2 - A_2 A_1 = i A_3, \quad [A_2, A_3] = i A_1, \quad [A_3, A_1] = i A_2. \quad (IV.7)$$

Совокупность генераторов A_1, A_2, A_3 группы трехмерных вращений обладает следующими свойствами: коммутатор двух генераторов группы, сумму двух генераторов группы, произведение генератора группы на любое число α выражается снова через генераторы той же группы.

Совокупность генераторов A_1, A_2, A_3 , обладающих перечисленными свойствами, образует алгебру Ли группы трехмерных вращений.

Определение. Алгеброй Ли называется множество элементов N , которое удовлетворяет следующим условиям:

1) если X и Y — элементы множества N , то сумма $X + Y$ и произведение αX (где α — любое число) снова принадлежат N ;

2) коммутатор двух элементов X и Y множества N выражается снова через элементы множества N ;

3) коммутаторы элементов множества N удовлетворяют соотношениям:

$$[XY] + [YX] = 0, \quad [X(Y+Z)] = [XY] + [XZ].$$

$$[X[YZ]] + [Y[ZX]] + [Z[XY]] = 0 \text{ (соотношение Якоби).}$$

Подчеркием, что для алгебры Ли существование обратного и единичного элементов не требуется (в отличие от группы Ли).

Среди генераторов группы могут быть такие, которые коммутируют между собой. Максимальное их число определяет ранг группы. У группы трехмерных вращений коммутирующих между собой генераторов нет; по определению, ее ранг равен единице (группа первого ранга)*.

Из генераторов группы можно образовать операторы, которые коммутируют со всеми генераторами. Такие операторы называются операторами Казимира группы. У группы трехмерных вращений имеется один оператор Казимира

$$C = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2. \quad (IV.8)$$

В общем случае число операторов Казимира равно рангу группы.

Каков физический смысл операторов Казимира? Эти операторы коммутируют со всеми генераторами группы, следовательно, они будут коммутировать и с гамильтонианом системы, который содержит генераторы группы. Другими словами, операторы Казимира можно сопоставить физическим величинам, для которых имеет место закон сохранения. В случае трехмерных вращений оператор Казимира сопоставляется квадрату момента количества движения.

Представление группы трехмерных вращений. Частице со спином s и массой, отличной от нуля, соответствует волновая функция с $2s+1$ компонентами. Так как волновые функции зависят от координат частиц, то при преобразованиях координат будут определенным образом преобразовываться и компоненты волновой функции. Так, например, преобразование компонент трехкомпонентной волновой функции в общем случае запишется так:

$$\left. \begin{aligned} \psi_1'(x') &= a_{11}\psi_1(x) + a_{12}\psi_2(x) + a_{13}\psi_3(x); \\ \psi_2'(x') &= a_{21}\psi_1(x) + a_{22}\psi_2(x) + a_{23}\psi_3(x); \\ \psi_3'(x') &= a_{31}\psi_1(x) + a_{32}\psi_2(x) + a_{33}\psi_3(x). \end{aligned} \right\} \quad (IV.9)$$

Это преобразование (так же как и преобразование координат) можно характеризовать трехрядной матрицей

$$T_g = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Операторы (в частности, матрицы), осуществляющие преобразование волновых функций, образуют представление группы. Точнее говоря, сопоставим каждой матрице вращения пространства матрицу преобразования волновых функций таким образом, чтобы произведению двух матриц $g = g_1 g_2$ вращения пространства (двум последовательным вращениям) соответствовало произведение двух матриц $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$ преобразования волновых функций. Матрицы преобразования волновых функций, удовлетворяющие указанному условию, называются представлением группы.

Удобно изучать бесконечно малые преобразования волновых функций и соответствующие им матрицы, т. е. генераторы представления группы.

Каждой матрице A_i бесконечно малых преобразований координат, т. е. каждому генератору группы A_i , можно сопоставить матрицу J_i бесконечно малых преобразований компонент волновой функции (т. е. генератор представления группы J_i).

* Совокупность всех коммутирующих между собой генераторов называют подалгеброй Картана.

По определению, матрицы J_i , осуществляющие преобразование функций (генераторы представления группы J_i), удовлетворяют той же алгебре Ли, что и генераторы самой группы A_i :

$$[J_1, J_2] = iJ_3, [J_2, J_3] = iJ_1, [J_3, J_1] = iJ_2. \quad (IV.10)$$

Если генераторы, а также алгебра Ли группы заданы, то задача заключается в том, чтобы найти представление группы, т. е. в случае группы трехмерных вращений найти совокупность матриц J_i , удовлетворяющих перестановочным соотношениям (IV.10).

Приведем простейшие представления группы трехмерных вращений и те волновые функции, которые преобразуются по этим представлениям.

1) Сопоставим каждому вращению трехмерного пространства (или элементу группы вращений) единичный оператор, действующий на волновые функции (единичное представление).

В этом случае при вращении трехмерного пространства волновая функция переходит сама в себя. Такая волновая функция называется скалярной.

2) Сопоставим каждой матрице A_i преобразования координат такой же оператор, действующий на волновые функции. Так как $A_i = J_i$, то условие (IV.10) выполняется автоматически. В данном случае представление группы трехмерных вращений образуют сами генераторы группы (оно называется регулярным или присоединенным представлением группы).

Волновые функции, компоненты которых при вращении трехмерного пространства преобразуются матрицами J_i , называются векторными. Как видно, компоненты векторной волновой функции при вращениях преобразуются так же, как сами координаты.

3) Сопоставим каждому элементу группы вращений двухрядную матрицу, действующую на двухкомпонентные волновые функции. Двухрядными матрицами, удовлетворяющими соотношениям (IV.10), являются матрицы Паули σ

$$\sigma_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},$$

т. е. в данном случае представление группы трехмерных вращений образуют матрицы Паули.

Волновые функции, компоненты которых при вращении трехмерного пространства преобразуются с помощью матриц σ , называются спинорами (первого ранга).

В явном виде закон преобразования волновых функций при бесконечно малых поворотах на угол α вокруг i -й оси запишется так:

а) для вектора

$$U_i \rightarrow U'_i + (1 + iJ_{ik}^n \alpha) U_k;$$

б) для спинора

$$\psi_i \rightarrow \psi'_i = \left(1 + \frac{1}{2} i\alpha \sigma_{ik}^n \right) \psi_k, \quad n = 1, 2, 3.$$

Аналогичным образом можно найти представления более высокой размерности, по которым преобразуются тензорные и спинорные (высших рангов) волновые функции.

Таким образом, тензорными и спинорными называются волновые функции, которые преобразуются соответственно по тензорным и спинорным представлениям группы трехмерных вращений.

Приводимые и неприводимые представления. Рассмотрим волновую функцию, которая является, например, тензором второго ранга ψ_{ik} (состоящим из девяти компонент). Последний всегда можно представить в виде суммы симметричного ψ^s и антисимметричного ψ^a тензора:

$$\psi_{ik} = \psi^s + \psi^a,$$

так что

$$\psi^s = \frac{1}{2}(\psi_{ik} + \psi_{ki}) = \begin{vmatrix} \psi_{11} & \frac{1}{2}(\psi_{12} + \psi_{21}) & \frac{1}{2}(\psi_{13} + \psi_{31}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{12} + \psi_{21}) & \psi_{22} & \frac{1}{2}(\psi_{23} + \psi_{32}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{13} + \psi_{31}) & (\psi_{23} + \psi_{32})\frac{1}{2} & \psi_{33} \end{vmatrix};$$

$$\psi^a = \frac{1}{2}(\psi_{ik} - \psi_{ki}) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}(\psi_{12} - \psi_{21}) & \frac{1}{2}(\psi_{13} - \psi_{31}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{21} - \psi_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(\psi_{23} - \psi_{32}) \\ \frac{1}{2}(\psi_{31} - \psi_{13}) & \frac{1}{2}(\psi_{32} - \psi_{23}) & 0 \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что при вращениях трехмерного пространства компоненты симметричного и антисимметричного тензоров будут преобразовываться независимо, не «перепутываясь» друг с другом. Иначе говоря, девять компонент тензора ψ_{ik} при трехмерном вращении распадаются на две «независимые» совокупности: трехмерную ψ^a и шестимерную ψ^s . В свою очередь шесть компонент ψ^s при трехмерных вращениях распадаются на две независимые совокупности: одномерный инвариант (скаляр), представляющий собой сумму диагональных членов (или шпур) $\text{Sp } \psi_{ik} = \psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}$, и оставшиеся пять компонент (образующих матрицу со следом, равным нулю)

$$\psi^s = \begin{vmatrix} \psi_{11} + \psi_{33} & \psi_{12} & \psi_{13} \\ \psi_{12} & -\psi_{11} + \psi_{33} & \psi_{23} \\ \psi_{13} & \psi_{23} & -2\psi_{33} \end{vmatrix} \oplus (\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33}).$$

Как видно, девятикомпонентный тензор второго ранга ψ_{ik} распадается при трехмерных вращениях на три независимые совокупности: одномерную, трехмерную и пятимерную или, как говорят, ψ_{ik} является прямой суммой трех указанных многообразий. Чтобы подчеркнуть, что сумма не обычная, а прямая, у знака сложения добавляют кружок.

Соответственно представление T_{ik} , т. е. матрица, осуществляющая преобразование тензорной волновой функции ψ_{ik} при трехмерных вращениях, будет состоять из трех матриц меньших размерностей:

$$T_{ik} \psi_{ik} = \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{|c|} \hline \times \times \times \\ \times \times \times \\ \times \times \times \\ \hline \end{array} \right\} T_{ik}^2 \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \times \times \times \times \times \\ \hline \end{array} \right\} T_{ik}^3 \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} \right\} T_{ik}^0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \left. \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \hline \end{array} \right\} \psi^2 \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \hline \end{array} \right\} \psi^3 \\ \left. \begin{array}{|c|} \hline \times \\ \hline \end{array} \right\} \psi^0 \end{array} \quad (IV.11)$$

Так как компоненты ψ^a , ψ^s и ψ^0 между собой не перепутываются, то преобразующие их матрицы T_{ik}^a , T_{ik}^s , T_{ik}^0 стоят на диагонали матрицы представления T_{ik} . Говорят, что матрицы T_{ik} в (IV.11) имеют «ящичную» форму.

Представление, которое можно привести к ящичной форме, называют приводимым; в противном случае представление называется неприводимым.

Представление T_{ik} в случае вращения трехмерного пространства распадается на прямую сумму трех неприводимых представлений. Это можно записать так, если учесть размерности неприводимых представлений:

$$9 = 1 \oplus 3 \oplus 5.$$

Представления, приведенные нами выше (стр. 477), являются неприводимыми.

Обычно вместо выражения «волновые функции, которые преобразуются по данному представлению», говорят короче: «представление группы». Другими словами, термин «представление группы» употребляется в двух смыслах: как оператор, преобразующий волновые функции, и как волновые функции, преобразующиеся по данному представлению. Поэтому можно сказать и так: представление ψ_{ik} приводимо и распадается на три неприводимых представления; представление ψ^i неприводимо и т. п.

Рассмотрим волновую функцию, которая является смешанным спинором второго ранга ψ_i^k . Этот спинор приводим, так как он распадается на скаляр $\text{Sp}\psi_i^k$ и трехмерный вектор

$$\psi_i^k \equiv \begin{vmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 \\ \psi_2^1 & -\psi_2^1 \end{vmatrix} \oplus (\psi_1^1 + \psi_2^2).$$

Для того чтобы охарактеризовать представление, надо указать, из каких неприводимых представлений оно составлено и сколько раз в него входит данное неприводимое представление.

Найдем все неприводимые представления группы трехмерных вращений. Для этого воспользуемся следующим способом. Из генераторов J_i представления группы трехмерных вращений можно составить один оператор Казимира:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2.$$

Согласно лемме Шура, необходимое и достаточное условие неприводимости представления состоит в том, что оператор Казимира J^2 должен быть оператором, кратным единичной матрице

$$J^2 = \lambda I$$

или

$$J^2 \psi = \lambda \psi.$$

Следовательно, набор волновых функций, соответствующих данному собственному значению λ оператора Казимира, образует неприводимое представление. Поэтому задача классификации неприводимых представлений сводится к нахождению собственных значений оператора Казимира J^2 и соответствующих им собственных функций.

Как известно, собственные значения J^2 (оператор квадрата момента количества движения) равны $j(j+1)$, где $j = 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots$

Таким образом, каждое неприводимое представление группы трехмерных вращений характеризуется положительным целым или полужелым числом j . Размерность представления равна $2j+1$. При $j=0$ представление одномерно и является единичной матрицей. При $j=1/2$ представление реализуется двумерными матрицами Паули.

При $j = 1$ представление трехмерно и может быть реализовано с помощью матриц (IV. 2) и (IV.3).

Следовательно, у группы трехмерных вращений имеются различные представления конечной размерности.

Однозначные и двухзначные представления. Выясним, как можно определить с помощью матриц J_i , отвечающих бесконечно малым поворотам, матрицу (представление) $R(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, соответствующую поворотам на конечные углы. Для этого рассмотрим два вращения, например, на углы θ_3^1 и θ_3^2 вокруг оси Ox_3 . Произведение вращений равно

$$g(\theta_3^1) g(\theta_3^2) = g(\theta_3^1 + \theta_3^2),$$

соответственно для представления R_3 получим

$$R_3(\theta_3^1) R_3(\theta_3^2) = R_3(\theta_3^1 + \theta_3^2).$$

Полагая здесь $\theta_3^1 = \theta_3$ и $\theta_3^2 = d\theta_3$, находим

$$R_3(\theta_3 + d\theta_3) = R_3(\theta_3) R_3(d\theta_3).$$

Отсюда

$$\frac{R_3(\theta_3 + d\theta_3) - R_3(\theta_3)}{d\theta_3} = R_3(\theta_3) \frac{R_3(d\theta_3) - 1}{d\theta_3}. \quad (IV.12)$$

Так как

$$R_3(d\theta_3) = 1 + J_3 d\theta_3,$$

то (IV.12) переписывается следующим образом:

$$\frac{d}{d\theta_3} R_3(\theta_3) = J_3 \theta_3 R_3(\theta_3),$$

т. е. для матрицы $R_3(\theta_3)$ получается дифференциальное уравнение. Решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $R_3(0) = 1$, запишется так:

$$R_3(\theta_3) = e^{J_3 \theta_3}.$$

В общем случае вращения вокруг осей x_1, x_2, x_3

$$R(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = e^{J_1 \theta_1 + J_2 \theta_2 + J_3 \theta_3}. \quad (IV.13)$$

Последняя матрица определяет представление R , соответствующее повороту на конечные углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Как видно, представление целиком определяется генераторами группы вращений. Таким образом, при преобразовании координат трехмерного пространства

$$x'_i = a_{ik} x_k$$

волновые функции $\psi(x')$ преобразуются так:

$$\psi'(x') = R\psi(x).$$

В частности, при вращении трехмерного пространства вокруг оси x_3 на угол θ_3 спинорная функция преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
R_3(0, 0, \theta_3) \psi &= e^{\frac{1}{2} i \sigma_3 \theta_3} \psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2} i \theta_3 \right)^n \sigma_3^n \psi = \\
&= \left\{ \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\theta_3}{2} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\theta_3}{2} \right)^4 + \dots \right] + \right. \\
&+ \left. i \sigma_3 \left[\frac{\theta_3}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\theta_3}{2} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\theta_3}{2} \right)^5 + \dots \right] \right\} \psi = \\
&= \left(\cos \frac{\theta_3}{2} + i \sigma_3 \sin \frac{\theta_3}{2} \right) \psi = \begin{vmatrix} e^{i \frac{\theta_3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i \frac{\theta_3}{2}} \end{vmatrix} \psi. \quad (IV.14)
\end{aligned}$$

Поворот на угол 2π вокруг оси x_3 дает

$$R_3(\theta_3 + 2\pi) = -R_3(\theta_3).$$

Аналогичным свойством обладают операторы поворота вокруг осей x_1 и x_2 .

Таким образом, при повороте системы координат на 2π спинорная волновая функция меняет знак. С другой стороны, поворот на 2π приводит систему в первоначальное положение, т. е. совпадает с поворотом на ноль градусов, при котором волновая функция знака не меняет. Отсюда следует, что каждому углу соответствуют две спинорные волновые функции, отличающиеся знаком, т. е. спинорное представление двухзначно.

В случае тензорного представления вместо (IV.14) получим

$$R_3(0, 0, \theta_3) u = e^{i J_3 \theta_3} u = (\cos \theta_3 + i J_3 \sin \theta_3) u,$$

т. е. тензорное представление однозначное.

Группа Лоренца

Преобразованиями Лоренца называются также вращения четырехмерного пространства x_1, x_2, x_3, x_0

$$x'_i = a_{ik} x_k,$$

которые оставляют неизменной квадратичную форму

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

Совокупность преобразований Лоренца является группой.

Группа Лоренца характеризуется шестью генераторами, каждый из которых соответствует бесконечно малым вращениям в плоскостях $x^\mu x^\nu$:

$$\begin{aligned}
I^{10} &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & I^{20} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & I^{30} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \\
I^{12} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & I^{23} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}, & I^{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Генераторы $l^{\mu\nu}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям (алгебра Ли группы Лоренца):

$$[l^{\mu\nu}, l^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho} l^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} l^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} l^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} l^{\mu\sigma}.$$

Таким же коммутационным соотношениям удовлетворяют генераторы L представления группы Лоренца

$$[L^{\mu\nu}, L^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho} L^{\nu\sigma} + g^{\nu\sigma} L^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma} L^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} L^{\mu\sigma}. \quad (\text{IV.15})$$

Чтобы найти представление группы Лоренца, надо определить матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям (IV.15).

Так же как и в случае группы трехмерных вращений, у группы Лоренца существует два типа представлений: тензорное и спинорное, соответствующих двум типам волновых функций.

Неоднородная группа Лоренца (группа Пуанкаре)

Неоднородные преобразования Лоренца определяются так

$$x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu, \quad (\text{IV.16})$$

т. е. как произведение операции однородного преобразования Лоренца и сдвига на вещественный вектор a_μ .

Совокупность неоднородных преобразований Лоренца является группой. Неоднородная группа Лоренца характеризуется десятью генераторами: четырьмя генераторами сдвига p_μ и шестью генераторами вращения $l^{\mu\nu}$.

Генераторы неоднородной группы Лоренца удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям (алгебра Ли неоднородной группы Лоренца):

$$\begin{aligned} [p_\mu, p_\nu] &= 0; & [l_{\mu\nu}, p_\sigma] &= i(g_{\nu\sigma} p_\mu - g_{\mu\sigma} p_\nu); \\ [l_{\mu\nu}, l_{\rho\sigma}] &= -i(g_{\mu\rho} l_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} l_{\mu\sigma} + g_{\mu\sigma} l_{\rho\nu} - g_{\nu\sigma} l_{\rho\mu}). \end{aligned} \quad (\text{IV.17})$$

ЛИТЕРАТУРА

В приведенном ниже списке литературы в основном фигурируют книги, последние обзоры, а также те журнальные статьи, которым мы следовали при изложении конкретных примеров, в частности при сравнении теоретических и экспериментальных результатов. Дальнейшие ссылки на более ранние работы, а также на статьи, из которых заимствованы опытные данные, можно найти в приводимой литературе. Таким образом, наш список литературы отнюдь не претендует на полноту; в нем не отмечен целый ряд важных теоретических и экспериментальных публикаций.

О Б Щ А Я

- А х и е з е р А. И., Б е р е с т е ц к и й В. Б. Квантовая электродинамика. М., Физматгиз, 1959.
- Б а р а ш е н к о в В. С. Сечения взаимодействия элементарных частиц, М., Физматгиз, 1966.
- Б е р е с т е ц к и й В. Б., Л и ф ш и ц Е. М., П и т а е в с к и й Л. П. Релятивистская квантовая теория. М., «Наука», 1968.
- Б о г о л ю б о в Н. Н., Ш и р к о в Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
- В е р л е Ю. Релятивистская теория реакций. Перев. с англ. М., Атомиздат, 1969.
- В и к Д. В сб. «Проблемы современной физики». Вып. 3. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
- Г е л ь ф а н д И. М. и др. Представление группы вращений и группы Лоренца. М., Физматгиз, 1953.
- Г о л ь д б е р г е р М., В а т с о н К. Теория столкновений. Перев. с англ. М., «Мир», 1967.
- М а р к о в М. А. Гипероны и К-мезоны. М., Физматгиз, 1958.
- М а р ш а к Р., С у д е р ш а н Э. Введение в физику элементарных частиц. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
- М э т ь ю з П. Релятивистская квантовая теория взаимодействующих элементарных частиц. Перев. с англ., М., Изд-во иностр. лит., 1959.
- Н и ш и д ж и м а К. Фундаментальные частицы. Перев. с англ. М., «Мир», 1965.
- О к у н ь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц. М., Физматгиз, 1963.
- Х а м е р м е ш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. М., «Мир», 1966.
- Ч е л л е н Г. Физика элементарных частиц. Перев. с англ. Под ред. Р. М. Рындины, М., «Наука», 1966.

- Чью Дж. Аналитическая теория S-матрицы. Перев. с англ. Под ред. А. М. Бродского. М., «Мир», 1968.
- Швебер С. и др. Мезоны и поля. Перев. с англ. Под ред. И. Е. Тамма. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
- Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Перев. с англ. Под ред. Я. А. Смородинского. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

К гл. 9

Jacob M., Wick G. C. App. Phys. (USA), 7, 404 (1959).

К гл. 13

ОБЗОРЫ И КНИГИ

- Берестецкий В. Б. «Успехи физ. наук», 85, 393 (1965).
- Боголюбов Н. Н. В кн. «Физика высоких энергий и теория элементарных частиц», Киев, «Наукова Думка», 1967, стр. 5.
- Зельдович Я. Б. «Успехи физ. наук», 86, 303 (1965).
- Кадышевский В. Г., Мурадяи Р. М., Смородинский Я. А. Препринт Р-2061, Дубна, 1965.
- Левин Е. М., Фрайфурт Л. Л. «Успехи физ. наук», 94, 243 (1968).
- Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. М., Атомиздат, 1967.
- Смородинский Я. А. «Успехи физ. наук», 84, 3 (1964).
Теория групп и элементарные частицы. Сб. статей под ред. Д. Д. Иваненко. М., «Мир», 1967.

СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ С ОПЫТОМ

- К § 3. Abarbanel H., Callan C. Phys. Lett., 16, 191 (1965).
Nagai H., Lipkin H. T. Phys. Rev. Lett., 13, 208 (1964).
Meshkov S. et al. Phys. Rev. Lett., 13, 212 (1964).
- К § 5. Нелипа Н. Ф. Phys. Lett., 21, 359 (1966).

К гл. 14

- К § 1,2. Вильсон Р. Нуклон-нуклонные взаимодействия. Перев. с англ. под ред. В. П. Джелепова. М., «Мир», 1965.
Нелипа Н. Ф. Связь фотообразования л-мезонов с рассеянием. М., Атомиздат, 1959.
Файснер Г. Поляризация нуклонов при рассеянии. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
- К § 3. Вегеуге Р. et al. Phys. Lett., 18, 342 (1965); Phys. Rev., 165, 1730 (1968).
Doplaschie A. 14th International Conference on High Energy Physics, Vienna, 1968, стр. 139.
- К § 4. Нелипа Н. Ф. Nucl. Phys., 61, 689 (1965).
- К § 5. Казаринов Ю. М. и др. Препринт Е-1-3707, Дубна, 1968.
- К § 6. Пузиков Л., Рыдин Р., Смородинский Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 32, 592 (1957).
Биленький С. М., Лапидус Л. И., Рыдин Р. М. «Успехи физ. наук», 84, 243 (1964).
Mogavcsik M. I. Phys. Rev., 125, 1088 (1962).

К гл. 16

- К § 2. Goillard M., Salin P h. Nuovo cimento, 27, 193 (1963).
Salin Ph. Nuovo cimento, 28, 1294 (1963).
- К § 3. Dufour J. Nuovo cimento, 34, 645 (1964).
- К § 4. Дрелл С., Захарясен Ф. Электромагнитная структура нуклонов. Перев. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
Chap L. H. et al. Phys. Rev., 141, 1298 (1966).
Sakurai J. I. Lectures in Theoretical Physics. Vol. II. Gordon and Breach, 1969.

К гл. 17

- К § 1. Берестецкий В. Б. «Успехи физ. наук». 76, 25 (1962).
Гольдбергер М., Ватсон К. Теория столкновений. Перев. с англ. М., «Мир», 1967.
Ширков Д. В., Серебряков В. В., Мещеряков В. А. Дисперсионные теории сильных взаимодействий при низких энергиях. М., «Наука», 1967.
- К § 2. Chew G. F. et al. Phys. Rev., 106, 1345 (1957).
Donnachie A., Shaw G. Ann. Phys. (USA), 37, 333 (1966).
Zagury N. Phys. Rev., 145, 1112 (1966).
Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
Оттес R. Nuovo cimento, 8, 316 (1958).
- К § 3. Нелипа Н. Ф., Фильков Л. В. Nucl. Phys., 59, 225 (1964).

К гл. 18

- К § 1. Мандельштам С. В сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий». М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 35.
Тер-Мартirosян К. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 39, 827 (1960).
Чу Дж. В сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий». М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 87.
- К § 2. Чини М., Фубини С. В сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий». М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 198.
Ball J. S. Phys. Rev., 124, 2014 (1961).
- К § 3. Нелипа Н. Ф. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 40, 1086 (1961).
- К § 3. Нелипа Н. Ф., Царев В. А. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 40, 1710 (1961).

К гл. 19

- К § 1. Теория сильных взаимодействий при больших энергиях. Перев. с англ. Под ред. Н. Н. Боголюбова. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
Тер-Мартirosян К. А. Препринт СТФ 68—II—К. Серпухов ИФВЭ. 1968.
Грибов В. Н. В сб. «Вопросы теории сильных и слабых взаимодействий элементарных частиц». Под ред. А. И. Алиханяна, Ереван, Изд-во Академии наук Арм. ССР, 1962, стр. 178 и 204.
- К § 2. Tгуетеп Т. L., Wick C. C. Ann. Phys. (USA), 26, 322 (1964).
Gell-Mann et al. Phys. Rev., 133B, 145 (1964).
Ling-Lie Wang. Phys. Rev., 142, 1187 (1966).
- К § 3. Rarita W. et al. Phys. Rev., 165, 1615 (1968).

- К § 4. Ader J. R. et al. Nucl. Phys., **В3**, 407 (1967).
Richter B. 14th International Conference on High-Energy Physics, Vienna, 1968, p. 3.
- К § 5. Gottfried K., Jackson J. D. Nuovo cimento, **33**, 309 (1964).
Кайдалов А. Б., Карнаков Б. М. «Ядерная физика», **7**, 152 (1968).

К гл. 20

- К § 1. De Alfaro V. et al. Phys. Lett., **21**, 577 (1966).
Соловьев Л. Д. «Ядерная физика», **3**, 188 (1966).
Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Тавхелидзе. Phys. Lett., **24В**, 181 (1967).
Igi K., Matsuda S. Phys. Rev. Lett., **18**, 625 (1967).
- К § 2. Altarelli G., Solossi M. Nuovo cimento, **48**, 573 (1967).
Герасимов С. Б. «Ядерная физика», **2**, 598 (1965).
Липидус Л. И., Чжоу Гуан-Чжао «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 1547 (1961).
Drell S. D., Hearn A. C. Phys. Rev. Lett., **16**, 908 (1966).
- К § 3. Журавлев В. И., Рерих К. В. «Ядерная физика», **6**, 165 (1967).
Chan Hong Mo. 14th International Conference on High-Energy Physics. Vienna, 1968, стр. 391; Frazer. W. R., там же, стр. 415.
Jacob M. Proceedings of the 4th International Symposium on electron and photon interactions on high energy, Liverpool, 1969.

К гл. 21

- К § 1. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Сб. статей.
Под ред. Н. Н. Боголюбова. Киев, «Наукова Думка», 1967.
Вайнштейн А. И., Захаров В. И. «Успехи физ. наук», **100**, 225 (1970).
Adler S. L., Dashen R. F. Current algebras and application to particle physics, New York, Benjamin, 1968.
Gell-Mann M. Physics, **1**, 63 (1964).
Gell-Mann M., Levy M. Nuovo cimento, **16**, 705 (1960).
Schwinger J. Phys. Rev. Lett., **3**, 296 (1959).
- К § 2. Fubini S. Nuovo cimento, **43**, 475 (1966).
Fubini S. et al. Nuovo cimento, **43**, 161 (1966).
Mukunda N., Radha T. K. Nuovo cimento, **44**, 726 (1966).
- К § 3. Cabibbo N., Radicati L. A. Phys. Lett., **19**, 697 (1966).
Грибов В. И., Иоффе Б. Л., Шехтер В. М. «Ядерная физика», **5**, 387 (1967).

| | Стр. |
|---|-----------|
| Предисловие. | 3 |
| Введение. | 5 |
| ЧАСТЬ I Инвариантные свойства физических систем и инвариантная структура амплитуды процесса | 13 |
| Глава 1. Релятивистская инвариантность | 13 |
| § 1. Преобразование четырехмерных величин | 13 |
| § 2. Преобразование волновых функций частиц. | 15 |
| § 3. Скалярные частицы | 16 |
| § 4. Векторные частицы (в частности, виртуальные фотоны) | 17 |
| § 5. Реальные фотоны. | 22 |
| § 6. Частицы со спином $1/2$ | 25 |
| § 7. Частицы со спином $3/2$ | 35 |
| § 8. Частицы со спином 2. | 36 |
| § 9. Релятивистские инварианты. | 37 |
| Глава 2. Инвариантность относительно инверсии пространства | 37 |
| § 1. Преобразование физических величин и волновых функций | 37 |
| § 2. Дуальные величины. | 46 |
| § 3. Инварианты относительно инверсии пространства | 48 |
| Глава 3. Инвариантная спиновая структура амплитуд и дифференциальные сечения для процессов с участием четырех частиц | 49 |
| § 1. Метод построения амплитуды. | 49 |
| § 2. Инвариантная структура амплитуды (сильное взаимодействие) | 57 |
| § 3. Инвариантная структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов). | 62 |
| § 4. Выражение для дифференциального сечения. | 66 |
| § 5. Выражения для дифференциальных сечений процессов без участия барионов. | 69 |
| § 6. Выражения для дифференциальных сечений процессов с участием барионов. | 71 |
| Глава 4. Инвариантность относительно зарядового сопряжения | 76 |
| § 1. Частицы и античастицы | 76 |
| § 2. Инвариантность относительно зарядового сопряжения и преобразование волновых функций частиц. | 76 |
| § 3. Инвариантность амплитуд процессов относительно зарядового сопряжения. | 79 |
| § 4. Зарядовая четность. Правила отбора по зарядовой четности | 83 |

| | |
|---|------------|
| Глава 5. Инвариантность относительно обращения времени . . . | 87 |
| § 1. Преобразование физических величин и волновых функций . . . | 87 |
| § 2. Инвариантность амплитуд процессов относительно обращения времени | 90 |
| Глава 6. Инвариантность относительно сильного отражения пространства—времени | 94 |
| § 1. <i>CPT</i> -теорема | 94 |
| § 2. Следствия <i>CPT</i> -теоремы | 96 |
| § 3. Инвариантность относительно сильного отражения пространства—времени и амплитуды процессов | 95 |
| Глава 7. Спиновая структура амплитуд и дифференциальные сечения процессов с участием четырех частиц в системе центра масс | 97 |
| § 1. Кинематика процесса в с.ц.м. | 97 |
| § 2. Спиновая структура амплитуды в с.ц.м. (сильное взаимодействие) | 99 |
| § 3. Спиновая структура амплитуды в с.ц.м. (электромагнитное взаимодействие адронов) | 102 |
| § 4. Переход от выражения для инвариантной амплитуды к выражению для амплитуды в с.ц.м. (сильное взаимодействие) | 104 |
| § 5. Переход от выражения для инвариантной амплитуды к выражению для амплитуды в с.ц.м. (электромагнитное взаимодействие адронов) | 107 |
| § 6. Выражение для дифференциального сечения в с.ц.м. | 114 |
| § 7. Выражение для дифференциальных сечений процессов без участия барионов | 116 |
| § 8. Выражения для дифференциальных сечений процессов с участием барионов | 118 |
| § 9. Поляризационная матрица плотности | 122 |
| § 10. Поляризация барионов отдачи. Тензоры поляризации | 132 |
| § 11. Дифференциальные сечения в случае поляризованных частиц | 136 |
| Глава 8. Разложение амплитуды в с.ц.м. по парциальным амплитудам | 138 |
| § 1. Метод коэффициентов Клебша—Гордана. Процессы без участия вектонов и фотонов | 138 |
| § 2. Метод коэффициентов Клебша—Гордана. Процессы с участием реальных фотонов | 149 |
| § 3. Дифференциальный метод. Процессы с участием вектонов и фотонов | 155 |
| § 4. Выражения для дифференциальных сечений | 163 |
| Глава 9. Спиральные амплитуды процесса | 164 |
| § 1. Спиральные амплитуды | 164 |
| § 2. Разложение спиральной амплитуды по парциальным волнам | 166 |
| § 3. Выражения для дифференциального сечения и поляризационной матрицы плотности | 169 |
| § 4. Связь между спиральными амплитудами и скалярными функциями $F_i(W, \theta)$ | 171 |
| Глава 10. Изотопическая инвариантность и изотопическая структура амплитуды процесса | 176 |
| § 1. Внутренние свойства симметрии элементарных частиц. Изотопическое пространство | 176 |
| § 2. Изотопические операторы и волновые функции | 176 |
| § 3. Электрический заряд. Гиперзаряд. Странность | 181 |
| § 4. Зарядовая симметрия | 183 |
| § 5. <i>G</i> -Преобразование и <i>G</i> -четность | 184 |

| | |
|---|------------|
| § 6. Изотопическая инвариантность. Изотопические инварианты | 187 |
| § 7. Изотопическая структура амплитуды (сильное взаимодействие) | 188 |
| § 8. Изотопическая структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов) | 191 |
| § 9. Зарядовая структура амплитуды процесса | 192 |
| § 10. Структура амплитуды по полному изотопическому спину | 194 |
| § 11. Следствия изотопической инвариантности | 196 |
| § 12. Изотопическая инвариантность и SU_2 -симметрия | 198 |
| Глава 11. Перекрестная симметрия (кросс-симметрия) | 200 |
| § 1. Перекрестная симметрия для бозонов | 200 |
| § 2. Перекрестная симметрия для барioniов | 203 |
| Глава 12. Амплитуды процессов с участием трех частиц | 206 |
| § 1. Кинематика процесса | 206 |
| § 2. Инвариантная структура амплитуды (сильное взаимодействие) | 207 |
| § 3. Инвариантная структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов) | 212 |
| § 4. Изотопическая структура амплитуды | 215 |
| § 5. Выражение для вероятности распада | 217 |
| Глава 13. Унитарная симметрия и унитарная структура амплитуды процесса | 218 |
| § 1. Унитарные мультиплеты адронов | 218 |
| § 2. SU_3 -симметрия | 222 |
| § 3. Унитарная структура амплитуды (сильное взаимодействие) | 234 |
| § 4. Унитарная структура вершины (сильное взаимодействие) | 244 |
| § 5. Унитарная структура амплитуды (электромагнитное взаимодействие адронов) | 245 |
| § 6. Унитарная структура вершины (электромагнитное взаимодействие адронов) | 248 |
| § 7. Метод тензорных операторов | 250 |
| § 8. Нарушенная SU_3 -симметрия | 252 |
| § 9. SU_6 -симметрия | 256 |
| Глава 14. Фазовый анализ опытных данных | 257 |
| § 1. Унитарность S -матрицы | 257 |
| § 2. Условие унитарности и параметризация S -матрицы | 258 |
| § 3. Рассеяние π -мезонов на протонах | 264 |
| § 4. Фотообразование π -мезонов на протонах | 269 |
| § 5. Рассеяние иуклонов на иуклонах | 273 |
| § 6. Полный опыт | 277 |
| ЧАСТЬ II. МЕТОДЫ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИТИЧНОСТИ И УНИТАРНОСТИ | 280 |
| Глава 15. Унитарность и аналитичность | 280 |
| § 1. Каналы реакции | 280 |
| § 2. Физические и нефизические значения переменных | 286 |
| § 3. Унитарность S -матрицы и абсорбтивная часть амплитуды процесса. Оптическая теорема | 290 |
| § 4. Аналитичность | 300 |
| § 5. Дисперсионные соотношения для амплитуды процесса | 305 |
| Глава 16. Резонансная модель | 307 |
| § 1. Резонансная модель | 307 |

| | |
|--|------------|
| § 2. Фотообразование π -мезонов на нуклонах. | 311 |
| § 3. $K^+\Lambda$ -фотообразование на протонах | 320 |
| § 4. Форм-факторы нуклонов. | 324 |
| § 5. Модель одномезонного обмена (ОРЕ-модель). | 331 |
| Глава 17. Одномерные дисперсионные соотношения | 331 |
| § 1. Одномерные дисперсионные соотношения. | 331 |
| § 2. Фотообразование π -мезонов на нуклонах | 335 |
| § 3. Комптов-эффект на протоне | 351 |
| § 4. Рассеяние π -мезонов на π -мезонах. N/D -метод | 362 |
| Глава 18. Двойные дисперсионные соотношения | 366 |
| § 1. Двойные дисперсионные соотношения (представление Мандельштама). | 366 |
| § 2. Сведение двойных дисперсионных соотношений к одномерным. | 374 |
| § 3. Учет вклада третьего канала | 383 |
| § 4. Аналитические свойства парциальных амплитуд. | 384 |
| Глава 19. Метод комплексных моментов | 387 |
| § 1. Асимптотическое выражение для амплитуды процесса в случае бесспиновых частиц. | 387 |
| § 2. Асимптотическое выражение для амплитуды в случае частиц со спином. | 396 |
| § 3. Рассеяние мезонов на протонах. | 420 |
| § 4. Фотообразование π -мезонов на нуклонах | 424 |
| § 5. Квазидвухчастичные процессы. | 429 |
| Глава 20. Дисперсионные правила сумм | 436 |
| § 1. Дисперсионные правила сумм. | 436 |
| § 2. Сверхсходящиеся дисперсионные правила сумм. | 439 |
| § 3. Реджевские дисперсионные правила сумм. | 445 |
| Глава 21. Алгебра токов | 448 |
| § 1. Алгебра токов и токовые правила сумм. | 449 |
| § 2. Фотообразование π -мезонов на нуклонах | 455 |
| § 3. Правило сумм Кабибо—Радикати | 460 |
| Дополнение I. Таблица элементарных частиц. | 463 |
| Дополнение II. Коэффициенты Клебша—Гордана | 467 |
| Дополнение III. Шаровые функции. | 470 |
| Дополнение IV. Группы пространственной симметрии | 471 |
| Л и т е р а т у р а | 481 |

Нелипа Николай Федорович

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СИЛЬНОЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

Редактор *В. Н. Безрукова*

Художественный редактор *А. С. Александров*

Технический редактор *Н. А. Власова*

Корректор *Н. А. Смирнова*

Сдано в набор 15/XII 1969 г.

Подписано к печати 15/VI 1970 г.

T-09538. Формат 60×90/16.

Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 30,5

Уч.-изд. л. 28,46 Тираж 3410 экз. Цена 2 р. 90 к. Зак. изд. 1979. Зак. тип. 842.

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Б. Переяславская, 46