Р. НЕВАНЛИННА

ОДНОЗНАЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

перевод с немецкого
Л. И. ВОЛКОВЫСКОГО

Под редакцией и с добавлением
М. В. КЕЛДЫША и М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1941 ЛЕНИНГРАД

517
Н—40 доб. 516

Редактор *Б. М. Юнович.*

Тираж 3.000. Подписано к печати 1/IV 1941 г. А 23171. Объем: 24¼ печ. *л.*, 27,45 авт. *л.* 46.400 тип. зн. в печ. *л.* Заказ № 322. Цена 11 руб. 75 к., переплет 75 коп.

Отпечатано с матриц в 1-й тип. Машгиза НКТМ. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА.

Переводом книги Р. Неванлинна „Однозначные аналитические функции" заполняется пробел, существовавший до последнего времени в нашей литературе по этому вопросу. Введенные автором понятия гармонической меры и принцип гармонической меры позволили ему с большой простотой и общностью изложить учение об однозначных аналитических функциях. В книге дается развернутое изложение современной теории мероморфных функций и связанного с ней учения о распределении значений и структуре римановых поверхностей. В тесной связи с этим кругом вопросов рассматривается проблема типа и альфорсова теория поверхностей наложения. Отдельная глава посвящена гармоническим нульмножествам. Книга Р. Неванлинна дает чрезвычайно богатый материал для курсовых и диссертационных работ. Для чтения книги требуется знакомство с университетским курсом теории функций комплексного переменного.

Книга снабжена подробным литературным указателем. Ссылки на него в тексте приведены в квадратных скобках. Примечания переводчика и редакторов обозначены звездочками, примечания автора обозначены цифрами.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА.

За немногие годы, протекшие со времени появления моей книги, посвященной полному изложению новой теории целых и мероморфных функций („Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes". Paris, Gauthier-Villars, 1929), теория распределения значений аналитических функций, благодаря трудам различных исследователей, существенно развилась. Исследования в этой области теории функций еще ни в какой мере не доведены до конца; наоборот, достигнутые успехи указали ряд новых нерешенных вопросов. С другой стороны, среди новейших результатов встречаются много таких, которые имеют окончательный характер и содействовали внесению большого единства в равличные области теории функций.

При изложении учения, находящегося в непрерывном развитии, целесообразное разграничение материала представляет известные трудности. Некоторые замечания о точке зрения, легшей в основу при выборе материала, читатель найдет в нижеследующем введении. Автор стремился к полноте изложения в той степени, в какой могут быть обоснованы применяемые вспомогательные средства, выходящие за рамки элементов теории функций, теории потенциала, неевклидовой геометрии и топологии. Во многих случаях это удалось в связи с изложением некоторых общих принципов, которые излагаются полностью в силу их значения для рзличных вопросов теории распределения значений. Исключение составляют фундаментальные теоремы существования теории конформных отображений, равно как и классические теоремы о соответствии границ при конформном отображении однолистных областей; эти теоремы предполагаются известными. Вообще систематическое изложение учения об униформизации, об автоморфных функциях и относящихся к ним регулярно разветвленных римановых поверхностях должно было бы предшествовать настоящей работе, которая в своей существенной части занимается некоторыми высшими ступенями этого учения.

Рольф Неванлинна

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Стр.

Введение 7

I. Конформное отображение односвязных и многосвязных областей 10

§ 1. Конформное отображение посредством линейных преобразований (10) — **§ 2.** Основная теорема конформных отображений. Отображение универсальной поверхности наложения многосвязной области (14) — **§ 3.** Случай плоскости с p выключенными точками (20) — **§ 4.** Общий случай p-связной области (26).

II. Решение проблемы Дирихле для однолистной области 27

§ 1. Интеграл Пуассона (27) — **§ 2.** Решение общей краевой задачи (29) — **§ 3.** Интегральное представление решения краевой задачи посредством гармонической меры (31) — **§ 4.** Функция Грина и гармоническая мера (33) — **§ 5.** О линиях уровня гармонической меры (39).

III. Принцип гармонической меры и его применения 43

§ 1. Установление принципа и его обоснование (43) — **§ 2.** Применения к абсолютному значению аналитической функции (47) — **§ 3.** Принцип гиперболической меры (51) — **§ 4.** Теоремы о круговых областях (58) — **§ 5.** Теоремы Ландау и Шоттки (62) — **§ 6.** Применения к исследованию граничных и предельных значений ограниченных функций (65).

IV. Соотношения между неевклидовыми и евклидовыми мероопределениями 69

§ 1. Общие замечания (69) — **§ 2.** Принцип Карлемана расширения области (70) — **§ 3.** Оценка гиперболической меры посредством расширения области (87) — **§ 4.** Теоремы Альфорса об искажении (96) — **§ 5.** Проблема Карлемана-Мию (104).

V. Множества гармонической меры нуль 115

§ 1. Определение множеств гармонической меры нуль (115) — **§ 2.** Множества емкости нуль (123) — **§ 3.** Функция Грина и логарифмический потенциал (131) — **§ 4.** Поведение аналитической функции в окрестности множества гармонической меры нуль (140) — **§ 5.** Леммы об аддитивных функциях множеств (146) — **§ 6.** Метрические свойства множеств гармонической меры нуль (152).

VI. Первая основная теорема теории мероморфных функций . . . 164

§ 1. Формула Пуассона-Иенсена (164) — **§ 2.** Характеристическая функция (167) — **§ 3.** Геометрическая интерпретация характеристической функции (174) — **§ 4.** Обобщения (180).

VII. Функции ограниченного вида 185

§ 1. Представление функции с ограниченной характеристикой в виде отношения ограниченных функций (185) — **§ 2.** Представление функций ограниченного вида интегралом Пуассона-Стильтьеса (191) — **§ 3.** Теорема Фату (202) — **§ 4.** О множестве граничных значений функции ограниченного вида (210) — **§ 5.** Применение к конформному отображению универсальной поверхности наложения однолистной области (214).

Стр.

VIII. Мероморфные функции конечного порядка 219
§ 1. Порядок мероморфной функции (219) — § 2. Каноническое представление мероморфной функции конечного порядка (224) — § 3. Некоторые свойства канонических произведений (228) — § 4. Жанр мероморфной функции (236).

IX. Вторая основная теорема в теории мероморфных функций . 240
§ 1. Вводные замечания (240) — § 2. Фундаментальное соотношение (247) — § 3. Лемма о логарифмической производной мероморфной функции. Вторая основная теорема (252) — § 4. Прямое доказательство второй основной теоремы с помощью фундаментального соотношения (257).

X. Применения второй основной теоремы 265
§ 1. Теорема Пикара-Бореля (265) — § 2. Соотношения дефектов (269) — § 3. Теоремы о разветвленных значениях (281).

XI. Односвязные римановы поверхности 286
§ 1. Об особенностях функций однолистных односвязных на поверхностях (286) — § 2. Римановы поверхности, точки ветвления которых расположены над конечным числом точек (295) — § 3. Римановы поверхности с конечным числом точек ветвления (304) — § 4. О связи между порядком мероморфной функции и критическими точками обратной функции (310).

XII. Тип римановой поверхности 314
§ 1. Разветвленность римановой поверхности (314) — § 2. Соотношения дефектов и разветвленность (319) — § 3. Достаточные условия для параболического типа (323).

XIII. Альфорсова теория поверхностей наложения 330
§ 1. Основные топологические понятия (330) — § 2. Введение метрики (334) — § 3. Метрические свойства поверхностей наложения (337) — § 4. Основная теорема о конечных поверхностях наложения (341) — § 5. Обращение основной теоремы (348) — § 6. Теоремы о регулярно исчерпываемых открытых поверхностях наложения (350) — § 7. Применения к конформным отображениям односвязных римановых поверхностей (358) — § 8. Обобщения на отображения с ограничением эксцентриситетом (363).

Приложение 365

Литературный указатель 380

Предметный указатель 386

ВВЕДЕНИЕ.

Однозначные аналитические функции можно изучать с различных точек зрения. Вопросы, подлежащие рассмотрению в настоящей работе, группируются вокруг одной большой основной проблемы. Этой центральной постановке вопроса здесь следует предпослать несколько общих замечаний.

Представим себе неограниченно продолженным заданный элемент аналитической функции. Если предположить, что полученная таким образом аналитическая функция $w = w(z)$ однозначна, то существует область G_z со следующими свойствами.

1. Всякой внутренней точке z области G_z соответствует один и только один элемент *рационального характера* функции $w(z)$ *).

2. Всякая граничная точка z^* области G_z является существенно особой для функции $w(z)$.

Если G_z совпадает с полной плоскостью (эллиптический случай), то $w(z)$ есть рациональная функция. Исключая этот простейший случай, мы должны различать два случая в зависимости от того, будет ли G_z односвязна или многосвязна. Мы ограничиваемся первым из них; при этом мы должны учитывать дальнейшие две возможности: граница Γ_z области G_z есть или одна точка (параболический случай) или континуум (гиперболический случай).

Функция $w = w(z)$ отображает область G_z на некоторую риманову поверхность G_w, расположенную над плоскостью w. Функция $z = z(w)$, обратная к функции $w(z)$, однозначна и в силу однозначности $w(z)$ *однолистна* на поверхности G_w, т. е. центрам двух различных элементов функции $z(w)$ отвечают всегда две различные точки z.

Обратно, в силу основной теоремы теории конформных отображений произвольная односвязная риманова поверхность, расположенная над плоскостью w, может быть взаимно однозначно и конформно отображена на одну из следующих трех нормальных областей G_z: 1) на полную плоскость (эллиптический случай); 2) на плоскость с выключенной точкой (параболический случай) и 3) на единичный круг или, более обще, на произвольную область, ограниченную континуумом (гиперболический случай).

Учение о распределении значений однозначных аналитических функций занимается изучением систем (z_a) точек области G_z, в ко-

---

*) $w(z) = (z - z_0)^\nu f(z)$, где ν—целое число положительное, отрицательное или нуль, а $f(z)$ — функция, голоморфная в точке z_0.

торых функция $w(z)$ принимает заданное значение $w = a$; при этом рассматриваются всевозможные значения a. Классическим результатом в этой области является знаменитая теорема Пикара (Picard), согласно которой функция, мероморфная в плоскости с выключенной точкой, принимает бесконечное число раз всякое значение a, исключая самое большее два значения. Сюда примыкает учение о распределении значений Адамара (Hadamard), Бореля (Borel), Жюлиа (Julia) и др. Однако, при этих далеко идущих обобщениях и углублениях теоремы Пикара точка зрения конформных отображений играет второстепенную роль. Постановка и изучение вопроса совершаются без учета римановой поверхности G_w, на которую мероморфная функция отображает область G_z, т. е. плоскость с выключенной точкой. В свою очередь, первые исследования римановых поверхностей целых и мероморфных функций [Гурвиц (Hurwitz), Бутру (Boutroux), Иверсен (Iversen), Гросс (Gross) и др.] имели лишь немногие точки соприкосновения с результатами учения о распределении значений.

Новое обоснование теории мероморфных функций проложило мост между этими двумя направлениями исследования. На место вейерштрассовского канонического представления целых и мероморфных функций выступают более сильные вспомогательные средства теории функций и теории потенциала. На новой основе просто излагается и углубляется теория Адамара-Бореля. Однако, важнейшим успехом является то, что новые аналитические понятия имеют одновременно и геометрическое значение. Основные величины (характеристика, дефект, индекс разветвления) связывают асимптотическое поведение однозначной аналитической функции $w(z)$ со свойствами римановой поверхности G_w, на которую она конформно отображает свою область существования G_z. Это позволяет рассматривать теорему Пикара и ее обобщения как определенные высказывания о характере разветвления поверхности G_w. Новое направление переносит центр тяжести исследования распределения значений на изучение отображения $G_z \to G_w$ с точки зрения искажения внутри и, прежде всего, на границе; таким образом, вопрос идет о далеко идущих обобщениях классических теорем об искажении и соответствии границ при конформном отображении областей, подобных однолистным.

Учение о распределении значений включается, таким образом, в общую теорию конформных отображений. С этой точки зрения центральным вопросом учения о распределении значений является *проблема типа* — интересная и сложная задача, оставшаяся открытой в классической теории униформизации. На основании метрико-топологических особенностей открытой односвязной римановой поверхности следует определить, принадлежит ли она к параболическому или к гиперболическому типу, т. е. можно ли ее конформно отобразить на плоскость с выключенной точкой или на единичный круг. Те обобщения теоремы Пикара, которые обычно объединяются

под названием „соотношения дефектов", содержат необходимые признаки для параболического типа. Однако, хотя и известны различные достаточные критерии, мы еще даже для сравнительно простых классов римановых поверхностей не имеем полного решения проблемы типа.

Среди римановых поверхностей параболического типа особо выделяются простыми свойствами ветвления те из них, которые соответствуют мероморфным функциям конечного порядка. К ним принадлежат, между прочим, поверхности с конечным числом точек ветвления.

Также и среди поверхностей гиперболического типа выделяются заслуживающие внимания классы поверхностей. Для характеристики отображающей функции можно указать предельный порядок роста, выше которого еще справедливы теорема Пикара и все соотношения дефектов. С понижением порядка роста характеристики степень разветвленности римановой поверхности возрастает. Наконец, вполне определенный класс образует поверхности *ограниченного вида* (beschränktartige), которым соответствуют ограниченные характеристики. Для точного описания особенностей поверхности ограниченного вида нужно привлечь на помощь понятие множества емкости нуль. Эти множества играют важную роль и в других вопросах учения о распределении значений. В нашем изложении понятие емкости входит в теорию так называемой гармонической меры. Благодаря введению и систематическому применению этой меры, инвариантной относительно взаимно однозначных конформных отображений, становится возможным единое и наглядное изучение отдельных вопросов, близко связанных с теорией распределения значений.

I. КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОДНОСВЯЗНЫХ И МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ.

§ 1. Конформное отображение посредством линейных преобразований.

1. Группа взаимно однозначных и конформных отображений полной плоскости самой на себя аналитически определяется совокупностью дробнолинейных преобразований

$$S(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc\neq 0). \tag{1}$$

Действительно, всякое линейное преобразование производит такое отображение, и, обратно, всякая функция $t(z)$, которая производит однозначное и конформное отображение плоскости самой на себя, имеет вид (1): в самом деле, такая функция должна быть регулярна во всякой точке плоскости z за исключением единственной точки z_0, соответствующей значению $t=\infty$; таким образом, единственной особенностью этой функции является полюс первого порядка, откуда на основании элементарной теоремы из теории функций следует, что функция $t(z)$ есть рациональная функция первого порядка.

2. Если посредством стереографической проекции перейти от плоскости z к сфере Римана (Riemann) диаметра 1, касающейся плоскости в начале координат, то совокупность преобразований (1) перейдет в совокупность конформных отображений сферы самой на себя. Среди этих отображений особого внимания заслуживает группа вращений сферы. Общая форма преобразования вращения, переводящего точки z и ζ, соответственно $z=a$ и $\zeta=b$, друг в друга, определяется соотношением

$$\frac{z-a}{1+\bar{a}z}=e^{i\alpha}\frac{\zeta-b}{1+\bar{b}\zeta}, \tag{2}$$

где черта сверху означает переход к сопряженной комплексной величине, а α — действительный параметр *).

Совершая предельный переход $z\to a$, $\zeta\to b$, мы получим соотношение

$$\frac{|dz|}{1+|z|^2}=\frac{|d\zeta|}{1+|\zeta|^2},$$

*) Чтобы в этом убедиться, полезно заметить, что две точки z_1, z_2, которым на сфере соответствуют диаметрально противоположные точки, связаны соотношением $z_1\bar{z}_2=-1$.

откуда видно, что выражение

$$d\sigma = \frac{ds}{1+r^2}, \tag{2'}$$

где ds — элемент евклидовой длины, а r — расстояние от нулевой точки до элемента дуги в плоскости z, остается инвариантным относительно преобразования вращения сферы. Геометрически это объясняется тем, что выражение (2') представляет *сферическую длину* рассматриваемого элемента дуги. В метрике, определяемой выражением (2'), геодезическими линиями являются окружности в плоскости z, соответствующие большим кругам на сфере; они характеризуются тем, что пересекают единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках.

Для дальнейших применений заметим еще, что логарифм отношения сферической длины элемента дуги к евклидовой его длине

$$u(z) = \log\frac{d\sigma}{ds} = \log\frac{1}{1+r^2}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u = -4e^{2u}, \tag{2''}$$

где Δ — оператор Лапласа.

3. Кроме преобразований вращения сферы заслуживает особого внимания группа линейных преобразований, отображающих единичный круг (а тем самым и его внешнюю часть) самого на себя. Общая форма такого преобразования, переводящего точки $z=a$ и $\zeta=b$ друг в друга ($|a|<1$, $|b|<1$), определяется соотношением

$$\frac{z-a}{1-\bar{a}z} = e^{i\alpha}\frac{\zeta-b}{1-\bar{b}\zeta}. \tag{3}$$

Обратно, всякое взаимно однозначное и конформное отображение $\zeta=\zeta(z)$ единичного круга самого на себя достигается линейным преобразованием (3). В самом деле, преобразуя переменные z и ζ посредством подходящих линейных преобразований группы (3), добьемся сперва того, чтобы точки $z=0$ и $\zeta=0$ соответствовали друг другу. На окружности $|z|=r$ $(0<r<1)$ абсолютная величина функции $\frac{\zeta}{z}$, регулярной в круге $|z|<r$, не превосходит $\frac{1}{r}$; в силу принципа максимума это справедливо и в круге $|z|\leqslant r$. Отсюда при $r\to 1$ следует, что $|\zeta|\leqslant|z|$ для всех $|z|<1$. Если переменить местами переменные z и ζ, то аналогично докажем, что $|z|\leqslant|\zeta|$, откуда следует, что $|\zeta|=|z|$, т. е. $\zeta=e^{i\varphi}z$. Так как обратный переход к первоначальным переменным совершается посредством линейных преобразований (3), то и последние связаны линейным соотношением (3).

Как и в п. 2, при предельном переходе $z\to a$, $\zeta\to b$ из (3) следует инвариантность дифференциального выражения

$$d\sigma = \frac{ds}{1-r^2} \tag{3'}$$

относительно преобразований группы (3). Если это выражение рассматривать как длину элемента дуги, то, как это впервые показал Пуанкаре (Poincaré) [1], мы придем к некоторой метрике, удовлетворяющей в круге $|z|<1$ законам гиперболической (Болиа-Лобачевского) геометрии; при этом роль кратчайших линий будут играть дуги окружностей, ортогональных к единичной окружности $|z|=1$, представляющей „бесконечно-далекое" неевклидовой плоскости [1]).

Легко убедиться в том, что логарифм отношения неевклидовой длины элемента дуги к евклидовой его длине удовлетворяет некоторому диференциальному уравнению, подобному уравнению (2). Именно, если положить $u=\log\frac{d\sigma}{ds}$, то в силу (3′)

$$\Delta u = 4e^{2u}. \tag{3''}$$

4. Другой важный инвариант мы получим, если найдем логарифмическую производную соотношения (3)

$$\frac{1-|a|^2}{(z-a)\left(\frac{1}{z}-\bar{a}\right)}\,\frac{dz}{z}=\frac{1-|b|^2}{(\zeta-b)\left(\frac{1}{\zeta}-\bar{b}\right)}\,\frac{d\zeta}{\zeta}$$

и в полученном выражении будем считать, что точка z стремится к граничной точке $e^{i\varphi}$. При этом ζ будет стремиться к соответствующей граничной точке $e^{i\vartheta}$, а диференциальное отношение $\frac{d\log z}{d\log\zeta}$ к $\frac{d\varphi}{d\vartheta}$; отсюда получим

$$\frac{1-|a|^2}{|e^{i\varphi}-a|^2}\,d\varphi=\frac{1-|b|^2}{|e^{i\vartheta}-b|^2}\,d\vartheta.$$

Таким обравом диференциальное выражение

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta$$

сохраняет свое значение, если точки $z=re^{i\varphi}$ и $w=e^{i\vartheta}$ одновременно подвергаются преобразованию группы (3).

Выражение

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}=\frac{1-|z|^2}{|w-z|^2}$$

является действительной частью функции $\frac{w+z}{w-z}$ и потому есть гармоническая функция точки (Aufpunkt) z. Это выражение имеет простое геометрическое значение, впервые указанное Шварцем (Schwarz) [1]. Именно, в силу одной элементарной геометрической теоремы имеем

$$1-|z|^2=|w-z|\,|w'-z|,$$

---

[1]) Для кратчайшего „расстояния" между точками O и z получается величина $\frac{1}{2}\log\frac{1+|z|}{1-|z|}$. [Более подробно см. у Каратеодори, Конформное отображение, М.—Л., 1934.]

где w' — второй конец хорды единичного круга, определяемой точками w и z (см. фиг. 1); так как далее

$$\frac{d\vartheta}{|w-z|}=\frac{d\omega}{|w'-z|},$$

где $d\omega$ — длина элемента дуги единичной окружности, описываемого точкой w' при бесконечно малом вращении хорды вокруг точки z, то

$$\frac{d\omega}{d\vartheta}=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}.$$

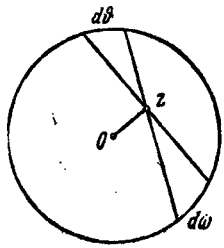
Линиями уровня этого выражения служит семейство окружностей, касающихся единичной окружности в точке $e^{i\vartheta}$; с точки зрения неевклидовой геометрии — это орициклы или предельные линии, ортогональные к семейству параллельных „прямых" (окружности, ортогональные к единичной окружности), направленных в „бесконечно удаленную" точку $e^{i\vartheta}$.

5. В силу инвариантности дифференциала $d\omega$ относительно преобразований группы (3) этим же свойством обладает и интеграл

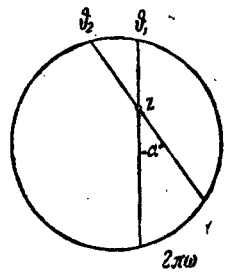
$$\omega(z;\vartheta_1,\vartheta_2)=\frac{1}{2\pi}\int d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta,$$

взятый между двумя произвольными пределами ϑ_1, ϑ_2 $(0\leqslant\vartheta_2-\vartheta_1\leqslant 2\pi)$; это значит, что если точки $z=re^{i\varphi}$ $(0\leqslant r<1)$, $e^{i\vartheta_1}$, $e^{i\vartheta_2}$ подвергнуть одному и тому же преобразованию группы (3), переводящему их в некоторые точки z', $e^{i\vartheta_1'}$, $e^{i\vartheta_2'}$, то будет иметь место равенство

$$\omega(z;\vartheta_1,\vartheta_2)=\omega(z';\vartheta_1',\vartheta_2').$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Из рассмотренного выше геометрического значения $d\omega$ следует, что $\omega(z;\vartheta_1,\vartheta_2)$ равно деленной на 2π длине дуги, отсекаемой на единичной окружности хордами, проведенными из точек $e^{i\vartheta_1}$, $e^{i\vartheta_2}$ через точку z (фиг. 2). Если α — величина угла, образованного этими хордами, то непосредственно видно, что

$$2\pi\omega=2\alpha-(\vartheta_2-\vartheta_1).$$

Отсюда становится очевидным, что величина $\omega(z;\vartheta_1,\vartheta_2)$ в круге $|z|<1$ изменяется между 0 и 1; линиями уровня этой величины служит семейство дуг окружностей, соединяющих точки $e^{i\vartheta_1}$, $e^{i\vartheta_2}$. В интерпретации Пуанкаре эти линии играют роль эквидистант, т. е. линий, находящихся на постоянном неевклидовом расстоянии

друг от друга. На дуге $\vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2$ величина ω равна 1, на дополнительной дуге $\vartheta_2 < \vartheta < \vartheta_1 + 2\pi$ она равна 0.

Для $z = 0$ величина ω равна деленной на 2π длине дуги $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ единичной окружности $|z| = 1$. Если же z изменять, то значение ω можно рассматривать как обобщенную „длину" дуги $(\vartheta_1, \vartheta_2)$, измеренную относительно подвижной внутри единичного круга точки z.

Так как, кроме того, ω является гармонической функцией от z, то мы ее называем *„гармонической мерой дуги* $(\vartheta_1, \vartheta_2)$ *в точке* z *относительно единичного круга"*.

Гармоническая мера $\omega(z, \alpha)$ дуги α окружности $|z| = 1$ относительно единичного круга обладает, таким образом, следующими свойствами:

1) $\omega(z, \alpha)$ в круге $|z| < 1$ есть ограниченная гармоническая функция.

2) ω принимает граничное значение 1 во всякой внутренней точке дуги α и значение 0 на дополнительной дуге β.

Применяя принцип максимума и минимума гармонической функции, мы тотчас убеждаемся, что указанными двумя свойствами гармоническая мера определяется однозначно.

6. Неподвижные точки c_1, c_2 преобразования группы (3) или зеркально симметричны относительно единичной окружности (эллиптический случай) или обе лежат на единичной окружности (гиперболический случай), где они также могут совпадать (параболический случай). Нормальная форма соответствующих преобразований следующая:

эллиптическое преобразование:

$$\frac{z - c_1}{z - c_2} = e^{i\vartheta} \frac{\zeta - c_1}{\zeta - c_2} \quad (|c_1| \neq 1,\ c_1\bar{c}_2 = 1,\ \vartheta \text{ действительно}),$$

гиперболическое преобразование:

$$\frac{z - c_1}{z - c_2} = \lambda \frac{\zeta - c_1}{\zeta - c_2} \quad (|c_1| = |c_2| = 1,\ \lambda > 0),$$

параболическое преобразование:

$$\frac{1}{z - c} = \frac{1}{\zeta - c} + i\lambda\bar{c} \quad (|c| = 1,\ \lambda \text{ действительно}).$$

§ 2. Основная теорема конформных отображений. Отображение универсальной поверхности наложения многосвязной области.

7. Относительно отображения областей более общих, чем рассмотренные в § 1, мы предполагаем известной прежде всего следующую теорему:

A. *Всякая односвязная однолистная область* G, *граница* Γ *которой содержит более одной точки, может быть отображена взаимно однозначно и конформно на единичный круг.*

Если Γ *содержит свободную жорданову дугу* [1]*, то последней соответствует взаимно однозначно и непрерывно дуга единичной окружности.*

Первая часть этой фундаментальной теоремы содержится как частный случай в следующей основной теореме конформных отображений:

B. *Всякая односвязная риманова поверхность* F *может быть отображена взаимно однозначно и, исключая точку ветвления конечного порядка, конформно на одну из следующих трех нормальных областей*:

1) *На полную плоскость* (*эллиптический случай*).

2) *На плоскость с выключенной точкой* (*параболический случай*).

3) *На единичный круг* (*гиперболический случай*).

Функция, отображающая поверхность F на одну из этих трех нормальных областей, определяется с точностью до взаимно однозначного и конформного отображения нормальной области самой на себя. Последнее, по § 1, всегда достигается линейным преобразованием. Переход от одной нормальной области к другой при этом невозможен. Таким образом, все односвязные римановы поверхности можно разбить на три типа, соответственно трем нормальным областям, на которые их можно отобразить.

Из хорошо известных свойств линейных преобразований, частично рассмотренных в § 1, следует, что отображение поверхности F на нормальную область определяется однозначно, если требовать, чтобы в случае 1 три пары заданных точек, в случае 2 две пары заданных точек (если при этом фиксирована единственная граничная точка нормальной области) и в случае 3 одна пара заданных точек с двумя заданными в них направлениями соответствовали друг другу.

Если рассматривать связную область, ограниченную жордановой кривой, то однозначность отображения, вследствие его непрерывности на границе, будет достигнута, если поставить в соответствие друг другу три пары граничных точек.

8. В дальнейшем основная теорема B применяется редко, а если применяется, то это всегда оговаривается. В настоящей подготовительной главе мы рассмотрим более подробно лишь один частный случай этой теоремы, имеющий особое значение для дальнейшего. Вопрос идет о классе римановых поверхностей, к которому приводит проблема конформного отображения многосвязных областей.

Такую область уже нельзя отобразить взаимно однозначно и конформно на круг, так как порядок связности есть топологический инвариант, т. е. сохраняется при взаимно однозначных и непрерывных отображениях. Напротив, между многосвязной областью и кругом можно установить многозначное конформное соответствие. Оно

[1] „Свободной" называется такая дуга γ, принадлежащая границе Γ, внутренние точки которой не являются предельными для граничных точек, лежащих вне γ.

может быть аналитически точно определено посредством характеристических свойств искомой аналитической функции. Мы встанем, однако, на более общую точку зрения, отделяя топологическую часть задачи об отображении (требование непрерывности и взаимной однозначности в малом) от особого условия аналитичности (конформности). Это достигается введением понятия *универсальной поверхности наложения* заданной многосвязной области следующим образом.

9. Мы ограничиваемся рассмотрением *однолистной p-связной области* G (p — конечно). Граница такой области состоит из p различных континуумов, или точек, $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$. Соединим миожества γ_1 и γ_2 жордановой кривой q_1, лежащей внутри G; аналогично соединим множества γ_2 и $\gamma_3, \ldots, \gamma_p$ и γ_1. Проведенные таким образом сечения $q_1, \ldots, q_p$, которые можно выбрать не имеющими общих точек, разбивают область G на две односвязные части G_1 и G_2, ограниченные сечениями q и p граничными множествами γ_ν.

Чтобы притти к универсальной поверхности наложения области G, рассмотрим, с другой стороны, однолистный односвязный криволинейный многоугольник G_1^0, ограниченный p жордановыми дугами. G_1^0 можно выбрать вполне произвольно; лишь в целях получения наглядной и в дальнейшем часто встречающейся фигуры мы в случае, когда $p > 2$, за G_1^0 берем p-угольник, вписанный в единичный круг и ограниченный дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности; если же $p = 2$, то за G_1^0 мы берем полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми. Затем из многоугольника G_1^0 получим целый ряд новых многоугольников путем неограниченно-продолженного процесса зеркального отображения: сперва G_1^0 зеркально отобразим от его p сторон; к $p(p-1)$ сторонам многоугольника F_1, составленного из G_1^0 и из p многоугольников G_2^1, полученных после зеркального отображения, присоединим $p(p-1)$ новых многоугольников G_1^2, полученных аналогичным процессом зеркального отображения; с полученным таким образом многоугольником F_2 поступим аналогично и т. д.

В случае $p = 2$ получающаяся система полос заполняет всю плоскость. В случае $p > 2$ полученные многоугольники лежат в единичном круге, так как наши зеркальные отображения переводят этот круг самого в себя; с другой стороны, нетрудно показать, что полученная сеть F многоугольников покрывает однолистно и без пропусков весь единичный круг, притом так, что в окрестности всякой точки единичной окружности содержится бесконечно много многоугольников $G_1^{2\nu}$ и $G_2^{2\nu+1}$ *).

Отобразим теперь область G непрерывно и в малом взаимно однозначно на сеть F. Для этого представим себе сперва, что внутренняя часть G_1 области G отображена топологически на

*) Индексы сверху означают порядок зеркального отображения, индексы снизу — четность или нечетность этого порядка.

внутреннюю часть произвольного многоугольника $G_1^{2\nu}$, притом так, что внутренние точки сечений q_ν и сторон многоугольника соответствуют друг другу взаимно однозначно и непрерывно; кроме того потребуем, чтобы граничным множествам γ_ν соответствовали вершины миогоугольника (последнее соответствие будет, следовательно, взаимно однозначным только в том случае, когда каждое множество γ_ν приводится к одной точке) *). С другой стороны, вышерассмотренным процессом зеркального отображения установлено топологическое (даже конформное) соответствие между всеми многоугольниками $G_1^{2\nu}$ ($\nu = 0, 1, \ldots$). Соединяя эти отображения с предыдущим отображением, мы получим отображение области G_1 на все области $G_1^{2\nu}$, так что каждой точке области G_1 будет соответствовать бесконечная последовательность *эквивалентных точек*, т. е. точек, связанных четным числом следующих друг за другом зеркальных отображений. Аналогичным образом поступаем с областью G_2, отображая ее топологически на произвольный многоугольник $G_2^{2\nu+1}$, причем соответствие границ устраиваем так, чтобы образы точек сечений q_ν совпадали с образами этих же точек при отображении области G_1.

В результате этой конструкции получилось непрерывное, в малом взаимно однозначное отображение области G на сеть F. Всякой точке области G соответствует при этом отображении бесконечная последовательность эквивалентных точек. Два смежных многоугольника $G_1^{2\nu}$, $G_2^{2\nu+1}$ образуют *фундаментальную область*; $2p-2$ сторон такой фундаментальной области попарно эквивалентны. Если идентифицировать эквивалентные пары граничных точек, то получится область, являющаяся топологическим образом области G. Эквивалентные точки, равно как и сами фундаментальные области, связаны группой преобразований, состоящих из четного числа последовательных зеркальных отображений, переводящих, как и каждое отдельное зеркальное отображение, фигуру F в самое себя. Эта *группа преобразований наложения* (Decktransformationen) может быть получена из $p-1$ *фундаментальных преобразований* и их обратных преобразований; за эти $p-1$ преобразования можно выбрать преобразования, которые испытывает произвольная точка фигуры F, когда ее образ в G обходит по одному какие-нибудь

---

*) Для случая, когда континуумы γ_ν не все сводятся к точкам, за G_1^0 целесообразнее взять область, ограниченную $k \leqslant p$ дугами единичной окружности и p дугами q_ν' окружностей, ортогональных к единичной окружности, где k — число граничных континуумов γ_ν, не сводящихся к точке (см. фиг. α). При построении областей $G_1^{2\nu}$, $G_2^{2\nu+1}$ мы производим зеркальные отображения только относительно дуг q_ν'. При отображении G_1 на $G_1^{2\nu}$ мы заботимся о том, чтобы, как раньше, сечения q_ν перешли в дуги q_ν', а континуумы γ_ν — в соответствующие дуги единичной окружности. При такой схеме, если γ_ν — дуги Жордана, все отображения G_1, G_2 на $G_1^{2\nu}$, $G_2^{2\nu+1}$ можно сделать взаимно однозначными и взаимно непрерывными, включая границы.

Фиг. α

$p-1$ граничных множеств γ_ν; очевидно, эти преобразования можно определить так же, как те преобразования, которыми связаны $p-1$ пара сторон произвольной фундаментальной области.

Отображением области G на F мы однозначно определили универсальную поверхность наложения p-связной области. На фигуру F нужно смотреть лишь как на особого представителя этой поверхности наложения среди бесчисленного количества других возможных. Понятие поверхности наложения является топологическим понятием, поэтому ее представителем может служить любая поверхность F', которая получается топологическим отображением из фигуры F. Отображение области G на F', которое получается соединением выше определенного отображения области G на F и топологического отображения фигуры F на F', мы будем называть *изоморфным* к отображению $G \to F$. Универсальная поверхность наложения определяется общим содержанием этих изоморфных отображений.

С точки зрения этого определения поверхности наложения является, например, несущественным то, что в случае $p > 2$ мы поверхность наложения представили конечным открытым кругом, а в случае $p = 2$ — бесконечным (плоскость с выключенной точкой), так как эти области топологически эквивалентны. Обыкновенно поверхность наложения представляют расположенной бесконечнолистно над соответствующей областью G: для получения такой поверхности склеивают бесконечное число экземпляров областей G_1 и G_2 вдоль сторон q_ν, притом в том же порядке, в каком соединены многоугольники $G_1^{2\nu+1}$ и $G_2^{2\nu+1}$ в фигуре F. На полученной таким образом поверхности G^∞, топологически эквивалентной F, бесконечная последовательность эквивалентных точек, соответствующих некоторой точке области G, состоит из расположенных над ней точек поверхности G^∞, чем объясняется и само название „Ueberlagerungsfläche“ *). Фундаментальные области поверхности G^∞ совпадают с отдельными ее листами.

Являясь топологическим образом круга, универсальная поверхность наложения p-связной области односвязна.

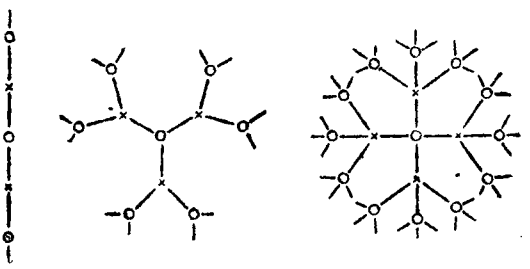
10. Существенным в понятии универсальной поверхности наложения (как и вообще в понятии римановой поверхности) является по предыдущему то правило, по которому соединяются отдельные фундаментальные области („листы“). Это правило, дающее схему ветвления поверхности, может быть аналитически охарактеризовано группой преобразований наложения; геометрически его можно наглядно представить еще проще, чем фигурой F, следующей, связанной с ней схемой [1]).

В областях G_1 и G_2 возьмем по точке P_1 и P_2 и соединим их p жордановыми дугами l_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) так, чтобы l_ν пересекала только

*) Русский перевод „поверхность наложения“ лишь отчасти передает смысл немецкого термина „Ueberlagerungsfläche“.

[1]) A. Speiser [2], R. Nevanlinna [10].

сечение q_ν. Системе дуг l_ν соответствует на фигуре F „деревоподобная линия", схематически представленная на фиг. 3 для $p=2, 3, 4$. Кружочки и крестики этого топологического дерева соответствуют взаимно однозначно многоугольникам $G_1^{2\nu}$ и $G_2^{2\nu+1}$, а соединяющие их стороны — сторонам этих многоугольников. Обратно, топологическое дерево может быть использовано для построения фигуры F, откуда следует, что оно вполне определяет поверхность наложения.



Фиг. 3.

11. После того как предыдущими рассуждениями вполне выяснена топологическая сторона проблемы, мы можем теперь, уже учитывая специальное требование конформности, следующим образом точно сформулировать нашу задачу об отображении:

Требуется построить конформное отображение области G на однолистную область K, изоморфное к выше определенному отображению $G \to F$.

Предполагая области G и K расположенными в комплексных плоскостях z и соответственно x, положим, что $x = x(z)$ — аналитическая функция, производящая искомое отображение $G \to K$. Из определяющих свойств этого отображения непосредственно следует, что отображающая функция обладает следующими свойствами:

1) $x(z)$ неограниченно аналитически продолжима внутри G.

2) $x(z)$ однолистна, т. е. центрам двух различных элементов функции соответствуют всегда два различных значения функции.

3) Однолистно покрытая (в силу однолистности функции) значениями функции область K односвязна.

Обратно, этими свойствами отображающая функция вполне определяется: в самом деле, если некоторая аналитическая функция обладает этими свойствами, то она решает нашу задачу об отображении. Чтобы это доказать, достаточно провести сечения q_ν и проследить, учитывая все три условия, как располагаются друг около друга образы областей G_1 и G_2; мы убедимся, что рассматриваемое отображение действительно изоморфно топологическому отображению $G \to F$. Таким образом, вышестоящие три аналитических условия вполне достаточны для полного определения задачи об отображении. На самую возможность аналитической формулировки проблемы мы указывали уже раньше.

Являясь топологическим образом круга F, область K односвязна, и следовательно, ее граница состоит или из одной точки, или из континуума. Так как в последнем случае возможно, в силу фундаментальной теоремы об отображении однолистных областей, даль-

нейшее конформное отображение на круг, то, не нарушая общности, можно с самого начала считать, что K совпадает или с плоскостью с выключенной точкой или с единичным кругом.

Функция $z=z(x)$, обратная функции $x=x(z)$, однозначна, но многолистна в K. Она принимает каждое значение z, представленное точкой из G, в бесконечном числе эквивалентных точек x. Пусть $x_1(z)$ и $x_2(z)$ — два различных элемента функции $x(z)$, центры которых лежат друг над другом (т. е. имеют одно и то же значение z) и переходят соответственно в точки $x=x_1$ и $x=x_2$. Эти две эквивалентные точки связаны некоторым преобразованием наложения $x_2=x_2(z(x_1))$, которое неограниченно продолжимо в K и поэтому, в силу теоремы о монодромии, определяет в K однозначную функцию; но то же самое справедливо и для обратной функции, откуда следует, что соотношение между x_1 и x_2 определяет взаимно однозначное и конформное отображение круга K самого на себя, которое по доказанной в п. 3 теореме приводится к линейному преобразованию.

Таким образом, при *конформном* отображении преобразования наложения образуют *группу линейных преобразований* (S), переводящих круг K в самого себя. Многозначная отображающая функция $x=x(z)$ является *линейно-полиморфной* функцией, ветви которой переходят друг в друга посредством преобразований группы (S), когда точка z описывает замкнутый путь. Однозначная обратная функция $z=z(x)$ в свою очередь является *автоморфной* функцией, которая сохраняет свои значения, если переменную x подвергать произвольному преобразованию группы (S).

Существование этих автоморфных функций обеспечено основной теоремой B. Но так как мы, как было выше указано, желаем, насколько возможно, избегать применения этой теоремы, то в следующем параграфе мы рассмотрим более подробно некоторые вопросы, имеющие значение для построения отображения рассмотренной здесь поверхности наложения; одновременно это приведет нас к некоторым, важным для дальнейшего, свойствам отображающей функции.

§ 3. Случай плоскости с p выключенными точками.

12. Сперва рассмотрим частный случай, который в дальнейшем будет играть важную роль. Пусть граница p-связной области G состоит из $p\geqslant 2$ точек $a_1, \ldots, a_p$; вопрос идет, следовательно, о конформном отображении универсальной поверхности наложения $G_\infty(a_1, \ldots, a_p)$ плоскости, из которой выключены эти p точек.

В простейшем случае, когда $p=2$, эта поверхность, бесконечнолистно ветвящаяся над граничными точками a_1, a_2, конформно отображается на всю конечную плоскость x (т. е. на плоскость x с выключенной точкой $x=\infty$) посредством элементарной функции

$$x=\alpha\log\frac{z-a_1}{z-a_2}+\beta, \tag{4}$$

где α и β — произвольные постоянные, а граничные точки a_1, a_2 предположены отличными от бесконечно удаленной точки $z=\infty$. Таким образом, поверхность $G_\infty(a_1, a_2)$ принадлежит к параболическому типу.

Если за сечения $q_\nu (\nu = 1, 2)$ принять обе дуги, на которые делится точками a_1, a_2 произвольная проведенная через них окружность, то в качестве образов, зеркально соответствующих друг другу, внутренней части круга — G_1 и его внешней части — G_2 мы получим систему конгруэнтных, попарно симметричных полос, покрывающих плоскость x, т. е. фигуру, тождественную с фигурой F, построенной нами для топологического определения поверхности наложения. Существование отображающей функции (4) можно было бы доказать и избегая теорию элементарных трансцендентных функций, пользуясь следующим способом, вполне аналогичным употребленному нами при построении топологического отображения $G \to F$: сперва отобразим конформно круг G_1 на полосу G_1^0 так, чтобы граничные точки a_1, a_2 перешли в обе бесконечно удаленные граничные точки полосы, что возможно в силу теоремы A; продолжая аналитически это отображение по принципу зеркального отображения Шварца, мы получим искомое отображение.

Таким же путем можно выполнить конформное отображение поверхности $G_\infty(a_1, a_2, a_3)$. Для этого снова разобьем область G на две части G_1 и G_2 посредством окружности, проходящей через точки a_1, a_2, a_3, и отобразим конформно область G_1 на треугольник, вписанный в единичный круг и ограниченный дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности, притом отобразим так, чтобы граничные точки a_1, a_2, a_3 перешли в вершины треугольника. Продолжая аналитически это отображение по принципу зеркального отображения, мы придем к бесконечнозначной функции $x = x(z; a_1, a_2, a_3)$, дающей искомое отображение. В круге $|x| < 1$ мы снова получим построенную выше фигуру F (модулярная фигура). Обратная автоморфная функция $z = z(x; a_1, a_2, a_3)$ принадлежит к классу модулярных функций *). Поверхность $G_\infty(a_1, a_2, a_3)$ принадлежит к гиперболическому типу.

Для $p > 3$ предыдущее построение отображающей функции $x(z; a_1, \ldots, a_p)$ более невозможно (за исключением случая, когда все точки ветвления a_ν расположены на одной окружности; в этом случае, при $p > 3$, многоугольник G_1^0 уже не может быть взят произвольно — он будет полностью определен своими тремя вершинами).

Для построения отображающей функции в случае $p > 3$ целесообразно совершить предварительное вспомогательное преобразование с помощью построенной выше модулярной функции. Однако прежде чем к этому перейти, укажем некоторые свойства отображающей функции в предположении ее существования.

*) О модулярных функциях см. Форд, Автоморфные функции, ОНТИ, М.-Л., 1936.

Сначала покажем, что и для $p > 3$ поверхность $G_\infty(a_1, \ldots, a_p)$ принадлежит к гиперболическому типу.

В самом деле, если бы поверхность $G_\infty(a_1, \ldots, a_p)$ была параболического типа, то ее можно было бы отобразить взаимно однозначно и конформно на всю конечную плоскость x, и обратная функция $z = z(x; a_1, \ldots, a_p)$ была бы однозначной и, с точностью до полюсов, регулярной во всей конечной плоскости, т. е. $z = z(x; a_1, \ldots, a_p)$ была бы мероморфной функцией, притом не принимающей значений $a_1, \ldots, a_p$, в частности трех значений a_1, a_2, a_3. Но это невозможно в силу **теоремы Пикара**, которая гласит:

Однозначная мероморфная для $t \neq \infty$ функция $f(t)$, выпускающая три различных значения a_1, a_2, a_3, тождественно равняется постоянной.

Для доказательства этой знаменитой теоремы зафиксируем, следуя классическому примеру Пикара [1], произвольную точку $t \neq \infty$ и в соответствующей точке $z = f(t)$ — произвольную ветвь линейно-полиморфной функции $x = x(z; a_1, a_2, a_3)$. При соединении этих двух функций переменная x становится функцией $x = x(f(t); a_1, a_2, a_3) = \varphi(t)$ от t, которая неограниченно продолжаема во всей конечной плоскости $t \neq \infty$, так как функция $f(t)$ не принимает только критических для функции $x(z)$ значений a_1, a_2, a_3. В силу односвязности области $t \neq \infty$ из теоремы о монодромии следует однозначность функции $\varphi(t)$, и так как она к тому же ограничена ($|\varphi(t)| < 1$), то по теореме Лиувилля (Liouville) она приводится к постоянной. Но функция $x(z)$ отлична от постоянной, следовательно, к постоянной приводится функция $f(t)$, что и требовалось доказать.

Автоморфная функция $z = z(x; a_1, \ldots, a_p)$ отлична от постоянной; из теоремы Пикара следует тогда, что для $p \geqslant 3$ ее область существования отлична от плоскости с выключенной точкой; следовательно, эта функция определена в единичном круге, и поверхность наложения $G_\infty(a_1, \ldots, a_p)$ принадлежит к гиперболическому типу, коль скоро число p граничных точек больше двух.

13. Теперь мы переходим к вопросу о том, как можно построить фундаментальную область для $p > 3$ [1]. Можно показать, что, как и в случаях $p = 2$, 3, фигура K, полученная при отображении области $G = G_1 + G_2$ посредством функции $x = x(z; a_1, \ldots, a_p)$, не только топологически эквивалентна фигуре F, рассмотренной в п. 9, но что при надлежащем выборе частей G_1, G_2 она *тождественна* с ней. Для доказательства исследуем систему фундаментальных преобразований группы (S) — преобразований наложения фигуры K, в качестве которых можно, как уже было указано, принять систему $p - 1$ преобразований $S_1, \ldots, S_{p-1}$, соответствующих обходам вокруг каждой из точек $z = a_1, \ldots, a_{p-1}$. Изолировав точку a_ν кругом радиуса ρ, выберем в кольце $0 < |z - a_\nu| < \rho$ произвольную точку z и в ней

[1]) См. F. Nevanlinna [2].

элемент функции $x(z)$, испытывающий преобразование S_ν, когда точка z совершает обход вокруг точки a_ν. При неограниченном продолжении этого элемента в кольце получается многозначная функция, ветви которой связаны степенями $S_\nu^k (k = 0, \pm 1, \ldots)$ преобразования S_ν, образующими подгруппу группы (S).

Как преобразование, переводящее единичный круг в самого себя, преобразование S_ν может быть или эллиптическим, или гиперболическим, или параболическим (п. 6). Мы сначала покажем, что имеет место последнее. При этом мы существенно используем то очевидное обстоятельство, что при $z \to a_\nu$ точка $x(z)$ должна стремиться к единичной окружности $|x| = 1$.

Предположим сперва, что S_ν — эллиптическое преобразование

$$\varphi(x) = \frac{x - c_1}{x - c_2} \cdot \frac{1}{\frac{}{c_1}} = e^{i\vartheta} \frac{\xi - c_1}{\xi - c_2} \cdot \frac{1}{\frac{}{c_1}}$$

с неподвижными точками c_1, c_2 ($|c_1| < 1$, $c_1 \overline{c_2} = 1$); тогда выражение

$$\frac{2\pi}{|\vartheta|} \log \varphi(x(z))$$

получает приращение $\pm 2\pi i$, когда точка z совершает обход вокруг точки a_ν, переводящий значение x в значение ξ, получаемое из x преобразованием S_ν. Следовательно, функция

$$e^{\frac{2\pi}{|\vartheta|} \log \varphi} = \varphi^{\frac{2\pi}{|\vartheta|}}$$

однозначна в кольце $0 < |z - a_\nu| < \rho$, и так как она, в силу легко доказываемого соотношения $|\varphi| < 1$, там ограничена, то по теореме Коши-Римана об устранимых особенностях аналитических функций она регулярна и в точке $z = a_\nu$; пусть $\varphi(a_\nu) = b_\nu$. Отсюда, учитывая связь между φ и x, следует, что и функция x регулярна в точке $z = a_\nu$, если только $b_\nu \neq c_1$; если же $b_\nu = c_1$, то она разлагается в ряд

$$x = c_1 + (z - a_\nu)^{\frac{m|\vartheta|}{2\pi}} P(z - a_\nu),$$

где $P(z - a_\nu)$ означает ряд, расположенный по возрастающим степеням $z - a_\nu$. Но оба эти случая невозможны, так как из них следовало бы, что для достаточно малых ρ функция x отображает круг $|z - a_\nu| < \rho$ на область, лежащую целиком *внутри* круга $|x| < 1$, в то время как при $z \to a_\nu$ имеем $|x| \to 1$.

Предположим теперь, что S_ν—гиперболическое преобразование. Если снова через c_1 и c_2 обозначить его неподвижные точки, лежащие на окружности $|x| = 1$, то S_ν можно записать в виде

$$\varphi(x) = e^{\lambda} \frac{x - c_1}{x - c_2} = \frac{\xi - c_1}{\xi - c_2},$$

где λ — действительное число. Образуем затем выражение $e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \log \varphi(x)}$, беря при этом всегда ветвь логарифма, определяемую неравенством $\alpha < \arg \varphi < \alpha + \pi$, где α — величина угла, образованного окруж-

ностью $|x|=1$ и хордой (c_1, c_2). Если вместо x подставить функцию $x(z; a_1, \ldots, a_p)$, то показатель степени будет получать приращение, кратное $2\pi i$, когда z будет совершать полный обход вокруг граничной точки a_ν, вследствие чего все выражение будет определять аналитическую функцию от z, *однозначную* в окрестности точки a_ν. Далее она там же *ограничена*, ибо ее абсолютные значения ограничены интервалом $\left(e^{-\frac{2\pi\alpha}{\lambda}}, e^{-\frac{2\pi\alpha}{\lambda}-\frac{2\pi^2}{\lambda}}\right)$. По теореме Коши-Римана мы снова заключаем, что эта функция регулярна в точке $z=a_\nu$ и, так как ее модуль ограничен снизу, отлична от нуля. Отсюда следует, что показатель рассматриваемого выражения, а, значит, и сама функция x регулярны в точке $z=a_\nu$, что, очевидно, противоречит определяющим ее свойствам.

Таким образом, преобразование S_ν не может быть также и гиперболическим, следовательно, остается единственная возможность, что оно параболическое. Отсюда можно вывести важное заключение о поведении отображающей функции x в точке $z=a_\nu$.

Если $x=c_\nu$ является неподвижной точкой преобразования S_ν, лежащей на единичной окружности, то S_ν можно представить в виде

$$\frac{\xi+c_\nu}{\xi-c_\nu}=\frac{x+c_\nu}{x-c_\nu}+i\omega,$$

где ω — положительная постоянная (п. 6). Применяя теорему Коши-Римана, заключаем, как и выше, что выражение

$$\psi(z)=e^{\frac{2\pi}{\omega}\frac{x+c_\nu}{x-c_\nu}}$$

представляет функцию от z, регулярную в точке $z=a_\nu$. Далее $\psi(a_\nu)$ должно равняться нулю, иначе мы пришли бы к тому же самому противоречию, что и выше, именно, что функция x регулярна в точке $z=a_\nu$. Таким образом, в окрестности точки a_ν имеем разложение

$$\psi(z)=b(z-a_\nu)^n+\ldots \quad (n\geqslant 1,\ b\neq 0)$$

и, следовательно,

$$x^*\equiv\frac{x+c_\nu}{x-c_\nu}=\beta+\gamma\log(z-a_\nu)+\varepsilon(z-a_\nu),$$

где $\varepsilon(z-a_\nu)$ исчезает при $z\to a_\nu$ [1]).

Из этого разложения прежде всего видно, что при $z\to a_\nu$ рассматриваемая ветвь функции $x(z)$ имеет неподвижную точку $x=c_\nu$ своим предельным значением. Далее видно, что точка x^*, положение которой вблизи точки $z=a_\nu$ асимптотически определяется выражением $\beta+\gamma\log(z-a_\nu)$, описывает асимптотически некоторую *пря-*

[1]) Если граничная точка a_ν лежит в бесконечности, то в вышестоящем разложении нужно $z-a_\nu$ заменить через $\frac{1}{z}$.

мую L_ρ, когда точка z описывает в обоих направлениях небольшую окружность $|z-a_\nu|=\rho$; так как, с другой стороны, изменение переменной x^* ограничено левой полуплоскостью (которая соответствует единичному кругу $|x|<1$), то прямая L_ρ должна быть параллельна мнимой оси и, следовательно, образ указанной окружности в плоскости x представляет замкнутую кривую, касающуюся единичной окружности в неподвижной точке $x=c_\nu$. Всякой кривой, оканчивающейся с определенным направлением в точке $z=a_\nu$ в плоскости x^*, отвечает кривая, имеющая асимптоту, но уже параллельную действительной оси; поэтому в единичном круге $|x|<1$ такой кривой соответствует дуга, ортогональная к единичной окружности в точке $x=c_\nu$. Совокупность всех точек c_ν, соответствующих точке a_ν при различном выборе ветвей функции $x(z)$, бесконечна. Все они располагаются всюду плотно на окружности $|x|=1$.

Теперь уже легко определить вид фундаментальной области автоморфной функции. Для этого мы снова выбираем p жордановых кривых q_ν, делящих область G на два полулиста G_1 и G_2 (п. 9) так, чтобы они оканчивались с определенными касательными в точках a_ν. Тогда, по вышеизложенному, всякому полулисту соответствует криволинейный многоугольник P_ν, вписанный в единичный круг $|x|<1$ и ограниченный p ортогональными к единичной окружности $|x|=1$ дугами λ_ν, вершины которого являются неподвижными точками параболических преобразований, соответствующих точкам a_ν. Два смежных многоугольника образуют фундаментальную область F_ν автоморфной функции.

Подходящим выбором кривых q_ν всегда можно добиться того, чтобы многоугольники P_ν были ограничены исключительно дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности. Достаточно только, исходя из произвольной вышеуказанным образом построенной системы многоугольников P_ν, заменить в каждом многоугольнике кривые λ_ν дугами $\overline{\lambda}_\nu$ окружностей, имеющих общие с ними концы и ортогональных к единичной окружности. Если S — преобразование, посредством которого связаны стороны λ_ν', λ_ν'', соответствующие „сечению“ q_ν, то S переводит концы λ_ν' в концы λ_ν'', следовательно, преобразует друг в друга дуги $\overline{\lambda}_\nu'$ и $\overline{\lambda}_\nu''$, через которые мы заменили стороны λ_ν' и λ_ν''. Двум произвольным таким дугам $\overline{\lambda}_\nu'$, $\overline{\lambda}_\nu''$ отвечает поэтому *одна* вполне определенная дуга $\overline{q}_\nu$, имеющая общие концы с дугой q_ν. Таким образом, чтобы получить фигуру, у которой все фундаментальные области ограничены дугами окружностей, ортогональных к единичной окружности, нужно разбиение $G=G_1+G_2$ совершить посредством сечений $\overline{q}_\nu$ [1]).

---

[1]) Даже при таком выборе сечений q_ν обе „половины“ фундаментальной области, вообще говоря, не будут зеркально симметричными. Можно показать, что последнее имеет место только тогда, когда все точки a_ν расположены на одной окружности.

14. От полного изложения доказательства *существования* отображения $G \to K$, предположенного нами выше для $p > 3$, мы должны здесь отказаться. Наиболее простым оно получается, если пользоваться методом аппроксимации Каратеодори-Кёбе (посредством которого нетрудно обосновать и фундаментальную теорему A [1]). Здесь мы ограничимся лишь напоминанием следующих основных моментов доказательства, построенного по этому методу.

a) Посредством линейно полиморфной функции $x = x(z; a_1, a_2, a_3)$ область G отображается конформно на область G', получающуюся из единичного круга $|x| < 1$ выключением бесконечного множества образов a_ν^i $(i = 1, 2, \ldots)$ граничных точек $z = a_\nu$ $(\nu = 4, \ldots, p)$.

b) Повторным применением известного преобразования извлечения корня (Каратеодори-Кёбе) область G' последовательно отображается на области G^k, состоящие из единичного круга, из которого выключены образы точек a_ν. Если за точку ветвления преобразования выбирать всегда ближайшую к нулевой точке граничную точку области G^k, то отображение $G \to G^k$ будет конформным. Число граничных точек увеличивается с возрастанием k, но все они стремятся к единичной окружности при $k \to \infty$.

c) Отображение $G \to G^k$ стремится при $k \to \infty$ к определенному предельному отображению, удовлетворяющему всем поставленным требованиям.

Это доказательство существования одновременно показывает, что, как это было выше доказано, подлежащая отображению универсальная поверхность наложения принадлежит к гиперболическому типу.

§ 4. Общий случай p-связной области.

15. Если область G ограничена не одними только изолированными точками и, следовательно, по крайней мере одно из граничных множеств γ_ν есть континуум, то наиболее важные свойства отображения $G \to K$ могут быть получены комбинацией результатов предыдущего параграфа с теоремой A. Мы ограничиваемся при этом наиболее важным для применений случаем, когда граничные множества γ_ν суть *жордановы кривые*. Простоты ради предположим далее, что ни одно из множеств γ_ν не приводится к одной точке; как изменить нижеследующие результаты для исключенных таким образом смешанных случаев, будет ясно непосредственно, так что мы и в дальнейшем не будем более подробно касаться этих случаев.

Пусть γ_1 — внешняя граничная кривая. Для построения искомого отображения $G \to K$ зафиксируем вне γ_1 и внутри $\gamma_2, \ldots, \gamma_p$ по точке $z = a_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ и отобразим сперва область $G_\infty(a_1, \ldots, a_p)$ на единичный круг посредством функции $x = x(z; a_1, \ldots, a_p)$. При этом дополнительные к G области перейдут в некоторые области

[1] См., например, Carathéodory [4].

$H_1^i, \ldots, H_p^i$, расположенные внутри единичного круга так, что их границы, состоящие из соответствующих кривым γ_ν жордановых кривых $\gamma_\nu^i (i = 1, 2, \ldots)$, касаются единичной окружности $|x| = 1$ в неподвижных точках c_ν^i, соответствующих точкам a_ν, за исключением случая $p = 2$, когда кривые $\gamma_\nu^i (\nu = 1, 2)$ проходят через бесконечно удаленную точку. Сама область G переходит в односвязную область G', получающуюся из единичного круга удалением всех областей H_ν^i. Искомое отображение получается просто дальнейшим отображением однолистной односвязной области G' на единичный круг, что возможно по теореме А.

Изоморфность фигуры K, получающейся в единичном круге в результате таким образом построенного отображения, с фигурой F очевидна, если только рассматривать внутренние точки единичного круга; в самом деле, условия нашей проблемы относятся исключительно к поведению отображения *внутри* областей G и K. Что касается поведения отображения на границе, то рассматриваемый случай, когда множества γ_ν суть жордановы кривые, отличается от случая $G_\infty (a_1, \ldots, a_p)$ тем, что на единичной окружности этим множествам отвечает не последовательность точек, а последовательность дуг $\overline{\gamma}_\nu^i$. В самом деле, из второй части теоремы А о соответствии границ при конформном отображении однолистных областей следует, что каждой жордановой кривой γ_ν^i отвечает определенная дуга $\overline{\gamma}_\nu^i$ единичной окружности. В случае $p = 2$ число этих дуг сводится к двум дополнительным друг к другу дугам $\overline{\gamma}_1$ и $\overline{\gamma}_2$ единичной окружности. Напротив, в случае $p \geqslant 3$, где каждой кривой γ_ν отвечает бесконечно много кривых γ_ν^i, дуги $\overline{\gamma}_\nu^i$ образуют весьма сложную систему. Интересно знать, будет ли сумма длин этих дуг иметь полную меру 2π? Что это действительно так и, следовательно, дополнительное множество имеет меру нуль, будет показано в следующей главе.

II. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЛИСТНОЙ ОБЛАСТИ.

§ 1. Интеграл Пуассона.

16. В нижеследующих исследованиях существенно используются некоторые теоремы из теории гармонических функций. Основу этих теорем образует возможность решения *первой краевой задачи*, т. е. возможность построения в области G гармонической функции с заданными краевыми значениями. Применяя результаты первой главы, мы дадим в этом параграфе полное обоснование следующего частного случая этой общей теоремы.

В каждой граничной точке $z = \zeta$ однолистной p-связной области, расположенной в плоскости z и ограниченной жордано-

выми кривыми $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, *задано действительное значение* $u(\zeta)$ *так, что функция* $u(\zeta)$ *на каждой кривой* Γ_ν *ограничена и, за исключением быть может конечного числа точек, непрерывна. Тогда существует одна и только одна ограниченная и гармоническая в* G *функция, стремящаяся при приближении к точке непрерывности* $z=\zeta$ *к соответствующему граничному значению* $u(\zeta)$.

17. Если G есть единичный круг $|z|<1$, то, как это впервые показал Шварц [1]), краевая задача решается посредством интеграла Пуассона

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int u(e^{i\vartheta})\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta. \tag{1}$$

Как было показано в гл. I, § 1, ядро этого интеграла есть гармоническая функция точки $z=re^{i\varphi}$; тем самым и интеграл Пуассона является гармонической функцией внутри единичного круга. Чтобы далее убедиться, что определяемая интегралом Пуассона функция стремится при $z\to\zeta$ к заданному значению $u(\zeta)$, целесообразно сперва рассмотреть более специальную краевую задачу, где функция $u(\zeta)$ на некоторой дуге $\overset{\frown}{\zeta_1\zeta_2}$ ($\zeta_1=e^{i\vartheta_1}$, $\zeta_2=e^{i\vartheta_2}$) единичной окружности длины $\vartheta_2-\vartheta_1=\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 2\pi)$ принимает значение 1, в то время как на дополнительной дуге она равна нулю. Интеграл Пуассона переходит тогда в интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta;$$

последний совпадает с определенной на стр. 14 „гармонической мерой" $\omega(z;\vartheta_1,\vartheta_2)$ дуги $(\vartheta_1,\vartheta_2)$ и, следовательно, как там было показано, удовлетворяет требуемым краевым условиям.

Заметив это, вернемся к общему интегралу (1), который можно также записать в виде

$$u(z)=\int_{\vartheta=0}^{2\pi} u(e^{i\vartheta})\,d\omega(z;0,\vartheta). \tag{1'}$$

Пусть $\zeta=\zeta_0=e^{i\vartheta_0}$ есть точка непрерывности функции $u(\zeta)$, ε—произвольное малое положительное число и пусть $\vartheta_1\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_2$ определяет содержащую ζ_0 дугу единичной окружности, где колебание функции $u(\zeta)$ меньше, чем ε. Тогда

$$u(z)-u(\zeta_0)=\int_{\vartheta=0}^{2\pi}(u(e^{i\vartheta})-u(\zeta_0))\,d\omega=$$

$$=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}<\varepsilon>\,d\omega+\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1+2\pi}(u(e^{i\vartheta})-u(\zeta_0))\,d\omega,$$

[1]) H. Schwarz [1].

где $< \varepsilon >$ означает величину порядка $< \varepsilon$ [1]). Абсолютная величина первого члена здесь меньше, чем ε, в то время как абсолютная величина второго члена не превосходит $2M\omega(z; \vartheta_2, \vartheta_1 + 2\pi)$, где M означает максимальное значение $|u(\zeta)|$. Если теперь z устремить к точке $\zeta_0 = e^{i\vartheta_0}$, где $\vartheta_1 < \vartheta_0 < \vartheta_2$, то гармоническая мера $\omega(z; \vartheta_2, \vartheta_1 + 2\pi)$ будет равномерно стремиться к нулю. Поэтому можно найти такое число ρ_ε, что для $|z - \zeta_0| < \rho_\varepsilon$ имеем $\omega < \varepsilon$. Для этих значений z выполняется неравенство

$$|u(z) - u(\zeta_0)| < \varepsilon(2M + 1),$$

откуда следует, что при $z \to \zeta_0$ функция $u(z)$ равномерно стремится к $u(\zeta_0)$.

В точке разрыва ζ_0, где существуют левый и правый пределы, соответственно $u(e^{i(\vartheta_0 - 0)})$ и $u(e^{i(\vartheta_0 + 0)})$, функция $u(z)$ при стремлении точки z к ζ_0 вдоль пути, образующего угол $\lambda\pi$ с положительным направлением касательной, проведенной к единичной окружности $|z| = 1$ в точке ζ_0, стремится к значению

$$\lambda u(e^{i(\vartheta_0 + 0)}) + (1 - \lambda) u(e^{i(\vartheta_0 - 0)}).$$

Доказательство последнего вполне аналогично построенному выше для точек непрерывности.

18. Докажем еще, что интеграл Пуассона $u(z)$ дает для круга $|z| < 1$ *единственное* ограниченное решение поставленной краевой задачи. В самом деле, пусть $u_1(z)$ такое решение; тогда разность $v(z) = u(z) - u_1(z)$ является в круге $|z| < 1$ ограниченной гармонической функцией, равной нулю во всякой граничной точке ζ, за исключением быть может конечного числа точек разрыва $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ граничной функции $u(\zeta)$, вблизи которых она во всяком случае остается ограниченной. Но тогда из принципа максимума и минимума гармонической функции следует, что разность $v(z)$ тождественно равна нулю, что доказывает единственность решения.

Дальше (глава VII) мы увидим, что интеграл Пуассона приводит к решению проблемы Дирихле при гораздо более общих условиях.

§ 2. Решение общей краевой задачи.

19. Если предположить, что область G ограничена одной жорданиовой кривой Γ, то построение гармонической функции, удовлетворяющей поставленным в § 1 краевым условиям, можно свести к случаю круга, отображая для этого конформно область G на единичный круг K. Так как по теореме A это отображение остается непрерывным и взаимно однозначным на границе, то заданная на Γ функция $u(\zeta)$ переходит в определенную на единичной окружности функцию, непрерывную всюду, за исключением быть может конеч-

[1]) Этим обозначением, введенным Линделофом (Lindelöf), мы будем часто пользоваться и в дальнейшем.

ного числа точек. Решая с помощью интеграла Пуассона полученную краевую задачу для круга и переходя посредством отображения $K \to G$ обратно к области G, мы получим функцию $u(z)$, *гармоническую* в G и принимающую на Γ заданные краевые значения $u(\zeta)$. Гармоничность функции $u(z)$ следует из инвариантности этого свойства относительно конформных отображений.

20. Чтобы решить поставленную краевую задачу для общего случая, когда граница области G состоит из *нескольких* различных жордановых кривых $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_p$, мы воспользуемся рассмотренным в гл. I, § 4 конформным отображением универсальной поверхности наложения многосвязной области G на единичный круг K. Это отображение достигается линейно-полиморфной функцией $x = x(z)$, притом так, что каждой кривой Γ_ν соответствует в случае $p = 2$ единственная граничная дуга γ_ν, а в случае $p > 2$ — бесконечная последовательность открытых непересекающихся дуг $\gamma_\nu^1, \gamma_\nu^2, \ldots$ единичной окружности $|x| = 1$ (ср. п. 15); соответствие между кривой Γ_ν и всяким ее образом γ_ν^i взаимно однозначно и непрерывно.

Определим теперь на дугах γ_ν^i множество краевых значений $\bar{u}(\xi)$, полагая $\bar{u}(\xi) = u(\zeta)$, где ξ — точка дуги γ_ν^i, однозначно соответствующая точке ζ дуги Γ_ν. Если дополнить определение $\bar{u}(\xi)$, полагая $\bar{u} = 0$ в точках единичной окружности $|\xi| = 1$, не принадлежащих ни к одной из открытых дуг γ_ν^i, то можно воспользоваться интегралом Пуассона ($x = re^{i\varphi}$, $\xi = e^{i\vartheta}$)

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}(e^{i\vartheta}) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta.$$

Подинтегральная функция $\bar{u}(e^{i\vartheta})$ имеет вообще довольно сложный характер разрывности; тем не менее интеграл имеет смысл (даже как интеграл Коши), так как его можно представить в виде сходящегося ряда интегралов, взятых по отдельным дугам γ_ν^i. Этот ряд, как легко видеть, сходится абсолютно и равномерно во всякой внутренней области круга K и, следовательно, его сумма $\bar{u}$ является, по теореме Вейерштрасса (Weierstrass) о рядах, гармонической функцией в круге K.

При приближении к произвольной точке некоторой дуги γ_ν^i, являющейся точкой непрерывности множества граничных значений $\bar{u}(\xi)$, функция $\bar{u}(x)$ стремится к соответствующему краевому значению, так как в силу результатов гл. II, § 1 часть интеграла Пуассона, приходящаяся на дугу γ_ν^i, стремится к этому значению, в то время как остальная часть интеграла стремится к нулю.

Функция $\bar{u}(x)$ обладает еще другим важным для нас свойством: она является *автоморфным* потенциалом, инвариантным относительно преобразований группы Σ соответствующей линейно-полиморфной функции $x = x(z)$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим элемент интеграла Пуассона для некоторой внутренней точки $e^{i\vartheta}$

дуги γ_ν^i. Если здесь произвести преобразование S группы Σ, то множитель $\overline{u(e^{i\vartheta})}$ в силу определения краевых значений останется без изменения. Что касается второго множителя, т. е. дифференциального выражения

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta,$$

то он является, как это было показано в гл. I, § 1, *инвариантом относительно всех вообще линейных преобразований, переводящих единичный круг в самого себя*. Таким образом, всякий элемент интеграла Пуассона сохраняет свое значение при преобразовании S; следовательно, это же справедливо и для всего интеграла.

Из этого свойства инвариантности следует, что функция $u(z) \equiv \overline{u}(x(z))$ *однозначна* в G. В самом деле, если точка z опишет, исходя из некоторой точки z_0, замкнутый путь в G, то соответствующее значение отображающей функции $x(z)$ испытает некоторое преобразование S группы Σ и, следозательно, конечное значение $u(z)$ совпадет с начальным.

Из рассмотренных выше свойств непрерызности отображения $G \to K$ в граничных точках области G следует далее, что функция $u(z)$ стремится при $z \to \zeta$ к соответствующему краевому значению $u(\zeta)$. *Гармоническая функция* $u(\zeta)$ *является, таким образом, решением поставленной краевой задачи*. Что полученное решение является единственным, доказывается аналогично тому, как это было сделано в п. 18.

Теперь мы в состоянии провести имезшееся в виду в конце гл. I доказательство того, что дуги γ_ν^i, соответствующие при отображении $G \to K$ кривым Γ_ν, заполняют почти всю окружность $|x| = 1$. В самом деле, гармоническая мера всей границы Γ тождественно равна 1. С другой стороны, по предыдущему это можно записать в виде

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_\nu^i} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta,$$

где интеграл распространен на все дуги γ_ν^i; полагая $r = 0$, мы получим

$$\int\limits_{\gamma_\nu^i} d\vartheta = 2\pi,$$

откуда следует, что сумма длин дуг γ_ν^i равна 2π.

§ 3. Интегральное представление решения краевой задачи посредством гармонической меры.

21. Пусть α — миожество точек, состоящее из конечного числа граничных дуг области G. Из результатов § 2 этой глазы следует, что *существует одна и только одна функция, гармоническая и*

ограниченная в G, принимающая во всех внутренних точках множества α граничное значение 1 и исчезающая во всех внутренних точках дополнительной части β границы $\Gamma = \alpha + \beta$. По аналогии с п. 5 назовем значение этой функции в точке z области G *гармонической мерой множества α в точке z относительно области G* и обозначим ее через $\omega(z, \alpha, G)$ или, короче, через $\omega(z, \alpha)$, если это не будет вызывать неясности.

Если α совпадает со всей границей Γ, то гармоническая мера ω тождественно равна 1; в остальных случаях она изменяется в G между 0 и 1. Если два множества граничных дуг α и β не имеют общих точек, то $\omega(z, \alpha) + \omega(z, \beta) = \omega(z, \gamma)$, где $\gamma = \alpha + \beta$; в частности $\omega(z, \alpha) + \omega(z, \beta) \equiv 1$, если $\alpha + \beta = \Gamma$. Таким образом, гармоническая мера является *аддитивной* функцией граничных дуг.

Чтобы более подробно изучить зависимость гармонической меры от α, представим себе единичный интервал $0 \leqslant t < 1$ разбитым произвольным образом на p частей $t_{\nu-1} \leqslant t < t_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, p$; $t_0 = 0$, $t_p = 1$), ν-я из которых поставлена во взаимно однозначное и непрерывное соответствие с жордановой кривой Γ_ν границы $\Gamma = \Gamma_1 + \ldots + \Gamma_p$ области G так, что граничная точка $\zeta(t)$ пробегает Γ в положительном относительно G направлении, когда t непрерывно возрастает от 0 до 1. Пусть $\alpha(t)$ — та часть границы Γ, которая соответствует интервалу $(0, t)$.

Докажем, что $\omega(z, \alpha(t))$ для всякого фиксированного значения z является *непрерывной монотонно возрастающей функцией от t.* В самом деле, пусть $\Delta t > 0$ и $\Delta\alpha$ — та часть Γ, которая соответствует интервалу $(t, t + \Delta t)$. В силу аддитивности ω приращение $\Delta\omega = \omega(z, \alpha(t + \Delta t)) - \omega(z, \alpha(t)) = \omega(z, \Delta\alpha)$ положительно и, следовательно, ω возрастает. Опишем теперь вокруг конца $\zeta(t)$ дуги $\Delta\alpha$ наименьший круг $|z - \zeta(t)| \leqslant \rho_\Delta$, содержащий эту дугу. В силу непрерывности граничной точки ζ как функции от t, $\rho_\Delta \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Если теперь $|z - \zeta(t)| \leqslant d$ — круг, содержащий всю область G, то

$$u(z) = \frac{\log \dfrac{d}{|\zeta - z|}}{\log \dfrac{d}{\rho_\Delta}}$$

является в G гармонической *неотрицательной* функцией, которая в круге $|z - \zeta| \leqslant \rho_\Delta$, следовательно, в частности и на дуге $\Delta\alpha$ больше или равна 1. Таким образом, эта функция является мажорантой для гармонической меры $\Delta\omega = \omega(z, \Delta\alpha)$, и так как $u(z) \to 0$ при фиксированном z и $\Delta t \to 0$, $\rho_\Delta \to 0$, то и $\Delta\omega \to 0$. Тем самым доказано, что гармоническая мера непрерывна справа; непрерывность слева доказывается вполне аналогично.

Таким образом, имеется взаимно однозначное и непрерывное соответствие между интервалами $0 \leqslant t < 1$ и $0 \leqslant \omega < 1$. Если ω

пробегает интервал (0, 1), то граничная точка ζ пробегает в положительном направлении всю границу Γ, и наоборот.

22. Теперь мы можем показать, что решение $u(z)$ предложенной на стр. 27 краевой задачи может быть представлено в виде

$$u(z) = \int_0^1 u_*(\zeta)\, d\omega_z \tag{2}$$

где $\omega = \omega(z, \alpha(t))$ и $\zeta = \zeta(t)$. Для частного случая, когда G — круг, это было уже показано в п. 17; именно, в этом случае интеграл (2) переходит в интеграл Пуассона. В общем случае рассуждениями, вполне аналогичными приведенным на стр. 28, легко убедиться, что функция $u(z)$, представленная интегралом (2), удовлетворяет поставленным краевым условиям. Далее $u(z)$ ограничена: она изменяется, как это видно из (2), между верхней и нижней границами граничных значений $u_*(\zeta)$, ограниченных по предположению. Наконец, интеграл (2) представляет в G *гармоническую* функцию.

Последнее свойство наиболее просто получается из определения интеграла (2) как предела функций

$$u_n(z) = \sum_1^n{}' u(\zeta_\nu)\, \Delta_\nu \omega$$

при $n \to \infty$, где $\Delta_\nu\omega\,(\nu = 1, \ldots, n)$ означают гармонические меры дуг, на которые некоторым образом разбивается вся граница Γ; точки ζ_ν на этих дугах взяты произвольно, а сами дуги выбираются так, чтобы их диаметры (максимальное расстояние между двумя точками одной и той же дуги) стремились к нулю при $n \to \infty$. Функции $u_n(z)$ являются гармоническими в G, и так как сходимость во всякой области, лежащей целиком внутри G, равномерна [1]), то и предельная функция $u(z)$, по теореме Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических (или гармонических) функций, является гармонической.

Из вышедоказанных свойств интеграла (2) следует, что он действительно, как это утверждалось, представляет решение краевой задачи.

§ 4. Функция Грина и гармоническая мера.

23. При некоторых дополнительных предположениях о границе Γ области G, пользуясь функцией Грина $g(x, y)$ области G, можно получить другое интегральное представление для решения $u(z)$.

[1]) Для доказательства равномерной сходимости нужно сперва изолировать точки разрыва функции $u(\zeta)$ небольшими дугами, гармоническая мера которых относительно некоторой области, лежащей внутри G, меньше ε; остальная часть суммы отличается тогда от интеграла на величину, абсолютное значение которой меньше максимального колебания функции $u(\zeta)$ на дугах разбиения Γ.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые основные свойства этой функции.

1) $g(x, y)$ — гармоническая в G функция точки $z=x$, за исключением точки $x=y$, в которой она положительно бесконечна, причем так, что функция

$$g(x, y)+\log|x-y|$$

гармонична и в точке $x=y$ *).

2) $g(x, y)$ равна нулю в каждой граничной точке $x=\zeta$ области G.

Согласно принципу минимума функция $g(x, y)$, неотрицательная в граничных точках области, состоящей из области G с выключенной точкой $x=y$, положительна в каждой точке области G.

Упомянутая в свойстве 1 функция, гармоническая всюду в G, имеет граничные значения $\log|\zeta-y|$ и, следовательно, по формуле (2) допускает представление:

$$g(x, y)+\log|x-y|=\int_{\Gamma}\frac{1}{2\pi}\log|\zeta-y|\,d\omega(x, \alpha(t)).$$

Отсюда, в частности, видно, что функция $g(x, y)$ является гармонической также и относительно переменной y. Это замечание приводит к важному свойству симметрии функции Грина: выражение $d(x, y)=g(x, y)-g(y, x)$ есть гармоническая функция как от x, так и от y. Если изменять сперва только x, то граничные значения функции $g(x, y)$ равны нулю, в то время как функция $g(y, x)$ во всяком случае не отрицательна; поэтому $\overline{\lim}\, d\leqslant 0$ в граничных точках $x=\zeta$ и в силу принципа максимума $d\leqslant 0$ всюду в области G. С другой стороны, если те же рассуждения провести относительно переменной y, то получится $d\geqslant 0$. Следовательно, выражение $d(x, y)$ должно тождественно равняться нулю, т. е. имеет место соотношение симметрии

$$g(x, y)=g(y, x).$$

24. Будем теперь предполагать, что граничные кривые Γ области G гладкие [1]) и что функция Грина на этих линиях имеет непрерывные производные. Оба эти предположения выполняются одновременно, если, например, граничные кривые аналитичны, так как тогда по принципу зеркального отображения $g(x, y)$ гармонически продолжима за Γ. Далее предположим, что и построенная по граничным значениям $u(\zeta)$ гармоническая функция $u(z)$ обладает непрерывными производными на Γ [2]). Тогда мы можем воспользоваться формулой Грина

$$\int_{\Gamma}\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds=-\int_{G}(U\Delta V-V\Delta U)\,d\sigma,$$

*) Предполагается, что G не содержит бесконечно удаленной точки.

[1]) Т. е. непрерывны и имеют непрерывно вращающуюся касательную.

[2]) Если Γ аналитична, то для этого достаточно, чтобы граничная функция $u(\zeta)$ обладала непрерывной производной на Γ.

где U и V дважды диференцируемы в G и один раз непрерывно диференцируемы на Γ, ds — длина элемента дуги на Γ, $d\sigma$ — величина элемента площади в области G, Δ — оператор Лапласа, и производные в левой части равенства взяты по внутренней нормали к Γ. За функцию $U(z)$ возьмем выше построенную функцию $u(z)$, за функцию $V(z)$ — функцию Грина $g(z, z_0)$ области G. Изолируя полюс $z = z_0$ небольшим кругом раднуса ρ и применяя к остальной части области G формулу Грина, получим, совершая предельный переход $\rho \to 0$, следующую формулу, в которой зместо z_0 написано просто z, а подвижная граничная точка обозначена через ζ:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} ds. \tag{3}$$

25. Если предположить, что граничные кривые Γ, аналитичны и что функция $u(z)$ удовлетворяет на Γ условиям, при которых остается справедливой формула (3), то последнюю можно привести к более простому виду, пользуясь гармонической функцией, сопряженной к функции $g(\zeta, z)$ *относительно переменной* ζ. Эта функция, — $h(\zeta, z)$, определена с точностью до аддитивной постоянной и допускает в силу свойства 1, п. 23 разложение вида *)

$$h(\zeta, z) = \arg(\zeta - z) + v(z),$$

где $v(z)$ — функция, гармоническая и однозиачная в окрестности точки $\zeta = z$. Если ζ описызает в положительном направлении малую окружность вокруг полюса z, то h получает приращение 2π. Если G многосвязна, то, вообще говоря, когда ζ пробегает внутренние граничные кривые $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$, то и $v(z)$ получает известные аддитивные приращения (модули периодичности).

Согласно уравненням Коши-Римана в граничной точке ζ имеет место соотношение

$$\frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} = \frac{\partial h(\zeta, z)}{\partial s},$$

где последняя производная взята в положительном направлении элемента граничной дуги ds, и формула (3) принимает вид

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u(\zeta)\, dh(\zeta, z), \tag{4}$$

где ζ пробегает Γ в положительном направлении.

Сразненне с интегральным представлением (2) (гл. II, § 3) указывает на связь функции h с гармонической мерой дуги $\alpha = \alpha(\zeta)$, ограниченной фикснрованной граничной точкой ζ_0 и подвижной граничной точкой ζ. В самом деле, представляя гармоническую меру дуги $\alpha(\zeta_1)$ по формуле (4), полагая, следовательно, $u(\zeta) = 1$

*) Так как выражение $g(\zeta, z) - ih(\zeta, z) + \log(\zeta - z)$ в окрестности точки $\zeta = z$ есть однозначная аналитическая функция.

на α и $u(\zeta)=0$ в остальных граничных точках, мы получим

$$\omega(z, \alpha)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\zeta_0\zeta_1} dh(\zeta, z)=\frac{1}{2\pi}[h(\zeta_1, z)-h(\zeta_0, z)].$$

Таким образом, *гармоническая мера* $\omega(z, \alpha)$ *равна деленному на* 2π *приращению гармонической функции* $-h(\zeta, z)$, *когда* ζ *пробегает в отрицательном направлении дугу* α, *где* $-h(\zeta, z)$ *сопряжена (относительно* ζ) *к функции Грина* $g(\zeta, z)$.

26. Этот результат мы получили при известных дополнительных предположениях о непрерывности границы Γ. Если мы теперь вернемся к первоначальным предположениям, именно, что граничные кривые Γ_ν — произвольные жордановы кривые, и заметим, что функция Грина, сопряженная к ней функция $-h$ и гармоническая мера дуги α существуют и в этом случае, то, естественно, встает вопрос, не сохраняется ли установленное выше соотношение и при этих общих предположениях. Мы сейчас докажем, что это действительно так.

Для этой цели нужно сперва показать непрерывность функции h на границе области.

Если посредством функции $z=z(x)$, отображающей единичный круг $|x|<1$ на универсальную поверхность наложения G^∞, перейти к функции $g(z(x), z_0)$, то последняя в силу взаимно однозначного и непрерывного соответствия между Γ_ν и γ_ν^i (ср. п. 15) будет обращаться в нуль на всякой такой дуге γ_ν^i и, следовательно, по принципу зеркального отображения, будет на этих дугах гармонична. Отсюда следует, что сопряженная функция $-h(z(x), z_0)$ также гармонична на γ_ν^i и, следовательно, во всяком случае непрерывна. Следовательно, и $h(z, z_0)$ непрерывна на Γ_ν, что требовалось доказать.

Линии уровня функций $g(x, y)$ и $h(x, y)$ при фиксированном полюсе $x=y$ взаимно ортогональны. Для больших значений $\lambda>0$ линии $g(x, y)=\lambda$ замыкаются вокруг полюса $x=y$ и непрерывно стягиваются к этому полюсу при неограниченном возрастании λ. При λ убывающем и стремящемся к нулю линии g расширяются и стремятся к границе области G. Если G многосвязна ($p>1$), то это стремление происходит следующим образом: при некоторых значениях λ линии $g=\lambda$ самопересекаются, после чего они распадаются на отдельные замкнутые кривые, число которых становится, наконец, равным p; при $\lambda\to 0$ эти p замкнутых кривых непрерывно переходят в граничные кривые Γ_ν. Во всем этом легко убедиться с помощью принципа минимума гармонической функции.

Особенный интерес представляют точки самопересечения линий уровня функции Грина. *Число этих точек равно* $p-1$ *).

*) Каждая точка считается со своей кратностью, которая на единицу меньше числа проходящих через нее различных ветвей линии.

Для доказательства заметим, что аналитическая функция $f(x) = g(x, y) - ih(x, y)$ переменной x регулярна во всех точках $x \neq y$ области G и на всяких замкнутых путях, не проходящих через точку $x = y$, получает, в силу однозначности ее действительной части, приращения, являющиеся линейными комбинациями (с целочисленными коэфициентами) чисто мнимых модулей периодичности; последние равны приращениям, которые получает функция $h(x, y)$ при обходе вокруг кривых $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$ или вокруг полюса $x = y$. Отсюда следует, что производная $f'(x)$ регулярна и *однозначна* в G. Во всякой точке x, где $f' \neq 0$, отображение, даваемое функцией f, конформно, и, следовательно, через эту точку проходит только одна регулярная g-линия и только одна ортогональная к ней h-линия. Если, напротив, в точке x производная f' имеет нуль порядка $k \geqslant 1$, то отображение в этой точке уже не будет конформным; в этом случае точка x есть точка пересечения $k+1$ различных ветвей некоторой g-линии и стольких же различных ветвей некоторой h-линии. Касательные к этим ветвям делят всю плоскость на равные углы величины $\frac{\pi}{2(k+1)}$*). Таким образом, точки самопересечения линий уровня функций Грина совпадают с нулями производной f' и имеют одинаковую с ними кратность. Остается подсчитать число этих нулей.

Чтобы подсчитать число нулей производной f', возьмем такое большое значение $\lambda_1 > 0$ и такое малое значение $\lambda_2 > 0$, чтобы линия $g = \lambda_1$ была жордановой кривой, окружающей полюс $x = y$, а линия $g = \lambda_2$ распадалась бы на p жордановых кривых. Тогда в областях $g \geqslant \lambda_1$ и $g \leqslant \lambda_2$ производная f' наверное отлична от нуля. Число же нулей производной f' в области $\lambda_1 > g > \lambda_2$, по принципу вариации аргумента аналитической функции, равно приращению $\arg f'$ при положительном обходе границы области, деленному на 2π. Но $\frac{\partial g}{\partial s} = 0$ вдоль линии g, поэтому, если диференциал dx совпадает с положительно направленным элементом границы области $\lambda_1 > g > \lambda_2$, то во всякой граничной точке этой области

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = -i\frac{dh}{dx}$$

и, следовательно, $\arg f'(x) = -\arg dx + \text{const}$. При положительном обходе границы рассматриваемой области $\arg dx$ получает приращение 2π на внешней части линии $g = \lambda_2$, в то время как на каждой из $p-1$ внутренних ее частей и на линии $g = \lambda_1$ он убывает на 2π. Таким образом, полное приращение $\arg f'(x)$ равно $2\pi(p-1)$, откуда видно, что число нулей производной f' равно $p-1$.

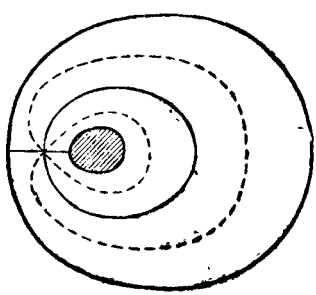
---

*) Характер многолистного отображения в окрестности нуля производной проще всего уяснить себе, рассматривая отображение $w = z^{k+1}$ в окрестности точки $z = 0$. См., например, Курант, Геометрическая теория функций комплексной переменной, ОНТИ, М.-Л., 1934, стр. 139.

Относительно поведения линий h нужно заметить следующее: если G односвязна, то $-g+ih$ просто равно логарифму функции, отображающей G на единичный круг, притом так, что полюс $x=y$ переходит в нулевую точку. Линии h являются, следовательно, образами радиусов единичного круга; они выходят из полюса $x=y$ так, что две линии, соответствующие значениям h_1, h_2, пересекаются под углом h_2-h_1 и оканчиваются в определенных граничных точках. Если граничная точка совершает полный обход (в положительном направлении), то h получает приращение 2π.

Если G многосвязна, то функция $t=e^{-g+ih}$ уже не однозначна в G. Однако, если ограничиться подобластью $g>\lambda>0$, где λ выбрано настолько большим, чтобы эта подобласть G_λ была односвязна, то предыдущая показательная функция устанавливает взаимно однозначное и конформное отображение области G_λ на круг $|t|<e^{-\lambda}$, откуда следует, что в области G_λ линии h ведут себя вышеописанным образом. Поэтому и в случае многосвязной области имеет место соответствие между линиями h, выходящими из полюса, и интервалом $(0, 2\pi)$, соответствие, при котором две линии, соответствующие значениям h_1, h_2, пересекаются под углом h_2-h_1.

Вне области G_λ некоторые линии h (в конечном числе) самопересекаются, при этом обязательно в точках разветвления линий g, о которых говорилось выше. Каждая такая линия h играет роль *граничной линии*, разделяющей линии h, соответствующие непосредственно бо́льшим и меньшим значениям h, на две группы, оканчивающиеся на различных граничных кривых Γ_ν. Через каждую точку разветвления проходят по крайней мере две ветви такой граничной линии h, и из сегментов этих ветвей всегда может быть составлена дуга, не проходящая через полюс и соединяющая две граничные кривые друг с другом [см. фиг. 4, на которой для случая $p=2$ указано расположение граничных линий h и линий g (пунктиром) с двойной точкой].



Фиг. 4.

Теперь легко показать, что гармоническая мера $\omega(z, \alpha)$ граничной дуги α равна приращению функции $h(\zeta, z)$ на этой дуге, деленному на 2π. В самом деле, если через концы дуги α провести соответствующие им линии $h=h_1$, $h=h_2$ $(0\leqslant h_2-h_1\leqslant 2\pi)$, то они вырежут из линии $g=\lambda>0$ некоторую дугу α_λ, которая при $\lambda\to 0$ будет непрерывно переходить в дугу α. Если G_λ — область, определенная соотношением $g>\lambda$, то, по стр. 36,

$$2\pi\omega(z, \alpha_\lambda, G_\lambda)=h_2-h_1.$$

С другой стороны, линия $g=\lambda$ при $\lambda\to 0$ стремится к границе Γ, откуда следует, при учете определяющих свойств гармони-

ческой меры, что для достаточно малых значений λ абсолютная величина разности

$$\omega(z, \alpha, G) - \omega(z, \alpha_\lambda, G_\lambda)$$

на линии $g = \lambda$ может быть сделана сколь угодно малой; в силу принципа максимума это справедливо и для всей области G_λ, откуда следует, что при $\lambda \to 0$ предыдущая разность стремится к нулю в любой заданной точке z. Таким образом,

$$2\pi\omega(z, \alpha, G) = h_2 - h_1,$$

что и требовалось доказать.

Одновременно получается новая геометрическая интерпретация гармонической меры:

Гармоническая мера граничной дуги в некоторой точке z равна деленной на 2π *величине угла, заключенного между линиями* $h = \text{const}$, *идущими из точки z к концам этой дуги.*

§ 5. О линиях уровня гармонической меры.

27. Если G есть единичный круг, а α — граничная дуга, отличная от полной единичной окружности, то линии уровня K_λ

$$\omega(z, \alpha, G) = \lambda \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$$

совпадают с дугами окружностей, соединяющих концы дуги α. Отсюда с помощью конформного отображения заключаем, что и в тех случаях, когда α является граничной дугой области G, ограниченной одной жордановой кривой Γ, система линий уровня гармонической меры ведет себя аналогичным образом, а именно, линии K_λ соединяют концы дуги α и покрывают один раз область G, когда λ изменяется от 0 до 1.

28. В общем случае, когда α состоит из конечного числа дуг, расположенных на кривых Γ_ν ($\nu = 1, \ldots, p$), ограничивающих область G, линии ω распадаются вообще на отдельные изолированные ветви. Пусть β — дуги, дополнительные к α. Так как в каждой внутренней точке дуг α, соответственно дуг β, ω равно 1 или 0, то линии ω для $0 < \lambda < 1$ не могут оканчиваться в этих точках. Таким образом, остаются только две возможности: либо они оканчиваются в концах дуг α, либо они замкнуты; в последнем случае они содержат внутри себя одну или несколько граничных линий Γ_ν (как вообще всякая замкнутая часть линии уровня).

Рассмотрим теперь аналитическую функцию

$$\varphi(z, \alpha, G) = \omega(z, \alpha, G) + i\bar{\omega}(z, \alpha, G),$$

где $\bar{\omega}$ означает сопряженную к ω функцию; она определена с точностью до аддитивной постоянной. В случае многосвязной области ($p > 1$) она получает на замкнутых путях приращение, линейно зависящее от модулей периодичности, соответствующих внутренним граничным кривым $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_p$.

Если, в частности, G есть полуплоскость и α — интервал (z_1, z_2) на ограничивающей ее прямой, то ω имеет вид

$$\frac{1}{\pi} \arg \frac{z-z_2}{z-z_1},$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{i}{\pi} \log \frac{z-z_1}{z-z_2},$$

откуда видно, что эта функция отображает область G взаимно однозначно и конформно на полосу P:

$$0 < \omega < 1$$

в плоскости $\varphi = \omega + i\tilde{\omega}$. Аналогичное справедливо тем самым и для области G, ограниченной произвольной жордановой кривой Γ, на которой рассматривается *одна* дуга α. При отображении $G \to P$ точкам разрыва функции $\omega(z)$ соответствуют бесконечно удаленные граничные точки $\omega = \pm\infty$.

29. Если $p > 1$ или α состоит из нескольких дуг, то значения функции φ, очевидно, все еще попадают на полосу P; однако, отображение, даваемое этой функцией, уже более не конформно во всех без исключения точках области G. Конформность отображения нарушается в точках, являющихся нулями производной $\varphi'(z)$, которая, в силу выше рассмотренных свойств функции $\varphi(z)$, однозначна и регулярна в области G. Эти исключительные точки совпадают с точками разветвления линий уровня $\omega = \lambda$.

Покажем сперва, что число этих точек конечно, для чего достаточно показать, что ни одна граничная точка не является для них предельной. Пусть ζ — произвольная граничная точка, лежащая, например, на внешней граничной кривой Γ_1. Отобразим конформно область, ограниченную кривой Γ_1, — она, очевидно, содержит область G как часть — на полуплоскость $\Im(x) > 0$. Функция φ переходит при этом в регулярную функцию $\varphi^*(x)$, определенную в некоторой области G^* этой полуплоскости; кривой Γ_1 соответствует действительная ось, а точке ζ — некоторая точка ξ, в окрестности которой и должно быть исследовано поведение функции φ^*.

Если ζ — точка непрерывности гармонической меры ω, то последняя как функция от x принимает на небольшом граничном сегменте, содержащем точку ξ, значение 1 или значение 0 и, следовательно, по принципу зеркального отображения гармонична в некоторой окрестности $|x-\xi| \leqslant r$ точки ξ; следовательно, функция φ^* здесь регулярна. Далее, $\varphi^{*\prime}(\xi) \neq 0$. В самом деле, φ^* принимает в точке $x = \xi$ значение, лежащее на границе полосы P, в то время как ее значения в полукруге $|x-\xi| \leqslant r$, $\Im(x) > 0$ лежат внутри P. Если же $\varphi^{*\prime}(\xi)$ равнялось бы нулю, то φ^* принимала бы в этом полукруге значение, лежащее вне P. Следовательно, $\varphi^{*\prime}(\xi) \neq 0$, и можно найти окрестность точки ξ, в которой производная $\varphi^{*\prime}$ всюду отлична от нуля. Этой окрестности в плоскости z

соответствует окрестность граничной точки ζ. Но $\varphi'(z)=\frac{d\varphi^*}{dx}\frac{dx}{dz}$, и так как $\frac{dx}{dz}$, в силу конформности вспомогательного отображения, отлична от нуля, то отсюда следует, что точка ζ не может являться предельной для нулей производной φ'.

То же самое справедливо, если точка ζ является концом некоторой дуги α. Пусть ζ является начальной точкой некоторой дуги α, т. е. пусть граничная точка двигается в *положительном* направлении, когда, начиная с точки ζ, она пробегает дугу α. Тогда действительная часть ω преобразованной функции $\varphi^*(x)$ принимает значение 1 на интервале $0<x-\xi<\rho$ действительной оси и значение 0 — на интервале $-\rho<x-\xi<0$ (для достаточно малого $\rho>0$). Но тем же свойством обладает и функция

$$\varphi_1=\frac{1}{i\pi}\log\frac{1}{\xi-x},$$

отображающая верхнюю полуплоскость на полосу P так, что части $x>\xi$ действительной оси соответствует прямая $\omega=1$, а части $x<\xi$ — прямая $\omega=0$. Следовательно, действительная часть функции

$$\psi(x)=\varphi^*-\varphi_1$$

непрерывна и равна нулю во всех точках $0<|x-\xi|\leqslant\rho$ действительной оси, в то время как в окрестности точки $x=0$ она ограничена. На основании принципа зеркального отображения $\psi(x)$ регулярна в круге $|x-\xi|\leqslant\rho$, и, следовательно, для φ^* мы имеем разложение

$$\varphi^*=\frac{1}{i\pi}\log\frac{1}{\xi-x}+\psi(x) \tag{5}$$

и

$$\varphi^{*\prime}(x)=\frac{1}{i\pi}\frac{1}{\xi-x}+\psi'(x),$$

откуда видно, что при $z\to\zeta$ функция $\overline{\omega}(z,\alpha,G)$ стремится к $-\infty$, а $\frac{d\varphi^*}{dx}$ имеет пределом бесконечность. Таким образом, производная $\varphi'(z)=\frac{d\varphi^*}{dx}\frac{dx}{dz}$ в окрестности точки ζ отлична от нуля.

Из (5) далее видно, что для достаточно малых значений r функция $\varphi^*(x)$ отображает полукруг $|x-\xi|\leqslant r$, $\Im(x)>0$ взаимно однозначно и конформно на определенную подобласть P_r полосы P. Чтобы это строго доказать, напишем $x-\xi=re^{i\vartheta}$, $\psi=u+iv$ и $\varphi^*=\omega+i\overline{\omega}$; тогда из (5) мы получим соотношения

$$\omega=-\frac{\vartheta}{\pi}+u+1,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\vartheta}=-\frac{1}{\pi}+\frac{\partial u}{\partial\vartheta}.$$

Согласно уравнениям Коши-Римана имеем $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$, где производная $\frac{\partial v}{\partial r}$, в силу гармоничности функции v в окрестности точки $x=\xi$, ограничена. Таким образом, $\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \to 0$ при $r \to 0$, и, следовательно, для достаточно малых r значение производной $\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}$ во всяком случае *отрицательно*.

Возьмем теперь r настолько малым, чтобы последнее свойство имело место в рассматриваемом полукруге. На полуокружности $|x-\xi|=r$, $\Im(x)>0$ производная $\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta} < 0$; следовательно, когда точка $x=re^{i\vartheta}$ описывает эту полуокружность, точка $\varphi^* = \omega + i\bar{\omega}$ описывает простую кривую b_r, соединяющую прямые $\omega=0$ и $\omega=1$ друг с другом. Это сечение b_r делит полосу P на две односвязные части, из которых нижняя, P_r, является образом полукруга. Из предыдущего следует, что границы этих областей связаны взаимно однозначным и конформным соответствием. Что и сами области связаны взаимно однозначным и конформным соответствием, получается тогда известным образом из принципа аргумента, если учесть соотношение

$$\left|\frac{d\varphi^*}{dx}\right|^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \vartheta}\right)^2,$$

или также из того, что как функция φ^* в полукруге, так и обратная к ней функция в P_r неограниченно продолжаемы; на основании теоремы о монодромии они определяют в этих областях однозначные функции.

Заметим еще следующее: если число r однажды уже выбрано таким образом, чтобы предыдущий результат был справедлив в полукруге $|x-\xi| \leqslant r$, $\Im(x)>0$ для некоторой ветви функции φ^*, то в этом же полукруге результат справедлив и для *всех* ветвей функции φ^*. В самом деле, две такие ветви отличаются лишь на мнимую аддитивную постоянную, так что перемена ветвей влечет лишь параллельный сдвиг области P_r.

Аналогичным образом ведет себя функция φ в „конечной точке“ ζ. Такая точка соответствует бесконечно удаленной точке $\bar{\omega} = +\infty$ полосы P.

30. Изолируем теперь все точки разрыва функции ω небольшими дугами B, на которых $\bar{\omega} = \text{const}$. В силу предыдущего эти дуги можно выбрать так, чтобы они для каждой точки разрыва отделяли такую ее окрестность, в которой производная φ' отлична от нуля. Далее можно найти такое малое значение $\varepsilon > 0$, чтобы кривые $\omega = \varepsilon$, $\omega = 1-\varepsilon$ были простыми и отделяли от G область, содержащую все нули производной φ'. Пусть G_ε — область, ограниченная этими кривыми и дугами B. Для достаточно малых значений ε граница Γ_ε этой области состоит из p различных жордановых кривых соответственно p граничным кривым Γ_ν.

Теперь, чтобы подсчитать число нулей производной φ', определим приращение $\arg\varphi' = \arg d\varphi - \arg dz$ при положительном обходе границы Γ_v. Если на Γ_v лежит всего $2k_v$ ($k_v \geqslant 0$) точек разрыва, то аргумент дифференциала дуги $d\varphi$ получает на Γ_v приращение $2\pi k_v$, а аргумент дифференциала dz — приращение 2π или -2π, в зависимости от того, будет ли $\nu = 1$ или $\nu > 1$. Полное приращение $\arg\varphi'$, таким образом, равно $2\pi(\sum k_v + p - 2)$, откуда, на основании принципа аргумента, следует, что

полное число нулей функции $\varphi'(z)$ в области G равно $n + p - 2$, где n — число дуг α, не совпадающих с целой граничной кривой Γ_v области G.

Тем же числом определяется число точек ветвления линий уровня гармонической меры $\omega(z, \alpha, G)$.

IV. ПРИНЦИП ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ.

§ 1. Установление принципа и его обоснование.

31. Из результатов предыдущих глав нам в этой главе потребуется прежде всего существование гармонической меры $\omega(z, \alpha, G)$ дуги α относительно области G, ограниченной конечным числом жордановых дуг $(\alpha + \beta)$, в точке z этой области; указанная мера вполне определяется следующими условиями:

1) $\omega(z, \alpha, G)$ *гармонична и ограничена в* G;

2) ω *принимает на* α *значение* 1, *а на дополнительной дуге* β *значение* 0.

Исследуем поведение гармонической меры при конформных отображениях заданной области G.

Если выполнить *взаимно однозначное*, конформное в G и непрерывное на границе $\Gamma = \alpha + \beta$ отображение области $G + \Gamma$ на некоторую область $G' + \Gamma'$ так, что дуги α, β перейдут в дуги α', β', то гармоническая мера $\omega(z, \alpha, G)$ преобразуется в некоторую фуикцию образа z' точки z. Последняя функция является гармонической функцией от z', так как свойство гармоничности инвариантно относительно конформных отображений; далее она ограничена в G' и принимает на α' значение 1, а на β' — значение 0. Таким образом, преобразованная функция совпадает с гармонической мерой $\omega(z', \alpha', G')$; следовательно,

$$\omega(z', \alpha', G') = \omega(z, \alpha, G).$$

Гармоническая мера $\omega(z, \alpha, G)$ инвариантна относительно взаимно однозначных конформных отображений области G.

Это свойство гармонической меры справедливо и для случая, когда области G и G' многолистны, т. е. представляют собой части римановых поверхностей.

32. Относительно однозначных, но не взаимно однозначных, следовательно, *многолистных* конформных отображений гармоническая мера, вообще говоря, не инвариантна. Для примера преобразуем единичный круг $|z| \leqslant 1$, на границе которого выбраны известные дуги α, с помощью функции $z' = z^2$; при этом круг $|z| \leqslant 1$ перейдет в круг $|z'| \leqslant 1$, а дуги α — в некоторые дуги α' на окружности $|z'| = 1$. Тогда $\omega(z, \alpha)$ вообще не будет равна $\omega(z', \alpha')$, где обе гармонические меры вычислены относительно единичного круга. В самом деле, функция $z' = z^2$ отображает круг $|z| \leqslant 1$ *взаимно однозначно* на двухлистный круг $|z'| \leqslant 1$, относительно которого дуги, расположенные на α', также имеют гармоническую меру $\omega(z', \alpha')$. Но этим дугам на окружности $|z| = 1$ соответствует множество, которое кроме дуг α содержит еще вообще и другие дуги $\bar{\alpha}$. В силу инвариантности гармонической меры относительно взаимно однозначных конформных отображений гармоническая мера этого множества равна гармонической мере дуг α', следовательно,

$$\omega(z', \alpha') = \omega(z, \alpha) + \omega(z, \bar{\alpha}),$$

откуда видно, что гармоническая мера дуг α в результате нашего отображения вообще увеличилась; исключение составляет лишь тот случай, когда α содержит *все* дуги, соответствующие дугам α', т. е. когда дуги α переходят сами в себя при преобразовании $S(z) = -z$, не меняющем значения $z' = z^2$; в этом и только в этом случае $\omega(z', \alpha') = \omega(z, \alpha)$.

33. Это увеличение гармонической меры является ее общим свойством, справедливым для однозначных многолистных отображений, что при известных дополнительных предположениях могло бы быть доказано рассуждениями, аналогичными вышеприведенным. Этот принцип, имеющий большое теоретико-функциональное значение, мы хотим, однако, сразу сформулировать и доказать в достаточно общей форме, пригодной для применений [1]).

Принцип гармонической меры. *Пусть в области G, ограниченной конечным числом жордановых дуг Γ_z, задана однозначная регулярная аналитическая функция $w = w(z)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *Значения w, принимаемые функцией $w(z)$ в G, попадают в область G_w, ограниченную конечным числом жордановых дуг Γ_w.*

2) *В каждой точке ξ некоторых дуг α_z, заданных на Γ_z, функция $w(z)$ непрерывна и ее значения на этих дугах попадают на часть A_w замкнутой области G_w, ограниченную (или образованную) [2]) конечным числом жордановых дуг α_w.*

---

[1]) См. R. Nevanlinna [12].

[2]) Мы учитываем, следовательно, возможность того, что область A_w „одномерна", т. е. состоит из одних только дуг α_w.

При этих условиях во всякой точке z области G, в которой функция $w(z)$ принимает значение, лежащее вне области A_w, имеет место соотношение

$$\omega(z, \alpha_z, G_z) \leqslant \omega(w(z), \alpha_w, G_w^*), \tag{1}$$

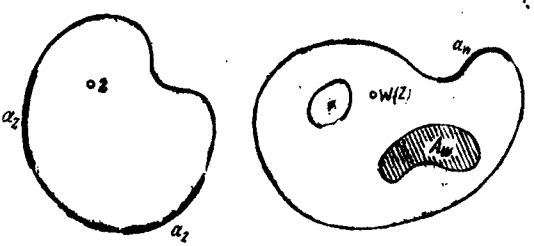
где G_w^* означает подобласть области G_w, содержащую точку $w(z)$ и ограниченную дугами Γ_w и α_w.

Доказательство. Пусть z — точка, для которой $w(z)$ лежит вне A_w, и пусть G_z^* — подобласть области G_z, содержащая точку z и ограниченная кроме дуг Γ_z еще множеством точек $\bar{\alpha}_z$, в которых $w(z)$ принимает значения, лежащие на α_w. Разность

$$u(z) = \omega(w(z), \alpha_w, G_w^*) - \omega(z, \alpha_z, G_z) \tag{2}$$

гармонична и однозначна в G_z^*. Относительно граничной точки z^* области G_z^* нужно различать четыре случая.

1) z^* лежит внутри G_z и тем самым принадлежит к множеству $\bar{\alpha}_z$. В этом случае $\omega(z^*, \alpha_z, G_z)$ гармонична и во всяком случае $\leqslant 1$. Функция же $\omega(w(z), \alpha_w, G_w^*)$ стремится к 1, когда точка z (оставаясь внутри G_z^*) стремится к точке z^*, ибо $w(z)$ для $z = z^*$ принимает значение, лежащее на α_w, а здесь значение гармонической меры равно 1 [1]). Таким образом, в рассматриваемой граничной точке z^* разность $u(z)$ непрерывна и неотрицательна (фиг. 5).



Фиг. 5.

2) z^* лежит на дуге α_z. Тогда при $z \to z^*$ как первый, так и второй член соотношения (2) стремится к 1, и разность $u(z)$ в точке $z = z^*$ снова неотрицательна (даже точно равна нулю).

3) z^* лежит на дуге β_z, дополнительной к α_z. Здесь второй член в правой части соотношения (2) исчезает, и так как первый член во всяком случае неотрицателен, то $\varliminf u(z^*) \geqslant 0$.

4) z^* является общим концом для дуг α_z и β_z; по предположению число таких точек разрыва *конечно*.

Таким образом, мы нашли, что ограниченная гармоническая функция $u(z)$ имеет неотрицательную нижнюю границу во всех граничных точках области G_z^*, исключая самое большее конечное число точек. Так как $u(z)$ ограничена, то по принципу мини-

[1]) Небольшим расширением области A_w можно достигнуть того, чтобы w стремилась при этом к внутренней точке (точке непрерывности) дуг α_w; затем можно совершить обратный предельный переход к первоначальной области A_w.

мума $u(z)$ вообще $\geqslant 0$ и, следовательно, имеет место соотношение (1) *).

34. Пример, рассмотренный в п. 32, нам уже показал, что даже при многолистных отображениях соотношение (1) может при известных обстоятельствах переходить в равенство. Допустим на минуту, что это имеет место для некоторой точки z области G_z. Так как гармоническая функция $u(z) = \omega(w(z), a_w, G_w^*) - \omega(z, a_z, G_z)$ во всяком случае неотрицательна, то она по принципу минимума должна тождественно равняться нулю. Следовательно:

Соотношение (1) *переходит в равенство для некоторой точки области G_z тогда и только тогда, когда для всякой пары соответствующих друг другу точек z и w*

$$\omega(w, a_w, G_w^*) = \omega(z, a_z, G_z). \tag{3}$$

Спрашивается, что можно сказать о функции $w = w(z)$, определяемой уравнением (3), если G_z и G_w^* — произвольные области и a_z, a_w — заданные на их границе дуги.

Полный ответ на этот вопрос получается из результатов гл. II, § 5. Если положить $\varphi = \omega + i\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ означает сопряженную к ω функцию, определенную с точностью до действительного слагаемого, то (3) будет эквивалентно уравнению

$$\varphi(w, a_w, G_w^*) = \varphi(z, a_z, G_z) + i\mu, \tag{3'}$$

где μ — действительный параметр.

Если производная функции, стоящей слева, не обращается в нуль, т. е. если число $n + p - 2$, соответствующее области G_w^*, равно 0 (ср. п. 30), что возможно тогда и только тогда, когда $p = 1$, $n = 1$ или $p = 2$, $n = 0$, то эта функция отображает конформно область G_w^* (в случае $p = 1$, $n = 1$) или универсальную поверхность наложения $G_w^{*\infty}$ (если $p = 2$, $n = 0$) на полосу $0 < \omega < 1$; с другой стороны, значение $\varphi(z, a_z, G_z)$ лежит в этой же полосе. Следовательно, элемент функции $w(z)$, определяемый уравнением (3), может быть неограниченно продолжен в области G_z и определяет тем самым функцию, регулярную во всех точках этой области.

Если G_z односвязна, то функция $w(z)$ *однозначна* во всей области G_z и отображает ее на конечнолистную ($p = 1$) или бесконечнолистную ($p = 2$) универсальную поверхность наложения области G_w^*. Этот результат не зависит от выбора параметра μ; изменение значения μ влечет лишь сдвиг точек w вдоль линий уровня $\omega(w, a_w, G_w^*)$.

Если, напротив, G_z многосвязна, то функция $w(z)$, вообще говоря, не однозначна. Однозначность имеет место только тогда, когда

*) Может случиться, что граница области G_w^* будет содержать Γ_w и a_w не целиком. В этом случае в правой части соотношения (1) под a_w нужно понимать ту ее часть, которая входит в границу области G_w^*. Легко убедиться, что значения $w(z)$ в G_z^* попадают в G_w^* и что приведенное выше доказательство принципа остается в силе и в этом случае.

модули периодичности функции $\omega(z, \alpha_z, G_z)$ кратны модулям периодичности функции $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$, что имеет место только для весьма специальных конфигураций (G_z, G_w^*).

Если соответствующее области G_w^* число $n+p-2>0$, то производная $\varphi'(w, \alpha_w, G_w^*)$ имеет нули в области G_w^*, а обратная ей функция имеет в полосе $0<\omega<1$ точки алгебраической ветвимости. В этом случае уравнение (3′) определяет w как функцию от z, которая продолжима в G_z как алгебраическая функция и однозначна в ней только при весьма особых условиях, касающихся как модулей периодичности, так и расположения точек ветвления линий уровня функций $\omega(z, \alpha_z, G_z)$ и $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$.

Примечание. То, что экстремальные функции $w(z, \mu)$, встречающиеся в принципе, вообще говоря, многозначны, наводит на мысль о том, что принцип имеет место и для многозначных функций $w(z)$. Обобщение в этом направлении действительно возможно; так, например, принцип справедлив, если $w(z)$ однозначна во всех точках области G_z за исключением некоторых точек, лежащих над конечным числом точек области G_z. Однако мы здесь не будем входить в подробное рассмотрение подобных обобщений (ср. Hössjer [1]).

35. Полезно геометрически интерпретировать принцип увеличении гармонической меры.

В предположениях п. 33 для каждого $0<\lambda<1$ точка $w=w(z)$ лежит внутри области $\lambda<\omega(w, \alpha_w, G_w^*)<1$, если только $\lambda<\omega(z, \alpha_z, G_z)<1$. Это имеет место также и тогда, когда z лежит на линии уровня $\omega(z, \alpha_z, G_z)=\lambda$, исключая случай функций $w=w(z, \mu)$, определяемых уравнением (3′), которые (если они однозначны) переводят друг в друга линии уровня в G_z и в G_w^*, соответствующие одному и тому же значению λ.

§ 2. Применения к абсолютному значению аналитической функции.

36. Для первого применения принципа гармонической меры возьмем за область G_w круг $|w|<M$, а за область A_w — меньший концентрический круг $|w|\leqslant m<M$. Для гармонической меры $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$, где, следовательно, α_w есть окружность $|w|=m$, а G_w^* — кольцо $m<|w|<M$, мы получим тогда выражение

$$\omega=\frac{\log\frac{M}{|w|}}{\log\frac{M}{m}},$$

и из нашего принципа будет непосредственно следовать так называемая [1])

[1]) См. F. u. R. Nevanlinna [1], A. Ostrowski [1].

Теорема о двух константах. *Пусть $w(z)$ — регулярная аналитическая в области G функция, абсолютное значение которой в этой области удовлетворяет неравенству*

$$|w(z)| \leqslant M,$$

в то время как на некоторых заданных граничных дугах α области G

$$\overline{\lim}\,|w(z)| \leqslant m < M.$$

При этих условиях в каждой точке области $0 < \lambda < \omega(z, \alpha, G) < 1$ имеет место неравенство

$$\log|w(z)| < \lambda \log m + (1-\lambda)\log M.$$

На линии уровня $\omega(z, \alpha, G) = \lambda \quad (0 < \lambda < 1)$

$$\log|w(z)| \leqslant \lambda \log m + (1-\lambda)\log M.$$

Если здесь имеет место равенство для одного значения z, то оно имеет место для всех значений z из G и для всех $\lambda\,(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$. Функция $w(z)$ имеет тогда вид

$$w(z) = e^{i\mu} m^{\varphi(z)} M^{1-\varphi(z)},$$

где μ — произвольное действительное число, а $\varphi(z)$ — аналитическая функция, действительной частью которой служит гармоническая мера $\omega(z, \alpha, G)$.

37. Из этой теоремы можно вывести интересное следствие относительно максимального значения M_λ, достигаемого на линии уровня $\omega(z, \alpha, G) = \lambda$ модулем определенной в области G аналитической функции $w(z)$. Для этого зафиксируем два значения λ_1, λ_2 $(0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant 1)$ и рассмотрим область

$$\lambda_1 < \omega(z, \alpha, G) < \lambda_2.$$

Гармоническая мера граничной линии $\omega = \lambda_2$ относительно этой области, очевидно, равна $\dfrac{\omega - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$, и из теоремы о двух константах следует, что для $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ имеет место соотношение

$$\log M_\lambda \leqslant \frac{(\lambda - \lambda_1)\log M_{\lambda_2} + (\lambda_2 - \lambda)\log M_{\lambda_1}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Следовательно, если из каждой точки интервала $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ восставить ординату y, равную $\log M_\lambda$, то полученная кривая $y = \log M_\lambda$, соединяющая точки $(\lambda_1, \log M_{\lambda_1})$, $(\lambda_2, \log M_{\lambda_2})$, будет расположена не выше хорды, соединяющей эти же точки, так как ордината последней определяется правой частью вышестоящего неравенства. Отсюда заключаем:

Логарифм максимального значения $\log M_\lambda$ является выпуклой функцией от параметра λ. Он имеет, следовательно, монотонно возрастающую, с точностью до счетного числа скачков, непрерывную

производную $\frac{d\log M_\lambda}{d\lambda}$ и почти для всех значений λ имеет вторую производную.

В частности, если за область G взять круговое кольцо, то ω будет линейной функцией от $\log|z|$, и мы получим теорему Адамара о трех кругах, согласно которой логарифм максимального значения

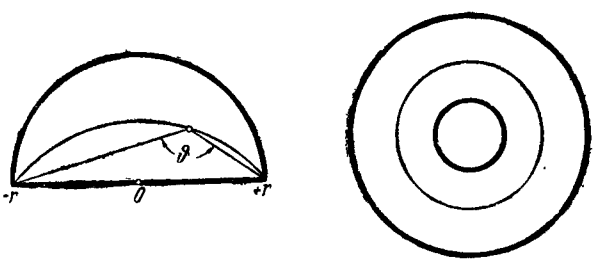
$$\max_{|z|=r}|w(z)| = M(r)$$

является выпуклой функцией от $\log r$.

38. В качестве второго применения рассмотрим аналитическую функцию, *регулярную в верхней полуплоскости* $\Im(z) > 0$ *и ограниченную в каждой конечной точке* $z = t$ *действительной оси так, что для* $z \to t$

$$\overline{\lim}\,|w(z)| \leqslant 1.$$

Обозначим через $M(r)$ максимальное значение $|w(z)|$ на верхней полуокружности $|z| = r$. Мы можем тогда применить принцип, принимая за область G_z верхний полукруг $|z| < r$ и за область



Фиг. 6.

G_w — кольцо, ограниченное окружностями $|w| = 1$, $|w| = M(r)$. Для гармонической меры полукруга получается значение

$$\omega = 2\left(1 - \frac{\vartheta}{\pi}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\pi}\arg\frac{z-r}{z+r}\right),$$

где ϑ — величина угла, под которым виден диаметр $(-r, r)$ из подвижной точки z (фиг. 6).

Из теоремы о двух константах следует тогда, что в каждой точке z нашего полукруга

$$\log|w(z)| \leqslant 2\left(1 - \frac{\vartheta}{\pi}\right)\log M(r). \tag{4}$$

Если зафиксировать некоторую точку z, то из фиг. 6 непосредственно видно, что при $r \to \infty$ величина $\omega = 2\left(1 - \frac{\vartheta}{\pi}\right)$ стремится к нулю. Простой подсчет дает нам разложение ($z = t + i\tau$):

$$\omega = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\frac{\tau}{r+t} + \arcsin\frac{\tau}{r-t}\right) \sim \frac{4r\tau}{\pi(r^2 - t^2)}.$$

Введем обозначение

$$\sigma = \varlimsup_{r\to\infty} \log\frac{M(r)}{r}.$$

Если теперь заставить r пробегать неограниченно возрастающую последовательность значений $r_1, r_2, \ldots$, для которой отношение $\log\frac{M(r)}{r}$ стремится к σ, то из (4), при фиксированном z, мы получим неравенство

$$\log|w(z)| \leqslant \frac{4\sigma}{\pi}\tau.$$

В частности, отсюда следует

Теорема Фрагмена-Линделофа [1]). *Если функция $w(z)$ регулярна в верхней полуплоскости и ограничена в каждой конечной точке действительной оси так, что в этих точках $\varlimsup|w(z)| \leqslant 1$, то возможны только два случая:*

или при $|z|\to\infty$ абсолютное значение $|w|$ растет к бесконечности так быстро, что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r}$$

положителен, или функция ограничена, так что

$$|w(z)| \leqslant 1$$

в каждой точке полуплоскости.

Далее получается дополнение [2]):

Если в предположениях предыдущей теоремы $w(z)$ стремится к нулю на некоторой последовательности полуокружностей, так что

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} = -\infty,$$

то функция $w(z)$ тождественно равна нулю.

39. В качестве третьего применения рассмотрим ограниченную в верхней полуплоскости функцию $w(z)$ ($|w| \leqslant 1$), которая непрерывна на положительной действительной оси и стремится на ней к определенному предельному значению (например, к нулю), когда $z\to\infty$. Тогда для произвольно малого заданного ε ($0 < \varepsilon < 1$) на действительной оси можно найти такую точку $z = t_0 > 0$, начиная с которой на действительной оси $|w(z)| < \varepsilon$. Рассматривая верхнюю полуплоскость как область G_z и указанный отрезок действительной оси как дугу α, мы можем применить теорему о двух константах с величинами $M = 1$ и $m = \varepsilon$; таким образом мы получим соотношение

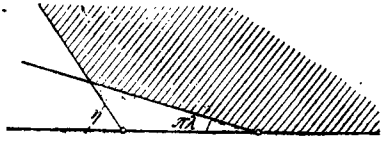
$$\log|w(z)| \leqslant \lambda \log\varepsilon, \tag{5}$$

справедливое для всех точек области $\lambda \leqslant \omega(z, \alpha, G_z) \leqslant 1$.

[1]) E. Phragmén u. E. Lindelöf [1]. Еще более сильная формулировка этой теоремы была дана в работе F. u. R. Nevanlinna [1].

[2]) Относительно дальнейших результатов из этого же круга идей см. F. u. R. Nevanlinna [1].

Но непосредственно видно (фиг. 7), что гармоническая мера ω равна деленной на π величине угла, под которым из точки z видна дуга α, т. е. отрезок действительной оси, лежащий справа от точки t_0 ($\pi\omega = \pi - \arg(z - t_0)$) и, следовательно, область $\lambda < \omega < 1$ состоит из угла с вершиной в точке $z = t_0$, ограниченного этим отрезком действительной оси и лучом $\arg(z - t_0) = \pi(1 - \lambda)$.



Фиг. 7.

Таким образом, если произвольно выбрать число $\eta > 0$, то для значений λ из интервала $0 < \lambda < \frac{\eta}{\pi}$ соотношение (5) справедливо для всех точек угла $0 < \arg z < \pi - \eta$, расположенных над лучом $\arg(z - t_0) = \pi(1 - \lambda)$ (на фиг. 7 эта область заштрихована). Отсюда заключаем:

Если ограниченная в верхней полуплоскости функция стремится на положительной действительной оси к определенному пределу, когда $z \to \infty$, то она стремится равномерно к тому же пределу в каждом угле

$$0 < \arg z < \pi - \eta \quad (\eta > 0).$$

Заметим, что все гармонические меры, с которыми нам приходилось иметь дело в разобранных выше примерах, относились к таким элементарным областям, что их нахождение представляло простую задачу, которую можно было решать, не прибегая к общим теоремам существования теории конформных отображений.

§ 3. Принцип гиперболической меры.

40. Пусть снова $w(z)$ — однозначная регулярная в области G_z функция, значение которой в каждой точке z этой области попадает в некоторую область G_w плоскости w. Пусть, далее, z_0 и $w_0 = w(z_0)$ — пара соответствующих друг другу точек и $g(z, z_0, G_z)$, $g(w, w_0, G_w)$ — функции Грина областей G_z и G_w, имеющие полюсы в точке z_0, и соответственно в точке w_0.

Зафиксируем число $\lambda > 0$ и рассмотрим значения функции $w(z)$ в области $g(z, z_0, G_z) \geqslant \lambda$; если через μ ($\mu \geqslant 0$) обозначить минимум функции $g(w, w_0, G_w)$ в этой области, то, очевидно, значения $w = w(z)$ в рассматриваемых точках z будут лежать в области $g(w, w_0, G_w) \geqslant \mu$. Мы можем тогда применить наш принцип к областям G_z': $0 < g(z, z_0, G_z) < \lambda$ и G_w^*: $0 < g(w, w_0, G_w) < \mu$, рассматривая в качестве дуг α_z и α_w линии уровня $g = \lambda$, соответственно $g = \mu$. Тогда

$$\omega(z, \alpha_z, G_z') = \frac{1}{\lambda} g(z, z_0, G_z);$$

$$\omega(w, \alpha_w, G_w^*) = \frac{1}{\mu} g(w, w_0, G_w),$$

и в каждой точке z области $0 < g < \lambda$ имеет место соотношение

$$g(w(z), w_0, G_w) > \frac{\mu}{\lambda} g(z, z_0, G_z).$$

С другой стороны, для функций Грина мы имеем разложения:

$$\left.\begin{aligned} g(z, z_0, G_z) &= \log\left|\frac{1}{z - z_0}\right| + u_1(z); \\ g(w, w_0, G_w) &= \log\left|\frac{1}{w - w_0}\right| + u_2(w), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где u_1 и u_2 непрерывны в точках $z = z_0$, соответственно $w = w_0$. Так как по предположению функция $w(z)$ регулярна в точке z_0, то выражение

$$\left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right|$$

ограничено в окрестности точки z_0 и из (6) следует, что

$$g(w, w_0, G_w) > g(z, z_0, G_z) \quad (1 - \varepsilon),$$

где $\varepsilon \to 0$ при $z \to z_0$. Следовательно, верхняя граница отношения $\frac{\mu}{\lambda}$ при $\lambda \to \infty$ наверное $\geqslant 1$ и тем самым

$$g(w, w_0, G_w) \geqslant g(z, z_0, G_z)$$

в каждой точке z области G_z.

Таким образом, как предельный случай нашего принципа мы получили *принцип Линделофа* [1]).

Пусть G_z и G_w — две области и z_0, w_0 — две их точки. Если $w(z)$ — однозначная мероморфная в области G_z функция, значения которой расположены в области G_w и $w(z_0) = w_0$, то каждой точке области

$$g(z, z_0, G_z) > \lambda > 0$$

соответствует точка $w = w(z)$, лежащая в области

$$g(w, w_0, G_w) > \lambda.$$

41. Выше уже было указано, что в нашем изложении мы придаем большое значение выявлению внутреннего единства и взаимных связей различных теоретико-функциональных теорем; в этом направлении лежит *принципиальное* значение принципа гармонической меры. Если, наоборот, стремиться к возможно более короткому доказательству различных теорем, вытекающих из принципа, то приведение к общему принципу представляет часто обходный путь. Так, например, принцип Линделофа можно доказать проще, чем это было сделано выше, если заметить, что разность $g(w, w_0, G_w) - g(z, z_0, G_z)$ гармонична всюду в области G_z, за исключением быть может точки $z = z_0$, в которой она может обратиться в $+\infty$, и что на границе области G_z она имеет неотрица-

[1]) E. Lindelöf [2].

тельную нижнюю границу. Применение принципа минимума к области G_z или, если точка $z=z_0$ является полюсом предыдущей разности, к области G_z без точки $z=z_0$ приводит сразу к желаемому результату.

На линии уровня $g(z, z_0, G_z)=\lambda$ имеем $g(w, w_0, G_w)\geqslant\lambda$, причем, если равенство имеет место в одной точке z при некотором значении λ, то оно имеет место для всех z и всех $\lambda>0$. Экстремальная функция $w(z)=w(z, \mu)$ определяется тогда из уравнения

$$g(z, z_0, G_z)-ih(z, z_0, G_z)=g(w, w_0, G_w)-ih(w, w_0, G_w)+i\mu,$$

где $-h$ означает сопряженную к g функцию, а μ — действительный параметр.

42. Для многосвязных областей экстремальные функции $w(z, \mu)$, вообще говоря, не однозначны. Для получения точной оценки в этих случаях отображают конформно универсальные поверхности наложения G_z^∞ и G_w^∞ на единичный круг, благодаря чему экстремальная задача сводится к случаю односвязных областей, для которых принцип Линделофа дает во всяком случае наилучшую возможную оценку.

Последнее замечание имеет большое значение, так как оно позволяет применять принцип также и в тех случаях, когда области G_z и G_w ограничены такими „слабыми" множествами, что для них *не существует функция Грина*; так, например, это имеет место тогда, когда граница областей G_z и G_w состоит из изолированных точек [1]). Таким образом, единственным условием для применимости принципа представляется требование, чтобы *универсальные поверхности наложения G_z^∞ и G_w^∞ можно было конформно отобразить на единичный круг*, т. е. чтобы они были *гиперболического типа*, что имеет место тогда и только тогда, когда граничные множества областей G_z и G_w содержат по крайней мере три точки (ср. п. 12).

Принцип Линделофа принимает особенно ясную форму, если на поверхностях гиперболического типа мы введем вместе с Pick'ом [1] и Carathéodory [2] неевклидову метрику Пуанкаре, как это было сделано для круга в гл. I, § 1.

43. Для того чтобы притти к этой общей формулировке, мы должны несколько более подробно рассмотреть простейший случай, когда G_z и G_w *представляют единичный круг*. Если положить $z_0=w_0=0$, то принцип Линделофа перейдет в лемму Шварца, которая наиболее просто может быть доказана непосредственным применением принципа максимума модуля к функции $\frac{w}{z}$, регулярной в круге $|z|<1$:

[1]) Для того чтобы однолистная область G обладала функцией Грина, необходимо и достаточно, чтобы ее граница не была „гармонической меры нуль". Подробнее этот вопрос исследуется в главе V.

Если функция $w(z)$ *для* $|z|<1$ *регулярна и ограничена:*

$$|w(z)|\leqslant 1$$

и $w(0)=0$, *то*

$$|w(z)|\leqslant|z|$$

для всех $|z|<1$. *В последнем соотношении, при* $z\neq 0$, *равенство имеет место только для функции* $w=e^{i\vartheta}z$, *где* ϑ *— действительная константа.*

Если здесь заменить условие $w(0)=0$ более общим условием $w(z_0)=w_0$ ($|w_0|<1$), то линии уровня $g(z, z_0)=\lambda$ и $g(w, w_0)=\lambda$ совпадут с неевклидовыми окружностями, описанными из точек z_0 и w_0 неевклидовыми радиусами

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$$

(ср. п. 3), и принцип Линделофа в этом случае говорит, что неевклидово расстояние между точками z и z_0 не меньше неевклидового расстояния между их образами w и w_0, и далее, что это расстояние сохраняется только при преобразовании единичного круга в самого себя, т. е. при неевклидовом движении. Отсюда предельным переходом получается, что отношение двух неевклидово измеренных элементов дуг $|dw|$ и $|dz|$, соответствующих друг другу при преобразовании $w=w(z)$, не превосходит единицы.

Это может быть также доказано и непосредственно с помощью принципа максимума: если $w_0=w(z_0)$, то отношение

$$\frac{w-w_0}{1-\overline{w_0}w}:\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}$$

определяет регулярную для $|z|<1$ функцию, абсолютное значение которой на окружности $|z|=1$ имеет верхнюю границу $\leqslant 1$; отсюда следует, что ее абсолютное значение не превосходит 1 и в каждой точке единичного круга, причем равенство в некоторой точке может иметь место только тогда, когда отношение тождественно равно числу, модуль которого равен 1, т. е. когда функция $w=w(z)$ производит конформное отображение единичного круга самого на себя. Отсюда следует, что в точке $z=z_0$ имеет место соотношение

$$\frac{|dw|}{1-|w|^2}\leqslant\frac{|dz|}{1-|z|^2},$$

в котором, в силу определения неевклидовой длины элемента дуги (ср. п. 3), содержится вышеприведенное утверждение.

Отсюда интегрированием получается следующая теорема:

При отображении единичного круга $|z|<1$ *с помощью регулярной функции* $w=w(z)$, *модуль которой* $|w|<1$ *для* $|z|<1$, *неевклидова длина произвольной дуги уменьшается, за исключением того случая, когда* $w(z)$ *конформно отображает единичный круг самого на себя; в этом случае неевклидовы расстояния сохраняются.*

Эта интересная формулировка леммы Шварца была дана Pik'ом [1]. С помощью конформных отображений неевклидово мероопределение может быть перенесено на более общие области, что позволяет высказать принцип Линделофа в соответствующей общей форме, инвариантной относительно конформных отображений, на что уже было указано выше.

44. Это перенесение неевклидового мероопределения действительно удается для всякой односвязной римановой поверхности F *гиперболического типа*, которую, как известно, можно взаимно однозначно и конформно отобразить на единичный круг, следовательно, в частности, для универсальной поверхности наложения G^∞ многосвязной однолистной области G, граница которой содержит по крайней мере три точки. Для того чтобы определить относительно поверхности F неевклидову длину $d\sigma$ элемента дуги dz, выходящего из некоторой точки z этой поверхности, поверхность F отображают конформно на единичный круг K и определяют искомую неевклидову длину как неевклидову длину преобразованного элемента дуги относительно единичного круга. Пусть при отображении $F \to K$ точка z переходит в точку $x (|x| < 1)$, так что элемент dz преобразуется в элемент dx. Тогда для неевклидовой длины $d\sigma$ получается выражение:

$$d\sigma = \frac{|dx|}{1 - |x|^2}. \tag{7}$$

При таком определении $d\sigma$ величина отношения $\frac{d\sigma}{|dz|}$ однозначно определяется заданием поверхности F и точки z на ней, так как правая часть (7) не зависит от выбора образа x точки z в единичном круге K.

В частности, если за F взять универсальную поверхность наложения G^∞ однолистной области G, граница которой содержит по крайней мере три точки, то диференциальное отношение $\frac{d\sigma}{|dz|}$ однозначно определено не только на G^∞, но также и на основной поверхности G, так как в двух „лежащих одна над другой" точках поверхности наложения G^∞ значения как $|dz|$, так и $d\sigma$, в силу инвариантности правой части (7) относительно взаимно однозначных конформных отображений единичного круга самого на себя, равны. Следовательно,

соотношением (7) *устанавливается однозначное гиперболическое мероопределение не только на поверхности наложения* G^∞, *но и на основной поверхности* G.

45. Пусть теперь $w(z)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая условиям принципа Линделофа, т. е. регулярная (с точностью до полюсов) в каждой точке области G_z и принимающая здесь значения, попадающие в заданную область G_w. Отобразим конформно соответствующие универсальные поверхности наложения G_z^∞ и G_w^∞

на единичный круг $|x|<1$, соответственно $|t|<1$, и образуем функцию $t(w(z(x)))\equiv\varphi(x)$; эта функция неограниченно продолжима в круге $|x|<1$ и принимает здесь значения, лежащие в круге $|t|<1$. Если обозначить гиперболические длины четырех соответствующих друг другу элементов дуг: dx, dz, dw, dt соответственно через $d\sigma_x$, $d\sigma_z$, $d\sigma_w$, $d\sigma_t$, то, в силу инвариантности этих длин относительно отображений $x\to z$ и $w\to t$, имеют место равенства: $d\sigma_x=d\sigma_z$ и $d\sigma_w=d\sigma_t$. Так как по теореме Пика $d\sigma_t\leqslant d\sigma_x$, то

$$d\sigma_w\leqslant d\sigma_z.$$

Равенство здесь имеет место только тогда, когда функция $t=\varphi(x)$ приводится к линейному преобразованию, переводящему единичный круг в самого себя; в этом случае функция $w(z)$ устанавливает взаимно однозначное и конформное соответствие между универсальными поверхностями наложения G_z^∞ и G_w^∞. В общем случае эта экстремальная функция не однозначна в G_z. Нужно, однако, заметить, что в предыдущих рассуждениях не предполагалась *однозначность* функции $w(z)$ в G_z. Если только эта функция неограниченно продолжаема в G_z с характером рациональной функции, то то же самое справедливо и для функции $t=\varphi(x)$ в круге $|x|<1$, которая тогда, по теореме о монодромии, также однозначна.

Полученный результат мы можем теперь сформулировать следующим образом:

Принцип гиперболической меры. *Пусть G_z и G_w — две однолистные области, имеющие по крайней мере три граничные точки, и $w(z)$ — аналитическая функция, неограниченно продолжимая в G_z, притом так, что ее значения попадают в область G_w. Тогда, если l_z — произвольная дуга в G_z и l_w — ее образ в G_w, определенный с помощью отображения $w=w(z)$, то гиперболическая длина дуги l_z (измеренная относительно G_z) не меньше гиперболической длины дуги l_w (измеренной относительно G_w).*

Эти длины равны друг другу тогда и только тогда, когда функция $w=w(z)$ устанавливает взаимно однозначное и конформное соответствие между универсальными поверхностями G_z^∞ и G_w^∞.

В случае односвязных областей G_z и G_w принцип Линделофа и принцип гиперболической меры совпадают. Напротив, для многосвязных областей последний принцип дает часто более точную оценку. Так, например, если G_z односвязна, а G_w многосвязна, то линии уровня функции Грина

$$g(z, z_0, G_z)=\mu$$

являются одновременно неевклидовыми окружностями неевклидового радиуса

$$\lambda=\frac{1}{2}\log\frac{1+e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}.$$

Для многосвязных областей соответствующее уже не имеет места. В самом деле, если провести вспомогательное униформизирующее преобразование $w \to t$, то легко видеть, что неевклидов круг с центром в точке w_0 и неевклидовым радиусом λ содержится строго внутри области $g(w, w_0, G_w) \geqslant \mu$. Следовательно, в этом случае принцип гиперболической меры приводит к более сильному ограничению области изменения значений функции, чем принцип Линделофа. Еще раз подчеркнем, что принцип гиперболической меры имеет то преимущество, что он справедлив и для многозначных функций и для всякой поверхности, универсальная поверхность наложения которой принадлежит к гиперболическому типу; среди последних поверхностей имеется множество таких, граница которых настолько „бедна", что они не обладают функцией Грина, так что к ним принцип Линделофа неприменим.

46. В целом ряде вопросов большое значение имеет логарифм отношения неевклидовой длины элемента дуги к евклидовой его длине.

Если положить $u(z, G) = \log \frac{d\sigma}{|dz|}$, то функция u будет однозначно определена в G, притом независимо от выбора образа $x = x(z)$ точки z при вспомогательном отображении $G^\infty \to K$. Так как гиперболическая длина $d\sigma$ инвариантна относительно этого отображения, то

$$d\sigma = e^{u(z, G)}|dz| = e^{u(x, K)}|dx|.$$

Здесь

$$u(x, K) = \log \frac{1}{1 - |x|^2},$$

т. е. величина, которая согласно п. 3 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta u = 4e^{2u}. \tag{8}$$

Но, как известно, при *аналитическом* преобразовании $x = x(t)$ оператор Лапласа $\Delta(u(x))$ преобразуется по формуле

$$\Delta_t u(x(t)) = \Delta_x u \left|\frac{dx}{dt}\right|^2.$$

Отсюда, учитывая соотношения (8) и

$$u(z, G) = u(x, K) + \log\left|\frac{dx}{dz}\right|,$$

получаем

$$\Delta_z u(z, G) = \Delta_z u(x, K) = \Delta_x u(x, K)\left|\frac{dx}{dz}\right|^2 = 4e^{2u(x, K) + 2\log\left|\frac{dx}{dz}\right|}.$$

Таким образом, *функция* $u(z, G)$, *т. е. логарифм отношения гиперболической длины элемента дуги* dz *к евклидовой его длине, удовлетворяет дифференциальному уравнению* $\Delta u = 4e^{2u}$, *независимо от выбора области* G.

§ 4. Теоремы о круговых областях.

47. Теперь мы обращаемся к другого рода обобщениям леммы Шварца. Если за G_z и G_w взять единичные круги, а за α_z и α_w — две граничные дуги, то из принципа гармонической меры немедленно получается следующая теорема (ср. п. 35):

Если $|w(z)| \leqslant 1$ *для* $|z| < 1$ *и если далее* $w(z)$ *непрерывна на граничной дуге* α_z *и принимает здесь значения, попадающие на граничную дугу* α_w *единичной окружности* $|w| = 1$, *то область изменения точки* $w = w(z)$ *подчинена следующим ограничениям:*

Если точка z *лежит внутри области, ограниченной дугой* α_z *и дугой* $K_\lambda(\alpha_z)$ *окружности, пересекающей единичную окружность* $|z| = 1$ *в концах дуги* α_z *под углом* $\lambda\pi$ $(0 < \lambda < 1)$, *то точка* $w = w(z)$ *лежит внутри двуугольника, ограниченного дугами* α_w *и* $K_\lambda(\alpha_w)$.

Две точки дуг $K_\lambda(\alpha_z)$ *и* $K_\lambda(\alpha_w)$ *соответствуют друг другу тогда и только тогда, когда функция* $w = w(z)$ *производит конформное отображение круга* $|z| \leqslant 1$ *на круг* $|w| \leqslant 1$, *притом так, что дуга* α_z *переходит в дугу* α_w.

Теорема остается в силе без всяких изменений при замене единичных кругов G_z и G_w произвольными кругами (или полуплоскостями).

В частности, если положить $w(0) = 0$, то при предположениях предыдущей теоремы следует, что α_w не короче, чем α_z, ибо в противном случае, выбирая λ так, чтобы дуга $K_\lambda(\alpha_z)$ проходила через точку $z = 0$, мы имели бы, что двуугольник, ограниченный дугами α_w и $K_\lambda(\alpha_w)$, не содержал бы точки $w = 0$, но это по теореме невозможно. В этом и заключается

Лемма Лёвнера (Löwner) [1]. *Пусть* $|w| < 1$ *для* $|z| < 1$ *и* $w(0) = 0$. *Если* $w(z)$ *непрерывна на некоторой граничной дуге* α_z *и принимает здесь значения, лежащие на окружности* $|w| = 1$, *то образ* α_w *дуги* α_z *не короче длины* α_z. *Равенство имеет место только для*

$$w(z) = e^{i\theta} z.$$

48. В согласии с нашим принципом теорема Лёвнера говорит, что гармоническая мера $\omega(0, \alpha_z)$ дуги α_z в точке $z = 0$ при преобразовании предыдущего типа в общем случае увеличивается: в самом деле, в рассматриваемом случае эти гармонические меры равны соответственно длинам дуг α_z и α_w, деленным на 2π.

Зафиксируем теперь на α_z произвольную точку $z^* = e^{i\varphi}$; из принципа зеркального отображения Шварца следует, что $w(z)$ аналитична на α_z, следовательно, в частности, и в точке z^*. Обозначим через α часть дуги α_z, имеющей конец в точке z^*, и

[1]) K. Löwner [1].

через β — ее образ на $|w|=1$. Тогда, полагая $w(z^*)=e^{i\vartheta}$, из неравенства

$$\frac{\omega(w(z),\beta)}{\omega(z,\alpha)}\geqslant 1$$

предельным переходом $\alpha\to 0$ мы получим соотношение

$$\left[\frac{d\omega(w,\beta)}{d\omega(z,\alpha)}\right]_{\alpha=0}\geqslant 1$$

или, учитывая выражение для $d\omega$ (п. 4), получаем

$$\frac{1-|w|^2}{|e^{i\vartheta}-w|^2}\,\frac{d\vartheta}{d\varphi}\geqslant\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}.$$

Здесь $\frac{d\vartheta}{d\varphi}$ — абсолютное значение производной $w'(z)$ в граничной точке $z=z^*$. Геометрически полученное неравенство означает следующее:

Если точка z лежит внутри орицикла

$$O_{\lambda,\varphi}:\qquad \frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}=\lambda \qquad (0<\lambda<\infty),$$

то точка $w=w(z)$ лежит в орицикле

$$O_{\lambda q,\vartheta}:\qquad \frac{1-|w|^2}{|e^{i\vartheta}-w|^2}=\lambda q,$$

где

$$q=\frac{d\varphi}{d\vartheta}=\left|\frac{dz}{dw}\right| \quad \text{и } z=e^{i\varphi},\ w=e^{i\vartheta}.$$

49. В этом заключается *лемма Жюлиа* [1]), которая, однако, имеет место при значительно более общих предположениях, чем вышеуказанные. Именно, может быть доказана следующая

Теорема Жюлиа-Каратеодори. *Пусть $z^*=e^{i\varphi}$ и $w=e^{i\vartheta}$ — две произвольные точки единичной окружности. Если $w(z)$ — регулярная и ограниченная в единичном круге функция:*

$$|w(z)|\leqslant 1 \quad для \quad |z|<1,$$

то всегда существует конечный или бесконечный предел

$$c\equiv\lim_{z\to z^*}\left|\frac{e^{i\vartheta}-w(z)}{e^{i\varphi}-z}\right| \qquad (0\leqslant c\leqslant\infty),$$

когда точка z стремится к граничной точке z^*, оставаясь внутри угла единичного круга, образованного двумя произвольными хордами, выходящими из точки z^*. Если c конечно и не равно 0, то при этом

$$\arg\frac{e^{i\vartheta}-w(z)}{e^{i\varphi}-z}\to\vartheta-\varphi$$

и $w'(z)\to ce^{i(\vartheta-\varphi)}$.

---

[1]) G. Julia [1], C. Carathéodory [4].

Наконец,

$$\frac{1-|w|^2}{|e^{i\vartheta}-w|^2} \geqslant \frac{1}{c}\,\frac{1-|z|^2}{|e^{i\varphi}-z|^2}$$

для всех $|z|<1$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда* w *и* z *связаны уравнением*

$$\frac{1+e^{-i\varphi}z}{1-e^{-i\varphi}z} = c\,\frac{1+e^{-i\vartheta}w}{1-e^{-i\vartheta}w} + i\mu;$$

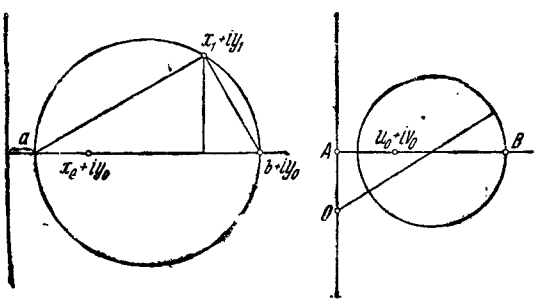
в последнем случае $w=w(z)$ *отображает конформно круг* $|z|\leqslant 1$ *на круг* $|w|\leqslant 1$, *притом так, что заданные граничные точки* z^* *и* w^* *соответствуют друг другу, а модуль производной* $\left|\frac{dw}{dz}\right|$ *в этой точке равен* c.

Если $c=0$, *то* $w\equiv e^{i\vartheta}$.

Доказательство [1]. Линейными преобразованиями

$$\frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \quad \text{и} \quad \frac{e^{i\vartheta}+w}{e^{i\vartheta}-w} \tag{9}$$

единичные круги $|z|<1$ и $|w|<1$ отображаются сперва на правую полуплоскость. Это позволяет сперва рассматривать функцию $w(z)=u(z)+iv(z)$ от переменной $z=x+iy$, регулярную в правой полуплоскости и имеющую там неотрицательную действительную часть; изучив асимптотическое поведение такой функции при $x\to\infty$, мы затем обратно вернемся к единичному кругу.



Фиг. 8.

Пусть для $0<x<\infty$ нижняя граница отношения $\frac{u(x+iy)}{x}$ равна c:

$$\inf\frac{u(x+iy)}{x}=c;$$

тогда $0\leqslant c<\infty$, если только, что мы в дальнейшем предполагаем, $w\not\equiv\infty$.

Рассмотрим сперва тот случай, когда $c=0$. Пусть $z_0=x_0+iy_0$ и $z_1=x_1+iy_1$ — две произвольные точки нашей полуплоскости. Тогда по принципу Пика-Линделофа неевклидово расстояние между точками $w(z_0)$ и $w(z_1)$ не больше неевклидова расстояния между точками z_0 и z_1, как это показано на фиг. 8, на которой из точек z_0 и $w(z_0)=u_0+iv_0$, как из центров, описаны две „конгруэнтные" неевклидовы окружности, из которых первая проходит через точку z_1; второй круг будет, следовательно, содержать точку $w(z_1)$.

---

[1]) Вышеприведенная оковчательная формулировка теоремы принадлежит Carathéodory [4]. Приведенное дальше простое ее доказательство см. Landau and Valiron [1].

Указанные два круга переходят друг в друга при преобразовании

$$w = iv_0 + \frac{u_0}{x_0}(z - iy_0).$$

Из чертежа видно, что

$$|w(z_1)| \leqslant OA + AB = |v_0| + \frac{u_0 b}{x_0},$$

где

$$b = a + \frac{(x_1 + a)^2 + (y_1 - y_0)^2}{x_1 - a},$$

или, если $x_1 > 2x_0$, $x_1 > |y_0|$, $|y_1| < kx_1$ $(k > 0)$, так как $a < x_0, x_1$,

$$b < x_1 + \frac{x_1^2 + (y_1 - y_0)^2}{x_1 - x_0} < x_1\left(1 + \frac{1 + \left(\frac{|y_1|}{x_1} + \frac{|y_0|}{x_1}\right)^2}{1 - \frac{x_0}{x_1}}\right) <$$

$$< x_1[3 + 2(k+1)^2] = x_1 K.$$

Следовательно, если $\left|\frac{y_1}{x_1}\right| < k$, то для достаточно больших значений x_1 имеет место соотношение

$$|w(z_1)| < |v_0| + K\frac{u_0}{x_0}x_1,$$

откуда при $x_1 \to \infty$ следует, что

$$\overline{\lim_{z_1 \to \infty}}\left|\frac{w(z_1)}{z_1}\right| \leqslant K\frac{u_0}{x_0}.$$

Этот результат имеет место независимо от того, как точка z_1 стремится к бесконечности, оставаясь внутри угла $\left|\frac{y}{x}\right| < k$. Так как $c = 0$, то отношение $\frac{u_0}{x_0}$ может быть сделано сколь угодно малым и, следовательно, отношение $\frac{w}{z}$ имеет при $z \to \infty$ угловое предельное значение, равное нулю.

Если $c > 0$, то предыдущие рассуждения применимы к функции $w - cz$, которая по определению величины c имеет неотрицательную действительную часть $u - cx$. Тогда внутри произвольно большого угла $\left|\frac{y}{x}\right| < k$ отношение $\frac{w - cz}{z} \to 0$ и, следовательно, $\frac{w}{z} \to c$.

Таким образом, если $w(z)$ — произвольная регулярная для $x > 0$ функция с неотрицательной действительной частью, то отношение $\frac{w}{z}$ при $\left|\frac{y}{x}\right| < k$ и $x \to \infty$ имеет действительный неотрицательный предел c, равный $\underline{\lim}\frac{u}{x}$ для $x > 0$. Следовательно,

$$u(z) \geqslant cx,$$

причем равенство может иметь место только тогда, когда $u(z) \equiv cx$ и, следовательно, $w(z) \equiv cx + i\mu$, где μ — действительный параметр.

Что касается производной $w'(z)$, то из интегральной формулы Коши для круга $|z-r| \leqslant pr$ при $0 < p < q < 1$ получается неравенство ($\zeta = r + qre^{i\vartheta}$):

$$|w'(z)| \leqslant \frac{qr}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|w(\zeta)|}{|\zeta - z|^2}\, d\vartheta.$$

Если $c = 0$, то, в силу предыдущего, для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{w(\zeta)}{\zeta}\right| < \varepsilon,$$

как только r становится больше некоторого числа r_ε, и так как $|\zeta| \leqslant (1+q)r$, то

$$|w'(z)| \leqslant \varepsilon \frac{q(1+q)r^2}{(qr - |z-r|)^2},$$

следовательно, для $|z-r| \leqslant pr$

$$|w'(z)| \leqslant \varepsilon \frac{q(1+q)}{(q-p)^2},$$

откуда видно, что $\lim w'(z) = 0$, если $z \to \infty$, оставаясь внутри угла $|\arg z| \leqslant \arcsin p$.

Если $c > 0$, то снова получается

$$w'(z) = c + (w' - c) = c + \frac{d}{dz}(w - cz) \to c,$$

как бы точка z ни стремилась внутри угла к бесконечности.

Если посредством преобразований (9) перейти обратно к единичному кругу, то после простых вычислений, которые мы предоставляем читателю, получится теорема Жюлиа в данной выше формулировке.

§ 5. Теоремы Ландау и Шоттки.

50. В качестве применения принципа гиперболической меры мы выведем обобщения теоремы Пикара, данные Ландау и Шоттки [1]).

Пусть $w(z)$ — функция, определенная в круге $|z| < R$. Если предположить, что функция $w(z)$ выпускает в круге $|z| < R$ значения $a_1, \ldots, a_p$, $p \geqslant 3$, т. е. что для всех точек этого круга $w(z) \neq a_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, p$), то с помощью принципа гиперболической меры можно вывести соотношение, которое дает верхнюю границу для R, выраженную через значения $w(0)$, $w'(0)$ и $a_1, \ldots, a_p$.

Так как по предположению $p \geqslant 3$, то универсальная поверхность наложения плоскости с выключенными точками $a_1, \ldots, a_p$ принадлежит к гиперболическому типу и, следовательно, если за

[1]) E. Landau [1], F. Schottky [1].

области G_z и G_w взять соответственно круг $|z|<R$ и область $w \neq a_\nu$ $(\nu=1, \ldots, p)$, то

$$\frac{d\sigma_w}{d\sigma_z} \leqslant 1, \tag{10}$$

где $d\sigma_z$ — гиперболическая длина:

$$d\sigma_z = \frac{R\,|dz|}{R^2-|z|^2}$$

элемента дуги dz, измеренная относительно круга $|z|<R$, а $d\sigma_w$ — гиперболическая длина ее образа, измеренная относительно области G_w. Если обозначить, как в гл. I, § 3, через $x=x(w; a_1, \ldots, a_p)$ функцию, отображающую конформно универсальную поверхность наложения G_w^∞ на единичный круг $|x|<1$ так, что точка w переходит в точку $x=0$, то $d\sigma_w = d\sigma_x = |dx|$, и из неравенства (10) следует

$$\left|\frac{dx}{dw}\right| \leqslant \frac{R}{R^2-|z|^2}\left|\frac{dz}{dw}\right|.$$

Следовательно,

$$|w'(z)| \leqslant \frac{R}{R^2-|z|^2}\,|\zeta'(0; a_1, \ldots, a_p)|,$$

где $\zeta(x; a_1, \ldots, a_p)$ означает функцию, обратную к $x(w; a_1, \ldots, a_p)$, т. е. автоморфную функцию, которая отображает единичный круг $|x|<1$ на поверхность G_w^∞ так, что точка $x=0$ переходит в точку $w=w(z)$.

51. В частности, для $z=0$ получается соотношение

$$R \leqslant \frac{|\zeta'(0; a_1, \ldots, a_p)|}{|w'(0)|},$$

которое содержит следующую *теорему Ландау*:

Если мероморфная для $|z|<R$ функция $w(z)$ имеет в окрестности нулевой точки разложение

$$w(z) = c_0 + c_1 z + \ldots \qquad (c_1 \neq 0)$$

и выпускает значения $a_1, \ldots, a_p$, $p \geqslant 3$, то

$$R \leqslant \frac{|\zeta'(0; a_1, \ldots, a_p)|}{|c_1|}, \tag{11}$$

где $\zeta(x; a_1, \ldots, a_p)$ — автоморфная функция, отображающая единичный круг $|x|<1$ на универсальную поверхность наложения плоскости с выключенными точками $a_1, \ldots, a_p$ так, что точка $x=0$ переходит в точку $w=c_0$.

Найденная верхняя граница зависит только от выпускаемых значений $a_1, \ldots, a_p$ и двух коэфициентов c_0, c_1. Она не может быть понижена; в самом деле, из принципа следует, что соотношение (11) переходит в равенство тогда и только тогда, когда функция $w(z)$ совпадает с функцией $\zeta\left(\frac{z}{R}; a_1, \ldots, a_p\right)$, отображающей круг

$|z| < R$ на поверхность G_w^∞; для этой функции

$$c_1 = w'(0) = \frac{1}{R}\zeta'(0;\ a_1, \ldots, a_p),$$

что, будучи подставлено в (11), приводит к тождеству.

Теорема Ландау содержит теорему Пикара как непосредственное следствие. В самом деле, если функция $w(z)$ мероморфна в каждой конечной точке плоскости z и a_1, a_2, a_3 — три произвольных значения, то из теоремы Ландау следует, что в круге $|z| < R$ функция $w(z)$ принимает по крайней мере одно из этих значений, коль скоро R будет больше, чем граница, стоящая в соотношении (11).

52. Примечание. Очевидно, что теорему Ландау можно было бы доказать прямо, не прибегая к принципу гиперболической меры, применяя лемму Шварца к функции $x(w(z);\ a_1, \ldots, a_p)$, которая в круге $|z| < R$ регулярна, ограничена и в точке $z = 0$ обращается в нуль. Это замечание позволяет также установить верхнюю границу для R в исключенном выше случае, когда $c_1 = w'(0) = 0$, для которого оценка (11) несправедлива. Если в окрестности нуля имеет место разложение

$$w(z) = c_0 + c_k z^k + \ldots \qquad (k \geqslant 1,\ c_k \neq 0),$$

то указанная выше сложная функция имеет в точке $z = 0$ нуль кратности k. Частное

$$\frac{x(w(z);\ a_1, \ldots, a_p)}{z^k} = x'(c_0;\ a_1, \ldots, a_p)\, c_k + \ldots$$

для $|z| < R$ регулярно и на окружности $|z| = R$ по абсолютной величине не превосходит R^{-k}. По принципу максимума абсолютное значение этого частного не превосходит той же границы и внутри круга $|z| < R$, откуда для $z = 0$ следует

$$R^k \leqslant \frac{|\zeta'(0; a_1, \ldots, a_p)|}{|c_k|}.$$

53. Путем интегрирования из теоремы Ландау [в форме (10)] получается теорема Шоттки. Если z — произвольно выбранная точка в круге $|z| \leqslant r$, то, по принципу гиперболической меры, значение $w(z)$ лежит в неевклидовом круге, описанном на поверхности G_w^∞ из точки $w(0) = c_0$ неевклидовым радиусом λ, равным неевклидову радиусу круга $|z| \leqslant r$, т. е.

$$\lambda = \int_0^r \frac{R\,dt}{R^2 - t^2} = \frac{1}{2}\log\frac{R+r}{R-r}.$$

Наименьшее расстояние от границы этого круга до p граничных точек $a_1, \ldots, a_p$ поверхности G_w выражается некоторым числом $d\left(\frac{r}{R},\ c_0; a_1, \ldots, a_p\right)$, зависящим только от частного $\frac{r}{R}$, от значе-

ния c_0 и от расположения граничных точек a_ν; при возрастании r величина d монотонно убывает. Чтобы было удобно учесть также и тот случай, когда одно из значений a_ν обращается в бесконечность, будем определять расстояние d в сферической метрике (для чего плоскость w нужно стереографически спроектировать на сферу w). Теорема Шоттки может быть тогда сформулирована следующим образом:

Если функция $w(z) = c_0 + c_1 z + \dots$ *регулярна в круге* $|z| < R$ *и выпускает там значения* $a_1, \dots, a_p$, $p \geqslant 3$, *то сферическое расстояние от точки* $w = w(z)$ *до выпускаемых значений имеет минимум*

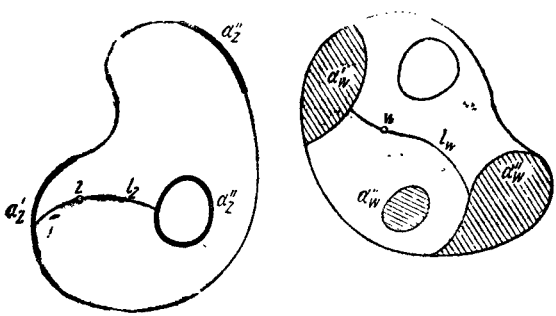
$$d\left(\frac{|z|}{R}, c_0; a_1, \dots, a_p\right),$$

зависящий только от величин, стоящих в скобке.

Получаемая предыдущими выкладками оценка для d не может быть улучшена.

§ 6. Применения к исследованию граничных и предельных значений ограниченных функций.

54. Мы снова возвращаемся к принципу гармонической меры в той его форме, в которой он был высказан в п. 33. Граничное множество α_z мы представляем себе теперь разложенным на два не имеющих общих точек подмножества α_z' и α_z'', состоящих из конечного числа жордановых дуг. Аналогично разобьем A_w на два не имеющих общих точек подмножества A_w' и A_w'', ограниченных конечным числом жордановых дуг α_w' и α_w''.



Фиг. 9.

Предположим далее, что функция $w(z)$, значения которой для z изменяющегося в G_z попадают в G_w, непрерывна на α_z, притом так, что ее граничные значения на α_z', попадают на множество A_w', а граничные значения на α_z'' попадают на множество A_w''. Если теперь точка z, будет непрерывно описывать в G_z дугу l_z, соединяющую множества α_z' и α_z'', то образ этой точки $w(z)$ будет непрерывно описывать в G_w дугу l_w, соединяющую множества α_w' и α_w'' (фиг. 9). При этом, согласно нашему принципу, каждый раз, когда точка $w(z)$ будет находиться вне множеств A_w' и A_w'', *гармоническая мера дуг* α_w', α_w'', *а также их суммы* $\alpha_w = \alpha_w' + \alpha_w''$,

измеренная в этой точке относительно области G_w^*, получающейся после удаления из G_w соответственно множеств A_w', A_w'' или $A_w = A_w' + A_w''$ *), *будет соответственно не меньше, чем гармоническая мера дуг* α_z', α_z'' и $\alpha_z = \alpha_z' + \alpha_z''$ [1]).

Обозначим через $m(l_z)$ минимум гармонической меры $\omega(z, \alpha_z, G_z)$ на дуге l_z, соединяющей множества α_z' и α_z'', не выходя из G_z; очевидно, что $m(l_z) \leqslant 1$ и что равенство имеет место только тогда, когда α_z составляет всю границу Γ_z области G_z. Пусть верхняя граница этих минимумов будет m_z:

$$m_z = \sup m(l_z).$$

Аналогично, пусть l_w — дуга, проходящая внутри G_w и соединяющая множества A_w' и A_w''. Далее, пусть G_w^* — произвольная связная подобласть области G_w, содержащая дугу l_w. Обозначим через $m(l_w)$ минимум гармонической меры $\omega(w, \alpha_w, G_w^*)$ на дуге l_w и через m_w — верхнюю границу этих минимумов:

$$m_w = \sup m(l_w).$$

Тогда, очевидно, $0 < m_w \leqslant 1$.

Согласно принципу гармонической меры, независимо от выбора дуги l_z, будет иметь место соотношение

$$m(l_z) \leqslant m_w,$$

и так как при подходящем выборе дуги l_z левая часть будет сколь угодно мало отличаться от верхней границы m_z, то

$$m_z \leqslant m_w, \tag{12}$$

Это соотношение заключает в себе замечательное ограничение на конфигурации, образованное множествами α', α'' и областью G. Именно, если α_z' и α_z'' в G_z лежат относительно „близко“ друг от друга, так что их можно соединить дугой, на которой гармоническая мера $\omega(z, \alpha_z, G_z)$ мало отклоняется от 1, то и множества α_w' и α_w'' не могут быть удалены слишком „далеко“ друг от друга относительно области G_w^* в соответствии с соотношением (12).

55. В следующей главе мы займемся более подробным изучением указанного выше ограничения на конфигурацию (α', α'', G) в некоторых частных случаях. Здесь мы рассмотрим лишь один особенно простой случай, который приведет нас к интересным следствиям. Если предположить, что множества дуг α_z' и α_z'' имеют по крайней мере по одной дуге с общим концом P_z, который может тогда быть точкой разрыва для функции $w(z)$, то в окрестности этой точки гармоническая мера множества $\alpha_z = \alpha_z' + \alpha_z''$ будет сколь угодно мало отклоняться от 1, откуда следует, что верхняя граница

*) Так как $w(z)$ есть точка G_w, по предположению не принадлежащая множествам A_w' и A_w'', то каждая из трех областей G_w^*, получающихся исключением из G_w соответственно множеств A_w', A_w'' или $A_w' + A_w''$, содержит точку $w(z)$.

[1]) См. R. Nevanlinna [12].

$m_z = 1$. Но тогда, в силу вышеизложенного, и $m_w = 1$. Последнее, очевидно, возможно только в одном из следующих случаев:

1) Расстояние между множествами α_w' и α_w'' равно нулю [1]).

2) Множества α_w' и α_w'' ограничивают некоторую подобласть G_w^* области G_w, не имеющую никаких других граничных дуг кроме этих.

Следовательно, если область G_w имеет еще другие части границы, то одно из множеств (например, α_w') отделено от этих частей границы другим множеством (α_w'') *). Поэтому при сделанных предположениях (именно, что расстояние между множествами α_z' и α_z'' равно нулю) конфигурация, подобная приведенной на фиг. 9, где множества α_w' и α_w'' лежат „изолированно одно относительно другого", невозможна.

Чтобы привести пример, когда имеет место второй случай, возьмем функцию $w(z) = e^z$ $(z = x + iy)$; за область G_z возьмем полосу $-1 < x < 1$ с разрезом вдоль положительной мнимой полуоси, за α_z' примем прямую $x = -1$, а за α_z'' — указанную полуось $(x = 0,\ y \geqslant 0)$. Тогда за область G_w и множества α_w', α_w'' можно выбрать соответственно кольцо $\frac{1}{e} < |w| < e$, окружность $|w| = \frac{1}{e}$ и окружность $|w| = 1$. В соответствии со вторым случаем множества α_w' и α_w'' действительно ограничивают некоторую область G_w^*, а именно кольцо $\frac{1}{e} < |w| < 1$ (относительно которой, следовательно, гармоническая мера множества $\alpha_w = \alpha_w' + \alpha_w''$ тождественно равна 1); далее, множество α_w'' (окружность $|w| = 1$) отделяет множество α_w' (окружность $|w| = \frac{1}{e}$) от остальной части границы области (т. е. от окружности $|w| = e$).

56. Для применения полученного результата рассмотрим область G, граница которой содержит две жордановы дуги α_1 и α_2, имеющие общий конец в некоторой точке P. Пусть в области G определена ограниченная аналитическая функция $w(z)$ $(|w| < M)$. Предположим, что $w(z)$ непрерывна во внутренних точках дуг α_1 и α_2, и обозначим через H_1 и H_2 ее *предельные множества* для $z \to P$ на дуге α_1, соответственно на дуге α_2 [2]).

Согласно нашей теореме множества H_1 и H_2 не могут лежать „изолированно одно относительно другого" в круге $|w| < M$. Поэтому, если они не имеют общих точек, то одно из них должно окружать другое, отделяя его от окружности $|w| = M$. В частности,

---

[1]) Чтобы исключить особое положение бесконечно удаленной точки, рекомендуется расстояния измерять на сфере.

*) Может случиться, что каждое из множеств α_w', α_w'' отделяет другое от части границы области G_w.

[2]) H_ν $(\nu = 1, 2)$ состоит, следовательно, из совокупности точек w, в окрестности которых лежат значения функции $w(z)$, принимаемые ею в окрестности точки P на дуге α_ν. Так как $w(z)$ непрерывна около P, то, согласно этому определению, H_ν есть или точка или континуум.

таким образом исключается возможность того, чтобы каждое из них одновременно стягивалось в две различные точки, откуда становится очевидной следующая важная теорема Линделофа о сходимости [1]):

Если функция, однозначная и аналитическая в окрестности особой точки P, стремится при $z \to P$ вдоль двух оканчивающихся в точке P жордановых дуг к двум различным предельным значениям, то эта функция в окрестности точки P не может быть ограничена.

57. Тот факт, что универсальную поверхность наложения плоскости с тремя выключенными точками можно конформно отобразить на единичный круг, позволяет обобщить предыдущие теоремы на однозначные функции, выпускающие в заданной односвязной области G_z три значения a_1, a_2, a_3. Предположим, что подобная функция $w(z)$ принимает на граничных множествах α_z' и α_z'' значения, расположенные на некоторых множествах G_w' и G_w'', ограниченных жордановыми дугами α_w' соответственно α_w'' и являющихся подмножествами плоскости с выключенными точками a_1, a_2, a_3. Соединяя функцию с униформизирующей функцией $x = x(w; a_1, a_2, a_3)$, мы получим, исходя из некоторого фиксированного начального элемента, функцию

$$\varphi(z) \equiv x(w(z); a_1, a_2, a_3),$$

которая в области G_z неограниченно продолжима и, следовательно, по теореме о монодромии в этой области однозначна.

Если теперь дуги α_w' и α_w'' лежат „изолированно одна относительно другой", т. е. если существует замкнутая кривая, проходящая через какую-нибудь граничную точку α_ν, отделяющая их друг от друга, то функция $x = \varphi(z)$, значения которой лежат в круге $|x| < 1$, принимает на множествах α_z' и α_z'' граничные значения, расположенные на двух множествах α_x' и α_x'', вполне определенных среди счетного числа образов дуг α_w' и α_w'' и также лежащих „изолированно одно относительно другого". В том случае, когда расстояние между множествами α_z' и α_z'' равно нулю, последнее, в силу вышеизложенного, невозможно.

Отсюда, между прочим, следует, что функция, однозначная и аналитическая в угле между двумя жордановыми дугами, оканчивающимися в некоторой точке P и имеющая при $z \to P$ вдоль этих дуг различные предельные значения, не только, как это было показано выше, принимает в окрестности точки P сколь угодно большие значения, но вообще принимает каждое значение, за исключением самое большее двух. С другой стороны, два исключительных значения, при сделанных выше предположениях, действительно возможны, как показывает все тот же пример показательной функции e^z, которая на положительной и отрицательной действительной оси стремится при $z \to \infty$ к двум различным предельным значениям 0 и ∞, являющимся одновременно исключительными значениями для этой функции.

---

[1]) См. E. Lindelöf [3].

IV. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НЕЕВКЛИДОВЫМИ И ЕВКЛИДОВЫМИ МЕРООПРЕДЕЛЕНИЯМИ.

§ 1. Общие замечания.

58. Применимость в теории функций различных неевклидовых мероопределений (гармоническая мера, гиперболическая мера) основана на том, что эти меры являются теоретико-функциональными инвариантами (так мы называем величины, инвариантные относительно группы конформных отображений). Вместе с тем в различных комплексах вопросов оказывается, что известные явления могут быть резко разграничены именно при применении понятий неевклидовой геометрии; так, например, это часто имеет место при изучении различных экстремальных свойств. Таким образом, введение подобных мероопределений целиком вытекает из самого существа дела, и поэтому представляется немаловажным систематически построить теорию этих мероопределений, не задаваясь при этом тотчас же вопросом об их отношении к обычным мерам (евклидовой или сферической).

Однако очевидно, что принципы, развитые в предыдущей главе, только тогда смогут быть полностью использованы, когда мы в известной степени овладеем соотношениями между неевклидовыми и обычными мерами. В конкретных проблемах, входящих в только что разобранный круг вопросов, встречаются обычно более или менее ясные указания о евклидовых меросоотношениях заданных геометрических конфигураций (например, G_z, α_z, z), и общие принципы в этих случаях могут быть применены только тогда, когда мы умеем вывести неевклидовы меросоотношения для отображения и наоборот.

В простейших случаях взаимоотношения между различными мерами известны непосредственно на основании их определения. Так, например, с одной стороны, гармоническая мера дуги единичной окружности, измеренная относительно единичного круга в нулевой точке, есть не что иное, как деленная на 2π величина соответствующего этой дуге центрального угла, и, с другой стороны, гиперболическая длина элемента дуги, выходящего из нулевой точки, равна, относительно того же круга, евклидовой его длине. В более общих случаях, когда соотношения между различными мерами нельзя выразить точно с помощью элементарных функций, следует заметить, что проблема может быть сведена к случаю единичного круга, для чего достаточно конформно отобразить соответствующие области или, если они многосвязны, их универсальные поверхности наложения на единичный круг. При этом гармоническая и гиперболическая меры сохраняются; напротив, евклидовы меросоотношения изменяются. Таким образом, видно, что проблема настоящей главы по существу тождественна с вопросом об *искажении*, которое испытывает область внутри и на границе при конформном ее отображении на соответ-

ствующую нормальную область (например, на единичный круг). Теоремы, о которых нам придется дальше говорить, можно истолковать как такие высказывания об искажении. Однако, мы не изложим полностью теорию искажения как самостоятельное учение, а возьмем из нее лишь то, что особенно существенно с точки зрения выявления соотношений, существующих между различными мероопределениями.

§ 2. Принцип Карлемана расширения области.

59. Во многих случаях гармоническая мера граничной дуги может быть оценена с достаточной точностью посредством нижеследующей теоремы, которую впервые использовал Монтель (Montel) и Карлеман (Carleman) в своей известной работе об асимптотических значениях целых функций и которая потом применялась многими другими авторами [1]).

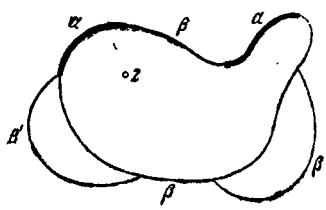
Принцип расширения области. *Гармоническая мера* $\omega(z, \alpha, G)$ *увеличивается, если расширить область* G *за дополнительную к* α *часть* β *границы* $\Gamma = \alpha + \beta$ *этой области.*

Это означает следующее: область G заменяется большей областью G', содержащей G как часть и граница Γ' которой состоит кроме заданных дуг α еще из известных дуг β', которые, следовательно, или полностью расположены вне G или частично совпадают с дугами β (фиг. 10). *Тогда для всех точек* z, *лежащих в* G,

$$\omega(z, \alpha, G) \leqslant \omega(z, \alpha, G'), \tag{1}$$

причем равенство имеет место только для $G \equiv G'$.

Для доказательства образуем разность $u(z) = \omega(z, \alpha, G') - \omega(z, \alpha, G)$, которая является в G регулярной ограниченной гармонической функцией. В каждой внутренней точке дуг α (число которых предполагается конечным) стоящие справа гармонические меры равны 1 и поэтому $u = 0$. В каждой внутренней точке дуг β $\omega(z, \alpha, G) = 0$, в то время как $\omega(z, \alpha, G')$ во всяком случае неотрицательно и, следовательно, $u \geqslant 0$. Так как функция u в окрестностях остальных граничных точек (концы дуг α и β) ограничена, то из принципа минимума следует, что соотношение $u \geqslant 0$ и, следовательно, утверждение (1) справедливы в каждой точке области G. Равенство для одной внутренней точки области G имеет место только тогда, когда $u \equiv 0$. Так как это тогда справедливо в частности и для дуг β, где $\omega(z, \alpha, G) = 0$, то там $\omega(z, \alpha, G') = 0$, что, очевидно, возможно только тогда, когда дуги β' и β, тем самым



Фиг. 10.

[1]) P. Montel [3], T. Carleman [1], K. Löwner [1], М. Лаврентьев [4], [5], A. Ostrowski [3], S. Warschawski [1] и др.

и области G' и G полностью совпадают. Этим доказательство принципа Карлемана закончено.

Так как

$$\omega(z, \alpha, G) + \omega(z, \beta, G) = 1,$$

то из этого принципа далее следует, что

$$\omega(z, \beta, G) \geqslant \omega(z, \beta', G'). \qquad (1')$$

Принцип Карлемана дает, таким образом, средство для оценки гармонической меры как сверху, так и снизу.

На основании замечаний, сделанных в § 1, предыдущий результат может быть интерпретирован следующим образом: если G и G' или, в случае их многосвязности, их универсальные поверхности наложения отображаются конформно на единичный круг так, что одна и та же точка этих областей переходит в нулевую точку, то в первом случае (область G) дугам α будет соответствовать на единичной окружности множество меньшей меры, чем во втором случае (область G').

60. Значение принципа Карлемана основано на том, что он часто позволяет заменять сложные конфигурации (G, α, z) более простыми (G', α, z), для которых непосредственно удается овладеть численными соотношениями между гармонической мерой ω и евклидовыми свойствами конфигурации (G', α, z) и тем самым установить мажоранты и миноранты гармонической меры.

Впрочем, прямое применение этих гармонических мажорант и минорант позволяет во многих случаях элементарно доказать общие теоремы, не привлекая принцип гармонической меры в его наиболее общей форме, в которой его нельзя рассматривать как „элементарный", так как он предполагает известными весьма глубокие фундаментальные теоремы относительно конформных отображений и соответствия границ при таких отображениях.

Чтобы пояснить это на примере, мы докажем, используя ход рассуждений Карлемана, нижеследующую теорему о предельных значениях ограниченных функций, которая с успехом может быть использована при доказательстве основной теоремы о соответствии границ при конформном отображении:

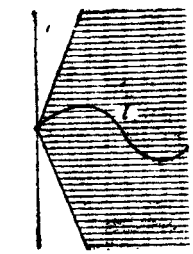
Пусть $w(z)$ — регулярная и ограниченная в правой полуплоскости функция и l — жорданова дуга, расположенная в этой полуплоскости и оканчивающаяся в нулевой точке $z = 0$ (см. фиг. 11 на стр. 72). *Тогда, если $w(z)$ стремится к определенному предельному значению a, когда $z \to 0$ вдоль l, то*

$$\lim_{z \to 0} w(z) = a$$

равномерно в каждом угле

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta \quad (\delta > 0).$$

Доказательство. В силу сделанных предположений мы можем для произвольно заданного ε $(0<\varepsilon<1)$ найти такое число $r>0$, что в каждой точке кривой l, лежащей в круге $|z|\leqslant r$, имеет место неравенство $|w-a|<\varepsilon$. Будем двигаться по кривой l от нулевой точки до первой точки P_r ее пересечения с окружностью $|z|=r$; определяемая этим часть l_r дуги l равбивает полукруг $D_r(|z|\leqslant r,\ s\geqslant 0;\ z=s+it)$ на две области D_r' и D_r'', граничащие соответственно с отрезками $(0, ir)$, $(0, -ir)$ мнимой оси.



Фиг. 11.

Пусть теперь $\omega(z, l_r, D_r')$ — гармоническая мера дуги l_r относительно области D_r', измеренная во внутренней точке z этой области. Тогда по теореме о двух константах[1]) (ср. стр. 48)

$$\log|w(z)-a|<\omega(z, l_r, D_r')\log\varepsilon. \qquad (2)$$

Пользуясь принципом Карлемана, дадим оценку снизу для гармонической меры, стоящей в правой части неравенства. В качестве миноранты получается гармоническая мера части границы полукруга D_r, составленной из отрезка $s_r(0, -ir)$ мнимой оси и дуги $(-ir, P_r)$ окружности $|z|=r$. Эта мера только уменьшится, если откинуть последнюю дугу, и тем самым

$$\omega(z, l_r, D_r')>\omega(z, s_r, D_r). \qquad (3)$$

Но для последней гармонической меры легко найти явное выражение. Для наших целей достаточно, однако, заметить следующее: если $u(z)$ есть гармоническая мера радиуса $(0, -1)$ полукруга D_r с $r=1$, то, очевидно,

$$\omega(z, s_r, D_r)=u\left(\frac{z}{r}\right).$$

Но в круговом секторе $|z|\leqslant\frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z<\frac{\pi}{2}-\delta$ функция $u(z)$ имеет положительный минимум λ_δ, зависящий только от δ; следовательно, и для точек z из сектора $S_r\left(|z|\leqslant\frac{r}{2},\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta\right)$

$$u\left(\frac{z}{r}\right)\geqslant\lambda_\delta$$

и из формул (2) и (3) следует, что

$$\log|w(z)-a|<\lambda_\delta\log\varepsilon$$

для каждого значения z, лежащего в пересечении сектора S_r с областью D_r'.

---

[1]) Так как w по предположению ограничена, то, не нарушая общности, можно считать, что $|w-a|<1$.

Тот же самый результат получается для пересечения сектора: $|z|\leqslant\frac{r}{2}$, $-\frac{\pi}{2}+\delta\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$ с областью D_r'' и, следовательно, окончательно

$$|w(z)-a|<\varepsilon^{\lambda\delta}$$

для $|z|\leqslant\frac{r}{2}$, $|\arg z|\leqslant\frac{\pi}{2}-\delta$, откуда следует утверждение о равномерной сходимости.

Применяя при этом доказательстве принцип гармонической меры, мы совершили обходный путь и, в частности, использовали не совсем элементарное обстоятельство существования гармонической меры жордановой дуги l_r. Как выше было замечено, этот обходный путь можно избежать, применяя принцип Карлемана прямо для построения элементарной гармонической мажоранты. Доказательство представляется тогда в следующем простом виде:

Функция

$$u\left(\frac{z}{r}\right)\log\varepsilon-\log|w(z)-a| \tag{4}$$

в области D_r' гармонична с точностью до нулей функции $w-a$, в которых она обращается в $+\infty$. Далее, вблизи граничных точек этой области она неотрицательна, за исключением самое большее двух точек разрыва (O и P_r) функции $u\left(\frac{z}{r}\right)$. В самом деле, на l_r имеем: $0<u<1$ и $\log|w-a|<\log\varepsilon$, следовательно, разность (4) положительна; на остальной части границы области D_r' функция u обращается в нуль, в то время как $\log|w-a|$ имеет здесь отрицательную верхнюю границу.

Так как, наконец, вблизи двух точек разрыва функции u разность (4) во всяком случае ограничена снизу, то, согласно принципу минимума, эта разность неотрицательна и в каждой внутренней точке области D_r'. Доказательство доводится далее до конца так же, как это было сделано выше.

61. В качестве второго применения предыдущего принципа рассмотрим общую проблему, впервые поставленную и исследованную Карлеманом (там же) и затем особенно много изучавшуюся Мию (Milloux) [1], почему ее часто называют „проблемой Мию". Эта проблема, имеющая значение для различных приложений, будет нас еще занимать и в следующих параграфах этой главы.

Проблема Карлемана-Мню. *Вокруг граничной или внешней точки ζ односвязной области G, ограниченной конечным числом жордановых дуг, опишем круг $|z-\zeta|\leqslant R$ и обозначим через α лежащее внутри этого круга граничное множество области G и через G_R — пересечение области G с этим кругом**).

*) Если пересечение состоит из нескольких областей, то через G_R мы обозначим ту, для которой ζ является граничной точкой.

Требуется установить нижнюю границу для гармонической меры

$$\omega(z, \alpha, G_R),$$

зависящую только от R и от расстояния $|z-\zeta|$.

Для решения[1]) целесообразно преобразовать область G посредством функции $t=\log(\zeta-z)$ в однолистную область, расположенную в плоскости $t=\sigma+i\tau$ и имеющую бесконечно удаленную точку $t=\infty$ в качестве внешней или граничной точки. Пусть D_σ означает образ G_R и Θ_σ — граничное множество области D_σ, лежащее на прямой $\sigma=\log R$. Требуется оценить снизу гармоническую меру образа, множества α или, что приводится к тому же самому, оценить сверху гармоническую меру его дополнения, т. е. как раз множества Θ_σ относительно области D_σ.

Для этой цели заменим область D_σ полуплоскостью $\sigma<\log R$*); в силу принципа расширения области гармоническая мера множества дуг Θ_σ при этом увеличится и станет просто равной деленной на π сумме углов, под которыми это множество видно из точки $t_0=\log z$ (ср. п. 39). Далее простым рассуждением, которое мы оставляем читателю, легко убедиться, что эта сумма углов достигает, при заданной сумме длин $\Theta(\sigma)$ дуг Θ_σ ($\sigma=\log R$), своего максимума тогда, когда Θ_σ состоит из одного единственного сегмента, расположенного симметрично относительно прямой $\tau=\tau_0$ ($t_0=\sigma_0+i\tau_0$). Соответствующий максимальный угол равен тогда

$$2\operatorname{arctg}\frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma-\sigma_0)},$$

и для гармонической меры множества Θ_σ мы получаем, следовательно, верхнюю границу

$$\omega(t_0, \Theta_\sigma, D_\sigma)\leqslant\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma-\sigma_0)}.$$

62. В силу своей большой применимости этот результат заслуживает быть высказанным как самостоятельное предложение.

Теорема Карлемана. *Пусть D — односвязная однолистная область, расположенная в плоскости $t=\sigma+i\tau$. Пусть далее $\Theta(\sigma)$ означает сумму длин сегментов Θ_σ прямой $\Re(t)=\sigma$, лежащих внутри или на границе области D, и D_σ означает часть области D, лежащую слева от этой прямой.*

При этих предположениях для гармонической меры множества Θ_σ имеет место оценка

$$\omega(t_0, \Theta_\sigma, D_\sigma)\leqslant\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma-\sigma_0)}, \tag{5}$$

справедливая для каждого $t_0=\sigma_0+i\tau_0$, $\sigma_0<\sigma$.

---

[1]) См. T. Carleman [1].

*) К более точной оценке мы придем, заменяя D_σ полуполосой $0<\tau<2\pi$, $\sigma<0$ и отображая затем полуполосу на полуплоскость.

Заметим еще, что это соотношение остается a fortiori справедливым, если слева заменить D_σ на D и дуги Θ_σ заменить частями границы области D, лежащими справа от них.

Из предыдущего вывода следует также, что при сделанных предположениях данная в (5) граница не может быть понижена. В самом деле, соотношение (5) переходит в равенство, если за область D взять полуплоскость $\Re(t) \leqslant \sigma$, а за Θ_σ выбрать сегмент длины $\Theta(\sigma)$, лежащий на границе $\Re(t) = \sigma$ симметрично относительно граничной прямой $\tau = \tau_0$.

63. Теорема Карлемана содержит следующую теорему об искажении границ при конформном отображении: если область D отобразить конформно на единичный круг так, чтобы точка $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ перешла в нулевую точку, то граничное множество Θ_σ перейдет в множество дуг на единичной окружности, сумма длин которых самое большее равна

$$4 \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma_0)}.$$

В случае *выпуклой* области D этот результат допускает интересное применение. Если α — произвольная граничная дуга такой области, то для $\omega(t, \alpha, D)$ получается верхняя граница $\frac{\gamma(t, \alpha)}{\pi}$, где γ — величина угла, под которым видна дуга α из точки t. Следовательно:

Если выпуклую область D отобразить конформно на единичный круг так, чтобы внутренняя точка P области перешла в нулевую точку, то граничной дуге, видной из точки P под углом γ, на единичной окружности будет отвечать дуга, длина которой меньше 2γ, за исключением случая, когда D есть полуплоскость, — в этом случае длина соответствующей дуги равна 2γ.

Так как эта теорема имеет место, какой бы малой дуга α ни была выбрана, то она справедлива и для дифференциала дуги. Если точку P принять за начало полярной системы координат (r, φ), в которой выпуклая граничная кривая имеет уравнение $r = r(\varphi)$, то, следовательно, $d\omega \leqslant \frac{1}{\pi} d\varphi$. Если теперь представить себе, что на границе задана последовательность неотрицательных граничных значений $u(r, \varphi)$, то функция, гармоническая в D, заданная этими граничными значениями, определяется по формуле (ср. п. 22)

$$u(P) = \int u(r, \varphi)\, d\omega$$

и, следовательно,

$$u(P) \leqslant \frac{1}{\pi} \int u(r, \varphi)\, d\varphi.$$

Полученная оценка, в силу ее простоты и точности, весьма удобна для исследования поведения гармонической функции в окрестности особой граничной точки выпуклой области.

64. Вернемся обратно к карлемановскому неравенству (5) и посмотрим, что из него можно вывести относительно проблемы Карлемана-Мию (п. 61). Если посредством преобразования $t = \log(\zeta - z)$ перейти снова к плоскости z, то для стоящей в (5) мажоранте гармонической меры получится выражение ($\log R = \sigma$, $\log r = \sigma_0$)

$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Theta(R)}{2\log\frac{R}{r}},$$

где $R\Theta(R)$ означает сумму длин дуг окружности $|\zeta - z| = R$, входящих в границу области G_R. Мы приходим, таким образом, к следующему результату:

Теорема 1. *Пусть G — односвязная область, ограниченная конечным числом жордановых дуг и не содержащая внутри точку $z = 0$. Если длина части окружности $|z| = R$, лежащей в G, равна $R\Theta(R)$, то гармоническая мера части β границы области G, лежащей вне круга $|z| < R$, удовлетворяет в каждой точке z, лежащей в пересечении области G с этим кругом, неравенству*

$$\omega(z, \beta, G) \leqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Theta(R)}{2\log\frac{R}{|z|}}. \tag{6}$$

Тем самым для гармонической меры дополнительной части α границы области G, лежащей в круге $|z| < R$, получается оценка

$$\omega(z, \alpha, G) \geqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\log\frac{R}{|z|}}{\Theta(R)}. \tag{6'}$$

Так как $\Theta \leqslant 2\pi$, то соотношения (6) и (6′) будут справедливы a fortiori, если Θ заменить через 2π.

Значение полученного результата заключается в том, что он указывает для соответствующих гармонических мер границы, которые для $|z| \leqslant r < R$ определяются одним только отношением $\frac{r}{R}$, независимо от вида граничной кривой области G и выбора точки z в области G_R.

В отличие от (5) соотношения (6) и (6′) не дают наилучших границ. В самом деле, если перенести соответствующий (5) экстремальный случай на плоскость $z = e^t$, то мы придем к гармонической мере, равной выражению для верхней границы из теоремы 1, но эта гармоническая мера будет однозначна только на бесконечно листном круге $0 < |z| < R$, соответствующем полуплоскости $\Re(t) < \sigma$, а не на *однолистной* области (как это предполагается в теореме 1).

65. Применением теоремы 1 как частный случай общей теоремы о двух константах (ср. п. 36) получается [1])

[1]) Читателю предлагается вывести нижеследующую теорему как непосредственное следствие из принципа минимума, рассматривая гармоническую функцию $\log|w|$ и применяя построенную выше миноранту. Такое

Теорема 2. *Пусть $w(z)$ — регулярная и ограниченная функция ($|w| \leqslant 1$), определенная в области G указанного в теореме 1 вида. Пусть далее в каждой граничной точке области G, лежащей в круге $|z| \leqslant R$, выполняется условие*

$$\overline{\lim}\,|w(z)| \leqslant m \qquad (0 < m < 1).$$

Тогда в каждой точке z области G имеет место соотношение

$$|w(z)| \leqslant m^{\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\log\frac{R}{|z|}}{\pi}}.$$

В качестве примера на применение этой теоремы мы докажем следующую теорему Линделофа [1]) о предельных значениях, играющую важную роль в теории соответствия границ при конформном отображении.

Теорема Линделофа. *Пусть G — область, ограниченная одной жордановой кривой, γ — граничная дуга области G, ζ — внутренняя точка дуги γ. Пусть далее $w(z)$ — определенная в G регулярная и ограниченная функция, непрерывная всюду на γ, за исключением быть может точки ζ. Тогда, если при приближении граничной точка ζ' справа и слева к точке ζ функция $w(z)$ стремится к одному и тому же предельному значению a, то $w(z)$ непрерывна и в точке $z = \zeta$, т. е. $w(z) \to a$, как бы точка z в области G ни приближалась к граничной точке ζ.*

Не уменьшая общности, можно считать, что $|w(z) - a| < 1$ во всей области G. В силу сделанных предположений для всякого сколь угодно малого значения ε $(0 < \varepsilon < 1)$ можно найти такое число $r > 0$, что для всех граничных точек ζ', удовлетворяющих условию $0 < |\zeta - \zeta'| < 2r$, имеет место соотношение $|w(\zeta') - a| < \varepsilon$. Тогда по (6′) для всякой точки z области G, лежащей в круге $|z - \zeta| < r$, выполняется неравенство

$$|w(z) - a| < \varepsilon^{\delta},$$

где

$$\delta = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\log 2}{\pi},$$

откуда следует утверждавшаяся равномерная сходимость.

66. Следуя способу, также восходящему к Карлеману, можно так преобразовать данные в предыдущих теоремах оценки, чтобы они учитывали не только сумму длин одной системы сечений $\mathfrak{R}(t) = \sigma$ или $|z| = R$, соответственно областей D и G, а известным образом учитывали *среднюю* длину таких систем сечений.

прямое доказательство имеет то преимущество, что показывает справедливость теоремы при отсутствии каких-либо ограничений относительно границы области.

[1]) E. Lindelöf [3].

Если через Θ_σ обозначить систему сечений $\Re(t) = \sigma$ области D и через $\Theta(\sigma)$ — сумму их длин, то в силу (5), для $\sigma' < \sigma$ будет выполняться неравенство

$$\omega(\sigma' + i\tau, \Theta_{\sigma'}, D_\sigma) \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')},$$

где D_σ означает часть области D, лежащую слева от Θ_σ [1]). Следовательно, для $\Re(t) = \sigma'$ выражение

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} \omega(t, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'})$$

самое меньшее равно $\omega(t, \Theta_\sigma, D_\sigma)$, так как второй множитель здесь обращается в 1. На остальной части границы области $D_{\sigma'}$ обе гармонические меры исчезают в силу их определения, откуда, на основании принципа максимума, следует, что

$$\omega(t_0, \Theta_\sigma, D_\sigma) \leqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\Theta(\sigma)}{2(\sigma - \sigma')} \omega(t_0, \Theta_{\sigma'}, D_{\sigma'}),$$

как бы точка t_0 ни выбиралась в области $D_{\sigma'}$. Если писать ради краткости $\omega(t_0, \sigma)$ вместо $\omega(t_0, \Theta_\sigma, D_\sigma)$, то, следовательно,

$$\omega(t_0, \sigma) - \omega(t_0, \sigma') \leqslant -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(\sigma - \sigma_0)}{\Theta(\sigma)} \omega(t_0, \sigma').$$

Отсюда становится очевидным, что $\omega(t_0, \sigma)$ является монотонно убывающей функцией от σ [2]) и как таковая имеет почти для всех значений σ вполне определенную производную. Деля обе части предыдущего неравенства на $\sigma - \sigma'$ и совершая предельный переход $\sigma' \to \sigma$, мы для этой производной получим оценку

$$\frac{d\omega(t_0, \sigma)}{d\sigma} \leqslant -\frac{4}{\pi\Theta(\sigma)} \omega(t_0, \sigma),$$

которая справедлива и для тех значений σ, для которых не существует определенная производная, если под $\frac{d\omega}{d\sigma}$ понимать тогда верхнюю производную слева. Интегрируя это дифференциальное соотношение между пределами σ_1 и σ_2, мы придем к следующей теореме:

Теорема 3. *В предположениях п. 62, для* $t_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, имеем

$$\omega(t_0, \Theta_{\sigma_2}, D_{\sigma_2}) \leqslant \omega(t_0, \Theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) e^{-\frac{4}{\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\Theta(\sigma)}}, \qquad (7)$$

---

[1]) Может случиться, что D_σ состоит из нескольких отдельных связных подобластей. Если t — точка области, то под D_σ будем понимать всегда ту подобласть, которая содержит эту точку.

[2]) Это, впрочем, следует уже непосредственно из принципа расширения области.

как бы ни выбирались числа $\sigma_0 \leqslant \sigma_1 < \sigma_2$. *При этом* D_σ *означает подобласть области* D, *содержащую точку* $t = t_0$ *и лежащую слева от прямой* $\Re(t) = \sigma$.

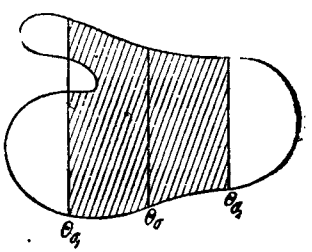
Чтобы испытать степень точности этой теоремы, возьмем за D полосу $|\tau| < \frac{\pi}{2}$. Простое вычисление дает для максимального значения гармонической меры ω отрезка $|\tau| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\Re(t) = \sigma$, измеренной относительно полуполосы D_σ на сечении $\Re(t) = \sigma_0$, $|\tau| < \frac{\pi}{2}$, значение

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{(\sigma_0 - \sigma)}.$$

С другой стороны, общее соотношение (7) для данного случая, когда $\sigma_2 = \sigma$, $\sigma_0 = \sigma_1$ и, следовательно, $\omega(t_0, \Theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) = 1$, дает верхнюю границу

$$\omega \leqslant e^{\frac{4}{\pi^2}(\sigma_0 - \sigma)},$$

порядок величины которой для больших значений $\sigma - \sigma_0$ является правильным. Сравнение коэфициентов, стоящих в показателях, наводит на предположение, что множитель $-\frac{4}{\pi}$, стоящий перед интегралом справа в соотношении (7), можно заменить более точным $-\pi$. Что это действительно так, будет показано в § 4 этой главы, где мы вернемся к вопросу об искажении границы при конформном отображении.



Фиг. 12.

Заметим еще, что асимптотически, т. е. при $\sigma \to \infty$, содержащаяся в (5) оценка значительно менее точна, чем (7). В самом деле, для ω в вышерассмотренном примере получаем согласно (5) верхнюю границу

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2(\sigma - \sigma_0)},$$

которая при $\sigma \to \infty$ убывает, как $\frac{1}{\sigma}$, в то время как правильный порядок равен $e^{-\sigma}$.

67. Возвращаясь обратно к соотношению (7), мы замечаем, что аналогичное неравенство имеет место *справа* от сечений Θ_{σ_2}, т. е. (7) остается в силе, когда $\sigma_2 < \sigma_1 < \sigma_0$, и D_{σ_2} означает часть области D, лежащую *справа* от Θ_{σ_2}, если только при этом переставить пределы интегрирования. Полагая $\sigma_1 = \sigma_0$, следовательно, $\omega(t_0, \Theta_{\sigma_1}, D_{\sigma_1}) = 1$ и складывая оба эти неравенства, мы придем к следующему результату (см. фиг. 12).

Пусть D, как и выше, — односвязная однолистная область, Θ_σ — система сечений области D, лежащих на прямой $\Re(t) = \sigma$, и $\Theta(\sigma)$ — сумма их длин. Пусть далее D_{12} — часть области D, ограниченная сечениями Θ_{σ_1} и Θ_{σ_2} $(\sigma_1 < \sigma_2)$.

При этих предположениях сумма гармонических мер сечений Θ_{σ_1} и Θ_{σ_2}, измеренных относительно D_{12} в некоторой внутренней точке $t = \sigma + i\tau$ $(\sigma_1 < \sigma < \sigma_2)$, имеет верхнюю границу

$$\omega(t, \Theta_{\sigma_1}, D_{12}) + \omega(t, \Theta_{\sigma_2}, D_{12}) \leqslant e^{-\frac{4}{\pi}\int_{\sigma_1}^{\sigma}\frac{ds}{\Theta(s)}} + e^{-\frac{4}{\pi}\int_{\sigma}^{\sigma_2}\frac{ds}{\Theta(s)}}.$$

Выберем теперь значение σ так, чтобы оба интеграла, стоящие в показателях, были равны. Тогда мы придем к следующей теореме:

Теорема 4. *Если $\sigma_1 < \sigma_2$ и D_{12} — часть области D, лежащая между сечениями Θ_{σ_1} и Θ_{σ_2}, то можно найти такое сечение Θ_σ $(\sigma_1 < \sigma < \sigma_2)$, чтобы сумма ω_{12} гармонических мер сечений Θ_{σ_1} и Θ_{σ_2}, измеренных в точке t сечения Θ_σ относительно связной части области D_{12}, содержащей точку t, удовлетворяла неравенству*

$$\omega_{12} \leqslant 2e^{-\frac{2}{\pi}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{ds}{\Theta(s)}}, \tag{8}$$

где $\Theta(\sigma)$ означает общую длину сечения Θ_σ.

Замечание. В силу принципа расширения этот результат имеет место a fortiori, если ω_{12} будет означать сумму гармонических мер граничных дуг области D, лежащих вне полосы $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, которые, следовательно, отделены от точки t сечениями Θ_{σ_1} и Θ_{σ_2}.

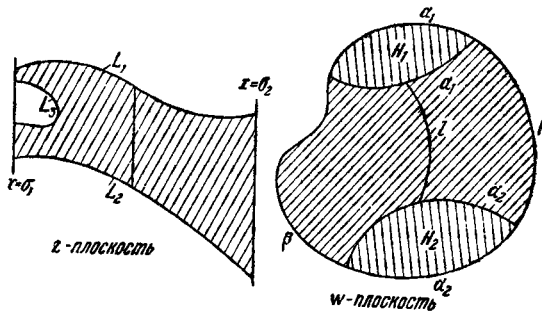
Обратим еще внимание на то, что для оценки величины ω_{12} можно было также применить соотношение (5). Простое вычисление, которое читатель легко проверит, приводит к оценке

$$\omega_{12} \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Theta(\sigma_1) + \Theta(\sigma_2)}{2(\sigma_2 - \sigma_1)},$$

которая для больших значений $\sigma_2 - \sigma_1$ вообще значительно менее точна, чем (8).

68. Теорема 4 позволяет вырести интересные следствия из общих результатов гл. III, § 6. Пусть D_{12} — область, ограниченная кроме сегментов Θ_{σ_1}, Θ_{σ_2} и прямых $x = \sigma_1$, $x = \sigma_2$ $(z = x + iy)$ еще некоторым числом жордановых дуг, из которых ровно две, L_1 и L_2, соединяют граничные прямые $x = \sigma_1$ и $x = \sigma_2$ (фиг. 13); кроме L_1 и L_2 граница может содержать еще другие дуги L_3, каждая из которых может иметь точки только на одной из граничных прямых $x = \sigma_1$ или $x = \sigma_2$. Предположим далее, что заданная в D_{12} однозначная и регулярная аналитическая функция $w(z)$ принимает в D_{12} значения, попадающие в некоторую область G плоскости w, ограниченную конечным числом жордановых дуг. Кроме того, пусть

функция $w(z)$ непрерывна на L_1, L_2 и L_3 и принимает на L_1 и L_2 значения, расположенные соответственно на двух заданных множествах H_1, H_2 области G, находящихся на *положительном* расстоянии друг от друга; значения функции $w(z)$ на L_3 могут лежать или на H_1 или на H_2. Небольшим расширением множеств H_1 и H_2 можно добиться того, чтобы их граница состояла из конечного числа жордановых дуг α_1, α_2, находящихся также на положительном расстоянии друг от друга. Множество $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ может лежать или частично или полностью на границе области G; будем, однако, предполагать, что дополнительная к α часть β границы области G *не пуста*. Наконец, предположим, что множества α_1 и α_2 такие, что всякая связная область G^*, получающаяся из G после удаления множеств H_1 и H_2, ограничена кроме некоторых дуг α_1 и α_2 еще некоторыми дугами, принадлежащими к β.



Фиг. 13.

Обозначим теперь (ср. п. 54) через $m(l)$ минимум гармонической меры множества $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, измеренной относительно G^* на некоторой дуге l, соединяющей внутри G^* множества α_1 и α_2, и положим

$$m_w = \sup m(l),$$

когда l пробегает совокупность всех таких дуг, соединяющих α_1 и α_2. Тогда, при сделанных выше предположениях,

$$0 < m_w < 1.$$

Аналогично обозначим через $m(\sigma)$ минимум гармонической меры дуг $L_1 + L_2 + L_3$, измеренной относительно D_{12} на прямой $x = \sigma$, и через m_z обозначим верхнюю границу значений $m(\sigma)$ для $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$:

$$m_z = \sup m(\sigma).$$

Тогда по теореме об увеличении гармонической меры (гл. III, § 6)

$$m_z \leqslant m_w. \tag{9}$$

Но с помощью теоремы 4 можно оценить m_z снизу. Если учесть, что сумма гармонических мер дуг $L_1 + L_2 + L_3$ и дуг Θ_{σ_1}, Θ_{σ_2} равна 1, то, выбирая подходящим образом σ, из неравенства (8) мы найдем для $m(\sigma)$ и, следовательно, для m_z нижнюю границу:

$$m_z \geqslant 1 - 2e^{-\frac{2}{\pi}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\frac{dx}{\Theta(x)}}, \tag{10}$$

откуда, согласно (9),

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\theta(x)} \leqslant K, \tag{11}$$

где

$$K = \frac{\pi}{2} \log \frac{2}{1 - m_w} \tag{11'}$$

зависит только от m_w, т. е. только от конфигурации G, H_1, H_2.

69. Интересно теперь оценить, при сделанных относительно отображения $w = w(z)$ предположениях, величину m_w. Очевидно, нужно найти *верхнюю* границу для этой величины. Пользуясь принципом расширения, проведем это более подробно в двух частных случаях.

Сперва предположим, что функция $w(z)$, регулярная в области D_{12}, удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

1) На дугах L_1 и L_2 функция $w(z) = u + iv$ принимает значения, расположенные соответственно в полуплоскостях $v \leqslant -b$, $v \geqslant b$ $(b > 0)$.

2) На дуге L_3 $|v| \geqslant b$.

3) Во всей области D_{12} $|u(z)| \leqslant a$ $(a > 0)$.

При этих предположениях мы можем применить предыдущую теорему, принимая за область D_{12} полосу $|u| < a$, за множества H_1, H_2 — полуполосы, ограниченные прямыми $v = -b$, соответственно $v = b$ и $u = \pm a$, так что область G^* состоит из прямоугольника $|u| < a$, $|v| < b$, а дуги α_1, α_2, входящие в ее границу, представлены отрезками $v = \pm b$, $|u| \leqslant a$. Следовательно, теперь m_w означает верхнюю границу минимума гармонической меры указанных отрезков, измеренной относительно прямоугольника G^* на кривой, соединяющей эти отрезки внутри рассматриваемого прямоугольника. Из соображений симметрии непосредственно ясно, что эта верхняя граница достигается в нулевой точке. С помощью принципа расширения мы далее найдем, что m_w меньше гармонической меры тех же отрезков, измеренных в нулевой точке относительно всей полосы $|v| < b$.

Последнюю меру легко вычислить, отображая полосу посредством преобразования $e^{\frac{\pi}{2b} w}$ на правую полуплоскость; при этом отрезки α_1, α_2 перейдут в отрезки $(ie^{-\frac{\pi a}{2b}}, ie^{\frac{\pi a}{2b}})$, $(-ie^{-\frac{\pi a}{2b}}, -ie^{\frac{\pi a}{2b}})$ мнимой оси, и искомая гармоническая мера будет просто равна деленной на π сумме углов, под которыми видны эти отрезки мнимой оси из точки 1 на действительной оси. Простое вычисление дает тогда для мажорантной гармонической меры значение [1])

$$1 - \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{-\frac{\pi a}{2b}};$$

[1]) Более точная оценка получается, если пользоваться эллиптическими функциями, отображающими прямоугольник на полуплоскость.

следовательно,

$$1 - m_w \geqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} e^{-\frac{\pi a}{2b}}$$

и тем самым, согласно (11) и (11′),

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)} < \frac{\pi}{2} \log \frac{\pi}{2 \operatorname{arctg} e^{-\frac{\pi a}{2b}}}.$$

Так как для $0 \leqslant t \leqslant 1$ имеем $\operatorname{arctg} t \geqslant \frac{\pi}{4} t$, то отсюда далее получается более простая оценка:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)} < \frac{\pi}{2} \log 2 + \frac{\pi^2}{4} \frac{a}{b} \text{ *).} \tag{12}$$

Если, в частности, за D_{12} взять „четырехугольник", ограниченный двумя отрезками Θ_{σ_1}, Θ_{σ_2} и двумя соединяющими их кривыми L_1, L_2, и отобразить его конформно на прямоугольник со сторонами $2a$, $2b$ так, чтобы кривые L_1, L_2 перешли в противоположные стороны длины $2a$, то, обозначая через $\Theta(x)$ „ширину" области D_{12} (т. е. длину сечения Θ_x), мы будем иметь соотношение (12), из которого будет следовать, что область D_{12} не может быть слишком сильно растянута в длину (т. е. в направлении оси x-ов). Если,

*) Если сделать дополнительное предположение, что функция $w(z)$ *однолистна*, то подсчетом площади и применением неравенства Шварца можно заменить оценку (12) более точной. В самом деле, в этом случае площадь прямоугольника G^*, равную $4ab$, можно записать в виде

$$4ab = \iint_{D_{12}} |w'(z)|^2 \, dx \, dy = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} dx \int_{(y)} |w'(z)|^2 \, dy,$$

где (y) означает сечение области D_{12} прямой $z = x$.

Далее, согласно неравенству Шварца (см. прим. к стр. 99),

$$\int_{(y)} dy \int_{(y)} |w'(z)|^2 \, dy \geqslant \left(\int_{(y)} |w'(z)| \, dy \right)^2 \geqslant 4b^2;$$

следовательно,

$$\int_{(y)} |w'(z)|^2 \, dy \geqslant \frac{4b^2}{\int_{(y)} dy} = \frac{4b^2}{\Theta(x)}.$$

Подставляя это в первое равенство, получим соотношение

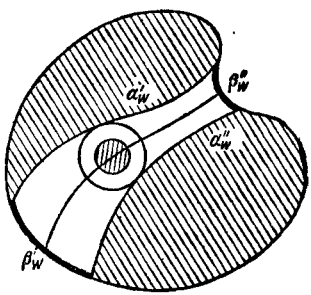
$$4ab \geqslant 4b^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)},$$

откуда следует, что

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dx}{\Theta(x)} \leqslant \frac{a}{b}.$$

в частности, D_{12} имеет ту же ширину $2b$ и длину $2a$, что и прямоугольник, то выражение слева в (12) обращается в $\frac{a}{b}$; это делает вероятным предположение, что множитель $\frac{\pi^2}{4}$ перед $\frac{a}{b}$ справа в (12) может быть заменен 1 [1]).

70. В качестве второго примера на общее соотношение (11) выберем области G, H_1, H_2 следующим образом: пусть G ограничена жордановой кривой Γ и H_1, H_2 — две ее подобласти, отсекаемые от нее двумя не имеющими общих точек сечениями α', α''. Остаточная область G^* будет ограничена кроме дуг α', α'' еще двумя дугами β', β'' граничной кривой Γ (фиг. 14).



Фиг. 14.

Соединим эти две дуги β регулярной дугой l, пробегающей в G^*. Длину дуги l, считаемую от фиксированной начальной точки, обозначим через s; пусть s возрастает на l от s_1 до s_2 в направлении от β' к β''. Обозначим через $\rho(s)$ кратчайшее расстояние от точки $w = w_s$ на l до граничных дуг α', α''.

Рассмотрим теперь гармоническую меру $\omega(w, \beta' + \beta'', G^*)$ и обозначим через $m(s)$ минимум ω в пересечении области G^* с кругом

$$|w - w_s| \leqslant k\rho(s) \qquad (0 < k < 1).$$

Для оценки величины $m(s)$ воспользуемся выражением

$$u(w) = m(s)\,\frac{\log\frac{\rho(s)}{|w - w_s|}}{\log\frac{1}{k}}, \tag{13}$$

которое гармонично в кольце $k\rho(s) \leqslant |w - w_s| < \rho(s)$ и принимает на внутренней окружности значение $m(s)$, в то время как на внешней окружности оно равно нулю. Если w — точка области G, лежащая в этом кольце, то $\omega(w, \beta' + \beta'', G^*)$ наверное не меньше соответствующего значения выражения (13). В самом деле, пересечение D_s рассматриваемого кольца с областью G^* ограничено точками трех видов: 1) точками окружности $|w - w_s| = k\rho(s)$; здесь $\omega \geqslant m(s)$ и $u(w) = m(s)$, следовательно, $\omega - u \geqslant 0$; 2) точками окружности $|w - w_s| = \rho(s)$, где $\omega \geqslant 0$, а $u = 0$, так что снова $\omega - u \geqslant 0$; 3) точками дуг $\beta' + \beta''$; здесь $\omega = 1$ и $u \leqslant m(s) < 1$; следовательно, и здесь $\omega - u \geqslant 0$. На основании принципа ми-

[1]) Другими методами та же проблема изучалась L. Ahlfors'ом [6]. См. также G. Pólya [1]. *Ср. прим. к стр. 83 (прим. перев.)*

нимума отсюда следует, что u действительно представляет миноранту для ω.

Если теперь на l взять точку $w_{s+\Delta s}$, то для достаточно малого $\Delta s > 0$

$$m(s+\Delta s) \geqslant \frac{\log \frac{\rho(s)}{\Delta r + k\rho(s+\Delta s)}}{\log \frac{1}{k}} m(s),$$

где Δr означает расстояние между точками $w_{s+\Delta s}$ и w_s. Учитывая значение величины ρ, имеем далее соотношение

$$\rho(s+\Delta s) \leqslant \rho(s) + \Delta r;$$

следовательно,

$$m(s+\Delta s) \geqslant \frac{\log \frac{1}{k} - \log\left(1+\left(1+\frac{1}{k}\right)\frac{\Delta r}{\rho(s)}\right)}{\log \frac{1}{k}} m(s),$$

откуда следует, что

$$\frac{m(s+\Delta s) - m(s)}{\Delta r} \geqslant -\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)m(s)}{\rho(s)\log\frac{1}{k}}.$$

Совершая предельный переход $\Delta s \to 0$ и замечая, что при этом $\frac{\Delta s}{\Delta r} \to 1$, мы найдем для нижней производной $\frac{dm}{ds}$ нижнюю границу

$$\frac{dm}{ds} \geqslant -\frac{1+\frac{1}{k}}{\log\frac{1}{k}} \frac{m(s)}{\rho(s)}.$$

Полагая здесь $k = \frac{1}{e}$, $\frac{1+\frac{1}{k}}{\log\frac{1}{k}} = 1 + e < 4$ и интегрируя между пределами s_1 и s, получим

$$m(s) \geqslant m(s_1)\, e^{-4\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{\rho(s)}}. \qquad (14')$$

Теперь следует оценить значение $m(s_1)$, т. е. минимум гармонической меры $\omega(w, \beta' + \beta'', G^*)$ в круге $|w - w_{s_1}| \leqslant k\rho(s_1)$, где w_{s_1} лежит на граничной дуге β'. Для этого можно непосредственно применить соотношение (6′), полученное из теоремы 1 (п. 64). Оно дает нам для $R = \rho(s_1)$, $|z| = |w - w_{s_1}| \leqslant \frac{\rho(s_1)}{e}$ оценку

$$\omega \geqslant \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{\pi} > \frac{1}{2\pi};$$

следовательно, $m(s_1) > \frac{1}{2\pi}$.

Совершенно аналогичным рассуждением найдем соотношение

$$m(s) \geqslant m(s_2)\, e^{-4\int_s^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}} \qquad (14'')$$

со значением $m(s_2) > \frac{1}{2\pi}$ и сложением получим

$$m(s) > \frac{1}{4\pi}\left(e^{-4\int_{s_1}^{s} \frac{ds}{\rho(s)}} + e^{-4\int_{s}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}\right) \geqslant \frac{1}{2\pi}\, e^{-2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}.$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 5. *Если область G^* ограничена жордановой кривой $\Gamma = \alpha' + \beta'' + \alpha'' + \beta'$, части α и β которой следуют друг за другом в указанном порядке, то гармоническая мера дуг $\beta' + \beta''$ удовлетворяет в каждой точке w сечения l области G^*, соединяющего дуги β, неравенству*

$$\omega(w,\ \beta' + \beta'',\ G^*) > \frac{1}{2\pi}\, e^{-2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}, \qquad (14)$$

где s означает изменяющуюся между s_1 и s_2 длину дуги l и $\rho(s)$ означает кратчайшее расстояние от точки w_s на l, соответствующей параметру s, до дуг $\alpha' + \alpha''$.

71. Если мы теперь вернемся обратно к вопросу п. 69 (стр. 83), то из (14) найдем для обозначенной через m_w верхней границы гармонической меры $\omega(w,\ \alpha' + \alpha'',\ G^*)$ на кривых, соединяющих дуги α' и α'', верхнюю границу

$$m_w < 1 - \frac{1}{2\pi}\, e^{-2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)}}, \qquad (15)$$

и фундаментальное соотношение $m_z \leqslant m_w$ даст нам, в предположениях п. 68 и с учетом (11) и (11′), соотношение

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{dz}{\Theta(z)} \leqslant \frac{\pi}{2} \log \frac{2}{1 - m_w} < \pi \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\rho(s)} + \frac{\pi}{2} \log 4\pi. \qquad (16)$$

Отсюда, в частности, следует

Теорема 6. *Пусть G_z — область в плоскости $z = x + iy$, ограниченная жордановой кривой $\Gamma_z = \alpha_z' + \beta_z' + \alpha_z'' + \beta_z''$, состоящей из четырех дуг α_z', β_z', α_z'', β_z'', следующих друг за другом в указанном порядке, причем для всех $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ прямая $\Re(z) = x$ встречает только дуги α_z', α_z''. Обозначим через $\Theta(x)$ сумму длин сегментов этой прямой, лежащих в G_z. Пусть для $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$*

$$\max \Theta(x) = \Theta.$$

Пусть далее в области G_z задана регулярная функция $w(z)$, обладающая следующими свойствами:

1) *$w(z)$ принимает в G_z значения, попадающие в область G_w, ограниченную жордановыми кривыми Γ_w.*

2) *На граничных дугах α_z', α_z'' функция $w(z)$ непрерывна и принимает значения, расположенные соответственно на двух, не имеющих общих точек замкнутых множествах H_w', H_w'', которые могут быть разделены друг от друга сечением области G_w. Пусть Q — такое сечение, a — кратчайшее расстояние от Q до множества $H_w' + H_w''$ и b — длина сечения Q.*

При этих условиях имеет место неравенство

$$\frac{x_2 - x_1}{\Theta} \leqslant \pi \frac{b}{a} + C, \tag{17}$$

где C — числовая константа $\left(C < \frac{\pi}{2} \log 4\pi\right)$.

Этот результат непосредственно вытекает из общего соотношения (16), если за область G_w^* взять часть области G_w, которую покрывает круг радиуса a, когда центр его описывает сечение Q. Множества H_w' и H_w'' можно тогда заменить областями H_1, H_2, которые отсекаются от области G_w областью G_w^* и которые содержат соответственно множества H_w', H_w''.

§ 3. Оценка гиперболической меры посредством расширения области.

72. Каждому элементу дуги евклидовой длины ds, выходящему из точки P области G гиперболического типа, мы в п. 44 поставили в соответствие неевклидову длину $d\sigma$. Принцип гиперболической меры (п. 45) говорит, что определенная этим неевклидова длина дуги при однозначном аналитическом преобразовании $w = w(z)$ уменьшается, если за соответствующие области взять в плоскости z область G_z, где $w(z)$ однозначна и аналитична, а в плоскости w взять область G_w, в которой лежат соответствующие значения w.

Чтобы, согласно программе, намеченной в § 1 этой главы, сделать принцип гиперболической меры удобоприменимым и в тех случаях, когда гиперболическая мера не поддается элементарному подсчету, мы должны найти методы, позволяющие установить аппроксимативные соотношения между гиперболическими и евклидовыми меросоотношениями заданных отображений.

Для этого сам принцип гиперболической меры дает нам простой метод, который во многих случаях приводит к желательным результатам.

Пусть G_1 и G_2 — две области гиперболического типа, из которых G_1 содержится в G_2. Если P_1 — точка области G_1, то гиперболические длины $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ элемента дуги евклидовой длины ds,

выходящего из P, измеренные относительно G_1, соответственно G_2, удовлетворяют соотношению

$$d\sigma_1 \geqslant d\sigma_2. \tag{18}$$

В самом деле, это является частным следствием из принципа уменьшения гиперболической меры, ибо, если взять $G_z \equiv G_1$ и $G_w \equiv G_2$, то функция $w \equiv z$ удовлетворяет всем условиям нашей теоремы и принцип дает непосредственно соотношение (18), в котором равенство имеет место тогда и только тогда, когда $G_1 \equiv G_2$.

Если G_2 может быть выбрана так, что возможно конформное ее отображение (или отображение поверхности G_2^{∞}, если G_2 многосвязна) на единичный круг $E(|x|<1)$, то соотношение (18) дает миноранту для гиперболической меры $d\sigma_1$. В самом деле, если $x(z)$ — однолистная функция, которая производит упомянутое отображение, притом так, что точка P переходит в нулевую точку $x=0$, то, согласно определению (ср. п. 44),

$$d\sigma_2 = |dx| = \left|\frac{dx}{dz}\right| ds,$$

где $ds = |dz|$ и производная $\frac{dx}{dz}$ берется в точке P. Следовательно,

$$\frac{d\sigma_1}{ds} \geqslant \left|\frac{dx}{dz}\right|_P = \frac{1}{|z'(0)|},$$

где $z(x)$ — функция, обратная к $x(z)$.

Аналогичным образом находится мажоранта для отношения $\frac{d\sigma_1}{ds}$.

73. Теорема Кёбе (Koebe) об искажении. В качестве применения предыдущего результата исследуем искажение при конформном отображении единичного круга $|z|<1$ на *однолистную* область D, не содержащую бесконечно удаленной точки. Пусть отображающая функция

$$w(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \tag{19}$$

нормирована так, что $w(0)=0$ и $w'(0)=1$; это всегда может быть достигнуто целым линейным преобразованием области. Пусть далее кратчайшее расстояние от нулевой точки $z=0$ до границы Γ области D равно d [1]).

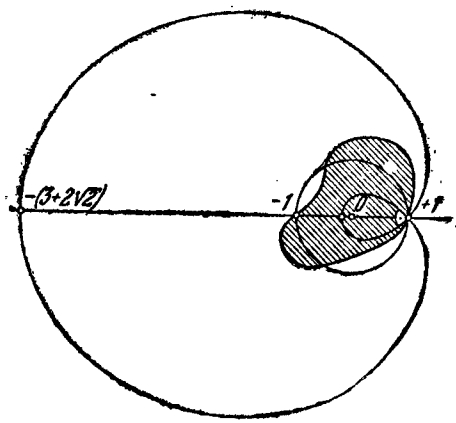
Теорема Кёбе. *Если степенной ряд* (19) *сходится в единичном круге* $|z|<1$ *и отображает его однолистно на область* D, *то кратчайшее расстояние* d *от нулевой точки до границы области* D *превосходит некоторую положительную константу* k *(константа Кёбе).*

Доказательство. Пусть $de^{i\delta}$ — граничная точка области D, отстоящая от нулевой точки на расстоянии d. Преобразуем функцию w посредством корня

$$w_1 = \sqrt{d - we^{-i\delta}} = \sqrt{d} + bz + \ldots, \tag{20}$$

[1]) См. P. Koebe [1].

который для $w=0$ принимает положительное значение $\sqrt{d}$. Определенная таким образом функция $w_1(z)$ неограниченно продолжима в единичном круге $|z|<1$, следовательно (по теореме о монодромии), там однозначна и в силу однолистности функции $w(z)$ однолистна; поэтому она отображает единичный круг $|z|<1$ взаимно однозначно и конформно на некоторую область D_1 в плоскости w_1. Если w_1 — точка области D_1, отличная от нуля, то точка $(-w_1)$ лежит вне D_1, ибо в противном случае эти значения соответствовали бы при преобразовании $w_1=w_1(z)$ двум различным точкам z_1, z_2, которым в то же время в плоскости w соответствовали бы два одинаковых значения $w=e^{i\delta}(d-w_1^2)$, что невозможно в силу предположенной однолистности функции $w(z)$.



Фиг. 15.

Так как круг $|w|<d$ лежит в D, то находящаяся справа от мнимой оси половина H соответствующей ему лемнискаты

$$|d-w_1^2|<d$$

лежит в D_1, в то время как левая ее половина H_2 не содержит ни одной точки области D_1. Следовательно, если из плоскости w_1 удалить область H_2, то остаточная область D_1^* будет мажорантной для области D_1. Еще более удобная мажоранта получается, если D_1 преобразовать посредством функции

$$x=x(z)=\frac{\sqrt{d}-w_1}{\sqrt{d}+w_1}=\frac{e^{-i\delta}}{4d}z+\ldots \tag{21}$$

При этом D_1 переходит в область D_x, целиком лежащую в области D_x^*, являющуюся образом области D_1^*. Наибольшее расстояние от нулевой точки до границы области D_x^* равно $3+2\sqrt{2}<6$ и, следовательно, для $|z|<1$

$$|x(z)|<6.$$

Из принципа гиперболической меры (или равнозначной с ним леммы Шварца) следует тогда, что

$$|x'(0)|=\frac{1}{4d}<6,\quad d>\frac{1}{24}, \tag{22}$$

чем доказано утверждение о существовании универсальной константы.

74. В силу того, что область D_1 не содержит ни одной пары точек, симметричных относительно нулевой точки, область D_x, получающаяся из нее посредством линейного преобразования (21), не содержит ни одной пары точек x_1, x_2, связанных соотношением

$$x_1 \cdot x_2 = 1.$$

Из соображений симметрии можно ожидать, что $|x'(0)|$ имеет наибольшее значение тогда, когда D_x совпадает с единичным кругом, т. е. когда $x \equiv z$, $|x'(0)| = 1$; для константы Кёбе получилось бы тогда точное значение $\frac{1}{4}$. Соответствующая область D в плоскости w состоит из всей плоскости с выброшенным лучом $\arg w = \delta$, $|w| \geqslant \frac{1}{4}$, которая в силу (20) и (21) посредством функции

$$e^{-i\delta} z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4we^{-i\delta}}}{1 + \sqrt{1 - 4we^{-i\delta}}},$$

$$w = \frac{z}{(1 + ze^{-i\delta})^2}$$

отображается на единичный круг $|z| < 1$. Справедливость этого предположения мы сейчас докажем.

Заметим еще, что, с другой стороны, для кратчайшего расстояния d от нулевой точки до границы области D, на которую преобразование (19) переводит единичный круг $|z| < 1$, можно непосредственно найти точную *верхнюю* границу. Именно, если заметить, что обратная функция $z = z(w)$ отображает круг $|w| < d$ на часть единичного круга, то, применяя лемму Шварца, мы получим оценку

$$\left|\frac{z}{w}\right| \leqslant \frac{1}{d},$$

которая, в силу (19), при $z \to 0$ дает

$$d \leqslant 1,$$

где равенство имеет место тогда и только тогда, когда $w \equiv z$, и, следовательно, D совпадает с единичным кругом.

75. Пользуясь простым методом Э. Шмидта (Erhard Schmidt) [1]), мы теперь выведем точное значение константы Кёбе. Выше было показано, что однолистная область D в плоскости w, содержащая нулевую точку и не содержащая бесконечно удаленной точки, может быть отображена однолистно и конформно на область D_x, обладающую следующими свойствами:

1) Если точка x лежит в D_x, то точка $\frac{1}{x}$ лежит вне D_x

2) Точка $x = 1$ является граничной точкой для D_x.

---

[1]) Доказательство Шмидта приведено из Carathéodory [5]. См. также W. Grunsky [1].

При этом отображающая функция $x(w)$ может быть выбрана так, чтобы $x(0)=0$ и $|x'(0)|=\frac{1}{4d}$, где d означает кратчайшее расстояние от нулевой точки до границы области D.

Следовательно, в предположении, что функция $w(z)=z+a_2z^2+\ldots$ отображает конформно единичный круг $|z|<1$ на D, нужно теперь показать, что $d\geqslant\frac{1}{4}$. Для этой цели заметим, что в единичном круге $|z|<1$ функция $\frac{x}{z}$ регулярна и отлична от нуля. Следовательно, по теореме Гаусса о среднем значении, мы для $x=Re^{i\Phi}$, $z=re^{i\varphi}$ $(r<1)$ имеем

$$\log\frac{1}{4d}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{R}{r}\,d\varphi. \tag{23}$$

С другой стороны, интеграл

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log\frac{R}{r}\,d(\Phi-\varphi)=J(r)$$

представляет площадь области D', на которую произвольная ветвь функции $\log\frac{x}{z}$ отображает круг $|z|<r$. Следовательно, это выражение *неотрицательно* и

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log\frac{R}{r}\,d\Phi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log\frac{R}{r}\,d\varphi+J(r). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует тогда, что

$$\log\frac{1}{4d}=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log\frac{R}{r}\,d\Phi-\log r-\frac{J(r)}{2\pi}. \tag{25}$$

Последний интеграл может быть интерпретирован следующим образом.

Представим себе, что из области $D_x(r)$, в которую преобразуется круг $|z|<r$ при отображении $z\to x$, удален маленький кружок $|x|\leqslant R_0$. Если теперь в остаточной области провести радиальный разрез, соединяющий граничные кривые $|x|=R_0$ и $R=R(\Phi)$ (последняя является образом окружности $|z|=r$), то произвольная ветвь функции $\log x$ будет отображать эту кольцевую область с разрезом на область $D_0(r)$, площадь которой, очевидно, равна

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log R\,d\Phi+2\pi\log\frac{1}{R_0}.$$

С другой стороны, применяя свойство 1 области D_∞, можно показать, что рассматриваемая площадь не превосходит второго члена этого выражения. Наиболее просто это можно показать, рассматривая в плоскости w произвольную область D^*, которая содержит область $D(r)$ (образ круга $|z|<r$) и ограничена *разрезом*, пробегающим от граничной точки $w=de^{i\delta}$ области D до бесконечно удаленной точки $w=\infty$. Если одновременно с D эту область отобразить на плоскость x, то в качестве ее образа мы получим область D_x^*, которая содержит $D_\infty(r)$ и граница которой при преобразовании $x'=\frac{1}{x}$ переходит сама в себя. Пусть $R=R^*(\Phi)$ — уравнение этой границы. Поступая теперь с D_∞^*, как раньше с $D_x(r)$, мы получим в плоскости $\log x$ область D_∞, содержащую $D_0(r)$, площадь которой, очевидно, равна

$$\int_{\Phi=0}^{2\pi}\log R^*\,d\Phi+2\pi\log\frac{1}{R_0}>\int_{\varphi=0}^{2\pi}\log R\,d\Phi+2\pi\log\frac{1}{R_0}.$$

В силу упомянутого свойства граничной кривой $R=R^*(\Phi)$ первый интеграл исчезает и, следовательно,

$$\int_{\varphi=0}^{\pi}\log R\,d\Phi<0$$

Тогда, согласно (25),

$$\log\frac{1}{4d}<-\log r-\frac{J(r)}{2\pi},$$

откуда при $r\to 1$ следует, что

$$d\geqslant\frac{1}{4}e^{\frac{J}{2\pi}}, \tag{26}$$

где J означает площадь, на которую произвольная ветвь функции $\log\frac{x}{z}$ отображает единичный круг $|z|<1$.

Из полученной оценки следует, что

$$d\geqslant\frac{1}{4}$$

и $d=\frac{1}{4}$ тогда и только тогда, когда $J=0$. Последнее возможно только при $x=cz$, где c—константа. Так как для образа D_∞, полученного при отображении $z\to x$, точка $x=1$ является граничной, то $|c|=1$ и D_∞ совпадает с единичным кругом. Но тогда область D совпадает с экстремальной областью Кёбе (плоскость с выброшенным прямолинейным лучом); для этой и только для этой области, на которую нормированная функция $w(z)$ отображает однолистно единичный круг $|z|<1$, кратчайшее расстояние от нулевой точки до границы достигает своего минимума, равного $\frac{1}{4}$.

Добавление редакторов. Точное значение константы Кёбе и связанные с ней теоремы искажения могут быть получены весьма различными методами. Наиболее коротким в настоящее время надо признать путь, основанный на так называемой теореме площадей: *если функция*

$$w = \varphi(z) = z + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots$$

голоморфна и однолистна вне единичного круга $|z| \leqslant 1$, *то*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sum n |b_n|^2\right) \geqslant 0;$$

левая часть этого неравенства дает величину площади области, не покрытой значениями $\varphi(z)$ *при* $|z| > 1$. Отсюда путем несложных преобразований получается, что *для функции*

$$w = f(z) = z + a_2 z^2 + \dots, \tag{a}$$

правильной и однолистной в единичном круге $|z| < 1$, *имеем*

$$|a_2| \leqslant 2.$$

Далее, путем вспомогательного линейного преобразования получаем теорему искажения (32), а из нее путем интегрирования получаем соотношение

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2},$$

которое содержит как частный случай доказанную выше теорему Кёбе $d \geqslant \frac{1}{4}$.

Те же результаты могут быть получены методом Лёвнера (Löwner [1]), основанным на изучении вариации однолистной функции при варьировании границы области. В ряде вопросов этот метод оказывается наиболее сильным; так, например, этим методом доказано, что для функции (а) имеем $|a_3| \leqslant 3$, а также найдена точная оценка для $|\arg f'(z)|$ *).

Гротш (Grötzsch [1]) рассмотрениями, аналогичными изложенным дальше (§ 4), дал точные оценки для $|f'(z)|$ и $|f(z)|$ для случая функций правильных и однолистных в кольце $0 < r < |z| < 1$. Теоремы искажения и константа Кёбе получаются из теорем Гротша при $r \to 0$.

Опираясь только на принцип расширения области, можно доказать следующую теорему (Лаврентьев [2]): *пусть* $f_1(z)$ *и* $f_2(z)$ *— две функции, правильные и однолистные в единичном круге* $|z| < 1$, *не принимающие в этом круге одинаковых значений:* $f_1(z) \neq f_2(z)$. *В таком случае*

$$|f_1'(0)| \cdot |f_2'(0)| \leqslant |f_2(0) - f_1(0)|.$$

Из этого предложения также весьма просто вытекает теорема Кёбе и связанная с ней теорема искажения.

76. Обладая точным значением константы Кёбе, мы придем и к точным формулам искажения Пика, которые дают оценки для абсолютных значений отображающей функции и ее производной.

Пусть $w = w(z)$ — функция, конформно отображающая единичный круг $|z| < 1$ на однолистную область D, не содержащую бесконечно удаленной точки. Через две произвольные точки a, b ($|a| < 1$, $|b| < 1$) проведем окружность $C(a, b)$, ортогональную к единичной окружности $|z| = 1$, и вдоль дуги ее, соединяющей точку b с окруж-

*) См. Голузин [1].

ностью $|z|=1$ и не встречающей точку a, проведем в единичном круге $|z|<1$ разрез. Полученную область с разрезом, обозначим ее $E(a, b)$, функция $w(z)$ отображает однолистно на область $D(a, b)$, которая получается, если в D провести разрез вдоль дуги, соответствующей $C(a, b)$.

Отобразим теперь $E(a, b)$ на весь единичный круг так, чтобы точка a перешла в нулевую точку. Для этого $E(a, b)$ посредством преобразования

$$z_1^2=\frac{z-b}{1-\bar{b}z}e^{-i\alpha},$$

где $\alpha=\arg\frac{b-a}{1-\bar{b}a}$, отобразим сперва на верхний полукруг $|z_1|<1$ так, чтобы точке $z=a$ соответствовала точка

$$z_1=c=i\sqrt{\left|\frac{a-b}{1-\bar{b}a}\right|}.$$

Затем преобразованием

$$t=\frac{z_1-c}{1-\bar{c}z_1}\cdot\frac{1-cz_1}{z_1-c}$$

этот полукруг отобразим на единичный круг $|t|<1$, причем точка $z_1=c$ перейдет в нулевую точку. Искомое преобразование $t=t(z)$ получается тогда соединением двух предыдущих отображений. Для $z=a$, $t=0$ имеем

$$\left|\frac{dt}{dz}\right|=|t'(a)|=\left|\frac{dz_1}{dz}\right|\cdot\left|\frac{dt}{dz_1}\right|=$$
$$=\frac{1}{4|a-b|}\cdot\frac{(1-|b|^2)(|1-\bar{b}a|+|a-b|)}{|1-\bar{a}b|(|1-\bar{b}a|-|a-b|)}.$$

Далее функция

$$\varphi(t)=\frac{w(z(t))\,t'(a)}{w'(a)}-\frac{w(a)\,t'(a)}{w'(a)}=t+c_2t^2+\ldots$$

отображает единичный круг $|t|<1$ на однолистную область $D_1(a, b)$, получающуюся из $D(a, b)$ преобразованием

$$w_1(z)=\frac{t'(a)}{w'(a)}[w(z)-w(a)].$$

Кратчайшее расстояние от нулевой точки до границы этой области не больше

$$d=|w_1'(b)|=\left|\frac{t'(a)}{w'(a)}\right||w(a)-w(b)|.$$

В силу предыдущей теоремы $d\geqslant\frac{1}{4}$ и, следовательно,

$$|w'(a)|\left|\frac{a-b}{w(a)-w(b)}\right|\left|\frac{1-\bar{a}b}{1-|b|^2}\right|\frac{|1-\bar{b}a|-|a-b|}{|1-\bar{b}a|+|a-b|}\leqslant 1. \qquad (27)$$

Из этого соотношения, которое приводит к различным интересным следствиям, мы сперва для $a=0$, $b=z$ заключаем, что

$$\frac{|w'(0)||z|}{|w(z)|(1+|z|)^2}\leqslant 1$$

или, если $w=z+a_2z^2+\ldots$, т. е. $w(0)=0$, $w'(0)=1$,

$$|w(z)|\geqslant\frac{|z|}{(1+|z|)^2}. \tag{28}$$

Далее, для $b=0$, $a=z$:

$$\left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right|\leqslant\frac{1}{|z|}\,\frac{1+|z|}{1-|z|}, \tag{29}$$

откуда интегрированием вдоль радиуса $\arg z=\varphi$ в пределах от $z=0$ до $z=|z|e^{i\varphi}$ получается

$$|w(z)|\leqslant\frac{|z|}{(1-|z|)^2}. \tag{30}$$

Чтобы получить еще нижнюю границу для абсолютного значения логарифмической производной, рассмотрим для заданного z функцию переменной t

$$w\left(\frac{t+z}{1+\bar{z}t}\right)=w(z)+w'(z)(1-|z|^2)t+\ldots,$$

однолистную в единичном круге $|t|<1$. Тогда, в силу (30),

$$\frac{\left|w\left(\frac{t+z}{1+\bar{z}t}\right)-w(z)\right|}{|w'(z)|(1-|z|^2)}\leqslant\frac{|t|}{(1-|t|)^2},$$

или, для $t=-z$,

$$\left|\frac{w'(z)}{w(z)}\right|\geqslant\frac{1}{|z|}\,\frac{1-|z|}{1+|z|}. \tag{31}$$

Перемножая формулы (31) и (28), а также формулы (29) и (30), мы получим

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leqslant|w'(z)|\leqslant\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}. \tag{32}$$

Все эти формулы содержат точные границы, которые достигаются для экстремальной области Кёбе и только для нее.

77. В заключение обратим внимание на одно частное следствие из предыдущих формул. Из (30) следует, что

$$|1+a_2z+a_3z^2+\ldots|\leqslant 1+2|z|+3|z|^2+\ldots,$$

следовательно, если $a_2\neq 0$, то для $z=e^{-i\alpha}|z|$, где $\alpha=\arg a_2$, имеем

$$1+|a_2||z|+(z^2)\leqslant 1+2|z|+(z^2),$$

где (x) означает величину, которая при делении на x остается конечной для $x=0$. Отсюда далее следует, что

$$|a_2| \leqslant 2 + (|z|),$$

и, наконец,

$$|a_2| \leqslant 2. \tag{33}$$

Из этого неравенства можно обратно вывести все предыдущие неравенства [1]).

§ 4. Теоремы Альфорса об искажении [2]).

78. Представим себе в плоскости $z=x+iy$ односвязную область G, не содержащую бесконечно удаленной точки. Пусть $Z_1=X_1+iY_1$ и $Z_2=X_2+iY_2$ $(X_1<X_2)$ — две достижимые граничные точки области G; при этом учитываются и случаи $X_1=-\infty$, $X_2=+\infty$.

Прямые $\Re(z)=x$ $(X_1<x<X_2)$ пересекаются с областью G по одному или по нескольким отрезкам, каждый из которых представляет сечение [3]) Q области G, разбивающее ее на две односвязные части.

Соединим точки Z_1 и Z_2 сечением $z=z(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1;\ Z_1=z(0),\ Z_2=z(1))$. Не нарушая общности, за это сечение можно взять полигональную кривую C, состоящую из конечного или счетного числа отрезков, каждый из которых непараллелен оси y-ов и концы которых сгущаются самое большее в точках Z_1, Z_2. Докажем:

I. *Если* $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ $(x_1<x_2)$ — *две точки области* G, *то на прямой* $\Re(z)=x$ $(x_1<x<x_2)$ *найдется по крайней мере одно сечение* Q_x, *отделяющее* z_1 от z_2.

В самом деле, если соединить z_1 и z_2 полигональной кривой, пробегающей в G, то она будет пересекать прямую $\Re(z)=x$ в нечетном числе точек. Следовательно, среди сечений, лежащих на прямой $\Re(z)=x$, найдется по крайней мере одно, обладающее тем же свойством; это сечение будет отделять z_1 от z_2.

Теорема справедлива и тогда, когда z_1, z_2 — достижимые граничные точки.

Будем теперь для каждого заданного x, $X_1<x<X_2$, рассматривать только те сечения Q_x, которые отделяют Z_1 от Z_2. Так как наперед заданная полигональная кривая C, соединяющая Z_1 и Z_2, пересекает каждую прямую $\Re(z)=x$ в конечном числе точек, то среди рассматриваемых сечений Q_x найдется одно вполне определенное сечение Θ_x, которое точка $z=z(t)$, пробегающая кри-

---

[1]) См. G. Pick [2], R. Nevanlinna [1].

[2]) L. Ahlfors [1].

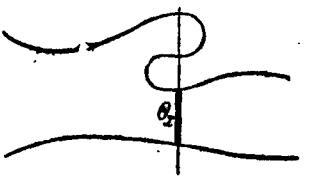
[3]) Так мы называем всякую непрерывную жорданову дугу, концы которой являются граничными точками, а остальные точки лежат внутри области.

вую C, при изменении t от 0 до 1 пересекает первым *); пусть это имеет место для значений $t=t(x)$ и $z=z(t(x))=z_x$. Обозначим через $\Theta(x)$ длину сечения Θ_x.

Функция $\Theta(x)$ имеет вообще сложную структуру. Однако можно доказать:

II. *Если граница области G в обоих концах сечения Θ_x имеет касательные, не параллельные оси y-ов, то $\Theta(x)$ для соответствующего значения x непрерывна.*

Доказательство. Пусть t_0 значение t, для которого полигональная кривая $z=z(t)$ впервые пересекает прямую $\Re(z)=x_0$, точка пересечения лежит на сечении Θ_{x_0}, в концах которого пусть граница области G обладает указанным в теореме свойством. Тогда можно найти такое малое число $h>0$, что для всех t из сегмента $t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h$ точка $z(t)$ лежит на некотором сегменте $\overline{\Theta}_x$ прямой $\Re(z)=x(t)$, который представляет сечение области G и концы которого лежат на непрерывных ветвях границы области G, проходящих через концы сечения Θ_{x_0}. Длина $\overline{\Theta}(x)$ сечения $\overline{\Theta}_x$ является непрерывной функцией от t, и, следовательно, достаточно теперь показать, что сечение $\overline{\Theta}_x$ для соответствующего значения t совпадает с сечением Θ_x, если только h выбрано достаточно малым.



Фиг. 16.

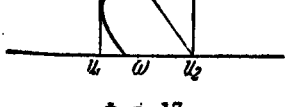
Чтобы в этом убедиться, рассмотрим сечения $\overline{\Theta}_{x_0}$ прямой $\Re(z)=x_0$, отличные от Θ_{x_0}. Если полигональная кривая C не встречает ни одно из этих сечений, то для достаточно малых значений $|x-x_0|$ она также не встречает ни одного из сечений прямой $\Re(z)=x$, отличных от $\overline{\Theta}_x$, и теорема для этого случая доказана. Остается рассмотреть тот случай, когда C встречается с сечениями $\overline{\Theta}_{x_0}$ в некоторых точках $z_\nu=z(t_\nu)$ $(\nu=1,\ldots,n)$. Если значения t_ν заключить в маленькие, не имеющие общих точек, сегменты Δ_ν, то можно определить такое малое число $\varepsilon>0$, что для всех $|x-x_0|<\varepsilon$ точки z_μ пересечения прямой $\Re(z)=x$ с кривой C, лежащие вне сечения $\overline{\Theta}_x$, соответствуют известным значениям t_μ' из сегментов Δ_ν, причем так, что число точек t_μ' в Δ_ν равно единице, если $z(t_\nu)$ есть

*) Если граничные точки определять по Каратеодори (см. Carathéodory [5]), то из односвязности области G будет следовать, что определение сечения Θ_x не зависит от выбора кривой C, отделяющей Z_1 от Z_2. В самом деле, если бы две такие кривые C', C'' определяли два различных сечения Θ_x', Θ_x'', то на прямой $\Re(z)=x$ между этими сечениями лежали бы граничные точки области G. В силу односвязности последней эти граничные точки должны были бы континуально продолжаться до Z_1 или Z_2, пробегая между C' и C''. Но тогда C' и C'' соединяли бы разные (по Каратеодори) граничные точки, что противоречит условию.

точка *пересечения* кривой C с прямой $\Re(z) = x_0$ и равно двум или нулю, если около $z(t_\nu)$ кривая C расположена по одну сторону от этой прямой. Отсюда следует, что если точка $z = z(t_\nu)$ определяет на прямой $\Re(z) = x_0$ сечение, которое кривая C пересекает в n точках, то значение, или значения, t_μ', попадающие на Δ_ν, определяют на прямой $\Re(z) = x$ сечение, число точек пересечения которого с C отличается от n на четное число.

Из предыдущего заключаем, что для достаточно малых значений h сечение $\overline{\Theta}_x$ действительно совпадает с сечением Θ_x. В самом деле, если h взять настолько малым, что $h < \Delta_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$ и одновременно $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ для $|t - t_0| < h$, то для $t < t_0$ всякое сечение, лежащее на прямой $\Re(z) = x$ и отличное от $\overline{\Theta}_x$ пересекается с C в четном числе точек, ибо в противном случае среди значений $t_\nu < t_0$ нашлось бы по крайней мере одно, которое определяло бы на прямой $\Re(z) = x_0$ сечение, пересекающееся с C в нечетном числе точек и, следовательно, которое отделяло бы Z_1 от Z_2, что противоречит определению сечения Θ_{x_0}. Таким образом, $\overline{\Theta}_x$ является первым сечением на прямой $\Re(z) = x$, отделяющим Z_1 от Z_2, которое пересекает C; тем самым $\overline{\Theta}_x = \Theta_x$, что и требовалось доказать.

79. Предположим теперь, что в каждой конечной граничной точке области G, за исключением, быть может, изолированных точек, выполняется условие регулярности, указанное в теореме II. Пусть далее функция $w = u + iv = w(z)$ отображает конформно область G на полосу $|v| < \frac{a}{2} (a > 0)$ так, что граничная точка Z_1 переходит в точку $u = -\infty$, а граничная точка Z_2 — в точку $u = +\infty$. При этом отображении сечение Θ_x переходит в непрерывную кривую L_x, соединяющую обе граничные прямые $v = \pm \frac{a}{2}$ (фиг. 17). Обозначим наибольшее и наименьшее значения u на L_x соответственно через $u_2(x)$ и $u_1(x)$; эти величины, очевидно, являются возрастающими функциями от x.



Фиг. 17.

Для более подробного изучения этих функций заметим, что длина дуги L_x не меньше длины диагонали прямоугольника $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, $|v| \leqslant \frac{a}{2}$, т. е. не меньше, чем

$$\sqrt{a^2 + \omega^2},$$

где $\omega = \omega(x) = u_2(x) - u_1(x)$. С другой стороны, длина дуги L_x равна

$$\int_{\Theta_x} |w'(z)|\, dy$$

и, согласно неравенству Шварца [1]), не превосходит

$$\sqrt{\int\limits_{\Theta_x} dy \int\limits_{\Theta_x} |w'|^2\, dy}.$$

Таким образом,

$$a^2 + \omega^2(x) \leqslant \int\limits_{\Theta_x} dy \int\limits_{\Theta_x} |w'(z)|^2\, dy = \Theta(x) \int\limits_{\Theta_x} |w'(z)|^2\, dy.$$

Деля обе части на $\Theta(x)$ и интегрируя по x в пределах от x_1 до x_2 $(X_1 < x_1 < x_2 < X_2)$, что возможно, так как при сделанных предположениях функция $\Theta(x)$ может иметь только изолированные точки разрыва (ср. п. 78), мы получим

$$a^2 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} + \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\omega^2(x)}{\Theta(x)}\, dx \leqslant \int\limits_{\Theta_x} \int\limits_{x_1}^{x_2} |w'(z)|^2\, dx\, dy.$$

Стоящее справа выражение представляет площадь $A(x_1, x_2)$ однолистной области, которую описывает дуга L_x, когда x непрерывно возрастает от x_1 до x_2. Так как эта площадь содержится

---

[1]) Неравенство Шварца гласит:

$$\left(\int\limits_a^b |g(x)\, h(x)\, dx\right)^2 \leqslant \int\limits_a^b g^2(x)\, dx \int\limits_a^b h^2(x)\, dx. \tag{34}$$

Оно легко доказывается с помощью тождества Лагранжа:

$$\left(\sum_1^n a_\mu b_\mu\right)^2 = \sum_1^n a_\mu^2 \sum_1^n b_\mu^2 - \sum_{\mu<\nu} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2,$$

из которого следует, что

$$\left(\sum_1^n a_\mu b_\mu\right)^2 \leqslant \sum_1^n a_\mu^2 \sum_1^n b_\mu^2.$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда числа a_μ пропорциональны числам b_μ.

Предельным переходом получается

$$\left(\int\limits_a^b g(x)\, h(x)\, dx\right)^2 = \int\limits_a^b g^2(x)\, dx \int\limits_a^b h^2(x)\, dx -$$

$$- \int\limits_a^b dy \int\limits_a^y |g(x)\, h(y) - g(y)\, h(x)|^2\, dx.$$

Отсюда следует соотношение (34), причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда отношение $g : h$ равняется постоянной всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль.

в прямоугольнике $u_1(x_1) \leqslant u \leqslant u_2(x_2)$, $|v| \leqslant \frac{a}{2}$, то $A(x_1, x_2) \leqslant$ $\leqslant a[u_2(x_2) - u_1(x_1)] = a[u_1(x_2) - u_2(x_1) + \omega(x_1) + \omega(x_2)]$, и, следовательно,

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) \geqslant a \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} + \frac{1}{a} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\omega^2}{\theta}\, dx - \omega(x_1) - \omega(x_2). \quad (35)$$

Чтобы придать полученному результату более пригодную для применений форму, устраним теперь колебание ω функции u на L_x. Зафиксируем произвольное значение $x_0 (X_1 < x_0 < X_2)$ и положим

$$\frac{1}{a} \int_{x_0}^{x} \frac{\omega^2}{\theta}\, dx \equiv \lambda(x). \quad (36)$$

Пусть далее m — произвольное положительное число, и для некоторого $x > x_0$

$$\lambda(x) < \omega(x) - m. \quad (37)$$

Тогда

$$\omega^2 = a\theta \frac{d\lambda}{dx} > (\lambda(x) + m)^2,$$

и тем самым

$$\frac{dx}{\theta(x)} < \frac{a\, d\lambda}{(\lambda(x) + m)^2}.$$

Отсюда следует, что интеграл

$$\int \frac{dx}{\theta(x)}, \quad (38)$$

взятый по интервалам, лежащим справа от x_0, в которых имеет место неравенство (37), не больше

$$a \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(\lambda + m)^2} = \frac{a}{m}. \quad (39)$$

Точно таким же образом мы убедимся, что интеграл (38), взятый по тем интервалам, лежащим слева от x_0, где имеет место неравенство

$$-\lambda(x) < \omega(x) - m, \quad (40)$$

также не больше выражения (39).

Выберем теперь значение x_0 в интервале $x_1 < x_0 < x_2$ так, чтобы

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\theta(x)} = \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)}.$$

Если тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} > \frac{2a}{m}, \quad (41)$$

то пусть x_1', x_2' $(x_1 < x_1' < x_2' < x_2)$ будут числа, определенные уравнениями

$$\int_{x_1}^{x_1'} \frac{dx}{\Theta(x)} = \int_{x_2'}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} = \frac{a}{m}.$$

Тогда в интервалах (x_1, x_1'), (x_2', x_2) найдутся соответственно числа ξ_1 и ξ_2 такие, что

$$-\lambda(\xi_1) \geqslant \omega(\xi_1) - m, \quad \lambda(\xi_2) \geqslant \omega(\xi_2) - m,$$

и поэтому

$$\frac{1}{a}\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\omega^2}{\Theta} dx = \lambda(\xi_2) - \lambda(\xi_1) \geqslant \omega(\xi_1) + \omega(\xi_2) - 2m.$$

Из соотношения (35), примененного к интервалу (ξ_1, ξ_2), следует тогда, что

$$u_1(\xi_2) - u_2(\xi_1) \geqslant a\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dx}{\Theta} - 2m;$$

отсюда, так как u_1 и u_2 являются возрастающими функциями от x и $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < x_2$, заключаем, что

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) \geqslant a\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} - 2m - a\int_{x_1}^{\xi_1} \frac{dx}{\Theta} - a\int_{\xi_2}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} \geqslant$$

$$\geqslant a\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta} - 2m - \frac{2a^2}{m}.$$

В частности, отсюда при $m = a$ получается

Теорема Альфорса. *Если*

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(x)} > 2,$$

то

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) \geqslant a\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta(\lambda)} - 4a. \tag{42}$$

Стоящий перед интегралом множитель a не может быть уменьшен; это следует из того, что если за область G взять полосу ширины Θ, параллельную оси x-ов, то

$$w = \frac{az}{\Theta}$$

и

$$u_1(x_2) - u_2(x_1) = \frac{a(x_2 - x_1)}{\Theta} = a\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\Theta}.$$

80. Рассмотрим сразу же применение теоремы Альфорса. Пусть функция

$$s = f(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \dots \tag{43}$$

регулярна в единичном круге $E_t (|t| < 1)$ и отображает его конформно на однолистную область D_s. Проведем в D_s разрез вдоль положительной действительной оси, начиная от $s = 0$ до ближайшей граничной точки; проведем также разрез вдоль прообраза γ этого сечения в единичном круге E_t. Посредством фиксированных ветвей функций $w = u + iv = \log s$ и $z = x + iy = \log t$ отобразим конформно эти области с разрезами на две полосообразные области D_w и E_z.

Пусть теперь Z_1 — бесконечно удаленная, а Z_2 — произвольная граничная точка области E_z, лежащая на мнимой оси. Как в п. 78, определим теперь сечение Θ_x области E_z, которое параллельно оси y-ов и отделяет Z_1 от Z_2; длина этого сечения, очевидно, $\leqslant 2\pi$, а длина $l(x)$ его образа l_x в области D_w, очевидно, $\geqslant 2\pi$. Метод, которому мы следовали в п. 79, дает нам тогда неравенство, справедливое для всех $x < 0$:

$$\int_x^0 l^2 \, dx \leqslant 2\pi A(x), \tag{44}$$

где $A(x)$ означает площадь части области D_w, отсекаемой от нее дугой l_x и расположенной справа от нее.

Этим неравенством мы сейчас воспользуемся для определения точного значения константы Кёбе, что другим методом было уже сделано в п. 75. Там мы видели, что если степенной ряд

$$\varphi(t) = t + a_2 t^2 + \dots$$

сходится в единичном круге $|t| < 1$ и отображает его конформно на однолистную область, у которой кратчайшее расстояние от нулевой точки до границы равно d, то с помощью операции извлечения корня и линейного преобразования (стр. 88) из функции $\varphi(t)$ можно получить функцию $f(t)$, у которой первый коэфициент разложения в степенной ряд в окрестности нулевой точки [ряд (43)] равен

$$c_1 = \frac{e^{-i\delta}}{4d} \qquad (\delta \text{ действительно}) \tag{45}$$

и которая далее отображает единичный круг E_t на однолистную область D_s, содержащую интервал $(0, 1)$, имеющую точку $s = 1$ своей граничной точкой и обладающую, кроме того, следующим свойством: если точка s лежит внутри D_s, то точка $\frac{1}{s}$ лежит вне D_s.

Применим теперь неравенство (44); для этого возьмем $|x|$ настолько большим, чтобы дуга l_x лежала целиком слева от мнимой оси, и разобьем площадь $A(x)$ на две части посредством сечения $u = u_0 < 0$, параллельного оси v. Так как лежащая справа от этого

сечения часть площади $A(x)$ не содержит, в силу вышеупомянутого свойства области D_x, точек, симметричных относительно $w=0$, то ее величина не превосходит $2\pi|u_0|$ и, следовательно,

$$A(x) \leqslant A_0(x) - 2\pi u_0,$$

где $A_0(x)$ означает часть площади $A(x)$, определяемую неравенством $u \leqslant u_0$. Если $u_1(x)$ означает наименьшее, а $u_1(x)+\omega(x)$ — наибольшее значения u на l_x, то $A_0(x) \leqslant 2\pi[u_0 - u_1(x)]$. Отсюда получаем

$$A(x) \leqslant -2\pi u_1(x) \tag{46}$$

и

$$l^2(x) \geqslant 4\pi^2 + \omega^2, \tag{47}$$

так что согласно (44)

$$-x + \frac{1}{4\pi^2}\int_x^0 \omega^2\,dx \leqslant -u_1(x). \tag{48}$$

Но из (43) для функции

$$u_1(x) = \min_{\log|t|=x} \log|f(t)|$$

мы получаем разложение

$$u_1(x) = \log|c_1| + x + \left(\frac{1}{x}\right), \tag{49}$$

где $\left(\frac{1}{x}\right)$ при $|x| \to \infty$ стремится к нулю и, следовательно, согласно (45) и (48),

$$-\log|c_1| = \log(4d) \geqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^0 \omega^2\,dx$$

или

$$d \geqslant \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^0 \omega^2\,dx} \geqslant \frac{1}{4}. \tag{50}$$

Предельное значение $\frac{1}{4}$ может быть достигнуто только тогда, когда $\omega=0$, т. е. когда при отображении $t \to s$ окружности $|t|=\text{const}$ переходят в концентрические окружности $|s|=\text{const}$. Тогда, следовательно, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$; далее, так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, то $u = ax + b_1$, $v = ay + b_2$ и

$$w = u + iv = az + b, \quad \text{где} \quad b = b_1 + ib_2.$$

Но, согласно (49), $-b_1 = \log(4d) = 0$, $a=1$ и, следовательно, $w = z + ib_2$, $s = e^{ib_2}t$. Значение $d = \frac{1}{4}$ достигается, таким образом,

только при этом специальном отображении; соответствующей областью в плоскости φ является тогда экстремальная область Кёбе (ср. п. 74).

Следовательно, теорема Альфорса об искажении границы легко приводит к классическим формулам искажения, определяющим деформацию *внутри* области при однолистных отображениях.

§ 5. Проблема Карлемана-Мию.

81. Применяя принцип расширения для гармонической меры, мы в § 2 этой главы получили некоторые оценки, которые, не являясь наилучшими, обладают все же степенью точности, которую для многих приложений можно рассматривать как достаточную. Решим теперь некоторые примыкающие сюда экстремальные проблемы, тесно связанные с проблемой Карлемана-Мию, которую мы уже рассматривали в § 2. Метод, которым мы при этом воспользуемся, дан Бойрлингом (Beurling) и автором [1]) и основан на интегральном представлении гармонической меры, которое мы сейчас рассмотрим.

Будем исходить из области G, границу Γ которой предположим сперва составленной из конечного числа аналитических дуг. Посредством конечного числа аналитических дуг β, замыкающихся в G или представляющих ее сечения, отделим от G известные подобласти так, чтобы осталась связная область G^*. Граница Γ^* этой области состоит из части α границы Γ и из дуг β.

Задача состоит в том, чтобы гармоническую меру граничных дуг α, измеренную относительно G^*, выразить через функцию Грина $g(\zeta, z)$ области G. Для этой цели в формуле преобразования Грина (п. 24) положим $U = g(\zeta, z)$, $V = \omega(\zeta, \alpha, G^*)$, а за область интегрирования возьмем область G^*, из которой предварительно удалим маленький кружок радиуса ρ с центром в полюсе $\zeta = z$. Совершая предельный переход $\rho \to 0$, мы тогда получим

$$2\pi\omega(z, \alpha, G^*) = \int_\alpha \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}\, ds - \int_\beta g \frac{\partial \omega(\zeta, \alpha, G^*)}{\partial n}\, ds,$$

или, так как

$$\int_\alpha \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n}\, ds = \int_\alpha dh(\zeta, z) = 2\pi\omega(z, \alpha, G)$$

и $\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial s}$, где $-h$ и $-\bar{\omega}$ означают гармонические функции, сопряженные соответственно с g и ω, то

$$\omega(z, \alpha, G^*) = \omega(z, \alpha, G) - \frac{1}{2\pi}\int_\beta g(\zeta, z)\, d\bar{\omega}(\zeta, \alpha, G^*). \qquad (51)$$

---

[1]) A. Beurling [1], R. Nevanlinna [11].

Формула (51) выведена в предположении, что дуги α и β аналитические. На самом деле она справедлива и тогда, когда α и β состоят из конечного числа жордановых дуг. В самом деле, точно так же, как и в п. 26, убеждаемся сперва, что функция ω остается непрерывной на границе β, и так как на этой границе ω равна нулю и возрастает по направлению внутрь области G^*, то ω должна непрерывно возрастать, когда ζ пробегает в положительном направлении дуги β. Применим затем формулу (51) к области G_ε^*, составляющей часть области G^* и ограниченной аналитическими кривыми $\omega(z, \alpha, G^*) = 1 - \varepsilon \left(\frac{1}{2} > \varepsilon > 0\right)$ и $\omega = \varepsilon$. Гармоническая мера первых дуг (обозначим их α_ε) относительно G_ε^* выражается *линейной* функцией от ω:

$$\omega(z, \alpha_\varepsilon, G_\varepsilon^*) = \frac{\omega(z, \alpha, G^*) - \varepsilon}{1 - 2\varepsilon}.$$

Подставляя выражение для $\omega(z, \alpha_\varepsilon, G_\varepsilon^*)$, относящееся к аналитическим кривым, в формулу (51), переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая непрерывность функции Грина на границе $\alpha + \beta$, увидим, что формула (51) справедлива и в том случае, когда α и β состоят из конечного числа жордановых дуг.

Легко заметить, что эта формула, играющая в дальнейшем важную роль, содержит как непосредственное следствие принцип расширения области. В самом деле, в силу того, что $d\overline{\omega} \geqslant 0$, интеграл в правой части формулы (51) неотрицателен и, следовательно,

$$\omega(z, \alpha, G^*) \leqslant \omega(z, \alpha, G),$$

что как раз и выражает принцип расширения.

82. Теперь мы ставим себе следующую задачу [1]) (проблема Карлемана-Мию):

Пусть G — однолистная область такая, что каждая окружность $|z| = r$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$ содержит по крайней мере одну точку, не принадлежащую к G. Пусть далее $u(z)$ — функция, однозначная и гармоническая в G, удовлетворяющая следующим условиям:

1) *В области G имеем $u(z) \geqslant 0$.*

2) *В каждой граничной точке z области G, лежащей внутри круга $|z| < R$, выполняется условие*

$$\underline{\lim}\, u(z) \geqslant 1.$$

Требуется найти нижнюю границу функции $u(z)$ на окружности $|z| = r$, $0 \leqslant r \leqslant R$, зависящую только от r.

Предварительное замечание. Если граница области G настолько регулярна, что можно говорить о гармонической мере граничных дуг α области G, лежащих в круге $|z| < R$ (это имеет, например, место, когда G ограничена только жордановыми дугами), то дело

[1]) Кроме вышеназванных работ Beurling'a и автора см. E. Landau [3] W. Fenchel [1], E. Schmidt [1].

идет, очевидно, об оценке снизу гармонической меры $\omega(z, \alpha, G)$ для $|z| = r$ $(0 < r < R)$. При этом как тривиальный может быть опущен от случай, когда все граничные точки области G, следовательно, и сама область G, лежат в круге $|z| < R$, ибо тогда α сод ржит всю границу области G и, следовательно, $\omega \equiv 1$. Предположим поэтому, что G содержит граничные точки, лежащие вне и и на границе того круга. По принципу расширения ω не увелич тся, если заменить G ее частью G_R, лежащей в круге $|z| < R$, и, следовательно, достаточно оценить снизу гармоническую меру $\omega(z, \alpha, G_R)$. Если зафиксировать точку $z = re^{i\varphi}$ области G_R, то представляется почти очевидным, что гармоническая мера дуги α в этой точке получает наименьшее значение тогда, когда все точки д ги α диаметрально противостоят точке $re^{i\varphi}$, т. е. когда α состоит из радиуса $(0, -Re^{i\varphi})$ и, следовательно, G_R состоит из круга $|z| < R$, в котором проведен разрез вдоль этого радиуса. Что это действительно так, получится из нижеследующего точного решения проблемы Карлемана-Мию. Чтобы более ясно представить себе наглядную идею, лежащую в основе этого решения, сделаем несколько предварительных наводящих замечаний, дающих ключ к решению, хотя для дальнейшего они не совсем необходимы.

Сперва поставим себе следующую более простую задачу: пусть задана функция $u(z)$, неотрицательная и гармоническая в G всюду, за исключением некоторых логарифмических полюсов z_ν, лежащих на заданных окружностях $|z| = r_\nu$ $(0 < r_\nu < R; \nu = 1, \ldots, n)$, в окрестности которых пусть $u(z)$ имеет разложение

$$u(z) = \delta_\nu \log \frac{1}{|z - z_0|} + \text{гармоническая функция},$$

где δ_ν — заданные положительные числа. Требуется найти нижнюю границу функции $u(z)$ на окружности $|z| = r$, зависящую только от r, r_ν и δ_ν.

Непосредственно убеждаемся, что разность

$$u(z) - \sum \delta_\nu g(z, z_\nu),$$

где

$$g(z, z_\nu) = \log \left| \frac{R^2 - \bar{z}_\nu z}{R(z - z_\nu)} \right|$$

есть функция Грина для круга $|z| \leqslant R$, является в круге $|z| < R$ гармонической функцией, которая в каждой точке окружности $|z| = R$ имеет неотрицательную нижнюю границу. Следовательно, по принципу минимума, эта разность неотрицательна во всем круге $|z| < R$, так что

$$u(z) \geqslant \sum \delta_\nu g(z, z_\nu).$$

Но для функции Грина g, как нетрудно убедиться, имеет место неравенство

$$\log\frac{R^2+|z_\nu||z|}{R(|z|+|z_\nu|)}\leqslant g(z,z_\nu)\leqslant\log\frac{R^2-|z_\nu||z|}{R||z|-|z_\nu||}$$

или

$$g(-|z|,\ |z_\nu|)\leqslant g(z,z_\nu)\leqslant g(|z|,\ |z_\nu|), \tag{52}$$

где равенство слева имеет место только для $\arg z=\arg z_\nu+\pi$, а справа только для $\arg z=\arg z_\nu$. Следовательно,

$$u(re^{i\varphi})\geqslant\sum\delta_\nu g(-r,r_\nu); \tag{53}$$

равенство имеет место тогда и только тогда, когда $z_\nu=-r_\nu e^{i\varphi}$, т. е. когда все полюсы диаметрально противостоят точке $re^{i\varphi}$.

Этим вспомогательная задача решена полностью. Но этим же результатом подготовляется путь для решения общей проблемы. В самом деле, представим себе, что число значений r_ν неограниченно возрастает, и попытаемся выбрать числа δ_ν так, чтобы сумма, стоящая справа в (53), приближалась к интегралу, который, если в нем вместо $-r$ писать переменную z, представляет функцию, принимающую на радиусе $(0, R)$ граничное значение 1, т. е. функцию, являющуюся не чем иным, как гармонической мерой этого радиуса относительно круга $|z|<R$ с разрезом вдоль радиуса $(0, R)$. Тогда неравенство (53) будет содержать как раз то решение проблемы, которое имелось в виду; одновременно предыдущими замечаниями намечен метод для обоснования неравенства, которое получится из (53) предельным переходом. Все сводится к возможности предельного перехода; что этот переход действительно возможен, доказывается с помощью интегрального представления гармонической меры, которое было выведено в п. 81.

Мы переходим теперь к прямому решению проблемы Карлемана-Мию. В формуле (51) (стр. 104) возьмем за G круг $|z|<R$, а за G^* — круг $|z|<R$ с разрезом β вдоль радиуса $(0, R)$. Дуга α *) состоит, следовательно, из всей окружности $|z|=R$, поэтому $\omega(z,\alpha,G)\equiv 1$, и так как $\omega(z,\beta,G^*)=1-\omega(z,\alpha,G^*)$, то

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi}\int_\beta g(\zeta,z)\,d\bar{\omega}(\zeta), \tag{54}$$

где $\omega(z)\equiv\omega(z,\beta,G^*)$ и $\bar{\omega}(z)\equiv\bar{\omega}(z,\beta,G^*)$.

С другой стороны, для гармонической меры $\omega(z)$ мы имеем явное выражение

$$\omega(z)=\frac{2}{\pi}\Re\left(\frac{1}{i}\log\frac{i(\sqrt{R}-\sqrt{z})}{\sqrt{R}+\sqrt{z}}\right)=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R-|z|}{|R-z|}$$

*) Имеется в виду дуга α, соответствующая формуле (51), т. е. часть границы области G, входящая в границу области G^*.

и, следовательно, для действительного положительного значения z, с точностью до постоянного слагаемого, имеем

$$\omega(z) = \frac{2}{\pi} \log \frac{\sqrt{R} - \sqrt{z}}{\sqrt{R} + \sqrt{z}}.$$

Если подставить это выражение в (54) и учесть, что разрез β имеет две стороны, то окончательно получим

$$\omega(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_{t=0}^{R} g(z, t)\, d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}}, \tag{55}$$

где

$$g(z, t) = \log \left| \frac{R^2 - zt}{R(z - t)} \right|.$$

Пусть теперь $z = re^{i\varphi}$ $(0 < r < R)$ — точка области G, в которой заданная функция $u(z)$ обладает указанными на стр. 105 свойствами. Зафиксируем для каждого $0 \leqslant t \leqslant R$ граничную точку $\zeta = te^{i\vartheta}$ области G; если таких точек не одна, то за ζ мы примем точку с наименьшим аргументом. Определенная таким образом функция $\vartheta = \vartheta(t)$ будет, очевидно, измерима. Построим функцию

$$v_\rho(z) = \frac{2}{\pi^2} \int_{t=0}^{\rho} g(z, \zeta)\, d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}} \qquad (0 < \rho < R).$$

Непосредственно видно, что эта функция обладает следующими свойствами:

1) $v_\rho(z)$ *гармонична в каждой точке* $z \neq \zeta$ *круга* $|z| < R$.

2) $v_\rho(z)$ *на окружности* $|z| = R$ *обращается в нуль.*

Кроме этих очевидных свойств функция $v_\rho(z)$ обладает еще следующим свойством:

3) $v_\rho(z) \leqslant 1$ *для* $|z| \leqslant R$.

Для доказательства последнего используем элементарные оценки (52). Согласно правой из них, учитывая (55), получается

$$v_\rho(z) \leqslant \frac{2}{\pi^2} \int_{0}^{R} g(|z|, t)\, d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}} = \omega(|z|) = 1.$$

Рассмотрим теперь часть G_R области G, лежащую в круге $|z| < R$. Учитывая предположения поставленной проблемы, из свойств 1, 2 и 3 заключаем, что разность $u(z) - v_\rho(z)$, являющаяся функцией, гармонической в G_R, имеет в каждой граничной точке этой области неотрицательную нижнюю границу. Из принципа минимума следует тогда, что $u(z) \geqslant v_\rho(z)$ в каждой точке области G_R. Далее, применяя левую часть неравенства (52), получаем соотношение

$$u(re^{i\varphi}) \geqslant v_\rho(re^{i\varphi}) \geqslant \frac{2}{\pi^2} \int_{0}^{\rho} g(-|z|, t)\, d \log \frac{\sqrt{R} + \sqrt{t}}{\sqrt{R} - \sqrt{t}},$$

откуда при $\rho \to R$ следует ($v_R = \lim v_\rho$), что

$$u(re^{i\varphi}) \geqslant v_R(re^{i\varphi}) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\int_0^R g(-|z|, t)\, d\log\frac{\sqrt{R}+\sqrt{t}}{\sqrt{R}-\sqrt{t}} =$$

$$= \omega(-|z|) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{R-r}{R+r}. \qquad (56)$$

Покажем еще, что стоящая справа нижняя граница может достигаться функцией u только тогда, когда G состоит из круга $|z|<R$ с радиальным разрезом от 0 до $-e^{i\varphi}$ и, следовательно, $u(z) \equiv \omega(-ze^{-i\varphi})$. Согласно (52) равенство $v_R(re^{i\varphi}) = \omega(-r)$ выполняется только тогда, когда почти для всех значений t имеем $\vartheta = \varphi + \pi$. Отсюда следует, что радиус $(0, -Re^{i\varphi})$ не может содержать ни одной внутренней точки области G. Поэтому в функции сравнения v_ρ можно положить $\vartheta = \varphi + \pi$ и тем самым $v_R(z) = \omega(-ze^{-i\varphi})$. Если мы теперь хотим, чтобы функция $u - v_R$, гармоническая и, согласно (56), не отрицательная в G_R, обращалась в нуль в точке $z = re^{i\varphi}$ этой области, то, согласно принципу минимума, должно быть

$$u(z) \equiv v_R(z) \equiv \omega(-ze^{-i\varphi}).$$

Этим решена и та часть проблемы, которая относится к знаку равенства.

Замечание. Из предыдущих выкладок следует не только (56), но даже более точная оценка

$$u(re^{i\varphi}) \geqslant \omega(-r) + \frac{2}{\pi^2}\int_0^R \log\left|\frac{(R^2-\bar{\zeta}z)(t+r)}{(\zeta-z)(R^2+tr)}\right| d\log\frac{\sqrt{R}+\sqrt{t}}{\sqrt{R}-\sqrt{t}} \geqslant$$

$$\geqslant \omega(-r) + \frac{r(R-r)}{\pi^2 R^3\sqrt{R}}\int_0^R \sqrt{t}\cos^2\frac{\vartheta(t)-\varphi}{2}\, dt.$$

83. Проблема Карлемана-Мию и данный выше метод ее решения могут быть обобщены в различных направлениях. К одному такому обобщению мы приходим, заменяя сделанное выше предположение относительно границы следующим более общим.

На положительной действительной оси *существует последовательность интервалов* Δ_ν: $r_\nu' - r_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$; $0 \leqslant r_\nu < r_\nu' < r_{\nu+1} \leqslant R$) *таких, что каждая окружность* $|z| = r$ *для* $r_\nu \leqslant r \leqslant r_\nu'$ *содержит по крайней мере одну граничную или внешнюю точку области* G. Обозначим систему отрезков Δ_ν через Δ. Тогда имеет место

Теорема 1. *Если функция* $u(z)$ *удовлетворяет в вышеопределенной области* G *условиям* 1 *и* 2 (стр. 105), *то в каждой точке* z ($|z| < R$) *этой области*

$$u(z) \geqslant \omega(-|z|), \qquad (57)$$

где $\omega(z)$ означает гармоническую меру системы Δ относительно круга $|z|<R$ с разрезами вдоль отрезков этой системы.

Равенство в (57) имеет место тогда и только тогда, когда G получается вращением круга $|z|<R$ с указанными разрезами на угол φ; при этом оно имеет место для всех точек z, лежащих на радиусе $(0, -Re^{i\varphi})$.

Доказательство проводится точно таким же образом, как выше, с помощью вытекающего из (54) интегрального представления гармонической меры $\omega(z,\Delta)$ разрезов Δ:

$$\omega(z,\Delta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta} g(\zeta,z)\,d\bar{\omega}(\zeta,\Delta);$$

здесь g означает функцию Грина круга $|z|<R$ и $\bar{\omega}$ — сопряженную к ω гармоническую функцию; интегрирование по Δ производится в положительном направлении $(d\bar{\omega}\geqslant 0)$.

84. Предыдущие рассуждения наводят на следующий вопрос, решенный Beurling'ом [1]:

Как должны быть расположены интервалы Δ на радиусе $(0, R)$, чтобы при заданной сумме их длин m $(0<m<R)$ гармоническая мера $\omega(0,\Delta)$ была возможно меньшей?

Почти очевидно, что этот экстремальный случай имеет место тогда, когда интервалы Δ удалены возможно дальше от нулевой точки и, следовательно, образуют единственный интервал $(R-m, R)$. Докажем это теперь строго.

Для доказательства рекомендуется наряду с обычной мерой интервалов Δ

$$m=\int_{\Delta} dr=\sum (r_\nu'-r_\nu)$$

взести их логарифмическую меру

$$l=\int_{\Delta} d\log r=\log\frac{r_1'\dots r_n'}{r_1\dots r_n}.$$

Из равенства

$$r_\nu'-r_\nu=r_\nu'\left(1-e^{-\log\frac{r_\nu'}{r_\nu}}\right)$$

видно, что логарифмическая мера интервала (r_ν, r_ν') уменьшается при удалении интервала от нулевой точки. Следовательно, логарифмическая длина последовательности интервалов Δ с заданной суммой длин m достигает своего минимума l_0 тогда, когда Δ совпадает с интервалом $(R-m, R)$. Но, согласно предыдущему равенству, для этого особого положения

$$m=R(1-e^{-l_0}),$$

и, следовательно, между обычной и логарифмической мерами последовательности Δ на радиусе $(0, R)$ имеет место общее соотношение

$$m\leqslant R(1-e^{-l}). \tag{58}$$

После этих предварительных замечаний предположим сперва, что Δ состоит из одного интервала (r_1, r_1') $(0 < r_1 < r_1' < R)$. Сравним гармоническую меру $\omega(z, \Delta)$ этого интервала с гармонической мерой интервала

Δ_0: $$\left(Re^{-l} = \frac{r_1}{r_1'} R, R\right),$$

имеющего ту же логарифмическую длину l, что и Δ. Для этой цели учтем, что $\omega\left(z\frac{r_1'}{R}, \Delta\right)$ является в области G_{Δ_0} (круг $|z| < R$ с разрезом вдоль Δ_0) гармонической и неотрицательной функцией, принимающей на Δ_0 значение 1. Следовательно, граничные значения разности

$$\omega\left(z\frac{r_1'}{R}, R\right) - \omega(z, \Delta_0)$$

неотрицательны, и из принципа минимума следует, что эта разность неотрицательна во всей области G_{Δ_0} и, следовательно, в частности, для $z = 0$

$$\omega(0, \Delta) \geqslant \omega(0, \Delta_0), \tag{59}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\Delta \equiv \Delta_0$.

Если Δ состоит из нескольких интервалов, то применяем следующий метод редукции: $\omega(z, \Delta)$ разбиваем на две части

$$\omega(z, \Delta) = \omega_1(z) + \omega_2(z),$$

где

$$\omega_1(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta = r_1}^{r_1'} g(\zeta, z)\, d\bar{\omega}(\zeta, \Delta)$$

и где $\omega_2(z) = \omega(z, \Delta) - \omega_1(z)$ представляется, следовательно, аналогичным образом в виде интеграла, взятого по остальным интервалам.

Выражение

$$v(z) = \omega_1\left(\frac{r_1'}{r_2} z\right) + \omega_2(z)$$

в точках $|z| < R$, лежащих вне интервалов

Δ_1: $$\left(\frac{r_1 r_2}{r_1'}, r_2'\right), \quad (r_\nu, r_\nu') \qquad (\nu = 3, \ldots, n)$$

является гармонической и неотрицательной функцией от z. Чтобы исследовать ее граничные значения, заметим, что функция Грина $g(t, r)$ $(0 < r < t < R)$ возрастает вместе с r, и, следовательно, для $|z| = r$, $\frac{r_1 r_2}{r_1'} < r < r_2$ имеем

$$v(r) = \omega_1\left(\frac{r_1' r}{r_2}\right) + \omega_2(r) > \omega_1\left(\frac{r_1' r}{r_2}\right) + \omega_2\left(\frac{r_1' r}{r_2}\right) =$$

$$= \omega\left(\frac{r_1' r}{r_2}, \Delta\right) = 1.$$

С другой стороны, для $0 < t < r < R$ функция $g(t, r)$ убывает при возрастании r и, следовательно, для $r_\nu < r < r_\nu'$ $(\nu \geqslant 2)$

$$v(r) > \omega_1(r) + \omega_2(r) = \omega(r, \Delta) = 1.$$

Из предыдущего следует, что гармоническая в G_{Δ_1} функция $v(z) - \omega(z, \Delta_1)$ имеет неотрицательные граничные значения, и, на основании принципа минимума, заключаем, что $v(0) = \omega(0, \Delta) > \omega(0, \Delta_1)$. Следовательно, гармоническая мера $\omega(0, \Delta)$ уменьшается при замене n интервалов Δ $n-1$ интервалами, имеющими ту же сумму логарифмических длин l, что интервалы Δ.

Повторяя эту операцию $n-1$ раз, мы придем к уже рассмотренному случаю одного интервала заданной логарифмической длины l. Это позволяет высказать следующую теорему:

Для последовательности интервалов Δ с суммой логарифмических длин, равной l, выполняется соотношение

$$\omega(0, \Delta) \geqslant \omega(0, \Delta_0), \tag{60}$$

где Δ_0 означает интервал

Δ_0: $\qquad (Re^{-l}, R).$

Равенство имеет место только для $\Delta \equiv \Delta_0$.

Применяя соотношение (58), мы получаем отсюда далее аналогичный результат для последовательности Δ с заданной обычной длиной:

Для последовательности интервалов Δ с суммой длин, равной m $(0 < m < R)$, выполняется соотношение

$$\omega(0, \Delta) \geqslant \omega(0, \Delta_0), \tag{60'}$$

где Δ_0 означает интервал

Δ_0: $\qquad (R-m, R).$

Равенство имеет место только для $\Delta \equiv \Delta_0$.

85. Легко подсчитать величину $\omega(0, \Delta_0)$, стоящую в формулах (60) и (60'), где Δ_0 означает интервал (ρ, R), лежащий на положительной действительной оси $(\rho = R - m = Re^{-l})$. В самом деле, если выполнить линейное преобразование

$$\frac{R^2(z+\rho)}{R^2 + z\rho}, \tag{61}$$

переводящее круг $|z| < R$ в самого себя так, что интервал $(0, R)$ переходит в интервал (ρ, R) и точка $z = -\rho$ соответствует нулевой точке, то, в силу инвариантности гармонической меры относительно конформных отображений, имеем

$$\omega(0, \Delta_0) = \omega(-\rho) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R-\rho}{R+\rho} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{e^l - 1}{e^l + 1} = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1-\theta}{1+\theta},$$

где $m = (1-\theta)R$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$.

Соотношения (60) и (60′) можно, следовательно, объединить в неравенство

$$\omega(0, \Delta) \geqslant \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1-\Theta}{1+\Theta}, \tag{62}$$

которое справедливо для множества Δ на радиусе $(0, R)$, обычная и логарифмическая меры которого соответственно равны (или больше) $(1-\Theta)R$ и $\log \frac{1}{\Theta}$.

Равенство имеет место только тогда, когда Δ совпадает с интервалом $(\Theta R, R)$.

Следует отметить еще дальнейшую интерпретацию этого результата. Пусть $\overline{\Delta}$ означает дополнительную к Δ часть радиуса $(0, R)$; ее *гиперболическая длина*, измеренная относительно круга $|z| \leqslant R$, равна

$$R \int_{\overline{\Delta}} \frac{dr}{R^2 - r^2}.$$

При заданном $m = (1-\Theta)R$ эта логарифмическая длина достигает, очевидно, своего минимума λ тогда, когда $\overline{\Delta}$ совпадает с интервалом $(0, \Theta R)$; при этом для λ получается значение

$$\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1+\Theta}{1-\Theta}.$$

Отсюда следует, что соотношение (62) справедливо тогда, когда гиперболическая длина множества $\overline{\Delta}$, дополнительного к Δ на радиусе $(0, R)$, не больше чем

$$\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1+\Theta}{1-\Theta}. \tag{63}$$

Равенство же имеет место только тогда, когда $\overline{\Delta}$ совпадает с интервалом $(0, \Theta R)$.

86. В соединении с теоремами п. 84 получается тогда

Теорема 2. *Пусть $R > 0$, $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$ и G — область, содержащая нулевую точку. Обозначим через $Q(r)$ множество значений $r\ (0 \leqslant r \leqslant R)$, для которых окружность $|z| = r$ содержит по крайней мере одну граничную или внешнюю точку области G, и предположим, что область G удовлетворяет одному из следующих 3 условий:*

a) *Мера множества $Q(r)$ не меньше, чем $(1-\Theta)R$.*

b) *Логарифмическая мера $Q(r)$ не меньше, чем $\log 1/\Theta$.*

c) *Измеренная относительно круга $|z| < R$ неевклидова (гиперболическая) длина дополнительного к $Q(r)$ множества $P(r)$, которое состоит, следовательно, из тех значений $r\ (0 \leqslant r \leqslant R)$, для которых окружность $|z| = r$ целиком пробегает в G, не больше $\lambda = \frac{1}{2} \log \frac{1+\Theta}{1-\Theta}$.*

Пусть далее $u(z)$ — функция, обладающая следующими свойствами:

1) *$u(z)$ в области G однозначна, гармонична и неотрицательна.*

2) *В каждой граничной точке области G, лежащей в круге $|z|<R$, $\overline{\lim}\, u(z)\geqslant 1$.*

При этих условиях

$$u(0)\geqslant \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1-\Theta}{1+\Theta}. \tag{64}$$

Равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда область G совпадает с областью G_{Δ_φ}, которая получается из круга $|z|<R$, если в нем на произвольном радиусе $\arg z=\varphi$ провести разрез вдоль отрезка $\Theta R\leqslant|z|\leqslant R$ и функция $u(z)$ представляет гармоническую меру этого отрезка Δ_φ, измеренную относительно G_{Δ_φ}.

Обратим внимание на два непосредственных следствия из этой общей теоремы. Условия 1) и 2) выполняются в частности тогда, когда $u(z)$ заменяются гармонической мерой $\omega(z, \alpha, G)$ множества α граничных точек области G, лежащих в круге $|z|<R$. При учете многократно упоминавшегося геометрического значения гармонической меры при конформном отображении соответствующей области на единичный круг из теоремы 2 получается:

Теорема 3. *Если область G удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и α — множество граничных ее точек, лежащих в круге $|z|<R$, то при конформном отображении области G (или в случае, если она многосвязна, ее универсальной поверхности наложения G^∞) на единичный круг $|x|<1$ так, что нулевая точка переходит сама в себя, множество α переходит в множество α' на единичной окружности $|x|=1$, мера которого не меньше*

$$4\arcsin\frac{1-\Theta}{1+\Theta}.$$

Равенство имеет место только в случае области G_{Δ_φ}.

Другое непосредственное применение относится к теореме о двух константах.

Теорема 4. *Пусть $w(z)$ — аналитическая функция, удовлетворяющая в вышеопределенной области следующим условиям:*

1) *$w(z)$ в области G однозначна и регулярна.*

2) *В каждой внутренней точке области G выполняется неравенство $|w(z)|<1$ и в каждой граничной ее точке, лежащей в круге $|z|<R$, $\overline{\lim}\,|w|\leqslant\delta$, где δ — заданное число из интервала $(0, 1)$.*

При этих условиях

$$|w(0)|\leqslant\delta^{\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{1-\Theta}{1+\Theta}}.$$

Равенство имеет место только для области G_{Δ_φ} и функции $w(z)$, определенной равенством

$$\log w(z)=\frac{2\log\delta}{\pi i}\log\left(i\,\frac{\sqrt{R-z\Theta}-\sqrt{z-R\Theta}}{\sqrt{R-z\Theta}+\sqrt{z-R\Theta}}\right),$$

абсолютное значение которой на окружности $|z|=R$ *равно* 1 *и на интервале* Δ_φ *равно* δ.

87. Для многих приложений важно иметь подобные оценки и для точек круга $|z|<R$, отличных от нулевой точки. Такие оценки можно получить из вышеизложенных теорем, если конформно отобразить круг $|z|<R$ самого на себя так, чтобы заданная точка z_0 перешла в нулевую точку. При этом удобно пользоваться гиперболической мерой, инвариантной относительно таких преобразований. Из теоремы 2 непосредственно получается тогда

Теорема 5. *Пусть область* G, *для которой точка* z_0 ($|z_0|<R$) *является внутренней точкой, обладает следующими свойствами: мера тех значений* ρ, *для которых гиперболическая окружность* $K_\rho(z_0)$ *с центром в точке* z_0 *и радиусом гиперболической длины* ρ *целиком пробегает в области* G, *самое большее равна* λ.

Тогда, если функция $u(z)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 2, *то*

$$u(z_0)\geqslant\frac{2}{\pi}\arcsin e^{-2\lambda}. \tag{65}$$

Равенство имеет место только тогда, когда G *совпадает с областью, которая получается из круга* $|z|<R$, *если в нем провести разрез от произвольной точки* P_λ *окружности* $K_\lambda(z_0)$ *до окружности* $|z|=R$ *вдоль продолжения неевклидового отрезка* $(0, P_\lambda)$. Соответствующая экстремальная функция u представляет гармоническую меру этого сечения.

В случае односвязной области G заключаем, что неравенство (65) выполняется для всякой функции u, удовлетворяющей в G условиям 1), 2) теоремы 2, причем λ означает кратчайшее неевклидово расстояние от точки z_0 до границы области G; в качестве области, относительно которой определяется неевклидова мера, попрежнему используется произвольно заданный круг $|z|\leqslant R$.

V. МНОЖЕСТВА ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ НУЛЬ.

§ 1. Определение множеств гармонической меры нуль.

88. На возможность обобщения теории гармонической меры было указано еще в гл. II. Непосредственное обобщение получается, если, сохраняя предположение, что граница Γ области G состоит из конечного числа жордановых дуг, за множество α принять не множество граничных дуг, а произвольное множество точек *) на Γ. Если снова конформно отобразить универсальную поверхность на-

*) В дальнейшем в этой главе рассматриваются только мвожества *точек* (Punktmengen). Для упрощения мы в переводе будем называть их просто множествами.

ложения G^∞ области G на единичный круг K, то множеству α будет взаимно однозначно соответствовать определенное множество α_x точек единичной окружности $|x|=1$. Если α_x измеримо (по Лебегу), то мы называем α *гармонически измеримым* относительно G. Применяя теорию интеграла Пуассона в ее обобщенной форме, в которой она была развита Фату на основании лебеговской теории меры, можно было бы определить гармоническую меру $\omega(z, \alpha, G)$ в полной аналогии с определениями гл. II. Откладывая подобные рассмотрения до гл. VII, займемся сейчас множествами гармонической меры нуль; при предыдущих предположениях они определяются следующим образом:

Множество α имеет относительно области G гармоническую меру нуль, если его образ α_x имеет линейную меру нуль, т. е. если α_x может быть покрыто последовательностью дуг со сколь угодно малой суммой длин.

По этому определению гармоническая мера $\omega(z, \alpha, G)$ граничного множества α получает значение нуль независимо от выбора точки z.

89. Однако обращение в нуль гармонической меры остается относительным в том смысле, что оно является свойством, зависящим от соответствующей области G. Можно было бы привести примеры множеств α, которые относительно одной области являются гармоническими нульмножествами, в то время как относительно другой области они имеют положительную гармоническую меру. В дальнейшем мы введем в рассмотрение класс множеств весьма общего характера, для которых обращение в нуль гармонической меры может быть определено так, что оно становится *абсолютным* признаком множества.

Рассмотрим сперва *замкнутое* множество α, отличное от полной плоскости. Дополнительное к α множество G состоит из одной или нескольких (во всяком случае счетного числа) связных областей; в последнем случае всякие две из них отделяются одна от другой некоторым континуумом, принадлежащим к α.

Удалим теперь из G маленькую область, ограниченную или образованную жордановой дугой β, и обозначим через G_β остающуюся, граничащую с β связную часть множества G. Затем рассмотрим последовательность подобластей G^n множества G, каждая из которых ограничена конечным числом жордановых дуг α_n и таких, что

$$G^1 < G^2 < \ldots; \quad G^n \to G,$$

так что всякая подобласть множества G содержится в G^n, коль скоро n достаточно велико *).

Если обозначить через G_β^n связную часть области G^n, ограниченную дугами α_n и вспомогательной кривой β, то можно обра-

*) Говоря о подобласти, автор здесь и в дальнейшем имеет в виду область, которая *вместе со своей границей* лежит в данной области.

зовать гармоническую меру $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$ дуг α_n относительно области G_β^n. По принципу расширения (гл. IV, § 2) эта величина, значения которой лежат в интервале (0, 1), при возрастании n монотонно убывает, и, следовательно, в каждой точке области G_β существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$, который мы естественным образом определяем как *гармоническую меру множества α относительно области G_β* и соответственно с этим обозначаем через $\omega(z, \alpha, G_\beta)$. Мы покажем, что эта предельная функция, удовлетворяющая, в силу своего определения, в каждой точке области G_β условию $0 \leqslant \omega < 1$, *гармонична* в этой области. Это доказывается с помощью нижеследующей леммы, которая используется и в дальнейшем и содержит в основном классический принцип Харнака (Harnack).

Лемма. *Пусть $u(z)$ — однозначная неотрицательная гармоническая функция в связной области D. Если z_0 — точка и B — замкнутая область, лежащие в области D *), то существует такое, зависящее только от конфигурации (z_0, B, D) число k, $0 < k < 1$, что в каждой точке области B имеет место соотношение*

$$ku(z_0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{1}{k} u(z_0). \tag{1}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, можно предполагать, что область B связна и содержит точку z_0, ибо это всегда может быть достигнуто подходящим расширением области B. Кратчайшее расстояние между границами областей B и D измеряется некоторым положительным числом d. Покроем плоскость сетью квадратов со стороной $r < \frac{d}{4}$, содержащей точку z_0 в качестве одной из вершин. Квадраты, имеющие с B по крайней мере одну общую точку (следовательно, и бесконечное число общих точек), образуют связную многоугольную область P, покрывающую B. Каждая граничная точка области P отстоит по крайней мере от одной точки области B на расстоянии $< r\sqrt{2} < 2r$. Следовательно, P лежит целиком в D и отстоит от границы последней на расстоянии $> d - 2r > 2r$.

Зафиксируем теперь вершины $z_0, z_1, \ldots, z_m$ квадратов, образующих P, и покроем P, а тем самым и B кругами $|z - z_\nu| < 2r$ $(\nu = 0, 1, \ldots, m)$, которые все лежат в D. С помощью интеграла Пуассона получаем

$$u(z_0 + te^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + 2re^{i\vartheta}) \frac{4r^2 - t^2}{4r^2 + t^2 - 4rt\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\vartheta$$

*) Далее автор предполагает еще ограниченность области B, что не нарушает общности, так как это может быть достигнуто, например, линейным преобразованием, удаляющим в бесконечность какую-нибудь граничную точку области D.

и, так как для $|t| \leqslant r$ ядро интеграла изменяется между пределами $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ и далее

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + 2re^{i\vartheta})\,d\vartheta = u(z_0),$$

то

$$\frac{u(z_0)}{3} \leqslant u(z_0 + te^{i\varphi}) \leqslant 3u(z_0).$$

В частности, это соотношение имеет место в вершинах z_ν, смежных с z_0. Повторяя шаг за шагом это заключение в различных кругах покрытия, мы придем к результату, что соотношение (1), наверное, имеет место во всей области B, если положить постоянную k равной 3^{-m}.

90. Вернемся теперь к монотонно убывающей последовательности $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$ и зафиксируем произвольную точку z_0 в подобласти B области G_β. Коль скоро n будет достаточно велико, то область B и точка z_0 будут содержаться в G_β^n. Так как предел

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) = \lim \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$$

существует, то, для $\varepsilon > 0$ и $z = z_0$, функция $u_{mn}(z)$, определенная равенством

$$-u_{mn}(z) = \omega(z, \alpha_m, G_\beta^m) - \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n),$$

для $m > n$ представляет в B неотрицательную гармоническую функцию и, коль скоро n выбрано достаточно большим, становится меньше ε. Тогда для тех же значений n в любой подобласти B_0 области B выполняется соотношение

$$u_{mn}(z) < \frac{1}{k}\,\varepsilon,$$

где k — указанная в лемме постоянная, определяемая конфигурацией (z_0, B_0, B). Этим показано, что последовательность $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$ сходится в B_0 равномерно; следовательно, предельная функция гармонична в B_0, а тем самым и в G_β.

Важно заметить, что выражение $\omega(z, \alpha, G_\beta)$, которое мы поставили в соответствие множеству α в качестве его гармонической меры относительно G_β, не зависит от выбора последовательности G_β^n. В самом деле, если $G_\beta'^n$ — вторая аппроксимирующая последовательность, исчерпывающая G_β, то для заданного m можно найти такое большое число n, что область G_β^n содержит область $G_\beta'^m$ как подобласть, и тогда, согласно принципу расширения,

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) < \omega(z, \alpha_m', G_\beta'^m);$$

следовательно, предельная функция левой последовательности не превосходит предельной функции правой последовательности. Но

таким же образом мы найдем обратное неравенство, откуда следует тождественность предельных функций.

91. *Замечание.* Встает вопрос, нельзя ли, избегая предыдущий процесс аппроксимации, построить более прямо гармоническую меру $\omega(z, \alpha, G_\beta)$, пользуясь методом, подобным употребленному при построении гармонической меры жордановой дуги. Это действительно возможно, но требует более общих теорем о конформном отображении универсальной поверхности наложения, чем примененные в главах I—IV, почему мы выше предложили более элементарный способ.

Однако стоит в нескольких словах наметить и прямое построение. Для области G_β можно построить универсальную поверхность наложения G_β^∞, которая посредством линейно-полиморфной функции $x = x(z)$ может быть конформно отображена на единичный круг $|x| < 1$. При этом жордановой кривой β будет соответствовать счетное множество не имеющих общих точек сегментов β_ν' единичной окружности $|x| = 1$. Если положить

$$\omega(x, \beta') = \sum \omega(x, \beta_\nu'),$$

где $\beta' = \sum \beta_\nu'$ и $\omega(x, \beta_\nu')$ означает гармоническую меру дуги β_ν' относительно единичного круга, то $\omega(x, \beta')$ представит гармоническую функцию от x, равную 1 на β' и, как это легко показать с помощью так называемой теоремы Фату (гл. VII, § 3), исчезающую почти всюду на дополнительном граничном множестве α'. Поэтому величину $\omega(x, \alpha') \equiv 1 - \omega(x, \beta')$ естественно принять за гармоническую меру множества α'. Если вместо x подставить функцию $x = x(z)$, то легко можно доказать, что функция $\omega(x(z), \alpha')$ совпадает с вышеопределенной гармонической мерой $\omega(z, \alpha, G_\beta)$.

92. Что касается свойств гармонической меры $\omega(z, \alpha, G_\beta)$, то заметим сперва, что на вспомогательной кривой β она должна исчезать. В самом деле, это непосредственно следует из того, что аппроксимирующая функция $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n)$ обладает этим свойством и монотоино убывает при $n \to \infty$.

Напротив, о поведении $\omega(z, \alpha, G_\beta)$ на заданном множестве α нельзя сделать никаких определенных заключений. Правда, на соответствующих границах α_n аппроксимирующие функции принимают значение 1, но, так как эти функции монотонно убывают, то отсюда еще не следует, что предельная функция на α непрерывна и равна 1. Может даже случиться, что $\omega(z, \alpha, G_\beta)$ тождественно равна нулю. Так, например, это имеет место тогда, когда α состоит из *одной* точки, например, из точки $z = 0$. Если тогда за вспомогательную кривую β взять, например, окружность $|z| = 1$ и в качестве аппроксимирующих областей взять кольца $r < |z| < 1$, то соответствующая аппроксимирующая функция будет равна гармонической мере $\frac{\log|z|}{\log r}$ окружности $|z| = r$ относительно кольца и будет стремиться к нулю при $r \to 0$.

Если, напротив, ω не исчезает тождественно, то $\overline{\lim}\,\omega$ на α имеет *положительную* нижнюю границу. В самом деле, если α окружить замкнутой кривой β_0, расположенной в G_β, то ω будет иметь на β_0 положительный минимум $\Theta < 1$. Пусть теперь z_0 — любая точка той части G_0 области G_β, которая ограничена α и β_0. Возьмем n настолько большим, чтобы как β_0, так и z_0 содержались в $G_\beta{}^n$. Так как $\omega(z, \alpha_n, G_\beta{}^n)$, наверное, больше, чем $\omega(z, \alpha, G_\beta)$, то на β_0

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta{}^n) > \Theta.$$

На α_n эта гармоническая мера равна 1, поэтому на основании принципа минимума мы заключаем, что предыдущее неравенство справедливо во всей области $G_0{}^n$ (часть области $G_\beta{}^n$, ограниченная α_n и β_0). При $n \to \infty$ отсюда следует, что $\omega(z, \alpha, G_\beta) \geqslant \Theta$ во всей области G_0, откуда непосредственно получается нужное нам утверждение.

Стоит еще заметить, что гармоническая мера множества α может быть определена также следующим образом:

$\omega(z, \alpha, G_\beta)$ равна верхней границе семейства тех гармонических в G_β функций $v(z)$, которые равны нулю на β и меньше, чем 1 в G_β.

Так как ω сама принадлежит к семейству (v), то достаточно показать, что в G_β

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) - v(z) \geqslant 0$$

для любой функции (v).

Но из принципа минимума непосредственно следует, что в $G_\beta{}^n$

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta{}^n) - v(z) \geqslant 0,$$

откуда при $n \to \infty$ следует утверждение.

93. В дальнейшем нас будет занимать упомянутый выше случай, когда предельная функция $\omega(z, \alpha, G_\beta)$ *тождественно* обращается в нуль. Этот случай мы здесь исследуем несколько более подробно.

Во-первых, из принципа минимума следует, что если гармоническая мера ω исчезает в одной точке, то это должно иметь место в каждой точке. Следовательно, свойство заданного множества быть „гармоническим нульмножеством" не зависит от положения точки z. Но то же самое справедливо и относительно вспомогательной кривой β:

Если для некоторой вспомогательной кривой β, *лежащей в* G,

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0,$$

то то же самое справедливо и для всякой вспомогательной кривой β *в* G.

Доказательство. Пусть $\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0$ и β^* — любая другая вспомогательная кривая, лежащая в G; нужно показать, что $\omega(z, \alpha, G_{\beta^*}) = 0$. Для этого выберем связную подобласть T_0 множества G, ограниченную жордановой кривой γ_0 и содержащую

как β, так и β^* (возможность выбора такой подобласти не нарушает общности, как это будет показано в п. 94). Проведем в T_0 жорданову кривую γ_1, окружающую β и β^*. Кривые γ_0 и β^* ограничивают некоторую подобласть G_0 множества G. Пусть

$$\Theta = \max \omega(z, \gamma_0, G_0) \text{ для } z \text{ на } \gamma_1.$$

Этот максимум лежит в интервале $0 < \Theta < 1$.

Выберем теперь произвольное число $\varepsilon > 0$; мы можем тогда подобрать такую область G^n, аппроксимирующую G, чтобы $\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) < \varepsilon$, как бы ни выбиралась точка z в пересечении областей G_β^n и T_0. В частности это, следовательно, имеет место на γ_0.

С той же самой областью G^n и кризой β^* образуем теперь гармоническую меру $\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n)$; пусть максимумы этой величины на γ_0 и γ_1 соответственно равны λ_0 и λ_1; они лежат между нулем и единицей. Разность

$$\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^* n}) - \omega(z, \alpha_n, G_\beta{}^n)$$

в общей части $G_1{}^n$ областей $G_\beta{}^n$ и $G_{\beta^* n}$, ограниченной кривой γ_1 и дугами α_n, является гармонической функцией, которая исчезает на α_n и меньше, чем λ_1 на кривой γ_1. В силу принципа максимума эта разность меньше, чем λ_1 во всей области $G_1{}^n$, в частности на γ_0, откуда следует, что $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 + \varepsilon$.

Образуем теперь разность

$$\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^* n}) - \lambda_0 \omega(z, \gamma_0, G_0),$$

представляющую в G_0 гармоническую функцию. На граничной кривой β^* эта разность равна нулю, а на γ_0 принимает неположительные значения. В силу принципа максимума эта разность неположительна во всей области G_0. Если за точку z выбрать точку кривой γ_1, в которой $\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^* n})$ достигает своего максимума λ_1, то отсюда следует, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_0 \Theta$. Если соединить это с соотношением $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 + \varepsilon$, то получится

$$\lambda_1 \leqslant \frac{\Theta}{1-\Theta} \varepsilon$$

и a fortiori

$$\omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n) \leqslant \frac{\Theta}{1-\Theta} \varepsilon$$

в каждой точке кривой γ_1. Так как ε здесь может быть выбрано сколь угодно малым, то нижняя граница $\underline{\lim}\, \omega(z, \alpha_n, G_{\beta^*}^n)$ должна равняться нулю, откуда следует утверждение, что $\omega(z, \alpha, G_{\beta^*}) \equiv 0$.

94. Предыдущая теорема показывает, что равенство нулю гармонической меры представляет свойство множества α, не зависящее от выбора вспомогательной кривой β, если только последняя всегда берется в одной и той же связной части множества G. Но такое

ограничение на выбор кривой β не является существенным, как это видно из следующей теоремы:

Если множество α содержит континуум, то

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) > 0$$

в каждой внутренней точке z множества G.

В самом деле, если взять произвольную внутреннюю точку z_0 множества G, то, в силу сделанного предположения, содержащая ее связная подобласть G_0 множества G ограничена некоторым континуумом K. Преобразованием извлечения корня (ср. п. 74) можно тогда добиться того, чтобы G_0 имела внешние точки. В качестве области, мажорантной ко всем аппроксимирующим областям G_β^n, можно тогда ввести кольцевую область D_0, ограниченную кривой β и пробегающей вне G_0 жордановой кривой α_0; в силу принципа расширения

$$\omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) > \omega(z, \alpha_0, D_0) > 0$$

как бы ни выбиралась точка z_0 в области G_0, откуда следует утверждение.

Следовательно, если

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) \equiv 0,$$

то множество α не может содержать континуума; оно является „точечнообразным" („punkthaft"), и дополнительное к нему множество G образует *одну единственную связную область*.

Из вышеизложенных теорем следует таким образом, что равенство или неравенство нулю гармонической меры $\omega(z, \alpha, G_\beta)$ не зависит ни от положения точки z, ни от выбора вспомогательной кривой и, следовательно, зависит только от замкнутого множества α. Поэтому мы вправе ввести определение:

Замкнутое множество α, для которого $\omega(z, \alpha, G_\beta) = 0$, называется множеством *абсолютной гармонической меры нуль*.

Из предыдущих выкладок получается следующий критерий для таких множеств:

Множество α является множеством абсолютной гармонической меры нуль тогда и только тогда, когда для каждой жордановой кривой β, лежащей в дополнительной области G, и каждой точки z этой области выполняется условие

$$\omega(z, \alpha, G_\beta) = \lim_{n\to\infty} \omega(z, \alpha_n, G_\beta^n) = 0.$$

Далее справедливы следующие теоремы:

Всякое замкнутое подмножество гармонического нульмножества также является гармоническим нульмножеством.

В самом деле, это непосредственно следует из предыдущего критерия.

Сумма двух гармонических нульмножеств снова является гармоническим нульмножеством.

Пусть α_1 и α_2 — два таких нульмножества. Если β — вспомогательная кривая, проведенная в области G, дополнительной к мно-

жеству $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, то для произвольно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти две аппроксимирующие области G' и G'' и точку z такие, что

$$\omega(z, \alpha_1', G_\beta') < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \omega(z, \alpha_2'', G_\beta'') < \frac{\varepsilon}{2},$$

где α_1' и α_2'' означают соответственно границы областей G' и G''.

Если теперь за область, аппроксимирующую G, принять пересечение D областей G' и G'' и обозначить через α' границу области D (аппроксимирующие области G' и G'' можно выбрать так, чтобы не только α_1' и α_2'', но и α' состояло из конечного числа жордановых дуг), то выражение

$$\omega(z, \alpha', D_\beta) - \omega(z, \alpha_1', G_\beta') - \omega(z, \alpha_2'', G_\beta'')$$

будет равно нулю на β, а на α' оно будет во всяком случае неположительным; отсюда на основании принципа максимума следует, что в рассматриваемой точке z

$$\omega(z, \alpha', D_\beta) < \varepsilon,$$

откуда в свою очередь следует утверждение.

Выше было введено понятие множеств абсолютной гармонической меры нуль для любых *замкнутых* множеств. Введением „внутренней" и „внешней" гармонических мер можно было бы это понятие распространить и на произвольные множества. Но так как для наших целей подобные обобщения имеют ограниченное значение, то мы не будем входить в подробное их рассмотрение.

§ 2. Множества емкости нуль.

95. В этом параграфе мы введем множества абсолютной гармонической меры нуль с помощью другого, отличного от предыдущего, теоретико-потенциального метода.

Рассмотрим область G, ограниченную конечным числом жордановых дуг Γ и содержащую бесконечно удаленную точку $z = \infty$. Соответствующая этой области функция Грина $g(z, \infty)$ имеет в окрестности своего полюса $z = \infty$ разложение

$$g(z, \infty) = \log|z| + u(z),$$

где $u(z)$ в точке $z = \infty$ непрерывна и принимает конечное значение

$$\gamma = u(\infty), \tag{2}$$

которое в дальнейшем будет играть важную роль. Из соображений, которые будут развиты подробнее в следующем параграфе, величину γ называют постоянной Робэна (Robin) области G и величину

$$C = e^{-\gamma}$$

называют *емкостью области* $\overline{G}$, *дополнительной к* G [1]).

[1]) См. Szegö [1], Pólya u. Szegö [1], Myrberg [1], Vallée-Poussin [1], Frostman [1], [3].

Если G_1 и G_2 — две области предыдущего вида и G_1 содержится как подобласть в G_2, то для соответствующих функций Грина g_1, g_2, постоянных Робэна γ_1, γ_2 и емкостей C_1, C_2 имеют место соотношения

$$g_1(z, \infty) \leqslant g_2(z, \infty), \quad \gamma_1 \leqslant \gamma_2, \quad C_1 \geqslant C_2.$$

В самом деле, разность $g_2 - g_1$ в G_1 регулярно гармонична и в точке $z = \infty$ равна $\gamma_2 - \gamma_1$. Так как далее на границе области G_1 она принимает неотрицательные значения, то она неотрицательна всюду в G_1, в частности для $z = \infty$; следовательно, $\gamma_2 - \gamma_1 \geqslant 0$ и, значит, $C_1 \geqslant C_2$.

96. Предыдущее определение емкости замкнутой области $\bar{G}$ предполагает существование функции Грина внешней области G, которое было установлено только при известных условиях регулярности, касающихся границы Γ. Однако предельным переходом, вполне аналогичным проведенному в § 1, понятие емкости может быть определено для любых замкнутых множеств.

Пусть α — ограниченное замкнутое множество и G — та из дополнительных к α связных областей, которая содержит бесконечно удаленную точку. Как и в п. 90, рассмотрим тогда последовательность вложенных друг в друга подобластей G_n области G, исчерпывающих эту область при $n \to \infty$. Пусть

$$g_n(z, \infty) = \log|z| + u_n(z)$$

— функция Грина, соответствующая области G_n, и

$$\gamma_n = u_n(\infty)$$

— соответствующая постоянная Робэна.

Если теперь n монотонно увеличивать, то $g_n(z)$ будет монотонно возрастать, откуда следует, что в каждой точке z области G существует конечный или бесконечный предел

$$g(z, \infty) = \lim_{n \to \infty} g_n(z, \infty).$$

С помощью леммы, изложенной в п. 89, непосредственно доказывается, что этот предельный переход происходит равномерно во всякой подобласти области G.

Предельная функция $g(z, \infty)$ или гармонична в каждой конечной точке области G или $g(z, \infty) \equiv \infty$.

Так же как и в п. 90, убеждаемся в независимости этого предельного процесса от выбора аппроксимирующей последовательности G_n.

Если g конечна, то мы ее определяем как функцию Грина области G. В окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ она имеет разложение

$$g(z, \infty) = \log|z| + u(z),$$

где $u(z) = \lim u_n(z)$ гармонична в этой окрестности; предел

$$\gamma = \gamma(\alpha) = u(\infty) = \lim \gamma_n$$

определяется как постоянная Робэна области G и *емкость* $C(\alpha)$ заданного множества α полагается равной

$$C(\alpha) = e^{-\gamma}.$$

97. Функция Грина $g(z, \infty)$, очевидно, неотрицательна в области G. Что касается ее поведения на границе α, то нельзя заключить, что она здесь всюду обращается в нуль. Напротив, могут встретиться такие случаи, когда в некоторых точках множества α она принимает положительные значения; так, например, это всегда имеет место в изолированной точке множества α; в самом деле, такая особенность устранима; следовательно, там $g(z)$ гармонична и по принципу минимума положительна.

Но во всяком случае, если $g(z)$ конечна, то в окрестности множества α она ограничена сверху. В самом деле, если круг $|z| < \rho$ содержит множество α, то в каждой точке $|z| \leqslant \rho$ области G_n значение $g_n(z, \infty) \leqslant M_n$, где M_n означает максимум функции $g_n(z, \infty)$ на окружности $|z| = \rho$. При $n \to \infty$ монотонно возрастающая последовательность чисел M_n стремится к конечному пределу M и, следовательно, для рассматриваемых значений z имеем $g_n \leqslant M$, откуда и $g = \lim g_n \leqslant M$, что и требовалось доказать.

Точно так же как и в п. 92, можно далее показать, что $g(z, \infty)$ характеризуется следующим минимальным свойством: в каждой точке z области G функция g равна нижней границе семейства функций $v(z)$, положительных и гармоничных в каждой конечной точке области G и имеющих в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ разложение

$$v = \log|z| + v_\infty(z),$$

где $v_\infty(z)$ гармонична в этой окрестности.

По предыдущему емкость $C(\alpha)$ является нижней границей емкостей всех замкнутых множеств, содержащих множество α.

98. Если G не обладает конечной функцией Грина *), то

$$u_n(z) = g_n(z, \infty) - \log|z| \to \infty,$$

---

*) Существование или несуществование функции Грина области G не зависит от положения ее полюса в G. В самом деле, если $g_n(z, z_1)$ и $g_n(z, z_2)$ — две функции Грина области G_n с полюсами в точках z_1 и z_2, то функция

$$v_n(z) = g_n(z, z_1) - g_n(z, z_2) + \log\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right|$$

в области G_n гармонична и по принципу максимума и минимума ограничена:

$$\min \log\left|\frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2}\right| \leqslant v_n(z) \leqslant \max \log\left|\frac{\zeta - z_1}{\zeta - z_2}\right|,$$

где ζ пробегает границу α_n области G_n. Отсюда следует, что если при $n \to \infty$ одна из функций $g_n(z, z_1)$, $g_n(z, z_2)$ неограниченно возрастает, то и вторая функция также неограниченно возрастает.

притом равномерно во всякой подобласти области G. В частности,

$$\gamma_n = u_n(\infty) \to \infty.$$

В этом случае постоянная Робэна γ области G равна $+\infty$ и *емкость* $e^{-\gamma}$ *множества* α *равна нулю.*

Любая область может быть исчерпана последовательностью многоугольников P_n, например, совокупностью квадратов квадрильяжа со стороной 2^{-n}, лежащих в области G_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда получается следующий важный критерий:

Для того чтобы замкнутое множество α *было емкости нуль, необходимо и достаточно, чтобы для всякого* $\varepsilon > 0$ *его можно было бы покрыть конечным числом многоугольников, образующих множество емкости* $< \varepsilon$.

99. Множества емкости нуль имеют для нас особый интерес, так как имеет место замечательное соотношение: *множество абсолютной гармонической меры нуль является множеством емкости нуль, и наоборот.* Эта важная теорема могла бы быть доказана уже здесь; однако, так как ее доказательство получается более простым при использовании интегрального представления функции Грина, которое нам будет полезно и в дальнейшем, то мы сперва выведем эту интегральную формулу.

Пусть $g(\zeta, z)$ — функция Грина области G, лежащей в плоскости ζ, ограниченной конечным числом жордановых дуг Γ и содержащей точку $\zeta = \infty$. Пусть далее $-h(\zeta, z)$ — гармоническая функция, сопряженная с $g(\zeta, z)$ относительно переменной ζ.

Если точка $z \neq \infty$ лежит в G, то выражение $\log|\zeta - z|$ представляет в G гармоническую функцию, исключая точки $\zeta = z$ и $\zeta = \infty$, в которых она становится отрицательно, соответственно положительно логарифмически бесконечной. Следовательно, сумма

$$u(\zeta, z) \equiv \log|\zeta - z| + g(\zeta, z) - g(\zeta, \infty) \tag{3}$$

гармонична всюду в G и, применяя формулу Грина, мы получаем

$$u(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log|\zeta^* - z| \, dh(\zeta^*, \zeta), \tag{4}$$

где ζ^* пробегает в положительном направлении границу Γ области G.

Особенно интересной эта формула становится для $\zeta = \infty$. Функция Грина $g(\zeta, \infty)$ имеет в окрестности точки $\zeta = \infty$ разложение

$$g(\zeta, \infty) = \log|\zeta| + \gamma + \varepsilon\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

где γ — постоянная Робэна области G и $\varepsilon \to 0$ при $\zeta \to \infty$. Если последнюю формулу подставить в выражение для u и совершить предельный переход $\zeta \to \infty$, то получится соотношение

$$u(\infty, z) = g(\infty, z) - \gamma.$$

Это соотношение вместе с соотношением симметрии $g(\infty, z) = g(z, \infty)$ показывает, что если в формуле (4) вместо ζ^* писать просто ζ, то

$$g(z, \infty) - \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log|\zeta - z| \, dh(\zeta, \infty). \tag{5}$$

Если точка z лежит *вне* замкнутой области G, то член $g(\zeta, z)$ в выражении (3) можно зачеркнуть, не нарушая этим гармоничность функции $u(\zeta, z)$ от ζ в области G. Применение формулы Грина приводит нас тогда вместо (5) к более простому соотношению

$$\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \log \frac{1}{|\zeta - z|} \, dh(\zeta, \infty). \tag{5'}$$

Следовательно, если параметрическая точка z изменяется вне G, то стоящее справа среднее значение сохраняет постоянную величину, равную постоянной Робэна области G.

Наконец, если z лежит на границе Γ, то левые части формул (5) и (5′) отличаются только знаком. Чтобы показать, что формула (5′) справедлива и в этом случае, нужно только доказать, что стоящий справа интеграл представляет непрерывную функцию от z. Однако, на этом вопросе, который здесь имеет несущественное значение и мог бы быть легко разрешен применением методов, рассмотренных в гл. IV, мы здесь подробнее останавливаться не будем.

100. Из (5) следует простое, важное неравенство, которое получается, если для заданной точки z области G заменить подинтегральную функцию ее наименьшим, соответственно наибольшим значением:

Если d_1 и d_2 означают наименьшее, соответственно наибольшее расстояние от точки z до границы Γ области G, то

$$\log d_1(z) \leqslant g(z, \infty) - \gamma \leqslant \log d_2(z). \tag{6}$$

Применяя это соотношение, мы теперь докажем, что, как это было указано в п. 99, класс множеств абсолютной гармонической меры нуль тождественно совпадает с классом множеств емкости нуль.

Пусть α — ограниченное замкнутое множество; с помощью преобразования подобия, не влияющего на исследуемое соотношение, поместим множество α в круг $|z| < 1$. Обозначим через G связную область, ограниченную множеством α и содержащую точку $z = \infty$. Выберем теперь число $\rho > 1$ и аппроксимирующую область G', содержащуюся в области G, содержащую точку $z = \infty$ и ограниченную конечным числом жордановых дуг α', расположенных в круге $|z| < 1$.

Обозначим затем через $g'(z, \infty)$ функцию Грина области G' и через $\omega_\rho(z, \alpha')$ гармоническую меру дуг α' относительно подобласти G_ρ' области G', лежащей в круге $|z| < \rho$.

Если множество α имеет *положительную емкость* и, следовательно, его постоянная Робэна $\gamma\,(\gamma > 0)$ [1]) конечна, то число ρ определим условием $\rho = 1 + e^{2\gamma}$ и обозначим через M_r и m_r максимум, соответственно минимум функции $g'(z, \alpha)$ на окружности $|z| = r$. Разность

$$g' - (1 - \omega_\rho)\, m_\rho,$$

очевидно, гармонична в G_ρ' и неотрицательна на ее границе. По принципу минимума последнее имеет место во всей области G_ρ' и, следовательно, если за точку z взять точку z_1 окружности $|z| = 1$, в которой $g' = m_1$, то

$$[1 - \omega_\rho(z_1, \alpha')]\, m_\rho \leqslant m_1.$$

Величина m_1 как минимум при $|z| = 1$ для функции $u(z) = g' - \log|z|$, гармонической в области $|z| \geqslant 1$, удовлетворяет условию $m_1 \leqslant u(\infty) = \gamma' < \gamma$, где γ' — постоянная Робэна области G'. Далее, согласно (6), $m_0 \geqslant \log(\rho - 1) + \gamma' = 2\gamma + \gamma' > 2\gamma$. Следовательно,

$$1 - \omega_\rho(z_1, \alpha') \leqslant \frac{1}{2},$$

и тем самым для каждой аппроксимирующей области G' максимум гармонической меры дуг α' на окружности $|z| = 1$ (относительно области G_ρ') не меньше $\frac{1}{2}$. То же самое имеет, следовательно, место и для предельного значения $\omega(z, \alpha, G_\rho)$, к которому эта мера стремится, когда $G' \to G$. Отсюда следует, что гармоническая мера множества α *положительна.*

Если, наоборот, емкость множества α равна нулю и, следовательно, $\gamma = \lim \gamma' = \infty$, то, беря число $\rho > 1$ произвольным, мы найдем, что разность

$$(1 - \omega_\rho)\, M_\rho - g'$$

в G_ρ' неотрицательна. Далее, если z — точка окружности $|z| = 1$, в которой g' достигает своего максимума $> \gamma'$, то при помощи неравенства (6) мы получим

$$M_\rho \leqslant \log(\rho + 1) + \gamma',$$

$$\gamma' \leqslant [\log(\rho + 1) + \gamma'](1 - \omega_\rho) \leqslant \log(\rho + 1) + \gamma'(1 - \omega_\rho)$$

и, следовательно,

$$\min_{|z|=1} \omega_\rho \leqslant \frac{\log(\rho + 1)}{\gamma'}.$$

Когда $\alpha' \to \alpha$, то $\gamma' \to \infty$, и, следовательно, минимум гармонической меры ω_ρ на окружности $|z| = 1$ стремится к нулю, откуда

[1]) Так как области G и G' содержат область $|z| \geqslant 1$, постоянная Робэна которой равна нулю, то их постоянные Робэна положительны.

видно, что гармоническая мера $\omega(z, \alpha, G_\rho) = \lim \omega_\rho$ тождественно равна нулю.

Замкнутое множество тогда и только тогда абсолютной гармонической меры нуль, когда оно имеет емкость нуль.

101. Тождественность замкнутых множеств абсолютной гармонической меры нуль с множествами емкости нуль доказана при предположении, что эти множества ограничены.

Если последнее условие не выполняется, то подходящим линейным преобразованием $S(z)$ множество α может быть переведено в ограниченное множество. Мы скажем тогда, что α есть множество емкости нуль, если его образ α' является таким множеством Однако при таком определенин не очевидно, различаются ли однозначно случаи $C(\alpha) = 0$ и $C(\alpha) > 0$, ибо нужно учесть возможность, что равенство или неравенство нулю емкости $C(\alpha')$ преобразованного множества может зависеть от выбора использованного линейного преобразования.

Что эта возможность на самом деле исключена, требует особого доказательства. Последнее могло бы быть проведено прямо с помощью введенных в этом параграфе понятий. Однако наиболее просто оно следует из доказанной выше теоремы об эквивалентности. Действительно, так как гармоническая мера инвариантна относительно взаимно однозначных и конформных отображений, то любое линейное преобразование всегда переводит гармоническое нульмножество в гармоническое нульмножество. Отсюда непосредственно следует, что любые два множества, полученные линейным преобразованием из одного и того же множества α, или оба положительной емкости, или емкость обоих равна нулю.

102. Другим важным следствием из предыдущей теоремы об эквивалентности является, по § 1, п. 94, то, что емкость замкнутого множества, являющегося суммой конечного или счетного числа множеств емкости нуль, равна нулю.

Эта теорема может быть просто доказана как следствие из нижеследующей леммы, не лишенной самостоятельного интереса.

Лемма 1. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — замкнутые множества, расположенные в круге $|z| < \frac{1}{2}$, то для множества $\alpha = \sum \alpha_\nu$*

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)} \leqslant \sum^{n} \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}.$$

Доказательство. Достаточно установить это соотношение для множеств α_ν, ограниченных конечным числом аналитических дуг, так как более общие множества, равно как и их емкость, могут быть аппроксимированы с любой степенью точности при помощи множеств указанного типа, соответственно емкостями этих множеств.

Если G_ν есть область, ограниченная α_ν и содержащая бесконечно удаленную точку, то из (5′) при замене $h_\nu(\zeta, \infty)$ на $2\pi\mu_\nu(\zeta)$ получим

$$\gamma(\alpha_\nu) = \int\limits_{\alpha_\nu} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_\nu(\zeta)$$

для каждой точки z множества α_ν.

С другой стороны, по какому бы закону $\mu(\zeta) \geqslant 0$ ни распределялась единичная масса на множестве α *), выполняется неравенство

$$\gamma(\alpha) \geqslant \min_{z \text{ на } \alpha} \left(\int\limits_{\alpha} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu \right). \tag{7}$$

В самом деле, сумма стоящего справа интеграла и функции Грина $g(z, \infty)$ области G гармонична в G; для $z = \infty$ ее значение равно $\gamma(\alpha)$, а на границе α функция g обращается в нуль. Отсюда, на основании принципа минимума, следует соотношение (7).

Если теперь взять n чисел δ_ν таких, что $0 \leqslant \delta_\nu \leqslant 1$, $\sum \delta_\nu = 1$ и положить $\mu = \sum \delta_\nu \mu_\nu$, то

$$\int\limits_{\alpha} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu = \sum \delta_\nu \int\limits_{\alpha_\nu} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_\nu,$$

и, далее, так как $|\zeta - z| < 1$ и, следовательно, подинтегральная функция во всяком случае неотрицательна, то

$$\int\limits_{\alpha} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_\nu \geqslant \int\limits_{\alpha_\nu} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_\nu = \gamma(\alpha_\nu),$$

коль скоро z лежит на α_ν.

Тем самым для z на α_ν имеем

$$\min \int\limits_{\alpha} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu \geqslant \min \left(\delta_\nu \int\limits_{\alpha_\nu} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_\nu \right) = \delta_\nu \gamma(\alpha_\nu),$$

откуда, в силу (7),

$$\gamma(\alpha) \geqslant \min [\delta_\nu \gamma(\alpha_\nu)] \qquad (\nu = 1, \ldots, n).$$

Но для

$$\delta_\nu = \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)} \cdot \frac{1}{\sum \frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}}$$

все числа $\delta_\nu \gamma(\alpha_\nu)$ становятся равными друг другу, и мы приходим таким образом к доказываемому соотношению.

---

*) С точки зрения теории потенциала интеграл (5′) представляет логарифмический потенциал некоторой массы, распределенной с плотностью $\mu = \frac{h}{2\pi}$ на Γ. Величина этой массы равна $\int\limits_{\Gamma} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} dh = 1$.

Лемма 2. *Пусть α_ν — последовательность замкнутых множеств, расположенных в круге $|z|<\frac{1}{2}$. Тогда для каждого замкнутого подмножества α множества $\sum\alpha_\nu$ имеет место соотношение*

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\leqslant\sum_1^\infty\frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}. \tag{8}$$

Доказательство. Если стоящий справа ряд расходится, то утверждение тривиально. Откидывая этот случай, возьмем произвольное положительное число $\varepsilon<1$ и покроем каждое множество α_ν областью A_ν, граница которой лежит в круге $|z|<\frac{1}{2}$ и состоит из конечного числа аналитических дуг α_ν', так что

$$\frac{1}{\gamma(\alpha_\nu')}<\frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}+\frac{\varepsilon}{2^\nu}.$$

Так как множество α замкнуто, то из областей $A_\nu+\alpha_\nu'$ можно выбрать конечное число $A_{\nu_i}+\alpha_{\nu_i}'$ $(i=1,\ldots,m)$, покрывающих α [1]). Если через A обозначить сумму этих областей, то по лемме 1

$$\frac{1}{\gamma(\alpha)}\leqslant\frac{1}{\gamma(A)}\leqslant\sum_{i=1}^m\frac{1}{\gamma(\alpha_{\nu_i}')}\leqslant\sum_1^\infty\frac{1}{\gamma(\alpha_\nu)}+\varepsilon,$$

откуда при $\varepsilon\to0$ получается соотношение (8).

В частности, из (8) следует, что каждое замкнутое подмножество α множества $\sum\alpha_\nu$ имеет емкость нуль, если этим свойством обладают все множества α_ν. Это справедливо без дополнительного предположения, что множества α_ν расположены в круге $|z|<\frac{1}{2}$. В самом деле, если разложить каждое из имеющихся множеств на два подмножества, расположенных соответственно в круге $|z|<r<\frac{1}{2}$ и в области $|z|\geqslant r$, то посредством линейного преобразования последняя область может быть преобразована в тот же круг, чем достигается выполнение условий леммы и в этом случае.

§ 3. Функция Грина и логарифмический потенциал.

103. Пусть на ограниченной области E плоскости z распределена некоторая масса с плотностью $\rho(z)$. Если функция ρ непрерывна, то *логарифмический потенциал*

$$u(z)=\int_E\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu, \tag{9}$$

[1]) Лемма Гейне-Бореля о покрытии.

где $d\mu = \rho(\zeta)\, df_\zeta$ означает массу, расположенную на элементе площади df_ζ, определяет функцию $u(z)$, обладающую следующими свойствами:

1) На E функция u удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta u = -2\pi\rho$.

2) Вне E функция u регулярно гармонична за исключением точки $z = \infty$, где она логарифмически бесконечна:

$$u(z) = -\log|z| + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right) \qquad (\varepsilon \to 0 \text{ при } z \to \infty).$$

Этими двумя свойствами функция u определена однозначно.

104. Логарифмический потенциал u массы, распределенной на E по закону μ, может быть образован по формуле (9) при более общих предположениях относительно μ. Пусть E — ограниченное замкнутое множество в плоскости z и (e) — множество его подмножеств следующего рода:

1) Если конечное или счетное число множеств $e_1, e_2, \ldots$ принадлежит к (e), то и их сумма $\sum e_\nu$ принадлежит к (e).

2) Множество $\bar{e} = E - e$, дополнительное к e относительно E, также принадлежит к (e).

3) Пересечение множества e с любым открытым или замкнутым квадратом (или кругом) принадлежит к (e).

Пусть далее каждому множеству e поставлено в соответствие неотрицательное число $\mu(e)$, удовлетворяющее условию аддитивности: если множества $e_1, e_2, \ldots$ из (e) не имеют общих точек, то

$$\mu(e_1 + e_2 + \ldots) = \mu(e_1) + \mu(e_2) + \ldots \tag{10}$$

Пусть $\varphi(z)$ — определенная на E действительная непрерывная ограниченная функция комплексного переменного z. Интеграл Стильтьеса

$$\int_E \varphi(\zeta)\, d\mu(\zeta) \tag{11}$$

определяется известным образом как предел суммы

$$\sum_0^n \varphi(\zeta_\nu)\, \Delta\mu_\nu(\zeta)$$

при $n \to \infty$, где точки ζ_ν и массы $\Delta\mu_\nu$ соответствуют разбиению плоскости на квадраты, не имеющие общих точек и стороны которых при $n \to \infty$ стремятся к нулю; предел не зависит от выбора этих квадратов и точек ζ_ν.

Если $\varphi(\zeta)$ не непрерывна, то интеграл (11) можно определить в смысле Лебега-Стильтьеса, если только $\varphi(\zeta)$ *измерима* относительно $\mu(\zeta)$, т. е. если множество точек E, в которых $\varphi < \lambda$, принадлежит для каждого значения λ к классу множеств (e). Если между верхней границей M и нижней границей m функции φ вста-

вить числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1}$, то интеграл (11) получается как предел суммы

$$\sum_0^n \lambda_\nu \Delta_\nu \mu \qquad (\lambda_0 = m,\ \lambda_n = M)$$

при $n \to \infty$, $(\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}) \to 0$ и где $\Delta_\nu \mu$ означает массу, распределенную на множестве e_ν, определенном неравенством $\lambda_{\nu-1} \leqslant \varphi < \lambda_\nu$.

Если φ не ограничена, например, ее верхняя граница равна $+\infty$, то интеграл (11) определяется как предел соответствующего интеграла для функции φ_M, равной φ или M, смотря по тому, будет ли $\varphi \leqslant M$ или $\varphi > M$, при $M \to \infty$. При этом нужно также учитывать тот случай, когда этот предел равен $+\infty$.

105. Рассмотренные выше понятия позволяют для функции распределения $\mu \geqslant 0$ предыдущего вида определить логарифмический потенциал как интеграл Стильтьеса

$$u(z) = \int_E \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta).$$

Непосредственно видно, что $u(z)$ обладает вторым характеристическим свойством логарифмического потенциала. Напротив, не может быть более и речи о выполнении на E первого условия, так как сама функция $u(z)$ не всюду конечна и непрерывна.

Но во всяком случае на E функция $u(z)$ *полунепрерывна снизу*, т. е. если $m(r)$ означает нижнюю границу функции $u(z)$ в круге $|z - a| \leqslant r$, то $m(r) \to u(a)$ при $r \to 0$. Пусть сперва $u(a)$ конечно; для заданного $\varepsilon > 0$ существует тогда число $\rho > 0$ такое, что частичный интеграл

$$u_\rho(z) = \int_{|\zeta - a| \geqslant \rho} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta)$$

для $z = a$ больше, чем $u(a) - \varepsilon$. В круге $|z - a| < \rho$ функция $u_\rho(z)$ непрерывна, поэтому ее нижняя граница в точке $z = a$ равна $u_\rho(a) > u(a) - \varepsilon$. Так как в том же круге $u(z) \geqslant u_\rho(z)$, коль скоро $\rho < \frac{1}{2}$, то предыдущее неравенство справедливо a fortiori и для нижней границы $m(0) = \lim_{r \to 0} m(r)$ функции $u(z)$ в точке $z = a$. Следовательно, $u(a) - \varepsilon < m(0) \leqslant u(a)$, откуда при $\varepsilon \to 0$ следует, что $u(a) = m(0)$. В случае, когда $u(a) = +\infty$, доказательство вполне аналогично.

106. Вернемся теперь к предположениям § 2, п. 95 этой главы и будем, следовательно, снова рассматривать ограниченную конечным числом жордановых дуг Γ область G, содержащую бесконечно удаленную точку, и соответствующую этой области функцию Грина $g(z, \infty) = \log|z| + \gamma + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)$, для которой мы вывели формулы (5) и (5'); γ здесь означает постоянную Робэна области G. Если $\frac{h}{2\pi}$

рассматривать как плотность, с которой единичная масса распределена на границе Γ, так что

$$\frac{1}{2\pi}\left(h(\zeta,\ \infty)-h(\zeta_0,\ \infty)\right)$$

будет равна величине этой массы на дуге $(\zeta_0,\ \zeta)$, которую граничная точка ζ описывает в направлении от ζ_0 к ζ при положительном обходе G по Γ [1]), то логарифмический потенциал

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,dh(\zeta,\ \infty) \tag{12}$$

в точке z области G будет иметь значение $-g(z,\ \infty)+\gamma$, в то время как в дополнительной к G области $\overline{G}$ он равен γ.

Спрашивается, как относится этот особый потенциал к другим потенциалам, соответствующим единичной массе, распределенной на $\overline{G}$ согласно произвольной функции распределения μ. Прежде всего нас здесь интересует, в каком отношении друг к другу стоят экстремальные значения этих потенциалов.

107. Чтобы избежать повторений, рассмотрим сразу общий случай, когда G — вполне произвольная область, содержащая бесконечно удаленную точку $z=\infty$. При этом будем предполагать, что G не совпадает с полной плоскостью, так что ее дополнение представляет не пустое ограниченное замкнутое множество E.

Пусть теперь μ определяет произвольное неотрицательное распределение единичной массы на E и

$$u(z)=\int_{E}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu(\zeta)$$

— соответствующий потенциал. Так как $u(z)$ полунепрерывна снизу, то она достигает на E вполне определенного минимума m. Верхняя граница $\overline{\lim}\,u(z)$ на E пусть будет M $(m\leqslant M\leqslant\infty)$.

Случай $m=\infty$ исключается, коль скоро E *положительной* емкости. В самом деле, согласно § 2, область G обладает тогда конечной функцией Грина

$$g(z,\ \infty)=\log|z|+\gamma+\varepsilon\left(\frac{1}{z}\right),$$

где γ — постоянная Робэна области G. Рассмотрим затем выражение

$$v(z)=g(z,\ \infty)+u(z),$$

представляющее функцию, гармоническую во всей области G. В каждой граничной точке ζ этой области $\underline{\lim}\,g\geqslant 0$, $\underline{\lim}\,u\geqslant m$, следовательно, и $\underline{\lim}\,v\geqslant m$; в силу принципа минимума $v\geqslant m$

[1]) Масса на дуге $(\zeta_0,\ \zeta)$, очевидно, равна гармонической мере этой дуги относительно G, измеренной в точке $z=\infty$.

в каждой точке области G. В частности, отсюда для $z=\infty$ получается соотношение $v(\infty)=\gamma\geqslant m$.

Если G ограничена конечным числом жордановых дуг, то на этих дугах $g=0$ и, применяя принцип максимума к сумме $v(z)$, мы получим соотношение $v(\infty)=\gamma\leqslant M$.

Но это справедливо и для самого общего случая, когда E — произвольное ограниченное замкнутое множество. Чтобы в этом убедиться, определим во внешней области G, содержащей бесконечно удаленную точку $z=\infty$, аппроксимирующую область G_1, граница которой удовлетворяет предыдущим условиям регулярности; тогда соответствующая постоянная Робэна γ_1 самое большее равна верхней границе $M_1\,(\geqslant M)$ потенциала $u(z)$ на дополнении $\overline{G}_1$ к области G_1. Так как $u(z)$ в каждой точке $z\neq\infty$ области G регулярно гармонична, а в точке $z=\infty$ обращается в $-\infty$, то по принципу максимума $u<M$ в каждой точке области G, а тем самым и $M_1\leqslant M$. В силу предыдущего тогда $M_1=M$, следовательно, $\gamma_1\leqslant M$, и так как $\gamma_1\to\gamma$, когда $G_1\to G$, то $\gamma\leqslant M$, что и требовалось доказать.

Если $u(z)$ — логарифмический потенциал единичной массы, распределенной с произвольной неотрицательной плотностью на ограниченном замкнутом множестве E, то его минимум m и максимум M удовлетворяют неравенству

$$m\leqslant\gamma\leqslant M, \tag{13}$$

где γ — *постоянная Робэна множества E.*

108. Так называемая *проблема Робэна* [1]) требует такого неотрицательного распределения единичной массы на заданном множестве E, чтобы соответствующий логарифмический потенциал в каждой точке множества E принимал бы одно и то же постоянное значение. Из предыдущей теоремы видно, что этим значением может быть только постоянная Робэна γ. Далее из выкладок § 2 следует, что проблема Робэна, наверное, разрешима для множеств, ограниченных (или составленных) из конечного числа жордановых дуг. В самом деле, соответствующая потенциалу $-g(z,\infty)+\gamma$ функция распределения $\mu\left(d\mu=\frac{dh}{2\pi}\right)$ дает решение проблемы (ср. п. 106).

109. Прежде чем перейти к вопросу о существовании робэновского потенциала равновесия в случае произвольного ограниченного замкнутого множества E, покажем сперва еще, что предыдущее рассуждение приводит к построению функции Грина внешней области G, если границу этой области предполагать составленной из конечного числа жордановых дуг. Мы это докажем, опираясь на метод, который получается при известной специализации использованных выше вспомогательных понятий; этот же метод приведет нас к дальнейшим замечательным соотношениям.

---

[1]) G. Robin [1].

На произвольной системе точек $z_1, \ldots, z_n$ множества E распределим равномерно единичную массу. Соответствующий потенциал равен тогда среднему значению

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \log\frac{1}{|z-z_\nu|}.$$

Рассмотрим минимум этого выражения на E и определим систему точек, для которой этот минимум достигает своего наибольшего значения γ_n. Соответствующий потенциал пусть будет $u_n(z)$.

Образуем затем выражение

$$v_n(z) = u_n(z) + g(z, \infty) - \gamma_n.$$

Как и выше, применяя принцип минимума, мы докажем, что это выражение представляет в области G неотрицательную гармоническую функцию. В самом деле, на границе области G имеем $u_n \geqslant \gamma_n$ и $g = 0$, следовательно, во всяком случае $v_n \geqslant 0$. Так как далее v_n гармонична в G, за исключением попадающих в эту область точек z_ν, где $v_n = +\infty$, то из упомянутого принципа следует, что v_n неотрицательна всюду в G. В частности,

$$v_n(\infty) = \gamma - \gamma_n \geqslant 0.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$. Для этого будем исходить из интегрального представления (12) функции Грина области G. Для заданного $\varepsilon > 0$ мы можем найти такое большое число n_ε, что как бы ни выбирались точки z на линии уровня $g = \varepsilon$, колебание $\log|\zeta - z|$ на дуге Γ' границы Γ было бы меньше, чем ε, коль скоро

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma'} dh(\zeta, \infty) \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon}.$$

Если теперь разделить Γ на $n > n_\varepsilon$ частей, на которых вариация величины $\mu_0 = \frac{h}{2\pi}$ в точности равна $\frac{1}{n}$, и на каждой из этих частей взять точку ζ_ν ($\nu = 1, \ldots, n$), то интеграл (12) будет отличаться от среднего значения

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \log\frac{1}{|\zeta_\nu - z|}$$

на величину порядка $< \varepsilon$, притом для любого положения точки z на линии уровня $g(z, \infty) = \varepsilon$. Следовательно, здесь

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \log\frac{1}{|\zeta_\nu - z|} \geqslant \gamma - 2\varepsilon.$$

По принципу минимума это неравенство имеет место и *внутри* области, ограниченной линией уровня $g = \varepsilon$, дополнительной к внеш-

ней области $g > \varepsilon$ и, следовательно, в частности, на $\overline{G}$. Отсюда следует, что верхняя граница $\gamma_n \geqslant \gamma - 2\varepsilon$, коль скоро $n > n_\varepsilon$. Соединяя это с прежним результатом $\gamma_n \leqslant \gamma$, мы заключаем, что $\gamma_n \to \gamma$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Зафиксируем теперь произвольную подобласть G_0 области G, содержащую точку $z = \infty$, и опишем окружность $|z| = R$, охватывающую границу этой области. Для каждого $z = re^{i\varphi}$, $r > R$, $n > n_0$ имеет место интегральное представление Пуассона

$$v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_n(Re^{i\vartheta}) \frac{r^2 - R^2}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\vartheta - \varphi)} d\vartheta$$

и, следовательно, в силу $v_n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant v_n(z) \leqslant \frac{r+R}{r-R} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_n(Re^{i\vartheta})\, d\vartheta = \frac{r+R}{r-R} v_n(\infty) = \frac{r+R}{r-R} (\gamma - \gamma_n)$$

и тем самым $v_n \to 0$ при $n \to \infty$. Что последнее имеет место, притом равномерно в G_0, получается повторением предыдущего заключения для цепочки из конечного числа налегающих друг на друга кругов, покрывающих G_0.

Последовательность функций $u_n(z)$ в области G сходится к $-g(z, \infty) + \gamma$, и величина

$$\gamma_n = \min_{z \text{ на } E} u_n(z)$$

сходится к постоянной Робэна γ.

110. Стоит заметить, что аппроксимирующие функции u_n могут быть определены следующим образом:

$$e^{-u_n(z)} = \sqrt[n]{|t_n(z)|},$$

где t_n означает тот полином n-й степени

$$t_n = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

максимум M_n которого на E имеет наименьшее возможное значение: это так называемый полином Чебышева n-й степени для множества E[1]). Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Пусть E — замкнутое дополнение к связной области G, содержащей бесконечно удаленную точку и ограниченной конечным числом жордановых дуг. Пусть далее $t_n(z)$ — соответствующий E полином Чебышева n-й степени, все нули которого лежат на E, и M_n — его максимальное значение на E. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{\frac{|t_n(z)|}{M_n}} = g(z, \infty)$$

равномерно в каждой подобласти области G.

---

[1]) См. G. Faber [1].

Для $z = \infty$ это соотношение переходит в

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{M_n} = e^{-\gamma},$$

где γ — постоянная Робэна. Это последнее соотношение впервые было найдено Сегё (Szegö [1]).

Существование предельного значения $\lim \sqrt[n]{M_n}$ еще раньше доказал Фекете (Fekete), который назвал его *трансфинитным диаметром* множества E [1]). Из предыдущего соотношения обнаружилась тождественность емкости и трансфинитного диаметра множества E [2]).

111. Посредством изложенного в § 1 и 2 предельного процесса предыдущие результаты могут быть распространены на любые замкнутые ограниченные множества E. В частности, если E положительной емкости, то функцию Грина внешней области G можно и в этом общем случае представить как логарифмический потенциал распределенной на E единичной массы, что мы сейчас докажем, опираясь на работу Валле-Пуссена [3]).

Покроем плоскость сетью квадратов Q_n со стороной длины $\frac{1}{2^n}$ так, что для $n = 1, 2, \ldots$ квадраты Q_n распадаются на четыре квадрата Q_{n+1}. Пусть E_n — область, составленная из всех замкнутых квадратов Q_n, имеющих с E хотя бы одну общую точку. Связная, дополнительная к E_n многоугольная область G_n, содержащая бесконечно удаленную точку, составляет подобласть области G, дополнительной к E. Образуем функцию Грина

$$g_n(z, \infty) = \log|z| + \gamma_n + \varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)$$

области G_n; тогда по § 1 и 2 мы знаем, что постоянная Робэна γ_n при $n \to \infty$ стремится к постоянной Робэна γ области G, далее, что $g_n(z, \infty)$ в каждой подобласти области G сходится равномерно или к $+\infty$ или к функции Грина $g(z, \infty)$ области G, в зависимости от того, является ли E множеством емкости нуль ($\gamma = +\infty$) или множеством положительной емкости ($\gamma < +\infty$).

---

[1]) M. Fekete [1]. В указанной работе приводится следующее, эквивалентное с данным выше, определение трансфинитного диаметра: на E берется n точек $z_1, \ldots, z_n$, образуется произведение всех $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ расстояний между любыми двумя точками из данных точек. Для некоторого определенного положения точек z_ν произведение достигает своего минимума m_n. При $n \to \infty$ корень $\binom{n}{2}$-й степени из m_n стремится к трансфинитному диаметру множества E.

[2]) См. G. Pólya u. G. Szegö [1]. В этой богатой содержанием работе находится также указатель литературы (до 1930 г.), относящейся к понятиям емкости и трансфинитного диаметра.

[3]) Vallée-Poussin [1].

Для g_n мы имеем соотношение

$$-g_n(z, \infty) + \gamma_n = \int_{E_n} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu_n(\zeta), \qquad (14')$$

где μ_n означает функцию распределения единичной массы на внешней границе многоугольника E_n, определенную с помощью сопряженной к g_n функцией $-h_n\left(d\mu_n = \frac{dh_n}{2\pi}\right)$.

Из равномерно ограниченной последовательности аддитивных функций μ_n можно, согласно одной общей теореме теории функций множеств, выбрать сходящуюся подпоследовательность [1]). Предельная функция μ определяет неотрицательное распределение единичной массы в граничных точках ζ множества E, вполне аддитивное (свойство (10) п. 104) для класса подмножеств множества E, измеримых по Борелю.

Пусть $\gamma < +\infty$ и z — внутренняя точка области G. Так как подинтегральная функция $\log \frac{1}{|\zeta - z|}$ интеграла (14′) в этом случае непрерывна, то можно совершить предельный переход при $n \to \infty$ под знаком интеграла (см. Vallée-Poussin [1]), и так как с другой стороны $g_n \to g$, $\gamma_n \to \gamma$ при $n \to \infty$, то для функции Грина области G получается представление

$$-g(z, \infty) + \gamma = \int_{E} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta). \qquad (14)$$

Аналогично мы найдем, что в каждой *внутренней* точке z дополнения $\overline{G}$ к области G (если такие точки существуют)

$$u(z) = \int_{E} \log \frac{1}{|\zeta - z|}\, d\mu(\zeta) = \gamma.$$

Наконец, пусть z — граничная точка области G. В сколь угодной близости от нее имеются точки области G, в которых, в силу $g > 0$ и (14), $u < \gamma$. Следовательно, нижняя граница функции $u(z)$ в граничной точке z самое большее равна γ, и так как функция $u(z)$

---

[1]) См. Vallée-Poussin [1]. О ходе доказательства этого предложения, полное приведение которого здесь завело бы нас слишком далеко, заметим следующее: счетное множество квадратов $Q_1, Q_2, \ldots$ можно упорядоточить в последовательность $Q^1, Q^2, \ldots$. Применяя теорему Больцано-Вейерштрасса о существовании предельной точки и диагональный процесс, можно определнть последовательность $\mu_{\nu_1}, \mu_{\nu_2}, \ldots$, сходящуюся в каждом квадрате Q. При помощи такого рассмотрения предельная функция μ определяется для всякого замкнутого или открытого подмножества e множества E и вследствие этого, по крайней мере для класса (e) измеримых по Борелю подмножеств множества E, и представляет собой неотрицательную аддитивную функцию множеств, для которой $\mu(E) = 1$. См. также O. Frostman [3]. В последней работе, появившейся после окончания редакции этой книги, дано превосходное изложение теории емкости множеств.

полунепрерывна снизу, то она равна своей нижней границе, и, следовательно, в каждой граничной точке

$$u(z) \leqslant \gamma.$$

Что неравенство здесь существенно, следует из замечания, сделанного в п. 97. В самом деле, если G имеет изолированную граничную точку, то g в этой точке гармонична и > 0; значит, действительно, $u < \gamma$.

112. Для G, ограниченной конечным числом жордановых дуг, постоянная Робэна γ оказалась, с одной стороны, максимумом минимумов, а с другой стороны, равным ему минимумом верхних границ логарифмических потенциалов $u(z)$ на множестве E, соответствующих единичной массе, распределенной на E с неотрицательной плотностью. В вышерассмотренном общем случае, когда E — произвольное ограниченное замкнутое множество положительной емкости, функция распределения μ, соответствующая функции $-g(z, \infty)+\gamma$, представляет экстремальный случай, поскольку порождаемый ею потенциал обладает наименьшей возможной верхней границей γ. Напротив, могут встретиться исключительные точки множества E, в которых экстремальный потенциал *меньше* чем γ. Например, такими точками всегда являются изолированные точки множества E, граничные для внешней области G.

Во всяком случае постоянная Робэна равна минимуму верхней границы всех вышеопределенных на E потенциалов $u(z)$.

§ 4. Поведение аналитической функции в окрестности множества гармонической меры нуль *).

113. В теории особенностей гармонических и аналитических функций множества гармонической меры нуль, или, что по разобранному выше означает то же самое, множества емкости нуль **), играют важную роль. Рассмотрим несколько теорем, лежащих в этом направлении.

Согласно изложенному в гл. III фундаментальному принципу, гармоническая мера при аналитическом отображении увеличивается. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что при аналитическом преобразовании множество положительной емкости всегда переходит в множество также положительной емкости. Это и на самом деле имеет место при следующих условиях.

Теорема 1. *Пусть $w(z)$—определенная в области G_z однозначная мероморфная функция и α_z — замкнутое множество, расположенное в G_z. Если множество α_w, на которое функция $w = w(z)$ отображает множество α_z, имеет гармоническую меру*

*) Более полные относящиеся сюда результаты см. в приложении редакторов перевода (стр. 365).

**) Говоря здесь о множествах гармонической меры нуль, автор имеет в виду множества абсолютной гармонической меры нуль.

нуль, то или множество α_z также гармонической меры нуль, или $w(z) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Множество α_w как образ замкнутого множества само замкнуто. Так как α_w по предположению гармонической меры нуль, то оно имеет в качестве дополнения связную область G_w. Выберем в этой области круг Δ_w и удалим из G_z все точки z, в которых $w(z)$ принимает значения, попадающие в Δ_w. При этом, предполагая, что $w(z)$ не есть постоянная, от G_z останется одна или много связных областей G_Δ, ограниченных прообразами граничных точек некоторых подобластей круга Δ_w и некоторой частью границы области G_z. Так как области G_Δ могут сгущаться только около границы области G_z, в то время как замкнутое множество α_z лежит в G_z, то мы заключаем, что лишь конечное число областей G_Δ может содержать точки множества α_z. Учитывая свойство аддитивности множеств гармонической меры нуль, о котором говорилось в п. 102, достаточно теперь показать, что замкнутое подмножество множества α_z, находящееся в любой области G_Δ, имеет гармоническую меру нуль.

Для этой цели зафиксируем область G_Δ и выберем в ней любую точку z^* [$w(z^*)$ не входит в α_w]. Пусть β_z — замкнутая жорданова кривая, лежащая в G_Δ и окружающая точку z^* и точки множества α_z, расположенные в G_Δ. Далее пусть D_z — часть области G_Δ, лежащая внутри β_z; она, следовательно, содержит как z^*, так и все точки множества α_z, расположенные в G_Δ. Если теперь удалить из D_z точки множества α_z, то останется область G_z', относительно которой можно образовать гармоническую меру $\omega(z, \alpha_z, G_z')$. Нужно показать, что эта мера тождественно исчезает.

Так как α_w — гармоническое нульмножество, то можно найти такую подобласть D_w области G_w, ограниченную конечным числом жордановых дуг α_w', что для заданного $\varepsilon > 0$

$$\omega(w^*, \alpha_w', D_w') < \varepsilon,$$

где $w^* = w(z^*)$ и D_w' означает пересечение области D_w с областью, дополнительной к кругу Δ_w. Исключим теперь из G_z' все точки z, в которых значение $w = w(z)$ лежит вне D_w', и обозначим через D_z' ту остающуюся от G_z' подобласть, которая содержит z^*. Граница области D_z' состоит из точек, которые или лежат на жордановой кривой β_z, или на прообразе α_z' дуг α_w'.

Сравним теперь друг с другом гармонические в D_z' функции, определенные выражениями

$$\omega(z, \alpha_z, G_z') \quad \text{и} \quad \omega(w(z), \alpha_w', D_w').$$

В граничных точках β_z области D_z первая функция равна нулю, в то время как вторая функция в этих точках, как и вообще, неотрицательна; на α_z' первая функция не превосходит 1, в то время как вторая функция, очевидно, равна 1. Следовательно, на всей границе области D_z' первая из этих функций не больше второй;

в силу принципа максимума то же самое имеет место и всюду в области D_z', в частности, для $z = z^*$, откуда следует, что

$$\omega(z^*, \alpha_z, G_z') \leqslant \omega(w^*, \alpha_w', D_w') < \varepsilon.$$

Так как число ε может быть выбрано сколь угодно малым, то $\omega(z^*, \alpha_z, G_z') = 0$, тем самым и $\omega(z, \alpha_z, G_z') = 0$, что и требовалось доказать.

114. Классическая теорема Коши-Римана, которой мы уже неоднократно пользовались (гл. 1, § 3), говорит, что гармоническая или аналитическая функция, однозначная и ограниченная в окрестности изолированной точки $z = a$, должна быть гармонична, соответственно аналитична и в этой точке. Весьма важным является вопрос о том, насколько далеко может быть обобщена эта теорема об „устранимых особенностях". Насколько мощным должно быть замкнутое множество α, чтобы существовала функция, однозначная и ограниченная в окрестности этого множества, для которой по крайней мере часть этого множества представляла бы особенность? Для гармонических функций этот вопрос полностью решается следующей теоремой [1]):

Теорема 2. *Пусть α — замкнутое множество плоскости z. Если оно гармонической меры нуль, то всякая функция, однозначная, ограниченная и гармоническая в его окрестности, гармонична в каждой точке множества α. Если, напротив, α положительной гармонической меры, то существует функция, однозначная, ограниченная и гармоническая в окрестности этого множества, которая, однако, гармонична не во всех точках множества α.*

Доказательство. Пусть α гармонической меры нуль и $u(z)$ — функция, однозначная, ограниченная и гармоническая в его окрестности. Окружим α жордановой кривой β и определим с помощью формулы Грина (гл. II, п. 25) гармоническую функцию $u_0(z)$, которая в области G_β, ограниченной кривой β, и в частности в точках множества α, гармонична, а на самой дуге β принимает те же самые граничные значения, что и $u(z)$. Мы утверждаем, что $u(z) = u_0(z)$ в каждой точке z области G_β, не принадлежащей к α.

Чтобы в этом убедиться, возьмем точку z_0, входящую в G_β и не входящую в α. Для заданного $\varepsilon > 0$ в области G выберем подобласть D, ограниченную множеством α, так, чтобы D содержала как β, так и z_0 и чтобы

$$\omega(z_0, \delta, D_\beta) < \varepsilon,$$

где δ — граница области D, состоящая из конечного числа жордановых дуг, а D_β — пересечение областей G_β и D.

Пусть теперь M — верхняя граница значений $|u|$ в G_β; тогда и $|u_0| \leqslant M$ и разность $v(z) = u(z) - u_0(z)$ по абсолютной величине не превышает $2M$. Образуем затем выражение $v + 2M\omega$. Оно равно

[1]) См. J. Lindeberg [1], P. Myrberg [1].

нулю на β и неотрицательно на δ; следовательно, оно неотрицательно во всей области D_β, в частности

$$v(z_0) \geqslant -2M\omega(z_0) > -2M\varepsilon.$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ следует, что $v(z_0) \geqslant 0$.

Обратное соотношение ($v(z_0) \leqslant 0$) получается, если предыдущие рассуждения применить к функции $v - 2M\omega$. Следовательно, $v(z_0) = u(z_0) - u_0(z_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Так как таким образом $u(z)$ и $u_0(z)$ тождественны, то $u(z)$ гармонична в каждой точке множества α, и первая часть теоремы доказана.

Вторая часть теоремы следует непосредственно из результатов § 1 этой главы. В самом деле, пусть α — положительной гармонической меры и D_β — та область, которая получается из G_β удалением точек множества α. Тогда выражение $\omega(z, \alpha_\varepsilon, D_\beta)$ является в D_β однозначной, ограниченной и положительной гармонической функцией, которая не может быть гармонична во всех точках множества α, так как в противном случае, вследствие обращения этой функции в нуль на границе области D_β, она равнялась бы нулю тождественно.

115. В течение предыдущего изложения мы неоднократно пользовались важным обобщением принципа максимума (и минимума) для гармонической или аналитической функции. Чтобы иметь возможность заключить, что функция $u(z)$, гармоническая в области G, в этой области не превосходит заданного числа M, достаточно, согласно этому принципу, показать, что $\overline{\lim}\, u(\zeta) \leqslant M$ в каждой граничной точке ζ области G, за исключением быть может конечного числа их, если только в окрестности этих исключительных точек функция $u(z)$ остается ограниченной. Возникает вопрос, насколько мощным может быть принято исключительное множество, чтобы обобщенный принцип максимума не терял своей силы. И для этой проблемы множества гармонической меры нуль играют решающую роль. Именно, имеет место следующее [1]):

Обобщение принципа максимума. *Пусть $u(z)$ в области G — гармоническая и ограниченная сверху функция. Если существует такое число M, что*

$$\overline{\lim}\, u(\zeta) \leqslant M \tag{15}$$

в каждой граничной точке ζ области G, исключая самое большее множество α гармонической (абсолютной) меры нуль, то $u(z) \leqslant M$ в каждой точке области G.

Для доказательства зафиксируем произвольную точку z_0 области G. Если предположить, что $u(z_0) > M$, то в силу (15) можно найти точку z_1 области G такую, что $u(z_1) < u(z_0)$. Проведем вокруг z_1

[1]) Другой общий критерий см. в работе E. Phragmén u. E. Lindelöf [1].

маленькую окружность β так, чтобы $u(z) \leqslant M_1 (M < M_1 < u(z_0))$ в каждой точке на β.

После этого выберем произвольное малое число $\varepsilon > 0$ и обозначим через G' такую подобласть дополнительной к множеству α области, что

$$\omega(z_0, \alpha', G_\beta') < \varepsilon,$$

где α' — граница области G', а G_β' — пересечение области G' с областью, внешней к окружности β.

Пусть теперь $K \geqslant M$ — конечная по предположению, верхняя граница функции $u(z)$ в G. Образуем функцию

$$v(z) = u(z) - M - (K - M)\,\omega(z, \alpha', G_\beta'),$$

гармоничную в пересечении D областей G и G_β'. Область D имеет связную часть D_0, содержащую точку z_0; граничные точки области D_0 лежат или на границе Γ области G или на граничных дугах α' и β области G_β'. В первых точках, которые в силу нашего построения не содержат точек множества α, справедливо соотношение (15) и, следовательно, $\overline{\lim} v \leqslant 0$; на α' гармоническая мера ω равна единице, а u самое большее равно K, следовательно, $\overline{\lim} v \leqslant 0$; наконец, на β $u \leqslant M_1$, а $\omega = 0$, следовательно, $\overline{\lim} v \leqslant M_1 - M$. В силу принципа максимума $v \leqslant M_1 - M$ всюду в D_0, откуда для $z = z_0$ следует, что

$$u(z_0) \leqslant M_1 + (K - M)\,\omega(z_0, \alpha', G_\beta') \leqslant M_1 + (K - M)\,\varepsilon,$$

или так как ε может быть сделано сколь угодно малым, то $u(z_0) \leqslant M_1$, что противоречит сделанному выше предположению. Это противоречие показывает, что $u(z_0)$ не может превышать M, что и требовалось доказать.

Если не делать никаких дополнительных предположений о положении исключительного множества α относительно остальных граничных точек, то предыдущий принцип, поскольку это касается объема множества α, не может быть усилен. В самом деле, если α — любое множество положительной гармонической меры, то всегда можно указать область G, граница которой содержит часть множества α, и построить гармоническую функцию u, удовлетворяющую в каждой граничной точке области G, не принадлежащей к α, условию $\overline{\lim} u \leqslant 0$ и в то же время не всюду в G неположительную.

Достаточно рассмотреть подмножество заданного множества, которое также имеет положительную гармоническую меру и ограничивает связную область. Если исключить из последней маленький кружок β, то гармоническая мера $\omega(z, \alpha, G)$ рассматриваемой части множества α относительно оставшейся области G будет представлять в G положительную гармоническую функцию, исчезающую в каждой

граничной ее точке, не принадлежащей к α, т. е. в каждой точке окружности β (в то время как внутри G она положительна).

В этом примере α находится на положительном расстоянии от остальной части границы (β). Если это условие не выполнено, то предыдущая теорема вообще не представляет уже самую общую форму принципа максимума. В этом случае „абсолютные" гармонические нульмножества могут быть заменены множествами, являющимися гармоническими нульмножествами относительно области G, о которых коротко говорилось в § 1 этой главы. Эти относительные нульмножества могут иметь больший объем, чем абсолютные нульмножества; к этому мы еще вернемся в дальнейшем. Однако от исчерпывающего изложения этих соотношений, равно как и от более близкого рассмотрения принципа максимума в указанном общем направлении, мы должны здесь отказаться. Во всяком случае, чтобы правильно понять истинное значение гармонического мероопределения для этих и других вопросов теории функций, необходимо не терять из виду различия между „абсолютной" и „относительной" гармоническими мерами.

116. Как следствие из предыдущих теорем мы можем вывести следующую теорему, которую можно рассматривать как обобщение классической теоремы Лиувилля.

Теорема 3. *Если функция $w(z)$, однозначная и аналитическая вне гармонического нульмножества α_z, выпускает в области $z \neq \alpha_z$ значения, образующие множество α_w положительной гармонической меры, то функция $w(z)$ тождественно равняется постоянной.*

Доказательство. Если предположить, что $w(z)$ отлична от постоянной, то можно притти к противоречию следующим образом: из дополнительного к α_w открытого не пустого множества исключим небольшой кружок Δ_w; граничащую с ним оставшуюся область обозначим через G_w. Удалим также из заданной области $z \neq \alpha_z$ все области Δ_z, в которых $w(z)$ принимает значения, лежащие в Δ_w, и обозначим через G_z произвольную связную область из числа ограниченных множеством α_z и граничными кривыми областей Δ_z.

Затем образуем гармоническую меру $\omega(w, \alpha_w, G_w)$, представляющую в G_w *положительную* гармоническую функцию, отличную от постоянной. С другой стороны, сложная функция $\omega(w(z), \alpha_w, G_w)$ гармонична в G_z; в тех граничных точках, которые лежат на границах областей Δ_z, эта функция *обращается в нуль*. Остальные граничные точки области G_z принадлежат к множеству α_z и образуют поэтому множество гармонической меры нуль. Так как указанная функция в области G_z во всяком случае ограничена ($\omega \leqslant 1$), то на основании обобщенного принципа максимума мы заключаем, что $\omega \leqslant 0$ или, так как ω неотрицательна, что $\omega(w(z), \alpha_w, G_w) = 0$ в каждой точке области G_z. Но точка $w = w(z)$ лежит в области G_w, где $\omega(w, \alpha_w, G_w)$ положительна; полученное противоречие показывает, что функция $w(z)$ должна тождественно равняться постоянной, что и требовалось доказать.

§ 5. Леммы об аддитивных функциях множеств.

117. Для возможности дальнейшего продвижения в теории гармонических нульмножеств нам потребуются некоторые леммы из теории действительных функций, представляющие дальнейшее развитие теории, изложенной в § 3 этой главы. Эти леммы играют важную роль и в других вопросах теории функций.

Теоремы этого параграфа были в основном получены Картаном (Cartan) при дальнейшем развитии старых идей Бутру (Boutroux) и Блоха (Bloch); мы следуем здесь изложению, данному Альфорсом [1]).

Представим себе, что в комплексной плоскости задано ограниченное множество E, на каждой измеримой части e которого определено вполне аддитивное распределение $\mu(e) \geqslant 0$, т. е. если множество e разбивается на конечное или счетное число не имеющих общих точек подмножеств $e_1, e_2, \ldots$, то

$$\mu(e) = \mu(e_1) + \mu(e_2) + \ldots$$

Для простоты предположим, что вся масса $\mu(E) = 1$.

Обозначим через $\mu(r, a)$ массу, расположенную на части множества E, лежащей в круге радиуса r с центром в точке a. Тогда справедлива следующая

Лемма. *Пусть $h(r)$ — любая, для $0 \leqslant r \leqslant \infty$ непрерывная и вместе с r возрастающая функция, для которой*

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) > 1. \tag{16}$$

Тогда для $r > 0$ и всех точек a плоскости, исключая самое большее множество A этих точек, которое может быть покрыто последовательностью кругов $C_1, C_2, \ldots$, радиусы которых $r_1, r_2, \ldots$ удовлетворяют неравенству

$$\sum h(r_\nu) \leqslant 6, \tag{17'}$$

имеет место соотношение

$$\mu(r, a) \leqslant h(r). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть для заданного $r > 0$

$$\lambda_1(r) = \sup_a \mu(r, a)$$

есть верхняя граница значений $\mu(r, a)$ при переменном a. Эта функция переменной величины r, возрастающая вместе с r, согласно ее определению, не больше, чем $\lambda_1(\infty) = \mu(E) = 1$. Отсюда, в силу (16) и ограниченности множества E, для всех достаточно больших значений r

$$\lambda_1(r) \leqslant h(r). \tag{18}$$

Если это неравенство справедливо для всех значений $r > 0$, то соотношение (17) имеет место для всех значений $a \neq \infty$.

---

[1]) A. Bloch [3], H. Cartan [1], L. Ahlfors [3].

Если же это не так, то пусть r_1 — верхняя граница значений $r > 0$, для которых $\lambda_1(r) > h(r)$; тогда $0 < r_1 < \infty$, и соотношение (17) имеет место для всех $r > r_1$. Следовательно, $\lambda_1(r_1 - 0) \geqslant h(r_1) \geqslant \lambda_1(r_1 + 0)$, но так как, с другой стороны, $\lambda_1(r_1 - 0) \leqslant \lambda_1(r_1 + 0)$, то $\lambda_1(r_1 - 0) = \lambda_1(r_1 + 0)$ и

$$\lambda_1(r_1) = h(r_1). \tag{18'}$$

Выберем теперь точку a_1, для которой

$$\lambda_1(r_1) \leqslant \mu(r_1, a_1) + \frac{1}{2},$$

и проведем вокруг a_1 круг C_1 радиуса r_1. Пусть $\lambda_2(r)$ — верхняя граница значений $\mu(r, a)$ для всех точек a, лежащих вне C_1:

$$\lambda_2(r) = \sup \mu(r, a) \qquad (a \text{ вне } C_1).$$

Так как $\lambda_2(r)$, в силу своего определения, не больше чем $\lambda_1(r)$ и соотношение (18) справедливо для всех $r \geqslant r_1$, то для этих же значений и

$$\lambda_2(r) \leqslant h(r). \tag{19}$$

Если последнее неравенство справедливо для всех значений $r > 0$, то соотношение (17) имеет место для всех значений $r > 0$ и всех точек a, лежащих вне круга C_1, радиус r_1 которого удовлетворяет соотношению (18').

Если же это снова не так, то пусть r_2 — верхняя граница значений r, для которых $\lambda_2(r) > h(r)$; тогда $0 < r_2 \leqslant r_1$, и соотношение (19) справедливо для $r \geqslant r_2$. В частности

$$\lambda_2(r_2) = h(r_2).$$

Возьмем теперь точку a_2, для которой

$$\lambda_2(r_2) \leqslant \mu(r_2, a_2) + \frac{1}{4},$$

и проведем вокруг a_2 круг C_2 радиуса r_2; пусть

$$\lambda_3(r) = \sup \mu(r, a) \qquad (a \text{ вне } C_1, C_2).$$

Тогда $\lambda_3(r) \leqslant \lambda_2(r)$, и поэтому

$$\lambda_3(r) \leqslant h(r)$$

для $r \geqslant r_2$.

Если это неравенство справедливо для всех значений $r > 0$, то соотношение (17) имеет место для всех значений a, лежащих вне кругов C_1, C_2, радиусы r_1, r_2 которых удовлетворяют равенствам $\lambda_1(r_1) = h(r_1)$, $\lambda_2(r_2) = h(r_2)$.

Если же это не так, то предыдущий процесс может быть продолжен. Таким образом, последовательно определятся круги $C_1, C_2, \ldots$; радиус r_ν и центр a_ν круга C_ν при этом определятся следующим образом: пусть

$$\lambda_\nu(r) = \sup \mu(r, a) \qquad (a \text{ вне } C_1, \ldots, C_{\nu-1}) \tag{20}$$

и $r_\nu > 0$ — верхняя граница значений r, для которых $\lambda_\nu(r) > h(r)$; тогда $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \ldots \geqslant r_\nu$,

$$\lambda_\nu(r_\nu) = h(r_\nu) \quad \text{и} \quad \lambda_\nu(r) \leqslant h(r) \text{ для } r \geqslant r_\nu. \tag{21}$$

Центр a_ν выбирается произвольно вне $C_1, \ldots, C_{\nu-1}$, так, чтобы

$$\lambda_\nu(r_\nu) \leqslant \mu(r_\nu, a_\nu) + \frac{1}{2^\nu}, \tag{22}$$

что возможно согласно определению величины $\lambda_\nu(r)$.

В силу (21) для $r > r_\nu$

$$\mu(r, a) \leqslant h(r), \tag{23}$$

лишь бы точка a лежала вне кругов $C_1, \ldots, C_{\nu-1}$.

Если для некоторого ν соотношение (23) справедливо для всех значений $r > 0$ (a вне $C_1, \ldots, C_\nu$), то процесс обрывается. Тогда остается еще только показать, что $\sum_1^\nu h(r_i) \leqslant 6$.

Для этого заметим, что по построению каждый центр a_ν лежит вне кругов $C_\mu \neq C_\nu$. Отсюда следует, что любая точка z плоскости может быть покрыта самое большее *пятью* кругами; в самом деле, если соединить точку z с центрами покрывающих ее кругов, то, как нетрудно убедиться, всякие два таких отрезка соединения образуют, в силу упомянутого свойства центров, угол $> \frac{\pi}{3}$, откуда следует утверждение о пяти кругах.

Но в силу (21) и (22)

$$\sum_1^\nu h(r_i) = \sum_1^\nu \lambda_i(r_i) \leqslant \sum_1^\nu \mu(r_i, a_i) + \sum_1^\nu \frac{1}{2^i}. \tag{24}$$

Если e_k — часть множества E, точки которого покрываются ровно k кругами из числа кругов $C_1, \ldots, C_\nu$, то, так как μ аддитивна и $k \leqslant 5$,

$$\sum_1^\nu \mu(r_i, a_i) = \sum_{k=1}^5 \mu(e_k) \leqslant 5\mu(E) = 5 \tag{24'}$$

и из (24) следует утверждение, что

$$\sum_1^\nu h(r_i) \leqslant 6. \tag{17'}$$

Если же предыдущий процесс продолжается неограниченно, то мы получим бесконечную последовательность кругов $C_\nu(|z - a_\nu| < r_\nu)$, и соотношение (17) справедливо для $r > 0$ и точек a, лежащих вне этих кругов. В самом деле, по предыдущему, (17) справедливо для $r > r_\nu$, где ν может быть взято сколь угодно большим. Остается только показать, что $r_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$.

Но это следует непосредственно из того, что сумма $\sum_1^{\nu} h(r_i)$ в силу (24) и (24′) для каждого ν меньше 6. Следовательно, $h(r_\nu) \to 0$, а потому и $r_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. Одновременно получается соотношение (17′)

$$\sum_1^{\infty} h(r_\nu) \leqslant 6.$$

Тем самым лемма доказана полностью.

118. Как простое следствие из леммы получается теорема Картана. Предпошлем ей здесь несколько замечаний об интеграле Стильтьеса.

Кроме вышеопределенной монотонно возрастающей и непрерывной функции $h(r)$ рассмотрим еще монотонно убывающую функцию $g(r)$, определенную для $r > 0$. Тогда для $0 < r < \rho$ справедлива формула интегрирования по частям интеграла Стильтьеса

$$\int_{t=r}^{t=\rho} g(t)\,dh(t) = g(\rho)\,h(\rho) - g(r)\,h(r) - \int_{t=r}^{t=\rho} h(t)\,dg(t), \qquad (25)$$

где $g(\rho) = g(\rho - 0)$ и $g(r) = g(r + 0)$. Отсюда следует, что интегралы

$$\int_{t=0}^{t=\rho} g\,dh \quad \text{и} \quad \int_{t=0}^{t=\rho} h\,dg$$

одновременно конечны или бесконечны и в первом случае

$$\int_{t=0}^{t=\rho} g\,dh = g(\rho)\,h(\rho) - \int_{t=0}^{t=\rho} h\,dg.$$

В самом деле, если

$$\int_0^{\rho} g\,dh = \lim_{r \to 0} \int_r^{\rho} g\,dh$$

конечен, то для $0 < r < \rho$

$$g(r)\,h(r) = g(r) \int_0^r dh \leqslant \int_0^r g\,dh \to 0$$

при $r \to 0$ и искомое соотношение следует из (25) при $r \to 0$.

С другой стороны, если интеграл

$$\int_0^{\rho} h\,dg$$

имеет конечное значение, то для $0 < r < r_1 < \rho$

$$\int_r^{r_1} h\,|dg| \geqslant h(r)\,[g(r) - g(r_1)],$$

следовательно,

$$h(r)\,g(r) \leqslant h(r)\,g(r_1) + \int_0^{r_1} h\,|dg|,$$

откуда следует, что $h(r)\,g(r) \to 0$ при $r \to 0$; отсюда утверждение получается, как выше.

119. Пусть теперь на множестве E кроме функции распределения μ задана еще неотрицательная измеримая функция $f(z)$, конечная всюду, исключая самое большее множество e_0, для которого $\mu(e_0) = 0$. В силу измеримости функции $f(z)$ множество e_r точек z, определенное неравенством $f(z) > r$, измеримо для всех значений $r \geqslant 0$. Соотношение

$$\mu(e_r) = \varphi(r)$$

определяет неотрицательную, с возрастанием r монотонно убывающую функцию $\varphi(r)$, причем, если $r \to \infty$, то $\varphi(r) \to 0$.

При этих предположениях интеграл Стильтьеса-Лебега функции $f(z)$ относительно распределения μ, взятый по множеству E (ср. п. 104)

$$\int_E f(z)\,d\mu,$$

вполне определяется равенствами

$$\int_E f(z)\,d\mu = -\int_{r=0}^{\infty} r\,d\varphi(r) = -\lim_{\rho\to\infty}\int_0^{\rho} r\,d\varphi(r). \tag{26}$$

Предположим, что этот интеграл *конечен*. Тогда для произвольного $\rho > 0$ интегрированием по частям получается

$$\int_0^{\rho} r\,d\varphi = \rho\varphi(\rho) - \int_0^{\rho} \varphi(r)\,dr. \tag{27}$$

Если теперь ρ неограниченно увеличивать, то абсолютная величина интеграла, стоящего в левой части (27), будет стремиться к конечному пределу (26). Тем же методом, что и выше, доказываем, что $\rho\varphi(\rho) \to 0$ при $\rho \to \infty$. Отсюда следует, что интеграл в правой части (27) стремится к конечному пределу и, следовательно,

$$\int_E f(z)\,d\mu = -\int_0^{\infty} r\,d\varphi(r) = \int_0^{\infty} \varphi(r)\,dr. \tag{28}$$

120. В дальнейшем мы рассматриваем функции, зависящие от параметра a и имеющие вид

$$f(z)=g(|z-a|),$$

где $g(r)\geqslant 0$ — монотонно убывающая функция от $r>0$, для которой

$$g(0)=\lim_{r\to 0} g(r)=\infty.$$

Мы делаем еще дополнительное предположение, что при $r\to 0$ функция $g(r)$ растет настолько медленно, что для функции h, указанного в лемме вида (п. 117), интеграл Стильтьеса

$$\int_0^{\rho} g\,dh$$

имеет конечное значение.

Теорема Г. Картана. *При сделанных выше предположениях относительно функций g, h и μ, для всех точек a, исключая, быть может, множество этих точек, которое может быть покрыто последовательностью кругов C_1, C_2, ..., радиусы r_1, r_2, ... которых удовлетворяют неравенству*

$$\sum h(r_\nu)\leqslant 6,$$

имеет место соотношение

$$\int_E g(|z-a|)\,d\mu(z)\leqslant \int_{h=0}^{h=1} g(r)\,dh(r). \qquad (29$$

Для доказательства определим число ρ уравнением $h(\rho)=1$. Тогда, согласно (28), для заданного a

$$\int_E g(|z-a|)\,d\mu=\int_{r=0}^{\infty}\mu(g(|z-a|)>r)\,dr=\int_0^{g(\rho)}+\int_{g(\rho)}^{\infty},$$

где $\mu(g>r)$ означает массу, расположенную на части множества E, определяемой неравенством $g(|z-a|)>r$. Так как $\mu\leqslant 1$, то

$$\int_0^{g(\rho)}\mu(g>r)\,dr\leqslant g(\rho).$$

С другой стороны, из (17), с учетом $dg\leqslant 0$, следует, что

$$\int_{g(\rho)}^{\infty}\mu(g>t)\,dt=-\int_{r=0}^{\rho}\mu(g(|z-a|)>g(r))\,dg(r)=$$

$$=-\int_{r=0}^{\rho}\mu(r,\,a)\,dg(r)\leqslant-\int_{r=0}^{\rho}h(r)\,dg(r)=-g(\rho)+\int_{h=0}^{h=1} g\,dh,$$

исключая последовательность кругов, радиусы r_ν которых удовлетворяют соотношению (17′).

Сложением полученных двух соотношений получается утверждение теоремы.

§ 6. Метрические свойства множеств гармонической меры нуль.

121. Как и в общей теории гармонической меры, для гармонических нульмножеств также встает вопрос об отношении гармонической меры к другим метрическим определениям тех же множеств. В предыдущих параграфах мы уже касались этого вопроса; именно, мы нашли, что множество, состоящее из конечного числа точек, всегда гармонической меры нуль, в то время как континуум всегда положительной гармонической меры. Однако скачок от конечного числа точек до континуума огромный, поэтому в дальнейшем сделаем попытку охарактеризовать возможно более точно метрические свойства гармонических нульмножеств, привлекая для этого подходящие мероопределения.

Сперва укажем простое достаточное условие, чтобы множество α было гармонической меры нуль; оно получается как следствие из теоремы, доказанной Линдебергом (Lindeberg [1]) еще в 1918 г. В качестве достаточного условия, чтобы функция, однозначная, гармоническая и ограниченная в окрестности множества α, была гармонической также в точках множества α, Линдеберг нашел следующее:

Нужно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ *множество* α *могло быть покрыто последовательностью кругов, радиусы которых* r_ν *удовлетворяют соотношению* *)

$$\sum \frac{1}{\overset{+}{\log}\frac{1}{r_\nu}} < \varepsilon. \tag{30}$$

Про такое множество говорят, что оно *логарифмической меры нуль.*

Если теперь сравнить эту теорему Линдеберга с теоремой 2, данной в § 4, п. 114, то придем к следующей теореме.

Теорема 1. *Замкнутое множество логарифмической меры нуль имеет гармоническую меру нуль.*

Эта теорема является простым следствием из леммы § 2 этой главы. Если заданное множество α логарифмической меры нуль расположено в круге $|z| < \frac{1}{2}$, что можно предположить, не нарушая общности, то покроем его последовательностью кругов C_ν с радиусами r_ν. Емкость $e^{-\gamma}$ множества α самое большее равна емкости множества, состоящего из суммы покрывающих кругов C_ν.

*) $\overset{+}{\log} a$ равняется большему из чисел $(\log a, 0)$.

Но емкость круга C_ν равна r_ν, и в силу упомянутой леммы

$$\frac{1}{\gamma} < \sum \frac{1}{\log \frac{1}{r_\nu}},$$

откуда видно, что $\gamma = \infty$, что и требовалось доказать.

122. Здесь нам необходимо сделать несколько общих замечаний относительно определений меры множеств. Множество α называется *плоской*, соответственно *линейной* меры нуль, если для всякого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто последовательностью кругов C_ν так, чтобы сумма

$$\sum r_\nu^2, \text{ соответственно } \sum r_\nu,$$

была меньше чем ε. В общем случае множество α имеет нулевую меру порядка λ, если соответствующее справедливо для суммы

$$\sum r_\nu^\lambda.$$

Если α имеет нулевую меру порядка λ_1, то, если $\lambda_1 < \lambda_2$, оно имеет также нулевую меру порядка λ_2.

Выше мы ввели еще „логарифмические нульмножества". Такие множества, очевидно, всегда меры нуль порядка λ для любого $\lambda > 0$.

Для наших целей полезно дать следующее общее определение [1]):

Пусть $h(r)$ для $r > 0$ — непрерывная, монотонно возрастающая функция от r, для которой $h(0) = 0$. Каждому множеству α может быть следующим образом поставлено в соответствие неотрицательное конечное или бесконечное число $m(\alpha, h)$, так называемая h-мера множества α, а именно: множество α покрывают произвольной последовательностью кругов C_ν с радиусами $r_\nu \leqslant \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ и обозначают через $m_\varepsilon(\alpha, h)$ нижнюю границу соответствующих сумм $\sum h(r_\nu)$. С уменьшением ε эта величина монотонно возрастает. $m(\alpha, h)$ полагают равным пределу $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} m_\varepsilon(\alpha, h)$ $(0 \leqslant m(\alpha, h) \leqslant \infty)$. Для $h = \pi r^2$, таким образом, получается плоская (внешняя) мера, для $h = 2r$ — линейная мера, для $h = \dfrac{1}{\log \frac{1}{r}}$ — логарифмическая мера.

123. Мы переходим теперь к установлению *необходимых* метрических условий, чтобы множество было гармонической меры нуль. Это легко удается с помощью результатов последних двух параграфов.

Пусть α — замкнутое ограниченное множество гармонической меры нуль; не представит существенного ограничения, если мы предположим еще, что α расположено в круге $|z| < \frac{1}{2}$. Распреде-

[1]) См. F. Hausdorff [3].

лим на этом круге единичную массу с неотрицательной плотностью μ и образуем потенциал

$$u(z)=\int\limits_{|\zeta|<\frac{1}{2}} \log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu.$$

Так как постоянная Робэна $\gamma(\alpha)=+\infty$, то мы знаем (§ 2 и 3), что функция распределения μ может быть выбрана так, что минимум потенциала u на α будет сколь угодно большим [1]).

Положим затем $g(|z-\zeta|)=\overset{+}{\log}\frac{1}{|z-\zeta|}$. Этим g определяется как неотрицательная убывающая функция от $|z-\zeta|$, для которой $g(0)=\infty$. Следовательно, она удовлетворяет условиям теоремы Картана.

Пусть далее $h(r)$ — определенная для $r\geqslant 0$ монотонно возрастающая функция от r, которая при $r\to 0$ стремится к нулю так быстро, что интеграл

$$\int\limits_0 \frac{h(r)}{r}\,dr=-\int\limits_0 h(r)\,dg(r)$$

имеет *конечное* значение. Если заменить h функцией λh, где λ настолько велико, что $\lambda h(\infty)>1$, то интеграл

$$\int \overset{+}{\log}\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu$$

мы сможем оценить сверху с помощью теоремы Картана; таким образом, мы найдем, что

$$u(z)\leqslant\lambda\int\limits_{h=0}^{h=\frac{1}{\lambda}} g(r)\,dh=g(\rho)-\lambda\int\limits_{r=0}^{r=\rho} h(r)\,dg(r)=\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho}+\lambda\int\limits_0^{\rho}\frac{h(r)}{r}\,dr \qquad (31)$$

для каждого z, исключая, быть может, точки некоторых кругов C_ν, радиусы r_ν которых удовлетворяют неравенству

$$\sum h(r_\nu)\leqslant\frac{6}{\lambda};$$

при этом ρ означает положительное число, однозначно определенное уравнением $h(\rho)=\frac{1}{\lambda}$.

Из предыдущего результата заключаем, что α должно иметь h-меру нуль. В самом деле, если $\varepsilon>0$, то зафиксируем значение λ,

[1]) В самом деле, если взять аппроксимирующую область G_1, ограниченную конечным числом жордановых дуг, и решить для нее проблему Робэна, то на дополнении к G_1, в частности на α, потенциал равновесия будет принимать постоянное значение, которое при $G_1\to G$ неограниченно возрастает.

для которого кроме условия $\lambda h(\infty) > 1$ выполняется еще условие $\frac{6}{\lambda} < \varepsilon$. Тогда существует функция распределения μ, для которой потенциал u в каждой точке множества α *больше*, чем

$$\overset{+}{\log}\frac{1}{\rho} + \lambda \int_0^{\rho} \frac{h(r)}{r}\, dr.$$

С другой стороны, в силу предыдущего, u самое большее равно этому числу в каждой точке z, лежащей вне кругов C_ν. Следовательно, эти круги должны покрывать множество α и так как, далее,

$$\sum h(r_\nu) \leqslant \frac{6}{\lambda} < \varepsilon,$$

то h-мера множества α равна нулю, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Множество гармонической меры нуль имеет h-меру нуль для каждой функции меры (Maßfunktion), для которой интеграл*

$$\int_0 \frac{h(r)}{r}\, dr \tag{32}$$

конечен.

124. В качестве допустимой функции h можно, например, взять $h = r^\lambda$ $(\lambda > 0)$. Следовательно, гармонические нульмножества для любого $\lambda > 0$ имеют меру порядка λ, равную нулю. Более того, можно даже положить

$$h = \frac{1}{\log\frac{1}{r}\log_2\frac{1}{r}\ldots\left(\log_k\frac{1}{r}\right)^{1+\eta}},$$

где $\log_k$ означает k-ю итерацию логарифма и $\eta > 0$. Мы видим, таким образом, что *найденное необходимое условие очень близко подходит к предыдущему достаточному условию* (п. 121). В самом деле, логарифмической мере соответствует функция меры

$$h = \frac{1}{\log\frac{1}{r}};$$

для этой функции интеграл (32) расходится; следовательно, равенство нулю гармонической меры не позволяет сделать заключение, что и логарифмическая мера заданного множества α равна нулю. Что это условие действительно не является необходимым для того, чтобы множество было гармонической меры нуль, будет дальше показано на примере.

Если h-мера множества α *положительна* для функции меры, для которой интеграл (32) конечен, то, по теореме 2, множество α

имеет также положительную гармоническую меру. Представляется вероятным и обратное, т. е., что если множество α имеет *конечную* h-меру для функции меры h, для которой интеграл (32) расходится, то α гармонической меры нуль.

Если бы это было так, то проблема метрической характеристики гармонических нульмножеств была бы решена со всей желательной точностью. По этому вопросу мы еще добавим кое-что в конце этого параграфа.

125. Интересный пример для вышеразобранных соотношений дают так называемые *канторовы множества*. Последние определяются при помощи следующей простой конструкции.

Из единичного отрезка $\Delta\,(0 \leqslant z \leqslant 1)$ удалим интервал $\overline{\Delta}_1$ длины $\Delta\left(1-\frac{1}{p}\right)=1-\frac{1}{p}$ $(p>1)$ так, чтобы остались два равных замкнутых отрезка Δ_1 длины $\frac{\Delta}{2p}=\frac{1}{2p}$. Мы коротко скажем, что отрезки Δ_1 получились из отрезка Δ операцией (p).

Множество, состоящее из обоих отрезков Δ_1, обозначим через $E(p)$. Если повторить операцию p по отношению к отрезкам Δ_1, то получится подмножество $E(p^2)$ множества $E(p)$, состоящее из четырех равных отрезков, сумма длин которых равна $\frac{1}{p^2}$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы определим бесконечную последовательность вложенных друг в друга множеств

$$E(p^\nu) \qquad (\nu=0,\ 1,\ \ldots;\ E(p^0)=\Delta),$$

из которых $E(p^\nu)$ состоит из 2^ν не имеющих общих точек отрезков длины $(2p)^{-\nu}$. Дополнительное множество $\overline{E}(p^\nu)$ состоит из $2^\nu-1$ интервалов $\overline{\Delta}_\nu$, сумма длин которых равна $1-p^{-\nu}$.

Пересечение всех множеств $E(p^\nu)$, или, что то же самое, дополнение к сумме дополнительных интервалов $\overline{\Delta}_\nu$, представляет нигде неплотное совершенное множество $E(p^\infty)$. Исследуем меру этого *канторового множества*.

126. Во-первых, $E(p^\infty)$ как совершенное множество имеет мощность континуума. Далее, так как $E(p^\infty)$ может быть покрыто отрезками Δ_ν, сумма длин которых равна $\frac{1}{p^\nu}$, то линейная мера канторового множества во всяком случае равна нулю. Тем не менее, как мы сейчас покажем, гармоническая мера этого множества *положительна*.

Для этой цели рассмотрим последовательность постоянных Робэна $\gamma_0 \leqslant \gamma_1 \leqslant \ldots$ для множеств $E(p^0)$, $E(p^1)$, ...; так как эти множества имеют пределом канторово множество $E(p^\infty)$, то $\lim \gamma_\nu$ равен постоянной Робэна γ этого миожества и нужно, следовательно, показать, что γ конечно.

Возрастание чисел γ_ν легко оценить с помощью следующего простого замечания: пусть G и G' — две области, которые содержат

точку $z=\infty$ и могут быть преобразованы одна в другую посредством преобразования $z'=az+b$. Если $g(z,\ \infty)=\log|z|+\gamma+\varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)$ — функция Грина области G, то $g\left(\frac{z'-b}{a},\ \infty\right)=\log|z'|+\gamma-\log|a|+\varepsilon\left(\frac{1}{z'}\right)$ является функцией Грина области G', и, следовательно, постоянная Робэна γ' области G' равна $\gamma-\log|a|$.

Интервал $\overline{\Delta}_1$ делит множество $E(p^n)$ на два конгруэнтных множества E_1 и E_2, которые подобны множеству $E(p^{n-1})$ с коэфициентом подобия $1:2p$. Следовательно,

$$\gamma(E_1)=\gamma(E_2)=\gamma_{n-1}+\log 2p. \tag{33}$$

С другой стороны, для этих постоянных Робэна мы имеем интегральные выражения

$$\gamma(E_i)=\int\limits_{E_i}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu_i(\zeta)\qquad(i=1,\ 2),$$

где точка z на E_i может быть выбрана произвольно. Диференциал $d\mu_i$, соответствующий здесь элементу дуги $d\zeta$, равен гармонической мере этого элемента дуги, измеренной относительно дополнительной к E_i области в точке $z=\infty$. В двух точках множеств E_1 и E_2, симметричных относительно точки $\zeta=\frac{1}{2}$, диференциальные отношения $\left|\frac{d\mu_1}{d\zeta}\right|$ и $\left|\frac{d\mu_2}{d\zeta}\right|$ равны друг другу.

Рассмотрим теперь потенциал

$$u(z)=\int\limits_{E(p^n)}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu(\zeta)$$

единичной массы, распределенной на $E(p^n)$ по закону $\mu=\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)$. Согласно § 3 этой главы, постоянная Робэна γ_n лежит между максимумом и минимумом этого интеграла на $E(p^n)$.

Далее

$$u(z)=\frac{1}{2}\int\limits_{E_1}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu_1+\frac{1}{2}\int\limits_{E_2}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu_2.$$

Здесь $0\leqslant\log\frac{1}{|\zeta-z|}\leqslant\log\frac{p}{p-1}$, если z_1 лежит на E_1 и ζ — на E_2, и, следовательно, для z на E_1

$$\frac{1}{2}\int\limits_{E_1}\log\frac{1}{|\zeta-z|}\,d\mu_1=\frac{\gamma(E_1)}{2}\leqslant u(z)\leqslant\frac{\gamma(E_1)}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{p}{p-1}.$$

Такое же соотношение, в силу симметрии, имеет место и на E_2.

Если положить

$$d=\log\frac{p}{p-1}, \tag{34}$$

то в соединении с (33) получится соотношение

$$\gamma_{n-1} + \log 2p \leqslant 2\gamma_n \leqslant \gamma_{n-1} + \log 2p + d. \tag{35}$$

Повторным применением этого соотношения мы в конце концов, так как $\gamma_0 = \log 4$ является постоянной Робэна единичного отрезка [1]), получим соотношение

$$\frac{\log 4}{2^n} + \log 2p \sum_1^n \frac{1}{2^\nu} \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{\log 4}{2^n} + (\log 2p + d) \sum_1^n \frac{1}{2^\nu},$$

следовательно,

$$\log 2p + \frac{\log \frac{2}{p}}{2^n} \leqslant \gamma_n \leqslant \log 2p + \frac{\log \frac{2}{p}}{2^n} + d.$$

Следовательно, постоянная Робэна γ множества $E(p^\infty)$ удовлетворяет неравенству

$$\log 2p \leqslant \gamma \leqslant \log 2p + d = \log \frac{2p^2}{p-1}.$$

Соответствующая емкость лежит между пределами

$$\frac{1}{2p} - \frac{1}{2p^2} \leqslant C(E(p^\infty)) \leqslant \frac{1}{2p}.$$

127. Нижеследующее изменение предыдущего процесса напрашивается само собой. Возьмем последовательность чисел

$$p_0 = 1,\ p_1, p_2, \ldots \quad (p_\nu > p > 1 \text{ для } \nu \geqslant 1)$$

и определим, исходя из единичного отрезка $E(p_0)$ последовательность множеств

$$E(p_0 p_1 \ldots p_n) \qquad (n = 0,\ 1, \ldots),$$

из которых $E(p_0 p_1)$ получается из $E(p_0)$ операцией (p_1), $E(p_0 p_1 p_2)$ из $E(p_0 p_1)$ операцией (p_2) и т. д. Множество $E(p_0 p_1 \ldots p_n)$ состоит из 2^n равных замкнутых отрезков, сумма длин которых равна

$$\frac{1}{p_0 p_1 \ldots p_n}.$$

Пересечение этой последовательности множеств снова представляет нигде неплотное совершенное множество $E(p_0 p_1 \ldots)$ мощности континуум.

Гармоническая мера этого множества может быть оценена указанным выше методом. Если обозначить через $\gamma_{n\nu}$ постоянную Робэна множества $E(p_0 p_\nu p_{\nu+1} \ldots p_n)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, где, следовательно, $\gamma_{n1} = \gamma_n$ есть подлежащая оценке величина, то, повторяя предыдущий вывод [ср. (35)], мы найдем, что

$$\gamma_{n2} + \log 2p_1 \leqslant 2\gamma_{n1} \leqslant \gamma_{n2} + \log 2p_1 + d,$$

[1]) Это легко доказывается непосредственным вычислением функции Грина внешней области.

где $d = \log \frac{p}{p-1}$. Применяя далее это соотношение к парам $(\gamma_{n2}, \gamma_{n3})$, $(\gamma_{n3}, \gamma_{n4})$ и т. д. и решая получающиеся неравенства, мы в конце концов найдем соотношение

$$\frac{\log 4}{2^n} + \sum_1^n \frac{\log 2p_\nu}{2^\nu} \leqslant \gamma_n \leqslant \frac{\log 4}{2^n} + \sum_1^n \frac{\log 2p_\nu + d}{2^\nu}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получается

Теорема 3. *Множество $E(p_0p_1\ldots)$ тогда и только тогда гармонической меры нуль, когда ряд*

$$\sum \frac{\log p_\nu}{2^\nu} \tag{36}$$

расходится.

128. Этот результат позволяет провести интересное испытание двух предыдущих общих признаков для равенства, соответственно неравенства нулю гармонической меры произвольного множества.

Обозначим через

$$t_n = \frac{2^{-n}}{p_0p_1\ldots p_n} \tag{37}$$

длину отрезка Δ_n, покрывающего множества $E(p_0p_1\ldots p_n)$, и определим непрерывную монотонно убывающую функцию $n(t)$ от $t\,(0 < t \leqslant 1)$ так, что

$$n(t) = \nu \text{ для } t = t_\nu\,(\nu = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{38}$$

Как определяется $n(t)$ между значениями t_ν и $t_{\nu+1}$, для наших целей не имеет значения; однако известное преимущество дает такой выбор $n(t)$, при котором

$$\frac{dn}{dt} \geqslant -\frac{1}{t}\frac{1}{\log 2p}. \tag{38'}$$

Этого можно всегда достигнуть, определяя, например, $n(t)$ в интервале $(t_\nu, t_{\nu+1})$ как линейную функцию от $\log t$, ибо тогда в этом интервале

$$n(t) = \nu + \frac{\log \frac{t_\nu}{t}}{\log \frac{t_\nu}{t_{\nu+1}}},$$

и поэтому

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{1}{t}\,\frac{1}{\log \frac{t_\nu}{t_{\nu+1}}} = -\frac{1}{t}\,\frac{1}{\log 2p_{\nu+1}} \geqslant -\frac{1}{t}\,\frac{1}{\log 2p}.$$

Функция

$$\varphi(t) = 2^{-n(t)}$$

обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(t)$ в интервале $(0 < t \leqslant 1)$ положительна и монотонно возрастает.

2) $\frac{d \log \varphi(t)}{d \log t} < \Theta < 1$.

3) Для $t = t_\nu (\nu = 0, 1, \ldots)$ имеем $\varphi(t_\nu) = 2^{-\nu}$.

Каждую такую функцию мы называем *соответствующей канторову множеству* $E(p_0 p_1 \ldots)$.

Пусть, наоборот, $\varphi(t)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям 1) и 2). Положим

$$n(t) = \frac{1}{\log 2} \log \frac{1}{\varphi(t)}, \text{ причем } n'(t) > \frac{\Theta}{-t \log 2},$$

тогда, при непрерывном убывании t от 1 до 0, функция $n(t)$, непрерывно возрастая, пробегает интервал $(0, \infty)$. Следовательно, последовательность корней $t_\nu (> 0)$ уравнений $n(t) = \nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots; t_0 = 1)$ с возрастанием ν монотонно убывает и, в силу 2),

$$-1 = \int_{t=t_{\nu+1}}^{t_\nu} dn > -\frac{\Theta}{\log 2} \log \frac{t_\nu}{t_{\nu+1}},$$

или

$$\frac{t_\nu}{t_{\nu+1}} > 2^{\frac{1}{\Theta}}.$$

Таким образом, если положить $p_0 = 1$ и для $\nu > 1$

$$2p_\nu = \frac{t_{\nu+1}}{t_\nu},$$

то этим определится бесконечная последовательность

$$p_1, p_2, \ldots$$

чисел $p_n > 2^{\frac{1}{\Theta} - 1} > 1$ такая, что *заданная функция* $\varphi(t)$ *будет соответствующей для канторового множества* $E(p_0 p_1 \ldots)$.

129. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 4. *Канторово множество* $E(p_0 p_1 \ldots)$ *имеет положительную конечную* h*-меру, если за функцию меры* h *берется соответствующая этому множеству функция* φ.

В самом деле, пусть (I_ν) — последовательность интервалов, покрывающих канторово множество $E(p_0 p_1 \ldots)$. Тогда, в силу замкнутости последнего, существует конечное число (предположим m) не имеющих между собой общих точек интервалов I_ν (предположим $\nu = 1, 2, \ldots, m$), обладающих тем же свойством [1]), и, следо-

[1]) Это следует из леммы Гейне-Бореля о покрытии.

вательно, достаточно показать, что сумма *)

$$\sum_1^m \varphi\left(\frac{r_\nu}{2}\right),$$

где r_ν означает длину интервала I_ν, ограничена снизу *положительным* числом, не зависящим от выбора покрывающей последовательности (I_ν).

Далее, это свойство достаточно доказать для суммы

$$\sum_1^m \varphi(r_\nu).$$

Последняя, правда, превосходит предыдущую сумму, но, в силу свойства 2 функции φ,

$$\log \frac{\varphi(r)}{\varphi\left(\frac{r}{2}\right)} < \int_{\frac{r}{2}}^{r} d\log t = \log 2;$$

следовательно, $\varphi(r) < 2\varphi\left(\frac{r}{2}\right)$, так что

$$\sum \varphi\left(\frac{r_\nu}{2}\right) > \frac{1}{2}\sum \varphi(r_\nu).$$

Так как множество E замкнуто, то интервал I_ν содержит отрезок $\overline{I}_\nu$, который покрывает содержащиеся в I_ν точки множества E и коицы которого P_ν', P_ν'' принадлежат к этому множеству. В силу построения множества E обе эти точки являются одновременно, начиная с некоторого ν, концами вложенных друг в друга отрезков Δ_ν. Пусть n_ν — наибольшее из целых чисел n_ν' и n_ν'', которые определены так, что $\Delta_{n_\nu'}$ и $\Delta_{n_\nu''}$ суть наибольшие отрезки Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, лежащие в $\overline{I}_\nu$ и имеющие своими концами точки P_ν' и P_ν''. Пусть n — наибольшее из конечного числа чисел n_ν $(\nu = 1, \ldots, m)$. Тогда *отрезки, составляющие множество* $E(p_0 p_1 \ldots p_n)$, *целиком содержатся в отрезках* $\overline{I}_\nu$, *следовательно, и в интервалах* I_ν.

Пусть теперь q_ν — число отрезков Δ_n, лежащих в I_ν; в силу предыдущего

$$\sum_{\nu=1}^{m} q_\nu = 2^n.$$

Пусть далее λ_ν — наименьшее целое число, для которого I_ν содержит по крайней мере *один* отрезок Δ_{λ_ν}; следовательно, $\lambda_\nu \leqslant n_\nu \leqslant n$. Тогда, так как длина t_{λ_ν} такого отрезка $\leqslant r_\nu$, то

$$\varphi(r_\nu) \geqslant \varphi(t_{\lambda_\nu}) = 2^{-\lambda_\nu}.$$

*) Интервалы I_ν служат *диаметрами* покрывающих кругов.

Заметим, что два следующих друг за другом отрезка Δ_i не всегда принадлежат к одному и тому же отрезку Δ_{i-1}, но из трех следующих друг за другом отрезков Δ_i одна пара всегда обладает этим свойством. Если бы I_ν содержал *три* отрезка Δ_{λ_ν}, то он содержал бы отрезок $\Delta_{\lambda_\nu-1}$, что противоречит определению λ_ν. Следовательно, для интервала I_ν можно найти группу G_ν из четырех следующих друг за другом отрезков Δ_{λ_ν}, из которых по крайней мере один лежит в I_ν и которые вместе *покрывают все* q_ν *отрезков* Δ_n, *лежащих в* I_ν. Каждый отрезок Δ_{λ_ν} содержит ровно $2^{n-\lambda_\nu}$ отрезков Δ_n; следовательно, группа G_ν содержит их ровно $2^{n-\lambda_\nu+2}$ и, таким образом,

$$q_\nu \leqslant 2^{n-\lambda_\nu+2} \text{ или } 2^{-\lambda_\nu} \geqslant \frac{q_\nu}{2^{n+2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_1^m \varphi(r_\nu) \geqslant \sum_1^m 2^{-\lambda_\nu} \geqslant \frac{1}{2^{n+2}} \sum_1^m q_\nu = \frac{1}{4},$$

и наше утверждение доказано.

С другой стороны, φ-мера множества E наверное конечна, ибо для покрывающих отрезков Δ_n длины t_n

$$\sum \varphi(t_n) = 2^n \varphi(t_n) = 1.$$

Следовательно, *φ-мера канторового множества* $E(p_0 p_1 \ldots)$ *лежит между* $\frac{1}{8}$ и 1.

130. Принимая во внимание выведенный выше общий критерий для обращения в нуль емкости канторового множества, исследуем теперь интеграл

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\, dt.$$

Имеем

$$\int_{t_n}^1 \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = \sum_{\nu=1}^n \int_{t_\nu}^{t_{\nu-1}} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt.$$

Далее,

$$\varphi(t_\nu) \log \frac{t_{\nu-1}}{t_\nu} \leqslant \int_{t_\nu}^{t_{\nu-1}} \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \leqslant \varphi(t_{\nu-1}) \log \frac{t_{\nu-1}}{t_\nu}$$

или, так как $\varphi(t_\nu) = 2^{-\nu}$ и $\frac{t_{\nu-1}}{t_\nu} = 2p_\nu$,

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\log 2p_\nu}{2^\nu} \leqslant \int_{t_n}^1 \frac{\varphi(t)}{t}\, dt \leqslant 2 \sum_{\nu=1}^n \frac{\log 2p_\nu}{2^\nu}.$$

ТЕОРЕМА 5. *Интеграл*

$$\int_0 \frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

и ряд

$$\sum^{\infty} \frac{\log p_\nu}{2^\nu}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Из доказанной теоремы вытекает

ТЕОРЕМА 6. *Канторово множество $E(p_0p_1\ldots)$ тогда и только тогда положительной гармонической меры, когда интеграл*

$$\int_0 \frac{\varphi(t)}{t}\,dt, \tag{39}$$

где φ — функция, соответствующая этому множеству,—сходится.

Часть последией теоремы можно было бы также получить как следствие из общего критерия теоремы 2. В самом деле, множество E имеет положительную φ-меру, а потому, если интеграл (39) сходится, то по теореме 2 гармоническая мера множества E, в согласии с теоремой 6, положительна.

Теорема 6 далее показывает, что общий критерий теоремы 2 не может быть усилен.

Если $h(r)$ — произвольная функция меры, которая удовлетворяет условиям 1, 2, 3 п. 128 и для которой интеграл

$$\int_0 \frac{h(r)}{r}\,dr$$

расходится, то всегда найдутся гармонические нульмножества, имеющие положительную h-меру.

В самом деле, таким множеством является, например, канторово множество, для которого $h(r)$ является соответствующей функцией.

Если, например, выбрать $h(r) = \dfrac{1}{\log\frac{1}{r}\ldots\log_k\frac{1}{r}}\,(k>1)$, то соответствующее канторово множество будет гармонической меры нуль. Оно имеет конечную h-меру и *бесконечную логарифмическую меру*, в последнем легко убедиться, применяя соотношение

$$h(r)\log\frac{1}{r}\to 0 \quad \text{при} \quad r\to 0.$$

Наш результат показывает, что данный выше критерий Линдеберга (теорема 1) является достаточным, но отнюдь не необходимым критерием для равенства нулю гармонической меры.

В предыдущих результатах, касающихся емкости канторовых множеств, можно вообще усмотреть известное подтверждение общего предположения, высказанного в п. 124.

VI. ПЕРВАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Формула Пуассона-Иенсена.

131. В этой и следующих главах мы займемся теорией аналитических функций, которые в каждой точке заданной однолистной области G регулярны или имеют полюс, или, как это короче выражают, *мероморфны*. Такие функции с точностью до полюсов в G регулярны; если число полюсов бесконечно велико, то они сгущаются к границе Γ области G. В дальнейшем мы ограничимся простейшим случаем, когда G односвязна; по теореме о монодромии функция $w(z)$ тогда в G однозначна.

Мы рассмотрим два существенно различных случая в зависимости от того, состоит ли граница Γ из одной точки (параболический случай) или из континуума (гиперболический случай). По основной теореме теории конформных отображений в этих случаях область G может быть конформно отображена на всю конечную плоскость $|z|<\infty$ или на конечный круг $|z|<R<\infty$ и, следовательно, не составит существенного ограничения, если мы с самого начала будем придерживаться этих нормальных областей.

Итак, мы рассматриваем аналитическую функцию $w=w(z)$, которая мероморфна в конечном или бесконечном круге $|z|<R\leqslant\infty$. В этом случае выражение $\log|w|$ гармонично для тех же значений z, за исключением полюсов b_ν и нулей a_μ функции w, в которых $\log|w|$ обладает положительными, соответственно отрицательными, логарифмическими полюсами. При этом разности

$$\log|w|-k_\nu\log\left|\frac{1}{z-b_\nu}\right|$$

и

$$\log|w|-h_\mu\log|z-a_\mu|,$$

где k_ν есть кратность полюса b_ν, а h_μ — кратность нуля a_μ, остаются гармоничными.

Пусть теперь ρ — число из интервала $0<\rho<R$, для которого на окружности $|z|=\rho$ функция w отлична от нуля и бесконечности. В каждом полюсе b_ν, соответственно в каждом нуле a_μ, лежащем в круге $|z|<\rho$, выражения

$$g(z,\ b_\nu)-\log\left|\frac{1}{z-b_\nu}\right|,$$

соответственно

$$g(z,\ a_\mu)+\log|z-a_\mu|,$$

где

$$g(z,\zeta)=\log\left|\frac{\rho^2-\bar{\zeta}z}{\rho(z-\zeta)}\right|$$

— функция Грина круга $|z|<\rho$, — гармоничны. Следовательно, выражение

$$\log|w(z)|-\sum_{|b_\nu|<\rho} g(z, b_\nu)+\sum_{|a_\mu|<\rho} g(z, a_\mu),$$

где суммирование распространено на все лежащие в круге $|z|<\rho$ полюсы и нули, с учетом их кратности (т. е. каждый член нужно считать столько раз, какова кратность соответствующего полюса или нуля), определяет функцию, гармоническую в замкнутом круге $|z|\leqslant\rho$. Если к ней применить формулу Пуассона (гл. II, § 1) и учесть, что функция Грина на окружности $|z|=\rho$ исчезает, то получится ($z=re^{i\varphi}$) [1])

$$\log|w(re^{i\varphi})|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\,\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<\rho}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}\right|-\sum_{|a_\mu|<\rho}\log\left|\frac{\rho^2-\overline{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}\right|. \qquad (1)$$

Этот результат выведен в предположении, что окружность $|z|=\rho$ не содержит ни полюсов b_ν, ни нулей a_μ. Однако мы тотчас замечаем, что все члены в (1) непрерывны и для исключенных значений ρ, откуда заключаем, что формула справедлива для всех значений $\rho<R$.

132. Если положить $z=0$, то (1) переходит в

$$\log|w(0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta+\sum_{|b_\nu|<\rho}\log\frac{\rho}{|b_\nu|}-\sum_{|a_\mu|<\rho}\log\frac{\rho}{|a_\mu|}; \qquad (2')$$

это — формула Иенсена [2]). Общее соотношение (1), дающее значение $\log|w|$ в точке z круга $|z|<\rho$ как функцию граничных значений и полюсов и нулей, расположенных в этом круге, можно рассматривать как объединение формул Пуассона и Иенсена, и поэтому мы его будем называть *формулой Пуассона-Иенсена*. Если в (1) прибавить к обеим частям равенства сопряженные относительно переменной z гармонические функции, умноженные на i, то получится (ср. п. 4)

$$\log w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\,\frac{\rho e^{i\vartheta}+z}{\rho e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<\rho}\log\frac{\rho^2-\overline{b}_\nu z}{\rho(z-b_\nu)}-\sum_{|a_\mu|<\rho}\log\frac{\rho^2-\overline{a}_\mu z}{\rho(z-a_\mu)}. \qquad (1')$$

---

[1]) См. T. Carleman [1], F. u. R. Nevanlinna [1].
[2]) J. Jensen [1].

Формулы (1), (2′) и (1′) в дальнейшей теории будут играть основную роль.

Если точка $z=0$ является нулем или полюсом функции $w(z)$, то обе части в формуле Иенсена обращаются в бесконечность. Чтобы устранить этот недостаток в случае, когда w имеет разложение

$$w(z)=c_\lambda z^\lambda+c_{\lambda+1}z^{\lambda+1}+\ldots, \qquad (c_\lambda\neq 0)$$

применим формулу (2′) к выражению $wz^{-\lambda}$. Тогда получится

$$\log|c_\lambda|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta+$$
$$+\sum_{0<|b_\nu|<\rho}\log\frac{\rho}{|b_\nu|}-\sum_{0<|a_\mu|<\rho}\log\frac{\rho}{|a_\mu|}-\lambda\log\rho. \qquad (2'')$$

Это соотношение может быть приведено к форме, удобной для многих применений, если ввести функции $n(r,\infty)$ и $n(r,0)$, указывающие соответственно число полюсов и нулей функции w в замкнутом круге $|z|\leqslant r$, причем каждый из них считается с соответствующей кратностью. Суммы справа могут быть тогда записаны в виде интегралов Стильтьеса и после интегрирования по частям получится

$$\sum_{0<|b_\nu|<\rho}\log\frac{\rho}{|b_\nu|}=\int_{r=0}^{\rho}\log\frac{\rho}{r}\,d\left(n(r,\infty)-n(0,\infty)\right)=$$
$$=\int_0^\rho\frac{n(r,\infty)-n(0,\infty)}{r}\,dr,$$

и аналогично

$$\sum_{0<|a_\mu|<\rho}\log\frac{\rho}{|a_\mu|}=\int_0^\rho\frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}\,dr.$$

Формула Иенсена принимает тогда следующий вид:

$$\log|c_\lambda|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta+\int_0^\rho\frac{n(r,\infty)-n(0,\infty)}{r}\,dr-$$
$$-\int_0^\rho\frac{n(r,0)-n(0,0)}{r}\,dr+(n(0,\infty)-n(0,0))\log\rho. \qquad (2''')$$

Формулу Пуассона-Иенсена мы вывели выше как следствие из интегральной формулы Пуассона. Однако ее можно было бы вывести и прямо, применяя формулу преобразования Грина (гл. II, § 4), таким же образом, как и более специальную формулу Пуассона.

Мы это проведем более подробно для формулы Иенсена, причем будем исходить из формулы преобразования Гаусса

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = -\int_G \Delta u\,d\sigma,$$

которая получается из формулы Грина при $V=1$. Этот метод доказательства заслуживает быть особо отмеченным, так как в дальнейшем в некоторых близких к этому вопросах он нам окажет большие услуги [1]). Применим формулу Гаусса к функции $\log|w|$, выбирая за область G круг $|z|<r<R$, из которого удалены маленькие круги раднуса δ с центрами в полюсах b_ν и нулях a_μ; предполагается, что при $|z|=r$ функция w отлична от 0 и ∞. Если затем δ устремить к нулю, то после простого вычисления получится

$$r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} \log|w(re^{i\varphi})|\,d\varphi = 2\pi\,(n(r,0) - n(r,\infty)).$$

Деля на r и интегрируя между пределами r_0 и r $(0<r_0<r<R)$, мы найдем соотношение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(r_0e^{i\varphi})|\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(re^{i\varphi})|\,d\varphi + \int_{r_0}^{r} \frac{n(t,\infty)-n(t,0)}{t}\,dt,$$

откуда при $r_0\to 0$ получается формула Иенсена $(2''')$.

§ 2. Характеристическая функция.

133. В предположениях, сделанных в предыдущем параграфе, мы приведем теперь формулу Иенсена к форме, целесообразной для следующих дальше приложений.

Для этого введем простое обозначение: если a — неотрицательное число, то пусть $\overset{+}{\log} a$ означает большее из чисел $\log a$ и 0; следовательно,

$$\log a = \overset{+}{\log} a - \overset{+}{\log}\frac{1}{a}, \qquad |\log a| = \overset{+}{\log} a + \overset{+}{\log}\frac{1}{a}$$

и далее, как легко доказывается,

$$\left.\begin{aligned} &\overset{+}{\log}(a_1a_2\ldots a_p) \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \overset{+}{\log} a_\nu,\\ &\overset{+}{\log}\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \leqslant \sum_{\nu=1}^{p} \overset{+}{\log} a_\nu + \log p. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

[1]) По поводу этого метода доказательства см. E. Lindelöf [1].

Производя теперь в формуле Иенсена замену $\log|w| = \overset{+}{\log}|w| - \overset{+}{\log}\frac{1}{|w|}$ и записывая для краткости

$$\left.\begin{aligned} N(r,w) &= N(r,\infty) = \int_0^r \frac{n(t,\infty)-n(0,\infty)}{t}\,dt + n(0,\infty)\log r, \\ m(r,w) &= m(r,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|w(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

мы получим соотношение [1])

$$m(r,w) + N(r,w) = m\left(r,\frac{1}{w}\right) + N\left(r,\frac{1}{w}\right) + \log|c_\lambda|. \quad (2)$$

Возьмем теперь произвольное число $a \neq \infty$ и применим соотношение (2) к функции $w-a$, обозначая через $n(r,a)$ число корней уравнения $w-a=0$, лежащих в круге $|z|\leqslant r$, и полагая

$$\left.\begin{aligned} N(r,a) &= N\left(r,\frac{1}{w-a}\right) = \int_0^r \frac{n(t,a)-n(0,a)}{t}\,dt + n(0,a)\log r, \\ m(r,a) &= m\left(r,\frac{1}{w-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w(re^{i\varphi})-a}\right| d\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (4')$$

Тогда получится соотношение

$$m(r,w-a) + N(r,w-a) = m\left(r,\frac{1}{w-a}\right) + N\left(r,\frac{1}{w-a}\right) + \text{const}. \quad (5)$$

Очевидно, что

$$N(r,w-a) = N(r,w),$$

далее, согласно (3),

$$\overset{+}{\log}|w-a| \leqslant \overset{+}{\log}|w| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

$$\overset{+}{\log}|w| \leqslant \overset{+}{\log}|w-a| + \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

$$|m(r,w-a) - m(r,w)| \leqslant \overset{+}{\log}|a| + \log 2,$$

откуда, в силу (5),

$$m(r,a) + N(r,a) = m(r,\infty) + N(r,\infty) + \varphi(r),$$

где $|\varphi(r)| \leqslant \overset{+}{\log}|a| + \log 2 + |\log|c||$ и c означает первый неисчезающий коэфициент разложения Лорана функции $w-a$ в окрестности нулевой точки $z=0$.

---

[1]) См. R. Nevanlinna [4].

Если еще ввести обозначение

$$T(r, w) = T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty), \tag{6}$$

то, резюмируя, можно высказать следующий результат:

Первая основная теорема. *Для каждой функции* $w(z)$

$$w(z) = c_\lambda z^\lambda + c_{\lambda+1} z^{\lambda+1} + \dots \qquad (c_\lambda \neq 0),$$

мероморфной в круге $|z| < R \leqslant \infty$, *и каждого* $r\ (0 \leqslant r < R)$ *может быть определена такая функция* $T(r, w)$, *что для каждого конечного или бесконечного значения* a *имеет место соотношение*

$$m(r, a) + N(r, a) = T(r) + \varphi(r), \tag{1}$$

где

$$|\varphi(r)| \leqslant \overset{+}{\log}|a| + |\log|c|| + \log 2$$

при всех значениях r, *лежащих в интервале* $0 \leqslant r < R$; c *означает первый неисчезающий коэфициент разложения Лорана функции* $w - a$ *в окрестности нулевой точки* $z = 0$.

134. Этот результат обнаруживает замечательную симметрию в поведении функции, мероморфной в круге $|z| < R$, относительно различных комплексных чисел a (не исключая значения $a = \infty$): *сумма* $m(r, a) + N(r, a)$ *с точностью до аддитивного члена, ограниченного при* $r < R$, *сохраняет инвариантное относительно различных* a *значение, определяемое функцией* $T(r)$.

Из двух составляющих членов этой инвариантной суммы второй член $N(r, a)$ указывает среднюю плотность распределения корней уравнения $w - a = 0$ в круге $|z| < r$. Эта *функция числа* a*-точек* (*Anzahlfunktion der a-Stellen*) при возрастании r растет тем быстрее, чем больше число этих a-точек.

Первый член $m(r, a)$, определенный как среднее значение $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a}\right|$ (соответственно $\overset{+}{\log}|w|$, если $a = \infty$), на окружности $|z| = r$ получает существенные значения только от тех дуг этой окружности, на которых значение функции очень мало отличается от заданного значения a. Следовательно, значение этой *функции приближения* (*Schmiegungsfunktion*) можно рассматривать как меру среднего отклонения значений функции w на окружности $|z| = r$ от значения a.

Если число a-точек некоторой мероморфной функции относительно мало, то это находит свое аналитическое выражение в том, что соответствующая функция $N(r, a)$ при $r \to R$ возрастает сравнительно медленно; в предельном случае, когда a представляет пикаровское исключительное значение (т. е. $w \neq a$ для $|z| < R$), то $N(r, a) \equiv 0$. Этот недостаток в a-точках возмещается, однако, за счет того, что в среднем функция очень мало отклоняется от соответствующего значения a; следовательно, значение функции $m(r, a)$ для этого значения a сравнительно велико, так что сумма

$m(r, a)+N(r, a)$ достигает своего характеристического для функции w значения $T(r, w)$.

Ввиду большого значения величины T для асимптотических свойств соответствующей мероморфной функции мы ее называем *характеристической функцией* или просто *характеристикой функции* $w(z)$.

Из предыдущего следует, что если называть *исключительным значением* (*Ausnahmewert*) функции w такое значение a, которое функция вообще не принимает или принимает сравнительно редко, то этим лишь односторонне учитывается плотность тех точек, в которых функция близка к a. Вообще эта плотность характеризуется не только наличием a-точек, но и силой средней сходимости функции $w(z)$ к значению a. При такой характеристике исключительное положение выпускаемого значения a исчезает.

Первая основная теорема дает точное выражение этого замечательного свойства инвариантности мероморфной функции, которое имеет огромное значение для правильного понимания асимптотических ее свойств; в этом заключается большая принципиальная важность этой общей теоремы. Кроме того, она представляет также удобное вспомогательное средство, которое в большой степени облегчает оперирование с мероморфными функциями.

Если в вышеуказанном смысле отношение мероморфной функции ко всем комплексным значениям a и вполне симметрично, то все же вопрос об *исключительных значениях* мероморфной функции остается проблемой наибольшего интереса.

После того как мы уже обладаем первой основной теоремой, этот основной вопрос так называемой *теории распределения значений* (*Wertverteilungstheorie*) совпадает с вопросом об относительной величине составляющих $m(r, a)$ и $N(r, a)$ инвариантной суммы $m+N$. На этот вопрос первая основная теорема не дает никакого ответа и одной из наших важнейших задач в дальнейшем будет дополнить ее в указанном направлении.

135. В качестве примера рассмотрим показательную функцию $w=e^z$, имеющую два пикаровских исключительных значения: $a=0$ и $a=\infty$. Простым вычислением найдем, что [1])

$$N(r, a)=0,\ m(r, a)=\frac{r}{\pi} \text{ для } a=0,\ \infty,$$

$$N(r, a)=\frac{r}{\pi}+O(1),\ m(r, a)=O(1) \text{ для } a\neq 0,\ \infty.$$

Следовательно, характеристическая функция равна

$$T(r)=\frac{r}{\pi}$$

и, в соответствии с первой осиовной теоремой,

$$m(r, a)+N(r, a)=T(r)+O(1) \text{ для каждого значения } a.$$

[1]) Мы пользуемся здесь обозначением Ландау $O(\varphi(r))$ для каждой величины, для которой отношение $O(\varphi(r)):\varphi(r)$ *ограничено*.

Мы видим, что оба исключительных значения 0, ∞ обладают тем свойством, что при $r \to \infty$ показательная функция быстро к ним приближается. Эти значения являются *асимптотическими* или, как мы скажем по предложению Ульриха (Ullrich), *целевыми значениями* (*Zielwerte*) для функции e^z в каждом внутреннем угле левой, соответственно правой полуплоскости.

Поучительный во многих отношениях пример представляет целая функция

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p}\, dt,$$

где p — целое число $\geqslant 1$. При $|z| \to \infty$ подинтегральная функция в углах

$$\left|\arg z - \frac{\nu\pi}{p}\right| < \frac{\pi}{2p} - \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, \ldots, 2p-1) \quad (\varepsilon > 0) \qquad (W_\nu)$$

стремится к нулю или к бесконечности, в зависимости от того, будет ли ν четно или нечетно. Если ν четно, то в каждом из таких углов интеграл w имеет конечное предельное значение

$$a_\mu = e^{\frac{2\mu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-r^p}\, dr \qquad \left(\mu = \frac{\nu}{2} = 0, 1, \ldots, p-1\right);$$

если же ν нечетно, то в соответствующих углах w стремится к бесконечности.

Это исключительное положение $p+1$ значений $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p = \infty$, проявляется также и в поведении соответствующих фундаментальных величин m и N.

В самом деле, интегрированием по частям мы найдем, что в углах $W_{2\mu+1}$ $(\mu = 0, 1, \ldots, p-1)$,

$$\int_0^z e^{-t^p}\, dt = -\frac{e^{-z^p}}{pz^{p-1}}(1+\varepsilon),$$

где $\varepsilon \to 0$, когда $z \to \infty$ и, следовательно, в этих же углах $(z = re^{i\varphi})$

$$\log|w| \sim -r^p \cos p\varphi,$$

откуда далее следует, что

$$m(r, \infty) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

Так как $N(r, \infty)$ тождественно исчезает, то последнее выражение указывает также величину характеристической функции:

$$T(r, w) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

Если точка z лежит в угле W_0, то

$$\int_0^z e^{-t^p}dt - \int_0^\infty e^{-r^p}\,dr = -\int_z^\infty e^{-t^p}\,dt =$$

$$= -\frac{e^{-zp}}{pz^{p-1}} + \frac{p-1}{p}\int_z^\infty \frac{e^{-t^p}}{t^p}\,dt \sim -\frac{e^{-zp}}{pz^{p-1}}$$

на каждом луче, лежащем в W_0. Тогда $\log|w(z)-a_0| \sim -r^p\cos p\varphi$, и поэтому

$$m(r, a_0) \sim \frac{r^p}{p\pi}.$$

Аналогично найдем, что для $\mu = 0, 1, \ldots, p-1$

$$m(r, a_\mu) \sim \frac{r^p}{p\pi}.$$

Наконец, для каждого конечного значения $a \neq a_\mu$

$$m(r, a) = \varepsilon r^p, \quad \text{где} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Следовательно, применяя первую основную теорему, получаем:

$$m(r, a) \sim \frac{r^p}{\pi}, \quad N(r, a) = 0 \text{ для } a = a_p = \infty,$$

$$m(r, a) \sim \frac{r^p}{p\pi}, \quad N(r, a) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{r^p}{\pi} \text{ для } a = a_0, a_1, \ldots, a_{p-1},$$

$$m(r, a) \sim \varepsilon r^p, \quad N(r, a) \sim \frac{r^p}{\pi} \text{ для } a \neq a_\mu.$$

Следовательно, $N(r, a)$ для p асимптотических значений $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ отличается более слабым возрастанием, а для $a_p = \infty$ равна нулю.

136. Предыдущие примеры как бы указывают на то, что из двух членов суммы $m + N$ функция N вообще, т. е. для большинства значений a, велика по отношению к функции приближения m и что, следовательно, название „исключительное значение" с полным правом может быть сохранено для тех значений a, для которых, наоборот, плотность a-точек относительно мала. Первым результатом в этом направлении является теорема Пикара; из дальнейших исследований будет следовать, что предыдущее общее предположение имеет место для широкого класса функций.

С другой стороны, очевидно, что подобные теоремы не могут иметь места без всяких ограничений для функции, мероморфной в конечном круге $|z| < R$. В самом деле, нужно учитывать, что предыдущие замечания об относительной величине функций m, N и T имеют смысл только тогда, когда характеристическая функция T для $|z| < R$ *не ограничена*; в противном случае величина φ в первой основной теореме уже не являлась бы более несущественным остаточным членом, и важная для предыдущих рассмотрений инвариантность суммы $m + N$ была бы тогда бессмысленной. Из дальнейшего анализа характеристической функции будет следовать, что

$T(r, w)$ для функции, мероморфной во всей конечной плоскости $z \neq \infty$ (случай, когда $R = \infty$) и не равной постоянной, при $r \to \infty$ всегда. *неограниченно возрастает.* В случае конечного круга $|z| < R < \infty$ это уже более не обязательно. Так как характеристика T, как мы сейчас увидим, является возрастающей функцией от r, то существует предел $\lim T$ при $r \to R$, и для многих свойств мероморфной функции конечность или бесконечность этого предела будет решающим признаком функции.

137. Установим некоторые свойства характеристической функции, непосредственно получающиеся из ее определения. Из соотношений (3) мы заключаем: если $w_1, \ldots, w_n$ — мероморфные для $|z| < R$ функции, то функция приближения для произведения этих функций удовлетворяет неравенству

$$m(r, w_1 \ldots w_n) \leqslant \sum_1^n m(r, w_\nu).$$

Так как далее непосредственно видно, что

$$N(r, w_1 \ldots w_n) \leqslant \sum_1^n N(r, w_\nu),$$

то сложением получается

$$T(r, w_1 \ldots w_n) \leqslant \sum_1^n T(r, w_\nu).$$

В частности, если $k \neq 0$ — произвольная постоянная, то

$$|T(r, kw) - T(r, w)| \leqslant |\log k|,$$

ибо, как легко видеть, $T(r, k) = \overset{+}{\log} |k|$.

Аналогично из второго из соотношений (3) следует, что

$$T(r, w_1 + \ldots + w_n) \leqslant \sum_1^n T(r, w_\nu) + \log n.$$

Применяя это соотношение, найдем, в частности, что

$$|T(r, w - a) - T(r, w)| \leqslant \overset{+}{\log} |a| + \log 2.$$

Далее, для $w = c_\lambda z^\lambda + \ldots$ $(c_\lambda \neq 0)$ по формуле Иенсена (2)

$$T(r, w) = T\left(r, \frac{1}{w}\right) + \log |c_\lambda|.$$

Так как всякое линейное преобразование функции w

$$S(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

может быть составлено из целого линейного преобразования и инверсии, то из предыдущих соотношений мы заключаем, что характеристики $T(r, w)$ и $T(r, S(w))$ отличаются на аддитивную величину,

ограниченную для $|r| < R$. Последнее замечание позволяет легко подсчитать характеристическую функцию *рациональной функции* $w(z)$ порядка m. Предварительным линейным преобразованием можно добиться того, чтобы w при $|z| \to \infty$ стремилась к конечному пределу. Тогда для всех достаточно больших значений r функция приближения $m(r, \infty)$ ограничена, и так как число всех полюсов функции w равно m, то $N(r, \infty) \sim m \log r$; таким образом $T(r) \sim m \log r$.

§ 3. Геометрическая интерпретация характеристической функции.

138. Шимицу (Shimizu) и Альфорсу мы обязаны интересной геометрической интерпретацией характеристики $T(r)$, которая проливает новый свет на значение этой фундаментальной величины и одновременно весьма просто приводит к некоторым важным ее свойствам [1]). К этой интерпретации мы придем независимо от выкладок первых двух параграфов, если в плоскости w, точки которой представляют значения заданной функции, мероморфной для $|z| < R \leqslant \infty$, ввести сферическую метрику, проектируя для этого плоскость на единичную сферу Римана и определяя сферическую длину элемента дуги $|dw| = ds$ как длину $d\sigma$ соответствующего линейного элемента на сфере, как это было проведено более подробно в гл. I, § 1. Тогда

$$d\sigma = \frac{ds}{1 + |w|^2}.$$

Если теперь образовать (ср. стр. 11) отношение $\frac{d\sigma}{|dw|}$ сферической длины элемента дуги dw к его эвклидовой длине, то

$$u(w) = \log \frac{|dw|}{d\sigma} = \log (1 + |w|^2)$$

представит функцию непрерывную и не отрицательную для каждого конечного значения w, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\Delta u = 4e^{-2u} = \frac{4}{(1 + |w|^2)^2}.$$

В бесконечно удаленной точке $w = \infty$ функция $u(w)$ становится логарифмически бесконечной так, что

$$u(w) = 2 \log |w| + \varepsilon\left(\frac{1}{w}\right),$$

где $\varepsilon\left(\frac{1}{w}\right)$ при $w \to \infty$ исчезает.

После этого замечания подставим вместо w заданную мероморфную функцию $w = w(z)$. Тогда функция

$$v(z) = u(w(z))$$

---

[1]) T. Shimizu [1], L. Ahlfors [2]. На возможность такой интерпретации еще ранее указал A. Bloch [2].

будет непрерывна всюду в круге $|z|<R$, исключая полюсы b_ν функции $w(z)$, в окрестности которых $v(z)=2k_\nu \log\left|\frac{1}{z-b_\nu}\right|+$ непрерывная функция, где k_ν — кратность полюса b_ν.

По аналогии с методом, употребленным в п. 132 для вывода формулы Иенсена, применим формулу преобразования Гаусса к кругу $|z|\leqslant r$, в котором предварительно небольшими кругами радиуса δ изолируем все полюсы b_ν. Так как лапласиан при переходе к переменному z преобразуется в

$$\Delta_z v=\Delta_z u(w(z))=\Delta_w u\cdot|w'(z)|^2,$$

то предельным переходом $\delta\to 0$ получается

$$r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi+4\pi n(r,\infty)=4\int_{|z|<r}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w|^2)^2}\,df,$$

где $df=rdrd\varphi$ означает элемент площади в плоскости z.

Подинтегральная функция представляет отношение сферически измеренного образа элемента площади df к его евклидовой величине. Следовательно, выражение

$$A(r)=\frac{1}{\pi}\int_{|z|<r}\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,df$$

дает отношение площади расположенного над сферой куска римановой поверхности F_r, на который функция $w=w(z)$ отображает круг $|z|<r$, ко всей площади сферы, которая равна π.

Деля обе части предыдущего соотношения на r и интегрируя между пределами r_0 и $r\,(0<r_0<r<R)$, получим

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\,d\varphi+\int_{r_0}^{r}\frac{n(t,\infty)}{t}\,dt=\int_{r_0}^{r}\frac{A(t)}{t}\,dt+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} v(r_0e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Если сюда подставить выражение функции v и устремить r_0 к нулю, то окончательно получится

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\,d\varphi+N(r,\infty)=$$

$$=\int_0^r\frac{A(t)}{t}\,dt+\log\sqrt{1+|w(0)|^2}. \qquad (7)$$

Если $z=0$ является полюсом для функции $w(z)$, то постоянный член справа в (7) нужно заменить на $\log|c_\lambda|$, где c_λ имеет то же значение, что и в формуле Иенсена.

139. Рассмотрим теперь несколько подробнее интеграл, стоящий в (7) слева. Легко подсчитать, что, если $k(w,\infty)$ означает

расстояние по хорде между точками сферы Римана, соответствующими точкам w и ∞, то

$$k(w, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}},$$

а потому интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \sqrt{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{k(w, \infty)}\, d\varphi \qquad (8)$$

означает среднее значение логарифма величины, обратной к расстоянию по хорде между точками w и ∞. Отсюда следует, что рассматриваемый интеграл получает существенные значения от тех дуг окружности $|z| = r$, где $|w|$ становится большим, и поэтому он может служить мерой приближения функции w к значению ∞, точно так же как введенная выше функция приближения

$$m(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} {}^{+}\log |w(re^{i\varphi})|\, d\varphi.$$

Оба эти выражения и в самом деле мало отличаются друг от друга; непосредственно видно, что (8) всегда больше, чем $m(r, \infty)$; их разность, однако, ограничена и достигает своего максимального значения, $\log 2$, для $|w| \equiv 1$.

140. Исследуем теперь, как преобразуется формула (7), если выполнить вращение сферы

$$w_1 = \frac{1+\bar{a}w}{w-a}, \qquad (9)$$

переводящее значения w_1, ∞ в значения w, a. Для этого применим сначала формулу (7) к функции $w_1 = w_1(z)$ и заменим затем w_1 ее выражением (9). Сферическая площадь $A(t)$, очевидно, *инвариантна* относительно вращений сферы. Далее, величина $N(r, \infty)$ слева переходит в $N(r, a)$ и расстояние $k(w_1, \infty)$ переходит в расстояние между точками w и a:

$$k(w, a) = \frac{1}{\sqrt{1+\left|\frac{1+\bar{a}w}{w-a}\right|^2}} = \frac{|w-a|}{\sqrt{1+|a|^2}\sqrt{1+|w|^2}}. \qquad (10)$$

Следовательно, соотношение (7) переходит в

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{k(w(re^{i\varphi}), a)}\, d\varphi + N(r, a) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\, dt + \log \frac{1}{k(w(0), a)}, \qquad (11)$$

где, если $z = 0$ является λ-кратным корнем уравнения $w - a = 0$, последний член должен быть заменен выражением

$$\log \frac{1+|a|^2}{|c|} = \log \lim_{z\to 0} \frac{|z|^\lambda}{k(w, a)},$$

в котором c означает первый неисчезающий коэфициент разложения Тейлора функции $w-a$.

Легко доказывается, что среднее значение величины $|\log k(w, a)|$ всегда больше, чем введенное выше среднее значение

$$m(r, a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}{}^{+}\log\left|\frac{1}{w(re^{i\varphi})-a}\right|d\varphi,$$

и что, с другой стороны, первое из них не превосходит второе, увеличенное на достаточно большую величину, зависящую только от a.

Во многих вопросах оказывается целесообразным измерять приближение функции w к значению a не через $m(r, a)$, а через среднее значение величины $|\log k(w, a)|$. Вообще следует заметить, что для подобных величин *ограниченные* аддитивные члены не имеют существенного значения; следовательно, не опасаясь недоразумений, можно было бы в качестве функции приближения использовать вообще любую функцию, отличающуюся от среднего значения m ограниченной величиной, и даже обозначить ее можно было бы той же буквой m. В соответствии с этим мы теперь полагаем

$$m(r, a; w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{k(w(re^{i\varphi}), a)}\,d\varphi-\log\frac{1}{k(w(0), a)}, \qquad (12)$$

где k определено формулой (10).

Если $w(0)=a$, то последний член справа нужно заменить на

$$\lim_{z\to 0}\log\frac{|z|^{\lambda}}{k(w, a)},$$

где λ означает кратность корня $z=0$ уравнения $w-a=0$. Этими условиями новая функция приближения m определена для каждого конечного или бесконечного значения a.

141. Резюмируя, получаем следующую теорему:

Если величина $N(r, a; w)\equiv N(r, a)$ *определена соотношением* (4′) *и выражение* $m(r, a; w)$ *определено формулой* (12), *то для каждого значения* r, $0\leqslant r<R$,

$$m(r, a; w)+N(r, a; w)=\int_0^r\frac{A(t)}{t}\,dt, \qquad (1')$$

где $A(t)$ *означает деленную на* π *площадь расположенного над сферой Римана куска римановой поверхности* F_t, *на который функция* $w(z)$ *отображает круг* $|z|<t$.

Эта теорема, которая в существенном может быть рассматриваема как тождественная с первой основной теоремой, вскрывает красивым образом симметрию в поведении мероморфной функции относительно всех значений a. Преимущество нового выражения основной теоремы заключается в том, что оно прежнюю приближенную инвариантность

суммы $m+N$ превратило в точную. За *характеристическую функцию* T мы можем теперь с таким же правом, как раньше сумму $m(r, \infty)+N(r, \infty)$, принять интеграл

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt, \tag{13}$$

отличающийся от той суммы на аддитивную постоянную, значение которой не превосходит

$$\log 2+\log\frac{1}{k(w(0), \infty)}.$$

В дальнейшем выражение (13) мы будем называть *нормальной сферической формой характеристики* $T(r)$ и для нее, где не будет опасности недоразумений, также используем сокращенное обозначение $T(r)$.

142. Этим видоизменением определения характеристики $T(r)$ достигается не только интересная геометрическая интерпретация этой величины, но одновременно получается новое важное ее свойство:

Сумма $T(r)=m(r, a; w)+N(r, a; w)$ *является возрастающей функцией от* r *и выпуклой функцией от* $\log r$.

В самом деле, согласно (1′)

$$\frac{d(m+N)}{d\log r}=A(r),$$

т. е. равно деленной на π сферической площади поверхности F_r, возрастающей вместе с r, откуда следует утверждение.

Этот результат не тривиален, так как хотя из двух членов инвариантной суммы N во всяком случае является возрастающей и выпуклой функцией от $\log r$, среднее значение m этим свойством в общем случае не обладает. Например, для полинома выражение $m(r, 0; w)$, очевидно, равно нулю для всех достаточно больших значений r, в то время как для каждого значения r, для которого полином имеет нуль, оно, наверное, положительно.

Небезынтересно заметить, что предыдущая теорема о сумме $m+N$ остается справедливой и тогда, когда функция приближения заменена первоначальным простым определением (4′). Доказать это можно различными способами; нижеследующее доказательство принадлежит Г. Картану [1]).

Предположим сперва, что значение $w(0)$ заданной мероморфной функции конечно. Тогда, если применить формулу Иенсена к функции $w(z)-e^{i\vartheta}$, где ϑ — произвольное действительное число, то получится

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(re^{i\varphi})-e^{i\vartheta}|\,d\varphi+N(r, \infty)=N(r, e^{i\vartheta})+\log|w(0)-e^{i\vartheta}|.$$

[1]) H. Cartan [2].

Умножим обе части этого тождества на $\frac{d\vartheta}{2\pi}$ и проинтегрируем в пределах от 0 до 2π. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, \infty)\, d\vartheta = N(r, \infty).$$

Далее, по теореме Гаусса о среднем значении, если $|w(0)| \geqslant 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\vartheta} - w(0)|\, d\vartheta = \log|w(0)|;$$

если же $|w(0)| < 1$, то по той же теореме

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|e^{i\vartheta} - w(0)|\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(0)\, e^{-i\vartheta} - 1|\, d\vartheta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left||w(0)|\, e^{i\vartheta} - 1\right| d\vartheta = \log 1 = 0,$$

так что без всяких ограничений

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(0) - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta = \overset{+}{\log}|w(0)|. \tag{14}$$

Далее, для $z = re^{i\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(z) - e^{i\vartheta}|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|w(z) - e^{i\vartheta}|\, d\vartheta$$

Значение последнего интеграла согласно (14) равно $\overset{+}{\log}|w(re^{i\varphi})|$, и, следовательно, все выражение равно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|w(re^{i\varphi})|\, d\varphi = m(r, \infty).$$

Окончательно, после интегрирования формулы Иенсена, получается соотношение

$$T(r) \equiv m(r, \infty) + N(r, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\vartheta})\, d\vartheta + \overset{+}{\log}|w(0)|. \tag{15}$$

Эта формула справедлива и для $w(0) = \infty$; нужно только постоянный член $\overset{+}{\log}|w(0)|$ справа заменить на $\overset{+}{\log}|c|$, где c — первый не равный нулю коэфициент разложения Лорана функции w в окрестности точки $z = 0$.

Так как N — возрастающая, выпуклая функция от $\log r$, то, следовательно, и интеграл справа в (15), а тем самым и выражение $T(r)$ обладает этим же свойством, что и требовалось доказать.

Соотношение Картана (15), интересное само по себе, допускает замечательную геометрическую интерпретацию. Интеграл справа равен

$$\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\vartheta})\, d\vartheta = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_0^{2\pi} n(t, e^{i\vartheta})\, d\vartheta.$$

Внутренний интеграл здесь, очевидно, означает длину $l(t)$ всех тех дуг единичной окружности $|w| = 1$, которые покрываются значениями функции w для $|z| \leqslant t$, при этом каждая дуга считается столько раз, сколько раз она покрывается этими значениями w, или, другими словами, $l(t)$ есть сумма длин тех дуг поверхности F_t, которые проектируются на единичную окружность $|w| = 1$.

Следовательно,

$$\frac{dT(r)}{d\log r} = l(r), \tag{16}$$

где $l(r)$ означает сумму длин дуг поверхности F_r, лежащих над единичной окружностью $|w| = 1$.

§ 4. Обобщения.

143. Интегральный метод Картана, о котором мы только что говорили, может быть замечательным образом обобщен. Представим себе на ограниченном замкнутом множестве E в плоскости w неотрицательное распределение μ единичной массы; пусть далее $w(z)$ функция, мероморфная для $|z| < R \leqslant \infty$. Умножим обе части формулы Иенсена

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(re^{i\varphi}) - a|\, d\varphi + N(r, \infty) = N(r, a) + \log |w(0) - a|$$

($a \neq \infty$, $w(0) \neq \infty$) на $d\mu(a)$ и проинтегрируем по множеству E. Тогда мы получим

$$u(w(0)) + N(r, \infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w(re^{i\varphi}))\, d\varphi + \int_E N(r, a)\, d\mu, \tag{17}$$

где

$$u(w) = \int_E \log \left| \frac{1}{w - a} \right| d\mu$$

есть логарифмический потенциал распределения μ в точке w. В таком общем виде соотношение (17) было указано О. Фростманом [1]).

---

[1]) O. Frostman [2], [3].

Интеграл

$$\int_E N(r, a)\, d\mu = \int_0^r \frac{\Omega(t)}{t}\, dt,$$

где

$$\Omega(t) = \int_E n(t, a)\, d\mu$$

также имеет интересное физико-геометрическое значение. *Величина $\Omega(t)$ равна всей массе, распределенной на поверхности F_t, на которую мероморфная функция отображает круг $|z| \leqslant t$,* если каждому элементу e этой поверхности поставить в соответствие массу $\mu(e)$.

144. Общее соотношение (17), которое в дальнейшем окажет нам еще важные услуги, содержит результаты § 3 как частный случай. Если сперва положить $d\mu$ равным деленной на π сферической площади элемента сферы ($a = |a| e^{i\alpha}$):

$$d\mu = \frac{|a|\, d|a|\, d\alpha}{\pi (1 + |a|^2)^2},$$

то

$$u(w) = -2\int_0^{|w|} \frac{|a| \log |w|}{(1+|a|^2)^2}\, d|a| - 2\int_{|w|}^{\infty} \frac{|a| \log |a|}{(1+|a|^2)^2}\, d|a| = \log \frac{1}{\sqrt{1+|w|^2}}.$$

Далее $\Omega(r)$ будет равно деленной на π сферической площади $A(r)$ поверхности F_r, и соотношение (17) перейдет в

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \sqrt{1+|w(re^{i\varphi})|^2}\, d\varphi + N(r, \infty) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\, dt + \log \sqrt{1+|w(0)|^2},$$

что совпадает с первой основной теоремой в форме Шимицу-Альфорса [§ 3, формула (7)].

Для второго применения фундаментального соотношения (17) возьмем за множество E произвольное множество *положительной гармонической меры.* Если тогда за μ взять функцию распределения, решающую проблему Робэна для множества E (п. 111), то потенциал $u(w)$ будет равен сумме

$$u(w) = -g(w, \infty) + \gamma,$$

где g — функция Грина внешней области, ограниченной множеством E, содержащей бесконечно удаленную точку, и γ — соответ-

ствующая постоянная Робэна. В частности, если за E взять окружность $|w|=1$, то для $|w|\geqslant 1$ выражение $-u$ будет равно функции Грина $\log|w|$ внешности круга и для $|w|\leqslant 1$ будет $u=0$; далее $d\mu=\frac{d\vartheta}{2\pi}$. Таким образом, снова получается теорема Картана [§ 3, формула (15)].

Если E положительной емкости, то существует также простое соотношение между средним значением вышерассмотренного потенциала равновесия u и функцией приближения $m(r, \infty)$. Если предположить, что множество E лежит в круге $|a|\leqslant R\,(R\geqslant 1)$, то для $|w|\geqslant 2R$

$$\log\frac{2}{3}\leqslant\log\frac{1}{1+\left|\frac{a}{w}\right|}\leqslant\log\left|\frac{w}{w-a}\right|\leqslant\log\frac{1}{1-\left|\frac{a}{w}\right|}\leqslant\log 2,$$

и так как

$$u\ w)=\log\left|\frac{1}{w}\right|+\int\limits_E\log\left|\frac{w}{w-a}\right|d\mu,$$

то

$$u(w)=\log\left|\frac{1}{w}\right|+<\log 2>.$$

Если $|w|\leqslant 2R$, то (ср. п. 112) $u\leqslant\gamma$; вместе с тем, так как u достигает своего минимума на окружности $|w|=2R$, имеем $u(w)\geqslant$ $\geqslant-\log 2R-\log 2$ и, следовательно,

$$|u(w)|\leqslant|\gamma|+\log 4R<|\gamma|+\log 6R-\overset{+}{\log}|w|.$$

Таким образом, для каждого w

$$u(w)=-\overset{+}{\log}|w|+<|\gamma|+\log 6R>,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(w(re^{i\varphi}))\,d\varphi=-m(r,\infty)+<|\gamma|+\log 6R>. \quad (17')$$

Если это подставить в соотношение (17), то мы придем к следующей теореме:

Если E — множество положительной гармонической меры и μ неотрицательное распределение единичной массы на этом множестве, решающее для него проблему Робэна, то характеристическая функция $T(r)$ любой мероморфной для $|z|<R\leqslant\infty$ функции удовлетворяет соотношению

$$T(r)=\int\limits_E N(r, a)\,d\mu+O(1). \quad (18)$$

Отсюда для $T(r)$ получается новая физическая интерпретация, обобщающая интерпретацию Картана, указанную в § 3, и содержащая ее как частный случай:

Пусть E — произвольное множество положительной гармонической меры. Если на E определить неотрицательное распределение μ единичной массы, такое, чтобы порождаемый ею потенциал имел на E возможно малую верхнюю границу, то характеристика $T(r)$ любой мероморфной функции с точностью до ограниченного аддитивного члена равна среднему значению

$$\int_0^r \frac{\Omega(t)}{t}\,dt,$$

где $\Omega(t)$ равно всей массе, которую несет поверхность F_t, являющаяся образом круга $|z| \leqslant t$, если каждому элементу e этой поверхности поставить в соответствие массу $\mu(e)$.

145. Выше мы уже обращали внимание на то, что первая основная теорема, утверждающая инвариантность сумм $m+N$ для всех значений a, ничего не говорит об относительной величине обоих членов m и N. Соотношение (18) показывает, что в общем случае N является *главной составляющей суммы* $m+N$. В самом деле, если эту сумму, равную с точностью до ограниченного члена характеристике $T(r)$, умножить на $d\mu$ и проинтегрировать по множеству E, то получится

$$T(r) = \int_E N(r, a)\,d\mu + \int_E m(r, a)\,d\mu + O(1),$$

откуда, учитывая соотношение (18), следует, что *интеграл*

$$\int_E m(r, a)\,d\mu,$$

где E — множество положительной гармонической меры и μ — функция распределения, решающая для E проблему Робэна, ограничен для каждого значения r.

В дальнейшем эта теорема будет исследована более подробно. Здесь мы ограничимся одним непосредственным следствием из общего соотношения (18):

Если функция $N(r, a)$ равномерно ограничена для множества значений a, имеющего положительную гармоническую меру, то и характеристика $T(r)$ ограничена.

Для функции $w(z)$, мероморфной во всей конечной плоскости $|z| < \infty$, эта теорема представляет мало интереса, ибо ограниченность $N(r, a)$ означает здесь, что $N = 0$ (ср. стр. 178), а ограниченность $T(r)$ — что $w(z)$ приводится к постоянной (это будет показано в гл. VII, § 1). Впрочем, то, что $w(z)$ приводится к постоянной, следует уже из исчезновения $N(r, a)$ для *трех* различных значений a на основании теоремы Пикара.

Напротив, предыдущий результат имеет большое значение для функций, мероморфных в *конечном* круге. Здесь функции с ограниченной характеристикой играют первостепенную роль, как это

будет видно из следующей главы, где мы укажем также важное применение предыдущей теоремы.

146. Мы нашли, что среднее значение

$$\int_0^r \frac{\mathfrak{Q}(t)}{t}\,dt = \int_E N(r, a)\,d\mu(a),$$

где $\mathfrak{Q}(t)$ означает массу, которую несет поверхность F_t, равно с точностью до ограниченного аддитивного члена характеристике $T(r)$, если за μ взять функцию распределения, решающую проблему Робэна для множества E положительной гармонической меры, лежащего в основной плоскости w. Для дальнейших целей важно, однако, заметить, что рассматриваемое среднее значение для вполне произвольной функции распределения μ *не может существенно превосходить характеристику* $T(r)$. Это кажется почти очевидным на основании первой основной теоремы, в силу которой $N(r, a) \leqslant N(r, a) + m(r, a) < T(r) + O(1)$. Однако, величина $O(1)$ при применении первоначального определения характеристики $T(r) = m(r, \infty) + N(r, \infty)$ неравномерно ограничена, и поэтому оценку следует провести точно.

Для этого удобно воспользоваться строго инвариантной нормальной сферической формой характеристики [гл. VI, § 3 (11)]

$$T(r) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt = N(r, a) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\frac{1}{k(w(z), a)}\,d\varphi - \log\frac{1}{k(w_0, a)},$$

где $z = re^{i\varphi}$, $w_0 = w(0)$ и

$$k(w, a) = \frac{|w - a|}{\sqrt{1 + |w|^2}\sqrt{1 + |a|^2}}$$

есть длина хорды, соединяющей точки w и a на сфере Римана. Так как $k \leqslant 1$, то

$$N(r, a) \leqslant T(r) + \log\frac{1}{k(w_0, a)}$$

и, следовательно,

$$\int_{(a)} N(r, a)\,d\mu \leqslant T(r) + P(w_0), \tag{19}$$

где

$$P(w) = \int_{(a)} \log\frac{1}{k(w, a)}\,d\mu$$

определяет „сферико-логарифмический" потенциал [1]) распределения μ, который получается из обыкновенного логарифмического потенциала

$$u(w) = \int_{(a)} \log\frac{1}{|w - a|}\,d\mu$$

---

[1]) См. L. Ahlfors [8].

добавлением к нему члена

$$\log \sqrt{1+|w|^2} + \int_{(a)} \log \sqrt{1+|a|^2}\, d\mu.$$

Соотношение (19) окажет нам еще важные услуги в общей теории распределения значений (гл. IX). В приложениях функцию распределения μ нужно всегда выбрать так, чтобы значение потенциала $P(w_0)$, указывающее наибольшую величину, на которую интеграл $\int \Omega d \log r$ может превосходить характеристику $T(r)$, было *конечным*.

VII. ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА.

§ 1. Представление функции с ограниченной характеристикой в виде отношения ограниченных функций.

147. Так как характеристика функции, мероморфной для $|z| < R \leqslant \infty$, с возрастанием r увеличивается, то во всяком случае существует предел

$$T(R) = \lim_{r \to R} T(r);$$

здесь следует различать два случая, в зависимости от того, будет ли $T(R) = \infty$ или $T(R) < \infty$.

Пусть сперва $R = \infty$. Характеристика $T(r)$ отличается от интеграла

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t}\, dt$$

на ограниченное слагаемое. Если функция $w(z)$ отлична от постоянной, то сферическая площадь $A(t)$ образа круга $|z| \leqslant t$ положительна для каждого значения $t > 0$ и если r_0 означает произвольное положительное число, то при $r > r_0$ имеем $A(r) > A(r_0) > 0$. Следовательно, при $r > r_0$

$$\int_0^r \frac{A(t)}{t}\, dt \geqslant \int_{r_0}^r \frac{A(t)}{t}\, dt > A(r_0) \log \frac{r}{r_0}$$

и поэтому

$$\lim_{r \to \infty} \frac{T(r)}{\log r} > 0,$$

откуда следует теорема:

Пусть $w(z)$ — функция, мероморфная во всей конечной плоскости $|z| < \infty$. Если характеристика $T(r)$ этой функции огра-

ничена или, более обще, если

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r)}{\log r}=0,$$

то функция $w(z)$ тождественно равняется постоянной.

148. Следовательно, при изучении функций с ограниченной характеристикой мы можем ограничиться функциями, мероморфными в конечном круге. Не ограничивая общности, можно тогда за этот круг взять единичный круг.

Итак, пусть функция $w(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$ и

$$T(1)=\lim_{r\to 1}T(r)<\infty.$$

Выберем в круге $|z|<\rho<1$ точку $z_0=r_0e^{i\varphi_0}$ $(r_0<\rho)$ и обозначим через $g_\rho(z, z_0)$ функцию Грина этого круга с полюсом в точке z_0:

$$g_\rho(z, z_0)=\log\left|\frac{\rho^2-\bar z_0 z}{\rho(z-z_0)}\right|$$

и через $-h(z, z_0)$ гармоническую функцию, сопряженную с $g(z, z_0)$ относительно переменной z.

В предположении, что $w(z)$ отлична от постоянной и что z_0 не является для нее ни нулем, ни полюсом, рассмотрим формулу Пуассона-Иенсена

$$\log|w(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\frac{\rho^2-r_0^2}{\rho^2+r_0^2-2\rho r_0\cos(\vartheta-\varphi_0)}\,d\vartheta+$$

$$+\sum_{|b_\nu|<\rho}g_\rho(z_0, b_\nu)-\sum_{|a_\mu|<\rho}g_\rho(z_0, a_\mu),$$

где a_μ и b_ν означают соответственно нули и полюсы функции $w(z)$. Если здесь написать $\log|w|=\overset{+}{\log}|w|-\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w}\right|$ и далее

$$\left.\begin{aligned}U_\rho(re^{i\varphi}, w)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|w(\rho e^{i\vartheta})|\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta,\\ V_\rho(z, w)&=\sum_{|b_\nu|<\rho}g_\rho(z, b_\nu),\\ W_\rho(z, w)&=U_\rho(z, w)+V_\rho(z, w),\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

то получим

$$\log|w(z)|=W_\rho(z, w)-W_\rho\left(z, \frac{1}{w}\right).\qquad(2)$$

Величина $W_\rho(z, w)$ неотрицательна и гармонична всюду в круге $|z|<\rho$, исключая полюсы b_ν, в которых она становится логарифмически бесконечной; для $z=0$ эта величина переходит в характеристическую функцию $T(\rho, w)$; последнее имеет место в предположе-

нии, что $z=0$ не является полюсом функции $w(z)$, что можно принять без ущерба для общности.

149. Докажем, что

выражение $W_\rho(z_0, w)$ является возрастающей функцией от ρ.

Доказательство. Пусть r — произвольное число из интервала $0<r_0<r<\rho$. Так как выражение W_ρ неотрицательно, то в силу (2), для $|z|=r$

$$\overset{+}{\log}|w| \leqslant W_\rho(z, w)$$

и, следовательно,

$$U_r(z_0, w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overset{+}{\log}|w(re^{i\varphi})|\,\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}W_\rho(re^{i\varphi}, w)\,\frac{r^2-r_0^2}{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)}\,d\varphi.$$

Чтобы определить значение последнего интеграла, заметим, что выражение $U_r(z, w)$, имеющее в круге $|z|<r$ те же полюсы, что и $W_\rho(z, w)$, исчезает на границе $|z|=r$; следовательно, граничные значения выражения $W_\rho(z, w)$ под знаком интеграла могут быть заменены граничными значениями выражения $W_\rho - V_r$. Так как последняя разность гармонична в круге $|z|<r$, то интегральная формула Пуассона дает для предыдущего интеграла значение $W_\rho(z_0, w) - V_r(z_0, w)$ и, следовательно,

$$U_r(z_0, w) \leqslant W_\rho(z_0, w) - V_r(z_0, w)$$

или

$$U_r(z_0, w)+V_r(z_0, w) \equiv W_r(z_0, w) \leqslant W_\rho(z_0, w),$$

что и требовалось доказать.

Этим мы одновременно получили новое доказательство монотонности фундаментальной величины $T(r, w) \equiv W_r(0, w)$.

150. Из предыдущей теоремы заключаем, что в каждой точке единичного круга существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{r\to 1} W_r(z, w) \equiv W(z, w).$$

Для $z=0$ этот предел равен $T(1)=\lim\limits_{r\to 1} T(r)$ и, следовательно, *конечен* по предположению. Отсюда, используя монотонность функции W_r, заключаем на основании принципа Харнака (ср. V, § 1), что сходимость функций W_r в круге $|z|\leqslant\rho<1$ равномерна. Следовательно, предельная функция $W(z, w)$ представляет в единичном круге неотрицательную гармоническую функцию, исключая полюсы b_ν, в которых она ведет себя как $\log|w|$.

Аналогичным образом доказывается существование неотрицательной гармонической функции

$$\lim_{r\to 1} W_r\left(z, \frac{1}{w}\right) \equiv W\left(z, \frac{1}{w}\right) \qquad (3)$$

и, следовательно, функция $\log|w|$ гармоническая (с точностью до полюсов) в круге $|z|<1$ представляется в виде разности двух неотрицательных гармонических там же функций:

$$\log|w| = W(z, w) - W\left(z, \frac{1}{w}\right). \tag{3'}$$

Встает вопрос, не сходятся ли при $\rho \to 1$ и сами члены U_ρ и V_ρ, суммой которых по определению является выражение W_ρ. Справедливость этого следует сперва для функции V_ρ из того же принципа Харнака. Для доказательства надо только заметить, что $V_\rho(z, w)$, как это следует непосредственно из ее определения, возрастает вместе с ρ и что

$$V_\rho(0, w) = N(\rho, w) \leqslant T(\rho),$$

откуда становится очевидным существование предела $\lim\limits_{\rho \to 1} V_\rho = V$ в точке $z = 0$. Отсюда заключаем, что ряд

$$V(z, w) = \sum_{|b_\nu|<1} g(z, b_\nu) = \sum \log\left|\frac{1-\overline{b}_\nu z}{z-b_\nu}\right| \tag{4}$$

в круге $|z| \leqslant r < 1$ сходится равномерно.

Наконец,

$$U(z, w) \equiv \lim_{\rho \to 1} U_\rho(z, w) = W(z, w) - V(z, w).$$

Прибавим теперь к $W(z, w)$ сопряженную с ней гармоническую функцию $\overline{W}(z, w)$, умноженную предварительно на i. Если еще выбрать подходящим образом содержащуюся в $\overline{W}(z, w)$ аддитивную постоянную, то получится

$$\log w = [W(z, w) + i\overline{W}(z, w)] - \left[W\left(z, \frac{1}{w}\right) + i\overline{W}\left(z, \frac{1}{w}\right)\right]$$

или, полагая

$$f(z, w) = e^{-W(z, w) - i\overline{W}(z, w)}, \tag{5}$$

получим

$$w(z) = \frac{f\left(z, \frac{1}{w}\right)}{f(z, w)}. \tag{5'}$$

Здесь $f(z, w)$ и $f\left(z, \frac{1}{w}\right)$ — регулярные и ограниченные в круге $|z|<1$ функции ($|f| \leqslant 1$), из которых первая равна нулю в полюсах b_ν, а вторая — в нулях a_μ функции $w(z)$.

Если ввести функции $\overline{U}$ и $\overline{V}$, сопряженные соответственно к отдельным членам U и V функции W, то мы получим дальнейшее разложение выражения справа в (5). В частности, функцию $\overline{V}$

с помощью выражения (4) можно представить в виде сходящегося ряда, членами которого являются функции $-h(z, b_\nu)$, сопряженные к функциям Грина $g(z, b_\nu)$; чтобы добиться сходимости, нужно только произвольную аддитивную постоянную в функциях $h(z, b_\nu)$ выбрать так, чтобы имела место сходимость для *одного* значения z, например, $z=0$. Наиболее просто это достигается нормировкой $h(0, b_\nu)=0$. Тогда

$$V(z,w)+iU(z,w)=\sum_{|b_\nu|\leqslant 1}\log\frac{1-\bar{b}_\nu z}{|b_\nu|-ze^{-i\beta_\nu}}\qquad (b_\nu=|b_\nu|e^{i\beta_\nu}). \tag{6}$$

Если затем еще положить

$$\varphi(z,\ w)=e^{-U(z,\ w)-iV(z,\ w)} \tag{7}$$

и

$$\pi(z,\ w)=\prod_{|b_\nu|<1}\frac{|b_\nu|-ze^{-i\beta_\nu}}{1-\bar{b}_\nu z}, \tag{8}$$

то

$$f(z,\ w)=\varphi(z,\ w)\,\pi(z,\ w),$$

т. е. ограниченная функция $f(z)$ будет представлена в виде произведения двух ограниченных в круге $|z|<1$ функций φ и π, из которых φ не имеет нулей, в то время как π равна нулю во всех полюсах b_ν функции $w(z)$. Функция π есть произведение линейных преобразований, оставляющих инвариантным единичный круг; такие произведения были введены еще Пуанкаре в теории автоморфных функций; их значение для общей теории ограниченных функций впервые обнаружил Бляшке (Blaschke), и поэтому они часто называются произведениями Бляшке [1]. Эти особые ограниченные функции отличаются интересными свойствами вблизи границы $|z|=1$; мы на этом остановимся более подробно в дальнейшем.

Резюмируя, получаем следующую теорему [2]:

Если характеристика $T(r)$ мероморфной в единичном круге $|z|<1$ функции $w(z)$ равномерно ограничена для $r<1$, то w может быть представлена в виде отношения

$$w(z)=\frac{f\left(z,\ \frac{1}{w}\right)}{f(z,\ w)}=\frac{\varphi\left(z,\ \frac{1}{w}\right)\pi\left(z,\ \frac{1}{w}\right)}{f(z,\ w)\,\pi(z,\ w)} \tag{9}$$

двух ограниченных функций $f(|f|\leqslant 1)$, определенных формулами (3) и (5); *последние функции, в свою очередь, могут быть записаны в виде произведения двух также ограниченных в единичном круге функций* φ и $\pi(|\varphi|\leqslant 1,\ |\pi|\leqslant 1)$, *определенных формулами* (7) и (8).

---

[1]) H. Poincaré [2], W. Blaschke [1].

[2]) R. Nevanlinna [3].

Функцию, которая может быть представлена в виде отношения двух ограниченных функций, будем коротко называть *функцией ограниченного вида* (*beschränktartig*). Следовательно, каждая мероморфная для $|z|<1$ функция, имеющая ограниченную характеристику $T(r)$, есть функция ограниченного вида.

151. Справедливо и обратное:

Каждая аналитическая функция $w(z)$ ограниченного вида в круге $|z|<1$ имеет ограниченную характеристику $T(r)$.

Доказательство. Пусть $w(z)$ для $|z|<1$ фуикция ограниченного вида, т. е.

$$w(z)=\frac{\psi_1(z)}{\psi_2(z)}, \tag{10}$$

где ψ_1 и ψ_2 ограничены в единичном круге. Не умеиьшая общности, можно предполагать, что $|\psi_1|\leqslant 1$, $|\psi_2|\leqslant 1$, так как это всегда может быть достигнуто делением числителя и знаменателя на подходящее число.

Чтобы теперь доказать ограниченность характеристики $T(r, w)$ для $r<1$, возьмем произвольную точку z_0 единичного круга. Согласно (10) для каждого $|z|<1$

$$\overset{+}{\log}|w(z)|\leqslant\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{\psi_2(z)}\right|$$

и, следовательно, для $|z_0|<r<1$

$$U_r(z_0, w)\leqslant U_r\left(z, \frac{1}{\psi_2}\right).$$

С другой стороны, так как функция ψ_2 равна нулю в каждом полюсе функции $w(z)$, то

$$V_r(z_0, w)\leqslant V_r\left(z_0, \frac{1}{\psi_2}\right).$$

Складывая оба неравенства и применяя формулу Пуассона-Иенсена, получаем соотношение

$$W_r(z_0, w)\leqslant W_r\left(z_0, \frac{1}{\psi_2}\right)=W_r(z_0, \psi_2)+\log\left|\frac{1}{\psi_2(z_0)}\right|.$$

Далее, из того, что $|\psi_2|\leqslant 1$ следует, что выражение $W_r(z_0, \psi_2)$ тождественно исчезает, и потому

$$W_r(z_0, w)\leqslant\log\left|\frac{1}{\psi_2(z_0)}\right|. \tag{11}$$

Если теперь $\psi_2(0)\neq 0$, то для $z_0=0$ имеем, что

$$W_r(0, w)\equiv T(r, w)\leqslant\log\left|\frac{1}{\psi_2(0)}\right|$$

для всех значений $r<1$, что доказывает равномерную ограниченность характеристики $T(r, w)$.

Если же $\psi_2(0)=0$, то, умножая функцию w на подходящую степень z, мы снова придем к случаю, когда $\psi_2(0)\neq 0$, и так как

характеристика $T(r, w)$ при этом изменяется только на ограниченный аддитивный член, то желаемый результат получится, как и выше.

Для того, чтобы мероморфная в единичном круге $|z|<1$ функция $w(z)$ была ограниченного вида, необходимо и достаточно, чтобы ее характеристика $T(r)$ при $r\to 1$ была ограничена.

Если w для $|z|<1$ ограниченного вида, то она, очевидно, допускает бесчисленное множество представлений вида

$$w=\frac{\psi_1}{\psi_2}, \tag{12}$$

где $|\psi_1|\leqslant 1$ и $|\psi_2|\leqslant 1$. В самом деле, имея одно такое представление, мы придем к другому простым умножением числителя и знаменателя на произвольную ограниченную в единичном круге функцию $\psi(|\psi|\leqslant 1)$. Среди всех возможных представлений вида (12) полученное предыдущим построением особое представление (9) характеризуется следующим экстремальным свойством:

Для каждого $|z|<1$

$$|f(z, w)|\geqslant|\psi_2(z)|,\quad \left|f\left(z, \frac{1}{w}\right)\right|\geqslant|\psi_1(z)|. \tag{13}$$

Это непосредственно следует из соотношения (11), если в нем r устремить к 1. Тогда из (11) следует, что

$$W(z, w)\leqslant\log\left|\frac{1}{\psi_2(z)}\right|,$$

или, так как $\log|f(z, w)|=-W(z, w)$, то

$$|f(z, w)|\geqslant|\psi_2(z)|.$$

Второе из соотношений (13) получается применением того же рассуждения к функции $\frac{1}{w}$.

Из принципа максимума легко далее следует, что если в соотношениях (13) имеет место равенство в одной точке z единичного круга, то оно должно иметь место всюду в этом круге и тогда $\psi_2=e^{i\alpha}f(z, w)$, $\psi_1=e^{i\alpha}f\left(z, \frac{1}{w}\right)$, где α — действительное число.

§ 2. Представление функций ограниченного вида интегралом Пуассона-Стильтьеса.

152. Представление функции ограниченного вида, которое мы вывели в предыдущем параграфе, позволяет нам более подробно исследовать поведение такой функции на границе $|z|=1$. Основанием послужит нам интегральное представление, которое можно рассматривать как обобщение обычной формулы Пуассона.

Пусть $w(z)=u(z)+iv(z)$ — регулярная в круге $|z|<1$ функция; для каждого $|z|<\rho<1$ она допускает интегральное пред-

ставление Пуассона

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\vartheta})\frac{\rho e^{i\vartheta}+z}{\rho e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta+iv(0).$$

Пока не сделано никаких предположений о поведении функции $u(z)$ на границе, предельный переход $\rho\to 1$ под знаком интеграла невозможен. Поэтому наложим на гармоническую функцию $u(z)$ подходящее ограничение, именно, предположим, что среднее значение модуля $|u(z)|$ на окружности $|z|=r<1$ равномерно ограничено:

$$\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi<M \text{ для } r<1. \tag{14}$$

153. Определенный таким образом класс гармонических функций совпадает с классом функций, которые в единичном круге можно записать в виде разности двух неотрицательных гармонических функций. Это непосредственно следует из § 1. В самом деле, если $w=u+iv$ регулярна для $|z|<1$, то

$$T(r,\ e^w)=m(r,\ e^w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|u(re^{i\varphi})|+u(re^{i\varphi})}{2}\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\frac{u(0)}{2}, \tag{15}$$

и функция e^w тогда и только тогда будет функцией ограниченного вида, когда интеграл (14) ограничен. В этом и только в этом случае e^w может быть представлена в виде отношения двух (отличных от нуля) ограниченных функций φ_2 и φ_1 ($|\varphi_\nu|<1$, $\nu=1,\ 2$) и, следовательно, w может быть приведена к виду $w=w_1-w_2$, где $w_1=-\log\varphi_1$ и $w_2=-\log\varphi_2$ имеют *неотрицательные действительные части.* Из наших результатов (§ 1, п. 150) следует далее, что среди всех возможных представлений $w=w_1-w_2$ существует одно особое, характеризующееся тем экстремальным свойством, что для него действительные части функций w_1 и w_2 имеют *наименьшее возможное значение.* Эти экстремальные функции определяются как пределы (ср. п. 149)

$$w_\nu(z)=\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u_\nu(\rho e^{i\vartheta})\frac{\rho e^{i\vartheta}+z}{\rho e^{i\vartheta}-z}\,d\vartheta \qquad (\nu=1,\ 2), \tag{16}$$

где

$$u_1=\frac{1}{2}(|u|+u),\quad u_2=\frac{1}{2}(|u|-u).$$

Следует еще заметить, что интеграл (14), как это непосредственно видно из соотношения (15), возрастает вместе с r, так что

при $r \to 1$ этот интеграл имеет определенный конечный или бесконечный предел.

154. Этими результатами мы свели исследование аналитических функций, удовлетворяющих условию (14), к изучению аналитической функции $w = u + iv$, имеющей при $|z| < 1$ *неотрицательную действительную часть* u. Переходя теперь к выводу интегральной формулы Пуассона-Стильтьеса, мы ограничимся функциями такого вида.

Зафиксируем число r_0 интервала $0 < r_0 < 1$ и положим

$$w_1(re^{i\varphi}) = \int_{r_0}^{re^{i\varphi}} \frac{w(z)}{iz}\,dz = \int_{r_0}^{r} \frac{w(t)}{it}\,dt + \int_0^{\varphi} w(re^{i\vartheta})\,d\vartheta. \qquad (17)$$

Этим равенством w_1 определена как функция регулярная для $0 < |z| < 1$ (в окрестности нулевой точки многозначная). В дальнейшем мы рассматриваем ту ветвь этой функции, которая определяется условием $-\beta < \varphi \leqslant 2\pi - \beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$.

Для действительной части u_1 функции w_1 имеем выражение

$$u_1(re^{i\varphi}) = \Re\,(w_1(re^{i\varphi})) = \int_{r_0}^{r} \frac{v(t)}{t}\,dt + \int_0^{\varphi} u(re^{i\vartheta})\,d\vartheta.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} = u(re^{i\varphi}) \geqslant 0.$$

Как быстро может возрастать $|w_1|$ при $|z| \to 1$? Верхнюю границу для $|w_1|$ можно получить из (17), если написать

$$w_1(re^{i\varphi}) = \int_{r_0}^{r_0 e^{i\varphi}} \frac{w(z)}{iz}\,dz + \int_{r_0 e^{i\varphi}}^{re^{i\varphi}} \frac{w(z)}{iz}\,dz.$$

Тогда для $r_0 < r < 1$

$$|w_1(re^{i\varphi})| \leqslant \int_0^{\varphi} |w(r_0 e^{i\vartheta})|\,|d\vartheta| + \frac{1}{r_0}\int_{r_0}^{r} |w(te^{i\varphi})|\,dt. \qquad (18)$$

Для $|w|$, при $|z| < \rho < 1$, по формуле Пуассона имеем оценку

$$|w(z)| \leqslant \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\vartheta})\,d\vartheta + |v(0)| = \frac{\rho + |z|}{\rho - |z|}u(0) + |v(0)|,$$

или при $\rho \to 1$

$$|w(z)| \leqslant \frac{1 + |z|}{1 - |z|}u(0) + |v(0)|. \qquad (19)$$

Если это подставить в (18), то для $0 \leqslant \varphi < 2\pi$

$$|w_1(re^{i\varphi})| \leqslant 2\pi u(0)\frac{1+r_0}{1-r_0} + 2\pi|v(0)| + \frac{|v(0)|}{r_0} + \\ + \frac{2u(0)}{r_0}\log\frac{1-r_0}{1-r}. \qquad (20)$$

Отсюда видно, что при $r \to 1$ порядок роста $|w_1(z)|$ самое большее равен $\log\frac{1}{1-r}$, в то время как $|w|$ может возрастать как $\frac{1}{1-r}$. В самом деле, данная в (19) верхняя граница является точной, как это показывает пример функции

$$w = \frac{1+z}{1-z},$$

для которой $u(0) = 1$, $v(0) = 0$. Следовательно, при $|z| \to 1$ интегральная функция w_1 стремится к бесконечности медленнее, чем функция w; именно в силу такого „регуляризирующего" влияния интегрирования представляется целесообразным введение интегральной функции w_1.

Еще более просто ведет себя функция, полученная повторным интегрированием:

$$w_2(re^{i\varphi}) = u_2 + iv_2 = \int_{r_0}^{re^{i\varphi}} \frac{w_1(z)}{iz}\,dz.$$

В самом деле, применяя оценку (20), мы непосредственно убеждаемся, что $w_2(z)$ на окружности $|z| = 1$ непрерывна. В частности существуют тем самым *непрерывные предельные значения*

$$u_2(e^{i\varphi}) = \lim_{r\to 1} u_2(re^{i\varphi}) \qquad (21)$$

действительной части

$$u_2(re^{i\varphi}) = \int_{r_0}^{r} v_1(t)\,\frac{dt}{t} + \int_0^{\varphi} u_1(re^{i\vartheta})\,d\vartheta. \qquad (22)$$

Для более подробного исследования свойств предельной функции $u_2(\varphi)$ заметим, что для $r < 1$

$$0 \leqslant u(re^{i\varphi}) = \frac{\partial u_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial\varphi^2},$$

откуда следует, что u_2 — *выпуклая* (*konvexe*) функция, так что для $\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \varphi_3$

$$\begin{vmatrix} u_2(re^{i\varphi_1}) & u_2(re^{i\varphi_2}) & u_2(re^{i\varphi_3}) \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0.$$

Предельным переходом $r \to 1$ найдем, что то же самое соотношение имеет место для $u_2(e^{i\varphi})$, откуда следует, что и $u_2(e^{i\varphi})$ является выпуклой функцией от φ. Следовательно, она имеет производную справа $u_2'(e^{i(\varphi+0)})$ и производную слева $u_2'(e^{i(\varphi-0)})$, причем

$$u_2'(e^{i(\varphi-0)}) \leqslant u_2'(e^{i(\varphi+0)}),$$

где равенство имеет место для всех значений φ, исключая самое большее счетное число значений. Если положить

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{2}(u_2'(e^{i(\varphi+0)}) + u_2'(e^{i(\varphi-0)})), \tag{23}$$

то функция ψ однозначно определяется как монотонно возрастающая функция от φ.

Теперь мы утверждаем, что

$$\lim_{r\to 1} u_1(re^{i\varphi}) = \psi(\varphi) \tag{24}$$

в каждой точке непрерывности функции $\psi(\varphi)$. В самом деле, если для $r \leqslant 1$ положить

$$\Delta(re^{i\varphi}, h) = \frac{u_2(re^{i(\varphi+h)}) - u_2(re^{i\varphi})}{h},$$

то для всякого $\varepsilon > 0$ в силу выпуклости функции u_2 найдется такое малое число $h > 0$, что в точках непрерывности функции $\psi(\varphi)$

$$0 \leqslant \Delta(e^{i\varphi}, h) - \psi(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad 0 \leqslant \psi(\varphi) - \Delta(e^{i\varphi}, -h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далее, для достаточно больших значений $r < 1$,

$$|\Delta(e^{i\varphi}, h) - \Delta(re^{i\varphi}, h)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\Delta(e^{i\varphi}, -h) - \Delta(re^{i\varphi}, -h)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда следует, что как $\Delta(re^{i\varphi}, h)$, так и $\Delta(re^{i\varphi}, -h)$ лежат в интервале $(\psi - \varepsilon, \psi + \varepsilon)$.

С другой стороны,

$$\Delta(re^{i\varphi}, -h) \leqslant u_1(re^{i\varphi}) \leqslant \Delta(re^{i\varphi}, h)$$

и, следовательно, для значений r, достаточно близких к единице, $u_1(re^{i\varphi})$ лежит в указанном выше интервале, откуда следует утверждение (24).

Учитывая соотношение

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} du_1(\rho e^{i\vartheta}) = \int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = 2\pi u(0), \tag{25}$$

мы из формулы Пуассона интегрированием по частям найдем, что для $|z| < \rho < 1$

$$w(z) = \frac{\rho + z}{\rho - z} u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(\rho e^{i\vartheta}) \frac{2iz\rho e^{i\vartheta}}{(\rho e^{i\vartheta} - z)^2}\, d\vartheta + iv(0).$$

Если теперь ρ устремить к 1, то первый член справа будет сходиться к

$$\frac{1+z}{1-z}\,u(0);$$

что касается второго члена, то мы утверждаем, что он имеет пределом

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\frac{2ize^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\vartheta.$$

В самом деле, согласно (25) вариация монотонно возрастающей функции $u_1(\rho e^{i\vartheta})$ в интервале $0\leqslant\vartheta<2\pi$ равна $2\pi u(0)$; следовательно, то же самое справедливо и для предельной монотонной функции ψ. Отсюда следует ограниченность функции ψ, а с ней, в силу (24), равномерная относительно ϑ и ρ ограниченность функции $u_1(\rho e^{i\vartheta})$. Поэтому при $\rho\to 1$ интегралы

$$\int_0^{2\pi}u_1(\rho e^{i\vartheta})\frac{\rho e^{i\vartheta}}{(\rho e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\vartheta \quad\text{и}\quad \int_0^{2\pi}u_1(\rho e^{i\vartheta})\frac{e^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\vartheta$$

отличаются друг от друга произвольно мало, и достаточно показать, что разность

$$\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}\,(u_1(\rho e^{i\vartheta})-\psi(\vartheta))}{(e^{i\vartheta}-z)^2}\,d\vartheta \tag{26}$$

при $\rho\to 1$ стремится к нулю.

Для этой цели зафиксируем число $\varepsilon>0$ и разделим интервал $(0,\ 2\pi)$ на $n>\frac{1}{\varepsilon^2}$ равных частей. Так как вариация монотонно возрастающей функции u_1 во всем интервале $(0,\ 2\pi)$ равна $2\pi u(0)$, то число k интервалов разбиения, в которых приращение функции u_1 больше, чем ε, самое большее равно $\frac{2\pi u(0)}{\varepsilon}$; то же самое имеет место и для функции $\psi(\vartheta)$. Поэтому среди рассматриваемых n интервалов разбиения для каждого $\rho<1$ существует самое большее

$$2k<\frac{4\pi u(0)}{\varepsilon}$$

таких, где вариация функции $u_1(\rho e^{i\vartheta})$, или функции $\psi(\vartheta)$ больше, чем ε; во всех остальных интервалах соответствующая вариация самое большее равна ε.

Выберем теперь в каждом из n интервалов разбиения точку непрерывности функции $\psi(\vartheta)$; для выбранных n значений ϑ можно подобрать такое число $\rho_0<1$, что при $\rho_0\leqslant\rho<1$

$$|u_1(\rho e^{i\vartheta})-\psi(\vartheta)|<\varepsilon$$

для каждого из этих значений ϑ. Тогда

$$|u_1(\rho e^{i\vartheta})-\psi(\vartheta)|<3\varepsilon$$

в каждом из интервалов разбиения, исключая самое большее $2k$ из них, в которых во всяком случае

$$|u_1(\rho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta)| < A,$$

где A конечная величина [с точностью до величины, исчезающей при $\rho \to 1$, за A можно взять $2\pi u(0)$].

Следовательно, для абсолютного значения интеграла (26) получаем верхнюю границу

$$\frac{1}{(1-|z|)^2}\int_0^{2\pi} |u_1(\rho e^{i\vartheta}) - \psi(\vartheta)|\, d\vartheta \leqslant \frac{1}{(1-|z|)^2}\left(A\frac{4\pi k}{n} + 6\pi\varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\pi\varepsilon}{(1-|z|)^2}(4\pi A u(0) + 3),$$

что доказывает наше утверждение.

Следовательно, для $|z| < 1$ имеем

$$w(z) = \frac{1+z}{1-z}u(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\frac{2ize^{i\vartheta}}{(e^{i\vartheta}-z)^2}d\vartheta + iv(0). \qquad (27)$$

Так как ψ — монотонная функция, то мы можем проинтегрировать по частям и окончательно получим

$$w(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\psi(\vartheta) + iv(0), \qquad (28)$$

где интеграл нужно понимать в смысле Стильтьеса. Формула (28) и дает искомое *интегральное представление Пуассона-Стильтьеса* [1]).

Напомним еще, что монотонная функция $\psi(\vartheta)$ в (28) является пределом суммы

$$\int_{r_0}^{r} v(t)\frac{dt}{t} + \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi})\, d\varphi$$

при $r \to 1$. Отсюда видно, что первый, не зависящий от ϑ член должен иметь конечный предел

$$\psi_0 = \int_{r_0}^{1} v(t)\frac{dt}{t},$$

и так как в (28) имеет значение только *вариация* функции $\psi(\vartheta)$, то последнюю можно с таким же успехом определить как предел

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r\to 1}\int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

---

[1]) См. G. Evans [1], G. Herglotz [1], A. Ostrowski [2], C. Carathéodory [3].

Формула (28) дает общее выражение для регулярной в круге $|z|<1$ функции, имеющей неотрицательную действительную часть. В самом деле, мы нашли, что каждая такая функция может быть представлена в виде (28). С другой стороны, эта формула, если в ней справа подставить вместо $\psi(\vartheta)$ любую функцию, ограниченную и монотонно возрастающую для $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, определяет аналитическую функцию, регулярную для $|z|<1$ и имеющую для этих значений неотрицательную действительную часть

$$u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\psi(\vartheta).$$

155. Аналогичное представление имеет место и для общего класса регулярных в единичном круге функций $w = u + iv$, для которых выполняется условие (14). В самом деле, каждая такая функция может быть представлена в виде разности двух аналитических функций w_1 и w_2, действительные части которых для $|z|<1$ неотрицательны. Если w_1 и w_2 представить в виде (28) и если ψ_1 и ψ_2 — соответствующие им при этом монотонные функции, то для разности w получится интегральное представление Пуассона-Стильтьеса (28), в котором

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta),$$

причем $\psi(\vartheta)$ как разность двух ограниченных монотонных функций является *функцией с ограниченной вариацией*.

Если, наоборот, ψ — произвольная функция с ограниченной вариацией, то ее, как известно, можно представить в виде разности двух ограниченных монотонных функций ψ_1 и ψ_2. Формула (28) определяет тогда функцию $w = u + iv$, которая может быть представлена в виде разности двух функций w_1 и w_2 с неотрицательными действительными частями и, следовательно, удовлетворяет условию (14). В самом деле,

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \int_0^{2\pi} |\Re(w_1 - w_2)|\, d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} (\Re(w_1) + \Re(w_2))\, d\varphi =$$
$$= 2\pi\Re(w_1(0) + w_2(0)),$$

так что условие (14) выполнено.

Формула (28), где ψ означает функцию с ограниченной вариацией, представляет собою общее выражение для регулярной аналитической в единичном круге функции $w = u + iv$, для которой интеграл

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\, d\varphi \qquad (29)$$

при $r<1$ ограничен.

156. Замечание. Из соотношения (15) заключаем (ср. конец п. 153), что интеграл (29) является монотонно возрастающей функцией от r, что можно было бы легко доказать и прямо. Следовательно, при $r \to 1$ этот интеграл всегда имеет предел; однако, представление (28) справедливо тогда и только тогда, когда этот предел конечен.

Применяя результаты § 1, легко показать, что функцию ψ можно определить как предел

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

157. Резюмируя, мы можем сформулировать следующую теорему: *Пусть* $w(z) = u + iv$ *регулярна в круге* $|z| < 1$ *и предел*

$$\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\, d\varphi = M$$

конечен. Тогда для всех значений ϑ, $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$, *за исключением, самое большее, счетного, множества значений, существует предел*

$$\psi(\vartheta) = \lim_{r \to 1} \int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi})\, d\varphi.$$

Функция $\psi(\vartheta)$ *имеет ограниченную вариацию, и для* $z = re^{i\varphi}$, $r < 1$

$$w(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\, d\psi(\vartheta) + iv(0), \tag{30}$$

где интеграл следует понимать в смысле Стильтьеса.

Среди всех возможных представлений некоторой функции с ограниченной вариацией

$$\psi(\vartheta) = \int_{\vartheta=0}^{\vartheta} d\psi(\vartheta)$$

в виде разности двух монотонно возрастающих функций ψ_1, ψ_2 существует одно вполне определенное представление

$$\psi(\vartheta) = \psi_1(\vartheta) - \psi_2(\vartheta) \quad (\psi(0) = \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0), \tag{31}$$

обладающее тем свойством, что ψ_1 и ψ_2 принимают наименьшие возможные значения; эта экстремальная пара функций состоит, как известно, из *положительной*, соответственно *отрицательной вариации* функции ψ в интервале $(0, \vartheta)$. Все остальные представления получаются из этого особого прибавлением к ψ_1 и ψ_2 произвольной монотонной функции ψ_3. Полная вариация функции ψ в интервале $(0, \vartheta)$ равна $\psi_1 + \psi_2$.

Если теперь в формулу (30) подставить выражение (31), то действительная часть $u(z)$ функции $w(z)$ представится в виде разности двух гармонических и неотрицательных в круге $|z|<1$ функций

$$u_\nu(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\psi_\nu(\vartheta)\qquad(\nu=1,\ 2);\qquad(32)$$

значения этих функций будут наименьшими, если за функции ψ_1 и ψ_2 взять вышеуказанные экстремальные функции. Отсюда следует, что соответствующие функции u_ν совпадают с экстремальными функциями, о которых говорилось на стр. 191, определенными, с другой стороны, как действительные части предельных значений (16). Приравнивая оба эти выражения друг другу при $z=0$, мы получим соотношения

$$2\pi u_1(0)=\psi_1(2\pi)=\lim_{r\to1}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\pi u(0)=\frac{1}{2}[M+2\pi u(0)],$$

$$2\pi u_2(0)=\psi_2(2\pi)=\frac{1}{2}[M-2\pi u(0)];$$

следовательно,

$$\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|=\psi_1(2\pi)+\psi_2(2\pi)=\lim_{r\to1}\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi.\qquad(33)$$

Таким образом, *полная вариация функции* $\psi(\vartheta)$ *в интервале* $(0,\ 2\pi)$ *равна предельному значению* (33).

158. Важным является вопрос о единственности представления (30). Покажем, что заданная функция допускает в существенном только одно такое представление, именно, что если ψ_1 — функция с ограниченной вариацией и

$$w(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\psi_1(\vartheta),\qquad(34)$$

то $\psi_1(\vartheta)$ в каждой точке непрерывности равна (с точностью до аддитивной постоянной) функции

$$\psi(\vartheta)=\lim_{r\to1}\int_0^{\vartheta}u(re^{i\varphi})\,d\varphi,$$

где u означает действительную часть функции w.

В самом деле, если в (34) взять с обеих сторон действительные части, то после интегрирования по частям получится

$$u(re^{i\varphi})=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}\,u(0)-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi_1(\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\right)d\vartheta,$$

откуда, используя симметрию ядра $K(r;\ \varphi,\ \vartheta)$ интеграла Пуассона относительно переменных φ и ϑ, следует, что

$$\int_0^{\alpha} u(re^{i\varphi})\,d\varphi = 2\pi u(0)\,\omega(r;\ 0,\ \alpha) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1(\vartheta)\,[K(r;\ \alpha,\ \vartheta) - K(r;\ 0,\ \vartheta)]\,d\vartheta, \qquad (35)$$

где $\omega(re^{i\varphi};\ \vartheta_1,\ \vartheta_2)$ означает гармоническую меру

$$\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} K(r;\ \varphi,\ \vartheta)\,d\vartheta$$

дуги $(e^{i\vartheta_1},\ e^{i\vartheta_2})$ в точке $re^{i\varphi}$. Если здесь r устремить к 1, то $\omega(r;\ 0,\ \alpha)$ будет стремиться к $\frac{1}{2}$, а интеграл справа в (35), как это следует из элементарных свойств интеграла Пуассона (ср. гл. II, § 1), будет стремиться к

$$\frac{\psi_1(\alpha+0)+\psi_1(\alpha-0)}{2} - \frac{\psi_1(+0)+\psi_1(2\pi-0)}{2},$$

что доказывает правильность утверждения.

Одновременно мы видим, что интеграл (35) и в точках разрыва функции $\psi(\vartheta)$ стремится к определенному пределу, равному $\frac{1}{2}[\psi(\vartheta+0)+\psi(\vartheta-0)]$.

159. В интеграле (30) функция ψ как функция с ограниченной вариацией имеет почти для всех значений ϑ конечную производиую $\psi'(\vartheta)$. Спрашивается, при каких условиях интеграл Стилтьеса может быть записан в виде обыкновенного интеграла Лебега, так чтобы, следовательно, $d\psi$ просто заменялось на $\psi'\,d\vartheta$. Это, как известно, имеет место тогда и только тогда, когда ψ — *абсолютно непрерывная* функция от ϑ, т. е. когда для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что вариация функции ψ на каждом измеримом множестве (ϑ) меры, меньше чем δ, не превосходит ε.

Далее, всякую функцию ψ с ограниченной вариацией можно представить в виде суммы трех функций

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3,$$

которые все ограниченной вариации, причем ψ_1 — *абсолютно непрерывна* и $\psi' = \psi'_1$ почти для всех ϑ, ψ_2 — *непрерывна* и ψ_3 — *функция скачков*, вариация которой в каждом интервале равна сумме абсолютных значений скачков, которые испытывает функция ψ в своих точках разрыва, лежащих на этом интервале. Непрерывная функция ψ_2, если она отлична от постоянной, не абсолютно непрерывна; ее про-

изводная исчезает почти всюду [1]). То же самое имеет место и для фуикции ψ_s.

В следующем параграфе мы укажем условие, которое нужно наложить на функцию u, чтобы составляющие ψ_2 и ψ_s тождественно равнялись нулю и, следовательно, чтобы функция ψ была абсолютно непрерывной.

160. Прежде чем перейти к более подробному исследованию интеграла Пуассона-Стильтьеса, укажем еще общее выражение для функции ограниченного вида в круге $|z|<1$, которое получается непосредственно из результатов этого параграфа:

Каждая функция $w(z)$ ограниченного вида в круге $|z|<1$ может быть представлена в виде

$$w(z)=\frac{\pi_2(z)}{\pi_1(z)}\,e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,d\psi(\vartheta)+i\lambda},$$

где ψ — функция с ограниченной вариацией и π_1, π_2 — произведения Бляшке.

§ 3. Теорема Фату.

161. Обладая интегральным представлением § 2, мы теперь в состоянии доказать важную классическую теорему Фату, согласно которой ограниченная гармоническая в единичном круге функция имеет почти всюду на окружности $|z|=1$ радиальные предельные значения [2]). В действительности последнее имеет место для значительно более широкого класса гармонических функций. Мы ставим себе сперва задачу доказать эту теорему в следующей формулировке:

Теорема Фату. *Если функция $u(z)$ гармонична в круге $|z|<1$ и интеграл*

$$\int_0^{2\pi}|u(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

для $r<1$ ограничен, то существует конечный предел

$$\lim_{r\to 1}u(re^{i\varphi})$$

---

[1]) Отличные от постоянной непрерывные функции ψ, имеющие ограниченную вариацию и почти всюду исчезающую производную, действительно существуют. Простой пример для этого может быть построен, используя метод Кантора для построения нигде не плотных совершенных множеств (гл. V, § 6), следующим образом. На 2^n отрезках Δ_n, обр зующих аппроксимирующее мвожество $E(p^n)$ $(p>2)$, распределим равномерно единичную массу и обозначим через $h_n(t)$ массу, расположенную на отрезке $[0, t]$. Предельная функция $h(t)=\lim_{n\to\infty}h_n(t)$ будет тогда непрерывной функцией от t, вариация которой равна 1 и производная которой исчезает для всех значений t, исключая точки канторового множества $E(p^\infty)$.

[2]) См. P. Fatou [1].

для каждого значения φ, *исключая, быть может, множество значений* (*линейной*) *меры нуль.*

Согласно результатам § 2 при сделанных предположениях существует такая функция $\psi(\vartheta)$ ограниченной вариации

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |d\psi(\vartheta)| \leq M,$$

что

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\, d\psi(\vartheta). \tag{36}$$

Доказываемая теорема получается как следствие из следующих двух лемм:

1) Согласно общей теореме теории действительных функций $\psi(\vartheta)$ как функция с ограниченной вариацией имеет почти всюду конечную производную $\psi'(\vartheta)$ (ср. п. 159).

2) Если для некоторого значения ϑ производная $\psi'(\vartheta)$ конечна, то

$$\lim_{r\to 1} u(re^{i\vartheta}) = \psi'(\vartheta).$$

Первое из этих предложений будем считать известным, [1]) второе же докажем полностью, применяя интегральное представление Пуассона-Стильтьеса.

Зафиксируем некоторое значение ϑ, для которого производная $\psi'(\vartheta)$ имеет определенное конечное значение; без существенных ограничений можно, например, предположить, что $\vartheta = 0$. Так как $\psi(0) = 0$, то

$$\psi(\vartheta) = \psi'(0)\,\vartheta + \psi_0(\vartheta)\,\vartheta, \tag{37}$$

где $\psi_0 \to 0$ при $\vartheta \to 0$.

Так как далее

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\psi(\vartheta) = u(0),$$

то интегральная формула Пуассона-Стильтьеса после интегрирования по частям принимает для $\varphi = 0$, $r < 1$ вид

$$u(r) = \frac{1-r}{1+r}\, u(0) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(\vartheta) \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\right) d\vartheta.$$

При $r \to 1$ первый член справа исчезает, и, следовательно, остается показать, что второй член при $r \to 1$ стремится к $\psi'(0)$. Если в этот член подставить выражение (37), то он распадается на 2 слагае-

[1]) См., например, Лебег [1].

мых, из которых первое после интегрирования по частям будет иметь вид

$$-\psi'(0)\frac{1-r}{1+r}+\psi'(0)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\,d\vartheta=\psi'(0)-\psi'(0)\frac{1-r}{1+r}$$

и, следовательно, при $r\to 1$ будет стремиться к $\psi'(0)$. Таким образом, остается показать, что интеграл

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\psi_0(\vartheta)\,\vartheta\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\right)d\vartheta, \tag{38}$$

соответствующий второму члену суммы (37), при $r\to 1$ исчезает.

Для доказательства зафиксируем для заданного $\varepsilon>0$ такое малое положительное число $\vartheta_0<\pi$, что

$$|\psi_0(\vartheta)|<\varepsilon \text{ для } |\vartheta|\leqslant\vartheta_0,$$

и разложим интервал $(-\pi, \pi)$ на три части: $(-\pi, -\vartheta_0)$, $(-\vartheta_0, \vartheta_0)$, (ϑ_0, π).

Так как в среднем интервале выражение

$$-\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\right)=\frac{(1-r^2)\,2r\vartheta\sin\vartheta}{(1+r^2-2r\cos\vartheta)^2}$$

неотрицательно, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0}\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\right)d\vartheta=$$

$$=-\frac{\varepsilon\vartheta_0}{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta_0}+\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\vartheta_0}^{+\vartheta_0}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\,d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\,d\vartheta=\varepsilon.$$

Далее, если m означает верхнюю границу модуля $|\psi_0|$ для $\vartheta|\leqslant\pi$, то

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\vartheta_0}^{\pi}\right|\leqslant\frac{m}{2\pi}\int_{\vartheta_0}^{\pi}\vartheta\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\right)d\vartheta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m}{2}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta_0}\frac{\vartheta_0}{\pi}-\frac{1-r}{1+r}\right)+\frac{m}{2\pi}\int_{\vartheta_0}^{\pi}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\vartheta}\,d\vartheta.$$

Здесь первый член стремится к нулю при $r\to 1$. Но то же самое справедливо и для второго члена, знаменатель которого

$$1+r^2-2r\cos\vartheta\geqslant 1+r^2-2r\cos\vartheta_0=\sin^2\vartheta_0+(r-\cos\vartheta_0)^2\geqslant\sin^2\vartheta_0$$

имеет положительную нижнюю границу.

Следовательно, существует такое положительное число $r_0 < 1$, что для $r_0 \leqslant r < 1$

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\vartheta_0}^{\pi}\right| < \varepsilon.$$

Для интервала $(-\pi, -\vartheta_0)$ получается та же оценка, что и для интервала (ϑ_0, π). Таким образом, значение интеграла (38) для $r_0 \leqslant r < 1$ меньше 3ε. Следовательно, при $r \to 1$ он исчезает и теорема Фату доказана.

162. Доказанная теорема дает существенное расширение теории интеграла Пуассона. Мы видели (гл. II, § 1), что этот интеграл решает проблему Дирихле для круга в предположении, что заданные граничные значения $u(\vartheta)$ образуют непрерывную функцию. Далее имеет место общий результат, согласно которому интеграл Пуассона

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\vartheta)\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta \tag{39}$$

в точке разрыва ϑ функции $u(\vartheta)$, в которой существуют пределы $u(\vartheta \pm 0)$, имеет предельное радиальное значение $\frac{1}{2}[u(\vartheta+0)+u(\vartheta-0)]$.

Пусть теперь $u(\vartheta)$ — произвольная определенная для $0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi$ измеримая функция, для которой интеграл Лебега

$$\int_0^{2\pi} |u(\vartheta)|\,d\vartheta$$

конечен [1]). Тогда интеграл (39) будет представлять *гармоническую в круге* $|z| < 1$ *функцию* $u(re^{i\varphi})$, *которая при* $r \to 1$ *стремится к заданному значению* $u(\varphi)$ *для всех значений* φ, *исключая самое большое множество значений* φ *меры нуль*. В самом деле, если написать

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} u(\vartheta)\,d\vartheta,$$

то $\frac{d\psi}{d\varphi} = u(\varphi)$ почти для всех значений φ, и, следовательно, по предыдущей теореме о предельных значениях, для каждого такого значения φ существует радиальное предельное значение $u(\varphi)$ [2]).

---

[1]) Для каждой измеримой функции $u(\vartheta)$ существует интеграл $\int\limits_{|u|<M} |u|\,d\vartheta$, где M конечно. При $M \to \infty$ этот интеграл стремится к конечному или бесконечному пределу.

[2]) Это имеет место даже при угловом приближении, как это можно заключить из далее следующих теорем.

163. Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, затронутый в конце § 2. Мы видели: если $u(z)$ для $|z|<1$ гармонична и интеграл

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

для $r<1$ равномерно ограничен, то интеграл

$$\psi(r,\vartheta)=\int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

при $r\to 1$ стремится к предельному значению $\psi(\vartheta)$, которое, как функция с ограниченной вариацией, может быть записана в виде суммы $\psi(\vartheta)=\psi_1+\psi_2+\psi_3$, где ψ_1 абсолютно непрерывна и равна интегралу Лебега

$$\int_0^{\vartheta}\psi'(\vartheta)\,d\vartheta;$$

ψ_2 непрерывна и ψ_2' почти всюду равна нулю; ψ_3 равна постоянной всюду, за исключением точек разрыва функции ψ. Требуется узнать, когда ψ абсолютно непрерывна, и поэтому $\psi_2=\psi_3\equiv 0$.

Согласно результатам этого параграфа $\psi'(\vartheta)$ почти всюду равна $u(\vartheta)=\lim\limits_{r\to 1} u(re^{i\vartheta})$. Следовательно, *составляющие* ψ_2 и ψ_3 *исчезают тогда и только тогда, когда*

$$\psi(\vartheta)\equiv\lim_{r\to 1}\int_0^{\vartheta} u(re^{i\varphi})\,d\varphi=\int_0^{\vartheta} u(\varphi)\,d\varphi, \tag{40}$$

т. е. тогда и только тогда, когда можно переменить порядок интегрирования и предельного перехода ($r\to 1$).

В теории действительных функций имеется следующая общая теорема: если последовательность измеримых функций $f_n(x)$ при $n\to\infty$ почти всюду на множестве E имеет предельное значение $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, то равенство

$$\lim\int_{E_1} f_n(x)\,dx=\int_{E_1} f(x)\,dx$$

справедливо для всякого множества E_1, содержащегося в E тогда и только тогда, когда интегралы

$$\int_{E_1} f_n(x)\,dx \tag{41}$$

равномерно абсолютно непрерывны на E, т. е. когда для каждого

$\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что

$$\int_e |f_n(x)|\,dx < \varepsilon,$$

коль скоро мера множества e (содержащегося в E) меньше, чем δ.

Отсюда заключаем, что функция $\psi(\vartheta)$ тогда и только тогда абсолютно непрерывна и, следовательно, обладает свойством (40), когда интеграл

$$\int_0^{\vartheta} |u(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

для $r < 1$ *равномерно абсолютно непрерывен.*

Для *ограниченной* гармонической функции это условие, очевидно, всегда выполняется. В качестве примера неограниченной гармонической функции, не обладающей этим свойством, достаточно взять положительную и гармоническую для $|z| < 1$ функцию

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\varphi}.$$

При $r \to 1$ она стремится к нулю всюду, исключая значение $\varphi = 0$, для которого она стремится к бесконечности, притом настолько быстро, что интеграл

$$\int_{-\delta}^{+\delta} u(re^{i\varphi})\,d\varphi$$

для каждого $\delta > 0$ сходится к 2π. Для этой функции u функция $\psi(\vartheta)$ не является абсолютно непрерывной: в самом деле, она приводится к функции скачков, которая в точке $\vartheta = 0$ совершает скачок на 2π, а в остальных точках равна постоянной.

164. По теореме Фату аналитическая функция, регулярная и ограниченная для $|z| < 1$, имеет почти всюду на окружности $|z| = 1$ вполне определенные радиальные предельные значения. В самом деле, как действительная, так и мнимая ее части обладают этим свойством для всех $|z| = 1$, исключая, быть может, множество, которое как сумма двух нульмножеств само имеет меру нуль. Можно даже утверждать, что эти предельные значения существуют при угловом приближении (ср. п. 60); в самом деле, это непосредственно следует из теоремы о предельных значениях, доказанной в п. 60.

Результаты § 1 и § 2 позволяют существенно обобщить это предложение. Пусть сперва $w = u + iv$ — аналитическая функция, регулярная в единичном круге и удовлетворяющая условию (14) § 2. Тогда ее можно представить в виде разности $w = w_1 - w_2$ двух функций w_1 и w_2 с неотрицательными действительными частями. Линейным преобразованием, переводящим правую полуплоскость

в единичный круг, эти функции преобразуются в две ограниченные аналитические функции, и так как последние имеют почти всюду на окружности $|z|=1$ предельные значения, то то же самое справедливо и для функций w_1, w_2.

Отсюда можно заключить, что и разность w_1-w_2 имеет определенные угловые предельные значения, исключая, быть может, во-первых, множество граничных точек E_1, в которых или w_1 или w_2 не имеют предельных значений и, во-вторых, множество граничных точек E_2, в которых как w_1, так и w_2 имеют бесконечное радиальное предельное значение. Множество E_1 имеет меру нуль. Можно ли это же утверждать про множество E_2?

Чтобы ответить на этот вопрос, следует заметить, что по теореме Фату *действительная часть и* функции w имеет почти всюду на окружности $|z|=1$ *конечные* предельные значения. Относительно мнимой части функции этого без дальнейшего рассмотрения утверждать нельзя. В следующем параграфе мы докажем общую теорему, при помощи которой этот вопрос сможет быть разрешен. Пока что мы можем удовлетвориться следующим простым замечанием.

Рассмотрим множество E тех точек $|z|=1$, при радиальном приближении к которым фуикция w с неотрицательной действительной частью стремится к бесконечности. Тогда $\log|w+1|$, очевидно, является неотрицательной гармонической функцией, которая в точках множества E также имеет радиальное предельное значение ∞. Так как эта функция удовлетворяет условию (14) *), то по теореме Фату множество E обязательно меры нуль.

Отсюда следует, что и множество, обозначенное выше через E_2, также имеет меру нуль, и, следовательно, регулярная для $|z|<1$ функция $w=u+iv$, для которой интеграл

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

ограничен, стремится при $r\to 1$ к конечному пределу почти всюду на окружности $|z|=1$.

165. Теорема Фату может быть распространена и на функции ограниченного вида, если воспользоваться нормальным их представлением (п. 160). Приведя w к форме

$$w=ef\frac{\pi_1}{\pi_2}, \tag{42}$$

мы замечаем, что показатель f принадлежит к классу функций, рассмотренных в п. 164 и, следовательно, почти всюду на окружности $|z|=1$ имеет конечные угловые предельные значения.

*) В самом деле, для $r<1$

$$\int_0^{2\pi} |\log|w(re^{i\varphi})+1||\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\log|w(re^{i\varphi})+1|\,d\varphi=2\pi\log|w(0)+1|.$$

Но то же самое справедливо и для произведений Бляшке π_1, π_2, которые ограничены в единичном круге. Следовательно, в силу (42), тем же свойством обладает и функция w, исключая, быть может, те точки $|z|=1$, в которых предельные значения произведений π_1 и π_2 одновременно равны нулю. Последнее, однако, может иметь место самое большее для множества меры нуль, как это вытекает из следующего, интересного самого по себе свойства произведений Бляшке:

Произведение Бляшке $\pi(z)$ *имеет почти всюду на окружности* $|z|=1$ *угловые предельные значения, равные по абсолютной величине* 1.

В самом деле, по формуле Иенсена для $\rho<1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\pi(\rho e^{i\varphi})|\,d\varphi=\int_0^{\rho}\frac{n(r)}{r}\,dr+\log|\pi(0)|=-\int_{\rho}^{\cdot}\frac{n(r)}{r}\,dr,$$

где $n(r)$ означает число нулей функции $\pi(z)$, лежащих в круге $|z|\leqslant r$. Так как правая часть этого равенства при $\rho\to 1$ исчезает, то заключаем:

Для произведения Бляшке интеграл

$$\int_0^{2\pi}\log|\pi(re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

при $r\to 1$ *исчезает.*

Отсюда уже легко следует предыдущее утверждение. Так как для $|z|<1$ имеем $|\pi|<1$, то $\lim\limits_{r\to 1}\log|\pi(re^{i\varphi})|$, если только он существует, не превосходит нуля. Предположим, что этот предел *отрицателен* для миожества (φ) положительной меры. Разложим тогда множество (φ) на счетное число подмножеств $(\varphi)_n$ $(n=1,2,\ldots)$, где множество $(\varphi)_n$ состоит из тех значений φ, для которых рассматриваемый предел $\leqslant-\frac{1}{n}$. Согласно общей теореме теории действительных функций все множества $(\varphi)_n$ измеримы [1]). Кроме того, существует конечное значение n, для которого $(\varphi)_n$ положительной меры, ибо в противном случае множество (φ), как сумма счетного числа нульмножеств, само было бы нульмножеством.

Далее, по известной теореме теории действительных функций, множество $(\varphi)_n$ содержит подмножество с мерой, сколь угодно близкой к мере множества $(\varphi)_n$, на котором сходимость к радиальным предельным значениям *равномерна*. Пусть e_n такое подмножество *положительной меры* μ. Тогда, коль скоро r станет больше некоторого числа $r_0<1$, $\log|\pi(re^{i\varphi})|$ будет $<-\frac{1}{2n}$ для всех значе-

[1]) См., например, Лебег [1].

ний φ множества e_n и для тех же значений r будем иметь

$$\int_0^{2\pi} \log|\pi(re^{i\varphi})|\,d\varphi < \int_{e_n} \log|\pi(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant -\frac{\mu}{2n},$$

т. е. интеграл слева при $r \to 1$ не мог бы стремится к нулю. Полученное противоречие показывает, что $|\pi(re^{i\varphi})|$ стремится к 1 почти для всех значений φ.

Доказанное таким образом свойство произведения Бляшке находит свое естественное объяснение в том, что произведение π получено как предел конечного произведения π_n, которое на окружности $|z|=1$ непрерывно и по абсолютной величине равно 1.

Резюмируя, мы из представления (42) получаем теперь следующий результат:

Теорема. *Функция ограниченного вида при* $|z|<1$ *имеет почти всюду на окружности* $|z|=1$ *вполне определенные угловые предельные значения.*

Эта общая теорема содержит как частные случаи все предыдущие теоремы, относящиеся к существованию граничных значений.

§ 4. О множестве граничиых значений функции ограниченного вида.

166. Функция ограниченного вида при $|z|<1$ имеет почти всюду на окружности $|z|=1$ вполне определенные угловые предельные значения. В этом параграфе мы займемся более подробным изучением множества E этих граничных значений.

Первый результат о множестве E граничных значений мы можем непосредственно усмотреть из канонического представления функции ограниченного вида (п. 160). Показатель второго множителя имеет, как интеграл Пуассона-Стильтьеса, почти всюду на окружности $|z|=1$ *конечные* граничные значения; следовательно, и граничные значения самого множителя почти всюду конечны. Но то же самое справедливо и для другого множителя, который как частное двух произведений Бляшке имеет почти всюду на окружности $|z|=1$ граничные значения, по абсолютной величине равные 1. Следовательно, функция ограниченного вида при $|z|<1$ может иметь на окружности $|z|=1$ бесконечное угловое предельное значение самое большее на множестве меры нуль.

Пусть $a \neq \infty$ и $w(z) \not\equiv a$; тогда функция $\dfrac{1}{w-a}$ имеет также ограниченную характеристику, и, следовательно, к ней применим предыдущий результат. Таким образом, получается

Теорема Ф. и М. Рис [1]. *Если функция ограниченного вида при* $|z|<1$ *имеет постоянное радиальное предельное значение*

[1] Братья Рис (Riesz) доказали эту теорему для частного случая, когда функция ограничена [1].

на граничном множестве положительной меры, то функция тождественно равна этой постоянной.

Для обоснования высказанной теоремы могло бы послужить и следующее простое замечание. Для функции w ограниченного вида и отличной от постоянной функция приближения $m(r, a)$ ограничена для каждого значения a. Если бы теперь $w(re^{i\varphi}) \to a$ на граничном множестве (φ) положительной меры, то, по упомянутой в п. 165 теореме из теории действительных функций, эта сходимость была бы равномерной на подмножестве множества (φ) также положительной меры. Но тогда выражение $m(r, a)$, определенное как среднее значение $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a}\right|$ на окружности $|z| = r$, стремилось бы при $r \to 1$ к бесконечности. Это противоречие доказывает справедливость теоремы братьев Рис.

167. Из теоремы братьев Рис следует, что множество граничных значений функции ограниченного вида и отличной от постоянной не может быть счетным, ибо такая функция на окружности $|z| = 1$ может иметь счетное множество различных граничных значений только на множестве точек $|z| = 1$, являющемся суммой счетного числа нульмножеств, т. е. на нульмножестве.

Мы переходим теперь к доказательству общей теоремы, полностью решающей вопрос о мере множества граничных значений [1]).

Теорема. *Пусть E_w — множество радиальных предельных значений, которое функция $w(z)$ ограниченного вида при $|z| < 1$ и отличная от постоянной, принимает на множестве E_z точек $|z| = 1$. Если (линейная) мера множества E_z положительна, то внутренняя гармоническая мера множества E_w также положительна, т. е. существует замкнутое подмножество множества E_w, имеющее положительную гармоническую меру.*

Доказательство. Предполагая, что множество E_z положительной меры, мы можем найти замкнутое его подмножество E_z' также положительной меры, на котором $w(re^{i\varphi}) \rightrightarrows w(e^{i\varphi})$ при $r \to 1$ *). Отсюда следует, что множество E_w' соответствующих граничных значений *замкнуто.*

Линейным преобразованием переменной w, которое не нарушает ни того, что $w(z)$ ограниченного вида, ни равенства или неравенства нулю емкости множества E_w', переведем точку $w = w(0)$ в бесконечно удаленную точку и сохраним для образа множества E_w' старое обозначение E_w'. Покроем затем плоскость w сетью замкнутых квадратов $Q_n (n = 1, 2, \ldots)$ со стороной, равной 1, и представим множество E_z' как сумму бесконечного числа подмножеств E_z^n, для которых соответствующие граничные значения попадают в Q_n. Так как E_z' положительной меры, то найдется,

[1]) Нижеследующая теорема была доказана как обобщение старой теоремы (R. Nevanlinna [7]) независимо друг от друга O. Frostman'ом [1] и R. Nevanlinna [3].

*) Знак $\rightrightarrows$ означает равномерную сходимость.

по крайней мере, одно из множеств E_z^n (которые измеримы), обладающее тем же свойством. Наконец, преобразованием сдвига переместим соответствующий квадрат Q_n в круг $|w|<1$.

После этих простых приготовлений мы получим функцию $w(z)$ ограниченного вида при $|z|<1$ и отличную от постоянной, обладающую, кроме того, следующими свойствами:

1) На некотором множестве E_z точек $|z|=1$, мера которого $2\pi\mu>0$, функция w равномерно сходится (по радиусам) к определенным граничным значениям E_w.

2) Множество E_w ограничено и лежит в круге $|w|<1$.

3) $w(0)=\infty$.

Требуется доказать, что E_w имеет положительную гармоническую меру.

Для этой цели рассмотрим связную область D, ограниченную множеством E_w, которая содержит бесконечно удаленную точку, и выберем в ней произвольную подобласть D_w, также содержащую бесконечно удаленную точку и ограниченную конечным числом аналитических жордановых дуг Γ_w, лежащих в круге $|w|<1$. Пусть

$$g(w,\ \infty)=\log|w|+\gamma+\varepsilon\left(\frac{1}{w}\right)$$

функция Грина области D_w и γ — соответствующая постоянная Робэна. Напомним, что эта функция в каждой точке области D_w удовлетворяет неравенству

$$g(w,\ \infty)\leqslant\log|w|+\gamma+\log 2 \qquad (43)$$

[ср. гл. V, § 2, неравенство (6), где вместо d_2 можно подставить $|w|+1$].

Рассмотрим теперь совокупность тех точек z единичного круга, для которых значение $w(z)$ попадает в D_w; это множество содержит как подмножество вполне определенную связную область D_z, содержащую нулевую точку и ограниченную образами Γ_z дуг Γ_w и некоторыми точками окружности $|z|=1$. Дуги Γ_z аналитические, и если их бесконечно много, то они сгущаются к окружности $|z|=1$.

Функция $g(w(z),\ \infty)$ гармонична всюду в области D_z, исключая полюсы $z_0=0$, z_1, z_2, ... функции $w(z)$, в окрестности которых она имеет разложение

$$g=-\lambda\log|z-z_\nu|+\text{гармоническая функция},$$

где λ означает кратность полюса z_ν. В частности, для $z=0$, если разложение Лорана функции w в окрестности этой точки имеет вид

$$w(z)=\frac{c_0}{z^{n_0}}+\frac{c_1}{z^{n_0-1}}+\dots \qquad (c_0\neq 0),$$

имеем

$$g(w(z),\ \infty)=n_0\log\frac{1}{|z|}+\log|c_0|+\gamma+\varepsilon(z),$$

где $\varepsilon\to 0$ при $z\to 0$.

Применим теперь формулу Грина

$$\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0$$

к области D_z^r, являющейся пересечением области D_z с кругом $|z| < r < 1$, полагая

$$u = g(w(z), \infty), \quad v = \log \frac{r}{|z|}$$

и изолируя предварительно небольшими кругами полюсы z_ν. Если радиусы этих кругов устремить затем к нулю и учесть, что g на дугах Γ_z и v на окружности $|z| = r$ равны нулю, то после простого вычисления получится

$$\log|c_0| + \gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} g(w(re^{i\varphi}), \infty)\, d\varphi - \int_{\Gamma_z'} \log \frac{r}{|z|} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds + N(r, \infty),$$

где $(\varphi)_r$ означает часть окружности $|z| = r$ и Γ_z' — часть вышеопределенных дуг Γ_z, которые, в конечном числе, ограничивают область D_z^r.

Производная $\frac{\partial g}{\partial n}$, взятая в направлении внутренней нормали к дугам Γ_z, очевидно, $\geqslant 0$, а потому интеграл, взятый по Γ_z', также неотрицателен. Следовательно, учитывая соотношение (43), получаем

$$\log|c_0| + \gamma \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} g(w(re^{i\varphi}), \infty)\, d\varphi + N(r, \infty) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |w(re^{i\varphi})|\, d\varphi + N(r, \infty) + \log 2 + \gamma m_r =$$

$$= \log 2 + \gamma m_r + T(r, w),$$

где

$$m_r = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} d\varphi.$$

Выберем теперь r настолько большим, чтобы значения $w(re^{i\varphi})$ для значений φ соответствующих множеству E_z, лежали вне области D_w, что возможно в силу предположений 1 и 2. Так как значение $w(re^{i\varphi})$ для каждого φ из множества $(\varphi)_r$ попадает в область D_w, то значения $re^{i\varphi}$, соответствующие множествам E_z и $(\varphi)_r$, при достаточно большом r не имеют общих точек и, следовательно,

$$m_r = \frac{1}{2\pi} \int_{(\varphi)_r} d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{E_z} d\varphi = 1 - \mu.$$

Следовательно,

$$\mu\gamma \leqslant \log 2 - \log|c_0| + T(1, w),$$

откуда видно, что постоянная Робэна области D_w не превосходит конечной постоянной, не зависящей от выбора области D_w. Следовательно, постоянная Робэна γ_0 области D, определенная как верхняя граница постоянных Робэна аппроксимирующих областей D_w, также конечна.

Отсюда видно, что емкость $e^{-\gamma_0}$ множества, ограничивающего эту область, положительна и, таким образом, доказательство доведено до конца.

Если не делать никаких дополнительных предположений о структуре граничного множества, то, как это будет видно из следующего параграфа, предыдущая теорема о граничных значениях не может быть усилена *). Именно, мы увидим, что к каждому множеству E_w положительной гармонической меры можно подобрать функцию ограниченного вида для $|z|<1$, все угловые предельные значения которой на окружности $|z|<1$ содержатся в заданном множестве E_w.

§ 5. Применение к конформному отображению универсальной поверхности наложения однолистной области.

168. Представим себе универсальную поверхность наложения G^∞, построенную над однолистной многосвязной областью (ср. гл. I, § 2). Согласно общей теореме Римана об отображении (гл. I, § 2, теорема B) поверхность G^∞ с помощью линейно-полиморфной функции $x(z)$ может быть взаимно однозначно и конформно отображена на однолистный круг $|x|<1$, исключая тривиальный случай, когда граница Γ области G состоит из двух точек и, следовательно, логарифмическая функция отображает соответствующую универсальную поверхность наложения не на единичный круг, а на плоскость с одной выключенной точкой.

Обратная функция $z(x)$ в круге $|x|<1$ автоморфна относительно группы линейных преобразований S, имеющей конечное или бесконечное число образующих преобразований в зависимости от того, будет ли порядок связности области G конечный или бесконечный.

Введем теперь следующее разбиение областей на два класса: Область G называется *ограниченного вида* или *неограниченного вида* в зависимости от того, будет ли функция $z=z(x)$ ограниченного вида или нет.

Тогда имеет место следующий интересный критерий [1]):

Теорема 1. *Область G тогда и только тогда ограниченного вида, когда ее граница Γ имеет положительную гармоническую меру.*

Предположим сначала, что граничное множество Γ имеет положительную гармоническую меру. Автоморфная отображающая функ-

*) Требование, чтобы $w(z)$ была ограниченного вида, можно, однако, отбросить. См. И. Привалов [1].

[1]) См. R. Nevanlinna [12].

ция $z(x)$ не принимает в круге $|x|<1$ ни одного из значений, лежащих на множестве Γ, и имеет поэтому ограниченную характеристику T на основании следующей общей теоремы, представляющей частный случай теоремы гл. VI, § 4, стр. 183:

Если функция $z(x)$, мероморфная для $|x|<1$, выпускает множество значений положительной гармонической меры, то она ограниченного вида.

Чтобы довести до конца доказательство теоремы 1, остается еще только показать, что граничное множество Γ имеет положительную гармоническую меру, коль скоро характеристика $T(r, z(x))$ для $r<1$ ограничена.

Из ограниченности характеристики $T(r)$ следует, согласно первой основной теореме, что соответствующая $z(x)$ функция $N(r, a)$ ограничена для всех значений a. Возьмем произвольную точку a области G и обозначим через $x_1, x_2, \ldots$ ее образы в единичном круге $|x|<1$. Из ограниченности $N(r, a)$ следует (§ 1), что сумма

$$s(x)=\sum_{|x_\nu|<1}\log\left|\frac{1-x_\nu x}{x-x_\nu}\right|$$

представляет в круге $|x|<1$ неотрицательную гармоническую функцию, исключая точки x_ν, где

$$s(x)=\log\left|\frac{1}{x-x_\nu}\right|+\text{непрерывная функция.}$$

Далее $s(x)$ автоморфна относительно группы линейных преобразований S, которыми связаны ветви линейно-полиморфной функции $x(z)$. В самом деле, легко убедиться, что такое преобразование $S(x)$ только меняет порядок членов суммы $s(x)$ и, следовательно, не меняет ее значения.

Если теперь посредством преобразования $x=x(z)$ перейти к плоскости z, то функция $s(x(z))$ в области G будет *однозначной* гармонической функцией, исключая точку $z=a$, где s имеет положительный логарифмический полюс:

$$s(x(z))=\log\left|\frac{1}{z-a}\right|+\text{непрерывная функция;}$$

если $a=\infty$, то вместо $\log\left|\frac{1}{z-a}\right|$ нужно подставить $\log|z|$. Наконец, во всей области G имеем $s\geqslant 0$.

Этим доказано существование конечной, неотрицательной и отличной от константы функции, гармонической в каждой точке $z\neq a$ области G. Отсюда уже следует, что граничное множество Γ имеет положительную гармоническую меру. Чтобы в этом убедиться, опишем вокруг полюса $z=a$ небольшой круг C_r радиуса r и обозначим через m_r минимум функции $s(x(z))$ в круге $|z-a|\leqslant r$. Если бы Γ было гармонической меры нуль, то можно было бы

применить обобщенный принцип минимума (п. 115) в части области G, лежащей вне C_r. Тогда s было бы $\geqslant m_r$ во всей области G, что невозможно в силу того, что $m_r \to \infty$ при $r \to 0$. Это противоречие показывает, что Γ имеет положительную гармоническую меру, что и требовалось доказать.

169. В связи с этим заметим следующее: функция $s(x)$ как логарифм произведения Бляшке имеет почти всюду на окружности $|x| = 1$ нулевые радиальные предельные значения. Так как далее функция $s(x(z))$ гармонична и неотрицательна всюду в области G, исключая точку $z = a$, где она обращается в бесконечность как $\log \left| \frac{1}{z-a} \right|$, то возникает предположение, что она тождественно совпадает с функцией Грина области G. Что это действительно так, доказывается наиболее просто, если показать, что $s(x(z))$ в G не больше, чем всякая другая функция $u(z)$, неотрицательная и гармоническая всюду в области G, исключая точку $z = a$, в которой она имеет полюс вида $\log \left| \frac{1}{z-a} \right|$; в самом деле, это экстремальное свойство является характерным для функции Грина (гл. V, § 2, п. 97).

Итак, пусть $u(z)$ такая функция, отличная от s. Тогда $u(z(x))$ гармонична всюду в круге $|x| < 1$, исключая точки x_ν, в окрестности которых она имеет разложение, аналогичное с разложением функции $s(x)$. Следовательно, разность

$$u(z(x)) - \sum_{|x_\nu| < \rho} \log \left| \frac{\rho^2 - \bar{x}_\nu x}{\rho (x_\nu - x)} \right|$$

гармонична в круге $|x| < \rho < 1$; на окружности $|x| = \rho$ она, очевидно, неотрицательна. Совершая предельный переход $\rho \to 1$, найдем, что предельное значение

$$u(z(x)) - s(x)$$

для $|x| < 1$ неотрицательно. На самом деле оно даже положительно, ибо, если бы оно равнялось нулю в одной точке x, то из принципа минимума следовало бы, что $u \equiv s$, что противоречит сделанному предположению. Таким образом $u > s$ и, следовательно, s совпадает с функцией Грина области G.

Полученное таким образом, посредством функции $x(z)$, представление функции Грина в виде бесконечного произведения было дано Пуанкаре (Poincaré [2] [1]).

170. В лемме п. 168 мы заключили, что мероморфная для $|z| < 1$ функция $w(z)$ есть функция ограниченного вида на основании того, что она выпускает множество значений положительной емкости. Доказанная только что теорема показывает, что этот результат, поскольку вопрос идет о мере множества выпускаемых значений, не может быть усилен. В самом деле, если Γ — произвольное

[1]) См. P. Myrberg [1].

гармоническое нульмножество, то автоморфная функция $z(x)$, отображающая круг $|x|<1$ на универсальную поверхность наложения G^{∞} области G, ограниченной множеством Γ, дает пример функции *неограниченного* вида, которая не принимает ни одного из значений множества Γ.

171. Как же ведет себя автоморфная отображающая функция $z(x)$ на границе $|x|=1$? Здесь имеет место следующая замечательная [1])

Теорема 2. *Множество значений* φ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$, *для которых существует угловое предельное значение*

$$z(e^{i\varphi})=\lim_{x\to e^{i\varphi}} z(x), \tag{44}$$

имеет меру 2π *или нуль в зависимости от того, будет ли область* G *значений* $z(x)$ *ограниченного вида или нет.*

Первая часть этой теоремы непосредственно следует из теоремы Фату. Докажем вторую часть. Предположим, что G неограниченного вида и, следовательно, граничное множество Γ имеет емкость нуль, и обозначим через (φ) множество всех тех значений φ, для которых существует угловое предельное значение (44). Согласно общей теореме теории действительных функций, множество (φ) во всяком случае измеримо и, следовательно, существует интеграл Лебега ($x=re^{i\varphi}$)

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{(\varphi)}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\vartheta-\varphi)}\,d\vartheta.$$

Если мера μ множества (φ) лежит между нулем и 2π, то $u(x)$ определяет для $|x|<1$ ограниченную гармоническую функцию $(0\leqslant u\leqslant 1)$, которая по теореме Фату имеет почти всюду на множестве (φ) радиальное предельное значение 1. Так как при $x=0$ функция $u(x)$ имеет значение

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\varphi)}d\varphi=\frac{\mu}{2\pi}<1,$$

то $u(x)$, с другой стороны, не равна тождественно 1.

Если x подвергнуть преобразованию S группы преобразований, соответствующих функции $x(z)$, то соответствующее множеству (φ) множество $(e^{i\varphi})$ *не изменится*, ибо в силу автоморфности функции $z(x)$ эта функция для каждого значения φ преобразованного множества $S(e^{i\varphi})$ имеет угловое предельное значение, и так как, с другой стороны, множество (φ) определено как множество *всех* тех значений φ, для которых этот предел существует, то первоначальное и преобразованное множества (φ) должны совпадать *).

---

1) См. R. Nevanlinna [12].

*) Собственно доказано, что первоначальное множество содержит преобразованное. Но, очевидно, справедливо и обратное, так как каждая точка $e^{i\varphi}$, соответствующая первому множеству, может быть получена

Так как дифференциал вышестоящего интеграла Пуассона инвариантен относительно всех вообще линейных преобразований, переводящих единичный круг в самого себя (гл. I, § 1), то заключаем, что $u(x)$ представляет потенциал, автоморфный относительно группы (S).

Из установленных свойств функции u видно, что функция $u(x(z))$ в области G однозначна, гармонична и ограничена и в то же время отлична от постоянной. Но это невозможно в силу теоремы 2 (гл. V, § 4). Следовательно, соотношение $0 < \mu < 2\pi$ невозможно.

Остается еще доказать, что μ не может равняться 2π. Для этого покроем плоскость $z = \sigma + i\tau$ сетью квадратов $Q(m, n, p)$:

$$\frac{m}{p} \leqslant \sigma < \frac{m+1}{p}, \quad \frac{n}{p} \leqslant \tau < \frac{n+1}{p} \qquad (m, n = 0, \pm 1, \ldots)$$

и обозначим через $(\varphi)_{m,n,p}$ во всяком случае измеримую часть множества (φ), для которой граничные значения функции $z(x)$ попадают в квадрат $Q(m, n, p)$; сумма мер множеств $(\varphi)_{m,n,p}$ при фиксированном p и m, n пробегающих совокупность всех целых чисел, равна мере μ множества (φ), которую мы теперь предполагаем равной 2π. Пусть теперь p пробегает значения $1, 2, \ldots$; мы утверждаем, что найдется, по крайней мере, одна конечная комбинация значений m, n, p, для которой мера множества $(\varphi)_{m,n,p}$ лежит между нулем и 2π.

В противном случае для каждого p существует *один* вполне определенный квадрат $Q(m, n, p)$, для которого соответствующая мера в точности равна 2π. Эти квадраты вложены друг в друга и, следовательно, имеют единственную предельную точку z_0. Из определения точки z_0 следует, что значения φ, для которых граничные значения $z(e^{i\varphi})$ лежат в кольце $\frac{1}{n} \geqslant |z - z_0| \geqslant \frac{1}{n+1}$, образуют *нульмножество*. Следовательно, $z(x)$ почти всюду на окружности $|x| = 1$ имеет предельное значение z_0. Но это приводит следующим образом к противоречию:

Предположим сперва, что G имеет *более чем три* граничные точки; зафиксируем три из них, z_1, z_2, z_3, отличные от z_0, и построим универсальную поверхность наложения плоскости z с выключенными точками $z = z_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$). Посредством функции $w = w(z)$, обратной к модулярной функции, эта поверхность отображается на круг $|w| < 1$. Зафиксируем для $x = 0$ произвольное значение $w(z(0))$. Определенная этим ветвь функции $w(z(x))$ неограниченно продолжима в круге $|x| < 1$, так как $z(x)$ не принимает критических значений z_1, z_2, z_3; следовательно по теореме о монодромии эта ветвь определяет в единичном круге однозначную функцию, ограниченную и почти всюду на окружности $|x| = 1$ имеющую

преобразованием S из точки $S^{-1}(e^{i\varphi})$, также соответствующей этому множеству, откуда уже следует, что преобразованное множество содержит первоначальное.

граничное значение $w(z_0)$. Следовательно, множество этих граничных значений счетно, что согласно теореме братьев Рис влечет за собой постоянство функции $w(z(x))$. Но это невозможно, так как $w(z)$ и $z(x)$ отличны от постоянной.

Таким образом, в предположении, что Γ содержит более трех точек, мы доказали существование квадрата Q такого, что мера множества значений φ, для которых граничные значения $z(e^{i\varphi})$ попадают в Q, лежит между нулем и 2π. Но с этим множеством мы можем теперь поступить, как выше с множеством (φ) в случае, когда $0 < \mu < 2\pi$, и, таким образом, придем к имевшемуся в виду противоречию.

Этим доказано, что коль скоро граница области G содержит, по крайней мере, четыре точки, то функция $z(x)$ имеет граничные значения самое большее на множестве меры нуль.

Если же граница области G содержит менее четырех точек, то, так как тривиальный случай, когда Γ состоит из двух точек, был исключен раз навсегда, мы имеем дело с модулярной функцией. Наиболее просто этот случай разрешается следующим образом: две из трех граничных точек области G принимаются за точки ветвления двулистной римановой поверхности, расположенной над плоскостью z; посредством преобразования извлечения корня эта поверхность отображается на однолистную плоскость w. Этим модулярная функция преобразуется в автоморфную функцию, отображающую круг $|x| < 1$ на универсальную поверхность наложения плоскости w *с четырьмя* выключенными точками. Таким образом доказательство приводится к вышерассмотренному случаю.

172. Граничные значения отображающей функции лежат во всяком случае на граничном множестве Γ. Это доказывается, как и в выше рассмотренном частном случае (гл. I, § 3). Именно, если z_0 точка области G, то ее можно заключить в небольшой круг K_0, целиком лежащий в G. Образы этого круга лежат в круге $|x| < 1$ изолированно друг от друга. Если теперь точка x непрерывно стремится к границе $|x| = 1$, то ее образ $z = z(x)$ должен все время выходить из круга K_0 и, следовательно, не может стремиться к точке z_0.

Более подробным изучением соответствия между точками границы Γ и точками $|x| = 1$ мы здесь заниматься не будем.

VIII. МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА.

§ 1. Порядок мероморфной функции.

173. В течение предыдущего изложения мы уже неоднократно имели случай утверждать, что степень трансцендентности мероморфной функции отражается в возрастании ее характеристики $T(r)$. Если объединить в один класс те мероморфные функции, характеристика которых имеет определенный порядок роста, то структура

функций такого класса будет тем более сложной, чем выше этот порядок роста. Так мы нашли, что мероморфные в единичном круге функции, имеющие ограниченную характеристику, выделяются среди всех мероморфных для $|z|<1$ функций известными простыми свойствами. Они имеют, например, почти всюду на окружности $|z|=1$ определенные граничные значения, в то время как для функций неограниченного вида это вообще не имеет места. В случае же функции, мероморфной во всей плоскости $z \neq \infty$, ограниченность характеристики влечет за собой то, что функция обращается в постоянную. Рациональные функции обладают свойством $T(r)=O(\log r)$, а для трансцендентной функции отношение $T(r) : \log r$ при $r \to \infty$ неограниченно возрастает [1]).

174. Среди множества трансцендентных мероморфных функций естественно выделяется известными характеристическими свойствами особый класс функций; это класс мероморфных функций *конечного порядка*. Чтобы можно было сразу же определить с должной точностью возрастание такой функции, нужно предварительно ввести известные простые вспомогательные понятия.

Пусть $s(r)$ — определенная для $r>0$ положительная, монотонно возрастающая функция от r. Если верхний предел

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log s(r)}{\log r} = \lambda$$

конечен, то $s(r)$ называется *порядка* r^{λ} или, короче, *порядка* λ. Следовательно, $s(r)$ будет порядка λ тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших значений r

$$s(r) < r^{\lambda+\varepsilon},$$

в то время как найдутся сколь угодно большие значения r, для которых

$$s(r) > r^{\lambda-\varepsilon}.$$

Если же $\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log s(r)}{\log r}$ бесконечен, то $s(r)$ *бесконечного порядка*.

Функции конечного порядка λ делят на три подкласса: $s(r)$ принадлежит к *максимальному*, *среднему* или *минимальному типу* [2]) порядка λ в зависимости от того, будет ли верхний предел

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{s(r)}{r^{\lambda}}$$

бесконечен, конечен и положителен или равен нулю.

Далее целесообразно более подробно дифференцировать минимальный тип положительного порядка λ, различая *класс сходимости*

---

[1]) Это будет доказано в § 2 настоящей главы.

[2]) A. Pringsheim [1], E. Lindelöf [1]. Мы предпочитаем термин „средний тип" (Mitteltypus, type moyen), предложенный Линделофом, термину Прингсхейма „нормальный тип" (Normaltypus).

(*Konvergenzklasse*) и *класс расходимости* (*Divergenzklasse*)[1]), которые характеризуются сходимостью, соответственно расходимостью интеграла

$$\int^{\infty} \frac{s(r)}{r^{\lambda+1}}\,dr. \tag{1}$$

Например, функция $r^{\lambda}(\log r)^{\mu}$ для каждого μ будет порядка λ, при этом для $\mu > 0$ — максимального типа, для $\mu = 0$ — среднего типа, для $\mu < 0$ — минимального типа; для $0 > \mu \geqslant -1$ она принадлежит к классу расходимости, напротив, для $\mu < -1$ — к классу сходимости.

Если, таким образом, функция минимального типа не всегда принадлежит к классу сходимости, то обратное имеет место без исключений. В самом деле, если интеграл (1) сходится, то для заданного $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого значения r,

$$\varepsilon > \int_r^{\infty} \frac{s(t)}{t^{\lambda+1}}\,dt \geqslant s(r) \int_r^{\infty} \frac{dt}{t^{\lambda+1}} = \frac{s(r)}{\lambda r^{\lambda}},$$

откуда следует, что $s(r)$ минимального типа.

Применяя это свойство, убеждаемся в справедливости следующего критерия:

Функция $s(r)$ тогда и только тогда порядка λ, когда интеграл

$$\int^{\infty} \frac{s(r)}{r^{\mu+1}}\,dr$$

для $\mu > \lambda$ сходится, а для $\mu < \lambda$ расходится.

Теперь мы вводим следующее

Определение. *Мероморфная для $z \neq \infty$ функция считается того же порядка, типа и класса, что и ее характеристическая функция $T(r)$.*

Так, например, $\operatorname{tg} z$ порядка 1, функция e^{-z^k} и ее интегральная функция, рассмотренная в главе VI, § 2, имеют порядок k, двоякопериодические функции порядка 2, при этом все эти функции принадлежат к среднему типу соответствующего им порядка. Гамма-функция и дзета-функция Римана принадлежат к максимальному типу порядка 1. Дальнейшие примеры приведены в § 3 этой главы.

175. Для *целой трансцендентной функции $w(z)$* эти понятия с таким же успехом могут быть определены с помощью логарифма *максимума модуля*

$$M(r) = \max_{|z|=r} |w(z)|.$$

---

[1]) См. G. Valiron [1].

В самом деле, для такой функции $N(r, \infty) \equiv 0$ и поэтому

$$T(r) = m(r, \infty) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |w(re^{i\varphi})| \, d\varphi \leqslant \log M(r),$$

коль скоро r будет настолько велико, что $M(r) > 1$; с другой стороны, для $z = re^{i\varphi}$ и $r < \rho$ имеем [ср. (1), п. 131]

$$\log |w(z)| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w(\rho e^{i\vartheta})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\vartheta - \varphi)} \, d\vartheta - \sum \log \left| \frac{\rho^2 - \bar{a}_\nu z}{\rho (z - a_\nu)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |w(\rho e^{i\vartheta})| \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\vartheta - \varphi)} \, d\vartheta \leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r} m(\rho, \infty);$$

следовательно,

$$T(r) \leqslant \log M(r) \leqslant \frac{\rho + r}{\rho - r} T(\rho).$$

Полагая здесь $r = \Theta\rho \, (0 < \Theta < 1)$, мы придем к следующему заключению:

Для целой функции величины $T(r)$ и $\log M(r)$ — одного и того же порядка, типа и класса.

В силу инвариантности характеристики относительно линейных преобразований $S(w)$ порядок (тип, класс) мероморфной функции также инвариантен относительно таких преобразований.

Применяя соотношение (ср. п. 137)

$$T(r, w_1 w_2) \leqslant T(r, w_1) + T(r, w_2),$$

заключаем далее, что порядок λ произведения самое большее равен большему из порядков множителей w_1 и w_2. В силу соотношения $T\left(r, \frac{1}{w_2}\right) = T(r, w_2) + Q(1)$ то же самое справедливо и для частного $w = \frac{w_1}{w_2}$. Если w_1 и w_2 *неравных* порядков λ_1 и λ_2 (например, $\lambda_1 > \lambda_2$), то, следовательно, $\lambda \leqslant \lambda_1$; с другой стороны, так как w_1 может быть записано как частное (соответственно произведение) функций w и w_2, то и $\lambda_1 \leqslant \max(\lambda, \lambda_2)$, откуда следует, что λ должно равняться λ_1.

Порядок произведения (частного) двух мероморфных функций w_1 и w_2 порядка λ_1, соответственно λ_2, не превосходит $\max(\lambda_1, \lambda_2)$ *и наверное равен этому числу, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

С помощью соотношения $T(r, w_1 + w_2) \leqslant T(r, w_1) + T(r, w_2) + \log 2$ (ср. стр. 173) доказывается далее, что аналогичное справедливо и для *суммы* $w_1 + w_2$.

Из первой основной теоремы $T(r) \sim m(r, a) + N(r, a)$ заключаем, что как функция $m(r, a)$, так и функция $N(r, a)$ для каждого значения a самое большее имеют тот же порядок (тип, класс),

что и заданная мероморфная функция $w(z)$. По крайней мере, одна из этих величин достигает порядка функции $w(z)$; дальше будет показано, что для подавляющего большинства значений a последнее имеет место для функции $N(r, a)$. Об относительной величине компонент m и N из предыдущих результатов нам известно только, что на основании теоремы Пикара $N(r, a)$ может исчезать самое большее для *двух* значений a, если исключить тривиальный случай, когда $w(z)$ обращается в постоянную. Далее результаты главы VI, § 4 показывают, что величина $N(r, a)$ „почти для всех" значений a достигает полного значения характеристики.

176. Каким образом скорость возрастания функции $N(r, a)$ зависит от распределения a-точек, становится ясным из следующей леммы:

Если $r_1(a)$, $r_2(a)$, ... *означают расположенные в порядке возрастания модули* a*-точек мероморфной функции* $w(z)$, *то для* $\mu > 0$ *все три выражения*

$$\left.\begin{aligned} &\int^{\infty} \frac{N(r, a)}{r^{\mu+1}}\, dr, \\ &\int^{\infty} \frac{n(r, a)}{r^{\mu+1}}\, dr \\ \text{и} \quad &\sum^{\infty} \left(\frac{1}{r_\nu(a)}\right)^{\mu} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

одновременно конечны или бесконечны.

В самом деле, во-первых для $0 < r_0 < r$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a)}{t^{\mu+1}}\, dt = \int_{t=r_0}^{r} \frac{dN(t, a)}{t^{\mu}} = \frac{N(r, a)}{r^{\mu}} - \frac{N(r_0, a)}{r_0^{\mu}} + \mu \int_{r_0}^{r} \frac{N(t, a)}{t^{\mu+1}}\, dt,$$

откуда непосредственно следует, что сходимость второго интеграла в (2) влечет за собой сходимость первого интеграла. Если же первый интеграл сходится, то, как выше было показано, $N(r, a)\, r^{-\mu} \to 0$ при $r \to \infty$; следовательно, при $r \to \infty$ правая, а значит и левая части предыдущего соотношения остаются конечными. Таким образом первый и второй интеграл (2) сходятся или расходятся одновременно.

Аналогично с помощью соотношения

$$\sum_{r_0 < r_\nu \leqslant r} \left(\frac{1}{r_\nu(a)}\right)^{\mu} = \int_{t=r_0}^{r} \frac{dn(t, a)}{t^{\mu}} = \frac{n(r, a)}{r^{\mu}} - \frac{n(r_0, a)}{r_0^{\mu}} + \mu \int_{r_0}^{r} \frac{n(t, a)}{t^{\mu+1}}\, dt$$

доказывается, что второй интеграл и ряд (2) сходятся или расходятся одновременно; тем самым лемма доказана полностью.

Отсюда заключаем, что порядок (тип, класс) выражений N и n — один и тот же, и, применяя данный выше критерий, получаем следующую теорему:

Если порядок мероморфной функции $w(z)$ равен λ, то ряд

$$\sum\left(\frac{1}{r_\nu(a)}\right)^\mu \tag{3}$$

сходится для каждого a, коль скоро $\mu > \lambda$.

Если $w(z)$ принадлежит к классу сходимости порядка λ, то это же справедливо еще и для $\mu = \lambda$.

Если ряд (3) сходится для некоторого значения μ, то μ называется *показателем сходимости* (*Konvergenzexponent*) последовательности чисел $r_\nu(a)$. Нижняя граница показателей сходимости называется *предельным показателем* (*Grenzexponent*). Согласно предыдущей теореме *предельный показатель a-точек мероморфной функции $w(z)$ самое большее равен порядку λ этой функции. Если $w(z)$ принадлежит к классу сходимости порядка λ, то предельный показатель является одновременно и показателем сходимости.*

Спрашивается, существуют ли случаи, когда предельный показатель для каких-нибудь значений a *меньше* порядка функции. Что это, действительно, может случиться по крайней мере для *двух* значений a, показывает нам пример функции

$$w(z) = w_1(z)\, e^{z^\lambda},$$

где $\lambda > 0$ — целое число и $w_1(z)$ — произвольная мероморфная функция порядка $\lambda_1 < \lambda$. Функция $w(z)$ имеет порядок λ, но вместе с тем она имеет нули и полюсы, общие с функцией $w_1(z)$, и, следовательно, ряд (3) сходится для обоих значений $a = 0, \infty$, коль скоро $\mu > \lambda_1$. Следовательно, для этих значений предельный показатель меньше порядка λ.

С другой стороны, число таких исключительных значений не превосходит двух, как это следует из обобщения теоремы Пикара, данного впервые Борелем [1]) и которое будет доказано в главе X.

§ 2. Каноническое представление мероморфной функции конечного порядка.

177. Из формулы Пуассона-Иенсена методом, указанным Ф. Неванлинной [2]), можно вывести представление мероморфной функции конечного порядка в виде отношения двух канонических произведений Вейерштрасса, справедливое во всей конечной плоскости.

Пусть $w(z)$—мероморфная функция конечного порядка с нулями a_μ и полюсами b_ν ($\mu, \nu = 1, 2, \ldots$). Тогда существует конечное *целое число* $q \geqslant 0$ такое, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0. \tag{4}$$

---

[1]) E. Borel [1].
[2]) F. Nevanlinna [1], R. Nevanlinna [4].

Представляя $w(z)$ в круге $|z|\leqslant\rho$ формулой Пуассона-Иенсена (1′) (гл. VI, § 1) и диференцируя $q+1$ раз, найдем [1])

$$D^{(q+1)}\log w(z)=\sum_{|a_\mu|<\rho}\frac{(-1)^q q!}{(z-a_\mu)^{q+1}}-\sum_{|b_\nu|<\rho}\frac{(-1)^q q!}{(z-b_\nu)^{q+1}}+S_\rho(z)+I_\rho(z),$$

где

$$S_\rho(z)=q!\sum_{|a_\mu|<\rho}\left(\frac{\bar a_\mu}{\rho^2-\bar a_\mu z}\right)^{q+1}-q!\sum_{|b_\nu|<\rho}\left(\frac{\bar b_\nu}{\rho^2-\bar b_\nu z}\right)^{q+1},$$

$$I_\rho(z)=\frac{(q+1)!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\frac{2\rho e^{i\vartheta}\,d\vartheta}{(\rho e^{i\vartheta}-z)^{q+2}}.$$

178. Докажем, что выражения S_ρ и I_ρ при $\rho\to\infty$ стремятся к нулю. В самом деле, так как $|a_\mu|<\rho$, то для $|z|\leqslant r<\rho$

$$\left|\frac{\bar a_\mu}{\rho^2-\bar a_\mu z}\right|\leqslant\frac{|a_\mu|}{\rho^2-|a_\mu|r}<\frac{1}{\rho-r}$$

и поэтому

$$\left|\sum\left(\frac{\bar a_\mu}{\rho^2-\bar a_\mu z}\right)^{q+1}\right|\leqslant\frac{n(\rho,0)}{(\rho-r)^{q+1}}=\frac{n(\rho,0)}{\rho^{q+1}}\left(\frac{1}{1-\frac{r}{\rho}}\right)^{q+1}.$$

Здесь

$$n(\rho,0)=n(\rho,0)\int_\rho^{e\rho}\frac{dt}{t}\leqslant\int_\rho^{e\rho}\frac{n(t,0)}{t}\,dt\leqslant N(e\rho,0)<T(e\rho)+O(1),$$

откуда, в силу предположения (4), следует, что

$$\frac{n(\rho,0)}{\rho^{q+1}}\to 0\text{ при }\rho\to\infty.$$

Вторая, стоящая в выражении S_ρ сумма, происходящая от полюсов b_ν, может быть оценена аналогично, откуда следует, что $S_0(z)$ при $\rho\to\infty$ стремится к нулю, притом равномерно для $|z|\leqslant r$.

Перейдем теперь к выражению I_ρ. Для $|z|\leqslant r<\rho$ имеем

$$|I_\rho(z)|\leqslant\frac{(q+1)!\,\rho}{\pi(\rho-r)^{q+2}}\int_0^{2\pi}\left|\log|w(\rho e^{i\vartheta})|\right|d\vartheta=$$

$$=\frac{2(q+1)!}{\left(1-\frac{r}{\rho}\right)^{q+2}}\,\frac{m(\rho,0)+m(\rho,\infty)}{\rho^{q+1}}<\frac{4(q+1)!}{\left(1-\frac{r}{\rho}\right)^{q+2}}\,\frac{T(\rho)+O(1)}{\rho^{q+1}},$$

откуда следует, что

$$I_\rho(z)\to 0\text{ при }\rho\to\infty,$$

притом равномерно для $|z|\leqslant r$.

[1]) Можно принять $w(0)\neq 0,\infty$; это всегда может быть достигнуто делением функции w на подходящую степень z^α.

Таким образом окончательно получаем соотношение

$$D^{(q+1)}\log w(z) = \\ = (-1)^{q+1}q!\lim_{\rho\to\infty}\left\{\sum_{|b_\nu|<\rho}\left(\frac{1}{z-b_\nu}\right)^{q+1} - \sum_{|a_\mu|<\rho}\left(\frac{1}{z-a_\mu}\right)^{q+1}\right\},$$

откуда после $(q+1)$-кратного интегрирования, которое в силу равномерной сходимости, может быть выполнено почленно, получается

$$\log w(z) = \sum_0^q c_\nu z^\nu + \lim_{\rho\to\infty}\left\{\sum_{|a_\mu|<\rho}\left[\log\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)+\frac{z}{a_\mu}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_\mu}\right)^q\right] - \right. \\ \left. - \sum_{|b_\nu|<\rho}\left[\log\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)+\frac{z}{b_\nu}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^q\right]\right\}.$$

При этом $\nu!c_\nu = D^{(\nu)}\log w(0)$. Таким образом мы приходим к следующему результату:

Пусть $w(z)$ — мероморфная функция конечного порядка с нулями $a_1, a_2, \ldots$ и полюсами $b_1, b_2, \ldots$ Пусть далее $T(r)$ — ее характеристика и q — такое большое целое число, что

$$\lim_{r\to\infty}\frac{T(r)}{r^{q+1}} = 0. \tag{4}$$

При этих условиях $w(z)$ может быть представлена в виде

$$w(z) = z^\alpha e^{\sum_0^q c_\nu z^\nu}\lim_{\rho\to\infty}\frac{\prod_{|a_\mu|<\rho}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{\frac{z}{a_\mu}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{a_\mu}\right)^q}}{\prod_{|b_\nu|<\rho}\left(1-\frac{z}{b_\nu}\right)e^{\frac{z}{b_\nu}+\ldots+\frac{1}{q}\left(\frac{z}{b_\nu}\right)^q}}, \tag{5}$$

где α — целое число и сходимость равномерна в каждой конечной области плоскости [1]).

179. Предыдущие условия еще недостаточны, чтобы гарантировать сходимость отдельных канонических произведений, стоящих

---

[1]) Эта теорема показывает, что соотношение $T(r) = O(\log r)$ является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы мероморфная функция w была рациональной функцией (ср. гл. VI, § 2, п. 137). В самом деле, из этого соотношения следует, что (4) выполняется при $q = 0$. Так как $N(r, 0)$ и $N(r, \infty)$ по первой основной теореме тоже порядка $O(\log r)$, то число полюсов и нулей конечно и выражение справа в (5) обращается в рациональную функцию.

в числителе и знаменателе представления (5). Для этого требуется, как известно *), сходимость рядов

$$\sum \left|\frac{1}{a_\mu}\right|^{q+1} \quad \text{и} \quad \sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{q+1} \tag{6}$$

или, что равнозначно, сходимость интегралов

$$\int^{\infty} \frac{N(r, a)}{r^{q+2}}\, dr \qquad (a = 0, \infty).$$

Из предположения (4) следует только, что $T(r)$, а следовательно и $N(r, a)$ самое большее минимального типа порядка $q+1$.

Если же $T(r)$ — самое большее *класса сходимости* порядка $q+1$, т. е. если интеграл

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\, dr$$

сходится, то оба ряда (6), а потому и соответствующие канонические произведения сходятся абсолютно и для $|z| \leqslant r$ равномерно.

Если интеграл

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\, dr \tag{7}$$

сходится, то

$$w(z) = z^{\alpha} e^{\sum_0^q c_\nu z^\nu} \frac{\prod^{\infty} E\left(\frac{z}{a_\nu}, q\right)}{\prod^{\infty} E\left(\frac{z}{b_\nu}, q\right)}, \tag{8}$$

где E означает первичный множитель Вейерштрасса

$$E(u, q) = (1-u)\, e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^q}{q}}.$$

Это каноническое представление показывает, что мероморфная функция конечного порядка с точностью до множителя

$$e^{P(z)},$$

где P — полином, определяется своими нулями и полюсами. Следовательно, асимптотические свойства функции в существенном зависят от распределения ее нулей и полюсов. Чтобы глубже понять эту связь, нам нужно подвергнуть более подробному исследованию соотношения между ростом и плотностью нулей канонического произведения.

*) См., например, Привалов, „Введение в теорию функций комплексного переменного", ОНТИ, М. — Л., 1938.

§ 3. Некоторые свойства канонических произведений.

180. Для оценки абсолютной величины канонического произведения исследуем сперва первичный множитель Вейерштрасса $E(u, q)$. Если $q = 0$, то имеем очевидное соотношение

$$\log|E(u, 0)| \leqslant \log(1+|u|). \tag{9}$$

Если же $q \geqslant 1$, то для $|u| \leqslant \frac{q}{q+1}$

$$\log|E(u, q)| \leqslant \sum_{q+1}^{\infty} \frac{|u|^{\nu}}{\nu} \leqslant \frac{|u|^{q+1}}{q+1}(1+|u|+\ldots) = \frac{|u|^{q+1}}{q+1}\,\frac{1}{1-|u|} \leqslant |u|^{q+1}.$$

Для $|u| > \frac{q}{q+1}$, в силу $\log(1+|u|) < |u|$, имеем

$$\log|E(u, q)| \leqslant |u|^{q}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q-1}\left|\frac{1}{u}\right|+\ldots+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{u}\right|^{q-2}+2\left|\frac{1}{u}\right|^{q-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant |u|^{q}\left[2\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q-1}+\sum_{\nu=2}^{q}\frac{1}{\nu}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q-\nu}\right] \leqslant$$

$$\leqslant |u|^{q}\left(1+\frac{1}{q}\right)^{q}\left(2+\sum_{\nu=2}^{q}\frac{1}{\nu}\right) < |u|^{q} e\,(2+\log q) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|u|^{q+1}}{1+|u|}\,3e\,(2+\log q).$$

Последнее выражение при $|u| \leqslant \frac{q}{q+1}$ больше, чем $|u|^{q+1}$, а потому, объединяя полученные оценки для $\log|E(u, q)|$ при $q \geqslant 1$, получаем теорему: [1])

При $q \geqslant 1$ первичный множитель Вейерштрасса удовлетворяет неравенству

$$\log|E(u, q)| < \frac{p\,|u|^{q+1}}{1+|u|}, \tag{10}$$

где

$$p = 3e\,(2+\log q).$$

181. Пусть теперь $a_1, \ldots, a_{\nu}, \ldots$ — последовательность чисел, расположенная в порядке возрастания их абсолютных величин, для которой ряд

$$\sum^{\infty}\left|\frac{1}{a_{\nu}}\right|^{q},$$

---

[1]) E. Borel [1], G. Valiron [2].

где q — целое число, расходится, в то время как ряд

$$\sum_1^\infty \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{q+1}$$

сходится. При этих предположениях бесконечное произведение

$$\prod_1^\infty E\left(\frac{z}{a_\nu}, q\right)$$

сходится равномерно в каждой конечной области и представляет, следовательно, целую функцию, равную нулю в точках $z = a_\nu$. Целое число q называется *жанром* (*Geschlecht*) канонического произведения.

Если $n(r)$ означает число нулей a_ν, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, то интегралы

$$\int^\infty \frac{n(r)}{r^{\mu+1}}\,dr \quad \text{и} \quad \int^\infty \frac{N(r)}{r^{\mu+1}}\,dr$$

для $\mu = q$ расходятся, а для $\mu = q+1$ сходятся. *Порядок* λ величин $n(r)$ и $N(r)$, который равен предельному показателю последовательности чисел $|a_\nu|$, лежит, следовательно, в интервале $q \leqslant \lambda \leqslant q+1$, и порядок канонического произведения, т. е. порядок его характеристики или, что то же, величины $\log M(r)$, *самое меньшее равен* λ.

Мы переходим теперь к оценке сверху абсолютной величины канонического произведения. Применяя соотношение (10), найдем, что для $q \geqslant 1$

$$\log M(r) \leqslant p \sum_1^\infty \frac{r^{q+1}}{|a_\nu|^q (|a_\nu| + r)} = pr^{q+1} \int_{t=0}^\infty \frac{dn(t)}{t^q (t+r)} =$$

$$= pr^{q+1} \int_0^\infty \frac{qr + (q+1)t}{t^{q+1}(t+r)^2}\, n(t)\,dt \leqslant p(q+1) r^{q+1} \int_0^\infty \frac{n(t)\,dt}{t^{q+1}(t+r)} \leqslant$$

$$\leqslant p(q+1) r^q \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}}\,dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{q+2}}\,dt \right).$$

Последняя оценка применима и в случае $q = 0$, как это нетрудно показать, исходя в предыдущей оценке из соотношения (9). Резюмируя, мы приходим к следующему результату:

Максимальное значение $M(r)$ *канонического произведения жанра* q *удовлетворяет неравенству*

$$\log M(r) < kr^q \left(\int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}}\,dt + r \int_r^\infty \frac{n(t)}{t^{q+2}}\,dt \right), \tag{11}$$

где $k = 3e(q+1)(2 + \log q)$.

182. Это неравенство показывает, что порядок величины $\log M(r)$ не превосходит порядка величины $n(r)$, но так как справедливо и обратное положение, то имеет место следующий результат:

Порядок канонического произведения конечного жанра совпадает с порядком функции $n(r)$.

Что касается типа и класса произведения, то здесь следует различать два случая в зависимости от того, будет ли порядок λ выражаться целым числом или нет. Рассмотрим сперва последний случай, $q < \lambda < q+1$. С помощью соотношения (11) непосредственно доказывается, что $\log M(r)$ не более высокого типа, чем $n(r)$. Но то же самое имеет место и для класса, как это следует из теоремы: [1])

Для канонического произведения дробного порядка λ интегралы

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}} \quad \text{и} \quad \int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr \tag{12}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Учитывая результаты § 1, достаточно показать, что сходимость второго интеграла влечет за собой сходимость первого. Но последнее, в свою очередь, легко следует из соотношения (11), которое мы запишем в виде

$$\log M(r) < k\,(\varphi(r) + \psi(r)), \tag{13}$$

где

$$\varphi(r) = r^q \int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}}\, dt, \quad \psi(r) = r^{q+1} \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}}\, dt.$$

В самом деле,

$$\int_0^r \frac{\varphi(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt = -\frac{1}{\lambda-q}\frac{1}{r^{\lambda-q}} \int_0^r \frac{n(t)}{t^{q+1}}\, dt + \frac{1}{\lambda-q} \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt,$$

откуда видно, что интеграл

$$\int^{\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

сходится, если сходится второй из интегралов (12).

Далее

$$\int_0^r \frac{\psi(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt = \frac{r^{q+1-\lambda}}{q+1-\lambda} \int_r^{\infty} \frac{n(t)}{t^{q+2}}\, dt + \frac{1}{q+1-\lambda} \int_0^r \frac{n(t)}{t^{\lambda+1}}\, dt.$$

Функция $n(r)$ принадлежит к минимальному типу порядка λ, и поэтому правое выражение стремится к конечному пределу при $r \to \infty$. Отсюда легко убедиться, что и интеграл

$$\int^{\infty} \frac{\psi(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr$$

---

[1]) См. G. Valiron [1].

сходится, если сходится второй из интегралов (12). Наконец, в силу неравенства (13) то же самое справедливо для интеграла

$$\int^{\infty} \frac{\log M(r)}{r^{\lambda+1}}\,dr.$$

Для канонического произведения дробного порядка величины $\log M(r)$ *и* $n(r)$ *принадлежат к одному и тому же типу и классу.*

183. Для целых порядков эта теорема, если не делать исключений, уже несправедлива. Покажем на примере, что в этом случае возможно повышение типа или класса величины $\log M(r)$ по сравнению с $n(r)$.

Пусть λ — положительное число, α — произвольное действительное число и

$$\varphi(r;\ \lambda,\ \alpha) \equiv r^{\lambda}(\log r)^{\alpha}. \tag{14}$$

Для $r \geqslant e^{\frac{|\alpha|}{\lambda}}$ функция φ монотонно возрастает вместе с r. Следовательно, если ограничить изменение параметра r условием $r \geqslant r_0 > e^{2\pi+\frac{|\alpha|}{\lambda}}$, то уравнение

$$\varphi(r) = \nu$$

будет иметь для каждого целого числа $\nu \geqslant \nu_0 = [\varphi(r_0)+1]$ вполне определенный корень r_ν [1]); пусть, кроме того, $r_1 = \ldots = r_{\nu_0-1} = r_{\nu_0}$.

Для исследования возрастания монотонной числовой последовательности $r_1, r_2, \ldots$ заметим, что число значений r_ν, которые не превосходят значения $r \geqslant r_1$, равно

$$n(r) = [\varphi(r)].$$

Отсюда, так как разность $\varphi - n$ не превосходит единицы, интегралы

$$\int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{\mu+1}}\,dr \quad \text{и} \quad \int^{\infty} \frac{\varphi(r;\ \lambda,\ \alpha)}{r^{\mu+1}}\,dr$$

для каждого $\mu > 0$ одновременно сходятся или расходятся. Следовательно, первый интеграл, а поэтому и ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r_\nu}\right)^{\mu},$$

для $\mu > \lambda$ сходится, а для $\mu < \lambda$ расходится. Для $\mu = \lambda$ имеет место сходимость или расходимость в зависимости от того, будет ли $\alpha < -1$ или $\alpha \geqslant -1$. Следовательно, *наибольшее целое число* q, для которого имеет место расходимость, равно $[\lambda]$, если λ — дробное число и α произвольно или если λ — целое число и $\alpha \geqslant -1$; если же λ — целое число и $\alpha < -1$, то $q = \lambda - 1$.

---

[1]) Как обычно, $[a]$ означает наибольшее целое число $\leqslant a$.

184. С определенными таким образом числами q и r_ν построим теперь каноническое произведение

$$f(z;\ \lambda,\ \alpha)=\prod_{\nu=1}^{\infty}E\left(-\frac{z}{r_\nu},\ q\right)$$

жанра q. Чтобы исследовать асимптотическое поведение этой целой функции, исчезающей в точках $-r_\nu$ отрицательной действительной оси, произведем в плоскости прямолинейный разрез от $-r_1$ до $-\infty$.

Если в выражении

$$\log f=\sum_{\nu=1}^{\infty}\log E\left(-\frac{z}{r_\nu},\ q\right)$$

взять повсюду ту ветвь логарифма, которая исчезает при $z=0$, то этим $\log f(z;\ \lambda,\ \alpha)$ будет определен в плоскости с разрезом как однозначная и регулярная функция.

Далее имеем *)

$$\log f(z;\ \lambda,\ \alpha)=\int_{t=r_1}^{\infty}\log E\left(-\frac{z}{t},\ q\right)dn(t)-\nu_0\log E\left(-\frac{z}{r_1},\ q\right)=$$

$$=-\int_{r_1}^{\infty}n(t)\,d\log E\left(-\frac{z}{t},\ q\right)-\nu_0\log E\left(-\frac{z}{r_1},\ q\right)=$$

$$=(-1)^q z^{q+1}\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(t)}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+z}-\nu_0\log E\left(-\frac{z}{r_1},\ q\right),\qquad(15)$$

и так как $n(r)\sim\varphi$, то асимптотическое поведение $\log f$ в основном определяется, как это будет дальше строго доказано, асимптотическими свойствами интеграла

$$I(z;\ \lambda,\ \alpha)=\int_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+z}.$$

Для дальнейшего нам потребуется предварительная оценка этого интеграла. Если область изменения z ограничить углом

$$|\arg z|\leqslant\pi-\delta\qquad(0<\delta<\pi),\qquad(W)$$

то $|t+z|$ будет не меньше большего из чисел $t\sin\delta$ и $|z|\sin\delta$, и во всяком случае

$$|t+z|\geqslant\frac{\sin\delta}{2}(t+|z|).$$

*) $q\leqslant\lambda\leqslant q+1$, если $\lambda=q+1$, то нужно, чтобы $\alpha<0$.

Следовательно, в угле W для $|z|=r$

$$|I(z;\ \lambda,\ \alpha)|\leqslant\frac{2}{\sin\delta}\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+r}.$$

Далее, для $r>r_1$ получается соотношение

$$\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha)}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+r}\leqslant\frac{1}{r}\int\limits_{r_1}^{r}\frac{\varphi\,dt}{t^{q+1}}+\int\limits_{r}^{\infty}\frac{\varphi\,dt}{t^{q+2}}.$$

Интегрируя по частям, получим для $\lambda>q$

$$(\lambda-q)\int\limits_{r_1}^{r}\frac{\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha)}{t^{q+1}}\,dt=$$

$$=r^{\lambda-q}(\log r)^{\alpha}-r_1^{\lambda-q}(\log r_1)^{\alpha}-\alpha\int\limits_{r_1}^{r}\frac{\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha-1)}{t^{q+1}}\,dt.$$

Так как по предположению интеграл слева при $r\to\infty$ неограниченно возрастает и выражение $\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha-1)$ бесконечно мало по сравнению с $\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha)$, то интеграл справа бесконечно мал по сравнению с интегралом, стоящим слева, и, следовательно,

$$\int\limits_{r_1}^{r}\frac{\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha)}{t^{q+1}}\,dt\sim\frac{r^{\lambda-q}}{\lambda-q}(\log r)^{\alpha}=\frac{\varphi(r;\ \lambda,\ \alpha)}{(\lambda-q)\,r^{q}}.$$

Аналогично найдем, что для $\lambda<q+1$

$$\int\limits_{r}^{\infty}\frac{\varphi(t;\ \lambda,\ \alpha)}{t^{q+2}}\,dt\sim\frac{\varphi(r;\ \lambda,\ \alpha)}{(q+1-\lambda)\,r^{q+1}},$$

откуда следует, что в угле W для $q<\lambda<q+1$

$$I(z;\ \lambda,\ \alpha)=O(\varphi(r;\ \lambda,\ \alpha)\,r^{-q-1}).\tag{16}$$

Для $\lambda=q$, $\alpha>-1$ [1])

$$\int\limits_{r_1}^{r}\frac{\varphi\,dt}{t^{q+1}}\sim\frac{(\log r)^{\alpha+1}}{\alpha+1},\qquad\int\limits_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi\,dt}{t^{q+2}}\sim\frac{(\log r)^{\alpha}}{r}$$

и

$$I(z;\ q,\ \alpha)\sim O\left(\frac{(\log r)^{\alpha+1}}{r}\right).\tag{16'}$$

Наконец, для $\lambda=q+1$, $\alpha<-1$

$$I(z;\ q+1,\ \alpha)\sim O((\log r)^{\alpha+1}).\tag{16''}$$

---

[1]) Значение $\alpha=-1$ потребовало бы особого рассмотрения; почему мы его для краткости в дальнейшем исключаем (ср. сноску на стр. 235).

Аналогичным образом, учитывая соотношение $|n-\varphi|\leqslant 1$, можно оценить интеграл

$$\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(t)-\varphi(t;\lambda,\alpha)}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+z}.$$

Это выражение для $q>0$ самое большее порядка $O\left(\frac{1}{r}\right)$, а для $q=0$ — порядка $O\left(\frac{\log r}{r}\right)$. Подставляя это в (15), заключаем, что в угле W

$$\log f(z;\lambda,\alpha)=(-1)^q z^{q+1}I(z;\lambda,\alpha)+O(|z|^q+\log|z|). \quad (17)$$

185. Далее, чтобы найти более точное разложение интеграла $I(z;\lambda,\alpha)$, рассмотрим функцию $\varphi(t;\lambda,\alpha)$ для комплексных значений t и ограничимся при этом областью D_1 плоскости t, которая получается из области $|t|>r_1$, если в ней произвести разрез вдоль положительной действительной оси от r_1 до ∞. На верхнем крае сечения выберем $\arg t=0$ и значение φ действительным; этим в области D_1 определится однозначная ветвь функции u, и, коль скоро точка z будет лежать вне луча $(-r_1, -\infty)$, по теореме Коши

$$(-1)^{q+1}\frac{2\pi i\varphi(-z;\lambda,\alpha)}{z^{q+1}}=\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t;\lambda,\alpha)}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+z},$$

причем интегрирование нужно производить вдоль положительно пробегаемой границы Γ области D_1. [1])

Имеем

$$\int_{\Gamma}=\int_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+z}-\int_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi_1}{t^{q+1}}\frac{dt}{t+z}+\int_{|z|=r_1}, \quad (18)$$

где

$$\varphi_1(t;\lambda,\alpha)=\varphi(te^{2\pi i};\lambda,\alpha)=e^{2\pi i\lambda}(\log t+2\pi i)^{\alpha}t^{\lambda}=$$
$$=e^{2\pi i\lambda}\varphi(t;\lambda,\alpha)\left(1+\frac{2\pi i}{\log t}\right)^{\alpha}$$

означает значение функции φ на нижнем крае сечения. Так как $\log t\geqslant\log r_1>2\pi$, то

$$\left(1+\frac{2\pi i}{\log t}\right)^{\alpha}=1+\frac{2\pi i}{\log t}+\frac{\psi(t)}{(\log t)^2},$$

где $\psi(t)$ для $r_1\leqslant t$ *ограничена*. Отсюда, так как последний член в (18)

---

[1]) Сперва эту теорему нужно применить к той части области D_1, которая лежит в области $r_1<|z|<R$; при $R\to\infty$ часть интеграла, соответствующая окружности $|z|=R$, исчезает. Это справедливо и для $\lambda=q+1$, если только $\alpha<0$, что важно для дальнейшего.

порядка $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, то

$$2\pi i\frac{\varphi(-z;\lambda,\alpha)}{(-z)^{q+1}} = I(z;\lambda,\alpha)(1-e^{2\pi i\lambda}) - 2\pi a i e^{2\pi i\lambda} I(z;\lambda,\alpha-1) - \\ - e^{2\pi i\lambda}\int_{r_1}^{\infty}\frac{\varphi(t;\lambda,\alpha-2)\Psi(t)}{t^{q+1}(t+z)}dt + O\left(\frac{1}{|z|}\right). \qquad (19)$$

Пусть теперь $q<\lambda<q+1$. Применяя вспомогательную оценку (16), заключаем, что интеграл справа в (19) и выражение $I(z;\lambda,\alpha-1)$ в угле W имеют порядок $O(|z|^{-q-1}\varphi(|z|;\lambda,\alpha-1))$, и так как эти величины тем самым бесконечно малы по сравнению с выражением слева в (19), то

$$I(z;\lambda,\alpha)\sim -\frac{\pi e^{-\pi i\lambda}}{\sin\pi\lambda}\frac{\varphi(-z;\lambda,\alpha)}{(-z)^{q+1}}\sim\frac{\pi z^{\lambda-q-1}(\log z)^{\alpha}}{\sin\pi(\lambda-q)},$$

причем $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$.

В случае $\lambda=q$ первый член справа в (19) исчезает. Если тогда α заменить на $\alpha+1$, то для $\alpha+1>0$

$$I(z;\lambda,\alpha)\sim\frac{(-1)^q}{\alpha+1}\frac{\varphi(-z;\lambda,\alpha+1)}{z^{q+1}}\sim\frac{(\log z)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)z}.$$

Наконец, для $\lambda=q+1$, $\alpha+1<0$ получаем

$$I(z;\lambda,\alpha)\sim -\frac{(\log z)^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Если подставить эти разложения в (17), то придем к следующему результату:

Каноническое произведение $f(z;\lambda,\alpha)$ жанра q, число нулей которого $n(r)$ порядка

$$n(r)\sim r^{\lambda}(\log r)^{\alpha}, \qquad (20)$$

имеет в угле $|\arg z|\leqslant\pi-\delta$ $(0<\delta<\pi)$ асимптотическое разложение

$$\log f(z;\lambda,\alpha)\sim(-1)^q\frac{\pi}{\sin\pi(\lambda-q)}z^{\lambda}(\log z)^{\alpha}\left(1+\varepsilon\left(\frac{1}{z}\right)\right), \qquad (20')$$

если $q<\lambda<q+1$ или

$$\log f(z;\lambda,\alpha)\sim\frac{(-1)^{\lambda}}{\alpha+1}z^{\lambda}(\log z)^{\alpha+1}, \qquad (20'')$$

если $\lambda=q$, $\alpha+1>0$ *или* $\lambda=q+1$, $\alpha+1<0$[1]).

186. В согласии с теоремой п. 182 величины $\log M(r)$ [или $T(r)$] и $n(r)$ для целой функции $f(z;\lambda,\alpha)$ при дробном λ принадлежат к одному и тому же типу и классу. Для целого порядка это уже неверно, так как здесь возможно повышение типа или

[1]) См. E. Lindelöf [1]. В случае $\lambda=q$, $\alpha+1=0$ найдем с помощью отдельной элементарной оценки, что $\log f(z;q,-1)\sim z^{\lambda}\log\log z$.

класса величины $\log M(r)$. Так, соотношения (20) и (20′) показывают, что для $\lambda = q$, $-1 < \alpha < 0$ величина $\log M(r)$ [соответственно $T(r)$] принадлежит к *максимальному типу* порядка λ, в то время как число нулей $n(r)$ принадлежит к *минимальному типу* того же порядка. Для $\lambda = q+1$, $-2 \leqslant \alpha < -1$ величина $\log M(r)$ [соответственно $T(r)$] принадлежит к *классу расходимости*, $n(r)$ — напротив к *классу сходимости* минимального типа порядка $q+1$.

§ 4. Жанр мероморфной функции.

187. Вернемся теперь к общей теории мероморфных функций конечного порядка и рассмотрим функцию $w(z)$, для которой интеграл

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\,dr \tag{21}$$

сходится, причем q — целое число $\geqslant 0$. Тогда, по теореме § 2, п. 179 $w(z)$ можно представить в нормальной форме (8). В силу сходимости интеграла (21) ряды

$$\sum \left|\frac{1}{a_\nu}\right|^{k+1} \quad \text{и} \quad \sum \left|\frac{1}{b_\nu}\right|^{k+1},$$

образованные с помощью нулей a_ν и полюсов b_ν функции $w(z)$, для $k = q$ оба сходятся. Обозначим через $k = k_1 \leqslant q$ и $k = k_2 \leqslant q$ *наименьшие целые числа*, для которых эти ряды еще сходятся. Тогда в каждом произведении справа в (8) можно заменить первичные множители $E\left(\frac{z}{a_\nu}, q\right)$ и $E\left(\frac{z}{b_\nu}, q\right)$ соответственно на $E\left(\frac{z}{a_\nu}, k_1\right)$ и $E\left(\frac{z}{b_\nu}, k_2\right)$, и исчезающие при этом множители соединить с множителем $e^{\sum c_\nu z^\nu}$. Таким образом, мы придем к сходящемуся представлению

$$w(z) = z^\alpha e^{P_h(z)} \frac{\prod E\left(\frac{z}{a_\nu}, k_1\right)}{\prod E\left(\frac{z}{b_\nu}, k_2\right)}, \tag{22}$$

где P_h — полином порядка $h \leqslant q$ и k_1 соответственно k_2 означают жанр канонических произведений.

Понятие жанра, которое до сих пор было определено только для канонического произведения, определяется теперь для произвольной мероморфной функции конечного порядка следующим образом:

Определение. *Жанром мероморфной функции конечного порядка называется наибольшее из чисел h, k_1 и k_2, входящих в нормальное представление* (22).

188. Если функция $w(z)$ порядка λ, то интеграл (21), наверное, сходится, если на целое число q наложить условие $q \leqslant \lambda < q+1$.

Тогда для $w(z)$ будем иметь представление (22), откуда видно, что жанр функции $w(z)$ не больше чем λ:

Жанр мероморфной функции самое большее равен ее порядку.

Пусть, наоборот, $w(z)$ жанра q; тогда в представлении (22) $\max(h, k_1, k_2) = q$. Для оценки порядка функции $w(z)$ заметим, что ее характеристическая функция самое большее равна сумме характеристических функций отдельных сомножителей, входящих в произведение (22). Если через π_1 и π_2 обозначить канонические произведения, стоящие в числителе и знаменателе, то

$$T(r, P z^{\alpha}) = O(\log r), \quad T(r, e^{P_h}) = O(r^h)$$

и

$$T\left(r, \frac{1}{\pi_2}\right) = T(r, \pi_2) + O(1);$$

следовательно,

$$T(r, w) < T(r, \pi_1) + T(r, \pi_2) + O(\log r + r^h). \tag{23}$$

Но в § 3 мы нашли, что порядок канонического произведения самое большее равен его жанру, увеличенному на 1. Следовательно, члены справа в (23) самое большее порядка $q+1$, откуда следует, что

Порядок мероморфной функции жанра q самое большее равен $q+1$.

Резюмируя, получаем следующий результат:

Жанр мероморфной функции дробного порядка λ равен наибольшему целому числу $q < \lambda$.

189. Если порядок λ — целое число, то жанр равен или λ или $\lambda - 1$. Чтобы подробнее изучить различие этих двух случаев, заметим, что каноническое произведение жанра q, для которого, согласно определению, интеграл

$$\int^{\infty} \frac{n(r)}{r^{q+2}} dr$$

сходится, удовлетворяет неравенству (11) § 3, откуда непосредственно видно, что оно самое большее *минимального типа* порядка $q+1$. Отсюда следует, учитывая соотношение (22), что *функция $w(z)$, принадлежащая к среднему или максимальному типу целого порядка λ, будет также и жанра λ.*

Как ведет себя в этом отношении функция *минимального типа* целого порядка λ? Здесь следует различать два случая в зависимости от того, принадлежит ли характеристика T к классу сходимости или к классу расходимости. В первом случае из теоремы о представлении (§ 2, п. 179) следует, что жанр равен $\lambda - 1$. Если, напротив, интеграл

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}} dr$$

расходится, то из общей теоремы § 2, п. 178 заключаем, что жанр равен λ, если только обе функции $N(r, 0)$ и $N(r, \infty)$ [соответственно $n(r, 0)$ и $n(r, \infty)$] не принадлежат к классу сходимости.

190. Резюмируя, получаем следующий результат:

Если характеристика $T(r)$ мероморфной функции $w(z)$ целого порядка $\lambda \geqslant 1$ удовлетворяет соотношению

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{T(r)}{r^{\lambda}} > 0,$$

то $w(z)$ жанра λ.

Если же

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda}} = 0,$$

то следует различать два случая в зависимости от того, будет ли интеграл

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\lambda+1}}\, dr \tag{24}$$

сходящимся или расходящимся.

В первом случае жанр равен $\lambda - 1$. Во втором случае $w(z)$ будет жанра $\lambda - 1$, если оба ряда

$$\sum \left(\frac{1}{r_\nu(0)}\right)^{\lambda} \quad \text{и} \quad \sum \left(\frac{1}{r_\nu(\infty)}\right)^{\lambda}$$

сходятся, и, напротив, жанра λ, если, по крайней мере, один из этих рядов расходится.

Следовательно, жанр однозначно определяется порядком, если только $T(r)$ не принадлежит *к классу расходимости минимального типа целого порядка* λ. В этом случае, действительно, могут представиться оба случая вышеуказанной альтернативы. Так, рассмотренное выше каноническое произведение $f(z; \lambda, \alpha)$ для $\lambda = q + 1$ имеет жанр $q = \lambda - 1$, если $1 < \alpha \leqslant 2$. Напротив, отношение

$$\frac{f(z; \lambda, \alpha)}{f(z+1; \lambda, \alpha)}$$

для $\lambda = q$, $0 < \alpha < 1$ принадлежит к минимальному типу порядка λ и имеет жанр λ.

Дальше мы увидим (гл. X), что случай, когда функция, принадлежащая к классу расходимости минимального типа целого порядка, имеет жанр меньший, чем порядок, следует рассматривать как исключение, которое имеет место только тогда, когда нули и полюсы распределены особенно скупо по сравнению с другими значениями.

191. В качестве последнего применения канонического представления мероморфной функции рассмотрим еще некоторые теоремы,

относящиеся к порядку величин $N(r, a)$, соответственно $n(r, a)$ или, что приводится к тому же самому, к предельному показателю ряда

$$\sum\left(\frac{1}{r_\nu(a)}\right)^\mu$$

для различных значений a. Из первой основной теоремы следует, что порядок указанных величин, соответственно предельный показатель, ни при каком значении a не может превосходить порядка λ заданной мероморфной функции. Чтобы получить обратную оценку, нужно снова учесть различие между случаем целого и дробного порядка.

Если λ лежит между целыми числами q и $q+1$, то напишем $w(z)$ в каноническом виде (22). Соотношение (23) показывает, что порядок λ самое большее равен большему из порядков канонических произведений π_1 и π_2. Порядок подобного произведения, в свою очередь, равен порядку соответствующего числа нулей, откуда заключаем, что, по крайней мере, одна из величин $n(r, 0)$, $n(r, \infty)$ имеет в точности порядок λ.

С помощью линейного преобразования, которое не меняет порядка λ, особые значения 0 и ∞ могут быть заменены любыми двумя значениями, и, таким образом, мы приходим к следующему результату:

Для мероморфной функции дробного порядка λ величина $N(r, a)$, соответственно $n(r, a)$, также порядка λ для всех значений a за исключением быть может одного.

192. Предыдущие результаты теряют свою силу, если λ целое число $\geqslant 1$. Для такого порядка уже может встретиться повышение класса или типа канонического произведения по сравнению с плотностью его нулей. Но прежде всего нужно заметить, что порядки обоих канонических произведений в (22) могут оказаться меньше, чем λ, или даже оба эти произведения могут отсутствовать. Роль главного члена справа в (22) в этих случаях перейдет к стоящему впереди показательному множителю. Этот множитель среднего типа порядка λ. Следовательно, мероморфные функции среднего типа целого порядка могут иметь два исключительных значения, для которых порядок величины $N(r, a)$, соответственно $n(r, a)$, меньше, чем λ.

В случае максимального типа целого порядка также может иметь место понижение *типа* для двух различных исключительных значений. Например, это имеет место для канонического произведения $f(z; \lambda, \alpha)$, когда $\lambda = q$, $-1 < \alpha < 0$. В самом деле, для этого произведения $n(r, 0)$ минимального типа, в то время как $n(r, \infty)$ тождественно равно нулю. Если функция минимального типа целого порядка, то может понизиться *класс* величины $n(r, a)$ для *двух* значений a. Так, упомянутое каноническое произведение для $\lambda = q+1$, $-2 \leqslant \alpha < -1$ принадлежит к классу расходимости

минимального типа порядка λ, в то время как $n(r, \infty) \equiv 0$, а $n(r, 0)$ принадлежит к классу сходимости того же порядка.

Что, с другой стороны, для целых порядков число исключительных значений предыдущего вида не может превосходить двух, составляет основное содержание теоремы Пикара-Бореля (гл. X, § 1), на которую при различных обстоятельствах указывалось еще раньше.

X. ВТОРАЯ ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Вводные замечания.

193. После того как с помощью первой основной теоремы мы овладели важным свойством симметрии мероморфной для $|z| < R \leqslant \infty$ функции, которое выражается в инвариантности суммы $m(r, a) + N(r, a)$, мы в качестве основной цели поставили более подробное исследование относительной величины обеих составляющих $m(r, a)$ и $N(r, a)$. Отдельные результаты в этом направлении получены уже в предыдущем:

1) Теорема Пикара показывает, что для мероморфной во всей конечной плоскости функции, отличной от постоянной, величина $N(r, a)$ исчезает самое большее для двух значений.

2) Для мероморфных функций конечного дробного порядка существует не более одного пикаровского исключительного значения и имеют место более сильные теоремы гл. VIII, § 4.

3) Из теорем о среднем значении гл. VI, § 3 и 4 следует, что вообще, т. е. для подавляющего числа значений a, величина $N(r, a)$ велика по сравнению с функцией $m(r, a)$.

194. В этой главе мы выведем общее соотношение, которое я в виду его большого значения назвал второй основной теоремой теории мероморфных функций[1]). Эта теорема, ведущая к далеко идущим следствиям в теории распределения значений мероморфной функции, лежит довольно глубоко, и вычисления, связанные с известными на сегодняшний день ее доказательствами, не легко обозримы. В интересах наглядности и более легкого понимания предпошлем этой теореме несколько предварительных замечаний.

Вернемся к примеру целой функции

$$w(z) = \int_0^z e^{-t^p}\, dt \qquad (p \geqslant 1), \tag{1}$$

рассмотренной в гл. VI, § 2. Эта функция в каждом угле $w_\nu\left(\left|\arg z - \frac{\nu\pi}{p}\right| < \frac{\pi}{2p};\ \nu = 0, 1, \ldots, 2p-1\right)$ имеет вполне опре-

[1]) См. R. Nevanlinna [4].

деленное *асимптотическое* или *целевое значение*, которое равно ∞ для p нечетных значений ν и равно

$$a_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{p}} \int_0^\infty e^{-t^p}\, dt = e^{\frac{2\nu\pi i}{p}} \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

в углах $W_{2\nu}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, p-1$).

Далее мы видели, что там, где интеграл (1) неограниченно возрастает, его производная также неограниченно возрастает, притом со скоростью, приближенно такой же, как у функции $w(z)$. Отсюда следует, что каждый угол $W_{2\nu-1}$ сообщает величинам $m(r, w)$ и $m(r, w')$, измеряющим среднюю сходимость функций w и w' к бесконечности, примерно равные значения. Напротив, углы $W_{2\nu}$ с точки зрения возрастаиия функций w и w' имеют несущественное значение, так как эти функции в указанных углах ограничены. Из всего этого следует, что функции $m(r, w)$ и $m(r, w')$ одного и того же порядка, который равен (ср. п. 135)

$$m(r, w) \sim m(r, w') \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

В углах $W_{2\nu}$, в которых $w(z)$ имеет конечные асимптотические значения a_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, p-1$), производиая $w'(z)$ стремится к нулю. Но снова скорость сходимости в обоих случаях одна и та же: там, где $w(z)$ мало отклоняется от значения a_ν, там $w'(z)$ отличается от нуля на величину приближенно того же порядка. Следовательно, угол $W_{2\nu}$ сообщает величинам $m\left(r, \frac{1}{w-a_\nu}\right)$ и $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ примерно равные значения, для которых мы нашли асимптотическое значение $\frac{r^p}{p\pi}$. Это составляет в основном полное анаачение величины $m\left(r, \frac{1}{w-a_\nu}\right)$, так как другие углы W_μ ($\mu \neq 2\nu$), где $w(z)$ стремится к другим асимптотическим значеииям, мало добавляют к этому среднему значению.

Следовательно,

$$m\left(r, \frac{1}{w-a_\nu}\right) \sim \frac{r^p}{p\pi},$$

в то время как величина $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$, которая от всех углов $W_{2\nu}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, p-1$) получает равные значения, суммируется к

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \sim \sum_0^{p-1} m\left(r, \frac{1}{m-a_\nu}\right) \sim \frac{r^p}{\pi}.$$

195. То, что мы заметили на частном примере целой функции (1), с некоторыми изменениями имеет место в общем случае.

Пусть теперь $w(z)$ — произвольная мероморфная функция. Представляется справедливым, что вообще на дугах окружности $|z|=r$, на которых $|w(z)|$ имеет большое значение, величина $|w'(z)|$ также имеет большое значение, так что функции $m(r, w)$ и $m(r, w')$, характеризующие среднее стремление функций w и w' к бесконечности, асимптотически равны друг другу [1]):

$$m(r, w) \sim m(r, w').$$

Представим себе теперь, что, как это имело место в предыдущем примере, функция $w(z)$ на окружности $|z|=r$ особенно сильно приближается к определенным *конечным* значениям a_ν $(\nu=1, \ldots, p)$ и что, в согласии с вышенайденным, на тех дугах B_ν, где разность $w(z)-a_\nu$ очень мала, значение производной $w'(z)$ того же порядка малости, так что взятые по этим дугам интегралы от $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\nu}\right|$ и $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w'}\right|$ приближенно равны друг другу. Очевидно, что различные дуги B_ν $(\nu=1, \ldots, p)$ лежат на окружности $|z|=r$ изолированно одна от другой. Следовательно, если интегрировать по всей окружности $|z|=r$, то среднее значение от $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w'}\right|$ приближенно будет равно сумме средних значений от $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\nu}\right|$ $(\nu=1, \ldots, p)$, или

$$m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w-a_\nu}\right).$$

Введение производной $w'(z)$ имеет, следовательно, тот смысл, что все точки a, для которых функция приближения $m(r, a)$ функции $w(z)$ получает существенное значение, как бы характеризуются только *двумя* значениями производной $w'(z)$, именно 0 и ∞, причем $m(r, w)$ соответствует $m(r, w')$, в то время как функции $m(r, a)$, для конечных значений a, в сумме соответствуют функции $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$. [2])

196. Отсюда получается соотношение между рассмотренными функциями m функции $w(z)$. В самом деле, на основании первой

[1]) Автору не известен ни один пример трансцендентной функции, где это асимптотическое равенство не выполнялось бы строго.

[2]) Идея ввести производную в качестве функции сравнения принадлежит Borel'ю [1]. Эта идея является основной в его доказательстве того обобщения теоремы Пикара, которое известно под названием „теоремы Пикара-Бореля". Значение производной для собирания исключительных значений особенно ясно показал E. Ullrich [1] в своем доказательстве второй основной теоремы.

основной теоремы

$$m(r, w') + N(r, w') \sim m\left(r, \frac{1}{w'}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right);$$

но

$$m(r, w') \sim m(r, w), \quad m\left(r, \frac{1}{w'}\right) \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right),$$

следовательно,

$$m(r, w) + N(r, w') \sim \sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w - a_\nu}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right).$$

Из соображений, которые станут ясными дальше, преобразуем полученное соотношение, прибавляя к обеим его частям величину $2N(r, w) + m(r, w)$. Тогда найдем, что

$$2m(r, w) + 2N(r, w) \sim m(r, w) + \sum_1^p m\left(\frac{1}{w - a_\nu}\right) + N_1(r),$$

где

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + [2N(r, w) - N(r, w')] \tag{2}$$

представляет величину, имеющую простое значение, которое будет указано ниже.

В предыдущем соотношении можно еще сумму $m(r, w) + N(r, w)$ заменить характеристической функцией $T(r)$; окончательно, таким образом, мы получим соотношение

$$2T(r) \sim \sum_1^{p+1} m(r, a_\nu) + N_1(r), \tag{3}$$

где $a_{p+1} = \infty$ и $N_1(r)$ имеет значение (2).

Этот результат существенно покоится на предположении, что значения $|w|$ и $|w'|$ мало отличаются друг от друга, если они велики и, что то же самое, имеет место для $\left|\frac{1}{w - a}\right|$ и $\left|\frac{1}{w'}\right|$, если w мало отклоняется от конечного значения a. Хотя и весьма вероятно, что это справедливо, мы все же в состоянии доказать, так сказать, только половину этого предположения. На основании одной общей теоремы о функции $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$ логарифмической производной $\frac{w'}{w}$, которая подробнее будет нас еще занимать в дальнейшем, следует, что там, где модуль $|w(z)|$ большой, $|w'(z)|$ имеет *несущественно большее значение* и далее, что на дугах окружности $|z| = r$, где $w(z)$ в среднем мало отклоняется от значения $a \neq \infty$, производная $w'(z)$ в среднем тоже *не больше* отклоняется от нуля.

Таким образом, вместо соответствующего высказанному предположению асимптотического *равенства* известно только *неравенство*. А потому, соотношение (3), записанное выше в виде асимптотического равенства, переходит в асимптотическое неравенство: левая часть с точностью до несущественных добавочных членов не меньше, чем сумма, стоящая в правой части. *Это и есть вторая основная теорема.*

197. Мы покидаем теперь область наводящих рассмотрений и переходим к строгому доказательству указанных теорем. Чтобы понять значение отдельных дедукций нижеследующего доказательства, рекомендуется сравнивать их с аналогичными шагами в предыдущем эскизе доказательства, который будет нам служить наглядным его прообразом.

Пусть, следовательно, $w(z) = c_0 + c_k z^k + \ldots$ $(c_k \neq 0)$ — мероморфная для $|z| < R \leqslant \infty$ функция и $a_1, \ldots, a_p$ — система $p \geqslant 2$ различных конечных комплексных чисел.

Сравним сперва между собой функции $m(r, w)$ и $m(r, w')$. С помощью элементарного соотношения (3), гл. VI, § 2 непосредственно убеждаемся, что

$$m(r, w') = m\left(r, w\frac{w'}{w}\right) \leqslant m(r, w) + m\left(r, \frac{w'}{w}\right). \tag{4}$$

Для оценки среднего значения $m\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ рассмотрим сумм

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{p} \frac{1}{w(z) - a_\nu}.$$

Очевидно,

$$m(r, f) = m\left(r, fw'\frac{1}{w'}\right) \leqslant m\left(r, \frac{1}{w'}\right) + m\left(r, \sum_{1}^{p} \frac{w'}{w - a_\nu}\right). \tag{5}$$

С другой стороны, для заданного значения μ $(\mu = 1, \ldots, p)$

$$f = \frac{1}{w - a_\mu}\left(1 + \sum_{\nu \neq \mu} \frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}\right).$$

Если $\delta = \min(|a_h - a_k|, 1)$ $(h \neq k)$, то в каждой точке z, где

$$|w(z) - a_\mu| < \frac{\delta}{2p}\left(\leqslant \frac{1}{2p}\right), \tag{6}$$

для $\nu \neq \mu$ имеем

$$|w - a_\nu| \geqslant |a_\mu - a_\nu| - |w - a_\mu| > \delta - \frac{\delta}{2p} \geqslant \frac{3\delta}{4},$$

следовательно,

$$\sum_{\nu \neq \mu} \left|\frac{w - a_\mu}{w - a_\nu}\right| < p\frac{2}{3p} = \frac{2}{3},$$

так что

$$\left|1+\sum_{\nu\neq\mu}\frac{w-a_\mu}{w-a_\nu}\right|>\frac{1}{3}.$$

Отсюда следует, что

$$\overset{+}{\log}|f(z)|>\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\mu}\right|-\log 3$$

в каждой точке z, в которой выполняется условие (6).

Дуги окружности $|z|=r$, определенные соотношением (6), не имеют общих точек для различных значений μ, поэтому

$$m(r,f)\geqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=1}^{p}\int\limits_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}}\overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi>$$

$$>\frac{1}{2\pi}\sum_{1}^{p}\int\limits_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w(re^{i\varphi})-a_\mu}\right|d\varphi-\log 3.$$

Далее

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w-a_\mu|<\frac{\delta}{2p}}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\mu}\right|d\varphi=m(r,a_\mu)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|w-a_\mu|\geqslant\frac{\delta}{2p}}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\mu}\right|d\varphi\geqslant$$

$$\geqslant m(r,a_\mu)-\log\frac{2p}{\delta}$$

и, наконец,

$$m(r,f)>\sum_{1}^{p}m(r,a_\mu)-p\log\frac{2p}{\delta}-\log 3,$$

или, в соединении с (5)

$$m\left(r,\frac{1}{w'}\right)>\sum_{1}^{p}m(r,a_\nu)-m\left(r,\sum_{1}^{p}\frac{w'}{w-a_\nu}\right)-p\log\frac{2p}{\delta}-\log 3. \quad (7)$$

Если к обеим частям соотношений (4) и (7) прибавить соответственно величины $N(r,w')$ и $N\left(r,\frac{1}{w'}\right)$ и применить первую основную теорему в форме

$$T(r,w')=T\left(r,\frac{1}{w'}\right)+\log|kc_k|,$$

то получим следующий результат, который мы в силу его важности сформулируем в виде отдельной леммы: [1])

[1]) Значение этого общего двойного неравенства для вопроса о распределении значений производной мероморфной функции было отмечено Ullrich'ом [1]. См. также E. Collingwood [1].

Характеристика $T(r, w')$ *производной мероморфной функции* $w(z)$ *лежит между величинами*

$$m(r, w) + N(r, w') + m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$$

и

$$\sum_1^p m\left(r, \frac{1}{w-a_\nu}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - m\left(r, \sum_1^p \frac{w'}{w-a_\nu}\right) - p \log \frac{2p}{\delta} - \log \frac{3}{k|c_k|}.$$

Если опустить выражение $T(r, w')$ и ввести выражение (2), то получим следующую *предварительную формулировку второй основной теоремы*:

Пусть

$$w(z) = c_0 + c_k z^k + \ldots \qquad (c_k \neq 0)$$

мероморфная для $|z| < R \leqslant \infty$ *функция. Если* $a_1, \ldots, a_p$ $(p \geqslant 2)$ — *различные конечные комплексные числа, то*

$$\sum_1^{p+1} m(r, a_\nu) < 2T(r, w) - N_1(r) + S(r). \tag{8}$$

Здесь $N_1(r)$ *равно выражению* (2), $a_{p+1} = \infty$ *и*

$$S(r) < m\left(r, \frac{w'}{w}\right) + m\left(r, \sum_1^p \frac{w'}{w-a_\nu}\right) + p \log \frac{2p}{\delta} + \log \frac{3}{k|c_k|}, \tag{8'}$$

где δ *означает наименьшее из чисел* 1 *и* $|a_h - a_k|$ $(h \neq k)$.

198. Рассмотрим тотчас же подробнее члены правой части этого важного соотношения. Выражение $N_1(r)$ состоит из двух членов, из которых $N\left(r, \frac{1}{w'}\right)$ — функция числа нулей производной w' — получает приращения в окрестности тех точек z, в которых $w(z)$ *многократно* принимает какое-нибудь конечное значение a; при этом каждая k-кратная точка является $(k-1)$-кратным нулем производной w'. Точно такое же значение имеет второй член $[2N(r, w) - N(r, w')]$ по отношению к кратным полюсам функции $w(z)$. В самом деле, k-кратный полюс функции w является $(k+1)$-кратным полюсом для w', так что в предыдущий член k-кратный полюс функции входит с кратностью $k-1$.

Выражение $N_1(r)$ *измеряет число кратных точек функции* $w(z)$. *Его можно записать в виде*

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t) - n_1(0)}{t}\, dt + n_1(0) \log r, \tag{9}$$

где $n_1(r)$ *указывает число кратных точек функции* $w(z)$, *лежащих в круге* $|z| \leqslant r$, *причем каждая* k-*кратная точка считается* $k-1$ *раз.*

Что касается последнего члена $S(r)$ в (8), то он играет роль несущественного добавочного члена. Однако, в случае $R < \infty$ эта „несущественность" имеет место только тогда, когда характеристика $T(r)$ при $r \to R$ достаточно быстро стремится к бесконечности. Мы дальше увидим, что как только порядок этого роста станет больше известной границы, то $S(r)$ будет иметь порядок $\log T(r)$. В случае $R = \infty$, когда, следовательно, $w(z)$ мероморфна во всей конечной плоскости $z \neq \infty$, это имеет место без всяких дополнительных условий.

§ 2. Фундаментальное соотношение.

199. Требующаяся еще для окончания доказательства второй основной теоремы лемма о логарифмической производной была сперва доказана автором с помощью формулы Пуассона-Иенсена [1]. Теперь известны различные ее доказательства. Здесь мы выведем эту лемму как следствие из общего соотношения, вытекающего из принципа Ф. Неванлинны [2]. Формулировка леммы, приведенная в тексте, тесно примыкает к изложению, данному позднее Альфорсом [3].

Как в гл. VI, § 4, зададим на плоскости w неотрицательное распределение μ единичной массы и образуем выражение

$$\Omega(r) = \int_{(a)} n(r, a)\, d\mu,$$

где $n(r, a)$, как обычно, означает число a-точек функции $w(z)$, мероморфной для $|z| < R \leqslant \infty$, лежащих в круге $|z| \leqslant r < R$. Если каждый элемент неоднократно упоминавшейся римановой поверхности F_r, на которую функция $w(z)$ отображает круг $|z| < r$, покрыть соответствующей ему в плоскости w массой $d\mu$, то $\Omega(r)$ будет означать всю массу, расположенную на поверхности F_r. В гл. VI, § 4 мы видели, что при любом выборе распределения μ интеграл

$$Q(r) = \int_0^r \frac{\Omega(t)}{t}\, dt$$

несущественно больше, чем характеристика $T(r)$ функции $w(z)$, если только порождаемый этим распределением сферический потенциал

$$P(w) = \int_{(a)} \log \frac{1}{k(w, a)}\, d\mu$$

---

[1]) R. Nevanlinna [4], [5].
[2]) F. Nevanlinna [4].
[3]) L. Ahlfors [7].

[$k(w, a)$ означает длину хорды, соединяющей точки w и a] имеет в точке $w = w_0 = w(0)$ *конечное* значение. Тогда [гл. VI, § 4, (19)]

$$Q(r) \leqslant T(r) + P(w_0), \tag{10}$$

где за $T(r)$ следует взять нормальную сферическую форму характеристики.

При особом выборе распределения μ это соотношение переходит даже в асимптотическое *равенство*. Последнее имеет место не только тогда, когда за $d\mu$ берется элемент сферической поверхности (тогда Q в точности равно T), но, согласно гл. VI, § 4, и тогда, когда единичная масса распределяется на множестве (a) положительной гармонической меры так, что соответствующий логарифмический потенциал имеет на (a) возможно малый максимум (распределение Робэна).

200. С помощью метода Ф. Неванлинны и Л. Альфорса можно получить для $\mathfrak{Q}(r)$ *оценку снизу*. Однако, при этом требуется, чтобы распределение μ удовлетворяло известным дополнительным условиям непрерывности. Мы предполагаем:

1) Распределение μ как функция множеств абсолютно непрерывно. Тогда оно имеет почти всюду на плоскости a неотрицательную конечную *плотность* $\rho(a)$ и масса $\mu(e)$, расположенная на (измеримом) множестве e, равна интегралу Лебега

$$\mu(e) = \int_e \rho(a)\, d\sigma_a,$$

где $d\sigma_a$ означает элемент площади. В частности, взятый по всей плоскости интеграл

$$\int \rho(a)\, d\sigma_a = 1.$$

Масса $\mathfrak{Q}(r)$, расположенная на поверхности F_r, может тогда быть записана в виде

$$\mathfrak{Q}(r) = \int n(r, a)\, \rho(a)\, d\sigma_a = \int_{|z| \leqslant r} |w'(z)|^2 \rho(w(z))\, d\sigma_z,$$

где $d\sigma_z$ означает элемент площади $r\, dr\, d\varphi$ в точке $z = re^{i\varphi}$.

2) Функция $\rho(a)$ настолько правильна, что производная $\mathfrak{Q}'(r)$ конечна и равна

$$\mathfrak{Q}'(r) = r \int_0^{2\pi} |w'(re^{i\varphi})|^2 \rho(w(re^{i\varphi}))\, d\varphi. \tag{11}$$

201. При этих еще весьма общих предположениях о распределении μ имеет место

Лемма 1. *Для каждого* $0 \leqslant r < R$ *выполняются условия*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left(|w'(re^{i\varphi})|^2 \rho(w)\right) d\varphi \leqslant \log \frac{\Omega'(r)}{2\pi r} \qquad (12)$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}\left(|w'(re^{i\varphi})|^2 \rho(w)\right) d\varphi \leqslant \overset{+}{\log} \frac{\Omega'(r)}{2\pi r} + \log 2. \qquad (12')$$

В самом деле, первое соотношение (12) следует из тождества (11) на основании известной элементарной теоремы, согласно которой среднее значение логарифма неотрицательной функции $f(x)$ самое большее равно логарифму ее среднего значения:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \log f(x)\,dx \leqslant \log\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right) \qquad (\alpha<\beta) \qquad (13)$$

(теорема о среднем арифметическом и среднем геометрическом).[1])

Второе соотношение следует из неравенства

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \overset{+}{\log} f(x)\,dx \leqslant \overset{+}{\log}\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right) + \log 2,$$

которое является простым следствием из (13). В самом деле, если положить $f_1 = e^{\overset{+}{\log} f}$, то $f_1 = f$ для $f \geqslant 1$ и $f_1 = 1$ для $f < 1$; следовательно, во всяком случае $f_1 < f + 1$. Применение (13) к функции f_1 дает тогда

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \overset{+}{\log} f(x)\,dx \leqslant \log\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f_1(x)\,dx\right) \leqslant \log\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f\,dx + 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \overset{+}{\log}\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right) + \log 2.$$

---

[1]) Доказывается это, например, так: пусть стоящее справа среднее значение функции $f(x)$ равно m; если написать $f(x) = m + \varphi(x)$, то интеграл от $\varphi(x)$, взятый от $x = \alpha$ до $x = \beta$, будет равен нулю. В силу соотношения $\log(1+t) \leqslant t$, которое справедливо для действительных t и переходит в равенство только для $t = 0$, имеем

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \log f(x)\,dx = \log m + \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \log\left(1 + \frac{\varphi}{m}\right) dx \leqslant$$

$$\leqslant \log m + \frac{1}{(\beta-\alpha)\,m}\int_\alpha^\beta \varphi\,dx = \log m.$$

Равенство здесь имеет место только тогда, когда f (почти всюду) равна постоянной.

Лемма 2. *Если $w(z)$ мероморфна для $z \neq \infty$, то для $\lambda \geqslant 0$*

$$\log \frac{Q'(r)}{2\pi r} < 4 \log Q(r) + 3\lambda \log r, \tag{14}$$

исключая самое большее множество Δ_r значений $r\,(0 < r_0 < r)$, на котором вариации функции $\frac{r^\lambda}{\lambda}$

$$\int_{\Delta_r} d\left(\frac{r^\lambda}{\lambda}\right) = \int_{\Delta_r} r^{\lambda-1}\, dr$$

ограничена.

В самом деле, пусть $r_0 > 0$ и Δ_r' — множество значений $r > r_0$, для которых $Q(r) \geqslant r^\lambda (Q(r))^2$. Тогда

$$\int_{\Delta_r'} d\left(\frac{r^\lambda}{\lambda}\right) = \int_{\Delta_r'} r^{\lambda-1}\, dr = \int_{\Delta_r'} \frac{r^\lambda}{Q}\, dQ \leqslant \int_{\Delta_r'} \frac{dQ}{Q^2} \leqslant \frac{1}{Q(r_0)}.$$

Точно таким же образом найдем, что на множестве значений Δ''_r, на котором $Q'(r) \geqslant r^{\lambda-1} (Q(r))^2$,

$$\int_{\Delta''_r} d\left(\frac{r^\lambda}{\lambda}\right) = \int_{\Delta''_r} \frac{r^{\lambda-1}\, dQ}{Q'(r)} \leqslant \int_{\Delta''_r} \frac{dQ}{Q^2} \leqslant \frac{1}{Q(r_0)}.$$

Следовательно, вариация функции $\frac{r^\lambda}{\lambda}$ на множестве $\Delta_r = \Delta'_r + \Delta''_r$ ограничена, и для каждого r, лежащего вне Δ_r, $\frac{Q'}{r} < r^{\lambda-2} Q^2 < r^{3\lambda-2} Q^4$, откуда следует утверждение *).

Лемма 3. *Если $w(z)$ мероморфна в единичном круге $|z| < 1$, то для $\lambda > 0$*

$$\log Q'(r) < 7 \overset{+}{\log} Q(r) + (2\lambda + 2) \log \frac{1}{1-r} + 2 \overset{+}{\log} \log \frac{1}{1-r} + c(\lambda), \tag{15}$$

исключая самое большее множество Δ_r значений $r\ (0 < r < 1)$, на котором вариация функции $\frac{1}{\lambda (1-r)^\lambda}$

$$\int_{\Delta_r} d\left(\frac{(1-r)^{-\lambda}}{\lambda}\right) = \int_{\Delta_r} \frac{dr}{(1-r)^{\lambda+1}}$$

ограничена [1]). *$c(\lambda)$ — число, зависящее только от λ.*

---

*) Собственно следует для $2\pi r_0^2 \geqslant 1$, однако, для дальнейшего это несущественно.

Если $\lambda = 0$, то $\frac{r^\lambda}{\lambda}$ нужно заменить на $\log r$.

[1]) Для большинства приложений достаточна была бы более грубая и легче доказываемая оценка.

Пусть Δ_r' множество значений $r\,(0<r<1)$, для которых

$$Q\geqslant\frac{Q\,(1+(\log Q)^2)}{(1-r)^{\lambda+1}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Delta_r'}\frac{1}{\lambda}\,d\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}=\int\limits_{\Delta_r'}\frac{dr}{dQ}\,\frac{dQ}{(1-r)^{\lambda+1}}\leqslant\int\limits_{\Delta_r'}\frac{d\log Q}{1+(\log Q)^2}\leqslant\pi.$$

Аналогично для множества значений $\Delta_r''\,(0<r<1)$, где

$$Q'\geqslant\frac{Q\,(1+(\log Q)^2)}{(1-r)^{\lambda+1}},$$

получается

$$\int\limits_{\Delta_r''}\frac{dr}{(1-r)^{\lambda+1}}\leqslant\pi.$$

На множестве $\Delta_r=\Delta_r'+\Delta_r''$ вариация функции $\dfrac{(1-r)^{-\lambda}}{\lambda}$ ограничена ($\leqslant 2\pi$). Для каждого значения r, лежащего вне Δ_r, справедливо соотношение (15), как это выводится с помощью формул (3) (гл. VI, § 2) и очевидного соотношения $\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}t\leqslant\overset{+}{\log}t$.

202. Если объединить доказанные только что леммы с найденной еще раньше оценкой (10), то придем к искомому соотношению:

Фундаментальное соотношение. *Пусть $w(z)$ — функция мероморфная для $|z|<R\leqslant\infty$, и μ — заданное на плоскости w неотрицательное распределение единичной массы с плотностью $\rho(w)$, удовлетворяющей условиям* 1 *и* 2, *п.* 200. *Тогда для $0\leqslant r<R$ имеют место соотношения*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\Big(|w'(re^{i\varphi})|^2\,\rho\,(w\,(re^{i\varphi}))\Big)\,d\varphi\leqslant\log\psi(r),\tag{16}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overset{+}{\log}\Big(|w'(re^{i\varphi})|^2\,\rho\,(w\,(re^{i\varphi}))\Big)\,d\varphi\leqslant\overset{+}{\log}\psi(r)+\log 2,\tag{16'}$$

где

$$\psi(r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|w'(re^{i\varphi})|^2\,\rho\,(w)\,d\varphi.\tag{16''}$$

Если предположить, что порождаемый распределением μ сферический потенциал

$$P(w)=\int\limits_{(a)}\log\frac{1}{k\,(w,\,a)}\,d\mu\,(a)$$

для $w=w(0)$ конечен, то $\psi(r)$ удовлетворяет следующим условиям:

В случае $R=\infty$ *для* $\lambda \geqslant 0$

$$\overset{+}{\log}\psi(r) < 4\overset{+}{\log}T(r)+3\lambda\overset{+}{\log}r+O(1), \qquad (17)$$

исключая самое большее множество Δ_r *значений* r, *на котором вариация функции* $\frac{r^\lambda}{\lambda}$ *ограничена.*

В случае $R=1$ *для* $\lambda \geqslant 0$

$$\overset{+}{\log}\psi(r) < 7\overset{+}{\log}T(r)+(2\lambda+2)\log\frac{1}{1-r}+$$
$$+2\overset{+}{\log}\log\frac{1}{1-r}+O(1), \qquad (17')$$

исключая самое большее множество Δ_r *значений* r, *на котором вариация функции* $\frac{1}{\lambda(1-r)^\lambda}$ *ограничена.*

Фундаментальное соотношение (16) содержит ключ ко второй основной теореме. Из него следует не только имевшаяся в виду лемма относительно логарифмической производной мероморфной функции, но, как показал Ф. Неванлинна, оно может быть также применено для построения доказательства второй основной теоремы, совершенно отличного от соображений первого параграфа.

§ 3. Лемма о логарифмической производной мероморфной функции. Вторая основная теорема.

203. Чтобы притти к лемме о логарифмической производной, выберем распределение μ в фундаментальном соотношении так, чтобы его плотность определялась формулой

$$\rho(a)=\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{|a|^2(1+(\log|a|)^2)}.$$

Этот выбор допустим, так как вся масса удовлетворяет тогда условию

$$\int d\mu=\int\rho(a)\,d\sigma_a=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{d|a|}{|a|(1+(\log|a|)^2)}=1.$$

Сперва нужно исследовать поведение соответствующего сферического потенциала

$$P(w)=\int\log\frac{1}{k(w,a)}\,d\mu,$$

который входит в остаточный член фундаментального соотношения [1]).

[1]) Для наших целей достаточно было бы определить, будет ли $P(w)$ конечным или бесконечным. Для полноты мы исследуем поведение P более подробно.

Имеем

$$P(w)=\log\sqrt{1+|w|^2}+U(w),$$

где

$$U(w)=\int\log\frac{\sqrt{1+|a|^2}}{|w-a|}\,d\mu. \tag{18}$$

Для оценки последней величины проще всего исходить из того, что она вместе со своей нормальной производной сохраняет, очевидно, на каждой окружности $|w|=r$ постоянное значение. Следовательно, для $w=re^{i\vartheta}$

$$2\pi r\frac{\partial U}{\partial r}=r\int_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial r}\,d\vartheta.$$

Отсюда на основании теоремы Гаусса следует, что

$$|w|\frac{\partial U}{\partial|w|}=-\int_{|a|<|w|}d\mu.$$

Это же равенство можно доказать прямо, если подставить под знак интеграла значение $\frac{\partial U}{\partial r}$, вычисленное из (18), и, воспользовавшись тождеством $\frac{\partial\log|w-a|}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial\arg(w-a)}{\partial\vartheta}$, проинтегрировать по ϑ.

Если в последнее равенство подставить значение $d\mu$, то после интегрирования получится

$$U(w)=\frac{1}{\pi}\Big(\log\sqrt{1+(\log|w|)^2}-$$
$$-\log|w|\operatorname{arctg}\log|w|-\frac{\pi}{2}\log|w|\Big)+U(1),$$

где $U(1)$ конечно [1]).

Таким образом потенциал $P(w)$ конечен для всех значений w, исключая $w=0$ и $w=\infty$.

204. Теперь мы уже можем перейти к собственно нашей задаче оценки функции $m\left(r,\frac{w'}{w}\right)$. Сперва имеем

$$m\left(r,\frac{w'}{w}\right)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{w'(re^{i\varphi})}{w(re^{i\varphi})}\right|^2 d\varphi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\frac{|w'|^2}{|w|^2[1+(\log|w|)^2]}\,d\varphi+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\log[1+(\log|w|)^2]\,d\varphi$$

[1]) $U(1)$ равно

$$\int\log\frac{\sqrt{1+|a|^2}}{|a-1|}\,d\mu=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\log\sqrt{1+e^{-t^2}}\,\frac{dt}{1+t^2}.$$

В силу фундаментального соотношения *) первый член справа не больше, чем $\frac{1}{2}\overset{+}{\log}\psi(r)+\log 2\pi$, где ψ обладает указанными в фундаментальной теореме свойствами. Верхние границы (17) и (17′) конечны, если только $w(0)\neq 0,\ \infty$, ибо тогда значение $P(w_0)$ конечно.

С помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом легко оценивается и второй член, стоящий справа:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{1+(\log|w|)^2}\,d\varphi\leqslant\log\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(\log|w|)^2}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\log\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+|\log|w||)\,d\varphi=\log\left(m(r,\ w)+m\left(r,\ \frac{1}{w}\right)+1\right)\leqslant$$

$$\leqslant\log\left(2T(r,\ w)+\log\left|\frac{e}{w_0}\right|\right)=\overset{+}{\log}\,T(r)+O(1).$$

Если $w(0)=0$ или ∞, то умножаем w на такую степень z^α, чтобы произведение $w_1=wz^\alpha\neq 0,\ \infty$ для $z=0$. Предыдущие выкладки применимы тогда к функции w_1, и так как функции $m\left(r,\ \frac{w'}{w}\right)$ и $m\left(r,\ \frac{w_1'}{w_1}\right)$, так же как и характеристики функций w и w_1 отличаются друг от друга самое большее на величину порядка $O(\log r)$, то заключаем, что предыдущие оценки справедливы и в этом случае, если только к найденным оценкам прибавить член порядка $O(\log r)$.

Если подставить теперь оценки (17) и (17′) для $\psi(r)$, то получим следующую теорему:

Теорема о логарифмической производной. *Если $w(z)$ мероморфна для $|z|<R\leqslant\infty$, то для $R=\infty$*

$$m\left(r,\ \frac{w'}{w}\right)=O(\log rT(r)),\tag{19}$$

исключая самое большее множество Δ_r значений r, на котором вариация функции $\frac{r^\lambda}{\lambda}$ $(\lambda\geqslant 0)$ ограничена.

Для $R=1$

$$m\left(r,\ \frac{w'}{w}\right)=(\lambda+1)\log\frac{1}{1-r}+O\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right)+O(\log T(r)),\tag{19′}$$

*) Полагая $\rho(a)=\frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{a^2(1+(\log|a|)^2)}$.

исключая самое большее множество Δ_r *значений* r, *на котором вариация функции* $\frac{1}{\lambda(1-r)^\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$ *ограничена* [1]).

Из этой теоремы видно, что функция $m\left(r, \frac{w'}{w}\right)$ существенно более низкого порядка, чем характеристика функции $w(z)$. В случае функции мероморфной в единичном круге это в силу (19′) справедливо, однако, только тогда, когда характеристика растет не медленнее, чем $\log \frac{1}{1-r}$ $(\lambda = 0)$. Как выяснится из дальнейшего, это ограничение не является искусственным, связанным с примененным доказательством: мы увидим, что указанный порядок роста действительно является критическим для свойств распределения значений функции, мероморфной в единичном круге.

205. Соединяя предыдущую теорему с результатами § 1, мы придем, наконец, к нашей цели:

Вторая основная теорема. *Пусть* $w(z)$ — *функция, мероморфная для* $z|<R\leqslant\infty$ *и* $a_1, \ldots, a_q$ $(q \geqslant 3)$ — *различные конечные или бесконечные числа. При этих условиях для* $r<R$

$$\sum_1^q m(r, a_\nu) < 2T(r) - N_1(r) + S(r), \tag{II}$$

где

$$N_1(r) = \int_0^r \frac{n_1(t)}{t}\,dt + n_1(0)\log r \tag{20}$$

есть определенная на стр. 243 функция числа кратных точек функции $w(z)$, а *остаточный член* $S(r)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *Если* $R=\infty$, *то*

$$S(r) < O(\log rT(r)) \tag{21}$$

всюду за исключением, быть может, значений r, *принадлежащих к последовательности интервалов* Δ_r, *на которых вариация функции* $\frac{r^\lambda}{\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$ *ограничена.*

2) *Если* $R=1$, *то*

$$S(r) < (\lambda+1)\log\frac{1}{1-r} + O\left(\log\log\frac{1}{1-r}\right) + O(\log T(r)) \tag{22}$$

всюду за исключением, быть может, значений r, *принадлежащих к последовательности интервалов* Δ_r, *на которых вариация функции* $\frac{1}{\lambda(1-r)^\lambda}$ $(\lambda \geqslant 0)$ *ограничена.*

Прибавляя к обеим частям (II) сумму $\sum_1^q N(r, a_\nu)$ и учитывая первую основную теорему $m+N=T$, мы придем к другой форме второй основной теоремы, более удобной для многих применений.

[1]) См. R. Nevanlinna [4], H. Selberg [1], F. Nevanlinna [4].

Именно, вместо (II) мы получим

$$(q-2)\,T(r) < \sum_1^q N(r,\ a_\nu) - N_1(r) + S(r), \qquad (II')$$

где S обладает указанными выше свойствами 1 и 2.

206. В случае, когда выражение

$$\sum_1^q N(r,\ a_\nu) = N(r) \qquad (23)$$

имеет конечный порядок ($R=\infty$), предыдущий результат может быть существенно дополнен. В этом случае и величина $n = \frac{dN}{d\log r}$ имеет конечный порядок (ср. стр. 223), и, следовательно, существует такое число λ, что, начиная с некоторого значения $r = r_0$, имеем $n < r^{\lambda+1}$. Пусть теперь r' — точка одного из исключительных интервалов Δ_ν и r — правый конец этого интервала. Тогда, коль скоро $r' > r_0$,

$$N(r) - N(r') < \int_{r'}^{r} r^\lambda\, dr,$$

причем эта разность в силу свойств исключительных интервалов Δ_ν ограничена числом, не зависящим от r. Следовательно, в силу (II')

$$(q-2)\,T(r') \leqslant (q-2)\,T(r) < N(r) - N_1(r) + S(r) \leqslant N(r') - N_1(r') + S(r) + [N(r) - N(r')] = N(r') - N_1(r') + S(r) + O(1).$$

Но вне (открытых) интервалов Δ_ν величина $S(r) < O(\log rT(r)) = O(\log r)$. Если учесть, что вариация функции $\log r$ на интервалах Δ_ν ограничена ($\lambda = 0$) и что, следовательно, то же самое справедливо для функции $\log \frac{r}{r'}$, то убедимся в том, что соотношение (II') имеет место и для исключительных интервалов Δ_ν с $S(r) = O(\log r)$.

Если $R=\infty$ и выражение (23) *конечного порядка, то соотношения* (II) *и* (II') *имеют место для всех r без исключения, и следовательно,*

$$(q-2)\,T(r) < \sum_1^q N(r,\ a_\nu) - N_1(r) + C(\log r). \qquad (24)$$

Аналогично, если $R=1$ и сумма $N(r)$ при $r \to 1$ конечного порядка, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{\log N(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

конечен, то соотношения (II) и (II') имеют место для всех значений $r<1$ с $S = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$.

§ 4. Прямое доказательство второй основной теоремы с помощью фундаментального соотношения.

207. Как показал Ф. Неванлинна [2], фундаментальное соотношение § 2 может быть использовано для прямого доказательства второй основной теоремы, совершенно независимого от рассмотрений § 1 и § 3. К рассмотрению этого доказательства мы теперь и переходим [1]).

Чтобы получить основную теорему, Ф. Неванлинна полагает распределение μ в фундаментальном соотношении (16) § 2 равным *неевклидовой гиперболической площади плоскости* w *с выключенными точками* $a_1, \ldots, a_q (q \geqslant 3)$. Как было изложено в гл. I, § 2, мы приходим к гиперболической мере этой q-связной области F_q, отображая конформно ее универсальную поверхность наложения F_q^∞, принадлежащую в силу условия $q \geqslant 3$ к гиперболическому типу, на однолистный круг $|x| < 1$ (ср. гл. I, § 2). Это совершается с помощью линейно-полиморфной функции $x = x(w; a_1, \ldots, a_q)$, различные ветви которой связаны группой Σ линейных преобразований S, оставляющих инвариантным единичный круг K. Обратная функция $w = \varphi(x)$, производящая отображение $K \to F_q^\infty$, автоморфна относительно этой группы.

Если в круге K ввести неевклидово мероопределение Лобачевского-Пуанкаре, полагая длину $d\sigma$ элемента дуги dx равной

$$d\sigma = \frac{|dx|}{1 - |x|^2}$$

(гл. I, § 1), то $d\sigma$ будет инвариантна относительно всех линейных преобразований, переводящих круг K в самого себя; следовательно, в частности, она будет инвариантна относительно каждого преобразования группы Σ. Отсюда следует, что если это мероопределение перенести с помощью отображения $K \to F_q^\infty$, то оно будет однозначно определено не только на поверхности F_q^∞, но и на основной поверхности F_q (см. гл. III, § 3).

Неевклидов элемент площади в точке w определяется как квадрат величины $d\sigma$. Таким образом, для плотности $d\mu$ соответствующего элемента площади в точке w получается выражение

$$\rho = \frac{d\mu}{df_w} = \frac{\left|\frac{dx}{dw}\right|^2}{(1 - |x(w)|^2)^2},$$

где $x(w)$ — предыдущая линейно-полиморфная функция, а df_w —

[1]) То, что мы предпочли сперва изложить доказательство § 1, 2, 3, объясняется отчасти большей его наглядностью, отчасти тем, что употребленный метод и лемма о логарифмической производной имеют значение и для других вопросов теории мероморфных функций. См. R. Nevanlinna [5], гл. V.

евклидов элемент площади. С этим значением ρ применяется фундаментальное соотношение (16), причем μ, соответственно ρ, нужно так нормировать, чтобы вся расположенная на поверхности F_q масса

$$\mu_0 = \int d\mu = \int \frac{df_w}{(1-|x(w)|^2)^2}\left|\frac{dx}{dw}\right|^2 \tag{25}$$

равнялась 1, что достигается простым делением величин μ и ρ на значение μ_0 всей массы.

Однако, сперва мы должны убедиться в том, что величина μ_0 неевклидовой площади поверхности F_q *конечна*. Для этого воспользуемся разложениями отображающей функции $x(w)$, установленными нами предварительно еще в гл. I, § 3, стр. 24. Согласно этим разложениям, если c означает точку окружности $|x|=1$, соответствующую предельной точке $a=a_\nu$ поверхности F_q^∞ [для произвольной фиксированной вблизи $a=a_\nu$ ветви функции $x(w)$], то

$$\frac{c+x}{c-x} = \alpha + \beta \log(w-a) + \varepsilon(w-a), \tag{26}$$

где α и β — постоянные, а $\varepsilon \to 0$ при $w \to a$. Отсюда следует, что

$$\Re\left(\frac{c+x}{c-x}\right) = \frac{1-|x|^2}{|c-x|^2} \sim \gamma \log \frac{1}{|w-a|}$$

и

$$\left|\frac{d}{dw}\left(\frac{c+x}{c-x}\right)\right| = \frac{2|c|}{|c-x|^2}\left|\frac{dx}{dw}\right| \sim \frac{|\beta|}{|w-a|},$$

следовательно,

$$\rho = \frac{\left|\frac{dx}{dw}\right|^2}{(1-|x|^2)^2} \sim \lambda\left(\frac{1}{|w-a|\log\frac{1}{|w-a|}}\right)^2, \tag{27}$$

где λ — положительная постоянная.

Для предельной точки $a=\infty$ нужно в разложении (26) заменить $w-a$ на $\frac{1}{w}$ и вместо (27) для $a=\infty$ получится

$$\rho = \frac{\left|\frac{dx}{dw}\right|^2}{(1-|x|^2)^2} \sim \lambda\left(\frac{1}{|w|\log|w|}\right)^2. \tag{27'}$$

208. Применяя эти асимптотические разложения плотности ρ в окрестности предельных точек $w=a_\nu$ $(\nu=1,\ldots,q)$, легко доказать, что, во-первых, μ_0 конечно [1]) и, во-вторых, что порожденный

[1]) Если желательно знать точное значение μ_0, то соединим точки a_1 и a_2, a_2 и a_3, ..., a_{q-1} и $a_q=\infty$ соответственно дугами $Q_1, \ldots, Q_{q-1}$. Последние могут быть выбраны так, чтобы при отображении $F_q^\infty \to K$ они переходили в дуги окружностей, ортогональных к единичной окружности $|x|=1$. Разрезанная вдоль дуг $Q_1, \ldots, Q_{q-1}$ плоскость w отображается посредством

распределением $\frac{\mu}{\mu_0}$ сферический потенциал

$$P(w)=\frac{1}{\mu_0}\int\limits_{(a)}\log\frac{1}{k(w,a)}\,d\mu$$

имеет конечное значение в каждой точке w, отличной от $a_1, \ldots, a_q$ $(a_q=\infty)$.

Фундаментальное соотношение (16) дает нам теперь

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|w'(re^{i\varphi})|\,d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\sqrt{\rho(w(re^{i\varphi}))}\,d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\log\mu_0}{2}+\frac{\log\psi(r)}{2}, \qquad (28)$$

где μ_0 означает всю массу и $\psi(r)$ удовлетворяет условиям п. 202

произвольной ветви функции $x(w)$ на криволинейный многоугольник π с нулевыми углами, ограничевный $2(q-1)$ дугами ортогональных окружностей, соответствующих сечениям Q_ν $(\nu=1,\ldots,q-1)$. Переходя с помощью преобразования $x=x(w)$ к многоугольнику π, мы для μ_0 получим выражение

$$\mu_0=\int\limits_\pi\frac{df_x}{(1-|x|^2)^2},$$

где интегрирование производится по площади многоугольника π, а $df_x=r\,dr\,d\varphi$ равняется евклидову элементу площади в точке $x=re^{i\varphi}$.

Для вычисления интеграла удобнее всего воспользоваться дифференциальным уравнением $\Delta u=4e^{2u}$, которому удовлетворяет логарифм отношения неевклидовой длины элемента дуги к его евклидовой длине (гл. I, § 1): $\log\frac{d\sigma}{|dx|}=\log\frac{1}{1-|x|^2}$. Формула преобразования Гаусса дает тогда

$$-\int\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=\int\Delta u\,df_x=4\int\frac{df_x}{(1-|x|^2)^2}=4\mu_0,$$

где интеграл слева берется по периметру многоугольника π. Если через ϑ обозначить угол, образуемый направлением внутренней нормали с радиусом-вектором $(0, x)$, и через M и ρ обозначить центр и радиус дуги L ортогональной окружности, проходящей через точку x, то из треугольника OMx будем иметь: $OM=\sqrt{1+\rho^2}$, $\cos\vartheta=\frac{1-r^2}{2r\rho}$. Следовательно,

$$-\int\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=\int\frac{\partial u}{\partial r}\cos\vartheta\,ds=\int\frac{ds}{\rho}.$$

Здесь $\frac{ds}{\rho}$ равно элементу $d\psi$ центрального угла дуги L, изменение которого на L равно $\pi-\Phi$, где Φ означает угол, под котором видна дуга L из нулевой точки $x=0$. Так как число сторон многоугольника π равно $2(q-1)$, то линейный интеграл равен $2\pi(q-1)-2\pi=2\pi(q-2)$ и, следовательно, для неевклидовой площади области F_q получается значение $\frac{\pi}{2}(q-2)$. Это не что иное, как теорема гиперболической геометрии о дефекте углов (Winkeldefekt) и площади многоугольника.

По теореме Иенсена

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|w'|\,d\varphi = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - N(r, w') + \text{const.}$$

Для второго интеграла найдем, применяя асимптотические разложения (27) и (27′)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{\rho}\,d\varphi = \sum_{\nu=1}^{q-1}\frac{1}{2\pi}\int\left(\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\nu}\right| - \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a_\nu}\right|\right)d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int(\overset{+}{\log}|w| + \overset{+}{\log}\overset{+}{\log}|w|)\,d\varphi + O \qquad (1).$$

Интегралы от простых логарифмов дают средние значения $m(r, a_\nu)$. Что касается интегралов от двойных логарифмов, то, оценивая их с помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом, мы найдем, что они порядка $O(\log m(r, a_\nu))$ и, следовательно, в силу первой основной теоремы также порядка $O(\log T(r))$.

Окончательно из (28) получается

$$N\left(r, \frac{1}{w'}\right) - N(r, w') + \sum_{\nu=1}^{q-1} m(r, a_\nu) - m(r, \infty) <$$

$$< \frac{\log\psi(r)}{2} + O(\log T(r)).$$

Если к обеим частям прибавить еще величину $2m(r, \infty) = 2T(r) - 2N(r, \infty)$, то получим

$$\sum_1^q m(r, a_\nu) < 2T(r) - N_1(r) + \frac{\log\psi(r)}{2} + O(\log T(r)),$$

где N_1 означает неоднократно упоминавшееся выражение

$$N_1(r) = N\left(r, \frac{1}{w'}\right) + [2N(r, w) - N(r, w')].$$

Но полученное неравенство с учетом свойств функции $\psi(r)$, входящей в фундаментальное соотношение (16), есть не что иное, как вторая основная теорема (II). Для конечности потенциала $P(w_0)$, входящего в верхнюю границу функции $\psi(r)$, нужно, однако, добавить предположение, что $w(0) = w_0 \neq a_\nu$.

209. Если, как выше, за основу взять фундаментальное соотношение (16), то можно, как заметил Альфорс (Ahlfors [8]), притти к цели проще, чем при использовании неевклидового распределения. Достаточно задать плотность элементарно, притом так, чтобы в критических точках a_ν она вела себя как плотность неевклидового распределения. Например, достаточно применить фундаментальное соотношение с плотностью

$$\log\rho(w) = 2\sum_1^q \log\frac{1}{k(w, a_\nu)} - 2\log\left(\sum_1^q \log\frac{1}{k(w, a_\nu)}\right) + c,$$

где $k(w, a)$ означает длину хорды, соединяющей точки w и a_ν, и где постоянная c должна быть выбрана так, чтобы вся масса равнялась 1 (Альфорс, там же).

Мы, однако, предпочли следовать первоначальному, менее элементарному способу Ф. Неванлинны, так как применение отображающей функции $x(w; a_1, \ldots, a_q)$ и связанного с ней неевклидового мероопределения никоим образом нельзя рассматривать как нечто искусственное; наоборот, оно является естественным обобщением первоначального доказательства, основанного на применении модулярной функции, с помощью которого Пикар обосновал свою знаменитую теорему (ср. гл. I, § 3). Стоит несколько более подробно остановиться на руководящей идее, указывающей для униформизирующей функции $x(w; a_1, \ldots, a_q)$ вполне естественное место в теории распределения значений мероморфной функции.

210. Пусть $w = w(z)$ — мероморфная для $|z| < R \leqslant \infty$ функция, выпускающая значения $a_1, \ldots, a_q (q \geqslant 2)$. Линейно-полиморфная функция $x = x(w; a_1, \ldots, a_q)$ отображает универсальную поверхность наложения F_q^∞ плоскости w с выключенными точками $a_1, \ldots, a_q$ на всю конечную плоскость $x \neq \infty$ (параболический случай), если $q = 2$, и на единичный круг $|x| < 1$ (гиперболический случай), если $q > 2$. Если теперь в точке $w = w_0 = w(0)$ зафиксировать произвольную ветвь отображающей функции $x = x(w)$, то в силу того, что $w(z)$ не принимает значений a_ν, эту ветвь можно неограниченно продолжить в круге $|z| < R$; по теореме о монодромии она представляет поэтому однозначную функцию $x(w(z)) = f(z)$. Если $w = \varphi(x; a_1, \ldots, a_q)$ означает обратную к $x(w; a_1, \ldots, a_q)$ функцию, автоморфную для $|x| < \infty$ (если $q = 2$) или в круге $|x| < 1$ (если $q > 2$), то заданная функция $w(z)$, выпускающая значения a_ν, будет равна

$$w(z) = \varphi(f(z); a_1, \ldots, a_q), \tag{29}$$

где $f(z)$ — функция, регулярная для $|z| < R$, которая в случае $q > 2$ ограничена ($|f| < 1$).

Соотношение (29) представляет собою *общее выражение функции, мероморфной для* $|z| < R \leqslant \infty$, *выпускающей заданные значения* $a_\nu (\nu = 1, \ldots, q)$. В самом деле, мы видели, что всякая такая функция допускает представление (29); обратно, если $f(z)$ регулярна для $|z| < R$ и ограничена в случае $q > 2$ ($|f| < 1$), а в остальном произвольна, то (29) определяет функцию $w(z)$ указанного вида.

Проблема нахождения совокупности всех функций, мероморфных для $|z| < R$, выпускающих $q \geqslant 2$ значений $a_1, \ldots, a_q$, решается, таким образом, с помощью линейно-полиморфной функции $x(w; a_1, \ldots, a_q)$. В случае $q = 2$ функция $x(w)$ равна $\log \frac{w - a_1}{w - a_2}$, и вопрос идет, следовательно, об элементарном результате, согласно которому функция $w(z)$, выпускающая для $|z| < R$ два значения a_1, a_2, является линейной функцией от функции $e^{f(z)}$, где $f(z)$ регулярна

для $|z|<R$. Если, напротив, $q>2$, то из теоремы Лиувилля следует, что в случае $R=\infty$ функция $f(z)$, а, следовательно, и $w(z)$ тождественно равняется постоянной, это — теорема Пикара (ср. гл. I, § 3).

211. Если рассмотренная мероморфная функция $w(z)$ более не выпускает заданных значений a_ν, то естественно применить предыдущий метод для исследования точек, в которых $w(z)$ принимает эти особые значения. В самом деле, эти точки отличаются тем, что они являются *особыми* для функции $x(w(z); a_1, \ldots, a_q)$. Исследование этих особенностей затрудняется многозначностью функции $x(w)$ в их окрестности, поэтому нужно найти такое зависящее от $x(w(z); a_1, \ldots, a_q)$ выражение, которое, не теряя особого характера в точках $w=a_\nu$, было бы в то же время однозначным. [1])

Таким выражением в случае $q=2$, когда $x(w)=\log w$, если для краткости положить $a_1=0$, $a_2=\infty$, служит отношение $\left|\frac{dx}{dw}\right| = \left|\frac{1}{w}\right|$ евклидовых длин соответствующих друг другу элементов дуг dx и dw. Логарифм этого отношения $u(w; a_1, a_2)=\log\left|\frac{1}{w}\right|$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$ во всех точках w, исключая критические точки $a_1=0$, $a_2=\infty$, в которых он становится логарифмически бесконечным. Если положить $u(w(z); a_1, a_2)\equiv \bar{u}(z)$, то $\bar{u}(z)$ будет гармонична во всех точках $|z|<R$, исключая точки, в которых $w=0$ или ∞. Интегрирование диференциального уравнения $\Delta\bar{u}=0$ дает нам при учете этих особых точек формулу Иенсена, которая послужила основным вспомогательным средством при исследовании распределения нулей и полюсов мероморфной функции.

В случае $q>2$, когда поверхность F_q^∞ отобразима на единичный круг, естественно заменить евклидову длину линейного элемента $|dx|$ его неевклидовой, гиперболической длиной $d\sigma$, которая имеет одно и то же значение $d\sigma=\frac{|dx|}{1-|x|^2}$ для всех ветвей функции $x(w)$. Если тогда положить $u(w; a_1, \ldots, a_q)=\log\frac{d\sigma}{|dw|}$, то u будет однозначной функцией от w, удовлетворяющей диференциальному уравнению $\Delta u=4e^{2u}$ во всех точках w, исключая критические точки $a_1, \ldots, a_q$, в которых она становится логарифмически бесконечной (ср. стр. 258). Определенная с помощью функции $w(z)$, мероморфной для $|z|<R\leqslant\infty$, функция $v(z)\equiv u(w(z))+\log\left|\frac{dw}{dz}\right|$ от z также однозначна и удовлетворяет диференциальному уравнению $\Delta_z v=4e^{2v}$; таким образом, мы приходим к интегрированию диференциального уравнения в частных производных: $\Delta_z u=4e^{2v}$ с учетом особых точек функции v, каковыми являются те точки $|z|<R$, в которых $w(z)$ принимает

[1]) См. F. Nevanlinna [1].

критические значения $a_1, \ldots, a_q$. Но если интегрирование уравнения $\Delta u = 0$ $(q = 2)$ приводило к точной формуле о среднем (формула Иенсена), то в настоящем, более сложном случае, мы приходим только к приближенному результату: таковым на самом деле и может быть рассматриваемо фундаментальное соотношение (16), если распределение μ положить равным неевклидовой площади элемента поверхности. [1])

212. Чтобы объяснить эту связь детальнее и одновременно испытать точность фундаментального соотношения, исследуем последнее соотношение подробнее в простейшем случае, когда функция $w(z)$ для $|z| < R$ *выпускает* значения $a_1, \ldots, a_q$. Так как плотность ρ неевклидового поверхностного распределения равна

$$\rho = \left(\frac{d\sigma}{|dw|}\right)^2 = e^{2u(w;\, a_1, \ldots, a_q)},$$

то интеграл, стоящий слева в фундаментальном соотношении (16), равен

$$\frac{1}{2\pi}\int \left(\log \rho + 2\log\left|\frac{dw}{dz}\right|\right) d\varphi = \frac{1}{\pi}\int v(re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

где v — вышеопределенная функция

$$v = u(w(z);\ a_1, \ldots, a_q) + \log\left|\frac{dw}{dz}\right|,$$

удовлетворяющая диференциальному уравнению $\Delta v = 4e^{2v}$. Применяя интегральную формулу Гаусса, получим для этого интеграла значение

$$\frac{4}{\pi}\int_0^r \frac{\Omega(t)}{t}\, dt,$$

где

$$\Omega(r) = \frac{1}{4}\int_{|z|<r} \Delta_z v\, df_z = \int_{|z|<r} e^{2v}\, df_z$$

есть неевклидова площадь римановой поверхности F_r, на которую заданная функция $w = w(z)$ отображает круг $|z| \leqslant r$. Если, как в § 2, положить

$$Q(r) = \int_0^r \frac{\Omega(t)}{t}\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} v(re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

то из фундаментального соотношения будет следовать, что [ср. (11)]

$$\frac{4Q}{\pi} \leqslant \log\frac{Q'(r)}{2\pi r} = \log\frac{d^2Q}{dt^2} - 2t - \log 2\pi,$$

---

[1]) Для общей плотности ρ вопрос идет аналогичным образом об интегрировании уравнения Пуассона: $\Delta u = -2\pi\rho$.

где $t=\log r$. Если положить

$$y(t)=\frac{2}{\pi}Q+t, \tag{30}$$

то

$$y''(t)\geqslant 4e^{2y}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $y'>0$ и интегрируя между t_0 и t ($t<\log R$), мы получим

$$(y'(t))^2-(y'(t_0))^2\geqslant 4\left(e^{2y(t)}-e^{2y(t_0)}\right).$$

Если теперь t_0 устремить к $-\infty$ и предположить, что $w(0)\neq a_1, \ldots, a_q(=\infty)$ и $w'(0)\neq 0$, то в силу (30) $y(t_0)\to-\infty$ и $y'(t_0)=\frac{2Q(t_0)}{\pi}+1\to 1$. Предыдущее соотношение переходит, следовательно, в

$$(y'(t))^2\geqslant 4e^{2y(t)}+1,$$

откуда интегрированием в пределах от t до τ ($t=\log r<\tau=\log\rho<\log R$) получается

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2\leqslant\frac{\sqrt{4e^{2y(t)}+1}+1}{\sqrt{4e^{2y(t)}+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{4e^{2y(\tau)}+1}-1}{\sqrt{4e^{2y(\tau)}+1}+1}\leqslant\frac{\sqrt{4e^{2y(t)}+1}+1}{\sqrt{4e^{2y(t)}+1}-1}$$

или

$$y(t)\leqslant\log\frac{\rho r}{\rho^2-r^2}.$$

Если еще подставить значение y и совершить предельный переход $\rho\to R$, то получится следующая

Теорема. *Среднее значение неевклидового инварианта*

$$v(z)=\log\frac{d\sigma}{|dz|}=\log\frac{\left|\frac{dx}{dw}\right|\left|\frac{dw}{dz}\right|}{1-|x(w(z))|^2}$$

удовлетворяет для $r<R$ *соотношению*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(re^{i\varphi})\,d\varphi\leqslant\log\frac{R}{R^2-r^2}. \tag{31}$$

Если $w(z)$ в окрестности нулевой точки имеет разложение $w(z)=c_0+c_1z+\ldots$, то отсюда при $r\to 0$ следует, что

$$\log\frac{|c_1|\,|x'(c_0)|}{1-|x(c_0)|^2}\leqslant\log\frac{1}{R}.$$

Это — теорема Пикара-Ландау в точной форме гл. IV, § 5, где $x(c_0)$ было выбрано равным нулю.

Более обще может быть показано, что соотношение (31) переходит в равенство, если мероморфная функция $w(z)$ совпадает с автоморфной функцией, отображающей круг $|z|<R$ на универсальную поверхность наложения F_q^{∞}.

X. ПРИМЕНЕНИЯ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ.

§ 1. Теорема Пикара-Бореля.

213. Для функции $w(z)$, мероморфной во всей конечной плоскости $z \neq \infty$, имеет место теорема Пикара: существует самое большее *два* значения, которые эта функция может не принимать, иначе она тождественно равняется постоянной; последний, тривиальный случай в дальнейшем исключен раз навсегда. В связи с первой основной теоремой мы дальше нашли, что такая функция принимает *почти все значения* a с частотой $N(r, a)$, соответствующей характеристике $T(r, w)$. В случае мероморфной функции дробного порядка эти результаты были еще усилены, — именно, было показано, что для них существует не более *одного* исключительного значения, для которого величина $N(r, a)$ более низкого порядка (типа, класса), чем характеристика. Однако, уже простые примеры показывают, что соответствующее для функций целого порядка уже не справедливо; так, показательная функция e^z имеет два исключительных значения $(0, \infty)$, а в гл. VIII, § 4 мы рассмотрели случай, когда может иметь место понижение типа или класса величины $N(r, a)$ для двух значений a. Что, с другой стороны, число таких исключительных значений не превышает двух, составляет основное содержание обобщения теоремы Пикара, данного Борелем (Borel [1]).

214. Теорема Пикара-Бореля и ее дальнейшие обобщения[1]) непосредственно вытекают из второй основной теоремы. Если положить $q = 3$, т. е. если взять три различных числа a_1, a_2, a_3, то из основных теорем для любого значения a получается следующее двойное неравенство:

$$N(r, a) + O(1) < T(r) < N(r, a_1) + N(r, a_2) + N(r, a_3) + S(r), \quad (1)$$

где остаточный член $S(r)$ удовлетворяет условиям, указанным во второй основной теореме. Соотношение (1) показывает, что *распределение a-точек для трех значений a в основном определяет возрастание характеристики* $T(r)$, *а тем самым и распределение всех a-точек.*

Докажем теперь следующую теорему:

Если интеграл

$$\int^{\infty} \frac{N(r, a)}{r^{\mu+1}}\, dr \qquad (\mu > 0) \quad (2)$$

сходится для трех различных значений a, то интеграл

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{\mu+1}}\, dr \quad (3)$$

также сходится, и интеграл (2) *сходится тогда для всех значений a.*

---

[1]) См. G. Valiron [2], R. Nevanlinna [3], [4].

Это непосредственно следует из соотношения (1), если обе его части умножить на $\frac{dr}{r^{\mu+1}}$ и проинтегрировать между пределами r_0 и r $(0<r_0<r)$, ибо интеграл от остаточного члена

$$\int_{r_0}^{r} \frac{S(r)}{r^{\mu+1}}\,dr$$

при $r\to\infty$ *сходится*. В самом деле, из предположений нашей теоремы следует, что сумма $N(r)=\sum_1^3 N(r,\ a_\nu)$ — конечного порядка $(\leqslant\mu)$ (стр. 223), а тогда по второй основной теореме (дополнение на стр. 256) $S(r)=O(\log r)$, откуда следует сходимость предыдущего интеграла при $r\to\infty$.

Если учесть связь между предельным показателем интеграла (2), с одной стороны, и порядком (типом, классом) подинтегральных функций $N(r, a)$ и $T(r)$, с другой стороны (стр. 256), то получится

Теорема Пикара-Бореля. *Для мероморфной функции, отличной от постоянной, существует самое большее два значения a, для которых функция* $N(r, a)$ [*соответственно* $n(r, a)$] *более низкого порядка (типа, класса), чем характеристика* $T(r)$ *).

215. Пусть в частности $w(z)$ целого порядка $q+1$. Из теоремы Пикара-Бореля следует тогда: *если интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\,dr$$

расходится, то интегралы

$$\int \frac{N(r, a)}{r^{q+2}}\,dr \quad \text{и} \quad \int^{\infty} \frac{n(r, a)}{r^{q+2}}\,dr$$

и сумма

$$\sum^{\infty}\left(\frac{1}{r_\nu(a)}\right)^{q+1}$$

сходятся самое большее для двух значений a. Этот результат показывает, что случай, когда жанр мероморфной функции класса расходимости целого порядка $q+1$ понижается, нужно действительно рассматривать как исключительный, который наступает только тогда, когда 0 и ∞ являются исключительными значениями

*) Если $N(r, a)$ нулевого порядка (что соответствует $\mu=0$) и максимального типа для трех значений a, то в силу (1) и $T(r)$ нулевого порядка, притом максимального типа [так как $T(r)\geqslant O(\log r)$]. Если бы далее $N(r, a)$ для трех значений было более низкого типа, то $T(r)=O(\log r)$ и рассматриваемая мероморфная функция была бы рациональной функцией. Но для рациональных функций $N(r, a)=O(\log r)$ (ср. стр. 174), исключая, быть может, *одно* значение a. Полученное противоречие показывает, что теорема Пикара-Бореля справедлива и в этом предельном случае.

в смысле Пикара-Бореля, для которых величины $N(r, 0)$ и $N(r, \infty)$ принадлежат к классу *сходимости*. Учитывая сформулированное в п. 190 правило для определения жанра мероморфной функции целого порядка, мы можем утверждать следующее:

Если мероморфная функция $w(z)$ принадлежит к классу расходимости минимального типа целого порядка $q+1$, т. е., если

$$\frac{T(r)}{r^{q+1}} \to 0 \quad \text{и} \quad \int^{r} \frac{T(r)}{r^{q+2}}\, dr \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

то частное

$$\frac{w-a}{w-b} \qquad (a \neq b)$$

имеет жанр $q+1$, исключая самое большее для одной пары чисел (a, b) [1]).

216. Спрашивается, в какой мере теорема Пикара-Бореля может быть распространена на функции, мероморфные в единичном круге (случай $R=1$). Напомним, что определенная для $0 \leqslant r < 1$ положительная монотонно-возрастающая функция $s(r)$ называется порядка $\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda}$ (или, короче, порядка λ, $\lambda \geqslant 0$), если

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\log s(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = \lambda.$$

Так же, как на стр. 221, доказывается, что $s(r)$ тогда и только тогда порядка λ, когда λ является предельным показателем интеграла

$$\int^{1} s(r)(1-r)^{\mu-1}\, dr,$$

т. е. когда этот интеграл сходится для $\mu > \lambda$ и расходится для $\mu < \lambda$. Далее, $s(r)$ принадлежит к классу сходимости или расходимости в зависимости от того, сходится или расходится предыдущий интеграл для $\mu = \lambda$. Первый случай возможен только тогда, когда $s(r)$ минимального типа порядка λ, т. е. когда произведение

$$s(r)(1-r)^{\lambda}$$

при $r \to 1$ исчезает.

Из тождества $(0 < r_0 < r < 1)$

$$-\mu \int_{r_0}^{r} N(t, a)(1-t)^{\mu-1}\, dt =$$

$$= N(r, a)(1-r)^{\mu} - N(r_0, a)(1-r_0)^{\mu} - \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{t}(1-t)^{\mu}\, dt$$

[1]) Если одно из этих чисел, например, b, равно ∞, то частное нужно заменить на $w-a$.

заключаем, как на стр. 223, что интегралы

$$\int^1 N(r, a)(1-r)^{\mu-1}\,dr \quad \text{и} \quad \int^1 n(r, a)(1-r)^{\mu}\,dr \qquad (4)$$

для $\mu>0$ одновременно сходятся или расходятся. Соотношение

$$-(\mu+1)\int_{r_0}^{r} n(t)(1-t)^{\mu}\,dt =$$

$$= n(r)(1-r)^{\mu+1} - n(r_0)(1-r_0)^{\mu+1} - \int_{r_0}^{r}(1-t)^{\mu+1}\,dn(t, a)$$

показывает далее, что ряд

$$\int^1 (1-r)^{\mu+1}\,dn(r, a) = \sum (1-r_\nu(a))^{\mu+1}$$

для $\mu+1>0$ сходится или расходится одновременно со вторым из интегралов (4).

Из первой основной теоремы следует, что сходимость интеграла

$$\int^1 T(r)(1-r)^{\mu-1}\,dr \qquad (5)$$

для заданного $\mu>0$ влечет за собой сходимость величин

$$\int^1 N(r, a)(1-r)^{\mu-1}\,dr, \quad \int^1 n(r, a)(1-r)^{\mu}\,dr, \quad \sum (1-r_\nu(a))^{\mu+1} \qquad (6)$$

независимо от выбора значения a. Следовательно, если $T(r)$ порядка $\lambda>0$, то $n(r, a)$ самое большее порядка $\lambda+1$ и предельный показатель ряда

$$\sum (1-r_\nu(a))^{\mu} \qquad (7)$$

самое большее равен $\lambda+1$. В качестве примера рассмотрим регулярную для $|z|<1$ функцию

$$w = e^{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\lambda+1}} \qquad (\lambda>0), \qquad (8)$$

порядок которой, как легко подсчитать, равен λ (т. е. характеристика $T(r)$ этой функции имеет порядок λ). Для функции w величины $N(r, a)$ и $n(r, a)$ соответственно порядков λ и $\lambda+1$ и предельный показатель μ ряда (7) равен $\lambda+1$ для всех значений a, исключая оба исключительных значения $a=0, \infty$.

217. И здесь вторая основная теорема показывает, что число таких исключительных значений не превосходит двух. Именно,

с помощью интегрирования доказывается, точно так же как в п. 214, следующая теорема, обобщающая теорему Пикара-Бореля на функции, мероморфные в единичном круге:

Если $w(z)$ мероморфна для $|z|<1$ и выражения (6) *при $\mu>0$ конечны для трех различных значений a, то то же самое имеет место для всех значений a.*

Для $\mu=0$ этот результат более не справедлив *). В этом случае мы приходим к одновременной сходимости или расходимости величин (ср. стр. 268)

$$\sum(1-r_\nu(a)) \quad \text{и} \quad N(1,\ a)=\int_0^1 \frac{n(r,\ a)}{r}\,dr$$

Если они конечны для трех значений a, то вторая основная теорема не позволяет отсюда сделать заключение, что характеристика $T(r)$ ограничена, ибо справа стоит еще остаточный член $S(r)$, который неограничен. И в самом деле, мы уже знаем на основании результатов гл. VII, § 5, что *существуют функции, выпускающие множество значений мощности континуума и все же имеющие неограниченную характеристику*. Такие случаи встречаются среди автоморфных функций, которые отображают единичный круг на универсальную поверхность наложения однолистной области, ограниченной гармоническим нульмножеством.

Вторая основная теорема правильно указывает пределы справедливости теоремы Пикара. Для остаточного члена $S(r)$ мы нашли верхнюю границу $O\left(\log\frac{1}{1-r}\right)$; следовательно, если $T(r)$ имеет меньший порядок роста, то $S(r)$ перестает играть роль остаточного члена и основная теорема более не применима к теории исключительных значений. С другой стороны, если характеристика при $r\to 1$ стремится к бесконечности не быстрее, чем $\log\frac{1}{1-r}$, то и теорема Пикара-Бореля перестает быть справедливой. В самом деле, из результатов гл. IX, § 4 можно заключить, что характеристика модулярной функции асимптотически ведет себя на $\log\frac{1}{1-r}$, но модулярная функция имеет уже *три* пикаровских исключительных значения.

§ 2. Соотношения дефектов.

218. До сих пор мы применяли вторую основную теорему к случаю $q=3$. Более подробный анализ этой теоремы в ее общей форме приведет нас к новому точному и вполне определенному классу исключительных значений.

Рассмотрим сперва параболический случай $R=\infty$, когда, следовательно, функция $w(z)\not\equiv\text{const}$ мероморфна для $z\neq\infty$. Если

*) Ср. примечание на стр. 266.

обе части соотношения $m(r, a)+N(r, a)\sim T(r)$ разделить на $T(r)$ и совершить предельный переход $r\to\infty$, то получим

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{m(r, a)}{T(r)}+\frac{N(r, a)}{T(r)}\right)=1,$$

откуда видно, что пределы неопределенности отношений $\frac{m}{T}$ и $\frac{N}{T}$ при $r\to\infty$ лежат между 0 и 1. В частности, это имеет место для величины

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r, a)}{T(r)}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a)}{T(r)},$$

поведение которой может быть точно исследовано с помощью методов гл. IX.

В самом деле, что говорит вторая основная теорема об этих пределах неопределенности? Если разделить обе части соотношения (II) на $T(r)$, то

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{S(r)}{T(r)}=0\text{ *)},\tag{9}$$

и мы найдем, что

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\left(\sum_1^q\frac{m(r, a_\nu)}{T(r)}+\frac{N_1(r)}{T(r)}\right)\leqslant 2.$$

Для функции, мероморфной во всей конечной плоскости $z\neq\infty$, имеет место соотношение

$$\sum_1^q\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r, a_\nu)}{T(r)}+\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N_1(r)}{T(r)}\leqslant 2.\tag{10}$$

Соотношение (10) будет справедливо a fortiori, если слева опустить во всяком случае неотрицательный член, связанный с кратными точками функции. Следовательно, если при условиях предыдущей теоремы положить

$$\delta(a)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{m(r, a)}{T(r)}=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r, a)}{T(r)},\tag{11}$$

то $0\leqslant\delta\leqslant 1$ и

$$\sum_1^q\delta(a_\nu)\leqslant 2.\tag{12}$$

---

*) Для рациональной функции, когда $T(r)=O(\log r)$, соотношение требует особого доказательства. Это доказательство получается, например, из соотношения

$$(q-2)T(r)<\sum_1^q N(r, a_\nu)-N_1(r)+O(1),$$

справедливого для рациональных функций, что доказывается непосредственным подсчетом величин $N(r, a_\nu)$ и $N_1(r)$.

Следовательно, число тех значений a, для которых величина $\delta(a)$, *дефект* (*Defekt*) значения a, больше, чем заданное положительное число δ_1, не превосходит $\frac{2}{\delta_1}$. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к нулю, то существует не более конечного числа значений a, для которых дефект $\delta(a)$ лежит в интервале $\delta_\nu \geqslant \delta(a) > \delta_{\nu+1}$, и так как это имеет место для каждого значения ν, то отсюда заключаем, что дефект может быть положительным не более чем для счетного числа значений a. Из соотношения (12), где q может быть выбрано сколь угодно большим, следует тогда [1])

Теорема о сумме дефектов. *Если* $w(z)$ — *функция, мероморфная для* $z \neq \infty$, *то определенный формулой* (11) *дефект* $\delta(a)$ *равен нулю для каждого значения* a, *исключая самое большее счетное множество значений* a, *сумма дефектов которых не превышает* 2:

$$\sum \delta(a) \leqslant 2. \tag{13}$$

219. Величина дефекта $\delta(a)$, лежащая в интервале $0 \leqslant \delta(a) \leqslant 1$, дает нам очень точную меру для относительной плотности тех точек, где $w(z)$ принимает значение a. Чем больше дефект, тем меньше число этих точек*). Своего максимального значения 1 дефект достигает тогда, когда число точек очень мало, например, в предельном случае, когда значение a является пикаровским исключительным значением.

Соотношение дефектов (13) позволяет нам теперь считать *нормальным значением* (Normalwert) всякое значение a, *для которого дефект* $\delta(a) = 0$, напротив, считать *дефектным значением* всякое значение a, для которого $\delta(a) > 0$. Последние являются исключительными значениями и их может быть не более счетного числа. Мероморфная функция имеет не более двух пикаровских или пикаро-борелевских исключительных значений. То, что число дефектных значений неограниченно, находит свое естественное объяснение в том обстоятельстве, что понятие дефекта выдвигает более тонкие различия в плотности распределения различных a-точек, которые не учитывала старая теория распределения значений Пикара-Бореля. Несмотря на это различие, соотношение дефектов все же следует рассматривать как целесообразное обобщение теоремы Пикара-Бореля: то же самое число 2, которое в теореме Пикара представляет наибольшее число исключительных значений, не дает, правда, уже наибольшего числа исключительных значений, но зато оно дает верхнюю границу для *полного дефекта* этих значений. В действительности теорема Пикара представляет непосредственное следствие из соотношения дефектов, так как пикаровские

---

[1]) R. Nevanlinna [1].

*) Следует помнить, что каждая точка считается столько раз, какова кратность функции $w(z)$ в этой точке.

исключительные значения имеют дефект 1, и, следовательно, число их не превосходит 2.

Если мероморфная функция имеет два пикаровских исключительных значения, то полный дефект достигает своего максимального значения 2. С точки зрения соотношения дефектов интереснее то, что существуют функции с несколькими дефектными значениями, сумма дефектов которых тоже равна 2. Такой функцией является, например, функция

$$w = \int_0^z e^{-t^q}\,dt, \tag{14}$$

об асимптотических свойствах которой неоднократно уже говорилось. Напомним, что эта функция в каждом угле W_ν: $\left|\arg z - \frac{\nu\pi}{q}\right| < \frac{\pi}{2q}$ имеет *асимптотическое* или *целевое* значение, причем все целевые значения a_μ ($\mu = 1, \ldots, q$), соответствующие четным значениям $\nu = 2\mu$, конечны и между собой различны, в то время как во всех углах $W_{2\mu-1}$ ($\mu = 1, \ldots, q$) функция $w(z)$ стремится к $a_{q+1} = \infty$. Эти $q+1$ асимптотические значения являются одновременно и дефектными значениями. С помощью асимптотических разложений гл. VI, § 2 для соответствующих дефектов получаем значения

$$\delta(a_1) = \ldots = \delta(a_q) = \frac{1}{q}; \quad \delta(a_{q+1}) = 1,$$

так что полный дефект $\sum \delta(a)$ действительно равен 2.

220. Соотношение дефектов приводит к следующей **проблеме**: *Каждому значению заданной последовательности значений* $a_1, \ldots, a_\nu, \ldots$ *поставлено в соответствие число* δ_ν *интервала* $0 < \delta \leqslant 1$ *так, что* $\sum \delta(a_\nu) = 2$. *Требуется построить мероморфную функцию, имеющую значения* a_ν *в качестве дефектных значений с*

$$\delta(a_\nu) = \delta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

В следующей главе мы рассмотрим вполне определенный класс мероморфных функций, решающих эту проблему полностью при дополнительном условии, что число значений a_ν *конечно* и заданные дефекты — *рациональные числа.*

Если искать функции, обладающие максимальным дефектом 2, то нужно учитывать то, что член $N_1(r)$, происходящий от кратных точек при $r \to \infty$, должен быть бесконечно малым по сравнению с характеристикой $T(r)$, ибо, иначе, в силу (10) сумма дефектов будет меньше 2. Следовательно, примеры таких функций нужно искать среди функций, имеющих мало, а в предельном случае и совсем не имеющих кратных точек. К этому классу функций принадлежит целая функция (14), производная которой отлична от

нуля и, более обще, все вышеупомянутые мероморфные функции с конечным числом рациональных дефектов.

221. Спрашивается, всегда ли, с другой стороны, мероморфные функции без кратных точек имеют максимальный полный дефект 2? Из различных соображений, действительно, представляется вероятным предположение, что то соотношение (II), которое мы обозначили как вторую основную теорему, переходит в нормальных случаях в *равенство*, если рассматривать *все* дефектные значения $a_1, a_2, \ldots$ Тогда в случае $N_1 = 0$ для полного дефекта, действительно, получалось бы значение 2.

С другой стороны, важно заметить, что могут встретиться исключения из этого правила. Так, например, целая функция

$$\int_0^z e^{e^t}\,dt \tag{15}$$

имеет пикаровское исключительное значение ∞ с дефектом $\delta(\infty) = 1$ и, кроме того, бесконечное число конечных асимптотических значений, которые, однако, все имеют дефект, равный нулю, так что полный дефект равняется 1. Понижение суммы дефектов в приведенном примере является следствием того, что приближение функции к своим конечным асимптотическим значениям происходит асимптотически с одинаковой скоростью; в силу этой симметрии все указанные асимптотические значения должны иметь *равные* дефекты, и так как их бесконечно много, а сумма дефектов ограничена, то все эти дефекты должны равняться нулю. Таким образом распределение полного дефекта по отдельным значениям a_ν приводить здесь к частичному исчезновению этого полного дефекта. Если, однако, полный дефект определить другим способом, например, в сумме

$$\frac{1}{T(r)}\sum_1^q m(r, a_\nu)$$

положить q равным подходящей функции от r и совершить затем предельный переход $r \to \infty$, то для „полного дефекта", действительно, получится значение 2 [1]).

222. Во всех известных на сегодня примерах дефектные значения являются одновременно и *асимптотическими значениями* функ-

[1]) Читателю предлагается подробнее исследовать предыдущий пример, поучительный во многих отношениях (см. Ulrich [1]). Заметим еще, что в силу связи между приближением производной w' к нулю, соответствению к бесконечности и приближением функции w к ее исключительным значениям, как это было разобрано в гл. IX, § 1, вероятно предположение, что величина $\varliminf \frac{1}{T}\left[m(r, w') + m\left(r, \frac{1}{w'}\right)\right]$ могла бы служить хорошей мерой для полного дефекта.

ции. Это представляется и по существу дела. В самом деле, дефектность значения a означает, что a-точек у функции относительно мало или, что в силу первой основной теоремы означает то же самое, что функция $m(r, a)$ относительно велика. Следовательно, при достаточно больших значениях r на окружности $|z|=r$ существуют дуги, на которых $w(z)$ очень мало отклоняется от значения a; для того чтобы a было асимптотическим значением функции $w(z)$, нужно, чтобы эти дуги можно было соединить в область, которая не образует изолированных „островов", а простирается до существенно особой точки.

Если бы предположение, что *дефектное значение является асимптотическим значением*, было верно, то для известных классов мероморфных функций конечного порядка получились бы интересные следствия относительно числа дефектных значений как функции порядка мероморфной функции $w(z)$. В самом деле, для числа асимптотических значений в этом направлении имеют место известные закономерности, которые подробнее будут рассмотрены в гл. XI (теорема Данжуа-Карлемана-Альфорса).

Важно заметить, что, наоборот, асимптотическое значение не обязательно является дефектным значением. Правда, существование уходящего в бесконечность луча (вообще криволинейного), вдоль которого функция $w(z)$ стремится к предельному значению a, влечет за собой во всяком случае существование на окружности $|z|=r$ точек, а значит и дуг B_r, на которых $w(z)$ мало отличается от значения a и, следовательно, где величина $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a}\right|$ относительно велика. Однако может случиться, что приближение к значению a происходит недостаточно быстро и что дуги B_r недостаточно длинны, чтобы среднее значение $m(r, a)$ от $\overset{+}{\log}\left|\frac{1}{w-a}\right|$ на окружности $|z|=r$ получало значение, пропорциональное характеристике $T(r)$, как это требуется для дефектного значения. Это явление наблюдается уже у функции (15). Соответствующее может случиться и у функций с конечным числом асимптотических значений. Так, например, целая функция

$$w=\int_0^z \frac{\sin t^q}{t^q}\,dt \tag{16}$$

порядка q (q — целое положительное число) имеет $2q$ конечных асимптотических значений

$$e^{\frac{\nu\pi i}{q}}\int_0^\infty \frac{\sin r^q}{r^q}\,dr \qquad (\nu=1,\ldots,\ 2q) \tag{16'}$$

и, кроме того, еще асимптотическое значение ∞. Стремление функции w к конечным асимптотическим значениям довольно слабо и проис-

ходит только в узкой полосе около луча $\arg z = \frac{\nu\pi}{q}$ ($\nu = 1, \ldots, 2q$). Соответственно этому дефекты значений (16′) исчезают. Напротив, на всех лучах $\arg z = \varphi \neq \frac{\nu\pi}{q}$ функция w довольно быстро стремится к значению ∞, являющемуся для нее пикаровским исключительным значением, для которого, следовательно, $\delta(\infty) = 1$. То, что полный дефект здесь меньше 2, объясняется тем, что член $N_1(r)$, происходящий от кратных a-точек функции w, имеет значение $\sim T(r)$, так что частное $\frac{N_1}{T}$ дополняет сумму слева в (10) до максимального значения 2.

223. Как же обстоит дело с соотношением дефектов *в гиперболическом случае*, когда, следовательно, заданная функция мероморфна только *в единичном круге* $|z| < 1$. В этом случае основное соотношение (10), в котором вместо предельного перехода $r \to \infty$ нужно совершить предельный переход $r \to 1$, только тогда получается как следствие из второй основной теоремы, когда характеристика $T(r)$ при $r \to 1$ стремится к бесконечности быстрее, чем остаточный член $S(r)$, или, точнее, когда

$$\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{\log \frac{1}{1-r}}{T(r)} = 0. \tag{17}$$

Если характеристика $T(r)$ функции $w(z)$, мероморфной для $|z| < 1$, при $r \to 1$ неограниченно возрастает, притом настолько быстро, что имеет место соотношение (17), *то полный дефект* $\sum \delta(a)$ *самое большее равен* 2. В определении (11) дефекта нужно, само собой разумеется, заменить предельный переход $r \to \infty$ на $r \to 1$.

Если *нижний* предел

$$\lambda = \varliminf_{r \to 1} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \tag{18}$$

более не бесконечен, то вторая основная теорема дает для полного дефекта верхнюю границу

$$\sum \delta(a) \leqslant 2 + \frac{1}{\lambda}, \tag{19}$$

которая для $\lambda > 0$ конечна. Этот результат также не может быть усилен. В самом деле, можно показать, что автоморфная функция $w(z; a_1, \ldots, a_q)$, отображающая единичный круг на универсальную поверхность наложения плоскости w с выключенными точками $a_1, \ldots, a_q$, удовлетворяет для $q \geqslant 3$ соотношению (19) с $\lambda = \frac{1}{q-2}$; с другой стороны, значения $a_1, \ldots, a_q$ являются теперь пикаров-

скими исключительными значениями с дефектом 1. Полный дефект равен $2+\frac{1}{\lambda}$ и достигает тем самым своего наибольшего значения, которое вообще возможно при заданном λ, согласно обобщенному соотношению дефектов (19) (см. R. Nevanlinna [5]).

Если полный дефект бесконечен, то, согласно предыдущему, характеристика $T(r)$ удовлетворяет соотношению

$$\lambda = \lim_{r \to 1} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} = 0.$$

Это, в частности, имеет место всегда в том случае, когда число дефектных значений *несчетно*.

224. Естественно поставить вопрос: *для сколь мощных множеств значений a дефект $\delta(a)$ может быть положительным без того, чтобы характеристика становилась ограниченной?* Эта проблема была полностью решена О. Фростманом [1]). Он доказал следующую теорему, обобщающую прежнюю теорему Альфорса (Ahlfors [3]) и еще раз показывающую значение множеств гармонической меры нуль:

Множество D дефектных значений функции неограниченного вида, мероморфной в единичном круге, имеет внутреннюю гармоническую меру нуль, т. е. каждое замкнутое подмножество множества D является гармоническим нульмножеством.

Доказательство получается непосредственно из интегральной формы (18) первой основной теоремы (гл. VI, § 4). В самом деле, пусть E — произвольное замкнутое множество в плоскости w, точки a которого представляют дефектные значения функции $w(z)$ неограниченного вида, мероморфной в единичном круге. Предположим, что E — положительной емкости и пусть $\mu(a)$ — распределение положительной единичной массы, решающее для E проблему Робэна. Соответствующий логарифмический потенциал $u(w)$ имеет конечную верхнюю границу, и из соотношения (18) (гл. VI, § 4) следует после деления на $T(r)$ и предельного перехода $r \to 1$, что

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{T(r)} \int_E N(r, a)\, d\mu(a) = 1.$$

Распределение μ определено здесь как функция, вполне аддитивная для каждого подмножества множества E, измеримого в смысле Бореля.

Выражение $\frac{N}{T}$ является непрерывной функцией от a, и поэтому его верхний предел при $r \to 1$ является функцией, измеримой по Борелю. Следовательно, предельный переход $r \to 1$ можно совершить

[1]) O. Frostman [2].

под знаком интеграла; отсюда следует, что

$$\int_E \overline{\lim_{r\to 1}} \frac{N(r, a)}{T(r)}\, d\mu(a) = 1$$

или

$$\int_E \delta(a)\, d\mu(a) = 0.$$

Пусть теперь $r_1 = 1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_\nu > 0$ и $r_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$. Множество E_ν значений a из множества E, для которых $r_{\nu+1} < \delta(a) \leqslant r_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, измеримо в смысле Бореля. Для каждого ν имеем

$$r_{\nu+1} \int_{E_\nu} d\mu(a) \leqslant \int_{E_\nu} \delta(a)\, d\mu(a) \leqslant \int_E \delta(a)\, d\mu(a) = 0;$$

кроме того, в силу аддитивности распределения μ

$$\int_E d\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{E_\nu} d\mu = 0,$$

что противоречит тому, что вся масса равна 1. Следовательно, емкость множества E равна нулю, что и требовалось оказать.

225. Пусть $h(r)$ — монотонная функция меры рассмотренного в гл. V, § 6 вида. Если интеграл

$$\int_0 \frac{h(r)}{r}\, dr \tag{20}$$

сходится, то (п. 123) каждое множество E гармонической меры нуль имеет также h-меру нуль. Предыдущий результат содержит, таким образом, как следствие следующую, более старую теорему Альфорса (Ahlfors [3]).

Множество дефектных значений функции неограниченного вида, мероморфной в единичном круге, имеет h-меру нуль для каждой функции меры h, для которой интеграл (20) *сходится.*

Теорема Альфорса-Фростмана может быть, однако, существенно усилена. Для этого нужно только точнее использовать фундаментальное соотношение (17) (гл. VI, § 4). Формула (17′) (гл. VI, § 4) в соединении с формулой (17) дает

$$T(r) = \int_E N(r, a)\, d\mu(a) - u(w(0)) + \langle \gamma + \log 6 \rangle. \tag{21}$$

Здесь E означает расположенное в единичном круге $|w| < 1$ замкнутое множество, γ — его постоянная Робэна, $\mu(a)$ — распределение единичной положительной массы, решающее для множества E

проблему Робэна[1]), и $u(w(0))$ — значение соответствующего логарифмического потенциала

$$u(w(0)) = \int_E \log \left| \frac{1}{w(0)-a} \right| d\mu \geqslant \log \frac{1}{|w(0)|+1} \qquad (22)$$

в точке $w = w(0) \neq \infty$.[2]), в которую попадает начальное значение заданной, мероморфной для $|z|<R \leqslant \infty$ функции $w(z)$.

Выберем теперь для $0<r<R$ произвольную монотонно возрастающую функцию $\lambda(r)$ $(0<\lambda(r)<T(r)$, такую, что величина $T(r)-\lambda(r)$ вместе с r монотонно и неограниченно возрастает, и обозначим через e_r множество значений a, расположенное в круге $|w| \leqslant \frac{1}{2}$, для которых $N(r, a) \leqslant T(r)-\lambda(r)$, замкнутое в силу непрерывности функции $N(r, a)$. Из (21) следует тогда, что

$$\lambda(r)+u(w(0)) = <\gamma_r + \log 6>$$

или с учетом (22)

$$\gamma_r > \lambda(r) - \log(6(|w(0)|+1)),$$

где γ_r — постоянная Робэна множества e_r. Как только r станет больше некоторого значения r_0, то $\lambda(r)$ будет больше, чем $2\log(6(|w(0)|+1))$ и, следовательно,

$$\gamma_r > \frac{\lambda(r)}{2} \quad \text{для} \quad r > r_0.$$

Пусть теперь $r_0 < r_1 < r_2 < \ldots$ — бесконечная последовательность значений, стремящихся к R, и E_n $(n \geqslant 1)$ — сумма множеств e_{r_ν} $(\nu = n,\ n+1,\ \ldots)$. Если γ_n — постоянная Робэна множества $E_n F$[3]), то по лемме 2 гл. V, § 2

$$\frac{1}{\gamma_n} \leqslant \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{1}{\gamma_{r_\nu}} < 2 \sum_{n}^{\infty} \frac{1}{\lambda(r_\nu)}. \qquad (23)$$

Если последовательность r_ν выбрать так, чтобы стоящий справа в (23) *ряд сходился, то емкость множества E_n при $n \to \infty$ будет стремиться к нулю.*

---

[1]) Для сокращения мы говорим о постоянной Робэна замкнутого множества; более полно это означает: постоянная Робэна той области, ограниченной заданным множеством, которая содержит бесконечно удаленную точку.

[2]) Предположение $w(0) \neq \infty$ не представляет никакого существенного ограничения.

[3]) Если E_n не замкнуто, то пусть γ_n — верхняя граница постоянных Робэна всех замкнутых подмножеств множества E_n. Вместо емкости множества E_n можно тогда говорить о внутренней емкости $e^{-\gamma_n}$ этого множества.

Для того чтобы этот результат имел место, несущественно то обстоятельство, что рассматриваемые значения (a) лежат в круге $|w|\leqslant\frac{1}{2}$. Тот же результат справедлив и в том случае, когда этот круг заменен любой замкнутой областью B, отличной от полной плоскости. В самом деле, последний общий случай приводится к предыдущему частному случаю с помощью предварительного линейного преобразования.

Определим теперь, после произвольного выбора начального значения r_0, последовательность значений r_ν при помощи условий

$$T(r_{\nu+1}) = T(r_\nu) + \lambda(r_{\nu+1}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{24}$$

что возможно, так как разность $T(r) - \lambda(r)$ представляет неограниченно возрастающую функцию от r. Если ряд (23) сходится и если через B обозначить произвольную область плоскости w, то, согласно предыдущему, $N(r, a) > T(r) - \lambda(r)$ для каждого значения $r = r_\nu$ $(\nu = n, n+1, \ldots)$ и для каждого значения a из B, за исключением множества значений E_n, постоянная Робэна которого неограниченно возрастает при $r \to \infty$. Пусть теперь a — значение, лежащее вне E_n и $r_\nu < r < r_{\nu+1}$ $(\nu \geqslant n)$. Тогда

$$N(r, a) \geqslant N(r_\nu, a) > T(r_\nu) - \lambda(r_\nu) = T(r) - \lambda(r) + T(r_\nu) - \lambda(r_\nu) - (T(r) - \lambda(r)) \geqslant T(r) - \lambda(r) + T(r_\nu) - \lambda(r_\nu) - (T(r_{\nu+1}) - \lambda(r_{\nu+1}))$$

или в силу (24)

$$N(r, a) \geqslant T(r) - \lambda(r) - \lambda(r_\nu) \geqslant T(r) - 2\lambda(r).$$

Если $r > r_n$, то для каждого значения a из области B

$$N(r, a) \geqslant T(r) - 2\lambda(r), \tag{25}$$

исключая точки a множества E_n, емкость которого удовлетворяет условию (23).

Учитывая соотношение (24), найдем, что

$$\frac{1}{\lambda(r_\nu)} = \frac{1}{\lambda(r_\nu)} \frac{T(r_\nu) - T(r_{\nu-1})}{\lambda(r_\nu)} = \frac{1}{(\lambda(r_\nu))^2} \int_{r=r_{\nu-1}}^{r_\nu} dT(r) \leqslant \int_{r=r_{\nu-1}}^{r_\nu} \frac{dT(r)}{(\lambda(r))^2}$$

и

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(r_\nu)} \leqslant \sum_{r=r_n}^{\infty} \frac{dT(r)}{(\lambda(r))^2}.$$

Таким образом, соотношение (25) имеет место для каждого значения $r > r_n$ и каждого значения a из области B за исключением такого множества значений a, для которого величина, обратная соответствующей постоянной Робэна γ_n, самое большее равна удвоенному предыдущему интегралу, увеличенному еще на величину $\frac{2}{\lambda(r_n)}$.

Пусть $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ и $\lambda(r)=(T(r))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$. Тогда

$$\frac{1}{2\gamma_n}<\frac{1}{(T(r_n))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}+\int_{r_n}^{\infty}\frac{dT}{T^{1+\varepsilon}}=\frac{1}{(T(r_n))^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{(T(r_n))^{\varepsilon}}.$$

Коль скоро n превзойдет некоторое число, это выражение станет меньше, чем $\frac{2}{\varepsilon}(T(r_n))^{-\varepsilon}$. Если еще учесть, что область B может быть выбрана произвольно, то придем, наконец, к следующей теореме.

Теорема. *Пусть $w(z)$ — функция неограниченного вида, мероморфная для $|z|<R\leqslant\infty$. Тогда для каждого заданного $\varepsilon\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$ и каждого достаточно большого значения r_0 интервала $(0, R)$ имеет место соотношение*

$$N(r, a)\geqslant T(r)-2(T(r))^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \tag{26}$$

для $r_0\leqslant r<R$ и всех a, за исключением, быть может, множества E_0 значений a, емкость которого самое большее равна

$$e^{-\frac{\varepsilon(T(r_0))^{\varepsilon}}{4}}. \tag{27}$$

226. Из этой теоремы непосредственно получается существенное усиление предыдущего результата, согласно которому величина

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{N(r, a)}{T(r)}=1-\delta(a)$$

равна 1 для каждого значения a, за исключением множества значений емкости нуль, если только $T(r)$ при $r\to R$ неограниченно возрастает. Именно, оказывается, что тот же результат имеет место, если заменить $\overline{\lim}$ на $\underline{\lim}$, так что, следовательно, *для функции неограниченного вида*

$$\lim_{r\to R}\frac{N(r, a)}{T(r)}=1, \tag{28}$$

исключая самое большее множество значений (a) „внутренней" емкости нуль. В самом деле, пусть E — множество значений (a), для которых (28) не имеет места. Если ε — произвольное фиксированное число $\left(0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$, то каждая точка a множества E принадлежит к определенному в предыдущей теореме множеству E_0, как бы ни выбиралось значение r_0 из интервала $(0, R)$. Следовательно, емкость заданного замкнутого подмножества множества E самое большее равна величине (27) и поэтому необходимо равна нулю, так как эта величина при $r_0\to R$ стремится к нулю. Таким образом

множество E исключительных значений имеет „внутреннюю" емкость нуль, что и требовалось доказать.

В соединении с первой основной теоремой $m(r, a)+N(r, a)\sim T(r)$ из (26) получается более сильный результат

$$m(r, a)=O\left(T(r)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}\right), \tag{29}$$

имеющий место для каждого значения a, исключая самое большее множество значений внутренней емкости нуль.

Так как каждое множество емкости нуль имеет также h-меру нуль, коль скоро интеграл

$$\int \frac{h(r)}{r}\,dr$$

сходится, то отсюда следует, что исключительное множество E в последних найденных теоремах имеет также h-меру нуль для каждой функции меры h вышеупомянутого вида [1]).

§ 3. Теоремы о разветвленных значениях.

227. До сих пор мы пренебрегали членом $N_1(r)$, происходящим от *кратных корней* уравнения

$$w(z)=a. \tag{30}$$

Выведем теперь некоторые следствия из формулы (II), связанные с присутствием в этой формуле упомянутого члена. Для этого положим $n_1(r, a)$ равным числу кратных корней уравнения (30), лежащих в круге $|z|\leqslant r$, причем k-кратный корень будем считать только $k-1$ раз. Если тогда положить

$$N_1(r, a)=\int_0^r \frac{n_1(t, a)}{t}\,dt+n_1(0, a)\log r,$$

то

$$N_1(r)=\sum_{(a)} N_1(r, a),$$

где суммирование распространяется на все значения a. Так как функция $w(z)$, мероморфная в круге $|z|\leqslant r<R(\leqslant\infty)$, может кратно принимать только конечное число значений, то предыдущая сумма содержит только конечное число неисчезающих членов. Имеем

$$\varlimsup_{r\to R}\frac{N_1(r)}{T(r)}\geqslant\sum\varlimsup_{r\to R}\frac{N_1(r, a)}{T(r)},$$

причем величина

$$\vartheta(a)=\varlimsup_{r\to R}\frac{N_1(r, a)}{T(r)}$$

[1]) В этой форме теоремы (26) и (29) были получены L. Ahlfors'ом [3] как обобщение известных в этом же направлении старых теорем G. Valiron'a [5], J. Littlewood'a [1] и автора [5].

в силу $N_1(r, a) < N(r, a)$ наверное лежит в отрезке [0, 1] и равна нулю для всех значений a, исключая самое большее счетное число значений a, для которых уравнение (30) имеет кратные корни. Так как подобным значениям a всегда соответствуют точки ветвления конечного порядка на римановой поверхности F, на которую функция $w = w(z)$ отображает круг $|z| < R$, то каждое такое значение a будем называть *разветвленным*, а $\vartheta(a)$ — его *индексом ветвления*.

228. Пусть теперь $R = \infty$ и $w(z) \not\equiv \text{const}$, так что при $r \to \infty$ характеристика $T(r) \to \infty$. После деления на $T(r)$ и последующего предельного перехода $r \to \infty$ из (II) получается соотношение

$$\sum_{(a)} \delta(a) + \sum_{(a)} \vartheta(a) \leqslant 2, \tag{31}$$

откуда следует, что наряду с соотношением дефектов $\sum \delta(a) \leqslant 2$ имеет место аналогичная теорема об индексах ветвления [1]):

Полный индекс ветвления самое большее равен 2:

$$\sum \vartheta(a) \leqslant 2. \tag{32}$$

Эта теорема замечательным образом ограничивает существование кратных точек. Значение индекса $\vartheta(a)$ дает меру для того, насколько велика относительная частота кратных корней уравнения $w(z) = a$. Индекс возрастает вместе с этой относительной частотой и достигает своего максимального значения 1 тогда, когда подавляющее большинство корней этого уравнения является кратным и кратность корней вблизи точки $z = \infty$ неограниченно возрастает, причем значение a не должно быть дефектным, так что величина $N(r, a)$ должна асимптотически равняться $T(r)$. Последнее требование является необходимым, так как не только $\delta(a) \leqslant 1$ и $\vartheta(a) \leqslant 1$, но и их сумма

$$\delta(a) + \vartheta(a) \leqslant 1,$$

как это непосредственно видно из соотношения

$$1 = \lim_{r \to R} \frac{m(r, a) + N(r, a)}{T(r)} \geqslant \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a) + N_1(r, a)}{T(r)} \geqslant \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m}{T} + \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N_1}{T}.$$

Следовательно, если $\delta(a) > 0$, то $\vartheta(a)$ необходимо < 1 *).

---

[1]) Эти теоремы можно рассматривать как обобщение известных более старых теорем Carathéodory [1].

*) Если $\vartheta(a) = 1$, то из того же соотношения следует, что

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, a) - N_1(r, a)}{T(r)} = 0,$$

что возможно только тогда, когда $n_1(r, a) \sim n(r, a)$. Для этого выше и требуется, чтобы „подавляющее большинство" корней уравнения $w(z) = a$ были кратными и чтобы их кратность неограниченно возрастала вблизи точки $z = \infty$. Последнее требование необходимо, так как, если кратность a-точек ограничена постоянным числом k, то $n_1(r, a) \leqslant \frac{k-1}{k} n(r, a)$, что противоречит условию $n_1(r, a) \sim n(r, a)$.

229. Так же как и соотношение дефектов, теорема об индексах ветвления является точной: верхняя граница 2 в (32) не может быть понижена. Простейший пример, когда соотношение (32) переходит в равенство, дают нам *двоякопериодические функции*. Здесь мы рассмотрим только некоторые особенно интересные частные случаи.

Интеграл

$$z(w)=\int_0^w (t-\alpha)^{\frac{1}{m}-1}(t-\beta)^{\frac{1}{n}-1}(t-\gamma)^{\frac{1}{p}-1}dt,$$

где α, β, γ — действительные числа, а m, n, p — целые числа, связанные соотношением

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1,$$

осуществляет конформное отображение верхней полуплоскости w на треугольник в плоскости z с углами $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$, $\frac{\pi}{p}$. Обратная функция $w=w(z)$ является однозначной двоякопериодической функцией от z (шварцова функция треугольника). Следует различать три случая:

1) $m=n=p=3$. Если учесть, что функция $w(z)$ в каждой паре соседних фундаментальных треугольников принимает каждое значение a ровно один раз, исключая вершины, в которых она *троекратно* принимает заданные значения α, β, γ, то легко вывести, что $N(r, a)\sim T(r)$ для каждого значения a, $N_1(r, a)=0$ для $a\neq\alpha,\beta,\gamma$ и $N_1(r, a)\sim\frac{2}{3}T(r)$ для $a=\alpha$, β, γ. Следовательно, $\delta(a)=0$ для всех значений a, а $\vartheta(a)=0$ для всех значений a, кроме $a=\alpha$, β, γ, для которых

$$\vartheta(\alpha)=\vartheta(\beta)=\vartheta(\gamma)=\frac{2}{3}.$$

Следовательно, как утверждалось,

$$\sum_{(a)}\vartheta(a)=2.$$

2) $m=2$, $n=p=4$. Как и в предыдущем случае, найдем, что $\delta(a)=0$ для всех значений a, а $\vartheta(a)=0$ для всех a кроме $a=\alpha,\beta,\gamma$, для которых $\vartheta(a)=\frac{1}{2}$, $\vartheta(\beta)=\vartheta(\gamma)=\frac{3}{4}$, так что

$$\sum_{(a)}\vartheta(a)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=2.$$

3) $m=2$, $n=3$, $p=6$. В этом случае $\vartheta(a)=0$ для $a\neq\alpha$, β, γ и $\vartheta(\alpha)=\frac{1}{2}$, $\vartheta(\beta)=\frac{2}{3}$, $\vartheta(\gamma)=\frac{5}{6}$, так что

$$\sum_{(a)}\vartheta(a)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=2.$$

Особого внимания заслуживает еще осиовная двоякопериодическая функция $w(z)$, имеино, *функция Вейерштрасса* $\wp(z)$. Она приним ет однократно все значения a, исключая *четыре* значения $a = a_1, \ldots, a_4$, для которых уравнение $w(z) = a$ имеет только двукратные корни. И здесь

$$\sum_{(a)} \vartheta(a) = \sum_{1}^{4} \vartheta(a_\nu) = 2.$$

В качестве примера функции, имеющей как дефектные значения, так и значения с положительным иидексом ϑ, укажем на $w = \cos z$. В этом случае $\delta(a) = 0$ для $a \neq \infty$, $\delta(\infty) = 1$ и $\vartheta(a) = 0$ для всех a, за исключением $a = \pm 1$, для которых $\vartheta = \frac{1}{2}$. Таким образом

$$\sum_{(a)} \delta(a) + \sum_{(a)} \vartheta(a) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

Аналогичное справедливо для всех однопериодических функций; только показательная функция занимает особое положение, так как для нее $\sum \vartheta$ исчезает, напротив $\sum \delta = 2$.

230. Вышерассмотренные периодические функции отличаются той особенностью, что все те значения a, которые соответствующая фуикция принимает кратно, являются *вполне разветвленными значениями*. Так мы называем каждое значение a, для которого уравнение $w(z) = a$ *не имеет простых корней*.

Имеет место замечательная

Теорема. *Число вполне разветвленных значений мероморфной функции самое большее равно четырем.*

Для доказательства нужно вторую основную теорему использовать несколько более точно, чем это было сделано посредством соотношеиия (31). Из теоремы (II) при $r \to \infty$ следует, что

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\sum_{1}^{q} m(r, a_\nu) + N_1(r)}{T(r)} \leqslant 2,$$

где $a_1, \ldots, a_q$ означают произвольные, различные между собой значения. Здесь

$$N_1(r) \geqslant \sum_{1}^{q} N_1(r, a_\nu),$$

так что

$$\sum \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a_\nu) + N_1(r, a_\nu)}{T(r)} \leqslant 2. \tag{33}$$

Величнна

$$\Theta(a) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{m(r, a) + N_1(r, a)}{T(r)} \tag{34}$$

может быть записана проще, если ввести величину

$$\overline{N}(r, a) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t, a)}{t}\, dt + \overline{n}(0, a) \log r, \tag{35}$$

где $\overline{n}(r, a) = n(r, a) - n_1(r, a)$ означает число корней уравнения $w(z) = a$, лежащих в круге $|z| \leqslant r$, причем каждый корень, независимо от его кратности, считается только один раз. Тогда $N(r, a) = N_1(r, a) + \overline{N}(r, a)$ и, следовательно, в силу соотношения $m + N \sim T$

$$\Theta(a) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r)}. \tag{34'}$$

Из соотношения (33) получается тогда следующая

Теорема. *Величина* $\Theta(a)$, *которая в силу своего определения лежит в интервале* $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$, *равна нулю для всех значений* a, *за исключением, быть может, счетного числа этих значений. Далее*

$$\sum \Theta(a) \leqslant 2. \tag{36}$$

Это общее соотношение содержит теорему (31) как непосредственное следствие, так как в силу (34)

$$\Theta(a) \geqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{m(r, a)}{T(r)} + \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N_1(r, a)}{T(r)} = \delta(a) + \vartheta(a).$$

231. Пусть теперь a — вполне разветвленное значение мероморфной функции $w(z)$. Тогда или a представляет собой пикаровское исключительное значение, или каждый корень уравнения $w(z) = a$ является по крайней мере двукратным. В первом случае $\delta(a) = 1$ и тем самым также $\Theta(a) = 1$. Во втором случае $n(r, a) \geqslant 2\overline{n}(r, a)$ и

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}(r, a)}{T(r)} \leqslant \frac{1}{2} \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{N(r, a)}{T(r)} \leqslant \frac{1}{2},$$

следовательно, $\Theta(a) \geqslant \frac{1}{2}$.

Для вполне разветвленного значения a *величина* $\Theta(a) \geqslant \frac{1}{2}$.

Следовательно в силу (36) число вполне разветвленных значений мероморфной функции самое большее равно четырем, что и требовалось доказать.

С другой стороны, существуют функции, имеющие ровно четыре вполне разветвленных значения. Такой функцией является $\wp$-функция Вейерштрасса.

232. Теорема о вполне разветвленных значениях допускает интересное применение к униформизации алгебраических кривых. Если

жанр алгебраической кривой $f(x, y)=0$ равен нулю, то, как известно, она допускает параметрическое представление

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — рациональные функции от t. Если жанр кривой равен единице, то униформизация удается с помощью эллиптических функций $x(t)$ и $y(t)$. Важным дополнением к этому служит

Теорема Пикара [1]). *Если кривая $f(x, y)=0$ имеет жанр $p>1$, то не существует ни одной пары мероморфных функций $x(t)$, $y(t)$ таких, что $f(x(t), y(t))\equiv 0$.*

Как заметил Пикар (там же), достаточно доказать теорему для случая гиперэллиптической кривой

$$y^2=(x-a_1)\ldots(x-a_q) \qquad (q=2p+1\geqslant 5) \tag{38}$$

жанра $p\geqslant 2$. То, что униформизация такой кривой невозможна с помощью двух мероморфных функций $x(t)$, $y(t)$, следует непосредственно из предыдущей теоремы о вполне разветвленных значениях. В самом деле, если бы такая униформизация была возможна, то из (38), с учетом однозначности функции $y(t)$, следовало бы, что мероморфная функция $x(t)$ имеет $q\geqslant 5$ вполне разветвленных значений, что противоречит доказанной выше теореме [2]).

Более подробный анализ геометрического значения величины Θ, которая играла важную роль в предыдущих применениях, будет дан в следующей главе.

XI. ОДНОЗНАЧНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ.

§ 1. Об особенностях функций одиолистных на одиосвязных поверхностях.

233. До сих пор мы исследовали теорию функций $w=w(z)$, однозначных для $|z|<R\leqslant\infty$, не рассматривая при этом образ, получающийся в плоскости переменного w благодаря соответствию $z\to w$. Правда, в первой главе мы уже подробно исследовали римановы поверхности, соответствующие особым автоморфным отображающим функциям $w(z; a_1, \ldots, a_q)$ (универсальные поверхности наложения плоскости с q выключенными точками), и в продолжении нашего изложения мы неоднократно пользовались общим понятием

---

[1]) E. Picard [2].

[2]) Это доказательство, впервые указанное A. Bioch'ом [2], целиком отличается от первоначального доказательства Пикара. Другое доказательство, применимое непосредственно к каждой кривой жанра $p>1$ и основанное на вспомогательных средствах современной теории распределения значений, было дано H. Selberg'ом [2].

универсальной поверхности наложения произвольной, расположенной в плоскости w однолистной области. Но и эти поверхности следует еще рассматривать как весьма специальные, поскольку соответствующие им отображающие функции автоморфны. Правда, как раз автоморфные функции и соответствующие им *регулярно-разветвленные* римановы поверхности дают весьма часто наиболее интересные примеры в общей теории распределения значений. Тем не менее, будет полезно познакомиться с некоторыми свойствами поверхностей, получающихся как образ круга $|z|<R\leqslant\infty$ при отображении его посредством произвольной однозначной в этом круге аналитической функции $w(z)$. На такой поверхности обратная функция z от w однозначна и однолистна, и, следовательно, вопрос будет итти об исследовании аналитических функций, характеризующихся этими свойствами.

234. Пусть в точке w_0 плоскости w задан регулярный аналитический элемент функции $E(w, w_0)$. Обозначим через $z(w)$ аналитическую функцию, получающуюся при неограниченном аналитическом продолжении этого элемента, и обозначим через F соответствующую риманову поверхность, расположенную над плоскостью w. Относительно аналитической функции $z(w)$ будем в дальнейшем предполагать следующее:

1) $z(w)$ однолистна, т. е. центрам двух различных элементов функции $z(w)$ всегда соответствуют два различных значения z.

2) Однолистный (в силу предыдущего условия) образ G_z в плоскости z представляет односвязную область.

При этих предположениях обратная функция $w(z)$ в области G_z однозначна и мероморфна. Что касается области G_z, то следует различать три случая (ср. гл. I, § 2):

1) G_z совпадает с полной плоскостью (эллиптический случай). $w(z)$ не имеет существенных особенностей и приводится к рациональной функции.

2) G_z представляет плоскость с выключенной точкой, например, всю конечную плоскость (параболический случай). $w(z)$ представляет тогда мероморфную во всей конечной плоскости трансцендентную функцию.

3) G_z ограничена континуумом Γ_z (гиперболический случай). Учитывая теорему Римана об отображении, можно, не нарушая общности, принять за область G_z единичный круг $|z|<1$.

235. Переходя теперь к вопросу об особенностях однолистной функции, начнем с простейшего случая *изолированной* критической точки w_0.*) Пусть $z(w)$ — ветвь функции, продолжаемая неограни-

*) Под критической точкой здесь и в дальнейшем подразумевается критическая точка ветви функции, т. е. такая точка, через которую эта ветвь однозначно непродолжима или вовсе непродолжима. Критическая точка называется изолированной, если в достаточно малой ее окрестности соответствующая ветвь функции неограниченно продолжима, притом так, что она не встречает никаких других критических точек.

ченно (с особенностями только рационального характера) в окрестности $0 < |w - w_0| \leqslant \rho$. Если положить $\log(w - w_0) = t$, то $z(w_0 + e^t)$ будет неограниченно аналитически продолжима в полуплоскости $H_t: \Re(t) \leqslant \log \rho$ и, следовательно, по теореме о монодромии будет в этой полуплоскости однозначна.

Если определенная таким образом ветвь функции однолистна в H_t, то она отображает H_t взаимно однозначно и конформно на некоторую область H_z в плоскости z. В этом случае ветвь $z(w)$ имеет критическую точку $w = w_0$ в качестве *логарифмической точки ветвления* (изолированная точка ветвления бесконечного порядка). Говорят, что $z(w)$ определяет логарифмический элемент заданной функции. Если w движется к точке ветвления w_0, то $z(w)$ необходимо должно стремиться к границе области G_z. Следовательно, в параболическом случае $z \to \infty$, а в гиперболическом случае $|z| \to 1$. Стремится ли z в последнем случае к вполне определенной точке окружности $|z| = 1$, представляет еще далеко не решенный вопрос [1]).

Если же z в H_t не однолистна, то существует значение z_0, которое z принимает в ряде точек $t_0, t_1, \ldots$ В силу однолистности $z(w)$ все эти значения должны соответствовать одному и тому же значению w, и, следовательно, $t_\nu - t_0 = m_\nu \, 2\pi i$, где m_ν — целое число. Если m — наименьшее из чисел $|m_\nu|$, то непосредственно убеждаемся, что z в H_t периодична с простым периодом $m 2\pi i$ *); в каждой полосе шириной в период функция z однолистна. Таким образом, в этом случае заданная ветвь $z(w)$ определяет *алгебраический элемент функции*, m значений которой циклически следуют друг за другом в окрестности точки w_0, представляющей точку ветвления $(m-1)$-го порядка римановой поверхности F.

---

[1]) Из теорем гл. VII, § 4 следует, что это, наверное, имеет место, если заданная риманова поверхность F ограниченного вида. В самом деле, если бы при $w \to w_0$ точка $z(w)$ описывала в круге $|z| < 1$ некоторую кривую L, не оканчивающуюся в определенной точке окружности $|z| = 1$, то L имела бы в качестве предельной области целую дугу этой окружности.

Функция $w(z)$ как функция ограниченного вида имеет почти всюду на окружности $|z| = 1$ радиальные предельные значения, и, следовательно, на этой дуге она обладала бы одним и тем же граничным значением $w = w_0$, а поэтому тождественно равнялась бы постоянной (в силу теорем гл. VII, § 4), что невозможно.

В общем случае на этот вопрос приходится ответить отрицательно, как это следует из примера, приведенного переводчиком книги в его диссертации. (Прим. перев.)

*) Число m не зависит от выбора значения z_0. В самом деле, пусть z_1 — другое значение, принимаемое z в H_t. Соединим точки $w^{(0)}$ и $w^{(1)}$, соответствующие z и z_1, некоторой дугой γ, пробегающей в круге $0 < |w - w_0| \leqslant \rho$. Так как w_0 по предположению *изолированная* критическая точка, то все значения $z(w)$ в точке $w^{(0)}$, будучи аналитически продолжены над γ, дадут ровно столько же значений $z(w)$ в точке $w^{(1)}$, откуда следует, что $m = m(z_0) \leqslant m(z_1)$; аналогично убеждаемся, что $m(z_1) \leqslant m(z_0)$, так что $m = m(z_0) = m(z_1)$.

Если $m=1$, то $z(w)$ однозначна в точке $w=w_0$, которая, следовательно, для этой ветви является правильной точкой*).

236. Пусть теперь L_w — непрерывная дуга кривой, оканчивающаяся в некоторой точке w_0 плоскости w. Возьмем на L_w точку $w_1 \neq w_0$, зафиксируем в ней элемент заданной однолистной функции $z(w)$ и предположим, что этот элемент может быть аналитически продолжен вдоль L_w до точки w_0 с возможным исключением этой конечной точки (допуская при аналитическом продолжении алгебраические особенности). Точка z описывает при этом в области G_z непрерывную дугу L_z, которая тогда и только тогда оканчивается во внутренней точке области G_z, когда $z(w)$ продолжима аналитически еще и через точку w_0. В противоположном случае, когда, следовательно, точка w_0 представляет *трансцендентную* особенность для рассматриваемой ветви функции, L_z оканчивается на границе Γ области G_z, т. е. в точке $z=\infty$, если поверхность F параболического типа, и на окружности $|z|=1$, если F гиперболического типа; в последнем случае нужно еще различать две возможности: либо L_z оканчивается в определенной граничной точке, либо имеет в качестве предельной области целую граничную дугу [1]). Если z стремится вдоль L_z к Γ, то w стремится к предельному значению w_0.

Обратно, если L_z — дуга предыдущего вида и $w(z)$ имеет на ней определенное асимптотическое значение w_0, то точка $w=w_0$ представляет трансцендентную особенность по крайней мере для одной ветви функции $z(w)$.

Оканчивающиеся на границе Γ *асимптотические пути мероморфной функции* $w(z)$ *и трансцендентные критические точки обратной функции* $z(w)$ *находятся во взаимно-однозначном соответствии.*

237. Возьмем теперь на заданном пути L_w, оканчивающемся в трансцендентной особенности w_0, точку w_1 такую, что $|w_1-w_0|<\rho$ $(\rho>0)$, и обозначим через $G_z(w_0, \rho)$ однолистную подобласть области G_z, покрываемую точками z, к которым приходим, фиксируя в точке w_1 элемент функции $z(w)$ и продолжая его затем неограниченно в круге $|w-w_0|<\rho$ [2]).

Область $G_z(w_0, \rho)$ можно, очевидно, определить еще и так: это та из определенных условием $|w(z)-w_0|<\rho$ связных частей области G_z, которая содержит точку $z_1=z(w_1)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что выбранная ветвь функции имеет w_0 в ка-

---

*) Это, однако, не мешает тому, что другие ветви функции могут иметь точку $w=w_0$ в качестве изолированной или неизолированной критической точки.

[1]) Первый случай, наверное, имеет место тогда, когда поверхность F ограниченного вида.

[2]) Если $w_0=\infty$, то как здесь, так и в дальнейшем нужно круг $|w-w_0|<\rho$ заменить областью $\left|\frac{1}{w}\right|<\rho$.

честве трансцендентной особенности; тогда, следовательно, $G_z(w_0, \rho)$ простирается до границы Γ области G_z.

Граница области $G_z(w_0, \rho)$ состоит из конечного или бесконечного числа аналитических дуг $\Gamma(w_0, \rho)$, на которых $|w(z) - w_0| = \rho$. Эти дуги или открытые и оканчиваются тогда на Γ, или они замкнуты. Замкнутые дуги ограничивают подобласти области G_z, в которых $w(z)$, по крайней мере в непосредственной близости от граничных точек $\Gamma(w_0, \rho)$, обладает свойством $|w(z) - w_0| > \rho$, и, следовательно, каждая из этих дуг содержит по крайней мере один полюс функции $w(z)$, так как в противном случае $|w - w_0|$ в силу принципа максимума, тождественно равнялась бы ρ. Если добавить эти замкнутые области к области $G_z(w_0, \rho)$, то получится некоторая односвязная область $\overline{G}_z(w_0, \rho)$.

238. Если w_0 — логарифмическая точка ветвления, то $G_z(w_0, \rho)$ для достаточно малых значений $\rho > 0$ будет ограничена одной единственной открытой граничной дугой $\Gamma(w_0, \rho)$. Кроме этого простейшего вида трансцендентной особенности заслуживает внимания следующий несколько более общий случай: предположим, что существует такое малое число $\rho > 0$, что рассматриваемая ветвь функции $z(w)$ вообще непродолжима в круге $|w - w_0| < \rho$ через точку w_0. Область $G_z(w_0, \rho)$ отличается тогда тем свойством, что $w(z)$ в этой области *не принимает значения* w_0. По Иверсену (Iversen) [1]), который первый подвергнул систематическому исследованию функции, обратные к мероморфным, такую особенность называют *прямо критической* (direkt kritische) трансцендентной особенностью однолистной функции, в отличие от косвенно критических (indirekt kritische) трансцендентных особенностей, при которых $z(w)$ вдоль подходящих путей в круге $|w - w_0| < \rho$ продолжима через точку w_0, как бы мало ни было число $\rho > 0$.

Из предыдущего следует, что достижимая точка w_0, представляющая пикаровское исключительное значение для мероморфной функции $w(z)$, всегда определяет прямо критическую трансцендентную особенность обратной функции $z(w)$. Простейшие примеры однолистных функций с одними лишь изолированными особенностями дают функции, обратные к периодическим или автоморфным функциям. Логарифм имеет всего два логарифмических элемента (над $w = 0, \infty$); $z = \arcsin w$ имеет над $w = \infty$ две различные логарифмические точки ветвления, а над $w = \pm 1$ бесконечное число алгебраических точек ветвления первого порядка*). Римановы поверхности, соответствующие двоякопериодическим функциям, имеют только алгебраические точки ветвления; поверхность модулярной функции $w(z; a_1, a_2, a_3)$ имеет, напротив, только логарифмические точки ветвления, притом в бесконечном числе над каждой точкой a_ν.

---

[1]) F. Iversen [1].

*) Это легко следует из того, что $z = \arcsin w$ отображает верхнюю полуплоскость на полуполосу.

Точки ветвления упомянутых регулярно разветвленных поверхностей расположены над конечным числом точек плоскости. Но и нерегулярно разветвленные поверхности с той же особенностью (т. е. точки, ветвления которых проектируются в конечное число точек) дают примеры, интересные с точки зрения теории распределения значений. Из этих поверхностей, которые мы будем изучать еще дальше в § 2 этой главы, упомянем уже здесь те, которые соответствуют целой функции

$$w = \int_0^z e^{-t^q} dt,$$

приведенной в одной из предыдущих глав (гл. VI, § 2) в качестве примера функции, имеющей несколько асимптотических значений. Эти асимптотические значения $a_0 = \infty$ и

$$a_\nu = e^{\frac{2\nu\pi i}{q}} \int_0^\infty e^{-r^q} dr$$

являются одновременно *дефектными* значениями с $\delta(a_0) = 1$, $\delta(a_\nu) = \frac{1}{q}$ ($\nu = 1, \ldots, q$). Легко видеть, что обратная функция $z(w)$ имеет точки ветвления только над $w = a_0, a_1, \ldots, a_q$; соответствующая риманова поверхность имеет всего $2q$ логарифмических точек ветвления, из которых половина расположена над точкой $w = a_0$, в то время как остальные q расположены по одной над точками $w = a_1, \ldots, a_q$; кроме логарифмических точек ветвления над каждой из последних точек расположено еще бесконечно много правильных точек.

Прямо критической, но не логарифмической трансцендентной особенностью (в отличие от того, что имело место в вышеприведенных примерах) является точка $w = \infty$ для функции, обратной к $w = z \sin z$.

В качестве примера косвенно критической трансцендентной особенности укажем на точку $w = 0$ для функции, обратной к

$$w = \frac{\sin z}{z}.$$

Это функция стремится к нулю, когда $z \to \infty$ вдоль положительной действительной оси и, следовательно, имеет здесь асимптотическое значение 0. Если взять малое положительное число ρ и рассмотреть окрестность G_ρ положительной действительной оси, определенную условием $|w| < \rho$, то соответствующая ветвь обратной функции $z(w)$ будет иметь точку $w = 0$ в качестве косвенно критической трансцендентной особенности, так как она принимает значение $w = 0$ в бесконечном числе точек области G_ρ, именно, в точках $z = \nu\pi$ ($\nu = 1, 2, \ldots$).

В силу вышеизложенного (ср. п. 235) изолированная трансцендентная особенность приводится к логарифмической точке ветвления и, следовательно, является прямо критической. Поэтому каждая косвенно критическая трансцендентная особенность не может быть изолированной; в приведенном примере точка $w=0$ является предельной для последовательности алгебраических точек ветвления первого порядка, которые соответствуют корням уравнения $w'(z)=0$, т. е. $\operatorname{tg} z = z$.

239. Теорема Иверсена о параболических поверхностях. Кроме вышерассмотренных достижимых особенностей у однолистной функции могут встретиться и недостижимые особенности. Так, например, если за F взять односвязную *однолистную* область, имеющую недостижимую граничную точку w_0, то конформное отображение области F на единичный круг $|z|<1$ даст однолистную функцию $z(w)$, для которой точка w_0 является недостижимой.

Эта особая поверхность была гиперболического типа. У поверхностей параболического типа особенности имеют менее сложный вид; в частности, здесь *все точки w достижимы*. Это вытекает непосредственно из следующей теоремы Иверсена (Iversen [1]).

Пусть F — риманова поверхность параболического типа, расположенная над плоскостью w, и $w=w_0$ — произвольная точка плоскости. Пусть далее $\rho>0$, w_1 — точка поверхности F и $|w_1-w_0|=\rho$. Тогда можно найти непрерывную дугу L, которая, не выходя из круга $|w-w_0|<\rho$, соединяет точки w_0 и w_1 и, исключая, быть может, точку w_0, состоит только из внутренних точек поверхности F.

Если $z(w)$ — функция, отображающая поверхность F на всю конечную плоскость $z \neq \infty$, то нужно показать, что для произвольной, фиксированной в точке $w=w_1$, ветви этой функции найдется непрерывный путь L, пробегающий в круге $|w-w_0|<\rho$ от w_1 до w_0, вдоль которого, исключая, быть может, точку w_0, эта ветвь функции аналитически продолжима.

Для доказательства [1]) рассмотрим граничащую с точкой $z_1 = z(w_1)$ односвязную область G_ρ плоскости z, точки которой удовлетворяют условию $|w(z)-w_0|<\rho$. Если функция $w(z)$ по крайней мере в одной точке z_0 области G_ρ принимает значение w_0, то достаточно соединить точки z_1 и z_0 внутри G_ρ непрерывной кривой, чтобы получить на поверхности F кривую желаемого вида.

Если же в области G_ρ функция $w(z)$ не принимает значения w_0, то ограничим вокруг z_1 односвязную подобласть G_1 области G_ρ, точки которой удовлетворяют условию $\rho > |w-w_0| > \frac{\rho}{2}$. Область G_1 имеет по крайней мере одну граничную точку z_2, расположенную в G_ρ,

[1]) Нижеследующее доказательство в принципе восходит к G. Valiron'у [3].

для которой $|w(z)-w_0|=\frac{\rho}{2}$, ибо иначе регулярная в G_1 функция $\frac{1}{w(z)-w_0}$ имела бы в каждой конечной граничной точке области G_1 значение, равное по абсолютной величине $\frac{1}{\rho}$. Но так как в окрестности бесконечно удаленной точки, если она входит в границу области G_1, эта функция ограничена $\left(\leqslant\frac{2}{\rho}\right)$, то из принципа максимума следовало бы, что $\frac{1}{|w-w_0|}\leqslant\frac{1}{\rho}$ во всей области G_1, что невозможно.

Пусть далее G_2 — граничащая с z_2 односвязная подобласть области G_ρ, в которой $\frac{\rho}{2}>|w-w_0|>\frac{\rho}{4}$. Как и выше, убеждаемся, что G_2 имеет конечную граничную точку z_3, в которой $|w(z)-w_0|=\frac{\rho}{4}$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность расположенных рядом друг с другом областей $G_1, G_2, \ldots$ таких, что в G_n имеем $\frac{\rho}{2^{n-1}}>|w(z)-w_0|>\frac{\rho}{2^n}$ и G_n имеет с G_{n+1} общую граничную точку, в которой $|w(z)-w_0|=\frac{\rho}{2^n}$.

При $n\to\infty$ области G_n сходятся к $z=\infty$, так как в пересечении D_r области G_ρ с заданным кругом $|z|\leqslant r$ модуль $|w(z)-w_0|$ имеет положительную нижнюю границу, и, следовательно, G_n для достаточно большого n должна лежать вне этого круга. Если теперь для каждого $n=1, 2, \ldots$ соединить точки z_n и z_{n+1} непрерывной кривой, пробегающей в G_n, то получим в G_ρ непрерывный путь L_z, идущий от точки z_1 до $z=\infty$, вдоль которого $w(z)$ стремится к w_0. Образ L_w этой кривой в плоскости w обладает всеми утверждавшимися в теореме свойствами.

Из доказанной теоремы следует, что

Функция, мероморфная для $z\neq\infty$, имеющая пикаровское исключительное значение, имеет это значение в качестве асимптотического значения.

240. Теорема Гросса [1]. *Если F — односвязная риманова поверхность параболического типа и $z(w)$ означает ветвь соответствующей данной поверхности отображающей функции, однозначную в точке $w_0\neq\infty$, то эта ветвь может быть аналитически продолжена вдоль каждого луча $\arg(w-w_0)=\varphi$ до точки $z=\infty$, исключая самое большее множество значений φ меры нуль* [2].

---

[1]) W. Gross [2].

[2]) Особое положение бесконечно удаленной точки является несущественным. Вместо семейства лучей $\arg(w-w_0)=\varphi$ можно было бы, например, рассматривать семейство окружностей C_φ, проходящих через точку w_0 и произвольную точку $w_1\neq w_0$, причем параметр φ указывает направляющий угол соответствующей касательной в точке w_0. Почти для всех φ функция $z(w)$ может быть тогда аналитически продолжена вдоль C_φ до точки w_1.

Будем двигаться вдоль каждого луча $\arg(w-w_0)=\varphi$ от точки w_0 до первой трансцендентной или алгебраической особенности или, если они не встретятся, до точки $z=\infty$. Определенные таким образом сегменты H_φ покрывают „звезду" рассматриваемого элемента функции $z(w)$. Теорема Гросса утверждает, следовательно, что множество значений φ, соответствующих вершинам этой звезды, находящимся на конечном расстоянии, имеет меру нуль. Так как алгебраических вершин не более счетного числа, то достаточно доказать нульмерность для множества M трансцендентных вершин.

Далее можно ограничиться рассмотрением точек M_R, лежащих в круге $|w-w_0|\leqslant R$, где R — произвольное положительное число. В самом деле, если множество соответствующих значений φ имеет меру нуль, то то же самое имеет место и для множества значений φ, соответствующих всем вершинам M, так как его можно представить в виде суммы нульмножеств, соответствующих множествам вершин M_{R_n} $(R_1<R_2<\ldots;\ R_n\to\infty)$.

Пусть S_w — пересечение нашей звезды с кругом $|w-w_0|\leqslant R$. С помощью функции $t=\dfrac{1}{z(w)-z(w_0)}$ внутренность S_w отображается взаимно однозначно и конформно на однолистную область S_t, содержащую бесконечно удаленную точку, в то время как нулевая точка лежит вне S_t или на ее границе. Последний случай, наверное, имеет место, если множество M_R „трансцендентных граничных точек" области S_w не пусто, ибо при приближении к такой точке $z\to\infty$ и, следовательно, $t\to 0$.

Рассмотрим теперь для фиксированного значения $r>0$ совокупность конечного или бесконечного числа дуг $\Delta_t(r)$ окружности $|t|=r$, попадающих в S_t. Эти сечения отделяют граничную точку $t=0$ от внутренней точки $t=\infty$ и, следовательно, их образы $\Delta_w(r)$ в звездообразной области S_w представляют сечения этой области, отделяющие точку $w=w_0$ от всех точек M_R. Отсюда следует, что мера $m(\varphi)$ соответствующих значений φ не больше, чем сумма колебаний $\arg(w-w_0)$ на дугах $\Delta_w(r)$. Но колебание $\arg(w-w_0)$ на $\Delta_w(r)$ самое большее равно длине дуги $\Delta_w(r)$, деленной на δ_r, где δ_r — кратчайшее расстояние от w_0 до $\Delta_w(r)$. Если r взять меньшим, чем произвольное число $r_0>0$, то все расстояния δ_r будут больше некоторого числа $\delta_0>0$, зависящего только от r_0. Поэтому достаточно показать, что *сумма $s(r)$ длин сечений $\Delta_w(r)$ может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе радиуса r* $(0<r\leqslant r_0)$.

Полагая $t=re^{i\vartheta}$, $f(t)=w\left(z_0+\dfrac{1}{t}\right)$ и применяя неравенство Шварца, получаем

$$(s(r))^2=\Big(\int\limits_{\Delta_t(r)}|f'(t)|\,|dt|\Big)^2\leqslant 2\pi r\int\limits_{\Delta_t(r)}|f'(t)|^2 r\,d\vartheta.$$

Здесь

$$\int\limits_{\Delta_t(r)} |f'(t)|^2 r\,d\vartheta = \frac{dA}{dr},$$

где $A(r)$ означает площадь той части области S_w, которая содержит точку w_0 и ограничена сечениями $\Delta_w(r)$. Интегрируя между пределами r и r_0 $(>r)$, найдем, что

$$\int\limits_r^{r_0} \frac{s^2}{r}\,dr \leqslant 2\pi\,[A(r) - A(r_0)] < 2\pi^2 R^2.$$

Этот результат имеет место для всех значений $0 < r \leqslant r_0$. Отсюда следует, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется по крайней мере одно значение r $(0 < r \leqslant r_0)$, для которого $s(r) < \varepsilon$. В самом деле, в противном случае интеграл

$$\int\limits_r^{r_0} \frac{s^2}{r}\,dr \geqslant \varepsilon^2 \log\frac{r_0}{r}$$

и стремился бы при $r \to 0$ к бесконечности, что противоречит предыдущему неравенству.

Тем самым доказательство теоремы Гросса доведено до конца.

241. Теоремы Иверсена и Гросса указывают на то, что особенности параболической поверхности размещаются на ней относительно редко. Однако это не мешает тому, что проекции особенностей на плоскость w могут лежать в ней весьма плотно. Гросс (W. Gross [2]) построил пример целой функции, имеющей асимптотическим *каждое* значение; здесь, следовательно, проекции особенностей заполняют всю плоскость w.

§ 2. Римановы поверхности, точки ветвления которых расположены над конечным числом точек.

242. При большой общности основных теорем теории распределения значений важно уметь испытать на конкретных примерах содержащиеся в них утверждения. Среди функций, которые с точки зрения теории распределения значений особенно интересны, следует прежде всего упомянуть периодические и автоморфные (фуксовы) функции. Точки ветвления соответствующих им регулярно разветвленных римановых поверхностей лежат над конечным числом точек. Естественно поэтому исследовать общий класс односвязных римановых поверхностей, которые, не будучи обязательно регулярно разветвленными, имеют с предыдущими поверхностями то общее, что и у них точки ветвления расположены над конечным числом точек. В рамках этой книги невозможно изложить эту проблему во всех подробностях со всей строгостью. Поэтому мы ограничимся описанием этого класса поверхностей в общих чертах и указанием тех

путей, по которым могут быть проведены необходимые доказательства существования.

243. Итак, пусть в плоскости w задано конечное число $q \geqslant 2$ точек $a_1, \ldots, a_q$. Сперва вопрос будет итти о выяснении топологической структуры односвязной римановой поверхности F, точки ветвления которой расположены только над точками $a_1, \ldots, a_q$. Хорошее представление о структуре такой поверхности дает метод, полностью аналогичный методу, лежащему в основе описания универсальной поверхности наложения плоскости w с выключенными точками a_ν (ср. гл. I, § 3), поверхности, отличающейся среди исследуемых теперь поверхностей максимальной возможной разветвленностью.

Через точки a_ν, взятые в порядке $a_1, \ldots, a_q, a_1$, проведем простую замкнутую жорданову кривую γ, разбивающую плоскость w на две односвязные области G_1 и G_2, которые постольку „зеркально" соответствуют друг другу, поскольку заданное на γ направление является положительным в отношении одной из областей G_1, G_2 и отрицательным в отношении другой. Если поверхность разрезать вдоль γ (т. е. вдоль всех линий на поверхности, расположенных над γ), то она распадается на конечное или бесконечное число конгруэнтных между собой экземпляров G_1 и такое же число конгруэнтных между собой экземпляров G_2. Для краткости будем называть эти „полулисты" G_1, G_2 многоугольниками, точки $a_1, \ldots, a_q$ — вершинами и дуги (a_1a_2), $(a_2a_3), \ldots, (a_qa_1)$ — сторонами этих многоугольников.

Вершины $a_1, \ldots, a_q$ заданного многоугольника G_ν $(\nu = 1, 2)$ суть трех видов: 1) точки ветвления бесконечного порядка; 2) точки ветвления конечного порядка, в которых циклически соединяется конечное число $m > 1$ листов $G_1 + G_2$; 3) неразветвленные точки поверхности. Первые точки назовем вершинами бесконечного порядка, вторые — вершинами $(m-1)$-го порядка, причем, следовательно, $m - 1 > 0$ означает порядок соответствующей точки ветвления, а третьи точки назовем несобственными вершинами, или вершинами нулевого порядка.

Как в гл. I, § 3, мы и здесь представим риманову поверхность F посредством *однолистного образа* (Graph) G, составленного из некоторого числа соответствующих полулистам G_ν топологически эквивалентных с ними многоугольников G_ν^μ $(\nu = 1, 2; \mu = 1, 2, \ldots)$, расположенных друг около друга так, что два многоугольника G_1^μ, G_2^μ тогда и только тогда примыкают друг к другу вдоль некоторой стороны, когда соответствующие многоугольники G_1, G_2 на поверхности F имеют общим „образ" этой стороны. Для вершин сохраним обозначения $a_1, \ldots, a_q$. Чтобы суметь геометрически осуществить построение однолистного образа G, не будем накладывать никаких ограничений на величину и форму многоугольников G_1^1, $G_1^2, \ldots$ (соответственно $G_2^1, G_2^2, \ldots$). Важно лишь, чтобы они были топологически эквивалентны друг другу, т. е. были криволинейными q-угольниками.

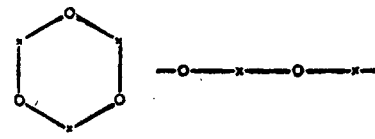
Внутренние вершины однолистного образа G суть или несобственные вершины (нулевого порядка), с которыми граничат два многоугольника, или собственные вершины положительного порядка $m-1$. Такая вершина является общей для m многоугольников G_1 и такого же числа многоугольников G_2, причем при обходе вокруг вершины многоугольники обоих видов следуют, чередуясь, друг за другом. Вершины бесконечного порядка представляют собой „граничные точки" однолистного образа G.

Исключая тривиальный случай, когда поверхность F однолистна и совпадает с полной плоскостью, каждый многоугольник G_1, G_2 имеет по крайней мере две собственные вершины.

В самом деле, пусть G_1 — многоугольник, для которого $q-1$ вершин $a_1,\ldots,a_{q-1}$ являются несобственными. К каждой паре сторон этого многоугольника примыкает тогда только один многоугольник G_2, и так как две следующие друг за другом пары имеют общую сторону, то отсюда следует, что с G_1 может граничить только *один* многоугольник, который представляет тогда дополнение к G_1 до полной плоскости. Это замечание показывает, что многолистные поверхности имеют по крайней мере две точки ветвления, не расположенные друг над другом. Следовательно, предположение, что число точек a_ν не меньше двух, не составляет никакого ограничения.

244. *Случай* $q=2$. Различные двухугольники G_1, G_2 группируются друг около друга в обе стороны или в конечном числе $2m$ или в бесконечном числе. В первом случае мы имеем дело с m-листной поверхностью корня $(z=\sqrt[m]{w})$ с двумя точками ветвления $(m-1)$-го порядка, во втором случае мы имеем дело с поверхностью логарифмической функции $(z=\log w)$ с двумя точками ветвления бесконечного порядка.

Для наглядного изображения структуры этих поверхностей можно воспользоваться *комплексом отрезков* (Streckenkomplex)[1]), который может быть получен с помощью того же метода, что и топологическое дерево Шпайзера, о котором говорилось в гл. I, § 2. В каждом из многоугольников G_1, G_2 берется внутренняя точка P_1, P_2, и каждая из этих *узловых* точек соединяется с помощью q отрезков $S_{12}, S_{23},\ldots,S_{q1}$ с узловыми точками непосредственно примыкающих многоугольников однолистного образа G, притом так, что $S_{\nu,\nu+1}$ через сторону $a_\nu a_{\nu+1}$ ведет к узловой точке примыкающего вдоль этой стороны многоугольника; все отрезки выбираются не имеющими общих точек.



Фиг. 18.

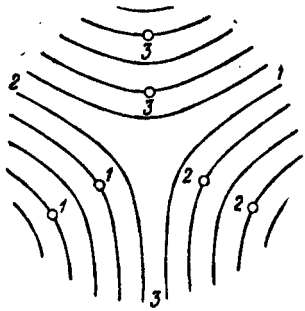
В рассматриваемом случае, когда $q=2$, оба возможных типа поверхностей $(0<m<\infty$ и $m=\infty)$ могут, следовательно, быть представлены фиг. 18 (первая фигура соответствует значению $m=3$).

[1]) См. R. Nevanlinna [10], G. Elfving [1].

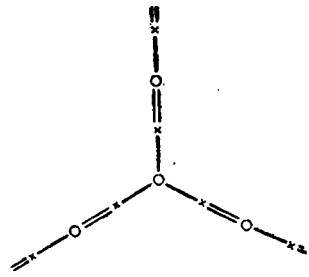
Комплекс отрезков разбивает плоскость на известные области, которые мы называем *элементарными областями* римановой поверхности. Заметим, что в предыдущем случае элементарные области взаимно однозначно соответствуют точкам ветвления поверхности, причем точке ветвления $(m-1)$-го порядка соответствует элементарная область с $2m$ вершинами и сторонами.

245. *Случай* $q=3$. Однолистный образ G состоит из одних лишь треугольников G_ν. Последние могут быть двух видов: или все три вершины являются собственными, или среди трех вершин одна несобственная, в которой, следовательно, поверхность F не разветвляется. Если все треугольники второго вида, то, очевидно, имеем дело с уже рассмотренным простейшим случаем, когда поверхность разветвляется только над двумя точками. Если же над каждой из точек a_1, a_2, a_3 лежит по крайней мере одна точка ветвления, то однолистный образ содержит по крайней мере один треугольник с тремя собственными вершинами.

С другой стороны, существует поверхность, имеющая только один такой треугольник. К этой поверхности мы придем, если, как



Фиг. 19.



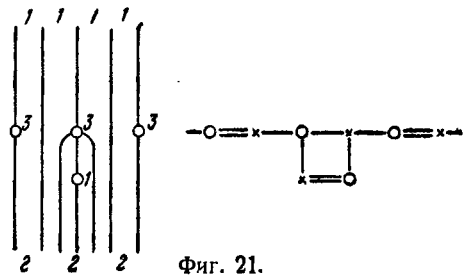
Фиг. 20.

это показано на фиг. 19, присоединить к каждой из сторон треугольника с тремя собственными вершинами бесконечный ряд следующих друг за другом треугольников, имеющих одну несобственную вершину. Легко видеть, что построенная таким образом поверхность, имеющая три логарифмические точки ветвления, по одной над каждой из точек a_1, a_2, a_3, является единственной поверхностью указанного вида.

Мы потому выделили эту поверхность, что она обладает еще некоторыми другими важными для нас свойствами, о которых будем еще говорить дальше. Здесь мы только покажем, как построен соответствующий комплекс отрезков. Его легко построить с помощью общего правила, данного выше, если в каждом из треугольников выбрать узловую точку и соединить соседние узловые точки отрезками; мы замечаем, что за исключением первого треугольника, имеющего только собственные вершины, к каждому соседнему треугольнику ведут *два* отрезка. Для упрощения фигуры условимся

каждую пару (или, более, μ) отрезков, соединяющих одну и ту же пару узловых точек P_ν, изображать в виде двойного (μ-кратного) отрезка. Тогда рассматриваемая поверхность представится изображенным на фиг. 20 комплексом отрезков. Наоборот, задание комплекса отрезков достаточно для однозначного определения структуры соответствующей поверхности. Построенный нами комплекс отрезков для поверхности с тремя логарифмическими точками ветвления отличается от топологического дерева (гл. I, § 2) тем, что он содержит замкнутые элементарные области (представленные двойными отрезками). Бесконечные ветви как комплекса, так и топологического дерева, граничащие с двумя соседними элементарными областями, назовем вместе со Шпайзером (Speiser [2]) *логарифмическими концами.*

Упомянем еще некоторые другие поверхности, встречающиеся при $q=3$. Если оставить в стороне замкнутые поверхности, соответствующие рациональным отображающим функциям $w(z)$, то простейшими поверхностями рассматриваемого вида будут те, у которых имеются только две логарифмические точки ветвления. В качестве простого примера укажем на поверхность функции $w=ze^{-z}$, имеющую над каждой из точек $a_1=0$, $a_2=\infty$ логарифмическую точку ветвления и над точкой $w=\frac{1}{e}$ точку ветвления первого порядка. Соответствующие однолистный образ и комплекс отрезков приведены рядом друг с другом на фиг. 21; связь их с поверхностью ясна без дальнейшего.



Фиг. 21.

246. Регулярно разветвленные поверхности характеризуются тем, что существует группа преобразований (преобразования наложения), отображающих однолистный образ топологически самого на себя. Среди этих поверхностей в случае $q=3$ простейшими являются те, у которых все треугольники эквивалентны друг другу постольку, поскольку они имеют одну и ту же схему ветвления, т. е. если во всех треугольниках порядки вершин a_1, a_2, a_3 равны трем заданным числам m_1-1, m_2-1, m_3-1.

К числу последних принадлежат поверхности шварцовых функций треугольника, о которых уже говорилось в предыдущей главе (§ 3). Они получаются, если треугольник P с вершинами z_1, z_2, z_3, углами $\frac{\pi}{m_1}$, $\frac{\pi}{m_2}$, $\frac{\pi}{m_3}$, где $m_\nu \geqslant 1$ — целые числа, и сторонами, представляющими дуги окружностей, взаимно однозначно и конформно отобразить на круг K и отображающую функцию $w(z)$ неограниченно аналитически продолжить при помощи зеркального отображе-

ния. В плоскости z получается, таким образом, однолистный образ G поверхности F, расположенной над плоскостью w, точки ветвления которой лежат над тремя граничными точками w_1, w_2, w_3 круга K. Это построение вполне аналогично проведенному в гл. I, § 3; рассмотренный тогда случай модулярной функции содержится здесь как частный случай ($m_1 = m_2 = m_3 = \infty$).

Таблица 1.

m_1	m_2	m_3
1	n	n
2	2	n
2	3	3
2	3	4
2	3	5

Что касается однолистного образа G, то следует различать три случая в зависимости от того, будет ли сумма углов треугольника P больше, равна или меньше π.

1) $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}>1$. Это условие выполняется только для комбинаций значений, указанных в таблице 1. Соответствующие поверхности замкнуты. Если спроектировать плоскость z на сферу Римана, то треугольники будут конгруэнтны друг другу и группа преобразований наложения совпадает с группой вращений правильных многогранников [1]). Отображающая функция $w(z)$ рациональна, и поверхность F *эллиптического типа.*

2) $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=1$. В этом случае однолистный образ G заполняет однолистно и без пропусков всю конечную плоскость. И здесь возможно только конечное число комбинаций значений m_1, m_2, m_3 (табл. 2). Из соответствующих отображающих функций первые две являются однопериодическими (e^z и $\sin z$), остальные двоякопериодические. Соответствующие поверхности *параболического типа.*

Таблица 2.

m_1	m_2	m_3
1	∞	∞
2	2	∞
2	3	6
2	4	4
3	3	3

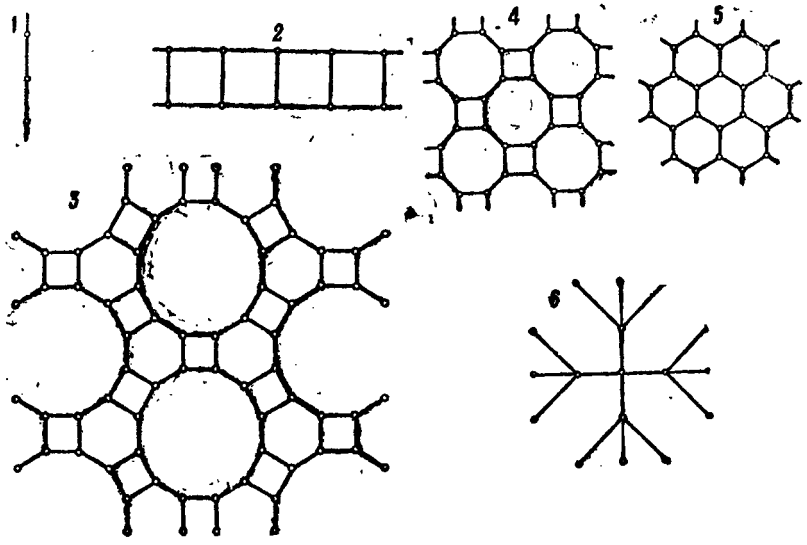
3) $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}<1$. Это общий случай, который имеет место при произвольном выборе положительных чисел m_1, m_2, m_3, исключая указанные в предыдущих таблицах системы значений. Группа зеркальных отображений оставляет инвариантным круг E, содержащий треугольник P и ортогонально пересекающий его стороны; непосредственно видно, что образ G покрывает однолистно и без пропусков круг E_ϱ, совпадающий при соответствующей нормировке с единичным кругом $|z|<1$. Соответствующие римановы поверхности *гиперболического типа* *).

---

[1]) См. H. Schwarz [2].

*) Все эти утверждения для $\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\gtrless 1$ легко доказываются путем непосредственного рассмотрения треугольника P. См., например, Форд, Автоморфные функции, ГТТИ, 1936, § 114; там же, в гл. VI и IX рассмотрена связь с полиэдральными функциями и униформизацией.

На фиг. 22 представлены с помощью комплексов отрезков некоторые из поверхностей функций треугольников: первые пять соответствуют пяти возможным случаям 2, последний соответствует гиперболическому случаю (4, 4, 4). Для упрощения все узловые точки нарисованы в виде кружочков.



Фиг. 22.

247. *Случай* $q > 3$. Здесь мы ограничимся лишь тем, что отметим регулярно разветвленные поверхности, к которым приходим, отображая на круг K многоугольник P, ограниченный $q > 3$ дугами окружностей. Однолистное и без пропусков покрытие всей конечной плоскости получается только тогда, когда $q = 4$ и P — прямоугольник; соответствующая отображающая функция $w(z)$ есть $\wp$-функция. Это также единственный случай, ведущий к параболическому типу. Все остальные случаи ($q > 3$) приводят к гиперболическому типу. К ним мы приходим, выбирая за стороны многоугольника P произвольные дуги окружностей, ортогональные, например, к единичной окружности; тогда получается однолистное и без пропусков покрытие единичного круга.

248. *Конформное отображение поверхностей* F. С помощью однолистных образов G и соответствующих комплексов отрезков мы топологически охарактеризовали совокупность односвязных римановых поверхностей F, разветвляющихся над конечным числом q точек $w_1, \ldots, w_q$. Из теоремы Римана об отображении (гл. I, § 2, основная теорема B) следует, что отображение $F \to G$ выполнимо *конформно*, т. е. для заданного однолистного образа G, при произвольном выборе точек $w_1, \ldots, w_q$ и проходящей через них простой замкнутой жордановой кривой γ, найдется *однолистная аналити-*

ческая функция $z(w)$, не разветвляющаяся над точками $w \neq w_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, q$) и отображающая поверхность F на сеть G_0 многоугольников в плоскости z, топологически эквивалентную с заданным однолистным образом. При соответствующей нормировке G_0 совпадает соответственно с полной плоскостью, со всей конечной плоскостью или с единичным кругом, и отображающая функция $z(w)$ определяется однозначно с точностью до линейных преобразований плоскости z.

Здесь наступает необходимость различать не только замкнутые, конечнолистные поверхности и открытые, бесконечнолистные поверхности, как это имело место при их топологической характеристике, но еще и дальнейшее разбиение открытых поверхностей на поверхности параболические и гиперболические в зависимости от того, ограничена ли область G одной точкой или континуумом.

В весьма специальном случае регулярно разветвленных поверхностей, о которых говорилось выше, построение конформного отображения осуществляется с помощью принципа зеркального отображения. В общем случае мы должны удовлетвориться указанием на менее элементарную теорему Римана (гл. 1, § 2, основная теорема В). Сделаем лишь одно замечание, полезное для построения отображающей функции и важное для наших дальнейших рассуждений.

Предполагая возможной униформизацию конечнолистных эллиптических поверхностей F, мы приходим к построению отображающей функции для произвольной поверхности рассмотренного в этой главе класса с помощью следующего предельного процесса. Пусть F — заданная односвязная бесконечнолистная риманова поверхность, точки ветвления которой лежат над точками $w_1, \ldots, w_q$, и пусть G — соответствующий ей однолистный образ. Возьмем произвольный многоугольник G^0 из G и присоединим к его сторонам непосредственно примыкающие многоугольники G^1 (первое поколение), затем ко всем свободным сторонам многоугольников G^1 присоединим непосредственно примыкающие многоугольники G^2 (второе поколение) и т. д. Обозначим через G_n многоугольник, состоящий из поколений $G^0, G^1, \ldots, G^n$. Непрерывной деформацией (топологическим отображением) можно добиться, чтобы многоугольник G_n имел форму круга. Присоединяя тогда к G_n многоугольник $\overline{G}_n$, полученный при инверсии G_n относительно границы этого круга, мы получим однолистный образ $G_n + \overline{G}_n$ эллиптической, конечнолистной поверхности F_n, точки ветвления которой расположены над точками $w_1, \ldots, w_q$. Построим для этой поверхности отображающую функцию $z = z_n(w)$, удовлетворяющую начальным условиям $z_n(w_0) = 0$, $z_n'(w_0) = 1$, где $w = w_0$ — фиксированная точка поверхности F_n. При этих условиях функция $z_n(w)$ определяется однозначно.

Рассмотрим теперь последовательность функций $z_1(w), z_2(w), \ldots$, соответствующих аппроксимирующим поверхностям $F_1, F_2, \ldots$

В окрестности $|w-w_0|<2\rho$, не содержащей точек $w_1, \ldots, w_q$, функции $z_n(w)$ однозначны, и так как они кроме того однолистны, то по теореме Кёбе об искажении заключаем, что в круге $|w-w_0|\leqslant\rho$ они равномерно ограничены. Но по теореме Витали (Vitali) из последовательности равномерно ограниченных аналитических функций можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в каждой замкнутой подобласти [1]). Продолжая цепочнообразно область сходимости, мы придем к предельной функции $z(w)$, дающей желательное конформное отображение заданной римановой поверхности F. В более подробное рассмотрение этого метода доказательства мы здесь входить не можем.

Трансцендентная риманова поверхность рассматриваемого здесь вида может быть, следовательно, представлена с помощью описанного способа как предел конечнолистных замкнутых поверхностей. Описанный предельный переход полностью соответствует предельному переходу, с помощью которого может быть получена поверхность логарифмической функции из поверхности корня. Существуют, однако, и другие, более сложные случаи, когда можно этот предельный переход провести полностью аналитическим путем. К этому вопросу мы еще вернемся в следующем параграфе.

249. В заключение заметим, что рассмотренное в этом параграфе представление римановых поверхностей с помощью комплекса отрезков применимо и к несколько более общему классу поверхностей, чем поверхности $F(w_1, \ldots, w_q)$, точки ветвления которых расположены над конечным числом $w_1, \ldots, w_q$. Именно, представим себе, что каждая точка w_ν окружена некоторой областью W_ν, причем различные области W_ν не имеют общих точек и поверхность $F(w_1 \ldots, w_q)$ деформируется так, что точки ветвления непрерывно сдвигаются из положений w_ν, не выходя, однако, при этом из соответствующей области W_ν. Топологическая структура соответствующего однолистного образа G при таких деформациях не меняется. Чтобы установить положение точек ветвления в плоскости w, нужно только каждой собственной вершине z_ν^i $(i=1, 2, \ldots; \nu=1, \ldots, q)$ многоугольников однолистного образа G поставить в соответствие точку w_ν^i области W_ν, над которой расположена соответствующая точка ветвления.

Полученный таким образом общий класс поверхностей $F(W_1, \ldots, W_q)$ обладает следующими характерными свойствами: если вырезать из такой поверхности часть ее, расположенную над областью W_ν, то эта часть будет состоять из конечного или бесконечного числа связных кусков, которые или однолистны или содержат *одну* точку ветвления; в последнем случае они или конечнолистны или бесконечнолистны в зависимости от того, будет ли эта точка ветвления алгебраической или логарифмической.

---

[1]) По терминологии Montel'я [1] говорят, что последовательность $z_n(w)$ образует *нормальное* семейство.

Функция $z(w)$, производящая конформное отображение поверхности $F(W_1, \ldots, W_q)$, однозначна в окрестности каждой точки поверхности, не расположенной над областями W_ν. Если же в некоторой точке области W_ν зафиксировать ветвь E_ν функции $z(w)$ и непрерывно ее продолжить над этой областью, то эта ветвь в области W_ν будет однозначна или определит алгебраический или логарифмический элемент функции $z(w)$, который, следовательно, имеет только *одну критическую точку* (точку ветвления) в соответствующей части поверхности, расположенной над W_ν.

Если, наоборот, задана однолистная функция $z(w)$ описанного только что вида, то можно непосредственно построить соответствующий однолистный образ G и соответствующий комплекс отрезков S. Нужно только области (W_1, W_2), (W_2, W_3), $\ldots$, (W_q, W_1) соединить друг с другом произвольными жордановыми дугами $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \ldots, \gamma_{q1}$, расположенными вне этих областей и не имеющими общих точек. Дополнение к областям W_ν распадается при этом на две области F_1, F_2. В качестве образов этих двух областей в плоскости z получаются некоторые „многоугольники", образующие однолистный образ G, который будет эквивалентен с вышеопределенным, если соответствующие областям W_ν „области вершин" (Eckgebiete) *стянуть в точки* z_ν.

Как и прежде, элементарные области соответствующего комплекса отрезков соответствуют взаимно однозначно точкам ветвления w_ν поверхности F; кроме того, уменьшенное на 2 число сторон элементарной области дает удвоенный порядок соответствующей точки ветвления. *Узловым точкам* соответствуют „полулисты" поверхности. Из каждой узловой точки выходят q отрезков $S_{\nu,\nu+1}$, отделяющих друг от друга две соседние элементарные области W_ν, $W_{\nu+1}$; если два соседних отрезка $S_{\nu-1,\nu}$, $S_{\nu,\nu+1}$ соединены в один двойной отрезок, то это означает, что часть поверхности F над соответствующей областью W_ν *однолистна*.

250. Будем обозначать через $F(W_1, \ldots, W_q)$ поверхности, *точки ветвления которых разделяются областями* W_ν. Очевидно, что такие поверхности являются весьма частным подклассом поверхностей, имеющих лишь изолированные точки ветвления. В § 3 мы опишем общий метод, пригодный для топологического описания произвольной поверхности, имеющей одни лишь изолированные точки ветвления.

§ 3. Римановы поверхности с конечным числом точек ветвления.

251. Среди рассмотренных в § 2 поверхностей $F(w_1, \ldots, w_q)$ простейшими являются те, которые имеют только *конечное число* точек ветвления. Так как конечное число алгебраических точек ветвления не имеет существенного влияния на свойства поверхности, важные для теории распределения значений, то мы можем ограни-

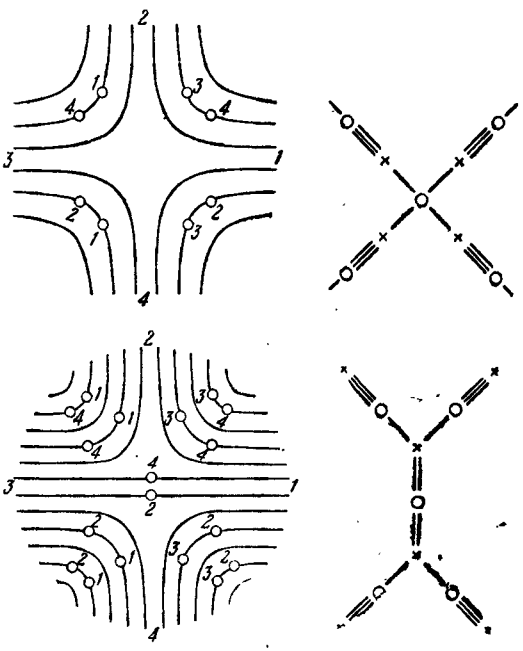
читься изучением односвязных римановых поверхностей с конечным числом точек ветвления бесконечного порядка.

Пусть в плоскости w произвольно заданы q точек $w_1, \ldots, w_q$. Сперва поставим себе задачу построить все односвязные римановы поверхности F_q, имеющие над каждой из этих q точек ровно одну точку ветвления бесконечного порядка.

Соответствующий комплекс отрезков обладает тогда (ср. § 2, стр. 299) q логарифмическими концами, соответствующими q элементарным областям, которые в свою очередь соответствуют q точкам ветвления w_ν. Чтобы лучше себе представить возможные структуры, рассмотрим сначала более подробно простейшие случаи.

$q = 2$. Единственно возможной является поверхность, представленная на фиг. 18. Над критическими точками w_1, w_2, над которыми расположены обе логарифмические точки ветвления, нет ни одного однолистного листа поверхности.

$q = 3$. Единственно возможной является описанная в § 2, п. 245 поверхность с тремя элементарными многоугольниками и тремя логарифмическими концами. Обратим внимание на то, что логарифмические концы содержат *двойные отрезки*; если такой двойной отрезок отделяет, например, две элементарные области, соответствующие точкам ветвления над w_1 и w_2, то над точкой w_3 этот отрезок определяет точку поверхности F, в которой она не разветвляется. Следовательно, над каждой точкой w_ν кроме логарифмической точки ветвления лежит еще бесконечное число однолистных листов.



Фиг. 23.

$q = 4$. Четыре многоугольника, представляющие точки ветвления $w_1, \ldots, w_4$, отделяются четырьмя логарифмическими концами. Последние или выходят из общей узловой точки, соответствующей четырехугольнику (полулисту), все четыре вершины которого являются точками ветвления, или же они попарно выходят из двух различных узловых точек, представляющих два четырехугольника с тремя разветвленными и одной неразветвленной вершиной. Эти на-

чальные четырехугольники связаны друг с другом цепочкой из конечного числа отрезков, состоящей или из $2n$ двойных отрезков (на фиг. 23 представлены однолистными образами и комплексами отрезков случаи $n=0$ и $n=2$) или из n тройных и $n+1$ простых отрезков.

Если из однолистного образа удалить все логарифмические концы, состоящие из бесконечного числа примыкающих друг к другу полос [1]), то от этого однолистного образа останется часть, которую мы будем называть *ядерным многоугольником* (Kernpolygon) поверхности; ядерному многоугольнику соответствует *ядро* комплекса отрезков, которое получается, если в каждом логарифмическом конце комплекса оставить только начальный отрезок.

Задание ядерного многоугольника или ядра комплекса определяет поверхность однозначно.

252. Мы переходим теперь к общему случаю. Нужно, следовательно, определить поверхности F_p, имеющие заданное число $p=\sum_1^q \mu_\nu\ (\geqslant q)$ логарифмических точек ветвления, притом так, чтобы над заданной точкой w_ν $(\nu=1, 2, \ldots, q)$ лежало в точности $\mu_\nu (\geqslant 1)$ указанных точек ветвления.

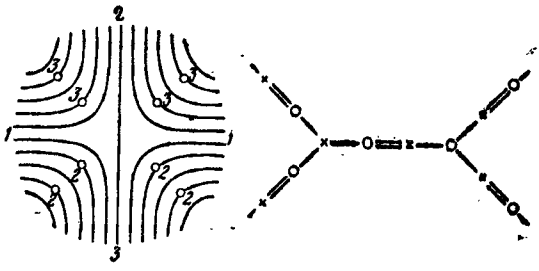
Целые числа $\mu_\nu \geqslant 1$ могут быть заданы произвольно, *однако так, что* $\mu_\nu \leqslant \frac{p}{2}$, ибо две элементарные области, граничащие с одним и тем же логарифмическим концом, очевидно, всегда соответствуют двум различным точкам w_ν, откуда следует, что над заданной точкой может лежать не более половины всех точек ветвления.

При указанном условии всегда существуют римановы поверхности, удовлетворяющие поставленным требованиям (R. Nevanlinna [9], G. Elfving [1]). Эти поверхности однозначно соответствуют комплексам отрезков, состоящим из p логарифмических концов и ядра, составленного из конечного числа отрезков. Комплекс разбивает плоскость на p элементарных областей бесконечного порядка соответственно p логарифмическим точкам ветвления. Число поверхностей бесконечно велико; исключение представляют только простейшие случаи $p=q=2$ и $p=q=3$, когда существует единственная поверхность требуемого вида.

253. Простейшая поверхность F_p, имеющая *две лежащие друг над другом* точки ветвления, соответствует случаю $p=4$, $q=3$. Если над точками w_2, w_3 лежит по одной точке ветвления, а над w_1, напротив, две точки ветвления, то все соответствующие поверхности получаются из комплекса отрезков, имеющего четыре логарифмических конца (соответственно элементарные области), выходящих из

[1]) „Полосой" мы называем полулист, имеющий только две разветвленные вершины, причем обе бесконечного порядка. На комплексе отрезков полоса представляется узловой точкой, граничащей только с двумя элементарными областями бесконечного порядка.

двух начальных узловых точек, связанных друг с другом нечетным числом $2n+1$ отрезков ($n+1$ простых и n двойных отрезков), как это показано на фиг. 24 (слева случай $n=0$, справа случай $n=1$).



Фиг. 24.

Из комплекса отрезков непосредственно видно, что над w_1 кроме двух точек ветвления находится еще n неразветвленных листов поверхности. Укажем еще, без дальнейшего обоснования, что простейший случай $n=0$ соответствует интегралу вероятности

$$w=\int_0^z e^{-t^2}\,dt$$

$$\left(w_1=\infty,\ w_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\ w_3=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right).^{1)}$$

254. Описанный в конце предыдущего параграфа способ рациональной аппроксимации может быть с успехом применен к построению отображающей функции для поверхности F_p. От комплекса отрезков отсекаем логарифмические концы, оставляя от каждого из них только ν первых отрезков, и присоединяем затем „зеркально соответствующий" комплекс. Полученный таким образом комплекс соответствует рациональной отображающей функции $w=w^{\nu}(z)$, имеющей над точкой w_i ровно μ_i алгебраических точек ветвления, каждая порядка $\geqslant 2\nu-1$. Эта рациональная функция, существование которой обеспечено общей теоремой Римана (гл. I, § 2, основная теорема B), в некоторых случаях может быть построена элементарным путем[2]. В плоскости z каждой точке $w=w_i$ кроме простых точек, соответствующих однолистным листам над w_i, соответствуют еще μ_i кратных точек z_i функции $w^{\nu}(z)$.

Нормируя рациональные функции $w^{\nu}(z)$ в точке $z=0$ указанным на стр. 302 образом, мы сможем из последовательности функций $w^{\nu}(z)$ выбрать подпоследовательность, сходящуюся[3]) к аналитической функции $w(z)$, мероморфной в некоторой односвязной области G. При этом предельном переходе порядки p точек ветвления неограни-

---

1) Относительно аналитического определения всех типов поверхностей в случае $p=4$ см. R. Nevanlinna [9]. Некоторые случаи $p>4$ были позднее разобраны H. Wagner'ом [1].

2) R. Nevanlinna [6], G. Elfving [3].

3) Для упомянутых симметричных поверхностей этот предельный переход может быть полностью проведен арифметически.

ченно возрастают, и соответствующие кратные точки z_i стремятся к границе Γ области G.

255. Спрашивается, состоит ли Γ из континуума или из одной точки; другими словами: принадлежит ли предельная поверхность к *гиперболическому* или к *параболическому типу*? Мы покажем, то имеет место последнее, и, что, следовательно, предельная функция $w(z)$ при соответствующей нормировке мероморфна во всей конечной плоскости.

Для доказательства рассмотрим шварцову производную

$$\{w,\ z\} = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

от функции $w = w^{\nu}$. В каждой точке z полной плоскости, отличной от p кратных точек z_i^{ν} функции w^{ν}, это выражение регулярно. Что касается кратных точек z_i^{ν}, то легко подсчитать, что в каждой из них шварцова производная от функции w^{ν} имеет полюс второго порядка. Следовательно, рациональная функция $\{w^{\nu},\ z\}$ самое большее порядка $2p$.

С другой стороны, при $\nu \to \infty$ имеем $w^{\nu} \to w(z)$, поэтому

$$\{w^{\nu},\ z\} \to \{w,\ z\}.$$

Но последовательность рациональных функций, порядок которых ограничен определенным числом $2p$, может иметь в качестве предельной функции только рациональную функцию порядка $\leqslant 2p$. Следовательно, *шварцова производная от предельной функции $w(z)$ является рациональной функцией, порядок которой не превосходит $2p$.*

Отсюда уже легко заключить, что риманова поверхность F_p принадлежит к параболическому типу. В самом деле, предельная функция может быть аналитически продолжена до каждой точки плоскости z, где выражение $\{w,\ z\}$ регулярно; следовательно, $w(z)$ мероморфна для всех значений z, *исключая самое большее полюсы функции* $\{w,\ z\}$. С другой стороны, мы знаем, что односвязная область G представляет всю область существования функции $w(z)$; следовательно, каждая точка границы Γ области G является для нее существенно особой точкой. Отсюда следует, что Γ не может быть континуумом, а должна приводиться к одной точке, за которую без существенных ограничений можно принять точку $z = \infty$.

256. Этим не только доказано, что поверхности F_p принадлежат к параболическому типу, но одновременно получен важный результат для аналитического определения этих поверхностей. В самом деле, так как $w(z)$ для $z \neq \infty$ не имеет кратных точек, то шварцова производная $\{w,\ z\}$ регулярна для всех значений $z \neq \infty$. С другой стороны, она является рациональной функцией, откуда заключаем:

Шварцова производная $\{w,\ z\}$ приводится к многочлену $P(z)$.

Для степени этого полинома получается верхняя граница $2p$. Более точное исследование, от которого мы здесь должны отка-

заться, показывает, что в действительности $P(z)$ степени $p-2$. Обратно, решение w диференциального уравнения третьего порядка

$$\{w, z\} = P(z), \tag{1}$$

где $P(z)$ — произвольный многочлен степени $p-2$, мероморфно во всей конечной плоскости и отображает ее на риманову поверхность с p логарифмическими точками ветвления. Многочлены P и римановы поверхности F_p соответствуют друг другу взаимно однозначно.

Соответствующая уравнению (1) мероморфная функция имеет конечный порядок $\frac{p}{2}$. Плоскость z может быть разбита на p равных углов A_ν величины $\frac{2\pi}{p}$ так, что на каждом луче, попадающем в A_ν, функция $w(z)$ при $z \to \infty$ имеет асимптотическое значение w_ν.

Все эти результаты могут быть строго обоснованы асимптотическим интегрированием диференциального уравнения (1) [1]). Таким же образом можно доказать, что все асимптотические значения w_ν являются также *дефектными значениями* отображающей мероморфной функции $w(z)$. Однако более подробное рассмотрение этого завело бы нас слишком далеко; поэтому мы должны ограничиться лишь приведением нижеследующего результата, доказательство которого читатель найдет в указанных оригинальных работах:

Каждая точка w_ν, над которой лежит по крайней мере одна логарифмическая точка ветвления поверхности F_p, является дефектной относительно отображающей мероморфной функции $w(z)$, при этом каждая точка ветвления сообщает соответствующему дефекту значение $\frac{2}{p}$.

Полный дефект $\delta(w_\nu)$ значения w_ν, следовательно, равен $\frac{2\mu_\nu}{p}$.

257. Это свойство поверхностей F_p позволяет частично решить проблему, поставленную в п. 220:

Пусть задана система из q точек $w_1, \ldots, w_q$ и q чисел $\delta_1, \ldots, \delta_q$ интервала $(0, 1)$, для которых $\sum \delta_\nu = 2$. Требуется построить мероморфную функцию, имеющую значения w_ν дефектными, и так чтобы

$$\delta(w_\nu) = \delta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, q).$$

В случае, когда числа δ_ν — *рациональные*, такая функция всегда может быть построена с помощью поверхностей F_p. В самом деле, числа δ_ν можно записать в виде $\delta_\nu = \frac{m_\nu}{m}$, где m_ν и m — целые числа и $\sum m_\nu = 2m$. Положим $\mu_\nu = m_\nu$ и построим поверхность F_p, для которой m_ν точек ветвления лежат над заданной точкой w_ν. Каждая

[1]) См. R. Nevanlinna [9], F. Nevanlinna [3], E. Hille [1], [2], L. Ahlfors [6], G. Elfving [1], [3], H. Wagner [1].

точка ветвления сообщает дефекту точки w_ν значение $\frac{2}{p}=\frac{1}{m}$, так что ее полный дефект равен заданному значению $\frac{m_\nu}{m}=\delta_\nu$ [1]).

§ 4. О связи между порядком мероморфной функции и критическими точками обратной функции.

258. Выше было упомянуто, что мероморфная функция $w(z)$, отображающая плоскость $z \neq \infty$ на риманову поверхность, имеющую в качестве критических точек только конечное число p логарифмических точек ветвления, имеет порядок $\frac{p}{2}$. То, что порядок такой функции не может быть меньше, чем $\frac{p}{2}$, можно заключить на основании следующей общей теоремы Альфорса (Ahlfors [5]):

Число прямо трансцендентных особенностей функции, обратной к мероморфной функции порядка k, не больше $2k$ при $k \geqslant \frac{1}{2}$ и не больше 1 при $k<\frac{1}{2}$.

Для доказательства рассмотрим мероморфную функцию $w(z)$, обратная функция $z(w)$ которой имеет по крайней мере одну прямо критическую точку a. С помощью линейного преобразования, не меняющего порядка характеристики $T(r, w)$, переведем произвольную из этих точек a в бесконечно удаленную точку $w=\infty$. Тогда найдется такое большое число $\lambda>1$, что, при неограниченном аналитическом продолжении соответствующей особой ветви функции $z=z(w)$, в области $|w| \geqslant \lambda$ она не будет иметь над точкой $w=\infty$ ни одного регулярного или алгебраического элемента. Образ G_λ, получаемый в плоскости z, ограничен аналитическими кривыми, на которых $|w|=\lambda$. В G_λ имеем $\lambda<|w| \neq \infty$, откуда заключаем, что G_λ простирается до бесконечности, ибо, иначе, $|w| \equiv \lambda$. Возьмем $\lambda>|w(0)|$, тогда, нулевая точка $z=0$ будет лежать вне G_λ, и обозначим через Γ_λ кривую, внешнюю по отношению к области G_λ, отделяющую ее от точки $z=0$. Γ_λ разбивает плоскость z на две односвязные области, из которых одна, $\overline{G}_\lambda$, содержит область G_λ. Проведем в $\overline{G}_\lambda$ сечение L, соединяющее какую-нибудь граничную точку $z_0 \neq \infty$ с граничной точкой $z=\infty$, и обозначим через Θ_r то расположенное на окружности $|z|=r>|z_0|$ сечение, отделяющее точку z_0 от ∞, которое точка z встречает первым при движении по L от z_0 до ∞. Длина сечения Θ_r пусть будет $r\Theta(r)$.

---

[1]) После окончания редакции появилась интересная работа E. Ullrich'a [4], где предыдущая проблема существенно обобщается. С помощью нового класса римановых поверхностей (поверхности с конечным числом периодических концов) Ульрих доказал существование мероморфных функций, имеющих для конечного числа точек $w_1, \ldots, w_q$ заданные рациональные *дефекты или индексы разветвления*, сумма которых равна 2.

259. Теперь отобразим конформно область $\overline{G_\lambda}$ на верхнюю полуплоскость $\Im(\zeta)>0$ так, чтобы точки $z=z_0, \infty$ перешли соответственно в точки $\zeta=0, \infty$; отображающая функция $\zeta(z)$ определяется этим условием с точностью до положительного множителя. Сечение Θ_r при этом переходит в некоторую дугу, кратчайшее расстояние которой до нулевой точки $\zeta=0$ пусть будет $\rho_1(r)$. По теореме Альфорса об искажениях (гл. IV, § 4), при соответствующем выборе вышеупомянутого множителя, будем иметь соотношение

$$\log \rho_1(r) > \pi \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\theta(r)}, \tag{2}$$

где $r_0>0$ выбрано настолько большим, что $\rho_1(r_0)>1$.

260. Рассмотрим теперь сложную функцию $w(z(\zeta))$. В полуплоскости $\Im(\zeta)\geqslant 0$ она мероморфна, при этом она регулярна в области G_λ', соответствующей области G_λ. Далее, внутри G_λ' имеем $|w|>\lambda$, а на ее границе, состоящей из действительной оси и некоторых дуг K_λ, лежащих в полуплоскости $\Im(\zeta)>0$, имеем $|w|=\lambda$. Выражение

$$u(\zeta)=\log\left|\frac{w}{\lambda}\right|$$

определяет положительную гармоническую в G_λ' функцию, равную нулю в каждой конечной граничной точке этой области. Следовательно, на части α_ρ окружности $|\zeta|=\rho$, лежащей в области G_λ', функция $u(\zeta)$ имеет положительный максимум $m(\rho)$.

Из принципа максимума непосредственно следует, что $u(\zeta)$ в каждой точке ζ пересечения D_ρ круга $|\zeta|<\rho$ с областью G_λ' удовлетворяет условию

$$u(\zeta)\leqslant m(\rho)\,\omega(\zeta,\ \alpha_\rho,\ D_\rho), \tag{3}$$

где ω означает гармоническую меру дуг α_ρ относительно области D_ρ. Из принципа расширения (гл. IV, § 2) (или непосредственно из принципа максимума) следует далее, что эта гармоническая мера только увеличится, если заменить область D_ρ полукругом $\Im(\zeta)>0$, $|\zeta|<\rho$ и α_ρ заменить полуокружностью $|\zeta|=\rho$. Эта мажорантная гармоническая мера $\omega_\rho(\zeta)$, которую легко элементарно подсчитать (см. гл. III, § 2, теорема Фрагмена-Линделёфа), стремится к нулю при $\rho\to\infty$ так, что произведение $\rho\omega_\rho$ стремится к конечному пределу. Так как $u(\zeta)>0$, то из (3) следует, что

$$\lim_{\rho\to\infty}\frac{m(\rho)}{\rho}>0. \tag{4}$$

Пусть теперь $M(r)=\max|w(z)|\ (>\lambda)$ на той части сечения Θ_r, которая лежит в области G_λ. Из принципа максимума следует,

что $\log\frac{M}{\lambda} \geqslant m(\rho_1(r))$ и, следовательно, в силу (4)

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{\log\frac{M(r)}{\lambda}}{\rho_1(r)} > 0.$$

Учитывая соотношение (2), получается, наконец, существование независящей от r постоянной C такой, что

$$\log\log M(r) > \pi \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\Theta(r)} + C, \tag{5}$$

где $r > r_0$.

Из (5) легко получается далее нижняя граница для характеристики T. Пусть $r_0 < r < r'$ и $D_{r'}$ — пересечение круга $|z| < r'$ с областью G_λ. С помощью интеграла Пуассона построим в круге $|z| < r'$ гармоническую функцию $U(z)$, равную $\log|w|$ на принадлежащих G_λ дугах $\Theta_{r'}$ и равную λ на остальных дугах окружности $|z| = r'$. Так как $U(z) > \lambda$ для $|z| < r'$, то из принципа максимума следует, что разность $\log|w| - U \leqslant 0$ в каждой точке области $D_{r'}$. В частности это имеет место и для тех точек z, где $|w(z)|$ достигает своего максимального значения $M(r)$ на Θ_r, так что

$$\log M(r) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r'e^{i\vartheta}) \frac{r'^2 - r^2}{r'^2 + r^2 - 2r'r\cos(\vartheta-\varphi)} d\vartheta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r'+r}{r'-r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(r'e^{i\vartheta})\, d\vartheta \leqslant \frac{r'+r}{r'-r}(m(r', w) + \log\lambda);$$

следовательно, для $r' = 2r$

$$T(2r) > m(2r, w) \geqslant \frac{1}{3}\log M(r) - \log\lambda.$$

Наконец в силу (5)

$$\log T(2r) > \pi \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r\Theta(r)} + C, \tag{6}$$

где C — новая, не зависящая от r постоянная.

261. Предположим теперь, что функция $z(w)$, обратная к $w(z)$, имеет по крайней мере $p \geqslant 1$ различных прямо критических точек $a_1, \ldots, a_p$. Как выше, построим для каждого $\nu = 1, \ldots, p$ соответствующую область G_λ. В силу однолистности функции $z(w)$ числа λ можно выбрать настолько большими, чтобы эти области не имели общих точек. Следовательно, если через $r\Theta_\nu(r)$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ обозначить соответствующие длины дуг Θ_r, то $\sum \Theta_\nu(r) \leqslant 2\pi$, и сложив

неравенства (6), написанные для каждого ν, мы получим

$$p \log T(2r) > \pi \int_{r_0}^{r} \Big(\sum_{1}^{p} \frac{1}{\Theta_\nu(r)} \Big) \frac{dr}{r} + C',$$

где C' — постоянная. По неравенству Шварца

$$p^2 = \Big(\sum \frac{\sqrt{\Theta_\nu}}{\sqrt{\Theta_\nu}} \Big)^2 \leqslant \sum \Theta_\nu \sum \frac{1}{\Theta_\nu} \leqslant 2\pi \sum \frac{1}{\Theta_\nu}$$

и, следовательно,

$$\log T(2r) > \frac{p}{2} \log r + \text{const}$$

или, заменяя $2r$ на r,

$$\log T(r) > \frac{p}{2} \log r + \text{const}.$$

Это показывает, что порядок k функции $w(z)$ равен по крайней мере $\frac{p}{2}$, следовательно, $p \leqslant 2k$. Этим доказательство доведено до конца.

262. Теорема Альфорса допускает интересные применения к целым функциям $w(z)$ порядка k. Пусть L_1 и L_2 — два не имеющих общих точек *асимптотических пути*, на которых $w(z)$ имеет *конечные* асимптотические значения. Последним соответствуют две трансцендентные особенности обратной функции. Рассмотрим одну из областей G_{12}, заключенных между L_1 и L_2. Если функция $w(z)$ в области G_{12} ограничена, то по теореме Линделёфа (гл. III, §, 6, п. 56) асимптотические значения на L_1 и L_2 должны равняться друг другу и $w(z)$ при $z \to \infty$ стремится в G_{12} равномерно к этому общему асимптотическому значению a. Соответствующие путям L_1 и L_2 трансцендентные особенности тождественны тогда друг другу. Отсюда заключаем: если L_1 и L_2 соответствуют двум *различным* критическим точкам заданной римановой поверхности, то функция $w(z)$ не может быть ограничена в области G_{12}. Но тогда, как в § 1, п. 235 этой главы, можно построить в G_{12} путь L_{12}, на котором $w(z)$ имеет асимптотическое значение ∞.

Следовательно, если $w(z)$ имеет p различных конечных асимптотических значений, то она имеет также по крайней мере столько же различных *прямо* критических точек, лежащих над $w = \infty$, и по предыдущей теореме p самое большее равно $2k$.

Целая функция порядка k имеет самое большее $2k$ различных конечных асимптотических значений [1].

---

[1]) Эта теорема была высказана в 1907 г. Denjoy [1] как гипотеза. То, что число конечных целевых значений конечно и $< 5k$, было доказано Carleman'ом [1]; основная идея доказательства Carleman'а лежит также в основе метода Альфорса. См. также T. Carleman [2].

Если среди конечных асимптотических значений содержится m прямо критических и n косвенно критических точек, то полное число прямо критических точек равно по крайней мере $2m+n$ и предыдущее соотношение усиливается в неравенство $2m+n\leqslant 2k$, откуда, в частности, следует, что

Функция, обратная к целой функции порядка k, имеет самое большее k конечных прямо критических точек.

Если полное число конечных трансцендентных особенностей достигает максимального числа $2k$, то ни одно из них не является прямо критической особенностью.

Последнее имеет, например, место для $2k$ конечных целевых значений целых функций целого порядка k:

$$\frac{\sin x^k}{x^k} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin x^k}{x^k}\,dx.$$

XII. ТИП РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

§ 1. Разветвленность римановой поверхности.

263. В этом параграфе мы ограничиваемся сперва рассмотренным в гл. XI, § 2 классом односвязных римановых поверхностей F_q, точки ветвления которых проектируются в конечное число q точек $w_1, \ldots, w_q$. Как уже было указано, эти поверхности могут быть наглядно представлены с помощью комплексов отрезков. Каждому полулисту поверхности F_q соответствует узловая точка комплекса. Соединяющие эти узловые точки отрезки разбивают плоскость на *элементарные области*, взаимно однозначно соответствующие точкам ветвления поверхности F_q, притом так, что точке ветвления $(m-1)$-го порядка соответствует элементарная область с $2m$ сторонами. Лежащим над точками w_ν неразветвленным листам соответствуют двухугольники (двойные отрезки) комплекса.

Тип бесконечнолистной поверхности F_q представляется зависящим в известной мере от степени разветвленности поверхности. Если над точками w_ν лежит относительно мало точек ветвления, то F_q принадлежит к параболическому типу, наоборот, большая степень разветвленности представляется характерной для гиперболического типа. Так, например, мы видели, что слабо разветвленные поверхности F_q, имеющие только конечное число логарифмических точек ветвления, все принадлежат к параболическому типу; сильно разветвленная поверхность модулярной функции принадлежит, напротив, к гиперболическому типу. Естественно поэтому предположить, что должна существовать некоторая критическая степень разветвленности, отделяющая слабо разветвленные параболические поверхности от сильно разветвленных гиперболических поверхностей.

264. В случае конечнолистной замкнутой поверхности F_q степень разветвленности легко измерить следующим образом. Разделим сумму $\sum(m-1)$ порядков точек ветвления на число листов поверхности. Частное

$$V=\frac{1}{n}\sum(m-1)$$

дает полную разветвленность, отнесенную к одному листу, поэтому мы его будем называть *средней разветвленностью* поверхности F_q. По формуле Римана (теорема Эйлера о многогранниках) *),

$$V=\frac{1}{n}\sum(m-1)=2-\frac{2}{n}.$$

Подсчет средней разветвленности V замкнутой поверхности может быть также проведен с помощью комплекса отрезков следующим образом: точке ветвления $(m-1)$-го порядка соответствует элементарная область W с $2m$ сторонами и вершинами (узловыми точками). Распределим равномерно на эти $2m$ узловых точек удвоенный порядок $2m-2$, так что каждая из них получит „величину разветвления“ $\frac{2m-2}{2m}=1-\frac{1}{m}$. Если это проделать со всеми элементарными областями W, то каждой узловой точке P будет приписано „полное разветвление“

$$V_P=\sum_W\left(1-\frac{1}{m}\right),$$

где суммирование распространено на все элементарные области W, граничащие с P. Число всех узловых точек P равно удвоенному числу листов $2n$, и среднее арифметическое

$$\frac{1}{2n}\sum_P V_P$$

разветвленностей всех узловых точек, очевидно, равно вышеопределенной разветвленности V поверхности F_q.

265. Последний способ определения разветвленности замкнутой поверхности непосредственно применим к бесконечнолистным поверхностям F_q. Каждой узловой точке P соответствующего комплекса отрезков ставится в соответствие в качестве „разветвленности“ число V_P. Так как $1-\frac{1}{m}$ изменяется между $0\,(m=1)$ и $1\,(m=\infty)$

*) Формула Римана для замкнутой n-листной поверхности жанра p пишется так:

$$\frac{1}{n}\sum(m-1)=2+p-\frac{2}{n}.$$

См., например, Weyl, Uber die Idee der Riemannschen Fläche, G. Elfving [1] или Форд, Автоморфные функции, ОНТИ, М.-Л., 1936, стр. 243.

и так как каждая точка P граничит по крайней мере с 2 и не более чем с q элементарными областями *положительного порядка* $m-1$, то $1 \leqslant V_P \leqslant q$.

Так как F_q бесконечнолистна, то средняя разветвленность V_q может быть теперь получена только путем исчерпания комплекса отрезков F_q последовательностью подкомплексов F_q^{ν} ($\nu = 1, 2, \ldots$) с неограниченно возрастающим числом узловых точек. Вообще результат такого предельного перехода будет существенно зависеть от выбора последовательности F_q^{ν}. Естественным представляется метод *кругообразного исчерпания* (kranzförmige Ausschöpfung) поверхности F_q. Исходя из произвольной начальной узловой точки P_0, присоединим к ней непосредственно граничащие узловые точки P_1 (первое поколение), затем к точкам P_0, P_1 присоединим новые узловые точки P_2, удаленные от точек P_1 на один отрезок комплекса (второе поколение) и т. д. За аппроксимирующий комплекс F_q^{ν} возьмем тогда часть F_q, состоящую из первых ν поколений.

Если n_ν — число узловых точек комплекса F_q^{ν}, то среднюю разветвленность аппроксимирующей поверхности F_q^{ν} образуем с помощью выражения

$$V_\nu = \frac{1}{n_\nu} \sum_{F_q^{\nu}} V_P.$$

Величину

$$V = \lim_{\nu \to \infty} V_\nu$$

примем за определение *средней разветвленности* трансцендентной поверхности F_q. Если этот предел не существует, то можно говорить только о „нижней“ или „верхней“ разветвленности поверхности ($\varliminf V_\nu$ соответственно $\varlimsup V_\nu$).

266. Прежде чем перейти к более подробному анализу определенной таким образом разветвленности, рассмотрим еще другой, важный для дальнейшего, метод подсчета вышеопределенных аппроксимирующих чисел V_ν. Комплексу F_q^{ν} соответствует связная часть расположенной над плоскостью w поверхности F_q, состоящая из $2n = n_\nu$ полулистов. Пусть a — произвольная точка плоскости w, $\bar{n}(a)$ — число *внутренних* точек поверхности F_q^{ν}, лежащих над a, и $n(a)$ — число этих же точек, но считаемых в случае алгебраических точек ветвления по числу листов, входящих в цикл такой точки. Лежащие над a логарифмические точки ветвления не влияют, конечно, на величины $n(a)$ и $\bar{n}(a)$, поскольку они являются граничными точками поверхности F_q^{ν}. Очевидно, $\bar{n}(a) \leqslant n(a) \leqslant n$, где равенство имеет место для всех точек a, исключая точки $a = w_i$ ($i = 1, \ldots, q$), в которые проектируются точки ветвления поверхности. Разность $n(a) - \bar{n}(a)$ равна сумме порядков всех лежащих над $w = a$ алге-

бранческих точек ветвления поверхности F_q^{ν}, в то время как разность $n - \bar{n}(a)$ равна числу тех листов, которые над $w = a$ граничат с *логарифмической* точкой ветвления.

Сумма

$$\sum_{(a)}(n - \bar{n}(a)) = \sum_{(a)}(n - n(a)) + \sum_{(a)}(n(a) - \bar{n}(a)),$$

где суммирование распространено на все значения a, получает положительные значения только от точек ветвления. Каждое слагаемое слева, очевидно, равно половине значения суммы $\sum V_P$, распространенной по узловым точкам P элементарных областей, соответствующих точке $w = a$. Вся сумма, следовательно, равна вышеопределенному выражению $\frac{1}{2}\sum V_P$, и так как число n_{ν} узловых точек комплекса F_q^{ν} равно удвоенному числу листов, то

$$V_{\nu} = \frac{1}{n_{\nu}}\sum_{P} V_P = \sum_{(a)}\left(1 - \frac{\bar{n}(a)}{n}\right) + \sum_{(a)}\frac{n(a) - \bar{n}(a)}{n}.$$

267. С помощью однолистного образа G, соответствующего рассматриваемой поверхности, разветвленность допускает еще одну важную геометрическую интерпретацию (ср. гл. XI, § 2). В качестве образа полулиста поверхности F_q в G получается q-угольник (фундаментальный многоугольник P), вершины которого соответствуют точкам $w_1, \ldots, w_q$. Введем в G *угловую метрику*, приписывая углу с вершиной в точке ветвления $(m-1)$-го порядка меру $\frac{\pi}{m}$. Сумму углов $\sum\frac{\pi}{m}$, деленную на π и затем уменьшенную на $q-2$ *), назовем *эксцессом* (*Exzeß*) E_P многоугольника P:

$$E_P = \sum\frac{1}{m} - q + 2.$$

С другой стороны, для разветвленности соответствующей узловой точки P комплекса отрезков мы имели выражение

$$V_P = \sum\left(1 - \frac{1}{m}\right) = q - \sum\frac{1}{m},$$

откуда следует:

Сумма разветвленности V_P фундаментального многоугольника P и его эксцесса равна 2.

268. Какое же можно отсюда сделать заключение о средней разветвленности римановой поверхности F_q? Для n-листной поверхности рациональной функции средняя разветвленность $V = \frac{1}{n}\sum V_P = 2 - \frac{2}{\pi}$, т. е. для такой поверхности V всегда меньше 2, и по-

*) $q-2$ есть сумма углов евклидового q-угольника, деленная на π.

этому средний эксцесс $\frac{1}{n}\sum E_P$ положителен. С помощью теоремы Эйлера о многогранниках легко убедиться, что (нижняя) средняя разветвленность V трансцендентной поверхности F_q по меньшей мере равна 2; с другой стороны, $V_P \leqslant q$, а потому и среднее значение $V \leqslant q$.

269. Чтобы подробнее осветить имеющие здесь место соотношения, рассмотрим сперва простой случай *регулярно разветвленных* поверхностей, для которых средняя разветвленность V совпадает со средней разветвленностью V_P произвольного фундаментального многоугольника. Здесь нужно различать три случая:

1) Если $V < 2$, $E > 0$, то имеет место эллиптический случай. Вводя в плоскости z сферическую метрику, можно фундаментальные многоугольники выбрать в качестве геодезических круговых миогоугольников так, чтобы угловой эксцесс был равен πE, где $E = E_P$ — вышеопределенный эксцесс. Соответствующая рациональная отображающая функция $w(z)$ является функцией икосаедра.

2) Если $V = 2$, $E = 0$, то имеем дело с параболическим случаем. Фундаментальные многоугольники могут быть выбраны как обыкновенные евклидовы многоугольники с угловым эксцессом, равным нулю. Функция $w(z)$ двоякопериодична (гл. XI, § 2).

3) Если $V > 0$, $E < 0$, то имеет место гиперболический случай. Функция $w(z)$ определена в некотором круге, например, $|z| < 1$, как автоморфная функция. При введении мероопределения Пуанкаре (гл. I, § 1) здесь справедлива геометрия Лобачевского, и многоугольники P могут быть выбраны как геодезические круговые многоугольники с угловым дефектом $\pi|E|$. Максимальное значение $V = q$ имеет место для универсальной поверхности наложения F_q^{∞} плоскости w с выключенными точками $w_1, \ldots, w_q$.

270. Если теперь перейти к нерегулярно разветвленным поверхностям F_q, то, как мы видели, попрежнему можно ввести угловую метрику. Если эта метрика в среднем сферическая, т. е. если $V < 2$, $E > 0$, то имеет место эллиптический случай. Что касается трансцендентных поверхностей F_q, то здесь возникает следующая

Проблема. *Имеет ли в общем случае параболический или гиперболический случай в зависимости от того, является ли угловая геометрия* (Winkelgeometrie) *поверхности F_q евклидовой или неевклидовой (Лобачевского), т. е. в зависимости от того, равен ли средний эксцесс $E = 2 - V$ нулю или он положителен?*

Автору неизвестен ни один пример поверхности F_q, для которой предположенное соотношение не имело бы места. [1]) Кроме регулярно разветвленных поверхностей это может быть строго доказано

[1]) Это, очевидно, справедливо для поверхностей F_q с *конечным* числом точек ветвления. Для них $E_P = 0$, исключая самое большее для конечного числа точек, а потому и $E = 0$. В согласии с этим последние поверхности параболического типа.

для некоторых других классов поверхностей F_Q, как это будет показано в следующем параграфе.

Все, что здесь было выведено для поверхностей F_Q, переносится без изменений на общий класс поверхностей $F(W_1, \ldots W_q)$, точки ветвления которых отделяются не имеющими общих точек областями W_ν плоскости w (ср. гл. XI, § 2, п. 250).

§ 2. Соотношения дефектов и разветвленность.

271. То, что общие соотношения дефектов могут быть истолкованы как высказывания об особенностях односвязных римановых поверхностей, представляется почти очевидным и неоднократно уже подчеркивалось в ходе нашего изложения. Изложенное в предыдущем параграфе позволяет нам глубже проникнуть в существо этих связей. Для относительно просто построенных поверхностей F_Q [или $F(W_1, \ldots, W_q)$] с одними лишь изолированными точками ветвления мы определили выше некоторый вид „кругообразного исчерпывания" поверхности, который привел нас к понятию средней ее разветвленности V. С другой стороны, метод, лежащий в основе учения о распределении значений открытой, односвязной римановой поверхности F, покоится на процессе приближения, с помощью которого, хотя и совсем другим образом, исчерпывается поверхность. Здесь аппроксимирующие поверхности уже не получаются путем соединения конечного числа „листов" поверхности F; в самом общем случае это было бы даже невозможно, так как едва ли можно указать естественное правило разбиения поверхности на листы, пригодные для всех случаев. В действительности аппроксимирующие поверхности определяются независимо от характера разветвления поверхности F путем введения на F известной метрики: для каждого $r > 0$ рассматриваются те точки поверхности, образ которых в круге $|z| < R \leqslant \infty$ попадает в круг $|z| < r$. Определенная таким образом часть поверхности F_r переходит при $r \to R$ в поверхность F.

Хотя поверхности F_r получены с помощью совсем другого принципа, чем построенные в § 1 аппроксимирующие поверхности F_Q^ν поверхности F_Q, все же оказывается возможным поставить в соответствие поверхности F_r известные величины, аналогичные рассмотренным в § 1, которые в несколько измененном виде описывают разветвленность этой поверхности. Именно, по образцу п. 266 мы можем, например, поступить следующим образом: подсчитаем для заданного $r < R$ число листов римановой поверхности F_r, лежащих над заданной точкой $w = a$ (листы, образующие алгебраический цикл над a считаются по числу листов, входящих в цикл). Это число есть не что иное, как обозначенное раньше через $n(r, a)$ число корней уравнения $w(z) = a$, лежащих в круге $|z| \leqslant r$.*) Затем рассмотрим

*) Не нарушая общности, можно предполагать, что поверхность F_r не имеет граничных точек над заданной точкой a. Это замечание нужно иметь в виду и дальше.

все точки поверхности F_r, лежащие над a: число их равно числу $\overline{n}(r, a)$ *различных* корней уравнения $w(z)=a$, расположенных в круге $|z|\leqslant r$. Неотрицательная величина $n(r, a)-\overline{n}(r, a)$ дает сумму порядков расположенных над $w=a$ алгебраических точек ветвления поверхности F_r. Если еще обозначить через $n(r)$ наибольшее из чисел $n(r, a)$, когда a пробегает всевозможные значения (это число можно рассматривать как число „листов" поверхности F_r), и образовать разность (ср. п. 266)

$$n(r)-\overline{n}(r, a)=[n(r)-n(r, a)]+[n(r, a)-\overline{n}(r, a)],$$

то это выражение будет равно нулю для всех значений a, за исключением тех, над которыми лежат алгебраические точки ветвления поверхности F_r или для которых число $n(r, a)$ меньше, чем $n(r)$. Первый член, стоящий справа, дает число недостающих листов; если a представляет прямо критическую трансцендентную особенность поверхности F, то последние будут навиваться вокруг a и при $r\to R$ величина $n(r)-n(r, a)$ будет неограниченно возрастать. Эта разность служит, следовательно, известным образом мерой „трансцендентной разветвленности" поверхности F над a.

С помощью выражения $n(r)-\overline{n}(r, a)$ можно по аналогии с п. 266 образовать своего рода „среднюю разветвленность"; для нее получается выражение

$$\frac{n(r)-\overline{n}(r, a)}{n(r)}=\frac{n(r)-n(r, a)}{n(r)}+\frac{n(r, a)-\overline{n}(r, a)}{n(r)}.$$

272. Учитывая, что основные теоремы теории распределения значений имеют дело не с величинами n, а с их средними значениями N, заменим также и в предыдущих выражениях числа n, $\overline{n}$ интегралами

$$N(r, a)=\int_0^r\frac{n(t, a)-n(0, a)}{t}\,dt+n(0, a)\log r,$$

$$\overline{N}(r, a)=\int_0^r\frac{\overline{n}(t, a)-\overline{n}(0, a)}{t}\,dt+\overline{n}(0, a)\log r.$$

Если еще вместо максимального значения $n(r)$ ввести величину

$$N(r)=\max_{(a)}N(r, a),$$

то в силу первой основной теоремы и дополнений к ней, данных в гл. VI, § 4, для каждой функции, неограниченного вида, характеристика которой, следовательно, при $r\to R$ неограниченно возрастает, имеем

$$\frac{N(r)}{T(r)}\to 1 \quad \text{при} \quad r\to R.$$

Таким образом если ввести $N(r)$ вместо $n(r)$ и заменить еще $N(r)$ асимптотически равнозначным с ним выражением $T(r)$, то для средней разветвленности поверхности F_r над точкой $w=a$ мы получим выражение

$$\delta(r, a)+\vartheta(r, a)=\Theta(r, a),$$

где

$$\delta(r, a)=1-\frac{N(r, a)}{T(r)}, \quad \vartheta(r, a)=\frac{N(r, a)-\bar{N}(r, a)}{T(r)},$$

$$\Theta(r, a)=1-\frac{\bar{N}(r, a)}{T(r)}.$$

При этом величину $\vartheta(r, a)$ можно рассматривать как средний порядок расположенных над a алгебраических точек ветвления, в то время как $\delta(r, a)$ дает меру для „трансцендентной разветвленности" поверхности F_r над точкой $w=a$; $\Theta(r, a)$ представляет „полную разветвленность" поверхности F_r над точкой a.

Таким образом, мы установили также связь с фундаментальными величинами теории распределения значений. Нижние границы предыдущих трех выражений при $r\to R$ суть не что иное, как дефект $\delta(a)$, индекс алгебраической разветвленности $\vartheta(a)$ и „индекс полной разветвленности" $\Theta(a)$ значения a. Сумму

$$\sum\delta(a)+\sum\vartheta(a)$$

или не меньшую сумму

$$\Theta=\sum\Theta(a)$$

можно, следовательно, рассматривать как „полную среднюю разветвленность" римановой поверхности F неограниченного вида. Сама собой напрашивается аналогия с введенным в § 1 понятием средней разветвленности V римановой поверхности класса F_q [или, более обще, класса $F(W_1, \ldots, W_q)$].

273. Из второй основной теоремы вытекают замечательные предложения о разветвленности Θ. В связи с проблемой типа прежде всего заслуживает внимания следующее предложение (гл. X, § 3):

Если полная разветвленность односвязной римановой поверхности больше 2:

$$\Theta=\sum\Theta(a)>2,$$

то поверхность принадлежит к гиперболическому типу.

Какое отсюда можно сделать заключение относительно специального класса поверхностей F_q, разветвленность которых кроме общеприменимой величины Θ может быть также охарактеризована величиной V (§ 1), построенной с помощью кругообразного исчерпывания поверхности? Если бы соотношение $V>2$ всегда влекло за собой соотношение $\Theta>2$, то для гиперболичности поверхно-

сти достаточно было бы, чтобы средняя разветвленность V поверхности F_q была больше 2. Учитывая геометрическое толкование величины V, данное в § 1, можно было бы тогда заключить, что, как это было высказано в виде гипотезы на стр. 318, *для гиперболичности поверхности F_q достаточно, чтобы ее угловая геометрия в среднем была угловой геометрией Лобачевского.*

Но, как можно показать на примере, $\Theta > 2$ не является необходимым следствием из соотношения $V > 2$. Существует, однако, интересный частный случай, когда это имеет место: а именно, *в случае поверхности, полностью разветвленной над $q \geqslant 5$ точками* $w_1, \ldots, w_q$, т. е. для поверхности, не имеющей над точками $w_1, \ldots, w_q$ неразветвленных листов (ср. гл. X, § 3). Для таких поверхностей, как это доказывается непосредственно, определенная по § 1 средняя разветвленность $V > 2$; следовательно, их „угловая геометрия" в среднем является угловой геометрией Лобачевского. С другой стороны, как это было уже показано в гл. X, § 3, соответствующая величина Θ тоже всегда больше 2, и поверхность принадлежит, следовательно, к гиперболическому типу. Во всех до сих пор рассмотренных примерах для поверхностей класса F_q имело место тождество $V = \Theta$. Справедливо ли это для всех поверхностей класса F_q? Если бы это было так, то должны были бы также существовать поверхности F_q *гиперболического типа*, для которых $V = 2$, и угловая геометрия была бы, следовательно, евклидовой, что опровергало бы часть высказанной на стр. 318 гипотезы (так как неевклидовость угловой геометрии не являлась бы более необходимым условием для гиперболичности поверхности). Легко, действительно, указать примеры поверхностей F_q, принадлежащих к гиперболическому типу, для которых определенная для $r < 1$ характеристика $T(r)$ при $r \to 1$ возрастает так быстро, что

$$\frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \to \infty. \tag{1}$$

Для поверхности такого рода справедливы еще соотношения дефектов (ср. п. 223) и, следовательно, $\Theta \leqslant 2$, а потому если бы для поверхностей F_q всегда было $V = \Theta$, то в данном случае было бы и $V \leqslant 2$.

274. Оказывается, однако, что соотношение $V = \Theta$ ни в какой мере не справедливо для всех поверхностей F_q, обладающих свойством (1). Напротив, автору неизвестен ни один пример поверхности класса (1), где бы не выполнялось соотношение $V > 2 (\geqslant \Theta)$. Не вдаваясь в подробности, приведем лишь один пример, вскрывающий многое в этих соотношениях.

Пусть $F(0, 1, \infty)$ — универсальная поверхность наложения плоскости w с выключенными точками $w = 0, 1, \infty$, представленная на стр. 19 топологическим деревом, и пусть $f(z)$ — определенная

для $|z|<1$ автоморфная отображающая функция (модулярная функция). Функция

$$w = e^{f(z)}$$

отображает тогда единичный круг $|z|<1$ на риманову поверхность F_q, полностью разветвленную над точками $w=0$, ∞ и имеющую над точками $w=1$, e наряду с бесконечным числом логарифмических точек ветвления еще бесконечное число однолистных листов; эта гиперболическая поверхность принадлежит к классу $F(0, 1, e, \infty)$. Соответствующее топологическое дерево легко получается из топологического дерева поверхности модулярной функции (стр. 12), если к каждой узловой точке каждой элементарной области, соответствующей точке $w=\infty$, присоединить по логарифмическому концу. Если теперь кругообразно исчерпать эту поверхность, то для средней разветвленности V получится значение 3. С другой стороны, легко убедиться в том, что характеристика $T(r)$ порядка величины $e^{\frac{1}{1-r}}$ и, следовательно, согласно второй основной теореме, Θ должно быть $\leqslant 2$; на самом деле $\Theta=2$, так как $w=0$, ∞ как пикаровские исключительные значения имеют дефект 1, так что $\sum\delta=2$.

Более глубокое изучение проблемы типа предполагает более точное знание соотношений, существующих между величинами V и Θ.

§ 3. Достаточные условия для параболического типа.

275. Теоремы теории распределения значений содержат только необходимые условия для параболического типа поверхности, соответственно достаточные для гиперболического типа. Согласно этим условиям, поверхность принадлежит к гиперболическому типу, коль скоро ее разветвленность, измеренная с помощью фундаментальных величин теории распределения значений, превосходит известную границу. В том же направлении могут быть истолкованы теоремы Иверсена и Гросса (гл. XI, § 1). Однако, все эти результаты с точки зрения проблемы типа следует все еще рассматривать как весьма неполные, даже если ограничиться относительно простым классом поверхностей $F(W_1, \ldots, W_q)$.

О достаточных условиях для параболического типа говорилось в ходе предыдущего изложения только в связи с известными весьма специальными классами поверхностей. Для регулярно разветвленных поверхностей соотношение $V=\Theta=2$ является как необходимым, так и достаточным свойством параболического типа. Далее мы видели, что поверхности с конечным числом точек ветвления всегда принадлежат к параболическому типу. В дальнейшем мы ставим себе целью дать общие достаточные критерии для поверхностей с одними лишь изолированными точками ветвления, в частности, следовательно, для класса поверхностей $F(W_1, \ldots, W_q)$.

276. Для этой цели докажем сперва следующую лемму [1]).

Пусть $U(z)$ — действительная функция от $z=x+iy$, определенная в круге $|z|<R<\infty$, непрерывная с точностью до изолированных точек и обладающая следующими свойствами:

1) *В точках разрыва $U(z)=+\infty$.*

2) *Частные производные первого порядка от U непрерывны за исключением некоторых гладких дуг γ, пробегающих изолированно в круге $|z|<R$, т. е. в окрестности каждой точки этого круга расположено самое большее конечное число частей дуг γ, на которых производные могут не быть непрерывными.*

3) $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2>0$ *всюду, за исключением, быть может, изолированных точек круга* $|z|<R$.

4) $U|z|\to+\infty$ *для* $|z|\to R$.

Пусть далее $|\operatorname{grad}U|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}$ *и для* $\rho\geqslant\min U$

$$L(\rho)=\int\limits_{U=\rho}|\operatorname{grad}U||dz|=\int\limits_{U=\rho}\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right||dz|, \tag{2}$$

где интеграл берется по линии уровня $U(z)=\rho$, которая для всех достаточно больших значений ρ состоит из конечного числа замкнутых гладких кривых.

При этих условиях интеграл

$$\int^{\infty}\frac{d\rho}{L(\rho)} \tag{3}$$

сходится.

Доказательство. Пусть $\rho_0>U(0)$ и $r_0>0$ — кратчайшее расстояние от точки $z=0$ до кривой $U=\rho\geqslant\rho_0$. Последняя содержит тогда замкнутую ветвь, окружающую круг $|z|\leqslant r_0$, и, следовательно, ее длина не меньше, чем $2\pi r_0$. Из неравенства Шварца следует тогда, что

$$4\pi^2r_0^2\leqslant\left(\int\limits_{U=\rho}|dz|\right)^2=\left(\int\limits_{U=\rho}\sqrt{\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|}\cdot\frac{|dz|}{\sqrt{\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|}}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{U=\rho}\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right||dz|\cdot\int\frac{|dz|}{\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|}=L(\rho)\frac{dA(\rho)}{d\rho},$$

где

$$\frac{dA}{d\rho}=\int\limits_{U=\rho}\frac{|dz|}{\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|}$$

---

[1]) L. Ahlfors [9]. Изложению, данному в тексте, я обязан письменному сообщению Альфорса.

является производной от площади $A(\rho)$ области $U<\rho$. Интегрируя, найдем, что для $\rho \geqslant \rho_0$

$$A(\rho) - A(\rho_0) \geqslant 4\pi^2 r_0^2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{L(\rho)},$$

и так как $A(\rho)<\pi R^2$, то для всех $\rho \geqslant \rho_0$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{L(\rho)} < \frac{1}{4\pi}\left(\frac{R}{r_0}\right)^2,$$

откуда следует утверждение.

Примечание. Для $R=\infty$ лемма более не справедлива. В самом деле, если положить $U(z)=\log^{+}|z|$, то, для $\log|z|=\rho>1$, $|\operatorname{grad} U| = \frac{1}{|z|} = e^{-\rho}$, и поэтому $L(\rho) = 2\pi|z|e^{-\rho} = 2\pi$. Интеграл (3), следовательно, бесконечен.

277. Значение этого результата для проблемы типа покоится на том, что выражение $L(\rho)$, а, следовательно, и интеграл (3) инвариантны относительно аналитических преобразований переменной z. В самом деле, если вместо z ввести новую переменную $w=w(z)$, $z=z(w)$, где $w(z)$ — определенная в круге $|z|<R$ однозначная аналитическая функция от z, то $U(z(w))$ будет однозначной функцией точек P_w римановой поверхности, на которую функция $w(z)$ отображает круг $|z|<R$ и, далее,

$$\int_{U=\rho} |\operatorname{grad}_w U|\,|dw| = \int_{U=\rho} |\operatorname{grad}_z U|\left|\frac{dz}{dw}\right||dw| = \int_{U=\rho} |\operatorname{grad}_z U|\,|dz|. \quad (4)$$

278. Пусть теперь F_w — открытая односвязная риманова поверхность, расположенная над плоскостью w, и $U(P_w)$ — определенная на этой поверхности однозначная действительная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

a) В каждой точке P_w поверхности F_w, за исключением самое большее изолированных точек, функция $U(P_w)$ непрерывна.

b) В точках разрыва $U=+\infty$.

c) Производные $\frac{\partial U}{\partial u}$, $\frac{\partial U}{\partial v}$ $(w=u+iv,)$ непрерывны на F_w, за исключением самое большее некоторых гладких изолированных дуг γ_w, т. е. в окрестность каждой точки P_w поверхности попадает не более конечного числа частей дуг γ_w.

d) $\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 > 0$ всюду за исключением самое большее изолированных точек поверхности.

e) Если P_w^{ν} $(\nu=1, 2, \ldots)$ — бесконечная последовательность точек поверхности, не имеющая принадлежащих к поверхности

предельных точек, то

$$U(P_w^{\nu}) \to +\infty \quad \text{при} \quad \nu \to \infty.$$

Пусть Γ_ρ — кривая на поверхности F_w, определенная соотношением $U(P_w) = \rho \; (\geqslant \min U)$. При этих условиях имеет место следующая

Теорема 1 [1]). *Пусть F_w — открытая односвязная риманова поверхность. Если на ней можно определить функцию $U(P_w)$, удовлетворяющую условиям* а), ..., е), *для которой интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{d\rho}{L(\rho)} \tag{5}$$

расходится, то поверхность F_w принадлежит к параболическому типу. При этом, как и прежде,

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} |\operatorname{grad}_w U| \, |dw|.$$

В самом деле, если бы F_w была гиперболического типа, то ее можно было бы отобразить взаимно однозначно и конформно (за исключением точек ветвления конечного порядка) на конечный круг $|z| < R < \infty$. Если $z = z(P_w)$, $P_w = P_w(z)$ — соответствующая аналитическая отображающая функция, то функция $U(P_w z)$ удовлетворяет условиям леммы, и так как выражение $L(\rho)$ инвариантно относительно аналитических преобразований, то интеграл (5) должен был бы сходиться, что противоречит предположению. Следовательно, поверхность F_w не может быть гиперболического типа.

279. Применим предыдущий критерий к определению типа односвязной римановой поверхности F, *имеющей одни лишь изолированные точки ветвления.* В простейшем случае, когда F принадлежит к классу $F(w_1, \ldots, w_q)$ или к более общему классу $F(W_1, \ldots, W_q)$ (ср. гл. XI, § 2), она может быть топологически охарактеризована с помощью комплекса отрезков. Как обобщение этого способа представления поверхности проведем вместе с Кобеяши (Kobayashi) [2]) нижеследующее построение, которое может быть выполнено для каждой поверхности F, имеющей одни лишь изолированные точки ветвления.

Представим себе поверхность F расположенной над сферой Римана и проведем вокруг каждой ее точки ветвления $w = a_\nu$ окрестность Q_ν, состоящую из совокупности точек P_w поверхности F, расстояние которых, измеренное на поверхности (в сферической метрике) от точки a_ν, короче, чем расстояние до других точек ветвления a_μ $(\mu \neq \nu)$. Полученный таким образом *нормальный многоугольник* Q_ν ограничен некоторым числом дуг B больших кругов, точки которых находятся на одинаковом расстоянии по крайней мере от двух точек ветвления. Образованная дугами B

[1]) См. L. Ahlfors [9].
[2]) Z. Kobayashi [4].

сеть Кобеяши в простейших случаях совпадает с комплексом отрезков; во всяком случае для поверхностей $F(w_1, \ldots, w_q)$ нормальные многоугольники Q_ν и элементарные области комплекса отрезков соответствуют друг другу взаимно однозначно.

280. Перейдем теперь к определению на поверхности F функции $U(P_w)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1. Для этого возьмем на сети B произвольную точку P_w; если она не является вершиной, то она граничит с двумя нормальными многоугольниками Q' и Q'', содержащими точки ветвления $w=a'$ и $w=a''$. Если соединить P_w дугами больших окружностей $\left(\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ $G(P_w, a')$, $G(P_w, a'')$ с этими точками, то эти дуги поворачиваются на *равные* углы, когда P_w движется по соответствующей стороне $B(a', a'')$ сети B.

Приращение $d\tau$ этого угла на элементе дуги $|dw|$, очевидно, равно

$$d\tau(P_w) = \left| d \arg \frac{1+\bar{a}w}{w-a} \right|,$$

где вместо a нужно подставить a' или a'' [1]).

Пусть далее P_0 — произвольная фиксированная и P_w — подвижная точки на B. Определим функцию

$$\tau(P_w) = \min \int_{P_0 P_w} d\tau(P_w'),$$

где P_w' пробегает на B от P_0 до P_w. Этим τ определена как непрерывная, неотрицательная функция точки P_w сети B. Затем она непрерывно продолжается в каждую внутреннюю точку P_w многоугольников Q_ν, отличную от точек ветвления, с помощью следующего способа: дуга окружности $G(P_w, a_\nu)$ продолжается за точку P_w до встречи с сетью B в некоторой точке P_w^* и затем полагается $\tau(P_w) = \tau(P_w^*)$.

Кроме углового расстояния $\tau(P_w)$ между точками P_0 и P_w вводится еще другая положительная и для $P_w \neq a_\nu$ непрерывная функция σ, определяемая соотношением

$$\sigma(P_w) = \log \left| \frac{1+\bar{a}w}{w-a} \right|,$$

где a — ближайшая (в сферической метрике) к P_w точка ветвления, если P_w не лежит на B, и произвольная из ближайших точек ветвления, если P_w лежит на B.

281. Сумма

$$U(P_w) = \sigma(P_w) + \tau(P_w)$$

удовлетворяет всем условиям п. 278. В каждой точке поверхности

[1]) Этот результат очевиден для $a=0$. Если $a \neq 0$, то нужно w преобразовать с помощью вращения сферы, переводящей a в нулевую точку.

$P_w \neq a_\nu$, она непрерывна. То же самое справедливо для ее частных производных первого порядка, исключая стороны сети B, где $\sigma(P_w)$ достигает постоянного (положительного) минимума, а также некоторые дуги окружностей $G(P_w, a_\nu)$, на которых $\tau(P_w)$ принимает экстремальное значение. Если ввести переменную $t = \sigma + i\tau$, то в качестве конформного образа поверхности F мы получим расположенную над первым квадрантом плоскости t многолистную поверхность F_t, не имеющую совсем точек ветвления, но зато имеющую горизонтальные и вертикальные складки, соответствующие вышеуказанным линиям разрыва [1]).

Рассматривая теперь линии уровня $U = \sigma + \tau = \text{const}$, мы найдем, учитывая свойство инвариантности выражения $|\operatorname{grad}_w U||dw|$ (п. 277), что

$$|\operatorname{grad}_w U||dw| = |\operatorname{grad}_t U||dt| = \sqrt{2}\,|dt|.$$

Следовательно, интеграл

$$L(\rho) = \int_{\Gamma_\rho} |\operatorname{grad}_w U(P_w)||dw|,$$

взятый по линии уровня $\Gamma_\rho\,(U = \sigma + \tau = \rho)$, равен $\sqrt{2}$, умноженному на сумму длин расположенных на складчатой поверхности F_t отрезков $\sigma + \tau = \rho$, представляющих образ линии Γ_ρ. Чтобы оценить эти длины, обозначим через $n(\tau)$, где $\tau > 0$, число точек P_w на сети B, удовлетворяющих уравнению

$$\tau(P_w) = \tau.$$

Если точка P_w отлична от вершин сети B, то она определяет две дуги окружностей $G(P_w, a)$, на которых τ сохраняет постоянное значение и, следовательно, на которых лежит *самое большее одна* точка $(\sigma = \rho - \tau,\ \tau)$ линии уровня $\Gamma_\rho\,(\sigma + \tau = \rho)$. Следовательно, исключая изолированные значения τ, над каждой точкой $t = \rho - \tau + i\tau$ отрезка $\sigma + \tau = \rho\,(\sigma > 0,\ \tau > 0)$ плоскости t лежит самое большее $2n(\tau)$, образов точек линии Γ_ρ, так что

$$L(\rho) = \sqrt{2}\int_{\Gamma_\rho} |dt| = 2\int_{\Gamma_\rho} |d\tau| \leqslant 4\int_{\tau=0}^{\rho} n(\tau)\,d\tau.$$

Из теоремы 1 следует тогда теорема Кобеяши:

Теорема 2. *Пусть F—открытая односвязная риманова поверхность, имеющая одни лишь изолированные точки ветвления; пусть далее B — соответствующая ей сеть нормальных многоугольников и $n(\tau)$ — число точек P_w этой сети, находящихся на угловом расстоянии τ от произвольно выбранной точки сети P_0.*

[1]) Этому наглядному представлению теоремы Кобеяши я также обязан письменному сообщению Альфорса.

Тогда, если интеграл

$$\int_{0}^{\infty} \frac{d\rho}{\int_{0}^{\rho} n(\tau)\, d\tau} \tag{6}$$

расходится, то поверхность принадлежит к параболическому типу.

282. В качестве применения этой общей теоремы рассмотрим простой случай поверхности, имеющей только конечное число точек ветвления. Для такой поверхности $n(\tau)$ остается, очевидно, ограниченным. Интеграл (6), ведущий себя, следовательно, как $\int^{\infty} \frac{d\rho}{\rho}$, расходится, и поверхность должна принадлежать к параболическому типу, как это было уже доказано выше (гл. XI, § 3) другим методом.

Для общего класса поверхностей, разветвленных над $q \geqslant 3$ точками $w_1, \ldots, w_q$ (или более обще: над областями $W_1, \ldots, W_q$), предыдущая теорема также приводит к интересному результату. Мы ограничимся случаем, когда поверхность имеет одни лишь логарифмические точки ветвления, расположенные над тремя точками w_1, w_2, w_3, случай, впервые исследованный Шпайзером.[1]) Представим поверхность с помощью комплекса отрезков (гл. XI, § 2) и обозначим через $\varphi(n)$ число гнезд n-го поколения. Если каждой узловой точке P, из которой выходят $\nu\,(2 \leqslant \nu \leqslant 3)$ различных гнезд, поставить в соответствие в качестве *числа разветвления* число $\nu - 2$ и обозначить через $\psi(n)$ сумму чисел разветвления всех узловых точек первых n поколений, то

$$\varphi(\nu) = \psi(\nu) + 2.$$

С другой стороны, очевидно, что угловое расстояние Кобеяши τ от точки P_ν ν-го поколения комплекса до начальной его точки, деленное на ν, изменяется между конечными положительными границами. Заменяя стоящий в (6) интеграл $\int_0^{\rho} n\, d\tau$ его максимальным значением $\rho n(\rho)$, получаем непосредственно из предыдущего[2]):

Теорема 3. *Если поверхность $F(w_1, w_2, w_3)$ имеет только логарифмические точки ветвления и число разветвления $\varphi(\nu)$ соответствующего ей комплекса отрезков возрастает настолько медленно, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\psi(n)}$$

---

[1]) A. Speiser [1], [2].

[2]) Эта теорема была сперва доказана автором [3] при помощи метода, в качестве известного обобщения которого можно рассматривать метод Кобеяши.

расходится, то поверхность принадлежит к параболическому типу[1]).

Известные новые результаты Мирберга показывают, что даже для простейшего случая поверхностей $F(w_1, w_2, w_3)$ едва ли можно указать одновременно необходимые и достаточные условия, если учитывать только степень разветвленности поверхности. Наряду со степенью разветвления нужно в качестве важного признака для определения типа поверхности учитывать симметрию, соответственно несимметрию в структуре поверхности[2]).

XIII. АЛЬФОРСОВА ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НАЛОЖЕНИЯ.

§ 1. Осиовные топологические понятия.

283. В предыдущем изложении учения о распределении значений наш интерес в большой степени был направлен на свойства римановой поверхности F, на которую конформно отображается круг $|z| < R \leqslant \infty$ с помощью заданной мероморфной функции $w = w(z)$. Для нашего исследования существенно было следующее: 1) на поверхности F вводилась метрика, например, сферическая в случае первой основной теоремы, неевклидова (или еще более общая) — для получения второй основной теоремы; 2) чтобы овладеть свойствами всей открытой поверхности F, нужно было определить множество аппроксимирующих поверхностей, с помощью которых исчерпывалась поверхность F; в качестве таких аппроксимирующих поверхностей нам служили прежде всего образы F_r кругов $|z| \leqslant r < R$. 3) Отображение $z \to w$ было однозначным и конформным.

Недавно Л. Альфорс[3]) указал новый путь к основным теоремам, опирающийся на прямое исследование поверхности наложения F заданной основной поверхности. Эта теория во многих отношениях означает существенное продвижение вперед. Во-первых, достигается более глубокое понимание механизма распределения значений, поскольку производится совершенно ясное отделение *топологического* от *метрического*. Во-вторых, не требуется более обязательно конформность отображения; основные теоремы распространяются на значительно более общий класс отображений. В третьих, эти основные теоремы получаются в новой, более общей форме, которая для частного случая мероморфных функций приводит к результатам, представляющим, с одной стороны, усиление прежних результатов,

---

[1]) Для поверхностей с одними лишь алгебраическими точками ветвления имеет место аналогичная теорема Ahlfors'a [4]. См. также Speiser [2], [3], Ullrich [3].

[2]) P. Myrberg [2].

[3]) L. Ahlfors [10].

хотя, с другой стороны, они и не содержат прежних результатов в их наиболее общей первоначальной формулировке.

284. Чтобы создать необходимую основу для этой теории, нужно сперва ввести некоторые простые вспомогательные топологические понятия, относящиеся к замкнутым поверхностям или к поверхностям с краями (berandete Flächen).

Пусть задано бесконечное множество F_0 точек P_0 и каждой точке P_0^* этого множества поставлены в соответствие в качестве *окрестностей* определенные подмножества (P_0) множества F_0, содержащие точку P_0^* и удовлетворяющие основным свойствам окрестностей на поверхности[1]). С понятием окрестности на множестве F_0 определяются известным образом понятия простой (жордановой) кривой, предельной точки некоторой бесконечной последовательности точек и т. д. Наконец, пусть множество F_0 связно, т. е. всякие две его точки P_0' и P_0'' могут быть соединены непрерывной кривой, расположенной на F_0.

Определенная таким образом поверхность F_0 допускает *разбиение на треугольники*, т. е. F_0 можно разбить (бесконечным числом способов) на систему односвязных областей (треугольников) $D_1\ D_2, \ldots$, ограниченных тремя простыми дугами (сторонами) β, не имеющих общих внутренних (не лежащих на сторонах) точек и не сгущающихся ни к какой точке P_0 поверхности F_0.

Нужно различать два случая: поверхность F_0 допускает разбиение на конечное число треугольников D, тогда поверхность F_0 *замкнута*; всякая бесконечная последовательность точек поверхности имеет в качестве точек сгущения только точки, принадлежащие к самой поверхности. Или же во всякой системе разбиения число треугольников *бесконечно*. В этом случае поверхность *открыта*: можно указать бесконечную последовательность точек P_0, для которой ни одна из точек поверхности не является точкой сгущения*).

285. В этом параграфе мы рассматриваем только *конечные* поверхности, т. е. поверхности, составленные из конечного числа треугольников. Наряду с этими замкнутыми поверхностями, у которых, следовательно, каждая сторона треугольника принадлежит ровно к двум соседним треугольникам, введем еще в рассмотрение *конечные поверхности с краями*, построенные аналогичным образом также из конечного числа треугольников с той, однако, разницей, что некоторое число сторон может теперь принадлежать *только к одному* треугольнику, — эти стороны образуют *границу поверхности с краями*. К понятию поверхности с краем мы приходим, удаляя из заданной замкнутой поверхности некоторое число треугольников; обратно,

---

[1]) См. например, B. Kerekjarto [1], см. также Зейферт и Трелльфаль, Топология, ГОНТИ, М. — Л., 1938.

*) Здесь дано определение поверхностей, замкнутых и открытых в теоретико-множественном смысле. В дальнейшем изложении под замкнутыми поверхностями понимаются поверхности, замкнутые в элементарно-геометрическом смысле.

каждая поверхность F_0 с краями может быть дополнена до замкнутой поверхности: для этого достаточно взять два топологически эквивалентных экземпляра поверхности F_0 и идентифицировать соответствующие граничные точки.

Для свойств связности замкнутой поверхности или конечной поверхности с краями решающую роль играет характеристика

$$\rho = -e + k - p;$$

здесь при заданном разбиении на треугольники e означает число внутренних вершин, k — число внутренних сторон и p — число треугольников. Мы будем предполагать доказанным, что характеристика не зависит от выбранного разбиения на треугольники*). Характеристика достигает своего наименьшего значения, — 2, для замкнутой поверхности жанра нуль (например, для сферы). Для треугольника или, более обще, для одиосвязной области $\rho = -1$.

Представим себе, что с помощью некоторых внутренних сторон заданного разбиения на треугольники поверхность F_0 разбивается на некоторые многоугольники G. Если обозначить через k' число этих сторон и через e' — число принадлежащих им внутренних вершин треугольников, то легко убедиться, что

$$\rho = \sum \rho(G) - e' + k',$$

где $\rho(G)$ означает характеристику многоугольника G.

Предположим теперь, что предыдущее разбиение поверхности F_0 на многоугольники G производится с помощью не имеющих общих точек циклических или нециклических сечений[1]) поверхности F_0. Легко видеть, что $k' - e'$ тогда в точности равно числу $n(s)$ нециклических сечений (s).

Если конечная поверхность F_0 разбивается системой не имеющих общих точек циклических или нециклических сечений (s) на многоугольники G, то

$$\rho = \sum \rho(G) + n(s), \tag{1}$$

*где $n(s)$ означает число нециклических сечений***).

286. Перейдем теперь к понятию поверхности наложения. Пусть кроме данной конечной (замкнутой или с краями) поверхности F_0, которая в дальнейшем называется основной поверхностью (Grundfläche), задана еще другая, также конечная (замкнутая или с краями) поверхность F. Представим себе, что на этих поверхностях определены разбиения на треугольники, между которыми установлено соответствие, обладающее следующими свойствами:

---

*) См. Зейферт и Трельфаль, Топология, ГОНТИ, М.—Л., 1938.

**) В дальнейшем нециклические сечения называются просто сечениями.

[1]) Сечение называется циклическим, если оно представляет простую кривую, замыкающуюся на поверхности.

1) Каждому треугольнику D поверхности F топологически соответствует вполне определенный „основной треугольник“ (Spurdreieck) D_0 поверхности F_0. Точка P_0 треугольника D_0, соответствующая точке P треугольника D, называется следом точки P; говорят также, что P лежит над P_0.

2) Двум соседним треугольникам D поверхности F, разделенным стороной k, всегда соответствуют два соседних треугольника D_0 поверхности F_0, притом так, что точке, лежащей на стороне k, соответствует одна и та же точка на соответствующей стороне поверхности F_0 вне зависимости от того, в каком из двух треугольников эту точку мы рассматриваем.

При этих предположениях F называется *поверхностью наложения* основной поверхности F_0. Те граничные стороны поверхности F, которые лежат над внутренними сторонами основной поверхности F_0, образуют *относительную границу* поверхности F.

Пусть e — внутренняя вершина на F; она принадлежит в качестве вершины к некоторому циклу треугольников D. Каждому треугольнику D_0 соответствующего цикла на F_0 соответствует одно и то же число m треугольников предыдущего цикла. Если $m > 1$, то e называется *точкой разветвления* поверхности наложения; число $m - 1$ называется ее порядком.

287. Поверхность наложения F может быть следующим образом разделена на „листы“: пусть F_1 — множество тех треугольников на F_0, над которыми лежит по крайней мере один треугольник поверхности F, F_1 называется „первым листом“ поверхности F. „Второй лист“ F_2 состоит из всех тех треугольников на F_0, над которыми лежит по крайней мере два треугольника поверхности F, и т. д. Таким образом с помощью листов $F_1, \ldots, F_n$ полностью характеризуется покрытие поверхности F_0 поверхностью F, поскольку вопрос идет о числе покрытий; n означает здесь наибольшее из числа покрытий.

288. С помощью разделения на листы можно установить важное соотношение для характеристики поверхности наложения. Пусть при заданном разбиении основной поверхности F_0 на треугольники число

$$p_\nu = -e_\nu + k_\nu - p_\nu$$

означает характеристику ν-го листа n-листной поверхности наложения F. Мы тотчас замечаем, что для этой поверхности $p = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu$ и и $k = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu$. Кроме того, в общем случае $e < \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu$, так как при подсчете величины e не учитывается кратность разветвленных вершин, которые также считаются только *один раз*. В действительности

$$e = \sum_{\nu=1}^{n} e_\nu - v,$$

где v — так называемое *число разветвления* поверхности наложения, которое, согласно определению, равно сумме порядков всех точек разветвления поверхности F. Таким образом, для характеристики $p = -e + k - p$ мы получаем следующее представление:

Характеристика p поверхности наложения F равна

$$p = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu + v, \tag{2}$$

где p_ν — характеристика ν-го листа и v — число разветвления поверхности.

289. Если F не имеет никакой относительной границы, то характеристика каждого листа равна характеристике p_0 основной поверхности F_0 и (2) переходит в так называемое соотношение Гурвица

$$p = np_0 + v, \tag{2'}$$

которое, следовательно, определяет характеристику n-листной поверхности наложения, не имеющей относительной границы.

§ 2. Введение метрики.

290. Определим теперь на конечной основной поверхности F_0 метрику. Чтобы излишне не ограничить возможные приложения теории, будем допускать каждую метрику, удовлетворяющую следующим весьма общим постулатам. Рассмотрим сперва случай *замкнутой* поверхности.

1) Каждой дуге β заданного класса (β) простых кривых поставлено в соответствие в качестве *длины дуги* конечное положительное число $L_0(\beta)$. Класс (β) содержит в частности все дуги, встречающиеся в определяющем разбиении на треугольники.

2) Между двумя произвольными точками поверхности проходит по крайней мере одна дуга β. Нижняя граница длин соединяющих дуг β, *расстояние между этими точками*, положительна.

3) Для каждой точки P и каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность (P), точки которой удалены от точки P на расстояние $< \varepsilon$.

4) Каждая область D поверхности F_0, ограниченная простой замкнутой кривой β, имеет конечную положительную площадь $J_0(D)$.

5) Мера длины и мера площади аддитивны.

6) Для каждой точки P существует окрестность U_P и число $h(P)$ такие, что каждая лежащая в U_P замкнутая кривая длины L ограничивает область, площадь J которой удовлетворяет условию

$$J < hL. \tag{3}$$

Эти условия являются весьма общими. Они выполняются при всех метриках, употребительных в дифференциальной геометрии.

291. Величина h, входящая в условие 6, зависит от точки P. Из предыдущих постулатов следует, однако, что условие (6) выполняется с постоянным значением h для всех точек, если только берутся дуги достаточно малой длины.

6′) *Существуют два положительных числа d и h такие, что каждая замкнутая кривая β длины $L<d$ заключает площадь $J<hL$.*

Чтобы в этом убедиться, определим для каждой точки окрестность U_P и соответствующую постоянную $h(P)$ и обозначим через $\delta(>0)$ наименьшее расстояние от точки P до границы окрестности U_P. Пусть тогда U_P' означает окрестность точки P, точки которой удалены от P на расстояние $\leqslant\frac{\delta}{2}$. По теореме о покрытии Гейне-Бореля поверхность F_0 может быть покрыта *конечным* числом окрестностей U_P'; пусть $d(>0)$ — наименьшее из соответствующих чисел $\frac{\delta}{2}$ и h — наибольшее из соответствующих чисел $h(P)$. Если β — простая замкнутая кривая длины $L<d$, то β должна лежать целиком внутри одной из выбранных окрестностей U_P и, следовательно, согласно 6), она ограничивает область, для которой $J<h(P)L\leqslant hL$, что и требовалось доказать.

292. Отсюда получается следующая

Лемма 1. *Существует конечная постоянная $h>0$ такая, что, если замкнутая поверхность F_0 с помощью конечного числа замкнутых кривых β с суммой длин, равной L, разбивается на две части D' и D'', состоящие из конечного числа областей и имеющие соответственно площади J', J'', то*

$$\min(J',\ J'')\leqslant hL. \tag{4}$$

Если все кривые β имеют длину $<d$, то они ограничивают некоторые области (в конечном числе), сумма площадей которых по 6′) меньше, чем hL, где h — указанная в 6′) постоянная. Остальные точки поверхности все принадлежат или к D', или к D'', и предыдущая сумма площадей мажорирует или J'', или J', откуда следует утверждение (4).

Если же длина по крайней мере одной из кривых β не меньше, чем d, то и $L\geqslant d$. Если $J_0=J'+J''$ означает площадь всей поверхности F_0, то

$$\min(J',\ J'')\leqslant\frac{J_0}{2}\leqslant\frac{J_0}{2d}L$$

и (4) имеет место, если h положить равным числу $\frac{J_0}{2d}$, зависящему только от метрики поверхности F_0.

293. Если конечная основная поверхность F_0 имеет край, то дополняем ее, как в п. 285, до замкнутой поверхности $\overline{F_0}$. Предположим, что заданная на F_0 метрика длин и площадей выбрана

так, что условия 1)—6) выполняются на $\overline{F}_0$. Тогда лемма 1 справедлива для $\overline{F}_0$, а, следовательно, и для F_0, если только кривые β замкнуты *относительно* F_0, т. е. если они или замыкаются внутри F_0 или представляют *сечения* поверхности F_0; в самом деле, сечению поверхности F_0 соответствует на $\overline{F}_0$ замкнутая кривая.

294. Пусть β — простая дуга на F_0 и P — точка на β. Тогда, если существуют два положительных числа $d(P)$ и $h(P)$ такие, что сумма λ длин частей дуги β, точки которых отстоят от P на расстоянии $d\,(0<d<d(P))$, удовлетворяет условию

$$\lambda<h(P)\,d,$$

то мы скажем, что дуга β *регулярна в точке* P. Если дуга β регулярна в точке P, то она, очевидно, удовлетворяет следующему важному условию: существует окрестность U_P и число $h(P)$ такие, что часть дуги β, лежащая внутри проведенной в U_P замкнутой кривой длины L и окружающей точку P, имеет длину $<h(P)\,L$.

Дуга β называется *регулярной*, если она регулярна в каждой точке.

В дальнейшем будем предполагать, что все стороны рассматриваемых разбиений на треугольники регулярны. В полной аналогии с доказательством леммы 1 доказывается тогда

Лемма 2. *Если β — простая регулярная кривая на замкнутой поверхности F_0, то существует конечное число $h>0$ такое, что, если провести на F_0 замкнутые кривые с суммой длин L, разбивающие поверхность F_0 на две части, состоящие из конечного числа областей, и обозначить соответственно через λ', λ'' суммы длин частей дуги β, попадающих в эти части, то*

$$\min(\lambda',\,\lambda'')<hL. \tag{5}$$

295. Эта лемма остается также в силе, если поверхность F_0 не предполагать замкнутой, а предположить, что она имеет края; в этом убеждаемся также, как в п. 293. В рассматриваемом случае разбивающие кривые с суммой длин L относительно замкнуты на поверхности F_0, в частности они могут представлять сечение поверхности F_0.

Особо следует отметить, что в случае поверхности с краями в качестве дуги β можно взять часть границы поверхности F_0, если только она регулярна. Таким образом, приходим к следующему, важному для дальнейшего, следствию:

Если F_0 конечна и имеет края, то существует конечное число $h>0$ такое, что, если F_0 разбивается системой из конечного числа сечений с суммой длин L на две части, то граница поверхности F_0 распадается на две части, длины которых λ', λ'' удовлетворяют соотношению

$$\min(\lambda',\,\lambda'')<hL. \tag{5'}$$

§ 3. Метрические свойства поверхностей наложения.

296. Метрика конечной основной поверхности F_0 переносится на заданную конечную поверхность наложения F следующим образом: каждой кривой β и части D поверхности F ставится в соответствие в качестве длины и площади длина L и площадь J соответствующей кривой β_0 и области D_0 основной поверхности F_0. На поверхности наложения можно тогда ввести фундаментальную величину, которая имеет для этой поверхности такое же значение, какое в теории распределения значений имеет характеристическая функция $T(r)$ для поверхности F_r.

297. Если разделить всю площадь J поверхности наложения F на площадь J_0 основной поверхности F_0, то в качестве частного получится величина

$$S=\frac{J}{J_0}, \tag{6}$$

которая называется *средним числом листов* поверхности F. Если D — заданная область основной поверхности F_0, имеющая площадь $J_0(D)$, то выражение

$$S(D)=\frac{J(D)}{J_0(D)}, \tag{6'}$$

где $J(D)$ означает сумму площадей всех частей поверхности наложения F, лежащих над D, называется *средним числом листов поверхности F над D.*

Аналогично определяется *среднее число листов $S(\beta)$ поверхности F над заданной кривой β* основной поверхности F_0. Если $L_0(\beta)$ означает длину кривой β и $L(\beta)$ означает сумму длин всех лежащих над ней дуг поверхности наложения F, то

$$S(\beta)=\frac{L(\beta)}{L_0(\beta)}. \tag{6''}$$

298. Для дальнейшего исследования важно знать, в какой зависимости находится среднее число листов от соответствующей области D или от кривой β основной поверхности F_0.

Первая теорема о покрытии. *Существует такое конечное число $h>0$, зависящее только от метрики основной поверхности F_0, что для каждой конечной поверхности наложения F поверхности F_0 выполняется условие*

$$|S-S(D)|\leqslant\frac{h}{J_0(D)}L, \tag{1,1}$$

где L означает длину относительной границы поверхности F.

Для доказательства разложим поверхность F на определенные в п. 287 листы $F_1, \ldots, F_n$. Тогда

$$J=\sum_1^n J_\nu \quad L=\sum_1^n L_\nu$$

где J_ν означает площадь, а L_ν — длину относительной границы ν-го листа F_ν. Соответственно

$$J(D)=\sum_1^n J_\nu(D),$$

если $J_\nu(D)$ означает площадь части листа F_ν, лежащей над D (т. е. пересечения области D с листом F_ν).

Так как $J_\nu(D)\leqslant J_\nu$, то

$$S_\nu(D)\equiv\frac{J_\nu(D)}{J_0(D)}\leqslant\frac{J_\nu}{J_0(D)}.$$

С другой стороны,

$$S_\nu\equiv\frac{J_\nu}{J_0}\leqslant\frac{J_\nu}{J_0(D)},$$

и, следовательно, так как S_ν и $S_\nu(D)$ неотрицательны, то

$$|S_\nu-S_\nu(D)|\leqslant\frac{J_\nu}{J_0(D)}. \tag{7}$$

Аналогично получается неравенство $J_0(D)-J_\nu(D)\leqslant J_0-J_\nu$, откуда следует, что

$$1-S_\nu(D)\leqslant\frac{J_0-J_\nu}{J_0(D)};$$

вместе с тем

$$1-S_\nu=\frac{J_0-J_\nu}{J_0}\leqslant\frac{J_0-J_\nu}{J_0(D)},$$

и так как $1-S_\nu(D)$ и $1-S_\nu$ неотрицательны, то

$$|S_\nu-S_\nu(D)|=|(1-S_\nu)-(1-S_\nu(D)|\leqslant\frac{J_0-J_\nu}{J_0(D)}. \tag{7'}$$

Из (7) и (7') следует, что

$$|S_\nu-S_\nu(D)|\leqslant\frac{1}{J_0(D)}\min(J_\nu,\ J_0-J_\nu),$$

или, согласно лемме 1,

$$|S_\nu-S_\nu(D)|\leqslant\frac{h}{J_0(D)}L_\nu.$$

Суммируя по ν, получим искомое соотношение (I,1)

$$|S-S(D)|=\left|\sum_1^n(S_\nu-S_\nu(D))\right|\leqslant\frac{h}{J_0(D)}\sum_1^n L_\nu=\frac{h}{J_0(D)}L. \tag{8}$$

299. Для среднего числа листов $S(\beta)$ поверхности наложения F, лежащих над заданной *регулярной кривой* β основной поверхности, имеет место аналогичная

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА О ПОКРЫТИИ. *Существует конечное число $h>0$, зависящее только от метрики поверхности F_0 и выбора регуляр-*

ной кривой β *на* F_0 *такое, что*

$$|S - S(\beta)| < hL, \tag{1,2}$$

где L *— длина относительной границы поверхности* F.

Разбивая F на листы $F_1, \ldots, F_n$, получим для длины $L(\beta)$ дуг, расположенных над β, выражение

$$L(\beta) = \sum_1^n L_\nu(\beta),$$

где $L_\nu(\beta)$ — длина части дуги β, находящейся на листе F_ν.

Предположим сперва, что β *разбивает* поверхность F_0, и обозначим через D ту из соответствующих ограниченных β частей, которая имеет *меньшую* площадь.

Пусть D_ν — область пересечения D и F_ν; она имеет площадь $J_\nu(D)$ и границу длины $\leqslant L_\nu(\beta) + L_\nu$, где L_ν — длина границы листа F_ν. По первой лемме существует такая, зависящая только от поверхности F_0, постоянная h, что

$$J_\nu(D) \leqslant h(L_\nu(\beta) + L_\nu).$$

Заменяя D_ν дополнительной к ней относительно D областью $\overline{D_\nu}$ ($D_\nu + \overline{D_\nu} = D$), найдем аналогичным образом, что при той же постоянной h

$$J_0(D) - J_\nu(D) \leqslant h(L_0(\beta) - L_\nu(\beta) + L_\nu),$$

где $L_0(\beta)$ — длина кривой β. Отсюда, после деления на $J_0(D)$, получаются неравенства

$$S_\nu(D) \leqslant \frac{h}{J_0(D)}(L_\nu(\beta) + L_\nu),$$

$$1 - S_\nu(D) \leqslant \frac{h}{J_0(D)}(L_0(\beta) - L_\nu(\beta) + L_\nu).$$

Так как величина $\frac{hL_0(\beta)}{J_0(D)}$ по первой лемме не меньше 1 и $L_\nu \geqslant 0$, правые части последних соотношений, наверное, соответственно не меньше, чем $S_\nu(\beta)$ и $1 - S_\nu(\beta)$; следовательно, эти два соотношения остаются в силе, если слева заменить $S_\nu(D)$ на $S_\nu(\beta)$ *). Если еще учесть, что стоящие слева выражения неотрицательны, получим неравенства

$$|S_\nu(D) - S_\nu(\beta)| \leqslant \frac{h}{J_0(D)}(L_\nu(\beta) + L_\nu),$$

$$|S_\nu(D) - S_\nu(\beta)| \leqslant \frac{h}{J_0(D)}(L_0(\beta) - L_\nu(\beta) + L_\nu);$$

следовательно,

$$|S_\nu(D) - S_\nu(\beta)| \leqslant \frac{h}{J_0(D)}\{L_\nu + \min[L_\nu(\beta),\ L_0(\beta) - L_\nu(\beta)]\}.$$

---

*) При этом введено обозначение $S_\nu(\beta) = \frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta)}$.

Применяя вторую лемму, заключаем отсюда, что

$$|S_\nu(D)-S_\nu(\beta)|\leqslant h'L_\nu,$$

где h' — постоянная, зависящая только от выбора кривой β. Давая здесь ν значения $1, \ldots, n$ и суммируя, найдем, что

$$|S(D)-S(\beta)|\leqslant\sum_1^n|S_\nu(D)-S_\nu(\beta)|<h'L,$$

и, наконец, учитывая первую теорему о покрытии, получим соотношение

$$|S-S(\beta)|\leqslant\bar{h}L, \tag{9}$$

где $\bar{h}$ снова зависит только от β.

300. Этим теорема доказана для случая, когда β — регулярная кривая, *разбивающая* поверхность. Чтобы притти к общему случаю, о котором говорится во второй теореме о покрытии, заметим, что, повторяя рассуждения п. 298, легко доказать справедливость соотношения

$$|S(\beta)-S(\beta')|<\frac{h}{L_0(\beta')}L; \tag{10}$$

где β' — *часть* произвольно заданной регулярной кривой β и h — постоянная, зависящая только от выбора β.

В самом деле, если сумму длин расположенных над β' дуг поверхности наложения написать в виде $L(\beta')=\sum L_\nu(\beta')$, то $L_\nu(\beta')\leqslant L_\nu(\beta)$, и, следовательно,

$$S_\nu(\beta')\equiv\frac{L_\nu(\beta')}{L_0(\beta')}\leqslant\frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}.$$

Далее

$$S_\nu(\beta)\equiv\frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta)}\leqslant\frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')},$$

откуда следует, что

$$|S_\nu(\beta)-S_\nu(\beta')|\leqslant\frac{L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}. \tag{11'}$$

С другой стороны, так как часть дуги β, лежащая на ν-м листе вне β', содержится как часть в соответствующей части дуги β, лежащей на F_0 вне β', то $L_0(\beta')-L_\nu(\beta')\leqslant L_0(\beta)-L_\nu(\beta)$ и, следовательно,

$$1-S_\nu(\beta')\leqslant\frac{L_0(\beta)-L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}.$$

С другой стороны,

$$1-S_\nu(\beta)=\frac{L_0(\beta)-L_\nu(\beta)}{L_0(\beta)}\leqslant\frac{L_0(\beta)-L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')},$$

и из двух последних соотношений следует, что

$$|S_\nu(\beta)-S_\nu(\beta')|\leqslant\frac{L_0(\beta)-L_\nu(\beta)}{L_0(\beta')}. \tag{11''}$$

Из (11′) и (11″) получается

$$|S_\nu(\beta)-S_\nu(\beta')|\leqslant\frac{1}{L_0(\beta')}\min(L_\nu(\beta),\ L_0(\beta)-L_\nu(\beta))$$

или, учитывая вторую лемму,

$$|S_\nu(\beta)-S_\nu(\beta')|<\frac{h}{L_0(\beta')}L_\nu, \tag{11}$$

где L_ν означает длину границы ν-го листа, а h — постоянная, зависящая только от выбора кривой β. Суммирование этих неравенств дает нам, наконец, соотношение (10).

301. Окончательное доказательство второй теоремы о покрытии следует из соотношения (10) вместе с соотношением (I, 2), доказанным для замкнутой регулярной кривой β, разбивающей поверхность F_0. Чтобы убедиться, что соотношение (I, 2) справедливо для *произвольной* регулярной кривой β, выберем на β произвольную точку P, возьмем произвольную ее окрестность U_P и обозначим через β' часть кривой β, попадающую в U_P. Эта дуга β' может быть дополнена в U_P до замкнутой кривой β_P, разбивающей поверхность F_0. Применим теперь соотношение (10) к кривым β и β' и к кривым β_P и β', затем применим соотношение (I, 2) к разбивающей кривой β_P. Из этих трех соотношений получится тогда общее соотношение (I, 2).

302. Примечание. Для дальнейшего очень важно заметить, что вторая теорема о покрытии справедлива и для поверхностей F_0 с краями (ср. п. 295) и что тогда за β можно взять граничную дугу поверхности F_0, если граница этой поверхности регулярна, что мы в дальнейшем всегда будем предполагать.

§ 4. Основная теорема о конечных поверхностях наложения.

303. В § 1 уже отмечалось, что топологическое соотношение

$$\rho=\sum_1^n\rho_\nu+v, \tag{12}$$

определяющее характеристику n-листной конечной поверхности наложения F как функцию от характеристик ее листов $F_1,\ldots,F_n$ и числа разветвления v, в том случае, когда F *не имеет границы* относительно основной поверхности F_0, содержит в частности соотношение Гурвица

$$\rho=n\rho_0+v. \tag{12′}$$

Из этого соотношения видно, что характеристика ρ поверхности наложения F по меньшей мере равна характеристике ρ_0 основной поверхности, умноженной на число листов n. После того как на поверхности введена метрика, можно из общего соотношения характеристик (12) вывести соотношение, которое показывает, что

неравенство Гурвица $\rho \geqslant n\rho_0$ имеет место и для поверхностей с краями, если число листов n заменить вышеопределенным средним числом листов S и добавить к правой части некоторую величину, играющую в дальнейшем роль несущественного остаточного члена. Это составляет главное содержание нижеследующей фундаментальной теоремы [1]).

Основная теорема. *Пусть F_0 — конечная основная поверхность, замкнутая или с краями, на которой определена метрика указанного в* § 2 *вида. Тогда существует положительное число h такое, что для каждой конечной поверхности наложения F поверхности F_0 выполняется соотношение*

$$\overset{+}{\rho} \geqslant \rho_0 S - hL, \tag{II,1}$$

где ρ_0 — характеристика поверхности F_0, ρ — характеристика F и L — длина относительной границы поверхности F [2]).

304. Здесь будет рассмотрен только тот случай, когда основная поверхность *подобна однолистным* [3]). Пусть поверхность F_0 ограничена $q > 2$ замкнутыми граничными кривыми (или точками); тогда $\rho_0 = q - 2$. Проведем q не имеющих общих точек сечений $\beta_1, \ldots, \beta_q$ и обозначим через F_0', F_0'' две односвязные области, на которые при этом распадается поверхность F_0. Не ограничивая общности, можно предположить, что существует такое разбиение поверхности F_0 на треугольники, при котором сечения β_ν состоят из одних лишь сторон разбиения.

Рассмотрим теперь совокупность всех путей, составленных из сторон разбиения заданной конечной поверхности наложения F, которые расположены над сечениями β_ν. Образованные ими сечения σ поверхности F разбивают последнюю на конечное число $N(G)$ областей G. Если $n(\sigma)$ — число различных сечений σ, то, согласно (1) § 1, характеристика ρ поверхности наложения F равна $n(\sigma) + \sum \rho(G)$, где $\rho(G)$ означает характеристику области G. Так как характеристика каждой области с краями $\geqslant -1$, то $\rho(G) \geqslant -1$, и, следовательно,

$$\rho \geqslant n(\sigma) - N(G). \tag{13}$$

305. Чтобы вывести из этого соотношения основную теорему, требуется произвести известное разбиение областей G на классы. Предполагая существование области G, граница которой содержит ровно *одно* сечение σ, обозначим через (G_1) класс всех таких областей и через (σ_1) класс ограничивающих их сечений σ. Класс (G_2)

---

[1]) См. L. Ahlfors [10], стр. 168.

[2]) $\overset{+}{\rho}$ означает большее из чисел ρ и 0. Для $\rho_0 \leqslant 0$ теорема, очевидно, тривиальна, поэтому в дальнейшем можно предполагать $\rho_0 > 0$.

[3]) Поверхность называется подобной однолистным, если она разбивается всяким простым многоугольником (циклическое сечение). Ahlfors [10] рассматривает также случай поверхности, не подобной однолистным.

пусть состоит из всех областей, граница которых содержит ровно одно сечение σ, не принадлежащее к классу (σ_1); пусть (σ_2) — совокупность этих сечений. Таким образом, определим последовательность $(G_1), \ldots, (G_p)$ $(p \leqslant n)$ областей G и последовательность $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_p)$ соответствующих сечений σ; каждая область G_ν имеет в качестве граничной дуги ровно одно сечение $\sigma = \sigma_\nu$, не принадлежащее к предыдущим классам. Этот процесс разбиения на классы обрывается, как только все остающиеся области G или не ограничены более *ни одним* новым сечением σ или ограничены по крайней мере *двумя* такими сечениями; в противном случае процесс разбиения продолжается до полного исчерпания всех областей G.

Согласно определению каждое сечение $\sigma_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ принадлежит к границе некоторой области G_ν; покажем, что *в общем случае* σ_ν *принадлежит к границе только одной области* G_ν. Для этого рассмотрим сперва обе части F_ν', F_ν'', на которые заданное сечение σ_ν разбивает поверхность F. По крайней мере одна из этих частей содержит область G_ν, примыкающую к σ_ν; пусть, например, F_ν' обладает этим свойством. Тогда все сечения σ, расположенные *внутри* F_ν', принадлежат к классам $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_{\nu-1})$.

В самом деле, по построению классов (G_ν) и (σ_ν) все сечения, за исключением только σ_ν, ограничивающие указанную область G_ν, принадлежат к более низким классам $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_{\nu-1})$. Пусть σ_{ν_1} $(\nu_1 < \nu)$ — одно из таких сечений. Так как σ_{ν_1} входит в границу по крайней мере одной области класса (G_{ν_1}), то область, отличная от G_{ν_1}, примыкающая к σ_{ν_1}, должна принадлежать к этому классу, и все ограничивающие ее сечения σ принадлежат, следовательно, к классам $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_{\nu_1})$. Продолжая так дальше, убедимся, что все расположенные в F_ν' сечения принадлежат к классам $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_{\nu-1})$.

Если и другая область G, примыкающая к σ_ν, принадлежит к классу (G_ν), то из предыдущего следует, что и F_ν'' содержит только сечения более низких классов $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_{\nu-1})$; но тогда заданное сечение σ_ν и классы $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_{\nu-1})$ исчерпывают совокупность всех сечений σ. Отсюда следует, что сечения σ_ν и области $G_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ соответствуют друг другу взаимно однозначно за исключением единственного случая, когда области (G_ν) $(\nu = 1, \ldots, p)$ исчерпывают совокупность всех областей G. В этом исключительном случае существует ровно одно сечение σ_ν, притом высшего класса $\nu = p$, ограничивающее *две* области G_ν.

Перейдем теперь к случаю, когда классы (G_ν) не исчерпывают совокупность всех областей G. Если G — невыделенная (в классы) область, то ее граница кроме известного числа сечений (σ_ν) или не содержит более *ни одного* сечения σ из числа не принадлежащих к (σ_ν) или содержит по крайней мере еще *два* таких сечения. В самом деле, граница области G не может содержать только одно невыделенное (в классы) сечение, так как тогда G вошла бы в раз-

бие**ние на классы** (G_ν) в качестве области класса (G_{p+1}), который, однако, по предположению не существует.

Пусть G — невыделенная область первого вида и пусть σ_μ $(\mu \leqslant p)$ — ограничивающее ее сечение с наивысшим индексом μ. К этому сечению примыкает еще другая область $G_\mu \not\equiv G$, и, как выше заключаем, что часть поверхности, отделяемая сечением σ_μ и содержащая область G_μ, состоит из одних лишь областей G_ν $(\nu \leqslant \mu)$. Но то же самое заключение можно сделать относительно других ограничивающих область G сечений, откуда следует, что сечения (σ_ν) разбивают поверхность F на области, которые, за исключением лишь области G, принадлежат к классам $(\sigma_1), \ldots, (\sigma_\mu)$. Следовательно, $\mu = p$, и исключительная область G ограничена по крайней мере двумя сечениями σ_p, ибо иначе она принадлежала бы к классу (G_p). Таким образом, нами доказано следующее:

Если сечения (σ_ν) исчерпывают все сечения σ, то возможны два случая: или каждое из этих сечений входит в границу только *одной* области, в этом случае существует ровно одна область G, не принадлежащая к классам (G_ν); или же существует ровно одно сечение высшего класса (σ_p), которое разделяет две области G_p; области (G_ν) исчерпывают тогда совокупность всех областей G.

Если, напротив, существуют сечения σ, не принадлежащие ни к одному из классов (σ_ν), то области G_ν и ограничивающие их сечения σ_ν соответствуют друг другу взаимно однозначно. Каждая же область G, отличная от областей (G_ν), примыкает тогда по крайней мере к *двум* и выделенным сечениям σ.

Если имеет место последний случай, то разделим еще невыделенные области G на два класса (G') и (G''), относя область G к тому или другому классу в зависимости от того, будет ли число ограничивающих ее невыделенных сечений σ *меньше*, чем q, или *по крайней мере равно* q. Далее сечения σ будем обозначать через σ_{11}, σ_{12}, σ_{22} в зависимости от того, принадлежат ли примыкающие к ним области обе к (G'), одна к (G'), другая к (G''), или обе к (G''). При этих условиях справедливо следующее:

a) G_ν и σ_ν соответствуют друг другу взаимно однозначно.

b) Граница области G' содержит по крайней мере два и не более $q-1$ сечений σ_{11} или σ_{12}.

c) Граница области G'' содержит по крайней мере q сечений σ_{12} или σ_{22}.

306. Вернемся теперь к соотношению (13). *Если сечения* (σ_ν) *не исчерпывают всех сечений* σ, то в силу a) члены разности $n(\sigma) - N(G)$, соответствующие сечениям (σ_ν), взаимно уничтожаются, и, применяя принятые обозначения, получаем соотношение:

$$p \geqslant \left[n(\sigma_{11}) + \frac{1}{2}n(\sigma_{12}) - N(G')\right] + \left[n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2}n(\sigma_{12}) - N(G'')\right]. \quad (14)$$

Если G_i' означает область класса (G'), граница которой содержит $n_i(\sigma_{11})$ сечений σ_{11} и $n_i(\sigma_{12})$ сечений σ_{12}, то, согласно b), сумма $n_i(\sigma_{11}) + n_i(\sigma_{12}) \geqslant 2$. Отсюда суммированием по всем областям (G')

получается соотношение $\sum n_i(\sigma_{11}) + \sum n_i(\sigma_{12}) \geqslant 2N(G')$. Здесь $\sum n_i(\sigma_{11}) = 2n(\sigma_{11})$ и $\sum n_i(\sigma_{12}) = n(\sigma_{12})$, следовательно,

$$n(\sigma_{11}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G') \geqslant 0.$$

Аналогично доказывается, учитывая с), что

$$n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) \geqslant \frac{q}{2} N(G'').$$

Первое из этих соотношений показывает, что первый член справа в (14) неотрицателен. Учитывая второе соотношение, заключаем, что

$$\rho \geqslant n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12}) - N(G'') \geqslant \frac{q-2}{q}\left(n(\sigma_{22}) + \frac{1}{2} n(\sigma_{12})\right),$$

и, следовательно, наверное,

$$\rho \geqslant \frac{q-2}{q} n(\sigma_{22}). \tag{15}$$

307. Теперь нужно найти нижнюю границу для числа $n(\sigma_{22})$ тех сечений, которые входят в границу двух областей G''. Для этой цели учтем, что каждое сечение σ лежит над вполне определенной из кривых $\beta_1, \ldots, \beta_q$, с помощью которых была разбита основная поверхность F_0. Если через $\lambda(\sigma)$ обозначать *длину сечения* σ, *деленную на длину соответствующей кривой* β, то сумма средних чисел листов поверхности F над кривыми $\beta_1, \ldots, \beta_q$ будет равна

$$\sum S(\beta_i) = \sum \lambda(\sigma_\nu) + \sum \lambda(\sigma_{11}) + \sum \lambda(\sigma_{12}) + \sum \lambda(\sigma_{22}). \tag{16}$$

По второй теореме о покрытии существует постоянная $h > 0$, зависящая только от метрики и выбора кривых $\beta_1, \ldots, \beta_q$, такая, что

$$\sum S(\beta_i) \geqslant qS - hL, \tag{16'}$$

где S означает среднее число листов, а L — длину относительной границы поверхности F. Исключая из двух последних соотношений $\sum S(\beta_i)$ и замечая, что $\lambda(\sigma) \leqslant 1$, и, следовательно, в частности $\sum \lambda(\sigma_{22}) \leqslant n(\sigma_{22})$, получаем соотношение

$$n(\sigma_{22}) \geqslant qS - hL - \left(\sum \lambda(\sigma_\nu) + \sum \lambda(\sigma_{11}) + \sum \lambda(\sigma_{12})\right),$$

или в силу (15) и соотношения $\frac{q-2}{q} < 1$

$$\rho \geqslant (q-2)S - hL - \left(\sum \lambda(\sigma_\nu) + \sum \lambda(\sigma_{11}) + \sum \lambda(\sigma_{12})\right), \tag{17}$$

где h — постоянное число, зависящее только от заданной метрики и выбора кривых $\beta_1, \ldots, \beta_q$ [1]).

308. Остается еще показать, что стоящие справа суммы $\sum\lambda$ порядка hL. Для доказательства применим еще раз вторую теорему о покрытии. Рассмотрим кроме основной поверхности F_0 еще обе ее части — F_0' и F_0'', на которые она разбивается системой кривых $\beta_1, \ldots, \beta_q$. Если F' — поверхность наложения поверхности F_0', то среднее число листов $S(\beta_i)$ поверхности F' над граничной кривой β_i отличается от среднего числа листов $S(F')$ всей поверхности F' на величину порядка $<hL'$, где L' — длина относительной границы поверхности F'. Соответствующее справедливо также для произвольной поверхности наложения F'' поверхности F_0''. Отсюда заключаем:

Существует такое число h, что для произвольной поверхности наложения поверхности F_0' или F_0'' и каждой пары кривых β_i, β_j выполняется соотношение

$$|S(\beta_i) - S(\beta_j)| \leqslant hl, \tag{18}$$

где L означает длину относительной границы соответствующей поверхности наложения.

Этот результат применим также к областям (G_ν), которые все являются поверхностями наложения или поверхности F_0', или поверхности F_0''. Предположим теперь, что сечения (σ_ν) не исчерпывают всех сечений σ; тогда заданной области G_ν будет соответствовать вполне определенное сечение σ_ν; пусть оно лежит, например, над кривой β_1. Тогда для $i = 1, \ldots, q$

$$\lambda(\sigma_\nu) \leqslant S(\beta_1) \leqslant S(\beta_i) + hL(G_\nu),$$

где $L(G_\nu)$ — длина относительной границы области G_ν (*относительно* F_0', соответственно F_0''). Полагая здесь $i = 1, \ldots, q$ и складывая, получим

$$q\lambda(\sigma_\nu) \leqslant \sum_{i=1}^{q} S(\beta_i) + qhL(G_\nu).$$

Здесь сумма $\left(\sum S\right)$ средних чисел листов области G_ν над дугами β_i, очевидно, равна $\sum\lambda(\sigma)$, где суммирование производится по всем сечениям σ, входящим в границу области G_ν, и, следовательно, последнее соотношение можно записать в виде

$$q\lambda(\sigma_\nu) \leqslant \sum_{G_\nu} \lambda(\sigma) + qhL(G_\nu). \tag{19}$$

Если суммировать это соотношение по всем областям G_ν, то первый член справа даст сумму, которая самое большее равна удвоен-

[1]) В дальнейшем каждое такое число обозначается через h.

ной сумме $\sum\lambda(\sigma_\nu)$, ибо каждая сторона σ области G_ν принадлежит к одному из классов σ_μ ($\mu=1,\ldots,p$) и граничит не более чем с двумя выделенными областями (G_μ). Если еще учесть, что сумма ($\sum L(G_\nu)$) длин относительных границ областей G_ν относительно F_0' или F_0'' не больше длины L всей относительной границы заданной поверхности наложения F по отношению к F_0, то получим соотношение

$$q\sum\lambda(\sigma_\nu)\leqslant 2\sum\lambda(\sigma_\nu)+qhL,$$

или, так как $q>2$,

$$\sum\lambda(\sigma_\nu)\leqslant hL; \tag{20}$$

где h — новая постоянная, зависящая только от поверхности F_0 и системы сечений $\beta_1,\ldots,\beta_q$.

309. Оценим, наконец, суммы $\sum\lambda(\sigma_{11})$ и $\sum\lambda(\sigma_{12})$. Если область G принадлежит к классу (G'), то она ограничена самое большее $q-1$ сечениями σ_{11} или σ_{12}. Следовательно, для каждой области G' можно указать по крайней мере одну кривую β_i, над которой нет ни одного ограничивающего эту область сечения σ_{11} или σ_{12}. Если $S(\beta_i)$ означает среднее число листов области G' на β_i, то, согласно (18),

$$\sum_{G'}\lambda(\sigma_{11})+\sum_{G'}\lambda(\sigma_{12})\leqslant\sum_{j\neq i}S(\beta_j)\leqslant(q-1)S(\beta_i)+(q-1)hL(G'),$$

где суммирование слева производится по всем сторонам σ_{11}, σ_{12} области G'. Если последнее соотношение просуммировать по всем областям G', то слева получится сумма $2\sum\lambda(\sigma_{11})+\sum\lambda(\sigma_{12})$. Справа получается сумма $\sum S(\beta_i)$, которая, по определению сечений β_i, происходит только от сечений (σ_ν); так как каждое такое сечение входит в границу самое большее одной области G', то эта сумма не больше, чем $\sum\lambda(\sigma_\nu)$. Наконец, сумма $\sum_{G'}L(G')$ имеет в качестве мажоранты длину относительной границы L поверхности F и в силу (20)

$$2\sum_{G'}\lambda(\sigma_{11})+\sum_{G'}\lambda(\sigma_{12})\leqslant(q-1)\sum\lambda(\sigma_\nu)+(q-1)hL\leqslant h'L. \tag{21}$$

Учитывая (20) и (21), получаем из (17) искомое соотношение

$$\rho\geqslant(q-2)S-hL.$$

310. Этот результат мы нашли в предположении, что выделенные сечения (σ_ν) не исчерпывают всех сечений σ. Легко, однако,

---

[1]) Доказательство п. 308 справедливо и в этом случае. Единственное отличие заключается в следующем: если не только сечения (σ_ν) исчерпывают все сечения σ, но и области (G_ν) исчерпывают все области G, то существует

видеть, что тот же результат остается в силе, когда все сечения σ принадлежат к классам (σ_ν). В самом деле, в этом случае также имеет место соотношение (20)[1]. Тождество (16) принимает тогда вид

$$\sum_1^q S(\beta_i) = \sum \lambda(\sigma_\nu),$$

и из соотношения (16′), которое как следствие из теоремы о покрытии справедливо в общем случае, следует, что

$$qS \leqslant \sum \lambda(\sigma_\nu) + hL \leqslant h'L.$$

Следовательно, среднее число листов S в рассматриваемом случае есть величина порядка hL и утверждение (II, 1) наверное справедливо, если только стоящее справа число h выбрано достаточно большим.

311. Примечание. Для правильного понимания руководящей идеи в предыдущем доказательстве следует заметить, что, как это следует из последней части доказательства, теорема (II, 1) становится тривиальной, если среднее число листов S поверхности наложения есть величина того же порядка, что и длина L относительной границы. Интересен только тот случай, когда S велико по отношению к L. Из доказательства видно, что последнее имеет место тогда, когда число областей класса (G'') и число соответствующих сечений σ_{22} очень велики по отношению к числу всех областей, соответственно сечений[1].

§ 5. Обращение основной теоремы.

312. Основная теорема $\rho \geqslant \rho_0 S - hL$ понималась выше как обобщение точного соотношения Гурвица $\rho = \rho_0 n + v$, которое имеет место для не имеющей относительной границы n-листной поверхности наложения F основной поверхности F_0. Если кроме того F относительно F_0 *не разветвлена*, то число разветвлений v исчезает, и тогда просто $\rho = \rho_0 n$. Естественно исследовать, не имеет ли место для поверхности F с относительной границей, но *не разветвленной* относительно F_0 соотношение, подобное основной теореме, но содержащее для характеристики ρ вместо нижней границы верхнюю.

Покажем, что при нижеследующих предположениях это действительно имеет место (Ahlfors [10] § 5):

Пусть основная поверхность F_0 подобна однолистным и F — ее конечная поверхность наложения. Предположим, что F содер-

---

сечение σ_p, ограничивающее одновременно две области G_p. В (20) эта сторона могла бы быть сосчитана дважды, и, следовательно, это соотношение справедливо a fortiori, если каждое сечение σ_ν считать только один раз.

[1]) Случай поверхности, не подобной однолистным, мы здесь рассматривать не будем.

жится как часть в конечнолистной поверхности наложения F^*, не имеющей границы и не разветвленной относительно основной поверхности F_0.

Пусть N — число листов поверхности F^*; согласно соотношению Гурвица ее характеристика равна $N\rho_0$. Относительная граница поверхности F разбивает дополнение к F относительно F^* на некоторые области $\overline{F}$. Если обозначить через $n(\gamma)$ число тех граничных дуг γ поверхности F, которые представляют сечения поверхности F^*, то для характеристики всей поверхности $F^* = F + \sum \overline{F}$ получается, согласно (1), значение $\rho + \sum \rho(\overline{F}) + n(\gamma)$, и, следовательно,

$$N\rho_0 = \rho + \sum \rho(\overline{F}) + n(\gamma).$$

Для каждой односвязной области $\overline{F}$ имеем $\rho(\overline{F}) = -1$, и если N_1 означает число таких областей, то

$$N\rho_0 = \rho + \sum\nolimits^{+} \rho(\overline{F}) - N_1 + n(\gamma).$$

По основной теореме для области $\overline{F}$:

$$\overset{+}{\rho}(\overline{F}) \geqslant \overline{S}\rho_0 - h\overline{L},$$

где $\overline{S}$ — соответствующее среднее число листов, а $\overline{L}$ — длина относительной границы. Складывая, получаем: $\sum \overline{S} = N - S$ и $\sum \overline{L} = L$, где S и L означают среднее число листов и длину относительной границы поверхности F. Подставляя это в предыдущее тождество, получим

$$\rho \leqslant S\rho_0 + N_1 - n(\gamma) + hL.$$

Если граница поверхности F состоит из одних лишь сечений поверхности F^*, то поверхность F^* распадается самое большее на $n(\gamma) + 1$ областей, и так как одна из этих областей совпадает с F, то $N_1 \leqslant n(\gamma)$. Далее каждая замкнутая кривая γ разбивает поверхность F^* на две части, из которых самое большее одна односвязна.

Следовательно, если граница поверхности F содержит α замкнутых кривых γ, то число N_1 самое большее равно $n(\gamma) + \alpha$, и из предыдущего следует, что

$$\rho \leqslant S\rho_0 + hL + \alpha.$$

Обращение основной теоремы. *Пусть F_0 — конечная поверхность, подобная однолистным, и F^* — не имеющая границы и не разветвленная относительно F_0 конечнолистная поверхность наложения. Тогда существует такая постоянная h, что для каждой конечной поверхности наложения F поверхности F_0,*

которая содержится как часть в F^*, выполняются соотношения

$$S\varrho_0 - hL \leqslant \overset{+}{\varrho} \leqslant S\varrho_0 + hL + \alpha, \qquad \text{(II, 2)}$$

где S означает среднее число листов, L — длину относительной границы и α — число замкнутых кривых относительной границы поверхности F.

§ 6. Теоремы о регулярно исчерпываемых открытых поверхностях наложения.

313. Понятие открытой бесконечной поверхности наложения F^* заданной конечной основной поверхности F_0 может быть определено с помощью бесконечной последовательности конечных поверхностей наложения. Пусть $F_1, \ldots, F_\nu, \ldots$ — бесконечная последовательность конечных поверхностей наложения основной поверхности F_0, каждая из которых содержится как часть в следующих за ней поверхностях последовательности. В качестве предела при $\nu \to \infty$ получается бесконечная открытая поверхность наложения, для которой основные понятия „точки", „окрестности" и т. д. известным образом определяются через аппроксимирующие поверхности F_ν. Две последовательности F_ν и F_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots)$ тогда и только тогда определяют одну и ту же открытую поверхность, когда каждая поверхность одной последовательности содержится во всех, за исключением, быть может, конечного числа, поверхностях другой последовательности и наоборот. Определяющую последовательность F_ν называют *исчерпанием* предельной поверхности F^*.

314. С точки зрения теорем о покрытии и основной теоремы особый интерес представляют поверхности, для которых выполняется следующее условие:

Открытая поверхность F^* называется регулярно исчерпаемой, если существует по крайней мере одно ее исчерпание $F_1, F_2, \ldots$, для которого

$$\lim \frac{L}{S} = 0,$$

где L означает длину относительной границы, а S — среднее число листов аппроксимирующей поверхности F.

Только для этих поверхностей величина L в упомянутых основных теоремах играет роль несущественного остаточного члена.

315. Для дальнейшего полезно ввести некоторые понятия, тесно связанные с важными понятиями теории распределения значений. Пусть D — произвольная область основной поверхности F_0. Лежащие над D связные части поверхностей F, принадлежащие к исчерпывающей последовательности поверхности F^*, могут быть двух видов: или такая часть поверхности относительно D не имеет границы, назовем ее тогда *островом*, или она обладает границей относительно D, которая тогда принадлежит также к относительной

границе поверхности F; такую часть поверхности F назовем *полуостровом**).

Среднее число листов $S(D)$ поверхности F над D получает от каждого острова целочисленное значение, равное числу листов острова; это число называется *кратностью* острова. Следовательно, от всех островов величина $S(D)$ получает некоторое целочисленное значение $n(D)$, равное сумме кратностей этих островов. Если положить $S(D) = n(D) + m(D)$, где, следовательно, второй член $m(D)$ происходит от полуостровов над D, то по теореме о покрытии существует такая, зависящая только от D постоянная $h(D)$, что для всех поверхностей F выполняется соотношение

$$n(D) + m(D) = S + h(D)\,L, \tag{A}$$

где S и L означают среднее число листов и длину относительной границы поверхности F.

Аналогия этой теоремы с *первой основной теоремой* в теории мероморфных функций бросается в глаза. Число $n(D)$ соответствует функции $N(r, a)$, т. е. среднему числу a-точек; часть $m(D)$ среднего числа листов $S(D)$, происходящая от полуостровов, соответствует функции $m(r, a)$. Среднее число листов S переняло здесь роль характеристической функции и hL — остаточный член, имеющий несущественное значение, *если выполняется условие регулярного исчерпания.*

Если последнее условие выполняется, то из (A) следует, что

$$\overline{\lim}\,\frac{n(D)}{S} \leqslant 1. \tag{22}$$

Это соотношение справедливо, следовательно, независимо от выбора области D. Если, в частности, область D стянуть в точку a основной поверхности, то $n(D)$ перейдет в число $n(r, a)$ точек поверхности F, лежащих над a и считаемых с их кратностью, если они являются точками ветвления. Сохраняется ли в силе само соотношение (22) при $D \to a$, остается, однако, неизвестным, так как стоящая в (A) постоянная $h(D)$ может при этом неограниченно возрастать.

316. После этих общих замечаний перейдем к рассмотрению частного случая, имеющего особенный интерес для приложений. Будем дальше предполагать выполненными следующие условия:

1) *Основная поверхность F_0 представляет замкнутую поверхность жанра нуль, например, сферу.*

2) *Открытая поверхность наложения F* односвязна, т. е. каждая поверхность исчерпывающей последовательности F односвязна.*

При этих предположениях возьмем на сфере F_0 области $D_1, \ldots, D_q$, $q > 2$, попарно без общих точек и рассмотрим лежащие над ними острова и полуострова поверхности наложения F. Каждому острову

---

*) В оригинале употребляется термин „Zunge" — язык.

мы поставили в соответствие в качестве его кратности целое число $\geqslant 1$. В дальнейшем полезно характеризовать остров еще другим числом: назовем характеристику (p) острова, взятую с обратным знаком, *простой кратностью* острова; для *односвязных* островов эта величина равна 1; в остальных случаях она или равна нулю или отрицательна.

Пусть $p(D)$—сумма простых кратностей островов аппроксимирующей поверхности F, лежащих над заданной областью D; очевидно, $p(D)$ самое большее равно числу островов и во всяком случае $p(D) \leqslant n(D)$. Из доказанного выше соотношения (A) следует тогда, что

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \leqslant qS + hL.$$

Чтобы установить нижнюю границу для стоящей слева суммы, рассмотрим лежащие над областями D_i острова D^i и полуострова D^z поверхности F. Удалим сперва из F все полуострова D^z; так как F односвязна, то остаются некоторые, также односвязные, области F'. Если затем удалить еще из областей F' все острова D^i, то останутся области $\overline{F}$, каждая из которых является поверхностью наложения для дополнительной к областям $D_i\,(i=1, \ldots, q)$ части $\overline{F_0}$ сферы F_0*). Области $\overline{F}$ могут быть двух видов: или они не имеют границы относительно $\overline{F_0}$, или же они обладают относительной границей. Области первого вида наверное многосвязны.

Так как области F' разбиваются на острова D^i и остаточные области $\overline{F}$ одними лишь циклическими сечениями**), то согласно (1) для соответствующих характеристик имеет место соотношение

$$\sum p(F') = \sum p(\overline{F}) + \sum p(D^i),$$

откуда для величины $\sum p(D_i) = -\sum p(D^i)$ получается значение

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) = \sum p(\overline{F}) + N(F'),$$

где N—число областей F', которые все имеют характеристику -1.

*) Здесь в дальнейшем области D_i нужно предполагать односвязными.

**) При тех условиях, которые предполагаются у автора, разбиение области F' на $\overline{F}$ и D^i не всегда совершается с помощью циклических сечений; именно, так обстоит дело в том случае, когда относительная граница области F' (если она имеется) доходит до соответствующего сечения, отделяющего остров D^i. В силу конечнолистности поверхности F можно, однако, области D_i слегка деформировать так, чтобы сумма $\sum p(D_i)$ не изменилась и чтобы разбиение областей F' на $\overline{F}$ и D^i совершалось с помощью циклических сечений. Отсюда следует, что все выводимые дальше оценки для суммы $\sum p(D_i)$ имеют место и в общем случае. Это замечание нужно иметь в виду и в дальнейшем.

Если через $N_1(\bar{F})$ обозначить число односвязных областей $\bar{F}$, то последнее соотношение можно также записать в виде

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) = \sum\nolimits^{+} p(\bar{F}) + N(F') - N_1(\bar{F}). \tag{23}$$

По предыдущему каждая односвязная область $\bar{F}$ имеет относительно $\bar{F}_0$ границу; такая область совпадает с некоторой областью F'. Разность $N(F') - N_1(\bar{F})$ равна, следовательно, числу $N'(F')$ тех областей F', которые содержат по крайней мере один остров.

317. Применим теперь основную теорему (II, 1) к поверхностям наложения $\bar{F}$ области $\bar{F}_0$. Сумма средних чисел листов этих поверхностей дает среднее число листов $S(\bar{F}_0)$ поверхности $\bar{F}$ над $\bar{F}_0$, и сумма длин их относительных границ не превосходит длины L границы поверхности F. Следовательно,

$$\sum\nolimits^{+} p(\bar{F}) \geqslant (q-2)\, S(\bar{F}_0) - hL$$

или, так как по теореме о покрытии $S(\bar{F}_0) \geqslant S - hL$, то, в соединении с (23), получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \geqslant (q-2)\, S + N'(F') - hL. \tag{24}$$

Если здесь еще откинуть неотрицательный член $N'(F')$, то придем к следующему результату:

Сумма $\sum_{i=1}^{q} p(D_i) = -\sum p(D^i)$ *простых кратностей всех островов поверхности* F, *лежащих над областями* D_i, *удовлетворяет неравенству*

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \geqslant (q-2)\, S - hL, \tag{B}$$

где h *— постоянная, зависящая только от выбора областей* D_i.

Если далее обозначить через $n_1(D)$ сумму порядков разветвления островов над D, то в случае односвязной области D из соотношения Гурвица (2′) (§ 1) получится соотношение

$$p(D) = n(D) - n_1(D),$$

и (B) можно написать в виде:

$$\sum_{i=1}^{q} n(D_i) - \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \geqslant (q-2)\, S - hL$$

или

$$\sum_{i=1}^{q} (S - n(D_i)) + \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant 2S + hL.$$

Учитывая (A), получаем отсюда соотношение

$$\sum_{i=1}^{q} m(D_i) + \sum_{i=1}^{q} n_1(D_i) \leqslant 2S + hL. \qquad (C)$$

Это соотношение можно рассматривать как известное обобщение второй основной теоремы

$$\sum_{i=1}^{q} m(r, a_i) + \sum_{i=1}^{q} N_1(r, a_i) < 2T(r) + O(\log rT(r)) + O\left(\log \frac{1}{R-r}\right).$$

Сумма $\sum n_1$ порядков разветвления островов D^i в точности соответствует, в силу определения, сумме $\sum N_1$, которой каждая k-кратная точка ветвления поверхности F_r сообщает значение $k-1$.

Посмотрим, какое можно сделать заключение из соотношений (B) и (C) относительно числа *внутренних точек* аппроксимирующей поверхности F, лежащих над заданной точкой a. Если обозначить их число через $\bar{n}(a)$ (каждая точка считается только один раз), то, коль скоро точка a лежит в области D, имеем $\bar{n}(a) \geqslant p(D)$, и поэтому, согласно (B),

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{n}(a_i) \geqslant (q-2)S - hL. \qquad (B')$$

Это соотношение следует сопоставить с неравенством

$$\sum_{1}^{q} \bar{N}(r, a_i) > (q-2)T(r) - O(\log rT(r)) - O\left(\log \frac{1}{R-r}\right),$$

вытекающим из второй основной теоремы (ср. п. 230).

318. В случае регулярного исчерпания введем для $F \to \overline{F^*}$ величины

$$\underline{\lim} \frac{m(D)}{S} = 1 - \overline{\lim} \frac{n(D)}{S} = \delta(D),$$

$$\underline{\lim} \frac{n_1(D)}{S} = \vartheta(D).$$

Величина $\delta(D)$, которая, согласно (A), изменяется в интервале $(0, 1)$, называется дефектом области D относительно поверхности наложения F^*.

Величина $\vartheta(D)$ $(\geqslant 0)$ называется индексом разветвления области D относительно F^*.

При этих обозначениях справедливо следующее

Соотношение дефектов. *Если поверхность F^* регулярно исчерпаема, то для произвольного множества областей D_i, попарно не имеющих общих точек и лежащих на основной поверхности*

(сфере) F_0, выполняется соотношение

$$\sum \delta(D) + \sum \vartheta(D) \leqslant 2.$$

Следовательно, сумма дефектов и индексов разветвления областей D самое большее равна 2.

319. Из соотношения дефектов следует

Теорема 1. *Регулярно исчерпаемая поверхность покрывает все точки сферы, исключая самое большее две точки.*

В самом деле, если бы существовали три такие исключительные точки, то их можно было бы заключить в три области D_1, D_2, D_3, попарно без общих точек; над последними не было бы ни одного острова. Следовательно, их дефекты равнялись бы 1 и сумма $\sum \delta(D)$ была бы $\geqslant 3$, что противоречит соотношению дефектов.

320. Другое интересное следствие из основной теоремы (B) следующее: пусть D — область на сфере и поверхность наложения F^* устроена так, что каждый ее *односвязный остров над D по крайней мере μ-листен*. Тогда говорят: поверхность F^* разветвляется над D по крайней мере μ-кратно. При этом предположении, так как величина P получает положительные значения только от односвязных островов, имеем $S(D) \geqslant n(D) \geqslant \mu p(D)$.

Пусть теперь F^* разветвляется над областями D_i $(i = 1, \ldots, q)$ по крайней мере μ_i-кратно. Тогда из (B) для каждой аппроксимирующей поверхности F получается соотношение

$$\sum \frac{1}{\mu_i} S(D_i) \geqslant \sum p(D_i) \geqslant (q-2)S - hL.$$

С другой стороны, по первой теореме о покрытии

$$S(D_i) \leqslant S + hL$$

и, следовательно,

$$\sum_1^q \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leqslant 2 + h\frac{L}{S},$$

откуда следует

Теорема 2. *Если регулярно исчерпываемая поверхность F^* по крайней мере μ_i-кратна над областями $D_i (i = 1, \ldots, q)$, попарно не имеющими общих точек, то*

$$\sum \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leqslant 2. \tag{25}$$

Примечание. Эта теорема справедлива и тогда, когда над некоторыми областями D_i вообще не лежит ни одного острова, если для такой области положить $\mu_i = \infty$. В самом деле, такая область D_i ничего не добавляет к выражению $p(D_i)$, и все предыдущие заключения сохраняют свою силу, если положить $\mu_i = \infty$.

Из (25) следует тогда, что число таких исключительных областей для регулярно исчерпаемой поверхности самое большее равно двум.

Как и соотношение (B), теорема 2 остается в силе, если области D_i заменить точками a_i, причем поверхность F^* называется μ-кратно разветвленной над точкой a, если все ее точки ветвления над a суть точкиветвления порядка $\geqslant \mu - 1$ (см. гл. X, § 3).

Если все расположенные над областью D (соответственно над точкой a) острова (внутренние точки) поверхности F^* *многолистны* (являются точками ветвления), то, употребляя определение, которым мы уже пользовались в гл. X, § 3, поверхность F^* называется *полностью разветвленной* над D (соответственно над a). Для такой области (соответственно точки), очевидно, $\mu \geqslant 2$, $1 - \frac{1}{\mu} \geqslant \frac{1}{2}$, и из (25) следует

Теорема 3. *Регулярно исчерпываемая поверхность обладает самое большее четырьмя вполне разветвленными областями или точками.*

321. Перейдем теперь к некоторым приложениям двойного неравенства (II, 2). Как выше, рассмотрим систему из q взаимно неперекрывающихся односвязных областей D_i сферы F_0 и обозначим через $\overline{F}_0$ дополнительную к ним часть сферы. Разобьем $\overline{F}_0$ при помощи q сечений без общих точек на две односвязные области $\overline{F}_0'$ и $\overline{F}_0''$. Мы скажем, что открытая односвязная поверхность наложения F^* сферы F_0 не разветвляется и безгранична над $\overline{F}_0$, если F^* имеет над $\overline{F}_0'$ и $\overline{F}_0''$ только *однолистные острова*, т. е., если каждая точка аппроксимирующей поверхности F, лежащая над $\overline{F}_0$, принадлежит, начиная с некоторой поверхности F, к однолистному острову аппроксимирующей поверхности. Про такую поверхность говорят также, что она разветвляется и имеет границу только над областями D_i[1]).

Пусть F^* — поверхность наложения сферы F_0 указанного типа. Как в п. 316, рассмотрим части $\overline{F}$ аппроксимирующей поверхности F, расположенные над $\overline{F}_0$; повторяя те же рассуждения, что и там, докажем справедливость соотношения (23). Величину $p^+(\overline{F})$ можно здесь оценить сверху с помощью соотношения (II, 2). Нужно только предварительно показать, что поверхность $\overline{F}$ можно рассматривать как часть некоторой неразветвленной и не имеющей относительной границы поверхности наложения сферы F_0. Но это условие выполняется. В самом деле, чтобы построить такого рода поверхность наложения $\overline{F}_1$, выделим из поверхности F часть, образуемую некоторым множеством островов, лежащих над $\overline{F}_0$, и содержащую поверхность $\overline{F}$. Выделенную часть поверхности F мы можем дополнить до замкнутой

[1]) Это понятие мы ввели еще в гл. XI, § 2.

поверхности $\overline{F}_1$, присоединяя к ней симметричную поверхность, аналогично тому, как это было сделано в п. 285. Поверхность $\overline{F}$ односвязна и, следовательно, имеет не более одной граничной кривой относительно $\overline{F}_1$, поэтому соотношение (II, 2) дает

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \leqslant (q-2)\,S + N'(F') + hL + 1. \qquad (24')$$

Отсюда в соединении с (24) следует, что

Если открытая односвязная поверхность наложения F^* сферы F_0 разветвляется и имеет границу только над неимеющими общих точек сдносвязными областями $D_i\,(i=1, \ldots, q)$, то

$$\left|\sum_{i=1}^{q} p(D_i) - N'(F') - (q-2)\,S\right| \leqslant hL + 1. \qquad (D)$$

Здесь N' означает число областей F', остающихся от поверхности F после удаления из нее полуостровов, лежащих над областями $D_i\,(i=1, \ldots, q)$ и содержащих по крайней мере один остров над D_i.

322. Если проследить отдельные шаги предыдущего доказательства, то убедимся, что неравенство (D) остается в силе и тогда, когда области D_i заменяются точками a_i. Но в этом случае F' совпадает со всей поверхностью. Следовательно, число $N'(F')$ равно единице или нулю, в зависимости от того, имеет ли F над $a_i\,(i=1, \ldots, q)$ по крайней мере одну внутреннюю точку или не имеет ни одной такой точки; отсюда следует, что

Если все точки ветвления и все граничные точки поверхности F расположены над конечным числом точек $a_1, \ldots, a_q$, то

$$\left|\sum_{1}^{q} \overline{n}(a_i) - (q-2)\,S\right| \leqslant hL + 2. \qquad (D')$$

Если $a \neq a_i$, то $n(a) = \overline{n}(a)$, и, применяя (D') к системе значений $a_1, \ldots, a_q, a$, найдем, что

$$\left|\sum_{1}^{q} \overline{n}(a_i) + n(a) - (q-1)\,S\right| \leqslant hL + 2$$

или, с учетом первоначального соотношения (D'),

$$|n(a) - S| \leqslant hL + 4.$$

Это показывает, что число листов $n(a)$ для всех $a \neq a_i$ асимптотически равно числу листов S, коль скоро поверхность F^* регулярно исчерпаема. Следовательно, покрытие основной поверхности F_0 аппроксимирующими поверхностями F совершается для всех точек, лежащих вне a_i, очень равномерно.

§ 7. Применения к конформным отображениям одиосвязных римановых поверхностей.

323. Теперь мы займемся следствиями из общих теорем § 6 для частного случая, когда поверхность F^* является римановой поверхностью, на которую отображается круг $|z|<R\leqslant\infty$ посредством мероморфной в этом круге функции $w=w(z)$. Метрику основной поверхности (плоскости w) определим, как в гл. VI, § 3, согласно сферической геометрии, а в качестве аппроксимирующих поверхностей F возьмем, как это обычно делается в теории распределения значений, конечные поверхности F_r, соответствующие кругам $|z|\leqslant r<R$. Выбранная метрика удовлетворяет всем требованиям вышеразвитой теории.

Введенное выше *среднее число листов* $S(r)$ аппроксимирующей поверхности обращается тогда в сферическую площадь поверхности F_r, деленную на полную площадь π сферы Римана, т. е. равно выражению, которое мы раньше обозначили через $A(r)$ (гл. VI, § 3):

$$S(r)=A(r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|z|<r}\frac{|w'(z)|^2\,df}{(1+|w(z)|^2)^2};$$

здесь df означает евклидов элемент площади в плоскости z. Но последнее выражение есть не что иное, как производная *от характеристики* $T(r)$ в ее нормальной сферической форме относительно переменной $\log r$:

$$S(r)=A(r)=\frac{dT(r)}{d\log r}.$$

Для длины $L(r)$ границы поверхности F_r получается выражение

$$L(r)=\int\limits_{|z|=r}\frac{|w'(z)|\,|dz|}{1+|w(z)|^2}.$$

324. Пусть теперь D — подобласть сферы w, ограниченная спрямляемой кривой; такая кривая, очевидно, удовлетворяет предположенному в § 2 условию *регулярности*. В соответствии с прежними обозначениями положим $n(r, D)$ равным сумме кратностей всех островов поверхности F_r, лежащих над областью D, и $m(r, D)$ положим равным сумме сферических площадей всех полуостровов поверхности F_r, лежащих над областью D, деленной на ее сферическую площадь $J_0(D)$. Тогда, согласно соотношению (A) (§ 6),

$$n(r, D)+m(r, D)=A(r)+O(L(r)). \tag{1}$$

Пусть далее $D_1,\ldots,D_q$ — система из $q\geqslant 3$ односвязных областей сферы w, не имеющих общих точек. Каждой области D поставим в соответствие кроме величин n и m еще *простую кратность*

$p(r, D)$, равную сумме характеристик, лежащих над D островов, взятой с обратным знаком. Величина $p(r, D)$ самое большее равна числу $n(r, D)$ различных лежащих над D односвязных островов. Тогда, согласно (B)

$$\sum_{i=1}^{q} p(r, D_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{q} n(r, D_i) - \sum_{i=1}^{q} n_1(r, D_i) \geqslant (q-2) A(r) - O(L(r)); \qquad \text{(II)}$$

здесь $n_1(r, D)$ равно сумме порядков разветвления островов поверхности F_r, лежащих над D.

Последнее соотношение остается в силе и тогда, когда области D_i заменяются точками a_i, откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{n}(r, a_i) > (q-2) A(r) - O(L(r)), \qquad \text{(II')}$$

где $\bar{n}(r, a)$, как выше, обозначает число различных точек поверхности F_r, лежащих над точкой a.

Если, в частности, предположить, что *поверхность F^* разветвляется или имеет граничные точки только над точками $a_1, \ldots, a_q$, то имеет место асимптотическое равенство*

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{n}(r, a_i) = (q-2) A(r) + O(L(r)). \qquad \text{(III)}$$

325. Все эти соотношения находятся в очевидной связи с двумя основными теоремами теории распределения значений, к которым они дают важное дополнение. Чтобы можно было применять эти результаты, нужно исследовать отношение величины $S(r) = A(r)$ к $L(r)$. Прежде всего нас здесь интересует вопрос, при каких условиях имеет место соотношение

$$\lim_{r \to R} \frac{L(r)}{A(r)} = 0,$$

характеризующее регулярную исчерпаемость поверхности наложения.

Используя неравенство Шварца, это можно выяснить следующим образом. Имеем

$$(L(r))^2 = \left(\int_{|z|=r} \frac{|w'(z)|\,|dz|}{1+|w(z)|^2} \right)^2 \leqslant 2\pi r \int_{|z|=r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2} |dz| = 2\pi r \frac{dA(r)}{dr},$$

откуда, после интегрирования в пределах от r_0 до r $(0 < r_0 < r < R)$, получаем

$$\frac{dr}{r} \leqslant \frac{dA}{L^2} 2\pi, \quad \log \frac{r}{r_0} \leqslant 2\pi \int \frac{dA(r)}{(L(r))^2}. \qquad (26)$$

Дальше нужно различать два случая, в зависимости от того, будет ли $R = \infty$ или $R < \infty$.

326. *Поверхность F^* параболического типа* ($R=\infty$). Пусть $\Phi(t)$ — положительная функция от $t>0$, которая при $t\to\infty$ так быстро возрастает, что интеграл

$$\int \frac{dt}{\Phi(t)} \tag{27}$$

сходится. Обозначим через Δ_r те интервалы оси $r\,(r>r_0>0)$, где $L(r)\geqslant\sqrt{\Phi(A(r))}$. Если (26) проинтегрировать только по этим интервалам, то получится

$$\int_{\Delta_r} d\log r\leqslant 2\pi\int_{\Delta_r}\frac{dA(r)}{\Phi(A(r))}<2\pi\int_{r_0}^{\infty}\frac{dt}{\Phi(t)}.$$

Если интеграл (27) *сходится, то всюду, кроме, быть может, точек множества* Δ_r *конечной логарифмической меры, имеет место соотношение*

$$L(r)<\sqrt{\Phi(A(r))}.$$

Если, например, положить $\Phi(t)=t^{1+2\varepsilon}$, где $\varepsilon>0$, то, следовательно, вне исключительных интервалов имеет место неравенство

$$L(r)<A(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{28}$$

Пусть $r_\nu\,(\nu=1,2,\ldots)$ — последовательность чисел, лежащих вне исключительных интервалов Δ_r, неограниченно возрастающая вместе с ν. Тогда, согласно (28),

$$\frac{L(r_\nu)}{A(r_\nu)}\to 0 \quad \text{при} \quad \nu\to\infty,$$

что приводит нас к следующему результату:

Риманова поверхность F^* параболического типа всегда регулярно исчерпаема.

327. Следовательно, к поверхностям параболического типа применимы все теоремы § 6. В частности, справедливо соотношение дефектов

$$\sum\delta(D_i)+\sum\vartheta(D_i)\leqslant 2,$$

где δ и ϑ означают дефект и индекс разветвления:

$$\delta(D)=1-\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n(r,D)}{A(r)},\quad \vartheta(D)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{n_1(r,D)}{A(r)}.$$

Эта теорема Альфорса интересным образом дополняет прежнее соотношение дефектов (гл. X, § 2), которое относится не к *областям*, а к дефектным, соответственно разветвленным *значениям* a. Замечательно то, что фундаментальные величины теории Альфорса могут быть вычислены непосредственно с помощью чисел n, в то время как в теории распределения значений существенным являлось регуляризирующее интегрирование (переход к средним значениям N).

Это означает существенное усиление прежних результатов, ибо мы видели, что некоторые теоремы *для случая областей* допускают предельный переход к соответствующим теоремам *для случая точек*. Так, например, согласно (II), вне исключительных интервалов Δ_r имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{q} n(r, a_i) - \sum_{i=1}^{q} n_1(r, a_i) \geqslant (q-2)\, A(r) - O\left(A^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

„интегральной формой“ которого является вторая основная теорема

$$\sum_{i=1}^{q} N(r, a_i) - \sum_{i=1}^{q} N_1(r, a_i) > (q-2)\, T(r) - O(\log rT(r)).$$

Однако, возможное существование исключительных интервалов Δ_r не позволяет получить второе соотношение из первого простым интегрированием $\left(\text{после умножения на } \frac{dr}{r}\right)$, да и для остаточного члена не получился бы, таким образом, правильный порядок; и наоборот, из второй теоремы невозможно вывести первое из предыдущих двух соотношений.

328. Несмотря на то, что основные теоремы теории распределения значений при переходе $D \to a$ не покрываются полностью, но тем не менее из теоремы Альфорса могут быть получены важнейшие следствия теории распределения значений. Так, например, это справедливо для теоремы Пикара, как это непосредственно следует из теоремы 1 (п. 319). То же самое справедливо для теоремы о вполне разветвленных значениях. Но по Альфорсу эта теорема справедлива для областей, что приводит в силу теоремы 2 к следующему интересному обобщению результатов гл. X, § 3:

Теорема о кругах (Scheibensatz). *Если поверхность F^* параболического типа и все острова, расположенные над не имеющими общих точек основными областями D_i $(i = 1, \ldots, q)$, по крайней мере μ_i-листны, то*

$$\sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leqslant 2. \tag{29}$$

Если над D_i вообще нет островов, то нужно положить $\mu_i = \infty$.

Теорема остается в силе и тогда, когда области D_i заменяются точками a_i; вместо выражений „μ_i-листные острова“ нужно тогда писать „точки ветвления $(\mu_i - 1)$-го порядка“.

Отсюда непосредственно следует, что

Как бы ни выбирались на сфере Римана три не имеющие общих точек области, всякая параболическая поверхность F^* будет по крайней мере над одной из них иметь остров.

Эта теорема опять содержит теорему Пикара как непосредственное следствие.

Далее заключаем (ср. гл. X, § 3):

Параболическая поверхность вполне разветвляется самое большее над четырьмя не имеющими общих точек областями.

Если, следовательно, взять пять произвольных областей, то над ними лежит по крайней мере один *однолистный остров* поверхности F^*. Если поверхность не покрывает какую-нибудь точку, что, например, имеет место для поверхностей *целой* функции $w = w(z)$, то соответствующее число $\mu = \infty$, и последний результат имеет место уже для трех (вместо пяти) основных областей D. Отсюда следует, в частности, известная теорема Валирона и Блоха [1]).

Риманова поверхность целой функции, лежащая над плоскостью w, содержит однолистные круги сколь угодно большого радиуса.

329. *Поверхность F^* гиперболического типа* ($R < \infty$). Чтобы и в этом случае исследовать возможность регулярного исчерпания поверхности, рассмотрим снова, как в п. 323, площадь $A(r)$ и длину границы $L(\ )$ образа F_r круга $|z| \leqslant r < R$, которые удовлетворяют соотношениям (26). Если поверхность F^* не допускает регулярного исчерпания, то для каждого r_0, $0 < r_0 < R$, существует конечное число h такое, что при $r_0 \leqslant r < R$ имеем $A(r) < hL(r)$. Подставляя это в (26), получим для $r_0 < r < R$ соотношение

$$\log \frac{R}{r} < 2\pi h^2 \int_r^R \frac{dA(r)}{(A(r))^2} \leqslant \frac{2\pi h^2}{A(r)},$$

и, следовательно,

$$A(r) < \frac{2\pi h^2}{\log \frac{R}{r}} < \frac{2\pi h^2 R}{R - r}. \tag{30}$$

Отсюда следует, что

Если поверхность F^* отобразима конформно на круг $|z| < R$ и выполняется условие

$$\overline{\lim_{r \to R}} (R - r) A(r) = \infty, \tag{31}$$

то поверхность F^* регулярно исчерпаема.

Для характеризуемых этим условием поверхностей выполняются, следовательно, все вышедоказанные теоремы (теорема Пикара, соотношение дефектов, теорема о кругах и т. д.). Замечательно то, что найденная граница справедливости этих теорем вполне согласуется с соответствующей границей в теории распределения значений. Регулярная исчерпаемость прекращается, если порядок роста величины $A(r) = \frac{dT(r)}{d \log r}$ меньше, чем порядок роста правой части (30).

---

[1]) G. Valiron [6], A. Bloch [1], E. Landau [2].

Из соотношения (30) путем интегрирования для $r_0<r<R$ получаем

$$T(r)-T(r_0)=\int_{r_0}^{r}\frac{A(r)}{r}\,dr=O\left(\log\frac{1}{R-r}\right).$$

Это в точности тот порядок роста, который должна перешагнуть характеристическая функция $T(r)$, чтобы остаточный член во второй основной теореме был исчезающе малого порядка, что является существенным условием для справедливости теорем о дефектах.

§ 8. Обобщения на отображения с ограниченным эксцентриситетом.

330. Представим себе односвязную открытую поверхность F^*, лежащую над сферой w и в которой установлена сферическая метрика. Такая поверхность топологически отобразима на однолистный круг $|z|<R\leqslant\infty$. В § 7 мы исследовали тот случай, когда отображение $z\to w$ *конформно*.

Теперь мы наложим на это отображение более общее метрическое условие.

Предположим, во-первых, что квадрат сферического линейного элемента ds, соответствующего при отображении $z\to w$ элементу dz, является положительно дефинитной квадратической диференциальной формой ($z=x_1+ix_2$)

$$ds^2=\sum g_{\mu\nu}\,dx_\mu\,dx_\nu \qquad (g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu})$$

от dx_1, dx_2, где g_{11}, $g_{12}=g_{21}$, g_{22} — непрерывные функции от z. В качестве образа бесконечно малого круга радиуса ds плоскости w в плоскости z получается эллипс, квадраты полуосей которого равны

$$\frac{g_{11}+g_{22}\pm\sqrt{(g_{11}+g_{22})^2-4\,(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}}{2\,(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}\,ds^2. \tag{32}$$

Если $e(z)$ $(0\leqslant e<1)$ — эксцентриситет этого индикатрисного эллипса и

$$e(z)\leqslant\theta \qquad (0<\theta<1) \tag{33}$$

для всех $|z|<R$, то мы скажем, что отображение $z\to w$ имеет *ограниченный эксцентриситет* [1]). Легко подсчитать, что условие (33) эквивалентно с условием

$$g_{11}+g_{22}\leqslant 2K\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}, \tag{33'}$$

где

$$K=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\theta^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}\right).$$

Для $\theta=0$ величина $K=1$, следовательно, $g_{11}=g_{22}$, $g_{12}=0$; это необходимо и достаточно для конформности отображения.

Отображения с эксцентриситетом, равным нулю, конформны.

---

[1]) Для этих отображений употребляется также термин „квазиконформные отображения" (см., например, Ahlfors [10]).

331. Цель нижеследующих рассмотрений состоит в том, чтобы показать, что все теоремы § 7 имеют место и для класса отображений с ограниченным эксцентриситетом. Для доказательства достаточно показать, что теоремы о регулярной исчерпаемости (пп. 326, 329) остаются в силе при указанных более общих предположениях. Это легко получается путем повторения использованного в п. 325 метода оценки.

В самом деле, если снова обозначить через $A(r)$ и $L(r)$ площадь и длину границы образа F_r круга $|z|\leqslant r<R$, то с помощью неравенства Шварца найдем, что

$$(L(r))^2=\Big(\int\limits_{|z|=r}\frac{ds}{|dz|}|dz|\Big)^2\leqslant 2\pi r\int\limits_{|z|=r}\Big(\frac{ds}{|dz|}\Big)^2|dz|. \tag{34}$$

Здесь $\left(\frac{ds}{|dz|}\right)^2$ самое большее равно обратному значению меньшей из величин (32); следовательно, согласно (33′),

$$\Big(\frac{ds}{|dz|}\Big)^2\leqslant\frac{1}{2}(g_{11}+g_{22}+\sqrt{(g_{11}+g_{22})^2-4(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)})\leqslant$$
$$\leqslant(K+\sqrt{K^2-1})\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\leqslant 2K\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}.$$

Если еще учесть, что для площади $A(r)$ мы имеем выражение

$$A(r)=\int\limits_0^r dr\int\limits_{|z|=r}\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,|dz|,$$

то из предыдущего получится соотношение

$$(L(r))^2\leqslant 4\pi Kr\frac{dA(r)}{dr},$$

и, следовательно,

$$\frac{dr}{r}\leqslant 4\pi K\frac{dA(r)}{(L(r))^2}. \tag{35}$$

332. Последнее соотношение отличается от неравенств (26), выведенных в п. 325, только множителем K, который соответствует множителю $\frac{1}{2}$ в (26). Так как K — определенная раз навсегда постоянная, то непосредственно видно, что все следствия из (26) могут быть выведены также и из (35). С этим результатом мы достигли нашей цели. Все теоремы, данные в § 7, для случая конформного отображения односвязной поверхности остаются в силе без изменений для случая отображений с ограниченным эксцентриситетом*).

*) М. А. Лаврентьевым в его работе „Sur une classe de representations continues", Матем. сб-к, т. 42, № 4, введен более общий класс квазиконформных отображений, с помощью которых автору удалось получить также ряд новых результатов, касающихся проблемы типа. Некоторые результаты в этом же направлении были получены переводчиком этой книги под руководством М. А. Лаврентьева в его диссертации: „К проблеме типа односвязной римановой поверхности".

ПРИЛОЖЕНИЕ

М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев.

ОЦЕНКА ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ.

В главе V были даны геометрические признаки, характеризующие замкнутые множества положительной абсолютной гармонической меры. Мы сейчас приведем ряд оценок, относящихся к гармонической мере граничных множеств *относительно* данной области. Некоторые из этих результатов позволяют существенно упростить и дополнить излагаемую выше теорию единственности аналитических функций.

Итак, пусть дана область G, а на ее границе Γ система дуг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, сумма диаметров которых равна заданной величине ε. Требуется оценить сверху и снизу гармоническую меру данной системы дуг относительно области G в некоторой фиксированной ее точке.

Заметим прежде всего, что характер оценок не будет зависеть от порядка связности области G, если, конечно, этот порядок есть заранее фиксированное число. В самом деле, пусть порядок связности области G равен k. Отобразим конформно G на область g, полученную удалением из единичного круга $k-1$ кругов; системой прямолинейных сечений (купюр) области g мы можем превратить ее в односвязную область g^*.

Пусть, далее, при нашем отображении система дуг $\{\gamma_j\}$ перейдет в систему дуг $\{\overline{\gamma_j}\}$. В силу инвариантности гармонической меры гармоническая мера системы дуг $\{\overline{\gamma_j}\}$ относительно g будет равна гармонической мере системы дуг $\{\gamma_j\}$ относительно G; вместе с тем, в силу аналитического характера границы области g^*, подходящим выбором купюр мы можем добиться того, что гармонические меры $\{\overline{\gamma_j}\}$ относительно g и g^* будут иметь один и тот же порядок малости по отношению к ε.

По этой причине мы в дальнейшем ограничимся случаем, когда G односвязна.

Кроме того, будем в дальнейшем всегда предполагать, что область G содержит точку $z=0$, и будем оценивать гармоническую меру $\{\gamma_j\}$ в точке $z=0$.

1. Случай одной дуги. Начнем с рассмотрения простейшего случая, когда $n=1$. Покажем прежде всего, что при малых ε порядок малости гармонической меры дуги γ_1 будет не ниже $\sqrt{\varepsilon}$. В самом деле, обозначим через r расстояние между γ_1 и началом $z=0$ и построим область Δ, получаемую удалением из плоскости

круга C: $|z-z_0|\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon$, содержащего дугу γ_1, и части луча $\arg z=\arg z_0$, расположенного вне круга C. В силу теоремы Мию-Карлемана (см. стр. 109) будем иметь

$$\omega(0,\ \gamma_1,\ G)\leqslant\omega(0, C, \Delta).$$

Отсюда, вычисляя гармоническую меру окружности круга C, окончательно получим

$$\omega(0,\ \gamma_1,\ G)\leqslant K\sqrt{\frac{\varepsilon}{r}}, \tag{1}$$

где K — некоторая константа. Этим самым показано, что гармоническая мера оценивается сверху через диаметр дуги и через расстояние r данной дуги до точки, в которой вычисляется гармоническая мера.

Если дополнительно допустить, что при отображении $w=f(z)$, $f(0)=0$, области G на круг $|w|<1$ имеем $|f'(0)|=1$ (т. е., что конформный радиус G относительно точки $z=0$ равен единице), то по теореме Кёбе (стр. 88) область G будет содержать круг $|z|\leqslant\frac{1}{4}$, и оценка (1) примет вид

$$\omega(0,\ \gamma_1,\ G)<4K\sqrt{\varepsilon}.$$

Нетрудно видеть, что аналогичной оценки снизу не существует. В самом деле, рассмотрим область G, образованную двумя кругами C_1: $|z|<1$ и C_2: $|z-2|<1+\alpha$, где $0<\alpha$. Примем за γ_1 полукруг $|z-2|=1+\alpha$, $\arg(z-2)\leqslant\frac{\pi}{2}$. В силу принципа гармонической меры имеем

$$\omega(0,\ \gamma_1,\ G)<\omega(0,\ \gamma_1^*,\ C_1)=\operatorname{mes}\gamma_1^*,$$

где γ_1^* — дуга окружности C_1, принадлежащая кругу C_2; отсюда при малых α

$$\omega(0,\ \gamma_1,\ G)<2\sqrt{\alpha}.$$

Кроме того, очевидно, что при α, достаточно малых, конформный радиус G в точке $z=0$ будет сколь угодно близок к 1.

Разобранный пример показывает, что при оценке снизу необходимо учесть не только размер дуги, но также и расположение дополнительной части границы. Для этой цели рассмотрим совокупность $\{\Gamma\}$ дуг Γ, разделяющих G на две области G_1 и G_2 такие, что G_1 содержит точку $z=0$, а граница области G_2 содержит дугу γ_1. Обозначим через $\rho(\gamma_1)$ нижнюю границу длин дуг Γ.

При этих обозначениях, используя теорему Альфорса (см. гл. IV, § 4), нетрудно показать (Лаврентьев [1]), что

$$\omega(0,\ \gamma_1,\ G)>e^{-\frac{K}{\rho^2(\gamma_1)}}, \tag{2}$$

где K — константа, зависящая только от диаметра области G.

Укажем на некоторые приложения отмеченных оценок. Сочетая оценки (1) и (2) с теорией искажения Кёбе [гл. IV, § 3, (32)], нетрудно показать, что при конформном отображении жордановых областей прямое и обратное отображения будут равномерно непрерывны в соответствующих областях. Вводя, далее, соответствующую метрику из тех же оценок, можно получить теорему Каратеодори (Carathéodory [5]) о соответствии границ при конформном отображении произвольных односвязных областей.

Те же оценки для гармонической меры позволяют легко получить следующее важное предложение Куранта (Courant [1] и [2], см. также Radó [1]).

Пусть нам даны две произвольные замкнутые жордановы линии γ_1 и γ_2. Установим между γ_1 и γ_2 произвольное гомеоморфное соответствие f. Обозначим через $\rho(\gamma_1, \gamma_2, f)$ максимум расстояний между соответствующими точками, а через $\rho(\gamma_1, \gamma_2)$ нижнюю границу чисел $\rho(\gamma_1, \gamma_2, f)$ при всех возможных соответствиях f. При этих обозначениях теорема Куранта может быть сформулирована следующим образом: *пусть дана последовательность замкнутых линий Жордана* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \ldots$, *сходящаяся к замкнутой линии Жордана* γ_0, *и пусть* $w = f_n(z)$, $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$ *есть функция, реализующая конформное отображение единичного круга* $|z| < 1$ *на область, ограниченную линией* $\gamma_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$. *Для того чтобы последовательность функций* $f_n(z)$ *равномерно сходилась в круге* $|z| < 1$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n \to \infty} \rho(\gamma_0, \gamma_n) = 0,$$

причем при выполнении этого условия будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f_0(z).$$

При тех же условиях последовательность функций, обратных к функциям $w = f_n(z)$, в области, ограниченной кривой γ_0, непрерывно сходится к функции, обратной к $w = f_0(z)$.

2. Системы дуг. Особый интерес для приложений к общей геометрической теории функций представляют оценки гармонической меры для систем дуг.

В количественном отношении в настоящее время можно считать достаточно продвинутым лишь вопрос об оценке гармонической меры сверху (Лаврентьев [2] и [3]).

Так же, как в случае одной дуги, будем считать, что конформный радиус данной области G (относительно точки $z = 0$) равен единице.

Можно показать, что как бы мало ни было число ε, можно всегда построить область G конформного радиуса единицы, а на границе G определить такую систему дуг $\{\gamma_i\}$ с суммой длин меньше ε, что

$$\omega(0, \{\gamma_i\}, G) > 1 - \varepsilon.$$

Это предложение показывает, что для получения нужной оценки необходимо на рассматриваемую область наложить дополнительные ограничения.

Введем одно геометрическое понятие. Пусть C — гладкая замкнутая кривая плоскости z и t — произвольная точка на C. Обозначим через $\alpha(t)$ угол, образованный осью x и касательной T к кривой C в точке t. Пусть t_0 есть точка C, наименее удаленная от точки $z=0$. Предполагая, что начальное значение $\alpha(t)$ в точке t_0 заключено между 0 и π, $0<\alpha(t_0)<\pi$, обозначим через $m(C)$ и $M(C)$ соответственно нижнюю и верхнюю границы значений *непрерывной* функции $\alpha(t)$, когда точка t, начиная с t_0, описывает в положительном направлении кривую C.

Мы скажем, что односвязная область D принадлежит классу $R(m)$ [соответственно $R'(M)$], если, какова бы ни была замкнутая область $\overline{D_1}$, $\overline{D_1}\subset D$, всегда найдется замкнутая гладкая кривая C, содержащаяся в D и такая, что: 1) область, ограниченная C, содержит $\overline{D_1}$, и 2) $m\leqslant m(C)$ [или соответственно $M\geqslant M(C)$].

При таком определении может быть доказана следующая теорема (Лаврентьев [3]):

Теорема. *Если область G принадлежит классу $R(m)$, $m>-\infty$, или $R'(M)$, $M<+\infty$, и имеет относительно точки $z=0$ конформный радиус r, то*

$$\omega(0,\ E,\ G)\leqslant K(\operatorname{mes}E)^{\delta}\frac{1}{r^{\delta}},\qquad 0<\delta\leqslant 1,$$

где K, δ — константы, зависящие только от m или соответственно от M, E — произвольное замкнутое множество, лежащее на границе области G, а $\operatorname{mes}E$ — линейная мера E.

Приведем теперь с доказательством одну оценку для гармонической меры, когда граница области G есть спрямляемая кривая.

Теорема. *Если область G содержит круг $|\zeta|<1$, а граница Γ области G есть спрямляемая кривая длины l, то для гармонической меры измеримого множества E, лежащего на Γ, имеем*

$$\omega(0,\ E',\ G)<\frac{Kl}{1+|\log(\operatorname{mes}E)|},$$

где K — абсолютная константа.

Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма. *Пусть G — область, ограниченная спрямляемой кривой Γ, Γ_r — линии уровня, соответствующие $|z|=r$ при конформном отображении $\zeta=f(z)$ круга $|z|<1$ на G. Тогда длины l_r линий Γ_r возрастают вместе с r и при $r\to 1$, l_r имеет пределом длину l линии Γ.*

Чтобы установить это предложение, нам надо будет опираться на утверждение, являющееся частным случаем одной теоремы Харди:

Пусть $g(z)$ — функция, регулярная внутри круга $|z|<1$; тогда среднее значение

$$\mu(g, r)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|g(re^{i\theta})|\,d\theta, \qquad 0<r<1,$$

есть возрастающая функция r.

В самом деле, при $r<\rho<1$ мы можем функцию $g(z)$ представить интегралом Пуассона

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(\rho^2-r^2)\,g(\rho e^{i\varphi})}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)}\,d\varphi,$$

откуда

$$|g(re^{i\theta})|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{(\rho^2-r^2)\,|g(\rho e^{i\theta})|\,d\varphi}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\varphi)}.$$

Умножая обе части этого неравенства на $\frac{1}{2\pi}d\theta$ и интегрируя, получим

$$\mu(g, r)\leqslant\mu(g, \rho).$$

Перейдем к доказательству леммы. Имея в виду, что длина l_r линии уровня Γ_r дается формулой

$$l_r=r\int_{-\pi}^{+\pi}|f'(z)|\,d\theta \tag{3}$$

на основании теоремы Харди, заключаем, что l_r возрастает вместе с r. Докажем теперь, что если $r\to 1$, то l_r имеет пределом длину l границы Γ. В самом деле, если граница Γ — аналитическая кривая, то это, очевидно, в силу непрерывности $f'(z)$ в замкнутом круге. Чтобы установить это предложение для произвольной спрямляемой границы, мы построим последовательность областей D_n, сходящихся к D и ограниченных аналитическими кривыми Γ_n, длины которых $l^{(n)}$ имеют пределом l. Пусть $f_n(z)$ — функция, дающая конформное отображение круга на область D_n при условии $f_n(0)=f(0)$, $f_n'(0)=f'(0)$, $\Gamma_r^{(n)}$ — линии уровня при этом отображении, $l_r^{(n)}$ — длина $\Gamma_r^{(n)}$. Из равномерной сходимости $f_n'(z)$ к $f'(z)$ при $|z|=r<1$ следует

$$\lim_{n\to\infty} l_r^{(n)}=l_r,$$

а в силу теоремы Харди $l_r^{(n)}\leqslant l^{(n)}$; имея еще в виду, что $l^{(n)}\to l$, заключаем, что $l_r\leqslant l$. С другой стороны, вследствие стремления Γ_r к Γ при $r\to 1$ имеем $\lim\limits_{r\to 1} l_r\geqslant l$. Отсюда заключаем, что

$$\lim_{r\to 1} l_r=l, \tag{4}$$

что и требовалось доказать.

Сделаем еще одно замечание, непосредственно вытекающее из доказанной леммы.

Пусть (Δs) дуга Γ, соответствующая дуге $(\varphi, \varphi+\Delta\varphi)$ окружности $|z|=1$, Δs — ее длина и аналогично (Δs_r) — дуга Γ_r, соответствующая дуге $(\varphi, \varphi+\Delta\varphi)$ окружности $|z|=r$, и Δs_r — ее длина. В силу непрерывности $f(z)$ дуга (Δs_r) при $r\to 1$ стремится к дуге (Δs), и поэтому $\lim\limits_{r\to 1} \Delta s_r \geqslant \Delta s$. Но это совместимо с (4) только тогда, когда для всех дуг

$$\lim_{r\to 1} \Delta s_r = \Delta s. \tag{5}$$

Перейдем к доказательству теоремы. Не нарушая общности, мы можем считать, что E состоит из конечного числа дуг $\{\gamma_k\}$. Пусть (θ_k', θ_k'') — система дуг окружности, соответствующая при отображении $w=f(z)$, $f(0)=0$ дугам γ_k. Обозначим через ε сумму длин дуг γ_k, а через η — сумму длин дуг (θ_k', θ_k''):

$$\eta = \sum (\theta_k'' - \theta_k').$$

В силу леммы имеем

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f'(re^{i\theta})|\, d\theta < l, \qquad 0<r<1.$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \log |f'(re^{i\theta})|\, d\theta < l. \tag{*}$$

С другой стороны, так как G содержит круг $|\zeta|<1$, то в силу леммы Шварца $|f'(0)|>0$, и, следовательно,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \log |f'(re^{i\theta})|\, d\theta = \log |f'(0)| \geqslant 0. \tag{**}$$

Из (*) и (**) получаем

$$\sum \int_{\theta_k'}^{\theta_k''} \log |f'(re^{i\theta})|\, d\theta \geqslant \int_{-\pi}^{+\pi} \log |f'(re^{i\theta})|\, d\theta > -l.$$

Отсюда при $r\to 1$ получим

$$\varepsilon = \operatorname{mes} E = \sum \int_{\theta_k'}^{\theta_k''} |f'(e^{i\theta})|\, d\theta > \eta e^{-\frac{1}{\eta}},$$

т. е.

$$\eta < \frac{l+\eta \log \eta}{|\log \varepsilon|}.$$

Отсюда, замечая, что $\eta < 2\pi$, получим искомую оценку.

3. Теорема Ф. и М. Рисс — Лузина — Привалова. Выше был дан ряд предложений, дающих оценку гармонической меры множества в зависимости от линейной меры множества. В частности последняя теорема дает такую оценку в случае, если граница области есть спрямляемая кривая. Из этой теоремы следует, что функция, дающая конформное отображение области D, ограниченной спрямляемой кривой Γ на единичный круг, абсолютно непрерывна на границе Γ и что всякому множеству меры нуль, лежащему на Γ, соответствует множество меры нуль на окружности $|z|=1$.

В такой формулировке без количественных оценок, оказывается, имеет место и обратное предложение. Именно, с одной стороны, Лузиным и Приваловым (Лузин и Привалов [1]) и, с другой стороны, Ф. и М. Рисс (F. u. M. Riesz [1], а также F. Riesz [1]) была установлена следующая важная теорема:

При конформном отображении области, ограниченной спрямляемой кривой на другую область того же класса, множеству меры нуль на границе одной области соответствует множество меры нуль на границе второй области.

Иными словами, при конформном отображении областей со спрямляемыми границами имеет место инвариантность класса граничных множеств меры нуль.

Эта теорема играет весьма важную роль при изучении граничных значений в областях со спрямляемой границей. Но оказывается, что, опираясь на нее, можно получить также ряд теорем о функциях, мероморфных в круге. Мы дадим ниже примеры таких приложений.

Имея в виду последнюю теорему (стр. 368), для доказательства теоремы Ф. и М. Рисс — Лузина — Привалова нам достаточно доказать, что при конформном отображении круга $|z|<1$ на область D со спрямляемой границей Γ всякое множество меры нуль окружности $|z|=1$ переходит в множество меры нуль на Γ. Пусть $z=re^{i\varphi}$ и $s(\varphi)$ — длина дуги Γ, соответствующей дуге $(0, \varphi)$ окружности; тогда, очевидно, достаточно установить, что возрастающая функция $s(\varphi)$ абсолютно непрерывна.

Обозначим через $\zeta=f(z)$ функцию, реализующую конформное отображение круга на область D. Длина l_r линии уровня Γ_r области D, соответствующей кругу $|z|=r$, выражается формулой

$$\frac{1}{r}l_r=\int_{-\pi}^{+\pi}|f'(re^{i\varphi})|\,d\varphi.$$

Имея в виду, что последний интеграл возрастает вместе с r и что в силу леммы (стр. 368) l_r имеет пределом длину l границы Γ, заключаем:

$$\int_{-\pi}^{+\pi}|f'(re^{i\varphi})|\,d\varphi<l.$$

Полученное неравенство позволяет к функции $f'(z)$ применить теорему Фату (гл. VII, § 3) и, следовательно, при $r \to 1$ функция $f'(z)$ имеет почти всюду предельные значения, которые мы будем обозначать $f'(e^{i\theta})$.

Для доказательства абсолютной непрерывности $s(\varphi)$ мы покажем, что

$$s(\varphi) = \int_0^{\varphi} |f'(e^{i\theta})|\, d\theta$$

Обозначим через Δs длину дуги (Δs) границы Γ, соответствующей дуге окружности $(\varphi, \varphi + \Delta\varphi)$, а через Δs_r — длину дуги (Δs_r) линии уровня Γ_r, соответствующей дуге $(\varphi, \varphi + \Delta\varphi)$ окружности $|z| = r$.

На основании замечания к лемме (стр. 370)

$$\lim_{r \to 1} \Delta s_r = \Delta s.$$

Длина дуги (Δs_r) выражается интегралом

$$\Delta s_r = \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} |f'(re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Если $r \to 1$, то $|f'(\epsilon^{i\theta})|$ имеет предел почти всюду, и интеграл, стоящий справа, ограничен $(< l)$, поэтому, применяя лемму Фату о последовательностях положительных функций с ограниченными интегралами, заключаем, что функция $|f'(e^{i\theta})|$ суммируема и

$$\Delta s \geqslant \int_{\varphi}^{\varphi + \Delta\varphi} |f'(e^{i\theta})|\, d\theta.$$

Нам надо установить, что здесь имеет место равенство, и для этого очевидно достаточно теперь показать, что

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f'(e^{i\theta})|\, d\theta \geqslant l. \tag{6}$$

Пусть $p > 1$. Функция $\varphi_p(z) = \sqrt[p]{f'(z)}$ регулярна внутри круга $|z| < 1$, так как $f'(z)$ не обращается в нуль. Докажем, что

$$\lim_{r \to 1} \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_p(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi_p(e^{i\theta})|\, d\theta. \tag{7}$$

В самом деле, имея в виду, что почти всюду $\varphi_p(re^{i\theta}) \to \varphi_p(e^{i\theta})$, мы можем найти множество E значений θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ и число r_0

такие, что при $r>r_0$ на E имеет место неравенство

$$|\varphi_p(e^{i\theta})-\varphi_p(re^{i\theta})|<\varepsilon$$

и

$$\operatorname{mes} E>2\pi-\varepsilon.$$

Но тогда при $r>r_0$

$$\left|\int\limits_E|\varphi_p(re^{i\theta})|\,d\theta-\int\limits_E\left|\varphi'(e^{i\theta})\right|d\theta\right|<2\pi\varepsilon.$$

С другой стороны, применяя неравенство Гельдера (Hölder), получим

$$\int\limits_{CE}|\varphi_p(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\left(\int\limits_{CE}d\theta\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{CE}|f'(re^{i\theta})|\,d\theta\right)^{\frac{1}{p}}<l_r^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}$$

и аналогично

$$\int\limits_{CE}|\varphi_p(e^{i\theta})|\,d\theta<l^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{1-\frac{1}{p}};$$

здесь CE — множество, дополнительное к E относительно отрезка $[0,2\pi]$. Следовательно,

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(|\varphi_p(e^{i\theta})|-|\varphi_p(re^{i\theta})|)\,d\theta<2\pi\varepsilon+2l^{\frac{1}{p}}\varepsilon^{1-\frac{1}{p}},$$

и, так как ε произвольно, это доказывает (7). Имея в виду, что $\mu(\varphi_p, r)$ — возрастающая функция (см. стр. 369), из (7) выводим

$$\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_p(re^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_p(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Перейдем в обеих частях этого равенства к пределу при $p\to 1$. Имея в виду, что $\varphi_p(e^{i\theta})$ меньше не зависящей от p суммируемой функции $1+|f'(e^{i\theta})|$, мы можем переходить к пределу под знаком интеграла (теорема Лебега), тогда получим

$$\frac{1}{r}l_r\leqslant\int\limits_{-\pi}^{+\pi}|f'(e^{i\theta})|\,d\theta,$$

что доказывает неравенство (6) и высказанную теорему.

Заметим, что из существования почти всюду предела $f'(re^{i\theta})$ по некасательным путям следует, что, почти всюду на границе, отображение обладает консерватизмом углов.

Доказанная теорема об инвариантности множеств меры нуль при конформном отображении областей со спрямляемой границей позволяет непосредственно распространить ряд граничных свойств функций, регулярных в круге на случай любой спрямляемой области.

В частности из теоремы Фату (гл. VII, § 3) и теорем единственности (стр. 210) для ограниченных функций, доказанных в тексте для случая круга, следует:

Функция $f(z)$, регулярная и ограниченная в области D со спрямляемой границей Γ, имеет почти всюду на Γ угловые предельные значения. Две ограниченные функции, имеющие одинаковые угловые предельные значения на множестве положительной меры границы Γ, совпадают.

4. О предельных значениях мероморфной функции. Опираясь на доказанную теорему Рисс — Лузина — Привалова, можно установить ряд теорем о предельных значениях мероморфной функции в круге или в области со спрямляемой границей.

Прежде чем к этому перейти, мы укажем здесь несколько более общую формулировку принципа гармонической меры для случая круга, отказываясь от ограничений, наложенных в тексте на дуги α_k, и от непрерывности функции $f(z)$ на α_k. Это предложение было дано И. И. Приваловым [1].

Пусть E — произвольное множество, лежащее в области G. Внутренней гармонической мерой множества E мы будем называть верхнюю грань гармонических мер замкнутых множеств F, содержащихся в E:

$$\omega_i(z,\ E,\ G) = \sup \omega(z,\ F,\ G),\ F \subset E;$$

тогда имеет место следующее предложение:

Пусть $f(z)$ функция ограничения внутри единичного круга, имеющая предельные значения в точках множества $\mathfrak{E}$ окружности; множество этих предельных значений обозначим E. Если область G содержит все предельные значения функции $f(z)$ и если $f(z)$ при $|z|<1$ лежит вне E, то внутренняя гармоническая мера E в точке $f(z)$ не меньше гармонической меры $\mathfrak{E}$ в точке z:

$$\omega_i(f(z),\ E,\ G) \geqslant \omega(z,\ \mathfrak{E},\ |z|<1).$$

Если $\mathfrak{E}$ состоит из конечного числа дуг, на которых $f(z)$ непрерывна, то это предложение есть частный случай принципа гармонической меры.

Сделаем следующее замечание. Если $F \subset G$ — замкнутое множество, а F_n — последовательность замкнутых множеств, предельные точки которой лежат на F, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \omega(z_0,\ F_n,\ G) \leqslant \omega(z_0,\ F,\ G).$$

В самом деле, пусть $\Delta \subset G$ — область, ограниченная конечным числом дуг Жордана, содержащая F, не содержащая z_0 и обладающая следующим свойством: гармоническая функция $h(z)$, определенная в части G, дополнительной к Δ, равная нулю на границе G и единице на границе области Δ, удовлетворяет неравенству

$$h(z_0) < \omega(z_0,\ F,\ G) + \varepsilon.$$

Множество F_n при достаточно большом n будет лежать внутри области Δ, и поэтому

$$\omega(z_0, F_n, G) \leqslant h(z_0) \leqslant \omega(z_0, F, G) + \varepsilon.$$

Переходя к доказательству теоремы, обозначим через $\mathfrak{F}$ замкнутое множество, принадлежащее множеству $\mathfrak{E}$, на котором функция $f(z)$ непрерывна и гармоническая мера которого удовлетворяет неравенству

$$\omega(z_0, F, |z|<1) > \omega(z_0, \mathfrak{E}, |z|<1) - \varepsilon.$$

Такое множество $\mathfrak{F}$ существует в силу C-свойства измеримых функций (Лузин [1]). Множество F предельных значений $f(z)$ на $\mathfrak{F}$ замкнуто и содержится в E. Пусть $\mathfrak{F}_n$ — множество, полученное проектированием $\mathfrak{F}$ на окружность $|z| = 1 - \frac{1}{n}$. Множество F_n значений $f(z)$ на $\mathfrak{F}_n$ при $n \to \infty$ имеет пределом F. Так как $f(z)$ непрерывна на $\mathfrak{F}$, на окружностях $|z| = 1 - \frac{1}{n}$ можно построить системы конечного числа интервалов Δ_n, содержащие множества $\mathfrak{F}_n$ и такие, что множества $\sum_n$ значений $f(z)$ на Δ_n сходятся к F. В силу принципа гармонической меры, так как, начиная с некоторого n, $f(z_0)$ лежит вне $\sum_n$, имеем

$$\omega(z_0, \Delta_n, |z|<1) \leqslant \omega(f(z_0), \sum_n, G).$$

С другой стороны,

$$\liminf_{n\to\infty} \omega\left(z_0, \Delta_n, |z|<1-\frac{1}{n}\right) \geqslant \omega(z_0, \mathfrak{F}, |z|<1)$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} \omega(f(z_0), \sum_n, G) \leqslant \omega(f(z_0), F, G),$$

следовательно,

$$\omega(f(z_0), F, G) \geqslant \omega(z_0, \mathfrak{F}, |z|<1) > \omega(z_0, \mathfrak{E}, |z|<1) - \varepsilon,$$

что доказывает теорему.

Первая теорема, касающаяся множества предельных значений произвольной мероморфной функции, была получена Лузиным и Привеловым [1], которые показали, что две различные мероморфные функции не могут иметь одинаковых предельных значений на множестве положительной меры окружности $|z| = 1$. И. И. Привалов [2] показал, что метод доказательства этого предложения позволяет установить следующую более сильную теорему:

Если $w = f(z)$ — функция, отличная от константы, мероморфная в единичном круге, имеющая угловые предельные значения на множестве E_z точек окружности $|z| = 1$ положительной меры, то множество E_w этих предельных значений содержит замкнутое множество положительной гармонической меры.

Нам, очевидно, достаточно рассмотреть тот случай, когда множество E_w не покрывает всей плоскости, так как в противном случае теорема очевидна. Далее, множество E_z можно считать совершенным, а E_w замкнутым и ограниченным. В самом деле, обозначая через a значение, не принадлежащее к E_w, мы можем вместо функции $f(z)$ рассмотреть функцию

$$\frac{1}{f(z)-a},$$

не принимающую значение ∞. В силу C-свойства мы теперь можем выделить совершенную часть множества E_z положительной меры, на которой предельные значения $f(z)$ непрерывны. Рассматривая вместо E_z это совершенное множество, мы в качестве множества значений будем иметь ограниченное замкнутое множество.

Построим для каждой точки z_0 множества E_z сектор с центром в точке z_0, ограниченный отрезками лучей, проведенных из точки z_0 под углом 45° к касательной, и дугой окружности радиуса $\frac{1}{n}$, где n — целое число. Обозначая через M максимум $f(z)$ на множестве E_z, мы подберем число $n=n(z_0)$ так, чтобы внутри сектора $|f(z)|<2M$.

Функция $n(z_0)$ принимает счетное число значений на множестве положительной меры E_z, поэтому существует такое N, что множество точек E_z, в которых $n(z_0)=N$, имеет положительную меру. Мы выделим совершенное множество P положительной меры, обладающее этим свойством ($n(z_0)=N$).

Выберем число $r>1-\frac{1}{N}$ так, чтобы на окружности $|z|=r$ функция $f(z)$ не имела полюсов, и составим область D как сумму области $|z|<r$ и всех секторов, соответствующих точкам множества P. Граница области D будет состоять из совершенного множества P, отрезков лучей, проведенных из концов интервалов смежности P под углом 45° к касательной, и из дуг окружности $|z|=r$. Легко убедиться, что это будет спрямляемая кривая Г. Функция $f(z)$ ограничена на Г и в области D имеет лишь конечное число полюсов. Оставляя Г неизменной в окрестности совершенного множества P, мы можем ее деформировать таким образом, чтобы область, ограниченная Г, не содержала полюсов. Тогда в полученной области $f(z)$ будет ограничена. При конформном отображении внутренности Г на круг множество P перейдет в множество P_1 положительной меры, лежащее на окружности, а функция $f(z)$ в функцию $\varphi(x)$, ограниченную внутри круга.

Пусть E_w' — множество предельных значений $\varphi(x)$ на множестве P_1. Если все значения функции $\varphi(x)$ при $|x|<1$ попадают на E_w', то E_w' будет положительной гармонической меры, так как $\varphi(x)$ не постоянна, и, следовательно, E_w' имеет внутренние точки. Если при некотором $|x_0|<1$ значение $\varphi(x_0)$ не принадлежит E_w',

то по предыдущей теореме получаем, выбирая в качестве G круг достаточно большого радиуса,

$$\omega(\varphi(x_0),\ E_w',\ G) \geqslant \omega(x_0,\ P,\ |x|<1) > 0,$$

т. е. снова убеждаемся, что E_w' имеет положительную гармоническую меру. Так как множество E_w' содержится в E_w, это доказывает теорему.

Доказанная теорема может быть также распространена на тот случай, когда рассматриваются предельные значения только по радиусам. Но в этом случае приходится требовать, чтобы множество E_z было множеством второй категории на некоторой дуге окружности и чтобы каждая порция E_z имела положительную гармоническую меру (Привалов [2]).

И. Привалов [2] показал, что из доказанной теоремы путем весьма простых рассуждений можно вывести предложение, содержащее в себе как частный случай теорему текста книги (см. 217).

Если функция $f(z)$ мероморфна в единичном круге $|z|<1$ и при $|z|<1$ не принимает значений, принадлежащих к множеству ее угловых предельных значений, то множество точек окружности $|z|=1$, в которых $f(z)$ имеет угловые предельные значения, имеет меру 2π или нуль, смотря по тому, будет ли функция $f(z)$ ограниченного вида или нет.

В самом деле, если функция $f(z)$ имеет предельные значения на множестве E_z точек окружности, то множество E_w ее предельных значений на E_z содержит ограниченное замкнутое множество положительной гармонической меры F_w. По условию теоремы $f(z)$ выпускает множество значений F_w и, следовательно (см. стр. 211), будет функцией ограниченного вида. В этом случае она имеет предельные значения почти всюду по окружности.

А. Плеснером [2] была установлена теорема относительно характера поведения мероморфной функции вблизи окружности.

Если функция $f(z)$ мероморфна внутри единичного круга, то окружность может быть разбита на три множества E_1, E_2, E_3, обладающих следующими свойствами.

1) $\operatorname{mes} E_3 = 0$.

2) *В каждой точке z_0 множества E_1 функция $f(z)$ приближается к единственному предельному значению по всем путям, не касательным к окружности $|z|=1$.*

3) *Каков бы ни был угол с вершиной в точке z_0 множества E_2, совокупность предельных значений функции $f(z)$ при приближении z к z_0 внутри этого угла покрывает всю плоскость.*

Рассмотрим все квадраты на плоскости с рациональными координатами. Множество этих квадратов счетно, поэтому мы их можем расположить в последовательность $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \ldots$

Допустим, что множество точек, не принадлежащих ни к множеству E_1, ни к множеству E_2, имеет положительную меру $\operatorname{mes} E_3 > 0$. Если z_0 не принадлежит к E_3, то мы можем из этой точки про-

вести два луча внутрь круга $|z|<1$ так, чтобы при $z \to z_0$ внутри полученного угла предельные значения $f(z)$ не покрывали бы всю плоскость. Множество $\mathcal{E}(z_0)$ этих предельных значений замкнуто, поэтому можно найти квадрат Δ_k, не имеющий общих точек с $\mathcal{E}(z_0)$. Теперь внутри угла, соответствующего точке z_0, мы построим сектор $s(z_0)$ с вершиной в точке z_0, обладающий следующими свойствами:

1) Сектор $s(z_0)$ имеет угол при вершине вида $\frac{\pi}{2^n}$, n — целое.

2) Ось сектора $s(z_0)$ составляет с радиусом Oz_0 угол φ, соизмеримый с π. Пусть $\frac{p\pi}{q}$ — величина этого угла. Мы будем его считать положительным, если ось сектора лежит внутри угла, составляемого радиусом с положительным направлением на окружности и отрицательным в противном случае.

3) Радиус сектора $r = \frac{1}{m}$, где m — целое число.

Имея в виду, что множества $\mathcal{E}(z_0)$ и Δ_k не имеют общих точек и замкнуты, а, следовательно, расстояние между ними отлично от нуля, мы можем выбрать число $m = m(z_0)$, так чтобы выполнялось условие.

4) Внутри сектора $s(z_0)$ функция $f(z)$ не принимает значений, лежащих внутри квадрата Δ_k.

Через $E_{n,\ m,\ p,\ q,\ k}$ мы обозначим множество точек окружности, не принадлежащих к E_1, которым поставлен в соответствие сектор с углами $\varphi = \frac{p}{q}\pi$, $\theta = \frac{\pi}{2^n}$ и радиуса $r = \frac{1}{m}$ и квадрат Δ_k. Тогда каждая точка множества E_3 принадлежит к одному из множеств $E_{n,\ m,\ p,\ q,\ k}$. Каждый индекс этого множества пробегает счетное число значений, поэтому совокупность всех множеств $E_{n,\ m,\ p,\ q,\ k}$ счетна. Если $\operatorname{mes} E_3 > 0$, то по крайней мере одно из множеств $E_{n,\ m,\ p,\ q,\ k}$ будет положительной меры. Мы обозначим его $E_{n_0,\ m_0,\ p_0,\ q_0,\ k_0}$ и пусть P — совершенное множество положительной меры, содержащееся в $E_{n_0,\ m_0,\ p_0,\ q_0,\ k_0}$.

Пусть α — центр квадрата Δ_{k_0}, δ — длина Δ_{k_0}.

Мы рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

Функция $\psi(z)$ во всех секторах $s(z_0)$, соответствующих точкам P, в силу 4) удовлетворяет неравенству

$$|\psi(z)| < \frac{1}{\delta}.$$

Пусть $r > 1 - \frac{1}{m_0}$ выбрано так, что на окружности $|z| = r$ функция $f(z)$ не имеет полюсов. Мы определим область D как сумму круга $|z| < r$ и всех секторов $s(z_0)$, соответствующих точкам P.

Граница Γ области D состоит из дуг окружности $|z|=r$, множества P и отрезков лучей, проведенных под углом $\frac{p_0}{q_0}\pi-\frac{\pi}{2^{n_0+1}}$ к концам интервалов смежности P с большим аргументом и под углом $\frac{p_0}{q_0}\pi+\frac{\pi}{2^{n_0+1}}$ к концам интервалов смежности с меньшим аргументом.

Легко убедиться, что граница Γ спрямляема. В самом деле, длина Γ не превосходит суммы

$$2\pi r+\operatorname{mes} P+\sum\sigma_k,$$

где σ_k — периметры подобных треугольников, основания которых стягивают интервалы смежности множества P. Периметры этих треугольников образуют сходящийся ряд, так как сумма длин их оснований сходится.

Все полюсы функции $\psi(z)$, лежащие внутри D, принадлежат кругу $|z|<r$, поэтому их число конечно, и мы можем так деформировать кривую Γ, оставляя ее неизменной в окрестности P, чтобы область D не содержала полюсов $\psi(z)$. Но тогда $\psi(z)$ ограничена в области D и, следовательно, почти всюду на Γ имеет предельные значения по всем некасательным путям. С другой стороны, $\operatorname{mes} P>0$, поэтому множество P_1 точек P, в которых существует касательная к кривой Γ, также имеет положительную меру. Но касательная в точке P к Γ совпадает с касательной к кругу. Сопоставляя это с существованием почти всюду на Γ предельных значений $\psi(z)$, заключаем, что на множестве P_1 мы можем найти точку z_1, в которой $\psi(z)$, а следовательно и $f(z)$, имеет определенное предельное значение по всем некасательным путям к окружности. Но тогда z_1 принадлежит к E_1, и, следовательно, предположение $\operatorname{mes} E_8>0$ привело нас к противоречию.

ЛИТЕРАТУРНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ahlfors, L.: [1] Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen. Acta Soc. sci. fenn. N. s. 1, Nr. 9 (1930).

[2] Beiträge zur Theorie der meromorphen Funktionen. 7. Congr. Math. scand., Oslo, 1929.

[3] Ein Satz von Henri Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. sci. fenn. Comment. Phys.-math. 5, Nr. 16 (1931).

[4] Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Comment. math. Helvet. 3 (1931).

[5] Über die assymptotischen Werte der meromorphen Funktionen endlicher Ordnung. Acta Acad. Aboensis. Math. et. Phys. 6, Nr. 9 (1932).

[6] Über eine in der neueren Wertverteilungstheorie betrachtete Klasse transzendenter Funktionen. Acta Math. 58 (1932).

[7] Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée. Acta Soc. sci. fenn., N. s. 2, Nr. 2 (1933).

[8] Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. Soc. sci. fenn Comment. Phys.-math. 8, Nr. 10 (1932).

[9] Sur le type d'une surface de Riemann. C. r. Acad. Sci., Paris, 201 (1935).

[10] Zur Theorie der Überlagerungsflächen. Acta Math., 65 (1935). Русск. перевод в „Успехах мат. наук", вып. VI (1939).

Beurling, A.: [1] Études sur un problème de majoration. Thèse de Upsal, 1933.

Blaschke, W.: [1] Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen. Leipzig. Ber. 67 (1915).

Bloch, A.: [1] Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 17 (1925).

[2] Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle-unité. Mémorial des Sciences math. Facs. 20. Paris: Gauthier — Villars, 1926.

[3] Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires. Ann. École Norm. 43 (1926).

Borel, E.: [1] Sur les zéros des fonctions entières. Acta math. 20 (1896).

Carathéodory, C.: [1] Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard. C. r. Acad. Sci., Paris, 141 (1905).

[2] Über eine Verallgemeinerung der Picardschen Sätze. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik-math. Kl. (1920).

[3] Über die Fourierschen Koeffizienten monotoner Funktionen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1920).

[4] Über die Winkelderivierten von beschränkten analytischen Funktionen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1929).

[5] Conformal representation. Cambridge tracts in math. a. math. phys., vol. 28, Cambridge, 1932. Русский перевод, М., 1934.

Carleman, T.: [1] Sur les fonctions inverses des fonctions entières. Ark. Mat. Astron. Fys. 15, Nr. 10 (1921).

[2] Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques. C. r. Acad. Sci., Paris, 196 (1933).

Cartan, H.: [1] Sur les systèmes des fonctions holomorphes à variétés lacunaires et leurs applications. Thèse de Paris, 1928.

Cartan, H.: [2] Sur la fonction de croissance attachée à une fonction méromorphe de deux variables et ses applications aux fonctions méromorphes d'une variable. C. r. Acad. Sci., Paris, 189 (1929).
[3] Sur les zéros des combinaisons linéaires de P fonctions holomorphes données. Mathematica (Cluj) 7 (1933).
Collingwood, E. F.: [1] Sur quelques théorèmes de M. Nevanlinna. C. r. Acad. Sci., Paris, 179 (1924).
[2] On meromorphic and integral functions. J. Lond. math. Soc. 5 (1930).
Courant: [1] Über eine Eigenschaft der Abbildungfunktionen bei konformen Abbildung. Göttinger Nachrichten, 1914.
[2] Bemerkung zu meiner Note: „Über eine Eigenschaft etc.", Göttinger Nachrichten, 1922.
Denjoy, A.: [1] Sur les fonctions entières de genre fini. C. r. Acad. Sci., Paris, 145 (1907).
Elfving, G.: [1] Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. fenn. N. s. 2, Nr. 3 (1934).
[2] Über Riemannsche Flächen und Annäherung von meromorphen Funktionen. 8. Congr. Math. scand., Stockholm, 1934.
[3] Zur Flächenstruktur und Wertverteilung. Ein Beispiel. Acta Acad. Aboensis. Math. et Phys. 8 (1935).
Evans, G. C.: [1] The Logarithmic Potential. New York, 1927.
[2] Applications of Poincarés sweeping-out process. Proc. nat. Acad. Sci. USA. 19 (1933).
Faber, G.: [1] Über Tschebyscheffsche Polynome. J. reine angew. Math. 150 (1919).
Fatou, P.: [1] Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta math. 30 (1906).
Fékete, M.: [1] Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Z. 17 (1922).
Fenchel, W.: [1] Über analytische Funktionen, die in Teilgebieten des Einheitskreises beschränkt sind. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. (1930).
Frostman, O.: [1] Über den Kapazitätsbegriff und einen Satz von R. Nevanlinna. Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. 1 (1934).
[2] Über die defekten Werte einer meromorphen Funktion. 8. Congr. Math. scand., Stockholm, 1934.
[3] Potential d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. Meddel. Lunds Univ. Mat. Sem. 3 (1935).
Голузин, Г.: [1] О теореме вращения в теории однолистных функций. „Математический сборник", т. I (43), 1936.
Gross, W.: [1] Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist. Math. Ann. 79 (1918).
[2] Über die Singularitäten analytischer Funktionen. Mh. Math. u. Physik 29 (1918).
Grötsch: [1] Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildungen I, II.
Grunsky, H.: [1] Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berl. 1 (1932).
Hausdorff, F.: [1] Dimension und äusseres Mass. Math. Ann. 79 (1919).
Herglotz, G.: [1] Über Potenzreihen mit positivem reellem Teil im Einheitskreis. Leipz. — Ber. 63 (1911).
Hille, Einar: [1] On the zeros of the functions of the parabolic cylinder. Ark. Mat. Astron. Fys. 18, Nr. 26 (1924).
[2] Zero point problems for linear differential equations of second order. Mat. Tidskr. B 1927.
Hössjer, G.: [1] Über funktionstheoretische Nullmengen und das Maximumprinzip bei mehrdeutigen analytischen Funktionen. 8. Congr. Math. scand., Stockholm, 1934.

Iversen, F.: [1] Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thèse de Helsingfors, 1914.
[2] Zum Verhalten analytischer Funktionen in Bereichen, deren Rand eine wesentliche Singularität enthält. Översikt av Finska Vet.-Soc. Förh. 64 A, 4 (1922).
Jensen, J. L.: [1] Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions. Acta math. 22 (1899).
Julia, G.: [1] Extension d'un lemme de Schwarz. Acta math. 42 (1920).
[2] Principes géometriques d'Analyse. 2 partie. Paris: Gauthier-Villars, 1932. Русск. перевод, ч. 1 М., 1936.
Kerekjarto, B.: [1] Vorlesungen über Topologie I. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 8; Berlin: Julius Springer, 1923.
Kobayashi, Z: [1] Theorems on the conformal representation of Riemann surfaces. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, sect. A, Nr. 39 (1935).
Koebe, P.: [1] Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II., Math. Ann. 69 (1910).
[2] Allgemeine Theorie der Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Acta math. 50 (1927).
Лаврентьев, М.: [1] О непрерывности однолистных функций в замкнутых областях, „Доклады Академии Наук СССР", т. IV, № 5, 1936.
[2] О некоторых свойствах однолистных функций, „Доклады Академии Наук СССР", т. I, № 1, 1935.
[3] О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, „Математический сборник.", т. 1 (43), № 6, 1936.
[4] Sur la représentation conforme. C. r. Acad. Sci., juin, 1927.
[5] О конформном отображении. Труды Физ.-матем. института им. В. А. Стеклова, т. V, 1934.
Landau, E: [1] Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes. Sitzgsber preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1904).
[2] Der Picard-Schottysche Satz und die Biochsche Konstante. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl (1926).
[3] Über den Milloux'schen Satz. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Kl. (1930).
Landau, E. and Valiron, G.: [1] A deduction from Schwarzs lemma. J. London Math. Soc. 4, Nr. 3 (1929).
Лебег, А.: Интегрирование и отыскание примитивных функций. Пер. и ред. проф. Н. К. Бари, дополн. ст. акад. Н. Н. Лузина, ГТТИ. М.—Л., 1934.
Lindeberg, J. W.: Sur l'existence des fonctions d'une variable complexe et des fonctions harmoniques bornées. Ann. Acad. Sci. fenn. 11, Nr. 6 (1918).
Lindelöf, E.: [1] Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini. Acta Soc. sci. fenn. 31 (1902).
[2] Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel. Acta Soc. sci. fenn. 35, Nr. 7 (1908).
[3] Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme. Acta Soc. sci. fenn. 46, Nr. 4 (1915).
Littlewood, J. E.: [1] On exceptional values of power series. J. Math. Soc., London (1930).
Löwner, K.: [1] Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises. I. Math. Ann. 89 (1923).
Лузин, Н.: [1] Интеграл и тригонометрический ряд, Москва, 1916.
Luzin, N. et Privaloff, I.: [1] Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. Annales de l'École Normale Supérieure, s. 3, t. XLII, 1925.
Milloux, H.: [1] Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières. J. Math. pures appl. IX, s. 3 (1924).
Montel, P.: [1] Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications. Paris: Gauthier-Villars, 1927. Русск. перевод, М., 1936.

[2] Leçons sur les fonctions entières ou méromorphes. Paris: Gauthier-Villars, 1932.
[3] Sur la représentation conforme. Journal de Mathématiques, 7 série t. 3, 1917.

Myrberg, P. J.: [1] Über die Existenz der Greenschen Funktionen auf einer gegebenen Riemannschen Fläche. Acta math. 61 (1933).
[2] Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche. Ann. Acad. sci. fenn. A 45, Nr. 3 (1935).

Nevanlinna, F.: [1] Bemerkungen zur Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Soc. sci. fenn., Comment. Phys.-math. 2, Nr. 4 (1923).
[2] Über die Anwendung einer Klasse von uniformisierenden Transzendenten zur Untersuchung der Wertverteilung analytischer Funktionen. Acta Math. 50 (1927).
[3] Über eine Klasse meromorpher Funktionen. 7. Congr. Math. scand., Oslo 1929.
[4] Über die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion Comment. in honorem Ernesti Leonardi Lindelöf. Helsinki, 1930.

Nevanlinna F. u. R.: [1] Über die Eigenschaften einer analytischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie. Acta Soc. sci. fenn. 50, Nr. 5 (1922).

Nevanlinna, R.: [1] Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises. Övers. av Finska Vet. Soc. Förh. 63 A, Nr. 7 (1920).
[2] Untersuchungen über den Picardschen Satz. Acta Soc. sci. fenn. 50, Nr. 6 (1924).
[3] Über eine Klasse von meromorphen Funktionen. Math. Ann. 92 (1924).
[4] Zur Theorie der meromorphen Funktionen. Acta math. 46 (1925).
[5] Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars, 1929.
[6] Über die Herstellung transzendenter Funktionen als Grenzwerte rationaler Funktionen. Acta math. 55 (1930).
[7] Über die Randwerte von analytischen Funktionen. Comment. math. Helvet. 2 (1930).
[8] Ein Satz über die konforme Abbildung von Riemannschen Flächen. Comment. math. Helvet. 5 (1932).
[9] Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten. Acta math. 58 (1932).
[10] Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion. Verh. Internat. Math.-Kongr. 1, Zürich, 1932.
[11] Über eine Minimumaufgabe in der Theorie der konformen Abbildung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-physik. Kl. (1933).
[12] Das harmonische Maß von Punktmengen und seine Anwendung in der Funktionentheorie. 8. Congr. Math. scand., Stockholm, 1934.
[13] Sur un principe général de l'Analyse. C. r. Acad. Sci., Paris. 199 (1934).
[14] Über die Kapazität der Cantorschen Punktmengen. Mh. Math. Phys. 43 (1936).

Ostrowski, A.: [1] Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie. Jber. Deutsch. Math. Vereinig. 32 (1923).
[2] Über die Bedeutung der Jensenschen Formel für einige Fragen der komplexen Funktionentheorie. Acta Litt. Sci. Szeged. 1 (1933).
[3] Über quasianalytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen. Acta math. 53 (1929).

Phragmén, E. et Lindelöf, E.: [1] Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. Acta math. 31 (1908).

Picard, E.: [1] Sur une propriété des fonctions entières. C. r. Acad. Sci., Paris 88 (1879).
[2] Démonstration d'un théorème général des fonctions uniformes liées par une relation algébrique. Acta math. 11 (1887).

Pick, G.: [1] Über eine Eigenschaft der konformen Abbildung kreisförmiger Bereiche, Math. Ann. 77 (1916).
[2] Über den Koebeschen Verzerrungssatz. Verh. sächs. Akad. Ber. — Leipzig, 68 (1916).
Plessner, A.: [1] Zur Theorie der konjugierten trigonometrichen Reihen. Mitt. math. Semin. Gießen 10 (1923).
[2] „Über das Verhalten analytischer Funktion am Rande ihren Definitionsbereich", Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd 158, 1927.
Poincaré, H.: [1] Théorie des groupes fuchsiens. Acta math. 1 (1881).
[2] Sur l'uniformisation des fonctions analytiques. Acta math. 31 (1907).
Pólya, G.: [1] Über analytische Deformationen eines Rechtecks. Ann. of Math. 34 II (1933).
Pólya, G. u. Szegö, G.: [1] Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen. J. reine angew. Math. 165 (1931).
Привалов, И.: [1] О предельных значениях аналитических функций, „Доклады Академии Наук СССР", № 9, 1938.
[2] Приложения понятия гармонической меры множества к некоторым проблемам теории функций, „Математический сборник", том 3 (45), № 3.
Pringsheim, A.: [1] Elementare Theorie der ganzen transzendenten Funktionen von endlicher Ordnung. Math. Ann. 58 (1904).
Rado: [1] „Sur la représentation conforme de domaines variables", Acta Fregeal, t. 1, 1923.
Riesz, F.: [1] Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Zeitschr., Bd 18, Heft 1/2.
Riesz, F. u. M.: [1] Über die Randwerte analytischer Funktionen. 4. Congr. scand. Math., Stockholm, 1916.
Robin, G.: [1] Sur la distribution de l'électricité à la surface des conducteurs fermés et des conducteurs ouverts. Ann. École Norm., III. s. 3 (1886).
Schmidt, E.: [1] Über den Millouxschen Satz. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss. Physik.-math. Kl. (1932).
Schottky, G.: [1] Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Physik.-math. Kl. (1904).
Schwarz, H. A.: [1] Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, Zusatz. Ges. Abh. 2.
[2] Mitteilung über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, \chi)$ eine algebraische Funktion ihres vierten Elementes darstellt. Ges. Abh. 2.
Selberg, H. L.: [1] Über eine Eigenschaft der logarithmischen Ableitung einer meromorphen oder algebroiden Funktion endlicher Ordnung. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo. Mat.-naturvid. Kl., Nr. 14 (1929).
[2] Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo, Mat.-naturvid. Kl., Nr. 8 (1934).
Shimizu, T.: [1] On the Theory of meromorphic Functions. Jap. J. Math. 6 (1929).
Speiser, A.: [1] Probleme aus dem Gebiet der ganzen transzendenten Funktionen. Comment. math. Helvet. 1 (1929).
[2] Über Riemannsche Flächen. Comment. math. Helvet. 2 (1930).
[3] Über beschränkte automorphe Funktionen. Comment. math. Helvet. 4 (1932).
Szegö, G.: [1] Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn Fekete: Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. Math. Z. 21 (1924).
Ullrich, E.: [1] Über die Ableitung einer meromorphen Funktion. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. (1929).

[2] Über eine Anwendung des Verzerrungssatzes auf meromorphe Funktionen. J. f. Math. 166 (1932).
[3] Über ein Problem von Herrn Speiser. Comment. math. Helvet. 7 (1934).
[4] Zum Umkehrproblem der Wertverteilung. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, N. F. 1, Nr. 9 (1936).

Valiron, G.: [1] Sur les fonctions entières d'ordre fini. Bull. Sci. math. II. s. 46 (1921).
[2] Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières. Ann. l'Éc. Norm. III. s. 39 (1923).
[3] Lectures on the general Theory of Integral Functions. Toulouse, Edouard Privat 1923.
[4] Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable. Mémorial des Sciences math., Fasc. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1925.
[5] Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes. Acta math. 47 (1925).
[6] Sur les théorèmes de M. Bloch, Landau, Montel et Schottky. C. r. Acad. Sci. Paris 183 (1926).

Vallée Poussin, C *de la*: [1] Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet. Ann. Inst. Poincaré 2 (1932).

Wagner, H.: [1] Über eine Klasse Riemannscher Flächen mit endlich vielen nur logarithmischen Windungspunkten. J. reine angew. Math. 175 (1936).

Warschawski, S.: [1] Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Z. 35 (1932).

Wittich, H.: [1] Ein Kriterium zur Typenbestimmung von Riemannschen Flächen. Mh. Math. Phys. 44 (1936).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная гармоническая мера 122
Абсолютно непрерывная функция 201
Автоморфные потенциалы 30, 215, 217
— функции 20, 286, 318
Аддитивность гармонической меры 31, 131
Аддитивные функции множеств 146
Алгебраическая кривая 285
Алгебраический элемент функции 288
Асимметрия римановой поверхности 330
Асимптотический путь 313
Асимптотическое значение 171

Вполне разветвленные значения 284
Вращения сферы 10, 176
Вторая основная теорема теории мероморфных функций 255
Выпуклые функции 48, 178, 194

Гамма-функция 221
Гармоническая мера, определение 14, 32
— — абсолютная 122
— —, интегральное представление 104
— — относительная 116, 365
— —, увеличение 44
Гармонические мультимножества 116, 122
Гиперболическая мера 12, 55
— —, уменьшение 56, 87
Гиперболические преобразования 14
Гиперболический тип римановой поверхности 15, 318
Гиперэллиптические кривые 286
Гипотеза Данжуа 313
— о дефектных и асимптотических значениях 274
— о соотношении между типом поверхности и угловой геометрией 318
Группа линейных преобразований 11, 20
— топологических преобразований 17
— преобразований наложения 17
Граница поверхности с краями 331
— — относительная 333

Двойное метрико-топологическое неравенство 349
Двоякопериодические функции 283
Дефект 271, 354
— области 354
— полный 271
Дефектное значение 271, 291
Дефектов соотношение 271, 354
Диагональный процесс 139
Диаметр трансфинитный 138
Дзета-функция 221

Емкость точечных множеств 123

Значение асимптотическое (целевое) 171
— вполне разветвленное 284
— дефектное 271, 291
— исключительное (см. исключит. значение)
— нормальное 271
— разветвленное 282

Жанр алгебраической кривой 286
— замкнутой поверхности 351
— мероморфной функции 236, 238, 267

Изоморфизм отображений 18, 19
Инвариант неевклидов 11
— сферический 11
— функционально-теоретический 69
Инвариантность гармонической меры 43
— градиентного интеграла 325
— характеристики 169, 178
Индекс разветвления 282
— — области 354
Интеграл Пуассона 27
Интерпретация неевклидовой геометрии, данная Пуанкаре 12
Исключительное значение, общее определение 170
— — Пикара 22
— — Пикара-Бореля 265
— — положительного дефекта 271
Исключительные интервалы 250—292, 255
Исчерпание кругообразным расширением 316
— регулярное 350

Канонические произведения 226, 228
Каноническое представление мероморфной функции целого порядка 226, 227
— — функции ограниченного вида 189
Квазиконформные отображения 363, 364
Класс мероморфной функции 221
— расходимости 221
— сходимости 220
Комплекс отрезков 297
Конец логарифмический 299
— периодический 310
Косвенно критические особенности 290
Кратность острова 351
— — простая 352
Критические особенности однолистной функции 290
— — косвенные 290
— — прямые 290, 310, 314

Лемма (теорема) Гейне-Бореля 131, 335
— Жюлиа-Каратеодори 59
— Ловнера 58
— Шварца 53
Линейные преобразования 10—14
Линейных преобразований группа 11, 20
Линии уровня гармонической меры 39
— — функции Грина 36
Логарифмическая длина (мера) 110
— точка ветвления 288
Логарифмический конец 299
— потенциал 131
— элемент функции 288

Максимума принцип 143
— —, обобщение 143
Мероопределение неевклидовое (гиперболическое) 12, 55

Мероопределение сферическое 11
Метрика поверхности 334
Множество гармонической меры нуль 116, 122
— емкости нуль 123
— Кантора 156, 158
— совершенное, нигде не плотное 156, 158
— точечнообразное 122
Модулярная функция 21, 219, 269, 323
Мощность континуума 156, 158, 269

Неравенство Шварца 99
Нормальная форма характеристики 178
Нормальное значение 271

Область ограниченного вида 214
— элементарная 298
Однолистный образ 296
Оператор Лапласа 11
Орицикл 13
Особенности (см. критические особенности)
— устранимые 23, 142
Остров 350
Относительная гармоническая мера 365
Отображение посредством преобразований квазиконформных 363, 364
— — — конформных 10, 14, 19, 214, 301, 358, 363
— — — линейных 10—14
— — — с ограниченным эксцентриситетом 363

Параболические преобразования 14
Параболический тип римановой поверхности 15, 318
Первая основная теорема теории мероморфных функций 169
Первичный множитель Вейерштрасса 227
Периодические концы 310
Поверхностей наложения теория 330
Поверхности замкнутые 331
— открытые 331
— с краями 331
— наложения конечные 332
— — складчатые 328
— — универсальные 16, 55, 214
Полиномы Чебышева 137
Полуостров 251
Порядок мероморфной функции 221
Постоянная Кёбе 88
— —, определение ее точного значения 92, 93, 103
— Робэна, определение 123, 124
Потенциал автоморфный 80, 215, 217
— логарифмический 131
— равновесия 135, 182 276
— сферический 184
Предельные линии 13
Предельный показатель 224
Представление мероморфной функции в виде частного 189, 226
— функции Грина, данное Пуанкаре 189
Преобразования, Гаусса формула 167, 175, 259, 263
— Грина формула 34
— гиперболические 14
— линейные 10—14
— параболические 14
— топологические 15
— эллиптические 14
— (см. также отображения)
Принцип гармонической меры 44
— гиперболической меры 56
Принцип зеркального отображения Шварца 21
— Карлемана 70
— Линделофа 52
Принцип максимума 143
— —, обобщение 143
Принцип расширения области 79
Проблема Дирихле 27, 205
— Карлемана-Мию 73, 104
— о дефектных значениях 272, 309
— о разветвленных значениях 310
— о типе римановой поверхности 318
— Робэна 125
Проблема Шпайзера 329
Произведение Бляшке 189, 209
Производная Шварца 308
Прямо критические особенности 290, 310, 314

Разветвленность римановой поверхности 314—317, 321
— полная 321
— регулярная 287, 318
Разветвленное значение 282
— — в толе 284
Расстояние неевклидово 12
— по хорде 176
Расширение области 70, 87
Регулярная разветвленность 287, 318
Регулярное исчерпание 350
Римановы поверхности гиперболического типа 15, 318
— — параболического типа 15, 318
— — эллиптического типа 15, 318
— — регулярно разветвленные 287, 318
— — с конечным числом точек ветвления 304
— —, точки ветвления которых лежат над конечным числом областей 304
— —, точки ветвления которых лежат над конечным числом точек 295

Симметрия римановой поверхности 330
Соотношение дефектов 271, 354
— Гурвица 334
— фундаментальное 251
Сфера Римана 10, 174, 184, 351
Сферическая длина 11
Сферический потенциал 184

Теорема Адамара о трех кругах 49
— Альфорса о критических значениях 310, 314
— Альфорса о покрытии 337, 338
— Альфорса об искажении 101
— (лемма) Гейне-Бореля 131, 135
— Гросса 293
— Иверсена 292
— Каратеодори 367
— Карлемана 74, 314
— Картана 151, 180
— Кёбе 88
— Кобеяши 329
— Кураита 367
— Ландау 63
— Линдберга 152
— Линделофа 77
— Линделофа о сходимости 68
— Лиувилля 22, 145
— о двух константах 48
— о кругах 361
— о логарифмической производной 254
— о монодромии 22, 56, 218, 261
— Пика об искажении 93
— Пикара 22, 286
— Пикара-Бореля 266
— Рисса 210
— Рисс-Лузина-Привалова 371
— Фату 202
— Фрагмена-Линделофа 50
— Харди 368, 369
— Харнака 117
— Шоттки 64
Теоремы о граничных значениях 202, 209, 210, 211, 217
— Римана об отображении 14, 15
Тип мероморфной функции 221

Тип максимальный 220
— минимальный 220
— средний 220
— римановой поверхности гиперболический 15, 318
— — — параболический 15, 318
— — — эллиптический 15, 318
Топологическое дерево 19, 299
— отображение 15
Точки разветвления поверхности наложения 333
Трансфинитный диаметр 138

Увеличение гармонической меры 44
Угловая геометрия 318
Узловые точки 297
Уменьшение гиперболической меры 56, 87
Уравнение Пуассона 132
Устранимые особенности 23, 142

Формула Иенсена 165
— преобразования Гаусса 167, 175, 259, 263
— — Грина 34
— Пуассона-Иенсена 165
— Стильтьеса 197
Формула Эйлера для многогранников 315, 318
Фундаментальное соотношение 251
Фундаментальные преобразования 17
— многоугольники (области) 17, 296
Функции ограниченного вида 190, 191
Функции с ограниченной вариацией 198, 201

Функции треугольника 283, 299
Функция Грина, определение 33
— —, представление, данное Пуанкаре 180
— приближения $m(r, a)$ определение 169
— числа a — точек $N(r,a)$, определение 169
— скачков 201
— характеристическая 170

Характеристика мероморфной функции 170, 178, 182
— поверхности 332
Характеристическая функция 170

Целевые значения (см. асимптотическое значение)
— пути (см. асимптотические пути)
Целые функции 231, 313, 362

Число разветвления поверхности наложения 334

Эквидистанта 13
Экстремальная область Кёбе 90
Эксцесс 317
Элементарная область 298
Эллиптические преобразования 14
Эллиптический тип римановой поверхности 15, 318

Ядерный многоугольник 306
Ядро римановой поверхности 306