Р. НЕВАНЛИННА

УНИФОРМИЗАЦИЯ

Перевод с немецкого

Л. И. ВОЛКОВЫСКОГО

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1955

UNIFORMISIERUNG

von

ROLF NEVANLINNA

BERLIN

1953

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

Финский академик Рольф Неванлинна — один из наиболее крупных специалистов нашего времени по теории функций комплексного переменного. Он является создателем современной теории распределения значений мероморфных функций, а также автором большого количества фундаментальных работ по теории римановых поверхностей и другим вопросам геометрической теории функций. Советские математики хорошо знают его монографию „Однозначные аналитические функции", перевод которой выпущен Гостехиздатом в 1941 г. и уже давно стал библиографической редкостью.

Мы предлагаем вниманию читателей перевод новой монографии Р. Неванлинны „Униформизация". Литература, в которой систематически излагается теория римановых поверхностей, исчерпывается классическими книгами Г. Вейля (Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913) и С. Стойлова (Stoilow S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, 1938), книг же на русском языке на эту тему нет. Поэтому выход в свет монографии Неванлинны является большим событием для специалистов по теории функций комплексного переменного. Книга содержит изложение современного состояния ряда основных вопросов геометрической теории функций, которые группируются вокруг общей проблемы униформизации: классификация римановых поверхностей, теория распределения значений целых и мероморфных функций, аналитическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений, отчасти теория квазиконформных отображений и др.

Отметим, что автор посвятил свою монографию памяти выдающегося финского математика Эрнста Линделефа.

Для чтения книги требуется знакомство с университетским курсом теории функций комплексного переменного.

Перевод выполнен без существенных отступлений от оригинала. Отдельные изменения, которые все же имеются, указаны в примечаниях переводчика. Устранены также мелкие замеченные погрешности. Кроме того, в список литературы переводчик внес некоторые книги советских авторов.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Настоящее сводное изложение теории униформизации возникло на основе лекций, которые я читал в университетах Хельсинки и Цюриха. Насколько это было возможно, учтены достижения геометрической теории функций за последние годы, прежде всего теории открытых римановых поверхностей.

Хельсинки, сентябрь 1952 г. *Р. Неванлинна.*

ВВЕДЕНИЕ[1])

1. В теории униформизации рассматривается вопрос о том, как может быть *однозначно* представлено (униформизировано) *многозначное соотношение* (x, y) между элементами x и y двух множеств, соответственно R_x и R_y. Под проблемой униформизации в собственном смысле, которую мы и будем рассматривать в настоящей книге, понимают более узко и точно ограниченную, хотя все еще весьма общую задачу униформизации многозначного *аналитического* соотношения (x, y) между точками x и y двух комплексных плоскостей, или, более общо, двух „римановых поверхностей" R_x и R_y, путем разыскания для данного соотношения (x, y) „параметрического представления"

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{1}$$

Это представление устанавливает *однозначное аналитическое* соответствие между парами значений x, y, связанных соотношением (x, y), и точками t третьей римановой поверхности R_t. Особый интерес представляет при этом случай, когда поверхность R_t „подобна однолистным", т. е. когда она может быть представлена в виде подобласти комплексной t-плоскости. Если, кроме того, поверхности R_x и R_y — комплексные x- и y-плоскости, то соотношение (x, y) представляет собой так называемый *аналитический образ* (analytisches Gebilde) и речь идет о том, чтобы этот образ униформизировать с помощью двух однозначных аналитических функций $x = x(t)$, $y = y(t)$ не только в малом (локально), но и в целом.

2. Этот вопрос встречается уже в первых главах анализа, когда начинают рассматривать функции $y = y(x)$ (действительные или комплексные), многозначные вместе с их обратными функциями $x = x(y)$. Простейший класс таких функций образуют *алгебраические функции*. Алгебраическая функция $y = y(x)$ определяется алгебраическим уравнением

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = 0, \tag{2}$$

---

[1]) Точные определения ряда понятий, о которых идет речь во введении, даются в последующих главах. — *Прим. перев.*

где $(a_{\mu\nu})$ — конечная матрица из действительных или комплексных чисел. Классическая задача интегрирования такой функции $y = y(x)$, или, несколько более общо, алгебраической функции вида $R(x, y)$, где R — рациональная функция от переменных x и y, связанных уравнением (2), т. е. изучение так называемых *абелевых интегралов*

$$\int R(x, y)\, dx,$$

принадлежащих уравнению (2), связана с вопросом о возможности однозначного параметрического представления (1) кривой (2). Развитие учения об униформизации направляется стремлением найти для алгебраической кривой *простейшие* униформизирующие переменные, из которых можно было бы вывести все остальные. Результатом интенсивного развития этого учения, в которое много существенного было внесено большинством великих математиков второй половины прошлого века (Риманом, Клейном, Пуанкаре, Шварцем, Нейманом и др.), явилось окончательное решение проблемы униформизации, предложенное почти одновременно Кёбе и Пуанкаре (1908). Решение этой проблемы для частного случая алгебраической кривой привело к разработке далеко идущих вспомогательных средств топологии и теории конформных отображений, с помощью которых униформизация стала возможной не только в алгебраическом случае, но и в общей намеченной выше постановке (в частности, для самого общего аналитического образа).

3. Поясним предыдущие замечания простым примером. Возьмем в качестве кривой (2) „декартов лист"

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

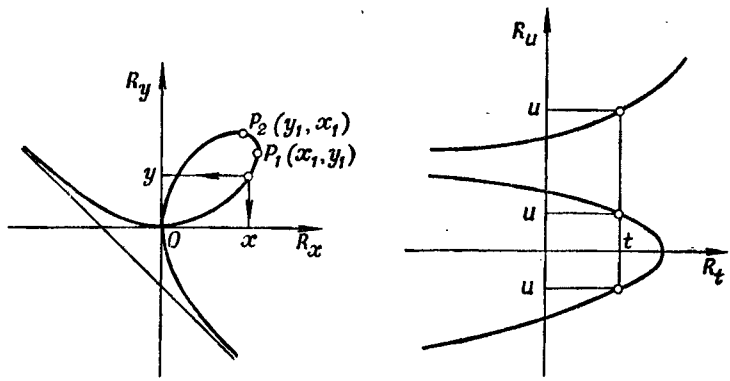
и ограничимся сначала рассмотрением одних только вещественных значений x, y. Тогда каждому значению x соответствует одно, два или три значения $y = y(x)$.

Эти значения могут быть объединены в однозначные непрерывные ветви функции $y = y(x)$, однозначно *обратимые* на каждом интервале, где они изменяются монотонно. Для такого интервала Δ_x соответствующий элемент кривой локально униформизируется с помощью переменной x, так что он предстает как топологический, т. е. взаимно однозначный и непрерывный, образ интервала Δ_x. Вместо x в качестве локально и непрерывно униформизирующей переменной можно также использовать любую переменную t, непрерывно и монотонно зависящую от x в Δ_x. Соотношение $t = t(x)$, $x = x(t)$ определяет тогда топологическое отображение x-интервала Δ_x на t-интервал Δ_t, и для рассматриваемого элемента кривой униформизирующая t дает однозначное и непрерывное представление

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

в Δ_t. В частности, в качестве локальной униформизирующей здесь можно выбрать x или y.

Иначе обстоит дело с окрестностями точек кривой, являющихся концами рассмотренных интервалов монотонности; это точки $O(0, 0)$, $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(y_1, x_1)$, где $x_1 = \sqrt[3]{4}$ и $y_1 = \sqrt[3]{2}$. Точка P_1, например, является „точкой разветвления" кривой относительно оси x-ов R_x. Эле-



Фиг. 1.

мент кривой, содержащий точку P_1, уже нельзя локально униформизировать с помощью x, но можно локально униформизировать с помощью $\sqrt{x_1 - x}$ (при подходящем выборе знака). То же справедливо, более общо, для каждой переменной t, монотонно и непрерывно зависящей от $\sqrt{x_1 - x}$; в частности, такой переменной является и y (что непосредственно видно из фиг. 1). С помощью каждой такой переменной t соответствующий элемент кривой около P_1 топологически униформизируется в форме (1), где, следовательно, x и y снова являются однозначными и непрерывными функциями от t в некотором интервале Δ_t.

4. Задача униформизации декартова листа пока что решена *локально*, тогда как требуется найти решение *в целом*; именно в переходе от униформизации в малом к униформизации в целом заключены существо и трудности теории униформизации. В рассматриваемом простом примере униформизирующая в целом может быть немедленно указана. Такой униформизирующей является переменная $t = y/x$, с помощью которой для декартова листа получается однозначное параметрическое представление

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

В качестве топологической униформизирующей можно вместо t использовать каждую монотонную непрерывную функцию $u=u(t)$, $t=t(u)$, топологически отображающую ось R_t на всю ось R_u или ее часть (см. фиг. 1, справа, сверху). Когда u изменяется там монотонно и непрерывно, точка $x=x(t(u))$, $y=y(t(u))$ в точности описывает декартов лист.

Наряду с этими „главными униформизирующими“ t, в целях униформизации можно вообще использовать каждую переменную u, от которой $t=t(u)$ зависит *однозначно* и непрерывно. На фиг. 1 (справа) это находит свое выражение в том, что u — *монотонная* функция от t (но вообще не однозначная), благодаря чему достигается однозначность обратной функции $t=t(u)$. Равенства $x=x(t(u))=\bar{x}(u)$, $y=y(t(u))=\bar{y}(u)$, как и выше, дают однозначное и непрерывное представление нашей кривой.

5. То существенное и доступное обобщению, что заключено в предыдущих рассуждениях, состоит в следующем. Благодаря представлению кривой $f=0$ в виде взаимно однозначного и непрерывного образа оси R_t, содержащей главную униформизирующую, R_t оказывается *многообразием наложения* (Überlagerungsmannigfaltigkeit) как оси R_x, так и оси R_y: каждой точке t оси R_t однозначно и непрерывно соответствуют проекция x на R_x и проекция y на R_y, и при этом выполняется то существенное условие, что эти две проекции x и y все время связаны заданным соотношением (x, y) [т. е. уравнением $f(x, y)=0$]. Среди всех униформизирующих главная униформизирующая определяет „слабейшее“ многообразие наложения (R_t) одновременно для осей R_x и R_y: а именно, всякая другая униформизирующая $u=u(t)$ в свою очередь определяет многообразие наложения R_u оси R_t.

6. Перейдем теперь в нашем частном примере, или более общо, в соотношении (x, y), определяемом каким-либо алгебраическим уравнением $f(x, y)=0$, к комплексным значениям x и y. Вместо оси x-ов и оси y-ов мы будем теперь иметь дело с двумерными многообразиями, или поверхностями R_x и R_y, соответственно представленными замкнутыми комплексными x- и y-плоскостями. Главная униформизирующая также будет поверхностью, а именно *поверхностью наложения* (Überlagerungsfläche) R_t как поверхности R_x, так и R_y, причем проекции x и y все время будут связаны соотношением (x, y). Если, как это пока предполагается, речь идет лишь о *непрерывной* униформизации, то наряду с R_t в качестве главной униформизирующей поверхности может быть, вообще говоря, использована любая поверхность (R_u), которую можно отобразить взаимно однозначно и непрерывно на R_t, или которая, как говорят в топологии, *гомеоморфна* R_t; следовательно, все главные униформизирующие образуют класс топо-

логически эквивалентных (гомеоморфных) поверхностей. Рядом с этими слабейшими униформизирующими существует, однако, бесконечное множество не эквивалентных униформизирующих R_u, а именно, все те поверхности, которые в свою очередь являются *поверхностями наложения* главной униформизирующей R_t[1]). Если такая поверхность наложения R_u построена, то *проектирования*

$$u \to t \begin{cases} \nearrow x \\ \searrow y \end{cases}$$

дают требуемый однозначный непрерывный переход от u к (x, y), а с ним и топологическую униформизацию (x, y).

7. В нашем примере главной униформизирующей поверхностью R_t является просто (замкнутая) t-плоскость, т. е. поверхность *рода нуль* (гомеоморфная сфере). Однако в общем случае главная униформизирующая поверхность R_t алгебраической функции $f(x, y) = 0$ не принадлежит этому классу: она замкнута, но род ее, вообще говоря, не равен нулю. Фактически здесь, как показывает классический пример эллиптической или гиперэллиптической кривой

$$f(x, y) = y^2 - (x - a_1) \dots (x - a_{2p+2})$$

при различных $p = 0, 1, 2, \dots$, встречаются всевозможные топологические типы замкнутых ориентируемых поверхностей. Число p в этом примере равно роду поверхности R_t. Оно является топологической инвариантой, определяющей класс гомеоморфных замкнутых (ориентируемых) поверхностей. Для $p = 0$ моделью служит поверхность шара, для $p = 1$ — поверхность тора (фиг. 2), для $p = 2, \dots$ — p-кратное кольцо (поверхность шара с p „ручками“ без общих точек).

8. Отсюда вытекает замечательное следствие о топологической униформизации алгебраической кривой рода $p \geqslant 1$. В этом случае поверхность R_t *не подобна однолистным*, т. е. она не гомеоморфна никакой подобласти G_u комплексной u-плоскости[2]). Но то же самое

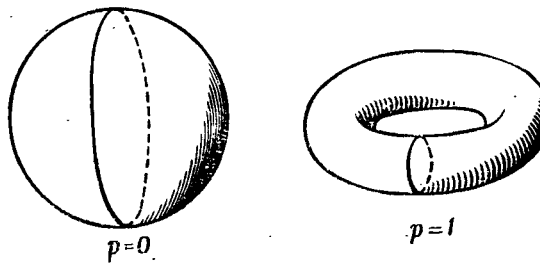
---

[1]) Среди поверхностей наложения R_u поверхности R_t в топологии различают *неразветвленные* относительно R_t, когда однозначное проектирование $u \to t$ *локально* взаимно однозначно, и *разветвленные* относительно R_t, когда имеются изолированные точки разветвления (того же вида, что при отображении с помощью степени), вблизи которых, как легко видеть, локальная взаимная однозначность нарушается.

[2]) Наглядно это очевидно; строгое же доказательство получается с помощью следующего свойства поверхностей, подобных однолистным, которое может даже служить *определением* подобия однолистным: для таких поверхностей справедлива теорема Жордана, т. е. всякая простая замкнутая кривая разбивает такую поверхность на две не пересекающиеся части. Достаточность этого условия для того, чтобы поверхность была подобна однолистным, может быть

справедливо и для всякой замкнутой относительно разветвленной или неразветвленной поверхности наложения.

В самом деле, все эти поверхности также рода $p \geqslant 1$; это — простое следствие соотношения Римана — Гурвица, связанного с формулой Эйлера для многогранников. Следовательно, чтобы прийти к униформизирующей R_u, *подобной однолистным*, нужно ввести *бесконечнолистные* открытые поверхности наложения главной униформизирующей R_t. Среди них действительно имеются подобные однолистным. Такой,



Фиг. 2.

во всяком случае, является *универсальная поверхность наложения* $\hat{R}_u$ поверхности R_t. Это — сильнейшая из всех относительно неразветвленных поверхностей наложения R_t, в том смысле, что она является поверхностью наложения не только R_t, но и *всех* ее неразветвленных поверхностей наложения; $\hat{R}_u$ не только подобна однолистным, но даже *односвязна*. Так называют поверхность, на которой каждая замкнутая кривая непрерывно деформируема в точку (гомотопна нулю); такая поверхность гомеоморфна либо всей числовой сфере, либо числовой сфере с выколотой точкой. Важной задачей топологии поверхностей является доказательство того, что всякая замкнутая или открытая поверхность R имеет вполне определенную односвязную универсальную поверхность наложения $\hat{R}$. Вообще говоря (а для замкнутых поверхностей R рода $p \geqslant 1$ всегда), она бесконечнолистна над R; исключение составляют лишь открытые односвязные поверхности и замкнутая поверхность рода нуль, для которых поверхность $\hat{R}$ совпадает с основной поверхностью R.

Кроме этой сильнейшей униформизирующей $\hat{R}_u$, для всякой много-

---

доказана топологическими средствами; необходимость же следует из того, что теорема Жордана справедлива для плоских областей и, очевидно, остается в силе при топологических преобразованиях. Так как всякая замкнутая p-кратная ($p \geqslant 1$) кольцевая поверхность не разбивается разрезом по меридиану, то такая поверхность не подобна однолистным.

связной поверхности R_t существует ряд более слабых поверхностей наложения R_u, подобных однолистным, но многосвязных.

9. Поверхности наложения, подобные однолистным, играют особенно важную роль при *аналитической*, или *конформной*, униформизации. Алгебраическая кривая $f(x, y) = 0$, где, следовательно, x и y — соответственно точки комплексных плоскостей R_x и R_y, определяют между R_x и R_y не только непрерывное, но и *аналитическое* соответствие, которое, исключая изолированные точки разветвления конечного порядка, является конформным. Согласно этому, проблема аналитической униформизации требует установления однозначного *аналитического* представления $x = x(t)$, $y = y(t)$, где, следовательно, проектирования $R_t \to R_x$ и $R_t \to R_y$ *конформны* с точностью до изолированных точек разветвления. Эта задача имеет смысл только тогда, когда понятие *конформности* определено не только на R_x и R_y, но и на униформизирующей поверхности R_t. Такая поверхность называется *римановой поверхностью*. Топологическая поверхность „непрерывно связна", риманова же поверхность не только непрерывно, но даже „конформно связна"[1]). У топологической поверхности для каждой точки P существует класс локально униформизирующих комплексных числовых параметров, отображающих окрестность U_P точки P на однолистную область z-плоскости, так что различные параметры z и z' связаны между собой *топологическим* соответствием (в смысле обычной топологии на числовой плоскости). У римановой поверхности на локальные параметры накладывается дополнительное существенно ограничивающее метрическое требование, состоящее в том, что соответствующие U_P допустимые параметры должны быть связаны между собой *конформным* соответствием (причем понятие конформности снова обычное, определенное для числовой плоскости).

10. Соответственно этому при униформизации аналитического, или конформного, многозначного соотношения (x, y) между двумя римановыми поверхностями R_x и R_y нужно строить такие униформизирующие поверхности наложения (R_t, R_u и т. д.), которые также являлись бы римановыми поверхностями. Поэтому решение задачи распадается на следующие две части:

1°. *Топологическая часть*. Построение топологической униформизирующей поверхности наложения R_t (или R_u и т. д.) поверхностей R_x и R_y.

2°. *Конформная часть*. Доказательство того, что класс поверхностей, гомеоморфных R_t (R_u и т. д.), содержит *риманову поверхность*.

11. С построением такой поверхности R_t (R_u) аналитическая задача об униформизации в общей постановке п. 1 является принципиально

[1]) См. ниже п. 2.23. — *Прим. перев.*

решенной. Если же еще потребовать (для униформизации алгебраической кривой или аналитического образа это особенно интересно), чтобы униформизирующая R_u являлась подобластью комплексной u-плоскости, то по предыдущему, если главная униформизирующая R_t не подобна однолистным (что имеет место в немногих случаях), нужно сначала построить для R_t однолистную поверхность наложения R_u; такой поверхностью является во всяком случае универсальная поверхность наложения $\hat{R}$. Но это построение выполнимо сперва лишь абстрактно: исходя из данного соотношения (x, y), строят сначала R_t, затем как двумерное локально конформно связное многообразие — риманову поверхность наложения, подобную однолистным. Теперь, однако, эту абстрактно определенную риманову поверхность следует представить как часть *комплексной u-плоскости*. Это приводит к большой проблеме теории конформных отображений:

3°. *Основная задача теории конформных отображений.* Требуется доказать, что всякую риманову поверхность, подобную однолистным, можно взаимно однозначно и конформно отобразить на область G_z комплексной z-плоскости.

12. Такое доказательство содержится в центральных теоремах теории конформных отображений, строгое обоснование которых сделало возможным униформизацию алгебраической кривой или самого общего аналитического образа с помощью комплексного параметра u. Для *односвязных* поверхностей R (следовательно, в частности, для универсальной поверхности $\hat{R}$) речь идет о так называемой теореме Римана об отображении, согласно которой каждая такая поверхность топологически и конформно эквивалентна одному из следующих трех нормальных типов областей G_z:

1. *Замкнутая плоскость* $|z| \leqslant \infty$. 2. *Открытая плоскость* $|z| < \infty$. 3. *Единичный круг* $|z| < 1$.

Для многосвязной римановой поверхности, *подобной однолистным*, всегда существует конформно эквивалентная ей область G_z плоскости z, ограниченная, например, лишь параллельными отрезками (или точками) [теорема об областях с параллельными разрезами (Parallelschlitztheorem)].

Комбинация шагов 1°, 2°, 3° позволяет аналитически униформизировать любое многозначное аналитическое соотношение (x, y) между точками двух заданных римановых поверхностей R_x и R_y так, чтобы униформизирующий параметр u изменялся в подобласти R_u комплексной числовой плоскости [1]).

---

[1]) С точки зрения общего подхода к проблеме униформизацин (ср. п. 1) требование, чтобы R_u была „разостлана" в *числовой плоскости u*, представляет определенное ограничение. Можно было бы поставить более общий вопрос, выполнима ли униформизация соотношения (x, y) так, чтобы уни-

13. Введение Риманом в его основополагающих трудах по теории алгебраических функций и их интегралов идеи римановой поверхности явилось началом интенсивного развития геометрической теории функций, теории отображений, осуществляемых аналитическими функциями, и топологии. Концепция Римана, а именно выделение геометрических моментов, связанных с теорией аналитических функций, и особенно — ясное разделение топологических и метрико-конформных свойств римановых поверхностей, — необычайно стимулировала развитие теории аналитических функций, и влияние последней распространилось далеко за пределами этой специальной математической дисциплины. Для развития геометрической теории функций после Римана важным было то, что понятие римановой поверхности было постепенно освобождено от первоначально связанного с ним предположения о вложимости в другое или наложимости на другое многообразие. В выработке абстрактного понятия римановой поверхности, вполне в духе абсолютной римановой дифференциальной геометрии, существенным был вклад, сделанный Клейном. Однако лишь позднейшее развитие внесло здесь окончательную ясность. При этом прежде всего следует назвать значительную во многих отношениях книгу Вейля „Идея римановой поверхности" (Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, 1913). Из более поздних исследований основ этого понятия я хочу особенно выделить работы Радо и Стойлова.

14. Еще сегодня, спустя четыре десятилетия после выхода в свет книги Вейля, его изложение теории римановых поверхностей может служить образцом. Поэтому при работе над настоящей монографией моей целью было, по возможности без пропусков основных положений теории униформизации, особенно подробно остановиться на тех вопросах, которые получили существенное развитие после появления книги Вейля. С одной стороны, это относится к основаниям теории. С другой стороны, казались заслуживающими большого внимания успехи, достигнутые, особенно за последние годы, в теории открытых римановых поверхностей. Как раз в этом мало исследованном и общем направлении теория функций, повидимому, имеет многообещающее будущее. Напротив, общеизвестную классическую теорию абелевых интегралов на замкнутых римановых поверхностях, доступную по многим превосходным ее изложениям, я рассмотрел лишь в важнейших чертах.

Наконец, несколько слов о методике. В учении об униформизации нет недостатка в различных методах. Фундаментальные теоремы существования я доказывал, опираясь на классический альтернирую-

---

формизирующая поверхность R_u была конформно эквивалентна не плоской области G_u u-плоскости, а некоторой (однолистной) подобласти G_v *произвольно* заданной римановой поверхности R_v. Это ведет к еще очень мало исследованным задачам теории конформных отображений.

щий метод Шварца и Неймана. Для конструктивного построения теории этот метод по сравнению с другими (методом, основанным на принципе Дирихле, методом выметания Пуанкаре, методом Перрона суб- и супергармонических аппроксимаций и т. д.) представляет известные принципиальные преимущества, о которых подробнее будет сказано ниже. Применение аксиомы выбора по возможности избегалось. Доказательства сходимости основаны на общем принципе монотонности (особенно на важном принципе Харнака) и на систематическом применении принципа максимума теории потенциала.

Глава I

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В настоящей главе с целью получения наглядной основы для общей теории римановых поверхностей рассматриваются важнейшие свойства алгебраических функций одного комплексного переменного. Исторически общая проблема униформизации уходит своими корнями в классическую задачу о нахождении однозначного параметрического представления для данной алгебраической кривой. Вообще, рассмотрение алгебраических функций естественным образом ведет к общим понятиям и проблемам теории римановых поверхностей, составляющих предмет нашего исследования. Эта глава дает ориентировочное представление об этих вопросах, исследуемых подробно с общей точки зрения в следующих главах.

§ 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИИ

1.1. Определение. Пусть

$$F(z, w) = z^n P_0(w) + z^{n-1} P_1(w) + \ldots + z P_{n-1}(w) + P_n(w) = \\ = w^m Q_0(z) + w^{m-1} Q_1(z) + \ldots + w Q_{m-1}(z) + Q_m(z) \qquad (1.1)$$

— многочлен относительно z и w над полем комплексных чисел, имеющий степени n по z и m по w. Он предполагается *неприводимым*: не существует разложения $F \equiv F_1 F_2$, где F_1 и F_2 — многочлены, отличные от постоянных. Мы ставим себе задачу исследовать элементы функции [1]), принадлежащие уравнению

$$F(z, w) = 0.$$

При этом под *регулярным элементом* $w = w(z)$ мы понимаем однозначную регулярную аналитическую функцию, определенную в круге C плоскости z.

Дробным аналитическим элементом $w = w(z)$ мы называем однозначную функцию, определенную в круге C плоскости z и регулярную во всех его точках, кроме центра, который является полюсом.

---

[1]) В дальнейшем вместо „элемент функции" (Functionselement) мы обычно будем говорить просто „элемент" — *Прим. перев.*

Мы говорим, что *элемент* $w = w(z)$, определенный в круге C, *принадлежит уравнению* $F(z, w) = 0$, если в C имеет место тождество $F(z, w(z)) = 0$.

1.2. Теорема существования. Для дальнейших рассмотрений важное значение имеет следующая теорема существования:

Теорема 1. *Пусть* a, b — *два таких конечных комплексных числа, что* $F(a, b) = 0$ *и* $F_w(a, b) \neq 0$ [1]. *Тогда существует круговая окрестность точки* $z = a$ *с центром* a, *в которой имеется один и только один регулярный элемент* $w = w(z)$, *принадлежащий уравнению* $F(z, w) = 0$ *и удовлетворяющий условию* $b = w(a)$.

Эта теорема напоминает теорему существования неявных действительных функций и может быть также доказана с ее помощью путем разделения действительной и мнимой частей. Мы дадим здесь, однако, чисто теоретико-функциональное доказательство.

Расположим многочлен $F(z, w)$ по возрастающим степеням $w - b$:

$$F(z, w) = H_0(z) + H_1(z)(w - b) + \ldots + H_m(z)(w - b)^m. \quad (1.2)$$

Согласно предположению,

$$F(a, b) = H_0(a) = 0, \quad F_w(a, b) = H_1(a) \neq 0. \quad (1.3)$$

Окружим точки $z = a$ и $w = b$ двумя настолько малыми кругами $|z - a| \leqslant R_0$, $|w - b| \leqslant \rho_0$, что для каждой пары (z, w), в которой z и w принадлежат этим кругам, выполняются следующие условия:

1°. $F_w(z, w) \neq 0$;

2°. $|H_1(z)| > \frac{|H_1(a)|}{2}$;

3°. $|H_2(z)(w - b) + \ldots + H_m(z)(w - b)^{m-1}| < \frac{|H_1(a)|}{4}$.

Это возможно в силу (1.3) и непрерывности многочленов, входящих в 1°, 2° и 3°. Определив таким образом положительные постоянные R_0 и ρ_0, выберем еще настолько малое число r_0, $0 < r_0 \leqslant R_0$, что для $|z - a| \leqslant r_0$ выполняется условие

4°. $|H_0(z)| < \frac{|H_1(a)|}{4}\rho_0$.

Существование такого числа r_0 также следует из (1.3). Условия 1°—4° выполняются тогда для каждой пары значений (z, w), где $|z - a| \leqslant r_0$ и $|w - b| \leqslant \rho_0$.

Покажем теперь, что для каждого z из круга $|z - a| \leqslant r_0$ существует одно и только одно значение w из круга $|w - b| \leqslant \rho_0$, такое, что $F(z, w) = 0$. Это утверждение равносильно следующему: для произвольной точки z_0 круга $|z - a| \leqslant r_0$ многочлен $F(z_0, w)$ в круге $|w - b| \leqslant \rho_0$ имеет ровно один простой нуль.

---

[1]) $F_w(z, w)$ обозначает частную производную от $F(z, w)$ по w.

Для доказательства воспользуемся принципом аргумента [1]). Докажем сначала, что на окружности $|w-b|=\rho_0$ многочлен $F(z_0, w)$ отличен от нуля. В самом деле, в силу (1.2), имеем

$$F(z_0, w)=(w-b)\left\{H_1(z_0)+[H_2(z_0)(w-b)+\ldots+H_m(z_0)(w-b)^{m-1}]+\frac{H_0(z_0)}{w-b}\right\}.$$

Для $|w-b|=\rho_0$, в силу 3° и 4°, абсолютное значение каждой из величин

$$H_2(z_0)(w-b)+\ldots+H_m(z_0)(w-b)^{m-1},\quad \frac{H_0(z_0)}{w-b}$$

меньше $|H_1(a)|/4$, поэтому абсолютное значение их суммы меньше $|H_1(a)|/2$. Следовательно, при $|w-b|=\rho_0$ имеем

$$F(z_0, w)=(w-b)\left\{H_1(z_0)+\left\langle\frac{|H_1(a)|}{2}\right\rangle\right\} \tag{1.4}$$

(для положительного числа M мы через $\langle M\rangle$ обозначаем комплексное число, абсолютное значение которого меньше M).

Выражение в фигурных скобках в (1.4) отлично от нуля, так как, в силу 2°, абсолютное значение первого слагаемого больше абсолютного значения второго. Следовательно, $F(z_0, w)\neq 0$ для $|w-b|=\rho_0$.

Для определения числа μ нулей многочлена $F(z_0, w)$ в круге $|w-b|<\rho_0$ воспользуемся принципом аргумента. Если через c обозначить окружность $|w-b|=\rho_0$, то из (1.4) следует, что

$$2\pi\mu=\Delta_c \arg F(z_0, w)=\Delta_c \arg(w-b)+\Delta_c \arg\{\ldots\},$$

где Δ_c означает приращение аргумента соответствующей функции, когда точка w пробегает c в положительном направлении. Так как $\Delta_c \arg(w-b)=2\pi$, то для доказательства того, что $\mu=1$, нужно показать, что $\Delta_c \arg\{\ldots\}=0$. Это получается из нижеследующих известных рассуждений (теорема Руше), где значение $\xi=\{\ldots\}$ рассматривается как точка ξ-плоскости. Так как в выражении

$$\xi=H_1(z_0)+\left\langle\frac{1}{2}|H_1(a)|\right\rangle$$

второй член имеет меньшее абсолютное значение, чем первый, то точка ξ лежит в круге $|\xi-H_1(z_0)|<|H_1(z_0)|$. Положим $\psi=\arg H_1(z_0)$. Тогда, если для произвольной точки w на c мы выберем подходящую ветвь $\arg\xi$ и затем совершим обход вдоль контура c, то для всех w на c будем иметь

$$\psi-\frac{\pi}{2}<\arg\xi<\psi+\frac{\pi}{2}. \tag{1.5}$$

[1]) В гл. III этот принцип будет подробно рассмотрен в общем виде, нужном для теории функций на римановой поверхности.

При указанном обходе точка ξ возвращается в свое начальное положение; следовательно, $\arg\xi$ получает приращение вида $2\pi\nu$, где ν — целое число. Но из (1.5) видно, что колебание $\arg\xi$ (т. е. наибольшее значение минус наименьшее значение) при таком обходе меньше π, откуда вытекает, что $\nu = 0$.

Этим доказано, что для каждого z_0 из круга $|z-a| \leqslant r_0$ существует одно и только одно w из $|w-b| < \rho_0$, такое, что эти два значения удовлетворяют уравнению $F(z, w) = 0$. Тем самым для $|z-a| \leqslant r_0$ определена такая однозначная функция $w = w(z)$, что

$$F(z, w(z)) = 0 \quad \text{и} \quad b = w(a).$$

Значения функции $w(z)$ лежат в круге $|w-b| < \rho_0$.

Остается еще показать, что построенная таким образом $w(z)$ является регулярной аналитической функцией в круге $|z-a| \leqslant r_0$. Согласно определению такой функции по Коши, достаточно проверить ее дифференцируемость.

Сначала мы докажем непрерывность $w(z)$. Непрерывность в точке $z = a$ следует из предыдущего. Числа ρ_0 и r_0 были фиксированы выше с учетом важных для доказательства условий 1°—4°; однако ясно, что эти условия продолжают выполняться, если ρ_0 и соответственно (с учетом 4°) r_0 уменьшаются. Из того, что $|w-b| < \rho_0$ для $|z-a| \leqslant r_0$, следует непрерывность функции $w(z)$ в точке $z = a$.

Теперь все предыдущее доказательство можно повторить, исходя не из пары значений (a, b), а из произвольной пары (z_0, w_0), где $|z_0 - a| < r_0$ и $w_0 = w(z_0)$, ибо, ввиду 1°, для этой пары значений выполняются оба предположения $F(z_0, w_0) = 0$, $F_w(z_0, w_0) \neq 0$ нашей теоремы. Круговые окрестности точек z_0 и w_0, в которых выполняются условия, аналогичные условиям 1°—4°, можно при этом выбрать столь малыми, чтобы они лежали соответственно в кругах $|z-a| \leqslant r_0$ и $|w-b| < \rho_0$. Тогда в окрестности точки z_0 получим непрерывную функцию, совпадающую там с построенной выше функцией $w(z)$ для $|z-a| \leqslant r_0$. Это непосредственно следует из доказанного выше. Следовательно, функция $w(z)$ непрерывна в точке z_0, и тем самым доказана ее непрерывность в круге $|z-a| < r_0$.

Существование производной $w'(z)$ мы также докажем сначала для $z = a$. Из (1.2) для $|z-a| \leqslant r_0$ следует, что

$$F(z, w(z)) \equiv H_0(z) + (w(z)-b)[H_1(z) + (w(z)-b)H_2(z) + \ldots] = 0,$$

откуда

$$\frac{w(z)-b}{z-a} = \frac{H_0(z)}{z-a} \cdot \frac{-1}{H_1(z) + (w-b)H_2(z) + \ldots}. \tag{1.6}$$

Но из (1.3) при $z \to a$ вытекает, что

$$\frac{H_0(z)}{z-a} = \frac{H_0(z) - H_0(a)}{z-a} \to H_0'(a) = F_z(a, b).$$

В силу непрерывности $w(z)$, мы имеем $w \to b$, когда $z \to a$; учитывая (1.3), заключаем, что

$$\lim_{z \to a} [H_1(z) + (w(z) - b) H_2(z) + \ldots + (w(z) - b)^{m-1} H_m(z)] = \\ = H_1(a) = F_w(a, b);$$

отсюда и из (1.6) следует существование предела

$$w'(a) = \lim_{z \to a} \frac{w(z) - b}{z - a} = -\frac{F_z(a, b)}{F_w(a, b)}.$$

Это заключение, как выше при доказательстве непрерывности, может быть повторено, если вместо (a, b) исходить из значений z_0, $w_0 = w(z_0)$. Отсюда вытекает, что производная

$$w'(z) = -\frac{F_z(z, w(z))}{F_w(z, w(z))} \tag{1.7}$$

существует для всех z из круга $|z - a| < r_0$. Тем самым доказано, что $w(z)$ представляет в круге $|z - a| < r_0$ регулярный элемент, принадлежащий заданному уравнению $F(z, w) = 0$.

Остается еще показать, что элемент $w(z)$ определяется единственным образом. Пусть $w^*(z)$ — другой регулярный элемент, определенный в круге $|z - a| < r_0$ и принадлежащий уравнению $F(z, w) = 0$, причем $w^*(a) = b$. Так как функция $w^*(z)$ непрерывна, то существует окрестность точки $z = a$, которую $w^*(z)$ отображает в круг $|w - b| < \rho_0$. Из первой части доказательства следует, что элемент $w^*(z)$ в этой окрестности точки $z = a$ должен совпадать с $w(z)$, откуда вытекает, что $w(z)$ и $w^*(z)$ тождественно совпадают. Теорема доказана полностью.

1.3. Критические точки. Для того, чтобы можно было применять теорему существования, нужно определить, для каких пар значений (a, b), удовлетворяющих равенству $F(a, b) = 0$, выполняются условия этой теоремы, именно, что a и b — конечные комплексные числа и что $F_w(a, b) \neq 0$. Как выяснится ниже, это имеет место всегда, за исключением не более чем конечного числа пар значений (a, b), удовлетворяющих равенству $F(a, b) = 0$. Поэтому проще рассмотреть эти исключения. Имеются три возможности, при которых пара значений (a, b) удовлетворяет равенству $F(a, b) = 0$, но не удовлетворяет указанным условиям:

1. a и b конечны, но $F_w(a, b) = 0$;
2. a конечно, но $b = \infty$;
3. $a = \infty$.

При этом еще подлежит уточнению смысл утверждения, что пара значений (a, b) удовлетворяет уравнению $F(a, b) = 0$, когда одно или оба значения a, b обращаются в бесконечность.

1.4. Исследуем сначала первый случай. Для каких конечных a и b одновременно $F(a, b) = 0$ и $F_w(a, b) = 0$? Для ответа на этот вопрос расположим оба многочлена $F(z, w)$ и $F_w(z, w)$ по убывающим степеням w и применим алгорифм Евклида. В качестве остатков мы будем получать при этом многочлены относительно w с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от z. Алгорифм может закончиться только тогда, когда получится не зависящий от w остаток $R(z)$. В самом деле, иначе $F(z, w)$ и $F_w(z, w)$ имели бы в качестве общего делителя многочлен от w степени $\geqslant 1$ с коэффициентами, являющимися рациональными функциями от z. Но $F(z, w)$ — многочлен относительно w, коэффициенты которого — многочлены относительно z. Если бы он имел делителем многочлен относительно w с коэффициентами, рационально зависящими от z, то, по известной теореме алгебры, он имел бы делителем многочлен относительно w с коэффициентами, являющимися многочленами относительно z. Степень этого многочлена по w была бы той же, что у общего делителя $F(z, w)$ и $F_w(z, w)$, следовательно, меньшей степени m многочлена $F(z, w)$ по w. Но это противоречит предположенной неприводимости $F(z, w)$.

Итак, алгорифм Евклида для $F(z, w)$ и $F_w(z, w)$ как многочленов относительно w приводит к не зависящему от w остатку $R(z)$, являющемуся рациональной функцией от z. Если теперь $F(a, b) = F_w(a, b) = 0$ для пары конечных значений (a, b), то многочлены $F(a, w)$ и $F_w(a, w)$ имеют общий делитель $w - b$; тогда a должно быть нулем или полюсом функции $R(z)$ [полюс $R(z)$ в алгорифме Евклида может получиться от деления на многочлен относительно w, все коэффициенты которого обращаются в нуль при $z = a$]. Так как $R(z)$ не обращается тождественно в нуль и является рациональной функцией от z, то существует лишь конечное число значений a, а потому и конечное число пар значений (a, b), для которых $F(a, b) = F_w(a, b) = 0$ [1]). Этим исчерпывается рассмотрение первого исключительного случая.

1.5. Переходим ко второму случаю. Для каких конечных a пара $z = a$, $w = \infty$ удовлетворяет уравнению $F(z, w) = 0$? Сначала нужно сказать, что мы под этим понимаем. Вводя в (1.1) в качестве новой переменной

$$u = \frac{1}{w},$$

будем иметь

$$F(z, w) = \left(\frac{1}{u}\right)^m G(z, u),$$

[1]) Неприводимость $F(z, w)$ является необходимым условием этого заключения. Если, например, $F(z, w) = zw^2$, то $F = F_w = 0$ для $w = 0$ и всех z.

где

$$G(z, u) \equiv u^m Q_m(z) + u^{m-1} Q_{m-1}(z) + \ldots + Q_0(z). \qquad (1.8)$$

Мы условимся говорить, что пара $z = a$, $w = \infty$ удовлетворяет уравнению $F(z, w) = 0$, если $G(a, 0) = 0$. Из (1.8) следует тогда, что для каждой такой пары выполняется равенство $Q_0(a) = 0$. С другой стороны, $Q_0(z) \not\equiv 0$, ибо иначе, в силу (1.1), $F(z, w)$ как многочлен относительно w не был бы степени m. Отсюда следует, что существует лишь конечное число пар (a, ∞), где a конечно, удовлетворяющих уравнению $F(z, w) = 0$.

Третий случай может быть рассмотрен аналогично.

1.6. Таким образом, пары значений (a, b), для которых имеет место равенство $F(a, b) = 0$, но не выполняются условия теоремы 1, возможны только тогда, когда a принадлежит к одному из следующих трех множеств:

1. Значения $z = a$, для которых существует такое $w = b$, что $F(a, b) = F_w(a, b) = 0$, следовательно, для которых уравнение $F(a, w) = 0$ имеет по крайней мере один кратный корень. Эти значения $z = a$ являются нулями и полюсами введенной выше рациональной функции $R(z)$.

2. Значения $z = a$, являющиеся корнями уравнения $Q_0(z) = 0$, где $Q_0(z)$ — коэффициент при высшей степени по w многочлена $F(z, w)$.

3. Значение $a = \infty$.

Множество этих *„критических точек“* $z = a$ всегда будет конечным. Его дополнение на плоскости z представляет собой открытое связное множество. Это область, и мы обозначим ее через T_z. Если z_0 — какая-либо точка из T_z, то уравнение

$$F(z_0, w) \equiv w^m Q_0(z_0) + \ldots + Q_m(z_0) = 0 \qquad (1.9)$$

имеет ровно m различных корней. В самом деле, если z_0 лежит в T_z, то $Q_0(z_0) \neq 0$ и, далее, уравнение (1.9) не имеет кратных корней, ибо для них выполнялось бы условие $F_w(z_0, w) = 0$. Следовательно, для $z = z_0$ существует ровно m различных пар значений (z_0, b_1), (z_0, b_2), $\ldots$, (z_0, b_m), где $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — корни уравнения (1.9), для которых выполняются условия теоремы 1. Итак, из теоремы 1 мы получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Для каждой точки z_0 области T_z существует круговая окрестность с центром в z_0, в которой имеется ровно m различных регулярных элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\ldots$, $w_m(z)$, принадлежащих уравнению $F(z, w) = 0$.*

Пример. Для уравнения

$$F(z, w) \equiv w^3 - 3z^2 w + 2z^3 - z$$

имеем $F_w(z, w) = 3w^2 - 3z^2$. Алгорифм Евклида дает

$$R(z) = -3 + \frac{3}{4z^2}.$$

Нулями и полюсами функции $R(z)$ являются точки $^1/_2$, $-^1/_2$, 0. Для $z = ^1/_2$ уравнение $F(z, w) = 0$ имеет двукратный корень $w = -^1/_2$, для $z = -^1/_2$ — двукратный корень $w = ^1/_2$, для $z = 0$ — трехкратный корень $w = 0$. Так как $Q_0(z) \equiv 1$, то ясно, что уравнение $Q_0(z) = 0$ вовсе не имеет корней.

1.7. Аналитическое продолжение. По теореме 2, в области T_z существуют регулярные элементы. Ближайшей нашей задачей будет показать, что все они в T_z неограниченно аналитически продолжаемы. Приведем сначала некоторые определения и теоремы об аналитическом продолжении, которые будем предполагать известными [1]).

А. Непосредственное аналитическое продолжение. Пусть f_1 и f_2 — регулярные или дробные аналитические элементы, определенные соответственно в кругах C_1 и C_2, имеющих общие внутренние точки. Элементы f_1 и f_2 называются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, если $f_1 = f_2$ для всех точек пересечения C_1 и C_2. Непосредственное аналитическое продолжение элемента f_1 из C_1 в C_2 определяется однозначно.

В. Аналитическое продолжение [2]). Пусть дано n регулярных или дробных аналитических элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$, определенных соответственно в кругах $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Пусть, далее, $f_{\nu+1}$ — непосредственное аналитическое продолжение элемента f_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n-1$). Тогда элемент f_n называется аналитическим продолжением элемента f_1 вдоль цепочки кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Конечный элемент f_n однозначно определяется исходным элементом f_1 и цепочкой кругов $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

С. Аналитическое продолжение вдоль пути [3]). Пусть $z = z(t)$ — непрерывная (комплекснозначная) функция действительного параметра t ($t_0 \leqslant t \leqslant T_0$). Она определяет в z-плоскости путь, соединяющий точки P_0 ($z = z(t_0)$) и P ($z = z(T_0)$) [4]). Пусть в круговой окрестности C_0 точки P_0 дан регулярный или дробный аналитический элемент $f_0(z)$ [5]). Говорят, что элемент $f_0(z)$ аналитически продолжаем

---

[1]) В гл. III мы дадим анализ общего понятия аналитического продолжения. В настоящем предварительном исследовании мы удовлетворимся приводимыми ниже фактами из теории функций на плоскости.

[2]) В оригинале используется термин „mittelbare analytische Fortsetzung".— *Прим. перев.*

[3]) См. книгу А. И. Маркушевича [1**], гл. VIII, § 5.— *Прим. перев.*

[4]) Пути, переводимые друг в друга строго монотонным преобразованием параметра, рассматриваются как одинаковые.

[5]) Под круговой окрестностью C точки P мы понимаем любой круг, содержащий точку P внутри себя. Мы не требуем, чтобы точка P совпадала с центром круга C.

вдоль пути $z(t)$ до точки P, если на этом пути можно указать конечную последовательность точек $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = P$, соответствующих монотонно возрастающим значениям t, и цепочку кругов $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n$, таких, что, во-первых, часть $P_\nu P_{\nu+1}$ пути $z(t)$ лежит внутри C_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$), во-вторых, точка $P_n = P$ лежит в C_n и, в-третьих, элемент $f_0(z)$ аналитически продолжаем вдоль цепочки кругов $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n$ до круга C_n включительно.

Заданием исходного элемента $f_0(z)$ и пути $z(t)$ аналитическое продолжение определяется однозначно в следующем смысле: если, исходя из C_0 и $f_0(z)$, осуществить аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ вдоль пути P_0P до P двумя различными способами, т. е. один раз с цепочкой кругов $C_0, C_1, \ldots, C_n$ и соответствующими элементами $f_0, f_1, \ldots, f_n$, а другой раз с цепочкой кругов $C_0, C_1^*, \ldots, C_m^*$ и соответствующими элементами $f_0, f_1^*, \ldots, f_m^*$, то элементы f_n и f_m^* будут непосредственными аналитическими продолжениями друг друга. Кроме того, аналитическое продолжение не зависит от выбора параметра для пути P_0P.

При тех же обозначениях из предыдущего определения вытекает следующее: если элемент $f_0(z)$ аналитически продолжаем вдоль пути $z(t)$ ($t_0 \leqslant t \leqslant T_0$) до некоторой точки P^*, причем P^* соответствует значению параметра t^* ($t_0 \leqslant t^* < T_0$), то аналитическое продолжение возможно еще на некоторой части пути после t^*. Поэтому представляются две возможности: либо элемент $f_0(z)$ может быть аналитически продолжен вдоль $z(t)$ до конечной точки пути $z(T_0)$, либо существует вполне определенная точка $z(t_1)$ ($t_0 < t_1 \leqslant T_0$), такая, что аналитическое продолжение элемента $f_0(z)$ вдоль $z(t)$ возможно до любой точки $z(t)$ ($t_0 \leqslant t < t_1$), но невозможно до самой точки $z(t_1)$.

D. Неограниченная продолжаемость в области. Пусть P_0 — внутренняя точка области G плоскости z. Регулярный или дробный аналитический элемент, определенный в некоторой круговой окрестности точки P_0, называется неограниченно аналитически продолжаемым в области G, если для любого пути P_0P, целиком лежащего внутри G, этот элемент аналитически продолжаем до конечной точки пути P.

1.8. Продолжение алгебраического элемента. Имеет место следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть z_0 — точка области T_z и $w_0(z)$ — регулярный элемент, определенный в некоторой круговой окрестности точки z_0 и принадлежащий уравнению $F(z, w) = 0$. Тогда $w_0(z)$ неограниченно аналитически продолжаем в области T_z и получаемые при аналитическом продолжении элементы все принадлежат уравнению $F(z, w) = 0$.*

Для доказательства теоремы заметим сначала, что если элементы $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга и $w=f_1(z)$ принадлежит уравнению $F(z, w)=0$, то $w=f_2(z)$ также принадлежит этому уравнению. В самом деле, можно считать, что элементы $f_1(z)$ и $f_2(z)$ определены соответственно в кругах C_1 и C_2 с непустым пересечением, на котором они совпадают. Так как по условию $F(z, f_1(z))=0$, то на пересечении C_1 и C_2 имеем $F(z, f_2(z))=0$, откуда следует, что функция $F(z, f_2(z))$ равна нулю во всем круге C_2. Отсюда заключаем, что если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — какие-либо аналитические продолжения друг друга и $f_1(z)$ принадлежит $F(z, w)=0$, то и $f_2(z)$ принадлежит $F(z, w)=0$[1]). Тем самым доказана вторая часть теоремы, в которой утверждается, что каждый элемент, получаемый из $w_0(z)$ аналитическим продолжением, принадлежит уравнению $F(z, w)=0$.

Для доказательства первой части теоремы нужно (по п. 1.7, D) показать следующее: если $\overset{\frown}{z_0z_1}$ — произвольный путь, который начинается в z_0, кончается в z_1 и целиком лежит в T_z, то $w_0(z)$ аналитически продолжаем по этому пути до z_1. Доказательство будем вести от противного: допустим, что в T_z существует путь $\overset{\frown}{z_0z_1}$, конец которого z_1 недостижим при продолжении $w_0(z)$ вдоль $\overset{\frown}{z_0z_1}$. По п. 1.7, C, на $\overset{\frown}{z_0z_1}$ существует тогда вполне определенная точка, являющаяся первой (в смысле возрастания параметра) недостижимой точкой при аналитическом продолжении $w_0(z)$ вдоль $\overset{\frown}{z_0z_1}$. Не ограничивая общности, можно считать, что этой точкой является z_1.

По теореме 2, существует круговая окрестность C_1 точки z_1 с центром в z_1, в которой имеется ровно m различных регулярных элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$, принадлежащих $F(z, w)=0$. Пусть $z^*\neq z_1$ — точка пути $\overset{\frown}{z_0z_1}$, для которой часть пути $\overset{\frown}{z^*z_1}$ лежит целиком внутри C_1. По предположению о пути $\overset{\frown}{z_0z_1}$, элемент $w_0(z)$ аналитически продолжаем до z^*. Пусть при этом аналитическом продолжении получается элемент $w^*(z)$, определенный в круговой окрестности C^* точки z^*. Согласно доказанному выше, элемент $w^*(z)$ принадлежит $F(z, w)=0$; z^* — внутренняя точка пересечения C^* и C_1 и внутренняя точка области T_z. Поэтому существует замкнутый круг $|z-z^*|\leqslant r^*$, лежащий целиком в T_z и в пересечении C^* с C_1. В этом замкнутом круге элементы $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ могут попарно иметь одинаковые значения не более чем для конечного числа точек, ибо они между собой различны. Так как $w^*(z)$, $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ принадлежат уравнению $F(z, w)=0$ и это уравнение для z из T_z имеет в точности m различных корней, то из

[1]) Это частный случай теоремы о перманентности функциональных уравнений [т. е. их сохранении при аналитическом продолжении. — *Прим. перев.*].

предыдущего следует, что элемент $w^*(z)$ по крайней мере с одним из элементов $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$ имеет общие значения на бесконечном множестве точек круга $|z-z^*| \leqslant r^*$. Отсюда вытекает, что один из этих элементов является непосредственным аналитическим продолжением элемента $w^*(z)$. Пусть это будет элемент $w_1(z)$. Так как C^* и C_1 покрывают часть пути $\overset{\frown}{z^*z_1}$, то $w_1(z)$ получается также путем аналитического продолжения $w^*(z)$ вдоль $\overset{\frown}{z^*z_1}$, следовательно, и путем аналитического продолжения $w_0(z)$ вдоль $\overset{\frown}{z_0z_1}$. Но это противоречит предположению о недостижимости z_1. Теорема доказана.

Заметим еще, что функция, получаемая при аналитическом продолжении $w_0(z)$ в T_z, регулярна в T_z, так как ни при каком z из T_z пара значений (z, ∞) не удовлетворяет уравнению $F(z, w) = 0$.

1.9. Элементы критических точек. Рассмотрим теперь определенные в п. 1.6 критические точки, образующие дополнение к области T_z, причем сначала те конечные точки a, для которых $Q_0(a) \neq 0$ и существует такое значение $w = b$, что $F(a, b) = F_w(a, b) = 0$. Так как множество критических точек конечно, то можно указать область G: $0 < |z-a| < R$, вместе с окружностью $|z-a| = R$ целиком принадлежащую области T_z. Разобьем круг $|z-a| \leqslant R$ с помощью диаметра на два полукруга; внутренние их точки образуют области, которые мы обозначим через G_1 и G_2; обозначим еще через r_1 и r_2 радиусы, составляющие использованный диаметр. Пусть теперь z_0 — произвольная точка области G_1. По теореме 2, в некоторой окрестности точки z_0 существует ровно m элементов $w_1(z)$, $w_2(z), \ldots, w_m(z)$, принадлежащих уравнению $F(z, w) = 0$. По теореме 3, каждый из этих элементов неограниченно аналитически продолжаем в G_1. В § 3 гл. III мы докажем теорему о монодромии, которая утверждает, что элемент, неограниченно аналитически продолжаемый в *односвязной* области, определяет в этой области *однозначную* аналитическую функцию. Отсюда следует, что при аналитическом продолжении в области G_1 элементов, соответствующих точке z_0, в G_1 возникает m однозначных аналитических функций, которые мы снова обозначим через $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$. Если мы будем вместо z_0 исходить из другой точки области G_1, например z_1, то придем к тем же функциям $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$. В самом деле, так же, как при доказательстве теоремы 3, мы убеждаемся, что каждый из m элементов, соответствующих по теореме 2 точке z_1, в пересечении области его определения с G_1 совпадает с одной из функций $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$ и что различные элементы, соответствующие z_1, не могут в этом пересечении совпадать с одной и той же функцией. Таким образом, заданием области G_1 и уравнения $F(z, w) = 0$ функции $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$

определяются однозначно. Аналогично получаем m однозначных аналитических функций $w_1^*(z)$, $w_2^*(z)$, ..., $w_m^*(z)$ для G_2.

Функция $w_1(z)$ может быть аналитически продолжена через r_1 (за исключением точки $z=a$) из G_1 в G_2. Это продолжение определено однозначно, так как теорему о монодромии можно применить и к области G с разрезом вдоль r_2. Это продолжение должно в G_2 совпадать с одной из функций $w_1^*(z)$, $w_2^*(z)$, ..., $w_m^*(z)$; предположим, что оно совпадает там с $w_1^*(z)$. То же самое справедливо для $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$, и функции $w_1^*(z)$, $w_2^*(z)$, ..., $w_m^*(z)$ можно пронумеровать так, чтобы аналитическое продолжение функции $w_\nu(z)$ через r_1 в G_2 совпадало с $w_\nu^*(z)$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$). Каждая из функций $w_1^*(z)$, $w_2^*(z)$, ..., $w_m^*(z)$ может быть аналитически продолжена через r_2 в G_1, причем это продолжение снова определяется однозначно и совпадает в G_1 с одной из функций $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$ Однако аналитическое продолжение функции $w_\nu^*(z)$ ($\nu=1, 2, \ldots, m$) через r_2 в G_1, вообще говоря, совпадает не с $w_\nu(z)$, а с какой-то другой из этих функций. Другими словами, если, например, функцию $w_1(z)$ аналитически продолжить через r_1 в G_2 и затем через r_2 в G_1, то в общем случае мы придем не к $w_1(z)$, а с какой-то другой из функций $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_m(z)$. Следовательно, при аналитическом продолжении $w_1(z)$ в области G получаем там многозначную функцию. Если теперь, исходя из какой-либо точки области G_1, будем совершать многократный обход вокруг точки $z=a$ (например, по окружности с центром в a), начиная с функции $w_1(z)$, то при каждом возвращении в G_1 будем приходить к одной из функций $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$. Получаемые таким образом функции при дальнейших обходах начнут периодически повторяться. Пусть μ — наименьший из этих периодов ($1 \leqslant \mu \leqslant m$). Мы можем пронумеровать функции $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ так, чтобы при μ-кратном обходе вокруг $z=a$, начиная с $w_1(z)$, последовательно получались $w_2(z)$, $w_3(z)$, ..., $w_\mu(z)$, $w_1(z)$. Итак, при аналитическом продолжении функции $w_1(z)$ в G получается μ-значная функция.

Положим теперь

$$z-a=t^\mu.$$

Функция $t(z)$ отображает конформно μ-листный кусок поверхности, получаемый склеиванием в единый связный кусок μ экземпляров области G с разрезом, например, вдоль r_2, на область $0<|t|<r=\sqrt[\mu]{R}$.

Когда t совершает полный обход вокруг начала, соответствующая точка z совершает μ-кратный обход вокруг $z=a$. Поэтому сложная функция от t

$$w_1(z)=w_1(a+t^\mu)$$

при аналитическом продолжении в области $0<|t|<r$ остается однозначной.

Теперь нужно исследовать критическую точку $t=0$, соответствующую $z=a$. Согласно замечанию в конце п. 1.8, функции $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ и $w_1^*(z)$, $w_2^*(z)$, ..., $w_m^*(z)$ соответственно в G_1 и G_2 регулярны. Поэтому точка $t=0$ является для функции $w_1(a+t^\mu)$ либо существенно особой, либо полюсом, либо точкой регулярности.

Докажем, что имеет место последний случай. Как известно, для этого достаточно доказать ограниченность $w_1(a+t^\mu)$ в области $0<|t|<r$ или, что равносильно, ограниченность $w_1(z)$ при аналитическом продолжении в G.

Для доказательства заметим, что многочлены $Q_1(z)$, $Q_2(z)$, ..., $Q_m(z)$ в уравнении (1.1) при $|z-a|\leqslant R$ ограничены:

$$|Q_i(z)|<M \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m);$$

далее, многочлен $Q_0(z)$ отличен от нуля [так как $|z-a|\leqslant R$ лежит в T_z, то там не содержится точек, для которых $Q_0(z)=0$] и поэтому имеет положительный минимум m_0:

$$|Q_0(z)|\geqslant m_0>0 \quad \text{для} \quad |z-a|\leqslant R.$$

Отсюда для $|z-a|\leqslant R$ и $|w|>1$ следует, что

$$|Q_1(z)\,w^{m-1}+\ldots+Q_m(z)|<\sum_{i=1}^{m}|Q_i(z)|\,|w|^{m-1}<mM\,|w|^{m-1}$$

и

$$|Q_0(z)\,w^m|\geqslant m_0\,|w|^m.$$

Если теперь выбрать w так, что

$$m_0\,|w|^m>mM\,|w|^{m-1},$$

т. е.

$$|w|>\frac{mM}{m_0},$$

то многочлен $F(z,\ w)\equiv Q_0(z)\,w^m+(Q_1(z)\,w^{m-1}+\ldots+Q_m(z))$ будет отличен от нуля. Следовательно, если взять z в области G и w вне круга

$$|w|\leqslant M_0=\max\left(1,\ \frac{mM}{m_0}\right),$$

то $F(z,\ w)\neq 0$. Но функция $w_1(z)$ и ее аналитическое продолжение в G удовлетворяют уравнению $F(z,\ w)=0$, поэтому

$$|w_1(z)|=|w_1(a+t^\mu)|\leqslant M_0.$$

Это и нужно было доказать.

Следовательно, $w_1(a+t^\mu)$ в круге $|t|<r=\sqrt[\mu]{R}$ является однозначной регулярной функцией от t. Она имеет здесь сходящееся

разложение

$$w_1(a+t^\mu) = b_0 + b_\nu t^\nu + b_{\nu+1}t^{\nu+1} + \ldots \quad (b_\nu \neq 0).$$

Таким образом, мы *унiформизировали* многозначную при $\mu > 1$ функцию, полученную из $w_1(z)$ аналитическим продолжением в G, т. е. мы нашли для нее такое параметрическое представление, в котором z и w являются однозначными аналитическими функциями параметра:

$$\left.\begin{aligned} z &= a + t^\mu, \\ w &= b_0 + b_\nu t^\nu + b_{\nu+1}t^{\nu+1} + \ldots \quad (b_\nu \neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

1.10. Локальная унiформизация. Функцию $w(z)$, заданную в круге $|t| < r$ парой уравнений (1.10), называют *регулярным алгебраическим элементом*, параметр t — *унiформизирующей переменной элемента*. Такой элемент представляет собой μ-значную функцию, распадающуюся на μ однозначных ветвей, когда круг $|z-a| < r^\mu$ разрезают по радиусу. При обходе вокруг $z = a$ ветви элемента циклически переходят друг в друга. Точка $z = a$ называется точкой разветвления порядка $\mu - 1$. Для $\mu = 1$ имеем регулярный элемент в прежнем смысле.

Функция (1.10) может быть аналитически продолжена за пределы круга $|z-a| < r^\mu$. Однако в общем случае представление (1.10) не сохраняется. Следовательно, для продолженной таким образом функции $w(z)$ представление (1.10) справедливо только локально, т. е. в некоторой окрестности точки $z = a$. Поэтому t называют *локальной унiформизирующей переменной функции* $w(z)$.

Элемент (1.10) принадлежит уравнению $F(z, w) = 0$, т. е. для каждого t из круга $|t| < r$ справедливо соотношение $F(z(t), w(t)) = 0$. В самом деле, это следует из построения при $0 < |t| < r$ и остается верным для $t = 0$ в силу аналитичности функции $F(z(t), w(t))$ в круге $|t| < r$; поэтому $b = b_0$ является корнем уравнения $F(a, w) = 0$.

1.11. Отображение, осуществляемое регулярным алгебраическим элементом. Отображение $z \to w$, осуществляемое регулярным алгебраическим элементом (1.10), легко обозримо. Если, как выше, построить над $|z-a| < r^\mu$ μ-листный кусок поверхности G_μ с точкой разветвления $z = a$, то функция $t(z)$, определяемая первым из уравнений (1.10), будет отображать его на однолистный круг $|t| < r$. Это отображение всюду конформно, исключая точку разветвления $z = a$ (когда $\mu > 1$). Функция $w(t)$, определяемая вторым из уравнений (1.10), отображает круг $|t| < r$ на окрестность точки $w = b_0$. Если при этом $\nu = 1$ и r достаточно мало, то круг $|t| < r$ отображается взаимно однозначно и конформно на окрестность точки $w = b_0$. Если же $\nu > 1$, то для достаточно малого r образ круга $|t| < r$ представляет собой ν-листный кусок поверхности G_ν с точкой разветвления $w = b_0$. Отсюда следует, что алгебраический элемент (1.10) отобра-

жает кусок поверхности G_μ с точкой разветвления $z=a$ на кусок поверхности G_ν с точкой разветвления $w=b_0$. Для достаточно малых r отображение взаимно однозначно и, исключая, быть может, $z=a$, конформно. При $z=a$ отображение, очевидно, еще остается непрерывным.

1.12. Для получения соотношений (1.10) мы исходили из функций $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$. Функции $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_\mu(z)$ дали алгебраический элемент (1.10). Если $\mu<m$, то те же рассуждения можно провести для $w_{\mu+1}(z)$, ..., $w_m(z)$. Таким образом получим $k\,(1\leqslant k\leqslant m)$ алгебраических элементов, принадлежащих уравнению $F(z, w)=0$, которые с помощью униформизирующих параметров $t_i=\sqrt[\mu_i]{z-a}$ могут быть представлены в виде

$$z=a+t_i^{\mu_i},$$

$$w=b_0^{(i)}+b_{\nu_i}^{(i)}t_i^{\nu_i}+\ldots \quad (b_{\nu_i}^{(i)}\neq 0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

При этом $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i=m$. Числа $b_0^{(1)}$, $b_0^{(2)}$, ..., $b_0^{(k)}$ являются корнями уравнения $F(a, w)=0$. Из предыдущих рассуждений еще не следует, что это *все* корни уравнения $F(a, w)=0$. Однако это так. Точнее, справедливо следующее: если каждому значению $b_0^{(i)}$ приписать кратность $\mu_i\,(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$, причем в случае, когда некоторые из $b_0^{(i)}$ равны между собой, сложить соответствующие им кратности, то получим все корни уравнения $F(a, w)=0$ с кратностями, которые они имеют на самом деле.

Для доказательства обратимся снова к введенным выше в области G_1 функциям $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ и заметим, что в G_1 справедливо соотношение[1])

$$F(z, w)=Q_0(z)(w-w_1(z))(w-w_2(z))\ldots(w-w_m(z)). \quad (1.11)$$

Действительно, $F(z, w)=0$ для каждого z из G_1 имеет только простые корни и никакие две из функций $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ ни для какого z из G_1 не могут принимать одинаковые значения, поскольку в противном случае они, по теореме 1, имели бы общий регулярный элемент. Как видно из (1.10), функции $w_i(z)$ остаются непрерывными в точке $z=a$, если их там определить как соответствующие значения $b_0^{(i)}$. Если теперь z в области G_1 устремить к a, то утверждение будет непосредственно следовать из соотношения

---

[1]) Оно не противоречит неприводимости многочлена $F(z, w)$, так как $w_i(z)$ при $m>1$ не являются рациональными функциями от z.

(1.11), поскольку левая его часть есть многочлен от w, коэффициенты которого непрерывно зависят от z.

1.13. Предыдущий результат позволяет во многих случаях определить числа μ_i. Именно, справедливо такое утверждение: если $w=b$ является μ-кратным корнем уравнения $F(a, w)=0$ и $F_z(a, b)\neq 0$, то существует алгебраический элемент вида

$$\left.\begin{aligned} z &= a+t^{\mu}, \\ w &= b+b_1t+b_2t^2+\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

принадлежащий уравнению $F(z, w)=0$, и это единственный элемент с постоянными членами a и b. Для доказательства заметим, что предыдущие рассуждения проходят без изменений, если z и w поменять ролями. Так как $F_z(a, b)\neq 0$, то, по теореме 1, существует ровно один (с точностью до непосредственного аналитического продолжения) регулярный элемент $z=z(w)$, принадлежащий уравнению $F(z, w)=0$ и удовлетворяющий условию $a=z(b)$. Из доказательства теоремы 1 видно также, что это единственный алгебраический элемент такого рода. Отсюда следует, что не существует двух различных алгебраических элементов вида (1.12), принадлежащих уравнению $F(z, w)=0$ и имеющих постоянные члены a и b, так как иначе с помощью аналитического преобразования параметра можно было бы получить соответствующие представления для двух различных алгебраических элементов, в которых z рассматривается как функция от w. Из предыдущего результата следует далее, что показатель μ в (1.12) равен кратности корня $w=b$ уравнения $F(a, w)=0$. Заметим еще, что в (1.12) коэффициент $b_1\neq 0$.

1.14. В п. 1.6 мы видели, что для многочлена

$$F(z, w)=w^3-3z^2w+2z^3-z$$

критическими точками, кроме $z=\infty$, являются $z={}^1/_2$, $z=-{}^1/_2$ и $z=0$. Для $z={}^1/_2$ уравнение $F(z, w)=0$ имеет двукратный корень $w=-{}^1/_2$ и простой корень $w=1$, для $z=-{}^1/_2$ оно имеет двукратный корень $w={}^1/_2$ и простой корень $w=-1$, для $z=0$ — трехкратный корень $w=0$. Ни для одной пары z, w многочлен $F_z(z, w)$ не обращается в нуль. Следовательно, для $z={}^1/_2$ существует один (неразветвленный) регулярный элемент и один регулярный алгебраический элемент, для которого $z={}^1/_2$ является точкой разветвления первого порядка; соответствующее утверждение справедливо для $z=-{}^1/_2$. Для $z=0$ существует только один регулярный алгебраический элемент, для которого $z=0$ является точкой разветвления второго порядка.

Исследованием случая, когда для конечных пар значений (a, b) одновременно $F(a, b)=F_w(a, b)=F_z(a, b)=0$, мы здесь зани-

маться не будем, так как нам это не понадобится. Заметим только, что возможен случай, когда такой паре будут соответствовать исключительно однозначные элементы. Так, например, если $F(z, w) \equiv w^2 - z^2 - z^4 = 0$, то паре $z = 0$, $w = 0$, для которой $F(0, 0) = F_w(0, 0) = F_z(0, 0) = 0$, соответствуют два различных регулярных элемента $w = \pm z\sqrt{1+z^2}$ $(|z| < 1)$.

1.15. Точка $w = \infty$. Обратимся теперь к тем конечным критическим точкам $z = a$, для которых выполняется условие $Q_0(a) = 0$. Используя, как в п. 1.5, подстановку $w = 1/u$, получим

$$F(z, w) = \frac{1}{u^m} G(z, u),$$

$$G(z, u) = u^m Q_m(z) + u^{m-1} Q_{m-1}(z) + \ldots + Q_0(z).$$

Пусть теперь $Q_0(a) = 0$. Возможны два случая: $Q_m(a) \neq 0$ и $Q_m(a) = 0$. Начнем с первого. В силу непрерывности полинома $Q_m(z)$, для точки $z = a$ можно указать круговую окрестность, в которой $Q_m(z) \neq 0$, следовательно, и $F(z, 0) \neq 0$. Каждой паре значений (z, w), для которой $F(z, w) = 0$ и z принадлежит указанной окрестности точки a, соответствует тогда взаимно однозначно пара конечных значений (z, u), удовлетворяющая уравнению $G(z, u) = 0$. Тем самым исследование сведено к рассмотрению уравнения $G(z, u) = 0$ и можно применить результаты пп. 1.9 и 1.10: в окрестности $z = a$ для каждого $z \neq a$ существует m регулярных элементов $u_1(z)$, $u_2(z)$, ..., $u_m(z)$, объединяемых в $k \leqslant m$ регулярных однозначных или многозначных алгебраических элементов. Эти элементы обладают представлениями вида

$$z = a + t_i^{\mu_i}, \quad u = \frac{1}{w} = c^{(i)} + c^{(i)}_{\nu_i} t_i^{\nu_i} + \ldots \quad (c^{(i)}_{\nu_i} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, k).$$

Так как каждый корень уравнения $G(a, u)$ является одним из $c^{(i)}$ и $Q_0(a) = 0$, то существует по крайней мере одно $c^{(i)}$, равное нулю. Для такого i величина w обращается в бесконечность при $t_i = 0$; $w(t_i)$ имеет полюс ν_i-го порядка:

$$w = \frac{1}{c^{(i)}_{\nu_i} t_i^{\nu_i}} + b^{(i)}_{\nu_i - 1} t_i^{-\nu_i + 1} + \ldots.$$

Напротив, для всех i, для которых $c^{(i)}$ не равно нулю, функция $w(t_i)$ в точке $t_i = 0$ регулярна:

$$w = \frac{1}{c^{(i)}} + b^{(i)}_{\nu_i} t_i^{\nu_i} + \ldots \quad (b^{(i)}_{\nu_i} \neq 0).$$

Единственное отличие от прежних результатов состоит в том, что для рассматриваемого значения $z=a$, кроме регулярных алгебраических элементов, получаются еще *„дробные алгебраические элементы“*, у которых $w(t_i)$ в точке $t_i=0$ имеет полюс и которые отображают μ_i-листный кусок поверхности с точкой разветвления $z=a$ на ν_i-листный кусок поверхности с точкой разветвления $w=\infty$.

Рассмотрим теперь случай, когда $Q_0(a)=Q_m(a)=0$. Он легко сводится к предыдущему случаю. Многочлен

$$F(a,\ w)=Q_0(a)\,w^m+Q_1(a)\,w^{m-1}+\ldots+Q_m(a)$$

не может тождественно по w обращаться в нуль, ибо иначе было бы $Q_0(a)=Q_1(a)=\ldots=Q_m(a)=0$, следовательно, разность $z-a$ была бы делителем полинома $F(z,\ w)$, что противоречит предположенной неприводимости $F(z,\ w)$. Пусть $w=\beta$ — такое значение w, что $F(a,\ \beta)\neq 0$. Полагая $w=w_1+\beta$ и

$$F(z,\ w)=F_1(z,\ w_1)\equiv\bar{Q}_0(z)\,w_1^m+\bar{Q}_1(z)\,w_1^{m-1}+\ldots+\bar{Q}_m(z),$$

имеем $\bar{Q}_m(a)=F_1(a,\ 0)=F(a,\ \beta)\neq 0$. Следовательно, предыдущие разложения применимы к уравнению $F_1(z,\ w_1)=0$, и для $w=w_1+\beta$ находим в конце концов разложения, которые получаются из рассмотренных выше добавлением постоянной, что, очевидно, не имеет значения для интересующих нас свойств элементов функции.

1.16. Точка $z=\infty$. Случай $z=\infty$ приводится к предыдущим случаям преобразованием $z=1/\xi$. В качестве униформизирующей переменной для элементов функции $w(z)$ следует ввести

$$t=\sqrt[\mu]{\xi};$$

тогда получаются представления вида

$$z=\frac{1}{t^\mu},$$

$$w=b_0+b_\nu t^\nu+\ldots \quad \text{или} \quad w=b_\nu t^{-\nu}+b_{\nu-1}t^{-\nu+1}+\ldots,$$

причем, как правило, $\mu=\nu=1$. Областью G_μ является теперь μ-листный кусок поверхности с точкой разветвления $z=\infty$.

1.17. Заключение. Алгебраическое уравнение $F(z,\ w)=0$ определяет для каждого $z=a$ ($\neq\infty$ или $=\infty$) некоторое число $k\leqslant m$ (регулярных или дробных) алгебраических элементов функции $w(z)$, каждый из которых с помощью локального униформизирующего параметра $t=\sqrt[\mu]{z-a}$ (μ — натуральное число) может быть при достаточно малых $|t|$ представлен сходящимся разложением

$$\left.\begin{aligned} &z-a=t^\mu,\\ &w-b=b_\nu t^\nu+b_{\nu+1}t^{\nu+1}+\ldots\quad (b_\nu\neq 0). \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

При этом, если a или b равно ∞, то $z-a$ и $w-b$ нужно заменить соответственно на $1/z$ и $1/w$[1]). С помощью такого элемента μ-листный кусок римановой поверхности над плоскостью z с точкой разветвления $(\mu-1)$-го порядка в $z=a$ отображается взаимно однозначно на ν-листный кусок римановой поверхности над плоскостью w с точкой разветвления $(\nu-1)$-го порядка в $w=b$. Сумма $\sum_{i=1}^{k}\mu_i$ показателей μ_i, соответствующих $z=a$, всегда равна m. Как правило, $\mu=\nu=1$ и локальное соответствие между плоскостями z и w, осуществляемое алгебраическим элементом, взаимно однозначно. Только для *конечного числа* точек $z=a$ может случиться, что μ, или ν, или оба эти числа больше 1.

Как уже было замечено, все предыдущие рассмотрения можно провести в обратном направлении, считая w независимой переменной. Тогда вместо разложений вида (1.13) получатся аналогичные разложения с униформизирующей переменной $u=\sqrt[\nu]{w-b}$. Их можно и непосредственно получить из (1.13), полагая $w-b=u^{\nu}$. Второе из уравнений (1.13) определяет тогда в окрестности $t=u=0$ однолистную аналитическую функцию $t(u)$. Подставляя $t(u)$ в первое из уравнений (1.13), получаем для $z-a$ разложение в степенной ряд по u, в котором первый не равный нулю член содержит степень u^{μ}.

1.18. Алгебраические элементы. Мы получим вполне симметричное представление алгебраического элемента (1.13), если вместо t введем новую локальную униформизирующую переменную τ с помощью соотношения

$$t=d_1(\tau-c)+d_2(\tau-c)^2+\ldots\quad(d_1\neq 0),$$

устанавливающего взаимно однозначное соответствие между достаточно малой круговой окрестностью точки $t=0$ и некоторой областью, содержащей точку $\tau=c$. В результате такой замены получим из (1.13) сходящееся в окрестности $\tau=c$ представление вида

$$\left.\begin{aligned} z-a&=a_{\mu}(\tau-c)^{\mu}+a_{\mu+1}(\tau-c)^{\mu+1}+\ldots\\ w-b&=b_{\nu}(\tau-c)^{\nu}+b_{\nu+1}(\tau-c)^{\nu+1}+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(a_{\mu}\neq 0,\ b_{\nu}\neq 0).$$

Таким образом, в зависимости от выбора параметра, для одного и того же алгебраического элемента получаются различные представления. Обратно, если два алгебраических элемента, у которых $z-a$

[1]) Если точка a принадлежит области T_g, то m соответствующих регулярных однозначных элементов можно, очевидно, представить в виде (1.13), где $\mu=1$.

и $w-b$ (или же $1/z$, $1/w$) представлены в виде степенных рядов по (τ_1-c_1) и в виде степенных рядов по (τ_2-c_2), причем

$$\tau_1-c_1=d_1(\tau_2-c_2)+d_2(\tau_2-c_2)^2+\dots \quad (d_1\neq 0),$$

где ряд справа сходится в окрестности точки $\tau_2=c_2$, то эти два элемента рассматриваются как один и тот же алгебраический элемент. Следует заметить, что при этом не принимаются во внимание величина и форма окрестностей точек $z=a$ и $w=b$ на соответствующих кусках римановых поверхностей G_μ вокруг $z=a$ и G_ν вокруг $w=b$. Выбор указанных окрестностей каждый раз возможен только для данного параметра. В частности, если два однозначных регулярных или дробных элемента $w(z)$ и $w^*(z)$ определены в концентрических кругах и представляют собой аналитические продолжения друг друга, то их нужно рассматривать как один и тот же алгебраический элемент.

Необходимо еще заметить, что не каждая пара сходящихся степенных рядов для $z-a$ и $w-b$ дает алгебраический элемент. Из представления (1.13) следует, что в некоторой окрестности точки $t=0$ различным t соответствуют различные пары $(z(t), w(t))$. Это свойство сохраняется при допущенных преобразованиях параметра (для некоторой окрестности точки $\tau=c$). Добавляя это свойство, примем следующее *определение алгебраического элемента*:

Пусть z и w определены как функции от τ в некоторой окрестности точки $\tau=c$. Эти функции представляют алгебраический элемент, если выполняются следующие условия:

1. *z и w (или $1/z$, $1/w$) в этой окрестности являются регулярными аналитическими функциями от τ.*

2. *Различным значениям τ указанной окрестности соответствуют различные пары $z(\tau)$, $w(\tau)$.*

Определенный таким образом алгебраический элемент не обязан, конечно, принадлежать некоторому *алгебраическому уравнению.*

1.19. Продолжение алгебраического элемента. В связи с новым определением алгебраических элементов, следует по-новому определить понятие аналитического продолжения. Для этого достаточно рассмотреть непосредственное аналитическое продолжение.

Пусть $z(\tau_1)$, $w(\tau_1)$ и $z(\tau_2)$, $w(\tau_2)$ — два алгебраических элемента, определенные соответственно для $|\tau_1-c_1|<r_1$ и $|\tau_2-c_2|<r_2$. Представленные указанным выше образом элементы будем называть непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, если для некоторой точки τ_1^* круга $|\tau_1-c_1|<r_1$ можно указать целиком расположенную в этом круге окрестность, которая с помощью однозначной аналитической функции $\tau_2(\tau_1)$ отображается взаимно однозначно в круг $|\tau_2-c_2|<r_2$ так, что

$$z(\tau_1)=z(\tau_2(\tau_1)), \quad w(\tau_1)=w(\tau_2(\tau_1)).$$

Такое непосредственное аналитическое продолжение можно себе представить выполненным путем

1) преобразования степенных рядов относительно $(\tau_1 - c_1)$ для z и w в степенные ряды относительно $(\tau_1 - \tau_1^*)$;

2) перехода к параметру τ_2;

3) преобразования полученных для z и w степенных рядов в степенные ряды относительно $(\tau_2 - c_2)$.

В том случае, когда у обоих элементов сама переменная z используется в качестве параметра, данное здесь определение непосредственного аналитического продолжения равносильно прежнему (п. 1.7, А). Кроме того, теперь могут быть аналитически продолжены и многозначные алгебраические элементы. Из (1.13) видно, что алгебраические элементы, принадлежащие уравнению $F(z, w) = 0$, могут быть получены непосредственным аналитическим продолжением из однозначных регулярных элементов.

Два алгебраических элемента, представленные соответственно с помощью параметров τ_1 и τ_2 и являющиеся в этих представлениях непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, не обязательно остаются такими продолжениями при переходе к другим параметрическим представлениям. Однако они остаются все же аналитическими продолжениями друг друга. Поэтому утверждение, что два алгебраических элемента получаются друг из друга с помощью аналитического продолжения, непосредственного или нет, не зависит от выбора используемых параметров.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ЭЛЕМЕНТАМ

1.20. Алгебраическая функция как аналитический образ. После того как мы рассмотрели алгебраические элементы, принадлежащие уравнению

$$F(z, w) = 0,$$

мы переходим к вопросу о соединении этих элементов в аналитическую функцию, *аналитический функциональный образ*[1]). Под аналитическим функциональным образом понимают множество алгебраических элементов, обладающее следующими свойствами:

1°. Если некоторый алгебраический элемент принадлежит этому множеству, то ему принадлежат и все алгебраические элементы, являющиеся аналитическими продолжениями данного элемента.

2°. Всякие два элемента множества могут быть получены друг из друга аналитическим продолжением.

[1]) К общему понятию аналитического образа мы еще вернемся в гл. III.

Нам нужно, следовательно, показать, что множество алгебраических элементов, принадлежащих неприводимому уравнению $F(z, w) = 0$, удовлетворяет этим двум условиям. Первое из них выводится непосредственно из пп. 1.8 и 1.9. Алгебраический элемент, получаемый аналитическим продолжением из элемента, принадлежащего уравнению $F(z, w) = 0$, также принадлежит этому уравнению. Остается доказать второе свойство.

С этой целью рассмотрим введенную в п. 1.6 область T_z, дополнение к которой состоит из конечного числа критических точек $z = a$. Как следует из рассмотрений § 1, каждый принадлежащий уравнению $F(z, w) = 0$ алгебраический элемент, соответствующий такой критической точке $z = a$, может быть получен непосредственным аналитическим продолжением из регулярного элемента, принадлежащего уравнению $F(z, w) = 0$ и соответствующего точке z_0 области T_z. Поэтому достаточно показать, что всякие два элемента, принадлежащие $F(z, w) = 0$ и соответствующие точкам из T_z, могут быть получены друг из друга аналитическим продолжением в T_z. Этим будет доказано, что и всякие два элемента, принадлежащие $F(z, w) = 0$, связаны друг с другом аналитическим продолжением. Ограничение областью T_z имеет то преимущество, что в качестве параметра в ней всюду можно использовать z.

1.21. Элементы, лежащие над T_z. Наше утверждение, что всякие два элемента, принадлежащие уравнению $F(z, w) = 0$ и соответствующие точкам из T_z, можно получить друг из друга аналитическим продолжением в T_z, может быть еще упрощено. Пусть z_0 — произвольная, но в дальнейшем фиксированная точка области T_z. По теореме 2 § 1, в некоторой окрестности C точки z_0 существует ровно m различных элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$, принадлежащих $F(z, w) = 0$. Сделанное выше утверждение означает, в частности, что каждый из этих элементов может быть получен из $w_1(z)$ аналитическим продолжением в T_z. Если последнее верно, то и наше утверждение верно. В самом деле, если z_1 и z_2 — две произвольные точки области T_z, а $w^{(1)}(z)$ и $w^{(2)}(z)$ — элементы, принадлежащие $F(z, w) = 0$ и соответствующие этим точкам, то z_1 можно соединить с z_0 путем c_1, лежащим в T_z, и $w^{(1)}(z)$ можно (по теореме 3 § 1) аналитически продолжить по этому пути. При этом мы получим элемент, принадлежащий $F(z, w) = 0$, следовательно, совпадающий (с точностью до непосредственного аналитического продолжения) с одним из элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$, скажем с $w_i(z)$. Аналогично, можно z_2 соединить с z_0 путем c_2, лежащим в T_z, и при аналитическом продолжении $w^{(2)}(z)$ вдоль c_2 мы получим один из элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$, скажем $w_k(z)$. Если теперь $w_i(z)$ может быть получен из $w_1(z)$ аналитическим продолжением вдоль пути c_i, лежащего в T_z, и $w_k(z)$ может быть получен из $w_1(z)$ аналитическим продолжением вдоль пути c_k, лежащего в T_z, то $w^{(3)}(z)$

получается аналитическим продолжением $w^{(1)}(z)$ вдоль пути $c_1 c_i^{-1} c_k c_2^{-1}$, целиком лежащего в T_z [1]).

Таким образом, остается только показать, что элементы $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ могут быть получены из $w_1(z)$ аналитическим продолжением в T_z.

1.22. По теореме 3 § 1, элемент $w_1(z)$ может быть аналитически продолжен вдоль любого замкнутого пути, который начинается в z_0 и лежит в T_z. При аналитическом продолжении элемента $w_1(z)$ вдоль такого пути в качестве конечного элемента получится один из элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$ (с точностью до непосредственного аналитического продолжения). При аналитическом продолжении элемента $w_1(z)$ вдоль всевозможных таких путей в качестве конечных элементов получатся некоторые из элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_m(z)$, скажем

$$w_1(z),\ w_2(z),\ \ldots,\ w_\nu(z) \quad (\nu \leqslant m).$$

Наше утверждение состоит в том, что $\nu = m$. Мы увидим, что допущение $\nu < m$ ведет к противоречию с предположенной неприводимостью многочлена $F(z, w)$.

Образуем из $w_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ элементарные симметрические функции

$$\left.\begin{aligned} s_1(z) &= -(w_1(z) + w_2(z) + \ldots + w_\nu(z)), \\ s_2(z) &= w_1(z)w_2(z) + w_1(z)w_3(z) + \ldots + w_{\nu-1}(z)w_\nu(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_\nu(z) &= (-1)^\nu w_1(z)w_2(z)\ldots w_\nu(z). \end{aligned}\right\} \quad (1.14)$$

Каждая из функций $s_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ определена в окрестности C точки z_0 и, по теореме 3 § 1, неограниченно аналитически продолжаема в T_z [2]). Если мы $s_i(z)$ аналитически продолжим вдоль любого замкнутого пути c, начинающегося в z_0 и лежащего в T_z, то мы вернемся к исходному элементу $s_i(z)$. В самом деле, различные элементы $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_\nu(z)$ при аналитическом продолжении вдоль c приводят к различным конечным элементам и каждый из этих конечных элементов должен совпадать с одним из элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_\nu(z)$, так как, очевидно, такой элемент также может быть получен из $w_1(z)$ аналитическим продолжением вдоль замкнутого пути, пробегающего в T_z. Отсюда и из симметрии $s_i(z)$

---

[1]) Если a — направленный (ориентированный) путь, то a^{-1} означает противоположно направленный путь. Если конец пути a является началом пути b, то ab означает путь, который получается, если сначала пробегать путь a, а затем путь b.

[2]) Аналитическое продолжение суммы элементов равно сумме аналитических продолжений слагаемых (если эти продолжения существуют). Аналогичное утверждение справедливо для произведения.

относительно $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_\nu(z)$ следует, что аналитическое продолжение $s_i(z)$ вдоль c приводит к конечному элементу $s_i(z)$.

Так как c — произвольный замкнутый путь, начинающийся в z_0 и принадлежащий T_z, то из предыдущего следует, что при неограниченном аналитическом продолжении $s_i(z)$ в T_z получается однозначная функция. В самом деле, имеет место следующая общая теорема.

1.23. Пусть T — область z-плоскости и $f(z)$ — регулярный элемент, определенный в окрестности точки z_0 области T. Пусть элемент $f(z)$ в T неограниченно аналитически продолжаем и при аналитическом его продолжении вдоль каждого замкнутого пути, начинающегося в z_0 и лежащего в T, в качестве конечного элемента снова получается $f(z)$ (с точностью до непосредственного аналитического продолжения). Тогда аналитическое продолжение элемента $f(z)$ в T приводит к однозначной аналитической функции.

Действительно, рассмотрим произвольную точку z_1 из T и два различных лежащих в T пути c_1 и c_2, начинающихся в z_0 и оканчивающихся в z_1. Пусть при аналитическом продолжении элемента $f(z)$ вдоль c_1 и c_2 в качестве конечных элементов в z_1 получаются элементы $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Если $f_2(z)$ аналитически продолжить вдоль c_1^{-1}, то это равносильно аналитическому продолжению $f(z)$ вдоль замкнутого пути $c_2c_1^{-1}$. Но отсюда вытекает, что $f_2(z)$ можно также получить из $f(z)$ аналитическим продолжением вдоль c_1. Так как при аналитическом продолжении вдоль некоторого пути конечный элемент однозначно определяется начальным, то из предыдущего следует, что $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, и тем самым утверждение теоремы доказано.

1.24. Критические граничные точки. Таким образом, доказано, что аналитическое продолжение $s_1(z)$, $s_2(z)$, ..., $s_\nu(z)$ в T_z приводит к однозначным аналитическим функциям, которые мы будем обозначать теми же буквами. Эти функции регулярны в T_z, поскольку аналитические продолжения элементов $w_1(z)$, $w_2(z)$, ..., $w_\nu(z)$ в T_z регулярны, как было замечено в конце п. 1.8. Остается еще исследовать поведение функций $s_i(z)$ в граничных точках области T_z; это критические точки $z=a$, число которых конечно.

Так как функция $s_i(z)$ в T_z однозначна и регулярна, то для $s_i(z)$ указанные точки являются либо существенно особыми, либо полюсами, либо точками регулярности. Существенные особенности не могут иметь места. В самом деле, если рассмотреть аналитическое продолжение $w_i(z)$ ($i=1, 2, \ldots, \nu$) в достаточно малой окрестности критической точки $z=a$, то оно либо остается ограниченным (если $Q_0(a)\neq 0$, $a\neq\infty$; см. п. 1.9), либо станет ограниченным после умножения на достаточно высокую степень $z-a$ ($a\neq\infty$, $Q_0(a)=0$; см. п. 1.15) или $1/z$ (если $a=\infty$; см. п. 1.16). Отсюда и из равенств (1.14)

аналогичное заключение можно сделать для $s_i(z)$. Поэтому однозначные функции $s_i(z)$ $(i=1, 2, \ldots, \nu)$ в точках $z=a$ либо регулярны, либо имеют полюсы. Это справедливо и для $z=\infty$. Следовательно, по известной элементарной теоретико-функциональной теореме, $s_i(z)$ являются *рациональными* функциями от z. Мы можем написать

$$s_i(z)=\frac{p_i(z)}{p_0(z)} \quad (i=1, 2, \ldots, \nu), \tag{1.15}$$

где $p_0(z)$, $p_1(z)$, $\ldots$, $p_\nu(z)$ — многочлены с наибольшим общим делителем 1, следовательно, без общих нулей.

1.25. Алгебраическое уравнение $F_1=0$. В окрестности C точки z_0 образуем теперь произведение

$$(w-w_1(z))\ldots(w-w_\nu(z))=w^\nu+s_1(z)\,w^{\nu-1}+\ldots+s_\nu(z)=$$

$$=\frac{p_0(z)\,w^\nu+p_1(z)\,w^{\nu-1}+\ldots+p_\nu(z)}{p_0(z)}=\frac{F_1(z, w)}{p_0(z)}; \tag{1.16}$$

при этом мы используем равенства (1.14) и (1.15). Очевидно, что $F_1(z, w)$ является многочленом относительно z и w степени ν по w.

Элементы $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\ldots$, $w_\nu(z)$ принадлежат алгебраическому уравнению $F_1(z, w)=0$, так как, в силу (1.16), $F_1(z, w_i(z))=0$ для каждого $i=1, 2, \ldots, \nu$ и каждой точки z из C.

1.26. Связь между F и F_1. Таким образом, мы нашли, что элементы $w_1(z)$, $w_2(z)$, $\ldots$, $w_\nu(z)$ удовлетворяют одновременно алгебраическим уравнениям $F(z, w)=0$ и $F_1(z, w)=0$. Используя неприводимость $F(z, w)$, мы покажем, что $F(z, w)$ и $F_1(z, w)$ отличаются только на постоянный множитель, откуда, в частности, следует, что $\nu=m$.

Аналогично п. 1.4, будем рассматривать $F(z, w)$ и $F_1(z, w)$ как многочлены относительно w и применим к ним алгорифм Евклида. Этот алгорифм не может привести к остатку, не зависящему от w, ибо иначе, как в п. 1.4, можно было бы заключить, что существует лишь конечное число пар $z=a$, $w=b$, для которых $F(a, b)=0$, $F_1(a, b)=0$, в то время как существует бесконечно много таких пар, поскольку элемент $w_1(z)$ принадлежит как $F(z, w)=0$, так и $F_1(z, w)=0$. Следовательно, $F(z, w)$ и $F_1(z, w)$, как многочлены относительно w, должны иметь общий делитель, являющийся многочленом относительно w с рациональными коэффициентами от z. Степень этого делителя по w не может быть меньше m, ибо иначе, как в п. 1.4, получилось бы противоречие с неприводимостью $F(z, w)$. С другой стороны, степень делителя по w не может быть больше ν, откуда, поскольку $\nu \leqslant m$, следует, что $\nu=m$. Далее, деление $F(z, w)$ на $F_1(z, w)$ приводит к рациональной функции от z. Ее можно сразу же указать путем сравнения коэффициентов при w^m в $F(z, w)$ и

$F_1(z, w)$:

$$\frac{Q_0(z)}{p_0(z)}.$$

Из тождества

$$p_0(z)F(z, w) \equiv Q_0(z)F_1(z, w)$$

следует еще, что $p_0(z) = cQ_0(z)$, где c — постоянная. В самом деле, для каждого нуля многочлена $p_0(z)$ левая часть тождественно по w равна нулю, функция же $F_1(z, w)$ — нет, так как многочлены $p_0(z)$, $p_1(z)$, ..., $p_\nu(z)$, являющиеся, согласно (1.16), коэффициентами при степенях w в полиноме $F_1(z, w)$, не должны иметь общих нулей. Следовательно, каждый нуль $p_0(z)$ является нулем и $Q_0(z)$. Обратное утверждение вытекает аналогично из неприводимости $F(z, w)$. Следовательно, $p_0(z)$ и $Q_0(z)$ отличаются только на постоянный множитель.

Результатом $\nu = m$ завершается доказательство того, что алгебраические элементы, принадлежащие неприводимому алгебраическому уравнению $F(z, w) = 0$, представляют аналитический образ. Это алгебраическая функция $w(z)$, определяемая уравнением $F(z, w) = 0$. Попутно доказано, что если элемент функции удовлетворяет одновременно двум неприводимым алгебраическим уравнениям $F(z, w) = 0$ и $F_1(z, w) = 0$, то $F(z, w)$ и $F_1(z, w)$ отличаются только на постоянный множитель.

1.27. Функции, определяемые приводимыми уравнениями. Мы можем теперь рассмотреть и случай, когда $F(z, w)$ — приводимый многочлен относительно z и w. Такой многочлен допускает разложение

$$F(z, w) = Q(z)P(w)F_1(z, w)^{\alpha_1} \ldots F_k(z, w)^{\alpha_k}, \qquad (1.17)$$

где $Q(z)$ и $P(w)$ — многочлены только относительно z, соответственно w, $F_1(z, w)$, ..., $F_k(z, w)$ — неприводимые многочлены относительно z и w и α_1, ..., α_k — натуральные числа. При этом предполагается, что $F_1(z, w)$, ..., $F_k(z, w)$ различны, т. е. что никакие два из них не получаются друг из друга умножением на постоянную. По известной теореме алгебры, разложение (1.17) многочлена $F(z, w)$ определяется однозначно с точностью до постоянных множителей в членах разложения.

Алгебраический элемент (не постоянный), удовлетворяющий уравнению $F(z, w) = 0$, удовлетворяет уже некоторому уравнению $F_i(z, w) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. В самом деле, если в (1.17) подставить вместо z и w этот элемент, то по крайней мере один множитель справа должен равняться нулю для бесконечного числа пар значений (z, w) этого элемента, а следовательно, в силу аналитичности, этот множитель должен равняться нулю тождественно. Из п. 1.26 следует, что это может иметь место только для одного из

неприводимых множителей. Следовательно, все (не постоянные) алгебраические элементы, удовлетворяющие уравнению $F(z, w) = 0$, получаются приравниванием нулю неприводимых множителей $F_1(z, w)$, $F_2(z, w)$, ..., $F_k(z, w)$. Приравнивание нулю такого множителя дает алгебраическую функцию. При этом алгебраические функции, принадлежащие различным множителям, ничем не связаны друг с другом: они не могут быть получены друг из друга аналитическим продолжением, так как иначе существовал бы элемент, принадлежащий одновременно различным множителям.

Каждый линейный множитель многочлена $P(w)$ можно рассматривать как постоянную функцию $w(z)$, и аналогично каждый линейный множитель полинома $Q(z)$ — как постоянную функцию $z(w)$. Таким образом, приводимое алгебраическое уравнение определяет одновременно многие алгебраические, в частности постоянные функции, ничем не связанные друг с другом. Каждой алгебраической функции, определяемой неприводимым множителем, приписывают еще кратность, равную показателю, с которым этот множитель входит в (1.17); это же касается линейных множителей многочленов $Q(z)$ и $P(w)$.

1.28. Алгебраические образы. Аналитический образ, элементы которого удовлетворяют алгебраическому уравнению, называется *алгебраическим образом* (или алгебраической функцией). Если такое уравнение приводимо, то элементы алгебраического образа обращают в нуль уже один неприводимый множитель. В самом деле, согласно п. 1.27, каждый элемент обращает в нуль такой множитель и все элементы должны соответствовать одному и тому же множителю, так как иначе свойство взаимосвязи элементов образа (свойство 2° из п. 1.20) было бы нарушено. Следовательно, элементы алгебраического образа всегда удовлетворяют неприводимому уравнению, которое, согласно п. 1.26, определяется однозначно с точностью до постоянного множителя. Многочлен, стоящий в левой части этого уравнения, является делителем многочлена, стоящего в левой части любого уравнения, которому удовлетворяют элементы образа.

До сих пор мы исходили из одного (неприводимого) алгебраического уравнения и строили принадлежащий ему аналитический образ. Возникает обратный вопрос: какими свойствами должен обладать аналитический образ, чтобы его элементы удовлетворяли алгебраическому уравнению?

Из того, что до сих пор было сказано, вытекает, что во всяком случае необходимы следующие свойства:

1°. Каждый алгебраический элемент образа неограниченно аналитически продолжаем, с характером регулярного или дробного алгебраического элемента, над всей замкнутой плоскостью z (включая $z = \infty$).

2°. Число различных элементов, соответствующих произвольной фиксированной точке z_0, конечно.

Так как элементы аналитического образа связаны между собой аналитическим продолжением, то свойство 1° достаточно потребовать только для одного элемента. Затем, в силу свойства 1°, достаточно свойство 2° потребовать только для одной определенной точки; оно будет тогда выполняться для всех точек. В самом деле, из представления алгебраического элемента с помощью уравнений (1.10) непосредственно видно, что для каждой точки $z = a$, которой соответствует многозначный относительно z алгебраический элемент, существует окрестность, в которой непосредственные аналитические продолжения этого элемента однозначны и регулярны. Каждой отличной от a точке этой окрестности отвечает лишь конечное число элементов, являющихся непосредственными аналитическими продолжениями рассматриваемого многозначного элемента. То же самое справедливо, очевидно, и для однозначных элементов. Пусть теперь $z = z^*$—точка, которой соответствует лишь конечное число элементов. Она обладает окрестностью, накрываемой каждым отвечающим ей элементом, и каждой точке этой окрестности, отличной от z^*, соответствует конечное число элементов, являющихся непосредственными аналитическими продолжениями одного из элементов, принадлежащих z^*. Эти непосредственные аналитические продолжения все однозначны и регулярны, и они содержат *все* элементы, соответствующие такой точке окрестности точки z^*. Действительно, если бы существовал еще один элемент, то, в силу свойства 1°, он был бы аналитически продолжаем в соответствующей окрестности z^* и приводил бы еще к одному элементу, отвечающему z^*. Поэтому число элементов, соответствующих отличной от z^* точке окрестности z^*, однозначно определяется числом отвечающих z^* элементов и порядками их разветвления.

Из предыдущего следует, что множество точек, которым соответствует конечное число элементов, открыто. Далее, в этом открытом множестве точки, которым соответствуют разветвленные относительно z элементы, не могут иметь точек сгущения[1]).

Рассмотрим компоненту связности этого открытого множества и в ней две произвольные точки, которым соответствуют только однозначные регулярные элементы. Их можно соединить в нашей компоненте связности путем, точкам которого отвечают лишь однозначные элементы. Отсюда, в силу свойства 1°, следует, что каждой такой точке соответствует одинаковое число элементов. Допустим теперь, что эта компонента связности имеет граничные точки. Такой граничной точке должно было бы соответствовать бесконечно много элементов. В каждой ее окрестности существовали бы точки, которым соответствуют

---

[1]) Из рассуждений, проведенных для z^*, *непосредственно* следует, что точка z, которой соответствует лишь конечное число многозначных алгебраических элементов, не может быть точкой сгущения центров таких элементов. Дальше, однако, показывается, что вообще число многозначных элементов лишь конечно. — *Прим. перев.*

только однозначные элементы, причем число этих элементов не зависело бы от рассматриваемой точки окрестности. В то же время можно было бы указать окрестность граничной точки, в которой определено большее число соответствующих ей элементов, что ведет к противоречию.

Из доказанного следует, что открытое множество точек, которым соответствует только конечное число элементов, не имеет граничных точек. Так как это множество, в силу свойства 2°, не пусто, то оно должно совпадать с замкнутой z-плоскостью (включающей $z = \infty$). Это и следовало доказать[1]).

Одновременно доказано, что те точки, которым соответствуют многозначные относительно z элементы, не имеют точек сгущения. Следовательно, таких точек имеется только конечное число. Из предыдущего вытекает далее, что точки, которым соответствуют дробные элементы, также не имеют точек сгущения. Их число тоже конечно.

Теперь мы можем показать, что указанные выше условия являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы аналитический образ был алгебраическим. В самом деле, если мы исключим из плоскости z конечное множество точек, которым соответствуют разветвленные или дробные элементы, то для полученной области мы сможем повторить те же рассуждения, что и выше в пп. 1.3—1.6. Приведенный там метод изучения граничных точек области сохраняется, ибо каждый элемент, соответствующий точке области, аналитически продолжаем в граничные точки с регулярным или дробным алгебраическим характером. Таким образом, видно, что по крайней мере часть элементов аналитического образа удовлетворяет алгебраическому уравнению[2]). В силу связи, даваемой аналитическим продолжением, это справедливо для всех элементов образа. Таким образом, *указанные выше условия* 1° *и* 2° *необходимы и достаточны для того, чтобы аналитический образ был алгебраическим.*

1.29. Римановы поверхности $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$. Предыдущее исследование дало нам полное представление как о поведении отдельного алгебраического элемента, принадлежащего уравнению $F(z, w) = 0$, так и о том, каким образом совокупность этих элементов можно объединить в одну алгебраическую функцию $w = w(z)$ или $z = z(w)$. Эти две обратные друг другу алгебраические функции многозначны, если степени m и n соответственно по переменным w и z больше 1; функция $w = w(z)$ имеет m, а обратная функция $z = z(w)$ n различных ветвей, переходящих друг в друга в окрестностях точек разветвления.

---

[1]) Этот и предыдущий абзац в переводе несколько уточнены. — *Прим. перев.*

[2]) Это следует хотя бы из приведенных выше, в п. 1.22 и дальше, рассуждений об элементарных симметрических функциях. — *Прим. перев.*

Именно в связи со своими фундаментальными исследованиями по теории алгебраических функций и их интегралов Риман развил общую идею превращения многозначной функции $w = w(z)$ в однозначную путем рассмотрения в качестве носителя ее значений w не комплексной плоскости z, а построенной определенным образом над ней многолистной поверхности, листы которой взаимно однозначно соответствуют ветвям функции. Эта идея Римана явилась поворотным пунктом для всего дальнейшего развития теории функций.

Предыдущие рассмотрения содержат все необходимое для построения над плоскостью z римановой поверхности $\tilde{R}_z$, на которой алгебраическая функция $w = w(z)$ однозначна. Соответственно m ветвям функции, $\tilde{R}_z$ состоит из m различных листов; рассуждения в пп. 1.20—1.26 указывают путь к тому, как соединить эти листы в связную поверхность $\tilde{R}_z$. m листов этой поверхности лежат всюду раздельно, исключая граничные точки области T_z, над которыми лежат (имеющиеся в конечном числе) точки разветвления $\tilde{R}_z$[1]).

Аналогичное справедливо для обратной функции $z = z(w)$. Носителями n ветвей этой многозначной функции являются n листов римановой поверхности $\tilde{R}_w$, расположенной над плоскостью w.

1.30. Конформная эквивалентность $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$. Алгебраическое уравнение $F(z, w) = 0$ и эквивалентные явные соотношения $w = w(z)$ и $z = z(w)$ осуществляют *взаимно однозначное и конформное*[2]) отображение соответствующих римановых поверхностей $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$ друг на друга; поэтому такие две поверхности называются *конформно эквивалентными*.

Таким образом, рассмотрение частного случая алгебраической функции естественным образом ведет к основному вопросу теории конформных отображений — вопросу о конформной эквивалентности двух данных римановых поверхностей.

Две конформно эквивалентные римановы поверхности неразличимы с точки зрения понятий, являющихся *конформно инвариантными*, т. е. сохраняющихся при взаимно однозначных и конформных отображениях, почему их обычно, по Риману, „отождествляют", включая в один и тот же *конформный класс*, состоящий из

---

[1]) Точки разветвления $\tilde{R}_z$ соответствуют многозначным алгебраическим элементам $w(z)$. — *Прим. перев.*

[2]) На первый взгляд кажется, что конформность этого отображения нарушается в точках разветвления поверхности. Следует, однако, заметить, что понятие конформности (измерение углов) в этих точках определяется не по отношению к переменным z и w, а по отношению к локальной униформизирующей t; на этом более подробно мы еще остановимся в дальнейшем.

всех конформно эквивалентных римановых поверхностей; на отдельные поверхности класса следует тогда смотреть как на интерпретации или как на конкретные реализации определяемой классом абстрактной римановой поверхности R. В частности, сказанное относится к поверхностям $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$, соответствующим алгебраическому уравнению $F(z, w) = 0$.

1.31. Поверхности $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$ как поверхности наложения. При развитой выше общей точке зрения, по которой поверхности $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$ представляют одну и ту же абстрактную риманову поверхность R, побочным является то обстоятельство, что эти поверхности даны как *многолистные поверхности наложения* соответственно z-плоскости и w-плоскости; этим устанавливается отношение каждой из них к *другой* римановой поверхности, а именно, к замкнутой z-плоскости, соответственно w-плоскости. Но это приводит нас к новому важному моменту, также имеющему важное значение для общей теории поверхностей, а именно к отношению между двумя поверхностями, определяющему одну из них как поверхность наложения другой — основной поверхности.

1.32. Программа дальнейшего исследования. Все эти геометрические взаимосвязи можно дальше изучать, рассматривая специальные вопросы, относящиеся к алгебраическим или аналитическим образам. Однако такое исследование вскоре приводит к проблемам, истинное значение которых лишь тогда выступает со всей ясностью, когда теория римановых поверхностей развивается как самостоятельная геометрическая дисциплина, сначала совершенно независимо от проблем теории алгебраических или аналитических функций; последние можно тогда рассматривать как отдельные приложения общей геометрической теории.

Поэтому вначале наша задача будет состоять в том, чтобы определить и изучить основные понятия конформной теории поверхностей независимо от теории аналитических функций; это будет сделано в следующей главе.

1.33. Униформизация. В настоящей главе мы видели, как можно *локально* униформизировать алгебраический, или, более общо, аналитический образ (z, w) с помощью однозначного локального аналитического представления

$$z = z(t), \quad w = w(t) \tag{1.18}$$

каждого элемента (z, w). Общая проблема униформизации состоит в том, чтобы определить такое однозначное аналитическое представление *в целом*: нужно найти такие две однозначные аналитические функ-

ции (1.18) в некоторой области G_t комплексной t-плоскости, чтобы пары значений (z, w) давали все элементы образа.

Фундаментальные исследования Шварца, Пуанкаре и Клейна установили связь между этой проблемой и намеченными выше основными вопросами теории конформных отображений. Так был указан путь к решению общей проблемы униформизации. Таким образом, теория униформизации предстает в виде особой области приложения фундаментальных вопросов теории конформных отображений, которые в дальнейших главах будут подвергнуты обстоятельному изучению.

Глава II

ПОНЯТИЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО, МНОГООБРАЗИЕ, РИМАНОВА ПОВЕРХНОСТЬ

2.1. Комплексная плоскость. Уже в началах теории функций приходится, наряду с открытой числовой плоскостью $z \neq \infty$, рассматривать замкнутую комплексную плоскость (числовую сферу), получаемую присоединением бесконечно удаленной точки $z = \infty$; это понятие широко было использовано в первой главе. Открытая и замкнутая плоскости являются простыми примерами общего понятия *топологического пространства*, и мы хотим сначала напомнить некоторые существенные для этого понятия свойства плоскости.

Множество точек (z) замкнутой плоскости называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой $a \neq \infty$ оно содержит одновременно круг $|z-a| < r (r > 0)$ и вместе с точкой $a = \infty$ — внешность круга $0 < r < |z| \leqslant \infty$. Соединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть снова открытое множество.

Окрестностью точки $z = a$ называется всякое открытое множество U, содержащее эту точку. Следовательно, соединение любого числа и пересечение конечного числа окрестностей некоторой точки снова являются окрестностями этой точки.

2.2. Римановы поверхности $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$. Аналогичное построение возможно для рассмотренной в первой главе римановой поверхности $\tilde{R}_z$, на которой алгебраическая функция $w = w(z)$, определяемая уравнением $F(z, w) = 0$, однозначна.

Согласно результатам гл. I, каждой точке $z = a$ ($\neq \infty$ или $= \infty$) комплексной z-плоскости можно поставить в соответствие такое число $r = r_a$ $(0 < r < \infty)$, что элементы $w_\nu(z, a)$ $(\nu = 1, \ldots, \mu \leqslant m)$ алгебраической функции $w(z)$, дающие совокупность решений уравнения $F(z, w) = 0$ в окрестности точки $z = a$, допускают для $|z-a| < r$ (соответственно для $|z| > 1/r$, если $a = \infty$) сходящееся представление

$$w_\nu(z, a) = c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} t + \ldots \quad (\nu = 1, \ldots, \mu),$$

где t означает локальную униформизирующую $t = \sqrt[\mu_\nu]{z-a}$ (соответственно z^{-1/μ_ν}) и $\sum_\nu \mu_\nu = m$. Если $w_\nu(a, a) = \infty$, то w_ν нужно заменить на $1/w_\nu$.

Элементы $w_\nu(z, a)$ принимают за „точки“ „поверхности“ $\tilde{R}_z$. При этом два различных элемента рассматриваются как различные „точки“. Точка z называется проекцией „точки“ $P(=w_\nu(z, a))$. В качестве „круговой окрестности“ K „точки“ P_0 принимают любое множество (P) элементов, обладающее следующими свойствами:

1. Проекции z точек P из K заполняют открытый круг $|z-a|<\rho$ (соответственно $|z|>\rho$).

2. Точки из (P) получаются из точки P_0 непосредственным аналитическим продолжением [1]).

Если теперь под открытым множеством на $\tilde{R}_z$ понимать такое подмножество в $\tilde{R}_z$, которое вместе с каждой своей точкой содержит также целую круговую ее окрестность, то соединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств будет снова открытым.

В качестве окрестности точки $P_0 \in R_z$ принимают каждое открытое множество, содержащее эту точку.

Аналогичное построение можно, вообще говоря, провести для любой поверхности $\tilde{R}_z$, на которой произвольно заданная (не обязательно алгебраическая) *аналитическая* функция $w(z)$ однозначна. При этом, если для некоторой точки $z=a$ число лежащих над ней элементов бесконечно велико, то в общем случае нельзя обойтись фиксированным значением $r=r_a$ для всех элементов над a и его подбирают для каждого элемента в отдельности.

2.3. Топологические пространства [2]). После этих предварительных рассмотрений мы переходим к общему понятию топологического пространства.

Пусть дано произвольное множество R элементов P; множество R мы называем „пространством“, элементы P — „точками“ пространства R. Множество R становится *топологическим пространством* после выделения в нем определенных подмножеств точек, называемых *открытыми множествами*, для которых принимается следующая аксиома:

A. Соединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть снова открытое множество.

Из соображений единства и возможности кратких формулировок постулируется, что все пространство R и пустое множество являются открытыми; это не нарушает справедливости аксиомы A.

Окрестность $U(P)$ точки P определяют как произвольное открытое множество точек, содержащее точку P. Каждая точка P имеет,

---

[1]) Предполагается еще, что множество (P) исчерпывает *все* непосредственные аналитические продолжения P_0 над кругом $|z-a|<\rho$ (это замечание существенно, если $w_\nu(z)$ — многозначный элемент). — *Прим. перев.*

[2]) О топологических пространствах см. П. С. Александров [2**], гл. VI, VII. — *Прим. перев.*

следовательно, по крайней мере одну окрестность, а именно все пространство R. Окрестности точки обладают, очевидно, следующими свойствами:

A_1. Каждая точка содержится во всех своих окрестностях.

A_2. Пересечение двух окрестностей некоторой точки снова является окрестностью этой точки.

A_3. Каждая точка Q окрестности U точки P имеет окрестность, содержащуюся в U.

Открытые множества можно охарактеризовать тем, что вместе с каждой своей точкой они содержат окрестность этой точки [1]).

Комплексная плоскость и римановы поверхности $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$ являются топологическими пространствами, правда, весьма частного вида. Насколько широким является понятие топологического пространства, видно уже из следующего замечания: каждое множество R становится топологическим пространством, если все его подмножества считать открытыми, а также если открытыми множествами считать только само R и пустое множество.

2.4. Метрические пространства. Под *метрическим пространством* понимают множество R точек (оно может еще не иметь никакой топологии), в котором всяким двум точкам P и Q поставлено в соответствие „расстояние“, т. е. число $\overline{PQ}$, обладающее следующими свойствами:

1. Всегда $\overline{PQ} \geqslant 0$, причем $\overline{PQ} = 0$ тогда и только тогда, когда $P = Q$.

2. $\overline{PQ} = \overline{QP}$.

3. Для всяких трех точек O, P, Q выполняется неравенство треугольника

$$\overline{OQ} \leqslant \overline{OP} + \overline{PQ}.$$

Под *r-кругом* ($r > 0$) с центром в точке P_0 понимают совокупность всех точек P из R, которые удовлетворяют неравенству $\overline{PP_0} < r$.

В метрическом пространстве можно ввести топологию, назвав множество открытым, если оно вместе с каждой своей точкой содержит также r-круг (при достаточно малом r). При таком определении аксиома A выполняется.

[1]) Хаусдорф [1*], следуя за Вейлем [1*], определяет топологическое пространство не путем выделения открытых множеств, а путем выделения окрестностей точек; при этом свойства A_1, A_2, A_3 принимаются в качестве аксиом (A_2, однако, с тем изменением, что пересечение двух окрестностей только *содержит* окрестность); к ним присоединяется еще „аксиома отделимости“, которую мы введем позднее. Открытые множества характеризуются тем, что вместе с каждой своей точкой они содержат ее окрестность; они обладают тогда свойством A. Для наших целей данное в тексте определение топологического пространства является, однако, более удобным.

Если в метрическом пространстве R задана некоторая топология, то топология, определяемая метрикой, вообще говоря, не совпадает с первоначальной. Необходимым и достаточным условием эквивалентности обеих топологий является следующее требование:

Каждое открытое множество (в смысле первоначальной топологии) должно вместе с каждой своей точкой содержать некоторый круг, и наоборот, если множество обладает этим свойством, то оно открыто.

Возникает вопрос, можно ли „метризовать" произвольное топологическое пространство, т. е. ввести в нем такую метрику, которая определяла бы заданную топологию. В общем случае это не так; однако, как мы увидим позднее (гл. IV), это возможно для римановых поверхностей.

2.5. Индуцированная топология. Пусть снова дано топологическое пространство R. Если R' — подмножество R, то каждому открытому множеству M из R можно поставить в соответствие пересечение $M' = R'M$. Если полученные таким образом в R' множества считать открытыми (в R'), то аксиома A будет выполняться и все множество R' будет открытым (в R'). Тем самым R' само станет топологическим пространством. Говорят, что R *индуцирует* топологию в R'.

В частности, если R' — открытое множество в R, то множество M' из R' тогда и только тогда открыто в R', когда оно открыто в R.

2.6. Дальнейшие основные топологические понятия. Множество точек V топологического пространства R называется *замкнутым*, если его дополнение $R - V$ есть открытое множество. Пересечение любого числа и соединение конечного числа замкнутых множеств есть снова замкнутое множество. Все пространство R и пустое множество одновременно открыты и замкнуты. Каждая точка, не принадлежащая V, имеет окрестность, не пересекающуюся с V.

Пусть M — произвольное множество точек в R. Точка $P \in R$ называется *точкой сгущения* множества M, если в каждой ее окрестности содержится отличная от P точка из M. Множество M тогда и только тогда замкнуто, когда оно содержит все свои точки сгущения. Если к множеству M присоединить все его точки сгущения, то получится замкнутое множество $\overline{M}$ — *замыкание* множества M.

Точка P из R называется *граничной точкой* множества M в R, если в каждой ее окрестности содержатся точки как из M, так и из $R - M$. Множество всех граничных точек множества M называется его *границей*.

Топологическое пространство называется *компактным*, если всякое бесконечное множество его точек имеет по крайней мере одну точку сгущения. Замкнутое множество точек компактного пространства с индуцированной топологией само является компактным пространством.

Бесконечная последовательность точек (P_ν) *сходится* к точке P, $P_\nu \to P$, если каждая окрестность точки P содержит все точки P_ν, начиная с некоторого номера. Ввиду большой общности понятия окрестности, не исключена возможность того, что последовательность одновременно сходится ко многим точкам.

2.7. Отображения. Если каждой точке P топологического пространства R поставлена в соответствие точка P' топологического пространства R', то говорят об отображении R в R'; P' является *образом* P, P — *прообразом* P'. Если при этом каждая точка из R' является образом некоторой точки, то говорят, что R отображено *на* R'. Если, кроме того, различным точкам из R всегда соответствуют различные точки из R', то отображение называется *взаимно однозначным*.

Пусть f — отображение R в R' и g — отображение R' в R; тогда gf является отображением R в себя [1]). Если это тождественное преобразование, то отображение f взаимно однозначно и g является отображением *на* R. Если и fg — тождество, то f — взаимно однозначное отображение R *на* R' и g — его обращение, $g = f^{-1}$.

Отображение R в R' называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества из R' является открытым в R. Имеет место теорема:

Отображение R в R' тогда и только тогда непрерывно, когда для каждой точки $P \in R$ и каждой окрестности U' образа P' точки P найдется такая окрестность U точки P, образ которой лежит в U'.

Покажем сначала, что это условие выполняется для всякого непрерывного отображения φ. Пусть P — произвольная точка пространства R, P' — ее образ и U' — произвольная окрестность точки P'. По определению непрерывного отображения, множество $\varphi^{-1}(U')$ является открытым; очевидно, что оно содержит точку P. Следовательно, оно является окрестностью точки P. Образ этой окрестности лежит целиком в U'.

Обратно, пусть выполнено условие теоремы, и пусть M' — произвольное открытое множество в R'. Рассмотрим для каждой точки $P' \in M'$ множество ее прообразов $\varphi^{-1}(P')$. Так как множество M' является окрестностью для каждой своей точки, то, по предположению, для каждой точки $P \in \varphi^{-1}(P')$ найдется окрестность U_P, образ которой лежит целиком в M'. Соединение всех множеств U_P, где P для каждой P' пробегает все ее прообразы и P' пробегает все множество M', есть прообраз множества M'; с другой стороны, как соединение открытых множеств, оно открыто. Тем самым теорема доказана.

---

[1]) „Произведение" gf преобразований f и g есть преобразование, которое осуществляется последовательным выполнением сначала f, а затем g. — *Прим. перев.*

Если M — подмножество R и f — непрерывное отображение R в R', то для замкнутой оболочки $\overline{M}$ множества M имеет место соотношение $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.

В частном случае, когда пространство-образ R' есть комплексная плоскость w, говорят о *функции* f на R. Функция называется непрерывной, если определяемое ею отображение непрерывно в указанном выше смысле.

2.8. Пути, области. Под *путем* в топологическом пространстве понимают непрерывный образ $P(t)$ ориентированного отрезка $a \leqslant t \leqslant b$. Точка $P(a)$ называется *началом*, точка $P(b)$ — *концом* пути. Пространство R называется *связным*, если всякие две его точки можно соединить некоторым путем.

Областью называется открытое связное множесто точек в R.

2.9 Дальнейшие свойства непрерывных отображений. Пусть φ — непрерывное отображение ограниченного замкнутого множества (P) числовой плоскости в топологическое пространство R. Пусть для каждого образа P' указана некоторая окрестность $U_{P'}$. Тогда существует число $\delta > 0$, удовлетворяющее следующему условию: для *каждой* точки P из (P) можно найти такую точку P', что образ δ-окрестности точки P целиком лежит внутри $U_{P'}$.

Для доказательства допустим противное, т. е. что для всякого $\delta_\nu (\delta_\nu \to 0)$ существует точка P_ν из (P), δ_ν-окрестность которой не отображается ни в одну из окрестностей $U_{P'}$. В силу ограниченности и замкнутости (P), последовательность P_ν обладает точкой сгущения Q в (P). Пусть Q' — ее образ в R и $U_{Q'}$ — окрестность Q'. В силу непрерывности отображения φ, существует окрестность U_Q точки Q, φ-образ которой целиком лежит в $U_{Q'}$. Так как Q является точкой сгущения для P_ν, то существует настолько большое ν, что δ_ν-окрестность P_ν целиком лежит в U_Q. Тогда образ этой окрестности содержится в окрестности $U_{Q'}$, что противоречит построению последовательности P_ν. Тем самым утверждение доказано.

2.10. Пусть в топологическом пространстве R дано открытое множество точек M и в нем замкнутое множество B. Пусть φ — снова непрерывное отображение ограниченного замкнутого множества A числовой плоскости в пространство R. Тогда *существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что образ всякого подмножества* A_0 *множества* A *лежит целиком в* M, *если диаметр* A_0 *меньше* ε *и если образ* A_0 *имеет общую точку с* B.

Допустим, наоборот, что для каждого $\varepsilon_\nu > 0$ $(\varepsilon_\nu \to 0)$ существует подмножество $A_\nu \subset A$ диаметра меньше ε_ν, образ которого имеет общую точку с B и все же не целиком лежит в M. Пусть P_ν —

точка из A_ν, образ которой принадлежит B. Множество точек P_ν имеет в A точку сгущения Q. Рассмотрим два случая.

1. Если точка $Q' = \varphi(Q)$ не принадлежит B, то, в силу замкнутости B, существует окрестность $U_{Q'}$ точки Q', не пересекающаяся с B. Далее, в силу непрерывности φ, существует окрестность U_Q точки Q, образ которой лежит целиком в $U_{Q'}$. Для некоторых достаточно больших ν множества A_ν содержатся в U_Q, следовательно, $\varphi(A_\nu)$ содержатся в $U_{Q'}$ и поэтому не имеют общих точек с B, что противоречит выбору последовательности ε_ν.

2. Если точка $Q' = \varphi(Q)$ принадлежит B, то M—окрестность Q'. Поэтому, в силу непрерывности отображения φ, для некоторых достаточно больших ν множества $\varphi(A_\nu)$ лежат в M, что снова противоречит выбору ε_ν. Тем самым теорема доказана.

2.11. Введение топологии с помощью отображения. Пусть R — топологическое пространство и φ — однозначное отображение R *на* множество R', еще не имеющее топологии. Введем в R' топологию, назвав подмножество M' множества R' открытым, если его прообраз M в R есть открытое множество. Определенные таким образом открытые множества удовлетворяют аксиоме A, и все множество R' открыто. Следовательно, R' — топологическое пространство. Заданное отображение φ есть *непрерывное* отображение R на R'.

2.12. Топологические отображения. Пусть R и R' — два топологических пространства и τ — отображение R на R'. Отображение τ называется *топологическим*, если оно взаимно однозначно и непрерывно вместе со своим обращением. При топологическом отображении всякое открытое множество пространства R переходит в открытое множество пространства R', всякое замкнутое множество R — в замкнутое множество R'. Следовательно, свойство множества быть открытым или замкнутым топологически инвариантно.

Обратно, если взаимно однозначное отображение R на R', так же как его обращение, переводит открытые множества в открытые, то это отображение является топологическим.

Два пространства, которые можно топологически отобразить друг на друга, называются *гомеоморфными*. Гомеоморфизм есть соотношение эквивалентности, т. е. он представляет собой рефлексивное, симметричное и транзитивное соотношение. Следовательно, совокупность всех топологических пространств распадается на непересекающиеся классы гомеоморфных друг другу пространств.

2.13. Отождествление. Пусть точки топологического пространства R разделены на классы (P) так, что каждая точка принадлежит одному и только одному классу; назовем точки одного и того же класса *эквивалентными точками*. Образуем новое множество R_1,

„точками" $\pi = (P)$ которого будем считать классы эквивалентных точек пространства R. Если каждой точке $P \in R$ мы поставим в соответствие ее класс (P), то этим будет установлено однозначное отображение φ пространства R на R_1. Поэтому, согласно п. 2.11, R_1 можно превратить в топологическое пространство так, что φ станет непрерывным отображением R на R_1. Говорят, что пространство R_1 получается из R *отождествлением* эквивалентных точек. По построению топологии, множество (π) пространства R_1 является открытым тогда и только тогда, когда множество точек R, входящих в классы, принадлежащие множеству (π), открыто в R.

Отображение φ, наряду с непрерывностью, обладает еще следующим свойством: каждое открытое множество пространства R, которое вместе со всякой своей точкой содержит и все ей эквивалентные, оно переводит в открытое множество пространства R_1.

Пусть теперь, обратно, дано непрерывное отображение φ пространства R на пространство R'. Оно порождает в R разбиение на классы, состоящие из точек, имеющих один и тот же образ. Относительно отображения φ предположим дальше, что каждое открытое множество пространства R, которое вместе со всякой своей точкой содержит и все ей эквивалентные (т. е. все точки, имеющие один и тот же образ), оно переводит в открытое множество пространства R'. Тогда пространство R_1, которое получается из R отождествлением эквивалентных точек, гомеоморфно R'.

В самом деле, если каждому классу (P) поставить в соответствие образ его точек в R', то этим будет установлено взаимно однозначное отображение τ пространства R_1 на пространство R'. Это отображение вместе со своим обращением непрерывно: если M' — открытое множество в R', то, в силу непрерывности φ, его прообраз $M = \varphi^{-1}(M')$ в R есть открытое множество; это множество вместе с каждой своей точкой содержит и все ей эквивалентные. Поэтому, по построению топологии пространства R_1, прообраз M' в R_1, т. е. множество $\tau^{-1}(M')$, открыто в R_1.

Обратно, если M_1 — открытое множество в R_1, то множество M точек R, состоящее из всех точек, входящих в классы множества M_1, является открытым и вместе с каждой своей точкой содержит и все ей эквивалентные. Тогда, по нашему предположению относительно отображения φ, и множество $\varphi(M)$ открыто, но это есть множество $\tau(M_1)$.

2.14. Пространство Хаусдорфа. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если, наряду с аксиомой A, выполняется следующая введенная Хаусдорфом [1*] *аксиома отделимости*:

B. У двух различных точек всегда имеются непересекающиеся окрестности.

Подмножество хаусдорфова пространства с индуцированной топологией есть снова хаусдорфово пространство.

Непрерывный образ A замкнутого ограниченного множества $\bar{A}$ числовой плоскости в хаусдорфовом пространстве R есть замкнутое множество, т. е. множество $R-A$ открыто. В самом деле, если P — точка из $R-A$ и Q — произвольная точка из A, то, по аксиоме отделимости, существуют непересекающиеся окрестности U_P и U_Q соответственно точек P и Q. В силу непрерывности отображения, всякий прообраз $\bar{Q}$ точки Q имеет окрестность $U_{\bar{Q}}$, образ которой лежит целиком в U_Q. По теореме Гейне — Бореля, существует *конечное число* окрестностей $U_{\bar{Q}}$, покрывающих все множество $\bar{A}$; следовательно, их образы покрывают все множество A. Пересечение (конечного числа) соответствующих окрестностей U_P есть окрестность точки P, не пересекающаяся с A. Это означает, что множество $R-A$ открыто, что и требовалось доказать.

2.15. Двумерные многообразия. Понятие хаусдорфова пространства также является еще слишком общим и допускает осложнения, которые невозможны в случаях, поддающихся наглядному представлению. Для целей теории функций нужно ввести дальнейшие ограничения. Таким сильно ограничивающим условием является требование, чтобы пространство было *локально евклидовым*, т. е. чтобы в окрестности каждой точки оно обладало топологической структурой, приближающей его к элементарным линейным пространствам евклидовой геометрии. В интересующем нас двумерном случае это условие звучит так:

C. Каждая точка P пространства R имеет окрестность K_P, которая (если ее рассматривать как подпространство) гомеоморфна открытому кругу числовой плоскости.

Связное пространство R, удовлетворяющее аксиомам A, B и C, называется *двумерным многообразием*, или *поверхностью* [1]). Если пространство R компактно, то его называют также *замкнутой поверхностью*. Окрестность K_P, о которой говорится в аксиоме C, называется *параметрической окрестностью* точки P, а круг-прообраз K_z в числовой плоскости — *параметрическим кругом*. Топологическое отображение $\rho_P(K_P \to K_z)$ будем коротко называть *параметрическим отображением*.

Если P и Q — две точки поверхности, параметрические окрестности которых K_P и K_Q являются „соседними“, т. е. имеют непустое пересечение, то этому пересечению в параметрических кругах $K_z(P)$ и $K_z(Q)$ соответствуют два открытых множества $D_{z,P}$ и $D_{z,Q}$, а $\rho_Q\rho_P^{-1}$ есть топологическое отображение $D_{z,P}$ на $D_{z,Q}$, *соотношение соседства* (Nachbarrelation) окрестностей K_P и K_Q.

[1]) Следует заметить, что аксиома отделимости B из аксиомы C не вытекает.

Множество точек M поверхности R открыто тогда и только тогда, когда вместе с каждой своей точкой P оно содержит ее окрестность относительно параметрической окрестности K_P.

Поверхность R называется *ориентируемой*, если параметрические отображения можно выбрать так, чтобы все соотношения соседства были отображениями, сохраняющими ориентацию [1]).

Подобласть G поверхности R есть снова поверхность.

2.16. Теперь мы, обратно, покажем, что множество R, которое еще не имеет топологии, но для точек которого указаны „параметрические окрестности" с топологическими „соотношениями соседства", можно превратить в топологическое пространство, удовлетворяющее *аксиомам* A *и* C, перенося топологию этих параметрических окрестностей на все множество R.

Пусть R — множество точек, и пусть каждой точке P поставлено в соответствие подмножество $T_P (P \in T_P)$, которое содержит точку P и с помощью отображения ρ_P может быть взаимно однозначно отображено на круг $K_z(P)$. Относительно этих отображений мы предполагаем следующее: если два подмножества T_P и T_Q имеют непустое пересечение D, то в кругах $K_z(P)$ и $K_z(Q)$ ему соответствуют *открытые* множества $D_{z,P}$ и $D_{z,Q}$ соответственно, а $\rho_Q \rho_P^{-1}$ есть топологическое отображение $D_{z,P}$ на $D_{z,Q}$.

Теперь мы сначала превратим в топологическое пространство каждое подмножество T_P, перенося на него с помощью отображения ρ_P^{-1} топологию соответствующего круга; тогда ρ_P станет топологическим отображением T_P на $K_z(P)$. Пересечение $D = T_P T_Q$ подмножеств T_P и T_Q, как образ $D_{z,P}$, соответственно $D_{z,Q}$, является открытым множеством как в T_P, так и в T_Q.

Если теперь A — открытое множество в T_P и B — открытое множество в T_Q, то пересечение AB открыто в T_P (также и в T_Q). Действительно, так как A открыто в T_P, то AD открыто в D; точно так же BD открыто в D, следовательно, и пересечение $(AD)(BD) = AB$; так как D само открыто в T_P, то AB открыто в T_P.

2.17. Теперь уже все множество R можно превратить в топологическое пространство. Для этого подмножество M множества R назовем открытым в R, если для каждой точки $Q \in M$ пересечение MT_Q открыто в T_Q. Определенные таким образом открытые множества, очевидно, удовлетворяют аксиоме A; следовательно, R становится топологическим пространством.

---

[1]) Это определение имеет смысл, так как соотношения соседства являются топологическими отображениями областей z-плоскости; элементарное понятие отображения, сохраняющего ориентацию, *для числовой плоскости* предполагается известным (Александров и Хопф [1*], XII, § 2).

В определенной таким образом топологии R отмеченные подмножества T_P открыты; действительно, если Q — произвольная точка T_P, то, как показано выше, пересечение $T_P T_Q$ открыто в T_Q. Отсюда вытекает, что топология, индуцируемая в T_P пространством R, совпадает с уже имеющейся там топологией, ибо, согласно п. 2.5, подмножество множества T_P открыто относительно R тогда и только тогда, когда оно открыто относительно T_P. Итак, каждая точка $P \in R$ обладает окрестностью T_P, которая (с индуцированной топологией) гомеоморфна кругу. Следовательно, пространство R удовлетворяет аксиоме C.

2.18. Аксиома счетности. Согласно определению, двумерное многообразие может быть покрыто системой параметрических окрестностей. Возникает важный вопрос, не может ли многообразие быть покрыто уже *счетным* числом параметрических окрестностей. Радо [1] показал, что для произвольных двумерных многообразий это в общем случае не обязательно.

Доказывается это построением соответствующих противоречащих примеров. Такой восходящий к Прюферу пример, указанный Радо [1]), поучительный также с точки зрения теории конформных отображений, будет (в несколько измененном виде) рассмотрен в одном из ближайших пунктов (п. 2.21).

В этой главе мы впредь будем рассматривать только такие поверхности, которые обладают указанным свойством, и введем его как добавочное требование, как *„аксиому счетности"*.

D. Существует счетное число параметрических окрестностей, покрывающих все многообразие.

Многообразие, которое удовлетворяет этой аксиоме и сверх того компактно, допускает покрытие даже конечным числом параметрических окрестностей [2]).

2.19. На двумерном многообразии R, удовлетворяющем аксиоме счетности, всякое несчетное множество точек (P) имеет точку сгущения. В самом деле, если (K_ν) — система покрывающих R параметрических окрестностей, то по крайней мере в одной из них должно находиться несчетное множество точек множества (P). Эта параметрическая окрестность допускает покрытие счетным числом компактных множеств; в одном из них должно находиться бесконечно много точек множества (P), а потому и точка их сгущения.

2.20. Критерий свойства счетности. В гл. IV мы покажем, что каждая риманова поверхность обладает свойством счетности (теорема

[1]) См. Радо [1].

[2]) См. Александров и Хопф [1*], II, § 1, теорема V. [или П. С. Александров [2**], Прибавление к гл. VII. — *Прим. перев.*]

Радо [1]). В качестве некоторой подготовки к этому докажем следующую общую теорему (Александров и Хопф [1*], I, § 7, теорема IV[1])).

Метризуемая поверхность R, на которой существует счетное всюду плотное множество точек, допускает покрытие счетным числом параметрических окрестностей.

Доказательство. Пусть P — произвольная точка поверхности R и $K(P, r)$ есть r-круг с центром в P в смысле метрики (см. п. 2.4). Рассмотрим множество чисел (r), для которых круг $K(P, r)$ допускает покрытие счетным числом параметрических кругов. Оно не пусто, ибо для достаточно малого r круг $K(P, r)$ лежит в параметрической окрестности точки P. Далее, множество (r) вместе с каждым числом r содержит и все меньшие положительные числа. Пусть $\bar{r}$ — верхняя грань множества (r). Тогда еще и „максимальный" круг $K_P = K(P, \bar{r})$ допускает покрытие счетным числом параметрических окрестностей. Действительно, существует такая последовательность $r_\nu \to \bar{r}$, что это верно для каждого круга $K(P, r_\nu)$, следовательно, и для их соединения; но это и есть K_P.

Итак, достаточно показать, что поверхность R может быть покрыта счетным числом „максимальных" кругов. Для этого рассмотрим сначала фиксированный круг $K_P = K(P, \bar{r}_P)$ и точку $Q \in K_P$. Тогда $\overline{PQ} < \bar{r}_P$, так что разность $\rho = \bar{r}_P - \overline{PQ}$ положительна. Из неравенства треугольника следует, что ρ-круг с центром в Q лежит в K_P. Следовательно, он может быть покрыт счетным числом параметрических кругов, и поэтому соответствующий Q максимальный радиус $\bar{r}_Q$ больше или равен ρ. Следовательно, для каждой точки $Q \in K_P$ выполняется неравенство

$$\bar{r}_Q \geqslant \bar{r}_P - \overline{PQ}.$$

Пусть теперь (P_ν) — счетное всюду плотное множество точек на R. Каждой точке P_ν соответствует максимальный круг K_{P_ν}. Эти круги (их счетное число) покрывают всю поверхность R. В самом деле, если P — произвольная точка на R и $\bar{r}_P$ — соответствующий максимальный радиус, то существует такая точка P_ν, что $\overline{PP_\nu} < \bar{r}_P/2$. Тогда, в силу предыдущего неравенства, для ее максимального радиуса $\bar{r}_{P_\nu}$ имеем $\bar{r}_{P_\nu} > \bar{r}_P/2$, т. е. P лежит в K_{P_ν}. Тем самым теорема доказана.

2.21. Пример Прюфера. Чтобы показать, что для некоторого двумерного многообразия не выполняется аксиома счетности, достаточно, согласно п. 2.19, указать на этом многообразии несчетное множество точек, не имеющее точек сгущения.

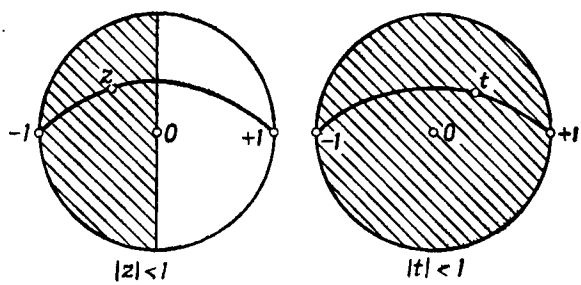
[1]) Или П. С. Александров [1**], гл. I, (2:36). — *Прим. перев.*

Заметив это, проделаем теперь следующее построение [1]). Рассмотрим левый полукруг $H(x<0)$ единичного круга $|z|<1$ и отобразим его топологически на полный единичный круг t-плоскости по следующему правилу: в качестве образа $t=\varphi(z)$ точки z нужно взять ту точку t на дуге окружности, определяемой точками $+1$, z, -1, для которой дуга $(-1, t)$ в два раза длиннее дуги $(-1, z)$ (фиг. 3).

Пусть теперь α — число из интервала $0\leqslant\alpha<2\pi$; каждому α поставим в соответствие круг $K_\alpha: |z_\alpha|<1$ z_α-плоскости. Преобразованием

$$t=e^{i\alpha}\varphi(z_\alpha)$$

полукруг $H_\alpha(x_\alpha<0, |z_\alpha|<1)$ топологически отображается на полный круг $|t|<1$. При этом диаметр $x_\alpha=0$, $|y_\alpha|<1$ переходит



Фиг. 3.

в единственную точку $t=e^{i\alpha}$, а полуокружность $x_\alpha\leqslant 0$, $|z_\alpha|=1$ — в окружность $|t|=1$.

Для двух произвольных значений α_1 и α_2 условимся считать эквивалентными те точки z_{α_1} и z_{α_2} полукругов H_{α_1} и H_{α_2}, которым соответствует одно и то же значение t, в то время как точки правых полукругов $x_\alpha\geqslant 0$, $|z_\alpha|<1$ будем считать эквивалентными только самим себе.

Если в системе кругов $K_\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi)$ отождествить определенные таким образом эквивалентные точки, то, согласно п. 2.13, получится топологическое пространство R, удовлетворяющее аксиоме A [2]). Мы покажем, что R удовлетворяет также аксиомам B и C и, следовательно, является поверхностью.

Сначала мы покажем, что каждая „точка“ пространства R обладает окрестностью, гомеоморфной кругу. Для точек открытого правого полукруга это ясно непосредственно. Пусть, далее, z_α^0 — точка

---

[1]) Оно является простым видоизменением построения Прюфера — Радо (см. Радо [1]).

[2]) Отождествление обеспечивает связность поверхности, которую мы строим.

открытого левого полукруга H_α. В каждом полукруге H_β ей соответствует ровно одна эквивалентная точка z_β^0. При этом z_α^0 представляет „точку“ $z_\tau^0 (0 \leqslant \tau < 2\pi)$. Пусть $k_\alpha (|z_\alpha - z_\alpha^0| < \rho)$ — круг с центром в z_α^0, лежащий целиком в полукруге H_α. Тогда каждой точке z_α из k_α в каждом полукруге $H_\beta (0 \leqslant \beta < 2\pi)$ соответствует эквивалентная точка z_β и множество точек z_β для фиксированного β и z_α, пробегающих k_α, открыто в H_β. По построению топологии в R (ср. п. 2.13), это означает, что множество „точек“, представленное точками из k_α, открыто. Следовательно, это множество представляет собой окрестность „точки“ z_τ^0), гомеоморфную кругу: если каждой „точке“, т. е. классу, поставить в соответствие ее представителя в k_α, то будем иметь топологическое отображение этой окрестности на круг k_α.

Если, наконец, z_α^0 — точка диаметра $x_\alpha = 0$, $|y_\alpha| < 1$, то снова рассмотрим круг $|z_\alpha - z_\alpha^0| < \rho$; тогда точки полукруга $|z_\alpha - z_\alpha^0| < \rho$, $x_\alpha \geqslant 0$ вместе с классами эквивалентных точек полукруга $|z_\alpha - z_\alpha^0| < \rho$, $x_\alpha < 0$ образуют окрестность точки z_α^0, гомеоморфную кругу [1]).

Пространство R удовлетворяет также аксиоме отделимости. Это непосредственно ясно для двух точек открытого правого полукруга. Пусть теперь $z_{\alpha_1}^1$ и $z_{\alpha_2}^2$ — две точки двух левых открытых полукругов H_{α_1} и H_{α_2}. Мы можем считать, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$, иначе можно было бы непосредственно указать непересекающиеся окрестности. Если $z_{\alpha_1}^1$ и $z_{\alpha_2}^2$ представляют различные точки пространства R, то $t(z_{\alpha_1}^1) \neq t(z_{\alpha_2}^2)$. Если $z_{\alpha_1}^2$ — эквивалентная $z_{\alpha_2}^2$ точка полукруга H_{α_1}, то $t(z_{\alpha_1}^2) = t(z_{\alpha_2}^2)$, следовательно, $t(z_{\alpha_1}^2) \neq t(z_{\alpha_1}^1)$. Поэтому $z_{\alpha_1}^1$ и $z_{\alpha_1}^2$ можно заключить в столь малые кружки K_1 и K_2, что ни одна точка из K_1 не будет эквивалентна никакой точке из K_2. Тем самым эти кружки будут представлять непересекающиеся окрестности „точек“ $(z_{\alpha_1}^1)$ и $(z_{\alpha_2}^2)$.

Если, далее, $z_{\alpha_1}^1$ и $z_{\alpha_2}^2$ — точки соответственно диаметров $x_{\alpha_1} = 0$, $|y_{\alpha_1}| < 1$ и $x_{\alpha_2} = 0$, $|y_{\alpha_2}| < 1$, то в случае $\alpha_1 = \alpha_2$ они заведомо имеют непересекающиеся окрестности; если же $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то рассматриваем функцию $t = e^{i\alpha}\varphi(z_\alpha)$ в *„полузамкнутом“* полукруге $x_\alpha \leqslant 0$, $|z_\alpha| < 1$. Для $x_\alpha = 0$ она имеет значение $e^{i\alpha}$, поэтому $t(z_{\alpha_1}^1) \neq t(z_{\alpha_2}^2)$, и непересекающиеся окрестности строятся, как во втором случае. Так же находим непересекающиеся окрестности для точки диаметра $x_{\alpha_1} = 0$, $|y_{\alpha_1}| < 1$ и точки левого полукруга $x_{\alpha_2} < 0$.

---

[1]) Пространство R можно считать состоящим из полукругов $|z_\alpha| < 1$, $x_\alpha \geqslant 0$ и круга $|t| < 1$. Для точек z_α^0 диаметра $x_\alpha = 0$, $|y_\alpha| < 1$ окрестность определяется как совокупность точек z_α, $|z_\alpha - z_\alpha^0| < \rho$, $x_\alpha \geqslant 0$ и множества точек t, соответствующих открытому полукругу $|z_\alpha - z_\alpha^0| < \rho$, $x_\alpha < 0$ при отображении $t = e^{i\alpha}\varphi(z_\alpha)$. Для остальных точек R окрестность определяется как обычная окрестность. — *Прим. перев.*

Тем самым показано, что пространство R удовлетворяет аксиомам A, B и C. Так как, далее, очевидно, что всякие две точки из R можно соединить путем, лежащим в R, то R также и связно и потому является двумерным многообразием. На этом многообразии существуют несчетные множества точек, не имеющие точек сгущения, например множество точек $z_\alpha = {}^1/_2$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$. Поэтому многообразие R не удовлетворяет аксиоме счетности [1]).

2.22. Римановы поверхности. Рассмотренные в гл. I „римановы поверхности" являются, согласно п. 2.2, двумерными многообразиями. Аксиомы A и B, очевидно, выполняются, и то же самое можно сказать об аксиоме C, так как введенные в п. 2.2 „круговые окрестности" гомеоморфны „кругам проекций" плоскости z. Но эти „римановы поверхности" $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$ (и, в частности, z-плоскость), помимо своих топологических свойств, обладают еще некоторыми более специальными свойствами метрического характера, связанными с наложением ограничений на рассмотренные выше соотношения соседства. Эти ограничения вызываются требованием, чтобы на римановой поверхности можно было определять *аналитические функции*.

Пусть R — двумерное многообразие и (K) — система его параметрических окрестностей. Пусть, далее, на множестве точек M многообразия R определена функция $f(P)$: для каждой точки $P \in M$ задано число $f(P)$ (действительное или комплексное). Этой функции соответствуют в параметрических кругах K некоторые „элементы", которые в эквивалентных точках принимают равные значения. Если теперь „соотношение соседства" является только топологическим, то в общем случае не имеет никакого смысла говорить о дифференциальных свойствах функции $f(P)$. Действительно, если элемент функции $f(z)$ и дифференцируем по соответствующим переменным x и y $(z = x + iy)$, то по отношению к другому параметру это может уже не иметь места, если только соотношение соседства не дифференцируемо.

2.23. Еще больше требуется для того, чтобы на R имела смысл аналитичность комплекснозначной функции $f(P)$. Это свойство сохраняется только при *аналитических* преобразованиях параметров, и поэтому для функции на R оно имеет смысл только тогда, когда соотношения соседства являются *аналитическими*, следовательно, когда они представляют собой не только топологические, но и конформные отображения. Это оправдывает введение следующего определения:

---

[1]) Обобщение примера Прюфера на многообразия произвольной четной размерности см. в работе Calabi, Rosenlicht, Proc. Amer. Math. Soc., **4**, № 3, 335—340 (1953) (Р. Ж. „Математика", 1944, № 9, рец. № 4795). — *Прим. перев.*

Риманова поверхность есть двумерное многообразие, соотношения соседства которого являются конформными отображениями 1-го рода.

Так как соотношения соседства римановой поверхности, как конформные отображения 1-го рода, сохраняют ориентацию, то римановы поверхности всегда ориентируемы.

Комплексная z-плоскость и всякая область z-плоскости являются римановыми поверхностями. В качестве параметра можно для них взять само z; соотношения соседства задаются тогда просто тождеством или преобразованием $w = 1/z$ (для окрестности точки $z = \infty$).

Однозначное отображение римановой поверхности R на риманову поверхность R' называется *конформным* в точке $P \in R$, если соответствующее отображение параметрического круга конформно в точке P_z. В силу конформности соотношений соседства, это определение имеет смысл, не зависящий от выбора параметрической окрестности.

Две римановы поверхности называются *конформно эквивалентными*, если можно одну из них топологически и конформно отобразить на другую.

2.24. Понятие римановой поверхности, которое Риман ввел в связи со своим открывшим новые пути исследованием по алгебраическим функциям и их интегралам, имело фундаментальное значение для всего развития геометрической теории функций и топологии. Развитию теории конформных отображений поверхностей содействовали прежде всего исследования Шварца, Неймана, Клейна, Пуанкаре, Гильберта, Кёбе, Каратеодори и Куранта. В основоположном труде Вейля „Идея римановой поверхности" [1*] впервые было дано понятие абстрактной поверхности [1]). Новейшее развитие топологии позволило выкристаллизовать это понятие в окончательном виде. Здесь прежде всего следует назвать замечательную во многих отношениях работу Радо [1], в которой тополого-метрические свойства римановых поверхностей были с исчерпывающей ясностью сформулированы без использования понятия аналитического образа.

2.25. Свойство счетности римановых поверхностей. Радо [1] показал, что аксиома счетности выполняется для каждой римановой поверхности. Доказательство этого утверждения требует углубленного анализа; мы проведем доказательство в гл. IV с помощью некоторых теорем существования из теории потенциала [2]).

---

[1]) У Вейля [1*] риманова поверхность вводится с помощью понятия аналитического образа (ср. с этим рассмотрения п. 2.2, которые отличаются от рассмотрений Вейля только тем, что у нас подчеркнуто свойство поверхности быть *поверхностью наложения* z-плоскости, что нецелесообразно при абсолютном определении поверхности по Вейлю, при котором имеют дело с произвольными униформизирующими параметрами).

[2]) У Радо [1] доказательство дается как следствие теоремы об униформизации.

Как заметил Радо, в примере Прюфера решающим моментом является то, что в соотношениях эквивалентности, связывающих полукруги топологически (и даже неограниченно дифференцируемо) между собой, граничный диаметр переходит в *одну* граничную точку. Такое явление, как известно, невозможно при *конформном* отображении внутренности полукруга. Поэтому невозможно найти подобный пример для римановой поверхности.

§ 2. ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ

2.26. Прямолинейные симплексы. Под прямолинейным *двумерным симплексом*, или, короче, 2-симплексом (PQR) числовой плоскости понимают замкнутый треугольник с вершинами P, Q, R. Ориентация такого 2-симплекса устанавливается путем указания порядка следования его вершин. Две ориентации 2-симплекса рассматриваются как одинаковые, если оба порядка следования вершин можно перевести друг в друга с помощью четного числа перестановок. Поэтому 2-симплекс может иметь только две ориентации.

Прямолинейный *одномерный симплекс*, или, короче, 1-симплекс числовой плоскости есть замкнутый отрезок (PQ). Он ориентируется указанием того, какая из двух граничных точек принимается за начало 1-симплекса и какая — за конец.

Ориентированные симплексы мы обозначаем фигурными скобками, например $\{PQR\}$ и $\{PQ\}$. Ориентированный 2-симплекс $\{PQR\}$ порождает определенные ориентации на его сторонах, именно, $\{PQ\}$, $\{QR\}$ и $\{RP\}$, называемые ориентациями, *индуцированными* симплексом $\{PQR\}$.

Полноты ради вводят еще 0-*симплекс*, под которым понимают точку. 0-симплекс не ориентируется.

2.27. Особые симплексы. Пусть $'\sigma^k$ (где k имеет одно из значений 0, 1 или 2) — прямолинейный симплекс числовой плоскости и f — такое непрерывное отображение $'\sigma^k$ в поверхность R, что $f('\sigma^k)$ лежит целиком в некоторой параметрической окрестности. Множество $\sigma^k = f('\sigma^k)$ называется *особым* k-*симплексом*. Два особых k-симплекса *равны*, если они заполняют на R одно и то же множество точек и если их симплексы-прообразы можно отобразить друг на друга *аффинно* так, что соответствующим точкам обоих симплексов отвечает на R одна и та же точка. Согласно п. 2.14, k-симплекс замкнут.

Особый 2-симплекс определяет три особых 1-симплекса — образы сторон симплекса-прообраза. Они называются *сторонами* особого 2-симплекса. *Вершинами* особого 2-симплекса, соответственно 1-симплекса, называются 0-симплексы, в которые переходят вершины треугольника-прообраза, соответственно концы отрезка-прообраза.

Ориентированный особый k-симплекс ($k = 1, 2$) есть непрерывный образ *ориентированного* k-симплекса числовой плоскости. Два

ориентированных особых k-симплекса, которые на R заполняют одно и то же множество точек, считаются равными, если их симплексы-прообразы можно отобразить друг на друга аффинно с сохранением ориентации так, что соответствующим точкам обоих симплексов отвечает на R одна и та же точка. Не исключено, что особый симплекс σ^k может быть равен своему противоположно ориентированному. Это имеет место тогда, когда симплекс-прообраз можно отобразить на самого себя аффинно и с изменением ориентации так, что на σ^k соответствующим точкам будет отвечать одна и та же точка. Симплекс σ^k называется тогда *вырожденным*.

Если на сторонах симплекса-прообраза $'\sigma^2$ взять ориентацию, индуцированную $'\sigma^2$, и перенести ее с помощью соответствующего $'\sigma^2$ отображения в R, то стороны симплекса σ^2 получат определенные ориентации, *индуцированные* σ^2.

2.28. Особые цепи. Рассмотрим множество особых k-симплексов. Особой *k-цепью* ($k = 0, 1, 2$) называется целочисленная функция на этом множестве: каждому особому k-симплексу она ставит в соответствие целое число (положительное, отрицательное или нуль). При этом противоположно ориентированным симплексам должны соответствовать противоположные целые числа; отсюда, в частности, следует, что для каждого вырожденного симплекса значение функции равно нулю. Мы будем рассматривать только *конечные* особые цепи, т. е. такие, в которых только конечному числу симплексов соответствуют отличные от нуля значения функции.

Две особые k-цепи считаются *равными*, если каждому особому k-симплексу они ставят в соответствие одно и то же целое число.

Суммой $\alpha^k + \beta^k$ двух особых k-цепей α^k и β^k называют особую k-цепь, которая каждому k-симплексу ставит в соответствие сумму соответствующих ему значений функций α^k и β^k. Это снова конечная особая k-цепь. Благодаря этому определению, множество всех k-цепей (при фиксированном k) становится абелевой группой C^k. Нулевым элементом будет цепь, которая каждому k-симплексу ставит в соответствие число нуль. Обратным к α^k элементом является цепь $-\alpha^k$, которая каждому симплексу ставит в соответствие число, противоположное соответствующему ему числу в α^k. Если m — натуральное число, то $m\alpha^k$ означает сумму m цепей, каждая из которых есть α^k.

Каждому невырожденному k-симплексу σ^k можно взаимно однозначно поставить в соответствие ту особую k-цепь (σ^k), которая на σ^k имеет значение $+1$, на противоположно ориентированном симплексе $\bar{\sigma}^k$ значение -1 и на всех остальных k-симплексах — значение нуль. Противоположно ориентированному симплексу $\bar{\sigma}^k$ соответствует тогда цепь $-(\sigma^k)$. В дальнейшем мы каждый симплекс σ^k отождествляем с соответствующей цепью (σ^k). Поэтому мы будем писать $-\sigma^k$ вместо $\bar{\sigma}^k$. Каждую особую k-цепь α^k теперь можно записать в виде

суммы

$$\alpha^k = \sum_\nu a_\nu \sigma_\nu^k,$$

где a_ν — значение функции, соответствующее симплексу σ_ν^k.

2.29. Границы, циклы. Под *границей* $\partial\sigma^2$ ориентированного особого 2-симплекса $\sigma^2 = \{PQR\}$ понимают 1-цепь, образованную его сторонами с индуцированными ориентациями:

$$\partial\sigma^2 = \varepsilon_1\{PQ\} + \varepsilon_2\{QR\} + \varepsilon_3\{RP\}, \tag{2.1}$$

где $\varepsilon_\nu = 1$ или $= 0$, в зависимости от того, является ли соответствующий 1-симплекс невырожденным или вырожденным [1]).

Граница ориентированного 1-симплекса $\sigma^1 = \{PQ\}$ есть 0-цепь

$$\partial\sigma^1 = Q - P. \tag{2.2}$$

Граница особой k-цепи $\alpha^k = \sum_\nu a_\nu \sigma_\nu^k$ $(k = 1, 2)$ определяется линейно: $\partial\alpha^k = \sum_\nu a_\nu \partial\sigma_\nu^k$ $(k = 1, 2)$. Отсюда непосредственно следует, что

$$\partial(\alpha^k \pm \beta^k) = \partial\alpha^k \pm \partial\beta^k. \tag{2.3}$$

k-цепь α^k $(k = 1, 2)$ называется *замкнутой*, или *k-циклом*, если ее граница является нулевой $(k-1)$-цепью. Каждая 0-цепь считается замкнутой по определению. k-циклы $(k = 1, 2)$ образуют подгруппу Z^k группы C^k.

k-цепь α^k $(k = 0, 1)$ называется *гомологичной нулю*, $\alpha^k \sim 0$, если она является границей особой $(k+1)$-цепи. 2-цепь по определению называется гомологичной нулю, если она есть нулевая цепь.

Граница особой 2-цепи всегда есть цикл. Чтобы в этом убедиться, достаточно, учитывая линейность граничного оператора, показать, что для особого 2-симплекса справедливо соотношение $\partial\partial\sigma^2 = 0$. Согласно (2.1) и (2.2),

$$\partial\partial\sigma^2 = \varepsilon_1(Q - P) + \varepsilon_2(R - Q) + \varepsilon_3(P - R).$$

Если здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, то очевидно, что $\partial\partial\sigma^2 = 0$. Если, например, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, то симплекс $\{PQ\}$ вырожденный, поэтому $Q = P$ и снова $\partial\partial\sigma^2 = 0$. Если, наконец, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, то симплексы $\{QR\}$ и $\{RP\}$ — вырожденные, поэтому $Q = R$, $R = P$, следовательно, $\partial\partial\sigma^2 = Q - P = 0$. Таким образом, показано, что для любой 2-цепи

$$\partial\partial\alpha^2 = 0.$$

[1]) Среди этих 1-симплексов могут быть вырожденные, даже если симплекс σ^2 невырожденный.

Поэтому гомологичная нулю 1-цепь всегда есть 1-цикл. Далее, каждая гомологичная нулю 0-цепь, как всякая 0-цепь, есть 0-цикл. Тем самым гомологичные нулю k-цепи ($k=0,1$) образуют подмножество множества k-циклов. Это подмножество является даже подгруппой R^k группы циклов Z^k, так как, в силу (2.3), сумма и разность гомологичных нулю цепей снова гомологична нулю.

2.30. Группы гомологий. Два особых k-цикла z_1^k и z_2^k ($k=0, 1, 2$) называются *гомологичными*,

$$z_1^k \sim z_2^k,$$

если их разность гомологична нулю. Из $z_1^k \sim z_2^k$ и $z_2^k \sim z_3^k$ следует, что $z_1^k \sim z_3^k$. Так как гомология является, таким образом, соотношением эквивалентности, т. е. она рефлексивна, симметрична и транзитивна, то она определяет разбиение всех k-циклов на непересекающиеся классы гомологичных циклов, *k-мерные классы гомологий*. В частности, такой класс образуют гомологичные нулю циклы.

Совокупность k-мерных классов гомологий (для фиксированного k) можно сделать группой, *k-мерной группой гомологий* H^k, ставя в соответствие каждой паре классов (z_1^k) и (z_2^k) в качестве суммы третий класс гомологий, определяемый следующим образом: если z_1^k — цикл из (z_1^k) и z_2^k — цикл из (z_2^k), то цикл $z_1^k + z_2^k$ входит в определенный класс, который не зависит от представителей z_1^k и z_2^k, а зависит только от классов (z_1^k) и (z_2^k); этот класс и называется суммой $(z_1^k)+(z_2^k)$.

Если (z_0^k) — класс гомологичных нулю циклов, то для каждого класса z^k справедливо соотношение

$$(z^k)+(z_0^k)=(z^k).$$

Таким образом, (z_0^k) играет роль нулевого элемента. Далее, каждый класс (z^k) имеет обратный, а именно класс, представляемый $-z^k$. Следовательно, операция сложения действительно удовлетворяет групповым аксиомам.

На языке теории групп можно сказать, что группа гомологий H^k является фактор-группой группы циклов Z^k по подгруппе R^k гомологичных нулю k-цепей, и поэтому она обозначается через Z^k/R^k.

2.31. Топологическая инвариантность групп гомологий. Если f — непрерывное отображение поверхности R в поверхность R', то каждой особой цепи $\sum a_\nu \sigma_\nu^k$ на R соответствует цепь $\sum a_\nu f(\sigma_\nu^k)$ на R'. При этом цикл на R переходит в цикл на R' и гомологичная нулю цепь на R переходит в гомологичную нулю цепь на R'. Поэтому

отображение f определяет гомоморфное отображение h группы гомологий H^k поверхности R в группу гомологий $'H^k$ на R'. Если, в частности, f — топологическое отображение R *на* R', то его обращение определяет аналогично гомоморфизм h' группы $'H^k$ в группу H^k. Тогда $h'h$ переводит классы гомологий из H^k в себя и, следовательно, это тождество. Точно так же hh' оставляет инвариантным каждый класс из $'H^k$; отсюда вытекает, что h есть *изоморфное* отображение группы H^k *на* группу $'H^k$. Следовательно, гомеоморфные поверхности имеют изоморфные группы гомологий.

§ 3. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

2.32. Пути. Пусть $\overline{w} = \overline{AB}$ — ориентированный отрезок числовой плоскости и φ — непрерывное отображение $\overline{w}$ в поверхность R. Множество $w = \varphi(\overline{w})$ называется *путем* на R (ср. п. 2.8). Точка $A = \varphi(\overline{A})$ — начало, точка $B = \varphi(\overline{B})$ — конец пути.

Два пути $\varphi(\overline{w})$ и $\varphi_1(\overline{w}_1)$ считаются *равными*, если они составляют на R одно и то же множество точек и если отрезки-прообразы можно так топологически и с сохранением ориентации отобразить друг на друга, чтобы соответствующие друг другу точки отвечали одной и той же точке на R [1]). Следовательно, в частности, равные пути имеют одно и то же начало и один и тот же конец. Путь называется *замкнутым*, если его начало и конец совпадают. Не исключено, что отрезок-прообраз переходит в единственную точку, *точечный путь*.

Если u — путь, ведущий из P в Q, и v — путь, ведущий из Q в R, то, располагая соответствующие им отрезки друг за другом и отображая полученный отрезок с помощью u и v, получим путь, ведущий из P в R. Он называется *произведением* путей u и v и обозначается через uv. *Обратный* путь w^{-1} к пути w получается, если соответствующий $\overline{w}$ отрезок-прообраз переориентировать и затем снова отобразить как раньше. Обратный путь к произведению uv есть $v^{-1}u^{-1}$.

2.33. Деформация путей. Два пути $\varphi(\overline{w})$ и $\psi(\overline{w})$ с одним и тем же началом A и одним и тем же концом B называются *гомотопными*, если существует такое непрерывное семейство непрерывных отображений $\varphi_t(\overline{w})$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ отрезка-прообраза $\overline{w} = \overline{AB}$ в поверхность R, что $\varphi_0(\overline{w}) = \varphi(\overline{w})$, $\varphi_1(\overline{w}) = \psi(\overline{w})$ и $\varphi_t(\overline{A}) = A$, $\varphi_t(\overline{B}) = B$ для каждого t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Если в качестве прообраза пути φ_t вместо отрезка $\overline{w}$ взять параллельный ему отрезок на расстоянии t, то семейство отображений φ_t можно рассматривать как непрерывное отображение в поверхность R прямоугольника с основанием $\overline{w}$ и высотой, равной

[1]) Отметим различие с определением равенства 1-симплексов.

единице, называемого *прямоугольником деформации*. При этом $\overline{w}$ и противоположное ему основание прямоугольника переходят соответственно в пути $\varphi(\overline{w})$ и $\psi(\overline{w})$, в то время как боковые его стороны переходят соответственно в начало и в конец этих путей.

Если путь u гомотопен пути v и v гомотопен w, то u гомотопен w. Если u, v гомотопны соответственно u', v' и конец пути u совпадает с началом пути v, то путь uv гомотопен $u'v'$. Если в произведении uv один из множителей есть точечный путь, то произведение гомотопно другому множителю.

Замкнутый путь называется *гомотопным нулю*, если он гомотопен своему началу (рассматриваемому как точечный путь). Каждое произведение ww^{-1} гомотопно нулю.

2.34. Классы путей. Фундаментальная группа. Так как гомотопия рефлексивна, симметрична и транзитивна, то она определяет разбиение всех путей, соединяющих друг с другом две фиксированные точки, на классы гомотопных путей. Рассмотрим, в частности, замкнутые пути на R, выходящие из фиксированной точки O. Они распадаются на непересекающиеся классы гомотопных путей. Один из этих классов образуют пути, гомотопные нулю.

Для этих классов путей следующим образом вводится умножение: двум классам (u) и (v) ставится в соответствие в качестве произведения класс пути uv. Класс (uv) не зависит от частного выбора путей u и v, он зависит только от классов (u) и (v).

Определенное таким образом умножение удовлетворяет групповым аксиомам: класс гомотопных нулю путей играет при этом роль единичного элемента, и каждый класс (u) имеет обратный к нему класс, а именно класс, определяемый путем u^{-1}. Таким образом, классы замкнутых путей, выходящих из точки O, образуют группу F_O.

Если вместо O взять в качестве начальной точки замкнутых путей точку O', то аналогично получим группу $F_{O'}$. Покажем, что группы F_O и $F_{O'}$ изоморфны. Для этого соединим точки O и O' произвольным путем l и каждому выходящему из O замкнутому пути w поставим в соответствие замкнутый путь $l^{-1}wl$, выходящий из O'. Если w и w_1 — два гомотопных пути, выходящих из O, то и пути $l^{-1}wl$, $l^{-1}w_1l$ гомотопны. Следовательно, каждому классу путей из F_O соответствует класс путей из $F_{O'}$. При этом *каждый* класс из $F_{O'}$ является образом класса из F_O. В самом деле, если (w') — произвольный класс из $F_{O'}$, то путь w' гомотопен пути $l^{-1}lw'l^{-1}l = l^{-1}(lw'l^{-1})l$, который является образом пути $lw'l^{-1}$. Далее, при нашем отображении произведение классов переходит в произведение классов, являющихся их образами. Действительно, если u — путь из (u) и v — путь из (v), то произведению uv соответствует путь $l^{-1}uvl$, гомотопный $(l^{-1}ul)(l^{-1}vl)$. Следовательно, мы имеем гомоморфное отображение F_O на $F_{O'}$.

Кроме того, это отображение взаимно однозначно. В самом деле, если образы $l^{-1}\omega l$, $l^{-1}\omega_1 l$ двух путей ω, ω_1 гомотопны, то, умножая эти образы слева на l и справа на l^{-1}, получаем, что и ω, ω_1 гомотопны. Следовательно, различные классы путей переходят в различные классы. Поэтому гомоморфизм $F_O \to F_{O'}$ является изоморфизмом.

Группа $F = F_O$, которая с точностью до изоморфизма не зависит от выбора точки O, называется *фундаментальной группой* поверхности R.

В общем случае фундаментальная группа не абелева. Например, как будет выяснено в п. 3.24, фундаментальная группа плоскости с двумя выколотыми точками является свободной группой с двумя образующими [1]).

Если группа F тривиальна [2]), то поверхность R называется *односвязной*. Например, поверхность сферы и числовая плоскость односвязны. Можно показать, что это единственные односвязные поверхности [3]).

2.35. Топологическая инвариантность фундаментальной группы. Если φ — непрерывное отображение поверхности R в поверхность R', то оно каждый путь ω на R переводит в путь ω' на R', причем пути, гомотопные на R, — в пути, гомотопные на R'. Поэтому отображение φ осуществляет гомоморфное отображение h фундаментальной группы F поверхности R в фундаментальную группу F' поверхности R'. Если отображение φ — топологическое, то обратное отображение определяет аналогично гомоморфное отображение h' группы F' в F. Последнее является обращением первого, ибо произведение $h'h$ переводит каждый класс путей на F в себя. Точно так же hh' сохраняет классы путей на F'. Отсюда следует, что h есть изоморфное отображение F на всю группу F'. Следовательно, гомеоморфные поверхности имеют изоморфные фундаментальные группы.

2.36. Связь между фундаментальной группой и одномерной группой гомологий. Каждому замкнутому пути ω на поверхности R можно поставить в соответствие особый 1-цикл z^1, разбивая для этого произвольно отрезок-прообраз пути ω на конечное число настолько мелких частей, чтобы образ каждой из них лежал целиком в одной

---

[1]) Имеется в виду числовая плоскость, не включающая бесконечно удаленную точку, следовательно, рассматриваемая область *трехсвязна*. Для двусвязной области фундаментальная группа изоморфна бесконечной циклической группе. — *Прим. перев.*

[2]) То есть все замкнутые пути на F гомотопны нулю. — *Прим. перев.*

[3]) Для римановых поверхностей это непосредственно следует из теоремы Римана (гл. VI). Отсюда, согласно п. 2.90, та же теорема получается, более общо, для каждой ориентируемой триангулируемой поверхности.

параметрической окрестности, и переводя их в поверхность R с помощью определяющего w отображения. Цикл z^1 не определяется однозначно путем w, поскольку он зависит от способа разбиения отрезка-прообраза, однако класс гомологий определяется однозначно. Мы покажем, что вообще два цикла z_1^1 и z_2^1, принадлежащие двум гомотопным путям w_1 и w_2, гомологичны.

Для доказательства возьмем в качестве прообразов $\overline{w}_1$ и $\overline{w}_2$ соответственно путей w_1 и w_2 параллельные стороны прямоугольника деформации. Затем дополним уже имеющиеся на этих параллельных сторонах (благодаря циклам z_1^1 и z_2^1) разбиения до разбиения всего прямоугольника на треугольники; их можно взять настолько мелкими, чтобы образ каждого из них на R лежал в параметрической окрестности. Треугольники можно двумя способами ориентировать так, чтобы всякие два треугольника, имеющие общую сторону, индуцировали на ней противоположные ориентации (когерентная ориентация). Мы остановимся, например, на той, которая на $\overline{w}_1$ индуцирует первоначально имевшуюся там ориентацию. Ориентированные таким образом треугольники, отображенные в поверхность R с помощью преобразования деформации, определяют особую 2-цепь с границей $z_1^1 - z_2^1$. Но это и означает, что z_1^1 и z_2^1 гомологичны.

Тем самым соответствие $w \to z^1$ определяет однозначное отображение фундаментальной группы F в одномерную группу гомологий H^1 поверхности R. Это — гомоморфное отображение, ибо, как непосредственно следует из построения, произведению двух путей отвечает сумма соответствующих циклов. В частности, гомотопные нулю пути переходят в гомологичные нулю 1-циклы.

Соответствие $w \to z^1$ есть отображение на всю группу H^1. В самом деле, по лемме, которая будет доказана в п. 2.39, всякий 1-цикл z^1 может быть записан в виде суммы симплексов $z^1 = \sum_{r=1}^{m} \sigma_r^1$, где начало $\sigma_{\mu+1}^1$ совпадает с концом σ_μ^1 ($\mu = 1, 2, \ldots, m \pmod m$). Если каждый 1-симплекс σ_μ^1 рассматривать как путь w_μ, то произведение $w = w_1 \ldots w_m$ переходит в 1-цикл z^1.

2.37. Мы хотим теперь найти *ядро* этого гомоморфизма, т. е. ту подгруппу фундаментальной группы F, классы путей которой переходят в гомологичные нулю 1-циклы. В это ядро наверное входят классы путей, принадлежащих коммутанту C группы F[1]), ибо каждый путь, представимый в виде коммутатора, переходит в нулевой 1-цикл, следовательно, и произведение таких путей. Мы покажем,

[1]) Это подгруппа группы F, образованная коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$; она всегда является нормальным делителем.

обратно, что этим исчерпываются все классы путей, переходящих в гомологичные нулю 1-циклы.

Пусть w — путь, соответствующий 1-цикл которого $z^1 = \sum_{\nu=1}^{n} \sigma_\nu^1$ гомологичен нулю. Это значит, что существует такая особая 2-цепь $\alpha^2 = \sum_{1}^{m} c_\mu \sigma_\mu^2$, что $\partial\alpha^2 = z^1$. Выберем теперь в каждом симплексе σ_μ^2 вершину P_μ и соединим ее с началом O пути w путем p_μ (ориентированным в направлении от O к P_μ). Если s_μ означает замкнутый путь, образованный тремя сторонами симплекса σ_μ^2 (с индуцированной σ_μ^2 ориентацией), то путь $p_\mu s_\mu p_\mu^{-1}$ гомотопен нулю, поэтому путь w гомотопен пути $w_1 = w(p_1 s_1 p_1^{-1})^{-c_1} \ldots (p_m s_m p_m^{-1})^{-c_m}$. Но соответствующий этому пути 1-цикл, как нетрудно проверить, есть цикл $z^1 = 0$. Поэтому достаточно рассмотреть путь, которому соответствует 1-цикл $z^1 = 0$.

2.38. Пусть w — такой путь. Он обладает разложением вида

$$w = w_1 \ldots w_n,$$

где каждый множитель имеет сумму показателей, равную нулю. Мы построим сначала другое разложение, в котором каждый множитель есть замкнутый путь, выходящий из O. Для этого соединим конец пути w_ν с точкой O произвольным путем p_ν. Если концы путей w_ν и w_μ одинаковы, то пусть и пути p_ν и p_μ будут одинаковы. При этом пусть соответствующий O путь есть сама точка O. Если тогда в предыдущее разложение включить после каждого множителя w_ν соответствующий пробегаемый туда и обратно путь p_ν, то получим гомотопный w путь

$$w^* = (w_1 p_1)(p_1^{-1} w_2 p_2) \ldots (p_{n-1}^{-1} w_n)$$

или, если положить $u_1 = w_1 p_1$, $u_\nu = p_{\nu-1}^{-1} w_\nu p_\nu$ и $u_n = p_{n-1}^{-1} w_n$,

$$w^* = u_1 u_2 \ldots u_n.$$

Теперь все множители u_ν являются замкнутыми путями, выходящими из O. Далее, каждый путь входит с суммой показателей, равной нулю. В самом деле, если в разложении w для двух определенных значений ν и μ имеем $w_\nu = w_\mu$, то начала и концы w_ν и w_μ соответственно совпадают, поэтому $p_{\nu-1} = p_{\mu-1}$ и $p_\nu = p_\mu$, следовательно, и $u_\nu = u_\mu$. Точно так же из $w_\nu = w_\mu^{-1}$ следует, что $u_\nu = u_\mu^{-1}$.

Теперь переведем w^* в произведение коммутаторов. Так как u_1 входит с суммой показателей, равной нулю, то в w^* должен входить путь u_1^{-1}. Если U означает часть разложения между u_1 и u_1^{-1} (она

может отсутствовать), то w^* имеет вид $u_1 U u_1^{-1} V$, а этот путь гомотопен пути $u_1 U u_1^{-1} U^{-1} U V$. Здесь на первом месте уже стоит коммутатор, а остаток UV имеет двумя множителями меньше, чем w^*. В остаток снова каждый путь входит с суммой показателей, равной нулю, так как это имеет место для всего пути w^* и найденного коммутатора. Поэтому предыдущее построение можно продолжить, пока, наконец, мы получим одни лишь коммутаторы.

Этим показано, что ядро гомоморфизма $F \to H^1$ есть коммутант C группы F. По теореме о гомоморфизме, группа H^1 изоморфна фактор-группе F/C.

2.39. Доказательство леммы. Нам нужно еще доказать упомянутую в п. 2.36 лемму. Докажем ее в более общем виде:

Особая цепь α^1, граница которой является разностью двух (не обязательно совпадающих) 0-симплексов, $\partial\alpha^1 = {}'\sigma^0 - \sigma^0$, может быть записана в виде $\alpha^1 = \sum \tau_\mu^1$, где конец симплекса τ_μ^1 совпадает с началом симплекса $\tau_{\mu+1}^1$ $(\mu = 1, \ldots, m-1)$.

Для доказательства предположим, что $\alpha^1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \sigma_\nu^1$; сначала можно α^1 записать так, чтобы все c_ν были положительны, так как этого можно добиться переменой ориентации отдельных симплексов. После этого проводим доказательство индукцией по сумме коэффициентов $s = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu$. Если $s = 1$, то α^1 состоит только из одного симплекса и уже имеет желательную форму. Допустим, что лемма справедлива для $s \leqslant N$ и α^1 — цепь с $s = N+1$. Так как, по предположению, $\partial\alpha^1 = {}'\sigma^0 - \sigma^0$, то среди 1-симплексов σ_ν^1 должен найтись такой, скажем σ^1, конец которого есть 0-симплекс ${}'\sigma^0$. Если мы обозначим начало σ^1 через ${}''\sigma^0$, то

$$\partial\sigma^1 = {}'\sigma^0 - {}''\sigma^0.$$

Рассмотрим теперь цепь $\beta^1 = \alpha^1 - \sigma^1$. Для ее границы имеем

$$(a) \qquad \partial\beta^1 = \partial\alpha^1 - \partial\sigma^1 = ({}'\sigma^0 - \sigma^0) - ({}'\sigma^0 - {}''\sigma^0) = {}''\sigma^0 - \sigma^0,$$

и сумма ее коэффициентов равна N. Поэтому, по предположению индукции, β^1 можно записать в виде суммы

$$\beta^1 = \sum_{\mu=1}^{m} \tau_\mu^1,$$

где конец τ_μ^1 совпадает с началом $\tau_{\mu+1}^1$ ($\mu = 1, \ldots, m-1$). Если ${}'\tau_m^0$ — конец симплекса τ_m^1 и τ_1^0 — начало τ_1^1, то

$$(b) \qquad \partial\beta^1 = {}'\tau_m^0 - \tau_1^0.$$

Сравним теперь правые части (a) и (b). Если ${}''\sigma^0 \neq \sigma^0$, то получается, что ${}'\tau_m^0 = {}''\sigma^0$; следовательно, конец τ_m^1 совпадает с началом σ^1, и тогда

$$\alpha^1 = \sum_{\mu=1}^{m} \tau_\mu^1 + \sigma^1$$

— требуемое представление цепи α^1.

Если же ${}''\sigma^0 = \sigma^0$, то $\partial\beta^1 = 0$ и тем самым ${}'\tau_m^0 = \tau_1^0$. В этом случае соединим ${}'\sigma^0$ с τ_1^0 произвольным путем γ^1 и запишем α^1 в виде

$$\alpha^1 = \sigma^1 + \gamma^1 + \sum_{\mu} \tau_\mu^1 + (-\gamma^1)$$

(причем γ^1 следует рассматривать как особую 1-цепь). Это, очевидно, требуемое представление α^1.

§ 4. ПОВЕРХНОСТИ НАЛОЖЕНИЯ

2.40. Неразветвленные поверхности наложения. Пусть $\tilde{R}$ и R — две произвольные поверхности (компактные или нет) и σ — однозначное отображение $\tilde{R}$ на R со следующим свойством, описывающим взаимную однозначность отображения в малом:

Для каждой точки $\tilde{P} \in \tilde{R}$ существует окрестность $\tilde{U}$, которая топологически отображается на некоторую окрестность U образа P этой точки[1]).

Под *отмеченной окрестностью* точки $\tilde{P}$ мы будем понимать окрестность этой точки, гомеоморфную кругу и отображаемую посредством σ топологически[2]). Предыдущее определение эквивалентно тому, что каждая точка поверхности $\tilde{R}$ имеет отмеченную окрестность. Если в дальнейшем речь идет об отмеченной окрестности точки $\tilde{P}$, то под этим подразумевается произвольно выбранная, но фиксированная такая окрестность.

Говорят, что $\tilde{P}$ лежит *над* P; $\tilde{R}$ называется *неразветвленной поверхностью наложения* поверхности R. Отображение σ называется *проектированием*, точка P — *проекцией* (или *следом*)[3]) точки $\tilde{P}$.

---

[1]) При этом *не* требуется, чтобы окрестность U точки P была *одной и той же* для всех ее прообразов $\tilde{P}$.

[2]) Иногда и σ-образ отмеченной окрестности автор называет отмеченной окрестностью. — *Прим. перев.*

[3]) В оригинале Spurabbildung и Spurpunkt. — *Прим. перев.*

Множество $(\tilde{P})$ прообразов точки $P \in R$ не может иметь на $\tilde{R}$ точек сгущения. Действительно, если бы $\tilde{P}^*$ была такой точкой, то ни в какой ее окрестности проектирование не было бы взаимно однозначным. Отсюда следует, что если $\tilde{R}$ удовлетворяет аксиоме счетности, то множество $(\tilde{P})$ не более чем счетно. Над каждой точкой поверхности R лежит тогда самое большее счетное число точек поверхности $\tilde{R}$.

2.41. Проектирование σ непрерывно. В самом деле, пусть $\tilde{P}$ — точка $\tilde{R}$, P — ее образ на R и V — произвольная окрестность точки P. Если U — образ отмеченной окрестности $\tilde{U}$ точки $\tilde{P}$, то пересечение UV есть окрестность точки P относительно U, поэтому существует окрестность $\tilde{W}$ точки $\tilde{P}$ относительно $\tilde{U}$, σ-образ которой лежит в UV. Но $\tilde{W}$ — окрестность точки $\tilde{P}$ относительно $\tilde{R}$. Ее σ-образ лежит целиком в V, что, согласно п. 2.7, означает непрерывность проектирования σ.

2.42. Проектирование σ переводит каждое открытое множество $\tilde{M}$ поверхности $\tilde{R}$ в открытое множество M поверхности R. Действительно, пусть P — точка M и $\tilde{P}$ — точка над P, принадлежащая $\tilde{M}$. Если $\tilde{U}$ — отмеченная окрестность точки $\tilde{P}$, то пересечение $\tilde{U}\tilde{M}$ открыто в $\tilde{U}$, а так как отображение $\tilde{U} \to U$ — топологическое, то и образ этого пересечения есть открытое множество в U. Это означает, что M открыто в R.

Следовательно, непрерывное отображение σ подавно удовлетворяет условиям п. 2.13. Тем самым поверхность R гомеоморфна пространству, получаемому из $\tilde{R}$ отождествлением его точек, имеющих одну и ту же проекцию, причем этот гомеоморфизм задается тем, что каждому классу $(\tilde{P})$ ставится в соответствие общая проекция P; другими словами, поверхность R получается из поверхности $\tilde{R}$ отождествлением точек с одной и той же проекцией.

Если, в частности, отображение σ взаимно однозначно, так что над каждой точкой поверхности R лежит только *одна* точка поверхности $\tilde{R}$, то из предыдущего вытекает, что σ — топологическое отображение $\tilde{R}$ на R[1]).

2.43. Перенесение путей[2]). Каждому пути $\tilde{w}$ на $\tilde{R}$ отвечает на R, в силу проектирования, путь $w = \sigma\tilde{w}$ — *проекция* пути $\tilde{w}$.

---

[1]) Нетривиальное в этом заключении состоит в том, что и обращение отображения непрерывно.

[2]) В оригинале „Durchdrücken von Wegen". — *Прим. перев.*

Мы спрашиваем, обратно, нельзя ли путь w, заданный на R, перенести на $\tilde{R}$; точнее говоря, если w — путь на R и $\tilde{A}$ — произвольная точка $\tilde{R}$ над началом A пути w, то существует ли *путь наложения* $\tilde{w}$, выходящий из $\tilde{A}$ и имеющий w своей проекцией?

Сначала мы покажем, что путь $\tilde{w}$, если он существует, *определяется однозначно* путем w и началом $\tilde{A}$. Пусть $\tilde{w}$ и $\tilde{w}_1$ — два пути над w с началом $\tilde{A}$. Будем оба эти пути рассматривать как непрерывные образы единичного отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$: $\tilde{w} = \tilde{P}(t)$, $\tilde{w}_1 = \tilde{P}_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$. По предположению, проекции $\sigma\tilde{w}$ и $\sigma\tilde{w}_1$ совпадают, т. е. существует такое топологическое отображение $\tau(t)$ единичного отрезка на себя, сохраняющее его концы, что $\sigma\tilde{P}_1(t) = \sigma\tilde{P}(\tau(t))$. Полагая $\tilde{Q}(t) = \tilde{P}(\tau(t))$, имеем

$$\sigma\tilde{P}_1(t) = \sigma\tilde{Q}(t) \tag{2.4}$$

и, кроме того, $\tilde{P}_1(0) = \tilde{Q}(0) = \tilde{A}$. Нужно показать, что $\tilde{P}_1(t) = \tilde{Q}(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть $\{t\}$ — множество значений t, для которых это равенство имеет место. Если t_0 — точка из $\{t\}$, то существует такое число $\delta > 0$, что и δ-окрестность точки t_0 (относительно единичного отрезка) принадлежит $\{t\}$: достаточно δ взять настолько малым, чтобы $\tilde{P}_1(t)$ и $\tilde{Q}(t)$ для всех точек δ-окрестности точки t_0 принадлежали отмеченной окрестности точки $\tilde{P}_1(t_0)$.

Если, далее, t^* — точка сгущения множества $\{t\}$, то и t^* принадлежит $\{t\}$. Так как, наконец, множество $\{t\}$ не пусто (ибо оно содержит точку $t = 0$), то из предыдущих двух свойств следует, что оно заполняет весь единичный отрезок, что и требовалось доказать.

2.44. Две поверхности наложения $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ поверхности R рассматриваются как одинаковые (равные), если существует такое топологическое отображение $\tilde{R}_1$ на $\tilde{R}_2$, что соответствующие друг другу точки имеют одну и ту же проекцию.

Из предыдущей теоремы единственности вытекает, что каждое такое отображение τ *однозначно* определяется точкой $\tilde{P}_1$ поверхности $\tilde{R}_1$ и ее образом $\tilde{P}_2$ на $\tilde{R}_2$.

Действительно, пусть $\tilde{Q}_1$ — произвольная точка поверхности $\tilde{R}_1$ и $\tilde{w}_1$ — путь, ведущий из $\tilde{P}_1$ в $\tilde{Q}_1$. Ему соответствует на $\tilde{R}_2$ путь $\tilde{w}_2$, выходящий из $\tilde{P}_2$ и оканчивающийся в точке $\tilde{Q}_2$ — образе $\tilde{Q}_1$. По предположению относительно отображения τ, оба пути $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}_2$ лежат над одним и тем же путем w на R. Следовательно, $\tilde{w}_2$ — путь на $\tilde{R}_2$, выходящий из $\tilde{P}_2$ и лежащий над путем w. По предыдущему, такой путь однозначно определяется путем w и точкой $\tilde{P}_2$. Тем самым точка $\tilde{Q}_2$

однозначно определяется точкой $\tilde{Q}_1$, а так как точка Q_1 была выбрана произвольно, то это справедливо для всего отображения τ.

Для того частного случая, когда поверхности $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}_2$ совпадают, эта теорема говорит следующее: при заданной основной поверхности R топологическое отображение поверхности наложения $\tilde{R}$ на себя, оставляющее неизменными проекции на R, однозначно определяется заданием одной точки и ее образа.

2.45. Безграничные поверхности наложения. Остается выяснить, всякий ли путь w на R может быть перенесен на $\tilde{R}$. В п. 2.52 мы увидим, что в общем случае это не так и что для возможности такого перенесения проектирование σ должно удовлетворять следующим дополнительным условиям:

I. *Если P — точка поверхности R, то отмеченные окрестности $\tilde{U}$ ее прообразов $\tilde{P}$ можно выбрать так, что пересечение их образов $\sigma(\tilde{U})$ содержит окрестность U точки P*[1]).

II. *Если Q — точка окрестности U, то все лежащие над Q точки принадлежат объединению $\sum \tilde{U}$.*

Если эти условия выполняются, то $\tilde{R}$ называется *безграничной* поверхностью наложения поверхности R.

Пусть $\tilde{R}$ — поверхность наложения R и R' — поверхность, являющаяся частью R. Множество прообразов точек поверхности R' на $\tilde{R}$ есть двумерное многообразие[2]) $\tilde{R}'$, являющееся поверхностью наложения R' в силу проектирования $\tilde{R} \to R$. Если $\tilde{R}$ как поверхность наложения R *безгранична*, то это же справедливо для $\tilde{R}'$ как поверхности наложения R'. В самом деле, легко проверить, что оба условия безграничности переносятся на R'.

2.46. То, что безграничность необходима для возможности неограниченного перенесения путей из R на $\tilde{R}$, будет доказано, как уже упоминалось, в п. 2.52. Сначала мы покажем обратное, т. е. что каждый путь w, заданный на R, можно перенести на безграничную поверхность наложения $\tilde{R}$; точнее говоря, докажем следующее:

Если $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения поверхности R, w — произвольный путь на R и $\tilde{A}$ — точка на $\tilde{R}$, лежащая над на-

---

[1]) Если каждую окрестность $\tilde{U}$ заменить на $\sigma^{-1}(U)$, то условие I можно формулировать так: для каждого прообраза $\tilde{P}$ точки P существует окрестность $\tilde{U}$, отображаемая топологически на *фиксированную* окрестность U точки P.

[2]) Если только оно связно.

чалом A пути w, то существует путь наложения $\tilde{w}$ пути w, выходящий из $\tilde{A}$.

Доказательство. а) Предположим сначала, что путь w лежит в отмеченной окрестности U некоторой точки Q [1]). Тогда, по условию II, выбранная над A точка $\tilde{A}$ лежит в отмеченной окрестности $\tilde{U}$ подходящим образом выбранного прообраза точки Q и путь w можно топологически перенести из U в $\tilde{U}$.

в) Если, далее, w — произвольный путь, то, по условию I, каждой его точке отвечает отмеченная окрестность. Поэтому вокруг каждой точки $\overline{P}$ отрезка-прообраза $\overline{w}$ существует интервал, образ которого лежит целиком в отмеченной окрестности точки P. Следовательно, по лемме Гейне — Бореля, можно отрезок $\overline{w}$ разбить на конечное число столь малых интервалов, чтобы образ каждого из них лежал целиком в отмеченной окрестности некоторой (подходящим образом выбранной) точки пути w. Соответственно этому путь w распадается на конечное число путей: $w = w_1 w_2 \ldots w_n$.

Пусть P_ν — конец пути w_ν ($\nu = 1, \ldots, n$). Если $\tilde{A}$ — произвольная точка над A, то для пути w_1 можно, по а), построить путь наложения $\tilde{w}_1$, выходящий из $\tilde{A}$. Его конец $\tilde{P}_1$ лежит над P_1. Затем для пути w_2 строим путь наложения $\tilde{w}_2$, выходящий из $\tilde{P}_1$, что снова возможно по а). После n шагов получим путь, выходящий из $\tilde{A}$ и расположенный над путем w.

2.47. Число листов. Пусть $\tilde{R}$ — поверхность наложения поверхности R. Пусть P и Q — две точки R и $\tilde{P}_\nu$, $\tilde{Q}_\mu$ — лежащие над ними точки. Между точками $\tilde{P}_\nu$ и $\tilde{Q}_\mu$ можно следующим образом установить взаимно однозначное соответствие. Соединим точки P и Q путем w и каждой точке $\tilde{P}_\nu$ поставим в соответствие конец пути, выходящего из $\tilde{P}_\nu$ и расположенного над путем w. Обратно, каждой точке $\tilde{Q}_\mu$ поставим в соответствие конец пути, выходящего из $\tilde{Q}_\mu$ и расположенного над w^{-1}. Второе отображение, очевидно, является обращением первого, и требуемое соответствие установлено.

Если над точкой P поверхности R лежит *конечное* число точек $\tilde{R}$, то, по предыдущему, это справедливо для всех точек поверхности R, причем это число не зависит от выбора P; оно называется *числом листов* наложения. Если число точек над какой-либо точкой поверхности R бесконечно велико, то $\tilde{R}$ называется *конечнолистной* поверхностью наложения.

---

[1]) Имеется в виду окрестность U, определяемая для точки Q согласно условию I. То же для указанных ниже окрестностей точек w. — *Прим. перев.*

2.48. Если $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения R и над точкой P поверхности R лежит конечное число точек $\tilde{R}$, то их число, согласно п. 2.47, не зависит от P. Пусть теперь, обратно, $\tilde{R}$ — поверхность наложения (не обязательно безграничная) поверхности R. Предположим, что число g ее точек, лежащих над точкой P поверхности R, конечно и от P не зависит. Тогда $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения.

Действительно, пусть $\tilde{U}_r$ $(r = 1, \ldots, g)$ — соответствующие $\tilde{P}_r$ отмеченные окрестности, которые мы предположим не имеющими общих точек, и V — гомеоморфная кругу окрестность точки P, содержащаяся в пересечении образов $\sigma(\tilde{U}_r)$ $(r = 1, \ldots, g)$. В $\tilde{U}_r$ ей соответствуют гомеоморфные кругу окрестности $\tilde{V}_r$. Следовательно, V — не зависящая от r гомеоморфная кругу окрестность точки P, и тем самым первое условие безграничности выполняется. Если Q — точка V, то в каждой окрестности $\tilde{V}_r$ лежит прообраз $\tilde{Q}_r$ точки Q. Так как, по предположению, существуют только g прообразов, то множество точек $\tilde{Q}_r$ должно включать все точки над Q, следовательно, каждый прообраз точки Q принадлежит множеству $\sum_r V_r$. Это — второе условие безграничности.

2.49. Пусть $\tilde{R}$ — поверхность наложения (не обязательно безграничная) поверхности R. Предположим, что $\tilde{R}$ *компактна*; тогда и R компактна. Мы покажем, что при этом условии поверхность $\tilde{R}$ необходимо *безгранична*.

Прежде всего, из компактности $\tilde{R}$ следует, что над каждой точкой P поверхности R лежит только конечное число точек $\tilde{P}_\nu$. Пусть P — точка R и $\tilde{P}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ — ее прообразы. Каждой точке $\tilde{P}_\nu$ отвечает отмеченная окрестность $\tilde{U}_\nu$, топологически отображаемая на окрестность U_ν точки P. Мы покажем, что существует окрестность U точки P, такая, что *все* прообразы любой ее точки Q принадлежат объединению $\tilde{V} = \sum \tilde{U}_\nu$.

Для доказательства допустим от противного, что в каждой окрестности точки P лежит точка Q, некоторый прообраз которой, назовем его $\tilde{Q}$, лежит в $\tilde{R} - \tilde{V}$. Если тогда Q_ν — последовательность подобных точек, сходящаяся к P, то соответствующая последовательность $\tilde{Q}_\nu$, поскольку она лежит на компактной части $\tilde{R} - \tilde{V}$ поверхности R, должна иметь там точку сгущения $\tilde{P}_0$. Эта точка, в силу непрерывности проектирования, должна переходить в P, поэтому она должна быть одной из точек $\tilde{P}_\nu$, лежащих над P; с другой сто-

роны, она лежит в дополнительном множестве $\tilde{R} - \tilde{V}$, что приводит к противоречию.

Таким образом, как утверждалось, существует окрестность U точки P, прообраз которой $\sigma^{-1}(U)$ лежит в $\tilde{V}$. Пусть U^* означает теперь гомеоморфную кругу окрестность точки P, лежащую в пересечении $UU_1 \ldots U_n$. В каждой окрестности $\tilde{U}_\nu$ ей отвечает гомеоморфная кругу окрестность $\tilde{U}_\nu^*$ точки $\tilde{P}_\nu$. Следовательно, первое условие безграничности выполняется.

Если теперь Q — произвольная точка U^*, то каждый ее прообраз лежит в некоторой окрестности $\tilde{U}_\nu$, и так как соответствие $\tilde{U}_\nu \to U_\nu$ взаимно однозначно, то этот прообраз необходимо лежит в $\tilde{U}_\nu^*$. Это означает, что и второе условие безграничности выполняется.

2.50. Так как, по предыдущему, из компактности поверхности наложения $\tilde{R}$ следует ее безграничность, то она имеет определенное конечное число листов. Обратно, справедливо утверждение, что безграничная конечнолистная поверхность наложения компактной поверхности R сама компактна. Для доказательства рассмотрим бесконечную последовательность точек $\tilde{P}^\nu$ на $\tilde{R}$. Последовательность проекций P^ν, в силу компактности R, имеет точку сгущения P. Над P лежит конечное число точек $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_m$. Относительно последовательности P^ν мы можем предполагать, что она сходится к P. Тогда для достаточно большого $\nu > N$ точки P^ν лежат в отмеченной окрестности U точки P. Все m прообразов такой точки P^ν, тем самым и точки $\tilde{P}^\nu (\nu > N)$, должны поэтому лежать в отмеченных окрестностях $\tilde{U}_1, \ldots, \tilde{U}_m$, расположенных над U. Так как этих окрестностей конечное число, то по крайней мере одна из них, скажем $\tilde{U}_1$, содержит бесконечно много точек $\tilde{P}^\nu$, и так как отображение $\tilde{U}_1 \to U$ — топологическое, то последовательность $\tilde{P}^\nu$ сходится к точке $\tilde{P}_1$. Таким образом, последовательность $\tilde{P}^\nu$ имеет на $\tilde{R}$ точку сгущения, т. е. поверхность $\tilde{R}$ компактна.

2.51. Перенесение деформаций. Пусть $\tilde{R}$ — поверхность наложения (не обязательно безграничная) поверхности R. Если $\tilde{w}_0$ и $\tilde{w}_1$ — два гомотопных пути на $\tilde{R}$, то, в силу непрерывности проектирования, проекции этих путей также гомотопны. Мы покажем, что справедливо обратное.

Пусть w_0 и w_1 — два гомотопных пути на R, ведущие из A в B. Пусть $\tilde{A}$ — точка над A и все пути w_τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ деформации $w_0 \to w_1$ имеют соответствующие им пути наложения $\tilde{w}_\tau$, выходящие

из $\tilde{A}$. Тогда пути наложения w_0 и $\tilde{w}_1$, выходящие из $\tilde{A}$, оканчиваются на $\tilde{R}$ в одной и той же точке и гомотопны.

По предположению, существует непрерывное отображение $P(t, \tau)$ прямоугольника $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ в поверхность R, производящее деформацию $w_0 \to w_1$. Затем, по предположению, для каждого фиксированного $\tau = \tau_0$ путь $P(t, \tau_0)$ имеет соответствующий ему путь наложения на $\tilde{R}$, выходящий из $\tilde{A}$, т. е. существует такое непрерывное отображение $\tilde{P}(t, \tau_0)$, что $\sigma\tilde{P}(t, \tau_0) = P(t, \tau_0)$. Этим определяется однозначное отображение $\tilde{P}(t, \tau)$ прямоугольника деформации в поверхность $\tilde{R}$. Мы покажем, что это отображение непрерывно.

Пусть (t_0, τ_0) — точка прямоугольника. Рассмотрим путь $\tilde{P}(t, \tau_0)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; каждой точке $\tilde{P}(t, \tau_0)$ отвечает отмеченная окрестность $\tilde{U}_t$. Так как отображение $\tilde{P}(t, \tau_0)$ (при фиксированном τ_0) непрерывно, то отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$ можно разбить на конечное число настолько малых отрезков $t_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+1}$, что образ каждого из них лежит целиком в отмеченной окрестности $\tilde{U}_\nu$ подходящим образом выбранной точки $\tilde{P}(t_\nu^*, \tau_0)$. Точка t_0 принадлежит одному из отрезков разбиения, и можно считать, не ограничивая общности, что она является внутренней точкой этого отрезка, т. е. $t_\nu < t_0 < t_{\nu+1}$.

Рассмотрим теперь образ U_ν окрестности $\tilde{U}_\nu$ на R. Пусть $P(t, \tau_0)$ $(t_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+1})$ лежит целиком в U_ν; тогда, в силу непрерывности отображения $P(t, \tau)$, можно выбрать настолько малое число $\varepsilon > 0$, чтобы образ прямоугольника $t_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+1}$, $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$ также лежал еще в U_ν. Мы утверждаем, что точно так же $\tilde{P}$-образ этого прямоугольника лежит в $\tilde{U}_\nu$. Если бы это было показано, то все доказательство было бы доведено до конца. Действительно, так как отображение $P(t, \tau)$ непрерывно и отображение σ в $\tilde{U}_\nu$ — топологическое, то отсюда следует непрерывность $\tilde{P}(t, \tau)$ в (t_0, τ_0).

Чтобы доказать предыдущее утверждение, начнем с $\nu = 1$. Так как путь $\tilde{P}(t, \tau)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2, |\tau - \tau_0| < \varepsilon)$ выходит из точки $\tilde{A}$, то сначала он должен пробегать в $\tilde{U}_1$. С другой стороны, его проекция $P(t, \tau)$ лежит целиком в окрестности U_1. Поэтому путь $\tilde{P}(t, \tau)$ должен совпадать с (однозначно определенным) путем наложения пути $P(t, \tau)$, выходящим из точки $\tilde{A}$, следовательно, должен *целиком* лежать в $\tilde{U}_1$. Продолжая так дальше, убеждаемся последовательно в том, что пути $\tilde{P}(t, \tau)$ $(t_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+1}, |\tau - \tau_0| < \varepsilon)$ лежат целиком в $\tilde{U}_\nu$. Отсюда следует, что $\tilde{P}$-образ прямоугольника $t_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+1}$, $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$ должен лежать в $\tilde{U}_\nu$, что и требовалось доказать. Итак, отображение $\tilde{P}(t, \tau)$ непрерывно. Далее, оно переводит сторону $\tau = 0$ в путь $\tilde{w}_0$ и сторону $\tau = 1$ — в путь $\tilde{w}_1$, в то

время как сторона $t=0$ переходит в точку $\tilde{A}$. Наконец, так как точка $\tilde{P}(1, \tau)$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ все время лежит над B и непрерывно зависит от τ, то она должна совпадать с точкой $\tilde{B}$ пути $\tilde{P}(t, 0)$. Поэтому $\tilde{P}(t, \tau)$ — деформация $\tilde{w}_0$ в $\tilde{w}_1$.

В частности, если поверхность наложения $\tilde{R}$ безгранична, то условие переносимости путей с R на $\tilde{R}$ выполняется само собой и может быть исключено из условий п. 2.51. Тогда теорема звучит так:

Если w_0 и w_1 — два гомотопных пути на R, то лежащие над ними пути $\tilde{w}_0$ и $\tilde{w}_1$ на безграничной поверхности наложения, выходящие из одной и той же точки $\tilde{A}$, также гомотопны.

2.52. Необходимость требования безграничности для возможности перенесения путей. Теперь мы можем показать, что условия безграничности п. 2.45 необходимы для возможности неограниченного перенесения путей с R на $\tilde{R}$.

Итак, пусть $\tilde{R}$ — поверхность наложения R и каждый путь на R имеет пути наложения, выходящие из каждой точки поверхности $\tilde{R}$, лежащей над его началом. Пусть P — точка поверхности R, K — ее параметрическая окрестность и $\tilde{P}$ — произвольная точка $\tilde{R}$ над P. Соединим точку P с каждой точкой $Q \in K$ путем q, пробегающим в K, и перенесем этот путь на $\tilde{R}$ так, чтобы он начинался в точке $\tilde{P}$, что возможно по предположению. Конец $\tilde{Q}$ этого пути, по п. 2.51, не зависит от выбора пути q в K и лежит над Q. Соответствием $Q \to \tilde{Q}$ устанавливается однозначное отображение τ окрестности K в поверхность $\tilde{R}$. Его обращение есть проектирование σ, и, следовательно, отображение τ взаимно однозначно. Чтобы доказать, что отображение τ является топологическим, нам остается доказать его непрерывность. Для этого мы установим следующие два свойства отображения τ:

1. Если Q — точка K и $\tilde{Q}$ — ее образ, то существует окрестность точки Q, образ которой лежит в отмеченной окрестности $U_{\tilde{Q}}$ точки $\tilde{Q}$.

Действительно, пусть U_Q — образ $U_{\tilde{Q}}$ и V — гомеоморфная кругу окрестность точки Q, лежащая в пересечении KU_Q. Если тогда S — точка из V, то точка $\tau(S)$ получается соединением Q с S путем в V построением его пути наложения на поверхности $\tilde{R}$, выходящего из $\tilde{Q}$. Но этот путь лежит в $U_{\tilde{Q}}$, тем самым — и его конец, точка $\tau(S)$. Таким образом, требуемая окрестность точки Q найдена.

2. Отображение $\sigma\tau$ есть тождество. Это следует непосредственно из построения τ.

Из свойств 1 и 2, в силу леммы, которую мы сейчас докажем, вытекает непрерывность τ. Следовательно, это отображение взаимно

однозначно и непрерывно в обе стороны, т. е. является топологическим.

Поэтому образ $\tau(K)$ окрестности K есть параметрическая окрестность на $\tilde{R}$. Таким образом, фиксированная параметрическая окрестность K точки P отображается топологически на параметрическую окрестность $\tilde{K}$ произвольно выбранного прообраза $\tilde{P}$ точки P, и обращение этого отображения есть σ. Следовательно, условие I п. 2.45 выполняется. Чтобы проверить условие II, предположим, что Q — произвольная точка K и $\tilde{Q}$ — точка на $\tilde{R}$ над Q. Соединим Q с P путем q в K и построим его путь наложения на поверхности $\tilde{R}$, выходящий из $\tilde{Q}$. Конец этого пути лежит тогда над P, следовательно, это вполне определенный прообраз $\tilde{P}$ точки P. Поэтому, по построению отмеченной окрестности $\tilde{K}$ точки $\tilde{P}$, точка $\tilde{Q}$ должна лежать в $\tilde{K}$.

Этим показано, что оба условия п. 2.45 выполняются, т. е. $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения R.

2.53. Нам нужно еще доказать упомянутую в п. 2.52 лемму, которую мы, ввиду ее общего характера и с учетом более поздних приложений, сформулируем следующим образом:

Лемма. *Пусть* $\tilde{R}$ *— произвольная поверхность наложения поверхности* R *и* $\tilde{\varphi}$ *— однозначное отображение произвольного топологического пространства* R_1 *в поверхность* $\tilde{R}$, *обладающее следующими свойствами*:

1. *Каждая точка* P_1 *пространства* R_1 *имеет окрестность* U_1, *образ которой лежит в отмеченной окрестности* $\tilde{U}$ *точки* $\tilde{P} = \tilde{\varphi}(P_1)$ (*отвечающей проектированию* σ: $\tilde{R} \to R$).

2. *Отображение* $\sigma\tilde{\varphi}$ *непрерывно.*

Тогда и отображение $\tilde{\varphi}$ *непрерывно*,.

Доказательство. Пусть P_1 — точка из R_1, $\tilde{P}$ — ее образ на $\tilde{R}$ и $\tilde{V}$ — произвольная окрестность точки $\tilde{P}$. Тогда $\tilde{U}\tilde{V}$ открыто в $\tilde{R}$, следовательно, $\sigma(\tilde{U}\tilde{V})$ открыто в R и поэтому есть окрестность точки $P = \sigma\tilde{\varphi}(P_1)$. В силу непрерывности отображения $\sigma\tilde{\varphi}$, существует окрестность V_1 точки P_1, $\sigma\tilde{\varphi}$-образ которой лежит в $\sigma(\tilde{U}\tilde{V})$. Рассмотрим пересечение U_1V_1. Его $\sigma\tilde{\varphi}$-образ лежит в $\sigma(\tilde{U}\tilde{V})$ и $\tilde{\varphi}$-образ — в $\tilde{U}$. Поэтому, в силу взаимной однозначности отображения σ в $\tilde{U}$, последний образ должен лежать даже в $\tilde{U}\tilde{V}$. Тем самым для точки P_1 найдена окрестность, а именно, U_1V_1, $\tilde{\varphi}$-образ которой лежит в $\tilde{V}$, что согласно п. 2.7, и означает непрерывность отображения $\tilde{\varphi}$.

2.54. Связь между фундаментальными группами. Пусть $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения R. Выберем на R точку O и лежащую над ней точку $\tilde{O}$ на $\tilde{R}$ в качестве начал замкнутых путей. В силу проектирования, каждому замкнутому пути на $\tilde{R}$ соответствует замкнутый путь на R и гомотопные пути на $\tilde{R}$ переходят в гомотопные пути на R. Тем самым каждому классу путей на $\tilde{R}$ соответствует класс путей на R. По п. 2.51, различным классам путей на $\tilde{R}$ отвечают различные классы путей на R. Отсюда вытекает, что проектирование индуцирует изоморфное отображение фундаментальной группы $\tilde{F}$ поверхности $\tilde{R}$ в фундаментальную группу F поверхности R. Следовательно, группа $\tilde{F}$ изоморфна некоторой подгруппе G группы F.

Замкнутому пути w, выходящему из O, тогда и только тогда отвечает замкнутый путь наложения, выходящий из $\tilde{O}$, когда класс пути w принадлежит подгруппе G. В самом деле, если, во-первых, путь наложения замкнут, то он принадлежит определенному классу путей группы $\tilde{F}$, поэтому его проекция w принадлежит одному из классов путей образа $\tilde{F}$, значит, подгруппе G. Если, обратно, класс пути w входит в G, то на $\tilde{R}$ существует замкнутый путь $\tilde{w}_1$, выходящий из $\tilde{O}$, проекция которого w_1 гомотопна w. Тогда, согласно п. 2.51, пути $\tilde{w}_1$ и $\tilde{w}$ имеют один и тот же конец, значит, путь $\tilde{w}$ замкнут.

2.55. Рассмотрим разложение группы F на классы смежности по подгруппе G. Два элемента (u) и (v) группы F (следовательно, два класса путей) тогда и только тогда лежат в одном классе смежности, когда элемент $(u)(v)^{-1}$ принадлежит подгруппе G. Каждый элемент (w) лежит в одном и только в одном классе смежности.

Пусть u и v — два замкнутых пути, выходящих из O. Выходящий из $\tilde{O}$ путь наложения пути uv^{-1}, согласно п. 2.54, тогда и только тогда замкнут, когда класс пути uv^{-1} [т. е. произведение классов (u) и $(v)^{-1}$] принадлежит G, следовательно, когда (u) и (v) лежат в одном и том же классе смежности. Следовательно, выходящие из $\tilde{O}$ пути наложения путей u и v, тогда и только тогда ведут к одной и той же точке (лежащей над O), когда (u) и (v) принадлежат одному и тому же классу смежности. Таким образом, классы смежности соответствуют взаимно однозначно точкам, лежащим над O. Поэтому их число, *индекс* подгруппы G, совпадает с числом листов поверхности наложения. Следовательно, индекс подгруппы G может быть конечным или бесконечным. Если G совпадает со всей группой, индекс, тем самым и число листов, есть 1; тогда проектирование взаимно однозначно, следовательно, это — топологическое отображение.

2.56. Зависимость от начальной точки. Если в качестве начальной точки путей на $\tilde{R}$ выбрать другую лежащую над O точку $\tilde{O}'$, то фундаментальной группе $\tilde{F}'$, отвечающей $\tilde{O}'$, соответствует в общем случае другая подгруппа G' группы F. Из изоморфизмов $G \cong \tilde{F}$, $\tilde{F} \cong \tilde{F}'$, $\tilde{F}' \cong G'$ следует, что $G \cong G'$. Этот изоморфизм $G \to G'$ легко построить: если $\tilde{a}$ — произвольный путь, ведущий на $\tilde{R}$ из $\tilde{O}$ в $\tilde{O}'$, то соответствием

$$\tilde{w} \to \tilde{a}^{-1}\tilde{w}\tilde{a},$$

согласно п. 2.34, задается изоморфное отображение $\tilde{F}$ на $\tilde{F}'$. Соединяя вместе три изоморфизма $G \to \tilde{F}$, $\tilde{F} \to \tilde{F}'$, $\tilde{F}' \to G'$, получаем изоморфизм $G \to G'$, характеризуемый тем, что каждому элементу (w) из G ставится в соответствие элемент $(a)^{-1}(w)(a)$ из G', где (a) — класс пути a. Следовательно,

$$G' = (a)^{-1}G(a),$$

т. е. подгруппа G' получается из группы G преобразованием с помощью элемента (a). Группы G и G' называют *взаимно сопряженными*.

В частности, если G — *нормальный делитель* F, то все сопряженные к G группы совпадают и фундаментальная группа $\tilde{F}$ всегда преобразуется в группу G, независимо от того, какая точка над O принята за начало путей. Отсюда, согласно п. 2.54, следует, что для замкнутого пути на R с началом в O его пути наложения на $\tilde{R}$, выходящие из точек $\tilde{O}$, лежащих над O, либо для всех $\tilde{O}$ замкнуты, либо для всех — не замкнуты. В этом случае $\tilde{R}$ называется *регулярной поверхностью наложения* R.

2.57. Перенесение отображений. Пусть $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения R; пусть $\tilde{O}$ — фиксированная точка на $\tilde{R}$, O — ее образ и $\tilde{F}$, соответственно F, — фундаментальные группы поверхностей $\tilde{R}$, соответственно R, отвечающие этим начальным точкам. При проектировании σ группа $\tilde{F}$, согласно п. 2.54, отображается изоморфно на подгруппу G группы F. Пусть теперь R_1 — третья поверхность и φ — непрерывное отображение R_1 на R; пусть O_1 — один из прообразов O и F_1 — фундаментальная группа R_1, соответствующая начальной точке O_1. При отображении φ группа F_1, согласно п. 2.35, переходит в подгруппу G_1 группы F. Теперь мы, далее, предположим, что G_1 — даже подгруппа G, и покажем, что тогда отображение φ можно „перенести“ на $\tilde{R}$, т. е. существует такое непрерывное отображение $\tilde{\varphi}$ поверхности R_1 на $\tilde{R}$, что отображение $\sigma\tilde{\varphi}$ совпадает с отображением φ.

Пусть P_1 — произвольная точка на R_1 и w_1 — путь, ведущий из O_1 в P_1. Путь w — образ этого пути на R и $\tilde{w}$ — соответствующий ему путь наложения на $\tilde{R}$, выходящий из $\tilde{O}$. Его конец P не зависит от выбора пути w_1; в самом деле, если w_1' — другой путь на R_1, ведущий из O_1 в P_1, то путь $w_1 w_1'^{-1}$ замкнут, поэтому класс путей его образа на R принадлежит подгруппе G_1, следовательно, и подгруппе G. Поэтому соответствующий путь $\tilde{w}\tilde{w}'^{-1}$ на $\tilde{R}$ замкнут, следовательно, $\tilde{w}$ и $\tilde{w}'$ имеют один и тот же конец.

Соответствие $P_1 \to \tilde{P}$ определяет однозначное отображение $\tilde{\varphi}$ R_1 на $\tilde{R}$. Это отображение *непрерывно*. Чтобы это доказать, заметим, что отображение $\tilde{\varphi}$ обладает следующими двумя свойствами, которые непосредственно вытекают из его построения:

1. Каждая точка P_1 поверхности R_1 имеет окрестность, образ которой лежит целиком в отмеченной окрестности образа $\tilde{P} = \tilde{\varphi}(P_1)$[1]).

2. Отображение $\sigma\tilde{\varphi}$ совпадает с отображением φ и поэтому непрерывно.

Из этих двух свойств непрерывность $\tilde{\varphi}$ следует на основании леммы п. 2.53. Тем самым отображение φ *перенесено* (*ist durchgedrückt*) на $\tilde{R}$.

2.58. Теперь мы предположим, что R_1 — поверхность наложения (не обязательно безграничная) поверхности R, следовательно, что отображение φ удовлетворяет требованию локальной взаимной однозначности (см. п. 2.40). Тогда и перенесенное отображение $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет этому требованию; следовательно, R_1 в этом случае — даже поверхность наложения $\tilde{R}$. Это вытекает из общей леммы:

Лемма. *Пусть $\tilde{R}$ — поверхность наложения (не обязательно безграничная) поверхности R и $\tilde{\varphi}$ — однозначное отображение третьей поверхности R_1 на $\tilde{R}$ со свойствами*:

1. *Каждая точка P_1 поверхности R_1 имеет окрестность U_1^*, образ которой лежит в отмеченной окрестности $\tilde{U}$ образа $\tilde{P} = \tilde{\varphi}(P_1)$.*

2. *Отображение $\sigma\tilde{\varphi} = \varphi$ есть проектирование R_1 на R.*

Тогда $\tilde{\varphi}$ есть проектирование R_1 на $\tilde{R}$.

Пусть U_1 — отмеченная окрестность P_1 относительно проектирования φ и K_1 — гомеоморфная кругу окрестность точки P_1, принадлежащая пересечению $U_1 U_1^*$. Тогда из соотношения $\sigma\tilde{\varphi} = \varphi$ следует,

[1]) „Отмеченную окрестность" следует понимать как относящуюся к проектированию $\tilde{R} \to R$.

что отображение $\tilde{\varphi}$ — топологическое в K_1: прежде всего, отображение φ — топологическое в K_1, затем, образ $\tilde{\varphi}(K_1)$ лежит в $\tilde{U}$, и, следовательно, отображение σ — топологическое в $\tilde{\varphi}(K_1)$, поэтому отображение $\tilde{\varphi}$ — топологическое в K_1. Итак, для каждой точки P_1 указана гомеоморфная кругу окрестность, в которой отображение $\tilde{\varphi}$ является топологическим, следовательно, $\tilde{\varphi}$ — проектирование.

2.59. Тем самым мы имеем следующий результат:

Пусть $\tilde{R}_1$ — произвольная и $\tilde{R}$ — безграничная поверхности наложения R. Обозначим через G_1, соответственно G, подгруппы фундаментальной группы поверхности R, изоморфные фундаментальным группам поверхности $\tilde{R}_1$, соответственно $\tilde{R}$, и пусть G_1 — подгруппа группы G. Тогда $\tilde{R}_1$ — поверхность наложения $\tilde{R}$.

Если, в частности, и $\tilde{R}_1$ *безгранична* и группы G и G_1 совпадают, то $\tilde{R}_1$ при отображении $\tilde{\varphi}$ становится безграничной поверхностью наложения $\tilde{R}$, а именно, такой, что фундаментальная группа поверхности $\tilde{R}_1$ переходит *во всю* фундаментальную группу поверхности $\tilde{R}$; следовательно, согласно п. 2.55, отображение $\tilde{\varphi}$ — топологическое. Так как, далее, оно удовлетворяет соотношению $\sigma\tilde{\varphi} = \sigma_1$, то это означает, что $\tilde{R}$ и $\tilde{R}_1$ совпадают в смысле равенства поверхностей наложения.

Тем самым доказано:

Если $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}$ — две безграничных поверхности наложения R и их фундаментальные группы при подходящем выборе начальных точек $\tilde{O}_1$ и $\tilde{O}$ над O переходят при проектированиях в одну и ту же подгруппу G группы F, то $\tilde{R}_1$ и $\tilde{R}$ одинаковы.

2.60. Пример. Пусть $\tilde{R}$ — безграничная r-листная (r конечно) поверхность наложения области $\dot{K}$: $0 < |z_1| < 1$. Фундаментальная группа $\tilde{F}$ поверхности $\tilde{R}$ переходит при проектировании σ (согласно п. 2.54) в подгруппу фундаментальной группы F области $\dot{K}$. Но F — циклическая группа с одной образующей a, и, следовательно, она имеет единственную подгруппу с индексом r, а именно, порождаемую a^r. Поэтому, если $\tilde{R}_1$ — другая r-листная поверхность наложения $\dot{K}$, то ее фундаментальная группа должна переходить в ту же подгруппу группы F, а отсюда, согласно п. 2.59, вытекает, что существует такое топологическое отображение τ поверхности $\tilde{R}$ на $\tilde{R}_1$, что $\sigma = \sigma_1\tau$; следовательно, в частности, поверхности $\tilde{R}$ и $\tilde{R}_1$ гомеоморфны.

Если за $\tilde{R}_1$ принять область $0<|\tilde{z}|<1$ и за σ_1 взять отображение $z=\tilde{z}^r$, то из предыдущего следует, что заданная поверхность $\tilde{R}$ гомеоморфна области $0<|\tilde{z}|<1$, причем существует такое топологическое отображение τ, что $\sigma=\sigma_1\tau$, где σ_1 означает отображение $z=\tilde{z}^r$.

2.61. Существование поверхностей наложения. Теперь мы покажем, что *для заданной подгруппы G фундаментальной группы F поверхности R существует безграничная поверхность наложения, фундаментальная группа которой при проектировании переходит в подгруппу G.*

Сначала мы предположим, что $\tilde{R}$ — безграничная поверхность наложения R, соответствующая подгруппе G. Пусть $\tilde{O}$ и O — начала путей соответственно на $\tilde{R}$ и на R. Пусть $\tilde{P}$ — произвольная точка на $\tilde{R}$ и $\tilde{w}$ — путь из $\tilde{O}$ в $\tilde{P}$. На R ему соответствует путь w, ведущий из O к проекции P точки $\tilde{P}$. Если $\tilde{w}'$ — другой путь из $\tilde{O}$ в $\tilde{P}$ и w' — его проекция, то класс путей замкнутого пути ww'^{-1} принадлежит подгруппе G, ибо путь наложения $\tilde{w}\tilde{w}'^{-1}$ замкнут. Таким образом, точке $\tilde{P}$ соответствует определенный класс путей, ведущих из O в P так, что для двух путей w и w' класс путей, определяемый путем ww'^{-1}, принадлежит подгруппе G. Это соответствие можно установить для любой точки $\tilde{P}$, лежащей над P; соответствующие классы мы коротко назовем „G-классами“. Различным точкам $\tilde{P}$ над P отвечают непересекающиеся G-классы.

Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между точками поверхности $\tilde{R}$ и G-классами поверхности R. Если с помощью этого отображения τ перенести топологию $\tilde{R}$ на множество $\tilde{R}_1$ G-классов, то последнее станет топологическим пространством, гомеоморфным $\tilde{R}$.

$\tilde{R}_1$ — поверхность наложения R с проектированием $\sigma\tau^{-1}$ (где σ — проектирование $\tilde{R}\to R$). Это проектирование состоит в том, что каждому G-классу ставится в соответствие та точка, которой он соответствует. Посмотрим еще, как выглядит на $\tilde{R}_1$ отмеченная окрестность $\tilde{U}_1$ точки $\tilde{P}_1$. Пусть $\tilde{P}$ — соответствующая точка на $\tilde{R}$ и P — ее проекция на R. Если $\tilde{Q}_1$ — точка $\tilde{U}_1$ и $\tilde{Q}$ — ее образ в $\tilde{U}$, то проведем путь $\tilde{p}$ из $\tilde{O}$ в $\tilde{P}$ и удлиним его путем $\tilde{q}$, пробегающим целиком $\tilde{U}$, до точки $\tilde{Q}$. Проекция pq этого пути пробегает тогда сначала от O до P, а затем целиком в U. „Точка“ $\tilde{Q}_1$ есть G-класс пути pq.

Этим описана отмеченная окрестность G-класса $\tilde{P}_1$: на R выбирают путь p из O к точке P, принадлежащий G-классу $\tilde{P}_1$, и точку P

соединяют с каждой точкой Q отмеченной окрестности U путем q, пробегающим в U. Тогда окрестность $\tilde{U}_1$ состоит из G-классов путей pq.

2.62. Предыдущими рассмотрениями намечен путь к тому, как, обратно, для заданной подгруппы G фундаментальной группы F поверхности R построить соответствующую поверхность наложения.

Пусть O — начало путей на R и P — произвольная точка поверхности R. Пути, ведущие из O в P, мы разбиваем на G-классы так, что два пути w_1 и w_2 тогда и только тогда принадлежат к одному и тому же классу, когда класс путей, определяемый путем $w_1 w_2^{-1}$, принадлежит подгруппе G.

Эти G-классы $\tilde{P}$ являются точками нашего пространства $\tilde{R}$. Теперь нужно в $\tilde{R}$ ввести топологию. Пусть $\tilde{P}$ — точка $\tilde{R}$ и P — соответствующая точка на R, т. е. точка, которой отвечает G-класс $\tilde{P}$. Пусть U — параметрическая окрестность точки P. Проведем на R путь p из O в P, принадлежащий G-классу $\tilde{P}$, и соединим точку P с каждой точкой Q окрестности U путем q, пробегающим в U. Тогда G-класс пути pq не зависит от выбора пути p из $\tilde{P}$ и пути q. Таким образом, каждой точке Q из U поставлен в соответствие вполне определенный G-класс $\tilde{Q}$. Множество этих классов, взаимно однозначно соответствующих точкам из U, мы ставим в соответствие точке $\tilde{P}$ в качестве отмеченной „окрестности“ $\tilde{T}$.

Пусть $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$ — две точки, „окрестности“ которых $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ пересекаются. Мы покажем, что пересечению $\tilde{T}\tilde{T}'$ отвечает на R *открытое* множество (лежащее в UU'). Действительно, пусть $\tilde{M}$ — „точка“ $\tilde{T}\tilde{T}'$ и M — ее образ. Он лежит в пересечении UU'. Пусть p означает путь G-класса $\tilde{P}$, ведущий из O в P, и m — путь, пробегающий в U из P в M. Пусть p' и m' — соответствующие пути для точки P'. Так как $\tilde{M}$, по предположению, лежит как в $\tilde{T}$, так и в $\tilde{T}'$, то G-класс замкнутого пути $pmm'^{-1}p'^{-1}$ принадлежит подгруппе G.

Пусть теперь V — параметрическая окрестность M, лежащая целиком в пересечении UU'. Соединим M с каждой точкой $Q \in V$ путем q, пробегающим целиком в V. Тогда точке Q посредством пути pmq сопоставляется „точка“ $\tilde{Q}$ в $\tilde{T}$, а посредством пути $p'm'q$ — „точка“ $\tilde{Q}'$ в $\tilde{T}'$. Эти две „точки“ совпадают, так как путь $pmq(p'm'q)^{-1}$ гомотопен пути $pmm'^{-1}p'^{-1}$, следовательно, его G-класс принадлежит подгруппе G. Поэтому точка Q является образом точки $\tilde{Q} = \tilde{Q}'$ из $\tilde{T}\tilde{T}'$. Этим для каждой точки $M \in UU'$ указана окрестность V, состоящая из образов точек $\tilde{T}\tilde{T}'$.

2.63. Итак, каждой точке $\tilde{P}$ мы сопоставили подмножество $\tilde{T}$, связанное взаимно однозначным соответствием с точками параметрической окрестности U точки P; при этом пересечению соседних подмножеств на поверхности R отвечает некоторое открытое множество. Тем самым каждое подмножество $\tilde{T}$ обходным путем, через U, отображено на параметрический круг U_z этой окрестности. Пересечению соседних подмножеств в каждом из обоих параметрических кругов отвечает открытое множество D_z, соответственно D'_z. „Соотношение соседства" есть топологическое отображение D_z на D'_z, так как оно соответствует соотношению соседства для U и U'. Поэтому, согласно п. 2.16, на каждое подмножество $\tilde{T}$ можно перенести топологию параметрических кругов, превращая таким образом $\tilde{R}$ в топологическое пространство, удовлетворяющее аксиомам A и C.

Пространство $\tilde{R}$ удовлетворяет также аксиоме отделимости. В самом деле, пусть сначала $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$ — две различные точки $\tilde{R}$, отвечающие одной и той же точке $P = P'$ поверхности R. Тогда подмножества $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ не пересекаются. В самом деле, допустим от противного, что $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ пересекаются; пусть $\tilde{Q}$ — точка пересечения $\tilde{T}\tilde{T}'$ и Q—соответствующая ей точка на R. Проведем на R из O в P путь w класса $\tilde{P}$ и путь w' класса $\tilde{P}'$. Пусть q — путь из P в Q, лежащий в параметрической окрестности U точки P. То, что $\tilde{Q}$ лежит в пересечении $\tilde{T}\tilde{T}'$, означает, что пути wq и $w'q$ представляют один и тот же G-класс, следовательно, путь $wqq^{-1}w'^{-1}$ (т. е. его класс путей) принадлежит подгруппе G. Тогда и класс путей, определяемый путем ww'^{-1}, принадлежит G; но это означает, что $\tilde{P} = \tilde{P}'$, вопреки предположению.

Если, напротив, точки P и P' различны, то выберем для них непересекающиеся окрестности V и V' так, чтобы V лежала в U_P и V' — в $U_{P'}$. Тогда в $\tilde{T}$, соответственно $\tilde{T}'$, им отвечают непересекающиеся окрестности точек $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$.

Следовательно, пространство $\tilde{R}$ удовлетворяет аксиомам A, B и C и тем самым является поверхностью. Если каждой точке $\tilde{P}$ поставить в соответствие отвечающую ей по построению точку P на R, то этим будет определено однозначное отображение σ поверхности $\tilde{R}$ на R. По построению топологии $\tilde{R}$, оно является топологическим в каждой окрестности $\tilde{T}$. Следовательно, $\tilde{R}$ — поверхность наложения R с проектированием σ.

2.64. Построенная таким образом поверхность наложения удовлетворяет условиям безграничности п. 2.45. Сначала из построения

следует, что каждой точке P соответствует *определенная* отмеченная окрестность U, которая топологически отображается на окрестности $\tilde{T}$ точек $\tilde{P}$, лежащих над P. Если затем Q — точка U, то все лежащие над Q точки, т. е. все принадлежащие Q G-классы, принадлежат, также по построению, одной из окрестностей $\tilde{T}$.

2.65. То, что $\tilde{R}$ — связная поверхность, следует из того, что каждая точка $\tilde{P}$ может быть соединена на $\tilde{R}$ с $\tilde{O}$, где $\tilde{O}$ — определяемый G класс смежности точки O [1]). Пусть P — проекция $\tilde{P}$ и $P(t)$ — путь из O в P, G-класс которого представлен точкой $\tilde{P}$. Если каждой точке t_0 единичного отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ поставить в соответствие G-класс пути $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_0)$, то этим будет задано взаимно однозначное отображение отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ в $\tilde{R}$. Из леммы п. 2.53 следует, что это отображение непрерывно, следовательно, оно определяет путь $\tilde{P}(t)$ на $\tilde{R}$. Его начало, по построению, есть точка $\tilde{O}$, а конец [это G-класс всего пути $P(t)$] есть $\tilde{P}$. Таким образом, $\tilde{P}$ и $\tilde{O}$ связаны путем $\tilde{P}(t)$.

2.66. Остается еще показать, что построенная поверхность наложения отвечает подгруппе G. Пусть $w = P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — замкнутый путь на R, выходящий из O. Каждой точке $P(\tau)$ пути w ставим в соответствие G-класс частичного пути w_τ $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$. Этим отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$ непрерывно отображается в $\tilde{R}$, следовательно, на $\tilde{R}$ определяется путь $\tilde{w}$. Его начало $\tilde{O}$ есть класс выходящих из O замкнутых путей подгруппы G; при проектировании путь $\tilde{w}$ переходит в w. Поэтому он должен совпадать с (однозначно определенным) выходящим из $\tilde{O}$ путем наложения пути w. Конец пути $\tilde{w}$, по его определению, есть G-класс всего пути w. Следовательно, путь $\tilde{w}$ тогда и только тогда замкнут, когда этот класс равен классу $\tilde{O}$. Поэтому выходящий из O замкнутый путь тогда и только тогда имеет замкнутый путь наложения, выходящий из $\tilde{O}$, когда его класс путей принадлежит подгруппе G. Согласно п. 2.54, это означает, что при проектировании фундаментальная группа поверхности $\tilde{R}$ переходит в подгруппу G. Этим существование требуемой поверхности наложения доказано полностью.

2.67. Универсальная поверхность наложения. Согласно п. 2.61, каждой подгруппе G фундаментальной группы F поверхности R отвечает безграничная поверхность наложения, фундаментальная группа которой при проектировании изоморфно переходит в G. В частности, если

[1]) $\tilde{O}$ обозначает G-класс точки O, совпадающий с G.— *Прим. перев.*

за G взять единичный элемент группы F, то соответствующая поверхность наложения $\hat{R}$ будет *односвязна* (см. п. 2.34). Она называется *универсальной поверхностью наложения* R.

$\hat{R}$ — всегда регулярная[1]) поверхность наложения. Число листов универсальной поверхности наложения равно порядку фундаментальной группы. Отсюда следует, если $\hat{R}$ удовлетворяет аксиоме счетности, что фундаментальная группа поверхности R состоит не более чем из счетного числа элементов.

Универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ является сильнейшей поверхностью наложения R, т. е. она является поверхностью наложения для всякой другой поверхности наложения. В самом деле, если $\tilde{R}$ — произвольная безграничная поверхность наложения R, то проектирование $\hat{R} \to R$, в силу односвязности $\hat{R}$, может быть (согласно п. 2.57) перенесено на $\tilde{R}$, и тогда $\hat{R}$ (согласно п. 2.59) в силу проектирования $\hat{R} \to \tilde{R}$ становится (безграничной) поверхностью наложения $\tilde{R}$.

2.68. Поверхность наложения интегральных функций. Если за подгруппу G фундаментальной группы F принять коммутант C, то получим так называемую *поверхность наложения интегральных функций*[2]), которую мы обозначим через $\check{R}$. Так как C — нормальный делитель F, то $\check{R}$ регулярна.

Замкнутый путь w тогда и только тогда имеет замкнутые пути наложения на $\check{R}$, когда его класс путей принадлежит коммутанту C, т. е., согласно п. 2.37, когда он *гомологичен нулю*. Классы смежности коммутанта C, а с ними и точки $\check{R}$, лежащие над точкой R, соответствуют взаимно однозначно классам гомологий поверхности R. Отсюда следует, что число листов поверхности наложения $\check{R}$ равно порядку группы гомологий поверхности R.

Поверхность наложения интегральных функций тогда и только тогда совпадает с универсальной поверхностью наложения, когда коммутант C состоит только из единичного элемента, т. е. когда фундаментальная группа F является абелевой. Это имеет место для сферы, числовой плоскости, тора и числовой плоскости с выколотой точкой.

2.69. Группа преобразований наложения. Под *преобразованием наложения* (Deckbewegung) поверхности наложения $\tilde{R}$ поверхности R понимают топологическое отображение τ поверхности $\tilde{R}$ на себя, при котором точки $\tilde{R}$, лежащие над одной и той же точкой $P \in R$, переставляются. Если $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ — две точки, лежащие над P, то существует

[1]) См. выше, п. 2.56. — *Прим. перев.*
[2]) Ср. Вейль [1*].

самое большее *одно* преобразование наложения, переводящее $\tilde{P}_1$ в $\tilde{P}_2$; это следует из п. 2.44, если там положить $\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$. Таким образом, преобразование наложения, оставляющее неподвижной одну точку поверхности $\tilde{R}$, есть тождество.

Совокупность преобразований наложения, допускаемых $\tilde{R}$, образует, очевидно, некоторую группу T, *группу преобразований наложения* поверхности $\tilde{R}$. Она, возможно, состоит из одного только тождества, самое же большее — из элементов, взаимно однозначно соответствующих точкам $\tilde{R}$, лежащим над одной точкой R; последнее имеет место тогда, когда каждую точку $\tilde{R}$ с помощью преобразования наложения можно перевести в любую другую ее точку с той же проекцией на R.

У каждой точки $\tilde{P}$ существует окрестность, в которой лежат только точки, не эквивалентные $\tilde{P}$ относительно группы T, так что эта группа в каждой точке поверхности $\tilde{R}$ *дискретна*.

2.70. Пусть $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ — две точки $\tilde{R}$, лежащие над одной и той же точкой P поверхности R. Пусть $\tilde{F}$, соответственно $\tilde{F}_1$, — фундаментальная группа $\tilde{R}$ с началом путей в точке $\tilde{P}$, соответственно $\tilde{P}_1$. При проектировании эти группы переходят во (взаимно сопряженные) подгруппы G и G_1 фундаментальной группы F поверхности R.

Если теперь точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ эквивалентны относительно группы T, то подгруппы G и G_1 даже совпадают. В самом деле, если (w) — класс путей из G и w — некоторый путь из этого класса, то ему соответствует на $\tilde{R}$ определенный замкнутый путь наложения $\tilde{w}$, выходящий из $\tilde{P}$. При преобразовании наложения $\tilde{P} \to \tilde{P}_1$ путь $\tilde{w}$ переходит в замкнутый путь $\tilde{w}_1$, выходящий из $\tilde{P}_1$ и также лежащий над путем w. С другой стороны, проекция пути $\tilde{w}_1$, т. е. w, должна принадлежать классу путей G_1. Значит, класс путей G лежит в классе путей G_1. Так как G_1 и G равноправны, то справедливо и обратное, следовательно, $G = G_1$.

Если, обратно, группы G и G_1 состоят из одних и тех же элементов, то точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ должны быть эквивалентны относительно группы T. В самом деле, фундаментальным группам $\tilde{F}$ и $\tilde{F}_1$ соответствуют тогда одинаковые подгруппы $G = G_1$, а отсюда, согласно п. 2.59, следует существование топологического отображения поверхности $\tilde{R}$ на себя, переводящего $\tilde{P}$ в $\tilde{P}_1$ и переставляющего точки $\tilde{R}$, лежащие над одной и той же точкой R. Это — требуемое преобразование наложения.

Итак, две точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$, лежащие над одной и той же точкой, тогда и только тогда эквивалентны относительно группы T, когда

фундаментальные группы $\tilde{F}$ и $\tilde{F}_1$, соответствующие им как начальным точкам путей, преобразуются в одну и ту же подгруппу фундаментальной группы F.

2.71. Это условие может быть выражено еще иначе. Для этого соединим точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ путем $\tilde{a}$. Если G — подгруппа группы F, соответствующая $\tilde{F}$, то, согласно п. 2.56, группе $\tilde{F}_1$ соответствует сопряженная подгруппа $(a)^{-1}G(a)$. Точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}_1$ тогда и только тогда эквивалентны относительно T, когда

$$G = (a)^{-1}G(a). \tag{2.5}$$

Это условие всегда выполняется, когда G — *нормальный делитель* группы F, т. е. когда поверхность наложения *регулярна*. В этом случае *все* точки над P эквивалентны $\tilde{P}$ относительно группы T. Обратно, если всякие две точки над P эквивалентны, то (2.5) должно выполняться для каждого класса путей (a), т. е. G — нормальный делитель и поверхность наложения $\tilde{R}$ поверхности R регулярна.

2.72. Структура группы преобразований наложения. Пусть (a) — класс путей, для которого выполняется (2.5). Тогда, согласно п. 2.70, если O — начало путей (a) и $\tilde{O}$ — точка $\tilde{R}$ над O, то классу (a) можно поставить в соответствие эквивалентную $\tilde{O}$ точку на $\tilde{R}$ и тем самым преобразование наложения. Для этого нужно взять путь a из (a), построить его путь наложения на $\tilde{R}$ с началом в $\tilde{O}$ и рассмотреть конец этого пути $\tilde{O}_1$; он эквивалентен $\tilde{O}$. Пусть $\tilde{O}_1 \to \tilde{O}$ — отвечающее (a) преобразование наложения. Из предыдущего следует, что таким образом могут быть получены *все* преобразования наложения.

Классы путей (a), для которых выполняется (2.5), образуют подгруппу Z группы F, содержащую, в свою очередь, подгруппу G. Последняя является даже нормальным делителем группы Z. Подгруппу Z называют *промежуточной группой* для G в F.

2.73. Построенное выше отображение $Z \to T$ является *гомоморфизмом*. Чтобы это доказать, нужно показать, что произведению классов путей из Z отвечает произведение соответствующих преобразований наложения. Пусть (a) — класс из Z, a — путь из (a) и $\tilde{a}$ — соответствующий путь наложения, выходящий из $\tilde{O}$. Если $\tilde{O}_a$ — его конец, то $\tilde{O}_a \to \tilde{O}$ — преобразование наложения T_a. Точно так же другому пути b отвечает преобразование наложения T_b.

Чтобы получить преобразование наложения, соответствующее произведению (ba), нужно для ba построить путь наложения с началом в $\tilde{O}$.

Строя сначала путь наложения b, придем к точке $\tilde{O}_b$. Строя затем из $\tilde{O}_b$ путь наложения a, придем к точке $\tilde{O}_{ba}$. Соответствующее (ba) преобразование наложения T_{ba} задается через $\tilde{O}_{ba} \to \tilde{O}$.

С другой стороны, $T_a T_b(\tilde{O}_{ba}) = \tilde{O}$, или, что то же, $T_b(\tilde{O}_{ba}) = \tilde{O}_a$. В самом деле, $\tilde{O}_{ba}$ — конец пути наложения a, выходящего из $\tilde{O}_b$. Поэтому $T_b(\tilde{O}_{ba})$ должно быть концом пути наложения a, выходящего из точки $T_b(\tilde{O}_b) = \tilde{O}$, т. е. точкой $\tilde{O}_a$.

2.74. Поскольку отображение $Z \to T$ есть гомоморфизм, естественно поставить вопрос о его *ядре*. Оно состоит из всех классов путей, которым соответствует тождественное преобразование наложения. Каждый класс путей подгруппы G принадлежит ядру, ибо пути a из G на $\tilde{R}$ соответствует замкнутый путь наложения с началом в $\tilde{O}$, следовательно, соответствующее преобразование наложения T_a есть тождество. Обратно, класс пути, которому на $\tilde{R}$ соответствует замкнутый путь наложения с началом в $\tilde{O}$, принадлежит подгруппе G. Следовательно, ядро совпадает с подгруппой G. Поэтому из теоремы о гомоморфных отображениях вытекает, что $T \cong Z/G$:

Группа преобразований наложения изоморфна фактор-группе промежуточной группы Z по подгруппе G.

В частности, если G — нормальный делитель группы F, следовательно, поверхность наложения $\tilde{R}$ *регулярна*, то промежуточная группа Z совпадает со всей группой F. В этом случае $T \cong F/G$.

2.75. Критерий гомеоморфности двух поверхностей, выраженный через группы преобразований наложения. Пусть R_1 и R_2 — две поверхности и $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ — их универсальные поверхности наложения. Если R_1 и R_2 гомеоморфны, то существует топологическое отображение τ $\hat{R}_1$ на $\hat{R}_2$, такое, что точки $\hat{R}_1$ с одной и той же проекцией на R_1 переходят в точки $\hat{R}_2$ с одной и той же проекцией на R_2.

Действительно, пусть σ_1 и σ_2 — проектирования; если φ — топологическое отображение R_1 на R_2, то $\hat{R}_1$ является поверхностью наложения R_2 с проектированием $\varphi\sigma_1$. Следовательно, отображения $\varphi\sigma_1$ и σ_2 являются проектированиями соответственно $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ на R_2. Эти поверхности наложения соответствуют одной и той же подгруппе фундаментальной группы поверхности R_2, а именно, единичному элементу (ибо $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ односвязны). Поэтому, согласно п. 2.59, существует топологическое отображение $\hat{R}_1$ на $\hat{R}_2$ требуемого вида.

Обратно, если существует топологическое отображение τ поверхности $\hat{R}_1$ на $\hat{R}_2$, которое точки с одной и той же проекцией переводит в точки с одной и той же проекцией, то поверхности R_1 и R_2 гомеоморфны.

Действительно, пусть P_1 — произвольная точка R_1 и $\hat{P}_1$ — точка над ней. В силу отображения τ, точке $\hat{P}_1$ отвечает точка $\hat{P}_2$ на $\hat{R}_2$, а последней, в силу проектирования ε_2, — точка P_2 на R_2. Точку P_2 ставим в соответствие точке P_1 в качестве ее образа. Это соответствие, по предположению о τ, не зависит от выбора точки $\hat{P}_1$ над P_1. Таким образом, определено взаимно однозначное отображение поверхности R_1 на поверхность R_2, и это отображение, очевидно, топологическое.

Этим доказано:

Две поверхности R_1 и R_2 тогда и только тогда гомеоморфны, когда их универсальные поверхности наложения $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ могут быть топологически отображены друг на друга так, что точки с одной и той же проекцией на R_1 переходят в точки с одной и той же проекцией на R_2.

2.76. Найденное таким образом условие может быть просто выражено с помощью группы преобразований наложения. Пусть τ — топологическое отображение $\hat{R}_1$ на $\hat{R}_2$ с указанным выше свойством и τ_1 — произвольное преобразование наложения $\hat{R}_1$. Тогда $\tau_2 = \tau\tau_1\tau^{-1}$ есть преобразование наложения $\hat{R}_2$. В самом деле, пусть $\hat{P}_2$ — произвольная точка $\hat{R}_2$. Отображение τ^{-1} преобразует ее в точку $\hat{P}_1$ поверхности $\hat{R}_1$. Так как τ_1 — преобразование наложения, то точка $\tau_1(\hat{P}_1)$ имеет ту же проекцию, что и $\hat{P}_1$. По предположению относительно отображения τ, точки $\tau\tau_1(\hat{P}_1) = \tau_2(\hat{P}_2)$ и $\tau(\hat{P}_1) = \hat{P}_2$ лежат поэтому над одной и той же точкой, что и требовалось доказать.

Таким образом получаются *все* преобразования наложения $\hat{R}_2$: в самом деле, если τ_2 — произвольное такое преобразование, то оно получается из преобразования наложения $\tau^{-1}\tau_2\tau$ поверхности $\hat{R}_1$. Поэтому отображение τ индуцирует взаимно однозначное отображение T_1 на T_2. Это отображение изоморфно, ибо, как можно убедиться, произведение переходит в произведение. Таким образом, группа T_2 получается из группы T_1 преобразованием с помощью отображения τ.

Обратно, если существует топологическое отображение τ поверхности $\hat{R}_1$ на $\hat{R}_2$, переводящее группы наложения друг в друга, $T_2 = \tau T_1 \tau^{-1}$, то τ переводит точки с одной и той же проекцией в точки с одной и той же проекцией. В самом деле, если $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_1'$ — две точки $\hat{R}_1$, лежащие над одной и той же точкой R_1, то они эквивалентны относительно группы T_1 (ибо $\hat{R}_1$, как универсальная поверхность наложения, регулярна). Если τ_1 означает преобразование наложения $\hat{P}_1 \to \hat{P}_1'$, то $\tau\tau_1\tau^{-1}$, по предположению об отображении τ, есть преобразование наложения $\hat{R}_2$. Оно переводит образы

точек $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_1'$ друг в друга; поэтому они должны лежать над одной и той же точкой R_2. Таким образом, мы получили следующее условие:

Две поверхности R_1 и R_2 тогда и только тогда гомеоморфны, когда существует такое топологическое отображение τ поверхности $\hat{R}_1$ на $\hat{R}_2$, что группа преобразований наложения поверхности $\hat{R}_2$ получается из группы преобразований наложения поверхности $\hat{R}_1$ преобразованием с помощью отображения τ.

2.77. Разветвленные поверхности наложения. Пусть $\tilde{R}$ и R — два двумерных многообразия и σ — однозначное отображение $\tilde{R}$ на R, удовлетворяющее условию п. 2.40, исключая некоторые изолированные „точки разветвления", в которых это условие заменяется следующим[1]):

Если $\tilde{P}$ — точка разветвления $\tilde{R}$, то существует такая гомеоморфная кругу окрестность $\tilde{U}$ точки $\tilde{P}$, что $\tilde{P}$ — единственная точка $\tilde{U}$, переходящая в точку $P = \sigma(\tilde{P})$, в то время как исключая $\tilde{P}$, имеется по k точек, переходящих в одну и ту же точку окрестности U. Каждую такую гомеоморфную кругу окрестность точки $\tilde{P}$ мы называем *отмеченной* окрестностью точки $\tilde{P}$.

Если $k = 1$, то это условие означает то же самое, что условие п. 2.40, и $\tilde{P}$ тогда — „обыкновенная" точка $\tilde{R}$. Если же $k > 1$, то соответствующая точка $\tilde{P}$ называется *точкой разветвления* порядка $k - 1$. Поэтому обыкновенную точку можно рассматривать как точку разветвления нулевого порядка. Точки разветвления лежат изолированно на $\tilde{R}$.

Поверхность $\tilde{R}$ называется *разветвленной поверхностью наложения* поверхности R.

2.78. Пусть $\tilde{P}$ — точка разветвления и $\tilde{U}$ — область $\tilde{U} - \tilde{P}$. Тогда $\dot{\tilde{U}}$ — неразветвленная поверхность наложения области $\dot{U} = U - P$. При этом в каждую точку из $\dot{U}$ переходят k точек из $\dot{\tilde{U}}$; поэтому, согласно п. 2.48, поверхность наложения $\dot{\tilde{U}}$ для $\dot{U}$ безгранична и имеет k листов. Тогда, согласно п. 2.60, параметрические отображения $\tilde{\lambda} : \tilde{U} \to \tilde{U}_z$ и $\lambda : U \to U_z$ можно выбрать так, что соответствующее отображение параметрических кругов с выколотыми центрами $\dot{\tilde{U}}_z$ и $\dot{U}_z$ есть отображение $z = \tilde{z}^k$. Так как в обоих параметрических отображениях точкам $\tilde{P}$ и P отвечают соответственно точки $\tilde{z} = 0$ и $z = 0$, то перенесенное на параметрические круги отображение полных окрестностей $\tilde{U}$ и U также есть $z = \tilde{z}^k$. Поэтому для проектирования σ

[1]) Следующие понятия, как вообще развитая выше теория поверхностей наложения, находятся в тесной связи с понятием „внутреннего отображения" по Стойлову [1].

окрестности $\tilde{U}$ справедливо соотношение $\sigma_1\tilde{\lambda} = \lambda\sigma$, где σ_1 означает отображение $z = z^k$.

Отсюда следует, что проектирование σ непрерывно и в точке разветвления; следовательно, σ — непрерывное отображение $\tilde{R}$ на R.

По предположению, точки разветвления расположены изолированно.

2.79. Если из $\tilde{R}$ удалить точки разветвления и отобразить оставшуюся часть $\dot{\tilde{R}}$ в R с помощью σ, то в качестве проекций получатся все точки R, исключая те, над которыми расположены *только* точки разветвления. Если исключить эти точки из R и обозначить через $\dot{R}$ остающуюся часть, то $\dot{\tilde{R}}$ будет неразветвленной поверхностью наложения $\dot{R}$.

2.80. Разветвленная поверхность наложения $\tilde{R}$ называется *безграничной*, если проектирование удовлетворяет условиям I и II п. 2.45 в каждой точке P поверхности R, независимо от того, лежат над ней точки разветвления или нет.

2.81. Если из безграничной разветвленной поверхности наложения построить соответствующую неразветвленную путем удаления точек разветвления, как в п. 2.79, то последняя, вообще говоря, уже не будет безграничной.

Из безграничной *разветвленной* поверхности наложения можно, однако, следующим образом получить безграничную же *неразветвленную*.

Удалим из R все те точки, над которыми лежит по крайней мере одна точка разветвления, а из $\tilde{R}$ — все лежащие над ними. В силу безграничности поверхности наложения, удаляемые точки поверхности R расположены на ней изолированно, поэтому остающаяся часть $\ddot{R}$ снова является поверхностью. Отсюда вытекает, что поверхность $\ddot{\tilde{R}}$, полученная из $\tilde{R}$ удалением указанных выше точек, является безграничной поверхностью наложения $\ddot{R}$.

В самом деле, $\ddot{\tilde{R}}$ — прообраз $\ddot{R}$ на $\tilde{R}$. Отсюда следует, на основании последнего абзаца п. 2.45, что $\ddot{\tilde{R}}$ безгранична.

Итак, над каждой точкой R, над которой не лежит ни одна точка разветвления, лежит одинаковое число точек $\tilde{R}$. Их число, т. е. число листов неразветвленной поверхности наложения $\ddot{\tilde{R}}$ поверхности $\ddot{R}$, называется числом листов разветвленной поверхности наложения $\tilde{R}$ поверхности R.

2.82. Пусть $\tilde{R}$ — безграничная конечнолистная разветвленная поверхность наложения R, P — точка R и $\tilde{P}_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) — точки $\tilde{R}$,

лежащие над P. Если среди них нет ни одной точки разветвления, то их число n равно числу листов g. Но и в других случаях можно сделать некоторое заключение относительно их числа. Для этого предположим, что U — отмеченная окрестность точки P (см. п. 2.45) и Q — точка U, отличная от P; над Q лежит ровно g точек, так как над Q нет точек разветвления. С другой стороны, если $k_\nu - 1$ означает порядок точки $\tilde{P}_\nu$, то, в силу условия безграничности, над Q лежит ровно $\sum_\nu k_\nu$ точек. Отсюда вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu = g.$$

Следовательно, для числа n точек $\tilde{P}_\nu$ имеем неравенство $n \leqslant g$, причем равенство $n = g$ справедливо только тогда, когда над P нет точек разветвления.

2.83. Результат п. 2.48 можно теперь перенести на разветвленные поверхности наложения. Если $\tilde{R}$ — безграничная конечнолистная поверхность наложения R, то, согласно п. 2.82, сумма увеличенных на единицу порядков лежащих над P точек $\tilde{P}$ равна числу листов g. Обратно, пусть $\tilde{R}$ — такая (не обязательно безграничная) поверхность наложения R, что над каждой точкой P лежит только конечное число точек $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ (причем n может зависеть от P) и сумма увеличенных на единицу порядков точек $\tilde{P}_\nu$ равна не зависящему от P числу g. Тогда поверхность наложени $\tilde{R}$ безгранична и g — число ее листов.

Действительно, пусть P — точка R и $\tilde{P}_1, \ldots, \tilde{P}_n$ — ее прообразы. Каждая точка $\tilde{P}_\nu$ имеет отмеченную окрестность $\tilde{U}_\nu$, отображаемую на окрестность U_ν точки P. При этом, согласно пп. 2.60 и 2.78, параметрические отображения для них можно выбрать так, что соответствующие отображения параметрических кругов имеют вид $z = \tilde{z}^{k_\nu}$, где $k_\nu - 1$ означает порядок $\tilde{P}_\nu$. Пусть теперь U_z^* — круг с центром в P_z, который содержится во всех кругах $U_{z,\nu}$. Ему соответствует в $\tilde{U}_{z,\nu}$ круг $\tilde{U}_{z,\nu}^*$. Пусть U^* и $\tilde{U}_\nu^*$ — соответствующие окрестности P и $\tilde{P}_\nu$. Тогда $\tilde{U}_\nu^*$ с помощью σ отображается на окрестность U^* точки P (не зависящую от ν). Следовательно, первое условие безграничности выполняется.

Пусть, далее, Q — отличная от P точка U^*. Для ее прообразов $\tilde{Q}_\mu$, если $l_\mu - 1$ — порядок $\tilde{Q}_\mu$, имеем, по предположению, $\sum_\mu l_\mu = g$. Но в каждой окрестности $\tilde{U}_\nu^*$ лежит ровно k_ν прообразов точки Q, причем все они имеют нулевой порядок, так что их часть в сумме $\sum l_\mu$ равна k_ν. Поэтому часть прообразов точки Q, лежащих в множе-

ство $\sum \tilde{U}_\nu^*$, равна $\sum k_\nu$, а по предположению, это число также равно g, т. е. $\sum l_\mu$. Отсюда следует, что все прообразы Q лежат в $\sum_\nu \tilde{U}_\nu^*$. Таким образом, выполнено второе условие безграничности.

2.84. Рассмотрим, как в п. 2.49, частный случай, когда поверхность $\tilde{R}$ *компактна*. Тогда, вполне аналогично тому, как это было сделано для неразветвленных поверхностей наложения, доказывается, что $\tilde{R}$ *безгранична* и имеет конечное число листов. Кроме того, $\tilde{R}$ может иметь только конечное число точек разветвления. Обратно, если $\tilde{R}$ — разветвленная безграничная конечнолистная поверхность наложения компактной поверхности R, то и $\tilde{R}$ должна быть компактной поверхностью. Также и на этот случай непосредственно переносится доказательство соответствующей теоремы для неразветвленных поверхностей наложения (см. п. 2.50).

2.85. Для разветвленных поверхностей наложения остается в силе и лемма п. 2.58.

Пусть $\tilde{R}$ — разветвленная поверхность наложения R и $\tilde{\varphi}$ — однозначное отображение третьей поверхности R_1 на $\tilde{R}$ со свойствами:

1. Если P_1 — точка R_1, $\tilde{P}$ — ее образ на $\tilde{R}$ и $\tilde{U}$ — отмеченная окрестность точки $\tilde{P}$ (относительно проектирования σ: $\tilde{R} \to R$), то существует гомеоморфная кругу окрестность U_1 точки P_1, образ которой лежит в $\tilde{U}$.

2. Отображение $\sigma\tilde{\varphi} = \sigma_1$ есть („разветвленное“) проектирование R_1 на R.

Тогда $\tilde{\varphi}$ — разветвленное проектирование R_1 на $\tilde{R}$.

Мы должны каждой точке P_1 поверхности R_1 поставить в соответствие отмеченную окрестность и показать, что она топологически или разветвленно отображается на окрестность точки $\tilde{P} = \tilde{\varphi}(P_1)$. При этом достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одна из точек P_1 или $\tilde{P} = \tilde{\varphi}(P_1)$ является точкой разветвления относительно проектирования σ_1, соответственно σ, так как случай, когда они оба не являются точками разветвления, был уже рассмотрен в п. 2.58.

2.86. Итак, пусть P_1 и $\tilde{P}$ — точки разветвления соответственно порядков $m-1$ и $n-1$. Пусть $\tilde{U}$ и U — отмеченные окрестности точек $\tilde{P}$ и P относительно проектирования σ, а U_1 и U' — отмеченные окрестности точек P_1 и P относительно проектирования σ_1, причем $\tilde{\varphi}(U_1)$ лежит в $\tilde{U}$, следовательно, U' лежит в U и $\tilde{U}'$ лежит в $\tilde{U}$. Тогда $\tilde{\varphi}(U_1)$ лежит в $\tilde{U}'$ и, больше того, совпадает с $\tilde{U}'$ [1]).

[1]) Последнее утверждение внесено *переводчиком* для большей полноты доказательства. Его нетрудно доказать. — *Прим. перев.*

Отобразив U' на параметрический круг и выбрав подходящие параметрические отображения для U_1 и $\tilde{U}'$, преобразуем σ_1 и σ соответственно в $z=z_1^m$ и $z=\tilde{z}^n$, откуда следует, что

$$[\tilde{\varphi}(z_1)]^n = z_1^m.$$

Так как функция $\tilde{\varphi}(z_1)$ здесь однозначна и непрерывна, то m кратно n, т. е. $m=kn$ (n — натуральное число), откуда

$$\tilde{\varphi}(z_1) = z_1^k e^{2\pi i\nu/n},$$

где ν — целое число ($1 \leqslant \nu \leqslant n$). Это означает, что $\tilde{\varphi}$ в точке P_1 есть разветвленное проектирование R_1 на $\tilde{R}$ порядка $k-1$. Этим лемма полностью доказана.

2.87. Универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ является единственной односвязной (безграничной) неразветвленной поверхностью наложения для R. Поставим теперь вопрос о *разветвленных* односвязных поверхностях наложения для R. Прежде всего ясно, что каждая разветвленная поверхность наложения $\hat{R}$ также является разветвленной поверхностью наложения R. Но и обратно, каждая односвязная разветвленная поверхность наложения R является также поверхностью наложения $\hat{R}$. Действительно, пусть R_1 — такая поверхность и σ_1 — проектирование $R_1 \to R$. В силу односвязности R_1, это отображение можно перенести на $\hat{R}$, и из леммы п. 2.85 следует, что получаемое отображение $R_1 \to \hat{R}$ будет (разветвленным) проектированием.

Тем самым вопрос об односвязных разветвленных поверхностях наложения для R сведен к случаю, когда поверхность R сама односвязна.

2.88. Поверхности наложения римановых поверхностей. Пусть R — риманова поверхность и $\tilde{R}$ — (разветвленная или неразветвленная) поверхность наложения R. Тогда $\tilde{R}$ можно сделать римановой поверхностью таким образом, что проектирование σ, исключая точки разветвления, становится конформным отображением $\tilde{R}$ на R [1]).

---

[1]) Отсюда и из того, что риманова поверхность удовлетворяет аксиоме счетности, можно заключить, что фундаментальная группа римановой поверхности всегда счетна. Действительно, если R — произвольная риманова поверхность, то ее универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ можно сделать римановой поверхностью, и поэтому (гл. IV, § 3) она удовлетворяет аксиоме счетности. Следовательно, над точкой R может лежать только счетное число точек $\hat{R}$; но, с другой стороны, они взаимно однозначно соответствуют элементам фуидаментальной группы поверхности R.

Действительно, пусть $\tilde{P}$ — произвольная точка поверхности $\tilde{R}$ и P — ее проекция. Пусть $\tilde{U}$ и U — отмеченные окрестности соответственно точек $\tilde{P}$ и P.

Мы можем считать, что U лежит в параметрической окрестности K точки P. Пусть K_z: $|z|<1$ ($P \longleftrightarrow z=0$) означает соответствующий параметрический круг и λ — отображение $K \to K_z$. Построим в K_z настолько малый круг k_z: $|z|<r$, чтобы его прообраз k в K целиком принадлежал окрестности U.

Чтобы получить отсюда параметрическую окрестность точки $\tilde{P}$, предположим сначала, что $\tilde{P}$ не есть точка разветвления. Тогда σ в $\tilde{U}$ — топологическое отображение и $\sigma^{-1}\lambda^{-1}$ — топологическое отображение k_z в $\tilde{U}$. Образ $\tilde{k}$ мы принимаем за параметрическую окрестность точки $\tilde{P}$.

Нужно показать, что определяемые этим соотношения соседства конформны. Пусть $\tilde{P}_1$ — другая точка на $\tilde{R}$ с параметрической окрестностью $\tilde{k}_1$, пересекающейся с $\tilde{k}$. Тогда соотношение соседства имеет вид $(\lambda_1\sigma)(\sigma^{-1}\lambda^{-1})$; оно совпадает с (конформным) соотношением соседства $\lambda_1\lambda^{-1}$ проекций P_1 и P.

2.89. Пусть теперь $\tilde{P}$ — точка разветвления порядка $r-1$ ($r \geqslant 2$). Тогда мы рассматриваем область $\dot{k}=k-P$. Множество $\dot{\tilde{k}}$ прообразов ее точек в $\tilde{U}$ есть безграничная поверхность наложения $\dot{\tilde{k}}$ с числом листов r. Поэтому $\dot{\tilde{k}}$ с проектированием $\lambda\sigma$ является r-листной поверхностью наложения области $0<|z|<1$. Согласно п. 2.60, тогда существует такое топологическое отображение $\tilde{\lambda}$ области $\dot{\tilde{k}}$ на область $0<|\tilde{z}|<1$, что отображение $\rho=\lambda\sigma\tilde{\lambda}^{-1}$ имеет вид $z=\tilde{z}^r$. Его можно расширить до топологического отображения $\dot{\tilde{k}}+\tilde{P}$ на круг $|\tilde{z}|<1$, ставя в соответствие точке $\tilde{P}$ точку $\tilde{z}=0$. Теперь мы принимаем область $\tilde{k}=\dot{\tilde{k}}+\tilde{P}$ за параметрическую окрестность точки P. Проектирование в параметрических кругах имеет тогда вид $z=\tilde{z}^r$.

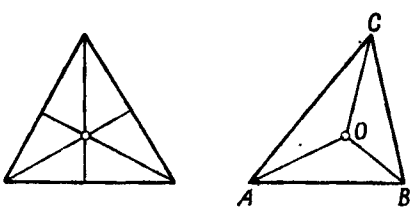
Нужно еще показать, что соотношения соседства конформны. Пусть $\tilde{P}_1$ — другая точка на $\tilde{R}$ с параметрической окрестностью $\tilde{k}_1$, пересекающейся с $\tilde{k}$. Так как точки разветвления расположены на $\tilde{R}$ изолированно, то мы можем считать, что $\tilde{P}_1$ — не точка разветвления. Далее, так как отображение σ в окрестности $\tilde{U}_1$ является топологическим, то точка разветвления $\tilde{P}$ не принадлежит пересече-

нию $\tilde{U}\tilde{U}_1$. Тогда соотношение соседства $\tilde{P} \to \tilde{P}_1$ есть $(\lambda_1\sigma)(\sigma^{-1}\lambda^{-1}\rho) = \lambda_1\lambda^{-1}\rho$, следовательно, оно равно произведению конформного соотношения соседства $\lambda_1\lambda^{-1}$ и конформного проектирования ρ [1]).

Таким образом, $\tilde{R}$ стала римановой поверхностью. Непосредственно из построения следует, что проектирование конформно всюду, исключая точки разветвления; в точке разветвления порядка $r-1$ оно ведет себя как отображение $z = \tilde{z}^r$.

2.90. Из этого результата вытекает, что каждую ориентируемую триангулируемую [2]) поверхность R можно сделать римановой поверхностью. В самом деле, такую поверхность можно рассматривать как разветвленную поверхность наложения z-сферы, и тогда, согласно п. 2.89, конформная структура z-сферы может быть перенесена на поверхность R.

Проектирование σ строится с помощью триангуляции T поверхности R [3]). Для этого мы сначала переходим к подразделению T, в котором вершинами являются центры тяжести A_ν, B_μ 2- и 1-симплексов σ^2_ν, σ^1_μ и вершины C_ρ первоначальной триангуляции T (фиг. 4, слева). Затем мы определяем отображение σ для вершин, полагая $\sigma(A_\nu) = \infty$, $\sigma(B_\mu) = 1$ и $\sigma(C_\rho) = 0$. Чтобы это отображение распространить на 2-симплексы, мы нормируем сначала прямолинейные симплексы-прообразы так, чтобы они все были конгруэнтны. Затем мы каждый симплекс-прообраз отображаем конформно на верхнюю полуплоскость так, чтобы его вершины перешли в указанные точки. Это отображение выполнимо элементарно и определено однозначно для каждого 2-симплекса. Этим устанавливается однозначное отображение поверхности R на (замкнутую) верхнюю полуплоскость. Исходя из него, мы строим отображение на всю плоскость, отображая дальше некоторые 2-симплексы на нижнюю полуплоскость путем зеркального отражения относительно оси x-ов, по следующему правилу: если 2-симплексы R ориентированы когерентно (см. п. 2.95), то в каждом 2-симплексе имеются две ориентации: во-первых, определяемая порядком следования его вершин A_ν, B_μ, C_ρ, во-вторых,



Фиг. 4.

[1]) Нужно иметь в виду, что точка $\tilde{P}$, в которой нарушается конформность отображения ρ, не принадлежит пересечению $\tilde{k}\tilde{k}_1$.

[2]) Относительно понятия триангулируемости см. § 5 гл. II.

[3]) По Радо [1], каждая поверхность, удовлетворяющая аксиоме счетности, триангулируема, поэтому предыдущая теорема имеет место для каждой ориентируемой поверхности, удовлетворяющей аксиоме счетности.

определяемая когерентной ориентацией. Теперь мы условимся, что каждый 2-симплекс, в котором эти ориентации противоположны, отображается далее на нижнюю полуплоскость, с другими же 2-симплексами ничего больше не происходит. Этим определяется однозначное отображение поверхности R на всю z-сферу. При этом два 2-симплекса с общей стороной всегда переходят в разные полуплоскости, так как общий 1-симплекс получает от обоих порядков следования вершин *одинаковые* ориентации, напротив, от когерентной ориентации 2-симплексов — *противоположные*. Из последнего замечания следует, что в окрестности средней точки 1-симплекса [1]) отображение локально топологическое. То же самое, по построению, заведомо справедливо для средней точки 2-симплекса, так как каждый 2-симплекс отображается топологически.

В окрестности вершины триангуляции отображение уже не взаимно однозначно, но удовлетворяет условию разветвленности п. 2.77. Таким образом, R — разветвленная поверхность наложения z-сферы и тем самым, согласно п. 2.89, — риманова поверхность [2]).

§ 5. ТРИАНГУЛЯЦИЯ МНОГООБРАЗИЯ

2.91. Топологические симплексы. Пусть R — двумерное многообразие (аксиомы A, B, C, гл. II, § 1). Особый k-симплекс ($k = 0, 1, 2$) на R (см. п. 2.27) называется *топологическим k-симплексом*, если определяющее его непрерывное отображение является топологическим. Этим все понятия, определенные для особых симплексов, переносятся на топологические симплексы.

Средней точкой топологического k-симплекса называется образ внутренней точки треугольника-прообраза или отрезка-прообраза. Средняя точка топологического 2-симплекса является внутренней точкой этого 2-симплекса относительно многообразия R.

Топологические 2- и 1-симплекс называются *инцидентными*, если второй является стороной первого.

2.92. Триангуляция. Система из конечного или счетного числа топологических 2-симплексов образует *триангуляцию* многообразия R, если выполняются следующие условия:

1. Каждая точка R принадлежит по крайней мере одному симплексу.

2. Каждая точка обладает окрестностью, имеющей общие точки только с конечным числом симплексов.

---

[1]) О „средних точках" k-симплекса см. п. 2.91.

[2]) На доказанную выше возможность сделать ориентируемую триангулируемую поверхность римановой поверхностью обратил мое внимание в устном замечании Л. Альфорс. [См. также А. И. Маркушевич [1**], гл. VIII, п. 2.2. — *Прим. перев.*]

3. Пересечение двух симплексов либо пусто, либо состоит из общей вершины, либо — из общей стороны [1]).

Триангулируемое многообразие удовлетворяет аксиоме счетности D; нужно лишь каждый из (не более чем счетного числа) симплексов заключить в соответствующую параметрическую окрестность, чтобы получить покрытие многообразия счетным числом таких окрестностей. Обратно, каждое многообразие, удовлетворяющее аксиоме счетности, триангулируемо [2]). Мы здесь не будем этого доказывать, так как триангулируемость *римановой поверхности* получится из общих результатов теории униформизации.

Если многообразие R компактно, то каждая триангуляция может состоять только из конечного числа симплексов, ибо иначе „центры" отдельных симплексов образовывали бы на R бесконечное множество, которое, в силу условия 2, не имело бы ни одной точки сгущения.

2.93. Подразделение. Топологический 2-симплекс σ^2 подразделяется путем произвольного разделения его прямолинейного симплекса-прообраза на конечное число треугольников и последующего отображения их на R с помощью соответствующего σ^2 топологического отображения. Если 2-симплексы триангуляции подвергнуть такому подразделению, то получится новая система 2-симплексов, удовлетворяющая условиям 1 и 2 п. 2.92 (такая триангуляция называется *подразделением* первоначальной). Чтобы выполнялось и третье условие, требуется следующее: если σ^1 есть 1-симплекс с прообразами $\bar{\sigma}_1^1$ и $\bar{\sigma}_2^1$ (в прообразах двух 2-симплексов, которые к нему примыкают), то при аффинном отображении $\bar{\sigma}_1^1 \to \bar{\sigma}_2^1$ подразделение $\bar{\sigma}_1^1$ переходит в подразделение $\bar{\sigma}_2^1$. Это, например, всегда имеет место при нормальном (барицентрическом) подразделении симплексов, когда каждый прямолинейный 2-симплекс разделяется медианами на шесть треугольников (см. фиг. 4, слева).

2.94. Условие инцидентности. 1-симплекс σ^1 триангуляции R инцидентен с двумя и только с двумя 2-симплексами.

Прежде всего, σ^1 инцидентен по крайней мере с двумя 2-симплексами. Допустим, от противного, что σ^2 — единственный такой 2-симплекс, и рассмотрим среднюю точку P симплекса σ^1. По условию 2 п. 2.92, существует окрестность U точки P, имеющая общие точки

---

[1]) Если два симплекса имеют пустое пересечение, то в дальнейшем мы будем называть их (в переводе) *непересекающимися*. Заметим, что если два 2-симплекса примыкают к одному и тому же 1-симплексу σ^1 (имеют общую сторону), то отрезки-прообразы, соответствующие σ^1 в треугольниках-прообразах, связаны друг с другом аффинным преобразованием (см. п. 2.27, равенство симплексов). — *Прим. перев.*

[2]) Теорема Радо [1].

только с конечным числом 2-симплексов σ^2_ν ($\nu = 0, \ldots, n$; $\sigma^2_0 = \sigma^2$). Но так как, по предположению, ни один из симплексов σ^2_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) не имеет 1-симплекс σ^1 своей стороной, то ни один такой симплекс не может, по условию 3, содержать и P. Поэтому, в силу замкнутости σ^2_ν, существует окрестность U_ν точки P, не пересекающаяся с σ^2_ν. Пересечение $UU_1 \ldots U_n$ есть снова окрестность P. Точка Q этой окрестности, не принадлежащая σ^2, не может тогда принадлежать никакому симплексу триангуляции, в противоречие с условием 1.

Таким образом, 1-симплекс σ^1 инцидентен по крайней мере с двумя 2-симплексами σ^2_1 и σ^2_2. Остается показать, что нет других 2-симплексов. Пусть K — параметрическая окрестность, содержащая σ^1. Не представляет ограничения предположение, что все инцидентные с σ^1 2-симплексы лежат в K, так как этого можно добиться подходящим подразделением (см. фиг. 4, справа), не меняющим числа инцидентных с σ^1 симплексов. Так как окрестность K гомеоморфна кругу, то для каждой средней точки P симплекса σ^1 существует окрестность U_{12}, лежащая в $\sigma^1_2 + \sigma^2_2$.

Если бы теперь σ^2_3 был третий 2-симплекс, инцидентный с σ^1, то можно было бы аналогично найти окрестности U_{23}, соответственно U_{31}, точки P, лежащие целиком в $\sigma^2_2 + \sigma^2_3$, соответственно в $\sigma^2_3 + \sigma^2_1$. Тогда окрестность $U_{12}U_{23}U_{31}$ должна была бы лежать на 1-симплексе σ^1, что невозможно. Таким образом, σ^1 может быть инцидентен только с двумя 2-симплексами.

Отсюда следует, что инцидентные с 0-симплексом σ^0 2-симплексы σ^2_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) образуют вокруг σ^0 единственный цикл, т. е. могут быть расположены так, что $\sigma^2_{\nu+1}$ и σ^2_ν ($\nu = 1, \ldots, n \pmod n$) имеют общий 1-симплекс.

2.95. Когерентная ориентация. Пусть R — триангулируемая поверхность и σ^2_ν ($\nu = 1, \ldots$) — 2-симплексы триангуляции. Будем считать их ориентированными. Ориентация этих 2-симплексов называется *когерентной*, если на каждом 1-симплексе триангуляции два инцидентных с ним 2-симплекса индуцируют *противоположные* ориентации. Мы покажем, что в случае ориентируемой поверхности такая ориентация всегда возможна. Этому мы предпошлем рассмотрение ориентированных топологических 2-симплексов числовой плоскости.

2.96. Итак, пусть $\sigma^2 = \{z_1\ z_2\ z_3\}$ — ориентированный топологический 2-симплекс числовой плоскости. Его граница, рассматриваемая как точечное множество, есть жорданова кривая. Введем на ней параметр t ($0 \leqslant t \leqslant 1$); пусть t_1, t_2, t_3 — значения параметра, соответствующие точкам z_1, z_2, z_3. Тогда произведение

$$(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)$$

отлично от нуля, следовательно, оно положительно или отрицательно [1]). Если τ — другой параметр, то произведения $(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)$ и $(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)$ имеют одинаковые или противоположные знаки, в зависимости от того, связаны ли τ и t монотонно возрастающим или монотонно убывающим преобразованием. Если мы допустим только такие параметры t, что

$$(t_1-t_2)(t_2-t_3)(t_3-t_1)>0,$$

то ориентированному 2-симплексу $\{z_1\ z_2\ z_3\}$ будет соответствовать класс параметрических представлений его границы, такой, что каждые два допустимых параметра связаны между собой монотонно возрастающим преобразованием.

Пусть теперь t — такой допустимый параметр и z_0 — произвольная средняя точка σ^2. Тогда число обходов (Umlaufszahl) кривой $z(t)$ вокруг точки z_0 равно $+1$ или -1, независимо от выбора точки z_0 и допустимого параметра t. Таким образом, каждому ориентированному топологическому 2-симплексу $\{z_1z_2z_3\}$ отвечает вполне определенное число, которое мы обозначим через $u\{z_1z_2z_3\}$, имеющее значение $+1$ или -1. Противоположно ориентированным симплексам отвечают противоположные числа, т. е.

$$u(-\{z_1z_2z_3\})=-u\{z_1z_2z_3\}.$$

Топологический 2-симплекс $\{z_1z_2z_3\}$ называется *положительно ориентированным*, если соответствующее число u равно $+1$.

2.97. Мы заимствуем из топологии числовой плоскости следующие три теоремы:

I. Пусть f — топологическое преобразование симплекса $\{z_1z_2z_3\}$ на числовой плоскости и $\{z_1'z_2'z_3'\}$ — симплекс-образ. Тогда

$$u\{z_1'z_2'z_3'\}=u\{z_1z_2z_3\}$$

или

$$u\{z_1'z_2'z_3'\}=-u\{z_1z_2z_3\},$$

в зависимости от того, сохраняет ли f ориентацию или меняет ее.

II. Пусть $\{z_1z_2z_3\}$ и $\{z_1z_2z_4\}$ — два топологических 2-симплекса числовой плоскости, имеющие общей частью только сторону $\{z_1z_2\}$. Тогда

$$u\{z_1z_2z_3\}=-u\{z_1z_2z_4\}.$$

---

[1]) Если одна из точек z_i совпадает с началом $z(0)=z(1)$ кривой, то для знака предыдущего выражения безразлично, положим ли мы $t_i=0$ или $t_i=1$.

III. Пусть $\{z_1z_2z_3\}$ и $\{z_1z_2z_4\}$ — два топологических 2-симплекса числовой плоскости, из которых один является частью другого. Тогда

$$u\{z_1z_2z_3\} = u\{z_1z_2z_4\}.$$

2.98. После этих приготовлений мы можем доказать, что 2-симплексы триангуляции ориентируемой поверхности всегда когерентно ориентируемы. Итак, пусть $\sigma^2 = (P_1P_2P_3)$ есть 2-симплекс на R. Выберем произвольную параметрическую окрестность K, содержащую σ^2; пусть $(z_1z_2z_3)$ — образ $(P_1P_2P_3)$ в параметрическом круге K_z. Обе возможные ориентации σ^2 зададим в виде $\varepsilon\{P_1P_2P_3\}$, где $\varepsilon = +1$ или $\varepsilon = -1$. Выберем ε так, чтобы для преобразованного симплекса в K_z выполнялось условие $u(\varepsilon\{z_1z_2z_3\}) = +1$ или, что то же самое, чтобы было

$$(a) \qquad u\{z_1z_2z_3\} = \varepsilon.$$

Этим устанавливается ориентация каждого 2-симплекса. Мы покажем, что эти ориентации когерентны. Для этого рассмотрим любой 1-симплекс, скажем (P_1P_2). Пусть $'\sigma^2 = (P_1P_2P_4)$ — второй инцидентный с ним 2-симплекс. Он имеет определенную ориентацию $\varepsilon'\{P_1P_2P_4\}$. Индуцированная σ^2, соответственно $'\sigma^2$, ориентация на (P_1P_2) есть $\varepsilon\{P_1P_2\}$, соответственно $\varepsilon'\{P_1P_2\}$; поэтому достаточно показать, что $\varepsilon' = -\varepsilon$.

Если K' — выбранная для $'\sigma^2$ параметрическая окрестность, то в параметрическом круге K'_z, в силу (a),

$$u\{z'_1z'_2z'_4\} = \varepsilon'.$$

Пусть теперь K'' — параметрическая окрестность, содержащая σ^1. Предположим сначала, что σ^2 и $'\sigma^2$ лежат целиком в K''. Тогда в соответствующем параметрическом круге K''_z симплексам σ^2 и $'\sigma^2$ отвечают два симплекса $(z''_1z''_2z''_3)$ и $(z''_1z''_2z''_4)$, пересекающиеся в точности по стороне $(z''_1z''_2)$. Так как соотношение соседства $K_z \to K''_z$ сохраняет ориентацию, то, по теореме I п. 2.97,

$$u\{z''_1z''_2z''_3\} = u\{z_1z_2z_3\}$$

и точно так же

$$u\{z''_1z''_2z''_4\} = u\{z'_1z'_2z'_4\}.$$

С другой стороны, по теореме II п. 2.97,

$$u\{z''_1z''_2z''_3\} = -u\{z''_1z''_2z''_4\}.$$

Из этих трех равенств следует, что

$$u\{z_1z_2z_3\} = -u\{z'_1z'_2z'_4\}, \text{ т. е. } \varepsilon' = -\varepsilon.$$

Если сделанное выше предположение не выполняется, то пусть $(P_1P_2P_3^*)$ — топологический 2-симплекс в $(P_1P_2P_3)$, лежащий целиком

в K''. Тогда для симплекса-образа $(z_1z_2z_3^*)$ в параметрическом круге K_z имеет место, по теореме III п. 2.97, равенство

$$u\{z_1z_2z_3^*\} = u\{z_1z_2z_3\}.$$

Если $(P_1P_2P_4^*)$ означает такой же 2-симплекс в $(P_1P_2P_4)$, то аналогично

$$u\{z_1'z_2'z_4'^*\} = u\{z_1'z_2'z_4'\}.$$

Затем, как уже было доказано,

$$u\{z_1z_2z_3^*\} = -u\{z_1'z_2'z_4'^*\},$$

и из этих трех равенств вытекает, что

$$u\{z_1z_2z_3\} = -u\{z_1'z_2'z_4'\},$$

т. е. $\varepsilon' = -\varepsilon$, что и требовалось доказать.

2.99. Двубережность симплициальных путей. Пусть R — ориентируемая триангулируемая поверхность и γ — замкнутый свободный от двойных точек симплициальный путь (Kantenweg), т. е. путь, составленный из 1-симплексов триангуляции. Пусть R_1 означает часть поверхности R, образованную всеми 2-симплексами, имеющими с γ либо общую сторону, либо общую вершину[1]). Мы покажем, что путь γ (возможно, после подразделения триангуляции) является „двубережным"; это означает следующее: два 2-симплекса R_1, примыкающие к одной и той же стороне γ, не могут быть соединены последовательностью 2-симплексов R_1 так, чтобы каждые два из них, следующие друг за другом, имели общий 1-симплекс, не принадлежащий γ.

Для доказательства предположим, что всякая общая сторона всяких двух 2-симплексов R_1 либо лежит на γ, либо выходит из γ. Этого можно добиться, в случае необходимости, барицентрическим подразделением заданной триангуляции.

Зафиксируем теперь ориентацию пути γ. Этим будет определена ориентация и в каждом 2-симплексе, имеющем общую сторону с γ. Чтобы ориентировать и другие симплексы R_1, рассмотрим вершину σ^0 пути γ и цикл 2-симплексов вокруг σ^0. Выходящие из σ^0 1-симплексы γ разбивают этот цикл на два полуцикла. В каждом из них два 2-симплекса уже ориентированы, и их ориентация может быть продолжена до когерентной ориентации всего полуцикла. Построенная таким образом ориентация R_1 обладает тем свойством, что

---

[1]) Предполагается, что нет 2-симплексов, имеющих с γ две общие стороны или общую сторону и противоположную вершину. Это всегда может быть достигнуто дополнительным подразделением заданной триангуляции R. — *Прим. перев.*

на каждом 1-симплексе, который выходит из γ, но сам не лежит на γ, примыкающие к нему два 2-симплекса индуцируют противоположные ориентации.

Теперь мы, независимо от R_1, ориентируем когерентно всю поверхность R. Если σ^2 и $'\sigma^2$ — два 2-симплекса, примыкающие к 1-симплексу пути γ, то в одном из них, скажем в σ^2, ориентации, определяемые R и R_1, совпадают, в то время как в $'\sigma^2$ они противоположны. Предположим теперь, что σ^2 и $'\sigma^2$ можно соединить цепочкой указанного выше рода. Пусть σ_n^2 — последний симплекс цепочки, в котором R и R_1 определяют одинаковые ориентации. Следующий за σ_n^2 2-симплекс σ_{n+1}^2 имеет с ним общий 1-симплекс, выходящий из γ, но не лежащий на γ. Следовательно, ориентации, определяемые на σ_{n+1}^2 как R, так и R_1, индуцируют на σ^1 ориентации, противоположные той, которая индуцируется на нем ориентацией σ_n^2, поэтому обе ориентации σ_{n+1}^2 должны совпадать, что противоречит тому, что σ_n^2 — последний симплекс с таким свойством. Этим доказательство завершено.

2.100. Представление двумерного многообразия с помощью многоугольника. Понятие отождествления (см. п. 2.13) доставляет нам важное средство для построения двумерных многообразий. Мы рассматриваем *многоугольник* числовой плоскости, т. е. замкнутую внутренность жордановой кривой, разделенной на конечное число дуг, *сторон* многоугольника. Общие концы сторон называются *вершинами* многоугольника.

Пусть π — такой многоугольник с четным числом сторон. Пусть эти стороны произвольным образом разбиты на пары и стороны каждой пары связаны друг с другом топологическим отображением. Теперь мы точки π, соответствующие друг другу при таких отображениях, будем считать *эквивалентными*. По этому определению внутренняя точка π не имеет эквивалентных точек, внутренняя точка стороны имеет в точности одну эквивалентную точку, в то время как вершина π в общем случае имеет несколько эквивалентных точек.

После отождествления определенных таким образом эквивалентных точек многоугольник π становится топологическим пространством R. Мы покажем, что R — *двумерное многообразие*.

Прежде всего ясно, что R удовлетворяет аксиоме отделимости. Далее, нам нужно показать, что каждая точка R имеет окрестность, гомеоморфную кругу. Для внутренних точек π это непосредственно ясно. Пусть теперь P — внутренняя точка стороны a, a' — эквивалентная a сторона и P' — эквивалентная P точка. Пусть S и T — две близкие к P точки, расположенные по обе стороны от нее на a, и q — жорданова дуга, идущая в π из S в T: оно отделяет от π жорданову область B вокруг P. Пусть, далее, S'

и T' — образы S и T на a', q' — жорданова дуга, идущая в π из S' в T', и B' — соответствующая (не пересекающаяся с B) жорданова область. Рассмотрим теперь, наряду с π, круг $|z|<1$, разделенный диаметром на два полукруга. Тогда области B и B' можно топологически отобразить на оба полукруга так, чтобы каждая дуга ST и $S'T'$ переходила в диаметр, причем чтобы точки, связанные отображением $a \to a'$, переходили в одну и ту же точку диаметра. Если U_P означает подмножество точек R, состоящее из внутренних точек B и B' и пар эквивалентных точек дуг ST и $S'T'$, то это множество (представляющее окрестность точки (P, P')) тем самым топологически отображается на круг $|z|<1$. Этим для точки (P, P') указана окрестность, гомеоморфная кругу.

2.101. Пусть, наконец, P_0 — вершина π. Пусть a_0 — одна из сторон, выходящих из P_0, и a' — эквивалентная ей сторона. Тогда один из ее концов, P_1, эквивалентен P_0[1]). Из P_1 выходит вторая сторона многоугольника a_1. Эквивалентная ей сторона a_1' снова имеет эквивалентный P_0 конец P_2. Продолжая так дальше, получим цепочку

$$P_0 \to a_0 \to a_0' \to P_1 \to \ldots \to P_0,$$

содержащую все эквивалентные P_0 точки и приводящую обратно в P_0.

Теперь мы на каждой стороне a_ν ($\nu = 1, \ldots, r$; $a_r = a_0$; $P_r = P_0$) с помощью достаточно близкой к P_ν точки P_ν^* ограничиваем дугу $b_\nu = P_\nu P_\nu^*$. Пусть $P_\nu^{*\prime}$ — эквивалентная P_ν^* точка на a_ν' и b_ν' — эквивалентная b_ν дуга на a_ν'. Затем с помощью жордановых дуг, соединяющих в π точки $P_{\nu-1}^{*\prime}$ с P_ν^*, мы вокруг каждой вершины P_ν вырезаем сектор σ_ν. Граница его состоит из указанной дуги и обоих „радиусов“ $b_{\nu-1}'$ и b_ν.

Таким образом, мы получили множество секторов, причем „радиус“ b_ν сектора σ_ν каждый раз отображается на „радиус“ b_ν' сектора $\sigma_{\nu+1}$ ($\nu = 1, \ldots, r \pmod r$). Это отображение переводит „вершину“ P_ν сектора σ_ν в „вершину“ сектора $\sigma_{\nu+1}$.

Теперь мы соответственно делим круг $|z|<1$ на r секторов $\tilde{\sigma}_\nu$ и каждый сектор σ_ν отображаем топологически на $\tilde{\sigma}_\nu$ так, чтобы эквивалентные точки σ_ν и $\sigma_{\nu+1}$ переходили в одни и те же точки. Этим множество $\sum_\nu \sigma_\nu$, в котором эквивалентные точки следует отождествить, топологически отображается на круг $|z|<1$. Следовательно, это множество представляет гомеоморфную кругу окрестность точки

[1]) P_1 может совпадать с P_0.

поверхности R, представленной эквивалентными вершинами. Таким образом, для каждой точки R определена гомеоморфная кругу окрестность, следовательно, R есть двумерное многообразие.

2.102. Ориентируемость полиэдров. Чтобы выяснить, когда поверхность R, представленная многоугольником π, ориентируема, предположим, что многоугольник π ориентирован, т. е. что его вершины $P_1, \ldots, P_n$ расположены в циклическом порядке. Этим определяется ориентация и на каждой стороне π. Пусть $a = (P_1P_2)$ и $a' = (P_rP_{r+1})$ — две стороны с этими ориентациями. Мы покажем, что поверхность R тогда и только тогда ориентируема, когда соответствие сторон $a \to a'$ переводит ориентацию a в ориентацию, противоположную к имеющейся на a'.

Для доказательства мы предположим сначала, что a переходит в a' вместе с ориентацией, и покажем, что тогда поверхность R не может быть ориентируемой. Для этого достаточно, согласно п. 2.99, указать на R однобережную кривую.

Пусть P и P' — две эквивалентные точки соответственно на a и a' и γ — жорданова дуга, ведущая из P в P' и состоящая из 1-симплексов подходящей триангуляции R. Эта дуга разбивает π на два многоугольника $\pi_1 = P_1PP'P_{r+1} \ldots P_n$ и $\pi_2 = PP_2 \ldots P_rP'$. Пусть σ^2, соответственно τ^2, есть 2-симплекс триангуляции π, имеющий P, соответственно P', одной из своих вершин и примыкающий вдоль стороны σ^1, соответственно τ^1, к стороне P_1P многоугольника π_1, соответственно к стороне P_rP' многоугольника π_2. При отображении $a \to a'$ сторона P_1P переходит, по предположению, в P_rP', поэтому 1-симплексу σ^1 соответствует 1-симплекс τ^1. Следовательно, симплексы σ^2 и τ^2 имеют на R одну общую сторону, не принадлежащую γ. Отсюда становится ясным, что всякие два 2-симплекса „полоски“ вокруг γ можно соединить указанным в п. 2.99 образом; следовательно, кривая γ однобережна.

Обратно, если каждое отображение переводит соответствующие стороны друг в друга с обращением ориентации, то можно показать, что соотношения соседства, определяемые согласно пп. 2.100 и 2.101, сохраняют ориентацию; это мы предоставляем читателю.

2.103. Двумерное многообразие, представленное с помощью многоугольника, всегда можно триангулировать; для этого нужно только триангулировать многоугольник, следя лишь за тем, чтобы с каждой новой вершиной на одной стороне эквивалентные ей точки также становились вершинами.

Из теории униформизации (гл. VIII) следует, что всякую замкнутую риманову поверхность R можно представить с помощью многоугольника, причем соответствия сторон являются аналитическими отображениями. Из предыдущего следует тогда и триангулируемость этих поверхностей.

2.104. Поверхности с краем. Пусть π — многоугольник числовой плоскости, число сторон которого не обязательно четное. Пусть в π отождествляются с помощью топологических отображений только некоторые пары сторон, в то время как по крайней мере одна сторона остается свободной. Отождествляя в π эквивалентные точки, получаем топологическое пространство, которое не всюду без исключений удовлетворяет аксиоме С многообразий. Внутренние точки свободной стороны не имеют гомеоморфной кругу окрестности, но имеют окрестность, гомеоморфную полукругу, т. е. окрестность, которую можно топологически отобразить на полуоткрытый полукруг $|z|<1$, $y\geqslant 0$ $(z=x+iy)$. Аналогично тому, как это было сделано в п. 2.101 для замкнутых поверхностей, можно для концов свободных сторон показать, что они имеют на R окрестности, гомеоморфные полукругам. Топологическое пространство R мы называем *поверхностью с краем* (Berandete Fläche) [1]). Множество точек с полукруговыми окрестностями, т. е. образ свободных сторон π, называется *краем* (Rand) поверхности. Он состоит из конечного числа замкнутых жордановых кривых. Если представить себе, что поверхность R триангулирована и 2-симплексы когерентно ориентированы, то край этой 2-цепи состоит из края поверхности R.

---

[1]) Подробнее см. в книге П. С. Александрова [1**], гл. III, § 2, п. 2.3.— *Прим. перев.*

Глава III

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИКО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Исследованиями предыдущей главы по основным топологически и конформно инвариантным свойствам римановых поверхностей построен фундамент для развития теории функций и теории потенциала на таких поверхностях. В настоящей главе будут изложены некоторые общие понятия и принципы теории функций, нужные нам для дальнейших более подробных исследований.

§ 1. ФУНКЦИИ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

3.1. Функции на римановых поверхностях. Пусть R — произвольная открытая или замкнутая риманова поверхность и G — область на R. Пусть каждой точке P области G поставлено в соответствие действительное или комплексное число $f(P)$. Тогда f определена как *функция* на G. Если K — параметрическая окрестность точки P (которую мы можем считать лежащей целиком в G) и z — комплексная переменная в $K(|z|<1)$, то $f(P)$ определена в K как функция от z, которую мы также будем обозначать через $f(z)$. Для другой параметрической окрестности K^*, с комплексной переменной z^*, f в K^* является соответственно функцией $f^*(z^*)$. Если Q — точка пересечения KK^*, а z и z^* — ее координаты соответственно в K и K^*, которые, следовательно, связаны конформным соотношением соседства $z \leftrightarrow z^*$, то выполняется равенство

$$f(z) = f^*(z^*). \tag{3.1}$$

Функцию $f(z)$, определенную в параметрическом круге, называют *элементом функции* (Funktionselement). Таким образом, функции на G соответствуют в отдельных параметрических окрестностях ее элементы, связанные соотношением (3.1). Обратно, совокупность элементов $f(z)$, принимающих в эквивалентных точках $z \leftrightarrow z^*$ одинаковые значения, образует однозначную *скалярную функцию*, или *инварианту* в области G. Функции мы записываем просто в виде $f(z)$, обозначая точку P в случаях, когда это не может вызвать недоразумений, через комплексную координату z произвольной содержащей ее параметрической окрестности.

Аналитическая функция $w=f(z)$, однозначная на поверхности R, осуществляет отображение R на область G_w w-сферы. При этом R становится поверхностью наложения G_w (вообще говоря, разветвленной и не безграничной).

3.2. Ковариантные векторы. Пусть $f(z)$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая по действительным координатам x_1 и x_2 ($z=x_1+ix_2$). Если положить $M_1=f_{x_1}$ и $M_2=f_{x_2}$, то дифференциал функции f будет равен

$$df=\sum_{i=1}^{2} M_i\,dx_i.$$

При другом локальном параметре $z^*=x_1^*+ix_2^*$ для df имеем аналогичное выражение

$$df=\sum_{i=1}^{2} M_i^*\,dx_i^*,$$

причем

$$M_i^*=\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} M_k. \tag{3.2}$$

Следовательно, производные M_1, M_2 при переходе к другому параметру преобразуются согласно (3.2), *ковариантно*. Вообще, под *ковариантным вектором* понимают пару чисел (M_1, M_2), которая определяется не одной только точкой P, а точкой P и локальным параметром z, и которая при переходе к другому параметру преобразуется по формуле (3.2). Производные f_{x_1}, f_{x_2} скалярной функции f составляют, следовательно, ковариантный вектор — *градиент* функции f.

Если каждой точке некоторой области поверхности R сопоставлен ковариантный вектор, то говорят о *ковариантном векторном поле*. Ковариантному векторному полю ставят в соответствие инвариантную *дифференциальную форму*

$$df=M_1\,dx_1+M_2\,dx_2,$$

где df — только обозначение для суммы, стоящей справа.

Если между компонентами M_1 и M_2 произвольного ковариантного вектора имеет место соотношение $M_2=iM_1$ для определенного параметра z, то, в силу конформности соотношений соседства, оно имеет место для *каждого* параметра z, следовательно, оно инвариантно. Вектор M_i определяется тогда *одним* числом, скажем $M_1=M$, которое преобразуется по закону

$$M^*=M\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1^*}+i\,\frac{\partial x_2}{\partial x_1^*}\right)=M\,\frac{dz}{dz^*}.$$

Величину, подчиняющуюся этому закону преобразования, мы называем *ковариантой*. Коварианте M соответствует инвариантная дифференциальная форма

$$df = M\,dz.$$

Если между компонентами M_1, M_2 ковариантного вектора имеет место соотношение $M_2 = -iM_1$ (также не зависящее от локального параметра), то величина $M_1 = M$ преобразуется по закону

$$M^* = M\frac{d\bar{z}}{d\bar{z}^*}.$$

Если M — коварианта, то сопряженное комплексное число $\bar{M}$ есть величина этого рода.

3.3. Сопряженный дифференциал. Вместе с ковариантным вектором M_1, M_2 пара чисел $\widetilde{M}_1 = -M_2$, $\widetilde{M}_2 = M_1$ также образует ковариантный вектор. В самом деле, при переходе к другому параметру получается, согласно п. 3.2, с учетом конформности соотношений соседства,

$$\widetilde{M}_i^* = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*}\widetilde{M}_k;$$

но это — закон преобразования ковариантных векторов.

Соответствующая дифференциальная форма

$$\widetilde{df} = -M_2\,dx_1 + M_1\,dx_2$$

называется *сопряженной* к форме $df = M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2$.

Если, в частности, df — дифференциал, соответствующий коварианте, то сопряженный дифференциал удовлетворяет равенству $\widetilde{df} = -i\,df$.

3.4. Ротор. Пусть M_1, M_2 — ковариантное поле, компоненты которого — непрерывно дифференцируемые функции от x_1 и x_2. Разность $\partial M_1/\partial x_2 - \partial M_2/\partial x_1$ при переходе к новому параметру z^* преобразуется по закону

$$\frac{\partial M_1^*}{\partial x_2^*} - \frac{\partial M_2^*}{\partial x_1^*} = \left(\frac{\partial M_1}{\partial x_2} - \frac{\partial M_2}{\partial x_1}\right)\left|\frac{dz}{dz^*}\right|^2; \qquad (3.3)$$

она называется *ротором*, или *вихрем* поля M_1, M_2. Если ротор равен нулю, что, в силу (3.3), имеет не зависящий от параметра z смысл, то поле называется *безвихревым*, а соответствующий дифференциал $df = M_1\,dx_1 + M_2\,dx_2$ — *точным*.

Поле градиента всегда безвихревое. Обратно, безвихревое поле является полем градиента, однако лишь *локально*.

3.5. Аналитические коварианты. Для коварианты M равенство нулю ротора означает, что M — *аналитическая функция* от z. В этом случае M называется *аналитической ковариантой*, а $M\,dz$ — *аналитическим дифференциалом*. Производная однозначной аналитической функции по локальному параметру z есть аналитическая коварианта. Если аналитическая коварианта обращается в нуль в окрестности некоторой точки, то она тождественно равна нулю.

3.6. Дивергенция. Под дивергенцией ковариантного векторного поля M_1, M_2 понимают взятый со знаком минус ротор сопряженного поля, т. е. выражение

$$\frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2}.$$

Как ротор, оно преобразуется по закону (3.3).

Если дивергенция равна нулю, то поле называется *полем без источников*, а соответствующий дифференциал — *гармоническим*. Следовательно, утверждения, что дифференциал гармонический и что сопряженный дифференциал точный, означают одно и то же.

В частности, если векторное поле является градиентом скалярной функции f, т. е.

$$M_1 = f_{x_1}, \qquad M_2 = f_{x_2},$$

то дивергенция равна *лапласиану*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}.$$

Скалярная функция, дифференциал которой является гармоническим, удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta f = 0$. Такая функция называется *гармонической функцией* или *потенциалом*. *Точный* дифференциал, соответствующий *коварианте*, — всегда гармонический. Следовательно, аналитический дифференциал — всегда гармонический.

3.7. Тензоры. Под *ковариантным тензором* второго порядка понимают систему из четырех чисел $T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), которая при переходе к новому параметру z^* преобразуется по закону

$$T^*_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial x_\mu}{\partial x^*_\alpha} \frac{\partial x_\nu}{\partial x^*_\beta} T_{\mu\nu}. \tag{3.4}$$

Например, произведение $M_\alpha N_\beta$, где M_α и N_β — ковариантные векторы, есть ковариантный тензор. Если для тензора выполняется соотношение $T_{\beta\alpha} = -T_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$), что, в силу (3.4), имеет не зависящий от параметра смысл, то тензор называется *кососимметрическим*. Такой тензор имеет только одну существенную компоненту

$T_{12} = -T_{21} = T$, и она преобразуется по закону

$$T^* = T\left|\frac{dz}{dz^*}\right|^2. \tag{3.5}$$

Так как нам придется рассматривать только кососимметрические тензоры, то в дальнейшем мы будем опускать индексы и понимать под тензором *одно* число T, которое преобразуется по закону (3.5). Ввиду того, что множитель $|dz/dz^*|^2$ положителен, понятия действительных и положительных тензоров имеют инвариантный смысл.

Ротор и дивергенция векторного поля являются тензорами. Из двух ковариантных векторов M_α и N_β по формуле

$$T = M_1N_2 - M_2N_1$$

получается некоторый тензор.

3.8. Замечание. Ясно, что различие между аналитическими функциями, с одной стороны, и аналитическими ковариантами (например, производными от аналитических функций) — с другой, проявляется лишь в различии законов преобразования при переходе от одного локального параметра к другому. Пока имеют дело с одним локальным параметром, инвариантность или ковариантность не играет роли. Поэтому в элементарной теории функций, где обычно приходится иметь дело с заданной комплексной плоскостью как областью изменения независимого переменного, указанное различие не играет роли. Правда, и здесь исключение представляет введение бесконечно удаленной точки, окрестность которой с помощью преобразования $z = 1/t$ переводится в конечную область; для изучения свойств аналитических функций в бесконечности также рекомендуется введение понятий инвариантности и ковариантности.

Подчеркнем еще, что всюду в дальнейшем понятия вектора и тензора будут связаны с группой конформных преобразований координат, которыми, естественно, ограничиваются в теории римановых поверхностей.

3.9. Комплексно сопряженные координаты. Предыдущие свойства дифференциалов выражаются в удобном для многих целей виде, если в качестве координат использовать не x и y, а $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Тогда $dz = dx + i\,dy$ и $d\bar{z} = dx - i\,dy$, затем $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ и $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$.

Дифференциал

$$df = A\,dz + B\,d\bar{z},$$

где $A(z, \bar{z})$ и $B(z, \bar{z})$ — две действительные или комплексные функции, является точным, если

$$A_{\bar{z}} = B_z.$$

Сопряженным дифференциалом является

$$\tilde{df} = i(-A\,dz + B\,d\bar{z});$$

он будет точным, если

$$A_{\bar{z}} = -B_z.$$

Если оба дифференциала точные, то

$$A_{\bar{z}} = B_z = 0.$$

Тогда A — аналитическая функция от z, B — аналитическая функция от $\bar{z}$, следовательно, $\overline{B}$ — аналитическая функция от z.

Оператор Лапласа записывается в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}}.$$

§ 2. ФУНКЦИИ И КОВАРИАНТЫ НА ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

3.10. Рациональные функции. Пусть R — *замкнутая* риманова поверхность. Под *рациональной функцией* понимают однозначную аналитическую функцию $w = f(z)$ на R, регулярную с точностью до полюсов. В силу компактности R, число полюсов должно быть конечным. Образ R на w-сфере, как непрерывный образ компактной поверхности R, сам компактен, следовательно, является замкнутым подмножеством w-сферы. Так как, с другой стороны, этот образ — открытое множество [1]), то он должен охватывать всю сферу. Следовательно, поверхность R, в силу отображения $w = f(z)$, является (вообще говоря, разветвленной) поверхностью наложения w-сферы, и из компактности R следует, что эта поверхность *безгранична*. Число листов этой поверхности называется *порядком* рациональной функции $f(z)$. Следовательно, рациональная функция принимает каждое значение (считаемое с его кратностью) одинаковое число раз. Если, в частности, на поверхности R существует рациональная функция *первого* порядка, то она отображает R топологически и конформно на w-сферу. Значит, в этом случае поверхность R конформно эквивалентна числовой сфере.

3.11. Абелевы коварианты. Под *абелевой ковариантой* на замкнутой поверхности R понимают однозначную аналитическую кова-

[1]) Это следует из того, что осуществляемое функцией $f(z)$ отображение есть проектирование.

рианту $\varphi(z)$, регулярную с точностью до полюсов. Следовательно, производная рациональной функции есть абелева ковариантa. С другой стороны, отношение двух абелевых ковариант $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ есть рациональная функция.

Доказательство существования абелевых ковариант на заданной поверхности R, имеющих заданные главные части в полюсах, будет дано в гл. IV. Этим обеспечивается также существование на поверхности R рациональных функций, отличных от постоянных.

3.12. Рассмотрим теперь, в частности, замкнутую поверхность R, одномерная группа гомологий которой тривиальна. Пусть $\varphi(z)$—абелева ковариантa, регулярная на R с точностью до полюса второго порядка. Тогда, как будет показано в п. 3.51, интеграл $\int \varphi(z)\,dz$ на R однозначен и, с точностью до полюса первого порядка, регулярен, следовательно, является рациональной функцией первого порядка. Таким образом, если считать доказанной теорему существования из гл. IV, показано, что:

Замкнутая риманова поверхность, одномерная группа гомологий которой тривиальна, конформно эквивалентна числовой сфере.

Так как, согласно п. 2.36, одномерная группа гомологий каждой односвязной поверхности тривиальна, то предыдущая теорема справедлива, в частности, для односвязных замкнутых римановых поверхностей. В этой формулировке теорема содержит теорему Римана об отображении для компактных поверхностей, согласно которой любая односвязная замкнутая риманова поверхность конформно эквивалентна числовой сфере.

3.13. Характеристика. Пусть φ — абелева ковариантa на замкнутой поверхности R и A, соответственно B, — полная сумма порядков ее полюсов, соответственно нулей. Покажем, что разность $B-A$ от φ не зависит.

Пусть φ^* — другая абелева ковариантa на R с полными суммами порядков полюсов и нулей A^* и B^* соответственно. Предположим, что ни один полюс и ни один нуль φ^* не совпадает с полюсом или нулем φ[1]). Рассмотрим теперь рациональную функцию $f=\varphi/\varphi^*$. Ее полюсы состоят из полюсов φ и нулей φ^*, а нули — из полюсов φ^* и нулей φ. Так как общее число нулей функции f равно общему числу ее полюсов, то $A+B^*=A^*+B$, т. е. $B^*-A^*=B-A$.

Таким образом, разность $B-A=\chi$ определена уже поверхностью R и, следовательно, конформно инвариантна. Мы называем ее (конформной) *характеристикой* поверхности R.

---

[1]) Это ограничение несущественно и вводится лишь для наглядности; если оно не выполняется, то доказательство меняется лишь незначительно.

3.14. Примеры. Для числовой сферы характеристика $\chi = -2$, так как на числовой сфере величина

$$\varphi = \begin{cases} z^n & (z \neq \infty) \\ -\dfrac{1}{z^{*n+2}} & \left(z = \infty, \quad z^* = \dfrac{1}{z}\right) \end{cases} \quad (n \geqslant 1)$$

есть абелева ковариантa, имеющая в точке $z = 0$ нуль n-го порядка и в точке $z = \infty$ полюс $(n+2)$-го порядка.

Обратно, всякая замкнутая риманова поверхность с характеристикой $\chi = -2$ конформно эквивалентна числовой сфере. Действительно, пусть φ — абелева ковариантa на R, регулярная с точностью до полюса P второго порядка (доказательство существования — в гл. IV). Тогда полная сумма порядков нулей φ равна $B = 0$, ибо $B - A = \chi = -2$ и $A = 2$, т. е. $\varphi \neq 0$ на поверхности R. Если теперь ψ — абелева ковариантa, имеющая в P полюс третьего порядка и регулярная в остальных точках, то рациональная функция $f = \psi/\varphi$ имеет в точке P полюс первого порядка и регулярна в остальных точках; следовательно, это рациональная функция первого порядка, поэтому она отображает R конформно на числовую сферу.

3.15. Рассмотрим второй пример — замкнутую риманову поверхность R, получаемую из числовой плоскости отождествлением точек, эквивалентных относительно двоякопериодической группы, порождаемой преобразованиями $T_1(z \to z + \omega_1)$ и $T_2(z \to z + \omega_2)$ [1] (см. п. 2.13). Каждой однозначной аналитической функции на плоскости с периодами ω_1 и ω_2 отвечает на R однозначная аналитическая функция, и наоборот. Следовательно, теория однозначных аналитических функций на R тождественна с теорией двоякопериодических функций на z-плоскости.

Рассматриваемую поверхность R можно так покрыть параметрическими окрестностями, чтобы все соотношения соседства представляли *сдвиги* z-плоскости. Если на R допустить только эти локальные параметры, то, в силу инвариантности dz относительно преобразования сдвига, не будет никакого различия между инвариантностью и ковариантностью. Поэтому каждую скалярную функцию на R можно относительно указанных параметрических окрестностей рассматривать как ковариантy. Так как разность между полной суммой порядков нулей и полной суммой порядков полюсов для коварианты равна характеристике поверхности, а для скалярной функции—нулю, то отсюда следует, что характеристика $\chi = 0$ [2].

---

[1] $\operatorname{Im} \dfrac{\omega_1}{\omega_2} \neq 0$. — *Прим. перев.*

[2] В гл. VIII будет доказано, что таким образом получаются *все* поверхности с характеристикой $\chi = 0$.

3.16. Соотношение Римана — Гурвица. Теперь будет выведено соотношение между характеристиками замкнутой римановой поверхности R и ее (конечнолистной) поверхности наложения $\tilde{R}$.

Пусть φ — ковариант на R с конечным числом полюсов. Пусть они выбраны так, что над ними не лежат точки разветвления $\tilde{R}$. Коварианте φ отвечает на $\tilde{R}$ ковариант

$$\tilde{\varphi} = \varphi \frac{dz}{d\tilde{z}}.$$

Определим полные суммы порядков нулей и полюсов коварианты $\tilde{\varphi}$. Если g — (конечное) число листов поверхности $\tilde{R}$, то над каждым полюсом (соответственно нулем) φ лежит ровно g полюсов (соответственно нулей) $\tilde{\varphi}$. Так как, по предположению, все они — не точки разветвления, то в каждой из них $dz/d\tilde{z} \neq 0$, поэтому соответствующие порядки у φ и $\tilde{\varphi}$ совпадают. Этим подсчитаны уже все полюсы $\tilde{\varphi}$. Что касается нулей $\tilde{\varphi}$, то нужно еще добавить нули в тех точках поверхности $\tilde{R}$, где $dz/d\tilde{z} = 0$. Это как раз точки разветвления, причем в точке разветвления $(k-1)$-го порядка $\tilde{\varphi}$ имеет нуль в точности этого же порядка. Следовательно, сумма порядков нулей $\tilde{\varphi}$ в этих точках равна $\sum(k-1)$, где суммирование производится по всем точкам разветвления.

Таким образом, в итоге получаем на $\tilde{R}$

$$\tilde{A} = gA, \quad \tilde{B} = gB + \sum(k-1),$$

откуда для характеристики $\tilde{\chi}$ поверхности $\tilde{R}$ следует, что

$$\tilde{\chi} = \tilde{B} - \tilde{A} = g(B-A) + \sum(k-1).$$

Так как $B - A$ — характеристика χ поверхности R, то мы получили так называемое соотношение Римана — Гурвица:

$$\tilde{\chi} = g\chi + \sum(k-1).$$

В частности, если поверхность наложения неразветвленная, то

$$\tilde{\chi} = g\chi.$$

В качестве примера рассмотрим отображение $\tilde{z}$-сферы на z-сферу, осуществляемое многочленом n-й степени

$$z = P_n(\tilde{z}).$$

Если $n > 1$, то это — разветвленное проектирование. Число листов $g = n$. Сумма порядков точек разветвления, расположенных не $\tilde{z} = \infty$, равна числу всех нулей полинома $P_n'(\tilde{z})$, т. е. $n-1$.

К этому присоединяется еще точка разветвления $\tilde{z}=\infty$, имеющая порядок $n-1$. Таким образом, полная сумма порядков всех точек разветвления равна $2(n-1)$, как это следует из соотношения Римана — Гурвица.

3.17. Характеристика и знакочередующаяся сумма триангуляции. С помощью соотношения Римана — Гурвица можно вывести соотношение между характеристикой замкнутой римановой поверхности и знакочередующейся суммой (Wechselsumme) количеств симплексов триангуляции. Рассмотрим построенное в п. 2.90 разветвленное проектирование поверхности R на z-сферу. Точками разветвления являются центры тяжести 2- и 1-симплексов и вершины триангуляции, причем центр тяжести 2-симплекса имеет порядок $k=2$, центр тяжести 1-симплекса — порядок $k=1$, а вершина — порядок $k=n-1$, где n — число инцидентных с ней 2-симплексов. Число листов равно утроенному числу 2-симплексов, так как каждый 2-симплекс подразделен на шесть меньших и по три из них переходят в одну и ту же полуплоскость. Если χ — характеристика R и α^2, α^1, α^0 — количества 2-, 1- и 0-симплексов (первоначальной) триангуляции, то из соотношения Римана — Гурвица следует, что

$$\chi=3\alpha^2(-2)+2\alpha^2+\alpha^1+\sum(n-1),$$

и так как $\sum n=3\alpha^2$, то

$$\chi=-\alpha^0+\alpha^1-\alpha^2.$$

Отсюда вытекает, что знакочередующаяся сумма количеств симплексов не зависит от триангуляции поверхности.

Замечание. Так как, согласно п. 2.90, каждую ориентируемую триангулируемую поверхность можно сделать римановой поверхностью, то предыдущее заключение справедливо для каждой замкнутой ориентируемой триангулируемой поверхности. Следовательно, *знакочередующаяся сумма количеств симплексов топологически инвариантна*[1]).

---

[1]) Доказательство соотношения Римана — Гурвица предполагает, что $\tilde{R}$ — риманова поверхность наложения поверхности R. Построение п. 2.90 превращает $\tilde{R}$, вообще говоря, в другую риманову поверхность $\tilde{R}_1$, a priori с другой характеристикой χ_1. Поэтому рассуждения п. 3.17 неубедительны. Строгое доказательство топологической инвариантности эйлеровой характеристики поверхности (равной $\alpha^0-\alpha^1+\alpha^2$) см. у П. С. Александрова [1**] или у Зейферта и Трельфалля [1*]. Соотношение Римана — Гурвица для эйлеровых характеристик поверхностей R и $\tilde{R}$, не обязательно римановых, легко доказывается (см. Керекьярто [1*] и Р. Неванлинна [1*], гл. XIII). Отсюда, исходя из доказываемого позднее существования рациональной функции на каждой замкнутой римановой поверхности R, легко доказать, что характеристика χ совпадает с эйлеровой характеристикой, взятой со знаком минус (см. также ниже п. 3.49). — *Прим. перев.*

§ 3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

3.18. Определение продолжения. В первой главе мы уже пользовались аналитическим продолжением и теоремой о монодромии для исследования алгебраических функций. Теперь мы рассмотрим эти вопросы с достаточной для теории римановых поверхностей общностью.

Под *аналитическим элементом* на римановой поверхности R понимают определенную в параметрической окрестности однозначную аналитическую (относительно соответствующего параметра z) функцию $f(z)$.

Однозначную аналитическую функцию $f(z)$, определенную в области G, можно рассматривать как совокупность элементов $f(z)$, в которой элементы f и f^* соседних параметрических окрестностей в пересечении последних связаны законом инвариантности

$$f(z)=f^*(z^*) \quad (z\leftrightarrow z^*). \tag{3.6}$$

Соответственно этому однозначная аналитическая ковариантa есть совокупность элементов $f(z)$, из которых любые два соседних связаны законом ковариантности

$$f(z)\,dz=f^*(z^*)\,dz^* \quad (z\leftrightarrow z^*). \tag{3.7}$$

Пусть K и K^* — две соседние параметрические окрестности на R и $f(z)$, соответственно $f^*(z^*)$, — аналитические элементы в K, соответственно в K^*. Эти элементы называются *непосредственными аналитическими продолжениями* друг друга, если пересечение KK^* не пусто и на нем имеет место закон преобразования (3.6) (инвариантное продолжение) или закон (3.7) (ковариантное продолжение). Оба вида непосредственного аналитического продолжения однозначно определяются исходным элементом, т. е. если f_1^* и f_2^* — два (инвариантных или ковариантных) продолжения f в K^*, то $f_1^*\equiv f_2^*$. Заметим, что определенное таким образом понятие непосредственного аналитического продолжения не обязательно транзитивно.

Аналогично определяется *гармоническое* продолжение. Два гармонических элемента $u(z)$ и $u^*(z^*)$ в соседних параметрических окрестностях K и K^* называются *непосредственными гармоническими продолжениями* друг друга, если в пересечении KK^* для эквивалентных точек $z\leftrightarrow z^*$ выполняется равенство $u(z)=u^*(z^*)$. Соответственно этому два гармонических дифференциала $df=M_1\,dx_1+M_2\,dx_2$ и $df^*=M_1^*dx_1^*+M_2^*dx_2^*$ называются непосредственными продолжениями друг друга, если в пересечении KK^* справедливы равенства

$$M_i^*=\sum\frac{\partial x_k}{\partial x_i^*}M_k \quad (i=1,2).$$

Если df^* — гармоническое продолжение df, то (скалярная) функция f^* является (при подходящем выборе постоянной интегрирования) гармоническим продолжением функции f. Гармоническое продолжение гармонического элемента также однозначно определяется этим элементом.

3.19. Продолжение вдоль пути. Пусть P и Q — две точки римановой поверхности R, а $w: P = P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — путь, ведущий из P в Q. Говорят, что задано *аналитическое покрытие* (analytische Belegung) пути w, если каждой точке $P(t)$ сопоставлен аналитический элемент f_t так, что выполняется следующее условие: для каждой точки $t = t_0$ существует такое число $\delta > 0$, что в δ-окрестности точки t_0 (относительно отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$) элемент f_t является непосредственным аналитическим продолжением элемента f_{t_0}. Два элемента f и g соответственно в P и Q называются *продолжениями друг друга вдоль пути* w, если существует такое аналитическое покрытие f_t пути w, что $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Очевидно, что если g — продолжение элемента f вдоль u и h — продолжение элемента g вдоль v, то h — продолжение f вдоль uv.

Множество элементов, получающихся из заданного элемента путем всевозможных аналитических продолжений, называется *аналитическим образом*. В области G, покрытой параметрическими окрестностями, аналитический образ определяет функцию (в общем случае многозначную). Элемент называется *неограниченно продолжаемым* на R, если он продолжаем вдоль любого пути.

Если в области G задана однозначная аналитическая функция $F(z)$ и каждой точке P ставится в соответствие элемент $f_P = F(z)$, то каждые два таких элемента являются продолжениями друг друга.

3.20. Перенесение аналитического продолжения. Пусть $\tilde{R}$ и R — две римановы поверхности; пусть $\tilde{R}$ — неразветвленная и безграничная поверхность наложения R. Тогда каждому аналитическому элементу $f(z)$ в точке z поверхности R соответствует в каждой лежащей над z точке $\tilde{z}$ элемент $\tilde{f}(\tilde{z})$, определяемый равенством $\tilde{f}(\tilde{z}) = f(z)$. Если w — путь, выходящий из P, и f_t — аналитическое покрытие пути w, то соответствующие элементы $\tilde{f}_t$ образуют аналитическое покрытие каждого пути наложения $\tilde{w}$.

Пусть теперь путь $\tilde{w}$ замкнут на $\tilde{R}$; продолжение элемента $\tilde{f}_t$ вдоль $\tilde{w}$, вообще говоря, не приводит обратно к начальному элементу. Возникает вопрос, можно ли для заданного элемента на R построить поверхность $\tilde{R}$ так, чтобы исключить указанную многозначность, т. е. чтобы продолжение вдоль замкнутого пути $\tilde{w}$ всегда

приводило к начальному элементу. Такая поверхность наложения $\tilde{R}$ строится в следующем пункте.

3.21. Аналитический образ как поверхность наложения. Итак, пусть f_{P_0} — заданный элемент в точке P_0 поверхности R. „Точками" поверхности $\tilde{R}$, которую требуется построить, мы будем считать элементы, получаемые путем продолжения элемента f_{P_0}[1]). При этом два элемента f_P и $f'_{P'}$ будем рассматривать как одинаковые, если они, во-первых, отвечают одной и той же точке $P = P'$ и, во-вторых, являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, т. е. $f_P = f'_{P'}$ в пересечении $U_P U'_{P'}$. Это соотношение транзитивно, так что оно определяет разбиение всех элементов на непересекающиеся классы.

На определенном таким образом множестве элементов $\tilde{R}$ нужно теперь установить топологию. Пусть f_P — произвольный элемент, определенный в параметрической окрестности U_P. Каждой точке Q окрестности U_P отвечает элемент f_Q в U_P, определяемый соотношением $f_Q = f_P$ на U_P. Класс этого элемента определяет точку $\tilde{Q}$ множества $\tilde{R}$. Этим каждой „точке" $\tilde{P} = f_P$ поставлено в соответствие определенное подмножество $U_{\tilde{P}}$ множества $\tilde{R}$, „точки" которого взаимно однозначно соответствуют точкам окрестности U_P.

Если каждой „точке" $\tilde{P} = f_P$ поставить в соответствие точку P поверхности R, то этим будет установлено однозначное отображение множества $\tilde{R}$ на область G поверхности R, покрываемую при продолжении элемента f_{P_0}. Для каждой точки $\tilde{P} = f_P$ подмножество $U_{\tilde{P}}$ содержит $\tilde{P}$ и взаимно однозначно отображается на параметрическую окрестность U_P точки P. Если $U_{\tilde{P}}$ и $U_{\tilde{P}'}$ — два таких подмножества с непустым пересечением $U_{\tilde{P}} U_{\tilde{P}'}$, то посредством σ ему ставится в соответствие на R *открытое* множество в пересечении $U_P U_{P'}$.

В самом деле, пусть $\tilde{M} = f_M$ — произвольная „точка" пересечения $U_{\tilde{P}} U_{\tilde{P}'}$ и M — ее образ в $U_P U_{P'}$. Окрестность U_M точки M, лежащая целиком в $U_P U_{P'}$, состоит только из образов. Действи-

---

[1]) Для фиксированной точки P рассматриваются только такие параметрические окрестности, попарные пересечения которых *связны*. [В этом случае все непосредственные аналитические продолжения элемента f_{P_0} в точку P являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, и, следовательно, все они одинаковы в указанном далее смысле. — *Прим. перев.*]

тельно, точке N из U_M соответствует в $U_{\tilde{P}}$, соответственно в $U_{\tilde{P}'}$, „точка“ $f_N = f_P$, соответственно $f'_N = f_{P'}$, и так как $f_P = f_{P'}$ в $U_P U_{P'}$, то $f_N = f'_N$. Следовательно, N есть образ „точки“ $f_N = f'_N$ пересечения $U_{\tilde{P}} U_{\tilde{P}'}$.

Поэтому, согласно п. 2.11, множество $\tilde{R}$ можно сделать топологическим пространством, перенося с помощью отображения σ^{-1} на каждое подмножество $U_{\tilde{P}}$ топологию окрестности U_P. Это пространство удовлетворяет прежде всего аксиомам A и C, но оно удовлетворяет также и аксиоме отделимости.

В самом деле, пусть $\tilde{P} = f_P$ и $\tilde{P}' = f'_{P'}$ — две различные точки $\tilde{R}$. Если точки P и P' на R совпадают, то окрестности $U_{\tilde{P}}$ и $U_{\tilde{P}'}$ не имеют общих точек, так как если бы у них была общая точка $\tilde{Q} = f_Q$, то мы бы имели $f_P = f_Q$ в $U_P U_Q$ и $f'_P = f_Q$ в $U'_P U_Q$, т. е. $f'_P = f_P$ в $U'_P U_P$, следовательно, точки $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$ совпадали бы. Если же P и P' — различные точки, то пусть $V \subset U_P$ и $V' \subset U_{P'}$ — не пересекающиеся окрестности соответственно P и P'. Им соответствуют в $U_{\tilde{P}}$ и $U_{\tilde{P}'}$ две непересекающиеся окрестности $\tilde{V}$ и $\tilde{V}'$ соответственно $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$.

Итак, пространство $\tilde{R}$ удовлетворяет аксиомам A, B и C и, следовательно, является поверхностью. Так как σ — локально топологическое отображение $\tilde{R}$ на область G, то $\tilde{R}$ — неразветвленная (в общем случае не безграничная) поверхность наложения G. Поэтому $\tilde{R}$, согласно п. 2.88, может быть сделано *римановой поверхностью*.

Поверхность $\tilde{R}$ *связна*. В самом деле, если $\tilde{P}_1 = f_{P_1}$ — произвольная точка $\tilde{R}$, то так как f_{P_1} — продолжение исходного элемента $\tilde{P}_0 = f_{P_0}$, существует путь $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ из P_0 в P_1 и такое аналитическое покрытие f_t этого пути, что $f_0 = f_{P_0}$ и $f_1 = f_{P_1}$. Тогда посредством $\tilde{P}(t) = f_t$ определяется путь на $\tilde{R}$, ибо отображение $t \to \tilde{P}(t)$ удовлетворяет условиям леммы п. 2.53 и поэтому непрерывно. Так как, по построению, начало пути $\tilde{P}(t)$ есть точка f_{P_0}, а конец — точка f_{P_1}, то $\tilde{P}(t)$ действительно соединяет $\tilde{P}_0$ с $\tilde{P}_1$.

Перенесение элемента f_P из области G на построенную таким образом поверхность наложения $\tilde{R}$ означает теперь просто то, что каждой точке $\tilde{P} = f_P$ ставится в соответствие число f_P. Таким образом, на $\tilde{R}$ действительно получается функция, *однозначная в целом*.

Если, в частности, заданный элемент f_{P_0} *неограниченно продолжаем* в G, то это означает, что *каждый* путь w, лежащий в G, можно неограниченно[1]) перенести на $\widetilde{R}$; следовательно, в этом случае $\widetilde{R}$ — *безграничная* поверхность наложения G (см. п. 2.52).

После того, как мы выяснили, что $\widetilde{R}$ — поверхность наложения покрытой элементами области G, мы можем применить результаты § 4 гл. II. Прежде всего получаем, что продолжение элемента f_{P_0} однозначно определяется исходным элементом и путем (с точностью до непосредственного аналитического продолжения); точнее: если f_{P_0} и f'_{P_0} — два аналитических элемента в P_0, являющиеся непосредственными аналитическими продолжениями друг друга, и f_{P_1} и f'_{P_1} — их продолжения вдоль пути w, то f_{P_1} и f'_{P_1} также являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга.

3.22. Замечание о продолжении элементов заданного аналитического образа. Обратно, если f — однозначная аналитическая функция, определенная на заданной римановой поверхности, и f_P — какой-либо ее элемент, то из однозначности аналитического продолжения следует, что при продолжении элемента f_P, в соответствии с пп. 3.18 и 3.19, он все время совпадает с f. Следовательно, в частности, продолжение постоянного элемента $f_P = C$ равно постоянной $f \equiv C$.

3.23. Теорема о монодромии. Далее, из пп. 2.51 и 3.21 следует:

Если w_0 и w_1 — гомотопные пути на R и элемент f_{P_0} продолжаем вдоль всех путей w_τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ деформации $w_0 \to w_1$, то продолжение вдоль w_0 и вдоль w_1 ведет к одному и тому же конечному элементу.

В частности, если область G *односвязна*, то отсюда вытекает Теорема о монодромии. *Аналитический элемент, неограниченно продолжаемый в односвязной области G, определяет в G однозначную аналитическую функцию.*

3.24. Замечание. Те соотношения, которые имеют место при аналитическом продолжении элемента функции, существенно связаны со свойствами гомотопии путей, а не со свойствами гомологии путей, как, это, например, имеет место для интегралов однозначных аналитических ковариант. Может случиться, что элемент функции, продолженный в области ее регулярности вдоль замкнутого пути, гомологичного нулю, но не гомотопного нулю, не возвращается обратно

[1]) То есть начиная из любой точки над началом w. — *Прим. перев.*

к исходному элементу. Возьмем, например, в качестве R числовую плоскость $z \neq \infty$ с выколотыми точками $z = +1$ и $z = -1$, а за f_0 — элемент функции $\sqrt{\ln[(1+z)/2]}$ в точке $z = 0$ [1]). Если a и b означают соответственно окружности $|z+1| = 1$ и $|z-1| = 1$ (обе положительно ориентированы), то путь $aba^{-1}b^{-1}$ на R гомологичен нулю (образует 1-цепь нуль), однако, как легко проверить, продолжение f_0 вдоль этого пути не ведет обратно к исходному элементу. Этим примером одновременно доказано, что путь $aba^{-1}b^{-1}$ в числовой плоскости с выколотыми точками ± 1 не гомотопен нулю, другими словами, что пути ab и ba не гомотопны. Следовательно, фундаментальная группа числовой плоскости с двумя выколотыми точками — не абелева.

3.25. Многозначность в целом. Пусть f_{P_0} — элемент функции, неограниченно продолжаемый в области G. Если область G не односвязна, то в общем случае аналитическое продолжение приводит к функции, многозначной в целом. Имеющиеся здесь возможности обозримы с помощью теоремы п. 3.23.

Если P_0 — фиксированная и P — произвольная точка области G, то элементы f_P соответствуют, согласно п. 3.23, гомотопным классам путей, ведущих из P_0 в P. Так как существует только счетное число таких классов (ср. п. 2.88, примечание), то каждой точке P отвечает лишь счетное число элементов.

Многозначная функция, полученная при продолжении f_{P_0} в G, в каждой односвязной подобласти G_0 области G может быть представлена однозначными ветвями: в G_0 выбирают точку O, продолжают f_{P_0} из P_0 в O вдоль фиксированного пути и полученный таким образом элемент продолжают затем неограниченно в G_0; по теореме о монодромии, это приводит к функции, однозначной в G_0. Таким образом получаются все элементы многозначной функции f в G_0. В самом деле, если f_P $(P \in G_0)$ — произвольный элемент, полученный продолжением f_{P_0} вдоль пути w, то соединим P с O в области G_0 путем p. Тогда wp — путь из P_0 в O, и продолжение f_{P_0} вдоль wp приводит к определенному элементу f_0 в O; отсюда следует, что f_P принадлежит ветви, получаемой продолжением f_0 в G_0.

3.26. Гармоническое продолжение. Дробные элементы. То, что выше было сказано о продолжении аналитических функций, остается в силе и для гармонических функций, а также для аналитических и гармонических дифференциалов. Существенное для справедливости предыдущих рассмотрений состоит лишь в том, чтобы операция

---

[1]) Берется элемент, соответствующий главному значению логарифма ($\ln 1 = 0$). — *Прим. перев.*

непосредственного аналитического (соответственно гармонического) продолжения элемента была определена однозначно.

Отсюда, в частности, следует, что рассмотренные однозначные аналитические и гармонические элементы не нужно предполагать *регулярными* всюду без исключения, но что можно также, как это уже имело место в гл. I, допустить некоторые особенности. Если в дальнейшем речь будет идти об аналитическом продолжении, то будем включать в рассмотрение однозначные аналитические элементы, имеющие не более конечного числа полюсов („дробные" аналитические элементы).

§ 4. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И МИНИМУМА

3.27. Принцип максимума. Пусть $w = u + iv$ — однозначная регулярная и отличная от постоянной аналитическая функция в окрестности точки P римановой поверхности R. Тогда из *свойства сохранения области* при отображении $z \to w$ следует, что в точке P абсолютное значение $|w|$ не может достигать максимума. То же самое справедливо для максимума (и минимума) действительной части u, а тем самым и для любой гармонической функции, регулярной в точке P.

Из этой простой теоремы получается *принцип максимума* в следующей точной форме.

Пусть G — область на римановой поверхности R, Γ — ее граница, пусть замкнутое множество $G + \Gamma$ компактно на R. Пусть в G определена однозначная гармоническая функция $u(z)$, обладающая тем свойством, что для нее в каждой точке ζ границы Γ [1])

$$\overline{\lim}\, u(z) \leqslant 0.$$

Тогда в каждой точке z области G

$$u(z) \leqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место только для постоянной $u \equiv 0$.

Первое утверждение означает, что верхняя граница M функции u области G неположительна. Для доказательства заметим, что функция $\overline{\lim}\, u$, в силу компактности $G + \Gamma$, по крайней мере в одной точке Q, принадлежащей $G + \Gamma$, становится равной M. Если Q — точка границы Γ, то, по предположению, $M \leqslant 0$. Если, напротив, Q — точка G, то функция u достигает своего максимума во внутренней точке Q и поэтому тождественно равна M, прежде всего в окрестности U точки Q, но затем и всюду в G (см. п. 3.22). Тогда из предположения следует, что $M \leqslant 0$.

Этим доказано первое утверждение. Если, наконец, функция u достигает своего наибольшего значения 0 в некоторой точке области G,

[1]) $\overline{\lim}\, u(\zeta)$ нужно понимать как $\overline{\lim\limits_{z \to \zeta}}\, u(z)$. — *Прим. перев.*

следовательно, в точке регулярности, то она постоянна, а именно, равна нулю, что и требовалось доказать.

3.28. Обобщенный принцип максимума. Для дальнейших исследований нам потребуется принцип максимума в несколько более общем виде.

Пусть функция $u(z)$, как прежде, однозначна и гармонична в области G. Пусть, далее, она удовлетворяет на Γ условию $\overline{\lim} u(\zeta) \leqslant 0$, исключая, возможно, конечное число граничных точек (ζ). Тогда либо $u(z) \leqslant 0$ в G, либо

$$M = \sup_G u(z) = +\infty.$$

Для доказательства предположим, что $M < \infty$; нужно показать, что

$$u(z) \leqslant 0 \text{ в } G.$$

Если $\overline{\lim} u(z) = M$ в точке z области G или в неисключительной точке $z = \zeta$ границы Γ, то справедливость утверждения непосредственно очевидна.

Если же этот случай не имеет места, то для некоторой исключительной точки $\zeta = \zeta_0$ границы Γ имеем

$$M = \overline{\lim} u(\zeta_0).$$

Тогда мы в параметрическом круге $|z - \zeta_0| < 1$ выбираем настолько малый круг A: $|z - \zeta_0| \leqslant r < 1$, чтобы он не содержал ни одной исключительной точки, кроме ζ_0. Пусть теперь m — верхняя грань функции $u(z)$ на пересечении d окружности $\alpha: |z - \zeta_0| = r$ с $G + \Gamma$. По нашему предположению,

$$m < M.$$

Пусть D — пересечение $D = GA$. В точке $\zeta \neq \zeta_0$ границы δ области D $\overline{\lim} u(\zeta) \leqslant 0$, если ζ лежит на Γ, и $u(\zeta) \leqslant m$, если ζ принадлежит G; следовательно,

$$\overline{\lim} u(\zeta) \leqslant \frac{m + |m|}{2}$$

для каждой граничной точки $\zeta \neq \zeta_0$ области D.

Образуем теперь для произвольно фиксированного положительного числа ε функцию

$$\varphi(z) = u(z) + \varepsilon \ln |z - \zeta_0|.$$

Тогда $\varphi < u$ в A, тем самым и

$$\overline{\lim} \varphi(\zeta) \leqslant \frac{m + |m|}{2}$$

в каждой точке $\zeta \neq \zeta_0$ границы δ области D. Это неравенство имеет место и для $\zeta = \zeta_0$, так как здесь $\lim \varphi = -\infty$, в силу ограниченности функции u сверху. Поэтому, по принципу максимума, в D выполняется неравенство

$$\varphi(z) \leqslant \frac{m + |m|}{2},$$

следовательно,

$$u(z) \leqslant \frac{m + |m|}{2} - \varepsilon \ln |z - \zeta_0|.$$

Так как это соотношение справедливо для любого $\varepsilon > 0$, то в D

$$u(z) \leqslant \frac{m + |m|}{2},$$

откуда при $z \to \zeta_0$ вытекает, что

$$M \leqslant \frac{m + |m|}{2}.$$

Но, с другой стороны, $M > m$; это возможно только в случае, если $m < 0$, и поэтому $M \leqslant 0$, следовательно, $u(z) \leqslant 0$ в G, что и требовалось доказать.

§ 5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

3.29. Дифференцируемые симплексы. Пусть σ^2 — особый 2-симплекс (см. п. 2.27) римановой поверхности R, лежащий целиком в параметрической окрестности K. В параметрическом круге K_z ($z = x + iy$) ему отвечает новый особый симплекс σ_z^2, связанный с σ^2 топологическим отображением $K \longleftrightarrow K_z$. Тем самым прямолинейный симплекс-прообраз $'\sigma^2$, который мы предполагаем расположенным в uv-плоскости, непрерывно отображается на σ_z^2. Это отображение можно записать с помощью двух функций

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad (z = x + iy).$$

Если они непрерывно дифференцируемы, то σ^2 называется *дифференцируемым 2-симплексом*. Это свойство, в силу непрерывной дифференцируемости соотношений соседства, не зависит от выбора параметрической окрестности, в которой лежит σ^2. Если из двух равных 2-симплексов один дифференцируем, то и другой дифференцируем.

Пусть дальше σ^1 — особый 1-*симплекс* в параметрической окрестности K. В K_z ему отвечает особый 1-симплекс σ_z^1, связанный с прямолинейным симплексом-прообразом $'\sigma^1$ 1-симплекса σ^1 отображением

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

где t — параметр отрезка-прообраза. Если функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывно дифференцируемы и $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, то σ^1 называется *дифференцируемым 1-симплексом*.

3.30. Интегралы по дифференцируемым симплексам. Пусть σ^2 — ориентированный дифференцируемый 2-симплекс на римановой поверхности R и T — кососимметрическое тензорное поле (см. п. 3.7), непрерывное на σ^2. Функции T соответствует на симплексе-прообразе $'\sigma^2$ непрерывная функция $T(u, v)$. Мы определяем интеграл поля T по симплексу σ^2 соотношением

$$\int\int_{\sigma^2} T\,dx\,dy = \int\int_{'\sigma^2} T(u, v)\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv. \tag{3.8}$$

При этом справа стоит элементарный двойной интеграл, взятый по ориентированному симплексу-прообразу $'\sigma^2$, т. е. интеграл по неориентированному симплексу, взятый со знаком плюс или минус, в зависимости от того, определяет ли ориентация $'\sigma^2$ в плоскости u, v положительную или отрицательную ориентацию.

Это определение не зависит от выбора параметрической окрестности K. В самом деле, если K_1 — другая параметрическая окрестность и T_1 — поле относительно нового параметра $z_1 = x_1 + iy_1$, то соответственно

$$\int\int_{\sigma^2} T_1\,dx_1\,dy_1 = \int\int_{'\sigma^2} T_1(u, v)\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(u, v)}\,du\,dv.$$

Так как T — тензор, то, в силу (3.5),

$$T_1 = T\frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, y_1)},$$

откуда вытекает совпадение обоих интегралов. Аналогично доказывается, что значение интеграла не зависит от выбора симплекса-прообраза. Следовательно, интеграл кососимметрического тензора по 2-симплексу имеет смысл, не зависящий от локального параметра, что, например, не имеет места для скалярной функции.

3.31. Пусть M_1, M_2 и N_1, N_2 — два непрерывных ковариантных векторных поля на дифференцируемом 2-симплексе σ^2 на R. Тогда и сопряженные комплексные числа $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ образуют ковариантное поле, и, следовательно, $M_1\overline{N}_2 - M_2\overline{N}_1$ есть тензор; интеграл

$$I = \int\int_{\sigma^2} (M_1\overline{N}_2 - M_2\overline{N}_1)\,dx_1\,dx_2$$

имеет поэтому инвариантный смысл.

Если поля M_1, M_2 и N_1, N_2 ковариантны (см. п. 3.2), $M_1 = M$, $M_2 = iM$, $N_1 = N$, $N_2 = iN$, то этот интеграл можно записать в виде

$$I = -2i\int\int_{\sigma^2} M\,\overline{N}\,dx_1\,dx_2; \tag{3.9}$$

если, наконец, здесь $N = M$, то он принимает вид

$$I = -2i \int\limits_{\sigma^2} \int |M|^2 \, dx_1 \, dx_2. \tag{3.10}$$

Последний интеграл называется *интегралом Дирихле* ковариантны M.

3.32. Неравенство Буняковского — Шварца. Пусть M_1, M_2 и N_1, N_2 — два непрерывных ковариантных векторных поля на дифференцируемом положительно ориентированном 2-симплексе σ^2 (см. п. 2.96). Тогда, по определению (см. п. 3.30), если для сокращения положить $\frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (u, v)} = \Delta$,

$$I = \int\limits_{\sigma^2} \int (M_1 N_2 - M_2 N_1) \, dx_1 \, dx_2 = \int\limits_{'\sigma^2} \int (M_1 N_2 - M_2 N_1) \, \Delta \, du \, dv,$$

следовательно,

$$|I| \leqslant \int\limits_{'\sigma^2} \int |M_1 N_2 - M_2 N_1| \, \Delta \, du \, dv;$$

здесь симплекс-прообраз $'\sigma^2$ положительно ориентирован относительно плоскости, поэтому $\Delta > 0$.

По элементарному неравенству Буняковского — Шварца,

$$|M_1 N_2 - M_2 N_1| \leqslant \sqrt{|M_1|^2 + |M_2|^2} \cdot \sqrt{|N_1|^2 + |N_2|^2},$$

следовательно,

$$|I| \leqslant \int\limits_{'\sigma^2} \int \sqrt{|M_1|^2 + |M_2|^2} \cdot \sqrt{|N_1|^2 + |N_2|^2} \, \Delta \, du \, dv.$$

Отсюда, снова по неравенству Буняковского — Шварца (для интегралов) следует, что

$$|I|^2 \leqslant \int\limits_{'\sigma^2} \int (|M_1|^2 + |M_2|^2) \, \Delta \, du \, dv \cdot \int\limits_{'\sigma^2} \int (|N_1|^2 + |N_2|^2) \, \Delta \, du \, dv,$$

и окончательно

$$\left| \int\limits_{\sigma^2} \int (M_1 N_2 - M_2 N_1) \, dx_1 \, dx_2 \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\sigma^2} \int (|M_1|^2 + |M_2|^2) \, dx_1 \, dx_2 \int\limits_{\sigma^2} \int (|N_1|^2 + |N_2|^2) \, dx_1 \, dx_2.$$

3.33. Интегралы по 2-цепям. Особая 2-цепь, состоящая из дифференцируемых 2-симплексов, называется *дифференцируемой* 2-цепью. Интеграл непрерывного тензорного поля T по дифференцируемой

2-цепи $\alpha^2 = \sum_\nu a_\nu \sigma_\nu^2$ определяется линейно:

$$\int\int_{\alpha^2} T\,dx\,dy = \sum_\nu a_\nu \int\int_{\sigma_\nu^2} T\,dx\,dy.$$

Тем самым все формулы, выведенные для 2-симплексов, имеют место и для дифференцируемых 2-цепей.

3.34. Пусть $\alpha = \sum_\nu \sigma_\nu$ — дифференцируемая 2-цепь на R, состоящая из дифференцируемых положительно ориентированных симплексов σ_ν. Пусть $\beta = \sum_\mu \tau_\mu$ — вторая такого же рода цепь, о которой мы дополнительно предположим, что она целиком покрыта первой цепью и что никакие два ее симплекса не имеют общих внутренних точек. Пусть на α задано положительное тензорное поле T. Тогда

$$\int\int_\beta T\,dx\,dy \leqslant \int\int_\alpha T\,dx\,dy.$$

Действительно, пусть τ есть 2-симплекс β и τ_z — соответствующий ему 2-симплекс в параметрическом круге K_z. Построим второй, лежащий внутри τ_z топологический 2-симплекс τ_z^* так, чтобы евклидова площадь кольца $\tau_z - \tau_z^*$ была меньше заданного положительного числа ε. τ_z^* отвечает на R определенный, лежащий внутри τ 2-симплекс τ^*. Цепь α мы можем настолько мелко подразделить, чтобы каждый ее 2-симплекс, имеющий хотя бы одну общую точку с τ^*, лежал в τ. При этом подразделении интеграл от T по α не изменяется, и мы можем поэтому предположить, что α с самого начала обладает указанным свойством.

Пусть теперь $\alpha^* = \sum \sigma_\rho$ обозначает цепь, состоящую из всех тех симплексов σ_ρ, входящих в α, которые имеют хотя бы одну общую точку с τ^*. Покажем, что

$$\int\int_{\tau^*} T\,dx\,dy \leqslant \int\int_{\alpha^*} T\,dx\,dy. \tag{3.11}$$

Если $\overline{\tau^*}$ означает симплекс-прообраз τ^* в uv-плоскости, то, по определению,

$$\int\int_{\tau^*} T\,dx\,dy = \int\int_{\overline{\tau^*}} T \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv;$$

поэтому, по формуле преобразования двойного интеграла на плоскости, интеграл $\int\int_{\tau^*} T\,dx\,dy$ можно рассматривать как обыкновенный

двойной интеграл от функции T по τ_z^*. Точно так же, если $\sigma_{\rho,\,z}$ означает симплекс-прообраз σ_ρ в параметрическом круге K_z, то интеграл $\int\limits_{\sigma_\rho}\int T\,dx\,dy$ равен двойному интегралу от T по $\sigma_{\rho,\,z}$. Отсюда следует справедливость неравенства (3.11), ибо $\sum\limits_\rho \sigma^*_{\rho,\,z}$ покрывает τ_z^* и ее подинтегральная функция положительна.

С другой стороны, если M означает максимум T в τ_z, то

$$\left|\int\limits_\tau\int T\,dx\,dy-\int\limits_{\tau^*}\int T\,dx\,dy\right|\leqslant M\varepsilon. \tag{3.12}$$

Из неравенств (3.11) и (3.12) вытекает, что

$$\int\limits_\tau\int T\,dx\,dy\leqslant\int\limits_{\alpha^*}\int T\,dx\,dy+M\varepsilon. \tag{3.13}$$

Пусть теперь τ пробегает все симплексы τ_μ цепи β и α_μ^* означает цепь, состоящую из всех симплексов цепи α, имеющих хотя бы одну общую точку с τ_μ^*. Тогда из (3.13) следует, что

$$\int\limits_\beta\int T\,dx\,dy\leqslant\sum_\mu\int\limits_{\alpha_\mu^*}\int T\,dx\,dy+\varepsilon\sum_\mu M_\mu.$$

Никакие две цепи α_μ^* не имеют здесь общих симплексов, ибо α_μ^* лежат внутри соответствующих τ_μ, которые, по предположению, попарно не имеют общих внутренних точек. Поэтому

$$\sum_\mu\int\limits_{\alpha_\mu^*}\int T\,dx\,dy\leqslant\int\limits_\alpha\int T\,dx\,dy.$$

Из последних двух неравенств следует, что

$$\int\limits_\beta\int T\,dx\,dy\leqslant\int\limits_\alpha\int T\,dx\,dy+\varepsilon\sum_\mu M_\mu,$$

а так как ε сколь угодно мало, то

$$\int\limits_\beta\int T\,dx\,dy\leqslant\int\limits_\alpha\int T\,dx\,dy,$$

что и требовалось доказать.

3.35. Интегралы по точечным множествам. Пусть M — подмножество R и T — непрерывное тензорное поле на M, которое мы сначала предположим действительным и положительным. Будем считать,

что на M существует дифференцируемая 2-цепь β, состоящая из топологических положительно ориентированных 2-симплексов. Пусть при этом никакие два симплекса цепи β не имеют общих внутренних точек.

Интеграл

$$I_\beta = \int_\beta \int T\,dx\,dy$$

есть положительное число. Множество I_β, где β пробегает всевозможные 2-цепи описанного выше вида, имеет вполне определенную верхнюю грань ($\leqslant \infty$), которая принимается в качестве значения интеграла от T по множеству M:

$$\int_M \int T\,dx\,dy = \sup_\beta I_\beta.$$

Если, в частности, множество M само является цепью α из множества (β), то, согласно п. 3.34,

$$\int_M \int T\,dx\,dy = \int_\alpha \int T\,dx\,dy.$$

Отсюда, в частности, следует, что интеграл $\int_\alpha \int T\,dx\,dy$ зависит не от цепи α, а только от покрытого множества M.

Если заданный тензор действительный, но не всюду положительный, то полагаем

$$2T_1 = |T| + T \quad \text{и} \quad 2T_2 = |T| - T$$

и определяем интеграл с помощью соотношения

$$\int_M \int T\,dx\,dy = \int_M \int T_1\,dx\,dy - \int_M \int T_2\,dx\,dy.$$

Если, наконец, тензор T — комплексный, $T = T' + iT''$, то интеграл определяется с помощью соотношения

$$\int_M \int T\,dx\,dy = \int_M \int T'\,dx\,dy + i \int_M \int T''\,dx\,dy.$$

3.36. Интегралы по дифференцируемым 1-симплексам. Пусть σ^1 — ориентируемый дифференцируемый 1-симплекс на римановой поверхности R и M, N — непрерывное ковариантное векторное поле на σ^1. Паре функций M, N отвечает на симплексе-прообразе $'\sigma^1$ ($0 \leqslant t \leqslant 1$) пара непрерывных функций $M(t)$, $N(t)$. Интеграл поля M, N

вдоль σ^1 определяется соотношением

$$\int_{\sigma^1}(M\,dx+N\,dy)=\int_0^1(M(t)\,\dot{x}+N(t)\,\dot{y})\,dt, \tag{3.14}$$

причем параметр t нужно выбирать так, чтобы при возрастании t симплекс-прообраз $'\sigma^1$ пробегался в направлении его ориентации. Определенный таким образом интеграл не зависит ни от выбора симплекса-прообраза, ни от выбора параметрической окрестности.

Если поле — ковариант, т. е. имеет вид M, iM, то интеграл записывают в виде

$$\int_{\sigma^1}M(dx+i\,dy)=\int_{\sigma^1}M\,dz.$$

Если, напротив, $N=-iM$ (см. п. 3.2), то пишут

$$\int_{\sigma^1}M(dx-i\,dy)=\int_{\sigma^1}M\,\overline{dz}.$$

Очевидно, что для ковариант M

$$\overline{\int_{\sigma^1}M\,dz}=\int_{\sigma^1}\overline{M}\,\overline{dz}.$$

В частности, если поле M, N является градиентом дифференцируемой (в окрестности σ^1) функции $f(x, y)$, то интеграл (3.14) представляет изменение функции f вдоль σ^1.

В этом случае определение интеграла можно распространить на особые (не обязательно дифференцируемые) 1-симплексы, понимая под интегралом вдоль особого 1-симплекса σ^1 изменение функции f вдоль σ_1.

Так как аналитическое поле в каждой параметрической окрестности является полем градиента, то это, в частности, имеет место для аналитических функций.

3.37. Интегралы по 1-цепям. В соответствии с п. 3.33, под интегралом непрерывного ковариантного векторного поля M, N вдоль дифференцируемой 1-цепи $\alpha^1=\sum_\nu a_\nu\sigma_\nu^1$ понимают сумму

$$\int_{\alpha^1}(M\,dx+N\,dy)=\sum_\nu a_\nu\int_{\sigma_\nu^1}(M\,dx+N\,dy).$$

Если поле M, N является градиентом дифференцируемой (в окрестности α^1) функции $f(z)$, то интеграл представляет собой приращение $f(z)$ „вдоль“ α^1, т. е. сумму $\sum_\nu a_\nu\{f(z_{\nu+1})-f(z_\nu)\}$, где z_ν и $z_{\nu+1}$ обозначают

соответственно начало и конец σ_ν^1. Если, в частности, α^1 — цикл, $\alpha^1 = z^1$, то для поля градиента

$$\int_{z^1} M\,dx + N\,dy = 0,$$

т. е. интеграл поля градиента вдоль цикла равен нулю.

Для поля градиента интеграл определен также вдоль *особых* цепей. В частности, это имеет место для аналитических ковариант.

3.38. Так как каждый (дифференцируемый) путь w можно, разбивая подходящим образом его отрезок-прообраз, рассматривать как дифференцируемую 1-цепь, то интеграл ковариантного поля определен также вдоль пути. Его значение не зависит от разбиения отрезка-прообраза.

3.39. Пусть $z = z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — замкнутый дифференцируемый путь w на поверхности R и φ — коварианта, которая вдоль w непрерывна и отлична от нуля. Тогда произведение $\varphi \frac{dz}{dt} = \varphi \dot{z}$ не зависит от локального параметра, в то время как при изменении действительного параметра t кривой оно умножается на действительное число [1]). Поэтому его аргумент не зависит от обоих параметров. Полное его изменение вдоль w, с точностью до множителя i, задается интегралом

$$\int_0^1 \left(\frac{\dot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right) dt, \tag{3.15}$$

который можно также записать в виде

$$\int_w \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right) dz,$$

где φ' означает производную по z. Так как этот интеграл не зависит, как это видно из его геометрического значения, от параметра z, то можно предполагать, что подинтегральное выражение имеет ковариантный характер преобразования относительно z. И действительно, если z^* — новый параметр, то первое слагаемое преобразуется по формуле

$$\frac{\varphi^{*\prime}}{\varphi^*} = \frac{\varphi'}{\varphi}\frac{dz}{dz^*} + \frac{dz}{dz^*}\frac{d^2z}{dz^{*2}},$$

а второе — по формуле

$$\frac{\ddot{z}^*}{\dot{z}^{*2}} = \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\frac{dz}{dz^*} - \frac{dz^*}{dz}\frac{d^2z}{dz^{*2}},$$

---

[1]) Допускаются только такие преобразования t, для которых этот множитель *положителен* (см. п. 2.32, равенство путей).— *Прим. перев.*

и при сложении „мешающий член" $\frac{dz^*}{dz}\frac{d^2z}{dz^{*2}}$ уничтожается, так что закон преобразования имеет ковариантный характер[1]).

Если, в частности, коварианта φ есть производная от аналитической функции $F(z)$, однозначной и регулярной в окрестности пути w, то интеграл (3.15) выражает полное изменение касательного вектора кривой, получаемой из w при отображении $F(z)$.

3.40. Интегралы и отображения. Пусть R^* и R — две римановы поверхности и φ — однозначное (не обязательно взаимно однозначное) дифференцируемое[2]) отображение R на R^*. Тогда каждой аналитической функции $f(z)$ на R отвечает на R^* аналитическая функция $f^*(z^*)$, определяемая соотношением

$$f^*(z^*) = f[\varphi(z^*)].$$

Аналогичным образом ковариантному векторному полю $M_i (i = 1, 2)$ на R можно поставить в соответствие поле на R^*, определяемое соотношением

$$M_i^* = \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} M_k;$$

при переходе к новому параметру на R^* эта пара чисел также преобразуется по закону ковариантности.

Если, наконец, T — компонента кососимметрического тензорного поля, то

$$T^* = \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (x_1^*, x_2^*)} T$$

— соответствующее тензорное поле на R^*.

Посмотрим, как связаны между собой интегралы соответствующих полей. Пусть σ^{1*} — дифференцируемый 1-симплекс на R^* и σ^1 — соответствующий ему симплекс на R. Пусть вдоль σ^1 задано непрерывное ковариантное векторное поле M_i. Тогда

$$\int_{\sigma^1} \sum_i M_i\, dx_i = \int_0^1 \sum_i M_i \frac{dx_i}{dt}\, dt = \int_0^1 \sum_{i,k} M_i \frac{\partial x_i}{\partial x_k^*} \frac{dx_k^*}{dt}\, dt = \int_{\sigma^{1*}} \sum_k M_k^*\, dx_k^*,$$

следовательно,

$$\int_{\sigma^1} \sum M_i\, dx_i = \int_{\sigma^{1*}} \sum M_i^*\, dx_i^*,$$

---

[1]) Следует заметить, что подинтегральное выражение, по крайней мере второе слагаемое, зависит е це, кроме параметра z, от параметра t кривой; напротив, весь интеграл от параметра t не зависит. Мы считаем параметр t кривой фиксированным.

[2]) Это означает, что локальные параметры поверхности R являются дифференцируемыми функциями локальных параметров поверхности R^*.

т. е. интегралы соответствующих полей по соответствующим симплексам совпадают. Отсюда для дифференцируемой 1-цепи α^{1*} на R^* и ее образа α^1 на R вытекает аналогичное соотношение

$$\int\limits_{\alpha^1} \sum M_i\, dx_i = \int\limits_{\alpha^{1*}} \sum M_i^*\, dx_i^*.$$

Точно так же для дифференцируемого 2-симплекса σ^{2*} на R^* и тензорного поля T, непрерывного на симплексе-образе σ^2,

$$\iint\limits_{\sigma^2} T\, dx_1\, dx_2 = \iint\limits_{\sigma^{2*}} T^*\, dx_1^*\, dx_2^*.$$

Отсюда для дифференцируемой 2-цепи следует, что

$$\iint\limits_{\alpha^2} T\, dx_1\, dx_2 = \iint\limits_{\alpha^{2*}} T^*\, dx_1^*\, dx_2^*.$$

3.41. Формула Грина. Пусть σ^2 — ориентированный дифференцируемый 2-симплекс и M, N — ковариантное векторное поле, имеющее непрерывные производные первого порядка в области G, содержащей симплекс σ^2. Относительно дифференцируемого отображения, определяющего σ^2, мы предполагаем, что оно определено и дифференцируемо в некоторой области G^*, содержащей симплекс-прообраз σ^{2*}. Мы хотим преобразовать интеграл от тензора $M_y - N_x$ по σ^2 в интеграл по граничной цепи $\partial\sigma^2$.

Для этого рассмотрим дифференцируемое отображение области G^* в R. Согласно п. 3.40, полю $M_y - N_x$ в G соответствует поле $(M_y - N_x)\,\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)}$ в G^*, или, что то же самое, поле $\frac{\partial(x, M)}{\partial(x^*, y^*)} + \frac{\partial(y, N)}{\partial(x^*, y^*)}$. Согласно п. 3.40,

$$\iint\limits_{\sigma^2} (M_y - N_x)\, dx\, dy = \iint\limits_{\sigma^{2*}} \left(\frac{\partial(x, M)}{\partial(x^*, y^*)} + \frac{\partial(y, N)}{\partial(x^*, y^*)}\right) dx^*\, dy^*.$$

Элементарная формула Грина, примененная к прямолинейному 2-симплексу σ^{2*}, дает для последнего интеграла значение

$$-\int\limits_{\partial\sigma^{2*}} M\left(\frac{\partial x}{\partial x^*}\, dx^* + \frac{\partial x}{\partial y^*}\, dy^*\right) - \int\limits_{\partial\sigma^{2*}} N\left(\frac{\partial y}{\partial x^*}\, dx^* + \frac{\partial y}{\partial y^*}\, dy^*\right),$$

которое, согласно п. 3.40, равно

$$-\int\limits_{\partial\sigma^2} (M\, dx + N\, dy).$$

Отсюда получается искомая общая формула преобразования для произвольной 2-цепи α^2 (при соответствующих предположениях):

$$\iint\limits_{\alpha^2} (M_y - N_x)\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial\alpha^2} (M\,dx + N\,dy). \qquad (3.16)$$

Если поле M, N — безвихревое, следовательно, $M_y = N_x$, то из формулы Грина следует, что

$$\int\limits_{\partial\alpha^2} (M\,dx + N\,dy) = 0.$$

Следовательно, интеграл безвихревого поля по гомологичной нулю 1-цепи равен нулю. В частности, это имеет место для поля градиента. В этом случае мы знаем, согласно п. 3.37, что интеграл по любому 1-циклу (не обязательно гомологичному нулю) равен нулю.

Замечание. В комплексной плоскости формула Грина имеет место уже в виде

$$\iint M_y\,dx\,dy = -\int M\,dx, \quad \iint N_x\,dx\,dy = \int N\,dy.$$

На римановой поверхности, которую нельзя покрыть одной параметрической окрестностью, эти отдельные интегралы не имеют инвариантного смысла, однако такой смысл имеют интегралы от тензора $M_y - N_x$ или ковариантного вектора M, N.

3.42. Дальнейшие интегральные теоремы. Если в (3.16) положить $M = \varphi$, $N = i\varphi$, то для коварианты φ получаем интегральную формулу

$$\iint\limits_{\alpha^2} (\varphi_y - i\varphi_x)\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial\alpha^2} \varphi\,dz.$$

Заменяя здесь коварианту φ на $\omega\varphi$, где ω означает дифференцируемую по x и y функцию (вообще говоря, комплекснозначную), получаем формулу

$$\iint\limits_{\alpha^2} \varphi(\omega_y - i\omega_x)\,dx\,dy + \iint\limits_{\alpha^2} (\varphi_y - i\varphi_x)\omega\,dx\,dy = -\int\limits_{\partial\alpha^2} \varphi\omega\,dz. \qquad (3.17)$$

Пусть, в частности, φ — *аналитическая* коварианта и ω — функция, комплексно сопряженная к однозначной аналитической функции $F(z)$. Тогда второе подинтегральное выражение обращается в нуль, а для первого $\omega_y - i\omega_x = -2i\overline{F}'$, так что

$$\iint\limits_{\alpha^2} \varphi\overline{F}'\,dx\,dy = -\frac{i}{2}\int\limits_{\partial\alpha^2} \varphi\overline{F}\,dz. \qquad (3.17')$$

Переходя здесь к комплексно сопряженным значениям, получаем

$$\iint_{\alpha^2} \bar{\varphi} F' \, dx\, dy = \frac{i}{2} \int_{\partial\alpha^2} \bar{\varphi} F \, d\bar{z}. \tag{3.18}$$

Если, наконец, в (3.17′) положить ковариванту φ равной F', то для интеграла Дирихле от F' получим следующую формулу:

$$\iint_{\alpha^2} F'\bar{F}' \, dx\, dy = -\frac{i}{2} \int_{\partial\alpha^2} F'\bar{F} \, dz. \tag{3.19}$$

Здесь левая часть имеет действительное значение, поэтому интеграл справа должен иметь чисто мнимое значение; действительно, полагая $F = u + iu'$, имеем

$$\int_{\partial\alpha^2} F'\bar{F} \, dz = \int_{\partial\alpha^2} (u\, du + u'\, du') + i \int_{\partial\alpha^2} (u\, du' - u'\, du) =$$

$$= i \int_{\partial\alpha^2} (u\, du' - u'\, du) = -2i \int_{\partial\alpha^2} u'\, du,$$

так как интеграл от полного дифференциала $u\, du + u'\, du'$ равен нулю. Тем самым (3.19) преобразуется к виду

$$\iint_{\alpha^2} F'\bar{F}' \, dx\, dy = -\int_{\partial\alpha^2} u'\, du = \int_{\partial\alpha^2} u\, du'. \tag{3.20}$$

Несколько более общие формулы мы получим, если в (3.17) вместо ω поставим не функцию, сопряженную к однозначной аналитической функции F, а действительную гармоническую функцию u. Если f означает аналитическую ковариванту $u_x + iu'_x$, то вместо (3.18) получается формула

$$\iint_{\alpha^2} f\bar{\varphi} \, dx\, dy = i \int_{\partial\alpha^2} u\bar{\varphi} \, d\bar{z}. \tag{3.18′}$$

Соответственно для интеграла Дирихле от ковариванты $f = \varphi$ получается формула

$$\iint_{\alpha^2} |f|^2 \, dx\, dy = \int_{\partial\alpha^2} u\, du'. \tag{3.20′}$$

3.43. Вычет. Пусть теперь M — однозначная аналитическая ковариванта, регулярная в области G с точностью до изолированных особых точек. Пусть P — изолированная особая точка, K — содержащая ее параметрическая окрестность и $z = 0$ — соответствующее P зна-

чение параметра. Тогда M в окрестности $z=0$ имеет разложение

$$M=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} m_\nu z^\nu.$$

Число m_{-1} называется *вычетом* коварианты M в точке P и обозначается через

$$m_{-1}=\operatorname*{res}_P M.$$

Вычет не зависит от локального параметра: действительно, если z^* — другой параметр, связанный с z соотношением

$$z=a_1 z^*+\ldots \qquad (a_1\neq 0),$$

то в окрестности точки $z^*=0$ получаем разложение [1])

$$M^*=M\frac{dz}{dz^*}=\ldots+\frac{m_{-1}}{z^*}+\ldots.$$

Вычет можно также представить в виде интеграла; именно если σ^2 — положительно ориентированный топологический 2-симплекс, расположенный в параметрической окрестности K, и P — внутренняя точка σ^2, то

$$\int_{\partial\sigma^2} M\,dz=2\pi i\operatorname*{res}_P M.$$

Из этого интегрального представления снова следует независимость вычета от локального параметра.

В дальнейшем будет установлено соотношение между вычетами аналитической коварианты на особой 2-цепи и интегралом от нее по границе этой цепи. Для этого нам потребуется топологическое понятие индекса симплекса относительно точки.

3.44. Индекс симплекса относительно точки [2]). Пусть σ^2 — особый 2-симплекс на R, K — параметрическая окрестность, содержащая σ^2, и P — точка K, не лежащая на $\partial\sigma^2$. В параметрическом круге K_z

---

[1]) Так как при $\nu\neq -1$ выражение $[z(z^*)]^\nu\dfrac{dz}{dz^*}$ является производной по z^* от однозначной аналитической функции (с полюсом при $\nu<-1$), то в разложении M^* отрицательная степень $(z^*)^{-1}$ может получиться только за счет члена m_{-1}/z разложения M, что дает m_{-1}/z^*. — *Прим. перев.*

[2]) В оригинале Schnittzahl. Индексом (порядком) точки z относительно замкнутого *пути* γ называют целое число $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\gamma d\arg(\zeta-z)$ (ζ пробегает γ; берется однозначная ветвь $\arg(\zeta-z)$). Это же число называют порядком ветвления кривой γ в точке z (см. П. С. Александров [1**]). Мы будем говорить „индекс кривой относительно точки". — *Прим. перев.*

этой границе, рассматриваемой как точечное множество, отвечает непрерывная ориентированная замкнутая кривая γ_z, не проходящая через точку P_z. Под *индексом* $S(\sigma^2, P)$ *симплекса* σ^2 *относительно точки* P понимают индекс кривой γ_z относительно точки P_z.

Пусть теперь $\alpha^2 = \sum_\nu a_\nu \sigma_\nu^2$ — особая 2-цепь, расположенная в параметрической окрестности K, и P — точка K, не лежащая на $d\alpha^2$. Чтобы определить индекс цепи α^2 относительно точки P, предположим сначала, что P не лежит на границе ни одного из симплексов цепи α^2. Тогда определены индексы $S(\sigma_\nu^2, P)$, и мы полагаем

$$S(\alpha^2, P) = \sum_\nu a_\nu S(\sigma_\nu^2, P).$$

Индекс α^2 относительно P зависит только от граничной цепи $d\alpha^2$, так как если σ^1 — сторона 2-симплекса, не входящая в $d\alpha^2$, то при образовании цепи $d\alpha^2$ она входит одинаковое число раз со знаками плюс и минус, поэтому ее доля в индексе $S(\alpha^2, P)$ равна нулю.

Теперь мы можем это определение пополнить: если α^2 — особая 2-цепь (в K) и P не лежит на $d\alpha^2$, но, возможно, лежит на границах некоторых из симплексов цепи α^2, то заменяем α^2 другой 2-цепью $'\alpha^2$ предыдущего вида, имеющей ту же границу, что всегда возможно. Если теперь положить

$$S(\alpha^2, P) = S('\alpha^2, P),$$

то это определение не будет зависеть от выбора $'\alpha^2$.

Из определения индекса следует, что он аддитивен:

$$S(\alpha^2 + \beta^2, P) = S(\alpha^2, P) + S(\beta^2, P).$$

Следовательно, если $\alpha^2 = \sum_\rho a_\rho \sigma_\rho^2$ и границы всех σ_ρ^2 не содержат P, то

$$S(\alpha^2, P) = \sum_\rho a_\rho S(\sigma_\rho^2, P).$$

Если 2-симплекс σ_ρ^2 не содержит P, то индекс границы $d\sigma_{\rho, z}^2$ относительно точки P_z равен нулю [1]), следовательно,

$$S(\sigma_\rho^2, P) = 0,$$

откуда вытекает, что для образования индекса $S(\alpha^2, P)$ имеют значение только те из симплексов цепи α^2, которые содержат P. Если α_1^2 означает цепь, составленную из этих симплексов цепи α^2, то

$$S(\alpha^2, P) = S(\alpha_1^2, P).$$

---

[1]) Это составляет содержание следующей теоремы топологии плоскости: если φ — непрерывное отображение замкнутого треугольника в числовую плоскость и P — точка, не принадлежащая образу треугольника, то индекс кривой, представляющей образ границы треугольника, относительно точки P равен нулю.

Если $\dot{\alpha}^2$ — подразделение цепи α^2, то из определения следует, что

$$S(\dot{\alpha}^2, P) = S(\alpha^2, P).$$

Индекс до сих пор был определен для цепи α^2, лежащей в параметрической окрестности. Пусть теперь α^2 — произвольная 2-цепь на R, граница которой не содержит P, и пусть все симплексы цепи α^2, которые содержат P, лежат в параметрической окрестности K точки P. Если α_1^2 — цепь, составленная из этих симплексов (взятых с надлежащей кратностью), то ее граница не содержит P. Действительно, если $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, то α_2^2, тем самым и $\partial\alpha_2^2$, не содержит P. По предположению, это же справедливо для $\partial\alpha^2$, тем самым и для $\partial\alpha_1^2 = \partial\alpha^2 - \partial\alpha_2^2$. Следовательно, индекс $S(\alpha_1^2, P)$ определен. Теперь мы определяем индекс $S(\alpha^2, P)$ первоначальной цепи α^2 относительно P, полагая

$$S(\alpha^2, P) = S(\alpha_1^2, P).$$

Если сделанное выше предположение о симплексах цепи α^2 не выполняется, то заменяем α^2 его подразделением и используем его для определения индекса. Независимость этого определения от подразделения доказывается переходом к общему подразделению.

3.45. Теорема о вычетах. Пусть G — область на римановой поверхности R и f — однозначная аналитическая коварианта в G, регулярная с точностью до конечного числа особых точек P_ρ ($\rho = 1, \ldots, r$). Пусть α^2 — особая 2-цепь в G, граница которой не содержит точек P_ρ. Предположим сначала, что каждый 2-симплекс содержит самое большее одну точку P_ρ и что границы *всех* 2-симплексов σ_ν^2 не содержат точек P_ρ. Если тогда σ^2 есть 2-симплекс цепи α^2, который содержит P_ρ, и K — содержащая его параметрическая окрестность, то в K имеет место разложение

$$f = \ldots + \frac{a_m}{z^m} + \ldots + \frac{a_1}{z} + \text{регулярная функция}.$$

При интегрировании по $\partial\sigma^2$ член a_1/z дает значение $a_1 \int \frac{dz}{z}$, в то время как интегралы от всех остальных членов равны нулю. Следовательно,

$$\int_{\partial\sigma^2} f\,dz = a_1 \int_{\partial\sigma^2} \frac{dz}{z} = \operatorname*{res}_{P_\rho} f \int_{\partial\sigma^2} \frac{dz}{z}.$$

Интеграл справа, с точностью до множителя $2\pi i$, равен индексу $\partial\sigma^2$ относительно точки P_ρ, следовательно, равен индексу $S(\sigma^2, P_\rho)$, так что

$$\int_{\partial\sigma^2} f\,dz = S(\sigma^2, P_\rho) \cdot 2\pi i \operatorname*{res}_{P_\rho} f.$$

Если же симплекс σ^2 не содержит ни одной из точек P_ρ, то

$$\int_{\partial\sigma^2} f\,dz = 0.$$

Из этих двух равенств суммированием по всем симплексам цепи α^2 получаем *теорему о вычетах*:

$$\int_{\partial\alpha^2} f\,dz = 2\pi i \sum_\rho S(\alpha^2, P_\rho) \operatorname*{res}_{P_\rho} f.$$

Теперь мы можем освободиться от сделанных выше специальных предположений. Если симплекс σ^2 содержит *несколько* точек P_ρ, то переходим к подходящему подразделению; при этом не меняются ни индексы α^2 относительно точек P_ρ, ни интеграл $\int f dz$. Если, наконец, какая-либо из точек P_ρ лежит на границе симплекса из цепи α^2 (но не на $\partial\alpha^2$), то заменяем α^2 цепью с той же границей, для которой это не имеет места.

Этим теорема о вычетах доказана полностью:

Сумма вычетов аналитической коварианты f на особой 2-цепи с индексами в качестве коэффициентов равна деленному на $2\pi i$ интегралу от f вдоль границы цепи и тем самым зависит только от этой границы.

3.46. Интегральная теорема Коши. Если, в частности, коварианта f не имеет на α^2 никаких особенностей, то все ее вычеты равны нулю, и мы получаем *интегральную теорему Коши*:

$$\int_{\partial\alpha^2} f\,dz = 0.$$

3.47. Рассмотрим, в частности, случай, когда поверхность R замкнута и триангулируема. Пусть f — абелева коварианта на R с полюсами P_ρ ($\rho = 1, \ldots, r$); тогда за α^2 можно принять (когерентно ориентированные) 2-симплексы триангуляции R, причем так, чтобы каждый из полюсов был внутренней точкой 2-симплекса. Тогда, при подходящем выборе ориентации $S(\alpha^2, P_\rho) = +1$ ($\rho = 1, \ldots, r$), и из теоремы о вычетах следует, что

$$\sum_\rho \operatorname*{res}_{P_\rho} f = 0.$$

Этим доказано:

Сумма вычетов абелевой коварианты f на (триангулируемой) замкнутой поверхности равна нулю.

3.48. Принцип аргумента. Пусть $F(z)$ — функция, регулярная в области G с точностью до конечного числа полюсов. Предположим,

что граница особой цепи α^2 не содержит ни полюсов A_ρ, ни нулей B_σ функции $F(z)$. Тогда коварианта $F'(z)/F(z)$ в полюсах и нулях функции $F(z)$ имеет по полюсу с вычетом $-\mu_\rho$, соответственно ν_σ, где μ_ρ и ν_σ означают порядки полюсов, соответственно нулей. Поэтому из теоремы о вычетах следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\alpha^2}\frac{F'(z)}{F(z)}\,dz=-\sum_\rho \mu_\rho S(\alpha^2, A_\rho)+\sum_\sigma \nu_\sigma S(\alpha^2, B_\sigma). \qquad (3.21)$$

Интеграл слева представляет аналитическое выражение умноженного на i изменения аргумента точки $w=F(z)$ вдоль цикла, представляющего образ $\partial\alpha^2$ в плоскости w. Тем самым доказан *принцип аргумента*:

$$\frac{1}{2\pi}\Delta \arg F=-\sum \mu_\rho S(\alpha^2, A_\rho)+\sum_\sigma \nu_\sigma S(\alpha^2, B_\sigma).$$

Если, в частности, R — замкнутая поверхность, α^2 — 2-симплексы триангуляции и F — *рациональная* функция, то из (3.21) следует, что $\sum \mu_\rho = \sum \nu_\sigma$. Таким образом, мы снова получаем результат п. 3.10: число всех полюсов рациональной функции равно числу ее нулей. В п. 3.10 эта теорема была доказана без предположения о возможности триангуляции.

3.49. Характеристика замкнутой поверхности. Принцип аргумента позволяет снова получить соотношение между (конформной) характеристикой замкнутой римановой поверхности R и знакочередующейся суммой $-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2$ количеств 0-, 1- и 2-симплексов ее триангуляции (см. п. 3.17).

Пусть R — замкнутая (триангулируемая) риманова поверхность и φ — абелева коварианта на R. Представим себе, что поверхность R триангулирована так, что все полюсы и нули φ являются внутренними точками 2-симплексов и 1-симплексы триангуляции — дважды непрерывно дифференцируемые дуги[1]). Кроме того, предположим, что каждый 2-симплекс положительно ориентирован и отнесен к фиксированному параметрическому кругу K_z.

Пусть σ_ρ^2 есть 2-симплекс триангуляции, а A_ρ и B_ρ — полные суммы порядков лежащих в σ_ρ^2 соответственно полюсов и нулей коварианты φ. Если мы будем рассматривать φ как *скалярную* функцию в σ_ρ^2, то, по принципу аргумента,

$$\int\limits_{\partial\sigma_\rho^2}\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz=2\pi i(B_\rho-A_\rho). \qquad (3.22)$$

[1]) В гл. VIII выяснится, что каждую риманову поверхность можно триангулировать даже так, чтобы 1-симплексы были аналитическими дугами.

При этом следует заметить, что интеграл слева, вообще говоря, зависит от локального параметра, поскольку подинтегральная функция не является ковариантой [1]).

Будем теперь считать, что все три стороны симплекса σ_ρ^2 отнесены к фиксированному параметру t, и обозначим производную от z по t через $\dot{z}$. Тогда, согласно п. 3.39, интеграл

$$\int\limits_{\partial\sigma_\rho^2} \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} \right) dz$$

не зависит от параметра z. Из (3.22) вытекает, что

$$\int\limits_{\partial\sigma_\rho^2} \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} \right) dz = 2\pi i (B_\rho - A_\rho) + \int\limits_{\partial\sigma_\rho^2} \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} dz.$$

Интеграл $\frac{1}{i} \int \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} dz$ вдоль стороны симплекса σ_ρ^2 равен изменению $\arg \dot{z}$ вдоль этой стороны, поэтому интеграл по всей границе $\partial\sigma_\rho^2$ равен $2\pi - (3\pi - \omega_\rho) = \omega_\rho - \pi$, где ω_ρ означает сумму внутренних углов симплекса σ_ρ^2. Следовательно, в итоге имеем

$$\int\limits_{\partial\sigma_\rho^2} \left(\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2} \right) dz = 2\pi i (B_\rho - A_\rho) + i\omega_\rho - i\pi.$$

При суммировании этого равенства по всем симплексам слева все уничтожается, в силу инвариантности интеграла и когерентности ориентации. Справа из первого слагаемого получается $2\pi i\chi$, где χ — характеристика R (см. п. 3.13). Чтобы подсчитать значение двух других членов, обозначим соответственно через α_0, α_1 и α_2 количества 0-, 1- и 2-симплексов триангуляции. Тогда второе слагаемое дает $2\pi i\alpha_0$, ибо, в силу конформности соотношений соседства, сумма всех углов, инцидентных с одной вершиной, равна 2π. Последнее слагаемое дает значение $-\pi i\alpha_2$. В целом получается $\chi = -\alpha_0 + \alpha_2/2$, или, так как $3\alpha_2 = 2\alpha_1$, $\chi = -\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$ (см. п. 3.17).

Характеристика (триангулированной) замкнутой римановой поверхности равна знакочередующейся сумме количеств 0-, 1- и 2-симплексов триангуляции.

Эта знакочередующаяся сумма не зависит поэтому от триангуляции поверхности [2]).

---

[1]) См. формулу для $\varphi^{*\prime}/\varphi^*$ в п. 3.39. — *Прим. перев.*

[2]) Предыдущий вывод протекает вполне аналогично выводу того же соотношения с помощью формулы Гаусса — Боннэ из дифференциальной геометрии. В самом деле, если на поверхности R ввести метрику с $|\varphi|\,|dz|$

3.50. Применение к поверхностям с краем. В гл. IX нам потребуется соответствующая формула для „поверхностей с краем". Под поверхностью с краем мы понимаем множество точек открытой поверхности, покрытое цепью, составленной из симплексов ее триангуляции; при этом предполагается, что каждая вершина, лежащая на границе цепи, имеет на ней в точности два инцидентных с ней 1-симплекса и что эти 1-симплексы не образуют „угла", т. е. образуют гладкое продолжение друг друга [1]).

Пусть, следовательно, R^* — такого рода цепь и φ — ковариант на R, не имеющая на границе R^* ни полюсов, ни нулей. Тогда для отдельных симплексов получается то же самое соотношение, что в п. 3.49. Однако при суммировании нужно отличать „внутренние" вершины от тех, которые лежат на границе. Ибо каждая из вторых при суммировании дает только значение π, так что вся сумма равна $\pi i(2\alpha_0^{(i)} + \alpha_0^{(r)} - \alpha_2)$, где $\alpha_0^{(i)}$ и $\alpha_0^{(r)}$ означают соответственно количество внутренних и количество граничных вершин. Эти количества связаны с α_0, α_1 и α_2 соотношениями $\alpha^{(i)} + \alpha_0^{(r)} = \alpha_0$, $\alpha_0^{(r)} = \alpha_1^{(r)}$, $\alpha_1 = \alpha_1^{(i)} + \alpha_1^{(r)}$, $3\alpha_2 = 2\alpha_1^{(i)} + \alpha_1^{(r)}$, и для предыдущей суммы получается значение $-2\pi i N$, где N означает знакочередующуюся сумму $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2$. Тем самым имеем формулу

$$\int_{\partial R^*} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right) dz = 2\pi i \left(\sum_\rho B_\rho - \sum_\rho A_\rho - N\right).$$

Из этой формулы следует, что сумма N не зависит от триангуляции. Эта знакочередующаяся сумма называется *характеристикой* поверхности с краем R^*.

3.51. Рассмотрим снова произвольную риманову поверхность R и на ней однозначную аналитическую ковариванту φ, регулярную с точностью до полюсов; пусть все полюсы — по крайней мере второго порядка. Если тогда z_0 — фиксированная и z — переменная

в качестве дифференциала дуги, то для гауссовой кривизны получается выражение $K = -\frac{2}{|\varphi|^2} \Delta \ln |\varphi|$; оно равно нулю во всех точках, где $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \infty$. Для геодезической кривизны кривой $z(t)$ получается соответственно выражение $K_g = \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right)\dot{z}$. Если исключить особенности K с помощью 2-симплексов и к оставшейся части поверхности (с краем) применить формулу Гаусса — Боннэ, то получим то же соотношение, что и выше.

[1]) Напомним, что цепи рассматриваются только конечные (см. п. 2.28), а в данном случае еще и связные, т. е. покрывающие связную часть поверхности. Первое условие на граничные вершины обеспечивает то, что граничные контуры поверхности с краем не имеют общих точек; второе условие имеет значение для следующего дальше вывода. — *Прим. перев.*

точки на R, то интеграл

$$\int_w \varphi(z)\,dz,$$

где w — произвольный путь, ведущий из z_0 в z, определяет на R аналитическую (в общем случае в целом многозначную) функцию $\Phi(z)$. Ее многозначность определяется одномерной группой гомологий поверхности R: действительно, если w_1 и w_2 — два пути, ведущие из z_0 в z, и путь $w_1 w_2^{-1}$ гомологичен нулю, то из теоремы о вычетах следует, что интегрирование по обоим путям приводит к одному и тому же значению функции. Если, в частности, одномерная группа гомологий тривиальна, т. е. каждый замкнутый путь гомологичен нулю, то функция $\Phi(z)$ *однозначна* на всей поверхности R.

3.52. Поверхности наложения интегральных функций. Пусть $\varphi(z)$, — как раньше, однозначная аналитическая ковариантa, которая на R регулярна или имеет конечное число полюсов по крайней мере второго порядка. На поверхности наложения $\check{R}$ интегральных функций ей соответствует ковариантa $\check{\varphi} = \varphi \frac{dz}{d\check{z}}$. Если $\check{w}$ — произвольный замкнутый путь на $\check{R}$, то его проекция w на R гомологична нулю, поэтому, по интегральной теореме Коши,

$$\int_w \varphi\,dz = 0.$$

Но из определения $\check{\varphi}$ вытекает, что

$$\int_{\check{w}} \check{\varphi}\,d\check{z} = \int_w \varphi\,dz,$$

следовательно,

$$\int_{\check{w}} \check{\varphi}\,d\check{z} = 0.$$

Это объясняет название „поверхность наложения интегральных функций": на этой поверхности всякая ковариантa, полученная перенесением коварианты, заданной на R (с указанными выше свойствами), определяет при интегрировании *однозначную* интегральную функцию (ср. Вейль [1*]).

§ 6. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ И ИНТЕГРАЛЫ

3.53. Ковариантное продолжение. Пусть P_0 — точка римановой поверхности и F_{P_0} — элемент аналитической функции в P_0. Если F_{P_0} продолжаем (как скалярная функция) вдоль пути w, выходящего из P_0, то производная F'_{P_0} продолжаема вдоль w ковариантно.

Мы докажем обратное утверждение: пусть φ_{P_0} — ковариантный элемент в P_0, продолжаемый вдоль w; тогда „интегральный элемент" от φ_{P_0}, т. е. такой элемент F_{P_0}, что $F'_{P_0} = \varphi_{P_0}$, также продолжаем вдоль w.

Действительно, пусть (τ) означает множество значений t, для которых элемент F_{P_0} продолжаем вдоль части w_τ пути w, соответствующей $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Это множество содержит $\tau = 0$ и, следовательно, не пусто. Оно открыто: в самом деле, если τ_0 — точка из (τ), то существует аналитическое покрытие [1]) F_t пути w_{τ_0} с начальным элементом F_{P_0}. Если выбрать δ настолько малым, чтобы t для $|t - \tau_0| < \delta$ лежало в K_{τ_0}, то это покрытие можно распространить на путь $w_{\tau_0+\delta'}$, $\delta' < \delta$, следовательно, все точки интервала $|t - \tau_0| < \delta$ принадлежат (τ).

С другой стороны, множество (τ) замкнуто. Действительно, пусть $t_1 < t_2 < \ldots$ — сходящаяся последовательность из (τ) и t^* — предельная точка. Точке t^* соответствует определенная ковариантa φ_{t^*}, полученная продолжением φ_{P_0}. Если δ — число, соответствующее t^* (относительно аналитического покрытия φ_t), и n настолько велико, что $t_n > t^* - \delta$, то t_n соответствует элемент φ_{t_n} и в пересечении $K_{t^*}K_{t_n}$ имеет место соотношение $\varphi_{t_n}\, dz_n = \varphi_{t^*}\, dz^*$. Интеграл $\int \varphi_{t^*}\, dz^*$ отличается здесь от F_{t_n} только на постоянную c, так что, положив $F_{t^*} = \int \varphi_{t^*}\, dz^* + c$, получим, что F_{t_n} — непосредственное аналитическое продолжение F_{t^*}. Если произвольной точке t интервала $t_n < t < t^*$ мы поставим в соответствие элемент F_{t^*}, то этим будет задано аналитическое покрытие пути, соответствующего $t_n \leqslant t \leqslant t^*$, тем самым и всего пути w_{t^*}; следовательно, t^* принадлежит (τ). Из обоих доказанных свойств множества (τ) следует, что оно заполняет весь отрезок $0 \leqslant t \leqslant 1$ и, следовательно, элемент F_{P_0} продолжаем вдоль всего пути w.

Если, в частности, ковариантa φ однозначна и аналитична в области G, содержащей весь путь w, то, продолжая интегральный элемент F_{P_0}, получаем интеграл $\int\limits_w \varphi\, dz$.

3.54. Пусть теперь φ — однозначная аналитическая ковариантa на римановой поверхности R, регулярная всюду без исключения. Если тогда P_0 — фиксированная точка R, то, согласно п. 3.53, интегральный элемент F_{P_0} неограниченно продолжаем на R и определяемая им многозначная аналитическая функция есть интеграл $\int\limits_w \varphi\, dz$, где w — произвольный путь, выходящий из P_0. Если w_1 и w_2 — два

[1]) См. п. 3.19. — *Прим. перев.*

гомологичных друг другу пути, ведущие из P_0 в одну и ту же точку P, то, по интегральной теореме Коши,

$$\int_{w_1} \varphi\, dz = \int_{w_2} \varphi\, dz;$$

продолжение F_{P_0} вдоль w_1 и w_2 приводит к одному и тому же конечному элементу.

Аналитическое продолжение вдоль гомологичных путей интегрального элемента однозначной регулярной аналитической ковариантны приводит к одному и тому же элементу.

3.55. Аналитический образ, порождаемый элементом $f(z)$, заданным на римановой поверхности R, является однозначной функцией на универсальной поверхности наложения $\check{R}$. Если ограничиться подклассом интегральных элементов произвольных однозначных аналитических ковариант, заданных на R, то для получения однозначности уже достаточно перейти лишь к поверхности наложения интегральных функций $\check{R}$. Действительно, если сначала $\check{\varphi}$ — ковариант на $\check{R}$, полученная перенесением ковариант φ с R, то, согласно п. 3.52, функция $\int \check{\varphi}\, d\check{z}$ на $\check{R}$ однозначна; поэтому продолжение перенесенного на $\check{R}$ интегрального элемента от φ ведет к однозначной функции.

Глава IV

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

В настоящей главе будут рассмотрены важные для наших целей вопросы существования гармонических функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям или обладающих определенными особенностями, с общностью, достаточной для построения теории униформизации и для некоторых связанных с ней общих теоретико-функциональных проблем. Мы следуем при этом *альтернирующему методу* Шварца и Неймана. По сравнению с другими классическими методами доказательства рассматриваемых здесь теорем существования, и прежде всего принципом Дирихле и методом выметания Пуанкаре, альтернирующий метод отличается своим конструктивным характером. Он примыкает также естественным образом к основной идее теории поверхностей. Подобно тому как поверхность строится из множества элементов поверхности с заданными между ними связями, так и с помощью альтернирующего метода строятся сначала некоторые элементы функций, между которыми затем путем их продолжения устанавливаются определенные связи, определяющие искомую функцию в целом. Попутно получается теорема о том, что каждая риманова поверхность удовлетворяет аксиоме счетности (§ 3).

§ 1. АЛЬТЕРНИРУЮЩИЙ МЕТОД ШВАРЦА

4.1. Краевая задача. Первая краевая задача теории потенциала требует построения функции u, гармонической в заданной области G римановой поверхности R и принимающей на границе Γ области G заданные значения f. Мы рассматриваем здесь эту задачу при следующих предположениях:

1°. Множество $G+\Gamma$ компактно на R[1]).

2°. Множество граничных значений $f(\zeta)$, заданных на Γ, ограничено и, за исключением самое большее конечного числа точек ζ, непрерывно.

3°. Искомая функция u z) должна быть в области G гармонической и ограниченной. При приближении к границе Γ она должна непрерывно стремиться к значениям $f(\zeta)$ в точках непрерывности $f(\zeta)$,

---

[1]) Если поверхность R компактна, то это условие заведомо выполняется.

так что функция $\bar{u}$, равная $u(z)$ для $z \in G$ и $f(\zeta)$ для $\zeta \in \Gamma$, определенная на $G+\Gamma$, должна быть непрерывна всюду, исключая самое большее конечное число точек.

4.2. Решение этой задачи, если оно существует, единственно, так как разность двух решений ограничена в G и, за исключением, быть может, конечного числа точек ζ, равна нулю на границе Γ, поэтому, на основании обобщенного принципа максимума (гл. III, § 4), она тождественно равна нулю.

4.3. При той общности структуры границы Γ, которую мы допустили, задача не всегда разрешима. Могут встретиться так называемые иррегулярные граничные точки, где граничное условие выполнимо не при каждом выборе f. Такими точками являются, например, изолированные граничные точки, в которых всякая ограниченная гармоническая функция гармонически продолжаема (устранимые особенности), так что значения $f(\zeta)$ не могут быть заданы произвольно.

4.4. Альтернирующий метод. С помощью альтернирующего метода Шварца может быть доказано следующее предложение[1]):

Пусть G_1 и G_2 — две области на поверхности R, удовлетворяющие следующим условиям:

A. Краевая задача разрешима для $G_1+\Gamma_1$ и $G_2+\Gamma_2$ при любых граничных значениях f, обладающих как на Γ_1, так и на Γ_2 свойством 2°.

B. Пересечение G_1G_2 непусто, а пересечение $\Gamma_1\Gamma_2$ состоит из конечного числа точек.

Тогда краевая задача п. 4.1 разрешима и для области G_1+G_2.

4.5. При доказательстве мы можем исключить из рассмотрения тривиальный случай, когда одна из областей G_ν содержится в другой. Пусть теперь α_1 — (замкнутое) подмножество границы Γ_1, не лежащее в G_2, и β_1 — его дополнение, так что $\Gamma_1 = \alpha_1 + \beta_1$; аналогично определим α_2 и β_2 для G_2 ($\Gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2$). Тогда $\Gamma = \alpha_1 + \alpha_2$ является границей области $G = G_1 + G_2$; пересечение $\alpha_1\alpha_2$ совпадает с пересечением $\Gamma_1\Gamma_2$ и состоит, следовательно, из конечного числа точек. Открытое (не обязательно связное) множество G_1G_2 имеет своей границей множество $\beta_1+\beta_2+\alpha_1\alpha_2$. Множества β_1 и β_2 оба непусты.

Пусть теперь $f(\zeta)$ — функция, которая на Γ ограничена и, исключая самое большее конечное число точек, непрерывна. Мы покажем, что в G существует ограниченная гармоническая функция u с гра-

---

[1]) Для дальнейшего существенно то, что альтернирующий метод ведет к цели при более общих предположениях относительно областей G_1 и G_2 и их границ, чем у Шварца; ср. мою работу [5].

ничными значениями f. Достаточно рассмотреть случай $f \geqslant 0$, так как это условие может быть удовлетворено добавлением постоянной, которую затем следует вычесть из найденного решения.

4.6. Из наших предположений следует, что в G_1 и G_2 соответственно можно определить последовательности гармонических функций

$$u_0 \equiv 0,\ u_1,\ \ldots$$

и

$$v_0,\ v_1,\ \ldots$$

по следующим граничным условиям:

$$u_n = \begin{cases} f & \text{на } \alpha_1 \\ v_{n-1} & \text{на } \beta_1 \end{cases} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

$$v_n = \begin{cases} f & \text{на } \alpha_2 \\ u_n & \text{на } \beta_2 \end{cases} \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

причем каждый раз выбрасывается множество (конечное) всех исключительных точек.

Теперь мы докажем, что, во-первых, в G_1 и в G_2 соответственно существуют предельные значения $\lim u_n = u$ и $\lim v_n = v$, во-вторых, $u = v$ в $G_1 G_2$ и, в-третьих, эти функции, как продолжения друг друга, представляют в G искомое решение.

4.7. Выбрасывая множество исключительных точек (ζ) функции f[1]), имеем

$$v_n - v_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha_2, \\ u_n - u_{n-1} & \text{на } \beta_2, \end{cases}$$

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} 0 & \text{на } \alpha_1, \\ v_n - v_{n-1} & \text{на } \beta_1. \end{cases}$$

Так как функция v_0 на β_2 равна $u_0 = 0$ и на α_2 равна $f (\geqslant 0)$, то, по обобщенному принципу минимума, она неотрицательна в G_2, следовательно, это же верно для граничных значений $u_1 - u_0 = u_1$, а значит, и для функции $u_1 - u_0$ в G_1. Из соотношения $u_1 - u_0 \geqslant 0$ аналогично следует, что $v_1 - v_0 \geqslant 0$; повторяя так шаг за шагом, заключаем, что *все* разности $u_n - u_{n-1}$ и $v_n - v_{n-1}$ неотрицательны, следовательно,

$$0 = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots \text{ в } G_1,$$

$$0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \text{ в } G_2.$$

С другой стороны, из обобщенного принципа максимума следует, что u_n и v_n не превосходят верхней границы M функции f.

[1]) В это множество включаются еще точки пересечения $\alpha_1 \alpha_2$, которых может быть также лишь конечное число. — *Прим. перев.*

Отсюда вытекает, что последовательности u_n и v_n сходятся. Предельные функции u и v соответственно в G_1 и G_2 ограничены и, *по принципу Харнака*, который будет доказан в п. 4.14, гармоничны.

4.8. Рассмотрим в G_1G_2 ограниченную гармоническую функцию $v_n - u_n$. На β_1 она равна $v_n - v_{n-1}$, а на β_2 — нулю. Отсюда, на основании обобщенного принципа максимума (он применим, так как пересечение $\alpha_1\alpha_2$ состоит из конечного числа точек), заключаем, что

$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant v_n - v_{n-1},$$

откуда при $n \to \infty$ вытекает, что

$$u = v \quad \text{в} \quad G_1G_2.$$

Следовательно, функции u и v являются гармоническими продолжениями друг друга.

4.9. Полученная таким образом в G ограниченная гармоническая функция в каждой граничной точке ζ равна $f(\zeta)$, за исключением самое большее конечного числа точек. Для доказательства образуем в G_1 ограниченную гармоническую функцию ω с граничными значениями 0 на α_1 и M на β_1 (снова исключая конечное число точек на Γ_1). Эта функция существует в силу разрешимости краевой задачи для G_1; по принципу максимума, в каждой точке области G_1

$$u_1 \leqslant u_n \leqslant u_1 + \omega \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

следовательно, и

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_1 + \omega.$$

Но для каждой точки ζ на α_1, исключая самое большее конечное число точек, $u_1 \to f(\zeta)$ и $u_1 + \omega \to f(\zeta)$ при $z \to \zeta$, поэтому и $u \to f(\zeta)$ в этих граничных точках. Итак, построенная функция u обладает требуемым поведением на границе α_1. Повторяя те же рассуждения для G_2, докажем аналогично, что $u \to f$ и на дополнительной части границы α_2 [1]).

§ 2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КРУГА

Чтобы можно было применять альтернирующий метод, укажем решение краевой задачи для некоторых простых канонических областей.

4.10. Случай круга. Для круга $|z| \leqslant R$ z-плоскости, как впервые строго доказал Шварц, краевая задача решается с помощью

---

[1]) Имеющиеся в конечном числе точки пересечения $\alpha_1\alpha_2$ могут быть точками разрыва для $u = v$, даже если f там непрерывна. Непрерывность может быть доказана только при дополнительных предположениях о множестве $\alpha_1\alpha_2$, например тогда, когда каждая из точек $\alpha_1\alpha_2$ содержится в континууме граничных точек на $\alpha_1 + \alpha_2 = \Gamma$.

интеграла Пуассона

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\zeta)\,\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta \quad (\zeta=Re^{i\theta},\ z=re^{i\varphi}). \tag{4.1}$$

Так как ядро интеграла, как действительная часть функции

$$\frac{\zeta+z}{\zeta-z},$$

для $|z|<R$ гармонично, то это же справедливо и для $u(z)$ (если функция f интегрируема). То, что u обладает требуемым поведением на границе, доказывается сначала для случая, когда функция f на дуге α окружности $|z|=R$ равна 1, а на дополнительной дуге β равна нулю. Тогда интеграл равен ($\zeta_1=Re^{i\theta_1}$, $\zeta_2=Re^{i\theta_2}$ — концы дуги α, $0\leqslant\theta_1<\theta_2\leqslant 2\pi$)

$$\omega_\alpha(z)=\frac{1}{\pi}\arg\frac{\zeta_2-z}{\zeta_1-z}-\frac{\theta_2-\theta_1}{2\pi},$$

откуда немедленно следует требуемое поведение на границе. Линиями уровня ω_α являются дуги окружностей, соединяющие ζ_1 и ζ_2. Имеет место соотношение

$$\omega_\alpha+\omega_\beta\equiv 1.$$

$\omega_\alpha(z)$ называется *гармонической мерой* дуги α в точке z (относительно круга $|z|\leqslant R$). Если для фиксированной точки $\zeta_1=Re^{i\theta_1}$ и переменной точки $\zeta=Re^{i\theta}$ обозначить гармоническую меру дуги $\alpha_1=(\theta_1,\ \theta)$ через $\omega(\zeta,\ z)$, то интеграл Пуассона записывается в виде интеграла Стильтьеса

$$u(z)=\int_{\theta=0}^{2\pi} f(\zeta)\,d\omega(\zeta,\ z). \tag{4.2}$$

4.11. Если функция f ограничена ($|f|\leqslant M$) и интегрируема и ζ_0 — точка, где $f(\zeta)$ непрерывна, то соотношение $u(z)\to f(\zeta_0)$ при $z\to\zeta_0$ доказывается с помощью следующих простых соображений, допускающих далеко идущие обобщения.

Пусть задано $\varepsilon>0$ и α — настолько малая граничная дуга вокруг ζ_0, что на α $f(\zeta)=f(\zeta_0)+<\varepsilon>$[1]). Тогда из (4.2) вытекает, что

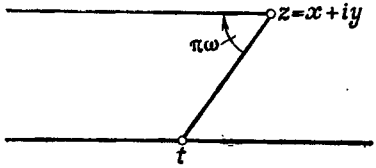
$$\begin{aligned}u(z)&=\int_\alpha (f(\zeta_0)+<\varepsilon>)\,d\omega+\int_\beta f(\zeta)\,d\omega=\\&=f(\zeta_0)\,\omega_\alpha(z)+<\varepsilon>+\omega_\beta(z)<M>=\\&=f(\zeta_0)(1-\omega_\beta(z))+<\varepsilon>+\omega_\beta(z)<M>=\\&=f(\zeta_0)+<\varepsilon>+2\omega_\beta(z)<M>.\end{aligned}$$

При $z\to\zeta_0$ имеем $\omega_\beta\to 0$, следовательно, $u(z)\to f(\zeta_0)$.

[1]) Напомним, что $<\varepsilon>$ означает комплексное число, которое по абсолютной величине меньше ε. — *Прим. перев.*

В частности, если f непрерывна всюду, исключая самое большее конечное число точек, то u — единственное решение краевой задачи (§ 1).

4.12. Полуплоскость. Для полуплоскости, например для верхней полуплоскости $y \geqslant 0$, решение первой краевой задачи выражается еще более простой формулой. Если $f(x)$ — заданные на действительной оси x-ов граничные значения, то решение u находим в виде интеграла ($z = x + iy$)



Фиг. 5.

$$u(z) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)\, d\omega(t, z),$$

где $\omega(t, z)$ равно деленному на π углу, под которым из точки z виден интервал $(-\infty, t)$ действительной оси (см. фиг. 5); $\omega(t, z)$ является „гармонической мерой" этого интервала, т. е. той регулярной гармонической для $y > 0$ функцией, которая на интервале $(-\infty, t)$ равна 1, а на его дополнении $(t, +\infty)$ равна нулю.

4.13. Круговое кольцо. Этот случай с помощью элементарного конформного отображения приводится к случаю полуплоскости. В самом деле, если, например, кольцо дано в виде $1 \leqslant |z| \leqslant R$ ($R > 1$), то с помощью функции $w = e^{\pi i \frac{\ln z}{\ln R}}$ оно отображается локально однозначно, а в целом многозначно на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \geqslant 0$. Различные локально взаимно однозначные ветви отображения переходят друг в друга, когда z в кольце обходит вокруг начала; эти ветви связаны друг с другом циклической группой линейных преобразований T_n, порождаемой преобразованием $w \to e^{\frac{2\pi^2}{\ln R}} w$. Заданные граничные значения переходят в граничные значения на действительной оси плоскости w, не меняющиеся при преобразованиях T_n. Если для этих граничных значений построить решение краевой задачи для верхней полуплоскости, то оно будет инвариантно относительно преобразований T_n, и преобразование $w \to z$ переводит его в решение краевой задачи для кругового кольца.

4.14. Принцип Харнака. Пусть $u(z)$ — неотрицательная ($u \geqslant 0$) гармоническая функция в круге $|z| < R$. Так как ядро интеграла Пуассона (4.1) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{R-r}{R+r} \leqslant \frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)} \leqslant \frac{R+r}{R-r},$$

то для $z = re^{i\varphi}$ имеем

$$0 \leqslant u(z) \leqslant \frac{R+r}{R-r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\, d\theta = \frac{R+r}{R-r} u(0).$$

Аналогичная оценка снизу дает двойное неравенство Харнака ($|z| < R$)

$$\frac{R-|z|}{R+|z|} u(0) \leqslant u(z) \leqslant \frac{R+|z|}{R-|z|} u(0). \tag{4.3}$$

Отсюда следует важный *принцип сходимости Харнака*:

Пусть u_1, u_2, ... — монотонно возрастающая последовательность гармонических функций на римановой поверхности R:

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots.$$

Если эта последовательность имеет конечное предельное значение в одной точке $z = z_0$, то она сходится равномерно на каждой компактной части поверхности R и предельная функция $u = \lim u_n$ гармонична на R.

Доказательство. Рассмотрим сначала замкнутый параметрический круг K_z с центром в z_0 ($|z - z_0| \leqslant r$). Так как разность $u_{n+p} - u_n$ в этой окрестности гармонична, неотрицательна и в центре $z = z_0$ для достаточно больших n и всех $p > 0$ сколь угодно мала, то из (4.3) следует, если там u заменить на $u_{n+p} - u_n$, равномерная сходимость последовательности u_n в круге K_z. Предельная функция в этом круге может быть представлена в виде интеграла Пуассона, а так как ядро этого интеграла — гармоническая функция, то она в этом круге гармонична.

Если мы теперь возьмем произвольную точку $z = z_1$ поверхности R, то ее можно соединить с z_0 некоторым путем и затем покрыть этот путь конечным числом параметрических кругов. Следуя по этой цепочке кругов от z_0 до z_1, заключаем с помощью неравенства Харнака (4.3), что из конечности предела $u = \lim u_n$ в точке z_0 вытекает конечность предела $\lim u_n$ в каждой из параметрических окрестностей, следовательно, в частности, и в точке z_1. Точно так же доказывается гармоничность предельной функции u в точке z_1 и — с помощью леммы Гейне-Бореля — утверждение о равномерной сходимости. Этим принцип Харнака полностью доказан.

4.15. Круговые области. Под *круговой областью* (Kreisbereich) на римановой поверхности R мы понимаем связное множество точек, представляющее соединение конечного числа областей B_ν, каждая из которых в подходящим образом выбранном параметрическом круге имеет своим прообразом замкнутый круг. Краевая задача для каждой области B_ν разрешима с помощью интеграла Пуассона. Далее

(аналитические) границы областей B_ν имеют попарно не более конечного числа общих точек, так что краевая задача разрешима по альтернирующему методу для каждой круговой области в предположении, что она имеет бесконечное граничное множество точек [1]).

Так как, согласно п. 4.13, краевая задача разрешима также для области, имеющей в параметрическом круге в качестве прообраза замкнутое круговое кольцо, то отсюда, как выше, следует, что если в качестве составляющих B_ν круговой области допустить и такие „кольцевые области" (Kreisringbereiche), то снова получатся области, для которых краевая задача разрешима. В дальнейшем наименование „круговая область" нужно будет иногда понимать и в таком расширенном смысле.

4.16. Решение специальной краевой задачи для поверхности с двумя вырезанными кругами. Пусть R — произвольная риманова поверхность, K — параметрическая окрестность и K_z — отвечающий ей параметрический круг ($|z|<1$). В K_z выберем две точки $z=a$ и $z=b$ и зафиксируем столь малое число $r>0$, что замкнутые круги $|z-a|\leqslant r$ и $|z-b|\leqslant r$ лежат в круге $|z|<1$ и не пересекаются. Этим кругам в K соответствуют две замкнутые области, ограниченные соответственно кривыми γ_a и γ_b, представляющими соответственно образы окружностей $|z-a|=r$ и $|z-b|=r$. Если удалить из R обе эти области, останется (связная) поверхность R_0. Требуется найти однозначную ограниченную гармоническую функцию u на R_0, принимающую на γ_a и γ_b соответственно значения 1 и 0.

Выберем число $r_1>r$, столь близкое к r, что круговые кольца $r\leqslant|z-a|\leqslant r_1$ и $r\leqslant|z-b|\leqslant r_1$ лежат еще в круге $|z|<1$ и не пересекаются.

Пусть B — круговая область на R_0. Присоединяя к ней оба кольца [2]), получаем новую круговую область D на R; за исключением γ_a и γ_b, она лежит на R_0. Граница D состоит из γ_a, γ_b и еще дополнительной границы γ.

Каждая точка $P\in R_0$ имеет своей окрестностью такого рода круговую область D. В самом деле, в силу связности R_0, можно каждую ее точку P соединить с обоими кольцами конечной цепочкой параметрических окрестностей. Эти параметрические окрестности вместе с обоими кольцами образуют искомую круговую область D.

4.17. Теперь мы каждой области D ставим в соответствие гармоническую функцию u_D, которая строится с помощью альтернирующего метода по следующим определяющим ее условиям:

---

1) Исключаемый этим случай может иметь место для замкнутой поверхности.

2) Относительно B предполагается, что такое присоединение дает связную область. — *Прим. перев.*

1. u_D внутри D однозначна, гармонична и ограничена.
2. $u_D = 1$ на γ_a.
3. $u_D = 0$ на γ_b и на γ.

Тогда $0 < u_D < 1$ внутри D.

Рассмотрим теперь класс всех круговых областей (D), содержащих фиксированную точку z, и образуем верхнюю границу

$$u(z) = \sup_D u_D(z).$$

Она однозначно определена для каждой точки $P \in R_0$, и

$$0 < u(z) \leqslant 1.$$

Теперь мы покажем, что u — гармоническая функция на R_0. Для этого заметим сначала, что u_D обладает следующим свойством монотонности: если $D_1 \subset D_2$, то $u_{D_1} \leqslant u_{D_2}$ в каждой точке области D_1. В самом деле, это неравенство выполняется, очевидно, на границе D_1, поэтому, по принципу максимума, — и в каждой точке области D_1.

Пусть теперь $z = z_0$ — точка R_0 и A_0, A_1, ... — бесконечная последовательность круговых областей класса (D) $(z_0 \in A_\nu, \nu = 0, 1 \ldots)$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} u_{A_n}(z_0) = u(z_0).$$

Тогда, в силу свойства монотонности, то же самое справедливо для множеств $V_n = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и соответствующей монотонной последовательности u_{V_n}:

$$\lim_{n \to \infty} u_{V_n}(z_0) = u(z_0).$$

По принципу Харнака, существует предельная функция

$$\lim_{n \to \infty} u_{V_n}(z) = u_0(z),$$

гармоническая в A_0. При этом

$$u(z_0) = u_0(z_0). \tag{4.4}$$

4.18. Мы покажем, что последнее равенство справедливо для *каждой* точки $z \in A_0$. Прежде всего для каждой точки $z \in A_0$ имеем неравенство $u_{V_n}(z) \leqslant u(z)$, поэтому

$$u_0(z) \leqslant u(z) \quad \text{в} \quad A_0.$$

Пусть теперь $z = z_1$ — *произвольная* точка из A_0 и B — круговая область класса (D), содержащая z_1. Тогда всюду в области B

$$u_B(z) \leqslant u_{B+V_n}(z) \leqslant u(z).$$

Функция u_{B+V_n} монотонно возрастает вместе с n, поэтому, по принципу Харнака, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} u_{B+V_n}(z) = u_1(z).$$

Функция $u_1(z)$ гармонична в $B+A_0$ и

$$u_1(z) \leqslant u(z). \tag{4.5}$$

Покажем, что $u_1(z_1) = u_0(z_1)$. Для этого будем исходить из имеющего место в V_n неравенства

$$u_{V_n}(z) \leqslant u_{B+V_n}(z).$$

Из него при $n\to\infty$ следует, что в области A_0

$$u_0(z) \leqslant u_1(z).$$

Следовательно, гармоническая функция $u_1 - u_0$ в A_0 *неотрицательна*. В точке $z = z_0$ она должна равняться нулю, ибо здесь, с другой стороны, в силу (4.4) и (4.5),

$$u_0(z_0) = u(z_0) \geqslant \lim_{n\to\infty} u_{B+V_n}(z_0) = u_1(z_0),$$

следовательно,

$$u_1(z_0) - u_0(z_0) \leqslant 0.$$

Тогда, по принципу минимума, разность $u_1(z) - u_0(z)$ равна нулю во всей области A_0, в частности, и в точке $z = z_1$:

$$u_1(z_1) = u_0(z_1).$$

Теперь, поскольку z_1 лежит в B, имеем

$$u_B(z_1) \leqslant u_1(z_1) = u_0(z_1),$$

следовательно,

$$\sup_B u_B(z_1) \leqslant u_0(z_1),$$

откуда

$$u(z_1) = u_0(z_1).$$

Таким образом, доказано, что $u(z) = u_0(z)$ всюду в A_0, откуда вытекает гармоничность $u(z)$ в A_0, следовательно, и всюду на R_0.

4.19. Остается еще показать, что u обладает требуемым поведением на границе. Прежде всего, $u\to 1$ при $z\to\gamma_a$, так как $u_D\to 1$ при $z\to\gamma_a$ и $u_D \leqslant u \leqslant 1$.

Чтобы доказать, далее, что $u(z) \to 0$ при $z \to \gamma_b$, рассмотрим произвольную точку z_0 кольца R_b: $r \leqslant |z-b| \leqslant r_1$ и круговую область D из класса (D), содержащую z_0. Пусть $v(z)$ — гармоническая в R_b функция, которая на $\gamma_b (|z-b| = r)$, соответственно $|z-b| = r_1$, имеет граничные значения 0, соответственно 1. Тогда, так как гармоническая функция u_D на γ_b равна нулю и в других точках D удовлетворяет неравенству $u_D \leqslant 1$, то

$$u_D \leqslant v$$

на границе R_b, следовательно, по принципу максимума, и всюду в R_b. Поэтому

$$u_D(z_0) \leqslant v(z_0),$$

значит, и

$$0 \leqslant u(z_0) = \sup_D u_D(z_0) \leqslant v(z_0).$$

Отсюда вытекает, что u на γ_b имеет граничное значение нуль, что и требовалось доказать.

§ 3. АКСИОМА СЧЕТНОСТИ

4.20. Теперь мы можем доказать, что каждая риманова поверхность удовлетворяет аксиоме счетности. Достаточно, очевидно, доказать это для рассмотренной в п. 4.16 поверхности R_0. Для этого, согласно п. 2.20, нам нужно, с одной стороны, построить на R_0 счетное всюду плотное множество точек и, с другой стороны, ввести метрику, которая определяла бы на R_0 уже имеющуюся топологию.

4.21. Построение всюду плотного множества точек. Итак, сначала на R_0 должно быть указано счетное всюду плотное множество точек. Для этого достаточно указать на R_0 счетное множество параметрических окрестностей, точки которых расположены на R_0 всюду плотно. Если тогда в каждой из этих параметрических окрестностей взять счетное всюду плотное множество и все эти множества соединить вместе, то получим счетное множество, всюду плотное на R_0.

Пусть z_0 — произвольная точка R_0. Рассмотрим снова, как в п. 4.16, все круговые области класса (D), содержащие z_0. Каждой такой области отвечает, согласно п. 4.17, гармоническая функция u_D. Пусть $u(z_0)$ — снова верхняя граница значений этих функций в z_0 и $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ — монотонно возрастающая последовательность круговых областей класса (D), для которых

$$\lim_{n \to \infty} u_{D_n}(z_0) = u(z_0). \tag{4.6}$$

Мы покажем, что множество $G = \sum_\nu D_\nu$ обладает требуемыми свойствами. Ясно, что G является соединением счетного числа пара-

метрических окрестностей. Остается, следовательно, показать, что множество точек G всюду плотно на R_0.

Прежде всего из принципа Харнака вытекает, что последовательность u_{D_n} сходится в каждой точке множества G и предельная функция u_G гармонична в G. Далее, так как $u_{D_n} \leqslant u$, то и $u_G \leqslant u$ в G. Но для $z = z_0$ имеем $u_G = u$, и из принципа максимума следует, что $u_G = u$ всюду в G.

4.22. Допустим теперь, вопреки утверждению, что существует точка $P_0 \in R_0$, которая вместе с целой окрестностью не принадлежит G. Пусть $|z| < 1$ — параметрический круг для точки P_0 и $|z| \leqslant \rho_0$ — концентрический к нему меньший круг. По нашему предположению, можно ρ_0 выбрать настолько малым, что образ K_0 круга $|z| < \rho_0$ лежит вне G. Тогда G лежит в дополнении $R_0^* = R_0 - K_0$.

Повторением построения п. 4.17 доказывается существование на поверхности R_0^* гармонической функции v, которая на γ_a имеет граничное значение, равное единице, в то время как на γ_b и на границе γ_0 области K_0 она равна нулю. Эта функция получается как верхняя граница

$$v(z) = \sup_{D^*} u_{D^*}(z),$$

где D^* пробегает все те круговые области класса (D), которые лежат на R_0^* и содержат круговое кольцо $\rho_0 \leqslant |z| \leqslant 1$. Поэтому в R_0

$$v(z) = \sup_{D^*} u_{D^*}(z) \leqslant \sup_{D} u_D(z) = u(z).$$

Рассмотрим, с другой стороны, последовательность (4.6). Каждая область D_ν лежит в G, тем самым и в R_0^*; следовательно, если D^* — произвольная круговая область подкласса (D^*), то $D^* + D_\nu$ принадлежит (D^*). Отсюда и из монотонности последовательности u_{D_ν} следует, что для произвольной области D^* и каждой области D_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$)

$$u_{D_\nu} \leqslant u_{D_\nu + D^*} \leqslant v(z),$$

откуда при $\nu \to \infty$ вытекает, что

$$u_G(z) \leqslant v(z) \text{ в } G$$

и, в силу равенства $u_G = u$, неравенство $u(z) \leqslant v(z)$.

Таким образом, $u = v$ в G; тогда, согласно принципу гармонического продолжения, $u = v$ всюду в R_0^*. Это приводит к противоречию: с одной стороны, $u = v > 0$ в R_0, следовательно, в частности, и на γ_0; с другой стороны, $v = 0$ на γ_0. Тем самым доказательство закончено.

4.23. Построение метрики. Нам нужно еще построить на поверхности R_0 *метрику*, такую, чтобы определяемая ею топология совпадала с первоначальной.

Пусть u — однозначная отличная от постоянной гармоническая функция на R_0; такая функция существует, согласно п. 4.17. Рассмотрим ее дифференциал du и сопряженный дифференциал du'. Если P и Q — две точки R_0 и p — дифференцируемый путь, ведущий из P в Q, то интеграл

$$\int_p |dw| = \int_p \sqrt{du^2 + du'^2}$$

имеет определенное значение, которое *положительно*, так как иначе w, следовательно, и u, была бы постоянной. Нижняя граница $\rho(P, Q)$ этих значений по всевозможным путям p также имеет положительное значение (если $P \neq Q$), причем она удовлетворяет условиям 1, 2, 3 п. 2.4.

4.24. Нам нужно показать, что эта метрика определяет на R_0 первоначальную топологию. Для этой цели предположим, что P_0 — точка R и $|z| < 1$ ($P \longleftrightarrow z = 0$) — ее параметрический круг. Выберем в нем произвольную однозначную ветвь u' сопряженной гармонической функции и образуем аналитическую функцию $f(z) = u + iu'$. Если $P_1 \longleftrightarrow z_1$ — точка этого круга, то расстояние $\rho(P_0, P_1)$ удовлетворяет неравенству

$$\rho(P_0, P_1) \leqslant \int_0^{z_1} |f'(z)|\,|dz|,$$

где интегрирование производится по отрезку $(0, z_1)$. Следовательно, если M — верхняя граница $|f'(z)|$ в параметрическом круге, то

$$\rho(P_0, P_1) \leqslant M|z_1|.$$

Чтобы получить оценку снизу, предположим сначала, что $f'(0) \neq 0$. Тогда параметрический круг можно выбрать столь малым, чтобы значение $|f'(z)|$ имело там положительный минимум m. Пусть $P_1 \longleftrightarrow z_1$ — снова точка этого круга и $z(t)$ — дифференцируемый путь на R, ведущий из P_0 в P_1. Пусть z^* — первая точка этого пути, которая лежит на окружности $|z| = |z_1|$. Тогда

$$\int_0^{z_1} |f'(z)|\,|dz| \geqslant \int_0^{z^*} |f'(z)|\,|dz| \geqslant m \int_0^{z^*} |dz| \geqslant m|z_1|,$$

поэтому и

$$\rho(P_0, P_1) \geqslant m|z_1|.$$

Если функция $f'(z)$ имеет в точке $z=0$ нуль порядка k, то $f'(z)$ можно записать в виде $z^k\varphi(z)$ $(\varphi(0)\neq 0)$, и, обозначая через m минимум в $|\varphi(z)|$ в параметрическом круге, получаем аналогично неравенство

$$\rho(P_0,\ P_1)\geqslant m\frac{|z_1|^{k+1}}{k+1}.$$

Таким образом, в общем случае справедливо неравенство

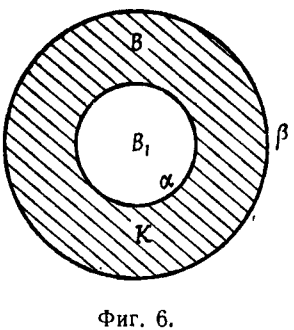
$$m\frac{|z_1|^{k+1}}{k+1}\leqslant\rho(P_0,\ P_1)\leqslant M|z_1|.$$

Отсюда следует, что каждая окрестность точки P_0 содержит некоторую круговую окрестность (в смысле введенной метрики), и наоборот. Согласно п. 2.4, это означает, что топология, индуцированная метрикой, совпадает с первоначальной топологией.

Таким образом, доказательство аксиомы счетности закончено.

§ 4. РЕШЕНИЯ С ЗАДАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

4.25. Постановка задачи. Во многих вопросах теории функций основную роль играют некоторые важные гармонические функции, которые не только, как это имело место выше, удовлетворяют заданным граничным условиям, но, кроме того, обладают еще заданными особенностями. Соответственно расширенная краевая задача может быть сформулирована с достаточной для приложений общностью следующим образом.



Фиг. 6.

Пусть U — параметрическая окрестность на римановой поверхности R и $|z|<1$ — соответствующий параметрический круг. Рассмотрим в U два замкнутых „круга“: $B(|z|\leqslant r)$ и $B_1(|z|\leqslant r_1)$ $(r_1<r<1)$. Если из R удалить B_1, то останется открытая риманова поверхность R_1.

Пусть на R_1 задана круговая область, содержащая внутри кривую β $(|z|=r)$. Тогда соединение A этой круговой области с круговым кольцом K $(r_1\leqslant|z|\leqslant r)$ (фиг. 6) представляет собой круговую область на поверхности R [1]).

Граница области A (на всей поверхности R) состоит из кривой α $(|z|=r_1)$ и части γ, лежащей вне B. Пусть эта часть границы не пуста и, более того, содержит бесконечно много точек (ср. п. 4.15).

---

[1]) За исключением кривой α $(|z|=r_1)$, область A лежит на поверхности R_1.

При этих предположениях пусть в круговом кольце K задана регулярная гармоническая функция u_0 и, далее, пусть на границе γ задана ограниченная и с точностью до конечного числа точек непрерывная функция f. Требуется найти в A однозначную регулярную и ограниченную гармоническую функцию u, которая на γ (исключая конечное число точек) принимает значения f и определена так, что разность

$$v = u - u_0$$

может быть продолжена в B как однозначная регулярная гармоническая функция.

4.26. Единственность. Эта задача также имеет *не более одного* решения, ибо разность двух решений есть регулярная ограниченная гармоническая функция в $A+B$ с нулевыми граничными значениями на γ, следовательно, она тождественно равна нулю.

Далее ясно, что можно ограничиться случаем $f = 0$. Действительно, согласно п. 4.15, в $A+B$ существует однозначная регулярная гармоническая функция u_1 с граничными значениями f на γ; если теперь u — решение с заданными особенностями и граничными значениями, равными нулю на γ, то $u + u_1$ является решением задачи с граничными значениями f.

4.27. Доказательство существования по Шварцу. Как показал Шварц, альтернирующий метод легко приводит к искомой функции u; классическое доказательство сходимости, данное Шварцем, применимо в настоящем случае непосредственно и имеет особенно простой вид.

Прежде всего следует заметить, что, согласно п. 4.15, для круговых областей A и B разрешима краевая задача п. 4.1.

Образуем теперь последовательно функции u_n и v_n, однозначные, регулярные и гармонические соответственно в областях A и B с граничными значениями:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \begin{cases} v_{n-1} + u_0 & \text{на } \alpha \\ 0 & \text{на } \gamma \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ v_0 \equiv 0), \\ v_n &= u_n - u_0 \qquad \text{на } \beta \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Тогда для разностей $u_{n+1} - u_n$ и $v_{n+1} - v_n$ будем иметь:

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} v_n - v_{n-1} & \text{на } \alpha, \\ 0 & \text{на } \gamma, \end{cases}$$
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{на } \beta.$$

Полагая

$$\max_{\beta} |u_n - u_{n-1}| = \max_{\beta} |v_n - v_{n-1}| = M_n,$$

заключаем на основании принципа максимума, что $|v_n - v_{n-1}| \leqslant M_n$ в B, следовательно, в частности, на α. Так как, далее, разность $u_{n+1} - u_n$ на γ равна нулю, то на границе области A, следовательно, и всюду в A, она мажорируется гармонической функцией $M_n\omega$, где ω — гармоническая мера α относительно A [1]). Следовательно,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant M_n\omega(z) \text{ в } A.$$

Внутри A выполняется неравенство $0 < \omega < 1$. Поэтому, если q — максимум ω на β, то $0 < q < 1$ [2]). По определению q, на β

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant qM_n,$$

следовательно, и

$$M_{n+1} \leqslant qM_n.$$

Отсюда

$$M_{n+1} \leqslant q^nM_1,$$

и поэтому в B

$$|v_{n+1} - v_n| \leqslant M_{n+1} \leqslant q^nM_1.$$

В частности, это имеет место на α, и из принципа максимума следует, что

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant q^{n-1}M_1 \text{ в } A.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость рядов

$$\sum_{\nu} (u_{\nu+1} - u_\nu) \text{ в } A$$

и

$$\sum_{\nu} (v_{\nu+1} - v_\nu) \text{ в } B.$$

4.28. Предельные функции $u = \lim u_n$ в A и $v = \lim v_n$ в B являются однозначными, ограниченными и регулярно гармоническими. Далее, u равна нулю на γ.

Покажем теперь, что $u - u_0 = v$ в B. В силу (4.7), $u = v + u_0$ на α и $v = u - u_0$ на β. Следовательно, граничные значения функций v и $u - u_0$ в кольцевой области K совпадают, откуда вытекает, что

$$u - u_0 = v \quad \text{в} \quad K.$$

Так как v в B гармонична и регулярна, то u удовлетворяет всем поставленным требованиям.

---

[1]) То есть ω — та вполне определенная однозначная и ограниченная гармоническая функция, которая равна 1 на α и 0 на γ.

[2]) В этом месте существенно используется то, что граница γ области $A + B$ не пуста, ибо в противном случае $\omega \equiv 1$, следовательно, и $q = 1$. В силу этого, доказательство непосредственно не применимо к случаю, когда поверхность R *замкнута* и A содержит всю поверхность R_1.

§ 5. ЗАМКНУТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

4.29. Постановка задачи. Рассмотрим теперь случай, когда поверхность R замкнута, и поставим себе задачу построить однозначную гармоническую на всей поверхности R функцию с заданными особенностями.

Решение, если оно вообще существует, определяется заданными особенностями однозначно с точностью до аддитивной постоянной, ибо разность двух решений с одними и теми же особенностями есть регулярная гармоническая функция на всей поверхности R.

Для того, чтобы уточнить задачу, будем, как и в п. 4.25, исходить из параметрической окрестности U. Круговую область A (ср. п. 4.25) выберем так, чтобы она покрывала всю поверхность R_1 ($A \equiv R_1$[1])); это возможно в силу аксиомы счетности и компактности R[2]). Пусть в круговом кольце K снова задана регулярная гармоническая функция u_0 и требуется определить в R_1 регулярную гармоническую функцию u так, чтобы разность $u - u_0$ была гармонически продолжаема в B.

В настоящем случае построение п. 4.27 непосредственно не проходит, так как для него было существенно наличие границы γ. Более того, поставленная теперь задача при произвольном задании u_0 не всегда разрешима. Функция u_0 должна удовлетворять некоторому дополнительному условию, как мы покажем, опираясь на метод Шварца и Неймана.

4.30. Условие разрешимости. Чтобы вывести необходимое условие для разрешимости поставленной задачи[3]), отметим сначала, что внешняя граница β кольца K на поверхности R_1 гомологична нулю. Это следует из леммы, которая будет доказана в п. 4.36, если там положить $K_1 = K$, ибо, так как граница K состоит из α и β, а граница A — только из α[4]), то из этой леммы вытекает, что $\alpha + \beta \sim \alpha$ на A и тем самым $\beta \sim 0$ на A.

Пусть теперь u — решение задачи; так как функция u на $A = R_1$ регулярно гармонична, то из предыдущего замечания следует, что

$$\int_\beta du' = 0.$$

---

[1]) Если исключить кривую α, которая принадлежит A (по определению п. 4.15, круговые области замкнуты).

[2]) Ср. Александров и Хопф [1*], стр. 85, теорема III.

[3]) Искомое необходимое условие и все следующее построение получились бы легко, если бы мы предположили, что римановы поверхности триангулируемы. Следующим дальше замечанием (особенно леммой 2 п. 4.36) я обязан Грейбу (W. Graeub).

[4]) При этом кривые α и β нужно ориентировать так, чтобы внутренность K лежала „слева".

С другой стороны, разность $u - u_0$ гармонична в B, и поэтому

$$\int_{\beta} (du' - du_0') = 0.$$

Из обоих равенств следует, что

$$\int_{\beta} du_0' = 0.$$

Этим установлено необходимое условие для функции u_0. Оно состоит в том, что *сопряженная гармоническая функция u_0' в круговом кольце K должна быть однозначной.*

4.31. Это условие также и *достаточно* для разрешимости задачи. Если оно выполняется, то, как сейчас будет показано, альтернирующий метод ведет к цели.

Образуем, как в п. 4.27, последовательности u_n и v_n, определенные граничными значениями

$$\left.\begin{aligned} u_n &= v_{n-1} + u_0 \text{ на } \alpha, \\ v_n &= u_n - u_0 \text{ на } \beta. \end{aligned}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ v_0 \equiv 0).$$

Эти последовательности сходятся равномерно. Для доказательства рассмотрим колебание s_n разности $v_n - v_{n-1}$ на β и покажем сначала, что и максимум абсолютного значения $|v_n - v_{n-1}|$ удовлетворяет на β неравенству

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant s_n.$$

4.32. Для этого можно, по Шварцу и Нейману, воспользоваться следующим общим замечанием.

Пусть U — однозначная регулярная гармоническая функция в кольце $r_1 < |z| < r_2$, у которой сопряженная гармоническая функция U' также однозначна. Тогда для $r_1 < r < r_2$ имеем

$$0 = \int_{|z|=r} dU' = \int_0^{2\pi} \frac{\partial U'(re^{i\varphi})}{\partial \varphi}\, d\varphi = r \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} U(re^{i\varphi})\, d\varphi;$$

следовательно, интеграл $\int_0^{2\pi} U\, d\varphi$ *не зависит от* r.

4.33. По нашему предположению относительно функции u_0, для нее справедливо сделанное замечание, так что

$$\int_{\alpha} u_0\, d\varphi = \int_{\beta} u_0\, d\varphi.$$

Но то же самое соотношение имеет место и для каждой функции u_n. В самом деле, так как u_n в A однозначна и регулярна и $\beta \sim 0$ на A, то

$$\int_{\beta} du_n' = 0.$$

Это означает, что сопряженная гармоническая функция u_n' в круговом кольце K однозначна, следовательно, по предыдущему замечанию,

$$\int_{\alpha} u_n \, d\varphi = \int_{\beta} u_n \, d\varphi \quad (n \geqslant 1).$$

Точно так же и сопряженные функции v_n' регулярны и однозначны, поскольку функции v_n регулярны и однозначны всюду в B; следовательно,

$$\int_{\alpha} v_n \, d\varphi = \int_{\beta} v_n \, d\varphi \quad (n \geqslant 0).$$

Теперь из краевых условий п. 4.31 вытекает, что

$$\int_{\alpha} u_n \, d\varphi = \int_{\alpha} v_{n-1} \, d\varphi + \int_{\alpha} u_0 \, d\varphi$$

и

$$\int_{\beta} v_n \, d\varphi = \int_{\beta} u_n \, d\varphi - \int_{\beta} u_0 \, d\varphi.$$

Из первого соотношения, в силу предыдущих замечаний, следует, что

$$\int_{\beta} u_n \, d\varphi = \int_{\beta} v_{n-1} \, d\varphi + \int_{\beta} u_0 \, d\varphi,$$

откуда, прибавляя второе соотношение, найдем, что

$$\int_{\beta} (v_n - v_{n-1}) \, d\varphi = 0.$$

Отсюда вытекает, что разность $v_n - v_{n-1}$ равна нулю по крайней мере в одной точке на β, и так как колебание этой разности равно s_n, то имеет место неравенство

$$|v_n - v_{n-1}| \leqslant s_n$$

прежде всего на β, а поэтому, в силу принципа максимума, и всюду в B.

4.34. Покажем теперь, с другой стороны, что мажоранта s_n при $n \to \infty$ стремится к нулю как общий член сходящегося ряда геомет-

рической прогрессии. s_n означает у нас колебание разности $v_n - v_{n-1}$ на β. Из доказываемой ниже леммы 1 следует, что колебание этой разности на α не превосходит qs_n, где $q = \frac{2r_1}{r + r_1} < 1$. Тем самым и колебание разности $u_{n+1} - u_n$ на α не превосходит qs_n, и, по принципу максимума, это справедливо и всюду в A. В частности, это имеет место на β, а так как там $u_{n+1} - u_n = v_{n+1} - v_n$, то

$$s_{n+1} \leqslant qs_n,$$

следовательно,

$$s_{n+1} \leqslant q^n s_1.$$

Отсюда заключаем, что последовательность

$$v_n = \sum_{\nu=1}^{n} (v_\nu - v_{\nu-1})$$

сходится равномерно в B и предельная функция v гармонична в B.

Теперь легко получается сходимость последовательности u_n. Так как разность $u_{n+1} - u_n = v_n - v_{n-1}$ на α не превосходит qs_n, то

$$|u_{n+1} - u_n| \leqslant q^n s_1$$

прежде всего на α, а поэтому, по принципу максимума, всюду в A. Этим обеспечена равномерная сходимость последовательности u_n в A. Предельная функция u регулярно гармонична в A. В пересечении AB имеем $v = u - u_0$, и так как v регулярно гармонична всюду в B, то все поставленные требования выполняются.

4.35. Нам нужно доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть функция $U(z)$ гармонична в круге $|z| \leqslant \rho$, и пусть для $0 \leqslant r \leqslant \rho$*

$$M_r = \max_{|z|=r} U, \quad m_r = \min_{|z|=r} U.$$

Тогда

$$M_r - m_r \leqslant \frac{2r}{\rho + r} (M_\rho - m_\rho).$$

Доказательство. Можно считать, что $U(0) = 0$, иначе нужно было бы только заменить U на $U - U(0)$, что не изменяет колебания $M_r - m_r$. Тогда $M_r \geqslant 0$ и $m_r \leqslant 0$. Так как $U - m_\rho \geqslant 0$, то для $0 \leqslant r \leqslant \rho$

$$U(re^{i\varphi}) - m_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U(\rho e^{i\theta}) - m_\rho] \frac{(\rho^2 - r^2)\, d\theta}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \varphi)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\rho - r}{\rho + r} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U(\rho e^{i\theta}) - m_\rho]\, d\theta = -\frac{\rho - r}{\rho + r} m_\rho.$$

Отсюда, в частности, получаем, что

$$m_r - m_\rho \geqslant -m_\rho \frac{\rho - r}{\rho + r}, \text{ следовательно, } m_r \geqslant m_\rho \frac{2r}{\rho + r}.$$

Повторяя те же рассуждения для $M_\rho - U$, найдем, что

$$M_r \leqslant M_\rho \frac{2r}{\rho + r},$$

и после вычитания получим указанное в лемме неравенство

$$M_r - m_r \leqslant \frac{2r}{\rho + r}(M_\rho - m_\rho).$$

4.36. В п. 4.30 мы ссылались на следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть A — круговая область на поверхности R и K_1 — один из ее кругов, который может также быть и круговым кольцом. Тогда (при соответствующей ориентации) граница области A гомологична на A границе круга K_1.*

Пусть $K_1, K_2, \ldots, K_n$ — круги области A. Для простоты мы предполагаем, что ни один из K_ν, исключая, быть может, K_1, не является круговым кольцом [1]). Круги K_ν занумеруем так, чтобы каждый круг K_n имел общие точки с соединением предыдущих K_ν. Тогда наше утверждение доказывается повторным применением следующей теоремы.

Пусть B — область на поверхности R, граница γ которой состоит из конечного числа кусочно аналитических жордановых кривых без общих точек. Пусть, далее, K — замкнутый круг, лежащий в параметрической окрестности U и имеющий общие точки с B. Тогда граница области B (при подходящей ориентации) гомологична на $B + K$ границе области $B + K$.

4.37. Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда граница k круга K не имеет общих точек с границей γ области B. Тогда или K лежит целиком внутри B, или некоторые граничные кривые области B лежат внутри K. В первом случае границы B и $B + K$ совпадают, во втором случае они отличаются на граничные кривые области B, лежащие внутри K. Так как последние гомологичны в K нулю, то наше утверждение справедливо.

Пусть теперь k имеет общие точки с γ. Их число, в силу аналитичности γ, конечно [2]). Каждая из граничных кривых области B распадается тогда на конечное число жордановых дуг, которые попеременно лежат внутри круга K и в замкнутом его дополнении K'.

---

[1]) В приложениях леммы в п. 4.30 это условие выполняется.

[2]) При этом можно считать, что сюда входят только точки пересечения, ибо возможные „точки соприкосновения" можно устранить с помощью произвольно малых деформаций, не изменяющих гомологические свойства.

Точно так же кривая k распадается на конечное число дуг, лежащих попеременно в области B и в замкнутом ее дополнении B'. Граница области $B+K$ состоит из дуг границы γ, лежащих в K', и дуг границы k, лежащих в B'. Нам нужно, следовательно, показать, что образованный этими дугами (при подходящей ориентации) 1-цикл гомологичен (также подходящим образом ориентированной) границе области B.

Для этого ориентируем граничные кривые (γ) области B так, чтобы при их обходе область B оставалась „слева", т. е. чтобы положительное направление касательной получалось из направления внутренней нормали поворотом на угол $-\pi/2$. Пусть теперь γ_0 — одна из дуг γ_ν границы γ, лежащих в K. Она разбивает K на две области K_1 и K_2; соответственно этому концы γ_0 разбивают k на две дуги k_1 и k_2. Обозначения мы выбираем так, чтобы внутренняя нормаль к γ вдоль γ_0 была направлена в K_1. Каждая из остальных дуг γ_ν лежит либо в K_1, либо в K_2. Каждую из этих дуг мы заменяем той дугой α_ν, принадлежащей или k_1 или k_2, которая соединяет ее концы. Напротив, дугу γ_0 оставляем сначала без изменения. Таким образом получился 1-цикл γ', гомологичный γ.

Теперь мы хотим выяснить, в каком отношении находится γ' к границе $B+K$. Пусть l — произвольная из дуг, на которые k разбивается точками пересечения с γ; допустим, что l лежит, например, на k_1. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — те из дуг α_ν, которые содержат l как часть, причем они занумерованы так, что $\alpha_{\rho+1}$ является частью α_ρ.

Число r — четное или нечетное в зависимости от того, принадлежит ли l области B или B'. Для доказательства рассмотрим дуги γ_ρ, из которых возникли дуги α_ρ. Всякие две из них, следующие друг за другом, ограничивают (вместе с двумя дугами, лежащими на k_1) сегмент, лежащий в K_1, и эти сегменты лежат последовательно то в B, то в B'. Сегмент, ограниченный первой дугой и γ_0, лежит в B (так как l лежит на k_1 и внутренняя относительно B нормаль на γ_0 направлена в K_1), поэтому внутреннюю точку l можно соединить с внутренней точкой B путем, проходящим через все эти сегменты и пересекающим границу γ ровно r раз. Поэтому r должно быть четным или нечетным, в зависимости от того, принадлежит ли l области B или B', как и утверждалось.

Покажем, далее, что всякие две следующие друг за другом дуги α_ρ и $\alpha_{\rho+1}$ определяют на l противоположные ориентации. Пусть P_ρ и Q_ρ означают соответственно начало и конец дуги α_ρ. Тогда достаточно показать, что четыре точки P_ρ, Q_ρ, $P_{\rho+1}$, $Q_{\rho+1}$ расположены на k_1 в порядке Q_ρ, $P_{\rho+1}$, $Q_{\rho+1}$, P_ρ (а не в порядке Q_ρ, $Q_{\rho+1}$, $P_{\rho+1}$, P_ρ). Допустим, например, что сегмент, определяемый γ_ρ и $\gamma_{\rho+1}$, лежит в B. Тогда жорданова кривая $\gamma_\rho\alpha_\rho^{-1}$ (в плоскости параметрического круга K) положительно ориентирована. Будем ее теперь пробегать в направлении этой ориентации и обозначим через S первую

из двух точек $P_{\rho+1}$ и $Q_{\rho+1}$, которая при этом встретится. Тогда, если в точке S положительное направление касательной к k есть τ_k и положительное направление нормали к γ есть ν_γ, то $\tau_k + \pi/2 < \nu_\gamma < \tau_k + 3\pi/2$. Из направления ν_γ мы получаем положительное направление τ_γ касательной к γ (в силу выбора ориентации γ) с помощью соотношения $\tau_\gamma = \nu_\gamma - \pi/2$. Следовательно, $\tau_k < \tau_\gamma < \tau_k + \pi$, и это означает (так как k в параметрической плоскости имеет положительную ориентацию), что γ в точке S *вступает* в область B. Значит, $S = P_{\rho+1}$, т. е., действительно, рассматриваемые точки расположены в порядке $Q_\rho P_{\rho+1} Q_{\rho+1} P_\rho$.

Из обоих доказанных выше свойств цикла γ' следует:

Если на γ' соединить вместе все 1-симплексы (после подходящего подразделения), лежащие на дуге l, то они все уничтожаются, если l принадлежит B; если же l не принадлежит B, то остается ровно один; другими словами, цикл γ' состоит из всех дуг l, лежащих в B'.

Аналогично доказывается, что для дуги l, лежащей на k_2, справедливо как раз обратное: такая дуга тогда и только тогда остается в γ', когда она принадлежит B. Если теперь заменить еще γ_0 на дугу k_2, то из γ' получится новый цикл γ''; он содержит дугу l (независимо от того, лежит ли l на k_1 или на k_2) тогда и только тогда, когда она принадлежит B'. В остальном γ'' состоит из дуг γ, лежащих в K'. Следовательно, γ'' состоит в точности из граничных дуг области $B + K$. Этим лемма доказана.

4.38. Доказательство теоремы Римана об отображении для эллиптического случая. Предыдущее общее построение приводит, в частности, непосредственно к доказательству той части основной теоремы теории конформных отображений, которая относится к замкнутым поверхностям. Мы сформулируем ее следующим образом.

Всякая замкнутая риманова поверхность R, у которой одномерная группа гомологий тривиальна, конформно эквивалентна числовой сфере.

Доказательство. В построении п. 4.29 выберем в качестве сингулярной части $u_0 = \operatorname{Re}\frac{1}{z}$. Тогда условие п. 4.30 выполняется и соответствующая гармоническая функция u, построенная по методу Шварца — Неймана, является однозначной и гармонической на всей поверхности R, исключая точку $z = 0$, где она ведет себя как u_0. В силу сделанного предположения об одномерной группе гомологий поверхности R, сопряженная гармоническая функция u' также однозначна на R, следовательно, то же самое справедливо для аналитической функции $u + iu' = w$, которая регулярна всюду, кроме $z = 0$, где она имеет полюс с главной частью $1/z$. Она является „рациональной функцией первого порядка“ на R и, согласно п. 3.10, отображает эту поверхность топологически и конформно на w-сферу, что и требовалось доказать.

§ 6. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЖОРДАНОВОЙ ОБЛАСТИ

4.39. Жордановы области. Для дальнейшего нам достаточно было бы знать решение первой краевой задачи для „круговых областей". Однако ввиду большого принципиального значения краевой задачи мы в заключение этого параграфа рассмотрим некоторые общие области, для которых разрешима краевая задача п. 4.1. При этом мы будем также иметь возможность подробнее остановиться на некоторых понятиях, важных для теории потенциала.

Под *жордановой областью* мы понимаем подобласть G римановой поверхности с границей Γ, такую, что множество $G+\Gamma$ *компактно* и Γ состоит из конечного числа непересекающихся *жордановых кривых*. Чтобы решить краевую задачу для жордановой области, полезно, как и в случае круговых областей, рассмотреть сначала кусочно постоянные граничные значения $f(\zeta)$.

4.40. Гармоническая мера. Пусть α — замкнутая или открытая дуга жордановой кривой γ границы Γ; α может и совпадать с γ. Под *гармонической мерой* $\omega(z, \alpha, G)$ дуги α относительно области G в точке z понимают решение первой краевой задачи с граничными значениями 1 на α и 0 на дополнительной части β границы Γ. Гармоническая мера, если она существует, определяется однозначно. Если α — пустое множество или одна точка, то полагают $\omega(z, \alpha, G)=0$. Для всей границы $\alpha=\Gamma$ $\omega(z, \alpha, G)=1$. Во всех остальных случаях $0<\omega<1$ в G.

4.41. Аддитивность. Предположим, что гармоническая мера существует для каждой граничной дуги α, и пусть $\alpha_1=\overset{\frown}{\zeta_1\zeta_2}$ и $\alpha_2=\overset{\frown}{\zeta_2\zeta_3}$ — две граничные дуги без общих внутренних точек. Тогда

$$\omega(z, \alpha_1)+\omega(z, \alpha_2)=\omega(z, \alpha_1+\alpha_2).$$

В самом деле, разность левой и правой частей этого равенства есть ограниченная гармоническая в G функция, равная нулю на Γ, за исключением, быть может, точек ζ_1, ζ_2, ζ_3. По принципу максимума и минимума, она, следовательно, тождественно равняется нулю.

Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольные дуги на Γ без общих внутренних точек, то гармоническую меру множества $\alpha=\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu$ можно определить как сумму

$$\omega(z, \alpha)=\sum_{\nu=1}^{n}\omega(z, \alpha_\nu).$$

Эта мера является ограниченной гармонической функцией ($0\leqslant\omega<1$) в области G с граничным значением 1 в каждой внутренней точке

множества α и граничным значением 0 в каждой внутренней точке его дополнения $\beta = \Gamma - \alpha$.

Определенная таким образом мера аддитивна для конечного числа слагаемых.

4.42. Непрерывность. Рассмотрим теперь параметрическое представление $P = P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ жордановой кривой $\gamma \in \Gamma$. Имеем $P(t') \neq P(t'')$ для $t' < t''$, исключая $t' = 0$ и $t'' = 1$. Пусть $P(t_0)$ — произвольная точка γ. Пусть $\delta > 0$ и γ_δ — дуга на γ, для точек которой $|t - t_0| \leqslant \delta$. При $\delta \to 0$ дуга γ_δ стягивается в точку $P(t_0)$. Мы утверждаем, что

$$\omega(z, \gamma_\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0$$

в каждой точке $z \in G$.

В самом деле, для фиксированной точки z внутри G величина $\omega(z, \gamma_\delta)$ монотонно убывает вместе с δ, так как гармоническая мера аддитивна и $\omega > 0$. Отсюда следует, что при $\delta \to 0$ она сходится к неотрицательному числу $\omega_0(z)$. По принципу Харнака, сходимость равномерна в каждой компактной подобласти G и предельная функция $\omega_0(z)$ гармонична внутри G. Так как в отличной от $P(t_0)$ граничной точке ζ все $\omega(z, \gamma_\delta)$, начиная с некоторого δ, равны нулю, то из монотонности последовательности следует, что и $\omega_0(z) \to 0$ при $z \to \zeta$. Наконец, функция $\omega_0(z)$ ограничена $(0 \leqslant \omega_0 < 1)$, поэтому из обобщенного принципа максимума следует, что $\omega_0(z) \equiv 0$, как это и утверждалось.

4.43. Общая краевая задача для жордановой области. Если гармоническая мера известна для каждой граничной дуги α, то краевая задача п. 4.1 может быть решена для любых ограниченных и, за исключением, быть может, конечного числа точек, непрерывных граничных значений $f(\zeta)$. Это очевидно, если функция f кусочно постоянна на Γ. В самом деле, если f равна постоянной f_μ на дуге α_μ, то решение, очевидно, дается выражением

$$u(z) = \sum_\mu f_\mu \omega(z, \alpha_\mu).$$

Это позволяет написать решение задачи при указанных выше общих предположениях относительно f. Так как гармоническая мера $\omega(\zeta, z)$ $(\zeta \in \gamma)$ при фиксированном z является монотонной функцией параметра граничной кривой [1]), то интеграл Римана — Стильтьеса

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) \tag{4.8}$$

[1]) $\omega(\zeta, z)$ обозначает гармоническую меру дуги $\overset{\frown}{\zeta_0\zeta}$, $\zeta_0 = P(t_0)$, $\zeta = P(t)$.— *Прим. перев.*

имеет смысл. Если мы воспользуемся доказанной в п. 4.42 равномерной непрерывностью $\omega(\zeta, z)$, то получим, что интегральные суммы интеграла (4.8) сходятся равномерно в каждой замкнутой области, лежащей внутри G [даже если $f(\zeta)$ имеет конечное число точек разрыва]. Так как каждая интегральная сумма является гармонической функцией от z, то, по принципу Харнака, это же справедливо и для интеграла (4.8).

Интеграл

$$u(z) = \int_{\Gamma} f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) = \sum_{\mu} \int_{\alpha_\mu} f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) \tag{4.9}$$

представляет теперь решение краевой задачи. Для доказательства этого остается только показать, что определяемая (4.9) функция в точках непрерывности $f(\zeta)$ имеет граничные значения $f(\zeta)$. Но это получается непосредственным перенесением доказательства для случая круга (см. п. 4.11).

4.44. Построение гармони́ческой меры. Формула (4.9), решающая задачу, предполагает знание гармонической меры $\omega(\zeta, z)$. Для круговой области она существует, согласно п. 4.15. Теперь путем предельного перехода гармоническая мера будет построена для произвольной жордановой области [1]) $G+\Gamma$.

Для этого предположим сначала, что граница Γ области G может быть разбита на две взаимно дополнительные замкнутые части α и β без общих точек. Тогда мы исчерпываем G последовательностью круговых областей $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$, что, в силу свойства счетности, возможно для каждой римановой поверхности, следовательно, и для G. Пусть $K_1, K_2, \ldots$ — конечное число (замкнутых) параметрических окрестностей, покрывающих α и не имеющих общих точек с β, и K — их соединение. Тогда, начиная с некоторого $n = n_0$, граница области G_n распадается на две замкнутые части α_n и β_n без общих точек, так что α_n лежит в K, в то время как β_n лежит вне K. Если G_{mn} означает соединение G_m с пересечением $G_n K$ $(n > m > n_0)$, то G_{mn} есть круговая область и $G_{mn} \subset G_{mn+1} \subset \ldots \subset G_{mn+p} \subset \ldots$. Граница области G_{mn} состоит из α_n и β_m.

Образуем теперь гармоническую меру ω_{mn} дуги α_n относительно области G_{mn}. Так как ω_{mn+1} на β_m принимает равные с ω_{mn} значения, а на α_n во всяком случае не большие, то, по принципу максимума, $\omega_{mn} \geqslant \omega_{mn+1}$. Следовательно, при $n \to \infty$ существует предел $\omega_m = \lim \omega_{mn}$, и ω_m, по принципу Харнака, гармонична в области $G^m = \sum_{n=m+1}^{\infty} G_{mn}$. Далее, $0 \leqslant \omega_m \leqslant 1$.

---

[1]) Мы допускаем при этом, что Γ содержит также конечное число (незамкнутых) изолированных *жордановых дуг* α.

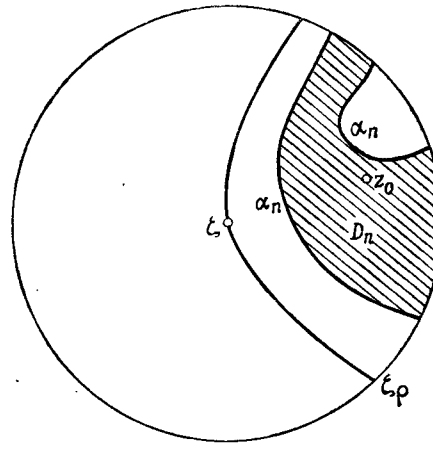
4.45. Покажем, что ω_m есть гармоническая мера дуги α относительно области G^m. То, что ω_m равна нулю на β_m, очевидно, так как $\omega_{mn}=0$ на β_m и последовательность ω_{mn} монотонно убывает. Соотношение $\omega_m \to 1$ при $z \to \alpha$ получается из следующих соображений.

Пусть ζ — произвольная точка на α и K_ζ — параметрический круг, содержащий ζ. Тогда можно выбрать столь малое число $\rho > 0$, что на окружности $|z-\zeta|=\rho$ лежит точка ζ_ρ, обладающая тем свойством, что дуга $\overset{\frown}{\zeta\zeta_\rho}$, принадлежащая α, пробегает внутри круга $|z-\zeta|<\rho$ (исключая точку ζ_ρ).

Для оценки функции $\omega_m(z)$ введем вблизи ζ вспомогательную переменную $t=\ln(z-\zeta)$ и обозначим через $\omega(t)$ гармоническую меру сегмента AB длины 2π, лежащего на прямой $\ln|z-\zeta|=\ln\rho$, относительно полуплоскости $\operatorname{Re}(t) \leqslant \ln\rho$, причем ординату точки A возьмем равной $\arg\zeta_\rho \pmod{2\pi}$. Очевидно, что

$$\omega(t) \leqslant \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\ln\frac{\rho}{|z-\zeta|}},$$

где справа берется главная ветвь arctg (ср. п. 4.12).



Фиг. 7.

$u(z)=1-\omega(\ln(z-\zeta))$ для $0<|z-\zeta|\leqslant\rho$ гармонична, однако не однозначна. Но в односвязной области G_ζ, ограниченной $|z-\zeta|<\rho$ и $\zeta\zeta_\rho$, каждая ветвь $u(z)$ однозначна; пусть u означает теперь ту ветвь, которая на границе $|z-\zeta|=\rho$ $(z\neq\zeta_\rho)$ равна нулю. Во всех остальных точках области G_ζ тогда $0<u\leqslant 1$.

Функция u является минорантой для ω_m при $|\zeta-z|<\rho$, $z\in G^m$. В самом деле, если z_0 — точка этого множества, то существует столь большое n_0, что $z_0\in G_{mn}$ для $n>n_0$. Пусть D_n — та область пересечения G_{mn} с $|\zeta-z|<\rho$, которая содержит точку z_0; тогда $D_n\subset G_\zeta$. Граница области D_n состоит, во-первых, из точек, принадлежащих окружности $|z-\zeta|=\rho$, и, во-вторых, из точек, принадлежащих α_n (фиг. 7). В первых точках $\omega_{mn}\geqslant 0$ и $u=0$, следовательно, $\omega_{mn}\geqslant u$. В последних $\omega_{mn}=1$ и $u\leqslant 1$, следовательно, снова $\omega_{mn}\geqslant u$. Поэтому, по принципу максимума, $\omega_{mn}\geqslant u$ в D_n, следовательно, и для $z=z_0$. Отсюда

$$1\geqslant\omega_{mn}(z_0)\geqslant u(z_0),$$

и так как это справедливо для всех n, то

$$1 \geqslant \omega_m(z_0) \geqslant u(z_0) = 1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\ln\frac{\rho}{|z_0-\zeta|}}$$

для всех точек $z_0 \in G^m$, если $|z_0-\zeta| < \rho$. Это неравенство показывает, что $\omega_m(z) \to 1$ при $z \to \zeta$, что и требовалось доказать.

4.46. Показав, что ω_m — гармоническая мера α относительно G^m, мы переходим теперь к пределу при $m \to \infty$. Функция ω_m монотонно возрастает и сходится к функции $\omega = \lim \omega_m$ $(0 \leqslant \omega \leqslant 1)$, гармонической в G.

Легко теперь заключить, что ω — гармоническая мера α относительно G, ибо ω непрерывна на Γ, причем равна 1 на α и 0 на β. Первое следует из того, что $\omega_m = 1$ на α и для каждого z вместе с m монотонно возрастает, а второе доказывается повторением рассуждений п. 4.45.

4.47. Предыдущими рассмотрениями проведено построение гармонической меры ω_α для того случая, когда α — изолированная часть границы. Построение ω_α для произвольной части границы получается следующим образом.

Выбираем на R компактную круговую область D с границей, состоящей из конечного числа жордановых кривых δ, так, что $G + \Gamma \subset D$; если поверхность R компактна, то можно взять $D = R$. Пусть α — граничная дуга G, составляющая часть замкнутой граничной кривой γ_ν, входящей в Γ. Пусть P и Q $(P \neq Q)$ — концы α. Заменяем теперь α лежащей целиком внутри нее дугой $P'Q' = \alpha' \subset \alpha$ и удаляем части PP', QQ', принадлежащие α. Тогда существует вполне определенная жорданова область D' $(G \subset D' \subset D)$, ограниченная α', $\beta = \Gamma - \alpha$ и кривыми δ.

Согласно п. 4.44, существует гармоническая мера ω' дуги α' относительно D'. При предельном переходе $P' \to P$, $Q' \to Q$ гармоническая мера ω' монотонно возрастает и сходится к функции ω $(0 \leqslant \omega \leqslant 1)$, гармонической в G. В каждой внутренней точке дуги α функция ω имеет граничное значение, равное единице; напротив, в каждой внутренней точке β — граничное значение, равное нулю, что снова доказывается, как в п. 4.45.

Следовательно, ω — гармоническая мера α относительно G. Этим доказано ее существование для произвольной граничной дуги.

Таким образом, все краевые задачи, рассмотренные выше для круговых областей, разрешимы и для произвольных жордановых областей.

Глава V

ЗАМКНУТЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

Первая задача теории аналитических и гармонических функций на заданной римановой поверхности состоит в том, чтобы определить и исследовать простейшие их классы. При этом простыми следует считать те функции, которые отличаются четкими свойствами однозначности и регулярности. Поэтому в первую очередь естественно рассматривать функции и ковариантны, которые с точностью до не более чем конечного числа полюсов регулярны на всей поверхности. Таким образом, для замкнутой поверхности мы прежде всего имеем дело с рациональными функциями и абелевыми дифференциалами; их свойства будут коротко изложены в этой главе.

Для теории функций на замкнутой римановой поверхности требуются, во-первых, общие результаты гл. IV, используемые для построения абелевых дифференциалов. Во-вторых, требуется специальное *представление замкнутой поверхности с помощью многоугольника*. То, что каждая замкнутая риманова поверхность может быть представлена таким образом, является результатом теории униформизации (гл. VI и VIII) и в настоящей главе принимается без доказательства.

§ 1. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ, ПРЕДСТАВЛЕННЫЕ С ПОМОЩЬЮ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

5.1. Многоугольники с аналитическим соответствием сторон. Согласно п. 2.100, из каждого многоугольника числовой плоскости, стороны которого попарно связаны топологическим соответствием, возникает двумерное многообразие R. Аналогичным образом можно из многоугольника получить риманову поверхность, правда, только при некоторых дополнительных условиях, которые будут выяснены дальше.

Пусть π — многоугольник t-плоскости, стороны которого являются аналитическими дугами. Пусть эти стороны связаны попарно топологическим соответствием, *аналитическим* в каждой *внутренней* точке соответствующей стороны.

Согласно п. 2.100, из π отождествлением эквивалентных точек получается во всяком случае двумерное многообразие R. Для того, чтобы оно было *римановой поверхностью*, нужно сделать

дополнительное предположение о соответствии сторон. Действительно, риманова поверхность всегда ориентируема, согласно же п. 2.102, при отождествлении сторон многоугольника π такая поверхность возникает только тогда, когда после ориентации многоугольника каждая сторона отображается так, что ее начало (конец) переходит в конец (начало) стороны-образа. Поэтому мы сделаем далее это предположение об аналитическом соответствии сторон и покажем, что тогда из π действительно возникает (замкнутая или открытая) *риманова поверхность*.

5.2. Мы хотим каждой точке пространства R поставить в соответствие параметрическую окрестность так, чтобы соотношения соседства стали конформными отображениями.

Предположим сначала, что $t = t_0$ — внутренняя точка многоугольника π; выберем ρ_0 столь малым, чтобы круг $|t - t_0| < \rho_0$ лежал еще внутри π, и отобразим его конформно с помощью функции

$$z = \frac{t - t_0}{\rho_0}$$

на единичный круг z-плоскости. Если тогда t_1 — другая внутренняя точка из π и ее параметрическая окрестность $|t - t_1| < \rho_1$ имеет непустое пересечение с параметрической окрестностью $|t - t_0| < \rho_0$ точки t_0, то соответствующее соотношение соседства $(z \longleftrightarrow z^*)$ определяется уравнением

$$\rho_0 z - \rho_1 z^* = -t_0 + t_1,$$

следовательно, оно является конформным отображением 1-го рода.

Пусть теперь t_0 — внутренняя точка стороны a многоугольника π и t_0' — эквивалентная t_0 точка на соответствующей стороне a'. Сторона a является аналитическим образом отрезка $\overline{a}$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$; не будет ограничением общности, если мы предположим, что и для a' прообразом является тот же отрезок $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и что точки на a и a', соответствующие одному и тому же значению λ, являются эквивалентными точками. Пусть точке $t = t_0$ соответствует значение параметра λ_0 $(0 < \lambda_0 < 1)$. В силу аналитичности отображения $\overline{a} \to a$, в комплексной λ-плоскости существует столь малый круг $\overline{K}_0$ с центром в точке λ_0, что отображение $\overline{a} \to a$ может быть расширено до конформного отображения α этого круга на окрестность точки $t = t_0$. Точно так же можно и отображение $\overline{a} \to a'$ дополнить до конформного отображения круга $\overline{K}_0$ (в случае необходимости, после еще одного его уменьшения) на окрестность точки $t = t_0'$. Пусть теперь $\overline{H}_0$ (соответственно $\overline{H}_0'$) означает тот полукруг круга $\overline{K}_0$, который переходит в „полуокрестность“ H_0 (соответственно H_0') точки t_0 (соответственно точки t_0') в π. Мы покажем, что эти два полукруга не совпадают, следовательно, вместе они составляют весь круг $\overline{K}_0$.

Для этого рассмотрим граничную кривую γ_0 области H_0 и ориентируем ее так, чтобы на дуге, лежащей на a, ориентация совпала с ориентацией π. Если тогда t_1 — внутренняя точка H_0, то индекс кривой γ_0 и границы γ многоугольника π относительно точки t_1 совпадают (т. е. оба они равны либо $+1$, либо -1):

$$u(\gamma, t_1) = u(\gamma_0, t_1).$$

Аналогично, ориентируем граничную кривую γ_0' области H_0' в соответствии с ориентацией a' (определенной ориентацией π). Тогда для внутренней точки t_1' области H_0'

$$u(\gamma, t_1') = u(\gamma_0', t_1').$$

Так как $u(\gamma, t_1') = u(\gamma, t_1)$, то из предыдущих равенств вытекает, что

$$u(\gamma_0', t_1') = u(\gamma_0, t_1). \tag{5.1}$$

Допустим, что $\overline{H}_0 \equiv \overline{H}_0'$; тогда $\varkappa = \alpha'\alpha^{-1}$ будет конформным отображением 1-го рода H_0 на H_0'. При этом, по нашему предположению о соответствии сторон, лежащая на a дуга границы γ_0 переходит в лежащую на a' дугу границы γ_0' с обратной ориентацией; поэтому образ $\varkappa(\gamma_0)$ границы γ_0 есть противоположно ориентированная граница γ_0'. Следовательно, для внутренней точки t_1' области H_0'

$$u[\varkappa(\gamma_0), t_1'] = -u(\gamma_0', t_1').$$

С другой стороны, для каждой внутренней точки t_1 области H_0, в силу того, что $\varkappa$ — конформное отображение 1-го рода,

$$u[\varkappa(\gamma_0), \varkappa(t_1)] = u(\gamma_0, t_1),$$

и из обоих равенств следует, если в первом из них взять $\varkappa(t_1)$ в качестве t_1',

$$u[\gamma_0', \varkappa(t_1)] = -u(\gamma_0, t_1),$$

в противоречие с (5.1).

Следовательно, $\overline{H}_0 \not\equiv \overline{H}_0'$ и отображением

$$\beta = \begin{cases} \alpha^{-1} & \text{в } H_0, \\ \alpha'^{-1} & \text{в } H_0' \end{cases}$$

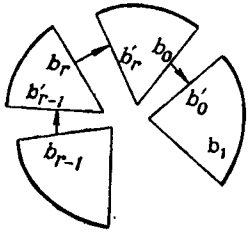
устанавливается конформное соответствие между окрестностью $H_0 + H_0'$ пары точек t_0, t_0' и кругом $\overline{H}_0 + \overline{H}_0' = \overline{K}_0$. Тем самым и все соотношения соседства становятся конформными.

Пусть, наконец, $t = t_0$ — вершина π и t_ν ($\nu = 0, \ldots, r$) — эквивалентные ей вершины. Тогда, согласно п. 2.101, около каждой вершины t_ν можно выделить сектор σ_ν с t_ν в качестве вершины так, что, при соответствующей нумерации, в двух следующих друг за

другом секторах σ_ν, $\sigma_{\nu+1}$ ($\nu = 1, \ldots, r \pmod r$) два „радиуса“ b_ν и b'_ν соответствуют друг другу.

Если у этих секторов отождествить каждые два „радиуса“ b_ν и b'_ν, то получится гомеоморфная кругу окрестность K точки P, определяемой классом вершин (t_ν). Теперь задача состоит в том, чтобы превратить ее в параметрическую окрестность с *конформными* соотношениями соседства.

5.3. Отображение окрестности вершины с выколотой вершиной. Представим себе, что из каждого сектора σ_ν удалили точку t_ν, после чего дуги b_ν и b'_ν отождествили, как раньше (фиг. 8). Тогда на поверхности R получается некоторая область $\dot{K}$; она двусвязна, ибо возникает из гомеоморфной кругу окрестности K удалением точки P. Далее, $\dot{K}$ уже есть риманова поверхность. Поэтому, по теореме Римана об отображении, которая будет доказана позднее (гл. VI, VIII), $\dot{K}$ конформно эквивалентна либо области $0 < |z| < \infty$, либо области $r < |z| < 1$ $(0 < r < 1)$, либо области $0 < |z| < 1$.



Фиг. 8.

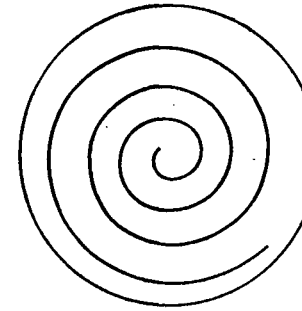
Первый случай исключается, так как если бы $z = z(t)$ было отображение $\dot{K}$ на область $0 < |z| < \infty$, то функция $z(t)$ на всей кусочно-аналитической граничной кривой области K имела бы граничное значение 0 или ∞, что для отличной от постоянной аналитической функции невозможно.

Напротив, оба других случая могут иметь место. Для случая кругового кольца это будет показано на примере в п. 5.5; для другого случая $(0 < |z| < 1)$ это очевидно.

5.4. Предельные точечные вершины и предельные круговые вершины. Вершину многоугольника π мы называем *предельной круговой вершиной* (Grenzkreisecke) или *предельной точечной вершиной* (Grenzpunktecke) в зависимости от того, имеет ли место второй или третий случай. Это различие не зависит от выбора (топологической) окрестности K вершины: если K_1 и K_2 — две такие окрестности, то для них одновременно получается либо случай предельного круга, либо случай предельной точки. В самом деле, допустим, что окрестность K_1 ведет к предельной точке. Тогда в качестве конформного образа $\dot{K}_1$ имеем $0 < |z_1| < 1$. Пусть $r < |z_2| < 1$ $(r \geqslant 0)$ — соответствующий конформный образ $\dot{K}_2$. Тогда z_2 в области $0 < |z_1| < 1$ есть однозначная аналитическая функция от z_1 и $|z_2| \to r$ при $z_1 \to 0$. Следовательно, функция $z_2(z_1)$ в окрестности $z_1 = 0$ ограничена, и

тем самым $z_1 = 0$ — устранимая особенность. Отсюда вытекает, что $r = 0$, так как иначе обратная функция $z_1 = z_1(z_2)$ на $|z_2| = r$[1]), следовательно, и всюду, имела бы постоянное значение, что в нашем случае невозможно. Значит, и K_2 ведет к случаю предельной точки. Этим наше утверждение доказано[2]).

5.5. Пример предельной круговой вершины. В единичном круге $|z| < 1$ проведем разрез по аналитической кривой c, имеющей форму спирали, выходящей из $z = 0$ и монотонно асимптотически приближающейся к единичной окружности $|z| = 1$ (фиг. 9). Если круг с разрезом конформно отобразить на полный единичный круг в плоскости t, то из теоремы о соответствии границ при конформном отображении (см., например, Каратеодори [2][3]) следует, что обоим берегам разреза соответствуют две дополнительные друг к другу дуги a и a' с общими концами A и B; пусть, например, $z = 0$ соответствует точке A. Если в круге с разрезом устремить z к окружности $|z| = 1$, то образ t будет стремиться к точке B. Внутренние точки дуг a и a' связаны друг с другом аналитическим преобразованием. Отождествляя эквивалентные точки этих дуг, получаем риманову поверхность, конформно эквивалентную области $0 < |z| < 1$. При этом окрестности точки B соответствует круговое кольцо $r < |z| < 1$. Следовательно, окрестность точки B с выколотой точкой конформно эквивалентна круговому кольцу.



Фиг. 9.

5.6. Замыкание предельной точечной вершины. В случае предельной точечной вершины можно расширить отображение K на область $0 < |z| < 1$ до топологического и (исключая P) конформного отображения окрестности K на круг $|z| < 1$, ставя в соответствие точке P точку $z = 0$. Тогда соотношения соседства со всеми ранее

---

[1]) Доказательство можно вести в предположении, что $K_2 \subset K_1$.— *Прим. перев.*

[2]) Интересной задачей является нахождение добавочных ограничений на аналитические фуикции соответствия между сторонами, обеспечивающих случай предельной точки. Критерий, применимый к этому вопросу, имеется у П. Ю. Мирберга [2]. В одной работе, которая скоро будет опубликована, мы останавливаемся на этом вопросе подробнее.

[Отображая σ_1 конформно или квазиконформно на круговые секторы, заполняющие круг, приходим к одной из задач на конформное склеивание. См. Л. И. Волковыский [1**], гл. IV, § 11.— *Прим. перев.*]

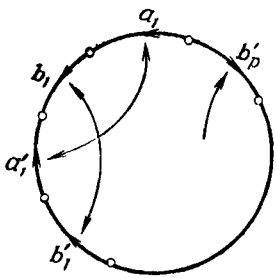
[3]) Или А. И. Маркушевич [1**], гл. V, § 3. — *Прим. перев.*

построенными параметрическими окрестностями будут конформными; нужно только окрестность второй точки выбирать столь малой, чтобы она не содержала точку P.

Если многоугольник π имеет только предельные точечные вершины, то наше построение закончено: пространство R является (замкнутой) римановой поверхностью.

Если, напротив, π имеет хотя бы одну предельную круговую вершину P, то хотя $R-P$ и является римановой поверхностью, ее нельзя посредством точки P дополнить до римановой поверхности R. Этим вопрос п. 5.1 выяснен полностью.

5.7. Обращение. Согласно п. 5.6, многоугольник с одними лишь предельными точечными вершинами представляет замкнутую риманову поверхность R. Обратно, из теории униформизации (гл. VIII, § 4) следует, что каждую замкнутую риманову поверхность можно представить в виде многоугольника с одними лишь предельными точечными вершинами, и даже в виде многоугольника специального вида, так называемого *нормального многоугольника* (Normalpolygon):



Фиг. 10.

Для каждой (отличной от числовой сферы) замкнутой римановой поверхности R существует такой $4p$-угольник числовой плоскости (нормальный многоугольник) с аналитическими сторонами, связанными попарно друг с другом аналитическим соответствием согласно схеме (фиг. 10)

$$a_1 b_1 a'_1 b'_1 \ldots a_p b_p a'_p b'_p \quad (p \geqslant 1), \qquad (p)$$

так, что при отождествлении эквивалентных сторон получается риманова поверхность, конформно эквивалентная R.

5.8. Род поверхности. Число p однозначно определяется поверхностью R; оно находится в простой связи с характеристикой χ поверхности R. Именно, если триангулировать поверхность, разбивая подходящим образом ее нормальный многоугольник π на треугольники, то для знакочередующейся суммы $-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2$ простым подсчетом получаем значение

$$-\alpha_0+\alpha_1-\alpha_2=2p-2.$$

С другой стороны, согласно п. 3.49, эта сумма равна характеристике χ поверхности R, так что $\chi=2p-2$. Следовательно, число p однозначно определяется характеристикой χ поверхности R, тем самым и поверхностью R. Оно называется *родом* поверхности R.

Из соотношения $\chi=2p-2$ видно, что характеристика замкнутой римановой поверхности всегда равна четному числу.

Так как числовая сфера имеет характеристику $\chi = -2$, то ей, согласно предыдущему соотношению, ставят в соответствие род $p = 0$.

Принимая без доказательства теорему п. 5.7, мы можем, следовательно, при дальнейшем изучении замкнутых римановых поверхностей всегда предполагать, что они представлены в нормальной форме (p).

5.9. Базис гомологий. В § 2 гл. II были определены группы гомологий поверхности, однако не было дано способа их построения. Как будет показано ниже, одномерную группу гомологий замкнутой поверхности можно построить с помощью нормального многоугольника.

Пусть R — замкнутая риманова поверхность, представленная $4p$-угольником в форме (p). $2p$ сторон a_ρ, b_ρ многоугольника π представляют на R $2p$ 1-циклов. Мы покажем, что они образуют базис одномерной группы гомологий поверхности R.

Это утверждение означает, во-первых, что каждый 1-цикл на R гомологичен некоторой линейной комбинации этих циклов и, во-вторых, что эти $2p$ циклов гомологично независимы. Первое свойство будет доказано сейчас, для доказательства же второго нам нужны результаты следующего параграфа (см. п. 5.16).

Итак, пусть z^1 — произвольный 1-цикл на R. Не будет ограничением общности, если мы предположим, что 1-симплексы цикла z^1 являются аналитическими дугами; этого всегда можно достигнуть, не изменяя класса гомологий цикла z^1.

Если теперь z^1 лежит целиком внутри многоугольника π, то внутри π, тем самым и на R, он гомологичен нулю.

Если z^1 лежит на границе π, то он, очевидно, гомологичен линейной комбинации сторон.

Если же, наконец, z^1 не лежит целиком ни внутри, ни на границе π, то (в силу аналитичности дуг) существует конечное число дуг цикла z^1, которые, исключая их концы, лежат внутри π. Заменяя каждую такую дугу z^1 дугой с теми же концами, но лежащей на границе π, получим гомологичный z^1 цикл, расположенный целиком на граничной кривой. Этим последний случай сводится ко второму.

5.10. Как будет выяснено в п. 5.16, $2p$ 1-циклов, представленные сторонами многоугольника π, на R гомологично независимы. Таким образом, справедливо утверждение:

Одномерная группа гомологий замкнутой римановой поверхности рода p есть абелева группа с $2p$ образующими. $2p$ 1-циклов a_ρ, b_ρ составляют базис этой группы.

Построенный таким образом базис a_ρ, b_ρ называют *каноническим базисом гомологий*, а циклы a_ρ и b_ρ — *сопряженными* друг к другу.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

5.11. Определение. Пусть R — произвольная замкнутая риманова поверхность. Под *абелевым дифференциалом первого рода* понимают дифференциал $\varphi\,dz$, где $\varphi(z)$ — однозначная и всюду без исключения регулярная аналитическая коварианта на R. Интегрированием получается соответствующий *абелев интеграл первого рода*

$$\Phi(z) = \int \varphi(z)\,dz,$$

представляющий функцию, аналитическую на всей поверхности R. Эта функция в общем случае не однозначна на R. Ее многозначности характеризуются гомологическими свойствами путей интегрирования. Значение интеграла $\int \varphi\,dz$ вдоль замкнутого пути c, не гомологичного нулю, называется *периодом* дифференциала.

Если $c_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$[1] — базис одномерной группы гомологий поверхности R, то каждый замкнутый путь c гомологичен некоторой линейной комбинации базисных путей,

$$c \sim \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu c_\nu,$$

где m_ν — целые числа (см. гл. II, § 2). Поэтому период φ вдоль c выражается через базисные периоды в виде

$$\int_c \varphi\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \int_{c_\nu} \varphi\,dz.$$

Если $c_\nu^* (\nu = 1, \ldots, n)$ — другой базис гомологий, то периоды преобразуются как базисные циклы, так как из

$$c_\mu^* \sim \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\mu\nu} c_\nu \tag{5.2}$$

следует, что

$$\int_{c_\mu^*} \varphi\,dz = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_{\mu\nu} \int_{c_\nu} \varphi\,dz.$$

5.12. Теорема единственности. Дифференциал первого рода, у которого все базисные периоды *действительны*, *тождественно равен нулю*, так как в этом случае мнимая часть функции $\int \varphi\,dz$

[1] n конечно, так как если R представить $4p$-угольником, то, согласно п. 5.9, $n \leqslant 2p$.

однозначна и регулярна на всей поверхности и поэтому постоянна, следовательно, $\varphi \equiv 0$. Точно так же тождественно равен нулю дифференциал первого рода с чисто мнимыми базисными периодами. Отсюда вытекает, что дифференциал первого рода однозначно определяется как действительными, так и мнимыми частями своих периодов.

5.13. Линейное пространство дифференциалов первого рода. Если φ и ψ — абелевы коварианты первого рода, то это же справедливо и для их линейной комбинации $\lambda\varphi + \mu\psi$ с комплексными множителями λ и μ. Следовательно, дифференциалы первого рода образуют некоторое линейное пространство L. В дальнейшем нас будет интересовать размерность этого пространства, т. е. максимальное число линейно независимых дифференциалов.

Пусть n — размерность одномерной группы гомологий, т. е. число базисных циклов в произвольном базисе гомологий α_ν. Пусть A_ν означает период коварианты φ вдоль α_ν:

$$A_\nu = \int_{\alpha_\nu} \varphi\, dz. \tag{5.3}$$

Если A_ν рассматривать как компоненты n-мерного комплексного вектора, то соотношением (5.3) (при фиксированном базисе) задается линейное отображение пространства L дифференциалов первого рода в комплексное n-мерное векторное пространство K^n. При этом не все векторы из K^n выступают в качестве образов, и, следовательно, образ пространства L представляет собой некоторое линейное подпространство K^n. В самом деле, между компонентами вектора-образа имеют место некоторые соотношения; в частности, мнимые части компонент A_ν однозначно определяются их действительными частями. Действительно, если

$$A_\nu = A'_\nu + iA''_\nu,$$

то из $A'_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$) следует, согласно п. 5.12, что $\varphi \equiv 0$, тем самым и $A''_\nu = 0$ ($\nu = 1, \ldots, n$).

Сумме двух действительных частей соответствует при отображении сумма соответствующих мнимых частей [1]) и λ-кратной действительной части соответствует λ-кратная мнимая часть, если λ — *действительное* число. Поэтому зависимость вектора A''_ν от вектора A'_ν может быть

[1]) Пусть действительные части периодов (A'_ν) и (B'_ν) ($\nu = 1, \ldots, n$) определяют соответственно мнимые части периодов (A''_ν) и (B''_ν), т. е. существуют коварианты φ и ψ с периодами $A_\nu = A'_\nu + iA''_\nu$ и $B_\nu = B'_\nu + iB''_\nu$. Тогда $(A'_\nu + B'_\nu)$ определяют $(A''_\nu + B''_\nu)$ с соответствующей ковариантой $\varphi + \psi$. — *Прим. перев.*

записана с помощью матрицы M:

$$A'' = MA',$$

где A' и A'' следует рассматривать как матрицы-столбцы. Матрица M определяется выбором базиса гомологий поверхности; ее ν-й столбец представляет мнимую часть вектора, действительная часть которого имеет компоненты $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на ν-м месте[1]).

При переходе к другому базису гомологий, связанному с заданным базисом (унимодулярной) матрицей Δ,

$$\alpha_\mu^* = \sum_\nu \Delta_{\mu\nu}\alpha_\nu,$$

матрица M преобразуется в матрицу

$$M^* = \Delta M \Delta^{-1}.$$

5.14. Дифференциалы с заданными периодами. Согласно п. 5.12, каждому действительному вектору A_ν' соответствует *самое большее одна* мнимая часть A_ν'', такая, что комплексный вектор $A_\nu = A_\nu' + iA_\nu''$ представляет периоды дифференциала первого рода. Дальше мы показываем, что каждому произвольно заданному A_ν' действительно соответствует мнимая часть, следовательно, что действительные части периодов могут быть заданы произвольно.

Для доказательства риманова поверхность R представляется с помощью $4p$-угольника π в форме (p) (см. п. 5.7). Пусть на R задан абелев дифференциал первого рода $\varphi\, dz$. Если z_0 — фиксированная и z — переменная точки π и q — произвольный путь внутри π, ведущий из z_0 в z, то интеграл

$$\int_q \varphi\, dz$$

определяет функцию $\Phi(z)$, однозначную на поверхности с разрезами вдоль a_ν и b_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) (т. е. на поверхности $R - \sum a_\nu - \sum b_\nu$). Мы хотим найти скачок этой функции при переходе через

---

[1]) Соотношение $A'' = MA'$ предполагает существование ковариант φ_μ с такими периодами $A_{\mu\nu} = A'_{\mu\nu} + iA''_{\mu\nu}$, что

$$A'_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu \neq \mu, \\ 1, & \text{если } \nu = \mu. \end{cases}$$

Тогда коварианта φ с периодами $A_\nu' + iA_\nu''$ может быть записана в виде $\varphi = \sum_{\mu=1}^{n} A'_\mu \varphi_\mu$, откуда следует соотношение для A''. Существование φ_μ доказывается дальше (см. п. 5.17). — *Прим. перев.*

пути a_ν и b_ν, например a_1. Пусть z_1 — внутренняя точка a_1 и z_1' — эквивалентная ей точка на a_1'. Если q_1 и q_1' означают пути, ведущие внутри π из z_0 соответственно в z_1 и z_1', то $\Phi(z_1) = \int\limits_{q_1} \varphi(z)\,dz$ и $\Phi(z_1') = \int\limits_{q_1'} \varphi(z)\,dz$, следовательно, скачок функции Φ равен

$$\Phi(z_1') - \Phi(z_1) = \int\limits_{q_1'} \varphi\,dz - \int\limits_{q_1} \varphi\,dz.$$

Точка z_1 делит a_1 на две части; пусть α_1 — та из них, у которой второй конец принадлежит стороне b_1 (лежащей между a_1 и a_1'); пусть дуга α_1 ориентирована так, что z_1 — ее начало, а b_1 — так, что начало ее лежит на a_1. Этим определяется и ориентация эквивалентной α_1 дуги α_1'. Тогда путь $q_1\alpha_1 b_1 \alpha_1'^{-1} q_1'^{-1}$ на R (и даже на числовой плоскости) гомологичен нулю. Отсюда следует, если еще учесть, что α_1 и $\alpha_1'^{-1}$ представляют на R противоположные особые 1-симплексы, что

$$\int\limits_{q_1'} \varphi\,dz - \int\limits_{q_1} \varphi\,dz = \int\limits_{b_1} \varphi\,dz.$$

Скачок интеграла $\int \varphi\,dz$ в точке пути a_1 равен периоду коварианты φ вдоль сопряженного пути b_1, причем этот путь должен быть ориентирован так, что его начало лежит на a_1 и конец — на a_1'.

5.15. Существование дифференциала первого рода. Отсюда мы выведем, что для $2p$ произвольно заданных действительных чисел A_ν' и B_ν' существует дифференциал первого рода, периоды которого на a_ν и b_ν имеют соответственно действительные части A_ν' и B_ν'. Для доказательства достаточно построить дифференциал, период которого вдоль одного из этих путей, например b_1, имеет действительную часть 1, в то время как остальные его периоды чисто мнимые.

Тогда, согласно п. 5.14, на поверхности R с разрезом вдоль a_1 действительная часть u соответствующего интеграла $\int \varphi\,dz$ есть однозначная гармоническая функция, которая при переходе через a_1 испытывает скачок, равный 1. Обратно, если имеем на R такую функцию u, то $\varphi = u_x - iu_y$ — требуемая коварианта.

Согласно теоремам существования гл. IV[1]), такая гармоническая функция может быть построена. Для этого выберем на a_1 конечное число точек z_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) так, чтобы каждая дуга $z_\nu z_{\nu+1}$ ($\nu = 1, \ldots, n \pmod n$) лежала в параметрической окрестности U^ν. В соответствующем параметрическом круге U_z^ν выберем круговое кольцо K_z^ν так, чтобы дуга $z_\nu z_{\nu+1}$ лежала во внутреннем круге, тогда гармоническая функция

$$\arg \frac{z - z_{\nu+1}}{z - z_\nu}$$

в кольце K_z^ν однозначна. Так как сопряженная гармоническая функция $\ln \left| \frac{z - z_{\nu+1}}{z - z_\nu} \right|$ в K_z^ν однозначна, то, согласно § 5 гл. IV, на R существует гармоническая функция u_ν, которая в $R - U^\nu$ однозначна и регулярна и которая в U^ν, с точностью до регулярной функции, совпадает с $\arg \frac{z - z_{\nu+1}}{z - z_\nu}$. Отсюда вытекает, что гармоническая функция u_ν при переходе через $z_\nu z_{\nu+1}$ испытывает скачок, равный 2π. Поэтому сумма $\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu$ и представляет требуемую гармоническую функцию.

5.16. Из этого результата прежде всего следует, что пути a_ν и b_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) гомологично независимы, следовательно, согласно п. 5.9, они действительно представляют базис гомологий поверхности R. Чтобы это доказать, нужно показать, что из гомологии

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\lambda_\mu a_\mu + \lambda'_\mu b_\mu) \sim 0 \quad (\lambda_\mu,\ \lambda'_\mu — \text{целые}) \tag{5.4}$$

следует, что $\lambda_\mu = 0$, $\lambda'_\mu = 0$. Для этого предположим, что $\varphi_\nu\, dz$ — тот абелев дифференциал, период которого вдоль a_ν имеет действительную часть, равную единице, а периоды вдоль всех остальных путей a_μ, так же как и вдоль путей b_μ, имеют действительные части, равные нулю:

$$\operatorname{Re} \int_{a_\mu} \varphi_\nu\, dz = \delta_{\mu\nu}, \quad \operatorname{Re} \int_{b_\mu} \varphi_\nu\, dz = 0.$$

В силу (5.4), по интегральной теореме Коши,

$$\sum_\mu \left(\lambda_\mu \int_{a_\mu} \varphi_\nu\, dz + \lambda'_\mu \int_{b_\mu} \varphi_\nu\, dz \right) = 0;$$

[1]) Относительно прямого построения см. Штейнер [1].

с другой стороны, так как λ_μ, λ'_μ действительны, то для действительной части суммы, стоящей слева, получается значение λ_ν, следовательно, $\lambda_\nu = 0$. Таким же образом доказывается, что $\lambda'_\nu = 0$. Следовательно, пути a_ν и b_ν на самом деле гомологично независимы. Поэтому число n циклов базиса гомологий в точности равно $2p$.

5.17. Далее, из результата п. 5.14 следует, что вдоль путей *канонического* базиса гомологий (a_ν, b_ν) можно произвольно задавать действительные части периодов. Но так как периоды относительно двух базисов гомологий связаны друг с другом невырожденным действительным линейным преобразованием Δ, то отсюда вытекает, что действительные части периодов можно задавать произвольно и вдоль любого базиса гомологий.

Этим доказано высказанное в п. 5.14 утверждение о том, что пространство L дифференциалов первого рода отображается на множество векторов $A = A' + iA'' = (E + iM)A'$ (E — единичная матрица), где A' пробегает все $2p$-мерное действительное векторное пространство R^{2p}. Отсюда легко определить размерность пространства (A) (тем самым и L). Относительно *действительных* коэффициентов в (A) имеется ровно $2p$ линейно независимых векторов, ибо система векторов $(E + iM)A'$ линейно независима относительно действительных коэффициентов тогда и только тогда, когда это имеет место для векторов A'.

5.18. Но мы интересуемся и „комплексной“ размерностью пространства (A), являющегося линейным подпространством комплексного векторного пространства K^{2p}. В этом отношении справедливо вообще следующее: если комплексная размерность линейного подпространства T пространства K^n равна q, то действительная размерность равна $2q$.

Сначала мы покажем, что если векторы $(a_1, \ldots, a_r)$ „комплексно“ линейно зависимы, то векторы $(a_1, \ldots, a_r, ia_1, \ldots, ia_r)$ „действительно“ линейно зависимы, и наоборот. В самом деле, если

$$\sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu a_\nu = 0$$

и

$$\lambda_\nu = \sigma_\nu + i\tau_\nu,$$

то первое уравнение равносильно уравнению

$$\sum_\nu \sigma_\nu a_\nu + \sum_\nu \tau_\nu (ia_\nu) = 0.$$

Если какое-либо число λ_ν отлично от нуля, то по крайней мере одно из чисел σ_ν, τ_ν отлично от нуля, и наоборот. Это и доказывает наше утверждение.

Если q — комплексная размерность пространства T, то существует q линейно независимых векторов $a_1, \ldots, a_q$, и тогда векторы $(a_1, \ldots, a_q, ia_1, \ldots, ia_q)$ действительно линейно независимы. С другой стороны, каждый вектор из T может быть линейно составлен из a_ν с комплексными коэффициентами, поэтому из a_ν и ia_ν — с действительными коэффициентами, так что действительная размерность пространства T равна $2q$.

Так как пространство (A) имеет действительную размерность $2p$, то для его комплексной размерности получается значение p, следовательно, то же самое справедливо и для пространства L, изоморфного (A). Этим доказано:

Абелевы дифференциалы первого рода на замкнутой римановой поверхности рода p образуют линейное пространство (комплексной) размерности p[1]).

5.19. Из п. 5.16 получается интересное свойство матрицы M, однозначно соответствующей базису гомологий и связывающей соотношением $A'' = MA'$ действительную и мнимую части вектора-периода $A = A' + iA''$ дифференциала первого рода $\varphi\, dz$. А именно, $i\varphi\, dz$ также есть дифференциал первого рода с вектором-периодом $iA = -A'' + iA'$, следовательно, $A' = -MA''$, поэтому $A' = -M^2A'$, или $A'(E + M^2) = 0$. Так как это имеет место для *любого* вектора A', то $E + M^2 = 0$, или

$$M^2 = -E.$$

Замечание. Как мы видели, рассуждения пп. 5.14—5.19 основаны на возможности представления поверхности в виде $4p$-угольника. То, что каждая замкнутая риманова поверхность допускает подобное представление, будет доказано в § 1 гл. VIII.

5.20. Риманово соотношение. Пусть R — снова риманова поверхность, представленная нормальным многоугольником π в форме (p) $(p > 0)$. Пусть $\varphi(z)$ и $\varphi^*(z)$ — две абелевы коварианты первого рода на R и A_ν, B_ν, соответственно A_ν^*, B_ν^* — их периоды вдоль путей канонического базиса гомологий (a_ν, b_ν). Выясним, как связаны между собой эти периоды.

С этой целью будем исходить из триангуляции поверхности R, для которой стороны многоугольника π являются путями, составленными из сторон триангуляции[2]). Пусть Ф означает интеграл $\int \varphi\, dz$,

---

[1]) Заметим, что до сих пор еще не был указан базис этого пространства, т. е. система из p (комплексно) линейно независимых дифференциалов. В п. 5.22 выяснится, что такой базис образуют построенные в п. 5.16 дифференциалы φ_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$.

[2]) Такая триангуляция получается из подходящим образом выбранной триангуляции многоугольника π.

однозначный на поверхности R с разрезами вдоль a_ν и b_ν (см. п. 5.14). Тогда произведение $\Phi\varphi^*$ — регулярная коварианта в каждом 2-симплексе σ^2_ν, следовательно, по интегральной теореме Коши,

$$\int\limits_{\partial\sigma^2_\nu} \Phi\varphi^*\,dz = 0.$$

Отсюда суммированием получаем

$$\sum_\nu \int\limits_{\partial\sigma^2_\nu} \Phi\varphi^*\,dz = 0. \tag{5.5}$$

При этом 2-симплексы σ^2_ν ориентированы когерентно. Предыдущую сумму нужно теперь расположить по 1-симплексам триангуляции. Для этого последние ориентируются произвольно, независимо от ориентации σ^2_ν. Если σ^1 — произвольный 1-симплекс, не лежащий ни на одной из сторон a_ν, b_ν, то его часть в сумме (5.5) равна

$$\varepsilon_1 \int\limits_{\sigma^1} \Phi\varphi^*\,dz + \varepsilon_2 \int\limits_{\sigma^1} \Phi\varphi^*\,dz,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, в зависимости от того, совпадает ли ориентация на σ^1 с ориентацией, индуцируемой $\sigma^2_i (i = 1, 2)$, или нет. В силу когерентности, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ и, следовательно, часть σ^1 равна нулю.

Чтобы установить части сторон многоугольника в сумме (5.5), зафиксируем на a_ν и b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ ориентации, индуцируемые когерентной ориентацией многоугольника π. При этом последняя пусть выбрана так, что начало каждой стороны b_ν лежит на a_ν (а не на a'_ν), тогда из когерентности следует, что начало a'_ν лежит на b_ν (а не на b'_ν). Пусть теперь σ^1 есть 1-симплекс на стороне a_1. Примыкающие 2-симплексы σ^2_1 и σ^2_2 пусть занумерованы так, что σ^2_1 примыкает к a_1 и σ^2_2 — к a'_1. Тогда (уже определенная) ориентация σ^1 совпадает с индуцируемой σ^2_1, и, если Φ и Φ' означают соответственно значения $\Phi(z)$ в двух эквивалентных точках на a_1 и a'_1, то часть σ^1 в сумме (5.5) равна

$$\int\limits_{\sigma^1} \Phi\varphi^*\,dz - \int\limits_{\sigma^1} \Phi'\varphi^*\,dz = \int\limits_{\sigma^1} (\Phi - \Phi')\,\varphi^*\,dz,$$

или, согласно п. 5.14 [1]),

$$-B_1 \int\limits_{\sigma^1} \varphi^*\,dz.$$

[1]) Заметим, что ориентация была выбрана так, что результаты п. 5.14 применимы и по знаку.

Следовательно, полная часть в сумме (5.5) всех 1-симплексов, лежащих на a_1, равна

$$-B_1 \int_{a_1} \varphi^* dz = -B_1 A_1^*.$$

Аналогично найдем, что часть стороны b_1 равна $A_1 B_1^*$, так что в целом

$$\sum_{\nu} \int_{\partial \sigma_\nu^2} \Phi \varphi^* dz = \sum_{\nu=1}^{p} (A_\nu B_\nu^* - B_\nu A_\nu^*).$$

В силу (5.5), отсюда следует „первое риманово соотношение"

$$\sum_{\nu} (A_\nu B_\nu^* - B_\nu A_\nu^*) = 0. \tag{5.6}$$

5.21. Рассмотрим теперь вместо интеграла $\int \Phi \varphi^* dz$ интеграл $\int \Phi \bar{\varphi}^* dz$, взятый по границам симплексов триангуляции, использованной в п. 5.20. По формуле (3.18) найдем, что

$$\int\int_{\sigma_\nu^2} \varphi \bar{\varphi}^* dx\, dy = \frac{i}{2} \int_{\partial \sigma_\nu^2} \Phi \bar{\varphi}^* d\bar{z},$$

откуда суммированием по всем симплексам, аналогично п. 5.20, получаем

$$\int\int_R \Phi' \bar{\varphi}^* dx\, dy = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{p} (A_\nu \bar{B}_\nu^* - B_\nu \bar{A}_\nu^*). \tag{5.7}$$

Полагая здесь, в частности, $\varphi = \varphi^*$, получаем „второе риманово соотношение"

$$\int\int_R |\varphi|^2 dx\, dy = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{p} (A_\nu \bar{B}_\nu - B_\nu \bar{A}_\nu), \tag{5.8}$$

связывающее интеграл Дирихле дифференциала первого рода с его периодами вдоль путей канонического базиса (a_ν, b_ν).

В частности, если $A_\nu = 0$ $(\nu = 1, \ldots, p)$, то из (5.8) следует, что $\varphi \equiv 0$, другими словами:

Дифференциал первого рода, периоды которого вдоль p первых (или p вторых) путей канонического базиса равны нулю, тождественно равен нулю.

Дифференциал первого рода, таким образом, однозначно определяется уже своими периодами A_ν (или B_ν) [1]).

5.22. Базис дифференциалов первого рода. Из этого результата можно заключить, что рассмотренные в п. 5.16 дифференциалы $\varphi_\mu dz$ ($\mu = 1, \ldots, p$) комплексно линейно независимы и тем самым представляют базис пространства L.

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим периоды $A_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ дифференциала $\varphi_\mu dz$ вдоль a_ν и b_ν. Они имеют вид

$$A_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + iA''_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu} = iB''_{\mu\nu}.$$

Покажем сначала, что определитель $|B_{\mu\nu}|$ отличен от нуля. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$\sum_\mu B''_{\mu\nu}\lambda_\mu = 0$$

относительно *действительных* λ_μ ($\mu = 1, \ldots, p$). Если λ_μ — решение, то коварианта $\varphi = \sum_\nu \lambda_\mu \varphi_\mu$ имеет вдоль кривых b_ν периоды, равные нулю, и поэтому должна тождественно равняться нулю. С другой стороны, действительная часть периода φ вдоль a_ν равна λ_ν, откуда следует, что $\lambda_\nu = 0$. Отсюда вытекает, что предыдущая система уравнений имеет только тривиальные решения, поэтому $|B''_{\mu\nu}| \neq 0$, следовательно, и $|B_{\mu\nu}| \neq 0$.

Докажем теперь линейную независимость φ_μ. Для этого рассмотрим коварианту $\varphi = \sum_\mu \lambda_\mu \varphi_\mu$, где λ_μ — комплексные числа. Дифференциал $\varphi\, dz$ имеет вдоль b_ν период $\sum_\mu \lambda_\mu B_{\mu\nu}$. Если теперь λ_μ выбраны так, что $\sum_\mu \lambda_\mu \varphi_\mu = 0$, следовательно, $\varphi = 0$, то $\sum_\mu \lambda_\mu B_{\mu\nu} = 0$, откуда (в силу $|B_{\mu\nu}| \neq 0$) $\lambda_\mu = 0$, что и требовалось доказать.

5.23. Преобразование базиса. Выполняя линейное преобразование

$$\psi_\mu = \sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu}\varphi_\nu \quad (\mu = 1, \ldots, p)$$

с регулярной матрицей $C = (c_{\mu\nu})$, мы приходим (при фиксированном базисе гомологий) к новому базису пространства L с матрицами периодов CA и CB. С помощью линейного преобразования C базис может быть различным образом нормирован.

---

[1]) В п. 5.23 мы покажем, что эти периоды можно задавать произвольно,

Важная нормировка получается, если взять $C = A^{-1}$. Если ψ_ν — соответствующий базис, то ковариант

$$\psi = \sum_\nu \alpha_\nu \psi_\nu,$$

где α_ν — произвольные комплексные числа, имеет вдоль a_ν период α_ν. Следовательно, периоды дифференциала вдоль циклов a_ν (соответственно b_ν) могут быть заданы произвольно. Согласно п. 5.21, дифференциал определяется однозначно.

5.24. Ортонормированные системы. Мы переходим к другой нормировке, которая, в частности, оказалась весьма важной при обобщении классической теории абелевых интегралов первого рода на открытые поверхности [1]). Линейное многообразие дифференциалов первого рода может быть превращено в гильбертово пространство, если интеграл

$$(\varphi, \psi) = \int\int_R \varphi \bar{\psi}\, dx\, dy \tag{5.9}$$

принять за скалярное произведение ковариант φ и ψ, а положительное значение корня из

$$(\varphi, \varphi) = \int\int_R |\varphi|^2 dx\, dy$$

— за норму $\|\varphi\|$ ковариант φ.

Из (5.9) следует, что $(\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \varphi)}$. Две ковариант называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Произвольный базис $\varphi_\mu (\mu = 1, \ldots, p)$ можно с помощью метода ортогонализации Шмидта перевести в ортонормированную систему $\psi_\mu (\mu = 1, \ldots, p)$:

$$(\psi_\mu, \psi_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \neq \nu, \\ 1, & \text{если } \mu = \nu. \end{cases}$$

Для этого нужно положить

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$$

и

$$\psi_n = \frac{\varphi_n - p_n}{\|\varphi_n - p_n\|} \quad (n = 2, \ldots, p),$$

где $p_n = \sum_{\nu=1}^{n-1} (\varphi_n, \psi_\nu)\psi_\nu$ — „проекции“ φ_n на подпространство, порождаемое ковариантами $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$.

---

[1]) Ср. мою работу [3].

Если произвольная коварианта φ представлена в виде

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{p} c_\nu \psi_\nu,$$

то

$$c_\nu = (\varphi, \psi_\nu),$$

и норма $\|\varphi\|$ равна $(\sum |c_\nu|^2)^{1/2}$.

Ортонормированные системы (ψ_ν) определены с точностью до унитарных преобразований $U = (u_{ik})$ $(UU^* = E)$: если (ψ_ν) — какая-нибудь ортонормированная система, то общий вид ортонормированной системы есть

$$\varphi_\mu = \sum_\nu u_{\mu\nu} \psi_\nu,$$

где $(u_{\mu\nu})$ — произвольная унитарная матрица.

5.25. Дополнение: группы гомологий поверхностей с краем. В дальнейшем (гл. X) нам потребуются группы гомологий *поверхности с краем*, представленной многоугольником π (см. гл. II). Во избежание перерывов в изложении, мы коротко разберем здесь этот вопрос. Пусть поверхность с краем задана в виде *нормального многоугольника* с соответствием сторон

$$c_1 x_1 c_1' \ldots c_r x_r c_r' a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_p b_p a_p' b_p'.$$

„Свободные стороны" x_i соответствуют граничным контурам поверхности R, представленной π (см. п. 7.31).

Мы покажем, что циклы a_ν, b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ вместе с $r-1$ контурами x_μ $(\mu = 1, \ldots, r-1)$ представляют базис одномерной группы гомологий поверхности R. Это означает, во-первых, что каждый цикл z^1 на R гомологичен линейной комбинации этих циклов и, во-вторых, что эти циклы гомологично независимы.

Сначала заметим, что r контуров x_μ гомологично зависимы, так как они удовлетворяют соотношению $\sum_\mu x_\mu \sim 0$.

Пусть z^1 — произвольный цикл на R. В силу предыдущей гомологии, достаточно показать, что цикл z^1 гомологичен линейной комбинации канонических сечений и *всех* граничных контуров. Для этого, аналогично проделанному в п. 5.9, строим гомологичный z^1 цикл z^*, состоящий только из сторон c_μ, x_μ, a_ν, b_ν, следовательно, имеющий вид

$$z^* = \sum_\mu \varkappa_\mu c_\mu + \sum_\mu \xi_\mu x_\mu + \sum_\nu \alpha_\nu a_\nu + \sum_\nu \beta_\nu b_\nu.$$

Для его границы имеем

$$\partial z^* = \sum_\mu \varkappa_\mu \, \partial c_\mu,$$

и так как z^* — цикл, то

$$\sum_{\mu} \varkappa_\mu \, \partial c_\mu = 0.$$

1-симплексы c_μ (которые сами не являются циклами) представим себе ориентированными так, что общая для всех c_μ начальная точка P лежит внутри, а конечная точка Q_μ на крае поверхности R. Тогда предыдущее соотношение означает, что

$$\sum_{\mu} \varkappa_\mu Q_\mu - P \sum_{\mu} \varkappa_\mu = 0.$$

Так как каждая точка Q_μ отлична как от других $Q_\nu (\nu \neq \mu)$, так и от P, то $\varkappa_\mu = 0$ $(\mu = 1, \ldots, r)$.

Следовательно, 1-цикл z^1 гомологичен линейной комбинации x_μ, a_ν, b_ν; тем самым первое утверждение доказано.

Чтобы доказать, что циклы $x_\mu (\mu = 1, \ldots, r-1)$, a_ν, b_ν гомологично независимы, заменим каждую свободную сторону x_μ достаточно близкой к ней жордановой дугой y_μ, лежащей целиком внутри π, исключая ее концы, расположенные соответственно на c_μ и c'_μ в точках A_μ и A'_μ, эквивалентных относительно отображения $c_\mu \to c'_\mu$. В силу гомологии $x_\mu \sim y_\mu$, достаточно показать, что циклы $y_\mu (\mu = 1, \ldots, r-1)$, a_ν, b_ν гомологично независимы.

Для этого, как в п. 5.15, построим гармоническую функцию u_μ, однозначную на поверхности $R - c_\mu$ и испытывающую вдоль c_μ скачок, равный 1. Тогда коварианта $\psi_\mu = u_{\mu x} - i u_{\mu y}$ регулярна внутри поверхности R, исключая начало P, где она имеет полюс с вычетом $1/2\pi i$. Так же, как в п. 5.15, докажем, что действительная часть периода коварианты ψ_μ вдоль y_μ равна скачку функции u_μ вдоль c_μ, следовательно, равна 1, в то время как ее периоды вдоль остальных y_ν и вдоль a_ν, b_ν чисто мнимые; при этом y_μ должны быть соответствующим образом ориентированы.

Далее, для каждого ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ существует дифференциал $\varphi_\nu \, dz$, период которого вдоль a_ν имеет действительную часть, равную 1, в то время как все остальные его периоды чисто мнимые.

Если на R имеет место гомология

$$z^1 \equiv \sum_{\mu} \xi_\mu y_\mu + \sum_{\nu} \alpha_\nu a_\nu + \sum_{\mu} \beta_\nu b_\nu \sim 0,$$

то, по теореме о вычетах,

$$\int_{z^1} \psi_\mu \, dz = s,$$

где s — индекс пересечения цепи, ограниченной z^1, относительно точки P. С другой стороны, этот период равен коэффициенту ξ_μ, следовательно, $\xi_1 = \ldots = \xi_r$.

В силу того, что $\sum y_\mu \sim 0$, отсюда следует соотношение

$$\sum \alpha_\nu a_\nu + \sum \beta_\nu a_\nu \sim 0.$$

Теперь, как в п. 5.16, заключаем, что $\alpha_\nu = \beta_\nu = 0$.

§ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

5.26. Дифференциалы второго рода. Под *дифференциалом второго рода* понимают дифференциал $\varphi\, dz$, где φ — однозначная аналитическая ковариантa на римановой поверхности R, регулярная на R всюду, за исключением, быть может, конечного числа полюсов второго порядка, где она имеет разложение

$$\varphi = -\frac{a}{z^2} + \text{регулярная функция}.$$

Коэффициент a при переходе к другому локальному параметру z^* преобразуется по закону ковариантности.

Соответствующий интеграл

$$\Phi = \int \varphi\, dz$$

представляет на R аналитическую функцию (вообще говоря, многозначную), которая вне полюсов φ регулярна, в полюсах же имеет разложение

$$\Phi = \frac{a}{z} + \text{регулярная функция}.$$

5.27. Следовательно, разность двух дифференциалов второго рода с одинаковыми сингулярными частями есть дифференциал первого рода и, обратно, при добавлении дифференциала первого рода особенности дифференциала второго рода не меняются. Отсюда вытекает, что дифференциал второго рода однозначно определяется своей сингулярной частью и действительными частями своих периодов.

Обратно, сингулярная часть и действительные части периодов могут быть заданы произвольно. Для доказательства заметим сначала, что достаточно к каждому полюсу P построить *нормальный дифференциал* второго рода, т. е. дифференциал, который в точке P имеет разложение

$$\varphi = -\frac{1}{z^2} + \text{регулярная функция},$$

а вне P всюду регулярен. В самом деле, если φ_ν — нормальный дифференциал с полюсом в P_ν, то дифференциал

$$\varphi = \sum_\nu a_\nu \varphi_\nu$$

имеет требуемую особенность, и добавлением подходящего дифференциала первого рода можно достигнуть того, чтобы его периоды имели заданные действительные части.

5.28. Построение нормального дифференциала φ может быть, далее, сведено к построению однозначной гармонической функции на R с заданной особенностью. В самом деле, если мы представим себе φ нормированным так, что действительные части его периодов равны нулю, то действительная часть интеграла будет однозначной гармонической функцией на R, которая вне полюса P регулярна, а в P имеет разложение

$$u = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) + \text{регулярная функция}.$$

Обратно, если на R задана такая гармоническая функция, то $\varphi = u_x - iu_y$ — нормальная ковариант второго рода. В гл. IV такая гармоническая функция была построена, и тем самым существование дифференциала второго рода доказано.

5.29. Дифференциал третьего рода. Дифференциал третьего рода есть дифференциал $\varphi\,dz$, где ковариант φ на R однозначна и с точностью до конечного числа полюсов первого порядка регулярна. В таком полюсе имеет место разложение

$$\varphi = \frac{a}{z} + \text{регулярная функция} \quad (a \neq 0).$$

Соответствующий интеграл

$$\Phi = \int \varphi\,dz$$

является многозначной аналитической функцией на R. Кроме „многозначности в целом", определяемой одномерной группой гомологий поверхности R, она обладает еще локальными многозначностями в логарифмических точках разветвления.

Так как, согласно п. 3.47, сумма вычетов ковариант φ по всей поверхности R равна нулю, то дифференциал третьего рода имеет не меньше *двух* полюсов.

5.30. Дифференциал третьего рода также однозначно определяется своей сингулярной частью и действительными частями своих периодов. Обратно, последние и сингулярная часть могут быть заданы произвольно, с тем ограничением, что сумма вычетов равна нулю.

Для доказательства покажем сначала, что снова достаточно построить *нормальный дифференциал* к двум заданным точкам, т. е. дифференциал, который в этих точках имеет вычеты, равные соответственно $+1$ и -1, а в остальных регулярен. В самом деле,

пусть $\varphi\,dz$ — заданный дифференциал третьего рода с полюсами P_ν ($\nu = 0, \ldots, n-1$) и вычетами c_ν $\left(\sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu = 0\right)$. Тогда, если φ_ν — нормальный дифференциал с полюсами P_ν и $P_{\nu+1}$ ($\nu = 0, \ldots, n-1 \pmod n$), то дифференциал

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \varphi_\nu \quad \left(a_\nu = \sum_{\rho=0}^{\nu} c_\rho\right)$$

имеет ту же сингулярную часть, что и φ. Добавлением дифференциала первого рода можно добиться, чтобы и действительные части периодов у него были бы такими же, как у φ [1]).

Построение нормального дифференциала с полюсами P и Q можно свести к случаю, когда точки P и Q лежат в одной и той же параметрической окрестности. В самом деле, соединим P и Q некоторым путем и выберем на нем конечное число точек P_ν ($P_0 = P$, $P_n = Q$) так, что две следующие друг за другом точки лежат в одной параметрической окрестности. Если тогда φ_ν — нормальная коварианта к точкам P_ν и $P_{\nu+1}$, то $\varphi = \sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi_\nu$ — нормальная коварианта к точкам P и Q.

5.31. Итак, пусть P и Q — две точки параметрической окрестности, $|z| < 1$ — соответствующий параметрический круг и z_1, z_2 — координаты соответственно точек P и Q. Если тогда $\varphi\,dz$ — нормальный дифференциал к P и Q, то в круге $|z| < 1$ имеет место разложение

$$\varphi = \frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z - z_2} + \text{регулярная функция.}$$

Если коварианта φ нормирована так, что действительные части ее периодов равны нулю, то действительная часть интеграла $\int \varphi\,dz$ есть однозначная гармоническая функция на R, которая в круге $|z| < 1$ имеет вид

$$u = \ln\left|\frac{z - z_1}{z - z_2}\right| + \ldots$$

и у которой нет никаких других особенностей. Этим построение нормального дифференциала сведено к теоремам существования гармонических функций гл. IV.

5.32. Связь с дифференциалами первого рода. Риманово соотношение (5.6) можно распространить на дифференциал $\varphi\,dz$ первого

[1]) Так как $a_{n-1} = 0$, то фактически в построении φ участвуют лишь дифференциалы $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-2}$. — *Прим. перев.*

рода и дифференциал $\varphi^* dz$ третьего рода. Пусть P_μ ($\mu = 1, \ldots, m$) — полюсы φ^* и c_μ — соответствующие вычеты. Рассмотрим снова триангуляцию поверхности R, для которой стороны a_ν, b_ν нормального многоугольника являются путями, составленными из сторон триангуляции, причем все точки P_μ являются внутренними точками 2-симплексов; пусть, кроме того, различные точки лежат в различных симплексах. Если Φ означает интеграл $\int \varphi dz$, однозначный на поверхности R с разрезами вдоль a_ν и b_ν, то для каждого 2-симплекса σ_ν^2, который не содержит полюса, имеет место, как в п. 5.20, соотношение

$$\int\limits_{\partial\sigma_\nu^2} \Phi\varphi^* dz = 0.$$

Если же σ_ν^2 содержит полюс P_μ, то

$$\int\limits_{\partial\sigma_\nu^2} \Phi\varphi^* dz = 2\pi i \Phi(P_\mu) c_\mu.$$

Из этих соотношений суммированием по всем симплексам получаем

$$\sum_\nu \int\limits_{\partial\sigma_\nu^2} \Phi\varphi^* dz = 2\pi i \sum_\mu c_\mu \Phi(P_\mu).$$

С другой стороны, если A_ν, B_ν и A_ν^*, B_ν^* означают соответственно периоды ковариант φ и φ^*, то, как в п. 5.20,

$$\sum_\nu \int\limits_{\partial\sigma_\nu^2} \Phi\varphi^* dz = \sum_\nu (A_\nu B_\nu^* - B_\nu A_\nu^*),$$

откуда следует, что

$$\sum_\nu (A_\nu B_\nu^* - B_\nu A_\nu^*) = 2\pi i \sum_\mu c_\mu \Phi(P_\mu). \tag{5.10}$$

5.33. Перестановка аргумента и параметра. Пусть a и b — две точки римановой поверхности R и $\varphi(z)\,dz$ — дифференциал третьего рода, регулярный вне a и b и имеющий там соответственно разложения

$$\varphi(z) = -\frac{1}{z-a} + \ldots, \quad \varphi(z) = \frac{1}{z-b} + \ldots.$$

Соответствующий интеграл Φ будем считать нормированным так, что действительные части его периодов равны нулю. Тогда действительная часть $u(z; a, b)$ интеграла Φ есть однозначная функция на R,

имеющая в a и в b соответственно разложения

$$u = -\ln|z-a| + \ldots \text{ и } u = \ln|z-b| + \ldots .$$

Пусть z_1, z_2 — две точки на R; образуем разность

$$u(z_1, z_2; a, b) \equiv u(z_1; a, b) - u(z_2; a, b).$$

Тогда, по определению,

$$u(z_1, z_2; a, b) + u(z_2, z_1; a, b) = 0.$$

Менее тривиально соотношение

$$u(z_1, z_2; a, b) = u(a, b; z_1, z_2) \tag{5.11}$$

(перестановка аргумента и параметра).

Для доказательства рассмотрим триангуляцию поверхности R, в которой z_1, z_2, a, b — внутренние точки 2-симплексов σ_1, σ_2, σ_3, σ_4. Пусть α — цепь, состоящая из всех 2-симплексов триангуляции, исключая указанные четыре. Так как $U(z) = u(z; z_1, z_2)$ и $V(z) = u(z; a, b)$ — две регулярные на α гармонические функции, то

$$\int_{\partial\alpha} (U\,dV' - V\,dU') = 0. \tag{5.12}$$

С другой стороны, $\partial\alpha$ — граница 2-цепи, образованной четырьмя исключенными симплексами, поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial\alpha} (U\,dV' - V\,dU') = -U(a) + U(b) + V(z_1) - V(z_2). \tag{5.13}$$

Из (5.12) и (5.13) следует, что

$$U(b) - U(a) = V(z_2) - V(z_1),$$

т. е. соотношение (5.11).

Из этого свойства симметрии заключаем, что $u(z_1, z_2; a, b)$ является гармонической функцией и от a и b.

5.34. Дифференциалы высших порядков. Аналогичным образом проходит построение абелевых дифференциалов с полюсами высшего порядка. Снова достаточно построить нормальный дифференциал, т. е. дифференциал, который имеет один полюс с разложением

$$\varphi = \frac{1}{z^n} + \text{регулярная функция } (n \geqslant 3).$$

Это удается с помощью однозначной гармонической функции v, обладающей полюсом с сингулярной частью

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z^{n-1}}\right).$$

Существование такой функции было доказано в гл. IV.

Добавлением подходящего дифференциала первого рода можно снова придать действительным частям периодов заданные значения.

Между дифференциалами высших порядков также имеют место многочисленные соотношения, которые могут быть получены методами, подобными использованным в п. 5.32.

§ 4. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

5.35. Теорема Абеля. На вопрос о том, когда существует *рациональная функция* (ср. п. 3.10) с заданными полюсами и нулями, дает ответ знаменитая теорема Абеля, которую мы сейчас докажем.

Пусть $f(z)$ — рациональная функция порядка n на поверхности R и P_μ ($\mu = 1, \ldots, n$), соответственно Q_μ ($\mu = 1, \ldots, n$), — ее нули, соответственно полюсы, которые мы предполагаем простыми. Тогда $\varphi\, dz = \frac{f'}{f}\, dz$ — абелев дифференциал третьего рода с вычетами, равными $+1$ в точках P_μ и -1 в точках Q_μ. Если z^1 — произвольный 1-цикл на R, не проходящий через точки P_μ и Q_μ, то

$$\int_{z^1} \varphi\, dz = \Delta_{z^1} \arg f(z) = 2\pi i k \qquad (k \text{ — целое число}).$$

Обратно, пусть $\varphi\, dz$ — дифференциал третьего рода с полюсами P_μ и Q_μ и вычетами, равными соответственно $+1$ и -1, у которого все периоды (целочисленно) кратны $2\pi i$. Тогда функция

$$f(z) = e^{\int \varphi\, dz}$$

однозначна и регулярна на поверхности R с выколотыми точками P_μ и Q_μ ($\mu = 1, \ldots, n$) и может быть продолжена в точки P_μ и Q_μ так, что там у нее будут соответственно нули и полюсы первого порядка.

Следовательно, наш вопрос сведен к вопросу о существовании абелева дифференциала третьего рода с заданными (простыми) полюсами, у которого все периоды кратны $2\pi i$.

Если $\varphi^*\, dz$ — такой дифференциал, то, в частности, его периоды вдоль путей канонического базиса a_ν, b_ν (см. п. 5.10) имеют соответственно вид $2\pi i k_\nu$ и $2\pi i l_\nu$ (k_ν, l_ν — целые числа). Пусть $\varphi\, dz$ — произвольный дифференциал первого рода и $\Phi(z)$ — интеграл $\int \varphi\, dz$, однозначный на поверхности R с разрезами вдоль a_ν и b_ν. Тогда, в силу (5.10),

$$\sum_\nu (A_\nu l_\nu - B_\nu k_\nu) = \sum_\mu [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)]. \qquad (5.14)$$

Следовательно, если на R существует дифференциал требуемого вида, то для *каждого* дифференциала первого рода имеет место соотношение (5.14) с целочисленными k_ν и l_ν[1]).

5.36. Обратно, справедливость соотношения (5.14) для некоторой системы целых чисел (k_ν, l_ν) и всех интегралов Ф первого рода *достаточна* для существования дифференциала $\varphi^* dz$ третьего рода с заданными полюсами и периодами, кратными $2\pi i$. Для доказательства предположим, что $\varphi^* dz$ — дифференциал третьего рода с полюсами P_μ и Q_μ и вычетами соответственно $+1$ и -1, нормированный так, что его периоды A_ν^* и B_ν^* ($\nu = 1, \ldots, p$) чисто мнимые. Нужно показать, что эти периоды кратны $2\pi i$: если это справедливо для периодов вдоль базисных циклов, то это справедливо и для периодов вдоль каждого произвольного цикла.

Пусть $\varphi\, dz$ — произвольный дифференциал первого рода; тогда, в силу (5.10),

$$\sum_\nu (A_\nu B_\nu^* - B_\nu A_\nu^*) = 2\pi i \sum_\mu [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)]$$

и, по предположению,

$$\sum (A_\nu l_\nu - B_\nu k_\nu) = \sum_\mu [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)]$$

с целыми числами k_ν и l_ν. Из этих соотношений вытекает, что

$$\sum_\nu (A_\nu B_\nu^* - B_\nu A_\nu^*) = 2\pi i \sum_\nu (A_\nu l_\nu - B_\nu k_\nu).$$

Следовательно, если через a_ν^* и b_ν^* обозначить действительные числа $\frac{1}{2\pi i} A_\nu^*$, соответственно $\frac{1}{2\pi i} B_\nu^*$, то

$$\sum_\nu [A_\nu (b_\nu^* - l_\nu) - B_\nu (a_\nu^* - k_\nu)] = 0$$

и, если перейти к действительной части,

$$\sum_\nu [A_\nu' (b_\nu^* - l_\nu) - B_\nu' (a_\nu^* - k_\nu)] = 0.$$

Так как действительные части A_ν' и B_ν' можно задавать произвольно, то это соотношение при фиксированных $b_\nu^* - l_\nu$ и $a_\nu^* - k_\nu$ должно иметь место для всех A_ν' и B_ν'; поэтому $b_\nu^* = l_\nu$ и $a_\nu^* = k_\nu$, т. е. $B_\nu^* = 2\pi i l_\nu$ и $A_\nu^* = 2\pi i k_\nu$. Следовательно, периоды A_ν^* и B_ν^* кратны $2\pi i$, что и требовалось доказать.

[1]) Заметим, что числа k_ν и l_ν не зависят от выбора дифференциала $\varphi\, dz$.

5.37. Число $\Omega = \sum_\nu (A_\nu l_\nu - B_\nu k_\nu)$ есть период интеграла $\int \varphi\, dz$ вдоль цикла $z = \sum_\nu (a_\nu l_\nu - b_\nu k_\nu)$. Поэтому теорему Абеля можно формулировать так:

Для существования рациональной функции с только простыми нулями P_μ и полюсами Q_μ необходимо и достаточно, чтобы для каждого интеграла Φ *первого рода выполнялось соотношение*

$$\sum_\mu [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)] = \Omega,$$

где Ω *означает период соответствующего* Φ *дифференциала вдоль подходящего* 1*-цикла (не зависящего от выбора* Φ*).*

5.38. Предыдущее условие выполняется для дифференциала $\varphi\, dz$ первого рода тогда и только тогда, когда оно выполняется для дифференциалов произвольного базиса пространства L. Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ — такой базис, то предыдущее условие для него означает, что

$$\sum_\mu [\Phi_\nu(P_\mu) - \Phi_\nu(Q_\mu)] = \Omega_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, p),$$

где Ω_ν — период $\varphi_\nu dz$ вдоль некоторого 1-цикла $z = \sum_\rho (a_\rho l_\rho - b_\rho k_\rho)$. Если $A_{\nu\rho}$ и $B_{\nu\rho}$ — матрицы периодов базисных дифференциалов φ_ν вдоль канонической системы путей a_ρ, b_ρ, то $\Omega_\nu = \sum_\rho (A_{\nu\rho} l_\rho - B_{\nu\rho} k_\rho)$ и условие означает тогда разрешимость в целых числах системы

$$\sum_\mu [\Phi_\nu(P_\mu) - \Phi_\nu(Q_\mu)] = \sum_\rho (A_{\nu\rho} l_\rho - B_{\nu\rho} k_\rho)$$

относительно k_ρ и l_ρ.

Мы покажем еще, что эта система, независимо от выбора точек P_μ и Q_μ, всегда имеет одно и только одно *действительное* решение (k_ρ, l_ρ). Следовательно, условие теоремы Абеля состоит в том, что это вектор-решение должно иметь определенный вид, а именно, быть *целочисленным*.

Чтобы доказать предыдущее утверждение, рассмотрим систему

$$\sum_\rho (A_{\nu\rho} l_\rho - B_{\nu\rho} k_\rho) = c_\nu, \tag{5.15}$$

где c_ν — произвольные числа. Так как k_ν и l_ν должны быть действительными, то переход к сопряженной системе дает

$$\sum_\rho (\bar{A}_{\nu\rho} l_\rho - \bar{B}_{\nu\rho} k_\rho) = \bar{c}_\nu. \tag{5.16}$$

Соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение $k_\rho = l_\rho = 0$, так как, согласно п. 5.22, базис φ_ν можно вы-

брать так, что $A_{\nu\rho}+\bar{A}_{\nu\rho}=2\delta_{\nu\rho}$ и $B_{\nu\rho}+\bar{B}_{\nu\rho}=0$, откуда, складывая (5.15) и (5.16), находим, что $l_\rho=0$, тем самым, в силу того, что $|B_{\nu\rho}|\neq 0$ и $k_\rho=0$. Следовательно, однородная система имеет только тривиальное решение, и поэтому неоднородная — в точности одно решение. Это решение (k_ρ, l_ρ), как видно сразу из формы уравнений (5.15), действительное. Этим показано, что система (5.15) имеет одно и только одно действительное решение, что и требовалось доказать.

5.39. Если, в частности, применить наш результат к числовой сфере, то из него следует, что для *каждой* системы P_μ, Q_μ полюсов и нулей существует рациональная функция, ибо единственная абелева ковариантa первого рода есть $\varphi\equiv 0$.

На поверхности тора ($p=1$) пространство дифференциалов первого рода определяется одной ковариантой φ. Если в качестве локальных параметров допустить только те, которые получаются друг из друга преобразованиями $z\to z+\omega_1$, $z\to z+\omega_2$, то $\varphi\equiv 1$, и тем самым ее периодами являются $A=\omega_1$, $B=\omega_2$. Поэтому условие существования рациональной функции совпадает с известным из теории эллиптических функций соотношением

$$\Omega = l\omega_1 - k\omega_2 = \sum_\mu [\Phi(P_\mu) - \Phi(Q_\mu)].$$

5.40. Замечание. Предыдущие свойства имеют также место при наличии среди P_μ и Q_μ кратных нулей и полюсов. Нужно только в прежних доказательствах каждую точку P_μ, Q_μ брать столько раз, какова ее кратность.

Мы не будем здесь вдаваться в дальнейшее исследование взаимосвязей, важных для существования рациональных функций (теорема Римана — Роха и т. д.), и лишь сошлемся на литературу по этим классическим проблемам: см., например, Аппель — Гурса [1*], Фрике — Клейн [1*], Вейль [1*], Осгуд [1*] [1]).

Заметим здесь только, что для заданных точек $b_1, \ldots, b_n$ всегда можно указать рациональную функцию, которая имеет полюсы самое большее в этих точках, если только число n достаточно велико. Для этого строим n абелевых интегралов Φ_ν, каждый с одним полюсом b_ν ($\nu=1, \ldots, n$). Тогда

$$\Phi = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \Phi_\nu$$

есть (прежде всего многозначная) функция, которая в точке b_ν имеет полюс, если постоянная c_ν отлична от нуля. Если теперь α_ρ

[1]) См. также Н. Г. Чеботарев [1**]. — *Прим. перев.*

($\rho = 1, \ldots, 2p$) — базис гомологий поверхности, то дифференциал $\varphi\, dz$ имеет вдоль α_ρ период

$$\int_{\alpha_\rho} \varphi\, dz = \sum_\nu c_\nu \int_{\alpha_\rho} \varphi_\nu\, dz = \sum_\nu A_{\nu\rho} c_\nu,$$

и эти периоды при $n > 2p$ можно обратить в нуль с помощью нетривиальной системы c_ν. Тогда соответствующий интеграл Φ будет однозначной функцией, которая в некоторых из точек b_ν (а именно, в тех, где $c_\nu \neq 0$) имеет полюсы, в то время как вне этих точек она регулярна.

§ 5. ИНТЕГРАЛЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

5.41. Гиперэллиптические поверхности. Для римановых поверхностей, которые определяются с помощью алгебраического уравнения $F(z, w) = 0$, теория абелевых интегралов может быть непосредственно построена алгебраическими методами. В качестве иллюстрации к предшествующей общей теории приведем здесь некоторые основные положения классической теории интегралов алгебраических функций. Сначала рассмотрим простейший случай гиперэллиптической поверхности, определяемой уравнением

$$w^2 = P(z),$$

где P — многочлен степени $2p+1$ или $2p+2$. Число p равно роду поверхностей $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$, на которых однозначны соответственно алгебраическая функция $w = w(z)$ и ее обратная функция $z = z(w)$.

В качестве базиса p-мерного линейного пространства абелевых дифференциалов *первого рода* проще всего принять дифференциалы

$$\frac{z^\nu\, dz}{w} \quad (\nu = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Если в нулях многочлена P ввести локально униформизирующие параметры, то немедленно получается, что эти дифференциалы здесь регулярны, и что то же справедливо также для тех точек поверхности, которые расположены над точкой $z = \infty$. Следовательно, эти дифференциалы регулярны и однозначны на поверхности $\tilde{R}_z$; тем самым они представляют абелевы дифференциалы первого рода. Далее, они линейно независимы, следовательно, образуют базис, и общее выражение абелева интеграла первого рода на поверхности $\tilde{R}_z$ имеет вид

$$f(z) = \int \frac{P_{p-1}(z)}{w}\, dz,$$

где P_{p-1} — произвольный многочлен степени не выше $p-1$.

Теперь мы образуем интеграл *второго рода* с полюсом в заданной точке $z=a$, $w=b$ поверхности $\tilde{R}_z$. За соответствующий дифференциал можно взять

$$df=\frac{w(z)+w(a)+w'(a)(z-a)}{(z-a)^2 w}dz,$$

если $w(a)\neq 0$. Если же $w(a)=0$, то можно взять дифференциал

$$df=\frac{dz}{(z-a)w}.$$

В точке $z=\infty$, где $w=\sqrt{P}=a_0z^{p+1}+a_1z^p+\ldots$, если степень P равна $2p+2$, полагаем

$$df=\frac{w+a_0z^{p+1}+a_1z^p}{w}dz,$$

а для степени $2p+1$

$$df=\frac{z^p\,dz}{w}.$$

Непосредственно убеждаемся в том, что эти дифференциалы однозначны и всюду регулярны, исключая точку $z=a$, $w=b=w(a)$, где они имеют полюс второго порядка с вычетом, равным нулю. Следовательно, df — дифференциал второго порядка.

Элементарный интеграл *третьего рода* с полюсами ($z=a$, $w=w(a)$), ($z=b$, $w=w(b)$) получается интегрированием дифференциала

$$df=\left(\frac{w+w(a)}{z-a}-\frac{w+w(b)}{z-b}\right)\frac{dz}{w},$$

если полюсы лежат в конечной части плоскости и $z=a$, $z=b$ не являются точками разветвления поверхности $\tilde{R}_z$. Если точки a и b обе являются точками разветвления, то это выражение переходит в

$$\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-b}\right)dz.$$

Если положить $a=\infty$, то

$$df=\frac{w+w(b)+c(z-b)^{p+1}}{(z-b)w}dz,$$

причем $w=cz^{p+1}+\ldots$ для $z\to\infty$, если степень P равна $2p+2$. В частности, для $a=\infty$, $w=w(\infty)=\infty$ имеем

$$df=\frac{z^p\,dz}{w}.$$

Для нечетной степени $2p+1$ многочлена P получаем, если выбрать $z=a=\infty$,

$$df=\frac{w+w(b)}{z-b}\frac{dz}{w}.$$

5.42. Общий случай $F(z, w) = 0$. Сначала мы докажем следующую теорему:

Каждая рациональная функция $f(P)$ на замкнутой римановой поверхности, определенной алгебраическим уравнением

$$F(z, w) = 0,$$

является рациональной функцией от переменных z и w:

$$f(P) = R(z, w).$$

Доказательство. Пусть n и m — степени неприводимого уравнения $F = 0$ соответственно по z и w. Если $f(P)$ — рациональная функция точки P соответствующей замкнутой римановой поверхности $\tilde{R}_z$, расположенной m-листно над z-плоскостью, то каждой точке z, над которой не расположена ни одна точка разветвления поверхности $\tilde{R}_z$, отвечает m ветвей $P = P_\nu(z)$ $(\nu = 1, \ldots, m)$, и мы полагаем

$$f_\nu(z) = f(P_\nu(z)) \quad (\nu = 1, \ldots, m).$$

Пусть, с другой стороны, $w = w_\nu(z)$ $(\nu = 1, \ldots, m)$ — ветви алгебраической функции $w = w(z)$, определяемой уравнением $F = 0$. Образуем выражение

$$\Phi_k(z) = \sum_\nu w_\nu^k f_\nu \quad (k = 0, \ldots, m-1).$$

Оно представляет собой однозначную аналитическую функцию от z, и так как особенностями этой функции могут быть лишь полюсы, то Φ_k — *рациональная* функция от z.

С другой стороны, рассмотрим многочлен $F(z, w)$ и расположим выражение

$$\frac{F(z, w) - F(z, u)}{w - u}$$

по степеням u:

$$\frac{F(z, w) - F(z, u)}{w - u} = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(z, w)\, u^k,$$

где A_k — многочлены относительно z и w. Для решения $u = w_\mu$ уравнения $F(z, u) = 0$ находим, что

$$\frac{F(z, w)}{w - w_\mu} = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(z, w)\, w_\mu^k.$$

Совершая здесь предельный переход $w \to w_\nu$, получаем

$$F_w(z, w_\nu)\, \delta_{\mu\nu} = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(z, w_\nu)\, w_\mu^k,$$

где $\delta_{\mu\nu}$ — символ Кронекера.

Умножая образованные выше функции Φ_k на A_k и затем складывая их, получаем выражение

$$\Phi(z, w) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k(z, w)\Phi_k(z),$$

рациональное относительно z и w. Для $w = w_\nu$ имеем

$$\Phi(z, w_\nu) = \sum_{k,\mu} A_k(z, w_\nu) f(P_\mu) w_\mu^k = f(P_\nu) F_w(z, w_\nu).$$

Отсюда

$$f(P_\nu) = \frac{\Phi(z, w_\nu)}{F_w(z, w_\nu)},$$

следовательно, $f(P)$ — рациональная функция от z и w, что и требовалось доказать.

5.43. Та же самая теорема справедлива для *абелевой коварианты* $\varphi(P)$ на поверхности $\tilde{R}_z$. В самом деле, φ здесь однозначна, далее, аналитична и, с точностью до полюсов, регулярна относительно локально униформизирующей переменной. В качестве таковой можно принять либо саму переменную z, либо — в точке разветвления $z = a$ $(\mu - 1)$-го порядка поверхности $\tilde{R}_z$ — корень $t = \sqrt[\mu]{z - a}$. Если ввести z в качестве единой переменной, то все предыдущие рассуждения применимы к *функции* φ от z, и получается, что φ — рациональная функция от z и w.

5.44. Интегралы первого рода. Теперь нам нужно выяснить, при каких условиях абелев дифференциал

$$\varphi(P)\,dz = R(z, w)\,dz$$

не имеет полюсов. Сначала мы ограничиваем рассмотрение следующими предположениями:

$$1^\circ. \quad F(z, w) = w^m + Q_1 w^{m-1} + \ldots + Q_m,$$

причем степень Q_ν *не превосходит* ν.

Из этого условия вытекает, что w для конечных z остается конечным, так что, следовательно, значения $w = \infty$ соответствуют точке $z = \infty$.

2°. Особо предполагается, что *над точкой* $z = \infty$ *не лежит ни одна точка разветвления, так что здесь*

$$w_\nu = c_\nu z + R\left(\frac{1}{z}\right) \quad (\nu = 1, \ldots, m). \tag{5.17}$$

С помощью заключений п. 5.42 находим для ковариантны φ рациональное выражение

$$R(z, w) = \frac{\sum_0^{m-1} A_k(z, w)\,\Phi_k(z)}{F_w(z, w)} = \frac{\Psi(z, w)}{F_w(z, w)}.$$

Если предположить, что ковариантна $R(z, w)$ — первого рода, то выражения

$$\Phi_k(z) = \sum_{\nu=1}^{m} w_\nu^k\, R(z, w_\nu)$$

представляют собой *многочлены* относительно z. Действительно, выражение $R(z, w_\nu)$ регулярно для $z \neq a_\lambda, \infty$, где a_μ — нули $F_w(z, w_\nu)$. Поэтому полюсами $R(z, w)$ могут быть лишь точки $z = a_\lambda, \infty$. Для $z = a_\mu$ это может иметь место только тогда, когда a_μ — точка разветвления поверхности $\tilde{R}_z$. Если $t = \sqrt[\rho]{z - a_\mu}$ — локально униформизирующий параметр и $R(z, w_\nu)$ имеет разложение

$$R(z, w_\nu) = \frac{1}{t^h}\, R(t) \quad (R(0) \neq 0),$$

$$R(z, w_\nu)\, dz = (t^{\rho-h-1} + \ldots)\, dt,$$

то, в силу конечности R,

$$\rho - h - 1 \geqslant 0, \quad h \leqslant \rho - 1$$

и

$$R(z, w_\nu) \sim \left(\frac{1}{z - a_\mu}\right)^{h/\rho},$$

так что, следовательно,

$$(z - a_\mu)\, R(z, w_\nu) \to 0 \quad \text{при } z \to a_\mu.$$

Отсюда заключаем, что R остается конечным и в точке $z = a_\mu$. Следовательно, рациональное выражение $\Phi_k(z)$ конечно для $z \neq \infty$ и поэтому сводится к *многочлену*.

5.45. Степень Φ_k получается, если рассмотреть его поведение при $z \to \infty$. Так как дифференциал $R\,dz$, по предположению, — первого рода, то $R(z, w_\nu)$ при $z \to \infty$ необходимо стремится к нулю и притом не медленнее, чем $1/z^2$. Так как, далее, $w_\nu \sim c_\nu z$, $w_\nu^k \sim c_\nu^k z^k$, то степень старшего члена разложения $w_\nu^k R(z, w_\nu)$ в точке $z = \infty$ не превосходит $k - 2$.

Следовательно, многочлен $\Phi_k(z)$ имеет степень не выше $k - 2$. Поэтому

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) \equiv 0.$$

Далее, $A_k(z, w)=Q_0w^{m-k+1}+Q_1w^{m-k-2}+\ldots+Q_{m-k-1}$ и $A_k\sim z^{m-k-1}$ при $z\to\infty$. Следовательно,

$$\Psi(z, w)=\sum A_k\Phi_k$$

— многочлен, степень которого (определенная с учетом обеих переменных z и w) не превосходит $m-3$.

Интеграл первого рода на поверхности $F=0$, который удовлетворяет условиям 1° *и* 2° *п.* 5.44, *необходимо имеет вид*

$$\int R(z, w)\,dz=\int\frac{\Psi(z, w)}{F_w(z, w)}\,dz, \tag{5.18}$$

где Ψ — многочлен, старший член которого имеет степень, не превосходящую $m-3$.

5.46. Теперь поставим вопрос, является ли это необходимое условие для $\varphi\equiv R(z, w)$ также и достаточным для того, чтобы интеграл (5.18) был интегралом первого рода.

Оказывается, что:

1°. Интеграл (5.18) регулярен в каждой конечной точке $P(z\neq\infty)$ с возможными исключениями в критических точках, где

$$F=F_z=F_w=0. \tag{5.19}$$

Это утверждение очевидно, если P не является точкой разветвления, так как тогда $F_w\neq 0$, $\Psi\neq\infty$, поскольку z и w оба конечны. Если P — обыкновенная точка разветвления, где, следовательно, $F=F_w=0$, $F_z\neq 0$, то многочлен Ψ все еще остается регулярным. Далее,

$$F_z\,dz+F_w\,dw=0,$$

и если перейти к w как локальному параметру, то найдем, что отношения

$$\frac{dz}{F_w}=-\frac{dw}{F_z}$$

конечны. Следовательно, интеграл (5.18) регулярен для конечных z, исключая, возможно, точки (5.19).

2°. Если $z=\infty$, то прежде всего для производной

$$F_w=mw^{m-1}+(m-1)Q_1w^{m-2}+\ldots$$

получается разложение

$$F_w=Az^{m-1}+Bz^{m-2}+\ldots,$$

следовательно, при $z=\infty$ она имеет самое большее полюс порядка $m-1$.

Предположим теперь, что этот порядок *равен* $m-1$, т. е. что $A\neq 0$. Это предположение можно свести к другому, более развернутому. Для этого запишем многочлен F в виде суммы однородных

многочленов $H_\nu(z, w)$ степеней ν:

$$F = \sum_{\nu=0}^{m} H_\nu(z, w).$$

Пусть здесь старший многочлен есть

$$H_m = \sum_{\nu=0}^{m} a_{m-\nu} z^{m-\nu} w^\nu.$$

Если положить $w = cz$, то корнями уравнения

$$H_m(z, cz) = z^m \overline{H}_m(c) \equiv z^m \sum_{\nu=0}^{m} a_{m-\nu} c^\nu = 0$$

будут коэффициенты $c_1, \ldots, c_m$ разложения (5.17).

С другой стороны, имеем

$$F_w = \sum_\nu \frac{\partial H_\nu}{\partial w},$$

и старший член получается здесь из

$$\frac{\partial H_m}{\partial w} = \sum_{\nu=1}^{m} \nu a_{m-\nu} z^{m-\nu} w^{\nu-1},$$

когда учитывается разложение $w = cz + R(1/z)$; тогда

$$\frac{\partial H_m}{\partial w} \sim z^{m-1} \sum_{\nu=1}^{m} \nu a_{m-\nu} c^{\nu-1},$$

так что

$$A = \sum_{\nu=1}^{m} \nu a_{m-\nu} c^{\nu-1} = \frac{\partial \overline{H}_m(c)}{\partial c}.$$

Следовательно, равенство нулю коэффициента A означает, что среди коэффициентов c_ν имеются равные.

5.47. Итак, сделаем теперь следующее предположение:

3°. *Коэффициенты c_ν в* (5.17) *все различны.*

Тогда F_w во всех лежащих над $z = \infty$ точках поверхности имеет в точности $(m-1)$-кратный полюс.

Отсюда вытекает, что интеграл $\int R\,dz$ остается конечным и для $z = \infty$, так как подинтегральное выражение Ψ / F_w имеет тогда в этой точке *нуль* по крайней мере второго порядка.

Сделаем теперь еще одно предположение:

4°. *На поверхности* $F=0$ *нет конечных критических точек* z, *где* $F=F_z=F_w=0$.

Тогда из предыдущих рассмотрений вытекает, что функция (5.18) на всей поверхности $\tilde{R}_z$ регулярна. Следовательно, она является интегралом первого рода.

5.48. Для определения числа линейно независимых интегралов (5.18) заметим, что многочлен

$$\Psi=\sum_{\nu=0}^{m-3}\Psi_\nu,$$

где Ψ_ν — однородный многочлен степени ν, содержит

$$\sum_{0}^{m-3}(\nu+1)=\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

неопределенных постоянных (следовательно, коэффициентов членов $z^\mu w^\nu$).

В предположениях 1°—4° *число линейно независимых интегралов первого рода на поверхности* $F=0$ *равно*

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

С другой стороны, по формуле Римана [1]), полная сумма порядков точек разветвления поверхности равна

$$\sum(r-1)=2m+2p-2,$$

где p означает род поверхности. В точке разветвления $P(z_0, w_0)$ алгебраическая функция $z(w)$ имеет разложение

$$z(w)-z(w_0)=c_0(w-w_0)^r+\ldots \qquad (c_0\neq 0),$$

так что

$$\frac{dz}{dw}=c_0r(w-w_0)^{r-1}+\ldots,$$

и так как $F_z(z(w_0), w_0)\neq 0$, то

$$F_w=-F_z\frac{dz}{dw}\sim(w-w_0)^{r-1}.$$

Следовательно, производная F_w имеет здесь нуль $(r-1)$-го порядка, откуда вытекает, что полная сумма порядков ее нулей равна $\sum(r-1)$.

---

[1]) Для замкнутой поверхности $\tilde{R}_z$ характеристика $\tilde{\chi}=2p-2$ (см. п. 5.8); подставляя в соотношение Римана — Гурвица $\tilde{\chi}=g\chi+\sum(k-1)$ (см. п. 3.16), получаем $2p-2=-2m+\sum(k-1)$, или $\sum(k-1)=2m+2p-2$ (формула Римана). — *Прим. перев.*

Полное число ее полюсов (считаемых с их кратностью) также равно $\sum(r-1)$; с другой стороны, этими полюсами являются точки, лежащие над $z=\infty$, и все они имеют порядок, в точности равный $m-1$. Отсюда следует, что

$$\sum(r-1)=m(m-1),$$

и из сравнения с формулой Римана получается, что

$$m(m-1)=2m+2p-2,$$

откуда

$$p=\frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Тем самым, в согласии с общей теорией, мы установили, что *существует p и только p линейно независимых абелевых интегралов первого рода.*

Этот результат мы вывели в предположениях 1°—4°. Простыми рассмотрениями, которые мы здесь проводить не будем, можно от этих ограничений освободиться, так что предыдущий результат действительно имеет место в общем случае.

5.49. Конформно эквивалентные поверхности. Бирациональные преобразования. Рассмотрим два алгебраических уравнения

$$F_1(z,\ w)=0,\quad F_2(z,\ w)=0$$

и определяемые ими римановы поверхности R_1 и R_2. Важный вопрос заключается в том, при каких условиях эти поверхности конформно эквивалентны. Для топологической эквивалентности поверхностей R_1 и R_2 необходимым и достаточным условием является равенство их характеристик χ_1 и χ_2 (или, что то же, их родов p_1 и p_2). В простейшем случае $p_1=p_2=0$, когда обе поверхности — типа сферы, они к тому же всегда и конформно эквивалентны. Если $p_1=p_2>0$, то это уже не так, каждый класс топологически эквивалентных поверхностей распадается на ряд конформных классов (их даже бесконечно много).

Допустим теперь, что поверхности R_1 и R_2 конформно эквивалентны, и пусть $P_1\longleftrightarrow P_2$ — взаимно однозначное и конформное соответствие между ними. Тем самым и между парами значений $(z_1,\ w_1)$ и $(z_2,\ w_2)$, соответствующих этим точкам, устанавливается взаимно однозначное соответствие. В самом деле, пусть z_1 — точка, над которой поверхность R_1 не имеет особенностей, и w_1 — одно из соответствующих значений w. Тогда паре $(z_1,\ w_1)$ однозначно соответствует некоторая точка P_1 поверхности R_1, последней же посредством заданного отображения сопоставляется вполне определенная точка поверхности R_2, тем самым и пара значений $(z_2,\ w_2)$, принадлежащая уравнению $F_2=0$. Если, напротив, $(z_1^0,\ w_1^0)$ — одна из (имею-

щихся в конечном числе) критических пар значений поверхности $F_1 = 0$, то, рассматривая вблизи нее регулярную пару значений (z_1, w_1) и совершая предельный переход $z_1 \to z_1^0$, $w_1 \to w_1^0$, находим пару значений (z_2^0, w_2^0) поверхности $F_2 = 0$, соответствующую заданной паре (z_1, w_1^0) поверхности $F_1 = 0$.

Отображение $P_1 \to P_2$ определяет, следовательно, на поверхности $F_1 = 0$ две однозначные функции

$$z_2 = z_2(z_1, w_1), \quad w_2 = w_2(z_1, w_1), \tag{5.20}$$

которые, очевидно, рациональны на R_1.

Так как в предыдущем заключении поверхности R_1 и R_2 равноправны, то z_1 и w_1 — рациональные функции от z_2 и w_2 на поверхности R_2:

$$z_1 = z_1(z_2, w_2), \quad w_1 = w_1(z_2, w_2). \tag{5.21}$$

Отсюда следует, что конформное отображение R_1 на R_2 осуществляется бирациональным преобразованием (5.20), (5.21). Согласно результатам п. 5.42, эти функции зависят рационально от каждого из своих аргументов, причем следует заметить, что рациональная форма этих выражений достигается, вообще говоря, только при учете заданных алгебраических соотношений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$ [1]).

Очевидно, что, обратно, бирациональное преобразование (5.20), (5.21) определяет взаимно однозначное и конформное соответствие между заданными поверхностями $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

---

[1]) В отличие от так называемых кремоновых преобразований, к которым относятся, например, проективные преобразования

$$z_2 = \frac{a_{11}z_1 + a_{12}w_1 + a_{13}}{a_{31}z_1 + a_{32}w_1 + a_{33}}, \quad w_2 = \frac{a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}}{a_{31}z_1 + a_{32}w_1 + a_{33}}, \quad |a_{ik}| \neq 0,$$

где рациональная обратимость не связана с наличием алгебраической зависимости между (z_1, w_1). Напротив, преобразование

$$z_2 = z_1^2, \quad w_2 = w_1^2$$

не допускает рационального обращения без дополнительного соотношения между (z_1, w_1), например соотношения $Az_1 + Bw_1 = 1$ (см. Аппель и Гурса [1*]). — *Прим. перев.*

Глава VI

ТЕОРЕМА РИМАНА ОБ ОТОБРАЖЕНИИ

Теорема Римана об отображении является основой всей теории конформных отображений и униформизации. Мы даем здесь доказательство этой фундаментальной теоремы, минимально использующее топологические свойства римановой поверхности. Из гл. II используются только первые два параграфа, в которых введено и рассмотрено общее понятие римановой поверхности (§ 1), а также понятие группы гомологий (§ 2). Частные свойства римановых поверхностей (триангулируемость с помощью дифференцируемых симплексов и основанная на этом возможность применения общих интегральных теорем теории функций) не предполагаются известными; напротив того, они получаются как следствия из теоремы об отображении.

При такой общности основных понятий из теоретико-функциональных средств мы сможем использовать прежде всего принцип максимума и минимума, позволивший нам уже в гл. IV провести с помощью альтернирующего метода некоторые основные построения теории потенциала.

Приведенное ниже доказательство теоремы об отображении справедливо и для случая областей числовой плоскости. Таким образом, мы не будем предполагать заранее известной теорему Римана для этого частного случая.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

6.1. Постановка задачи. Пусть R — открытая или замкнутая риманова поверхность, одномерная группа гомологий которой тривиальна (гомологически односвязная поверхность). Теорема Римана утверждает, что поверхность R, если она замкнута, всегда может быть топологически и конформно отображена на числовую сферу (эллиптический случай), в то время как для открытой поверхности R возможны два случая: R может быть топологически и конформно отображена либо на числовую плоскость (параболический случай), либо на внутренность единичного круга (гиперболический случай) [1]).

---

[1]) Обычно теорему Римана об отображении формулируют не для „гомологически односвязной" поверхности, а для „гомотопически односвязной" поверхности, т. е. для поверхности, *фундаментальная группа* которой три-

Эти три случая взаимно исключают друг друга. То, что эллиптический случай связан с компактностью R, ясно из топологических соображений. Напротив, то, что для открытой поверхности возможны два случая, „параболический“ и „гиперболический“, имеет причиной метрические свойства поверхности. Эти два случая также несовместны, ибо если бы некоторую риманову поверхность можно было конформно отобразить как на числовую плоскость, так и на внутренность единичного круга, то эти области были бы конформно эквивалентны, что невозможно, как это известно из элементарной теории функций (теорема Лиувилля). Следовательно, открытые гомологически односвязные римановы поверхности распадаются по конформной эквивалентности на два класса, в то время как замкнутые односвязные поверхности образуют один-единственный класс.

В дальнейшем нам нужно исследовать только случай открытых поверхностей; для замкнутых поверхностей теорема об отображении была уже доказана в § 5 гл. IV.

6.2. Из теоремы Римана об отображении следует, в частности, что все гомологически односвязные области G z-сферы, имеющие не менее двух граничных точек, конформно эквивалентны; все они гиперболического типа.

Следуя Кёбе, можно в этом убедиться следующим образом. С помощью линейного преобразования можно сделать так, чтобы указанными двумя граничными точками были $z=0$ и $z=\infty$ и чтобы точка $z=1$ принадлежала G.

Тогда, по принципу аргумента, та из ветвей функции

$$w=\frac{1}{1+\sqrt{z}}$$

в области G, которая определена условием $\sqrt{z}=+1$ для $z=1$, однозначна и, как сразу видно, ограничена. Если бы область G была конформно эквивалентна числовой плоскости $t\neq\infty$, то w была бы ограниченной непостоянной функцией от t, что невозможно. Следовательно, G — гиперболического типа.

6.3. Совокупность всех нормальных отображений. Предполагая справедливой теорему Римана об отображении, легко указать совокупность всех конформных отображений односвязной поверхности на одну из рассмотренных выше нормальных областей (замкнутая плоскость $|w|\leqslant\infty$, открытая плоскость $|w|<\infty$, единичный круг $|w|<1$).

Если поверхность R — эллиптическая, то конформное отображение на w-сферу определено с точностью до конформного отображения

виальна; вторая формулировка следует из первой, согласно п. 2.36. То, что обе формулировки равносильны, вытекает из теоремы об отображении, так как для нормальных областей (сфера, числовая плоскость, круг) эта равносильность очевидна.

сферы на себя. Самое общее такое отображение осуществляется с помощью дробно-линейного преобразования

$$w^* = \frac{aw + b}{cw + d} \quad (ad - bc \neq 0) \tag{6.1}$$

(ср. § 1 гл. VII).

Если поверхность R — параболического типа, то конформное отображение на плоскость w определено с точностью до конформного отображения открытой w-плоскости на себя, следовательно, с точностью до целого линейного преобразования (преобразования подобия)

$$w^* = aw + b.$$

В гиперболическом случае конформное отображение на единичный круг $|w| < 1$ определено с точностью до конформного отображения этого круга на себя. Такое отображение снова является линейным. Действительно, если $w \longleftrightarrow w^*$ — отображение круга $|w| < 1$ на себя и a^* — образ точки a ($|a| < 1$, $|a^*| < 1$), то с помощью линейных преобразований T и T^*, оставляющих этот круг инвариантным, можно a и a^* соответственно перевести в нулевую точку. Тогда функция $T^*[w^*(w)]/T(w)$ для $|w| \leqslant 1$ отлична от нуля, регулярна и на окружности $|w| = 1$ по абсолютному значению равна 1. Следовательно, по принципу максимума и минимума, она — постоянная, т. е. $w^*(w)$ — линейная функция от w.

§ 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА ОТКРЫТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

6.4. Функция Грина круговой области. Пусть R — произвольная открытая (не обязательно односвязная) риманова поверхность и B — круговая область на R в смысле определения п. 4.15, следовательно, (связное) соединение конечного числа „кругов“ или „круговых колец“.

Пусть $z = \zeta$ — произвольная внутренняя точка области B (в дальнейшем z означает произвольный фиксированный локальный параметр в окрестности ζ). Тогда в B, согласно § 4 гл. IV, существует функция $G(z, \zeta)$ со следующими свойствами:

1. $G(z, \zeta)$ внутри B однозначна и гармонична, исключая $z = \zeta$, где

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \gamma + [(z - \zeta)]^{1}).$$

2. G непрерывна в B для $z \neq \zeta$ и равна нулю на границе β области B [2]).

---

[1]) $[(z - \zeta)] = a(z - \zeta) + \ldots$ — *Прим. перев.*

[2]) Согласно гл. IV, нельзя, собственно говоря, сделать заключение об этом свойстве на всей границе β; a priori может случиться, что в конечном числе точек β функция G не обращается в нуль, а остается лишь ограниченной

Из принципа минимума следует, что $G(z, \zeta)$ однозначно определяется этими условиями и, далее, что $G(z, \zeta) > 0$ внутри B.

Постоянная γ называется постоянной Робэна области B относительно точки ζ, а $c = e^{-\gamma}$ называется *емкостной постоянной*. Она имеет ковариантный характер.

6.5. Функция Грина открытой поверхности. Пусть теперь R — произвольная риманова поверхность и $z = \zeta$ — точка на R. Чтобы определить функцию Грина поверхности R, мы исчерпываем R монотонной последовательностью круговых областей

$$B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots \quad (B_n \to R),$$

что возможно в силу аксиомы счетности. Пусть B_1 уже содержит точку ζ, и пусть β_n — граница B_n.

Пусть, далее,

$$G_n(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|\zeta - z|} + \gamma_n + [(z - \zeta)]$$

— функция Грина области B_n. Разность $G_n - G_m$ $(n > m)$ регулярна в B_m и неотрицательна на β_m. Следовательно, по принципу минимума, для каждого $n > m$

$$G_n(z, \zeta) \geqslant G_m(z, \zeta)$$

в B_m; в частности, при $z \to \zeta$ отсюда вытекает, что

$$\gamma_n \geqslant \gamma_m.$$

Следовательно, существует предельное значение

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma \leqslant \infty.$$

Число $c = e^{-\gamma} \geqslant 0$ называется *емкостной постоянной* поверхности R относительно точки ζ.

6.6. Поверхности с положительной емкостной постоянной. Предположим, что величина γ конечна, следовательно, $c > 0$. Тогда, по принципу Харнака, последовательность $G_n(z, \zeta)$ сходится к предельной функции $G(z, \zeta)$, обладающей следующими свойствами:

1. $G(z, \zeta)$ однозначна и гармонична на R, исключая $z = \zeta$, где

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \gamma + [(z - \zeta)].$$

в их окрестности. Мы не будем здесь вдаваться в этот вопрос. Все последующие рассуждения проходят и в том случае, когда имеется конечное число таких исключительных точек. В самом деле, нам придется опираться лишь на принцип максимума и минимума, он же, согласно § 4 гл. III, применим и тогда, когда имеется конечное число граничных точек указанного рода.

2. $G(z, \zeta) > 0$ на R.

$G(z, \zeta)$ называется *функцией Грина* поверхности R.

6.7. Минимальное свойство функции Грина. В общем случае, однако, уже не выполняется соотношение $G(z_n, \zeta) \to 0$ для любой бесконечной последовательности точек z_n, не имеющей точки сгущения на R [1]).

Поэтому вместо равенства нулю на границе в качестве характерного свойства функции Грина открытой поверхности выступает минимальное свойство функции Грина, которое нужно теперь доказать.

Минимальное свойство. *Пусть $U(z, \zeta)$ — произвольная положительная функция на R, гармоническая при $z \neq \zeta$, а при $z = \zeta$ имеющая вид*

$$U(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \textit{регулярная функция}.$$

Тогда

$$G(z, \zeta) \leqslant U(z, \zeta).$$

Если в некоторой точке $z \neq \zeta$ имеет место равенство, то оно справедливо тождественно.

Доказательство. Пусть $z = a \neq \zeta$ — произвольная точка R, и пусть n настолько велико, что $a \in B_n$. На β_n $U(z, \zeta) - G_n(z, \zeta) > 0$, поэтому, по принципу минимума, то же самое должно иметь место в B_n. Отсюда вытекает, что $G_n(a, \zeta) < U(a, \zeta)$; следовательно, и

$$G(a, \zeta) = \lim_{n \to \infty} G_n(a, \zeta) \leqslant U(a, \zeta).$$

Поэтому разность $U - G$ неотрицательна. Если она принимает минимальное значение, равное нулю, в некоторой точке z, то оно тождественно равна нулю, и тем самым теорема доказана.

Из минимального свойства вытекает, в частности, что функция Грина $G(z, \zeta) = \lim G_n(z, \zeta)$ не зависит от способа исчерпания поверхности R круговыми областями.

Далее, функция Грина поверхности R', лежащей на R, не превосходит функции Грина поверхности R.

Дополнение. Предыдущая теорема справедлива a fortiori для каждой положительной гармонической функции $U(z, \zeta)$, которая

---

[1]) Не имеет никакого смысла говорить о границе открытой поверхности R не расположенной на компактной части другой поверхности, ибо она не имеет никакого „действительного представления". Поэтому мы говорим только об „идеальной границе" поверхности.

Для *односвязной* гиперболической поверхности функция $G(z, \zeta)$ на идеальной границе обращается в нуль. Это получается, однако, лишь как следствие из теоремы Римана об отображении. Для области, принадлежащей числовой плоскости, это следует (без теоремы Римана об отображении) из п. 6.10.

в точке $z=\zeta$ имеет указанный выше положительный логарифмический полюс и, кроме того, имеет произвольное множество (ζ^*) особых точек, таких, что $U\to+\infty$ при $z\to\zeta^*$. Это дополнение получается повторением предыдущего рассуждения, причем R нужно заменить поверхностью $R-(\zeta^*)$.

6.8. Критерий существования функции Гриа. Из этого дополнения получается следующий критерий существования функции Грина поверхности R:

Если на R существует положительная гармоническая функция $U(z, \zeta)$, имеющая для $z=\zeta$ разложение

$$U(z,\zeta)=\ln\frac{1}{|z-\zeta|}+\text{регулярная функция}$$

и при $z\neq\zeta$ имеющая только такие особенности ζ^*, что $\lim U=+\infty$ при $z\to\zeta^*$, то существует функция Грина $G(z, \zeta)$.

В самом деле, если U — такая функция, то по принципу минимума, примененному к области B_n, в каждой точке $z\neq\zeta$, ζ^*

$$G_n(z,\zeta)\leqslant U(z,\zeta).$$

Поэтому предельное значение $G(z,\zeta)=\lim G_n$ *конечно*, т. е. функция Грина $G(z, \zeta)$ существует.

В частности, отсюда следует, что каждая риманова поверхность R, на которой существует непостоянная ограниченная регулярная аналитическая функция $f(z)$, обладает функцией Грина $G(z, \zeta)$ для всех точек ζ. В самом деле, если $|f|<M$, то гармоническая функция

$$U(z,\zeta)=\ln\frac{2M}{|f(z)-f(\zeta)|}$$

удовлетворяет предыдущим условиям для каждой точки ζ, где $f'(\zeta)\neq 0$. Если же f' имеет в ζ нуль $(n-1)$-го порядка, то заменяем U на $\frac{1}{n}U$.

Если, в частности, R — ограниченная область числовой плоскости, то можно за f принять функцию $f=z$. Следовательно, каждая ограниченная область плоскости z имеет функцию Грина.

6.9. Функции Грина конформно эквивалентных поверхностей. Пусть $\tilde{R}$ и R — две открытые римановы поверхности и f — однозначное конформное отображение $\tilde{R}\to R$. Если тогда R для некоторой точки ζ обладает функцией Грина $G(z, \zeta)$, то существует и функция Грина $\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$ поверхности $\tilde{R}$ для каждого прообраза $\tilde{\zeta}$ точки ζ.

Для доказательства рассмотрим на $\tilde{R}$ функцию

$$\tilde{U}(\tilde{z},\tilde{\zeta})=G(f(\tilde{z}),f(\tilde{\zeta})),$$

она однозначна и положительна, так как имеет то же самое множество значений, что и $G(z, \zeta)$. В каждом прообразе $\tilde{\zeta} \in \tilde{R}$ точки ζ имеет место разложение

$$\tilde{U}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = \ln \frac{1}{|f(\tilde{z}) - f(\tilde{\zeta})|} + \text{регулярная функция} = \ln \frac{1}{|\tilde{z} - \tilde{\zeta}|} + \ldots .$$

Вследствие этого функция $\tilde{U}$ удовлетворяет предположениям п. 6.8, и поэтому существует функция Грина $\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$, что и требовалось доказать.

В частности, отсюда следует, что каждая неразветвленная поверхность наложения поверхности R обладает функцией Грина для любой из точек, расположенных над точкой ζ.

Если к тому же отображение $\tilde{R} \to R$ взаимно однозначно, следовательно, поверхности $\tilde{R}$ и R конформно эквивалентны, то $\tilde{U}(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$ есть функция Грина поверхности $\tilde{R}$ для точки $\tilde{\zeta}$.

Действительно, пусть $\tilde{\zeta}$ — прообраз ζ на $\tilde{R}$. Тогда, как было показано выше, существует функция Грина $\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta})$ и

$$\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) \leqslant \tilde{U}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = G(f(\tilde{z}), f(\tilde{\zeta})).$$

Так как теперь $\tilde{R}$ и R равноправны, то для обратного отображения справедливо неравенство

$$G(z, \zeta) \leqslant \tilde{G}(f^{-1}(z), f^{-1}(\zeta))$$

или, что то же,

$$G(f(\tilde{z}), f(\tilde{\zeta})) \leqslant \tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}).$$

Следовательно,

$$\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = G(f(\tilde{z}), f(\tilde{\zeta})),$$

что и требовалось доказать.

Связь между *емкостями* $c = e^{-\gamma}$ и $\tilde{c} = e^{-\tilde{\gamma}}$ поверхностей R и $\tilde{R}$ может быть указана явно. По определению емкости, имеем

$$\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = \ln \frac{1}{|\tilde{z} - \tilde{\zeta}|} + \tilde{\gamma} + [(\tilde{z} - \tilde{\zeta})]$$

и, по построению функции $\tilde{G}$,

$$\tilde{G}(\tilde{z}, \tilde{\zeta}) = \ln \frac{1}{|f(\tilde{z}) - f(\tilde{\zeta})|} + \gamma + [(f(\tilde{z}) - f(\tilde{\zeta}))] =$$

$$= \ln \frac{1}{|\tilde{z} - \tilde{\zeta}|} + \ln \frac{1}{|f'(\tilde{\zeta})|} + \gamma + [(\tilde{z} - \tilde{\zeta})].$$

Поэтому

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \ln \frac{1}{|f'(\tilde{\zeta})|},$$

и для емкостных постоянных c и $\tilde{c}$ имеем[1])

$$\tilde{c} = c\,|f'(\tilde{\zeta})| = c\left|\frac{d\zeta}{d\tilde{\zeta}}\right|.$$

6.10. Поведение на идеальной границе. Как уже было отмечено, при приближении к идеальной границе поверхности R функция Грина, вообще говоря, не обращается в нуль всюду без исключений. Например, для круга $|z|<1$ с выколотой точкой $z=a$ $(0<|a|<1)$ эта функция (для $\zeta=0$) совпадает с соответствующей функцией Грина $G(z, 0)=\ln\frac{1}{|z|}$ всего круга, что легко вытекает из минимального свойства п. 6.7. Следовательно, G не стремится к нулю при $z\to a$.

Для дальнейшего важно то, что функция Грина обязательно равна нулю на границе R, если R — *односвязная* ограниченная область R_z числовой плоскости.

При доказательстве этого можно предположить, что R_z лежит в круге $|z|<1$ и что граничная точка $z=a$, относительно которой нужно доказать, что в ней функция Грина равна нулю, совпадает с нулевой точкой $z=0$, так как такого расположения всегда можно добиться линейным преобразованием плоскости z.

Отобразим тогда область R_z с помощью функции $w=u+iv=\ln z$ в w-плоскость. В силу односвязности R_z, это отображение может быть однозначно нормировано; оно тогда *взаимно однозначно* и образ R_w области R_z лежит в полуплоскости $u<0$. Согласно п. 6.9 функции Грина конформно эквивалентных поверхностей R_z и R_w, связаны тождеством

$$G_z(z, z_0)=G_w(w, w_0),$$

где z, w и z_0, w_0 — соответствующие друг другу точки. С другой стороны, согласно п. 6.7, функция G_w мажорируется функцией Грина G_w^* полуплоскости $u<0$, откуда следует, что

$$0<G_z(z, z_0)\leqslant G^*(w, w_0)=-\ln\left|\frac{w-w_0}{w+w_0}\right|.$$

Если $z\to 0$, то $u\to-\infty$, поэтому $G^*\to 0$, следовательно, и $G_z(z, z_0)\to 0$, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает, что функции Грина G_1 и G_2 двух областей R_1 и R_2 $(R_2\subset R_1)$ числовой плоскости, из которых R_2 односвязна, не могут совпадать, если R_2 — *правильная* часть R_1. В самом деле, тогда существует граничная точка a области R_2, лежащая внутри R_1; по предыдущему, там $G_2\to 0$, в то время как $G_1>0$, откуда и следует утверждение.

[1]) Ср. с указанием в п. 6.4 на ковариантный характер емкостной постоянной. — *Прим. перев.*

§ 3. ОДНОСВЯЗНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

6.11. Выражение искомой отображающей функции. Пусть R — поверхность, конформно эквивалентная единичному кругу, и $w = F(z, \zeta)$ — аналитическая функция, которая отображает R топологически и конформно на единичный круг E ($|w| < 1$) так, что точка $z = \zeta$ переходит в нулевую точку $w = 0$. Так как единичный круг обладает функцией Грина $\tilde{G}(w, 0)$ с полюсом $w = 0$, то, согласно п. 6.9, поверхность R обладает функцией Грина $G(z, \zeta)$ с полюсом $z = \zeta$, причем

$$G(z, \zeta) = \tilde{G}(w, 0) = \ln \frac{1}{|w|},$$

где z и w — точки, соответствующие друг другу при отображении $R \to E$.

Поэтому для сопряженной к $G(z, \zeta)$ гармонической функции G' имеем

$$G'(z, \zeta) = -\arg w.$$

Следовательно, многозначности G' определяются периодами вида $2\pi n$ (n — целое число).

Из этих соотношений вытекает, что отображающая функция имеет вид

$$w(z, \zeta) = e^{-G - iG'}. \tag{6.2}$$

Следовательно, если поверхность R может быть конформно отображена на единичный круг $|w| < 1$, то отображающая функция имеет вид (6.2). Теперь мы, обратно, покажем, что эта функция действительно осуществляет топологическое и конформное отображение R на единичный круг E, если только поверхность R (гомологически) односвязна и обладает конечной функцией Грина.

6.12. Пусть R — гомологически односвязная поверхность, обладающая для заданной точки ζ функцией Грина

$$G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z - \zeta|} + \gamma + [(z - \zeta)].$$

Сопряженная гармоническая функция G' при обходе вокруг точки $z = \zeta$ имеет период 2π и в остальном однозначна. В самом деле, G' определена, с точностью до аддитивной постоянной интегрирования, как мнимая часть интеграла от коварианты

$$\varphi = G_x - iG_y,$$

которая в точке $z = \zeta$ имеет полюс с вычетом, равным -1, и в остальном регулярна. Отсюда утверждение следует по теореме о вычетах, которая, в силу (гомологической) односвязности R, применима к каждому замкнутому пути интегрирования.

Теперь мы образуем аналитическую функцию

$$w(z, \zeta) = e^{-G-iG'}. \tag{6.3}$$

Она на R *однозначна* и регулярна всюду, включая полюс $z=\zeta$ функции G, где она равна нулю и имеет разложение

$$w(z, \zeta) = c(z-\zeta)+\ldots;$$

здесь $c = e^{-\gamma}$ при подходящем выборе постоянной интегрирования. Так как $G > 0$, то для абсолютного значения $|w|$ имеем

$$|w(z, \zeta)| = e^{-G} < 1.$$

6.13. Функция $w = w(z, \zeta)$ осуществляет однозначное отображение R в круг $|w| < 1$. Точка $z=\zeta$ — ее единственный нуль, и здесь имеет место разложение

$$w(z, \zeta) = c(z-\zeta)+\ldots.$$

Замечание. Таким образом, мы построили на R однозначную ограниченную аналитическую функцию w. Из п. 6.8 следует, что R обладает функцией Грина для *каждой* точки ζ.

Теперь мы покажем, что это отображение *взаимно однозначно*[1]); отсюда будет следовать, согласно п. 2.42, что оно топологическое. Пусть $z=a$ и $z=b$ — две различные точки поверхности R, $G(z, a)$ и $G(z, b)$ — соответствующие функции Грина и $w(z, a)$, $w(z, b)$ — соответствующие функции (6.3). Тогда функция

$$w(z; a, b) = \frac{w(z, b) - w(a, b)}{1 - \overline{w(a, b)}\, w(z, b)} \tag{6.4}$$

на R по абсолютному значению < 1 и обращается в нуль при $z=a$ (k-кратно). Поэтому гармоническая функция $-\frac{1}{k}\ln|w(z; a, b)| \equiv U(z)$ удовлетворяет обобщенным условиям дополнения п. 6.7, и так как $k \geqslant 1$, то по минимальному свойству функции Грина,

$$-\ln|w(z; a, b)| \geqslant G(z, a) \equiv -\ln|w(z, a)|,$$

откуда

$$\left|\frac{w(z; a, b)}{w(z, a)}\right| \leqslant 1, \tag{6.5}$$

причем равенство для некоторого значения z может иметь место только тогда, когда оно выполняется тождественно, следовательно, когда

$$|w(z; a, b)| \equiv |w(z, a)|. \tag{6.6}$$

Но для одного значения z, а именно для $z=b$, равенство действительно имеет место. Для доказательства этого подставим значение

[1]) Относительно идеи нижеследующего доказательства см. Хейнс [1].

$z = b$ в (6.4) и (6.5); тогда, учитывая, что $w(b, b) = 0$, получаем

$$|w(b; a, b)| = |w(a, b)| \leqslant |w(b, a)|.$$

Так как точки a и b равноправны, то их можно поменять здесь местами, что приводит к неравенству

$$|w(b, a)| \leqslant |w(a, b)|.$$

Итак,

$$|w(a, b)| = |w(b, a)| \quad (\neq 0),$$

и, следовательно, отношение (6.5) достигает в точке $z = b$ максимума, равного 1. Этим тождество (6.6) доказано.

Из него следует взаимная однозначность рассматриваемого отображения $w = w(z, \zeta)$. В самом деле, так как, в силу определения (6.3), $w(z, a) \neq 0$ для $z \neq a$, то, в силу (6.6),

$$w(z, a, b) \neq 0 \quad \text{для} \quad z \neq a,$$

или, ввиду (6.4),

$$w(z, b) \neq w(a, b) \quad \text{для} \quad z \neq a.$$

Но это и означает взаимную однозначность отображения $w = w(z, \zeta)$ для $b = \zeta$.

6.14. Остается, наконец, показать, что $w = w(z, \zeta)$ отображает поверхность R на *весь* круг $|w| < 1$.

Для доказательства заметим, что функция Грина $G_w(w, 0)$ образа R_w поверхности R равна функции Грина $G(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|w(z, \zeta)|}$ (см. п. 6.9):

$$G_w(w, 0) \equiv \ln \frac{1}{|w|}.$$

Следовательно, область R_w, которая, как топологический образ R, односвязна, имеет ту же функцию Грина, что и мажорирующий единичный круг $|w| < 1$. Согласно п. 6.10, R_w должна тогда сплошь заполнять этот круг, что и требовалось доказать.

Этим доказано, что *функция $w = w(z, \zeta)$ отображает поверхность R топологически и конформно на единичный круг $|w| < 1$.*

6.15. Приложение к подобластям плоскости. Доказав теорему Римана об отображении для гиперболического случая, мы тем самым полностью обосновали ее для каждой односвязной области z-сферы.

В самом деле, если G — вся сфера или сфера с одной выколотой точкой, то она уже имеет нормальную форму (эллиптический, соответственно параболический случай).

Если, напротив, G имеет по крайней мере две граничные точки, то на G существует, согласно п. 6.2, однозначная ограниченная анали-

тическая функция $w(z)$. Поэтому, согласно п. 6.8, G имеет функцию Грина и, следовательно, может быть топологически и конформно отображена на единичный круг.

6.16. Критика доказательства существования. Чтобы облегчить понимание взаимосвязей, пожалуй, не очень легко обозримых, между тополого-метрическим определением римановой поверхности и теоретико-функциональными принципами, необходимыми для доказательства теоремы Римана об отображении, сделаем еще несколько замечаний о проведенном выше доказательстве и его отношении к прежним доказательствам.

Прежде всего, что касается понятия римановой поверхности, то предыдущее доказательство применимо при общем определении Вейля—Радо, по которому такая поверхность есть двумерное многообразие с конформными соотношениями соседства (п. 2.23).

Триангулируемость римановой поверхности при доказательстве совершенно не была использована, более того, это свойство каждой римановой поверхности R мы получим в дальнейшем как следствие из теоремы об отображении.

В том виде, в котором доказательство было изложено выше, оно опиралось на *аксиому счетности*. Она была доказана в § 3 гл. IV для каждой римановой поверхности, без применения теоремы Римана об отображении или теории униформизации.

Теоретико-функциональные вспомогательные средства, которыми нам пришлось воспользоваться, были достаточно простыми. Нужно было только с помощью альтернирующего метода Шварца решить краевую задачу для „круговых областей". Это было сделано в гл. IV с помощью следующих простых вспомогательных средств: 1) решения первой краевой задачи теории потенциала для круга с помощью интеграла Пуассона; 2) применения обобщенных принципов максимума и минимума (гл. III, § 4). При этом существенно было то, что сходимость альтернирующего метода в случае ограниченных решений без особенностей получалась из монотонности аппроксимирующих решений. Первоначальное доказательство сходимости Шварца [1], которое можно найти в большинстве учебников по теории функций (см., например, Курант [1*]), опирается, как известно, на лемму, делающую возможной мажорирование сходящимся рядом геометрической прогрессии. При общности настоящей задачи представляет существенное преимущество то, что эта лемма становится излишней при построении ограниченных не имеющих особенностей решений краевой задачи (ср. гл. IV, § 1). Напротив, метод Шварца для получения решений *с заданными особенностями* непосредственно применим при тех общих предположениях, которые лежат в основе нашей проблемы (ср. гл. IV, § 4).

Общность наших предположений, очевидно, принципиально исключает применение интегральных теорем, основанных на возможности

триангуляции, и прежде всего *принципа аргумента*; этот принцип в прежних доказательствах теоремы Римана об отображении играл решающую роль в доказательстве однолистности отображающей функции. В предыдущем доказательстве в качестве заменителя принципа аргумента был использован *принцип максимума* (см. Хейнс [1]).

Наконец, нужно сказать еще следующее о том, каким образом при доказательстве было использовано предположение об *односвязности* поверхности: для проведения доказательства на базе заданных основных понятий существенным было то, что при исчерпании односвязной поверхности можно было обойтись произвольными круговыми областями, независимо от того, *односвязны* эти области или нет. Топологическая же теорема, по которой открытая односвязная поверхность исчерпаема односвязными компактными подобластями, требует — даже в предположении триангулируемости — не совсем простого доказательства [1]). Как уже упоминалось, здесь эта топологическая теорема совершенно не использовалась (даже не предполагалась триангулируемость R). Более того, эта топологическая теорема следует из предыдущего доказательства, пока, однако, только для односвязных поверхностей, обладающих функцией Грина.

§ 4. ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Теперь нужно показать, что (гомологически) односвязная открытая риманова поверхность R, не обладающая конечной функцией Грина, конформно эквивалентна открытой числовой плоскости $w \neq \infty$. Для этого мы предварительно докажем некоторые леммы, имеющие большое значение и для более общих вопросов теории открытых (не обязательно односвязных) поверхностей (ср. гл. X).

6.17. Гармоническая мера идеальной границы. Пусть R — произвольная открытая риманова поверхность (следовательно, о группе гомологий поверхности пока никаких предположений не делается). Пусть U — параметрическая окрестность и $K(r_1 \leqslant |z| \leqslant r)$ — круговое кольцо в U. Рассмотрим поверхность $R_1 = R - B_1$, где B_1 означает круг $|z| \leqslant r_1$, и последовательность

$$K \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots; \quad A_n \to R_1,$$

круговых областей на R_1, которые исчерпывают эту поверхность; граница области A_n состоит из кривой $\alpha(|z| = r_1)$ и некоторой не пересекающейся с ней части Γ_n [2]).

Построим гармоническую меру $\omega_n(z)$ этой части Γ_n относительно области A_n, т. е. однозначную гармоническую функцию

---

[1]) В том строгом доказательстве, которое дал Ван-дер-Варден [1], доказательство возможности такого исчерпания занимает важное место.

[2]) $A_n \to R_1 + \alpha$. — *Прим. перев.*

на A_n, которая равна 1 на Γ_n и 0 на α. Из принципа максимума вытекает, что последовательность ω_n с возрастанием n монотонно убывает. По принципу Харнака, существует предельное значение

$$\lim \omega_n = \omega$$

на R_1. Функция $\omega(z)$ гармонична и удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \omega(z) < 1$; при этом $\omega = 0$ на α. Следовательно, возможны два случая: либо $\omega \equiv 0$ на R_1, либо ω на R_1 отлична от постоянной и тогда $0 < \omega < 1$. Это различие не зависит от выбора исчерпывающей последовательности A_n (см. п. 6.18).

В первом случае мы говорим, что идеальная граница Γ поверхности R_1 — *гармонической меры нуль*; во втором случае, — что гармоническая мера $\omega(z)$ идеальной границы Γ *положительна*.

6.18. Гармоническая мера и функция Грина. Теперь мы покажем, что если идеальная граница Γ открытой поверхности $R_1 = R - B_1$ имеет *положительную* гармоническую меру, то поверхность R обладает функцией Грина.

Итак, предположим, что построенная в п. 6.17 гармоническая мера $\omega(z) = \lim \omega_n(z)$ идеальной границы Γ относительно R_1 (при некотором заданном выборе круга B_1) *положительна*, и докажем, что из этого предположения вытекает существование функции Грина поверхности R.

В самом деле, для построения функции Грина можно тогда применить метод Шварца § 4 гл. IV в точности так, как для компактных подобластей с краем, причем в качестве „сингулярной части“ u_0 мы примем

$$u_0 = -\ln|z|.$$

6.19. Для того, чтобы в этом убедиться, мы должны несколько подробнее остановиться на двух основных моментах построения § 4 гл. IV.

1°. *Построение нормированного решения первой краевой задачи для поверхности* R_1. Для рассмотренного в п. 4.25 случая *компактной* части заданной римановой поверхности, ограниченной α и γ, нормировка состояла в требовании, чтобы подлежащая построению гармоническая функция u, принимающая на α произвольно заданные непрерывные граничные значения, на граничной части γ *равнялась нулю*. В настоящем случае, когда граничная часть $\gamma = \Gamma$ не имеет никакого действительного представления, соответственно нормированное решение строится путем предельного перехода. Для этого поверхность R_1 снова исчерпывают круговыми областями A_n и решают краевую задачу для компактных областей A_n с произвольно заданными непрерывными значениями $f(z)$ на α и значением нуль на Γ_n. Тогда при $n \to \infty$ в качестве предела этого нормированного

решения u_n получают гармоническую функцию u [1]), которая на R_1 однозначна, гармонична и принимает на α граничные значения f; u называется *нормированным* решением в R_1, соответствующим этим граничным значениям.

2°. *Оценка абсолютного значения нормированного решения.* Выражение $M(1-\omega_n)$, где

$$M = \max_{z \in \alpha} |f(z)|,$$

является, очевидно, мажорантой для $|u_n|$. Отсюда при $n \to \infty$ следует, что

$$|u| \leqslant M(1-\omega).$$

Пусть

$$q = \max_{\Gamma_1} (1-\omega);$$

тогда $0 < q < 1$ и

$$|u| \leqslant qM$$

на Γ_1. Следовательно, справедливо неравенство, аналогичное неравенству (имевшему важное значение для доказательства сходимости метода Шварца), которое было использовано в § 4 гл. IV [2]).

6.20. Теперь можно непосредственно применить метод § 4 гл. IV. Принимая за сингулярную часть $u_0 = \ln \frac{1}{|z|}$, мы придем к непостоянной функции u, которая на всей поверхности R однозначна, положительна и гармонична, исключая (положительный) логарифмический полюс в точке P, соответствующей значению параметра $z = 0$. Согласно критерию п. 6.8, из существования такой функции на R следует, что R обладает функцией Грина.

Итак, для поверхности с нулевой емкостной постоянной *гармоническая мера идеальной границы* Γ *относительно* $R_1 = R - B_1$ *должна равняться нулю* [3]).

6.21. Обобщение принципа максимума. Рассмотрим случай, когда Γ имеет *гармоническую меру нуль*, и докажем следующее обобщение принципа максимума:

---

[1]) Если граничные значения $f(z)$ функции u_n на α неотрицательны, то аппроксимирующие функции u_n образуют монотонную ограниченную последовательность и доказательство сходимости ведется с помощью принципа Харнака. Если f меняет знак, то представляем f в виде разности двух неотрицательных функций с помощью соотношения $f = \frac{1}{2}[|f|+f] - \frac{1}{2}[|f|-f]$.

[2]) Имеется в виду неравенство $|u_{n+1} - u_n| \leqslant qM_n$ на β п. 4.27. — *Прим. перев.*

[3]) Справедливо и обратное (см. п. 10.12). — *Прим. перев.*

Пусть $u(z)$ — однозначная, регулярная и ограниченная ($u \leqslant M < \infty$) гармоническая функция на поверхности R_1, и пусть

$$\overline{\lim}\, u(z) \leqslant m$$

в каждой граничной точке на α. Тогда на всей поверхности R_1 выполняется соотношение

$$u(z) \leqslant m.$$

Доказательство. В области A_n выражение

$$m + (M - m)\,\omega_n(z)$$

образует гармоническую мажоранту для $u(z)$. Если при фиксированном z мы совершим предельный переход $n \to \infty$, то, в силу $\omega_n \to 0$, получим требуемое неравенство.

6.22. При тех же предположениях относительно Γ докажем следующую лемму:

Пусть $u(z)$ — однозначная, регулярная и ограниченная с обеих сторон ($|u| \leqslant M < \infty$) гармоническая функция на R_1. Тогда на окружности $\beta(|z| = r)$ для сопряженного дифференциала du' справедливо соотношение

$$\int_\beta du' = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим для заданного $m \geqslant 1$ последовательность $K \subset A_1 \subset \ldots \subset A_m \subset \ldots$ (см. п. 6.17); ориентацию границы области A_ν выберем так, чтобы область лежала „слева“. Так как каждая область A_ν ($\nu = 2, \ldots, m$) получается из $A_{\nu-1}$ присоединением конечного числа „кругов“, то из леммы п. 4.36 следует, что граница области A_ν гомологична на A_ν границе области $A_{\nu-1}$. Тем самым и граница $\alpha + \Gamma_m$ области A_m гомологична на A_m границе $\alpha + \beta^{-1}$ „кольца“ K, следовательно, $\Gamma_m \sim \beta^{-1}$ на A_m. Так как функция u регулярна в замкнутой области A_m, то

$$\int_\beta du' = -\int_{\Gamma_m} du'.$$

Применим эту формулу к гармонической функции u_m, однозначно определенной граничными значениями $u_m = u$ на β, $u_m = M$ на Γ_m; u_m (согласно принципу симметрии) гармонична также на Γ_m и

$$\int_\beta du'_m = -\int_{\Gamma_m} du'_m.$$

Так как $u_m \leqslant M$ в A_m, в то время как $u_m = M$ на Γ_m, то дифференциал $du'_m = -\frac{du_m}{dy}\,dx + \frac{du_m}{dx}\,dy$ на Γ_m неотрицателен и, следова-

тельно,

$$\int_{\beta} du'_m \geqslant 0.$$

Но при $m \to \infty$ разность $|u_m - u|$ стремится к нулю, так как на β она равна нулю и на Γ_m не превосходит $2M\omega_m$, следовательно, и во всей области A_m она мажорируется этим выражением. Поэтому $u_m \to u$ в окрестности β равномерно, следовательно,

$$\int_{\beta} du' \geqslant 0.$$

Заменяя u_m выражением $u_m - M\omega_m$, найдем аналогичным образом, что

$$\int_{\beta} du' \leqslant 0,$$

следовательно, как утверждалось,

$$\int_{\beta} du' = 0.$$

6.23. Построение нормального потенциала третьего рода. Сохраняя все время предположение о равенстве нулю гармонической меры идеальной границы Γ, мы можем теперь, так же как в § 4 гл. IV, построить гармоническую функцию $u(z; a, b)$ — нормальный потенциал третьего рода — со следующими свойствами:

1°. Функция u всюду на R однозначна и гармонична, исключая едве точки a и b, лежащие в B_1, где она становится логарифмически эбесконечной, так что разность

$$u - \ln\left|\frac{z-a}{z-b}\right|$$

гармонична в B_1.

2°. На R_1 абсолютное значение $|u|$ ограничено.

В этом случае можно без изменений применить альтернирующий метод Шварца — Неймана § 5 гл. IV. В самом деле, при проведении этого метода существенное значение имели следующие три обстоятельства:

1. Возможность построения на R_1 ограниченного решения первой краевой задачи с непрерывными граничными значениями на α. Это построение проводится сначала для областей A_n с нулевыми граничными значениями на Γ_n, после чего искомое решение получается предельным переходом при $n \to \infty$.

2. Справедливость принципа максимума в формулировке п. 6.21.

3. Обращение в нуль вдоль β периода функции u', сопряженной к однозначной ограниченной гармонической функции u на R_1. Это условие выполняется согласно п. 6.22.

Опираясь на это, мы можем, следовательно, согласно § 5 гл. IV, построить на R потенциал $u(z; a, b)$ со свойствами 1°, 2°. Кроме того, так же как в случае замкнутой поверхности R, он этими условиями *определен однозначно* с точностью до аддитивной постоянной. В самом деле, если $v(z; a, b)$ — вторая функция того же вида, то разность $u-v$ ограничена на R. Если ζ — та точка на α, в которой абсолютное значение $|u-v|$ достигает своего максимума M (относительно α), то $|u-v|\leqslant M$ в круге B_1 и, по обобщенному принципу максимума п. 6.21, это же неравенство имеет место на всей поверхности R_1. Следовательно, $|u-v|$ достигает максимума в регулярной точке ζ поверхности R, откуда следует, что $u-v$ сводится к постоянной, что и требовалось доказать.

6.24. Доказательство теоремы об отображении для параболического случая. Рассмотрим теперь случай, когда R — (гомологически) односвязная поверхность, не обладающая функцией Грина. Тогда поверхность R_1 имеет, согласно п. 6.18, идеальную границу Γ гармонической меры нуль. Мы утверждаем, что функция

$$w(z; a, b) = e^{u+iu'},$$

где $u = u(z; a, b)$ — нормальный потенциал третьего рода, отображает поверхность R на сферу с одной выколотой точкой. Для доказательства этого мы покажем, что:

А) $w(z; a, b)$ *однозначна на* R.

Группа гомологий состоит только из нулевого элемента, и многозначность сопряженной к u функции u' определяется поэтому периодами 2π, соответственно — 2π, при обходе вокруг a, соответственно b.

Этим однозначность $w(z; a, b)$ доказана в предположении, что полюсы a, b лежат в параметрической окрестности B_1. Если это не имеет места, то соединяем a и b конечной цепочкой z_ν ($z_1 = a$, $z_n = b$) и полагаем

$$w(z; a, b) = \prod_{\nu=1}^{n-1} w(z; z_\nu, z_{\nu+1}).$$

В) $w(z; a, b)$ *на* R *однолистна*, т. е. каждое значение w_0 она либо принимает один раз, либо вовсе не принимает. Это утверждение очевидно для $w_0 = 0$ и $w_0 = \infty$. Пусть $c \neq a, b$. Мы образуем тогда частное

$$f(z) = \frac{w(z; a, b) - w(c; a, b)}{w(z; c, b)}$$

и снова заключаем, что функция $f(z)$ на R *регулярна*. Она даже *ограничена*. В самом деле, если исключить полюсы a, b, c с помощью маленьких кругов K_i ($i = 1, 2, 3$), то $f(z)$ на дополнении

$R - \sum K_i$ ограничена (см. свойство 2° в п. 6.23). Так как a, b, c — устранимые особенности функции f, то f в K_i регулярна. Следовательно, однозначная аналитическая функция f ограничена на всей поверхности R, и из обобщенного принципа максимума п. 6.21 вытекает, что f — *постоянная*, так что

$$w(z;\ a,\ b) - w(c;\ a,\ b) = \lambda w(z;\ c,\ b),$$

где λ означает отличную от нуля постоянную. Так как правая часть имеет нуль (простой) только в точке $z = c$, то и уравнение $w(z;\ a,\ b) = w(c;\ a,\ b)$ только здесь имеет нуль, также простой. Этим доказана однолистность $w(z;\ a,\ b)$ на поверхности R. Отсюда следует, согласно п. 2.42, что отображение, осуществляемое функцией $w(z;\ a,\ b)$, является топологическим.

6.25. Итак, функция $w = w(z;\ a,\ b)$ отображает R топологически на подобласть G замкнутой плоскости w. Эта область есть открытая плоскость $w \neq \infty$. Во-первых, ясно, что G, как образ открытой поверхности R, не может совпадать со всей w-сферой. С другой стороны, если бы на сфере имелись две точки, не принадлежащие G, то односвязная область G имела бы, согласно пп. 6.2 и 6.8, функцию Грина, тем самым ее имела бы и поверхность R, что противоречит предположению.

Таким образом, доказательство теоремы об отображении для параболического случая закончено [1]).

---

[1]) Другое построение доказательства (справедливое при столь же общих предположениях), основанное на возможности выбора сходящейся подпоследовательности из подходящим образом нормированной аппроксимирующей последовательности, было дано Хейнсом [1].

Глава VII

ГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Так как теорема Римана об отображении занимает центральное место в теории униформизации, то чрезвычайно важна задача изучения конформных отображений на себя тех нормальных областей E (единичный круг, открытая числовая плоскость, числовая сфера), на которые может быть отображена взаимно однозначно и конформно каждая односвязная риманова поверхность. Некоторые важные свойства этих отображений, осуществляемых с помощью дробно-линейных преобразований, будут изложены в этой главе.

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

7.1. Классификация линейных преобразований. Самое общее конформное отображение w-сферы на себя задается формулой

$$w^* = \frac{aw + b}{cw + d} \qquad (ad - bc \neq 0), \tag{7.1}$$

где a, b, c, d — комплексные постоянные. Если такое преобразование переводит три точки w_ν в точки w_ν^* ($\nu = 1, 2, 3$), то

$$w_\nu^* = \frac{aw_\nu + b}{cw_\nu + d},$$

и, в силу (7.1),

$$\frac{w^* - w_1^*}{w^* - w_2^*} = \lambda \frac{w - w_1}{w - w_2}, \tag{7.2}$$

где

$$\lambda = \frac{w_3^* - w_1^*}{w_3^* - w_2^*} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}.$$

Следовательно, преобразование однозначно определяется тремя точками и их образами.

Соотношение (7.2) выражает инвариантность двойного отношения четырех точек (w, w_1, w_2, w_3) относительно линейного преобразования. Так как это отношение имеет действительное значение тогда и только тогда, когда все четыре точки лежат на одной окружности (или прямой), то отсюда следует, что линейное преобразование (7.1) обладает круговым свойством.

Последнее свойство также легко получается, если приравнять, с одной стороны, абсолютные значения обеих частей (7.2), с другой стороны, — их аргументы. Аргументы остаются постоянными на соединяющих точки w_1^*, w_2^*, соответственно w_1, w_2, дугах окружностей A^* и A, проходящих соответственно через эти точки, в то время как абсолютные значения остаются постоянными на окружностях B^* и B, ортогональных соответственно к A^* и A. Отсюда вытекает, что при преобразовании (7.2) пучки окружностей A и B переходят соответственно в пучки окружностей A^* и B^* [1]).

Точки w_1 и w_2 (соответственно w_1^*, w_2^*) симметричны относительно окружностей B (соответственно B^*). Следовательно, если две точки расположены симметрично относительно некоторой окружности, то это же справедливо для образов этих точек и этой окружности.

7.2. Если преобразование (7.1) не есть тождество $w^* \equiv w$, то оно имеет две неподвижные точки ζ_1, ζ_2, определяемые из уравнения

$$c\zeta^2 + (d-a)\zeta - b = 0;$$

они могут быть как различными, так и совпадающими, в зависимости от того, отличен ли дискриминант

$$(a+d)^2 - 4(ad-bc)$$

от нуля или равен нулю.

Если $\zeta_1 \neq \zeta_2$, то для линейного преобразования получается следующее общее выражение ($\rho > 0$, ω — действительное число):

$$\frac{w^* - \zeta_1}{w^* - \zeta_2} = \rho e^{i\omega} \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2}. \tag{7.3}$$

Если заменить здесь величины

$$\frac{w^* - \zeta_1}{w^* - \zeta_2} \quad \text{и} \quad \frac{w - \zeta_1}{w - \zeta_2}$$

соответственно на z^* и z, то будем иметь

$$z^* = \rho e^{i\omega} z. \tag{7.3'}$$

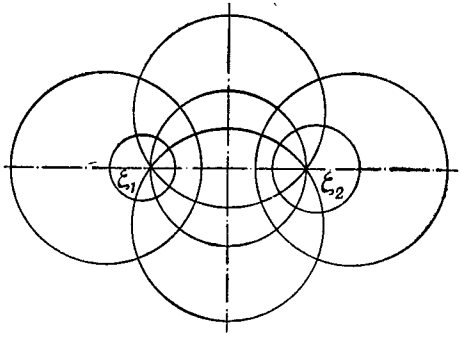
Если w и w^* рассматривать как точки одной и той же плоскости (фиг. 11), то из (7.3) и (7.3′) следует, что совокупность окружностей A, проходящих через ζ_1, ζ_2, а также совокупность

[1]) Каждая из окружностей A и A^* разбивается точками w_1, w_2, соответственно w_1^*, w_2^*, на две дополнительные дуги. При переходе от одной к другой аргументы слева и справа в (7.2) изменяются на π. Поэтому, если одни из указанных дуг окружностей A и A^* соответствуют друг другу, то — и дополнительные к ним дуги, следовательно, всей окружности A соответствует вся окружность A^*. — *Прим. перев.*

ортогональных к ним окружностей B при преобразовании переходят в себя. Особого внимания заслуживают следующие случаи:

1. *Эллиптические преобразования.* Если $\rho = 1$, то преобразование (7.3′) есть вращение. Следовательно, при (7.3) каждая из окружностей B переходит сама в себя, а каждая из окружностей A переходит в другую окружность того же пучка. В этом случае преобразование называется *эллиптическим.*

2. *Гиперболические преобразования.* Они соответствуют значению $\omega = 0 \pmod{2\pi}$; при этом окружности A остаются инвариантными,



Фиг. 11.

а каждая из окружностей B переходит в другую окружность того же пучка.

3. *Параболические преобразования.* Если неподвижные точки ζ_1 и ζ_2 совпадают, $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, то

$$(a+d)^2 = 4(ad-bc), \qquad \zeta = \frac{a-d}{2c},$$

и для (7.1) получается выражение

$$\frac{1}{w^*-\zeta} = \frac{1}{w-\zeta} + \alpha \qquad (\zeta \neq \infty) \tag{7.4}$$

или

$$w^* = w + \alpha \qquad (\zeta = \infty), \tag{7.4′}$$

где α — произвольное комплексное число.

Параболическое преобразование оставляет инвариантным пучок окружностей, касающихся друг друга в точке ζ. В частности, существует пучок таких окружностей, каждая из которых переходит в себя [1]). В случае $\zeta = \infty$ этот пучок представлен прямыми, параллельными вектору α; в случае $\zeta \neq \infty$ он состоит из окружностей, касающихся прямой $\arg(w-\zeta) = -\arg\alpha \pmod{\pi}$.

[1]) Заметим, что при этом и внутренность круга переходит сама в себя. — *Прим. перев.*

Если, в частности, преобразование должно оставлять инвариантной единичную окружность, то нужно, чтобы было $|\zeta| = 1$ и $\arg\zeta = -\arg\alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$; отсюда следует, что самое общее параболическое преобразование, оставляющее инвариантной единичную окружность, имеет вид

$$\frac{1}{w^* - \zeta} = \frac{1}{w - \zeta} + i\lambda\bar{\zeta} \quad (\lambda \text{ — действительное число}). \tag{7.5}$$

7.3. Преобразования, оставляющие инвариантным единичный круг. Рассмотрим, в частности, те линейные преобразования, которые переводят единичный круг $|w| < 1$ в себя; они распадаются на три типа.

При *эллиптических* преобразованиях неподвижные точки ζ_1 и ζ_2 симметричны относительно единичной окружности $|w| = 1$ ($\zeta_1\bar{\zeta}_2 = 1$); окружности A, проходящие через точки ζ_1 и ζ_2, переходят одна в другую, в то время как ортогональные окружности B переходят в себя.

При *гиперболических* преобразованиях неподвижные точки лежат на единичной окружности $|w| = 1$ и $\omega = 0$; окружности A являются инвариантными „линиями тока", окружности B переходят одна в другую.

При *параболических* преобразованиях неподвижная точка ζ лежит на единичной окружности $|w| = 1$, касательные окружности являются „линиями тока", в то время как ортогональные окружности переходят одна в другую.

7.4. Неевклидовы движения. Самое общее линейное преобразование, которое переводит единичный круг в себя так, что внутренняя точка w_0 ($|w_0| < 1$) переходит в точку w_0^*, переводит симметричную к w_0 точку $1/\bar{w}_0$ в симметричную к w_0^* точку $1/\bar{w}_0^*$ и, следовательно, согласно (7.2), имеет вид

$$\frac{w^* - w_0^*}{1 - \bar{w}^* w^*} = \lambda \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}; \tag{7.6}$$

коэффициент λ по абсолютному значению должен равняться единице, так как единичная окружность $|w| = 1$ переходит сама в себя. Следовательно,

$$\left|\frac{w^* - w_0^*}{w - w_0}\right| = \left|\frac{1 - \bar{w}_0^* w^*}{1 - \bar{w}_0 w}\right|.$$

Отсюда предельным переходом $w \to w_0$, $w^* \to w_0^*$ получаем

$$\frac{|dw^*|}{1 - |w^*|^2} = \frac{|dw|}{1 - |w|^2}.$$

Таким образом, дифференциал

$$d\sigma = \frac{|dw|}{1-|w|^2} \tag{7.7}$$

остается инвариантным при конформных отображениях единичного круга на себя. Если, следуя Пуанкаре [1], принять этот линейный элемент за длину дифференциала дуги dw, то гауссова кривизна полученной таким образом геометрии равна, как легко подсчитать, постоянной — 4. Следовательно, мы имеем дело с геометрией Лобачевского — Больяи. Линейные преобразования, оставляющие инвариантным единичный круг, могут поэтому быть истолкованы как неевклидовы движения в этом круге („гиперболической плоскости").

7.5. Геодезическими линиями в этой метрике Пуанкаре являются дуги окружностей, ортогональных к единичной окружности $|w|=1$. Ввиду инвариантности линейного элемента $d\sigma$, это наиболее просто доказывается следующим образом: чтобы найти кратчайшую линию, соединяющую две точки w_1 и w_2 единичного круга $|w|<1$, переведем их с помощью неевклидова движения, т. е. преобразования вида (7.6), в положение $w_1^*=0$, $w_2^*=\rho$ $(0<\rho<1)$. При этом каждый линейный элемент остается инвариантным, а поэтому инвариантна и вся неевклидова длина каждой кривой. Если кривая, соединяющая $w_1^*=0$ и $w_2^*=\rho$, задана в форме $w=r(t)\,e^{i\varphi(t)}$, то ее длина равна

$$\int d\sigma = \int \frac{\sqrt{dr^2+r^2d\varphi^2}}{1-r^2} \geqslant \int \frac{|dr|}{1-r^2} \geqslant \left|\int_0^\rho \frac{dr}{1-r^2}\right| = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\rho}{1-\rho}, \tag{7.8}$$

причём знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $d\varphi=0$ и, следовательно, кривая совпадает с отрезком $(0, \rho)$; это — искомая геодезическая, соединяющая точки $w_1^*=0$ и $w_2^*=\rho$. При произвольном положении w_1 и w_2 ей соответствует (однозначно определенная) дуга окружности, соединяющая эти точки и ортогональная к единичной окружности $|w|=1$.

Из предыдущего также следует, что круг $|w|<1$ представляет *всю* неевклидову плоскость, так как неевклидово расстояние (7.8) бесконечно возрастает, когда точка ρ стремится к предельной окружности $|w|=1$.

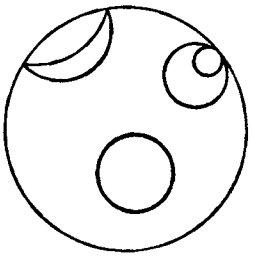
Из вида метрической фундаментальной формы (7.7) следует, что угловая мера в новой метрике совпадает с евклидовой угловой мерой [1]).

---

[1]) Как известно из дифференциальной геометрии, в неевклидовой геометрии, определяемой метрической формой $ds^2=E\,dx^2+2F\,dx\,dy+G\,dy^2$ $(EG-F^2>0)$, угловая мера совпадает с евклидовой тогда и только тогда, когда $E=G$ и $F=0$. — *Прим. перев.*

Три сорта *циклов* неевклидовой геометрии также имеют вид евклидовых окружностей (или их дуг) в круге $|w|<1$.

В интерпретации Пуанкаре неевклидова окружность с центром в точке a имеет вид евклидовой окружности, центр которой расположен на отрезке $(0, a)$ так, что точки a и $1/\bar{a}$ симметричны относительно этой окружности. Эквидистанты, или гиперциклы, т. е. геометрические места точек, равноудаленных от данной прямой, изображаются дугами окружностей, пересекающих окружность $|w|=1$. Касательные же к ней окружности представляют предельные окружности, или орициклы, определяемые как ортогональные траектории семейства параллельных (неевклидовых) прямых (фиг. 12).



Фиг. 12.

7.6. Вращения сферы. Если замкнутую w-плоскость отобразить с помощью стереографической проекции на сферу Римана радиуса $1/2$, то группе линейных преобразований будет соответствовать совокупность всех конформных отображений сферы на себя. Особого внимания заслуживает при этом та подгруппа линейных преобразований, которая соответствует *вращениям сферы*. Для определения этой группы заметим, что точки w_1 и $\overline{w}_2$ расположены диаметрально противоположно на сфере, если $w_1\overline{w}_2=-1$. Следовательно, если вращение сферы переводит точку w_0 в точку w_0^*, то точка $-1/\overline{w}_0$ переходит в точку $-1/\overline{w}_0^*$ и, согласно (7.2), соответствующее линейное преобразование имеет вид

$$\frac{w^*-w_0^*}{1+\overline{w}^*w^*}=\lambda\frac{w-w_0}{1+\overline{w}_0w},$$

где снова $|\lambda|=1$.

При $w\to w_0$, $w^*\to w_0^*$ получаем отсюда равенство

$$\frac{|dw^*|}{1+|w^*|^2}=\frac{|dw|}{1+|w|^2},$$

выражающее инвариантность сферического элемента дуги

$$d\sigma=\frac{|dw|}{1+|w|^2}$$

при вращениях сферы.

7.7. Евклидовы движения. Евклидовы движения в числовой плоскости представляются линейными преобразованиями вида

$$w^*=\lambda w+\mu,$$

где $|\lambda|=1$; при $\mu=0$ получаются вращения плоскости вокруг начала, при $\lambda=1$ — сдвиги.

§ 2. ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ЕДИНИЧНОГО КРУГА НА СЕБЯ

7.8. Группы гиперболических движений. В этом параграфе мы ставим себе целью исследовать некоторые группы конформных отображений единичного круга E на себя.

Пусть (T) — группа конформных отображений единичного круга E ($|t|<1$) на себя, *не имеющих неподвижных точек внутри* E; тогда, согласно п. 7.3, преобразования T либо *гиперболичны*, либо *параболичны*; их неподвижные точки лежат на окружности $|t|=1$. Относительно группы (T) мы далее предполагаем, что она *дискретна* в следующем смысле; если t — произвольная фиксированная точка E, то множество эквивалентных ей точек $T(t)$, где T пробегает все преобразования группы, не имеет в E точек сгущения.

Такая группа содержит только счетное число преобразований. В самом деле, в силу отсутствия у преобразований неподвижных точек в E, точки $T(t)$ (при фиксированном t) взаимно однозначно соответствуют преобразованиям T, поэтому в E в случае несчетного числа преобразований имелось бы несчетное множество эквивалентных ей точек $T(t)$; но несчетное множество необходимо имеет в E точку сгущения.

7.9. Фундаментальная область. Под *фундаментальной областью* группы (T) понимают замкнутое (относительно круга E) множество точек F, такое, что каждая точка E эквивалентна некоторой точке F, в то время как никакие две внутренние точки F (если только F обладает внутренними точками) не эквивалентны друг другу.

Фундаментальная область не обязательно должна быть замкнутой относительно всей t-плоскости, так как она может иметь точки сгущения на окружности $|t|=1$. Если эти точки присоединить к F, то получится множество $\overline{F}$, замкнутое относительно t-плоскости. Каждая точка E эквивалентна некоторой точке $\overline{F}$, и никакие две внутренние точки $\overline{F}$ не эквивалентны друг другу. Мы называем $\overline{F}$ *замкнутой фундаментальной областью* группы (T).

Если (T) рассматривать как группу преобразований *замкнутого* единичного круга $|t|\leqslant 1$ [1]), то замкнутая фундаментальная область, вообще говоря, не является фундаментальной областью этой группы, так как точка на окружности $|t|=1$ не обязательно имеет эквивалентную точку в $\overline{F}$.

---

[1]) Это всегда возможно, так как конформное отображение открытого единичного круга E на себя одновременно переводит в себя замкнутый круг $|t|\leqslant 1$.

7.10. Фундаментальный многоугольник. В дальнейшем мы будем рассматривать замкнутые фундаментальные области специального вида — *фундаментальные многоугольники*.

Под многоугольником мы понимаем замкнутую „жорданову область" π в замкнутом круге $|t| \leqslant 1$, граничная кривая γ которой разделена на конечное или счетное число жордановых дуг σ_ν, *сторон* многоугольника. Что это значит в случае конечного числа сторон, ясно само собой: 1) дуги σ_ν вместе составляют всю кривую γ и 2) пересечение двух σ_ν либо пусто, либо состоит из одной точки, являющейся их общим концом. Эти точки называются *вершинами* многоугольника.

В случае бесконечного числа сторон определение следует несколько изменить, так как разложение (компактной) кривой γ на счетное число дуг, удовлетворяющее условиям 1) и 2), невозможно. Первое условие заменяется следующим:

1. Если σ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) — стороны γ, то множество $\sum \sigma_\nu$ *вместе с его точками сгущения* составляет всю жорданову кривую γ.

Второе условие остается без изменения. Под вершиной многоугольника мы в этом случае понимаем либо конец какой-либо стороны σ_ν, либо точку сгущения таких концов.

Многоугольник π называется *фундаментальным многоугольником* группы (T), если он является замкнутой фундаментальной областью группы (T) и, кроме того, удовлетворяет следующим условиям:

1°. Сторона σ_ν многоугольника π либо является дугой окружности $|t| = 1$, либо доходит до нее одним или обоими своими концами, либо, наконец, вовсе не имеет с ней общих точек. В первом случае σ_ν называется *свободной* стороной, во всех остальных — *внутренней* стороной.

2°. Внутренние стороны распадаются на пары *эквивалентных*. Это означает следующее: для каждой внутренней точки t внутренней стороны σ существует в π одна и только одна эквивалентная точка t', также являющаяся внутренней точкой некоторой стороны σ' ($\sigma' \neq \sigma$). При этом преобразование $t \to t'$ переводит всю сторону σ в σ'.

7.11. Внутренние точки. Если t_0 — внутренняя точка фундаментального многоугольника π, то все точки, эквивалентные t_0, лежат вне π. Действительно, пусть t_0' — точка, эквивалентная t_0, и U_0 — окрестность t_0, лежащая целиком в π. При преобразовании T ($t_0 \to t_0'$) она переходит в окрестность U_0' точки t_0'. Если бы окрестность U_0' содержала точку из π, то она должна была бы содержать внутренние точки π. Тогда в U_0 имелись бы точки, которые после преобразования T оставались бы внутренними точками π, что противоречит тому, что π — фундаментальная область.

7.12. Свободные стороны. Внутренняя точка t_0 свободной стороны σ многоугольника π не имеет в π эквивалентных точек. Для доказательства допустим, от противного, что для точки $t_0' \in \pi$ существует преобразование T $(t_0 \to t_0')$. Точку t_0 можно окружить окрестностью относительно $|t| \leqslant 1$, принадлежащей π; с другой стороны, в каждой окрестности точки t_0' имеются внутренние точки π. Поэтому обратное преобразование T^{-1} переводило бы внутренние точки π во внутренние точки π, что противоречит тому, что π — фундаментальная область.

В § 4 мы покажем, что *для заданной группы* (T) *рассматриваемого здесь вида всегда существует фундаментальный многоугольник*. Предполагая, что такой многоугольник существует, выведем сначала некоторые общие его свойства.

7.13. Множество многоугольников $T(\pi)$. Если к фундаментальному многоугольнику π применить преобразование T, то снова получится фундаментальный многоугольник. Применяя все преобразования T_ν группы, получим множество конгруэнтных (в смысле неевклидовой геометрии) многоугольников π_ν $(\nu = 0, 1, \ldots;\ \pi_0 \equiv \pi)$, которые сплошь покрывают всю внутренность E. В самом деле, если t — произвольная точка E $(|t|<1)$, то она эквивалентна точке $t_0 \in \pi_0$; если тогда T_ν означает преобразование $t_0 \to t$, то t принадлежит многоугольнику $T_\nu(\pi_0)$.

Пересечение δ двух многоугольников π_μ и π_ν $(\mu \neq \nu)$ либо пусто, либо состоит из общих сторон и, возможно, из общих вершин. Действительно, пусть δ_μ, соответственно δ_ν, — прообразы δ в $\pi_0 = \pi$ относительно преобразования T_μ, соответственно T_ν. Тогда δ_μ при преобразовании $T_{\mu\nu} = T_\nu^{-1} T_\mu$ переходит в δ_ν. Обратно, если t и t' — две точки, эквивалентные относительно этого преобразования, то точка $T_\nu(t') = T_\mu(t)$ принадлежит δ. Следовательно, множество δ_μ состоит из всех точек π, которые после преобразований $T_{\mu\nu}$ остаются в π; поэтому оно не содержит внутренних точек π. Если δ_μ содержит внутреннюю точку t стороны σ, то, по условию 2°, $T_{\mu\nu}$ переводит всю сторону σ снова в сторону многоугольника π. Следовательно, δ_μ состоит из некоторых сторон π и, возможно, еще некоторых изолированных вершин. При преобразовании $T_{\mu\nu}$ они переходят в соответствующие стороны, соответственно вершины π; следовательно, то же самое справедливо и для множества δ. Говорят, что многоугольники $\pi_\nu = T_\nu(\pi)$ образуют *разложение на многоугольники* открытого единичного круга.

7.14. Пусть t $(|t|<1)$ — произвольная вершина этого разложения и $\pi, \pi_1, \ldots$ — инцидентные с ней многоугольники. Преобразование T_ν^{-1} $(\pi_\nu \to \pi)$ переводит t в другую (эквивалентную t) вершину π. Этим каждому многоугольнику π_ν, инцидентному с t, ставится в соответствие

эквивалентная t вершина t_ν многоугольника π. Различным многоугольникам π_ν соответствуют различные вершины, так как если бы, например, было $t_\nu = t_\mu$ $(\mu \neq \nu)$, то преобразование $T_\mu T_\nu^{-1}$ имело бы неподвижную точку t. Далее, таким образом получаются все эквивалентные t вершины π; действительно, если t' — произвольная такая вершина, то преобразование $t' \to t$ переводит π в многоугольник, инцидентный с t. Тем самым инцидентные с t многоугольники взаимно однозначно соответствуют вершинам π, эквивалентным t. В частности, если число N вершин π, эквивалентных t, конечно, то вокруг вершины t лежит ровно N многоугольников.

7.15. Система образующих группы (T). Пусть π_0 — фундаментальный многоугольник группы (T). Под *фундаментальным преобразованием* мы понимаем преобразование T, которое переводит сторону многоугольника π_0 в эквивалентную сторону. Мы покажем, что вся группа порождается фундаментальными преобразованиями, или, иначе говоря, что каждый многоугольник π_μ получается из π_0 с помощью конечного произведения фундаментальных преобразований.

Пусть сначала π_1 — многоугольник, имеющий с π_0 по крайней мере одну общую сторону s. Тогда преобразование $\pi_0 \to \pi_1$ является фундаментальным преобразованием. Действительно, если s' — сторона π_0, которая переходит в сторону s многоугольника π_1, то s и s' — две стороны π_0, которые соответствуют друг другу при этом преобразовании.

Пусть, далее, π_2 — многоугольник, имеющий по крайней мере одну общую сторону с π_1. Как было показано выше, существует фундаментальное преобразование T_1, переводящее π_0 в π_1. Преобразование T_1^{-1} переводит π_2 в многоугольник π_3, имеющий с π_0 по крайней мере одну общую сторону. Следовательно, π_3 можно получить из π_0 с помощью фундаментального преобразования T_2. Произведение $T_1 T_2$ переводит тогда π_0 в π_2.

Так как каждый многоугольник π_ν можно соединить с π_0 цепочкой многоугольников так, что каждые два следующие друг за другом имеют по крайней мере одну общую сторону, то из доказанного выше следует, что каждый многоугольник π_μ получается из π_0 с помощью конечного произведения фундаментальных преобразований.

В частности, если фундаментальный многоугольник π_0 имеет конечное число сторон, то группа (T) имеет конечную систему образующих.

7.16. Ориентирование сторон. Пусть теперь фундаментальный многоугольник π ориентируется указанием определенного циклического порядка его сторон. Этим устанавливается ориентация и каждой его стороны.

Пусть a и a' — две эквивалентные стороны π с этими ориентациями. Мы покажем, что преобразование $T(a \to a')$ переводит сторону a в *противоположно ориентированную* сторону a'.

Пусть t_0 — внутренняя точка многоугольника π и $t_0' = T(t_0)$ — ее образ, следовательно, внутренняя точка многоугольника $\pi' = T(\pi)$. Возьмем для кривой γ, ограничивающей многоугольник π, какое-нибудь параметрическое представление, в котором возрастанию параметра, скажем λ, соответствует заданная ориентация γ. Если образ γ' кривой γ ориентировать так, что λ вместе с ориентацией переходит в λ', то индексы точек t_0 и t_0' относительно γ, соответственно γ', будут равны между собой:

$$u(t_0, \gamma) = u(t_0', \gamma'),$$

так как T сохраняет ориентацию.

Пусть a_1' означает сторону a' с ориентацией, полученной при преобразовании T. Ориентируем, с другой стороны, кривую γ так, чтобы на a' ее ориентация совпадала с ориентацией a_1'. Тогда, если γ_1 означает таким образом ориентированную кривую γ, то ориентации γ_1 и γ' вдоль общей стороны a_1' совпадают. Так как области, ограниченные γ_1 и γ', не пересекаются, то отсюда следует, что

$$u(t_0, \gamma_1) = -u(t_0', \gamma').$$

Из предыдущих двух равенств вытекает, что $u(t_0, \gamma) = -u(t_0, \gamma_1)$. Это означает, что стороны a' и a_1' противоположно ориентированы; следовательно, преобразуя a вместе с ориентацией с помощью T, получаем сторону-образ a' в противоположной ориентации, что и требовалось доказать.

В частности, отсюда следует, что если две эквивалентные стороны a и a' имеют общую точку t_0, то она обязательно лежит на окружности $|t| = 1$. В самом деле, как было показано выше, для одной стороны π точка t_0 должна быть началом, а для другой — концом, поэтому она является неподвижной точкой преобразования $a \to a'$, что возможно только для точек на окружности $|t| = 1$.

7.17. Вершины на $|t| = 1$. Начиная отсюда, мы рассматриваем *случай, когда многоугольник π имеет только конечное число сторон*. Кроме того, мы предполагаем, что если некоторая вершина π лежит на окружности $|t| = 1$, то она принадлежит свободной стороне[1]).

Пусть при этих предположениях x и a — две следующие друг за другом стороны π и P — их общий конец; пусть x — свободная

[1]) Если эти условия выполняются для исходного многоугольника π, то они выполняются для всех многоугольников паркета (π_ν).

и a — внутренняя сторона. Тогда вдоль a к π примыкает некоторый многоугольник π_1. Вторая сторона многоугольника π_1, инцидентная с P, должна быть свободной стороной, иначе π_1, вопреки предположению, примыкал бы к окружности $|t|=1$ изолированной вершиной P. Поэтому вершина P инцидентна только с многоугольниками π и π_1; следовательно, общий конец свободной стороны и внутренней стороны является вершиной в точности *двух* многоугольников.

7.18. Теперь мы покажем, что общий конец внутренней стороны и свободной стороны имеет одну и только одну эквивалентную вершину на π.

Сторона a, как внутренняя сторона π, имеет эквивалентную сторону a'; при преобразовании $a \to a'$ вершина P переходит в конец P' стороны a' (расположенный на окружности $|t|=1$). Так как P принадлежит только одной внутренней стороне (a), то $P \neq P'$. Следовательно, общий конец свободной и внутренней сторон имеет по крайней мере одну эквивалентную точку на π.

Для доказательства второй части утверждения предположим, что P' — произвольная точка π, эквивалентная P, и T — преобразование $P \to P'$. По нашему предположению относительно π, из P' должны выходить свободная сторона и внутренняя сторона b многоугольника π. При преобразовании $P \to P'$ сторона a переходит в выходящую из P' сторону a' многоугольника $\pi' = T(\pi)$. Эта сторона инцидентна с P', поэтому, согласно п. 7.17, она должна совпадать с b, т. е. $b = a'$; следовательно, b — (однозначно определенная) эквивалентная a сторона π. Отсюда следует, что преобразование $P \to P'$ переводит одновременно сторону a в эквивалентную ей сторону. Поэтому не может существовать более *одной* точки, эквивалентной P, что и требовалось доказать.

7.19. Пусть a и b — две следующие друг за другом внутренние стороны π и P — их общий конец. a и b имеют соответственно эквивалентные стороны a' и b'; предположим, в частности, что обе эти пары эквивалентны относительно *одного и того же* преобразования T. Тогда $P' = T(P)$ — единственная эквивалентная P вершина π.

Действительно, пусть K — столь малый неевклидов круг с центром в P, что $a + b$ разбивает его на два сектора σ_1 и σ_2; пусть при этом σ_1 — сектор, лежащий в π. При преобразовании T кругу K и секторам σ_1, σ_2 соответствуют неевклидов круг K' с центром в P' и секторы σ_1', σ_2'; при этом σ_2' лежит в π.

Пусть теперь $P_1' (\neq P')$ — эквивалентная P вершина π и T_1 — преобразование $P \to P_1'$. Если тогда Q — достаточно близкая к P_1' внутренняя точка π, то точка $T_1^{-1}(Q)$ лежит в K, и так как она не при-

надлежит π, то она лежит в σ_2. Поэтому точка $TT_1^{-1}(Q)$ должна лежать в σ_2', тем самым и в π, в противоречие с тем, что внутренняя точка многоугольника π не имеет эквивалентных точек в π.

7.20. Пары эквивалентных точек. Пусть (A, A') и (B, B') — две пары граничных точек многоугольника π, эквивалентных относительно одного и того же преобразования T. Тогда прежде всего справедливо следующее утверждение:

Пары (A, B) *и* (A', B') *не могут разделяться на граничном контуре* γ *многоугольника* π.

Допустим, от противного, что указанные точки расположены на γ в порядке A, A', B, B', и рассмотрим многоугольник $\pi' = T(\pi)$. Общими с π у него являются во всяком случае точки A' и B', а у многоугольника $\pi'' = T^{-1}(\pi)$ с π — точки A и B. Многоугольники π' и π'' различны, иначе мы бы имели $T^2 = T_0$ (тождеству), что для отображений круга E на себя без неподвижных точек невозможно.

Пусть теперь q' (соответственно q'') — дуга в π' (соответственно в π''), ведущая из A' в B' (соответственно из A в B); эти дуги, исключая их концы, лежат целиком вне π. Тогда из сделанного предположения о порядке следования заданных четырех точек вытекает, что q' и q'' должны иметь общую внутреннюю точку. Она должна лежать как внутри π', так и внутри π'', что невозможно.

7.21. Так как пары точек (A, B) и (A', B') на γ не разделяются, то на γ существуют две вполне определенные непересекающиеся дуги $\overset{\frown}{AB} = a$ и $\overset{\frown}{A'B'} = b$.

Мы утверждаем, что *преобразование* T *переводит всю дугу* a *во всю дугу* b.

Для доказательства допустим противное, т. е. что дуги $a' = T(a)$ и b не совпадают. Не будет ограничением общности, если мы предположим, что эти дуги, кроме концов A' и B', не имеют общих точек, ибо иначе мы могли бы их заменить меньшими дугами, обладающими этим свойством. При этом предположении $a' + b$ есть замкнутая жорданова кривая и, следовательно, ограничивает некоторую жорданову область G; кривая $a' + b$ состоит из конечного числа сторон многоугольников и, следовательно, содержит также только конечное число вершин. С другой стороны, каждая вершина инцидентна только с конечным числом многоугольников (для вершин внутри круга это следует из п. 7.14, для вершин на окружности $|t| = 1$ — из п. 7.17); следовательно, G состоит из конечного числа многоугольников[1]); пусть их число равно N.

---

[1]) G обозначает *замкнутую* область, ограниченную $a' + b$. — *Прим. перев.*

7.22. Сначала мы предположим, что многоугольник π не лежит в G, и покажем, что тогда и многоугольник $\pi' = T(\pi)$ не лежит в G. Точке A' при преобразовании T соответствует точка A'', не принадлежащая дуге a' (так как A' не принадлежит a). Следовательно, преобразование T^2 переводит A в A'' и тем самым π — в многоугольник π'', на границе которого лежит A''. Допустим теперь, вопреки утверждению, что $\pi' \subset G$; тогда, в частности, и $A'' \in G$. Так как A'' не принадлежит a', то A'' — либо внутренняя точка G, либо внутренняя точка b. В обоих случаях A'' есть внутренняя точка $G + \pi$, следовательно, (инцидентный с A'') многоугольник π'', отличный от π, лежит в G. Повторяя это рассуждение, заключаем, что то же самое справедливо для всех многоугольников $T^\nu(\pi)$ (которые все отличны друг от друга), откуда получается противоречие с тем, что G содержит только конечное число многоугольников.

Следовательно, π' лежит вне G, а поэтому дуга a' (исключая ее концы) — внутри $\pi' + G$. Отсюда вытекает, что ни одна внутренняя точка дуги a' не может лежать на π, в противном случае многоугольник π имел бы общие внутренние точки либо с G, либо с π', что невозможно.

Пусть теперь π_1 — многоугольник, принадлежащий G, и T_1 — преобразование $\pi \to \pi_1$. Тогда $T_1 \neq T$ и также $T_1 \neq T^{-1}$; в самом деле, если бы было $T_1 = T^{-1}$, то T_1 переводило бы точку A' в точку $T^{-1}(A') = A$, не принадлежащую $a' + b$, а поэтому (так как она не лежит внутри G) не принадлежащую и G. С другой стороны, так как $A' \in \pi$, то $T_1(A')$ принадлежит π_1, тем самым и G. Следовательно, равенство $T_1 = T^{-1}$ невозможно.

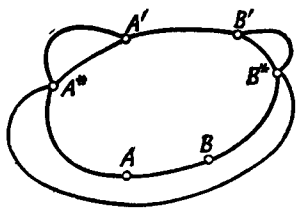
Преобразование T_1 не оставляет инвариантной пару точек A', B', так как в противном случае T_1^2 оставляло бы неподвижными каждую из этих точек в отдельности и, следовательно, было бы тождеством, что противоречит предположению. Тогда по крайней мере одна из этих точек, скажем A', преобразуется в отличную от A' и B' точку C. Эта точка C является внутренней точкой множества $\pi + \pi' + G$.

Рассмотрим теперь многоугольник $\pi_1' = T_1(\pi')$. Он содержит точку C (так как π' содержит точку A') и отличен от π и π', поскольку $T_1 \neq T^{-1}$ и $T_1 \neq T_0$ (T_0 — тождественное преобразование). Так как C — внутренняя точка $\pi + \pi' + G$, то π_1' должен лежать в G.

Этим показано, что преобразование T_1 переводит в G не только π, но и π'. В частности, следовательно, T_1-образ жордановой кривой γ должен лежать в G, тем самым и T_1-образ области G. Но это ведет к противоречию: G содержит, во-первых, N многоугольников области $T_1(G)$, во-вторых, лежащий вне $T_1(G)$ многоугольник π_1; следовательно, число многоугольников, входящих в G, больше N, что противоречит определению этого числа.

7.23. Нам нужно, во-вторых, рассмотреть случай, когда π лежит в G. Рассмотрим снова образ a' дуги a и покажем, что вся дуга a не может лежать на a'. Если бы было $a \subset a'$, то дуга $a'' = T^{-1}(a)$ лежала бы на a. С другой стороны, в силу нашего предположения, дуга $a \subset a'$ примыкает лишь к двум многоугольникам π и π', в то время как дуга $a'' \subset a$ граничит с многоугольником $\pi'' = T^{-1}(\pi)$. Следовательно, $\pi'' = \pi$, т. е. $T^2 = T_0$, что невозможно.

Следовательно, дуга a', ведущая из A' в B', не может совпадать с дугой c, дополнительной к b на границе γ многоугольника π. Поэтому на a' существуют две вполне определенные точки A^* и B^*, которые еще лежат на c, в то время как дуга $a^* = \overset{\frown}{A^*B^*}$ не имеет общих точек с c (фиг. 13) [1]. Если, кроме того, c^* означает часть дуги c, ограниченную A^* и B^*, то $a^* + c^*$ — жорданова кривая; ограниченная ею замкнутая область G^* состоит из конечного числа многоугольников паркета.



Фиг. 13.

Многоугольник π не лежит в G^*. В самом деле, так как $\pi \subset G$, то внутренность π можно соединить с окружностью $|t| = 1$ путем, который пересекает кривую $a' + b$ в одной и только одной точке и не имеет общих точек с a' и c; этот путь не имеет тогда общих точек и с $a^* + c^*$, откуда следует наше утверждение. Отсюда, аналогично п. 7.22, заключаем, что и π' не лежит в G^*.

Теперь мы найдем в G^* многоугольник π^*, отличный от $\pi'' = T^{-1}(\pi)$, для чего рассмотрим два случая.

Если, во-первых, дуга a полностью лежит на дуге c^*, то мы можем в G^* указать отличный от π'' многоугольник: в самом деле, если P' — точка a', не лежащая на границе π, то P' (кроме π') лежит на определенном отличном от π многоугольнике $\pi^{*\prime}$. Тогда многоугольник $\pi^* = T^{-1}(\pi^{*\prime})$ отличен от π и π'' и точка $T^{-1}(P')$ лежит на его границе. Так как эта точка лежит на a, следовательно, по нашему предположению, и на c^*, то π^* лежит в G^*.

Если, во-вторых, одна из точек A, B, скажем A, не лежит на c^*, то A не принадлежит также и G^*. Пусть π^* — произвольный многоугольник из G^* и T^* — преобразование $\pi \to \pi^*$. Оно наверное отлично от T^{-1}, так как в противном случае оно переводило бы A' в точку A, которая тогда должна была бы принадлежать G^*.

Следовательно, в обоих случаях существует преобразование T^* ($\neq T$, T^{-1}), которое переводит π в многоугольник π^*, лежащий в G^*.

---

[1] Возможность $A^* = A'$, соответственно $B^* = B'$, при этом не исключается.

Так как пара точек A^*, B^* не может при этом оставаться инвариантной, то по крайней мере одна из этих точек, скажем A^*, должна переходить в отличную от A^* и B^* точку, тем самым — во *внутреннюю* точку $\pi + \pi' + G^*$. Так как π' примыкает к A^*, то отсюда следует, что образ π'^* многоугольника π' (который отличен от π' и π) содержится в G^*. Тем самым и образ кривой $a^* + c^*$ лежит в G^*, поэтому также и образ самой области G^* лежит в G^*. Кроме того, в области G^* лежит образ многоугольника π; но это невозможно, так как G^* содержит только конечное число многоугольников. Таким образом, и этот случай приводит к противоречию, и теорема п. 7.21 тем самым доказана полностью: преобразование T переводит всю дугу a в дугу b.

7.24. В частности, из полученного результата следует, что рассмотренные на γ четыре точки должны следовать друг за другом в порядке A, B, B', A', а не (A, B, A', B').

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Пусть π — фундаментальный многоугольник, который либо целиком лежит в круге $|t| < 1$, либо примыкает к окружности $|t| = 1$ конечным числом своих сторон. Пусть A, B и A', B' — две пары точек на граничной кривой γ многоугольника π, эквивалентных относительно одного и того же преобразования T. Тогда эти четыре точки расположены на γ так, что A, B и A', B' ограничивают на γ две непересекающиеся дуги a и b и преобразование T переводит a в b.

В частности, на a и b не может лежать ни одна свободная сторона π, так как внутренние точки свободной стороны, согласно п. 7.12, не имеют в π эквивалентных точек.

§ 3. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

7.25. Предварительная нормировка. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда число образующих группы (T) *конечно*. Пусть π — снова фундаментальный многоугольник (с конечным числом сторон), который либо целиком лежит внутри круга $|t| < 1$, либо имеет на окружности $|t| = 1$ некоторые свои стороны и не имеет на ней изолированных вершин. Мы хотим многоугольник π с помощью некоторых „элементарных преобразований" перевести в другой многоугольник, у которого расположение эквивалентных сторон было бы особенно легко обозримым.

Предположим, что π имеет две пары сторон a, a' и b, b', эквивалентность которых устанавливается посредством одного и того же преобразования T. Тогда, согласно п. 7.24, у π имеются такие две непересекающиеся граничные дуги s и s', составленные из сторон π, что эквивалентность следующих друг за другом на s, соответственно

на s', сторон устанавливается посредством преобразования T, причем никакую другую точку π преобразование T не переводит в точку π. Поэтому каждая вершина π, лежащая на дуге s и отличная от ее концов, имеет, согласно п. 7.19, единственную эквивалентную точку в π, а именно, ее образ при преобразовании T. Поэтому стороны π, лежащие на s, соответственно на s', могут быть объединены в одну сторону. Тем самым из π получается новый многоугольник, обладающий сторонами s и s', эквивалентными относительно преобразования T, причем в то же время T никакую другую сторону или вершину не переводит в сторону (вершину) π.

Повторным применением этого метода получаем многоугольник, обладающий этим свойством для всех пар эквивалентных сторон.

Теперь, следовательно, эквивалентность различных пар сторон многоугольника π устанавливается посредством различных преобразований.

7.26. Элементарное преобразование. Пусть π — многоугольник, нормированный по методу п. 7.25, и a, a' — две стороны π, эквивалентные относительно преобразования T. Проведем в многоугольнике π диагональ d, т. е. аналитическую жорданову дугу, соединяющую две вершины и, исключая эти вершины, лежащую внутри π. Она разбивает π на два многоугольника π_1 и π_2. При этом пусть d выбрана так, что a и a' не принадлежат одному и тому же многоугольнику. Пусть π_1 — многоугольник, имеющий a своей стороной. Так как преобразование T, кроме стороны a, никакую точку π не переводит снова в точку π, то многоугольник $T(\pi_1)$ пересекается с π в точности по стороне a'. Следовательно, множество $T(\pi_1)+\pi_2$ — снова многоугольник, и притом *фундаментальный многоугольник* группы (T).

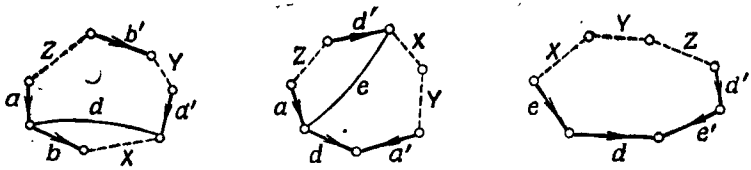
Новый фундаментальный многоугольник может иметь изолированные вершины на окружности $|t|=1$. Однако в том преобразовании π, которое будет описано в п. 7.28, мы всегда будем выбирать диагональ d так, чтобы это не имело места.

7.27. Приведение к нормальной форме. Сначала мы рассматриваем случай, когда многоугольник π лежит целиком внутри E. Чтобы сделать наглядным излагаемое ниже построение, будем описывать соответствие сторон многоугольника π с помощью записи их друг за другом в том порядке, который определяется пробеганием границы γ в определенной ориентации, причем пары эквивалентных сторон и впредь будем выделять обозначением a, a'. Согласно п. 7.16, две эквивалентные стороны никогда не следуют непосредственно друг за другом.

Искомая нормальная форма характеризуется тем, что в ней каждая пара эквивалентных сторон a, a' расположена следующим образом: $\ldots aba'b' \ldots$.

Чтобы прийти к этому с помощью элементарных преобразований, выберем сперва в первоначальном многоугольнике π обозначение сторон так, чтобы в нашей схеме a' всегда стояло правее a. Тогда найдутся две стороны a и b, которые стоят в порядке $\ldots ab \ldots \ldots a' \ldots b'$. В самом деле, поставим в соответствие каждой стороне x (положительное) число сторон, стоящих между x и x'. Если a — сторона (или одна из сторон), для которой это число имеет минимальное значение, и b — следующая (после a) сторона, то стороны a, b, a' и b' имеют указанное взаимное расположение.

Если полученные таким образом пары a, a' и b, b' уже расположены скрещенно, т. е. в порядке $aba'b'$, то многоугольник можно



Фиг. 14.

записать в виде $aba'b' \ldots$ (в самом деле, то, что эти четыре стороны стоят теперь в начале, означает лишь, что обход π начат, возможно, с другого места) и к оставшимся сторонам можно применить то же самое рассуждение.

В общем случае мы имеем для π схему

$$abXa'Yb'Z,$$

где X, Y, Z — какие-то последовательности сторон (фиг. 14, слева). Теперь мы соединяем конец a с началом a' [1]) диагональю d и применяем к ней и паре сторон b, b' элементарное преобразование п. 7.26 [2]). Таким образом из π получается новый фундаментальный многоугольник, лежащий целиком в E, с расположением сторон, указанным на фиг. 14 посередине:

$$ada'YXd'Z.$$

В нем мы соединяем конец a с началом d' диагональю e и применяем к ней и паре a, a' преобразование п. 7.26. Получаем многоугольник с расположением сторон, указанным на фиг. 14 справа:

$$ede'd'ZYX.$$

---

[1]) При этом „начало“ и „конец“ понимаются относительно ориентации сторон, индуцированной π.

[2]) То есть многоугольник dbX подвергаем преобразованию $b \to b'$. — *Прим. перев.*

Новый многоугольник имеет столько же сторон, сколько первоначальный, и содержит последовательность $ede'd'$. Затем то же самое преобразование применяем к последовательности ZYX (если она еще не имеет требуемого вида). При этом последовательность $ede'd'$, полученная на первом шаге, не нарушается. Поэтому после конечного числа шагов придем к многоугольнику с расположением сторон

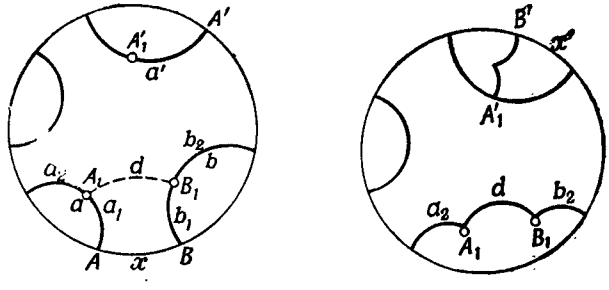
$$a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_p b_p a_p' b_p'. \qquad (p)$$

Это — искомая нормальная форма.

7.28. Нормальная форма многоугольника со свободными сторонами. Пусть теперь многоугольник π имеет *свободные* стороны. Так как они не имеют эквивалентных сторон, то в схеме многоугольника они встречаются только один раз.

Сначала, согласно п. 7.25, мы можем нормировать многоугольник так, чтобы эквивалентность различных пар сторон достигалась посредством различных преобразований. Мы хотим, далее, перевести его в многоугольник, у которого *концы каждой свободной стороны эквивалентны*.

Итак, пусть x — свободная сторона, концы которой A и B еще не эквивалентны (фиг. 15 слева). К A и B соответственно примыкают две



Фиг. 15.

внутренние стороны a и b. Они не эквивалентны, в противном случае A и B также были бы эквивалентны. Следовательно, эквивалентная a сторона a' отлична от b. Разделим a с помощью внутренней точки A_1 на две части a_1 и a_2, причем пусть a_1 — та из них, которая примыкает к A. Точно так же разделим b с помощью внутренней точки B_1 на две части b_1 и b_2 и соответственно — эквивалентные стороны a' и b'. Теперь соединим A_1 с B_1 диагональю d и применим к ней и паре a_1, a_1' преобразование п. 7.26. При этом из π получится новый фундаментальный многоугольник, снова не

имеющий изолированных вершин на окружности $|t| = 1$ и имеющий одной свободной стороной меньше, чем π (фиг. 15 справа).

Продолжая так дальше, придем к многоугольнику, у которого концы каждой свободной стороны x эквивалентны. Тогда обе внутренние стороны a и b, выходящие из x, должны быть эквивалентны, так как, согласно п. 7.18, A имеет только одну эквивалентную точку и ею является B.

Следовательно, в схеме полученного многоугольника π каждая свободная сторона встречается теперь в некоторой последовательности $\ldots cxc' \ldots$

7.29. Преобразуем теперь многоугольник π так, чтобы все его „граничные последовательности" cxc' следовали непосредственно друг за другом.

Согласно п. 7.25, мы снова можем предполагать, что эквивалентность различных пар сторон устанавливается посредством различных преобразований. Пусть тогда x — свободная сторона и cxc' — соответствующая последовательность. Если второй конец стороны c также лежит на окружности $|t| = 1$, то это же справедливо и для соответствующего конца P' стороны c'; тогда начинающаяся в P (свободная) сторона многоугольника π должна доходить до P', так как ее вторым концом является (однозначно определенная) эквивалентная P точка P'. Многоугольник π имеет тогда форму $cxc'y$, которую мы уже считаем нормальной. Поэтому этот случай мы в дальнейшем исключаем.

7.30. Итак, пусть теперь x и y — две свободные стороны и $\ldots cxc' \ldots$, соответственно $\ldots dyd' \ldots$ — соответствующие последовательности. Второй конец c (соответственно d) лежит тогда внутри круга $|t| < 1$. Пусть последовательности cxc' и dyd' не следуют непосредственно друг за другом; в противном случае цель была бы уже достигнута.

Нам нужно, следовательно, рассмотреть многоугольник вида

$$Ucxc'V\,dy\,d'.$$

Соединим конец d, лежащий в круге $|t| < 1$, с одним из концов x диагональю e и применим к ней, вместе с парой сторон c, c', преобразование п. 7.26. Тогда получится многоугольник, который снова примыкает к окружности $|t| = 1$ только вдоль целых сторон и соответствует схеме

$$exe'\,dy\,d'UV.$$

Следовательно, свободные стороны x и y стоят теперь в нужном порядке.

В предыдущем преобразовании последовательности U и V не разрывались; поэтому, если нужно, можно это преобразование при-

менить снова, не нарушая уже имеющуюся последовательность $exe'\,dy\,d'$. Таким образом, после конечного числа шагов мы придем к многоугольнику с расположением сторон

$$c_1x_1c_1'\ldots c_rx_rc_r'Z,$$

где последовательность Z состоит только из *внутренних* сторон. Эти стороны лежат целиком внутри круга $|t|<1$, так как их концы, в силу предположения, не могут лежать на окружности $|t|=1$.

7.31. К последовательности Z можно теперь применить метод нормализации п. 7.27. При этом уже нормированная последовательность свободных сторон сохраняется, поэтому после конечного числа шагов мы придем к искомой нормальной форме

$$c_1x_1c_1'\ldots c_rx_rc_r'a_1b_1a_1'b_1'\ldots a_pb_pa_p'b_p'.$$

§ 4. МЕТРИЧЕСКИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

7.32. Введение неевклидовой метрики. После этих общих рассуждений мы, следуя Пуанкаре и Клейну, переходим к фактическому построению фундаментального многоугольника заданной группы (T). Важное значение имеет здесь введение линейного элемента Пуанкаре

$$ds=\frac{|dt|}{1-|t|^2},$$

остающегося инвариантным при каждом конформном отображении единичного круга на себя (см. п. 7.2). В дальнейшем, если не будет оговорено противное, все геометрические понятия: расстояние, прямая и т. п. — следует понимать в смысле этой гиперболической геометрии. При этом неевклидово расстояние между двумя точками a и b мы будем кратко обозначать через $[ab]$.

7.33. Построение метрического фундаментального многоугольника. Пусть (T) — произвольная дискретная, в смысле п. 7.8, группа конформных отображений единичного круга $|t|<1$ на себя, не имеющих в нем неподвижных точек. Мы выбираем произвольную точку $t=t_0$ этого круга, которую не будем менять в течение следующего дальше построения.

Пусть теперь t — произвольная точка круга $|t|<1$ и $T_\nu(t)$ $(\nu=0,\ 1,\ \ldots)$ — класс эквивалентных ей точек. Они не могут иметь точек сгущения внутри единичного круга, поэтому неевклидово расстояние $[t_0\ T_\nu(t)]$ (при фиксированном t) достигает своего *минимума* самое большее для конечного числа значений ν; в частности, при $t=t_0$ это имеет место для тождественного преобразования T_0.

Рассмотрим теперь для каждого t ($|t|<1$) те (имеющиеся в конечном числе) точки $T_\nu(t)$, для которых $[t_0 T_\nu(t)]$ принимает минимальное значение. Когда t свободно меняется в круге $|t|<1$, эти точки $T_\nu(t)$ образуют вполне определенное множество точек Δ, содержащее точку $t=t_0$.

В дальнейшем будет показано, что Δ является *фундаментальным многоугольником* группы (T) в смысле определения п. 7.10.

7.34. Сначала мы покажем, что точки t множества Δ *характеризуются* также *неравенствами*

$$[tt_0] \leqslant [tt_\nu] \qquad (\nu = 0, 1, \ldots), \tag{7.9}$$

где t_ν означает точку $T_\nu(t_0)$.

Действительно, пусть t — точка Δ и t_ν — произвольная точка, эквивалентная t_0. Пусть T_μ — обратное преобразование, при котором $t_0 \to t_\nu$. Тогда

$$[t_0 t] \leqslant [t_0 T_\mu(t)];$$

в силу инвариантности расстояния, правая часть равна $[t_\nu t]$, следовательно,

$$[t_0 t] \leqslant [t_\nu t].$$

Обратно, пусть (7.9) справедливо для заданного t и каждого ν. Так как $T_\mu = T_\nu^{-1}$, то $[tt_\nu] = [T_\mu(t) t_0]$, следовательно, в силу (7.9), $[t_0 t] \leqslant [t_0 T_\mu(t)]$ для каждого μ; но это означает, что t принадлежит множеству Δ.

Неравенство (7.9) при фиксированном ν определяет множество всех точек t, расстояние которых от t_0 не превосходит расстояния от t_ν, следовательно, замкнутую полуплоскость H_ν. Тем самым множество Δ предстает в виде пересечения бесконечного числа замкнутых полуплоскостей H_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$).

7.35. Множество Δ выпукло. Если a и b — две точки Δ, то и соединяющий их отрезок ab также принадлежит Δ. Действительно, точки a и b лежат в каждой полуплоскости H_ν; в силу выпуклости H_ν, отрезок ab также лежит в H_ν, следовательно, этот отрезок принадлежит пересечению всех H_ν, т. е. Δ.

В частности, вместе с каждой точкой a множеству Δ принадлежит и отрезок at_0; следовательно, для $t_0 = 0$ множество Δ имеет форму звездной области с центром в точке $t=0$.

7.36. Внутренние точки. Внутренние точки t множества Δ характеризуются тем, что для них *справедливы строгие неравенства*

$$[tt_0] < [tt_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{7.10}$$

Прежде всего ясно, что эти неравенства имеют место для каждой внутренней точки, так как если для точки $t \in \Delta$

$$[tt_0] = [tt_\nu],$$

то t — граничная точка полуплоскости H_ν, тем самым и гранична точка пересечения Δ.

Обратно, пусть $t = t^*$ — точка, для которой выполняются неравенства (7.10); следовательно, t^* — внутренняя точка каждой полуплоскости. Отсюда еще нельзя сразу сделать заключение, что t^* — внутренняя точка пересечения *бесконечного множества* полуплоскостей H_ν; то, что это действительно так, видно из следующего. Пусть δ — произвольное положительное число. Так как прямые $[tt_0] = [tt_\nu]$ для достаточно больших ν лежат вне круга $[tt_0] < [t^*t_0] + \delta$, то неевклидов круг K^* вокруг t^* радиуса δ, начиная с некоторого $\nu = n$, содержится во всех полуплоскостях H_ν. Но t^* — внутренняя точка каждой полуплоскости H_ν, следовательно, и пересечения $H_1 \ldots H_n$. Каждая окрестность t^* относительно этого пересечения, которая, кроме того, лежит в K^*, принадлежит тем самым Δ, следовательно, t^* — внутренняя точка Δ.

Из предыдущего вытекает, что $t = t_0$ — *внутренняя* точка Δ.

7.37. Внешние точки. Внешние точки Δ характеризуются соответственно тем, что по крайней мере для одного $\nu > 0$ справедливо неравенство $[tt_0] > [tt_\nu]$. В самом деле, это неравенство означает, что t — внешняя точка полуплоскости H_ν и тем самым внешняя точка пересечения Δ. Обратно, пусть t — внешняя точка Δ. Так как, начиная с некоторого $\nu = n$, она является внутренней точкой полуплоскости H_ν, то t должна быть уже внешней точкой для пересечения $H_1 \ldots H_n$ и тем самым внешней точкой полуплоскости $H_\mu (1 \leqslant \mu \leqslant n)$; поэтому $[tt_0] > [tt_\mu]$.

7.38. Граничные точки. Из пп. 7.36 и 7.37 следует, что точка t тогда и только тогда является граничной точкой Δ (относительно открытого единичного круга), когда $[tt_0] \leqslant [tt_\nu]$ для каждого ν и по крайней мере для одного ν ($\nu > 0$) имеет место знак равенства.

Знак равенства может иметь место только для конечного числа ν, так как равенство $[tt_0] = [tt_\nu]$ означает, что точка t_ν лежит на неевклидовой окружности с центром в t, а такая компактная линия может содержать лишь конечное число эквивалентных точек t_ν.

7.39. Исследуем теперь подробнее границу Δ. Пусть σ_n означает для фиксированного $\nu = n$ множество точек (t), определяемых соотношениями

$$[tt_0] = [tt_n], \quad [tt_0] \leqslant [tt_\nu] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

следовательно, σ_n — пересечение прямой γ_n ($[tt_0] = [tt_n]$) с полуплоскостями H_ν. Если a и b — две точки σ_n, то, в силу выпуклости γ_n и H_ν, все точки γ_n, лежащие между a и b, также принадлежат σ_n. Следовательно, если только множество σ_n не состоит из одной точки, то оно есть либо отрезок, либо луч, либо, наконец, целая прямая γ_n.

Пусть t^* — внутренняя точка σ_n относительно прямой γ_n. Тогда для каждого натурального $\nu \neq n$ справедливо неравенство $[t^*t_0] < [t^*t_\nu]$.

В самом деле, равенство $[t^*t_0] = [t^*t_\nu]$ ($\nu \neq n$) означало бы, что точка t^* лежит еще и на прямой γ_ν; следовательно, она являлась бы точкой пересечения γ_n и γ_ν, и так как t^* — внутренняя точка σ_n, то на σ_n имелись бы тогда точки, лежащие *вне* H_ν, что противоречит определению σ_n.

Обратно, если для всех $\nu \neq n$ справедливо неравенство $[t^*t_0] < [t^*t_\nu]$, то t^* — внутренняя точка σ_n: действительно, как в п. 7.36, заключаем, что эти неравенства справедливы еще в окрестности t^* и пересечение этой окрестности с σ_n есть тогда окрестность t^* относительно γ_n, принадлежащей σ_n.

7.40. Отсюда заключаем, что внутренняя точка σ_n не может лежать на другом отрезке σ_m. В самом деле, согласно п. 7.39, для внутренней точки σ_n имеем $[tt_0] < [tt_\nu]$ ($\nu \neq n$), следовательно, в частности, $[tt_0] < [tt_m]$, в то время как для σ_m должно быть $[tt_0] = [tt_m]$.

Предположим теперь, что некоторое σ_n, скажем σ_1, не есть вся соответствующая прямая γ_1, и рассмотрим конец t^* отрезка или луча σ_1 внутри круга $|t| < 1$. Тогда t^* лежит в точности еще на одном $\sigma_m \neq \sigma_1$. В самом деле, так как t^* — конец σ_1, то по крайней мере для одного $m \neq 1$ $[t_0t^*] = [t_mt^*]$. Рассмотрим все конечное множество значений m, для которых это имеет место; t^* лежит тогда на соответствующих им прямых γ_m. Пусть обозначения выбраны так, что это — прямые $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и что они занумерованы в циклическом порядке вокруг t^* [1]).

Точка t^* разбивает каждую прямую γ_ρ на два луча α_ρ и β_ρ; пусть при этом α_ρ лежит в полуплоскости $H_{\rho+1}$ и β_ρ — в дополнительной полуплоскости $H'_{\rho+1}$ ($\rho = 1, \ldots, r-1$). Тогда α_r лежит в H'_1 и β_r — в H_1 [2]). Затем α_ρ лежит в $H'_{\rho-1}$ и β_ρ — в $H_{\rho-1}$ ($\rho = 2, \ldots, r$). Напротив, α_1 лежит в H_r и β_1 — в H'_r; следовательно, α_1 и β_r — два (единственных) луча, которые не лежат ни в одной из дополнительных полуплоскостей H'_ρ (фиг. 16). Поэтому отрезок σ_ν может быть

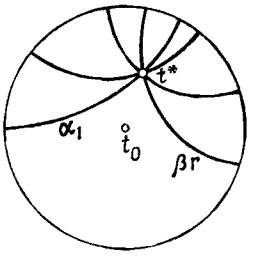
---

[1]) Если двигаться из t_0 по неевклидовой окружности вокруг t^*, то γ_1 — первая из встречаемых прямых (в каком направлении совершать обход, безразлично). Для дальнейшего этот порядок записи цикла $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ имеет существенное значение. — *Прим. перев.*

[2]) Собственно говоря, это определения α_r и β_r. — *Прим. перев.*

расположен самое большее на α_1 и β_r. Луч α_1 действительно содержит такой отрезок, а именно, σ_1; чтобы показать, что такой отрезок лежит и на β_r, заметим, что β_r содержится в полуплоскостях H_ρ ($\rho = 1, \ldots, r$) и что для $\nu > r$ справедливы неравенства $[t^*t_0] < [t^*t_\nu]$. Следовательно, достаточно близкие к t^* точки β_r принадлежат также полуплоскостям H_ν ($\nu > r$). Таким образом, множество σ_r состоит не только из точки t^*; следовательно, σ_r — отрезок или луч, выходящий из t^*.

Таким образом, граница множества Δ состоит из отрезков, лучей и прямых, и из каждого расположенного в круге $|t| < 1$ конца отрезка или луча выходит еще один отрезок или луч.



Фиг. 16.

7.41. Если t^* — конец σ_n, лежащий на окружности $|t| = 1$, то аналогично доказывается, что из t^* выходит либо еще один луч $\sigma_m \neq \sigma_n$, либо иичего не выходит. В последнем случае множество Δ примыкает к окружности $|t| = 1$ вдоль некоторой дуги, выходящей из точки t^*.

Теперь мы дополняем множество Δ, возможно, имеющимися у него предельными точками на окружности $|t| = 1$. Граница полученного таким образом замкнутого множества состоит из неевклидовых отрезков (соответственно лучей и прямых) и, возможно, дуг окружности $|t| = 1$, причем в каждом конце такой составной части границы начинается в точности одна другая. Следовательно, Δ — *многоугольник*.

7.42. Теперь мы покажем, что Δ — *фундаментальный многоугольник* группы (T). Из построения Δ в п. 7.33 непосредственно вытекает, что каждая точка круга $|t| < 1$ имеет в Δ эквивалентную точку. Нам нужно, следовательно, дальше показать, что никакие две внутренние точки Δ не эквивалентны.

Действительно, пусть t — внутренняя точка Δ и t' — точка, эквивалентная t. Пусть t_m — точка, которая при преобразовании $t \to t'$ переходит в точку t_0, и t_n — образ t_0. Так как t — внутренняя точка Δ, то $[tt_0] < [tt_m]$, а отсюда, в силу инвариантности расстояния, следует неравенство $[t't_n] < [t't_0]$, означающее, что t' — *внешняя* точка Δ.

7.43. Эквивалентные граничные точки. Если в Δ вообще имеются эквивалентные точки, то они должны быть *граничными*. Две такие эквивалентные точки t и t' имеют одинаковое расстояние от точки t_0, так как, согласно п. 7.33, $[tt_0] \leqslant [t't_0]$, а также $[t't_0] \leqslant [tt_0]$, так что $[tt_0] = [t't_0]$.

Мы покажем, что для каждой внутренней точки t стороны σ_n многоугольника Δ (не лежащей на окружности $|t| = 1$) имеется одна и только одна эквивалентная точка.

Пусть t' — произвольная точка Δ, эквивалентная t (мы предполагаем, что такая точка существует), и T — преобразование $t \to t'$. Пусть t_m — точка, которая при этом переходит в t_0; тогда $[tt_m] = [t't_0]$, $[tt_0] = [t't_0]$ и тем самым $[tt_m] = [tt_0]$. Так как t, по предположению, *внутренняя* точка стороны σ_n, то последнее равенство может иметь место только тогда, когда $m = n$ или $m = 0$. Второй случай невозможен в силу того, что T не имеет неподвижных точек, следовательно, $t_m = t_n$, т. е. T — то преобразование, которое переводит t_n в t_0 [1]). Следовательно, имеется самое большее *одна* точка Δ, эквивалентная t.

Преобразование $t_n \to t_0$ действительно переводит t в точку некоторой стороны σ_ν. Так как t лежит на σ_n, то $[tt_n] = [tt_0]$; если t_r — образ t_0 при этом преобразовании, то отсюда следует, что $[t't_0] = [t't_r]$. Напротив, $[t't_0] < [t't_\nu]$ для $\nu \neq r$, 0. В самом деле, так как $t_\nu \neq t_r$ и $t_\nu \neq t_0$, то прообраз t_μ точки t_ν отличен от t_0 и t_n; следовательно, $[tt_0] < [tt_\mu]$, ибо t — внутренняя точка σ_n, поэтому $[t't_0] < [t't_\nu]$ для $\nu \neq r$, 0. Этим показано, что t' — внутренняя точка стороны σ_r.

Итак, преобразование T переводит каждую внутреннюю точку σ_n во внутреннюю точку σ_r. То, что при этом получаются все внутренние точки σ_r, следует из того, что обратное преобразование $t_r \to t_0$ переводит внутренние точки σ_r во внутренние точки σ_n. Наконец, таким же образом доказывается, что T преобразует концы σ_n в концы σ_r, тем самым всю сторону σ_n в σ_r.

7.44. Этим показано, что для каждой внутренней точки t (внутренней) стороны σ_n имеется одна и только одна эквивалентная точка t' и что соответствующее преобразование есть то, которое переводит t_n в t_0. Если t_r — образ t_0, то t' — внутренняя точка стороны σ_r и T переводит всю сторону σ_n в сторону σ_r. Следовательно, стороны Δ попарно эквивалентны и Δ, как утверждалось, есть *фундаментальный многоугольник* группы (T). Мы называем его *метрическим фундаментальным многоугольником* группы.

Заметим еще, что метрический фундаментальный многоугольник обладает тем свойством, что в различных парах эквивалентных сторон эквивалентность устанавливается посредством различных преобразований.

7.45. Примеры. Рассмотрим простой случай, когда группа $(T$ — циклическая. Пусть сначала образующее преобразование T — параболическое, с неподвижной точкой $t = \zeta$ ($|\zeta| = 1$), и пусть $t_0 = 0$, Точки $t_\nu = T_\nu(0)$ лежат на окружности K, проходящей через начало O и ζ и касающейся единичной окружности в точке ζ. Прямыми $[tt_\nu] = [tt_0]$

[1]) t_n имеет здесь то же значение, что и в п. 7.39. — *Прим. перев.*

являются ортогональные к $|t|=1$ дуги окружностей с общей точкой ζ.

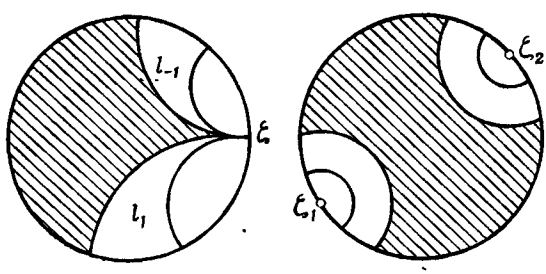
В последнем можно геометрически убедиться следующим образом: пусть P — произвольная точка окружности K и α — угол между направлениями $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{O\zeta}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. На отрезке OP выберем точку A. Тогда существует единственная окружность с центром на продолжении $\overrightarrow{OP}$, которая ортогональна к окружности $|t|=1$ и проходит через A. Расстояние от центра M этой окружности до O равно

$$d=\frac{\overline{OA}^2+1}{2\overline{OA}}.$$

Для того, чтобы эта окружность проходила через точку ζ, нужно, чтобы было $1/d=\cos\alpha$. Но $\cos\alpha$, с другой стороны, есть длина отрезка OP, так что это условие означает, что

$$\overline{OP}=\frac{2\overline{OA}}{\overline{OA}^2+1}.$$

Но это как раз выражает тот факт, что A делит отрезок $\overline{OP}$ на равные части в смысле неевклидовой метрики. С другой стороны, это условие содержит указание для построения нашей прямой $[tt_\nu]=[tt_0]$: точка t_ν лежит на окружности K; неевклидово расстояние $[t_0t_\nu]$ нужно



Фиг. 17.

разделить пополам, и через точку деления нужно провести ортогональную окружность с центром на продолжении прямой, проходящей через t_0 и t_ν [1]).

В этом случае граница метрического фундаментального многоугольника внутри круга $|t|<1$ состоит только из прямых $[tt_1]=[tt_0]$

[1]) Пусть K' — указанная ортогональная окружность. Ее центр M лежит на пересечении луча, выходящего из O и проходящего через t_ν, и прямой, касательной к окружности $|t|=1$ в точке ζ. То, что K' определяет искомую прямую, становится очевидным *сразу*, если отобразить круг $|t|<1$ на полуплоскость так, что $\zeta\to\infty$. — *Прим. перев.*

и $[tt_{-1}] = [tt_0]$. Следовательно, Δ — „треугольник", ограниченный двумя параллельными прямыми l_1 и l_{-1} и дугой единичной окружности (фиг. 17, слева). Стороны l_1 и l_{-1} связаны преобразованием T^2.

Пусть теперь образующее преобразование T — *гиперболическое*, с неподвижными точками ζ_1 и ζ_2 на окружности $|t| = 1$. Точки t_ν лежат тогда на окружности, проходящей через ζ_1, ζ_2 и O. Прямые $[tt_\nu] = [tt_0]$ в этом случае попарно не пересекаются. Следовательно, метрический фундаментальный многоугольник есть „четырехугольник", ограниченный прямыми l_1 и l_{-1} и двумя дугами единичной окружности. Стороны l_1 и l_{-1} связаны преобразованием T^2 (фиг. 17, справа).

§ 5. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЧИСЛОВОЙ ПЛОСКОСТИ НА СЕБЯ

7.46. Группа. В этом параграфе мы рассматриваем дискретную группу (T) конформных отображений числовой плоскости на себя, не имеющих неподвижных точек, следовательно, группу параболических преобразований

$$T_\nu(t) = t + t_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots; \quad T_0(t) \equiv t).$$

Точки t_ν сходятся только к $t = \infty$, так как они эквивалентны относительно группы (T).

7.47. Решетка эквивалентных точек. Среди чисел t_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ существует такое $t_\alpha = \omega_1$, которое имеет наименьшую абсолютную величину $|t_\alpha| = r_1 > 0$. Точки $t = n\omega_1$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ охватывают все эквивалентные $t = 0$ точки, расположенные на прямой, определяемой точками $t = 0$ и $t = \omega_1$. Если преобразования $t \to t + n\omega_1$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ составляют уже всю группу (T), то замкнутая полоса, ограниченная двумя проходящими через точки $t = 0$, $t = \omega_1$ параллельными прямыми, есть фундаментальная область группы (T). Можно было бы, аналогично тому, как это было сделано в § 4, построить „метрическую" фундаментальную область Δ; при этом нужно только вместо понятий неевклидовой геометрии оперировать с понятиями евклидовой геометрии. Таким образом мы получили бы полосу Δ_1, расположенную перпендикулярно вектору ω_1.

7.48. Двоякопериодическая решетка. Если, напротив, множество t_ν содержит точки вне прямой $(0, \omega_1)$, то пусть $t_\beta = \omega_2$ — та из них, расстояние которой $|t_\beta| = r_2$ от точки $t = 0$ является минимальным. Группа содержит тогда все преобразования $t \to t + \omega$, где

$$\omega = n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \qquad (n_1, n_2 = 0, \pm 1, \ldots). \tag{7.11}$$

С другой стороны, среди этих преобразований содержатся *все* преобразования группы. Для доказательства предположим, что σ_0^1 и σ_0^2 —

замкнутые треугольники $(0, \omega_1, \omega_2)$ и $(0, -\omega_1, -\omega_2)$. Множеству $\sigma_0^1 + \sigma_0^2$, кроме пяти вершин, не принадлежат никакие точки t_ν. Преобразование $t \to t + \omega$ переводит треугольники σ_0^1 и σ^2 в два треугольника σ_ω^1 и σ_ω^2. Когда ω пробегает значения (7.11), совокупность этих треугольников покрывает без пропусков всю плоскость t.

Если теперь $t \to t + t'$ — произвольное преобразование группы (T), то среди точек $\omega + t'$ [ω пробегает множество (7.11)] имеется точка $\omega_0 + t'$, принадлежащая $\sigma_0^1 + \sigma_0^2$. Она должна совпадать с одной из пяти вершин, следовательно, она, а тем самым и t', — точка решетки. Итак, преобразования имеют вид $t \to t + \omega$, где ω пробегает значения (7.11).

Следовательно, множество $\sigma_0^1 + \sigma_0^2$ есть (замкнутая) фундаментальная область. Если к σ_0^2 применить преобразование $t \to t + \omega_1 + \omega_2$ и сохранить σ_0^1, то получим новую фундаментальную область группы (T) в форме параллелограма

$$t = \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2 \quad (0 \leqslant \lambda_1,\ \lambda_2 \leqslant 1).$$

Также и здесь, аналогично § 4, можно построить метрический фундаментальный многоугольник. В общем случае он имеет более четырех сторон. Например, в случае, когда предыдущий параллелограм есть ромб с острым углом $\pi/3$, в качестве метрического фундаментального многоугольника получается правильный шестиугольник с центром в точке $t = 0$.

Глава VIII

УНИФОРМИЗАЦИЯ

Согласно гл. II, каждая риманова поверхность R имеет односвязную универсальную поверхность наложения $\hat{R}$. По теореме Римана об отображении, эта поверхность может быть отображена взаимно однозначно и конформно на нормальную область E замкнутой числовой плоскости. Таким образом не только для универсальной поверхности наложения $\hat{R}$, но и для основной поверхности R получается простое нормальное представление в виде евклидовой или неевклидовой полиэдрической поверхности. Это представление ведет, в частности, к решению общей проблемы униформизации.

Метод универсальной поверхности наложения, восходящий к Шварцу [1]), образует также простую основу для изучения многих других проблем теории отображений и функций на римановых поверхностях. Некоторые из них будут рассмотрены в §§ 1—3 этой главы.

§ 1. НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

8.1. Эллиптический случай. В дальнейшем мы рассматриваем произвольную риманову поверхность R, строим для нее универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ и отображаем последнюю топологически и конформно, по теореме Римана об отображении, на нормальную область E. При этом следует различать три случая: поверхность $\hat{R}$ может быть эллиптической, параболической или гиперболической. *Эллиптический* случай имеет место тогда и только тогда, когда поверхность $R \equiv \hat{R}$ замкнута и имеет тип сферы; об этом случае больше нечего сказать, и мы не будем его рассматривать.

8.2. Параболический случай. Пусть R — риманова поверхность, универсальная поверхность наложения которой $\hat{R}$ параболична, т. е. конформно эквивалентна числовой плоскости $t \neq \infty$. R получается из $\hat{R}$ отождествлением точек, эквивалентных относительно преобразований наложения (T). Соответственно структуре группы (T), мы будем различать следующие случаи (ср. § 5 гл. VII):

---

[1]) Ср. переписку между Клейном и Пуанкаре [2].

Если (T) состоит только из тождественного преобразования, то поверхности R и $\hat{R}$ конформно эквивалентны; следовательно, R сама конформно эквивалентна числовой плоскости $t \neq \infty$.

Если (T) состоит из кратных преобразования $T(t) = t + \omega_1$, то с помощью преобразования

$$w = e^{\frac{2\pi i}{\omega_1} t}$$

поверхность R отображается топологически и конформно на область $0 < |w| < \infty$. Следовательно, в этом случае поверхность R конформно эквивалентна числовой сфере с двумя выколотыми точками.

Пусть, наконец, (T) — группа, порожденная двумя преобразованиями $T_1(t) = t + \omega_1$ и $T_2(t) = t + \omega_2$. Тогда R получается из фундаментального параллелограма отождествлением противоположных сторон. В этом случае R — замкнутая поверхность с характеристикой $\chi = 0$ (рода 1).

В первых двух случаях класс поверхностей, конформно эквивалентных R, однозначно определяется структурой группы преобразований наложения, так как всякие две числовые сферы с одной, соответственно с двумя, выколотыми точками конформно эквивалентны. Напротив, для замкнутой поверхности с характеристикой нуль это не так. В п. 8.17 будут перечислены все конформные классы поверхностей этого топологического типа.

8.3. Гиперболический случай. Из предыдущего видно, что, за исключением весьма специальных случаев, универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ римановой поверхности R является *гиперболической*. Этот общий случай мы сейчас и будем рассматривать. При этом сначала мы ограничимся *компактными* поверхностями R.

Итак, пусть R — замкнутая поверхность, универсальная поверхность наложения которой $\hat{R}$ гиперболична. Метрический фундаментальный многоугольник π лежит тогда целиком внутри[1]) круга $|t| < 1$, и соответствующий нормальный многоугольник имеет поэтому форму (см. п. 7.27)

$$a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_p b_p a_p' b_p' \quad (p \geqslant 1). \qquad (p)$$

Таким образом, справедливо предложение:

Каждая замкнутая риманова поверхность R, универсальная поверхность наложения которой гиперболична, получается из многоугольника π отождествлением его сторон согласно схеме (p).

---

[1]) В самом деле, если на R ввести метрику, определенную неевклидовым линейным элементом поверхности $\hat{R}$ (ср. п. 8.8), то расстояние между двумя точками на R, в силу компактности этой поверхности, имеет *конечный* максимум. Поэтому каждый фундаментальный многоугольник группы (T) должен находиться в некотором круге $|t| \leqslant r < 1$.

8.4. Условие для рода. Мы покажем, что случай $p = 1$ невозможен, другими словами, что *род замкнутой римановой поверхности, универсальная поверхность наложения которой гиперболична, не меньше* 2.

Для этого вернемся обратно к метрическому фундаментальному многоугольнику π и обозначим соответственно через n и α число его сторон и число классов вершин. Тогда, согласно п. 3.17, характеристика поверхности, представленной π, равна $\chi = -\alpha + n - 1$. Нам нужно, следовательно, показать, что при заданных условиях

$$-\alpha + n - 1 \geqslant 1.$$

Пусть Ω — сумма углов π. Тогда $2\pi\alpha = \Omega$, так как каждый класс вершин π дает для Ω в точности величину 2π. В самом деле, если $e_\rho (\rho = 1, \ldots, r)$ — вершины класса, то для каждой вершины e_ρ существует преобразование T_ρ, переводящее e_ρ в e_1. При этом π переходит в многоугольник π_ρ ($\pi_1 = \pi$), имеющий с π общую вершину e_1. Поэтому многоугольники π_ρ образуют цикл вокруг e_1. Внутренний угол в вершине e_ρ равен внутреннему углу π_ρ в вершине e_1, и, следовательно, сумма этих внутренних углов действительно равна 2π.

Чтобы подсчитать число n, учтем, что сумма углов Ω неевклидова (гиперболического) $2n$-угольника равна

$$\Omega = 2\pi(n - 1) - \delta,$$

где δ означает (положительный) угловой дефект[1]). Из обоих равенств для α и n вытекает, что

$$\chi = n - 1 - \alpha > 0,$$

следовательно, $\chi \geqslant 1$, что и требовалось доказать.

8.5. Топологическая структура замкнутых поверхностей. Итак, мы получили обзор всех возможных случаев топологической структуры замкнутой римановой поверхности R:

Если универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ эллиптична, то R является сферой.

Если поверхность $\hat{R}$ параболична, то R получается из параллелограма плоскости z отождествлением эквивалентных сторон и, следовательно, может быть представлена схемой

$$aba'b'.$$

---

[1]) Эту фундаментальную теорему неевклидовой геометрии доказывают с помощью модели Пуанкаре сначала для треугольника, переводя его с помощью неевклидова движения в частное положение $(0, t_1, t_2)$. Евклидов треугольник $(0, t_1, t_2)$ описан тогда вокруг соответствующего неевклидова и поэтому имеет бо́льшую сумму углов, чем неевклидов. Для неевклидова многоугольника теорема получается путем его разбиения на треугольники. [См. А. И. Маркушевич [1**], стр. 116, и Форд [1*], стр. 256. — *Прим. перев.*]

Если, наконец, поверхность $\hat{R}$ гиперболична, то R получается из $4p$-угольника ($p \geqslant 2$) числовой плоскости отождествлением его сторон согласно схеме

$$a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_p b_p a_p' b_p'. \qquad (p)$$

Так как каждая отличная от сферы замкнутая поверхность может быть представлена в предыдущем виде с помощью $4p$-угольника ($p \geqslant 1$) и ее характеристика связана с p соотношением $\chi = 2(p-1)$, то характеристика всегда четна и $\geqslant 0$ (см. п. 5.8).

Две поверхности одного и того же рода хотя и эквивалентны топологически, однако (если исключить случай $p = 0$) в общем случае не эквивалентны конформно. В § 3 для $p = 1$ будут установлены все конформные классы этого топологического типа.

8.6. Поверхности с краем. Остается рассмотреть *открытые* римановы поверхности R; соответствующий метрический фундаментальный многоугольник π доходит тогда до единичной окружности $|t| = 1$. Мы ограничимся здесь случаем, когда это происходит вдоль конечного числа дуг l_i этой окружности и, напротив, не имеет места для изолированных вершин. Пусть, далее, общее число сторон π *конечно*. Тогда, согласно п. 7.31, многоугольник π может быть приведен к нормальной форме

$$a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_p b_p a_p' b_p' c_1 l_1 c_1' \ldots c_r l_r c_r'. \qquad (r)$$

Поверхность R получается из π удалением лежащих на окружности $|t| = 1$ свободных сторон и отождествлением эквивалентных относительно группы (T) сторон, расположенных в круге $|t| < 1$.

Числа p и r называются соответственно *родом* и *краевым числом* (Ränderzahl) поверхности R. Название „краевое число“ оправдывается следующим образом: если сохранить свободные стороны многоугольника π и отождествить эквивалентные его стороны, то получится некоторая компактная поверхность с краем R^*; из нее R получается удалением „края“.

8.7. Произвольные открытые поверхности. Триангулируемость. Остается рассмотреть те некомпактные поверхности R, метрические фундаментальные многоугольники которых примыкают к единичной окружности более сложным образом, чем в предыдущем пункте. Для этих случаев нельзя указать никаких нормальных форм, однако можно показать, что, каким бы сложным ни был многоугольник π, такая поверхность всегда сохраняет очень важное топологическое свойство: она *триангулируема*.

Действительно, пусть $\rho \leqslant |t| \leqslant r$ — произвольное кольцо, лежащее в круге $|t| < 1$. Его пересечение с π состоит из конечного числа многоугольников. Выберем последовательность $r_1 < r_2 < \ldots$,

$r_n \to 1$, и для каждого ν рассмотрим пересечение кольца $r_\nu \leqslant |t| \leqslant r_{\nu+1}$ с π. Мы получим счетное множество многоугольников, образующих замощение многоугольника π. Чтобы отсюда получить триангуляцию, нужно только отдельные составляющие многоугольники разделить подходящим образом на (криволинейные) треугольники. При этом нужно еще следить за тем, чтобы с каждой новой точкой деления стороны π к числу вершин присоединялась и эквивалентная ей точка.

Для замкнутых римановых поверхностей и римановых поверхностей с краем триангулируемость усматривается непосредственно из формы метрического фундаментального многоугольника (или также из предыдущего построения). Этим в общем случае показано, что *каждая риманова поверхность триангулируема.*

8.8. Метризация римановой поверхности. В ходе предыдущего исследования мы неоднократно использовали неевклидову метрику римановой поверхности R, если эта поверхность была односвязна и имела гиперболический тип. Для определения этой метрики мы отображали R на единичный круг $|t| < 1$ и, следуя Пуанкаре, определяли линейный элемент с помощью выражения

$$d\sigma = \frac{|dt|}{1-|t|^2}.$$

Построение универсальной поверхности наложения позволяет ввести соответствующую неевклидову (гиперболическую) геометрию на каждой замкнутой или открытой римановой поверхности R, если ее универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ гиперболична. Сначала вводят метрику Пуанкаре на $\hat{R}$; в силу инвариантности линейного элемента $d\sigma$ относительно конформных отображений единичного круга на себя, $d\sigma$ принимает одинаковое значение во всех точках $\hat{R}$, эквивалентных относительно группы преобразований наложения (T), благодаря чему элемент $d\sigma$ *однозначно* определен и на основной поверхности R.

В тех немногих случаях, когда $\hat{R}$ — не гиперболического типа, можно основную поверхность R метризовать аналогичным образом. В параболическом случае естественной метрикой $\hat{R}$ и R является обыкновенная евклидова метрика.

В эллиптическом случае, когда поверхность $R \equiv \hat{R}$ конформно эквивалентна сфере, имеет место сферическая геометрия с линейным элементом

$$d\sigma = \frac{|dt|}{1+|t|^2}.$$

§ 2. ПРОДОЛЖАЕМОСТЬ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

8.9. Продолжение и замыкание. Понятие *продолжаемости римановой поверхности* впервые привлекло большое внимание благодаря Радо [2]. Согласно Радо, риманова поверхность R называется *продолжаемой*, если существует другая риманова поверхность R_1, такая, что R конформно эквивалентна подобласти R_1' поверхности R_1; при этом R_1 должна иметь точки, внешние относительно R_1'. Если R_1 не имеет внешних точек относительно R_1', но имеет по крайней мере *одну* точку, не принадлежащую R_1', то мы называем R_1 *замыканием* поверхности R_1'. Вообще говоря, поверхность незамыкаема и непродолжаема [1]).

Пусть R_1 — продолжение римановой поверхности R. Область на R_1, конформно эквивалентную R, мы снова обозначаем через R. Пусть $\hat{R}_1$ — универсальная поверхность наложения R_1. Тогда множество $\tilde{R}$ прообразов точек R на $\hat{R}_1$ (если только оно связно) представляет собой безграничную поверхность наложения для R с проектированием $\hat{R}_1 \to R_1$. Так как R_1 имеет внешние точки относительно R, то то же самое справедливо для $\hat{R}_1$ относительно $\tilde{R}$. Следовательно, если к поверхности $\hat{R}_1$ применено риманово отображение, то $\tilde{R}$ переходит при этом в некоторую область G_w на w-сфере, такую, что дополнение к ней содержит целый круг. Поэтому указанное отображение можно нормировать так, чтобы область G_w была ограничена.

Пусть, с другой стороны, $\hat{R}$ — универсальная поверхность наложения R. Она является поверхностью наложения и $\tilde{R}$, тем самым и ограниченной области G_w, поэтому она должна быть гиперболической. Следовательно, универсальная поверхность наложения продолжаемой поверхности — всегда гиперболического типа.

Отсюда, в частности, следует, что числовая сфера и числовая плоскость непродолжаемы.

8.10. Критерий продолжаемости. Для продолжаемости римановой поверхности, очевидно, достаточно, чтобы метрический фундаментальный многоугольник π имел свободную „идеальную“ граничную дугу на единичной окружности $|t| = 1$.

В самом деле, если многоугольник π имеет свободную граничную дугу на окружности $|t| = 1$, то можно R продолжить, например, с помощью так называемого *удвоения*, присоединяя многоугольник π^*, получаемый при зеркальном отражении π относительно свободной дуги.

---

[1]) Этот вопрос более подробно исследован Сарио в его диссертации [1]; вместо терминов „продолжение“ и „замыкание“ он использует названия „собственное“, соответственно „несобственное“, продолжение. См. также де Поссель [1].

Вообще говоря, нельзя утверждать, что предыдущее условие также и необходимо для продолжаемости поверхности R. Все же справедливо следующее.

Пусть R — продолжаемая риманова поверхность и R_1 — ее продолжение. Тогда граница R на R_1 обязательно содержит континуум $\varkappa$. Пусть $\varkappa$ содержит *свободную жорданову дугу* α и M — внутренняя точка α. Вокруг M возьмем столь малый кружок K, расположенный в параметрической (относительно R_1) окрестности M, чтобы пересечение $KR = G$ было односвязным. Пусть $\hat{R}$ — универсальная поверхность наложения R. Пересечению G соответствуют на $\hat{R}$ некоторые односвязные области, связанные с G взаимно однозначно проектированием; пусть $\hat{G}$ — любая из них. Тогда отображение $G \to \hat{G}$ может быть продолжено на граничную дугу α области G. Этой дуге соответствует дуга на границе области $\hat{G}$. Она расположена на окружности $|t| = 1$: в самом деле, внутренним точкам $|t| < 1$ при отображении соответствуют всегда точки R, α же не принадлежит R.

Пусть теперь Δ — фундаментальный многоугольник поверхности R, содержащий область $\hat{G}$. Внутренние точки Δ взаимно однозначно соответствуют точкам R. Области $\hat{G}$ соответствует на R область G. Как показано выше, продолжение отображения $G \to \hat{G}$ переводит дугу α в дугу на окружности $|t| = 1$. Поэтому многоугольник Δ должен вдоль всей этой дуги примыкать к окружности $|t| = 1$.

8.11. Примеры. В качестве примера рассмотрим случай, когда метрический фундаментальный многоугольник Δ поверхности R имеет конечное число сторон и вдоль некоторых из них, но не по отдельным вершинам, примыкает к окружности $|t| = 1$. Тогда его всегда можно привести к указанной в п. 8.6 нормальной форме (r). Если к Δ присоединить многоугольник Δ^*, симметричный Δ относительно окружности $|t| = 1$, и отождествить также и на Δ^* соответствующие друг другу стороны, то получится некоторая поверхность R_1, содержащая R как часть. Что касается топологической структуры R_1, то R_1 — замкнутая поверхность, род которой можно подсчитать непосредственно, если учесть, что R_1 может быть представлена двумя многоугольниками

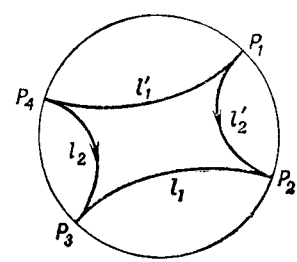
$$c_1 l_1 c_1' \dots c_r l_r c_r' a_1 b_1 a_1' b_1' \dots a_p b_p a_p' b_p',$$

$$c_1^* l_1^* c_1'^* \dots c_r^* l_r^* c_r'^* a_1^* b_1^* a_1'^* b_1'^* \dots a_p^* b_p^* a_p'^* b_p'^*$$

с указанным выше соответствием сторон. Таким образом найдем, что $\alpha_2 = 2$, $\alpha_1 = 3r + 4p$, $\alpha_0 = r + 2$ и знакочередующаяся сумма $\gamma_1 = 2r + 4p - 4$. Отсюда вычисляем род p_1 через род p и краевое число r поверхности R: $p_1 = 2p + r - 1$.

Однако предыдущая поверхность R_1 определена не только топологически, но и как риманова поверхность. Чтобы в этом убедиться, проще всего снова исходить из многоугольника Δ и зеркального его образа Δ^*. Нужно только рассмотреть точки, являющиеся концами произвольной свободной стороны. Если A — такая точка, то она имеет одну и только одну эквивалентную точку A' и преобразование $A \to A'$ переводит выходящую из A внутреннюю сторону a в выходящую из A' внутреннюю сторону a', а также и отраженную сторону a^* в соответствующую сторону a'^*, ибо a и a' — дуги окружностей, ортогональных к окружности $|t| = 1$. Если теперь K — пересечение достаточно малого круга с центром в A с Δ, то „полуокрестность" $K + K^*$ точки A переходит при преобразовании $A \to A'$ в „полуокрестность" точки A'. Эти полуокрестности при отождествлении эквивалентных относительно $A \to A'$ дуг окружностей определяют параметрическую окрестность точки поверхности, представленной точками A и A'.

8.12. В качестве другого примера рассмотрим случай, когда метрический фундаментальный многоугольник есть *четырехугольник с нулевыми углами*, у которого противоположные стороны эквивалентны (фиг. 18). Поверхность R можно *замкнуть*. В самом деле, если присоединить к четырехугольнику четыре вершины, лежащие на окружности $|t| = 1$, и отождествить их, то получим компактную поверхность рода $p = 1$. Сначала она не является римановой поверхностью, так как точка P, соответствующая четырем вершинам, еще не имеет параметрической окрестности, связанной конформным отображением с ее соседними окрестностями. Нам нужно и этой точке поставить в соответствие такую окрестность.



Фиг. 18.

Для этого рассмотрим отображение T_ν ($\nu = 1, 2$), переводящее сторону l_ν в сторону l_ν' (см. фиг. 18); пусть K_1 — окружность, проходящая через P_1 и $t = 0$ и касающаяся окружности $|t| = 1$ в P_1. Окружность K_1 при отображениях T_1^{-1}, $T_2^{-1}T_1^{-1}$, T_2^{-1} переходит в окружности K_2, K_3, K_4, проходящие через P_2, P_3, P_4. Каждая из окружностей K_i ($i = 1, 2, 3, 4$) вырезает из четырехугольника Δ сектор S_i, ограниченный дугой этой окружности и двумя боковыми сторонами. Если к S_2 применить преобразование T_1, то получим новый сектор S_2', граничащий с S_1. Точно так же с помощью преобразований T_1T_2 и $T_1T_2T_1^{-1}$ получим соответственно из S_3 и S_4 два сектора, которые вместе с S_1 и S_2' образуют один сектор S вокруг

точки P_1. Эквивалентность свободных сторон S устанавливается тогда посредством преобразования $T = T_1 T_2 T_1^{-1} T_2^{-1}$.

Из сектора S можно теперь построить требуемую параметрическую окрестность точки P. Для этого отобразим S на круг так, чтобы эквивалентные точки сторон переходили в одинаковые точки круга. Для предыдущего преобразования T точка P_1 во всяком случае является неподвижной точкой. Предположим сначала, что преобразование T — параболическое, следовательно, может быть представлено в виде

$$\frac{\lambda\zeta}{\zeta - t'} = \frac{\lambda\zeta}{\zeta - t} + 2\pi i \quad (P_1 \longleftrightarrow \zeta),$$

где λ — вполне определенное действительное число. Рассмотрим отображение

$$\tau = \frac{\lambda\zeta}{\zeta - t}.$$

Оно переводит окружность K_1 в прямую $\mathrm{Re}(\tau) = \lambda$ и ограниченный ею круг — в ту полуплоскость, которая не содержит точку $\tau = 0$. Стороны S переходят в прямые, параллельные действительной оси, и тем самым сектор S — в параллельную полосу указанной полуплоскости. Если t и t' — эквивалентные точки S, следовательно,

$$\frac{\lambda\zeta}{\zeta - t'} = \frac{\lambda\zeta}{\zeta - t} + 2\pi i,$$

то для их образов справедливо соотношение $\tau' = \tau + 2\pi i$. Отсюда следует, во-первых, что ширина полосы равна 2π и, во-вторых, что точки τ и $\tau + 2\pi i$ эквивалентны.

Отображение $\sigma = e^{-\tau}$, соответственно $\sigma = e^{\tau}$ (в зависимости от того, будет ли $\lambda > 0$ или < 0), переводит далее нашу параллельную полосу в область K_λ: $0 < |\sigma| < e^{-|\lambda|}$, причем взаимно однозначно, исключая граничные прямые, которые переходят в один и тот же радиус, так что точки τ и $\tau + 2\pi i$ переходят в одну и ту же точку. Поэтому

$$\sigma = e^{-\frac{|\lambda|\zeta}{\zeta - z}}$$

есть отображение, переводящее сектор S в круг K_λ так, что эквивалентные точки свободных сторон переходят в одинаковые точки.

В случае, когда преобразование T гиперболическое, искомое отображение может быть построено аналогично.

Если теперь точке P, соответствующей четырем вершинам, поставить в соответствие круг K_λ в качестве параметрической окрестности, то соотношения соседства все будут конформными, независимо от того, на какой из четырех сторон Δ лежит вторая рассматриваемая точка (соседняя с P). Этим показано, что R — риманова поверхность.

§ 3. КОНФОРМНЫЕ КЛАССЫ

8.13. Постановка проблемы. В этом параграфе будет исследован вопрос о *конформной эквивалентности* двух заданных римановых поверхностей. В частности, для двух конформно эквивалентных поверхностей R_1 и R_2 нас интересует вопрос о совокупности всех соответствующих конформных отображений: это ведет к проблеме описания всех конформных отображений заданной римановой поверхности на себя.

Пусть R_1 и R_2 — две конформно эквивалентные римановы поверхности и φ — взаимно однозначное конформное отображение $R_1 \to R_2$. Если тогда α — конформное отображение R_1 на себя, то и $\varphi\alpha$ — конформное отображение $R_1 \to R_2$. Обратно, если ψ — другое конформное отображение $R_1 \to R_2$, то $\psi^{-1}\varphi$ — конформное отображение R_1 на себя. Следовательно, совокупность конформных отображений $R_1 \to R_2$ задается соотношением

$$\varphi = \varphi_0 \alpha,$$

где φ_0 — частное отображение $R_1 \to R_2$ и α — произвольное конформное отображение R_1 на себя.

Таким образом, проблема нахождения всех конформных отображений двух поверхностей R_1 и R_2 друг на друга распадается на две части: во-первых, нужно выяснить, при каких условиях вообще существует конформное отображение $R_1 \to R_2$; во-вторых, нужно найти совокупность всех конформных отображений римановой поверхности на себя.

8.14. Критерий конформной эквивалентности. Мы исследуем сначала первый вопрос. Пусть R_1 и R_2 — две поверхности и $\hat{R}_1$, соответственно $\hat{R}_2$, — их универсальные поверхности наложения. В качестве последних можно принять, по теореме Римана об отображении, нормальные области E (числовая сфера, числовая плоскость, единичный круг).

Если R_1 и R_2 конформно эквивалентны, то прежде всего совпадают нормальные области: $E_1 = E_2 = E$. Затем, согласно п. 2.76, существует топологическое отображение S области E на себя, которое переводит друг в друга группы преобразований наложения (T_1) и (T_2):

$$(T_2) = S(T_1)S^{-1}. \tag{8.1}$$

Проектирования $\sigma_1 : E \to R_1$ и $\sigma_2 : E \to R_2$ и отображение $\varphi : R_1 \longleftrightarrow R_2$ конформны. То же самое, в силу того, что $\sigma_2 S = \varphi\sigma_1$, справедливо и для отображения S.

Обратно, если $E_1 = E_2 = E$ и существует конформное отображение S области E на себя, такое, что имеет место равенство (8.1), то поверхности R_1 и R_2, согласно п. 2.76, гомеоморфны, и из кон-

формности отображений S, $E \to R_1$ и $E \to R_2$ следует, что отображение $R_1 \longleftrightarrow R_2$ конформно.

8.15. Это условие преобразуемости (T_1) в (T_2), являющееся решающим в вопросе о конформной эквивалентности поверхностей R_1 и R_2, может быть выражено через некоторое свойство *фундаментального многоугольника*.

Пусть (8.1) имеет место для некоторого отображения S области E на себя. Если тогда t и t' — две точки E, эквивалентные относительно (T_1), то точки $S(t)$ и $S(t')$ эквивалентны относительно (T_2), и наоборот. Поэтому каждому фундаментальному многоугольнику π_1 группы (T_1) соответствует при отображении S фундаментальный многоугольник π_2 группы (T_2). Если s_1 и s_1' — две эквивалентные стороны π_1 и T_1 — преобразование $s_1 \to s_1'$, то стороны-образы s_2 и s_2' эквивалентны относительно преобразования ST_1S^{-1}.

В частности, отвечающий точке t_1 *метрический* фундаментальный многоугольник π_1 группы (T_1) переходит в отвечающий точке $t_2 = S(t_1)$ метрический фундаментальный многоугольник π_2 группы (T_2). Следовательно, эти метрические фундаментальные многоугольники конгруэнтны. Обратно, если эквивалентность отвечающих двум точкам t_1 и t_2 метрических фундаментальных многоугольников π_1 и π_2 устанавливается посредством S так, что при этом соответствие T_1 сторон π_1 переходит в соответствие ST_1S^{-1} сторон π_2, то S переводит группу преобразований наложения (T_1) в группу (T_2); следовательно, в этом случае поверхности R_1 и R_2 конформно эквивалентны.

Итак, для конформной эквивалентности двух римановых поверхностей R_1 и R_2 необходимо и достаточно, чтобы метрические фундаментальные многоугольники π_1 и π_2 можно было отобразить друг на друга с помощью конформного отображения S области E на себя, относительно которого соответствия сторон инвариантны.

Если отображение S присоединить к отображению $\hat{R}_1 \to E$, то это условие можно сформулировать следующим образом:

Две римановы поверхности тогда и только тогда конформно эквивалентны, когда соответствующие фундаментальные многоугольники при соответствующем нормировании отображений на нормальные области совпадают, так же как и соотношения их сторон.

8.16. Мы переходим теперь к фактическому определению классов конформной эквивалентности, причем должны ограничиться простейшими случаями. В общем случае наш вопрос можно поставить так: дана одна из трех нормальных областей E; требуется определить конформные классы римановых поверхностей, универсальная поверх-

ность наложения которых есть E. В соответствии с этим нам нужно различать три случая: E может быть числовой сферой, числовой плоскостью и единичным кругом.

8.17. Эллиптический и параболический случаи. Если E — числовая сфера, то каждая поверхность R, для которой E — универсальная поверхность наложения, конформно эквивалентна числовой сфере. Следовательно, в этом случае существует лишь один конформный класс.

Пусть теперь E — числовая плоскость. Тогда, в соответствии со структурой группы преобразований наложения (T), имеются, согласно § 5 гл. VII, три возможности:

1. Группа (T) тривиальна. Тогда и [изоморфная (T)] фундаментальная группа поверхности R тривиальна; следовательно, R односвязна и тем самым конформно эквивалентна E, т. е. числовой плоскости.

2. (T) есть группа сдвигов с одной образующей:

$$T(t) = t + n\omega_0 \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Поверхность R получается тогда из параллельной полосы отождествлением обеих ограничивающих ее прямых. Поэтому отображение

$$w = e^{\frac{2\pi i}{\omega_0} t}$$

переводит R в область $0 < |w| < \infty$. Следовательно, поверхности R, соответствующие любым двум значениям ω_0, конформно эквивалентны; таким образом, мы получаем в точности *один* конформный класс, в согласии с тем, что две параллельные полосы можно перевести друг в друга с помощью конформного преобразования плоскости.

3. (T) есть группа сдвигов с двумя образующими:

$$T(t) = t + n_1\omega_1 + n_2\omega_2 \quad (n_1,\ n_2 \text{ — целые числа}).$$

В этом случае R получается из фундаментального параллелограма $(0,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_1 + \omega_2)$ отождествлением противоположных сторон. Следовательно, R — замкнутая поверхность и ее характеристика $\chi = 0$ [1]). Теперь нужно только выяснить, когда двум решеткам $(\omega_1,\ \omega_2)$ и $(\omega_1',\ \omega_2')$ отвечают конформно эквивалентные поверхности. Согласно п. 8.14, для этого необходимо и достаточно, чтобы решетки можно было перевести друг в друга конформным отображением

[1]) При варьировании пары периодов $(\omega_1,\ \omega_2)$ таким образом действительно получается совокупность всех замкнутых римановых поверхностей с характеристикой, равной нулю (рода 1), так как для каждой такой поверхности R универсальная поверхность наложения $\hat{R}$, согласно п. 8.4, параболична.

плоскости на себя, следовательно, преобразованием вида $t' = At + B$. Как известно (и как легко доказать), это возможно тогда и только тогда, когда существуют такие целые числа a, b, c, d с определителем

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1,$$

что

$$\frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \frac{a\frac{\omega_2}{\omega_1} + b}{c\frac{\omega_2}{\omega_1} + d}.$$

Это условие всегда выполняется, когда решетки подобны, т. е. когда $\omega_1\omega_2' - \omega_2\omega_1' = 0$ [1]).

8.18. Модулярная группа. Предыдущий критерий позволяет дать изящное представление конформного класса в случае $p = 1$. Если положить $\tau = \omega_2/\omega_1$ и $\tau' = \omega_2'/\omega_1'$, то предыдущее условие принимает вид

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Эти преобразования, где, следовательно, a, b, c, d — целые числа с определителем, равным единице, образуют группу, так называемую *модулярную группу*; они конформно отображают верхнюю (и нижнюю) полуплоскость $\operatorname{Im}\tau > 0$ ($\operatorname{Im}\tau < 0$) на себя. Этим каждому классу комплексных чисел (τ), эквивалентных относительно модулярной группы, поставлен во взаимно однозначное соответствие конформный класс римановых поверхностей с характеристикой, равной нулю. Множество этих τ-классов теперь может быть само сделано римановой поверхностью R_τ; из предыдущего тогда следует, что *имеется взаимно однозначное соответствие между точками R_τ и конформными классами римановых поверхностей с характеристикой, равной нулю.*

Чтобы построить поверхность R_τ, будем исходить из фундаментальной области модулярной группы. Такую область представляет неевклидов [2]) четырехугольник, составленный из „треугольника"

---

[1]) Указанное условие подобия решеток (ω_1, ω_2) и (ω_1', ω_2') связано со специальным выбором ω_1, ω_2 (или ω_1', ω_2'). В общем случае следовало бы писать $\omega_1^*\omega_2' - \omega_2^*\omega_1' = 0$, где

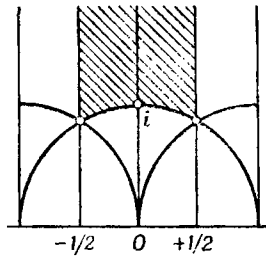
$$\omega_2^* = a\omega_2 + b\omega_1,\ \omega_1^* = c\omega_2 + d\omega_1;$$

как известно, решетки (ω_1, ω_2) и (ω_1^*, ω_2^*) совпадают (см., например, Н. И. Ахиезер [1**]). — *Прим. перев.*

[2]) Интерпретация полуплоскости $\eta > 0$ ($\tau = \xi + i\eta$) как гиперболической плоскости получается путем линейного конформного преобразования из мо-

$\Delta_1\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, i, \infty\right)$ (фиг. 19) и зеркально симметричного относительно мнимой оси треугольника Δ_2 [1]). При этом симметрично расположенные стороны обоих треугольников нужно отождествить.

Определенная этим риманова поверхность R_τ конформно эквивалентна плоскости ζ. Чтобы это показать, построим конформное отображение четырехугольника на плоскость ζ так, чтобы каждые две граничные его точки, симметричные относительно мнимой оси, переходили в одну и ту же точку и чтобы в остальном отображение было взаимно однозначным. Сначала можно конформно отобразить треугольник Δ_1 на верхнюю полуплоскость, причем так, чтобы вершины перешли соответственно в точки $(0, 1, \infty)$ [2]). Продолжая это отображение по принципу симметрии через действительную полуось $(1, \infty)$, получим, очевидно, искомое отображение.



Фиг. 19.

Этим каждой точке ζ числовой плоскости ($\zeta \neq \infty$) поставлен в соответствие класс фундаментальных параллелограмов, определяющих один и тот же конформный класс. В частности, точке $\zeta = 0$ соответствует параллелограм, составленный из двух равносторонних треугольников, а точке $\zeta = 1$ — квадрат. Если $\zeta \to \infty$, то и $\tau \to \infty$ (в нашей фундаментальной области). Поэтому $\zeta = \infty$ естественно поставить в соответствие те поверхности, фундаментальный многоугольник которых есть параллельная полоса. После замыкания (в смысле п. 8.9) такая поверхность становится конформно эквивалентной числовой сфере, поэтому точку $\zeta = \infty$ можно также рассматривать как представителя *числовой сферы* [3]).

При неограниченном продолжении по принципу симметрии функции $\zeta(\tau)$ в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ получается *эллиптическая модулярная функция*. Она отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}(\tau) > 0$ на бесконечнолистную поверхность наложения плоскости с выколотыми точками $\zeta = 0, 1, \infty$. Над $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$ лежат точки разветвления соответственно порядка 2 и 1, а над $\zeta = \infty$ — логарифмические точки разветвления.

дели Пуанкаре, введенной в единичном круге E. Инвариантный неевклидов линейный элемент задается через $d\sigma = \frac{|d\tau|}{\eta}$; геодезическими линиями являются дуги окружностей, ортогональных к действительной оси.

[1]) См. Н. И. Ахиезер [1**], п. 9. — *Прим. перев.*

[2]) Указанная нормировка отображения Δ_1 связана со следующим далее замечанием об эллиптической модулярной функции $\zeta(\tau)$. — *Прим. перев.*

[3]) При изложении случая $\zeta = \infty$ мы несколько отступили от оригинала. — *Прим. перев.*

8.19. Гиперболический случай. Этот случай существенно сложнее обоих уже рассмотренных, так как множество групп конформных отображений единичного круга на себя, не имеющих там неподвижных точек, значительно обширнее, чем в случае числовой плоскости. Однако не легко обозреть даже классы поверхностей, соответствующих группе (T) с *заданной* структурой.

8.20. Простейшие случаи. Рассмотрим две наиболее простые возможности.

1. Если группа (T) тривиальна, то поверхность $R = \hat{R}$ односвязна и тем самым конформно эквивалентна единичному кругу $|t| < 1$. Следовательно, все такие поверхности принадлежат одному и тому же конформному классу.

2. Группа (T) циклическая.

Пусть сначала образующее преобразование T гиперболично. Не будет ограничением общности, если мы предположим, что неподвижными точками являются $\zeta_1 = 1$ и $\zeta_2 = -1$, так как этого всегда можно добиться конформным отображением единичного круга на себя. Следовательно, преобразование T имеет вид

$$(T) \qquad \frac{t'-1}{t'+1} = A\frac{t-1}{t+1},$$

где A — действительное положительное число (см. п. 7.3). Так как преобразование T^{-1} получается из T заменой A на $1/A$, то можно T нормировать так, чтобы было $A > 1$.

Будем теперь рассматривать, наряду с поверхностью R, круговое кольцо K: $1 < |z| < r$. Тогда функция

$$z = e^{\frac{\ln\zeta \ln r}{\pi i}}$$

(где логарифм нужно нормировать так, чтобы $0 < \arg\zeta < \pi$) отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ взаимно однозначно и конформно на круговое кольцо K. При этом две точки ζ и ζ' тогда и только тогда переходят в одну и ту же точку z, когда

$$\zeta' = \zeta e^{-\frac{2k\pi^2}{\ln r}} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Если мы отобразим верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ с помощью линейного преобразования

$$\zeta = i\frac{1-t}{1+t}$$

на единичный круг $|t| < 1$, то круг в силу отображения $t \to \zeta \to z$ становится универсальной поверхностью наложения кругового кольца K. Две точки t и t' имеют одну и ту же проекцию, если

они эквивалентны относительно циклической группы, порожденной преобразованием

$$(T_r) \qquad \frac{t'-1}{t'+1} = e^{-\frac{2\pi^2}{\ln r}} \frac{t-1}{t+1}.$$

Следовательно, T_r — образующая группы преобразований наложения. Если мы выбираем радиус r так, что

$$e^{-\frac{2\pi^2}{\ln r}} = A,$$

то группы преобразований наложения $E \to R$ и $E \to K$ совпадают. Согласно п. 8.14, это означает, что поверхность R конформно эквивалентна круговому кольцу K. Этим показано, что поверхность с циклической фундаментальной группой конформно эквивалентна круговому кольцу, если группа преобразований наложения порождается одним *гиперболическим* преобразованием.

С другой стороны, две поверхности R_1 и R_2 конформно не эквивалентны, если соответствующие постоянные A_1 и A_2 различны, так как оба нормированных круговых кольца $1 < |z| < r_1$ и $1 < |z| < r_2$ $(r_1 \neq r_2)$ конформно не эквивалентны. Это можно также установить с помощью фундаментального многоугольника. Согласно п. 7.45, метрический фундаментальный многоугольник группы (T) есть четырехугольник, ограниченный двумя дугами единичной окружности и двумя дугами ортогональных к ней окружностей. Двойное отношение четырех точек имеет значение $2\frac{1-A}{1+A}$; поэтому два таких четырехугольника тогда и только тогда конформно эквивалентны, когда $A_1 = A_2$.

8.21. Пусть теперь образующее преобразование T — параболическое, следовательно, вида

$$\frac{1}{t'-1} = \frac{2}{t-2} + Ai \quad (A > 0). \tag{8.2}$$

Рассмотрим, наряду с поверхностью R, область $0 < |z| < 1$. В силу отображения $z = e^{\zeta/\alpha}$ $(\alpha > 0)$ полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta < 0$ становится универсальной поверхностью наложения для этой области. Если эту полуплоскость перевести с помощью отображения

$$\zeta = \frac{t+1}{t-1}$$

в единичный круг, то получится нормальное представление универсальной поверхности наложения. Группа преобразований наложения порождается преобразованием

$$\frac{1}{t'-1} = \frac{1}{t-1} + \pi i\gamma.$$

Сравнение предыдущих двух выражений показывает, что поверхность R конформно эквивалентна области $0 < |z| < 1$, если $\alpha = A/\pi$.

Таким образом, две поверхности рассматриваемого вида конформно эквивалентны. В самом деле, два преобразования T_1 и T_2 вида (8.2) могут быть переведены друг в друга с помощью конформного отображения S единичного круга на себя, $T_2 = ST_1S^{-1}$, где

$$(S) \qquad \frac{\tau+1}{\tau-1} = k \cdot \frac{t+1}{t-1},$$

k — (положительное) число, равное A_2/A_1.

Это можно также установить из рассмотрения фундаментального многоугольника. В самом деле, согласно п. 7.45, метрический фундаментальный многоугольник есть „треугольник", ограниченный двумя параллельными прямыми l_1 и l_{-1} и дугой единичной окружности; посредством преобразования T^2 устанавливается эквивалентность l_1 и l_{-1}. Для двух таких треугольников Δ и Δ' всегда существует конформное отображение единичного круга на себя, переводящее их друг в друга так, что соотношение сторон преобразуется требуемым образом. Действительно, если S — однозначно определенное отображение $\Delta \to \Delta'$, то ST^2S^{-1} во всяком случае есть преобразование, переводящее образ l_1' в образ l_{-1}', причем это параболическое преобразование; в самом деле, если ξ — неподвижная точка этого преобразования, то $S^{-1}(\xi)$ — неподвижная точка T^2, следовательно, $S^{-1}(\xi) = 1$ и $\xi = S(1)$. Поэтому преобразование ST^2S^{-1} имеет только одну неподвижную точку $S(1)$. Отсюда вытекает, что ST^2S^{-1} есть преобразование, связывающее стороны l_1' и l_{-1}' треугольника Δ', так как существует в точности *одно* параболическое преобразование единичного круга на себя, переводящее друг в друга две параллельные неевклидовы прямые.

Следовательно, в рассматриваемом случае существует только один конформный класс, и этот класс представляется областью $0 < |z| < 1$.

8.22. Более сложные случаи. Даже в том случае, когда число ν образующих группы (T) конечно, что для замкнутых поверхностей имеет место всегда, вопрос о преобразуемости двух таких групп друг в друга с помощью конформного отображения единичного круга на себя становится сложным уже для $\nu = 2$ ввиду некоммутативности этих групп.

Мы ограничиваемся здесь указанием простейшего случая, который может иметь место для групп с двумя образующими. Пусть фундаментальный многоугольник — четырехугольник с нулевыми углами, ограниченный прямыми l_1, l_2, l_3, l_4 с соответствием сторон $l_1 \to l_2$, $l_3 \to l_4$. Тогда группа (T) порождается двумя параболическими преобразованиями. Такой четырехугольник, следовательно, и представлен-

ную им поверхность R всегда можно конформно отобразить на числовую плоскость с двумя выколотыми точками. Так как все такие области конформно эквивалентны, то в рассматриваемом случае получаем только *один* конформный класс.

8.23. Конформное отображение римановой поверхности на себя. Если две римановы поверхности R и R' конформно эквивалентны и φ_0 — конформное отображение $R \to R'$, то, согласно п. 8.13, совокупность всех конформных отображений $R \to R'$ получается из соотношения

$$\varphi = \varphi_0 \alpha,$$

где α — произвольное *конформное отображение поверхности R на себя*. После того, как были указаны условия для существования частного отображения, мы исследуем теперь *конформные отображения римановой поверхности на себя*.

Эти отображения α образуют группу A. Каждому конформному отображению α поверхности R отвечает, согласно п. 2.75, некоторое конформное отображение $\hat{\alpha}$ универсальной поверхности наложения $\hat{R}$ на себя, однозначно определяемое заданием двух точек, проекции которых связаны отображением α. Если σ означает проектирование, то для $\hat{\alpha}$ имеем

$$\sigma\hat{\alpha} = \alpha\sigma.$$

В частности, если за α принять тождество, то соответствующие отображения $\hat{\alpha}$ будут состоять из преобразований наложения $\hat{R}$ и только из них.

Если $\hat{\alpha}$ — произвольное отображение $\hat{R}$ на себя, соответствующее отображению α поверхности R, и T — преобразование наложения $\hat{R}$, то

$$T' = \hat{\alpha} T \hat{\alpha}^{-1} \tag{8.3}$$

— снова преобразование наложения, так как из (8.3), $\sigma\hat{\alpha} = \alpha\sigma$ и $\sigma T = \sigma$ вытекает, что $\sigma T' = \sigma\hat{\alpha} T \hat{\alpha}^{-1} = \alpha\sigma T \hat{\alpha}^{-1} = \alpha\sigma\hat{\alpha}^{-1} = \sigma\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{-1} = \sigma$.

Следовательно, преобразование T' переставляет точки с одной и той же проекцией, поэтому оно является преобразованием наложения.

Множество отображений $\hat{\alpha}$, получаемых, если α пробегает все конформные отображения поверхности R на себя, образует группу $\hat{A}$; (T) — подгруппа $\hat{A}$ и, в силу (8.3), даже нормальный делитель. Если каждому отображению $\hat{\alpha}$ поставить в соответствие относящееся к нему отображение α, то этим будет определено гомоморфное отображение $\hat{A}$ на A. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа (T) группы $\hat{A}$ [1]).

[1]) Отсюда, впрочем, следует, независимо от (8.3), что (T) — нормальный делитель, и тем самым снова получается соотношение (8.3).

Поэтому из теоремы о гомоморфизмах следует, что $A \cong \hat{A}/T$. Таким образом, группа A конформных отображений поверхности R на себя изоморфна факторгруппе $\hat{A}$ по группе преобразований наложения.

8.24. Далее будет показано, что группа A в общем случае тривиальна: *риманова поверхность, исключая некоторые частные случаи, не допускает конформных отображений на себя, отличных от тождественного.*

Мы укажем те поверхности, которые допускают даже континуальную группу конформных отображений на себя. Кроме них, имеются еще некоторые симметрично устроенные поверхности с дискретной нетривиальной группой A.

8.25. Континуальные группы отображений поверхности на себя. Мы рассматриваем группу конформных отображений поверхности R на себя, которая в каждой окрестности заданной точки P обладает бесконечным числом эквивалентных точек. Изложенное в § 1 гл. VIII показывает, что поверхности R, у которых универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ эллиптична или параболична, все обладают этим свойством: они допускают группы конформных отображений на себя, которые в каждой точке даже *континуальны*, т. е. в окрестности каждой точки имеют континуально много эквивалентных точек. Впрочем, это легко доказывается и непосредственно. Это следующие поверхности:

1. Числовая сфера.
2. Числовая плоскость.
3. Числовая плоскость с выколотой точкой.
4. Замкнутые поверхности рода 1.

Среди поверхностей, универсальная поверхность наложения которых гиперболична, имеется не менее трех видов поверхностей с континуальными группами отображений на себя:

5. Единичный круг.
6. Круговое кольцо.
7. Круг с выколотой точкой.

В случае 5 эти отображения задаются совокупностью неевклидовых гиперболических движений. В случаях 6 и 7 мы имеем дело с вращениями вокруг центра.

Мы покажем, обратно, что это *единственные* поверхности с континуальными группами конформных отображений на себя. Отсюда, в частности, следует, что группа конформных отображений поверхности на себя континуальна во всех точках поверхности, если она континуальна в *одной* точке.

8.26. Итак, пусть R — риманова поверхность с группой A, континуальной в точке P_0 или, что представляет более слабое требова-

ние, имеющей бесконечно много эквивалентных точек в каждой окрестности точки P_0. Согласно п. 8.25, мы можем считать, что универсальная поверхность $\hat{R}$ гиперболична; нужно показать, что поверхность R принадлежит одному из классов 5, 6 или 7. Согласно пп. 8.20 и 8.21, это равносильно тому, что группа преобразований наложения (T) либо тривиальна, либо является циклической группой с одной образующей.

Для доказательства рассмотрим соответствующую группе A группу $\hat{A}$ конформных отображений единичного круга на себя и покажем, что точки, эквивалентные относительно $\hat{A}$, имеют в единичном круге точку сгущения. Пусть t_0 — произвольная точка, лежащая над P_0, и $\hat{U}_0$ — произвольная окрестность t_0. Тогда в окрестности-проекции U_0 имеется бесконечно много эквивалентных точек P_ν. Каждой точке P_ν соответствует вполне определенная точка t_ν в $\hat{U}_0$. Если тогда α — конформное отображение поверхности R на себя, переводящее P_μ в P_ν, то ему соответствует вполне определенное отображение $\hat{\alpha}$ круга $|t|<1$ на себя, переводящее t_μ в t_ν. Таким образом, в окрестности $\hat{U}_0$ точки t_0 лежит бесконечно много эквивалентных точек, что и требовалось доказать.

Пусть теперь t_ν $(\nu=1, 2, \ldots)$ — последовательность эквивалентных точек, таких, что $t_\nu \to t_0$. Если T_ν — преобразование $t_1 \longleftrightarrow t_\nu$, то $\lim T_\nu(t_1)=t_0$. Отсюда по лемме 2, которую мы докажем в п. 8.28, следует, что для каждого $\varepsilon>0$ существует преобразование T_ε из $\hat{A}$, которое *каждую* точку круга $|z|<1$ сдвигает меньше чем на ε. Пусть T — произвольное преобразование наложения и t_0' — образ t_0. Точка t_0 имеет окрестность U, всякие две точки которой не эквивалентны относительно (T). Пусть U' есть T-образ U. Выберем настолько малое $\varepsilon>0$, чтобы T-образ 2ε-окрестности точки t_0 вместе с 2ε-окрестностью самого образа лежали в U'. Тогда точка $TT_\varepsilon(t_0)$ вместе с ее ε-окрестностью содержится в U', следовательно, и точка $T_\varepsilon^{-1}TT_\varepsilon(t_0)$, и поэтому точка $T^{-1}T_\varepsilon^{-1}TT_\varepsilon(t_0)$ снова лежит в U. Но в силу (8.3), $T_\varepsilon^{-1}TT_\varepsilon$, а потому и $T^{-1}T_\varepsilon^{-1}TT_\varepsilon$, является преобразованием наложения и, следовательно, необходимо, чтобы было $T^{-1}T_\varepsilon^{-1}TT_\varepsilon(t_0)=t_0$. Таким образом, это преобразование наложения имеет неподвижную точку t_0, поэтому оно должно быть *тождеством*, откуда вытекает, что

$$TT_\varepsilon = T_\varepsilon T. \tag{8.4}$$

Отсюда по лемме 1, которая будет доказана в п. 8.27, следует, что T и T_ε имеют одни и те же неподвижные точки; в частности, следовательно, преобразование T_ε не может быть эллиптическим.

Если теперь T_1 и T_2 — два произвольных преобразования наложения, то ε можно выбрать столь малым, что (8.4) имеет место для T_1 и T_2 с одним и тем же T_ε. Следовательно, эти преобразования имеют

те же неподвижные точки, что и T_n, поэтому они имеют одни и те же неподвижные точки. Таким образом, все преобразования наложения (T) имеют одни и те же неподвижные точки; в частности, следовательно, либо все T параболичны, либо все T гиперболичны.

Но отсюда следует, что группа (T) циклическая. Пусть сначала преобразования (T) параболические. Если ζ — общая неподвижная точка, то точки $T(0)$ лежат на неевклидовой окружности, касающейся единичной окружности в точке ζ. Так как группа (T) в единичном круге $|t|<1$ дискретна, то на этой окружности после $t=0$ должна иметься первая эквивалентная ей точка t_1. Тогда преобразование $0 \to t_1$ является образующей группы (T).

Аналогичным образом можно найти образующее преобразование T в случае, когда все преобразования (T) гиперболичны.

Так как группа (T) — циклическая, то должен иметь место один из случаев 5, 6 или 7, и доказательство будет завершено, как только будут доказаны обе использованные выше леммы.

8.27. Лемма о перестановочных преобразованиях. Докажем использованную выше лемму 1:

Лемма 1. *Пусть A и B — два нетождественных конформных преобразования единичного круга $|z|<1$ на себя, перестановочные между собой:*

$$AB = BA. \tag{8.5}$$

Тогда эти преобразования имеют общие неподвижные точки.

Достаточно показать, что каждая неподвижная точка для A является также неподвижной точкой и для B. Мы различаем два случая.

1. *Преобразование A параболично.* Если $z=\zeta$ — неподвижная точка A, то, в силу (8.5),

$$AB(\zeta) = B(\zeta),$$

следовательно, $z = B(\zeta)$ — также неподвижная точка A. Так как A имеет только одну неподвижную точку, то $B(\zeta)=\zeta$, следовательно, ζ — неподвижная точка B.

2. *Преобразование A гиперболично или эллиптично.* В силу (8.5), для обеих неподвижных точек ζ_1 и ζ_2 преобразования A имеем

$$AB(\zeta_i) = B(\zeta_i) \quad (i=1,\ 2).$$

Следовательно, $B(\zeta_1)$ и $B(\zeta_2)$ — также неподвижные точки A, поэтому либо $B(\zeta_i)=\zeta_i$, т. е. ζ_1 и ζ_2 — неподвижные точки B, либо $B(\zeta_1)=\zeta_2$ и $B(\zeta_2)=\zeta_1$. В этом последнем случае B имеет неподвижную точку ζ, отличную от ζ_1 и ζ_2, и преобразование B^2 имеет три различные неподвижные точки ζ_1, ζ_2, ζ. Поэтому преобразование B^2 — тождество; но для конформного отображения B единичного круга на себя это возможно только тогда, когда B — либо тожде-

ство, либо преобразование $w = -z$. Первый случай невозможен по предположению. Во втором случае из (8.5) следует, что A — вращение вокруг $z = 0$. Следовательно, A и B также имеют общие неподвижные точки (0 и ∞).

Этим доказательство закончено [1]).

8.28. Лемма о бесконечно малых преобразованиях. Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть* (T) — *бесконечная группа конформных отображений единичного круга* $|z| < 1$ *на себя, обладающая следующим свойством: существуют две (не обязательно различные) точки* $z = a$, $z = z_1$ ($|a| < 1$, $|z_1| < 1$) *и бесконечная последовательность* $T_n (n = 1, 2, \ldots)$ *(не совпадающих между собой) преобразований группы, таких, что*

$$a = \lim_{n \to \infty} T_n(z_1). \tag{8.6}$$

Тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ *существует такое нетождественное преобразование* $T = T_\varepsilon$ *группы, что для* $|z| < 1$ *выполняется неравенство*

$$|T_\varepsilon(z) - z| < \varepsilon.$$

Для доказательства зафиксируем в единичном круге точку $z = z_2$, для которой $[z_1 z_2] = 1$, и рассмотрим, наряду с $T_n(z_1)$, последовательность $T_n(z_2)$. По неравенству треугольника, учитывая инвариантность неевклидова расстояния, получаем

$$[aT_n(z_2)] = [T_n(z_1)\, T_n(z_2)] + \langle [T_n(z_1)\, a] \rangle = [z_1 z_2] + \\ + \langle [T_n(z_1)\, a] \rangle \to [z_1 z_2] = 1$$

для $n \to \infty$. Следовательно, множество точек $T_n(z_2)$ имеет точку сгущения $z = b$ на окружности $[z, a] = 1$, поэтому существует бесконечная последовательность преобразований T_n группы, для которых

$$T_n(z_1) \to a, \quad T_n(z_2) \to b \quad ([ab] = 1).$$

Теперь мы фиксируем произвольное ε из интервала $0 < \varepsilon < \dfrac{1 - |a|}{2}$ и берем m столь большим, что

$$[aT_n(z_1)] < \frac{\varepsilon}{2}, \quad [bT_n(z_2)] < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad n \geqslant m.$$

---

[1]) Из леммы 1 вытекает еще, между прочим, то, что риманова поверхность (с гиперболической универсальной поверхностью наложения), фундаментальная группа которой абелева, необходимо принадлежит одному из классов 5, 6 или 7. В самом деле, группа преобразований наложения—абелева, и поэтому по лемме все преобразования наложения имеют одни и те же неподвижные точки. Утверждение следует теперь из п. 8.26.

Пусть $T = T_n T_m^{-1}$. Тогда

$$[aT(a)] \leqslant [aT_n(z_1)] + [T_n(z_1)\,T(a)] = [aT_n(z_1)] + [T^{-1}T_n(z_1)\,a] = \\ = [aT_n(z_1)] + [T_m(z_1)\,a] < \varepsilon$$

и аналогично

$$[bT(b)] < \varepsilon$$

для всех преобразований $T = T_n T_m^{-1}$, которые, в силу несовпадения T_m и T_n $(n \neq m)$, отличны от тождества.

Следовательно, для каждого ε существует такое преобразование $T = T_\varepsilon$ группы, что

$$|T(a) - a| < \varepsilon, \quad |T(b) - b| < \varepsilon.$$

Пусть определенное таким образом преобразование T имеет неподвижные точки ζ_1 и ζ_2 $(|\zeta_1| \leqslant 1, \ |\zeta_2| \geqslant 1)$. Тогда, если $\zeta_1 = 0$ $(\zeta_2 = \infty)$, то T можно записать в виде

$$w = \lambda z \quad (\lambda \text{ — постоянная}), \tag{8.7}$$

если же $\zeta_1 \neq 0$ (и, следовательно, $\zeta_2 \neq \infty$), то в виде [1])

$$w - z = \lambda (z - \zeta_1)(w - \zeta_2). \tag{8.7'}$$

Точки a и b во всяком случае отличны от ζ_2. Далее, по крайней мере одна из них $\neq \zeta_1$, и большее из расстояний $[a\zeta_1]$, $[b\zeta_1]$ не меньше $\frac{1}{2}[ab] = \frac{1}{2}$. Если, например, a обладает этим свойством, то сравнение выражений для неевклидова и евклидова расстояний показывает, что существует численная постоянная $k\,(k > 1/4)$, такая, что

$$|a - \zeta_1| \geqslant k(1 - |a|).$$

Следовательно, если в случае (8.7′) положить $z = a$, то

$$\varepsilon > |T(a) - a| = \lambda\,|a - \zeta_1|\,|T(a) - \zeta_2|,$$

откуда для любого z $(|z| < 1)$ вытекает, что

$$|T(z) - z| = \lambda\,|z - \zeta_1|\,|T(z) - \zeta_2| \leqslant \left|\frac{z - \zeta_1}{a - \zeta_1}\right| \cdot \left|\frac{T(z) - \zeta_2}{T(a) - \zeta_2}\right| \varepsilon.$$

Первый множитель справа здесь $\leqslant \frac{2}{k(1 - |a|)}$ для $|z| \leqslant 1$; второй множитель не превосходит

$$\frac{|\zeta_2| + 1}{|\zeta_2| - 1} \leqslant 3, \quad \text{если} \quad |\zeta_2| \geqslant 2,$$

---

[1]) Первое равенство очевидно. Второе следует из того, что определяемая им функция $w = w(z)$ линейна, имеет неподвижные точки ζ_1 и ζ_2 и содержит произвольный параметр λ $\left[\neq \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_1}\right]$. — *Прим. перев.*

и не превосходит

$$\frac{|\zeta_2|+1}{1-|a|-\varepsilon} \leqslant \frac{3}{1-|a|-\varepsilon} \leqslant \frac{6}{1-|a|},$$

если $|\zeta_2| \leqslant 2$, так что для $|z| \leqslant 1$ во всяком случае

$$|T(z)-z| \leqslant \frac{12\varepsilon}{k(1-|a|)^2} \quad \left(k > \frac{1}{4}\right),$$

если $\zeta_1 \neq 0$.

В случае $\zeta_1 = 0$ еще проще убедиться в справедливости того же соотношения, так что лемма доказана полностью.

§ 4. УНИФОРМИЗАЦИЯ

Основные теоремы теории конформных отображений позволяют решить проблему униформизации в общем виде. Эта проблема была уже сформулирована в гл. I для алгебраических функций и, более общо, для произвольных аналитических образов. Для подготовки к излагаемому ниже общему построению мы здесь коротко остановимся на основных идеях проблемы униформизации и методов ее решения[1]).

8.29. Многозначные отображения. Рассмотрим две римановы поверхности R и R' и представим себе, что они связаны друг с другом многозначным аналитическим соотношением $P \longleftrightarrow P'$ между их точками P и P'. Многозначность может иметь причины двоякого рода: во-первых, она может быть обусловлена тем, что поверхности R и R' неодносвязны. Наряду с такими многозначностями *в целом* мы будем рассматривать и многозначности *локальные*, допуская, однако, только *изолированные точки разветвления* отображения.

Простейший пример дает нам случай, когда R и R' — числовые плоскости (z-плоскость и w-плоскость) и отображение $R \longleftrightarrow R'$ определено с помощью алгебраического уравнения $F(z, w) = 0$.

8.30. Униформизирующая поверхность наложения. Многозначное отображение $R \longleftrightarrow R'$ должно быть теперь униформизировано, т. е. представлено в виде двух однозначных отображений. Это достигается тем, что для поверхностей R и R' строится общая поверхность наложения $\tilde{R}$: тогда заданное соотношение получает однозначное параметрическое представление с помощью проектирований

$$P = P(\tilde{P}), \quad P' = P'(\tilde{P}),$$

---

[1]) Наряду с фундаментальными исследованиями Пуанкаре и Кёбе здесь следует упомянуть метод решения, предложенный почти одновременно с ними Йоханссоном [1], [2]. См. также Бибербах [3].

с прообразом $\tilde{P}$ соответствующих друг другу точек P и P' в качестве параметра. При этом, вообще говоря, не всегда различным точкам $\tilde{P}$ отвечают различные пары (P, P').

В случае алгебраического уравнения $F=0$ такую поверхность наложения $\tilde{R}$ представляют конформно эквивалентные поверхности $\tilde{R}_z$ и $\tilde{R}_w$, введенные в гл. I.

8.31. Униформизация с помощью комплексной переменной. Предполагая, что поверхность $\tilde{R}$ конформно эквивалентна области G_t комплексной t-плоскости, выполним отображение $\tilde{R} \to G_t$ $(\tilde{P}=\tilde{P}(t))$. После этого соотношение $R \leftrightarrow R'$ задается уравнениями

$$P=P(\tilde{P}(t)), \quad P'=P'(\tilde{P}(t)),$$

так что P и P' однозначно и аналитически зависят от униформизирующего параметра t. Тем самым задача униформизации решена.

8.32. Для униформизации с помощью комплексной переменной t нужно, следовательно, построить униформизирующую поверхность наложения $\tilde{R}$, конформно эквивалентную области G_t плоскости t. Не каждая униформизирующая $\tilde{R}$ обладает этим свойством. Рассмотрим в качестве примера построенную в гл. I замкнутую поверхность наложения $\tilde{R}=\tilde{R}_z$ основной поверхности R (z-сферы), на которой соответствующая алгебраическая функция $w=w(z)$ однозначна. Только тогда, когда алгебраическое уравнение $F=0$ — рода нуль, и соответственно этому поверхность $\tilde{R}_z$ — типа сферы, униформизирующая поверхность $\tilde{R}=\tilde{R}_z$ может быть отображена взаимно однозначно и конформно на плоскость t (а именно, на замкнутую плоскость) и получается искомое параметрическое представление $z=z(t)$, $w=w(t)$ алгебраического уравнения. Однако если уравнение $F=0$ — более высокого рода ($p>0$), однозначное отображение $\tilde{R}=\tilde{R}_z \leftrightarrow G_t$ невозможно уже в силу топологических причин.

8.33. Универсальная поверхность наложения. Здесь к цели ведет теперь следующая общая идея. Если $\tilde{R}$ униформизирует многозначное соотношение $R \leftrightarrow R'$, то каждая поверхность наложения поверхности $\tilde{R}$ также является униформизирующей поверхностью наложения (ср. п. 8.38).

Но *каждая* риманова поверхность $\tilde{R}$ обязательно имеет поверхность наложения, конформно эквивалентную подобласти числовой плоскости. В самом деле, такой поверхностью всегда является односвязная *универсальная поверхность наложения* $\hat{R}$ поверхности

$\tilde{R}$, которая по теореме Римана об отображении может быть топологически и конформно отображена на нормальную область E плоскости t. Выполним это отображение $\hat{P} = \hat{P}(t)$; тогда $t \to \hat{P} \to \tilde{P} \to$ $\to (P, P')$ дает нам искомое параметрическое представление

$$P = P(t), \quad P' = P'(t)$$

соотношения $R \longleftrightarrow R'$.

8.34. Наряду с универсальной (сильнейшей) поверхностью наложения $\hat{R}$ для $\tilde{R}$ можно к униформизации привлечь другие (более слабые) поверхности наложения, а именно, те и только те, которые удовлетворяют условию *подобия однолистным*, следовательно, конформно эквивалентны подобласти G_t t-плоскости. Теорией римановых поверхностей, подобных однолистным, мы подробно займемся в гл. IX.

8.35. Совокупность униформизирующих поверхностей. В дальнейшем намеченное выше решение проблемы униформизации будет проведено строго. Мы решим, таким образом, проблему в общем виде путем определения для заданного многозначного соответствия между двумя римановыми поверхностями R и R' *совокупности* униформизирующих поверхностей наложения $\tilde{R}$. Прежде всего будет построена частная (в общем случае не подобная однолистным) поверхность, однозначно определяемая добавочным условием, чтобы все остальные поверхности наложения $\tilde{R}$ являлись поверхностями наложения этой частной поверхности. „Сильнейшей" униформизирующей, представляющей собой поверхность наложения *всех* остальных, является универсальная поверхность наложения.

8.36. Многозначные аналитические соотношения между римановыми поверхностями. Переходя теперь к точному построению решения проблемы униформизации, рассмотрим две римановы поверхности R и R', между которыми определено многозначное аналитическое соотношение $R \longleftrightarrow R'$ следующим образом. Поставлены в соответствие друг другу точки (P, P') соответственно поверхностей R и R', причем каждая точка как R, так и R' встречается *не менее чем в одной* паре (P, P'). Это соответствие обладает следующими свойствами:

A. Если (P, P') — пара соответствующих друг другу точек, то существует конечное или счетное множество пар окрестностей U_P и $U_{P'}$ соответственно P и P', таких, что U_P отображается на $U_{P'}$, а именно, либо с помощью однозначного конформного отображения λ_P, либо с помощью разветвленного отображения λ_P, которое

может быть записано с помощью параметра t в виде

$$z = t^m,\ z' = t^n \quad (|t| < 1); \tag{8.8}$$

при этом z, соответственно z', — параметры в отвечающих U_P, соответственно $U_{P'}$, параметрических кругах $|z| < 1$, соответственно $|z'| < 1$ [1]). В последнем случае P называется точкой разветвления локального отображения $U_P \to U_{P'}$.

B. Пусть λ_P — соответствующее P локальное отображение и Q — точка соответствующей окрестности U_P. Тогда среди локальных отображений, соответствующих Q, существует такое, скажем λ_Q, что $\lambda_Q = \lambda_P$ в пересечении $U_P U_Q$ [2]).

C. Для двух произвольных неразветвленных локальных отображений λ_{P_0} и λ_{P_1} существует на R путь $P = P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, ведущий из P_0 в P_1, и покрытие пути неразветвленными отображениями $\lambda_{P(t)}$, такое, что $\lambda_{P(0)} = \lambda_{P_0}$ и $\lambda_{P(1)} = \lambda_{P_1}$; термин „покрытие“ (Belegung) указывает здесь на то, что для каждого t_0 $(0 \leqslant t_0 \leqslant 1)$ существует такое число $\delta > 0$, что отображения $\lambda_{P(t)}$ и $\lambda_{P(t_0)}$ для $|t - t_0| < \delta$ в пересечении $U_{P(t)} U_{P(t_0)}$ совпадают.

Из условия B следует, что отличные от точки разветвления P точки окрестности U_P не являются точками разветвления относительно совокупности всех отвечающих им локальных отображений. Таким образом, те точки, которым отвечают *только* разветвленные отображения, расположены изолированно.

8.37. Все предыдущие условия выполняются, если за R и R' взять, в частности, соответственно z- и w-сферу и многозначное соотношение $R \leftrightarrow R'$ определить с помощью *алгебраического уравнения* $F(z, w) = 0$. Условие C (условие „связности“) требует тогда, чтобы уравнение было неприводимым.

Более общий пример дает *аналитический образ* (z, w), устанавливающий многозначное соответствие между числовыми сферами (или подобластями G_z, G_w этих сфер).

8.38. Униформизация. Говорят, что риманова поверхность $\tilde{R}$ *униформизирует* многозначное соотношение $R \leftrightarrow R'$, если $\tilde{R}$ есть (в общем случае разветвленная и не безграничная) поверхность наложения R и R', причем выполняются следующие условия:

1. Если $\tilde{P}$ — произвольная точка $\tilde{R}$, то проекции $P = \sigma(\tilde{P})$ и $P' = \sigma(\tilde{P})$ соответствуют друг другу в заданном многозначном соотно-

---

[1]) См. Стойлов [1*]. Локальные параметры различных окрестностей точки P могут быть различными.

[2]) Если локальное отображение λ_P — разветвленное, то пусть для каждой однозначной ветви λ_P^μ существует такое отображение λ_Q^μ.

шении $R \leftrightarrow R'$; с другой стороны, таким образом получаются все соответствующие друг другу пары точек (P, P').

2. Если $\tilde{U}$ — отмеченная окрестность точки $\tilde{P}$ и U, U' — ее образы, то $\sigma' \sigma^{-1}$ — локальное отображение, однозначное или многозначное, отвечающее проекции P. Обратно, таким образом получаются все отвечающие P локальные отображения, соответственно точкам, лежащим над P.

Ясно, что вместе с поверхностью $\tilde{R}$ и всякая поверхность наложения производит униформизацию. Теперь мы покажем, что для заданного многозначного аналитического соотношения $R \leftrightarrow R'$ всегда существует униформизирующая поверхность $\tilde{R}$.

8.39. Построение поверхности $\tilde{R}$. Для определения поверхности $\tilde{R}$ сопоставим каждой точке $P \in R$ соответствующие локальные отображения. Эти отображения будут „точками" подлежащей построению поверхности $\tilde{R}$. При этом „точки", определяемые двумя отображениями λ_P и $\lambda_{P'}$, отождествляются, если, во-первых, оба отображения отвечают одной и той же точке $P = P'$ поверхности R и, во-вторых, в пересечении $U_P U'_P$ они совпадают.

8.40. $\dot{\tilde{R}}$ как топологическое пространство. Чтобы ввести в этом множестве $\tilde{R}$ топологию, рассмотрим прежде всего подмножество $\dot{\tilde{R}}$ *неразветвленных* локальных отображений.

Пусть λ_P — неразветвленное локальное отображение и U_P — окрестность P, в которой оно определено. По условию В п. 8.36, для каждой точки $Q \in U_P$ существует такое локальное отображение λ_Q, что $\lambda_Q = \lambda_P$ в $U_Q U_P$. Среди отвечающих Q отображений оно определяется однозначно, так как если λ'_Q — второе такое отображение, то (в силу аналитичности) $\lambda_Q = \lambda'_Q$ в $U_Q U'_Q$. Если Q пробегает все точки U_P, то этим определяется подмножество $\tilde{T}$ отображений, взаимно однозначно соответствующих точкам U_P. Если точки U_P с помощью параметрического отображения сопоставить точкам параметрического круга U_{P_z}, то при помощи U_P устанавливается взаимно однозначное отображение $\tilde{T}$ на U_{P_z}. Мы покажем, что эти отображения удовлетворяют условию п. 2.16.

Пусть $\tilde{P} = \lambda_P$ и $\tilde{P}' = \lambda_{P'}$ — две точки $\dot{\tilde{R}}$, у которых подмножества $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ являются соседними (т. е. имеют непустое пересечение). Нам нужно показать, что пересечению $\tilde{T}\tilde{T}'$ в U_{P_z} и $U_{P'_z}$ отвечают *открытые* множества.

Пусть $\tilde{Q} = \lambda_Q$ — точка $\tilde{T}\tilde{T}'$; тогда соответствующая точка Q лежит в $U_P U_{P'}$, $\lambda_P = \lambda_Q$ в $U_P U_Q$ и $\lambda_{P'} = \lambda_Q$ в $U_{P'} U_Q$. Пусть V_Q — окрестность Q, лежащая в пересечении $U_P U_{P'} U_Q$ и гомеоморфная кругу. Для каждой точки $A \in V_Q$ имеется вполне определенная точка $\tilde{A} = \lambda_A$ ($\lambda_A = \lambda_Q$). Тогда $\lambda_A = \lambda_P$ в V_Q, следовательно, и в $U_P V_Q$, поэтому $\tilde{A} \in \tilde{T}$. Аналогично заключаем, что $\tilde{A} \in \tilde{T}'$, и тем самым $A \in \tilde{T}\tilde{T}'$. Следовательно, V_Q — окрестность Q, состоящая из точек-образов, что и требовалось доказать.

Поэтому множество $\dot{\tilde{R}}$ можно, согласно п. 2.17, превратить в *топологическое пространство*, удовлетворяющее аксиомам A и C (пп. 2.3 и 2.15).

Пространство $\dot{\tilde{R}}$ удовлетворяет также и аксиоме отделимости. Действительно, пусть $\tilde{P} = \lambda_P$ и $\tilde{P}' = \lambda_{P'}$ — две различные точки $\tilde{R}$. Если точки P и P' не совпадают, то пусть V_P и $V_{P'}$ — две не пересекающиеся их окрестности, расположенные соответственно в U_P и $U_{P'}$. Тогда в соответствующих $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$ подмножествах $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ им отвечают две не пересекающиеся окрестности точек $\tilde{P}$ и $\tilde{P}'$. Если же $P = P'$, то подмножества $\tilde{T}$ и $\tilde{T}'$ не пересекаются. В самом деле, если бы они имели общее отображение λ_Q, то было бы $\lambda_P = \lambda_Q$ в $U_P U_Q$ и $\lambda'_P = \lambda_Q$ в $U'_P U_Q$. Следовательно, тогда бы было $\lambda_P = \lambda'_P$ в $U_P U'_P U_Q$, поэтому $\lambda_P = \lambda'_P$ всюду в $U_P U'_P$, т. е. λ_P и λ'_P были бы одной и той же точкой.

Таким образом, пространство $\dot{\tilde{R}}$ удовлетворяет аксиомам A, B и C и поэтому является поверхностью, а именно, поверхностью наложения поверхности $\dot{R}$, получающейся из R удалением точек, которым отвечают только разветвленные отображения. Если каждой точке $\tilde{P} = \lambda_P$ поставить в соответствие точку $P \in \dot{R}$, то этим будет задано однозначное отображение σ поверхности $\dot{\tilde{R}}$ на $\dot{R}$, топологическое в каждой окрестности $\tilde{T}$. Поэтому $\dot{\tilde{R}}$ — поверхность наложения $\dot{R}$.

8.41. Далее, поверхность $\dot{\tilde{R}}$ *связна*. В самом деле, пусть $\tilde{P}_0 = \lambda_{P_0}$ и $\tilde{P}_1 = \lambda_{P_1}$ — две точки $\dot{\tilde{R}}$. По условию C (п. 8.36), на $\dot{R}$ существует путь $P(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, ведущий из P_0 в P_1, и покрытие $\tilde{P}(t) = \lambda_{P(t)}$, такое, что $\lambda_{P(0)} = \lambda_{P_0}$ и $\lambda_{P(1)} = \lambda_{P_1}$. Тогда $t \to \tilde{P}(t)$ — однозначное отображение отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$ в $\dot{R}$, удовлетворяющее условиям леммы п. 2.53 и поэтому непрерывное. Следовательно, $\tilde{P}(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — путь на $\dot{\tilde{R}}$, соединяющий точки $\tilde{P}_0$ и $\tilde{P}_1$.

8.42. Замыкание поверхности $\dot{\tilde{R}}$. Построенную (неразветвленную) поверхность наложения $\dot{\tilde{R}}$ для $\dot{R}$ нужно еще путем присоединения

разветвленных локальных отображений превратить в (разветвленную) поверхность наложения для R.

Пусть λ_P есть m-кратно разветвленное локальное отображение. Если U_P — соответствующая окрестность P, то каждой точке Q области $\dot{U}_P = U_P - P$ отвечают (по условию В п. 8.36) локальные отображения λ_Q^{μ} ($\mu = 1, \ldots, m$), совпадающие с однозначными ветвями λ_P. Этим выделяется определенное подмножество $\dot{\tilde{T}}$ неразветвленных локальных отображений. Это множество лежит на поверхности $\dot{\tilde{R}}$ и поэтому уже имеет топологию. Мы покажем, что оно связно.

Для этого запишем отображение λ_P в параметрической форме

$$z = t^m, \quad z' = t^n \quad (0 < |t| < 1).$$

Оно выражает многозначное соотношение между областями $\dot{U}_P$ и $\dot{U}_{P'}$, удовлетворяющее условиям А, В и С п. 8.36. При этом все локальные отображения — неразветвленные. Этому многозначному соотношению отвечает также определенная униформизирующая поверхность, которая, по своему построению, состоит как раз из отображений множества $\dot{\tilde{T}}$. Поэтому $\dot{\tilde{T}}$, согласно п. 8.41, связно.

Поверхность $\dot{\tilde{T}}$, в силу соотношения $\lambda_Q \to Q$, является неразветвленной m-листной поверхностью наложения области $\dot{U}_P$. Поэтому, согласно п. 2.60, существует такое топологическое отображение с поверхности $\dot{\tilde{T}}$ на область $0 < |\tilde{z}| < 1$, что отображение $\tilde{z} \to \tilde{Q} \to Q$ есть отображение $z = \tilde{z}^m$. Если еще поставить в соответствие точке $\tilde{z} = 0$ точку $\tilde{P}$, то будем иметь взаимно однозначное отображение всего круга $|\tilde{z}| < 1$ на $\tilde{T}$. С помощью этого отображения перенесем на $\tilde{T}$ топологию круга $|\tilde{z}| < 1$; тогда топология, индуцируемая $\tilde{T}$ на $\dot{\tilde{T}}$, совпадет с уже имеющейся на $\dot{\tilde{T}}$.

Таким образом, и для разветвленного отображения λ_P построена гомеоморфная кругу окрестность $\tilde{T}$. Теперь, так же как и в случае неразветвленных отображений, доказывается, что пересечению соседних окрестностей в параметрических кругах соответствуют *открытые* множества и в том случае, когда одна из окрестностей отвечает разветвленному отображению. Следовательно, пространство $\tilde{R}$ всюду без исключения удовлетворяет аксиомам А и С. Выполняется и аксиома отделимости; это доказывается так же, как и в случае двух неразветвленных отображений.

Таким образом, пространство $\tilde{R}$ есть поверхность, а именно, единая (нераспадающаяся) поверхность. В силу отображения $\lambda_P \to P$ она

является поверхностью наложения R. Точками разветвления являются разветвленные локальные отображения λ_P; порядок точки разветвления равен $m-1$.

8.43. $\tilde{R}$ как униформизирующая. Наконец, согласно п. 2.88, поверхность $\tilde{R}$ можно превратить в риманову поверхность так, чтобы проектирование, исключая точки разветвления, было конформным отображением $\tilde{R}$ на R.

Если вместо локальных отображений λ_P исходить из обратных отображений λ_P^{-1}, то аналогично получаем поверхность наложения $\tilde{R}'$ поверхности R'. В силу соответствия $\lambda_P^{-1} \to \lambda_P$, оно конформно эквивалентно $\tilde{R}$. Тем самым $\tilde{R}$ есть поверхность наложения и R' при проектировании $\lambda_P \to \lambda_P(P)$.

Оба проектирования $\tilde{R} \to R$ и $\tilde{R} \to R'$ производят униформизацию соотношения $R \leftrightarrow R'$. Прежде всего непосредственно ясно, что точки P и $\lambda_P(P)$ соответствуют друг другу в многозначном соотношении $R \leftrightarrow R'$. Если теперь (P, P') — произвольная пара, то, по условию A (п. 8.36), существует локальное отображение λ_P, переводящее P в P'; тогда P и P' — образы „точки“ λ_P поверхности $\tilde{R}$. Следовательно, первое условие униформизации (п. 8.38) выполняется.

Второе условие также выполняется. Пусть $\tilde{P} = \lambda_P$ — точка поверхности $\tilde{R}$ и U_P — отвечающая λ_P окрестность. Отмеченная окрестность $\tilde{T}$ состоит из всех отображений λ_Q, соответствующих $Q \in U_P$, для которых $\lambda_Q = \lambda_P$ в $U_Q U_P$. Следовательно, точке $\tilde{Q} = \lambda_Q \in \tilde{T}$ отвечают в U, соответственно U', точки Q, соответственно $\lambda_Q(Q) = \lambda_P(Q)$, которые действительно соответствуют друг другу в отображении λ_P. Согласно построению поверхности $\tilde{R}$, таким образом получаются *все* отвечающие P отображения λ_P.

8.44. $\tilde{R}$ как слабейшая униформизирующая. Построенная выше поверхность наложения $\tilde{R}$ дает *слабейшую униформизацию соотношения* $R \leftrightarrow R'$, т. е. *всякая униформизирующая поверхность* $\tilde{R}_1$ *является поверхностью наложения* $\tilde{R}$.

Для доказательства предположим, что $\tilde{R}_1$ — произвольная униформизирующая поверхность и σ_1, соответственно σ_1', — проектирования $\tilde{R}_1 \to R$, соответственно $\tilde{R}_1 \to R'$. Нам нужно построить проектирование $\tilde{R}_1 \to \tilde{R}$.

Пусть $\tilde{P}_1$ — точка $\tilde{R}_1$ и P, соответственно P', — ее образы на R, соответственно R'. Если $\tilde{U}_1$ — отмеченная окрестность $\tilde{P}_1$, то окрестности $\sigma_1(\tilde{U}_1)$ и $\sigma_1'(\tilde{U}_1)$, согласно условию 2 п. 8.38, связаны между собой некоторым *отвечающим* P (однозначным или разветвленным)

отображением λ_P. Поставим его в соответствие точке P_1 в качестве „точки-образа". Этим определяется однозначное отображение $\tilde{P}_1 \to \lambda_P$, являющееся отображением на всю поверхность $\tilde{R}$. Последнее доказывается следующим образом. Пусть λ_P — произвольная „точка" $\tilde{R}$; так как $\tilde{R}_1$ производит униформизацию, то, согласно второй части условия 2 п. 8.38, существует точка $\tilde{P}_1$ над P, такая, что $\lambda_P = \sigma_1' \sigma_1^{-1}$, следовательно, λ_P — образ $\tilde{P}_1$.

Построенное таким образом отображение φ есть *проектирование* поверхности $\tilde{R}_1$ на $\tilde{R}$. Для доказательства покажем, что оно удовлетворяет условиям леммы п. 2.58.

Прежде всего, непосредственно из построения ясно, что отображение $\tilde{R}_1 \to \tilde{R} \to R$ есть проектирование σ_1. Теперь нам нужно показать, что отображение $\tilde{R}_1 \to \tilde{R}$ переводит отмеченную окрестность точки поверхности R_1 в отмеченную окрестность точки-образа. Пусть $\tilde{P}_1$ — точка $\tilde{R}_1$ и P — ее образ на R. Образы $U = \sigma_1(\tilde{U}_1)$ и $U' = \sigma_1'(\tilde{U}_1)$ отмеченной окрестности $\tilde{U}_1$ точки $\tilde{P}_1$ связаны между собой отвечающим P отображением λ_P, являющимся образом точки $\tilde{P}_1$ на $\tilde{R}$. Следовательно, $\sigma_1' = \lambda_P \sigma_1$ в $\tilde{U}_1$. Пусть теперь $\tilde{Q}_1$ — фиксированная точка окрестности $\tilde{U}_1$ и $\tilde{V}_1$ — отмеченная окрестность $\tilde{Q}_1$. Точке $\tilde{Q}_1$ соответствует определенная „точка-образ" $\lambda_Q \in \tilde{R}$, и выполняется соотношение $\sigma_1' = \lambda_Q \sigma_1$ в $\tilde{V}_1$. Следовательно, в пересечении $\tilde{U}_1 \tilde{V}_1$ одновременно $\sigma_1' = \lambda_P \sigma_1$ и $\sigma_1' = \lambda_Q \sigma_1$, поэтому отображения λ_P и λ_Q в UV должны совпадать. Это означает, что отображение λ_Q отвечает соответствующей точке λ_P окрестности $\tilde{T}$. Следовательно, φ-образ окрестности $\tilde{U}_1$ лежит в $\tilde{T}$, что и требовалось доказать.

Из леммы следует теперь, что $\tilde{R}_1$ есть поверхность наложения поверхности $\tilde{R}$ с проектированием $\tilde{P}_1 \to \lambda_P$, как и утверждалось.

8.45. Униформизация с помощью комплексной переменной. С помощью построенной выше поверхности $\tilde{R}$ многозначное соотношение $R \longleftrightarrow R'$ униформизируется. При этом переменная точка $\tilde{P}$ на $\tilde{R}$ играет роль униформизирующего параметра. Если, в частности, требуется, чтобы униформизирующей была *комплексная переменная* t, то в случае, когда поверхность $\tilde{R}$ сама не эквивалентна конформно некоторой области t-плоскости, ее нужно заменить поверхностью наложения $\tilde{R}$. Самое позднее — в универсальной поверхности наложения мы получаем тогда поверхность наложения, которую можно конформно отобразить на область t-плоскости.

8.46. При униформизации с помощью универсальной поверхности наложения $\hat{R}$ нужно различать три случая: она может быть поверхностью эллиптического, параболического или гиперболического типа. Мы рассмотрим эти три случая в предположении, что заданные поверхности R и R' являются соответственно z- и w-плоскостью.

Если поверхность $\hat{R}$ *эллиптична*, следовательно, это t-сфера, то мы получаем параметрическое представление вида

$$z = z(t), \quad w = w(t),$$

где $z(t)$ и $w(t)$ регулярны на всей t-сфере, исключая изолированные полюсы, следовательно, являются *рациональными функциями*.

Обратно, если соотношение $R_z \longleftrightarrow R_w$ униформизируемо с помощью числовой сферы, следовательно, с помощью двух рациональных функций, то построенная выше униформизирующая поверхность $\tilde{R}$ с самого начала есть числовая сфера. Действительно, так как $\tilde{R}$ производит слабейшую униформизацию, то числовая сфера является (разветвленной или неразветвленной) поверхностью наложения $\tilde{R}$; отсюда следует, что поверхность $\tilde{R}$ компактна и (в силу соотношения Римана — Гурвица) что $\tilde{R}$ имеет род нуль, следовательно $\tilde{R}$ — числовая сфера.

Если, далее; $\hat{R}$ — открытая t-плоскость ($|t| < \infty$), то $z(t)$ и $w(t)$ — мероморфные функции и в точках, эквивалентных относительно группы преобразований наложения, принимают каждая одни и те же значения. Если исключить случай, когда группа (T) тривиальна, $z(t)$ и $w(t)$ — однопериодические или двоякопериодические функции. Последний случай встречается при униформизации алгебраического уравнения рода 1.

Обратно, если соотношение $R_z \longleftrightarrow R_w$ униформизируемо с помощью двух мероморфных функций, следовательно, с помощью t-плоскости, то универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности $\tilde{R}$ должна быть (открытой) t-плоскостью. В самом деле, тогда t-плоскость является поверхностью наложения (более слабой униформизирующей) поверхности $\tilde{R}$, тем самым, согласно п. 2.87, и универсальной поверхности наложения $\hat{R}$. Если бы поверхность $\hat{R}$ была единичным кругом, то отображение $t \to \hat{R}$ представляло бы функцию, *ограниченную* во всей плоскости t, следовательно, постоянную, что невозможно. Таким образом, поверхность $\hat{R}$ должна быть t-плоскостью.

Если, наконец, $\hat{R}$ — единичный круг, то функции $z(t)$ и $w(t)$ определены, однозначны и с точностью до полюсов регулярны в круге $|t| < 1$. В точках, эквивалентных относительно (T), каждая из них принимает одинаковые значения, т. е. $z(t)$ и $w(t)$ — *автоморфные функции* относительно группы (T).

8.47. Алгебраические функции. Рассмотрим несколько подробнее случай, когда многозначное соотношение $z \longleftrightarrow w$ задано алгебраическим уравнением $F(z, w) = 0$. Этот случай мы детально изучали в гл. I, однако интересно посмотреть, как он включается в общую теорию униформизации.

Согласно гл. I, каждой точке z отвечает лишь конечное число локальных отображений $\lambda_z^{(\nu)}$, соответственно ветвей функции $F(z, w)=0$. Это число в общем случае, т. е. тогда, когда точке z не соответствуют разветвленные элементы, равно степени m функции $F(z, w)$ относительно w; если же z соответствуют и разветвленные элементы, то сумма их порядков, увеличенных на 1, также равна m. Отсюда, согласно п. 2.83, следует, что поверхность наложения $\tilde{R}$ расположена *безгранично* над z-сферой, имеет m листов и компактна (согласно п. 2.84). Следовательно, она имеет определенный род p, который называется *родом алгебраической функции* $F(z, w) = 0$.

Обратно, если задано многозначное соотношение между двумя числовыми сферами, для которого униформизирующая поверхность замкнута, то каждой точке z отвечает лишь конечное число точек w-сферы и, согласно п. 1.28, соотношение $z \longleftrightarrow w$ определяется *алгебраическим уравнением* $F(z, w) = 0$.

8.48. Подсчет рода. Род p поверхности $\tilde{R}$, определенной алгебраическим уравнением $F(z, w) = 0$, может быть определен с помощью соотношения Римана—Гурвица. Ради простоты мы предполагаем, что частные производные F_z и F_w не обращаются в нуль одновременно ни для одной пары значений z, w, удовлетворяющей уравнению $F(z, w) = 0$.

Прежде всего ясно, что число листов поверхности наложения $\tilde{R}$ плоскости z равно степени m. Чтобы найти полную сумму порядков точек разветвления, рассмотрим сначала точки $z \neq \infty$. Пусть z_0 — точка, которой принадлежат не одни только неразветвленные элементы; пусть w_ρ ($\rho=1, \ldots, r$) — решения уравнения $F(z_0, w) = 0$ и α_ρ — кратность w_ρ ($\alpha_\rho \geqslant 1$), следовательно,

$$F_w^{(\nu)}(z_0, w_\rho) = 0 \quad (\nu = 0, \ldots, \alpha_\rho - 1).$$

Тогда, согласно п. 1.13, точке z_0 отвечает r элементов $w_\rho(z)$, причем порядок разветвления $w_\rho(z)$ равен $\alpha_\rho - 1$. Но, согласно п. 8.42, это означает, что „точка“ $w_\rho(z)$ есть точка разветвления порядка $\alpha_\rho - 1$ над z_0. С другой стороны, α_ρ есть кратность решения w_ρ уравнения $F_w(z_0, w_\rho) = 0$. Следовательно, полная сумма порядков точек разветвления $\tilde{R}$, лежащих над точками $z \neq \infty$, равна сумме A кратностей решений уравнения $F_w(z_0, w) = 0$ относительно w, когда z_0 пробегает все значения, для которых уравнения $F = 0$ и $F_w = 0$ имеют пары решений (z_0, w).

Остается еще рассмотреть точку $z=\infty$. Пусть n — порядок уравнения $F(z, w)=0$ относительно z. Мы предполагаем, что степень z^n входит только в свободный от w член $Q_m(z)$. Тогда в окрестности $z=\infty$ уравнение $F(z, w)=0$ ведет себя как $w^m+z^n=0$; поэтому, если t — общий наибольший делитель m и n, то над $z=\infty$ лежат t точек $\tilde{R}$, каждая из которых является точкой разветвления порядка $\frac{m}{t}-1$. Следовательно, сумма их порядков равна $m-t$.

Таким образом, для характеристики $\tilde{\chi}$ поверхности $\tilde{R}$ получаем, согласно соотношению Римана — Гурвица, значение

$$\tilde{\chi}=(-2)m+A+m-t=A-m-t. \tag{8.9}$$

Если $\tilde{R}$ рассматривать не над z-сферой, а над w-сферой, то аналогично найдем, что

$$\tilde{\chi}=B-n-t. \tag{8.10}$$

Сравнивая (8.9) и (8.10), заключаем, что между полными суммами A и B порядков решений $F=0$, $F_w=0$, соответственно $F=0$, $F_z=0$, имеет место соотношение

$$A-B=m-n.$$

8.49. В качестве примера рассмотрим гиперэллиптическое уравнение

$$F(z, w)\equiv w^2-(z-z_1)\dots(z-z_r).$$

Оно удовлетворяет условиям п. 8.48, если только $z_\mu\neq z_\nu$ при $\mu\neq\nu$; затем $m=2$. Из $F_w=0$ следует, что $w=0$, тем самым $z=z_\rho$ ($\rho=1, \dots, r$). Так как $F_{ww}\equiv 2$, то кратность решения $w=0$ уравнения $F_w=0$ равна 1 и, следовательно, $A=r$. Наконец, общий наибольший делитель t равен 2 или 1, в зависимости от того, четно r или нечетно. Отсюда, в силу (8.9), $\tilde{\chi}=r-4$, если r четно, и $\tilde{\chi}=r-3$, если r нечетно.

8.50. Универсальная поверхность наложения алгебраических поверхностей. Мы исследуем дальше для алгебраического случая универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности $\tilde{R}$. Она будет эллиптической, параболической или гиперболической в зависимости от того, будет ли $p=0$, $p=1$ или $p>1$.

Согласно п. 8.46, алгебраическое уравнение рода нуль можно униформизировать с помощью двух рациональных функций; обратно, исключая t из двух рациональных функций $z(t)$ и $w(t)$, получаем алгебраическое уравнение рода нуль.

Если $\tilde{R}$ имеет род $p=1$, то $\hat{R}$ — числовая плоскость и (T) — группа сдвигов с двумя образующими. Следовательно, униформизирующие функции двояко-периодические.

Обратно, если алгебраическое уравнение $F(z, w) = 0$ униформизируемо с помощью мероморфных функций, то, согласно п. 8.46, универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности $\tilde{R}$ *параболична* и, следовательно, поверхность $\tilde{R}$ — рода $p = 1$. *Алгебраическое уравнение рода* $p \geqslant 2$ *не может быть униформизировано с помощью мероморфных функций* (теорема Пикара, см. Аппель — Гурса [1*]).

Если, наконец, $p > 1$, то $\hat{R}$ — единичный круг и униформизация достигается с помощью двух автоморфных функций.

Сравнительно мало исследован общий случай, когда многозначное соотношение $R \longleftrightarrow R'$ задается трансцендентным уравнением $F(z, w) = 0$. Кое-что известно относительно *алгеброидного* случая, когда уравнение рационально по одному переменному и трансцендентно по другому; к этому случаю мы вернемся в п. 8.52 (Мирберг П. Ю. [2]).

8.51. Аналитические образы. Униформизация произвольного аналитического образа $\{z, w\}$, получаемого продолжением заданного элемента функции, всегда может быть достигнута с помощью развитого выше общего метода. В самом деле, элементы удовлетворяют условиям A, B, C п. 8.36, поэтому их совокупность можно, согласно п. 8.40, превратить в риманову поверхность. Униформизация снова получается с помощью универсальной поверхности наложения $\hat{R}$. Если исключить указанные в п. 8.46 частные случаи, поверхность $\hat{R}$ — гиперболическая и, следовательно, униформизирующие функции $z(t)$ и $w(t)$ *автоморфны* в круге $|t| < 1$.

8.52. Теорема об алгеброидных функциях. В заключение этой главы докажем еще одно обобщение теоремы п. 5.42. Мы рассмотрим многозначное соотношение $z \longleftrightarrow w$, определенное „алгеброидным" уравнением $F(z, w) = 0$, которое относительно w алгебраично, а коэффициентами может иметь мероморфные функции. Пусть $\tilde{R}$ — слабейшая униформизирующая этого соотношения и $f(\tilde{P})$ — мероморфная функция на $\tilde{R}$. Мы утверждаем, что тогда существует такая функция $\varphi(z, w)$, рациональная относительно w и мероморфная относительно z, что для всех точек $\tilde{P}$

$$f(\tilde{P}) = \varphi\{z(\tilde{P}), w(\tilde{P})\}.$$

Для доказательства рассмотрим $\tilde{R}$ как поверхность наложения (открытой) z-плоскости. Из алгебраической структуры $F(z, w)$ следует, как в п. 8.47, что эта поверхность наложения безгранична. Число ее листов равно степени m функции F относительно w.

Пусть теперь $\tilde{P}_1$ — произвольная точка $\tilde{R}$ и $\tilde{P}_2, \ldots, \tilde{P}_m$ — эквивалентные ей точки. Рассмотрим для каждого фиксированного k ($k = 0, \ldots, m-1$) функцию

$$\tilde{\Phi}_k(\tilde{P}_1) = \sum_{\mu=1}^{m} f(\tilde{P}_\mu)\, w^k(\tilde{P}_\mu)\,^{1}).$$

Она мероморфна на $\tilde{R}$ и в эквивалентных точках принимает одинаковые значения. Поэтому ей можно поставить в соответствие однозначную функцию $\Phi_k(z)$ от z, полагая

$$\Phi_k(z) = \tilde{\Phi}_k(\tilde{P}),$$

где $\tilde{P}$ — произвольная точка, лежащая над точкой z. Из условия безграничности поверхности наложения $\tilde{R} \to R$ вытекает, что функция $\Phi_k(z)$ непрерывна всюду, где это справедливо для $\Phi_k(\tilde{P})$[2]). Следовательно, функция $\Phi_k(z)$ мероморфна.

Затем, как в п. 5.42, определим функции $A_k(z, w)$, которые теперь мероморфны относительно z, и, аналогично п. 5.42, образуем из $\Phi_k(z)$ и $A_k(z, w)$ функцию $\Phi(z, w)$.

8.53. Теория функций на римановых поверхностях и теория автоморфных функций. Теория униформизации позволяет представить каждую риманову поверхность R фундаментальным многоугольником группы преобразований наложения (T), а именно, так, что преобразования группы являются линейными преобразованиями комплексной переменной t, оставляющими инвариантной универсальную поверхность наложения $\hat{R}$, причем $\hat{R}$ — риманова нормальная область E. Тем самым одновременно вся теория функций на поверхности R преобразуется в теорию функций, которые определены в E и обладают некоторыми свойствами *периодичности* относительно группы (T): однозначные функции на R становятся автоморфными функциями в E, абелевы интегралы переходят в однозначные функции в E с некоторыми постоянными аддитивными периодами при преобразованиях (T).

Наоборот, вся теория римановых поверхностей может быть построена на основе такого частного представления. Исходным пунктом служит тогда дискретная группа (T) в круге (или

---

[1]) Если среди точек $\tilde{P}_\mu$ имеются точки разветвления, то их следует включить в сумму с их кратностями.

[2]) Легко доказывается следующее: если $\tilde{R}$ — безграничная (разветвленная или неразветвленная) поверхность наложения R и $\tilde{\Phi}(\tilde{P})$ — непрерывная функция на $\tilde{R}$, принимающая в эквивалентных точках одинаковые значения, то функция, определяемая на R соотношением $\Phi(P) = \tilde{\Phi}(\tilde{P})$, непрерывна.

на сфере) E. Соответствующая риманова поверхность R получается из $E=\hat{R}$ отождествлением точек, эквивалентных относительно группы (T). Большая классическая проблема заключается в том, чтобы вывести существование и аналитическое представление автоморфных функций *непосредственно*, с помощью заданной группы (T); это — путь вейерштрассовой теории периодических функций, к которой методически близко примыкает теория автоморфных функций Пуанкаре [1].

Мы не можем здесь рассматривать построенные Пуанкаре ряды (тэта-ряды), с помощью которых он доказал существование автоморфных функций для заданной группы, и ограничимся указанием на его оригинальные работы или на более новые изложения общей теории автоморфных функций (например, Фату [1*], Форд [1*]). Заметим только, что тогда, когда риманова поверхность R задана, в частности, как фундаментальный многоугольник группы аналитических преобразований, легко может быть указано покрытие R параметрическими кругами, которое позволяет применить данные в нашем изложении построения и доказательства существования.

Глава IX

ПОВЕРХНОСТИ, ПОДОБНЫЕ ОДНОЛИСТНЫМ

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

9.1. Задача. Для *односвязной* римановой поверхности R гиперболического типа отображение на единичный круг было получено с помощью функции Грина $G(z, \zeta)$ этой поверхности. Отображающая функция в этом случае просто задается выражением

$$\ln w = -G(z, \zeta) - iG'(z, \zeta),$$

где G' — сопряженная к G гармоническая функция. При этом точка $z = \zeta$ переходит в точку $w = 0$.

Если теперь поверхность R неодносвязна, то, как было показано в § 1 гл. VI, функция Грина $G(z, \zeta)$ все еще может быть построена, если только емкостная постоянная поверхности R положительна. Напротив, сопряженная функция G' в целом теперь уже не будет однозначной, она будет иметь некоторые периоды при обходе вдоль путей, не гомологичных нулю. Поэтому для изучения конформных отображений многосвязных поверхностей должны быть привлечены новые вспомогательные средства.

Задача настоящей главы — показать, что произвольную *поверхность, подобную однолистным*, можно отобразить взаимно однозначно и конформно на подобласть числовой w-плоскости. Отображение строится с помощью результатов гл. IV. При этом область-образ в w-плоскости должна быть подходящим образом нормирована. В качестве такой нормировки образа годится в первую очередь требование, чтобы он был *областью с параллельными разрезами*, т. е. областью, граница которой состоит из параллельных отрезков [1]).

Описанный ниже метод в основном был разработан Гильбертом [1*], Кёбе [1] и Курантом [1*], [2*].

9.2. Поверхности, подобные однолистным. Под *поверхностью, подобной однолистным*, понимают поверхность, разбиваемую каждым циклическим сечением (замкнутой жордановой кривой). Например, числовая сфера и числовая плоскость подобны однолистным.

Поверхность R', составляющая часть поверхности R, подобной однолистным, также подобна однолистным. Действительно, пусть

---

[1]) Для бесконечносвязных поверхностей это требует уточнения, которое дается ниже (см. пп. 9.32, 9.33). — *Прим. перев.*

σ — произвольная замкнутая жорданова кривая на R'; покажем, что она разбивает поверхность. Пусть P — произвольная точка σ и K — ее параметрическая окрестность. Выберем в K две точки A и B, лежащие по разные стороны от кривой σ. Тогда точки A и B нельзя соединить на R путем, не встречающим кривую σ. В самом деле, в противном случае кривая σ не разбивала бы R, так как, очевидно, всякую точку $R-\sigma$ можно, не встречая σ, соединить *либо* с A, *либо* с B. Точки A и B (обе они лежат на R') нельзя, следовательно, и на R' соединить путем, не встречающим σ, т. е. σ разбивает R'. Таким образом, поверхность R' разбивается каждой замкнутой жордановой кривой, следовательно, она подобна однолистным.

В частности, из предыдущей теоремы следует, что всякая подобласть числовой плоскости есть поверхность, подобная однолистным.

9.3. Из *замкнутых поверхностей* сфера — единственная поверхность, подобная однолистным. В самом деле, если род p замкнутой поверхности R положителен, то R может быть представлена $4p$-угольником с соответствием сторон (p) (гл. V, § 1, п. 5.7), и тогда каждая сторона многоугольника (после отождествления концов) определяет неразбивающее циклическое сечение.

Точно так же из нормального представления гл. V видно, что *поверхность с краем* только тогда может быть подобной однолистным, когда ее род равен нулю. С другой стороны, каждая поверхность с краем рода нуль всегда подобна однолистным, как это непосредственно видно из того же нормального представления.

9.4. Исчерпание открытой поверхности, подобной однолистным. Теперь мы переходим к нашей задаче, а именно, к доказательству того, что каждая поверхность, подобная однолистным, конформно эквивалентна области числовой плоскости.

Пусть R — произвольная поверхность, подобная однолистным. При этом мы исключаем простые случаи, когда универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ параболична. Итак, пусть $\hat{R}$ — единичный круг $|t|<1$. Мы считаем, что фундаментальный многоугольник π поверхности R триангулирован согласно построению п. 8.7. Тогда для произвольного $r<1$ часть R, соответствующая замкнутому кругу $|t|\leqslant r$, есть некоторая *поверхность с краем* R^*, лежащая на R. Поскольку R подобна однолистным, R^* также подобна однолистным.

Поверхность R образует аналитическое продолжение поверхности R^* в смысле § 2 гл. VIII. Отсюда следует, что фундаментальный многоугольник π^*, отвечающий R^*, на универсальной поверхности наложения $\hat{R}^*$ примыкает к граничной окружности $|t^*|=1$ вдоль (конечного числа) сторон (следовательно, не вдоль изолированных вершин). Поэтому можно применить нормирующий процесс § 3 гл. VII. Следовательно, поверхность R^* имеет вполне

определенный (с помощью нормального многоугольника п. 7.31) род p, а именно, в силу того, что поверхность подобна однолистным, $p=0$.

Отсюда, далее, следует, что каждые $(q-1)$ граничных контура поверхности R^* образуют базис одномерной группы гомологий поверхности R^* (см. п. 5.25). Итак, *R^* — лежащая на R поверхность с краем рода нуль*. Если число r мы заставим пробегать подходящим образом выбранную последовательность значений $r_\nu \to 1$, то получим последовательность поверхностей с краем рода нуль, исчерпывающих заданную поверхность R.

Чтобы решить теперь поставленную задачу об отображении для заданной открытой поверхности R, мы прежде всего, в соответствии с построенным выше исчерпанием R, рассмотрим лежащие на R поверхности с краем, решим для них задачу об отображении и затем, с помощью предельного перехода, перенесем результаты на заданную поверхность R.

§ 2. ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕМ, ПОДОБНЫЕ ОДНОЛИСТНЫМ

9.5. Области с параллельными разрезами. Пусть подобная однолистным риманова поверхность R с краем задана как часть объемлющей поверхности R_1. Граничные контуры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ порождают группу гомологий поверхности R; будем предполагать, что эти граничные контуры на R_1 представляют собой кусочно-аналитические кривые. Мы покажем, что поверхность R конформно эквивалентна подобласти числовой плоскости (w-плоскости). При этом областями-образами будут некоторые нормальные области w-плоскости. В целях упрощения техники доказательства в качестве таких областей рекомендуется сначала выбрать *области с параллельными разрезами*, т. е. области, ограниченные некоторым числом параллельных отрезков (Кёбе [1]). В дальнейшем будут рассмотрены и некоторые другие нормированные области.

Задачу об отображении поверхности R мы формулируем теперь в следующем точном виде:

Пусть P — произвольная точка на R и K — фиксированная параметрическая ее окрестность. Требуется найти аналитическую функцию $w=F(z)$, которая на R однозначна и, исключая точку $P(z=\zeta)$, регулярна; в точке P она должна иметь разложение

$$F(z)=\frac{c}{z-\zeta}+\text{регулярная функция}, \tag{9.1}$$

где вычет c задан [1]). *Далее, функция $F(z)$ должна быть одно-*

[1]) Следует заметить, что коэффициент c и тем самым нормировка F зависят не только от точки P, но и (ковариантно) от выбора локального параметра z.

листной на R и должна иметь на каждой граничной кривой Γ_ν предельные значения с постоянной действительной частью.

Так как граница $\Gamma = \sum_{\nu=1}^{q} \Gamma_\nu$ состоит из аналитических дуг, то из принципа симметрии следует, что функция F *аналитична* в каждой внутренней точке такой дуги.

9.6. Единственность решения. Отображающая функция, если она существует, определена с точностью до аддитивной постоянной. В самом деле, если F_1 и F_2 — два решения, то разность $F = F_1 - F_2 = U + iU'$ регулярна в R, поэтому для ее интеграла Дирихле, в силу (3.20′), справедливо соотношение

$$\iint \left|\frac{dF}{dz}\right|^2 dx\,dy = -\int_\Gamma U'\,dU.$$

Так как $U = \text{const}$ на каждой кривой Γ_ν, то последний интеграл равен нулю, тем самым и $dF/dz = 0$, так что $F \equiv \text{const}$, что и требовалось доказать.

9.7. Вид отображающей функции. Предположим теперь, что $F = U + iU'$ — решение задачи об отображении. Тогда действительная часть U в точке $z = \zeta$ имеет разложение

$$U = \operatorname{Re}\left(\frac{c}{z-\zeta}\right) + \text{гармоническая функция}. \qquad (9.2)$$

На граничной кривой Γ_ν функция U имеет постоянное значение γ_ν ($\nu = 1, \ldots, q$).

Образуем гармоническую меру $\omega_\nu(z)$ кривой Γ_ν относительно R. Тогда разность $U_0 = U - \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \omega_\nu$ имеет еще разложение вида (9.2) и равна нулю на всей границе Γ.

Таким образом, если $F = U + iU'$ — решение задачи об отображении, то U имеет вид

$$U = U_0 + \sum_{\nu=1}^{q} \gamma_\nu \omega_\nu, \qquad (9.3)$$

где γ_ν — действительная постоянная (абсцисса ν-го разреза области-образа), ω_ν — гармоническая мера Γ_ν относительно R и U_0 — однозначная гармоническая функция, регулярная на R (всюду, кроме полюса $z = \zeta$) и обращающаяся в нуль на границе Γ.

В полюсе ζ функция U имеет разложение вида (9.2).

Значение этого представления отображающей функции состоит в том, что функции ω_ν и U_0, согласно результатам гл. IV, могут быть построены непосредственно. Следовательно, все сводится к определению постоянных γ_ν.

9.8. Необходимое и достаточное условие. Необходимое условие для постоянных γ_ν получается из того, что сопряженная к U функция U' должна быть однозначной. Если dU'_0 и $d\omega'_\nu$ — дифференциалы, сопряженные соответственно к dU_0 и $d\omega_\nu$, и если

$$\Delta_{\mu\nu} = \int_{\Gamma_\nu} d\omega'_\mu, \qquad \Delta_\nu = \int_{\Gamma_\nu} dU'_0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, q), \tag{9.4}$$

то период U' вдоль Γ_ν равен

$$\int_{\Gamma_\nu} dU' = \sum_{\mu=1}^{q} \gamma_\mu \Delta_{\mu\nu} + \Delta_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, q). \tag{9.4'}$$

Отсюда следует, что для разрешимости задачи об отображении необходима разрешимость линейной системы уравнений

$$\sum_{\mu=1}^{q} \Delta_{\mu\nu} x_\mu + \Delta_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, q). \tag{9.5}$$

Это условие также и *достаточно*. Для доказательства предположим, что система (9.5) удовлетворяется значениями $x_\mu = \gamma_\mu$, и образуем соответствующий потенциал (9.3). Сопряженная к U функция (определенная с точностью до аддитивной постоянной), в силу (9.4'), однозначна на R, так как кривые Γ_ν порождают группу гомологий поверхности R. Мы утверждаем, что функция $F = U + iU'$ осуществляет требуемое отображение.

Прежде всего, эта функция $w = F$ обладает в точке $z = \zeta$ требуемой особенностью, характеризуемой разложением (9.1). Далее, действительная часть U на Γ_μ равна постоянной γ_μ. Следовательно, в качестве образа Γ_μ получается (конечный) отрезок s_μ, параллельный мнимой оси. Если удалить из w-плоскости q отрезков s_μ, то останется область G_w, содержащая точку $w = \infty$. Мы покажем, что эта область является образом поверхности R при отображении с помощью $w = F$.

Пусть $w = a$ $(\neq \infty)$ — точка области G_w. Тогда функция $F - a$ имеет внутри R один и только один нуль. Это следует из принципа аргумента: в самом деле, функция $F - a$ на Γ отлична от нуля и бесконечности и в R регулярна с точностью до полюса $z = \zeta$. Следовательно, для числа n ее нулей имеем

$$2\pi i (n - 1) = i \sum_{\mu=1}^{q} \Delta_{\Gamma_\mu} \arg (F(z) - a) = \sum_{\mu} \int_{\Gamma_\mu} \frac{dw}{w - a}.$$

Когда z описывает кривую Γ_μ, точка $w = F$ движется по отрезку s_μ, причем, в силу однозначности отображения, она должна вернуться к первоначальному положению. Поэтому каждое слагаемое справа

равно нулю, следовательно, $n = 1$, и утверждение тем самым доказано.

Поэтому функция $w = F(z)$ отображает внутренность R топологически и конформно на область G_w, ограниченную параллельными отрезками s_μ.

9.9. Разрешимость системы уравнений (9.5). Система линейных уравнений для γ_μ состоит из q уравнений и содержит столько же неизвестных. Поэтому ее разрешимость зависит от ранга матрицы $\Delta_{\mu\nu}$. Сначала покажем, что *матрица* $\Delta_{\mu\nu}$ — *симметрическая*.

Если в формуле преобразования (3.16) положить $M = \omega_\mu \frac{\partial \omega_\nu}{\partial y}$, $N = -\omega_\mu \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x}$, то для каждой пары μ, ν будем иметь

$$\int_\Gamma \omega_\mu \, d\omega_\nu' = \int_\Gamma \omega_\nu \, d\omega_\mu'$$

и, так как $\omega_\mu = 1$ на Γ_μ и $\omega_\mu = 0$ на Γ_ν $(\nu \neq \mu)$,

$$\Delta_{\mu\nu} = \int_{\Gamma_\nu} d\omega_\mu' = \int_{\Gamma_\mu} d\omega_\nu' = \Delta_{\nu\mu},$$

как утверждалось.

Ранг матрицы $\Delta_{\mu\nu}$ имеет не наибольшее возможное значение (q), так как, очевидно, $\sum_{\mu=1}^{q} \omega_\mu \equiv 1$, следовательно,

$$\sum_{\mu=1}^{q} d\omega_\mu' \equiv 0$$

и поэтому

$$\sum_{\mu=1}^{q} \int_{\Gamma_\nu} d\omega_\mu' = \sum_{\mu=1}^{q} \Delta_{\mu\nu} = 0 \quad (\nu = 1, \ldots, q).$$

Значит, однородная система

$$\sum_{\mu=1}^{q} \Delta_{\mu\nu} x_\mu = 0 \qquad (\nu = 1, \ldots, q) \tag{9.6}$$

имеет нетривиальное решение $x_1 = \ldots = x_q$, и ранг матрицы $\Delta_{\mu\nu}$ не превосходит $q - 1$.

С другой стороны, $x_1 = \ldots = x_q$ — единственное решение однородной системы (9.6). В самом деле, если $x = (x_1, \ldots, x_q)$ — вектор-решение, то функция

$$\omega(z) = \sum_{\mu=1}^{q} x_\mu \omega_\mu(z)$$

регулярна в R и сопряженная к ней функция ω', в силу (9.6), однозначна. Следовательно, аналитическая функция $\omega + i\omega'$ однозначна и регулярна в R и ее действительная часть на Γ_μ равна постоянной x_μ. Повторяя рассуждения п. 9.6, заключаем, что эта функция есть постоянная; следовательно, ее граничные значения x_μ равны друг другу, что и требовалось доказать. Поэтому ранг матрицы $\Delta_{\mu\nu}$ в точности равен $q-1$.

Неоднородная система (9.5) тогда и только тогда имеет решение, когда вектор $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_q)$ ортогонален к каждому вектору-решению транспонированной однородной системы. В силу симметрии матрицы $\Delta_{\mu\nu}$, транспонированная система совпадает с первоначальной и, следовательно, имеет только решение $x_1 = \ldots = x_q$. Поэтому условие разрешимости принимает вид

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Delta_\nu = 0.$$

Левая часть этого равенства представляет полную вариацию

$$\int_\Gamma dU_0'$$

вдоль Γ сопряженного к U_0 потенциала U'. Она действительно равна нулю, так как потенциал U_0' также однозначен в окрестности полюса ζ. Следовательно, условие ортогональности выполняется, и система (9.5) имеет решение $x_\mu = \gamma_\mu$. Общее решение имеет вид

$$x_\mu = \gamma_\mu + \gamma,$$

где γ — произвольная постоянная.

9.10. Этим полностью выяснен вопрос о разрешимости задачи об отображении п. 9.5. Действительная часть отображающей функции равна

$$U = U_0 + \sum_{\mu=1}^{q} (\gamma_\mu + \gamma)\,\omega_\mu = U_0 + \sum_{\mu=1}^{q} \gamma_\mu \omega_\mu + \gamma.$$

Она определена с точностью до аддитивной постоянной γ, тем самым и функция $F = U + iU'$ определена с точностью до аддитивной постоянной $\gamma + i\gamma'$, в соответствии с доказанной в п. 9.6 теоремой единственности.

9.11. Совокупность отображений на области с параллельными разрезами. Теперь мы можем решить более общую задачу об отображении поверхности R на область G_w, ограниченную q отрезками, параллельными произвольно заданному направлению α. Пусть при этом вычет в полюсе $z = \zeta$ снова имеет заданное значение c. Нор-

мированную таким образом отображающую функцию мы обозначаем через $w = F(z;\ c,\ \alpha)$, причем α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ означает угол между положительным направлением мнимой оси и заданным направлением. Следовательно, построенное выше отображение соответствует значению $\alpha = 0$.

Функция $e^{-i\alpha}F(z;\ c,\ \alpha)$ отображает R на область с разрезами, параллельными мнимой оси, и имеет вычет в полюсе $z = \zeta$, равный $ce^{-i\alpha}$. Тогда, по теореме единственности п. 9.6,

$$F(z;\ c,\ \alpha) = e^{i\alpha}F(z;\ ce^{-i\alpha},\ 0) + \text{const},$$

и этим более общая задача об отображении сводится к частной задаче п. 9.5. Отображающая функция $w = F(z;\ c,\ \alpha)$ снова определена с точностью до аддитивной постоянной.

9.12. Линейные комбинации. Между различными дифференциалами $dF(z;\ c,\ \alpha) = f(z;\ c,\ \alpha)$ имеют место некоторые линейные соотношения, из которых для нас важно следующее.

Очевидно, что

$$e^{-i\alpha}f(z;\ 1,\ \alpha) = f(z;\ e^{-i\alpha},\ 0) =$$
$$= f(z;\ \cos\alpha,\ 0) + f(z;\ -i\sin\alpha,\ 0) =$$
$$= f(z;\ 1,\ 0)\cos\alpha - if\left(z;\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right)\sin\alpha. \qquad (9.7)$$

Заменяя здесь α на $\alpha + \frac{\pi}{2}$, получаем

$$f(z;\ 1,\ \alpha) + f\left(z;\ 1,\ \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = f(z;\ 1,\ 0) + f\left(z;\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right) \qquad (9.7')$$

для каждого направления α.

§ 3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ НА ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

9.13. Размах. Для краткости будем писать

$$dF_1(z) = dF\left(z;\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right) = f_1(z)\,dz, \quad dF_2(z) = dF(z;\ 1,\ 0) = f_2(z)\,dz,$$

и, следовательно, f_1 и f_2 в полюсе $z = \zeta$ имеют разложения

$$f_1 = -\frac{1}{(z-\zeta)^2} + c_1 + \ldots, \quad f_2 = -\frac{1}{(z-\zeta)^2} + c_2 + \ldots$$

Пусть теперь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — функции, определяемые соотношениями

$$\Phi = \frac{1}{2}(F_1 + F_2), \quad \Psi = \frac{1}{2}(F_1 - F_2). \qquad (9.8)$$

Функция Ψ на R регулярна всюду без исключения и имеет в точке $z=\zeta$ разложение

$$\Psi = \text{const} + s(z-\zeta) + \dots, \tag{9.9}$$

где $s=(c_1-c_2)/2$. Величина s называется *размахом* (Spanne) поверхности R в точке $z=\zeta$ (Грунский [1], Шиффер [1], Лехто [1], Локки [1]).

Размах зависит не только от точки ζ, но и от локального параметра z. Если z' — новый параметр и $dz/dz'=a$ в точке $z=\zeta$, то функции $|a|F_1$ и $|a|F_2$ нормированы относительно z' так, как F_1 и F_2 относительно z (вычет в точке $z=\zeta$ равен 1); коэффициенты при первой степени $(z'-\zeta')$ равны тогда соответственно $|a^2|c_1$ и $|a^2|c_2$, и тем самым размах

$$s' = |a|^2 s = \left|\frac{dz}{dz'}\right|^2 s. \tag{9.10}$$

Следовательно, размах имеет *ковариантный тензорный характер* [1]).

9.14. Функция Ф. Функция Φ на R регулярна всюду, исключая точку $z=\zeta$, где она имеет полюс с вычетом $+1$:

$$\Phi = \frac{1}{z-\zeta} + \dots .$$

Мы покажем, что *ковариант* $\varphi = d\Phi/dz$ *на* R *нигде не равна нулю*. Имеем

$$\varphi = \frac{1}{2}(f_1+f_2),$$

поэтому равенство $\varphi=0$ равносильно тому, что

$$h \equiv \frac{f_1}{f_2} = -1.$$

h, как частное двух ковариант, есть *скалярная* функция. В силу однолистности F_2, ковариант $f_2 \neq 0$, поэтому функция $h(z)$ регулярна. Затем, в силу однолистности $F(z;\ 1,\ \alpha)$, ковариант $f(z;\ 1,\ \alpha)$

[1]) Повидимому, подсчет основан на недоразумении. Его можно вести следующим образом. Рассматривая z как функцию от z', имеем, с точностью до аддитивных постоянных ($a=|a|e^{i\alpha}$):

$$F\left(z';\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right) = |a|F\left(z;\ e^{i\alpha},\ \frac{\pi}{2}\right), \quad F(z';\ 1,\ 0) = |a|F(z;\ e^{i\alpha},\ 0);$$

отсюда, в силу (9.7),

$$F\left(z';\ 1,\ \frac{\pi}{2}\right) - F(z';\ 1,\ 0) = |a|e^{-i\alpha}(F_1-F_2),$$

откуда следует *правильное* соотношение (9.10). — *Прим. перев.*

также отлична от нуля. Отсюда с помощью соотношения (9.7) заключаем, что

$$h(z) \neq -i \operatorname{ctg} \alpha$$

для каждого α, т. е. $h(z)$ вообще не принимает чисто мнимых значений. Так как $h = 1$ в общем полюсе ζ ковариант f_1 и f_2, то из соображений непрерывности вытекает, что h может принимать на R только значения с ***положительной действительной частью***; следовательно, в частности, $h \neq -1$, тем самым $\varphi \neq 0$ на R.

9.15. Поведение на границе. Исследуем теперь подробнее поведение отображения $w = \Phi$ на граничных кривых Γ_ν. Для этого запишем функцию Φ в виде [ср. (9.7′)]

$$2\Phi(z) = F(z;\ 1,\ \alpha) + F\left(z;\ 1,\ \alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Когда z описывает кривую Γ_ν, точка $w_1 = F(z;\ 1,\ \alpha)$ пробегает один раз туда и обратно разрез-образ, заданный направлением α, а точка $w_2 = F\left(z;\ 1,\ \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ — перпендикулярный к нему разрез, причем также один раз туда и обратно. Поэтому геометрическое место точек $w_1 + w_2$ обладает тем свойством, что каждая прямая, параллельная α или $\alpha + \frac{\pi}{2}$, встречается с ним не более чем в *двух* точках. Так как это имеет место для каждого направления α, то образ α_ν кривой Γ_ν есть *выпуклая кривая*.

9.16. Однолистность Ф. Предположим теперь, что поверхность R положительно ориентирована (т. е. положительно ориентированы 2-симплексы триангуляции R). Границу Γ можно считать „гладкой“, и тогда

$$\int_\Gamma \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right) dz = -2\pi i q. \tag{9.11}$$

Это следует из (3.50), если учесть, что φ на R не имеет нулей и имеет в точности один полюс второго порядка и что знакочередующаяся сумма симплексов триангуляции поверхности R равна $\chi = q - 2$, как это непосредственно видно из фундаментального многоугольника.

Из (9.11) далее следует, что

$$\int_{\Gamma_\nu} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}^2}\right) dz = -2\pi i \tag{9.11′}$$

для $\nu = 1, \ldots, q$. В самом деле, этот интеграл, с точностью до множителя i, означает изменение аргумента Φ вдоль Γ_ν, т. е. полный поворот касательного вектора кривой α_ν, являющейся образом Γ_ν при отображении $w = \Phi$ (ср. п. 3.39). Так как, согласно п. 9.15,

α_ν — жорданова кривая, то это изменение может равняться только $\pm 2\pi$ (см. Хопф [2]) и, в силу (9.11), для каждого ν здесь должен стоять знак *минус*.

Отсюда заключаем, что функция $\Phi(z)$ *однолистна*. В самом деле, если w_0 — произвольная точка w-плоскости, не лежащая на кривых α_ν, то $\Phi - w_0$ не имеет на Γ ни нулей, ни полюсов, поэтому, по принципу аргумента,

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_\nu \int_{\Gamma_\nu} \frac{\Phi'\,dz}{\Phi - w_0} = n - 1, \tag{9.12}$$

где n — число нулей $\Phi - w_0$.

ν-й интеграл слева означает (умноженный на $2\pi i$) индекс кривой-образа α_ν относительно точки w_0. Так как α_ν — жорданова кривая, то для индекса возможны только значения $+1$, -1, 0. Как было показано выше, полный поворот вектора касательной к кривой α_ν равен -2π; поэтому значение $+1$ для индекса невозможно и сумма интегралов слева в (9.12) имеет значение $-2\pi i m$ $(0 \leqslant m \leqslant q)$. Из (9.12) вытекает теперь, что $m + n = 1$, а так как m и n оба неотрицательны, то отсюда, далее, следует, что либо $m = 0$, $n = 1$, либо $m = 1$, $n = 0$. Поэтому значение w_0 либо принимается один раз, либо вовсе не принимается, что и требовалось доказать.

Число m означает число жордановых кривых α_ν, которые содержат точку w_0 внутри себя. Так как m — либо нуль, либо единица, то это означает, что все кривые лежат вне друг друга.

9.17. Минимальное свойство коварианты ψ. Подсчитаем интеграл Дирихле коварианты $\psi = d\Psi/dz$ по поверхности R. В силу (3.19), имеем[1])

$$\|\psi\|^2 \equiv \int_R\int |\psi|^2\,dx\,dy = \frac{i}{2}\int_\Gamma \Psi\,d\bar{\Psi},$$

и так как $d\bar{\Psi} = d\Phi$ на Γ, то

$$\|\psi\|^2 = \frac{i}{2}\int_\Gamma \Psi\,d\Phi.$$

Этот интеграл можно подсчитать по теореме о вычетах: коварианта $\Psi\varphi$ регулярна всюду, за исключением точки ζ, где она имеет вычет $-s$, поэтому

$$\|\psi\|^2 = \pi s.$$

Следовательно, интеграл Дирихле от ψ, с точностью до множителя π, равен размаху s. Отсюда видно, что размах действителен и

[1]) Существенная для дальнейшего идея сведения вычисления интеграла Дирихле с помощью указанного ниже тождества к теореме о вычетах восходит к Грунскому.

неотрицателен. Далее, значение $s=0$ невозможно, так как в противном случае мы бы имели $\psi\equiv 0$, тем самым $F_1=F_2+\text{const}$, что невозможно, в силу вида областей-образов G_1 и G_2, получаемых при отображениях $w=F_1$, $w=F_2$.

Пусть теперь $dF=f\,dz$ — полный аналитический дифференциал, однозначный и регулярный на всей поверхности R и имеющий в точке $z=\zeta$ (относительно фиксированного параметра z) значение s (т. е. $f(\zeta)=s$). Если тогда положить $dH=h\,dz=(f-\psi)\,dz$, то для интеграла Дирихле от f имеем

$$\iint\limits_R |f|^2\,dx\,dy=\iint\limits_R |\psi|^2\,dx\,dy+\iint\limits_R |h|^2\,dx\,dy+$$
$$+2\operatorname{Re}\iint\limits_R h\bar{\psi}\,dx\,dy.$$

В силу (3.18), здесь

$$\iint\limits_R h\bar{\psi}\,dx\,dy=\iint\limits_R \frac{dH}{dz}\bar{\psi}\,dx\,dy=\frac{i}{2}\int\limits_\Gamma H\,d\overline{\Psi}=\frac{i}{2}\int\limits_\Gamma H\,d\Phi.$$

Этот интеграл, по теореме о вычетах, равен нулю, так как коварианта $H\varphi$ регулярна для $z\neq\zeta$ и ее вычет в точке $z=\zeta$ равен нулю. Поэтому имеем

$$\iint\limits_R |f|^2\,dx\,dy=\iint\limits_R |\psi|^2\,dx\,dy+\iint\limits_R |h|^2\,dx\,dy,$$

следовательно,

$$\|f\|^2=\pi s+\|h\|^2.$$

Для всех полных регулярных аналитических дифференциалов $dF=f\,dz$, которые в точке $z=\zeta$ имеют значение s, интеграл Дирихле

$$\iint\limits_R |f|^2\,dx\,dy$$

достигает своего минимума πs при $f=\psi$.

9.18. Максимальное свойство коварианты φ. Пусть F — однозначная аналитическая функция на $R+\Gamma$, регулярная всюду, кроме точки $z=\zeta$, где

$$F=U+iU'=\frac{1}{z-\zeta}+\text{регулярная функция};$$

предположим, далее, что функция $w=F$ отображает поверхность R взаимно однозначно на область B_w w-плоскости. Для $F\equiv\Phi$ мы обозначаем B_w через G_w.

Область B_w содержит точку $w=\infty$, поэтому дополнительное к B_w множество точек B_w' ограничено. Граница β области B_w и дополнения B_w' состоит из q кусочно-аналитических жордановых кривых β_ν ($\nu=1, \ldots, q$). Площадь дополнения B_w' задается интегралом

$$I=-\int_\beta U\,dU',$$

где кривые β_ν пробегаются в направлении, отрицательном по отношению к w-плоскости. В силу однозначности F, имеем

$$\int_\Gamma F\,d\overline{F}=-2i\int_\beta U\,dU',$$

причем на β нужно взять ориентацию, соответствующую ориентации Γ; согласно п. 9.16, она отрицательна по отношению к w-плоскости [1]), следовательно,

$$\int_\Gamma F\,d\overline{F}=2iI.$$

В частности, если за F принять Φ, имеем

$$\int_\Gamma \Phi\,d\overline{\Phi}=\int_\Gamma \Phi\,d\Psi,$$

откуда, по теореме о вычетах,

$$\int_\Gamma \Phi\,d\overline{\Phi}=2\pi i s.$$

Поэтому для дополнительной области G_w' получаем значение πs. Мы покажем, что это — минимальное значение для всех рассмотренных выше функций F. Разность $H=F-\Phi$ регулярна в R, следовательно, если $dH=h\,dz$, то

$$\int_\Gamma F\,d\overline{F}=\int_\Gamma (H+\Phi)\,d(\overline{H}+\overline{\Phi})=$$

$$=-2i\iint_R |h|^2\,dx\,dy+\int_\Gamma \Phi\,d\overline{\Phi}+\int_\Gamma (\Phi\,d\overline{H}+H\,d\overline{\Phi}).$$

По теореме о вычетах, третий интеграл здесь равен нулю:

$$\int_\Gamma (\Phi\,d\overline{H}+H\,d\overline{\Phi})=\int_\Gamma (-\overline{H}\,d\Phi+H\,d\overline{\Phi})=$$

$$=2\operatorname{Im}\int_\Gamma H\,d\overline{\Phi}=2\operatorname{Im}\int_\Gamma H\,d\Psi=0.$$

[1]) Следует заметить, что при доказательстве п. 9.16 были использованы только такие свойства функции Φ, которыми обладают и функции F.

Тем самым

$$I_{B'_w} = I_{G'_w} - \int\int_R |h|^2\, dx\, dy.$$

Следовательно, *среди всех функций F функция Φ дает „наименьшую" область-образ, т. е. область, дополнение которой имеет наибольшую площадь, и этот максимум достигается только для $F = \Phi$.*

9.19. Случай $q = 1$. Для *односвязной* поверхности R экстремальная область G_w, получаемая с помощью отображающей функции $F = \Phi$, может быть легко определена. Пусть F_1 — снова функция, отображающая R на плоскость с разрезом, параллельным действительной оси, и имеющая вычет 1 в точке ζ. Пусть область G_{w_1} нормирована так, что концами разреза являются точки $\pm d$ $(d > 0)$. Тогда функция F_2, отображающая R на плоскость с разрезом, параллельным мнимой оси, и вычетом 1 в точке ζ, может быть выражена через функцию F_1. Для этого заметим, что $F_2 F_1^{-1}$ есть отображение w-плоскости на себя, которое переводит первый разрез во второй, оставляет неподвижной точку $w = \infty$ и имеет в ней производную, равную 1. Но такое отображение может быть указано непосредственно. В самом деле, если положить

$$w_1 = \frac{d}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

то отображение $w_1 \to w$ переводит область G_{w_1} во внутренность или внешность единичного круга, в зависимости от выбора ветви квадратного корня. Если затем

$$w_2 = \frac{d}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right),$$

то внутренность, соответственно внешность, единичного круга переходит в область G_{w_2} w_2-плоскости с разрезом вдоль отрезка мнимой оси, соединяющего точки $\pm id$. Отображение $w_1 \to w \to w_2$ переводит поэтому первый разрез во второй; далее, оно, очевидно, оставляет неподвижной бесконечно удаленную точку и имеет в ней производную, равную 1.

По определению функций Φ и Ψ,

$$\Phi = \frac{1}{2}(w_1 + w_2) = \frac{wd}{2} = \frac{1}{z - \zeta} + [(z - \zeta)],$$

$$\Psi = \frac{1}{2}(w_1 - w_2) = \frac{d}{2w} = \frac{d^2}{4}(z - \zeta) + \ldots,$$

и размах s имеет значение

$$s = \frac{d^2}{4}.$$

Следовательно, функция Φ отображает R взаимно однозначно и конформно на внешность круга $|w|>d/2$, а Ψ — на внутренность круга $|w|<d/2$.

Поэтому отображение R, осуществляемое функцией $w=\frac{1}{\sqrt{s}}\Psi$, совпадает с фундаментальным отображением R на единичный круг $|w|<1$, задаваемым функцией $w(z,\zeta)=e^{-G(z,\zeta)-iG'(z,\zeta)}$, и между размахом $s(\zeta)$ и емкостной постоянной $c(\zeta)$ односвязной поверхности R имеет место соотношение

$$s(\zeta)=(c(\zeta))^2.$$

9.20. Метризация поверхности R. Найденное в конце п. 9.19 соотношение между размахом s и емкостной постоянной c для случая односвязной поверхности наводит на мысль ввести на R метрику с инвариантным линейным элементом

$$ds=\sqrt{s(z)}\,|dz|.$$

В случае $q=1$ речь идет о гиперболической геометрии (метрика Пуанкаре), но и только в этом случае: для $q>1$ кривизна предыдущей метрики непостоянна. К этому вопросу мы еще вернемся в гл. X.

Ввиду совпадения чисел $c(z)$ и $\sqrt{s(z)}$ для $q=1$, возникает вопрос, не целесообразно ли последнее число считать „емкостью“ и в случае $q>1$. Мы увидим (в гл. X), что это не так: если учитывать физическое значение понятия емкости, то естественным обобщением емкости является нечто другое. Поэтому мы и дальше сохраним для $s(z)$ название „размах“.

9.21. Теорема Бибербаха о площадях. Для односвязных поверхностей R теорема о минимуме п. 9.17 может быть доказана, как показал Бибербах [1*], непосредственно путем элементарного подсчета. Именно, справедливо следующее предложение.

Пусть

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \qquad (a_1\neq 0)$$

— регулярная аналитическая функция в единичном круге $|z|<1$. Тогда для площади I поверхности-образа, измеренной в евклидовой метрике w-плоскости, имеем ($z=re^{i\varphi}$)

$$I=\iint\limits_{|z|<1}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 r\,dr\,d\varphi=\int\int\sum_{m,\,n}mna_n\bar{a}_mz^{n-1}\bar{z}^{m-1}\,r\,dr\,d\varphi=$$

$$=\pi\sum_n n\,|a_n|^2.$$

Следовательно,

$$I \geqslant \pi |a_1|^2,$$

и равенство здесь имеет место только для функции $w = e^{i\theta} a_1 z$, отображающей единичный круг $|z| < 1$ на круг $|w| < |a_1|$.

Но в настоящем случае это в точности утверждение теоремы о минимуме п. 9.17.

Аналогично, из так называемой второй теоремы Бибербаха о площадях [2] вытекает теорема о максимуме п. 9.18:

Если функция

$$w(z) = \frac{1}{z} + b_1 + b_2 z + \dots$$

однолистно отображает единичный круг на (содержащую точку $w = \infty$) область G, то для площади A дополнения к G имеет место соотношение

$$A = \pi(1 - \sum n |b_n|^2).$$

Следовательно, $A \leqslant \pi$, причем $A = \pi$ только для функции $w = e^{i\theta}/z$, отображающей единичный круг $|z| < 1$ на внешность единичного круга $|w| \leqslant 1$.

§ 4. ОТОБРАЖЕНИЯ ОТКРЫТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ПОДОБНЫХ ОДНОЛИСТНЫМ

9.22. Исчерпание открытой поверхности. Пусть теперь R — произвольная открытая поверхность, подобная однолистным. Отображение ее на область с параллельными разрезами получается путем исчерпания R монотонной последовательностью подобных однолистным поверхностей с краем (см. п. 9.4):

$$R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_n \subset \dots, \quad R_n \to R.$$

Для каждого n мы конформно отображаем поверхность R_n с помощью функций $w = F_n^1$ и $w = F_n^2$ на две области S_n^1, S_n^2 w-плоскости с разрезами, параллельными действительной, соответственно мнимой, оси. При этом отображения $R_n \to S_n^1$ и $R_n \to S_n^2$ можно считать нормированными так, что заданная точка $z = \zeta$ поверхности R переходит в точку $w = \infty$, и в ζ (по отношению к фиксированному параметру z) имеют место разложения:

$$F_n^1 = \frac{1}{z - \zeta} + [(z - \zeta)], \qquad F_n^2 = \frac{1}{z - \zeta} + [(z - \zeta)].$$

В дальнейшем исследовании снова важную роль играют обе линейные комбинации

$$\Phi_n = \frac{1}{2}(F_n^1 + F_n^2), \qquad \Psi_n = \frac{1}{2}(F_n^1 - F_n^2)$$

с их экстремальными свойствами, доказанными в пп. 9.17 и 9.18.

9.23. Размах поверхности R. Рассмотрим интеграл Дирихле коварианты $\psi_n = d\Psi_n/dz$:

$$\|\psi_n\|^2_{R_n} = \|\psi_n\|^2 = \iint\limits_{R_n} |\psi_n|^2\, dx\, dy = \pi s_n,$$

где $s_n > 0$ — размах R_n в точке $z = \zeta$.

Ковариант

$$\frac{s_n}{s_{n+1}}\,\psi_{n+1} = s_n(z-\zeta) + \ldots$$

удовлетворяет на R_n условиям теоремы о минимуме п. 9.17. Поэтому соответствующий интеграл Дирихле не меньше интеграла Дирихле от ψ_n:

$$\pi s_n = \|\psi_n\|^2 \leqslant \left(\frac{s_n}{s_{n+1}}\right)^2 \|\psi_{n+1}\|^2 = \pi\,\frac{s_n^2}{s_{n+1}},$$

следовательно,

$$s_n \geqslant s_{n+1}.$$

Размах s_n с возрастанием n монотонно убывает, следовательно, существует предел

$$s = \lim s_n = \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} \|\psi_n\|^2_{R_n}.$$

Это число $s\,(\geqslant 0)$ называется *размахом поверхности* R.

9.24. Сходимость последовательностей φ_n и ψ_n по норме. Для $m \leqslant n$ как $\varphi_n - \varphi_m$, так и $\psi_n - \psi_m$ — однозначные регулярные аналитические коварианты на R_m. Мы покажем, что последовательности φ_n и ψ_n сходятся „по норме“, т. е. выполняется критерий Коши в следующем виде:

Для всякого $\varepsilon > 0$ существует настолько большое n_0, что для интегралов Дирихле от $\varphi_n - \varphi_m$ и $\psi_n - \psi_m$ по R_m имеем

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{R_m} < \varepsilon, \qquad \|\psi_n - \psi_m\|_{R_m} < \varepsilon,$$

если $n \geqslant m \geqslant n_0$.

В самом деле, в силу (3.18),

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|^2_{R_m} = \iint\limits_{R_m} |\varphi_n - \varphi_m|^2\, dx\, dy =$$

$$= \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma_m} (\Phi_n d\bar{\Phi}_n + \Phi_m d\bar{\Phi}_m - \Phi_n d\bar{\Phi}_m - \Phi_m d\bar{\Phi}_n). \qquad (9.13)$$

Здесь

$$\frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma_m} \Phi_m d\bar{\Phi}_m = \frac{i}{2} \int\limits_{\Gamma_m} \Phi_m\, d\Psi_m = -\pi s_m,$$

далее,

$$\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_n\,d\bar{\Phi}_m=\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_n\,d\Psi_m=-\pi s_m.$$

Чтобы подсчитать интеграл $I=\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_m\,d\bar{\Phi}_n$, перейдем к комплексно сопряженным значениям:

$$\bar{I}=-\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\bar{\Phi}_m\,d\Phi_n=\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_n\,d\bar{\Phi}_m=\frac{i}{2}\int\Phi_n\,d\Psi_m=-\pi s_m.$$

Тем самым

$$\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_m\,d\bar{\Phi}_n=-\pi s_m.$$

Чтобы оценить первый интеграл справа в (9.13), заметим, что

$$\frac{i}{2}\int_{\Gamma_n}\Phi_n\,d\bar{\Phi}_n-\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_n\,d\bar{\Phi}_n=\iint\limits_{R_n-R_m}|\varphi_n|^2\,dx\,dy\geqslant 0,$$

так что

$$\frac{i}{2}\int_{\Gamma_m}\Phi_n\,d\bar{\Phi}_n\leqslant\frac{i}{2}\int_{\Gamma_n}\Phi_n\,d\bar{\Phi}_n=\frac{i}{2}\int_{\Gamma_n}\Phi_n\,d\Psi_n=-\pi s_n.$$

В итоге получаем неравенство

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2_{R_m}\leqslant-\pi s_m-\pi s_n+2\pi s_m=\pi(s_m-s_n).$$

Так как последовательность s_n сходится, то это неравенство выражает сходимость последовательности φ_n „по норме“, как это и утверждалось.

9.25. Обычная сходимость последовательностей φ_n и ψ_n. Для аналитических ковариант справедлива общая теорема о том, что сходимость по норме влечет за собой обычную сходимость:

Лемма. *Пусть $f_n(z)$ — последовательность однозначных аналитических ковариант на римановой поверхности R, сходящаяся по норме на каждой компактной подобласти R_0 поверхности R:*

$$\|f_n-f_m\|_{R_0}<\varepsilon\quad\text{для}\quad n,\ m>N_\varepsilon.$$

Тогда существует предел $f=\lim f_n$, причем сходимость равномерна на каждой компактной подобласти поверхности R и f — однозначная аналитическая ковариата на всей поверхности R.

Доказательство. Если $z=t$ — точка поверхности R и $|z-t|\leqslant r$ — отвечающий ей параметрический круг K, то для *каждой*

регулярной аналитической в K функции $w(z)$, для которой

$$W(z)=\int_t^z w(z)\,dz=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-t)^n,$$

имеет место *теорема Бибербаха о площадях* (см. п. 9.21):

$$\|w\|_K^2=\pi\sum_1^{\infty} n\,|a_n|^2r^{2n}\geqslant\pi\,|a_1|^2r^2=\pi\,|w(t)|^2r^2.$$

Чтобы вывести отсюда лемму, рассмотрим компактную подобласть R_0 поверхности R и покроем ее конечным числом параметрических кругов $K_1, \ldots, K_n$ ($K_\nu: |z_\nu|\leqslant 1$), так, что уже меньшие концентрические круги K'_ν ($|z_\nu|\leqslant 1-\delta$) ($\delta>0$) образуют покрытие R_0. Если P — произвольная точка R_0 и K'_ν — содержащий ее круг, причем точка P соответствует значению параметра $z=t$, то, по теореме Бибербаха, примененной к $\varphi_n=f_n-f_m$ в круге $K(|z-t|\leqslant\delta)$, имеем

$$|f_n(t)-f_m(t)|^2\leqslant\frac{1}{\pi\delta^2}\|f_n-f_m\|_K^2\leqslant\frac{1}{\pi\delta^2}\|f_n-f_m\|_{R_0}^2<\frac{\varepsilon^2}{\pi\delta^2}$$

для $n,\ m>N_\varepsilon$. Следовательно, по критерию Коши, последовательность f_n сходится равномерно на R_0 и предельная коварианта f регулярна и аналитична в каждой точке R. Этим лемма доказана.

9.26. Из леммы вытекает сходимость последовательностей φ_n и ψ_n:

$$\varphi_n\to\varphi,\quad \psi_n\to\psi;$$

φ и ψ определены на R как однозначные аналитические коварианты. Коварианта φ всюду регулярна, исключая полюс ζ, где она имеет такое же разложение, как коварианты φ_n:

$$\varphi(z)=-\frac{1}{(z-\zeta)^2}+\text{регулярная функция}.$$

Напротив, коварианта ψ регулярна всюду без исключения и в точке $z=\zeta$ имеет разложение

$$\psi(z)=s+[(z-\zeta)],$$

где s — размах поверхности R.

9.27. Покажем еще, что коварианта ψ имеет *конечный* интеграл Дирихле по R и что этот интеграл равен πs. Если R_m и R_n — две поверхности из последовательности, исчерпывающей R ($m<n$), то

$$\|\psi_n\|_{R_m}^2\leqslant\|\psi_n\|_{R_n}^2=\pi s_n,$$

откуда при $n \to \infty$ следует, что

$$\|\psi\|^2_{R_m} \leqslant \pi s.$$

Это неравенство справедливо для всех m, поэтому и

$$\|\psi\|^2_R \leqslant \pi s.$$

В частности, отсюда видно, что интеграл Дирихле от ψ по R конечен.

Чтобы показать, что в предыдущем соотношении должен стоять знак равенства, заметим, что ковариант $\frac{s_m}{s_n}\psi_n$ удовлетворяет условиям теоремы о минимуме п. 9.17, примененной к R_m. Поэтому

$$\|\psi_n\|^2_{R_m} \geqslant \pi \frac{s_n^2}{s_m},$$

откуда при $n \to \infty$ следует, что

$$\|\psi\|^2_{R_m} \geqslant \pi \frac{s^2}{s_m};$$

так как это имеет место для всех m, то, наконец,

$$\|\psi\|^2_R \geqslant \pi s.$$

Итак, действительно $\|\psi\|^2_R = \pi s$, что и требовалось доказать.

9.28. Предельные функции Φ и Ψ. Функции Φ_n и Ψ_n, имеющие производными соответственно φ_n и ψ_n, сходятся к аналитическим интегралам

$$\Phi(z) = \int \varphi(z)\,dz \quad \text{и} \quad \Psi(z) = \int \psi(z)\,dz.$$

В точке $z = \zeta$ имеют место разложения

$$\Phi = \frac{1}{z-\zeta} + \text{регулярная функция},$$

$$\Psi = s(z-\zeta) + \ldots.$$

9.29. Однолистность функции Φ. Докажем теперь, что функция Φ *однолистна* на R. Это вытекает из общей теоремы:

Пусть Φ_n — последовательность однолистных аналитических функций на римановой поверхности R, сходящаяся равномерно к предельной функции Φ на каждой компактной подобласти R. Пусть функции Φ_n имеют в точности один и тот же полюс $z = \zeta$ первого порядка. Тогда и Φ однолистна на R.

Прежде всего ясно, что Φ имеет один полюс $z = \zeta$ первого порядка и в остальном регулярна. Пусть, далее, a — произвольное

комплексное число; нужно показать, что $\Phi - a$ на R либо имеет один нуль, либо вовсе не имеет нулей.

Для этого предположим, что M — компактное подмножество R, содержащее полюс ζ. Пусть α^2 есть 2-цепь, состоящая из симплексов триангуляции R и покрывающая M. Не представляет ограничения общности предположение, что $\Phi - a \neq 0$ (тем самым и $\Phi_n - a \neq 0$ для достаточно больших n) на границе $\partial\alpha^2$, ибо, так как Φ отлична от постоянной, то $\Phi - a$ во всяком случае имеет только изолированные нули. Применим теперь к функции $\Phi_n - a$ и цепи α^2 принцип аргумента. Эта функция имеет на α^2 один и только один полюс $z = \zeta$. В силу однолистности Φ_n, число нулей $\Phi_n - a$ на α^2 равно либо 0, либо 1. Поэтому, по принципу аргумента,

$$\int_{\partial\alpha^2} \frac{\Phi_n' \, dz}{\Phi_n - a} = -2\pi i \quad \text{или} \quad 0,$$

откуда следует, так как Φ_n на α^2 сходится равномерно к Φ, что и

$$\int_{\partial\alpha^2} \frac{\Phi' \, dz}{\Phi - a} = -2\pi i \quad \text{или} \quad 0.$$

С другой стороны, принцип аргумента дает для числа n нулей $\Phi - a$ на α^2 соотношение

$$\int_{\partial\alpha^2} \frac{\Phi' \, dz}{\Phi - a} = 2\pi i \ (n - 1),$$

откуда вытекает, что либо $n = 0$, либо $n = 1$. Итак, функция $\Phi - a$ на α^2, тем самым и на M, либо имеет один нуль, либо ни одного, а так как M было произвольным подмножеством R, то это же справедливо и для всей поверхности R, что и требовалось доказать.

9.30. Отображение $w = \Phi(z)$. По предыдущему, функция $w = \Phi(z)$ производит взаимно однозначное и конформное отображение римановой поверхности R на подобласть G_w w-плоскости так, что заданной точке $z = \zeta$ на R соответствует (лежащая в G_w) точка $w = \infty$.

9.31. „Идеальная граница" Γ поверхности R. Область G_w, получаемая при выполнении отображения $w = \Phi$, дает частное топологическое и конформное представление поверхности R, удобное для исследования структуры R. „Идеальная граница" Γ поверхности R приобретает при этом отображении действительное представление в w-плоскости в виде границы Γ_w области G_w.

Если число q_n граничных контуров поверхности R_n равномерно ограничено, то существует конечный предел $q = \lim q_n$. (Целое)

число q называется *числом связности* (Zusammenhangszahl) поверхности R. В этом случае граница Γ_w области G_w состоит точно из q компонент, которые являются либо континуумами, либо точками.

Если же q не конечно, то $q = \lim q_n = \infty$; тогда поверхность R бесконечносвязна; граница Γ_w области G_w имеет бесконечно много компонент (континуумов или точек).

9.32. Отображения на области с параллельными разрезами. Предыдущие рассмотрения позволяют также построить отображение заданной поверхности R, подобной однолистным, на области с параллельными разрезами. Как мы видели, n-й поверхности R_n из последовательности, исчерпывающей R, отвечают две функции

$$F_n^1 = \frac{1}{z-\zeta} + [(z-\zeta)], \quad F_n^2 = \frac{1}{z-\zeta} + [(z-\zeta)],$$

отображающие R_n взаимно однозначно и конформно соответственно на области S_n^1, S_n^2 с параллельными разрезами, причем граница этих областей состоит из конечного числа отрезков, параллельных соответственно действительной и мнимой осям. Соответствующими экстремальными функциями являются

$$\Phi_n = \frac{1}{2}(F_n^1 + F_n^2), \quad \Psi_n = \frac{1}{2}(F_n^1 - F_n^2).$$

Согласно п. 9.28, они сходятся к предельным функциям Φ и Ψ; поэтому существуют предельные функции

$$F^1 = \lim_{n\to\infty} F_n^1 = \Phi + \Psi$$

и

$$F^2 = \lim_{n\to\infty} F_n^2 = \Phi - \Psi.$$

Единственной особенностью на R этих аналитических функций является полюс в точке $z = \zeta$; в нем они имеют разложения

$$F^1 = \frac{1}{z-\zeta} + a(z-\zeta) + \ldots, \quad F^2 = \frac{1}{z-\zeta} + b(z-\zeta) + \ldots;$$

половина разности между коэффициентами a и b равна размаху поверхности R в точке $z = \zeta$:

$$\frac{1}{2}(a-b) = s(\zeta).$$

Согласно теореме п. 9.29, функции F^1 и F^2 *однолистны* и, следовательно, отображают поверхность R взаимно однозначно и конформно на некоторые области S^1 и S^2 w-плоскости. Ниже мы эти области исследуем подробнее.

9.33. Области S^1 и S^2. Рассмотрим, например, функцию $F \equiv F^2$, отображающую поверхность R взаимно однозначно и конформно на область $S \equiv S^2$ w-плоскости, и покажем, что S — область с параллельными разрезами в следующем расширенном смысле:

Граница области S состоит из конечного или бесконечного числа отрезков, параллельных мнимой оси, и, возможно, конечного или бесконечного числа точечных компонент.

Следуя Кёбе и Куранту [2*], будем вести доказательство с помощью приведенной ниже леммы.

Лемма. *Пусть S — рассматриваемая область и $\lambda(w)$ — действительная или комплексная функция, непрерывная в S вместе со своими частными производными и тождественно равная нулю в окрестности $w = \infty$. Затем пусть интеграл Дирихле от λ по S имеет конечное значение ($w = u + iv$):*

$$\iint\limits_S (\lambda_u^2 + \lambda_v^2)\, du\, dv < \infty.$$

При этих условиях

$$\iint\limits_S \lambda_v\, du\, dv = 0.$$

Для доказательства предположим $\rho > 0$ настолько большим, что область $K(|w| \geqslant \rho)$ лежит целиком в S и что в ней $\lambda \equiv 0$. Пусть тогда S_0 — компактная подобласть S, такая, что для заданного $\varepsilon > 0$

$$\iint\limits_{S - S_0} (\lambda_u^2 + \lambda_v^2)\, du\, dv < \varepsilon.$$

Рассмотрим теперь последовательность поверхностей $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots$, $R_n \to R$, где R_n с помощью функции $w = F_n(z) \equiv F_n^2(z)$ отображается взаимно однозначно и конформно на подобласть S_n w-плоскости, ограниченную конечным числом разрезов β_n, параллельных мнимой оси. Тогда, начиная с некоторого $n = n_0$, область S_n содержит S_0.

Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольную точку $w = w_0$ области S_0. В прообразе R_0 области S_0 на R [относительно отображения $w = F(z)$] w_0 имеет одну и только одну точку-прообраз $z = z_0$ ($w_0 = F(z_0)$). Покроем R_0 цепью α так, чтобы точка z_0 лежала внутри некоторого симплекса цепи, и выберем $n \geqslant n_0$ настолько большим, что $|F - F_n| = |w - w_n| < m$ на $d\alpha$, где $m > 0$ — минимум $|w - w_0|$ на $d\alpha$. Тогда, используя тождество

$$w_n - w_0 = (w - w_0)\left(1 + \frac{w_n - w}{w - w_0}\right),$$

мы с помощью принципа аргумента, проводя известные рассуждения (теорема Руше, ср. п. 1.2), убеждаемся в том, что $w_n - w_0 = F_n - w_0$

имеет на α один и только один нуль, следовательно, и на R_n, как только $R_n \supset \alpha$. Этим теорема доказана для точки $w = w_0$; то, что при этом можно обойтись числом n_0, не зависящим от w_0, следует из компактности S_0.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\iint\limits_{S_n} \lambda_v \, du \, dv = \iint\limits_{S_0} \lambda_v \, du \, dv + \iint\limits_{S_n - S_0} \lambda_v \, du \, dv.$$

Так как S_n — область с разрезами, то, по формуле Грина (3.16),

$$\iint\limits_{S_n} \lambda_v \, du \, dv = -\int\limits_{\beta_n} \lambda \, du = 0,$$

следовательно,

$$\iint\limits_{S_0} \lambda_v \, du \, dv = -\iint\limits_{S_n - S_0} \lambda_v \, du \, dv$$

и, по неравенству Буняковского — Шварца,

$$\left| \iint\limits_{S_0} \lambda_v \, du \, dv \right|^2 \leqslant \iint\limits_{S_n - S_0} \lambda_v^2 \, du \, dv \cdot \iint\limits_{|w| \leqslant \rho} du \, dv < \pi \rho^2 \varepsilon \,^{1}).$$

Аналогичная оценка справедлива для $\iint\limits_{S - S_0}$, откуда

$$\iint\limits_{S} \lambda_v \, du \, dv = 0.$$

Теперь теорема, сформулированная на стр. 328, доказывается таким рассуждением (Курант [1*]). Предположив, что граница Γ_w области S содержит континуум γ, не совпадающий с отрезком, параллельным мнимой оси, возьмем на γ две точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2) так, что $u_1 < u_2$. Пусть ρ настолько велико, что область $|w| > \rho$ лежит в S, и пусть H — полуплоскость $v \geqslant \rho$. Будем теперь следовать вдоль каждой прямой $u = \alpha$, $u_1 \leqslant \alpha \leqslant u_2$, от $v = +\infty$ до первой точки встречи с γ. В $S - H$ получим тогда некоторые сегменты; пусть S' — множество точек, лежащих на этих сегментах, и S'' — квадрат $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$, $\rho \leqslant v \leqslant \rho + u_2 - u_1$. Построим на S функцию

$$\lambda = \begin{cases} (u - u_1)(u - u_2) & \text{на } S', \\ (u - u_1)(u - u_2)\left(1 - \dfrac{v - \rho}{u_2 - u_1}\right) & \text{на } S'', \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

---

1) При интегрировании по S_n функция λ преобразуется путем переноса на R и отображения $R_n \to S_n$. Предельным переходом при $n \to \infty$ получается требуемая ε-оценка для интеграла по S_0 от заданной функции. — *Прим. перев.*

Функция λ непрерывна на S и тождественно равна нулю в окрестности $w=\infty$. Ее первые частные производные ограничены и непрерывны, если исключить граничные отрезки $u=u_1$, $u=u_2$ S' и стороны S''. Поэтому, по лемме [1]),

$$\iint_S \lambda_v \, du \, dv = 0,$$

что невозможно, так как, очевидно, $\lambda_v \geqslant 0$ всюду в S и $\lambda_v > 0$ внутри S''.

Полученное противоречие показывает, что каждая граничная компонента области $S=S^2$, не являющаяся точкой, есть отрезок, параллельный мнимой оси.

Аналогично доказывается, что граница предельной области S^1 состоит из отрезков, параллельных действительной оси, и, возможно, еще точечных компонент.

9.34. Теорема Кёбе. Возможность конформного отображения самой общей поверхности, подобной однолистным, на плоскую область с разрезами была впервые доказана Кёбе. Ему же мы обязаны также следующей теоремой.

Теорема. *Граница Γ_w предельной области с разрезами S имеет плоскую меру нуль.*

Доказательство проводится с помощью леммы п. 9.33. Функцию $\lambda(w)$ (в области $S=S^2$) выбираем следующим образом. Пусть вся граница Γ_w области S лежит в круге $|w|<\rho$. Тогда полагаем $\lambda(w)=v$ в части S, лежащей в круге $|w|<\rho$, и затем продолжаем ее каким-нибудь образом на всю область S так, чтобы она была непрерывна вместе со своими производными и равнялась тождественно нулю в окрестности $w=\infty$. Тогда, по лемме,

$$\iint_S \lambda_v \, du \, dv = 0.$$

Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует область S_0, содержащая точку $w=\infty$ и лежащая вместе со своей границей Γ_0, которая состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров, внутри области S, такая, что

$$\left| \iint_{S-S_0} \lambda_v \, du \, dv \right| < \varepsilon$$

и $\lambda = v$ на Γ_0. Но тогда

$$\iint_{S-S_0} \lambda_v \, du \, dv = -\int_{\Gamma_0} v \, du,$$

[1]) Наличие разрывов первых производных на указанных исключительных отрезках не нарушает рассуждений, с помощью которых была доказана лемма этого пункта.

следовательно,

$$\left|\int_{\Gamma_0} v\,du\right| < \varepsilon.$$

Левая часть здесь равна площади дополнения области S_0. Тем самым граница Γ_w заключена в область с площадью $< \varepsilon$, откуда следует утверждение теоремы.

§ 5. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАЗМАХА

9.35. Для предыдущего исследования существенное значение имело то, что аппроксимирующие функции Φ_n и Ψ_n отличаются некоторыми свойствами минимальности и максимальности. Мы покажем в этом параграфе, что эти свойства можно перенести и на предельные функции Φ и Ψ. Эти свойства ведут к интересным теоретико-функциональным следствиям как для поверхностей с положительным размахом, так и для поверхностей с размахом, равным нулю.

9.36. Лемма. *Пусть на открытой римановой поверхности R задана коварианта f с конечным интегралом Дирихле*:

$$\|f\|_R < \infty.$$

Пусть R_n — бесконечная последовательность поверхностей, компактных на поверхности R и образующих ее исчерпание, и пусть f_n — коварианта, определенная на R_n и такая, что $f_n \to f$ равномерно в каждой компактной подобласти поверхности R.

Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение

$$\|f_n\|_{R_n} \to \|f\|_R, \tag{9.14}$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое число n_ε, при котором

$$\|f_n\|_{R_n - R_m} = \|f_n\|_{R_n} - \|f_n\|_{R_m} < \varepsilon \quad \text{для} \quad n > m > n_\varepsilon. \tag{9.15}$$

Условие необходимо. В самом деле, если (9.14) выполняется, то при $n \to \infty$ имеем $\|f_n\|_{R_n} - \|f_n\|_{R_m} \to \|f\|_R - \|f\|_{R_m}$, а это последнее выражение меньше ε для достаточно больших m.

Условие также достаточно. В самом деле, из (9.15) для $n > m > n_\varepsilon$ вытекает, что

$$\|f_n\|_{R_m} \leqslant \|f_n\|_{R_n} \leqslant \|f_n\|_{R_m} + \varepsilon.$$

Следовательно, границы неопределенности $\|f_n\|_{R_n}$ при $n \to \infty$ лежат между $\|f\|_{R_m}$ и $\|f\|_{R_m} + \varepsilon$, и так как m здесь сколь угодно велико, то и между $\|f\|_R$ и $\|f\|_R + \varepsilon$, откуда следует утверждение (9.14).

9.37. Теорема о минимуме для поверхностей с положительным размахом. В качестве обобщения теоремы п. 9.17 мы докажем следующую теорему:

Пусть R — поверхность с положительным размахом $s=s(\zeta)$ и $f\,dz$ — полный регулярный аналитический дифференциал на R с конечной нормой, имеющий в точке $z=\zeta$ (относительно определенного локального параметра z) значение $s\,dz$. Тогда

$$\|f\|^2 \geqslant \pi s(\zeta) \tag{9.16}$$

и минимум πs достигается только для коварианты ψ.

Для доказательства положим

$$h = f - \psi, \quad h_n = \frac{s_n}{s} f - \psi_n.$$

На основании п. 9.17 заключаем, что ковариантны h_n и ψ_n взаимно ортогональны:

$$(h_n, \psi_n) = \iint\limits_{R_n} h_n \bar{\psi}_n \, dx\, dy = 0,$$

и поэтому

$$\frac{s_n^2}{s^2} \|f\|^2_{R_n} = \|h_n\|^2_{R_n} + \|\psi_n\|^2_{R_n}.$$

Но $s_n \to s$ и, согласно п. 9.27,

$$\|\psi_n\|^2_{R_n} = \pi s_n \to \pi s = \|\psi\|^2_R.$$

Поэтому последовательность ψ_n должна удовлетворять условию (9.15) предыдущей леммы, и, по неравенству треугольника для $h_n = \frac{s_n}{s} f - \psi_n$, мы получаем

$$0 < \|h_n\|_{R_n} - \|h_n\|_{R_m} = \|h_n\|_{R_n - R_m} \leqslant \frac{s_n}{s} \|f\|_{R_n - R_m} + \|\psi_n\|_{R_n - R_m}.$$

Отсюда на основании той же леммы заключаем, что при $n \to \infty$

$$\|h_n\|_{R_n} \to \|h\|_R,$$

и, следовательно,

$$\|f\|^2_R = \|h\|^2_R + \|\psi\|^2_R.$$

Отсюда вытекает, во-первых, неравенство (9.16) и, во-вторых, то, что равенство там имеет место только для $h \equiv 0$, т. е. для $f \equiv \psi$, что и требовалось доказать.

9.38. Теорема о максимуме. Экстремальное свойство функций Φ_n, рассмотренное в п. 9.18, также может быть перенесено на предельную функцию:

Пусть на римановой поверхности R, подобной однолистным, задана однозначная аналитическая функция $F(z)$, регулярная на R всюду, за исключением точки $z=\zeta$, где она относительно некоторого локального параметра z обладает разложением

$$F(z)=\frac{1}{z-\zeta}+\text{регулярная функция}.$$

Если тогда R_n $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность, образующая исчерпание R, и Γ_n — граница поверхности R_n, компактной на R, то

$$\lim \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_n} F\,d\bar{F}\leqslant \pi s(\zeta)$$

и равенство имеет место только для функции $F=\Phi$.

Для доказательства положим $dF=f\,dz$, $h=f-\varphi$ и $h_n=f-\varphi_n$. Согласно п. 9.18, имеем

$$-\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma_n} F\,d\bar{F}=\pi s_n(\zeta)-\|h_n\|^2_{R_n}.$$

Так как $s_n\to s$ при $n\to\infty$, то все сводится к изучению асимптотического поведения последнего члена. Замечая, что $h_n=h+(\varphi-\varphi_n)$, находим из неравенства треугольника, что

$$\|h_n\|_{R_n}=\|h\|_{R_n}+<\|\varphi-\varphi_n\|_{R_n}>$$

Согласно п. 9.24,

$$\|\varphi_{n+p}-\varphi_n\|^2_{R_n}\leqslant \pi(s_n-s_{n+p}),$$

откуда при $p\to\infty$ следует, что

$$\|\varphi-\varphi_n\|^2_{R_n}\leqslant \pi(s_n-s)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\|h_n\|_{R_n}=\|h\|_R \quad (\leqslant\infty).$$

Тем самым

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma_n} F\,d\bar{F}=\pi s(\zeta)-\|h\|^2_R,$$

откуда следуют оба утверждения теоремы о максимуме.

9.39. В частности, если снова предположить, что функция $w=F(z)$ отображает поверхность R на подобласть B_w w-плоскости, то выражение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2i}\int F\,d\bar{F}$$

означает внешнюю меру дополнительного к B_w множества точек B'_w w-плоскости. Следовательно, среди всех допустимых функций F наибольшую площадь для этого дополнения дает функция $F = \Phi$.

Если поверхность R односвязна, то две последние экстремальные теоремы снова содержат указанные в п. 9.21 теоремы Бибербаха о площадях.

9.40. Поверхности с размахом, равным нулю. Из последнего результата следует, что для подобной однолистным поверхности R, размах которой $s(\zeta)$ в некоторой точке ζ *положителен*, существует конформно эквивалентная подобласть G w-плоскости, содержащая точку $w = \infty$, дополнение G' которой имеет положительную площадь I: действительно, такая область получается с помощью экстремальной функции $\Phi = \Phi(z, \zeta)$, так как тогда $I = \pi s(\zeta)$.

Если, напротив, $s(\zeta) = 0$ для *одной* заданной точки $z = \zeta$ поверхности R, то $I = 0$, причем не только для функции $\Phi = \Phi(z, \zeta)$, но, в силу теоремы о максимуме, и для каждой отображающей функции $w = F(z, \zeta)$ с нормировкой

$$F = \frac{1}{z - \zeta} + \dots \tag{9.17}$$

в точке $z = \zeta$.

Отсюда следует, что этим свойством обладает вообще *каждая* область G_w, конформно эквивалентная R и содержащая точку $w = \infty$: ее дополнение G'_w имеет площадь, равную нулю. В самом деле, если $w = F_0(z)$ — функция, осуществляющая отображение $R \to G_w$, и при этом отображении точка $z = \zeta$ переходит в точку $w = w_0$, то значение a производной dF_0/dz в точке $z = \zeta$ отлично от нуля и дробно-линейная функция

$$F = \frac{a}{F_0(z) - w_0}$$

от $w = F_0$ осуществляет отображение R на область G, так, что имеет место разложение (9.17). Следовательно, площадь дополнения G' равна нулю, и то же самое справедливо для дополнения G_w, которое получается из G' линейным преобразованием, ограниченным на G'.

9.41. Из предыдущего заключаем:

Если размах $s(\zeta)$ равен нулю для одной точки поверхности R, то он равен нулю для всех точек поверхности.

В самом деле, если бы было $s > 0$ для $z = z_0 \neq \zeta$, то экстремальная функция $w = \Phi(z, z_0)$ отображала бы R на область G w-плоскости, дополнение которой имело бы положительную площадь $(= \pi s(z_0))$, что, по предыдущему, при условии $s(\zeta) = 0$ невозможно.

9.42. Из предыдущего следует далее, что равенство нулю площади дополнения G' экстремальной области G (тем самым и *каждой*

области G, конформно эквивалентной R) необходимо и достаточно для равенства нулю размаха поверхности R. Для поверхности R с положительным размахом площадь дополнения G' для некоторых областей G положительна, а для некоторых — равна нулю: для экстремальной функции $w = \Phi$ имеет место первое, для отображений $w = F^1$, $w = F^2$ на области с разрезами — последнее, согласно п. 9.34.

В частности, отсюда следует, что подобласть G w-плоскости наверное имеет положительный размах, если ее граница Γ содержит *континуум* γ. В самом деле, с помощью квадратного корня область G можно перевести в область, имеющую внешние точки; для такой области дополнение имеет положительную площадь, следовательно, и размах должен быть положительным.

9.43. Второй критерий для равенства нулю размаха. Из теоремы о минимуме п. 9.37 следует

Теорема. *Для того, чтобы подобная однолистным поверхность R имела размах, равный нулю, необходимо и достаточно, чтобы на R не существовало отличной от $f \equiv 0$ однозначной аналитической коварианты с конечной нормой.*

То, что это условие достаточно, следует из того, что экстремальная функция $\psi(z, \zeta)$ имеет норму $\pi s(\zeta)$ (см. п. 9.27): следовательно, если уже ψ тождественно обращается в нуль, то $s = 0$.

Обратно, если $s = 0$, то каждая однозначная аналитическая коварианта $f(z)$ на R, не равная тождественно нулю, имеет на R бесконечную норму. В самом деле, если $z = \zeta$ — точка, в которой $f(\zeta) \neq 0$, то коварианта $s_n(\zeta) \cdot \frac{f(z)}{f(\zeta)}$ удовлетворяет на поверхности R_n из последовательности, исчерпывающей R, условиям теоремы о минимуме п. 9.37, поэтому

$$\|f\|^2_{R_n} \geqslant \pi \frac{|f(\zeta)|^2}{s_n(\zeta)},$$

откуда при $R_n \to R$ следует, ввиду $s_n \to s = 0$, что

$$\|f\|_R = \infty,$$

что и требовалось доказать.

9.44. Однозначная определенность отображений поверхностей, подобных однолистным. Последние результаты позволяют сделать интересное заключение о совокупности всех отображений заданной римановой поверхности, подобной однолистным. Такое отображение, очевидно, определено с точностью до взаимно однозначного конформного отображения частной конформно эквивалентной области G w-плоскости. Подобное отображение во всяком случае осуществляется при конформном отображении w-плоскости на себя, следовательно, при линейном преобразовании. Важным дополнением к этому служит следующая

Теорема единственности. *Для того, чтобы конформное отображение поверхности, подобной однолистным, на подобласть G плоскости было определено с точностью до линейного преобразования этой плоскости, необходимо и достаточно, чтобы размах поверхности был равен нулю.*

Доказательство. В предположении, что размах $s = 0$, пусть $w = w_1(z)$ и $w = w_2(z)$—два произвольных отображения рассматриваемого вида поверхности R и G_1, G_2 — области-образы. Пусть $z = \zeta$ — произвольная точка поверхности; если $w_1(\zeta)$ и $w_2(\zeta)$ конечны, то мы выполняем вспомогательные преобразования

$$w_\nu^* = \frac{w_\nu'(\zeta)}{w_\nu - w_\nu(\zeta)} \qquad (\nu = 1,\ 2).$$

Тогда будем иметь взаимно однозначное и конформное отображение поверхности R на область G_1^*, соответственно G_2^*, такое, что точка $z = \zeta$ переходит в точку $w = \infty$ и вычет отображающей функции в этой точке равен 1. Удалим теперь из R параметрическую окрестность K точки ζ. Тогда оставшейся части $R - K$ соответствуют в w-плоскости две области, расположенные в некотором конечном круге $|w| < \rho$. Разность $w = w_1^* - w_2^*$ на R регулярна, и ее дифференциал $dw = f\,dz$ имеет конечную норму:

$$\|f\|_R = \|f\|_{R-K} + \|f\|_K \leqslant \left\|\frac{dw_1^*}{dz}\right\|_{R-K} + \left\|\frac{dw_2^*}{dz}\right\|_{R-K} + \|f\|_K \leqslant 2\rho\sqrt{\pi} + \|f\|_K$$

Поэтому из теоремы п. 9.43 следует, что $f \equiv 0$. Следовательно, разность $w_1^* - w_2^*$ имеет постоянное значение и w_1, w_2 являются линейными функциями друг от друга.

В частности, из предыдущей теоремы следует, что для поверхности R с размахом, равным нулю, оба отображения $w = F^1$ и $w = F^2$ на области с параллельными разрезами тождественны; оба они совпадают с экстремальным отображением $w = \Phi$ ($\Psi \equiv 0$) [1]).

9.45. Напротив, для поверхности R с положительным размахом имеются различные взаимно однозначные ее отображения $w = F$, которые не получаются друг из друга линейным преобразованием w-плоскости. Такими двумя отображениями являются отображения $w = F^1$ и $w = F^2$ на области с разрезами, разность которых $2\Psi = F^1 - F^2$ в настоящем случае *не есть постоянная*.

---

[1]) Заметим, что в этом случае соответствующие области G_1 и G_2 фактически никаких разрезов не имеют, в противном случае $s \neq 0$ (см. конец п. 9.42). Однако обратное, вообще говоря, неверно, т. е. эти области могут не иметь разрезов и при $s \neq 0$.— *Прим. перев.*

9.46. Устранимость особенностей. Классический вопрос („проблема Пенлеве") о природе особенностей аналитической или гармонической функции можно в общем виде сформулировать следующим образом.

Пусть в некоторой подобласти римановой поверхности (в частности, числовой плоскости) задана аналитическая или гармоническая функция, регулярная всюду, исключая некоторое множество точек M, и ограниченная некоторыми условиями однозначности и возрастания. Нужно узнать, когда эти требования регулярности и размеры множества M действуют настолько ограничивающим образом, что функция может быть продолжена на исключительное множество M как регулярная аналитическая или гармоническая функция.

Размер множества M определяется при этом в некотором подходящим образом выбранном мероопределении. В качестве ограничений на функции прежде всего встречаются ограничения на абсолютное значение или на значения некоторых интегральных средних.

9.47. Предыдущие результаты позволяют сделать интересное заключение в направлении этой общей постановки вопроса. Мы докажем следующую теорему:

Теорема[1]). *Пусть G — область z-плоскости и M — компактное множество точек в G, дополнение которого M' относительно z-плоскости имеет размах, равный нулю. Пусть, далее, функция $F(z)=\int f(z)\,dz$ однозначна и аналитична в $G-M$, и пусть норма $\|f\|_{G-M}$ конечна. Тогда $F(z)$ продолжаема на всю область G как регулярная аналитическая функция.*

Действительно, пусть A и B — две 2-цепи триангуляции G, такие, что $A \supset B \supset M$ и ∂B не пересекается с M. Тогда из интегралов

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial A}\frac{F(t)\,dt}{t-z},\quad F_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial B}\frac{F(t)\,dt}{t-z}$$

первый представляет регулярную аналитическую функцию вне ∂A, а второй — вне ∂B. В области $A-B$, по теореме Коши, имеем: $F=F_1-F_2$. Так как F в $G-M$ и F_1 в B имеют конечную норму, то это же справедливо и для разности $F-F_1$ в области $B-M$. С другой стороны, F_2 представляет аналитическое продолжение F_1-F на всю область B, регулярное там всюду, включая границу ∂B. Следовательно, продолженная таким образом функция F_1-F регулярна на всем дополнении M' множества M и имеет там конечную норму. Тогда, по теореме п. 9.43, функция $F-F_1$ есть постоянная и, следовательно, $F=F_1+\text{const}$ — регулярная аналитическая функция на M.

[1]) Сарио [1].

9.48. Обратно, справедлива теорема: для каждого компактного множества M точек плоскости, дополнение M' которого имеет положительный размах s, существует однозначная аналитическая функция, которая на M' регулярна и имеет конечную норму, но не продолжаема на все множество M как регулярная функция. Чтобы в этом убедиться, возьмем внутреннюю точку дополнения M' [1]) и построим для M' экстремальную функцию $\Psi(z, \zeta)$. Она регулярна на M', имеет конечную норму πs и не может быть регулярной всюду на M, ибо в противном случае она была бы постоянной, как функция, регулярная в замкнутой z-плоскости.

§ 6. ДРУГИЕ НОРМИРОВАННЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ РАЗМАХОМ НА ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ

9.49. Для случая, когда размах поверхности R, подобной однолистным, равен нулю, теорема единственности п. 9.44 решает проблему нахождения всех взаимно однозначных отображений R на подобласть числовой плоскости.

Для поверхностей R с положительным размахом имеем более обширную совокупность конформно эквивалентных областей-образов G_w w-плоскости. Среди них мы выделили некоторые частные области, прежде всего область G, характеризуемую, согласно определению п. 9.38, тем, что ее дополнение имеет максимальную площадь (при заданном вычете отображающей функции в точке $z = \zeta$). В настоящем случае, когда $s > 0$, имеется, однако, бесконечное множество других нормировок области-образа, которые не получаются друг из друга конформным отображением всей w-сферы на себя. Мы здесь рассмотрим некоторые из них, определяемые различными добавочными условиями.

9.50. Отображения на области с разрезами. Проблема отображения поверхности, подобной однолистным, *на области с разрезами* может быть решена методами, близкими к изложенным, и при другом выборе граничных разрезов области G_w, чем у рассмотренных выше областей S^1 и S^2, где они проводились по параллельным отрезкам. Легко доступными изучению являются, например, две следующие нормировки:

А. Область G_w содержит точки $w = 0$ и $w = \infty$, и граничные разрезы производятся по дугам некоторых окружностей $|w| = \text{const}$. Отображающую функцию можно построить с помощью простой модификации метода § 2, как это будет коротко показано в следующем пункте.

---

[1]) Если M' не есть связное множество, то рассматриваем любую связную его часть.

В. Область G_w содержит точки $w=0$ и $w=\infty$, и граничные разрезы производятся по отрезкам некоторых лучей $\arg w = \text{const}$.

Сначала мы рассмотрим случай подобной однолистным поверхности R с краем, состоящим из q кусочно-аналитических граничных контуров Γ_ν.

Предполагая, что функция $w = F(z; \zeta_1, \zeta_2)$ отображает R взаимно однозначно и конформно на область G_w типа A, так, что точки ζ_1 и ζ_2 переходят соответственно в $w=0$ и $w=\infty$, построим потенциал

$$\ln|F| = u(z; \zeta_1, \zeta_2).$$

Он однозначен и регулярно гармоничен на R, исключая точки ζ_1 и ζ_2, в которых имеет место разложение ($\nu = 1, 2$)

$$u \doteq (-1)^\nu \ln \frac{1}{|z-\zeta_\nu|} + \text{гармоническая функция}.$$

Если u_0 — потенциал, имеющий те же особенности и обращающийся в нуль на контурах Γ_ν, то разность $u - u_0$ на R однозначна и регулярна всюду без исключений. На контурах Γ_ν она имеет постоянные значения a_ν, откуда, как в п. 9.7, следует, что

$$u = u_0 + \sum_{\nu=1}^{q} a_\nu \omega_\nu,$$

где ω_ν — гармоническая мера Γ_ν относительно R. Так как функция F, по предположению, однозначна, то периоды сопряженной к u функции u' должны быть кратными 2π.

Мы видим, что интеграл u имеет в точности те же свойства, что и потенциал, рассмотренный в § 2, с тем единственным различием, что сингулярная часть u_0 теперь есть потенциал *третьего* рода, а не второго. Потенциал u_0 может быть построен и при настоящих условиях, именно, аналогично тому, как это было сделано в § 2. Также и доказательство однозначности функции $F = e^{u+iu'}$ непосредственно переносится на этот случай, и однолистность снова получается с помощью принципа аргумента. Немногие изменения доказательства § 2, которые здесь нужны, не вызывают затруднений, и подробности мы можем предоставить читателю.

Аналогичным образом удается решить проблему отображения при нормировке В областей-образов G_w. Если F — искомая отображающая функция, то нужно только вместо $u = \ln|F|$ рассмотреть потенциал $v = \arg F$; при нормировке В он имеет постоянные значения на контурах Γ_ν. В качестве сингулярной части получается потенциал v_0, многозначный в полюсах ζ_ν ($\nu = 1, 2$) как $(-1)^\nu \arg(z-\zeta_\nu)$. Построение v и тем самым F выполняется дальше аналогично тому, как это было сделано в случае А.

9.51. Связь с отображением на область с параллельными разрезами. Сходство между проблемой отображения на области с параллельными разрезами и только что рассмотренными отображениями на области с разрезами указывает на существование аналитической связи между обоими этими типами отображающих функций. И действительно, между ними существует простое соотношение. Наиболее легко это понять, продолжая заданную поверхность R с краем через ее граничные контуры (в смысле § 2 гл. VIII), так, что получается объемлющая *замкнутая* поверхность. Особенно простым представляется рассмотренное в п. 8.10 „продолжение Шоттки", при котором R дополняется поверхностью R^*, зеркально симметричной относительно граничных контуров.

Аналитическое продолжение сингулярной части u_0 (соответственно v_0) и гармонической меры, используемых для построения отображения, осуществляется с помощью принципа симметрии. Принимая во внимание устройство полюса и сингулярной части на замкнутой поверхности $R+R^*$, мы видим, что в случае областей с параллельными разрезами продолженная функция F является интегралом второго рода с двумя простыми полюсами (в $z=\zeta$ и $z=\zeta^*$), в то время как в случае нормировок A и B для отображающей функции F функция $\ln|F|$ является абелевым интегралом третьего рода с четырьмя полюсами (ζ_1, ζ_2, ζ_1^*, ζ_2^*).

Но между нормальными абелевыми интегралами второго и третьего рода существуют некоторые простые аналитические соотношения, частично указанные в гл. V. Они переносятся на оба вида построенных выше отображающих интегралов. На этом пути нетрудно было бы выразить эту связь посредством формул. Впрочем, эти формулы, позволяющие перейти от одной задачи об отображении к другой, можно вывести и непосредственно (не прибегая к продолжению и к теории замкнутых поверхностей) (см. Шиффер, „Дополнение", в книге Куранта [2*]).

9.52. Открытые поверхности. Предельным переходом получаем решения проблем A и B для случая произвольной поверхности, подобной однолистным. Этот предельный переход можно провести либо с помощью результатов § 4, опираясь на указанное выше отношение к проблеме отображения на область с параллельными разрезами, либо вполне аналогично выкладкам настоящего параграфа. Теоремам о минимуме и максимуме пп. 9.17 и 9.18 соответствуют некоторые экстремальные свойства рассмотренных функций типа A и B. К этому вопросу относится работа Гарабедяна и Шиффера [1], где эти теоремы существования выведены для конечносвязных поверхностей, подобных однолистным.

9.53. Поверхности с размахом, равным нулю. Из теоремы единственности п. 9.44 следует, что взаимно однозначное и конформное

отображение подобной однолистным поверхности с размахом, равным нулю, определено с точностью до конформного отображения w-сферы на себя, т. е. с точностью до линейного преобразования. В этом случае нормировка посредством разрезов области-образа вообще не играет никакой роли: все рассмотренные отображения тождественны, коль скоро указаны три точки поверхности и их образы. В качестве образа идеальной границы поверхности получается всюду разрывное множество точек плоской меры нуль.

9.54. Круговая нормировка Кёбе. В своих основоположных исследованиях по теории конформных отображений Кёбе [4] ввел в рассмотрение еще другую нормировку отображения поверхности, подобной однолистным, естественную с точки зрения теоремы Римана об отображении: областью-образом поверхности должна быть круговая область, т. е. область, ограниченная одними лишь *окружностями*.

Сначала мы исследуем эту проблему для случая поверхности R с краем. Следуя Кёбе [1], предположим, что круговая нормировка выполнима, и обозначим через G_w область-образ. Отображая G_w зеркально относительно каждой граничной ее окружности, получим новую область, также ограниченную окружностями. Продолжая это отображение дальше, получим в качестве объединения всех образов G_w некоторую область G_w^∞. Для $q=1$ область G_w^∞ есть w-сфера, для $q=2$ — числовая плоскость с выколотой точкой [1]); для $q=3$ область G_w^∞ бесконечносвязна.

С другой стороны, независимо от возможности круговой нормировки, можно, исходя из R, построить риманову поверхность, конформно эквивалентную области G_w^∞. Для этого отображаем сначала R на некоторую область с параллельными разрезами z-плоскости. Построив, подобно предыдущему, зеркальные отображения этой области S_z относительно ее граничных сторон, получим некоторую поверхность S_z^∞, симметричную относительно каждого граничного разреза.

Согласно § 4, область S_z^∞ можно отобразить взаимно однозначно и конформно в w-плоскость. Пусть S_w^∞ — область-образ. При этом граничные разрезы переходят в некоторые жордановы кривые Γ_w, ограничивающие образы отдельных листов поверхности S_z^∞.

Если бы удалось показать, что кривые Γ_w — окружности, то предыдущим отображением была бы достигнута круговая нормировка. Но это действительно так, как видно из следующих соображений.

Возьмем на S_z^∞ две точки P_z и P_z^*, симметричные относительно (произвольно фиксированного) граничного разреза Γ_z, и обозначим через P_w, соответственно P_w^*, их образы в S_w^∞. Тогда соответствие

[1]) Или, что эквивалентно, числовая сфера с двумя выколотыми точками. — *Прим. перев.*

$P_w \to P_w^*$ есть конформное отображение второго рода области S_w^∞ на себя.

С другой стороны, возьмем на образе Γ_w кривой Γ_z три произвольные точки P_w^ν ($\nu = 1, 2, 3$) и проведем через них окружность K_w. Далее, каждой точке P_w области S_w^∞ поставим в соответствие точку $\tilde{P}_w$, симметричную к ней относительно K_w. Соответствие $P_w \to \tilde{P}_w$ есть взаимно однозначное конформное отображение второго рода области S_w^∞ на себя. Поэтому отображение $P_w^* \to P_w \to \tilde{P}_w$ — взаимно однозначное конформное соответствие 1-го рода между P_w^* и $\tilde{P}_w$.

Если теперь размах поверхности S_z^∞ (тем самым и области S_w^∞) равен нулю, то, согласно п. 9.44, это отображение есть линейное преобразование; оно должно сводиться к тождеству, так как имеет три неподвижные точки P_w^1, P_w^2, P_w^3.

Таким образом, круговая нормировка построена в предположении, что размах области S_w^∞ равен нулю. Но это легко может быть доказано по методу Куранта [1*]. Утверждение о размахе области S_w^∞ может быть также выведено из одной общей теоремы (Сарио [1]), которая будет доказана в гл. X (см. п. 10.108) [1]).

§ 7. ПРИЛОЖЕНИЯ К УНИФОРМИЗАЦИИ

9.55. Поверхности наложения, подобные однолистным. Согласно § 4 гл. VIII, общая задача униформизации может быть сформулирована следующим образом: между двумя римановыми поверхностями R и R' задано многозначное соотношение со свойствами A, B и C п. 8.36. Требуется представить это соотношение в параметрическом виде, причем с параметром, являющимся переменной точкой римановой поверхности $\tilde{R}$. В п. 8.44 была построена поверхность $\tilde{R}$, дающая слабейшую униформизацию, т. е. такая униформизирующая поверхность, для которой каждая другая униформизирующая поверхность является (разветвленной или неразветвленной) поверхностью наложения. Если, в частности, взять универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности $\tilde{R}$, то $\hat{R}$, по теореме Римана об отображении, конформно эквивалентна подобласти числовой сферы (возможно, и всей сфере) и униформизация осуществляется с помощью комплексной переменной t. Рассмотренные в этой главе общие теоремы об отображении позволяют использовать вместо $\hat{R}$ любую *подобную однолистным* поверхность наложения $\tilde{R}_1$ поверхности $\tilde{R}$ для получения униформизации с помощью комплексной переменной.

---

[1]) Относительно обобщения принципа круговой нормировки ср. Сарио [1] и Штребель [1].

9.56. Группа преобразований наложения. Чтобы выполнить униформизацию с помощью такой поверхности наложения, рассмотрим сначала произвольную риманову поверхность R и поверхность наложения $\tilde{R}$ *подобную однолистным*. Согласно § 4 гл. IX, поверхность $\tilde{R}$ конформно эквивалентна подобласти G_t t-плоскости, поэтому не представляет ограничения общности предположение, что поверхность $\tilde{R}$ сама есть такая область G_t. Группа преобразований наложения (T) области G_t (как поверхности $\tilde{R}$) есть дискретная в G_t группа конформных ее отображений на себя.

Возникает вопрос, можно ли область G_t нормировать так, чтобы эти отображения были *линейными* преобразованиями. Согласно п. 9.44, это наверное можно сделать, если *размах* $\tilde{R}$ *равен нулю*.

9.57. Пример. Поясним предыдущие выводы простым примером. Если за R взять тор, то фундаментальная группа (T) поверхности R будет иметь две образующие T_1 и T_2. Универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ конформно эквивалентна плоскости $t \neq \infty$. Подгруппе, порождаемой одним фундаментальным преобразованием, скажем T_1, соответствует подобная однолистным поверхность наложения $\tilde{R}$, а именно, та поверхность, которая получается из $\hat{R}$ отождествлением точек, эквивалентных относительно T_1; поверхность $\tilde{R}$ конформно эквивалентна области $0 < |z| < \infty$, и тем самым она подобна однолистным. Размах поверхности $\tilde{R}$ равен нулю, и соответственно этому преобразования наложения являются *линейными* преобразованиями. Образующее преобразование группы (T_1) — гиперболическое, с неподвижными точками $z = 0$ и $z = \infty$.

9.58. Замкнутые поверхности. Пусть теперь R — произвольная замкнутая поверхность рода $p \geqslant 1$. Фундаментальная группа поверхности R при $p > 1$ не является абелевой, и имеется большее число возможностей для построения подгрупп, являющихся фундаментальными группами поверхностей наложения, подобных однолистным. Наиболее простой метод состоит в том, что в нормальном многоугольнике π поверхности R, следовательно, в многоугольнике с соответствием сторон

$$a_1 b_1 a_1' b_1' \ldots a_p b_p a_p' b_p',$$

отождествляются только стороны b_ν, b_ν' $(\nu = 1, \ldots, p)$. Тогда получается поверхность R_0 рода нуль с $2p$ граничными контурами; склеи-

вая бесконечно много таких „листов“ R_0 вдоль их контуров [1]), получаем подобную однолистным поверхность наложения $\tilde{R}$ поверхности R.

Конформный образ $\tilde{R}$ в t-плоскости есть бесконечносвязная область G_t.

Можно показать, что размах поверхности G_t равен нулю; следовательно, ее преобразования наложения являются линейными преобразованиями. Отсюда следует, что кривые a_ν можно выбрать так, чтобы им в t-плоскости соответствовали окружности. В самом деле, если эти образы A_ν, соответственно A'_ν, еще не являются окружностями, то можно сначала деформировать в окружности кривые A_ν, и тогда, в силу линейности отображений, их образы A'_ν также будут окружностями. Точное построение мы здесь приводить не будем.

Другая возможность нахождения подобных однолистным поверхностей наложения заданной замкнутой римановой поверхности R состоит в том, что в нормальном многоугольнике отождествляются только некоторые стороны b_ν и затем склеивается бесконечно много таких листов. Все получаемые таким образом поверхности $\tilde{R}$ имеют размах, равный нулю, и поэтому — линейные преобразования наложения. Что касается деталей этих построений, то мы отсылаем читателя к Куранту [2*] и Сарио [1].

9.59. Связь с униформизацией с предельным кругом. Пусть $\tilde{R}$ — подобная однолистным поверхность наложения R и $\hat{R}$ — универсальная поверхность наложения R (и $\tilde{R}$). Группа преобразований наложения $(\tilde{T})$ поверхности $\hat{R}$ относительно $\tilde{R}$ есть подгруппа группы преобразований наложения (T) поверхности $\hat{R}$ относительно R. Связь между этими группами становится особенно наглядной, если с помощью универсальной поверхности наложения $\hat{R}$ выполнить отображение с предельным кругом $\hat{R} \to E$. В самом деле, тогда основная поверхность R получается из E отождествлением точек, эквивалентных относительно группы (T), поверхность же $\tilde{R}$ получается из E отождествлением только тех точек, которые эквивалентны относительно подгруппы $(\tilde{T})$. В частности, поверхность $\tilde{R}$ может быть при этом представлена в виде соединения некоторых (в общем случае бесконечно многих) фундаментальных многоугольников группы (T). Для этого заметим, что два преобразования T_1 и T_2 принадлежат одному и тому же классу смежности подгруппы $(\tilde{T})$, когда $T_1 T_2^{-1}$ принадлежит $(\tilde{T})$. Пусть теперь π — фундаментальная область группы (T). Если тогда из каждого

[1]) Сначала к контурам одного R_0 (нулевое поколение) приклеиваем по экземпляру R_0 (первое поколение), затем к свободным краям первого поколения приклеиваем по новому экземпляру R_0 (второе поколение) и т. д. — *Прим. перев.*

класса смежности выбрать преобразование T_ν, то $\pi + \sum_\nu T_\nu(\pi)$ — фундаментальная область группы $(\tilde{T})$.

9.60. Униформизация. Предыдущие рассмотрения указывают на многочисленные возможности униформизировать алгебраическую функцию. Слабейшая поверхность наложения $\tilde{R}$ в этом случае замкнута, и, согласно п. 9.58, если род не меньше единицы, то, кроме универсальной поверхности наложения $\hat{R}$, имеются еще другие *многосвязные* подобласти G_t числовой сферы, дающие униформизацию. Заданное многозначное алгебраическое соотношение $F(z, w) = 0$ получает тогда параметрическое представление

$$z = z(t), \quad w = w(t),$$

где t изменяется в области G_t. Функции $z(t)$ и $w(t)$ в области G_t однозначны и, с точностью до полюсов, регулярно аналитичны; в точках G_t, эквивалентных относительно группы преобразований наложения (S), они принимают одинаковые значения. Так как преобразования S линейны, то $z(t)$ и $w(t)$ — автоморфные функции от t.

Тот же метод ведет к униформизации произвольного аналитического образа. Каждой подобной однолистным поверхности $\tilde{R}$ соответствуют, в силу отображения $\tilde{R} \to G_t$, униформизирующая переменная t и параметрическое представление

$$z = z(t), \quad w = w(t)$$

заданного аналитического образа. Функции $z(t)$ и $w(t)$ в G_t мероморфны, но не автоморфны (в классическом смысле). Последнее имеет место только тогда, когда преобразования наложения S области G_t являются линейными преобразованиями. Для этого достаточно, как мы видели, чтобы размах поверхности $\tilde{R}$ был равен нулю.

Глава X

ОТКРЫТЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. СТРОЕНИЕ ОТКРЫТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

10.1. Максимальное свойство рода поверхности с краем. В этой главе, последней в книге, исследуются произвольные, вообще говоря, не подобные однолистным, римановы поверхности. Первая наша задача состоит в том, чтобы дать общее определение *рода* такой поверхности.

Для этого рассмотрим сначала поверхность *с краем* R, являющуюся компактной частью произвольной заданной поверхности. Для R мы имеем нормальное представление п. 7.31; входящее в него число $p \geqslant 0$ было названо родом поверхности. Мы теперь покажем, что род p обладает следующим характерным свойством.

Рассмотрим на (произвольным образом) триангулированной поверхности R систему из q замкнутых симплициальных путей $w_1, \ldots, w_q$ (без общих сторон), не имеющих двойных точек, не пересекающихся с граничными контурами и таких, что цикл $w_1 + \ldots + w_q$ не разбивает поверхность R. Тогда удвоенный род $2p$ равен наибольшему числу q с этим свойством.

10.2. Чтобы в этом убедиться, нам потребуется следующая

Лемма. *Симплициальный путь, не имеющий двойных точек и не лежащий целиком на крае поверхности R, разбивает R тогда и только тогда, когда он гомологичен линейной комбинации граничных контуров.*

В одну сторону предыдущее утверждение верно даже для произвольного отличного от нуля 1-цикла, поэтому будем его доказывать в этой более общей форме [1]).

Доказательство. Пусть z есть 1-цикл триангуляции, не лежащий целиком на крае, но гомологичный линейной комбинации граничных контуров; покажем, что z разбивает поверхность R.

По предположению, существует 2-цепь α^2, такая, что (см. п. 7.31)

$$d\alpha^2 = z - \sum \lambda_\nu c_\nu,$$

---

[1]) Обращение справедливо только для замкнутых *путей*, не имеющих двойных точек. Например, поверхность тора разбивается тремя меридианами, не имеющими двойных точек, но образуемый ими цикл не гомологичен нулю.

и здесь правая часть отлична от нуля, следовательно, цепь α^2 не нулевая и не состоит из всех симплексов. Поэтому как из α^2, так и из дополнительной 2-цепи можно выбрать по 2-симплексу. Два таких симплекса нельзя так соединить цепочкой попеременно друг с другом инцидентных 1- и 2-симплексов, чтобы один раз 1-симплекс не принадлежал циклу z. В самом деле, на такой цепочке имеется последний симплекс σ^2, принадлежащий α^2, и следующий за ним 1-симплекс σ^1 принадлежит поэтому $\partial\alpha^2$. С другой стороны, σ^1 не может лежать на крае R, в противном случае следующий за ним 2-симплекс снова был бы σ^2, поэтому принадлежал бы еще α^2. Следовательно, σ^1 принадлежит циклу z, тем самым последний разбивает R, что и требовалось доказать.

Обращение справедливо, как замечено выше, только для *путей без двойных точек*.

Замкнутый симплициальный путь w, не имеющий двойных точек и разбивающий поверхность R, гомологичен линейной комбинации граничных контуров.

Для доказательства заметим сначала, что путь w разбивает поверхность в точности на две части. Зафиксируем одну такую часть и образуем цепь лежащих на ней (когерентно ориентированных) 2-симплексов. Граница этой цепи состоит из пути w и, возможно, еще из некоторых граничных контуров поверхности R. Следовательно, путь w гомологичен сумме этих контуров.

Этим лемма доказана полностью.

10.3. Теперь мы можем привести доказательство утверждения п. 10.1 о свойстве максимальности рода p поверхности с краем R.

Во-первых, на R во всяком случае имеется $2p$ замкнутых симплициальных путей без двойных точек, которые вместе не разбивают поверхность, а именно, канонические сечения a_ν, b_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) нормального представления п. 7.31. Во-вторых, R обязательно разбивается более чем $2p$ такими путями. Действительно, если $w_1, \ldots, w_q$ ($q > 2p$) — такая система, то на R существует 2-цепь α^2, такая, что

$$\sum_\rho \mu_\rho w_\rho - \sum_\nu \lambda_\nu c_\nu = \partial\alpha^2.$$

Здесь слева никакие две 1-цепи не имеют общей стороны, и мы заключаем, что коэффициенты μ_ρ и λ_ν (среди которых заведомо есть отличные от нуля) все совпадают: $\mu_\rho = \lambda_\nu = \lambda \neq 0$. Следовательно, цепь α^2 имеет форму $\lambda\beta^2$. Отсюда, далее, следует, что сумма $\sum w_\rho$ гомологична сумме $\sum \lambda_\nu$, и из леммы вытекает, что цикл $w_1 + \ldots + w_q$ разбивает поверхность [1]).

[1]) Гомологическая зависимость системы $\{w_\rho, c_\nu\}$ следует из рассмотрений п. 5.25; при этом не все μ_ρ равны нулю. Тогда из свойств $\{w_\rho\}$ следует, что α^2 — ни нулевая цепь, ни цепь, состоящая из всех 2-симплексов. Дальше

Из доказанного таким образом максимального свойства рода поверхности с краем заключаем:

Если поверхность R составляет часть поверхности с краем R', то для соответствующих родов p и p' справедливо неравенство

$$p \leqslant p'.$$

В самом деле, на R существует такая система кривых $w_1, \ldots, w_{2p}$, что цикл $w_1 + \ldots + w_{2p}$ не разбивает эту поверхность, поэтому и $R' (\supset R)$ также не разбивается, следовательно, необходимо $p' \geqslant p$.

10.4. Род открытой поверхности. Род произвольной некомпактной поверхности R можно теперь определить следующим образом.

Строим исчерпание R последовательностью принадлежащих ей компактных поверхностей с краем

$$R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots, \quad R_n \to R.$$

Последовательность соответствующих родов p_n, по предыдущему, монотонно возрастает, следовательно, существует предел

$$p = \lim_{n \to \infty} p_n \leqslant \infty.$$

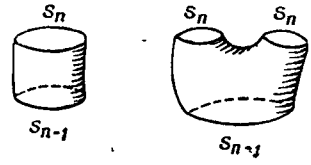
Это число не зависит от выбора исчерпания. Действительно если R'_m — второе монотонное исчерпание и R'_m имеет род p'_m, то для каждого n найдется такое m, что $R_n \subset R'_m$ и тем самым $p_n \leqslant p'_m$, следовательно, $p_n \leqslant p' = \lim p'_m$, поэтому $p \leqslant p'$. Аналогично доказывается, что $p' \leqslant p$, следовательно, $p = p'$, как это утверждалось.

Число p ($\leqslant \infty$), однозначно определенное поверхностью R, называется *родом поверхности* R.

10.5. Пространственные модели открытых поверхностей. Для изучения топологических и конформно инвариантных свойств открытой римановой поверхности наиболее удобным из средств, имеющихся в нашем распоряжении, является представление поверхности с помощью метрического фундаментального многоугольника π, к которому приводит униформизация с предельным кругом универсальной поверхности наложения (гл. VIII). Для того, чтобы сделать еще более наглядной топологическую структуру поверхности, полезно с помощью указанного ниже построения топологически отобразить многоугольник π на двумерную поверхность F, расположенную в трехмерном пространстве.

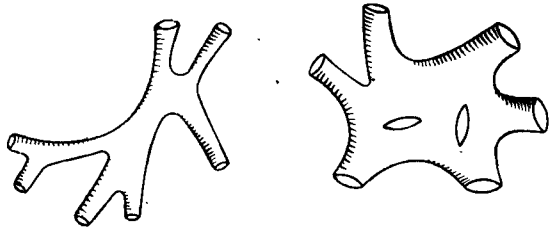
можно рассуждать, как при доказательстве первой части леммы. Заключение в тексте о равенстве $\mu_\rho = \lambda_\nu = \lambda \neq 0$ предполагает рассмотрение „связной" части α^2, т. е. такой ее части, всякие два симплекса которой соединены цепочкой симплексов, принадлежащих α^2. Впрочем, цепь α^2 можно с самого начала предполагать связной. — *Прим. перев.*

Мы предполагаем, что поверхность R замкнута или открыта, но исключаем простейшие случаи, когда универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ — эллиптического или параболического типа. Тогда R всегда можно представить с помощью *неевклидова* фундаментального многоугольника π внутри единичного круга $|t|<1$ (гиперболической плоскости). Возьмем последовательность значений $0=r_0<r_1<r_2<\dots$ с $r_n\to 1$ при $n\to\infty$; без ограничения общности можно предполагать, что окружности $|t|=r_n$ не проходят через вершины многоугольника. Если теперь в пересечении π_n многоугольника π с кольцом $r_{n-1}\leqslant|t|\leqslant r_n$ отождествить эквивалентные граничные точки π_n, которые, согласно п. 7.43, каждый раз лежат на одной и той же окружности $|t|=r$[1]), то π_n распадется на несколько (во всяком случае только конечное число) кусков поверхностей, ограниченных сегментами s_{n-1}, соответственно s_n, окружностей $|t|=r_{n-1}$, $|t|=r_n$ и топологически эквивалентных сфере, имеющей не менее двух дыр, следовательно, имеющих топологическую структуру, указанную на фиг. 20.



Фиг. 20.

Если теперь эти куски поверхностей снова соединить вместе вдоль свободных граничных контуров (s_n), то в случае замкнутой поверхности R рода p получится поверхность, имеющая форму сферы с p ручками, в случае же открытой поверхности R получится открытая поверхность, отдельные участки которой показаны на фиг. 21.

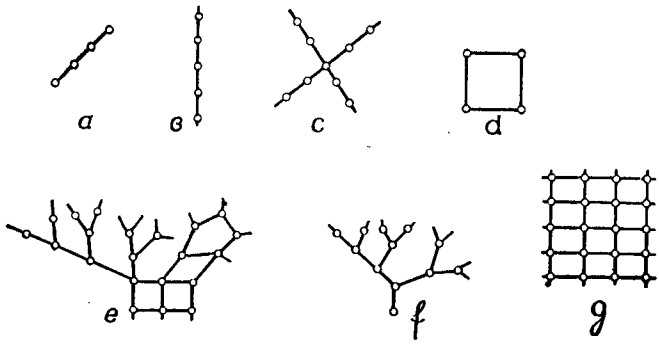

Фиг. 21.

Фигура слева не имеет ручек; такая деревообразно разветвленная поверхность соответствует поверхности, подобной однолистным ($p=0$). Напротив, на фигуре справа имеются „отверстия“; число таких отверстий равно роду p поверхности; в общем случае оно бесконечно. Если от поверхности можно отсечь некомпактный кусок, имеющий деревообразный вид, то мы говорим о „подобном одно-

[1]) В построении § 4 гл. VII нужно положить $t_0=0$. — *Прим. перев.*

листным конце" поверхности. Такой конец топологически эквивалентен подобласти плоскости.

Для лучшего обозрения таких пространственных представлений римановых поверхностей можно элементарные куски поверхностей



Фиг. 22.

(см. фиг. 20) считать составленными из конечного числа кусков тонких цилиндрических поверхностей. Тогда вся поверхность представляется в виде некоторого цилиндрического сооружения, как это показано на фиг. 22. Представленные здесь случаи следующие: a — замкнутая поверхность рода нуль; b — открытая односвязная поверхность; c — многосвязная открытая поверхность, подобная однолистным; d — замкнутая поверхность рода 1; e — открытая поверхность рода $p > 0$ (возможно $p = \infty$) с концами, подобными однолистным; f — открытая бесконечносвязная поверхность, подобная однолистным; g — открытая поверхность рода $p = \infty$ без концов, подобных однолистным.

„Отрезки" этих комплексов представляют куски цилиндрических поверхностей, „узлы" представляют сферы с дырами (ср. Кёбе [5], Керекьярто [1*])

§ 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА, ЕМКОСТЬ, ГАРМОНИЧЕСКАЯ МЕРА

В настоящем параграфе мы коротко остановимся на выводах §§ 2, 4 гл. VI относительно функции Грина и гармонической меры и дадим некоторые дополнения к ним, важные для дальнейшего изложения.

10.6. Функция Грина. Начиная с этого места, мы рассматриваем *открытую* риманову поверхность R и исчерпываем ее бесконечной последовательностью принадлежащих ей поверхностей с краем

$$R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots; \quad R_n \to R.$$

В качестве R_n можно, например, взять построенное выше пересечение метрического многоугольника π с кругом $|t| \leqslant r_n$. Тогда поверхность R_n ограничена конечным числом замкнутых кусочно-аналитических контуров Γ_n.

В § 2 гл. VI мы для произвольной открытой поверхности R построили уже функцию Грина $g(z, \zeta)$ с заданным полюсом $z = \zeta$. Она может быть однозначно определена как нижняя граница всех *положительных* гармонических функций на R, которые в точке $z = \zeta$ имеют сингулярную часть

$$\ln \frac{1}{|z-\zeta|}.$$

Эта нижняя граница $g(z, \zeta)$ либо всюду на R бесконечна, либо всюду, исключая $z = \zeta$, конечна. Затем мы видели (см. § 2 гл. VI), что она может быть получена как предел

$$g(z, \zeta) = \lim g_n(z, \zeta),$$

где

$$g_n(z, \zeta) = \ln \frac{1}{|z-\zeta|} + \gamma_n + [(z-\zeta)]$$

— функция Грина поверхности R_n из последовательности, исчерпывающей R. Функция g_n обращается в нуль на границе Γ_n поверхности R_n. Напротив, если даже предельная функция g конечна, то нельзя утверждать, что на „идеальной границе" Γ поверхности R она равна нулю, т. е. что $g(z_n, \zeta) \to 0$, когда z_n пробегает заданную последовательность точек, не имеющую точки сгущения на R. С другой стороны, очевидно, что в этом случае $\inf g = 0$ на R, так как иначе $g - \varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ была бы функцией, не обладающей минимальным свойством функции g.

Функция Грина $g(z, \zeta)$ конечна или бесконечна, в зависимости от того, конечна или бесконечна *постоянная Робэна*

$$\gamma = \gamma(\zeta) = \lim_{n \to \infty} \gamma_n$$

поверхности R в полюсе $z = \zeta$, или, что равносильно, положительна или равна нулю *емкостная постоянная*

$$c(\zeta) = e^{-\gamma(\zeta)}.$$

Эта постоянная подчиняется ковариантному закону преобразования (см. п. 6.4).

10.7. Зависимость от полюса. В п. 6.13 мы видели, что функция Грина *односвязной* поверхности R обладает свойством симметрии

$$g(z, \zeta) = g(\zeta, z)$$

и, следовательно, g зависит гармонически также и от полюса ζ. Это свойство, как мы сейчас покажем, справедливо и для *каждой* римановой поверхности.

В самом деле, пусть a и b — две произвольные точки поверхности R, и пусть R_ν — поверхность из последовательности, исчерпывающей R, содержащая эти точки. Применяя формулу преобразования интегралов (3. 16) к поверхности R_ν и функциям $M = g_\nu(z, a)\dfrac{\partial g_\nu(z, b)}{\partial y}$, $N = g_\nu(z, b)\dfrac{\partial g_\nu(z, a)}{\partial x}$, причем точки a и b изолируются с помощью небольших окружностей γ_a и γ_b, получаем соотношение (ds — элемент дуги, $\partial/\partial n$ — производная в направлении внешней нормали)

$$\int\limits_{\Gamma_\nu+\gamma_a+\gamma_b} \left(g_\nu(z, a)\frac{\partial g_\nu(z, b)}{\partial n} - g_\nu(z, b)\frac{\partial g_\nu(z, a)}{\partial n}\right) ds = 0.$$

Учитывая, что $g_\nu = 0$ на Γ_ν, и стягивая γ_a и γ_b соответственно в точки a и b, выводим отсюда, что $g_\nu(a, b) = g_\nu(b, a)$. Утверждение о свойстве симметрии функции $g(z, \zeta)$ получается тогда предельным переходом при $\nu \to \infty$ [1]).

Из симметрии g можно легко заключить, что емкостная постоянная $c(\zeta)$ либо для каждой точки $\zeta \in R$ *положительна*, либо для каждой точки ζ *равна нулю*. Согласно п. 10.6, для этого достаточно показать, что если функция Грина $g(z, \zeta)$ конечна для некоторой точки $\zeta = a$, то она конечна и для каждой точки $\zeta = b$. Но $g(b, a) = g(a, b)$, и так как левая часть конечна, то и правая часть конечна, поэтому $g(z, b)$ конечна для *каждой* точки z, что и требовалось доказать.

10.8. Гармоническая мера. Рассмотрим некомпактную поверхность $R - R_0$, получаемую из R удалением поверхности R_0 (см. п. 10.6); тогда компактная часть границы $R - R_0$ состоит из границы Γ_0 поверхности R_0 [2]). Разложим Γ_0 на две дуги, $\Gamma_0 = \alpha + \beta$, без общих внутренних точек и образуем, что возможно согласно гл. IV, гармоническую меру $\omega_n(z, \alpha)$ дуги α относительно компактной части $R_n - R_0$ поверхности R. Следовательно, ω_n есть та вполне определенная гармоническая функция на $R_n - R_0$, которая равна нулю на Γ_n и в каждой внутренней точке дуги β и равна единице в каждой внутренней точке дуги α. В каждой внутренней точке z поверхности $R_n - R_0$ имеем $0 < \omega_n < 1$.

Если теперь n мы будем неограниченно увеличивать, то последовательность ω_n, которая, по принципу максимума, очевидно, моно-

---

[1]) Это элементарное и хорошо известное доказательство не могло быть применено в § 2 гл. VI, так как там в нашем распоряжении еще не было триангулируемости поверхности R.

[2]) Мы предполагаем (впрочем, для дальнейшего это не необходимо), что поверхность R_0 связна [*односвязна. — Прим. перев.*].

тонно возрастает, будет стремиться к предельной функции

$$\omega(z, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \omega_n(z, \alpha),$$

гармонической, по принципу Харнака, в каждой точке поверхности $R - R_0$. Далее, $0 \leqslant \omega \leqslant 1$.

Относительно поведения ω на границе можно утверждать следующее. Так как $\omega_n \to 1$ при $z \to \alpha$ и ω_n возрастает вместе с n, то $\omega \to 1$, когда z стремится к внутренней точке дуги α.

Сумма $\omega_n(z, \alpha) + \omega_n(z, \beta) - \omega_n(z, \Gamma_0)$ равна нулю на границе $R_n - R_0$, исключая, возможно, концы дуг α, β; так как она ограничена, то отсюда вытекает, что она тождественно равна нулю. Следовательно,

$$\omega_n(z, \alpha) + \omega_n(z, \beta) = \omega_n(z, \Gamma_0),$$

откуда при $n \to \infty$ получается соответствующее аддитивное свойство для предельной функции ω:

$$\omega(z, \alpha) + \omega(z, \beta) = \omega(z, \Gamma_0).$$

Отсюда следует, что $\omega(z, \alpha) \to 0$, когда z стремится к внутренней точке дуги β. Действительно, по доказанному выше, при этом $\omega(z, \beta) \to 1$ и $\omega(z, \Gamma_0) \to 1$, следовательно, $\omega(z, \alpha) \to 0$ при $z \to \beta$.

Поскольку $\omega(z, \alpha)$, таким образом, не есть постоянная, мы заключаем, что в каждой внутренней точке $R - R_0$ она удовлетворяет строгому неравенству

$$0 < \omega < 1.$$

Этот результат предполагает, что дуга α составляет *правильную часть* Γ_0, т. е. что $\Gamma_0 - \alpha$ не пусто.

$\omega(z, \alpha)$ принимается за *гармоническую меру дуги α в точке z относительно поверхности* $R - R_0$.

10.9. Минимальное свойство. Из предыдущего построения легко следует, что гармоническая мера $\omega(z, \alpha)$ может быть определена как точная нижняя граница

$$\omega(z, \alpha) = \inf u(z),$$

где $u(z)$ пробегает множество всех гармонических функций, *положительных* на $R - R_0$ и имеющих во внутренних точках α граничные значения $\geqslant 1$. В самом деле, для конечного n, по принципу минимума, примененному к разности $u - \omega_n$ на $R_n - R_0$, имеет место неравенство $u \geqslant \omega_n$, откуда следует, что $u \geqslant \omega$ в каждой точке z поверхности $R - R_0$. Так как ω принадлежит множеству функций u, то этим все доказано.

В силу этого минимального свойства, ω не зависит от выбора последовательности $R_1, R_2, \ldots$, использованной при ее построении.

10.10. Гармоническая мера идеальной границы. Рассмотрим теперь случай, когда дуга α совпадает с Γ_0. Тогда гармоническая мера $\omega(z, \alpha) \equiv \omega(z, \Gamma_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \omega_n(z, \Gamma_0)$ имеет граничное значение 1 всюду на Γ_0, и $0 < \omega(z, \Gamma_0) \leqslant 1$ в каждой точке поверхности $R - R_0$.

Разность

$$\omega(z, \Gamma) \equiv 1 - \omega(z, \Gamma_0)$$

мы принимаем за *гармоническую меру идеальной части границы* Γ *поверхности* $R - R_0$ (см. § 4 гл. VI). Следовательно, $0 \leqslant \omega(z, \Gamma) < 1$ на $R - R_0$ и, в частности, $\omega(z, \Gamma) = 0$ на Γ_0.

Из п. 10.9 следует, далее, что $\omega(z, \Gamma) = \sup u(z)$, где $u(z)$ — произвольная гармоническая функция, которая < 1 на $R - R_0$ и $\leqslant 0$ на Γ_0.

10.11. Нулевые границы. Теперь возможны два случая: либо $\omega(z, \Gamma) \equiv 0$ на $R - R_0$, либо $\omega(z, \Gamma) > 0$ в каждой внутренней точке $R - R_0$. Как будет показано в п. 10.12, то, какой из этих двух (взаимно исключающих друг друга) случаев выполняется, не зависит от выбора R_0 и поэтому представляет собой конформно инвариантное свойство поверхности R. Если $\omega(z, \Gamma) \equiv 0$, т. е. если Γ имеет гармоническую меру, равную нулю, то заданную поверхность R мы называем коротко „поверхностью с нулевой границей“ (nullberandete Fläche).

В п. 6.18 мы видели, что поверхности с положительной границей обладают функцией Грина и, следовательно, имеют положительную емкость. Обратное утверждение будет доказано в п. 10.12.

10.12. Сходство между поверхностями с нулевой границей и компактными поверхностями. Открытые поверхности с нулевой границей обладают некоторыми конформно инвариантными свойствами, приближающими их к компактным поверхностям. Некоторые важные свойства были уже рассмотрены в § 4 гл. VI. Они будут иметь основное значение и для дальнейших выводов, прежде всего следующие из них:

1. Для поверхности с нулевой границей справедлив принцип максимума и минимума в форме п. 6.21.

2. На поверхности с нулевой границей не существует однозначной ограниченной с одной стороны гармонической функции, отличной от const. В частности, такая поверхность не обладает функцией Грина.

3. *Гомологическая теорема.* Если Γ_0 есть 1-цепь на поверхности R с нулевой границей, разбивающая R, то для каждой гармонической функции, однозначной и ограниченной на компактной или некомпактной части R_0 поверхности, ограниченной Γ_0,

$$\int_{\Gamma_0} du' = 0,$$

где du' — дифференциал, сопряженный к du (доказательство будет дано в п. 10.26).

Теорема 2 следует из теоремы 1. Если $u \geqslant m$ ($> -\infty$) на поверхности R с нулевой границей (при данном выборе R_0), то, в силу теоремы 1, u достигает минимума на границе R_0 и, следовательно, есть постоянная. Отсюда вытекает, что R не обладает функцией Грина $g(z, \zeta)$, прежде всего для $\zeta \in R_0$, затем, в силу симметрии g, для каждой точки ζ. Отсюда, далее, следует, что свойство поверхности иметь нулевую границу не зависит от выбора R_0.

§ 3. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОМПАКТНЫХ ПОДОБЛАСТЕЙ

10.13. Постановка задачи. В § 2 этой главы мы уже решили первую краевую задачу теории потенциала для некомпактной части $R - R_0$ произвольной римановой поверхности R в простейшем случае, когда краевые значения на (компактной) границе Γ_0 области R_0 кусочно-постоянны (равны либо 1, либо 0); „нормированное“ решение этой задачи дает гармоническая мера. В настоящем параграфе это решение будет обстоятельно исследовано при следующих общих условиях.

Пусть на открытой римановой поверхности R задана компактная (замкнутая) подобласть R_0, ограниченная конечным числом жордановых кривых Γ_0[1]). Пусть, далее, $f(\zeta)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция, определенная на Γ_0. Нужно определить совокупность всех функций $u(z)$, однозначных, ограниченных и гармонических на дополнении $R - R_0$ и принимающих заданные граничные значения $f(\zeta)$ в каждой точке ζ на Γ_0, где $f(\zeta)$ непрерывна:

$$u(z) \to f(\zeta) \text{ при } z \to \zeta.$$

10.14. Нормированное решение. Частное решение $u_0(z)$ получается непосредственно по методу § 6 гл. IV. Зафиксируем на Γ_0 направление обхода и произвольную точку ζ_0. Пусть ζ пробегает в указанном направлении всю границу Γ_0, начиная с точки ζ_0, и пусть $\omega(\zeta, z)$ — построенная по п. 10.8 гармоническая мера дуги $\overset{\frown}{\zeta_0\zeta}$ границы Γ_0, взятая в точке z области $R - R_0$. При обходе Γ_0 гармоническая мера ω монотонно возрастает от 0 до 1, следовательно, мы можем образовать интеграл Стильтьеса

$$u_0(z) = \int_{\Gamma_0} f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z). \tag{10.1}$$

Он получается как предел конечной суммы

$$\sum f(\zeta_\nu)\, \Delta_\nu \omega(z),$$

[1]) Для дальнейшего существенно рассмотрение некомпактной части $R - R_0$, поэтому область R_0 можно считать односвязной. — *Прим. перев.*

где $\Delta_\nu\omega$ — гармоническая мера дуги $\Delta_\nu\Gamma_0$ разбиения $\Gamma_0 = \sum_{\nu=1}^{n}\Delta_\nu\Gamma_0$, а ζ_ν — произвольная точка этой дуги. С помощью принципа Харнака мы заключаем, что функция (10.1) *гармонична* в $R - R_0$. В силу того, что

$$\int_{\Gamma_0} d\omega(\zeta, z) = \omega(z, \Gamma_0) \leqslant 1,$$

функция $u_0(z)$ *ограничена*, и выполнение краевого условия

$$u_0(z) \to f(\zeta) \text{ при } z \to \zeta$$

следует (для каждой точки ζ, где функция $f(\zeta)$ непрерывна) из рассуждений п. 4.11, которые в настоящем случае можно повторить без изменений.

Определяемую (10.1) функцию мы будем называть *нормированным решением краевой задачи*[1]).

10.15. Общее решение. Общее решение краевой задачи получается из частного решения по формуле

$$u(z) = u_0(z) + v(z), \tag{10.2}$$

где $v(z)$ — произвольная гармоническая функция, однозначная и ограниченная ($|v| < M < \infty$) в области $R - R_0$ и *равная нулю* на компактной части Γ_0 границы $R - R_0$[1]).

10.16. Поверхности с нулевой границей. Рассмотрим теперь тот случай, когда идеальная граница Γ поверхности R (и $R - R_0$) имеет гармоническую меру нуль. Согласно п. 10.11, это означает, что

$$\int_{\Gamma} d\omega(\zeta, z) = \omega(z, \Gamma_0) \equiv 1.$$

Но в этом случае имеет место обобщенный принцип максимума и минимума п. 6.21. Если его применить к гармонической функции $v(z)$, входящей в (10.2), то из него следует, так как v в $R - R_0$ ограничена и на Γ_0 равна нулю, что $v(z) \equiv 0$. Следовательно, справедлива теорема:

Если идеальная граница Γ *поверхности* $R - R_0$ *имеет гармоническую меру нуль, то нормированное решение* (10.1) *есть единственное ограниченное решение краевой задачи.*

---

[1]) Если идеальная часть Γ границы области $R - R_0$ имеет „действительное" представление, например в виде множества точек, образованного конечным числом жордановых кривых, расположенных на некоторой поверхности R', на которой расположена и сама область $R - R_0$, то предыдущее нормирование означает просто, что функция $u_0(z)$ на Γ *равна нулю*.

10.17. Поверхности с положительной идеальной границей. Если

$$\int_{\Gamma_0} d\omega(\zeta, z) = \omega(z, \Gamma_0) > 1,$$

то идеальная граница Γ поверхности $R - R_0$ имеет гармоническую меру (см. п. 10.10)

$$\omega(z, \Gamma) = 1 - \omega(z, \Gamma_0) > 0.$$

В этом случае, кроме нормированного решения u_0, существует еще бесконечное множество других решений u краевой задачи. Такое бесконечное семейство решений дает, например, формула

$$u(z) = u_0(z) + \lambda\omega(z, \Gamma),$$

где λ — произвольное действительное число, так как каждая такая функция удовлетворяет поставленным требованиям ограниченности в $R - R_0$ и равенства нулю на Γ_0.

10.18. Сингулярные поверхности. Интересно, существуют ли поверхности, для которых семейство функций

$$u(z) = u_0(z) + \lambda\omega(z, \Gamma) \tag{10.3}$$

исчерпывает совокупность всех решений рассматриваемой краевой задачи. То, что это обязательно имеет место, если Γ — гармонической меры нуль, мы видели в п. 10.16. Труднее решить, существуют ли и поверхности R с *положительной* границей ($\omega > 0$), для которых выражение (10.3) дает общее решение проблемы. Попытки доказать, что ответ на этот вопрос положителен, до сих пор к цели не привели, и проблему нужно считать пока не решенной. Во всяком случае, такую поверхность следует скорее рассматривать как исключение, поэтому класс поверхностей R с положительной границей, для которых выражение (10.3) представляет общее решение краевой задачи, мы назовем *сингулярным*, в противоположность регулярному случаю, когда, кроме семейства (10.3), имеются еще и другие решения (а тогда их бесконечно много) [1].

Мы дальше (см. п. 10.31) увидим, что сингулярное свойство поверхности R не зависит от выбора R_0. То, что оно не зависит от выбора граничных значений f, очевидно.

10.19. Абсолютное значение нормированного решения. Если

$$M = \max_{\Gamma_0} |f(\zeta)|$$

---

[1]) Ср. мою работу [2], а также Сарио [3].

и R — поверхность с нулевой границей, то, по обобщенному принципу максимума п. 6.21, для единственного ограниченного решения $u_0(z)$ краевой задачи имеет место неравенство

$$|u_0(z)| \leqslant M \tag{10.4}$$

и внутри $R - R_0$. Это можно и непосредственно вывести из определения

$$u_0(z) = \int_{\Gamma_0} f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z).$$

Для дальнейшего важно, что в случае поверхности R *с положительной границей* для *нормированного* решения $u_0(z)$ имеет место более точная оценка. Пусть B — компактная часть области $R - R_0$. Так как $d\omega \geqslant 0$, то в B имеем

$$|u_0(z)| \leqslant \int_{\Gamma_0} M\, d\omega(\zeta, z) = M\omega(z, \Gamma_0) \leqslant qM, \tag{10.4'}$$

где

$$q = \max_B \omega(z, \Gamma_0).$$

Так как $0 < \omega < 1$ в $R - R_0$, то и $0 < q < 1$. Эта постоянная зависит только от геометрической конфигурации (R_0, B) и, напротив, не зависит от заданных граничных значений f (следовательно, и от M) [1]).

10.20. Приложение к сингулярным открытым поверхностям. В п. 10.12 было показано, что на открытой поверхности R с нулевой границей не существует ограниченной гармонической функции, отличной от постоянной. Эту теорему мы можем теперь распространить на поверхность R с положительной границей, поскольку она сингулярна в смысле п. 10.18 (относительно некомпактной области $R - R_0$):

На сингулярной поверхности R не существует отличной от постоянной ограниченной гармонической функции [2]).

Для доказательства предположим, что однозначная гармоническая функция $u(z)$ на R ограничена. Тогда, по предположению, существует такая постоянная λ, что на $R - R_0$

$$u(z) = u_0(z) + \lambda\omega(z, \Gamma),$$

---

[1]) См. п. 6.19, где эта теорема была выведена и применена для односвязных поверхностей R, имеющих положительную границу (гиперболического типа).

[2]) На поверхности R с *нулевой границей* не существует даже ограниченной с одной стороны гармонической функции, отличной от постоянной. Верно ли это и для сингулярной (с положительной границей) поверхности R, остается открытым вопросом [см. примечание к п. 10.92. — *Прим. перев.*].

где u_0 — нормированный интеграл

$$u_0(z) = \int_{\Gamma_0} u(\zeta)\, d\omega(\zeta, z).$$

Поэтому для функции $u(z) - \lambda = u_1(z)$ имеем

$$\int_{\Gamma_0} u_1(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) = \int_{\Gamma_0} u(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) - \lambda\omega(z, \Gamma_0) =$$
$$= u_0(z) - \lambda + \lambda\omega(z, \Gamma) = u - \lambda = u_1(z),$$

откуда видно, что $u_1(z)$ — *нормированное* решение краевой задачи для краевых значений $u_1(\zeta) = u(\zeta) - \lambda$ на Γ_0. Тогда, если M — максимум $|u_1(z)|$ на Γ_0, то, по принципу максимума,

$$|u_1(z)| \leqslant M$$

на R_0 и, согласно п. 10.19, также и на $R - R_0$, следовательно, на всей поверхности R. Но u_1 достигает своего максимума M в точке компактной кривой Γ_0, поэтому u_1, следовательно, и u, постоянная, что и требовалось доказать.

10.21. Другие свойства нормированного решения. Частное решение u_0 может быть также представлено как предел соответствующих нормированных частных решений для компактных поверхностей последовательности, исчерпывающей R (ср. § 5 гл. VI).

Построим снова указанным в п. 10.6 способом исчерпание поверхности R последовательностью $R_0 \subset R_1 \subset \ldots$, $R_n \to R$. Граница $R_n - R_0$ есть $\Gamma_0 + \Gamma_n$. Пусть теперь $u_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — та гармоническая и ограниченная в $R_n - R_0$ функция, которая однозначно определена краевыми условиями

$$u_n = f(\zeta) \text{ на } \Gamma_0, \qquad u_n = 0 \text{ на } \Gamma_n.$$

Мы утверждаем, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$$

равномерно в каждой компактной части $R - R_0$.

По формуле (4.8), имеем для u_n интегральное представление $[z \in (R_n - R_0)]$

$$u_n(z) = \int_{\Gamma_0} u_0(\zeta)\, d\omega_n(\zeta, z),$$

где $d\omega_n$ означает гармоническую меру дифференциала дуги $d\zeta$ в точке z относительно поверхности $R_n - R_0$. С другой стороны,

$$u_0(z) \equiv \int_{\Gamma_0} u_0(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) = u_n(z) + \int_{\Gamma_0} u_0(\zeta)\, d(\omega - \omega_n).$$

По принципу максимума, гармоническая мера произвольной дуги α границы Γ_0 относительно $R_n - R_0$ меньше, чем соответствующая мера относительно $R - R_0$, поэтому на Γ_0 $d\omega \geqslant d\omega_n$. Следовательно, если M — максимум $|u_0|$ на Γ_0, то

$$\left|\int_{\Gamma_0} u_0 d(\omega - \omega_n)\right| \leqslant M \int_{\Gamma_0} d(\omega - \omega_n) = M(\omega(z, \Gamma_0) - \omega_n(z, \Gamma_0)).$$

Но, по определению ω, $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n = \omega$, причем сходимость здесь равномерна в каждой компактной части $R - R_0$, поэтому $u_n \to u_0$ при $n \to \infty$ также равномерно, что и требовалось доказать.

10.22. Важно еще заметить следующее. Пусть u_0 — только что рассмотренное нормированное решение краевой задачи для $R - R_0$ с граничными значениями $f(\zeta)$ на Γ_0. Образуем для произвольной компактной области R_1 поверхности R с границей Γ_1, содержащей область R_0, нормированное решение

$$u_1 = \int_{\Gamma_1} u_0(\zeta)\, d\omega_1(\zeta, z)$$

краевой задачи в $R - R_1$ с краевыми значениями $u_0(\zeta)$ на Γ_1; здесь $d\omega_1$ — гармоническая мера дуги $d\zeta$ контура Γ_1. *Тогда*

$$u_0 \equiv u_1$$

в $R - R_1$.

В самом деле, согласно п. 10.21, мы имеем для исчерпания $R_n \to R$ соотношение $u_n \to u_0$, где u_n — гармоническая в $R_n - R_0$ функция, равная u_0 на Γ_0 и 0 на Γ_n. Если построить соответствующие приближения u_{1n} для u_1 на $R_n - R_1$ ($u_{1n} = u_1 = u_0$ на Γ_1, $u_{1n} = 0$ на Γ_n), то, очевидно, $u_{1n} = u_n$ и $u_{1n} \to u_1$ при $n \to \infty$, откуда следует, что $u_1 \equiv u_0$.

10.23. Интеграл Дирихле нормированного решения. Будем, как прежде, рассматривать произвольную компактную часть R_0 поверхности R, ограниченную конечным числом аналитических кривых Γ_0. Пусть в связной части G дополнения $R - R_0$ области R_0 задан однозначный потенциал $u(z)$, который еще гармоничен на Γ_0 и удовлетворяет нормирующему условию

$$u(z) = \int_{\Gamma_0} u(\zeta)\, d\omega(\zeta, z),$$

где $d\omega$ означает гармоническую меру дифференциала дуги $d\zeta$ границы Γ_0.

При этих предположениях интеграл Дирихле от u по области G конечен:

$$\iint |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

10.24. Доказательство. Теорема тривиальна, если область G компактна. Если это не имеет места, то строим исчерпание R последовательностью поверхностей R_n ($n = 1, 2, \ldots$), имеющих кусочно аналитические границы Γ_n, не пересекающиеся с Γ_0. Пусть, далее, G_n — пересечение G с R_n ($n = 1, \ldots$). Тогда, по формуле преобразования (3.20′), получаем

$$\iint\limits_{R_n - R_0} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma_0} u \, du' - \int\limits_{\Gamma_n} u \, du', \tag{10.5}$$

где u' — сопряженная к u гармоническая функция и направление обхода Γ_0 и Γ_n при интегрировании — *отрицательное* по отношению к области R_0, соответственно R_n. Отсюда следует, что линейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_n} u \, du'$$

с возрастанием n монотонно убывает.

Рассмотрим, с другой стороны, как в п. 10.21, приближения

$$u_n(z) = \int\limits_{\Gamma_0} u(\zeta) \, d\omega_n(\zeta, z),$$

которые в каждой компактной части области G (вместе со всеми своими производными) сходятся равномерно к u. Для этих функций, в силу того, что $u_n = 0$ на Γ_n, имеем соотношение ($1 \leqslant m < n$)

$$\iint\limits_{R_n - R_m} |\operatorname{grad} u_n|^2 \, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma_m} u_n \, du_n' \geqslant 0. \tag{10.6}$$

Но при $n \to \infty$

$$\int\limits_{\Gamma_m} u_n \, du_n' \to \int\limits_{\Gamma_m} u \, du',$$

следовательно, и

$$\int\limits_{\Gamma_m} u \, du' \geqslant 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда, в силу (10.5), вытекает, что для каждого n

$$\iint\limits_{R_n - R_0} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\, dy \leqslant \int\limits_{\Gamma_0} u \, du',$$

следовательно,

$$\iint\limits_{R-R_0} |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy \leqslant \int\limits_{\Gamma_0} u\, du' \tag{10.7}$$

и интеграл Дирихле

$$\iint\limits_{R-R_0} |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy$$

конечен, что и требовалось доказать.

Мы увидим, что в неравенстве (10.7) в действительности имеет место равенство.

10.25. Формулы преобразования интегралов. Теперь будет показано, что для нормированного потенциала u фундаментальные формулы преобразования гл. III остаются в силе для каждой подобласти $G = R - R_0$ и тогда, когда $G + \Gamma_0$ некомпактна.

Для этого рассмотрим, как выше, однозначную *нормированную* гармоническую функцию u на $G + \Gamma_0$. Согласно п. 10.21, ее можно представить в виде предела последовательности гармонических функций u_n на $R_n - R_0 + \Gamma_0$, для которых $u_n = 0$ на Γ_n. Введем еще обозначения $f(z)\, dz = du + i\, du'$ и $f_n(z)\, dz = du_n + i\, du_n'$. Тогда $f_n \to f$ равномерно в каждой компактной части области G.

Пусть, с другой стороны, φ — произвольная однозначная аналитическая ковариантa на $G + \Gamma_0$ с конечным интегралом Дирихле

$$\iint\limits_G |\varphi|^2\, dx\, dy < \infty.$$

При этих предположениях формула преобразования (3.18′) имеет место в виде

$$\iint\limits_G f \bar{\varphi}\, dx\, dy = i \int\limits_{\Gamma_0} u \bar{\varphi}\, \bar{dz}, \tag{10.8}$$

где интеграл справа берется в положительном направлении (относительно области G).

Для доказательства заметим, что для компактных подобластей эта формула обязательно справедлива. Поэтому в $R_n - R_m$, учитывая, что $u_n = 0$ на Γ_n, имеем:

$$\iint\limits_{R_n - R_m} f_n \bar{\varphi}\, dx\, dy = i \int\limits_{\Gamma_m} u_n \bar{\varphi}\, \bar{dz} \to i \int\limits_{\Gamma_m} u \bar{\varphi}\, \bar{dz} \tag{10.9}$$

при $n \to \infty$.

С другой стороны, по неравенству Буняковского — Шварца, с учетом формулы (3.20′), имеем

$$\left|\iint\limits_{R_n-R_m} f_n\bar{\varphi}\,dx\,dy\right|^2 \leqslant \iint\limits_{R_n-R_0} |\operatorname{grad} u_n|^2\,dx\,dy \cdot \iint\limits_{R_n-R_m} |\varphi|^2\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Gamma_0} u_n\,du_n' \cdot \iint\limits_{R-R_m} |\varphi|^2\,dx\,dy. \quad (10.10)$$

При $n\to\infty$ из (10.9) и (10.10) следует, что

$$\left|\int\limits_{\Gamma_m} u\bar{\varphi}\,d\bar{z}\right|^2 \leqslant \int\limits_{\Gamma_0} u\,du' \cdot \iint\limits_{R-R_m} |\varphi|^2\,dx\,dy.$$

Так как интеграл Дирихле от φ по R конечен, то имеем, наконец при $m\to\infty$

$$\lim_{m\to\infty} \int\limits_{\Gamma_m} u\bar{\varphi}\,d\bar{z} = 0.$$

Если мы теперь применим доказываемую формулу преобразования к паре ковариант f, φ и поверхности $G_m = R_m - R_0$, что мы вправе сделать, то получим

$$\iint\limits_{G_m} f\bar{\varphi}\,dx\,dy = i\int\limits_{\Gamma_0} u\bar{\varphi}\,d\bar{z} - i\int\limits_{\Gamma_m} u\bar{\varphi}\,d\bar{z}. \quad (10.11)$$

В силу абсолютной сходимости интеграла, стоящего слева в (10.8), левая часть в (10.11) при $m\to\infty$ сходится к

$$\iint\limits_{G} f\bar{\varphi}\,dx\,dy,$$

в то время как правая часть сходится к ее первому члену. Этим доказательство формулы преобразования (10.8) при сделанных выше предположениях доведено до конца.

В частности, для $\varphi = f$ получается формула

$$\iint\limits_{G} |\operatorname{grad} u|^2\,dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_0} u\,du'. \quad (10.7')$$

Следовательно, в (10.7) имеет место равенство, как это утверждалось.

10.26. Приложение к поверхностям с нулевой границей. Если поверхность R имеет нулевую границу, то постоянная $u = 1$ есть *нормированное* решение в G. Тогда, согласно п. 10.8, для любой интегрируемой с квадратом аналитической коварианты φ в $G+\Gamma_0$,

в силу $f \equiv 0$, справедливо равенство

$$\int_{\Gamma_0} \varphi\, dz = 0.$$

Таким образом, мы пришли к гомологической теореме п. 10.12, согласно которой периоды интегрируемой с квадратом коварианты равны нулю на Γ_0. Существенным для этого заключения является только предположение о том, что Γ_0 *разбивает* поверхность R.

§ 4. НОРМИРОВАННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ С ЗАДАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

10.27. Постановка задачи. Так же как и в теории функций на замкнутых поверхностях, в теории функций на открытых римановых поверхностях важно построить некоторые основные потенциалы, которые служат затем элементами построения общих систем гармонических и аналитических функций. В качестве обобщения проблем существования, рассмотренных в гл. IV и § 4 гл. VI, мы рассмотрим здесь следующий вопрос.

Пусть на произвольной римановой поверхности R дана замкнутая жорданова кривая γ, разбивающая ее на две раздельные (компактные или некомпактные) части R_1 и R_2. Заключим γ в двусвязную область G, ограниченную двумя аналитическими жордановыми кривыми α и β [1]), так что α лежит в R_2, а β в R_1, и обозначим через A (соответственно B) ограниченную α (соответственно β) область $A \supset R_1$ (соответственно $B \supset R_2$) поверхности R; G есть пересечение AB [2]).

Пусть теперь в области $G + \alpha + \beta$ заданы две однозначные гармонические функции u_0 и v_0. Требуется построить в G также однозначную и гармоническую функцию u так, чтобы выполнялись следующие условия:

1°. Разность $U = u - u_0$ гармонически продолжаема на поверхности A так, что в A она удовлетворяет нормирующему условию

$$U(z) = \int_{\alpha} U(\zeta)\, d\omega_\alpha(\zeta, z),$$

где $d\omega_\alpha$ означает гармоническую меру элемента дуги на α (относительно A).

---

[1]) В возможности такого покрытия проще всего убедиться, переводя R, с помощью универсальной поверхности наложения и опираясь на теорему Римана об отображении, в нормальную область E; при этом γ переходит в жорданову кривую, замкнутую или соединяющую две эквивалентные точки. Теперь покрытие γ выполнимо и переносится на R.

[2]) Решение нижеследующей задачи проходит без существенных изменений и тогда, когда разбивающий R цикл γ состоит из нескольких непересекающихся жордановых кривых $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$. Здесь мы проводим рассмотрение для случая $q = 1$.

2°. Разность $V = u - v_0$ обладает аналогичным свойством на поверхности B[1]).

10.28. Случай, когда хотя бы одна из поверхностей $A+\alpha$, $B+\beta$ некомпактна и ее идеальная граница имеет положительную меру. В этом случае можно показать, что если решение существует, то оно *единственно*.

Для доказательства предположим, что, например, поверхность $A+\alpha$ некомпактна и что гармоническая мера компактной части границы, α, удовлетворяет условию

$$\int_{\alpha} d\omega_{\alpha}(\zeta, z) < 1$$

(следовательно, отлична от постоянной на A).

Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи. Из условий 1° и 2° следует, что разность $u_1 - u_2 = u$ гармонически продолжаема на всю поверхность R и *нормирована* как в A, так и в B.

Следовательно, по теореме о максимуме (п. 10.19), u принимает свое максимальное значение на $A+\alpha$ в некоторой точке $z = z_0 \in \alpha$. Далее, функция u, по теореме п. 10.22, нормирована и в (дополнительной к A) подобласти $B - G$ области B и, следовательно, достигает своего максимума на $B - G + \alpha$ также в точке $z = z_0$. Отсюда вытекает, что значение $u(z_0)$ есть абсолютный максимум u на R, следовательно, функция u равна некоторой постоянной C.

Теперь на поверхности A имеем:

$$u_1(z) - u_0(z) = \int_{\alpha} (u_1(\zeta) - u_0(\zeta))\, d\omega_{\alpha}(\zeta, z) =$$

$$= \int_{\alpha} (u_2 - u_0 + C)\, d\omega_{\alpha} = u_2 - u_0 + C \int_{\alpha} d\omega_{\alpha}.$$

Следовательно, постоянная $C = u_1 - u_2$ равна

$$C \int_{\alpha} d\omega_{\alpha},$$

и так как последний интеграл не есть постоянная, то $C = 0$ и $u_1 = u_2$, что и требовалось доказать.

10.29. Доказательство существования. Аналогично § 4 гл. IV, решение u строится с помощью альтернирующего метода Шварца следующим образом.

Сначала образуем на A, соответственно B, последовательность гармонических функций $U_0 = u_0$, U_1, ..., U_n, ..., соответственно

[1]) Сходные построения — у Сарио [3].

$V_0 = v_0$, V_1, ..., V_n, ..., однозначно определенных требованием, чтобы они были *нормированными* решениями для граничных значений ($n \geqslant 1$)

$$\left.\begin{aligned} U_n &= V_{n-1} + v_0 - u_0 \quad \text{на } \alpha, \\ V_n &= U_n + u_0 - v_0 \quad \text{на } \beta. \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

Применяя принцип максимума (10.4′), мы в точности так же, как в § 4 гл. IV, получаем для сумм

$$\sum (U_{n+1} - U_n), \quad \sum (V_{n+1} - V_n)$$

в A, соответственно B, ряд геометрической прогрессии, являющийся для них мажорантой, откуда следует, что в A и B существуют предельные гармонические функции $U = \lim U_n$, соответственно $V = \lim V_n$, удовлетворяющие нормирующему условию. В пересечении $AB = G$

$$u \equiv U + u_0 = V + v_0.$$

Эта функция u обладает, очевидно, всеми требуемыми свойствами, и доказательство существования закончено.

10.30. Поверхности с нулевой границей. Если R принадлежит этому классу поверхностей, то можно применить, без существенных изменений, метод Шварца — Неймана § 5 гл. IV. Сначала из принципа максимума (см. п. 10.12) получается, что решение *u определено с точностью до аддитивной постоянной.*

Затем для сопряженной функции u' решения u из гомологического свойства п. 10.12 следует необходимое условие

$$\int_\gamma d(u' - u') = \int_\gamma d(u' - v_0')$$

на кривой γ в AB (гомологичной α и β). Следовательно, для решения задачи необходимо, чтобы было

$$\int_\gamma du_0' = \int_\gamma dv_0', \tag{10.13}$$

т. е. чтобы и функция $u_0' - v_0'$, сопряженная к $u_0 - v_0$, была *однозначна* в кольцевой области AB.

Теперь доказывается, что это условие также и достаточно для существования решения. Чтобы его получить, снова применяем алгорифм (10.12). Если учесть, что и в некомпактной области B справедливы гомологическое свойство п. 10.12 и принцип максимума (10.4), то в точности так же, как в § 5 гл. IV [1]), получается сходимость

[1]) Чтобы применить лемму п. 4.35, нужно сначала отобразить кольцевую область $G = AB$ на круговое кольцо, согласно теореме Римана об отображении.

последовательностей $U_n \to U$, $V_n \to V$ в A, соответственно B, и функция

$$u = U + u_0 = V + v_0,$$

определенная в AB, обладает всеми требуемыми свойствами.

Заметим, что разности $U = u - u_0$ и $V = u - v_0$, в силу нормирующих условий 1°, соответственно 2°, имеют конечный интеграл Дирихле по A, соответственно B (теорема п. 10.23).

10.31. Приложение к сингулярным поверхностям. Пусть R — поверхность с положительной границей, *сингулярная* в смысле п. 10.18 относительно некоторой компактной подобласти R_0. Мы можем теперь привести обещанное ранее доказательство того, что свойство сингулярности поверхности не зависит от выбора „дыры“ R_0.

В п. 10.20 мы видели, что из сингулярности поверхности R относительно R_0 следует, что на R не существует отличной от постоянной однозначной ограниченно гармонической функции. Справедливо и обратное утверждение, а именно:

Для того, чтобы на поверхности R с положительной границей не существовало отличной от постоянной однозначной ограниченной гармонической функции, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой компактной области $R_0 \subset R$ дополнение было сингулярным[1]).

Нам остается доказать необходимость. Для этого мы покажем следующее:

Если поверхность $R - R_0$ при компактной области R_0 не сингулярна, то на R существует отличная от постоянной однозначная ограниченная гармоническая функция.

Для доказательства предположим, что поверхность $R - R_0$ не сингулярна; тогда, согласно определению, на $R - R_0 + \Gamma_0$ существует однозначная ограниченная гармоническая функция $u_0(z)$, которая ни при каком значении постоянной λ не совпадает с потенциалом

$$\int_{\Gamma_0} u_0(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) + \lambda(1 - \omega(z)), \tag{10.14}$$

где $d\omega$ — гармоническая мера дифференциала дуги границы Γ_0 (относительно $R - R_0$).

Теперь мы решаем задачу п. 10.27, выбирая $\alpha = \Gamma_0$, $A = R - R_0$ и полагая $v_0 = 0$. Таким образом, мы находим однозначную и гармоническую на всей поверхности R функцию u, для которой разность $u - u_0$ в $R - R_0$ нормирована так, что

$$u = u_0 + \int_{\Gamma_0} (u - u_0)\, d\omega.$$

---

[1]) При этом мы предполагаем, что дополнение связно.

Отсюда видно, что, во-первых, u на A, следовательно, и на B ограничена и, во-вторых, отлична от постоянной. В самом деле, если бы u равнялась постоянной c, то $u_0(z)$, вопреки предположению, имела бы вид (10.14) с $\lambda = c$. Этим построением доказана необходимость указанного выше условия.

Отсюда также следует, что сингулярный характер R не зависит от выбора R_0.

10.32. Нормальные абелевы потенциалы. Предыдущие теоремы существования позволяют построить на произвольной римановой поверхности R некоторые нормированные гармонические функции, которые в случае замкнутой поверхности совпадают с нормальными интегралами, имеющими основное значение в теории абелевых интегралов (ср. гл. V), и образуют также фундамент для обобщения этой теории на открытые римановы поверхности. Ниже мы составим важнейшие из таких интегралов.

10.33. Нормальные потенциалы третьего рода. Нормальным потенциалом третьего рода мы называем нормированную функцию u на R, которая, исключая конечное число логарифмических полюсов, гармонична.

При этом существенно различны случай, когда заданная поверхность имеет положительную границу, и случай, когда граница поверхности нулевая.

В первом случае для каждой заданной точки $z = \zeta$ существует одна и только одна нормированная функция на R, которая в точке $z = \zeta$ имеет логарифмический полюс с вычетом μ, т. е. имеет разложение $-\mu \ln|z-\zeta| +$ гармоническая функция. Для $\mu = 1$ это не что иное, как функция Грина $g(z, \zeta)$ поверхности R.

Если, напротив, R имеет нулевую границу, то из теоремы о вычетах, примененной к коварианте $u_x + iu'_x$ в ограниченной области R_0, содержащей полюсы $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$, следует, согласно п. 10.12, что соответствующая сумма вычетов должна равняться нулю:

$$\sum_{i=1}^{q} \mu_i = 0.$$

Это условие также достаточно для существования гармонической функции с заданными особенностями. Ее можно построить либо непосредственно с помощью альтернирующего метода, либо построив сначала нормированный элементарный потенциал $u(z; z_1, z_2)$ с разложениями

$$u = (-1)^{\nu} \ln|z - z_\nu| + \text{гармоническая функция}$$

в полюсах $z = z_\nu (\nu = 1, 2)$ и представив затем более общую гармоническую функцию в виде линейной комбинации таких элементарных потенциалов.

Во всяком случае заданными условиями (особенностями и нормировкой) решение задачи определяется *однозначно*. Для поверхностей с нулевой границей последнее условие можно даже заменить более слабым требованием ограниченности решения (в окрестности идеальной границы) (ср. п. 10.16)[1]).

10.34. Нормальные потенциалы второго рода. Такой потенциал должен обладать полюсом $z=\zeta$ с сингулярной частью

$$u+iu_0'=\frac{c}{z-\zeta} \quad (c \text{ — постоянная}).$$

В силу однозначности u_0 и u_0' в окрестности особой точки $z=\zeta$, здесь непосредственно применим метод Шварца — Неймана пп. 10.29 и 10.30. Нормированный потенциал u снова однозначно определен, если поверхность имеет положительную границу Г. Для поверхности с нулевой границей остается неопределенной аддитивная постоянная.

Аналогично получается нормированный потенциал с полюсом высшего порядка:

$$u_0+iu_0'=\frac{c}{(z-\zeta)^n}+\ldots,$$

где n — целое положительное число.

10.35. Дифференциалы первого рода. Также и эти потенциалы могут быть построены, как в п. 5.15. Сначала для пары точек $z=\zeta_1$, $z=\zeta_2$ некоторого параметрического круга A строим к сингулярной части

$$u_0=\frac{1}{\pi}\arg\frac{z-\zeta_1}{z-\zeta_2},$$

у которой сопряженная функция однозначна, нормированную гармоническую функцию

$$v=v(z;\ \zeta_1,\ \zeta_2).$$

Она однозначна вне жордановой дуги γ_{12}, пробегающей в A и соединяющей точки ζ_1 и ζ_2, но при переходе через эту кривую испытывает скачок, равный 1.

Если теперь γ — замкнутая жорданова кривая, *не разбивающая* поверхность R, то выбираем на ней n точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ и обозначаем дугу $\overset{\frown}{\zeta_\nu\zeta_{\nu+1}}$ ($\nu=1, \ldots, n$; $\zeta_{n+1}=\zeta_1$) через $\gamma_{\nu,\nu+1}$. Тогда

$$v(z;\gamma)=\sum_{\nu=1}^{n}v(z;\ \zeta_\nu,\ \zeta_{\nu+1})$$

[1]) Подобное построение имеется у Сарио [3].

— гармоническая функция, однозначная и нормированная в области $R-\gamma$. Она неограниченно гармонически продолжаема на R и имеет период, равный 1, на каждом замкнутом пути γ', соединяющем в $R-\gamma$ оба берега кривой γ.

§ 5. АВТОМОРФНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ [1])

10.36. Метод универсальной поверхности наложения. Важнейшие из исследованных выше проблем существования могут также быть решены с помощью теории конформных отображений посредством следующего метода.

Пусть требуется найти гармоническую функцию u, которая на заданной римановой поверхности R или, более общо, на компактной или некомпактной области $R_0 \subset R$ обладает некоторыми заданными свойствами (граничными свойствами, особенностями). Тогда строим универсальную поверхность наложения $\hat{R}_0$ поверхности R_0 и отображаем ее по теореме Римана об отображении на круг E: $|t|<\rho$ ($\rho<\infty$ или $\rho=\infty$). Если исключить некоторые элементарные случаи, будет иметь место гиперболический случай; тогда за E можно принять единичный круг $|t|<1$. Посредством отображения $E \to R_0$ искомый потенциал u переносится на E и будет там однозначной гармонической функцией $u(t)$, *автоморфной* относительно группы преобразований наложения (T) поверхности $\hat{R}_0$ (оставляющих инвариантной основную поверхность R_0). Заданные особые условия для u приводят к некоторым соответствующим условиям для автоморфного потенциала $u(t)$. То обстоятельство, что потенциал u теперь определен в *круге*, во многих случаях позволяет легко построить его.

10.37. Нормированные решения краевой задачи. В качестве первого примера применим предыдущий метод к задаче, рассмотренной в § 3. Пусть, следовательно, R_0 снова есть компактная область на римановой поверхности R, ограниченная некоторой кривой Γ_0, и $\bar{R}_0$ — ее дополнение: $\bar{R}_0 = R - R_0$. Пусть на жордановой кривой Γ_0 задана непрерывная функция $f_0(\zeta)$ и требуется построить нормированное решение соответствующей краевой задачи в $\bar{R}_0$.

Следуя описанному выше методу, отобразим теперь универсальную поверхность наложения $\hat{\bar{R}}_0$ поверхности $\bar{R}_0$, которая при предыдущих условиях является поверхностью гиперболического типа, взаимно однозначно и конформно на единичный круг $E: |t|<1$. По основным теоремам о соответствии границ при конформном отображении, наше

[1]) Рассматриваемые в этом параграфе вопросы, имеющие сами по себе столь большое значение, что их нельзя не учесть в общей теории униформизации, в дальнейших параграфах не играют существенной роли. Поэтому читатель может без затруднений продолжать чтение прямо с § 6.

отображение еще непрерывно на граничной кривой Γ_0. Последней на окружности $|t| = 1$ соответствует открытое множество точек (τ), распадающееся на счетное число дуг α_ν, связанных друг с другом преобразованиями наложения (T). Поэтому элементу дуги на Γ_0 соответствует бесконечно много элементов $d\theta_1$, $d\theta_2$, ... $(\tau = e^{i\theta})$, и гармоническая мера $d\omega(\zeta, z)$ этого элемента на Γ_0 с помощью отображения $\overline{R}_0 \to E(z \to t, \zeta \to \tau)$ переходит в сумму

$$d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_\nu \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}\, d\theta_\nu \quad (t = re^{i\varphi}).$$

Это выражение инвариантно относительно преобразований T, что также следует из формы $d\omega$, так как дифференциал

$$\frac{(1 - r^2)\, d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} \tag{10.15}$$

остается инвариантным при каждом конформном отображении круга E на себя.

Если

$$u = \int_{\Gamma_0} f_0(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) \tag{10.16}$$

— решение поставленной задачи, то при преобразовании $\overline{R}_0 \to E$ оно переходит в функцию

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_0(e^{i\theta}) \frac{(1 - r^2)\, d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}, \tag{10.17}$$

где $\varphi_0(\tau) = f_0(\zeta)$ для каждой точки $\tau = e^{i\theta}$, соответствующей точке ζ, и $\varphi_0(\tau) = 0$ на (замкнутом) дополнении β к множеству $\alpha = \sum \alpha_\nu$ относительно окружности $|\tau| = 1$.

Это рассмотрение можно теперь провести *в обратном порядке*: сначала строим соответствующие граничным значениям $f_0(\zeta)$ граничные значения $\varphi_0(\tau) = f_0(\zeta)$ и затем применяем интеграл Пуассона (10.17). Согласно теории интеграла Пуассона, он представляет собой регулярную гармоническую функцию в круге $|t| < 1$, принимающую в каждой точке открытого множества $\alpha = \sum \alpha_\nu$ требуемое граничное значение $\varphi_0(\tau) = f_0(\zeta)$. Далее, он *автоморфен* относительно преобразований группы T, в силу инвариантности $\varphi_0(\tau)$ и ядерного дифференциала (10.15). Следовательно, если теперь вернуться к поверхности $\overline{R}_0$, то он перейдет в однозначный потенциал с заданными граничными значениями f_0 на Γ_0. Далее, он может быть представлен в виде (10.16) и, следовательно, совпадает с *нормированным* решением.

10.38. Мы хотим еще посмотреть, что означает требование *нормированности* для поведения автоморфного потенциала $u(t)$ на границе. Нормировка соответствует свойству граничных значений φ_0, заключающемуся в том, что $\varphi_0(\tau) = 0$ в каждой точке дополнения β к $\alpha = \sum \alpha_\nu$. Предположим теперь, что β имеет внутренние точки; тогда потенциал $u(t)$ в такой точке еще непрерывен и имеет граничное значение, равное нулю. Но в общем случае β не имеет внутренних точек. Согласно теории интеграла Пуассона, u стремится тогда к нулю почти во всех точках β, т. е. исключая множество точек (линейной) меры нуль, причем в общем случае только при радиальном (или угловом) приближении к этим точкам [1]).

Особого внимания заслуживает случай, когда мера дуг $\alpha = \sum \alpha_\nu$ равна 2π и, следовательно, β имеет лебегову меру, равную нулю.

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда гармоническая мера идеальной границы Γ *поверхности* R *равна нулю.*

В самом деле, для гармонической меры кривой Γ_0 имеем выражение

$$\omega(z, \Gamma_0) = \int_{\Gamma_0} d\omega(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{(1 - r^2)\, d\theta}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)},$$

и это выражение тогда и только тогда есть постоянная, равная 1, когда α имеет меру, равную 2π, и, следовательно, β — меру, равную нулю. Но условие $\omega(z, \Gamma_0) \equiv 1$ эквивалентно обращению в нуль гармонической меры идеальной границы Γ поверхности R, а отсюда следует справедливость утверждения.

10.39. Функция Грина. Метод универсальной поверхности наложения, по крайней мере в простейших случаях, можно также применить к построению дифференциалов с заданными особенностями. Мы покажем это на примере функции Грина.

Рассмотрим открытую поверхность R и предположим, что она имеет функцию Грина $g(z, \zeta)$. Тогда емкость границы поверхности R положительна и универсальная поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности R — гиперболического типа. При фундаментальном отображении $\hat{R} \to E(|t| < 1)$ $g(z, \zeta)$ переходит в некоторую функцию $u(t)$ со следующими свойствами:

1°. $u(t)$ — однозначная положительная гармоническая функция в круге $|t| < 1$, исключая точки $t = t_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), соответствующие полюсу $z = \zeta$.

2°. В каждой точке t_ν функция u имеет логарифмический полюс:

$$u(t) = \ln \frac{1}{|t - t_\nu|} + \text{гармоническая функция}.$$

---

[1]) См. мою монографию [1*], а также работу П. Ю. Мирберга [1].

Образуем теперь для каждой точки t_ν функцию Грина $g(t, t_\nu)$ единичного круга:

$$g(t, t_\nu) = \ln \left| \frac{1 - \bar{t}_\nu t}{t - t_\nu} \right|.$$

Разность

$$u(t) - \sum_{\nu=1}^{n} g(t, t_\nu) \equiv u_n(t)$$

для каждого n гармонична в круге $|t| < 1$, исключая точки $t = t_{n+1}$, $t_{n+2}, \ldots$. Далее, по принципу максимума, она *положительна* для $|t| < 1$. Функции u_n $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют, очевидно, монотонно убывающую последовательность, и по принципу Харнака существует предел

$$\lim u_n(t) = u_\infty(t),$$

представляющий собой регулярную неотрицательную гармоническую функцию в круге $|t| < 1$.

В частности, отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_\nu g(t, t_\nu) \tag{10.18}$$

и

$$u(t) = \sum_\nu g(t, t_\nu) + u_\infty(t). \tag{10.19}$$

10.40. Рассмотрим теперь несколько подробнее сумму (10.18). Для $t = 0$ получается сходимость ряда [1])

$$\sum_\nu{}' g(0, t_\nu) = \sum_\nu{}' \ln \frac{1}{|t_\nu|}.$$

Но для сходимости последней суммы необходимо и достаточно, чтобы расстояния от точек t_ν до окружности $|t| = 1$ имели конечную сумму:

$$\sum_\nu (1 - |t_\nu|) < \infty. \tag{10.20}$$

С другой стороны, это условие достаточно для того, чтобы сумма (10.18) сходилась для *всех* $|t| < 1$, притом равномерно для $|t| \leqslant r < 1$.

Следовательно, если ряд (10.20) сходится, то выражение (10.18) представляет собой регулярную положительную гармоническую функцию в круге $|t| < 1$, исключая полюсы t_ν. Если выполнить преобразование группы (T), то t_ν только меняются местами, следовательно, и члены в (10.18), откуда вытекает, что это выражение автоморфно относительно группы (T). Если теперь с помощью отображения

[1]) Штрих у Σ означает, что исключается значение $t_\nu = 0$, если оно имеется. — *Прим. перев.*

$E \to \hat{R} \to R$ вернуться к поверхности R, то (10.18) преобразуется в функцию $U(z)$, которая на R однозначна, положительна и, с точностью до полюса $z = \zeta$, гармонична. Так как $u_\infty \geqslant 0$, то, в силу (10.19),

$$g(z, \zeta) \geqslant U(z).$$

Отсюда, на основании минимального свойства функции Грина, вытекает, что $g \equiv U$. Поэтому $u_\infty \equiv 0$ и, следовательно, функция Грина $g(z, \zeta)$ в круге $|t| < 1$ представляется суммой (10.18).

Этим доказано следующее:

Для того, чтобы открытая риманова поверхность R имела нулевую границу, необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_\nu (1 - |t_\nu|),$$

где $t_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ — точки E, лежащие над произвольной фиксированной точкой $z = \zeta$ поверхности.

10.41. Автоморфные функции. Все, что выше было сказано о взаимосвязи между гармоническими функциями на римановой поверхности R и соответствующими автоморфными потенциалами на универсальной поверхности наложения $E = \hat{R}$ поверхности R, может быть соответственно перенесено на аналитические функции (коварианты) и автоморфные функции (коварианты). Следовательно, общие теоремы существования для функций на римановой поверхности содержат также доказательство существования и для фундаментальных классов автоморфных функций. Наоборот, в основанной Пуанкаре общей теории автоморфных функций исходным пунктом служит группа преобразований наложения поверхности $\hat{R}$, и автоморфные функции строятся аналитически с помощью θ-рядов Пуанкаре. В это прямое построение теории автоморфных функций мы здесь углубляться не можем.

§ 6. АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

10.42. Определение интегралов. Под абелевым интегралом первого рода на заданной римановой поверхности R в общем случае понимают интеграл

$$F(z) = \int f(z)\, dz \tag{10.21}$$

от коварианты $f(z)$, *однозначной* и *регулярной* всюду на R. Интеграл, вообще говоря, многозначен: на замкнутых путях, не гомологичных нулю, он обладает периодами.

Коварианты $f(z)$ первого рода образуют линейное пространство A: вместе с f также и λf является ковариантой пространства A, вместе с f_1 и f_2 — и их сумма $f_1 + f_2$. В то время как в случае замкнутой

поверхности R пространство A имеет конечную размерность (равную роду p поверхности), число линейно независимых элементов f для открытой поверхности в общем случае бесконечно велико.

10.43. Если ставится задача построить теорию абелевых интегралов первого рода для открытых поверхностей так, чтобы сохранились существенные черты классической теории, справедливой для замкнутых поверхностей, то предыдущее определение абелева интеграла, очевидно, будет слишком общим. В самом деле, естественным требованием к обобщенной теории будет следующее условие: если замкнутая поверхность R превращается в открытую поверхность R' путем удаления произвольной ее точки $z=\zeta$, то подлежащая построению теория, справедливая для открытых поверхностей, для поверхности R' должна быть *тождественной* с классической теорией, имеющей место для R.

Это условие при общем определении п. 10.42 еще, очевидно, не выполняется. Действительно, пусть, например, R — замкнутая поверхность рода p $(0 \leqslant p < \infty)$; тогда пространство A имеет размерность p: оно строится с помощью базиса, имеющего p линейно независимых элементов. Рассмотрим теперь *открытую* поверхность R', получаемую из R удалением точки $z=\zeta$. На этой поверхности имеется *более* p линейно независимых ковариант f, которые (на R') удовлетворяют условиям п. 10.42. Кроме p линейно независимых ковариант $f_1, \ldots, f_p$ первого рода на R, элемент пространства A на R' определяет, например, каждая коварианта *второго* рода на R, имеющая полюс в точке $z=\zeta$.

Это элементарное замечание показывает, что сохранение основ классической теории возможно только при наложении на коварианты f некоторых ограничений, которые так регуляризуют поведение f в окрестности идеальной границы Γ, что достигается требуемое согласие с классической теорией. Например, для случая поверхности с выколотой точкой из этих добавочных условий должна следовать устранимость особенности в точке $z=\zeta$ и, следовательно, регулярная продолжаемость ковариант f на R.

10.44. Такое естественное конформно инвариантное ограничение состоит в требовании *интегрируемости с квадратом* коварианты f (ср. мою работу [3]):

Интеграл Дирихле от f по всей поверхности R должен быть конечен, т. е.

$$\iint_R |f|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

Определенный таким образом подкласс A ковариант снова является линейным пространством.

10.45. Гильбертово пространство H. В предыдущем исследовании мы уже неоднократно использовали конформно инвариантный интеграл Дирихле в качестве квадрата *нормы* $\|f\|$ коварианты f. Эта идея имеет важное значение для систематического построения теории абелевых интегралов первого рода. Итак, в дальнейшем мы рассматриваем подпространство A ковариант с *конечной нормой* и определяем здесь произведение двух ковариант как интеграл

$$(f_1, f_2) = \iint_R f_1 \bar{f}_2 \, dx\, dy.$$

Тогда норма $\|f\|$ определяется как положительный квадратный корень из

$$\|f\|^2 = (f, f) = \iint_R |f|^2 \, dx\, dy.$$

Абсолютная сходимость интеграла, определяющего произведение, следует из конечности норм сомножителей, в силу неравенства Буняковского — Шварца

$$|(f_1, f_2)| \leqslant \|f_1\| \cdot \|f_2\| \text{ [1]},$$

из которого также следует неравенство треугольника

$$\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Метризованное таким образом подпространство A, которое будет предметом нашего дальнейшего исследования, мы обозначим через H.

10.46. Полнота пространства H. Чтобы показать, что H есть *гильбертово пространство*, нам нужно еще доказать, что H сепарабельно и полно.

Полнота означает справедливость критерия Коши для сходимости „по норме“: если $f_1, f_2, \ldots$ — бесконечная последовательность элементов из H, для которой при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $n = n_\varepsilon$, что

$$\|f_{n+p} - f_n\| < \varepsilon \quad \text{для} \quad n > n_\varepsilon, \; p > 0, \tag{10.22}$$

то существует предельный элемент

$$f = \lim f_n,$$

принадлежащий H [2]).

---

[1]) Равенство здесь стоит только тогда, когда f_1 и f_2 линейно зависимы.

[2]) Обычное определение полноты требует, чтобы из (10.22) следовало существование элемента $f \in H$, такого, что $\|f - f_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. В тексте доказывается равномерная сходимость f_n (по компактным подобластям $G \subset R$) к элементу $f \in H$; отсюда легко следует сходимость f_n к f по норме. — *Прим. перев.*

Это свойство играло уже важную роль в исследованиях гл. IX. Ввиду его значения, мы хотим еще коротко остановиться на его доказательстве при сделанных общих предположениях.

10.47. В качестве леммы используется теорема Бибербаха о площадях (ср. п. 9.21): если $F(z)$ — регулярная аналитическая функция в круге $|z|<1$, то для производной $f(z)=F'(z)$ справедливо неравенство

$$|f(z)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi(1-r)^2} \iint\limits_{|z|\leqslant 1} |f(z)|^2\, dx\, dy$$

для $|z|\leqslant r<1$.

Следовательно, если имеет место (10.22), то в любом параметрическом круге $|z|\leqslant r<1$

$$|f_{n+p}(z)-f_n(z)|^2 < \frac{\varepsilon^2}{\pi(1-r)^2}.$$

Так как любую компактную часть G поверхности R можно покрыть конечным числом параметрических кругов, то отсюда вытекает, что для последовательности f_n выполняется *обычный* критерий сходимости Коши. Следовательно, она сходится к величине

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z),$$

являющейся регулярной аналитической ковариантой на поверхности R.

Далее[1]), для фиксированного $n>n_\varepsilon$ имеем

$$\|f\|_G \leqslant \|f_n\|_G + \|f-f_n\|_G \leqslant \|f_n\|_G + \lim_{p\to\infty} \|f_{n+p}-f_n\|_G \leqslant \|f_n\| + \varepsilon,$$

а так как это имеет место для каждой компактной части $G\subset R$, то и

$$\|f\| \leqslant \|f_n\| + \varepsilon.$$

Следовательно, норма f конечна и f принадлежит пространству H. Этим полнота пространства H доказана.

10.48. Сепарабельность. Сепарабельность пространства означает, что оно имеет *счетное* всюду плотное множество элементов. Это свойство также можно было бы доказать для H прямо, используя аналитичность элементов f. Однако мы здесь заметим, что сепарабельность H непосредственно следует из теоремы Фишера — Рисса. Согласно этой теореме, система всех функций, определенных в некоторой области R и интегрируемых по Лебегу на этой области вместе со своими квадратами, образует гильбертово, поэтому,

---

[1]) Как и раньше, мы обозначаем через $\|f\|_G$ интеграл Дирихле от f по области G.

в частности, и сепарабельное пространство. Следовательно, если вместо аналитических ковариант f рассматривать более общее множество всех комплекснозначных ковариант на R, интегрируемых по Лебегу на R вместе со своими квадратами, то это множество сепарабельно. Но подпространство сепарабельного метрического пространства само сепарабельно.

10.49. Ортогональные системы. По предыдущему, существует последовательность ковариант, всюду плотная в пространстве H. Ортогонализируя эту последовательность по методу Шмидта [1]), получаем ортонормированный базис

$$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots,\quad (f_i,\ f_k) = \delta_{ik},$$

пространства H.

Каждая коварианта $f \in H$ может быть одним и только одним способом разложена в ряд по элементам базиса (f_n):

$$f = \sum_n c_n f_n, \qquad c_n = (f,\ f_n). \tag{10.23}$$

Этот ряд сходится не только по норме, но, согласно п. 10.47, даже в обычном смысле, и притом равномерно на каждой компактной части G пространства R.

Сумма квадратов модулей коэффициентов

$$\sum |c_n|^2$$

равна квадрату $\|f\|^2$ нормы f.

Обратно, каждый ряд (10.23) со сходящейся суммой квадратов модулей коэффициентов определяет элемент f, норма которого равна квадратному корню из этой суммы. Следовательно, формула (10.23) при условии

$$\sum |c_n|^2 < \infty$$

дает совокупность всех элементов пространства H.

С помощью унитарных преобразований

$$\varphi_i = \sum_k a_{ik} f_k,$$

где

$$\sum_h a_{ih} \bar{a}_{kh} = \delta_{ik},$$

получаем совокупность всех ортонормированных базисов пространства H [2]).

---

[1]) Тривиальный случай $H \equiv 0$ мы здесь исключаем; в дальнейшем мы еще вернемся к соответствующему ему классу поверхностей.

[2]) Доказательство этого известного факта из общей теории ортогональных систем читатель может найти в соответствующей литературе.

Позднее мы еще исследуем подробнее взаимосвязь между числом элементов базиса и топологическими свойствами поверхности R. При этом, в частности, получится, что для *замкнутой* поверхности R с выколотой точкой это число *конечно* и равно роду p поверхности R. Построенный выше базис совпадает тогда с системой, рассмотренной в гл. V, и пространство H в этом частном случае действительно совпадает с пространством классических абелевых ковариант, что выше было уже выставлено в качестве требования к обобщенной теории.

10.50. Бергманова билинейная форма. Бергман [1*] и Бохнер [1] ввели в теорию аналитических ортогональных систем билинейную форму, имеющую важное значение для теории таких систем. Эта форма получается в результате решения следующей задачи.

Пусть ζ — произвольная точка поверхности R. Требуется найти коварианту $\varphi(z, \zeta)$ переменной z, которая принадлежит пространству H и устроена так, что для каждой коварианты $f \in H$ значение $f(\zeta)$ при фиксированном выборе локального параметра точки ζ равно скалярному произведению f и φ:

$$f(\zeta) = (f, \varphi).$$

Решение этого интегрального уравнения легко получается применением следующей известной теоремы из общей теории линейных операторов [1]): если $L(f)$ — ограниченный линейный функционал, определенный на гильбертовом пространстве:

$$|L(f)| \leqslant M\|f\| \quad (M \text{ — конечная постоянная}),$$

то существует один и только один элемент g из H, такой, что [2])

$$L(f) = (f, g).$$

Если положить $L(f) = f(\zeta)$, то L будет линейным функционалом от f, ограниченным в силу теоремы Бибербаха о площадях. Следовательно, для каждой точки ζ и соответствующего локального параметра действительно существует один и только один элемент $\varphi(z, \zeta) \in H$, такой, что

$$f(\zeta) = (f, \varphi).$$

---

[1]) Мы следуем здесь методу Лехто [1]; им было показано, что этот метод ведет к бергмановой форме и при более общих условиях, чем здесь предположенные.

[2]) Единственность g очевидна. Для определения g рассматривают подпространство, на котором $L(f) = 0$. Если оно совпадает со всем пространством, то $g = 0$; если же нет, то

$$g = \frac{\overline{L(h)}}{\|h\|^2} h,$$

где $h \neq 0$ — элемент из H, ортогональный к подпространству, на котором $L(f) = 0$ [см. Ахиезер и Глазман [1**], п. 16. — *Прим. перев.*]

Пусть теперь $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... — полная ортонормированная система пространства H. Тогда коэффициенты Фурье элемента $\varphi(z, \zeta)$ по этой системе равны

$$c_n = (\varphi, f_n) = (\overline{f_n, \varphi}) = \overline{f_n(\zeta)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\varphi(z, \zeta) = \sum_n f_n(z)\overline{f_n(\zeta)}. \tag{10.24}$$

Следовательно, этот ряд, „ядро“ [1]), сходится равномерно в каждой компактной части G поверхности R и

$$\sum_n |f_n(\zeta)|^2 = \|\varphi\|^2 < \infty. \tag{10.25}$$

Бергманова форма удовлетворяет соотношению симметрии

$$\varphi(z, \zeta) = \overline{\varphi(\zeta, z)}.$$

Следовательно, $\varphi(z, \zeta)$ является ковариантой пространства H относительно сопряженного значения параметра ζ.

Заметим, что, в силу единственности φ, суммы (10.24) и (10.25) не зависят от выбора базиса (f_n).

10.51. Экстремальное свойство ядра. Введенная Бергманом и Бохнером коварианта обладает следующим важным минимальным свойством:

Среди всех ковариант $f(z)$ пространства H, которые в заданной точке $z = \zeta$ (при фиксированном выборе локального параметра z) удовлетворяют условию $f(\zeta) = 1$, коварианта

$$f_0(z, \zeta) = \frac{\varphi(z, \zeta)}{\varphi(\zeta, \zeta)} = \frac{\varphi(z, \zeta)}{\|\varphi\|^2}$$

имеет наименьшую норму.

Доказательство. Из основного свойства ядра $\varphi(z, \zeta)$ следует, по неравенству Буняковского — Шварца, что

$$1 = |f(\zeta)| = |(f, \varphi)| \leqslant \|f\| \|\varphi\| = \frac{\|f\|}{\|f_0\|},$$

поэтому

$$\|f_0\| \leqslant \|f\|,$$

что и требовалось доказать.

Равенство $\|f_0\| = \|f\|$ возможно только при наличии линейной зависимости между f_0 и f, откуда, учитывая условие $f = f_0 = 1$ для $z = \zeta$, следует, что $f \equiv f_0$.

---

[1]) Бергман называет эту форму „ядерной функцией“ (Kernfunktion); учитывая ковариантный характер формы, пожалуй, предпочтительнее называть ее ядром.

Замечание. Предыдущая задача, очевидно, предполагает, что пространство H не сводится к нулевому элементу; этот исключительный случай действительно возможен: например, он имеет место для каждой замкнутой поверхности рода нуль. Мы дальше (§ 8) увидим, что класс поверхностей R рода нуль, для которых H есть нулевое пространство, совпадает с классом *поверхностей, подобных однолистным, у которых емкость границы равна нулю.*

10.52. Размах. Предыдущая экстремальная теорема указывает на ее связь с минимальным свойством п. 9.37, имеющим место для поверхностей R, подобных однолистным. И действительно, это последнее свойство непосредственно следует из теоремы п. 10.51. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим для произвольной поверхности R, подобной однолистным, вместо гильбертова пространства *всех* интегрируемых с квадратом ковариант подпространство H_1 тех из этих ковариант, которые являются *полными*, т. е. у которых интегралы $F=\int f\,dz$ *однозначны* на R. Это подпространство замкнуто[1]) и, следовательно, само является гильбертовым пространством. Поэтому к нему непосредственно применимы результаты п. 10.51. Отсюда заключаем, что образованная с помощью полной ортонормированной системы $f_1, \ldots, f_n, \ldots$ пространства H_1 билинейная форма

$$\varphi(z, \zeta)=\sum_n f_n(z)\overline{f_n(\zeta)},$$

разделенная на $\varphi(\zeta, \zeta)$, имеет наименьшую норму среди всех ковариант f пространства H_1, удовлетворяющих условию $f(\zeta)=1$ в точке $z=\zeta$; это предполагает, что H_1 не есть нулевое пространство, т. е. что H_1 содержит хотя бы одну ковариванту $f\not\equiv 0$. Для минимума имеем тогда значение

$$\|\varphi^{-1}\|=(\sum_n |f_n(\zeta)|^2)^{-1/2}.$$

Сравнение с теоремой о минимуме п. 9.37 показывает, что ковариванта $\pi\varphi(z, \zeta)$ совпадает с экстремальной ковариантой п. 9.37 и что размах $s(\zeta)$ поверхности R имеет значение

$$s(\zeta)=\pi\sum_n |f_n(\zeta)|^2.$$

Следовательно, подобные однолистным поверхности R с нулевым размахом — это те и только те поверхности, для которых подпро-

[1]) Действительно, если φ_n — сходящаяся последовательность полных дифференциалов, $\varphi_n \to \varphi$, то $\int \varphi\,dz=0$ вдоль каждого 1-цикла и поэтому φ — также полный дифференциал; в самом деле, ковариванта полна тогда и только тогда, когда ее интеграл равен нулю вдоль каждого 1-цикла.

странство *полных* дифференциалов с конечной нормой содержит только нулевой элемент $f = 0$. Поверхности, подобные однолистным, *с нулевой границей* образуют правильную часть множества поверхностей с нулевым размахом.

10.53. Метрика Бергмана. Если пространство H не есть нулевое пространство, норма

$$\|\varphi(z, \zeta)\| = \sqrt{|\varphi(\zeta, \zeta)|} = \sqrt{\sum_n |f_n(\zeta)|^2}$$

является неотрицательной ковариантной величиной; поэтому она пригодна для введения римановой метрики на поверхности R. Инвариантный дифференциал

$$d\tau = |\varphi(z, z)|\,|dz| = \sqrt{\sum_n |f_n(z)|^2}\,|dz|$$

мы определяем вместе с Бергманом [1*] как „длину" элемента дуги dz.

10.54. Между метрикой Бергмана и рассмотренной в п. 7.4 метрикой Пуанкаре имеется следующее соотношение (Бергман [1*]):

Для односвязной римановой поверхности гиперболического типа обе метрики совпадают.

Доказательство. Так как и в метрике Пуанкаре, и в метрике Бергмана длина дуги ds, соответственно $d\tau$, инвариантна относительно конформных отображений, то, по теореме Римана об отображении, доказательство достаточно провести для случая, когда R есть единичный круг $E(|z| < 1)$. Множество всех функций, аналитических в E, строится с помощью степеней z^n $(n = 0, 1, \ldots)$. Полагая

$$f_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n,$$

получаем ортонормированный (в смысле метрики пространства H) базис пространства H:

$$(f_i, f_k) = \delta_{ik}.$$

Тогда бергманово ядро есть

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\, z^n\bar{\zeta}^n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-z\bar{\zeta}}\right)^2,$$

и мы имеем

$$d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{|dz|}{1-|z|^2}.$$

Но это (с точностью до множителя $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, который не играет существенной роли) — линейный элемент в метрике Пуанкаре. Кривизна в этом случае постоянна и отрицательна $(= -4\pi)$.

10.55. Теперь мы рассмотрим совершенно произвольную риманову поверхность, для которой пространство не вырождается в нулевое пространство (см. пп. 10.49 и 10.51). Для кривизны K имеем выражение

$$K = -\frac{\Delta \ln \frac{d\tau}{|dz|}}{\left(\frac{d\tau}{|dz|}\right)^2}.$$

Если здесь написать

$$\left(\frac{d\tau}{|dz|}\right)^2 = \sum f_n(z)\overline{f_n(z)},$$

то, согласно формуле (см. п. 3.9)

$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \cdot \partial \bar{z}}$$

и соотношению $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ для аналитической функции от z, получаем для K выражение [1]) (Бергман [1*])

$$K = -2\frac{\sum |f_n|^2 \sum |f_n'|^2 - |\sum f_n \bar{f}_n'|^2}{\left(\sum |f_n|^2\right)^3}.$$

Но, по тождеству Лагранжа, числитель здесь равен

$$\frac{1}{2}\sum_{i,\,k} |f_i f_k' - f_k f_i'|^2,$$

следовательно,

$$K = -\frac{\sum\limits_{i,\,k} |f_i f_k' - f_k f_i'|^2}{\left(\sum\limits_n |f_n|^2\right)^3}.$$

Итак, *кривизна метрики Бергмана неположительна.* Нулю она равна в том и только в том случае, если

$$d \ln f_i = d \ln f_k \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots);$$

но это имеет место тогда и только тогда, когда отношение $f_1 : f_2 : \ldots$ постоянно. Так как ортонормированные коварианты f_n линейно неза-

---

[1]) Здесь положено $f_n' = df_n/dz$. Абсолютная сходимость следующих рядов получается из сходимости ряда $\sum |f_n|^2$. Если z — заданная точка, то рассматриваем некоторый параметрический ее круг K и образуем двойной интеграл этого рода по K. Тогда применение теоремы Бибербаха о площадях к каждому члену показывает, что ряды $\sum\limits_n |f_n^{(\nu)}|^2$, образованные с помощью производных $f_n^{(\nu)}$ от ковариант f_n, сходятся для каждого ν.

висимы, то в этом случае базис (f_n) состоит из одного-единственного элемента f_1 и все пространство H образовано ковариантами $f=\lambda f_1$, где λ — постоянная. Если R — замкнутая поверхность, то отсюда следует, что ее род $p=1$. И действительно, для поверхности тора метрика Бергмана имеет нулевую кривизну. Если R — открытая поверхность, то, как мы увидим (см. п. 10.86), ее род снова равен 1 и идеальная граница есть нулевая граница. Следовательно, соответствующая геометрия тогда *евклидова*.

Другой экстремальный случай представляют односвязные поверхности R гиперболического типа. Как было показано в п. 10.54, в этом случае метрика Бергмана совпадает с метрикой Пуанкаре и соответствующая геометрия на R гиперболична.

§ 7. ПОДПРОСТРАНСТВА ИНТЕГРИРУЕМЫХ С КВАДРАТАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

10.56. Разложение пространства H. Рассмотренное в предыдущем параграфе линейное пространство интегрируемых с квадратами абелевых ковариант f, превращенное в гильбертово пространство путем введения в качестве нормы квадратного корня из интеграла Дирихле, будет теперь разложено на некоторые важные подпространства [1]).

Во-первых, рассмотрим множество $[f]$ тех ковариант из H, которые *полны*, т. е. для которых интегралы $F=\int f\,dz$ на заданной поверхности R *однозначны*, так что, следовательно, все их периоды равны нулю. Вместе с бесконечным множеством этих ковариант к множеству $[f]$ принадлежат и их предельные (в смысле топологии H, определяемой нормой) элементы. В силу замкнутости, множество $[f]$ снова является гильбертовым пространством (ср. п. 10.48).

Во-вторых, рассмотрим множество всех элементов, ортогональных к $[f]$; они также образуют замкнутое гильбертово подпространство H' пространства H. За исключением нулевого элемента $f\equiv 0$, коварианты этого ортогонального дополнения $[f]$ уже не полны.

Теперь мы разлагаем дополнение H', выделяя множество $[\varphi]$ ковариант из H, которые ортогональны к полным ковариантам $[f]$ и удовлетворяют дополнительному условию, состоящему в том, что интеграл $\Phi=\int \varphi\,dz$ *вдоль путей, разбивающих* R, *равен нулю*. Мно-

---

[1]) В связи с последующим исследованием укажем на работу Виртанена [2], где теоремы разложения мы находим в несколько ином представлении. Доказательства Виртанена основаны на применении бергмановой билинейной формы. Относительно частных случаев поверхностей с нулевой границей и сингулярных поверхностей ср. мою работу [3], а также работу Альфорса [1].

жество $[\varphi]$ замкнуто, следовательно, также является гильбертовым пространством.

Наконец, пусть $[\psi]$ — множество всех ковариант из H, ортогональных к $[f]$ и $[\varphi]$.

С помощью этих трех попарно ортогональных „осей" $[f]$, $[\varphi]$, $[\psi]$ пространства H каждую коварианту поверхности R можно единственным образом представить в виде суммы $f+\varphi+\psi$, члены которой означают проекции данной коварианты на три указанные оси.

В дальнейшем мы хотим это разложение H получить конструктивно, путем представления подпространств $[\varphi]$ и $[\psi]$ с помощью некоторых систем нормальных ковариант.

10.57. Системы образующих группы гомологий. Для дальнейшего мы нуждаемся в системе образующих (γ_ν) группы гомологий римановой поверхности R, обладающей таким частным свойством:

В каждом классе гомологий (γ_ν) *имеется простой* (*не имеющий двойных точек*) *путь* („*циклическое сечение*" — Rückkehrschnitt) γ_ν [1]).

Такой системой является, например, множество *всех* классов гомологий (γ) поверхности R, которые содержат циклическое сечение γ. В самом деле, если исчерпывать R с помощью монотонной последовательности компактных на ней поверхностей R^n с краем, то каждый цикл z содержится в R^n, начиная с некоторого n, и, следовательно, гомологичен линейной комбинации соответствующих канонических разрезов a_ν^n, b_ν^n и граничных контуров c_ν^n. Множества соответствующих классов гомологий порождают тогда уже всю группу гомологий.

10.58. Пусть (γ_ν) — система образующих указанного выше вида. Среди классов (γ_ν) мы выделяем теперь множество тех классов, которые содержат циклические сечения, *разбивающие поверхность*. Тогда, по лемме, которая будет доказана в п. 10.59, *каждое* сечение такого класса разбивает R; поэтому имеет смысл говорить о *разбивающих классах* (γ_ν). Эти классы мы обозначаем через (β); к ним, во всяком случае, принадлежит класс путей, гомологичных нулю. Остающиеся „неразбивающие" классы (γ_ν) мы обозначаем через (α). Для поверхностей R, подобных однолистным (и только для них), это множество пусто.

Рассмотрим в качестве простого примера поверхность с краем рода p. За (β) в этом случае (после удаления граничных контуров) можно принять классы гомологий граничных контуров, а за (α) — классы канонических сечений.

---

[1]) Не будет ограничением общности предположение, что циклические сечения кусочно-аналитичны; ниже мы будем это предполагать.

10.59. Теперь докажем использованную выше лемму.

Лемма. *Пусть γ и γ' — два гомологичных сечения на поверхности R. Если путь γ не разбивает поверхность, то путь γ' также ее не разбивает.*

Для доказательства сначала покажем, что не разбивающий путь γ не разбивает также каждую достаточно большую компактную поверхность с краем $R^* \subset R$. В самом деле, пусть P — точка на γ. В соответствующей параметрической окрестности мы выбираем две точки P_1 и P_2 на различных сторонах пути γ (относительно этой окрестности). По предположению, на R имеется тогда путь P_1P_2, соединяющий P_1 и P_2 и не встречающий путь γ. Пусть теперь R^* — компактная поверхность с краем на R, которая содержит γ и P_1P_2. Тогда γ не разбивает R^*. Для того, чтобы это доказать, нужно показать, что всякие две точки Q_1 и Q_2 поверхности R^*, не лежащие на γ, можно соединить на R^* путем w, который не пересекается с γ. Но каждая точка $Q \in R^*$ может быть соединена *либо* с P_1, *либо* с P_2 путем, не встречающим γ. Если, например, точка Q_1 может быть таким образом соединена с P_1 путем Q_1P_1 и если Q_2P_ν ($\nu=1, 2$) — подобный же путь для пары Q_2, P_ν, то $Q_1P_1Q_2$ для $\nu=1$ и $Q_1P_1P_2Q_2$ для $\nu=2$ есть путь на R^*, соединяющий Q_1 и Q_2 и не встречающий путь γ; следовательно, γ не разбивает поверхность R^*.

Чтобы теперь доказать лемму, возьмем поверхность R^*, которую γ также не разбивает, столь большой, что гомология $\gamma \sim \gamma'$ имеет место уже на R^*. По лемме п. 10.2[1]), циклическое сечение γ не гомологично *никакой* линейной комбинации граничных контуров R^*, следовательно, то же самое справедливо для пути γ'. Следовательно, по той же лемме п. 10.2, он не разбивает поверхность R^*. Тогда γ' не разбивает и объемлющей поверхности R, что и требовалось доказать.

10.60. Неразбивающие пути. Потенциалы u_α. Теперь мы из каждого неразбивающего класса (α) выбираем кусочно-аналитический путь α, не имеющий двойных точек, и строим, согласно п. 10.35, соответствующий нормальный потенциал u_α первого рода, однозначно определенный следующими условиями:

1. u_α однозначен и гармоничен на поверхности R с разрезом вдоль α.

2. При переходе через циклическое сечение α потенциал u_α испытывает скачок, равный 1.

3. Если R_0 — компактная часть R, содержащая α, то u_α на дополнительной части $R - R_0$ поверхности удовлетворяет нормирующему условию (10.1) п. 10.14.

---

[1]) Всегда можно указать триангуляцию поверхности R, в которой заданный (кусочно-аналитический) путь является симплициальным путем. Поэтому лемма п. 10.2 применима.

Согласно п. 10.23, интеграл Дирихле дифференциала du_α конечен; следовательно, если к du_α добавить сопряженный дифференциал du'_α, то $du_\alpha + i\,du'_\alpha$ будет дифференциалом пространства H.

10.61. Разбивающие пути. Пусть теперь (β) — разбивающий класс и β — кусочно аналитический путь из этого класса, не имеющий двойных точек. Пусть R_β и $\bar{R}_\beta$ означают соответствующие взаимно дополнительные части R. Нас интересует тот случай, когда R_β и $\bar{R}_\beta$ обе *некомпактны*. Тогда, кроме общей граничной части β, они имеют еще идеальные граничные компоненты Γ_β и соответственно $\bar{\Gamma}_\beta$, которые вместе образуют всю идеальную границу Γ поверхности R. В нижеследующем исследовании учитывается, понятно, и тот (тривиальный) случай, когда область R_β или $\bar{R}_\beta$ компактна и, следовательно, идеальная граница Γ_β, соответственно $\bar{\Gamma}_\beta$, отсутствует.

10.62. Потенциалы u_β. Каждому разбивающему циклу β мы ставим в соответствие гармоническую функцию u_β с помощью следующего построения.

Аппроксимируем R_β и $\bar{R}_\beta$ двумя последовательностями компактных областей R^n, $\bar{R}^n$ $(n = 1, 2, \ldots;\ R^n \subset R^{n+1} \to R_\beta$ и $\bar{R}^n \subset \bar{R}^{n+1} \to \bar{R}_\beta)$, для которых β является общей граничной кривой. Дополнительные к β части границы R^n и $\bar{R}^n$ пусть будут соответственно Γ_n и Γ_{-n} $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть тогда R_{mn} означает ту (ограниченную Γ_m и Γ_{-n}) компактную часть R, которая получается соединением R^m и $\bar{R}^n$ вдоль β. Рассмотрим гармоническую меру ω_{mn} Γ_m относительно R_{mn}, т. е. ту гармоническую функцию на R_{mn}, которая однозначно определена граничными значениями 1 на Γ_m и 0 на Γ_{-n}. Повторением уже многократно применявшегося предельного перехода (принцип Харнака) докажем сначала, что ω_{mn} при $n \to \infty$ сходится к некоторой предельной функции ω_m, которая есть не что иное, как определенная в п. 10.8 гармоническая мера кривой Γ_m относительно некомпактной области $R_m = \lim\limits_{n\to\infty} R_{mn}$, ограниченной Γ_m и идеальной граничной компонентой $\bar{\Gamma}_\beta$. Устремляя теперь m к ∞ и еще раз применяя принцип Харнака, найдем, что ω_m стремится к пределу

$$u_\beta(z) = \lim_{m\to\infty} \omega_m = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \omega_{mn},$$

представляющему собой ограниченную гармоническую функцию $(0 \leqslant u_\beta \leqslant 1)$ на заданной поверхности R; u_β принимается за гармоническую меру граничной компоненты Γ_β относительно R.

Согласно п. 10.21, каждая функция ω_n в R_ν ($\nu \leqslant n$) является *нормированной*, и то же самое справедливо тогда для предельной функции в каждой области R_ν, и в частности в $\bar{R}_\beta$.

10.63. Теперь мы различаем два основных случая, соответственно тому, равна ли нулю или положительна гармоническая мера граничной компоненты $\bar{\Gamma}_\beta$ относительно $\bar{R}_\beta$.

В первом случае $\omega_m \equiv 1$ в R_m ($m = 1, 2, \ldots$), следовательно, и $u_\beta \equiv 1$.

Во втором случае имеет место теорема:

Гармоническая мера граничной компоненты Γ_β относительно R_β равна нулю тогда и только тогда, когда u_β есть постоянная, притом равная нулю.

В самом деле, если мы сначала предположим, что гармоническая мера Γ_β относительно R_β равна нулю, то, согласно п. 10.12, в R_β будет справедлив принцип максимума, и так как функция u_β в $\bar{R}_\beta$ является нормированной, то для нее этот принцип справедлив и в $\bar{R}_\beta$. Следовательно, потенциал u_β на кривой β достигает максимума, и поэтому u_β есть постоянная. Но, так как u_β — нормированное решение на поверхности $\bar{R}_\beta$ с *положительной* граничной компонентой $\bar{\Gamma}_\beta$, то (ср. п. 10.28) $u_\beta \equiv 0$.

Если, напротив, гармоническая мера ω граничной компоненты Γ_β относительно R_β *положительна*, то, по принципу максимума, $\omega_{mn} > \omega$ в пересечении $R_\beta R_{mn}$, откуда вытекает, что $u_\beta \geqslant \omega$ в R_β. Следовательно, в силу того, что $\omega > 0$, потенциал u_β также положителен и, в силу нормированности в $\bar{R}_\beta$, обязательно отличен от постоянной. Этим теорема доказана.

10.64. В итоге имеем, следовательно, такой результат: потенциал u_β тогда и только тогда есть постоянная, когда хотя бы одна из гармонических мер ω и $\bar{\omega}$ граничных компонент Γ_β и $\bar{\Gamma}_\beta$ относительно областей R_β, соответственно $\bar{R}_\beta$, равна нулю.

Обе меры ω и $\bar{\omega}$ одновременно равны нулю тогда и только тогда, когда вся поверхность $R = R_\beta + \bar{R}_\beta + \beta$ имеет нулевую границу.

В самом деле, если R имеет нулевую границу, то (по принципу максимума) как ω, так и $\bar{\omega}$ мажорируются гармонической мерой ω_0 любой фиксированной (не замкнутой дуги) β_0, принадлежащей β, относительно поверхности $R - \beta_0$, и эта мера $\omega_0 \equiv 0$, откуда следует, что $\omega = \bar{\omega} \equiv 0$.

Обратно, если $\omega = \bar{\omega} \equiv 0$, то из обобщенного принципа максимума п. 10.12 вытекает, что *каждая* ограниченная гармоническая функция на R достигает там максимума и, следовательно, есть по-

стоянная. Поверхность R не может тогда иметь конечной функции Грина и, следовательно, имеет нулевую границу.

10.65. Для дальнейшего важно еще такое замечание. Меняя ролями области R_β и $\bar{R}_\beta$, приходим к построению „гармонической меры" $\bar{u}_\beta$ граничной компоненты $\bar{\Gamma}_\beta$ относительно поверхности R. Если исключить случай, когда R имеет нулевую границу, то

$$u_\beta + \bar{u}_\beta \equiv 1. \tag{10.26}$$

В самом деле, это соотношение имеет место для определенных в R_{mn} аппроксимирующих функций, которые при $m, n \to \infty$ сходятся к потенциалам u_β и $\bar{u}_\beta$. Если проследить за этим предельным переходом указанным в п. 10.62 образом, то в случае, когда R не есть поверхность с нулевой границей (тогда $u_\beta = \bar{u}_\beta \equiv 1$), устанавливается справедливость соотношения п. 10.26 [1]).

10.66. Дифференциалы $df_\beta = du_\beta + i\,du'_\beta$, где u_β и u'_β — сопряженные гармонические функции, интегрируемы с квадратом на R. В самом деле, в силу соотношения (10.26), имеем $d\bar{u}_\beta = -du_\beta$, $|\operatorname{grad} u_\beta| = |\operatorname{grad} \bar{u}_\beta|$, и так как u_β является нормированной гармонической функцией на $\bar{R}_\beta$, а $\bar{u}_\beta$ — на R_β, то, в силу (7.7), имеем (учитывая направление обхода β в криволинейных интегралах)

$$\iint\limits_R |\operatorname{grad} u_\beta|^2\,dx\,dy = \iint\limits_{\bar{R}_\beta} |\operatorname{grad} u_\beta|^2\,dx\,dy + \iint\limits_{R_\beta} |\operatorname{grad} \bar{u}_\beta|^2\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_\beta u_\beta\,du'_\beta - \int\limits_\beta \bar{u}_\beta\,d\bar{u}'_\beta = \int\limits_\beta du'_\beta,$$

что и доказывает утверждение.

---

[1]) Для построения гармонической меры u_β (соответственно $\bar{u}_\beta = 1 - u_\beta$) в случае поверхности R с положительной границей напрашиваются и другие методы. Один из них состоит в применении альтернирующего метода п. 10.29, причем нужно принять кривую β в качестве сечения γ и положить $u_0 \equiv 0$ (ср. Бадер [1]). Другой метод получается из теории униформизации (ср. § 5 гл. X). Если конформно отобразить универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности R на единичный круг $|t| < 1$, то граничные точки $|t| = 1$ распадаются на два (линейно) измеримых множества точек γ_1 и γ_2 так, что точка $P(t)$ поверхности R, соответствующая некоторой точке t ($|t| < 1$), при радиальном приближении t к точке γ_1 стремится к Γ_β, в то время как γ_2 таким же образом соответствует граничной компоненте $\bar{\Gamma}_\beta$. Дополнительное к $\gamma_1 + \gamma_2$ множество точек на $|t| = 1$ имеет (линейную) меру нуль. Потенциалы u_β и $\bar{u}_\beta$ определяются тогда с помощью интегралов Пуассона ($t = re^{i\varphi}$):

$$u_\beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_1} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta, \quad \bar{u}_\beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma_2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\,d\theta.$$

10.67. Пространство $[f_\alpha, f_\beta]$. Теперь с помощью дифференциалов

$$f_\alpha dz = du_\alpha + i\,du'_\alpha, \quad f_\beta dz = du_\beta + i\,du'_\beta$$

мы строим (замкнутое) пространство $[f_\alpha, f_\beta]$ и доказываем следующую теорему:

Пространство $[f_\alpha, f_\beta]$ есть ортогональное дополнение H' к пространству $[f]$ полных ковариант.

Для доказательства нужно показать, что выполнение условий

$$(f, f_\alpha) = \iint\limits_R f\bar{f}_\alpha\,dx\,dy = 0, \quad (f, f_\beta) = \iint\limits_R f\bar{f}_\beta\,dx\,dy = 0 \qquad (10.27)$$

для каждого α и β необходимо и достаточно для того, чтобы интегрируемая с квадратом ковариант f была полной. Чтобы в этом убедиться, запишем $f\,dz = du + i\,du' = dF$ и применим (10.8) к потенциалу u_α, однозначному и нормированному на поверхности R_α, полученной из R проведением разреза вдоль α. Тогда будем иметь

$$(f_\alpha, f) = i \int\limits_{\alpha' + \alpha''} u_\alpha\,d\bar{F}, \qquad (10.28)$$

где интегрирование производится по обоим берегам α' и α'' сечения α в положительном направлении относительно поверхности R_α. Если учесть, что значения u_α на этих берегах отличаются на постоянную, равную 1, то отсюда, далее, вытекает, что

$$(f_\alpha, f) = i \int\limits_\alpha d\bar{F}.$$

Следовательно, первое условие ортогональности (10.27) необходимо и достаточно для того, чтобы период $F = \int f\,dz$ вдоль α был равен нулю:

$$\int\limits_\alpha dF = \int\limits_\alpha f\,dz = 0. \qquad (10.29)$$

10.68. Теперь мы выбираем произвольную ковариант f_β; так как действительная часть u_β интеграла $F_\beta = \int f_\beta\,dz = u_\beta + iu'_\beta$ есть нормированная гармоническая функция на $\overline{R}_\beta$, то, в силу (10.8), имеем

$$\iint\limits_{\overline{R}_\beta} f_\beta \bar{f}\,dx\,dy = i \int\limits_\beta u_\beta\,d\bar{F}$$

и, повторяя те же рассуждения для $\bar{u}_\beta = 1 - u_\beta$ на R_β, получаем

$$-\int_{R_\beta}\int f_\beta \bar{f}\, dx\, dy = i\int_\beta (1-u_\beta)\, d\bar{F}.$$

Криволинейные интегралы вдоль β берутся в положительном направлении относительно $\bar{R}_\beta$, соответственно R_β, следовательно, в противоположных направлениях. Вычитая обе формулы почленно, получаем

$$(f_\beta, f) = \int_R\int f_\beta \bar{f}\, dx\, dy = i\int_\beta d\bar{F},$$

следовательно, второе условие ортогональности (10.27) эквивалентно тому, что

$$\int_\beta dF = 0. \tag{10.30}$$

Таким образом, для того, чтобы коварианта f была ортогональна к ковариантам f_α и f_β, необходимо и достаточно, чтобы все периоды (10.29) и (10.30) равнялись нулю. Так как (α, β) — система образующих группы гомологий поверхности R, то последнее условие равносильно тому, что все периоды интеграла F равны нулю. Этим показано, что пространство $[f_\alpha, f_\beta]$, порожденное ковариантами f_α и f_β, и пространство $[f]$ полных интегрируемых с квадратом ковариант являются ортогональными дополнениями друг друга, что и требовалось доказать.

10.69. Разложение пространства $[f_\alpha, f_\beta]$. Согласно п. 10.56, нам нужно сейчас выделить в пространстве $[f_\alpha, f_\beta]$ подпространство $[\varphi]$ тех ковариант, периоды которых равны нулю вдоль всех путей, *разбивающих* поверхность R. Для ортогонального дополнения $[\psi]$ подпространства $[\varphi]$ относительно $[f_\alpha, f_\beta]$ справедлива следующая теорема:

Ортогональное дополнение $[\psi]$ *подпространства* $[\varphi]$ *порождается ковариантами* $[f_\beta]$.

Доказательство. Пусть χ — *произвольная* коварианта пространства H. Тогда, согласно п. 10.68, обращение в нуль периодов (10.30) интеграла $F = \int \chi\, dz$ на каждом пути β необходимо и достаточно для того, чтобы χ была ортогональна ко всем ковариантам f_β. Но, так как пути β порождают все пути, разбивающие R, то это равносильно тому, что периоды χ обращаются в нуль вдоль *каждого* разбивающего пути. Следовательно, ортогональное дополнение к $[f_\beta]$ есть пространство $[f]+[\varphi]$. Но это означает, что пространство $[f_\beta]$ есть ортогональное дополнение к пространству, образованному $[\varphi]$ и $[f]$.

10.70. Заключение. Итак, мы нашли следующее соотношение между тремя дополнительными пространствами $[f]$, $[\varphi]$ и $[\psi]$, с одной стороны, и ковариантами f_α, f_β, с другой:

1. Пространство $[\psi]$ порождается ковариантами (f_β).

2. Ортогональное дополнение пространства $[\psi] = [f_\beta]$, образованное всеми интегрируемыми с квадратами ковариантами, периоды которых вдоль всех разбивающих путей равны нулю, распадается на два ортогональных дополнения $[f]$ и $[\varphi]$; первые коварианты — полные, вторые — неполные. Последнее пространство, $[\varphi]$, порождается „нормалями" векторов f_α к пространству $[\psi] = [f_\beta]$, т. е. ковариантами

$$f_{\alpha\beta} = f_\alpha - \lambda_{\alpha\beta} f_\beta, \tag{10.31}$$

где

$$\lambda_{\alpha\beta} = \frac{(f_\alpha, f_\beta)}{\|f_\beta\|^2} \quad \text{или} \quad = 0,$$

в зависимости от того, $f_\beta \not\equiv 0$ или $f_\beta \equiv 0$. Член $\lambda_{\alpha\beta} f_\beta$ дает при этом проекцию f_α на f_β.

10.71. Поверхности конечного рода. Для открытой поверхности R *конечного* рода p образующая система (α), (β) может быть представлена особенно наглядным образом. Этот случай приводит к интересным результатам относительно разложения $[f] + [\varphi] + [\psi]$, о котором говорилось выше, поэтому мы более подробно исследуем этот класс поверхностей, которые могут быть наглядно представлены с помощью пространственных моделей п. 10.5 с конечным числом „колец" и некоторыми (в общем случае бесконечно разветвленными) „концами, подобными однолистным".

10.72. Система α, β. Для того, чтобы для произвольной открытой поверхности R конечного рода p построить образующую систему α, β, мы докажем сначала следующее утверждение.

Если R исчерпывается монотонной последовательностью компактных поверхностей R_n с краем, то для достаточно большого n каждый граничный контур c поверхности R_n разбивает поверхность R.

Для доказательства заметим, что (см. п. 10.4) род p_n поверхности R_n, начиная с некоторого n, равен p. Пусть n настолько велико, что $p_n = p$. Чтобы теперь показать, что каждый граничный контур c поверхности R_n разбивает R, достаточно показать, что каждый такой контур разбивает $R_m (m > n)$. Дополнение $R_m - R_n$ состоит из некоторых поверхностей, которые, согласно лемме, доказываемой в п. 10.74, все рода нуль и примыкают каждая к поверхности R_n в точности вдоль одного граничного контура. Пусть c — произвольный такой контур. Так как примыкающая к нему поверхность дополнения $R_m - R_n$ рода нуль, то c гомологичен сумме остальных граничных контуров этой поверхности. Но все они являются также граничными контурами R_m; следовательно, контур c гомологичен ли-

нейной комбинации граничных контуров R_m и поэтому, согласно лемме п. 10.2, разбивает R_m, что и требовалось доказать.

10.73. Мы переходим теперь к построению образующей системы α, β. Для этого начнем исчерпание R с поверхности R_1, уже имеющей род p. Тогда в качестве кривых α возьмем каноническую систему $a_\nu, b_\nu (\nu = 1, \ldots, p)$ поверхности R_1, а в качестве кривых β — все граничные контуры R_1 вместе со всеми граничными контурами следующих поверхностей R_m последовательности, исчерпывающей R. Согласно п. 10.72, соответствующие классы (β) являются *разбивающими* классами R. Напротив, классы (α) — *неразбивающие*, так как канонический разрез a_ν, соответственно b_ν, не разбивает даже R_1.

Далее, классы (α) и (β) вместе порождают всю группу гомологий поверхности R. В самом деле, если z — произвольный цикл на R и он лежит уже на R_1, то он является линейной комбинацией α и граничных контуров β поверхности R_1. Если же цикл z не лежит на R_1, то пусть m настолько велико, что z лежит на R_m. По лемме п. 10.74, дополнение $R_m - R_1$ распадается на непересекающиеся поверхности A_ν рода нуль, каждая из которых имеет в точности один общий с R_1 граничный контур. Следовательно, цикл z может быть записан в виде $z = z' + \sum_\nu z_\nu$, где z' лежит на R_1, а z_ν — на A_ν. Так как A_ν — рода нуль, то z_ν гомологичен линейной комбинации ее граничных контуров. Но каждый такой контур есть граничный контур R_1 или R_m, и тем самым доказательство сведено к уже рассмотренному случаю.

10.74. Лемма. Нам нужно теперь доказать следующую использованную выше лемму.

Пусть R и $R' (\supset R)$ — компактные поверхности с краем одного и того же рода p. Если и граничные контуры R лежат внутри R', то дополнение $R' - R$ состоит из конечного числа поверхностей рода нуль, каждая из которых имеет один и только один общий граничный контур с R.

Доказательство. Каждая составляющая поверхность $A_\nu (\nu = 1, \ldots, q)$ дополнения $R' - R$ имеет не менее одного общего граничного контура с R, следовательно, число r всех граничных контуров R удовлетворяет неравенству $r \geqslant q$. Пусть p_ν и r_ν — соответственно род и число граничных контуров поверхности A_ν; следовательно, ее характеристика $\chi_\nu = 2p_\nu - 2 + r_\nu$. Поверхность R' имеет $\sum_\nu r_\nu - r$ граничных контуров, следовательно, ее характеристика $\chi' = 2p - 2 + \sum_\nu r_\nu - r$. При соединении R и $R' - R$ характеристики складываются, следовательно,

$$2p - 2 + \sum_\nu r_\nu - r = 2p - 2 + r + \sum_{\nu=1}^{q} (2p_\nu - 2 + r_\nu),$$

поэтому имеем

$$q = r + \sum_{\nu} p_{\nu}.$$

Так как $r \geqslant q$, $p_{\nu} \geqslant 0$, то это возможно только тогда, когда $p_{\nu} = 0$ и $q = r$. Первое означает, что поверхности A_{ν} — рода нуль, а второе — что каждая поверхность A_{ν} может граничить с R только вдоль одного контура; таким образом, лемма доказана.

10.75. Гармонические дифференциалы. То, что выше было выведено для интегрируемых с квадратами аналитических дифференциалов, с небольшими изменениями справедливо и для гармонических дифференциалов du, интегрируемых с квадратом на римановой поверхности R, т. е. для которых интеграл Дирихле

$$\int\int_R |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\, dy$$

конечен.

Прежде всего множество (du) превращают в гильбертово пространство, определяя скалярное произведение дифференциалов du и dv как (абсолютно сходящийся) интеграл

$$(du, dv) = \int\int_R \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\, dy.$$

Далее снова рассматривают подпространства $[du^1]$, $[du^2]$ и $[du^3]$ дифференциалов, где $[du^1]$ состоит из всех полных дифференциалов du; $[du^2]$ — из дифференциалов du, которые ортогональны к $[du^1]$ и имеют равные нулю периоды вдоль всех разбивающих путей, и, наконец, $[du^3]$ — ортогональное дополнение первых двух пространств.

С помощью интегральной формулы (10.8) доказывают, что $[du^3]$ порождается рассмотренными выше дифференциалами $[du_\beta]$ и что $[du^2]$ получается с помощью проектирования нормальных дифференциалов du_α на пространство $[du^3] = [du_\beta]$; тогда $[du^2]$ порождается „нормалями“ дифференциалов du_α относительно du_β (т. е. разностями между du_α и указанными их проекциями).

§ 8. НЕКОТОРЫЕ КЛАССЫ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

10.76. Конформно инвариантные классы. В проблеме конформной эквивалентности римановых поверхностей нужно для каждого класса эквивалентных римановых поверхностей установить систему *конформных инвариант*, однозначно определяющих этот класс. Полное решение этой задачи до сих пор удалось лишь для простей-

ших римановых поверхностей. Ввиду большой общности проблемы едва ли можно ожидать, что с помощью известных в настоящее время методов удастся существенно продвинуться вперед. При таком положении вещей нужно пока удовлетвориться определением *отдельных* конформных инвариант, совпадение которых, следовательно, необходимо, но еще далеко не достаточно для конформной эквивалентности двух поверхностей. Такие неполные системы инвариант не определяют тогда *один* конформный класс, но выделяют из совокупности всех конформных классов некоторые характерные их подмножества. Конформно инвариантными свойствами, определяющими такие множества классов, являются прежде всего существование или несуществование некоторых простых классов аналитических или гармонических функций.

10.77. Классы поверхностей R_C и R_C^1. Пусть C — множество аналитических или множество гармонических дифференциалов, обладающих некоторым заданным конформно инвариантным свойством. Некоторые такие множества C мы уже рассматривали в ходе предыдущего исследования; напомним здесь только следующие классы:

1. Полные аналитические ковариенты f с конечной нормой.
2. Полные гармонические дифференциалы du с конечной нормой.
3. Полные гармонические дифференциалы с ограниченным (или полуограниченным) интегралом.
4. Полные аналитические дифференциалы с ограниченным интегралом.

Все эти классы C содержат своим элементом дифференциал dF, тождественно равный нулю: $dF \equiv 0$ (такие классы составляют предмет нашего дальнейшего исследования). Это условие всегда выполняется, если C — линейное многообразие.

По отношению к такому классу C дифференциалов множество всех римановых поверхностей R можно разделить на два дополнительных друг к другу подмножества: класс поверхностей R_C^0, содержащий все поверхности R, на которых $dF \equiv 0$ — *единственный* дифференциал класса C, и класс поверхностей R_C^1, на каждой поверхности R которого, кроме дифференциала $dF \equiv 0$, существует еще *по крайней мере один* дифференциал $dF \not\equiv 0$.

10.78. Класс поверхностей R_{AD}^0. Для класса C, указанного в п. 10.77 под номером 1, мы используем (ср. Сарио [1], Альфорс [1], Ройден [1]) обозначение $C = AD$ (полные аналитические ковариенты с конечным интегралом Дирихле).

Рассмотрим теперь класс R_{AD}^0 поверхностей R, которые, кроме $dF \equiv 0$, не имеют ни одного *полного* интегрируемого с квадратом

дифференциала dF[1]). Пусть R — такая поверхность класса R^0_{AD} и H — гильбертово пространство всех интегрируемых с квадратом аналитических дифференциалов на $R = R_{AD}$. Мы разбиваем H указанным в § 7 образом на три ортогональные компоненты: $H = [f] \dotplus [\varphi] \dotplus [\psi]$. В нашем случае $[f] \equiv 0$, поэтому $H = [\varphi] \dotplus [\psi]$.

10.79. Классы поверхностей R^0_{HD}. Мы переходим к тому классу C ковариант, который в п. 10.77 определен под номером 2: класс $C = HD$ всех полных гармонических интегрируемых с квадратом дифференциалов du.

Соответствующий *аналитический* дифференциал $dF = du + i du'$ в общем случае имеет мнимую часть, *не являющуюся полным дифференциалом*[2]), откуда следует, что класс AD есть подмножество класса HD. Отсюда, далее, заключаем, что множество поверхностей $R = R^0_{HD}$, на которых класс HD сводится к нулевому элементу $du = 0$, составляет, наоборот, подкласс класса R^0_{AD}.

Если теперь R — поверхность R^0_{HD}, то в соответствующем гильбертовом пространстве H обращается в нуль не только „ось" $[f]$, но и „ось" $[\psi]$, порождаемая построенными в § 7 ковариантами (f_β), т. е. на R^0_{HD} каждая ковариантa $f_\beta \equiv 0$. В самом деле, эти коварианты были поставлены в соответствие неразбивающим сечениям β поверхности R, а именно, в общем случае $f_\beta \equiv 0$, исключая случай, когда *обе* части R_β и $\overline{R}_\beta$, на которые β разбивает R, некомпактны и имеют идеальную границу Γ_β, соответственно $\overline{\Gamma}_\beta$, *положительной* гармонической меры относительно соответствующей части R (ср. пп. 10.63 и 10.64). Только в этом случае f_β отлична от нуля, и интеграл $\int f_\beta\, dz = u_\beta + i u'_\beta$ имеет тогда своей действительной частью u_β ограниченную однозначную гармоническую функцию на R с *конечным* интегралом Дирихле. Следовательно, дифференциал du_β принадлежит классу HD; поэтому для поверхности $R = R^0_{HD}$ имеем $du_\beta \equiv 0$, $f_\beta \equiv 0$, следовательно, и $[\psi] \equiv [f_\beta] \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, *на поверхности R^0_{HD} пространство*

$$H = [f] \dotplus [\varphi] \dotplus [\psi]$$

интегрируемых с квадратом аналитических ковариант сводится к средней компоненте $[\varphi]$.

---

[1]) Этот класс поверхностей был обстоятельно исследован Сарио в его диссертации [1] („поверхности с устранимой границей"). См. также мою работу [2].

[2]) Напомним, что дифференциал называется полным (total), если он является дифференциалом функции, *однозначной всюду на* R (ср. п. 10.56). — *Прим. перев.*

Отсюда, в частности, вытекает такое обращение теоремы п. 10.69[1]): Если $f(z)$ есть однозначная аналитическая коварианта, интегрируемая с квадратом на поверхности $R = R^0_{HD}$, то на каждом сечении γ, разбивающем R, период

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

10.80. Класс поверхностей R^0_{HB}. Мы обозначаем через HB класс полных гармонических дифференциалов du, у которых интеграл u *ограничен* на поверхности R (случай 3 п. 10.77). Класс R^0_{HB} состоит из всех поверхностей с нулевой границей и еще, возможно, сингулярных поверхностей с положительной границей (ср. п. 10.18). Из п. 10.70 следует тогда, что в гильбертовом пространстве H интегрируемых с квадратом ковариант во всяком случае отсутствует компонента $[\psi]$, так как порождающие ее дифференциалы du_β принадлежат классу HB и $du_\beta \equiv 0$ на каждой поверхности R^0_{HB}. В пп. 10.92 и 10.101 мы увидим, что каждая поверхность R^0_{HB} есть также поверхность R^0_{HD}. Отсюда тогда будет следовать, что на R^0_{HB} компонента $[f]$. Значит, для класса R^0_{HB} имеет место тот же результат, что и для R^0_{HD} (см. п. 10.79): пространство H состоит только из подпространства $[\varphi]$, порождаемого нормальными ковариантами f_α п. 10.70.

То же самое, как было замечено выше, заведомо справедливо для поверхностей N с нулевой границей, так как, согласно п. 10.12,

$$N \subset R^0_{HB};$$

на поверхности N не существует отличного от нуля дифференциала класса HB[2])

10.81. Размерность пространства H интегрируемых с квадратом аналитических дифференциалов. Для *компактных* римановых поверхностей R справедлива классическая теорема (гл. V) о том, что размерность пространства H, т. е. пространства всех абелевых дифференциалов первого рода, равна роду p поверхности. Эту теорему можно обобщить на *открытые* римановы поверхности следующим образом:

Если род p поверхности R бесконечен, то и размерность q пространства H бесконечна.

---

[1]) Альфорс [1], Неванлинна [2].

[2]) По поводу этого результата см. мою работу [2], а также работу Альфорса [1].

Если же род p конечен, то либо $q=p$, либо $q=\infty$, причем первый случай имеет место в том и только в том случае, когда поверхность R имеет нулевую границу.

10.82. Для доказательства мы сначала покажем, что в случае $p=\infty$ для *каждого* натурального числа n в пространстве H существует не менее n линейно независимых дифференциалов. По определению рода (см. п. 10.4), в случае $p=\infty$ для каждого n имеется принадлежащая R поверхность с краем R^*, такая, что число m соответствующих пар канонических сечений (a_ν, b_ν) больше n. Если теперь к этим $2m$ сечениям (α) построены нормальные дифференциалы du_α п. 10.60, то они линейно независимы (если рассматривать действительные коэффициенты), и соответствующие аналитические дифференциалы $dF_\alpha = du_\alpha + i du'_\alpha$ порождают подпространство H_m пространства H размерности $m > n$. Так как n можно взять сколь угодно большим, то H имеет размерность $q=\infty$, что и требовалось доказать.

Это рассмотрение показывает далее, что $q \geqslant p$ также и в случае конечного p. Достаточно лишь повторить предыдущее построение с каноническими сечениями (α) настолько большой поверхности с краем $R^* \subset R$, что ее род уже равен p; такая поверхность R^* существует, согласно п. 10.4.

10.83. Теперь мы покажем, что в случае конечного p равенство $q=p$ обязательно имеет место, если поверхность R имеет *нулевую границу*. Если пространство H разложить на подпространства $[f]$, $[\varphi]$, $[\psi]$, то, согласно п. 10.80, обращаются в нуль как $[f]$, так и $[\psi]$, и, следовательно, $H \equiv [\varphi]$. Но так как род p поверхности R *конечен*, то, согласно п. 10.73, пространство $[\varphi]$ может быть построено с помощью в точности p линейно независимых ковариант f_α, и, следовательно, $q=p$, как это и утверждалось.

10.84. Нужно еще показать, что если род p конечен и R имеет *положительную границу*, то размерность $q=\infty$. Для обоснования этого утверждения мы должны здесь ограничиться лишь главными моментами, в подробное рассмотрение которых мы здесь входить не можем.

Пусть сначала для простоты $p=0$, т. е. поверхность R подобна однолистным. Согласно гл. IX, поверхность R может быть отображена топологически и конформно на некоторую подобласть R_z числовой плоскости $|z| \leqslant \infty$. Идеальная граница Γ поверхности R получает действительное представление в виде множества Γ_z граничных точек области R_z, и так как Γ имеет *положительную* гармоническую меру, то и Γ_z имеет положительную гармоническую меру. Согласно теории гармонической меры плоских множеств (ср. мою монографию [1*]), Γ_z можно тогда бесконечным числом способов разбить на два непересекающихся множества Γ'_z и Γ''_z, которые *оба* имеют положительную

гармоническую меру. Дифференциалы этих мер (дополненные до аналитических дифференциалов) принадлежат пространству H, и так как таким образом можно построить сколько угодно линейно независимых дифференциалов, то размерность $q = \infty$.

10.85. Аналогично можно поступить в случае $0 < p < \infty$. Для достаточно большой поверхности с краем $R_0 \subset R$ дополнение $R - R_0$ распадается на конечное число попарно не пересекающихся частей $R^1, \ldots, R^m$, которые все *подобны однолистным*. Методом п. 10.63 доказывается, что хотя бы одна из этих частей, скажем R^1, имеет *положительную* границу Γ^1. Теперь R^1 отображается топологически и конформно на некоторую область R_z^1 z-плоскости. Тогда в качестве представления Γ^1 получается, как и выше, множество Γ_z^1 положительной гармонической меры на z-плоскости, и с помощью подходящего разбиения Γ_z^1 на два подмножества положительной гармонической меры строится сначала на R^1 бесконечное множество линейно независимых ковариант f^1 с ограниченной нормой. В настоящем случае ($p > 0$) эти коварианты нужно еще „продолжить" на всю поверхность R так, чтобы получилось бесконечное множество линейно независимых ковариант пространства H. Построение такой системы, исходя из системы f^1, совершается с помощью метода п. 10.62 (альтернирующего метода)[1]), и этим утверждение, что $q = \infty$, наконец, доказано.

10.86. Замечание относительно метрики Бергмана. Мы можем теперь доказать высказанное в п. 10.55 утверждение о том, что единственные римановы поверхности R, для которых метрика Бергмана есть *евклидова метрика*, это поверхности, конформно эквивалентные тору, из которого исключено множество точек самое большее емкости нуль.

Согласно п. 10.55, достаточно показать, что пространство H *одномерно* в точности для указанного класса поверхностей R. Но теорема п. 10.81 показывает, что H тогда и только тогда имеет размерность $q = 1$, когда поверхность R имеет род $p = 1$ и в случае, если она некомпактна, имеет нулевую границу. Но, далее, такая открытая поверхность конформно эквивалентна поверхности тора, из которого исключено множество точек емкости нуль. Чтобы в этом убедиться, представим R, согласно п. 10.85, в виде $R = R^0 + R^1 + \ldots + R^m$, где R^0 компактна на R, а R^ν ($\nu > 0$) некомпактны, но подобны однолистным. Каждый такой „подобный однолистным конец" R^ν ($\nu = 1, \ldots, m$) отображаем конформно на некоторую область $R_{z_\nu}^\nu$ числовой сферы E_ν, и идеальные границы Γ^ν поверхностей R^ν, которые все имеют гармоническую меру, равную нулю,

[1]) Можно было бы также применить здесь „метод универсальной поверхности наложения" § 5.

получают при этом „действительное" представление в виде точечных множеств $\Gamma^{\nu}_{z_\nu}$ емкости нуль на E_ν. Если теперь вместо этих множеств рассмотреть расширенные области $\bar{R}^{\nu}_{z_\nu} = R^{\nu}_{z_\nu} + \Gamma^{\nu}_{z_\nu}$ на E_ν, то объединенное множество $R^0 + \sum_{\nu=1}^{m} \bar{R}^{\nu}_{z_\nu}$ образует *компактную* риманову поверхность $\bar{R}$ рода $p = 1$. Поверхность R конформно эквивалентна той части поверхности $\bar{R}$, которая получается из нее исключением множества точек $\sum_{\nu=1}^{m} \Gamma^{\nu}_{z_\nu}$. Так как R имеет нулевую границу, то это множество имеет гармоническую меру нуль (емкость нуль), и доказательство закончено.

10.87. Вторая краевая задача. Для дальнейшего исследования соотношений между различными классами R^0 сделаем предварительно некоторые замечания о так называемой второй краевой задаче теории потенциала.

Пусть G — компактная часть римановой поверхности R, ограниченная q замкнутыми кусочно-аналитическими жордановыми кривыми $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$. Пусть на границе $\Gamma = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_i$ задана непрерывная действительная функция $\varphi(\zeta)$. Требуется построить в G однозначную гармоническую функцию u, которая на Γ непрерывна и имеет производную по внутренней нормали, равную φ.

10.88. Единственность. Если решение существует, то оно определено с точностью до аддитивной постоянной. В самом деле, производная по нормали от разности u_0 двух решений равна нулю на Γ, поэтому интеграл Дирихле от u_0 должен равняться нулю:

$$\iint_G |\operatorname{grad} u_0|^2 \, dx\, dy = \int_\Gamma u_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} \, ds = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} u_0 = 0$, $u_0 = \text{const}$, и утверждение доказано.

Необходимым условием для существования решения u является обращение в нуль интеграла

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \int_\Gamma \varphi \, ds = 0. \tag{10.32}$$

10.89. Существование. Предположим, что u — решение задачи. Тогда при заданных граничных условиях u имеет конечный интеграл Дирихле, и, следовательно, дифференциал du принадлежит рассмотренному в п. 10.75 классу дифференциалов; то же самое справедливо для сопряженного дифференциала du'. Поэтому из обоих

ортогональных друг к другу пространств $[du^1]$ и $[du^2]+[du^3]$ можно выбрать вполне определенные дифференциалы du^1 и dU, такие, что

$$du' = du^1 + dU, \tag{10.33}$$

где du^1 — полный дифференциал.

Пространство $[dU]$ в настоящем случае имеет конечное число измерений. В самом деле, если представить G в канонической форме п. 7.31, то канонические (неразбивающие) разрезы a_ν, b_ν ($\nu = 1, \ldots, p$) вместе с q граничными кривыми $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ образуют порождающую систему группы гомологий области G, и пространство $[dU]$ порождается следующими дифференциалами:

1. Гармоническими дифференциалами du_{b_ν} ($\nu = 1, \ldots, p$), интегралы которых u_{b_ν} являются однозначными и нормированными в области G с разрезом вдоль b_ν и испытывают скачок, равный 1, при переходе через b_ν.

2. Гармоническими дифференциалами du_{a_ν} ($\nu = 1, \ldots, p$), обладающими аналогичными свойствами в области G с разрезом вдоль a_ν.

3. Дифференциалами гармонической меры $d\omega_\mu$ ($\mu = 1, \ldots, q$) граничных кривых Γ_μ относительно области G.

Каждая ветвь потенциала U имеет постоянное значение на граничных кривых Γ_i, и, следовательно, на Γ справедливы равенства $\frac{\partial U'}{\partial n} = \frac{\partial U}{\partial s} = 0$. Потенциал u^1 в G однозначен, и так как

$$-du = du^{1'} + dU',$$

то для производной по нормали от сопряженной функции $u^{1'}$ в точке ζ границы имеют место равенства

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u^{1'}}{\partial n} = -\frac{\partial u^1}{\partial s} = \varphi.$$

Пусть теперь ζ, начиная с граничной точки ζ_0, пробегает всю границу Γ. Тогда на Γ

$$\frac{\partial u^1}{\partial s} = -\varphi,$$

следовательно,

$$u^1(\zeta) = -\int_{\zeta_0\zeta} \varphi\, ds + \text{const}.$$

Поэтому, если мы обозначим последний интеграл через $f(\zeta)$, то каждая ветвь функции $u^1(z)$ в G будет отличаться только на постоянную от гармонической функции

$$-\int_\Gamma f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z),$$

и, следовательно,

$$u'(z) = -\int_\Gamma f(\zeta)\, d\omega(\zeta, z) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_{b_i} + \sum_{i=1}^{p} \mu_i u_{a_i} + \sum_{i=1}^{q} \nu_i \omega_i + \text{const},$$

где λ_i, μ_i, ν_i — действительные постоянные.

Итак, если задача имеет решение, то оно имеет вид [1])

$$u(z) = \int_\Gamma f(\zeta)\, d\omega'(\zeta, z) - \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i u'_{b_i} + \mu_i u'_{a_i}) - \sum_{i=1}^{q} \nu_i \omega'_i + \text{const}.$$

Теперь, наоборот, можно прямо построить это выражение и показать, что оно представляет собой искомое решение задачи. Непосредственно видно, что u гармонична в G и что на Γ выполняется граничное условие $\partial u/\partial n = \varphi$, причем это верно при любом выборе неопределенных постоянных λ_i, μ_i, ν_i. Остается лишь показать, что эти постоянные можно выбрать так, чтобы u была *однозначна*. Для этого необходимо и достаточно, чтобы периоды функции u на кривых a_ν, b_ν, Γ_μ равнялись нулю. Это условие приводит к системе $2p+q$ линейных уравнений со столькими же неизвестными. То, что эта система разрешима, доказывается, с учетом условия (10.32), аналогично тому, как это делалось в п. 9.9, и предоставляется здесь читателю.

10.90. Функция Неймана. Пусть, как и выше, G — компактная часть римановой поверхности R и $\Gamma = \sum_{i=1}^{q} \Gamma_i$ — ее граница. Для двух заданных точек $z = a_1$, a_2 поверхности G мы ищем функцию $\gamma(z; a_1, a_2)$, обладающую следующими свойствами:

1. $\gamma(z; a_1, a_2)$ в G однозначна и гармонична, исключая $z = a_\nu$ ($\nu = 1, 2$), где она имеет разложение

$$\gamma(z; a_1, a_2) = (-1)^\nu \ln|z - \zeta| + \text{гармоническая функция}.$$

2. На Γ производная по нормали равна нулю:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = 0.$$

Функцию $\gamma(z; a_1, a_2)$ называют функцией Неймана поверхности G. Ее существование следует из п. 10.89, если ее записать, например, в виде $\gamma(z; a_1, a_2) = g(z, a_1) - g(z, a_2) + u(z)$, где g — функция Грина поверхности G. Регулярная гармоническая функция u с учетом заданного граничного условия может быть построена согласно п. 10.89, причем следует заметить, что необходимое условие (10.32) выполняется по теореме о вычетах.

[1]) ω' обозначает здесь функцию, сопряженную к ω относительно переменной z.

10.91. Переход к открытым поверхностям. Мы строим исчерпание заданной некомпактной римановой поверхности R последовательностью компактных на ней поверхностей R_n

$$R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_\nu \subset \ldots; \quad R_\nu \to R,$$

ограниченных кусочно-аналитическими контурами, и образуем для заданной пары точек $z=a$, $z=b$ поверхности R_0 функцию Неймана $\gamma_\nu(z; a, b)$ и функции Грина $g_\nu(z, a)$, $g_\nu(z, b)$ поверхности R_ν.

Выражение

$$2\pi v_\nu(z) = \gamma_\nu(z; a, b) - g_\nu(z, a) + g_\nu(z, b)$$

определяет на R_ν однозначную регулярную гармоническую функцию. Чтобы v_ν определить однозначно, мы выбираем входящие в γ_ν аддитивные постоянные согласно условию

$$v_\nu(a) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots).$$

Чтобы исследовать поведение последовательности v_ν, мы сначала покажем, что она сходится „по норме". Для этого заметим, что если $u(z)$ — произвольная однозначная гармоническая функция на $R_\nu + \Gamma_\nu$ (Γ_ν — граница R_ν), то из формулы Грина следует, что ($z = x + iy$)

$$(du, dv_\nu)_{R_\nu} \equiv \iint\limits_{R_\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v_\nu}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v_\nu}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\Gamma_\nu} u \frac{\partial v_\nu}{\partial n}\, ds =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\nu} u(\zeta)\,\frac{\partial g_\nu(\zeta, a)}{\partial n}\, ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\nu} u(\zeta)\frac{\partial g_\nu(\zeta, b)}{\partial n}\, ds =$$

$$= u(b) - u(a). \tag{10.34}$$

Отсюда, в частности, для $u = v_\nu$ следует, что

$$(dv_\nu, dv_\nu)_{R_\nu} = \iint\limits_{R_\nu} |\operatorname{grad} v_\nu|^2\, dx\,dy = v_\nu(b) > 0, \tag{10.34'}$$

и для $u = v_\mu$ $(\mu > \nu)$

$$(dv_\mu, dv_\nu)_{R_\nu} = v_\mu(b).$$

Поэтому

$$\iint\limits_{R_\nu} |\operatorname{grad}(v_\mu - v_\nu)|^2\, dx\,dy = (dv_\mu, dv_\mu)_{R_\nu} + (dv_\nu, dv_\nu)_{R_\nu} -$$

$$- 2(dv_\mu, dv_\nu)_{R_\nu} = (dv_\mu, dv_\mu)_{R_\nu} + v_\nu(b) - 2v_\mu(b) <$$

$$< (dv_\mu, dv_\mu)_{R_\mu} + v_\nu(b) - 2v_\mu(b) = v_\nu(b) - v_\mu(b). \tag{10.35}$$

Значит, числовая последовательность $v_\nu(b)$ с возрастанием ν монотонно убывает; поэтому существует предел $\lim\limits_{\nu\to\infty} v_\nu(b) \geqslant 0$

[ср. (10.34′)], откуда вытекает, что двойной интеграл слева в (10.35) стремится к нулю при $\nu \to \infty$, $\mu \to \infty$. Итак, гармонические дифференциалы dv_ν сходятся „в среднем", поэтому и в обычном смысле.

Предельная функция

$$v(z) = \lim_{\nu \to \infty} v_\nu(z)$$

однозначна и гармонична на R. Она равна нулю в точке $z = a$, и из (10.34′) следует, что ее интеграл Дирихле

$$(dv,\ dv)_R = \iint\limits_R |\operatorname{grad} v|^2\, dx\, dy = v(b).$$

Далее, согласно (10.34), для каждой однозначной гармоничной функции u с конечным интегралом Дирихле по R имеем

$$(du,\ dv)_R = u(b) - u(a). \tag{10.36}$$

10.92. Классы поверхностей R^0_{HB} и R^0_{HD}[1]. Пусть теперь R— поверхность класса R^1_{HD}, т. е. на R существует отличный от постоянной однозначный потенциал u с конечным интегралом Дирихле. Тогда на R имеются такие две точки $z = a$, $z = b$, что $u(b) - u(a) \neq 0$. Из соотношения (10.36) видно, что функция $v(z)$, однозначная и гармоническая на R, не есть постоянная. Мы утверждаем, что она *ограничена*.

Для этого заметим сначала, что в рассматриваемом случае R имеет положительную границу, так как иначе на R не могло бы существовать отличной от постоянной функции u класса HD (доказательство в п. 10.79). Но отсюда тогда вытекает, что функции $g_n(z, a)$ и $g_n(z, b)$ при $n \to \infty$ сходятся соответственно к функциям Грина $g(z, a)$ и $g(z, b)$ поверхности R и, следовательно, существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma(z;\ a,\ b) = 2\pi v(z) + g(z,\ a) - g(z,\ b).$$

Рассмотрим теперь некомпактное дополнение $R - R_0$ поверхности R_0. На этой поверхности функции $g(z, a)$ и $g(z, b)$ ограничены. Но то же самое справедливо и для $\gamma(z; a, b)$. В самом деле, функция γ_n на поверхности $R_n - R_0$, ограниченной Γ_n и Γ_0, регулярна, и ее производная по нормали равна нулю на Γ_n. Максимум и минимум этой функции на $(R_n - R_0) + \Gamma_0 + \Gamma_n$ достигается в некоторых точках на $\Gamma_0 + \Gamma_n$. Мы утверждаем, что эти точки обязательно лежат на Γ_0. В самом деле, допустим, что такая точка ζ лежит на Γ_n. Тогда γ_n, *рассматриваемая на* Γ_n, также имеет в ζ экстремальное значение, следовательно, в этой точке $\partial\gamma_n/\partial s = 0$, и так как $\partial\gamma_n/\partial n = 0$ на Γ_n,

[1]) Нижеследующее изложение примыкает к Виртанену [3]. Другой метод использует Ройден [1]; ср. также Альфорс [2].

то производная от аналитической функции $\gamma_n + i\gamma_n'$ в точке ζ равна нулю. Из этого следует, что функция $\gamma_n + i\gamma_n'$ отображает окрестность точки ζ на *многолистный* кусок римановой поверхности, откуда заключаем, что γ_n внутри R_n принимает значения как бо́льшие, так и меньшие, чем значение $\gamma_n(\zeta)$, что приводит к противоречию.

Итак, γ_n принимает свои наибольшее и наименьшее значения на Γ_0, и, следовательно, то же справедливо и для предельной функции γ. Поэтому v ограничена на $R - R_0$, и так как это справедливо и на R_0, то гармоническая функция v ограничена всюду на R.

Этим показано, что существование на R отличной от постоянной однозначной гармонической функции u с конечным интегралом Дирихле влечет за собой существование отличной от постоянной *ограниченной* гармонической функции v. Следовательно, *класс поверхностей* R_{HB}^0 *содержится в классе* R_{HD}^0 — результат, которым мы уже воспользовались в п. 10.80[1]).

§ 9. МЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ

10.93. Постановка задачи. Рассмотренные в ходе предыдущего исследования конформно инвариантные свойства римановой поверхности имеют в большинстве случаев столь общую природу и сформулированы столь неявно, что они не могут быть непосредственно применены к поверхностям, заданным каким-либо частным образом. Если поверхность определена с помощью некоторых конкретных условий, например особыми свойствами поверхности наложения или как фундаментальная область группы аналитических преобразований, то на основании такого определения в общем случае невозможно непосредственно узнать, принадлежит ли поверхность к конформному классу R_C^0 или R_C^1, если класс дифференциалов C имеет столь же общую природу, что выше, как правило, имело место; вспомним, например, рассмотренные выше классы HB, HD и т. д.

Поэтому имеет большое значение задача установить соотношение между общими конформно инвариантными свойствами и специальными

---

[1]) *Добавление при корректуре.* Вопрос о том, существуют ли „сингулярные поверхности" с положительной границей (т. е. шире ли класс R_{HB} класса поверхностей с нулевой границей), до сих пор не решен (см. п. 10.18). Как сообщил мне Альфорс, ему удалось показать, что поверхности с нулевой границей образуют правильный подкласс *класса* R_{HD}^0. [В настоящее время для рода $p = \infty$ поверхности R доказаны строгие включения $R_{HP}^0 \subset R_{HB}^0 \subset R_{HD}^0$ и класса поверхностей с нулевой границей в R_{HP}^0 (HP — положительные гармонические функции) (см. рец. № 2107 в Р. Ж. „Математика", 1954, № 2, и работу Tôkiy, Osaca Math. J., 1953, **5**, № 2, 267—280). Этим утвердительно решаются поставленные выше вопросы о сингулярных поверхностях (ср. пп. 10.18, 10.20, 10.31 и 10.80). — *Прим. перев.*]

геометрическими или аналитическими свойствами, более непосредственно учитывающими частные элементы построения, которые могут быть явно заданы при конкретном определении римановой поверхности. Некоторые частные такие критерии метрического характера будут указаны в этом последнем параграфе.

10.94. Введение метрики. Для исследования очерченного круга вопросов целесообразно надлежащим образом метризовать заданную поверхность, как это делалось выше в некоторых частных случаях.

Пусть на римановой поверхности R задана компактная область $G+\gamma$, граница которой γ состоит из некоторого числа $q \geqslant 2$ замкнутых аналитических жордановых кривых. Мы разбиваем γ на две части γ_1 и γ_2 без общих точек и предполагаем, что на $G+\gamma$ задана инвариантная метрика

$$d\sigma = \mu(z)\,|dz|, \tag{10.37}$$

обладающая следующими свойствами[1]).

1°. $\mu(z)$ непрерывно дифференцируема и неотрицательна.

2°. Уравнение Гамильтона — Якоби

$$|\operatorname{grad}\rho(z)| = \mu(z)$$

имеет решение $\rho(z)$, такое, что линии уровня $\rho(z) = \rho$ $(= \text{const})$ однолистно и без пропусков покрывают $G+\gamma$, когда ρ изменяется на отрезке $\alpha_1 \leqslant \rho \leqslant \alpha_2$, причем линии уровня $\rho(z) = \alpha_\nu$ совпадают с γ_ν $(\nu = 1, 2)$.

3°. Геодезические линии, являющиеся ортогональными траекториями линий уровня $\rho(z) = \rho$, образуют поле.

При этих условиях в G

$$\rho(z) = \int_{z_1}^{z} d\sigma = \int_{z_1}^{z} \mu\,|dz|,$$

где интегрирование производится по той части экстремали поля, определяемой z, которая соединяет z с точкой z_1 ее пересечения с γ_1.

10.95. Оценка интеграла Дирихле. После этой подготовки мы рассматриваем аналитический дифференциал

$$dw = f\,dz = du + i\,du',$$

однозначный, регулярный и не обращающийся тождественно в нуль

[1]) Если γ_1 выбирается произвольно, то указанные ниже условия, как известно, выполнимы в общем случае лишь *локально* при надлежащем выборе примыкающей к γ_1 области поля G. Поэтому полное поле, рассматриваемое в приложениях, должно быть в общем случае составлено из нескольких меньших частей. Если кривизна метрики $d\sigma$ *отрицательна*, то с помощью семейства геодезических линий, выходящих из произвольно выбранной начальной точки, строится даже поле, покрывающее всю поверхность R.

на $G+\gamma$. Мы измеряем длину рассматриваемой линии уровня $\rho(z)=\rho$ $(\alpha_1 \leqslant \rho \leqslant \alpha_2)$ один раз в „евклидовом" мероопределении, где длина элемента дуги dz определяется в обычной метрике w-плоскости, другой раз — в заданной метрике (10.37), и полагаем

$$L(\rho)=\int\limits_{\rho(z)=\rho} |dw|, \quad \Lambda(\rho)=\int\limits_{\rho(z)=\rho} d\sigma. \tag{10.37'}$$

С помощью этих величин нужно теперь оценить интеграл Дирихле

$$D_G=\int\int\limits_G |f|^2\,dx\,dy \quad (z=x+iy).$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца, имеем

$$L^2=\Big(\int\limits_{\rho(z)=\rho} |f|\,|dz|\Big)^2 \leqslant \int d\sigma \int |f|^2 \frac{d\sigma}{\mu^2}=\Lambda(\rho)\frac{dD(\rho)}{d\rho}, \tag{10.38}$$

где $D(\rho)$ означает интеграл Дирихле

$$D(\rho)=\int\int |f|^2\,dx\,dy$$

по поверхности $\alpha_1 \leqslant \rho(z) \leqslant \rho$.

Отсюда получаем искомую оценку:

$$D(\rho) \geqslant \int\limits_{\alpha_1}^{\rho} \frac{(L(\rho))^2}{\Lambda(\rho)}\,d\rho. \tag{10.39}$$

10.96. Применение к поверхностям с нулевой границей. В неравенстве (10.39) мы выбираем в качестве dw дифференциал $d\omega+i\,d\omega'$ гармонической меры $\omega(z)$ части границы γ_2 $(\rho(z)=\alpha_2)$ относительно поверхности G, и тогда для $\alpha_1<\rho\leqslant\alpha_2$ имеем

$$L(\rho)=\int\limits_{\rho(z)=\rho} |dw| \geqslant \int\limits_{\rho(z)=\rho} d\omega' = \int\limits_{\gamma_2} \omega\,d\omega' - \int\limits_{\gamma_1} \omega\,d\omega' =$$

$$= \int\int\limits_{\alpha_1<\rho(z)<\alpha_2} \left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy = D_G.$$

Из неравенства (10.38) вытекает, что

$$D_G^2 \leqslant \Lambda(\rho)\frac{dD(\rho)}{d\rho},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{D_G} \geqslant \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\rho}{\Lambda(\rho)}.$$

Предположим теперь, что метрика (10.37) определена на всей некомпактной части R_1 поверхности R, лежащей вне небольшой

кривой γ_1 [1]), что здесь задано поле экстремалей, удовлетворяющее условиям п. 10.94 и покрывающее поверхность R_1, и что поверхности $\alpha_1 \leqslant \rho(z) \leqslant \rho$ с возрастанием ρ, $\rho \to \rho_\infty$ ($\leqslant \infty$), исчерпывают всю поверхность R_1. Тогда интеграл

$$\int_{\alpha_1}^{\rho} \frac{d\rho}{\Lambda(\rho)} \leqslant \frac{1}{D(\rho)} \quad (\alpha_1 < \rho < \rho_\infty)$$

при $\rho \to \rho_\infty$ обязательно будет *конечным*, если интеграл Дирихле $D(\rho)$ гармонической меры $\omega_\rho(z)$ линии уровня γ_ρ ($\rho(z) = \rho$) относительно поверхности $\alpha_1 \leqslant \rho(z) \leqslant \rho$ при $\rho \to \rho_\infty$ не обращается в нуль. В самом деле, ω_ρ стремится при этом к гармонической мере ω идеальной границы Γ поверхности R относительно поверхности $\rho(z) > \alpha_1$, и $\omega \equiv 0$ или $\omega > 0$ в зависимости от того, является ли R поверхностью с нулевой границей или нет. В первом случае $\lim D(\rho) = 0$, во втором $\lim D(\rho) > 0$, откуда следует утверждение.

Отсюда заключаем [2]):

Если интеграл

$$\int^{\rho_\infty} \frac{d\rho}{\Lambda(\rho)} \tag{10.40}$$

расходится, то поверхность R имеет нулевую границу.

10.97. В качестве примера возьмем за $d\sigma$ евклидову метрику $d\sigma = |dt|$ единичного круга E ($|t| < 1$), на который можно взаимно однозначно и конформно отобразить универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности R, если исключить (тривиальный с точки зрения рассматриваемой задачи) случай, когда $\hat{R}$ — параболического типа. В качестве поля экстремалей тогда можно принять множество радиусов $\varphi = \text{const}$ ($t = re^{i\varphi}$), и линии уровня $\rho(z) = \text{const}$ оказываются окружностями $|t| = r$. Если мы предположим, что поверхность R представлена в круге E метрическим фундаментальным многоугольником π, то величина Λ будет равна интегралу

$$\Lambda(\rho) = \int d\varphi,$$

взятому по дугам окружности $|t| = \rho < 1$, попадающим в π. Тогда расходимость интеграла

$$\int^{1} \frac{d\rho}{\Lambda(\rho)}$$

достаточна для того, чтобы поверхность R имела нулевую границу.

---

[1]) Ср. с этим примечание в п. 10.94.

[2]) См. Лааконен [1].

10.98. В качестве второго приложения определим $d\sigma$ с помощью соотношения

$$d\sigma = M\,|\,d\omega + i\,d\omega'\,|,$$

где $\omega(z)$, как выше, означает гармоническую меру γ_2 относительно G и M — положительная постоянная:

$$M = \frac{1}{\int\limits_{\gamma_1} d\omega'}. \tag{10.41}$$

Тогда, согласно неравенству (10.39), в силу того, что $\Lambda(\rho) = 1$ и $\rho_2 = M$, имеем

$$\int\limits_0^M L^2\,d\rho \leqslant D_G,$$

где D_G означает интеграл Дирихле однозначной аналитической коварианты f, взятый по G.

Если мы теперь предположим, что f интегрируема с квадратом по всей поверхности R, то интеграл, стоящий слева, равномерно ограничен для всех компактных частей $G \subset R$. Если при фиксированном γ_1 устремить γ_2 к идеальной границе Γ поверхности R, то в случае, когда R имеет нулевую границу, число M неограниченно возрастает, и из предыдущего следует, что величина $L(\rho)$ при больших ρ может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, мы имеем такую теорему [1]):

Если f — интегрируемая с квадратом однозначная аналитическая коварианта на поверхности R с нулевой границей, то для каждого $\varepsilon > 0$ и произвольно выбранной компактной части $R_0 \subset R$ всегда существует такая система кривых γ, отделяющая R_0 от идеальной границы Γ поверхности R, что

$$\int\limits_\gamma |f|\,|dz| < \varepsilon.$$

10.99. Одна теорема о среднем. Мы рассматриваем однозначную и регулярную гармоническую функцию u, определенную в области $G + \gamma_1 + \gamma_2$ (ср. п. 10.94), и образуем вспомогательную функцию $\eta + i\eta' = M(\omega + i\omega')$ (ср. п. 10.98), где ω — гармоническая мера γ_2 и M имеет значение (10.41), так что

$$\int\limits_{\eta = \text{const}} d\eta' = 1.$$

---

[1]) См. мою работу [3].

Пусть теперь $m(\rho)$ для $0 \leqslant \rho \leqslant M$ есть среднее значение

$$m(\rho) = \sqrt{\int\limits_{\eta=\rho} u^2 \, d\eta'}.$$

При этих условиях $m(\rho)$ есть выпуклая функция от ρ.

Доказательство. Для интеграла Дирихле

$$D(\rho) = \int\limits_{0 \leqslant \eta \leqslant \rho} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx \, dy$$

имеем выражение

$$D(\rho) = \int\limits_{\eta=\rho} u \, du' - \int\limits_{\eta=0} u \, du',$$

где интегрирование производится в том направлении на кривых $\eta = \rho$, которое положительно относительно области $u < \rho$. Так как

$$du' = \pm \frac{\partial u}{\partial n} ds = \pm \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta',$$

то соотношение для $D(\rho)$ можно записать в виде

$$D(\rho) = m(\rho) m'(\rho) - m(0) m'(0),$$

где штрих означает производную по ρ.

По неравенству Буняковского — Шварца, имеем

$$m^2 m'^2 = \left(\int\limits_{\eta=\rho} u \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta' \right)^2 \leqslant m^2(\rho) \int\limits_{\eta=\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 d\eta' \leqslant$$

$$\leqslant m^2(\rho) \int\limits_{\eta=\rho} |\operatorname{grad} u|^2 \, d\eta' = m^2(\rho) \frac{dD(\rho)}{d\rho} = m^2(\rho) [m'^2(\rho) + m(\rho) m''(\rho)],$$

следовательно, $m''(\rho) \geqslant 0$, и утверждение о выпуклости доказано.

Равенство $m'' \equiv 0$ имеет место только тогда, когда $\partial u / \partial \eta' = 0$ и, следовательно, u зависит только от $\eta = \rho$, т. е. $u = u(\rho)$. В этом случае не только $m(\rho)$, но и сама функция u является линейной функцией от ρ [1]).

10.100. Приложение к поверхностям с нулевой границей. Мы снова предполагаем, что R — поверхность с нулевой границей, и исчерпываем ее последовательностью компактных на ней поверхностей $R_n + \Gamma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Пусть на поверхности $R_n - R_1 + \Gamma_1$, ограниченной двумя непересекающимися системами аналитических кривых Γ_1 и Γ_n, задана однозначная регулярная гармоническая функ-

[1]) См. мою работу [6], далее, Раух [1].

ция u. Тогда

$$D_n = \iint\limits_{R_n - R_1} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\, dy = \int\limits_{\Gamma_n} u\, du' - \int\limits_{\Gamma_1} u\, du'. \tag{10.42}$$

Если теперь $R_{n+1} \supset R_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то криволинейный интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_n} u\, du'$$

с возрастанием n монотонно возрастает и, следовательно, при $n \to \infty$ имеет конечный предел, если, как мы это сейчас предположим, интеграл Дирихле

$$D = \iint\limits_{R - R_1} |\operatorname{grad} u|^2 \, dx\, dy$$

конечен.

Мы докажем следующее предложение:

Если величина D конечна и поверхность R имеет нулевую границу, то

$$\int\limits_{\Gamma_n} u\, du' \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty. \tag{10.43}$$

Для доказательства введем на поверхности $R_n - R_1$ рассмотренную в п. 10.99 вспомогательную функцию

$$\eta_n = \lambda_n \omega_n(z),$$

где ω_n — гармоническая мера Γ_n относительно $R_n - R_1$ и

$$\lambda_n = \frac{1}{\int\limits_{\Gamma_1} d\omega_n}.$$

Тогда λ_n возрастает вместе с n и стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

Для среднего значения

$$m(\rho) = \sqrt{\int\limits_{\eta_n = \rho} u^2 \, d\eta_n'},$$

являющегося выпуклой функцией от ρ на интервале $0 \leqslant \rho \leqslant \lambda_n$, имеем, согласно п. 10.99,

$$D_n = m(\lambda_n)\, m'(\lambda_n) - m(0)\, m'(0). \tag{10.44}$$

Мы утверждаем теперь, что

$$\int\limits_{\Gamma_1} u\, du' = m(0)\, m'(0) \leqslant 0. \tag{10.45}$$

В самом деле, если бы значение этого интеграла, тем самым и $m'(0)$, было положительным, то, в силу выпуклости $m(\rho)$, мы имели бы

$$m'(\lambda_n) \geqslant m'(0), \quad m(\lambda_n) \geqslant m(0) + \lambda_n m'(0),$$

следовательно,

$$\int_{\Gamma_n} u\, du' = m(\lambda_n)\, m'(\lambda_n) \geqslant m'(0)\,(m(0) + \lambda_n m'(0)),$$

и при $n \to \infty$, $\lambda_n \to \infty$ криволинейный интеграл справа в (10.42) неограниченно возрастал бы, вопреки нашему предположению, что $D = \lim D_n < \infty$.

Итак, неравенство (10.45) должно выполняться. Теперь аналогично заключаем, что

$$\int_{\Gamma_n} u\, du' \leqslant 0 \tag{10.46}$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$. В самом деле, если бы для некоторого значения $n = n_0$ этот интеграл имел положительное значение, то, повторяя предыдущее доказательство для области $R_n - R_{n_0}$ (вместо $R_n - R_1$), мы пришли бы к тому же противоречию, что и выше.

Вернемся теперь к формуле (10.44). Так как величина

$$\int_{\eta=\rho} u\, du' = m(\rho)\, m'(\rho)$$

для $\rho = \lambda_n$ неположительна и производная $m'(\rho)$ монотонно возрастает вместе с ρ, то значение $m'(\rho)$, в силу того, что $m \geqslant 0$, неположительно не только для $\rho = \lambda_n$, но и всюду на интервале $0 \leqslant \rho \leqslant \lambda_n$. Следовательно, среднее значение $m(\rho)$ есть убывающая функция и, в частности,

$$m(\lambda_n) \leqslant m(0).$$

Мы утверждаем, что производная $m'(\lambda_n)$ при $n \to \infty$ стремится к нулю. В самом деле, в противном случае существовало бы положительное число δ, такое, что для сколь угодно больших значений n

$$m'(\lambda_n) \leqslant -\delta.$$

Но тогда, в силу выпуклости $m(\rho)$ на интервале $(0, \lambda_n)$, мы имели бы

$$m(0) \geqslant m(0) - m(\lambda_n) \geqslant \delta\lambda_n,$$

что при $\lambda_n \to \infty$ невозможно. Следовательно,

$$m'(\lambda_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда вытекает, что и

$$\int_{\Gamma_n} u\, du' = m(\lambda_n)\, m'(\lambda_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

и, в силу (10.42),

$$D = \int\int_{R-R_1} |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy = -\int_{\Gamma_1} u du', \tag{10.47}$$

где криволинейный интеграл берется в отрицательном направлении по отношению к поверхности R_1.

Из этого результата следует важное дополнение к теореме п. 10.23. Там было показано, что для поверхности R с нулевой границей каждая *ограниченная* гармоническая функция u на $R - R_1$ имеет конечный интеграл Дирихле, который можно вычислить по формуле (10.47); здесь же, наоборот, эта формула была выведена в предположении, что функция u имеет конечный интеграл Дирихле по $R - R_1$ [1]).

10.101. В п. 10.92 мы видели, что если поверхность с положительной границей „сингулярна", то она принадлежит классу R^0_{HD} (т. е. на ней не существует интегрируемого с квадратом полного гармонического дифференциала $du \not\equiv 0$) и классу R^0_{HB} (т. е. на ней не существует ограниченной гармонической функции $u \not\equiv \text{const}$). Из предыдущего результата то же самое следует для поверхности R с нулевой границей: на такой поверхности всякая ограниченная гармоническая функция сводится, согласно п. 10.12, к постоянной; но это же справедливо для каждой однозначной гармонической функции с конечным интегралом Дирихле. В самом деле, если u — такая функция, то, в силу (10.47), для любой компактной части $R_0 + \Gamma_0$ поверхности R имеем

$$\int\int_{R-R_0} |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy = -\int_{\Gamma_0} u du',$$

в то же время, очевидно,

$$\int\int_{R_0} |\operatorname{grad} u|^2\, dx\, dy = \int_{\Gamma_0} u du'.$$

Складывая, получаем для полного интеграла Дирихле от u по R значение нуль, откуда, как утверждалось, следует, что $u = \text{const}$.

10.102. Полные дифференциалы. Данную в п. 10.95 оценку интеграла Дирихле полного гармонического дифференциала du можно значительно усилить, если и сопряженный дифференциал du', тем

---

[1]) Более подробный анализ предыдущего доказательства показывает, что гармоническая функция u, относительно которой предполагается, что она имеет конечный интеграл Дирихле, в действительности также и ограничена и, следовательно, вполне определяется в $R - R_1$ своими граничными значениями на Γ_1 (см. мою работу [5]). [R — поверхность с нулевой границей. — *Прим. перев.*]

самым и весь аналитический дифференциал $dF = f\,dz = du + i\,du'$, является полным. Такая оценка была дана Сарио [1] с помощью метода, обобщающего одну идею Куранта [1*]; нижеследующее усиление метода принадлежит Пфлюгеру [1].

Мы снова исходим из компактной части G, в которой определена метрика, обладающая указанными в п. 10.94 свойствами. Пусть ρ — некоторое число из интервала $\alpha_1 \leqslant \rho \leqslant \alpha_2$. Тогда

$$D(\rho) = \iint\limits_{\alpha_1 \leqslant \rho(z) \leqslant \rho} |f|^2\,dx\,dy = A(\rho) - A(\alpha_1),$$

где $A(\rho)$ означает криволинейный интеграл

$$A(\rho) = \int\limits_{\rho(z)=\rho} u\,du',$$

взятый в положительном направлении относительно области $\alpha_1 < \rho(z) < \rho$. Этот интеграл является монотонно возрастающей функцией от ρ.

Теперь требуется из заданных условий вывести возможно более точную оценку для A. Для этого заметим сначала, что линия уровня $\rho(z) = \rho$ распадается на конечное число $q = q_\rho$ замкнутых кривых γ_i $(i = 1, 2, \ldots, q_\rho)$. Полагая [1])

$$a_i = \int\limits_{\gamma_i} u\,d\sigma,$$

имеем, прежде всего, по неравенству Буняковского — Шварца, оценку для $u_i = u - a_i$:

$$\left.\begin{aligned} A_i(\rho) \equiv \int\limits_{\gamma_i} u_i\,du' = \int\limits_{\gamma_i} u_i \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_{\gamma_i} u_i \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \frac{d\sigma}{\mu} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\int\limits_{\gamma_i} u_i^2\,d\sigma} \cdot \sqrt{\int\limits_{\gamma_i} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \frac{d\sigma}{\mu^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.47')$$

10.103. Сравним значение последнего криволинейного интеграла со средним значением

$$\sqrt{\int\limits_{\gamma_i} u_i^2\,d\sigma}. \qquad (10.48)$$

---

[1]) Нужно положить

$$a_i = \frac{1}{l_i} \int\limits_{\gamma_i} u\,d\sigma,$$

где l_i определяется, как в (10.50). — *Прим. перев.*

Для этого воспользуемся следующим общим элементарным наравенством (неравенство Виртингера):

Если $y(x)$ — действительная непрерывно дифференцируемая функция от x в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$, для которой среднее значение

$$\int_0^l y\,dx = 0, \tag{10.49}$$

то

$$\int_0^l y^2\,dx \leqslant \frac{l^2}{4\pi^2}\int_0^l y'^2\,dx, \tag{10.49'}$$

где $y' = dy/dx$. Равенство здесь имеет место только для функции $y = c\cos\frac{2\pi}{l}(x - x_0)$, где x_0 и c — произвольные постоянные [1]).

10.104. Применим неравенство (10.49') к функции $u_i = y$, которая на кривой γ_i, как функция переменной

$$x = \int_{z_0}^{z} d\sigma,$$

где z_0 — фиксированная и z — переменная точки на γ_i, удовлетворяет всем условиям п. 10.103. Тогда l равно

$$l_i = \int_{\gamma_i} d\sigma \tag{10.50}$$

и $y' = \frac{du}{d\sigma} = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{1}{\mu}$, следовательно,

$$\int_{\gamma_i} u_i^2\,d\sigma \leqslant \frac{l_i^2}{4\pi^2}\int\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{d\sigma}{\mu^2} \leqslant \frac{l^2}{4\pi^2}\int\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{d\sigma}{\mu^2}, \tag{10.51}$$

где

$$l = l(\rho) = \max_i l_i \tag{10.52}$$

означает наибольшую из длин l_i для $i = 1, \ldots, q_\rho$.

---

[1]) Доказательство (10.49') получается путем решения вариационной задачи минимизации интеграла от y'^2, когда известно значение интеграла от y^2 и выполняется дополнительное условие (10.49). Справедливость (10.49') усматривается еще более непосредственно, если исходить из частного случая $l = 2\pi$; тогда неравенство равносильно тому, что

$$\sum (a_i^2 + b_i^2) \leqslant \sum i^2 (a_i^2 + b_i^2),$$

где a_i, b_i — коэффициенты Фурье функции y. [См., например, Харди, Литтльвуд, Полиа, Неравенства, М., 1948, стр. 223. — *Прим. перев.*]

10.105. Если мы теперь вернемся обратно к неравенству (10.47'), то из (10.51) следует, что

$$A_i(\rho)=\int\limits_{\gamma_i} u_i\,du' \leqslant \frac{l(\rho)}{2\pi}\sqrt{\int\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\frac{d\sigma}{\mu^2}\cdot\int\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\frac{d\sigma}{\mu^2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{l(\rho)}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\right]\frac{d\sigma}{\mu^2}=\frac{l(\rho)}{4\pi}\frac{dA_i(\rho)}{d\rho}.$$

Суммируя здесь по $i=1,\ \ldots,\ q_\rho$, получаем

$$\sum_i\int\limits_{\gamma_i} u\,du'=A(\rho)\leqslant\frac{l(\rho)}{4\pi}\frac{dA}{d\rho}.$$

Таким образом, мы имеем теорему Сарио — Пфлюгера:

Если аналитический дифференциал $f\,dz=du+i\,du'$ является в G полным, то для каждого ρ из интервала $\alpha_1\leqslant\rho\leqslant\alpha_2$ выполняется неравенство

$$\frac{dA(\rho)}{d\rho}\geqslant\frac{4\pi}{l(\rho)}A(\rho). \tag{10.53}$$

10.106. Рассмотрим теперь открытую риманову поверхность R. Зафиксируем на R произвольную точку $z=\zeta$ и рассмотрим на R метрику $d\sigma=\mu\,ds$ с неположительной кривизной; примером может служить метрика Пуанкаре или метрика Бергмана. Соответствующая функция $\rho(z)$ определяется тогда для каждой точки $z\in R$ как нижняя граница

$$\rho(z)=\inf\int_\zeta^z d\sigma,$$

где интегрирование производится по всевозможным дугам, соединяющим ζ и z.

Мы, как раньше, обозначаем через $\Lambda(\rho)$ длину геодезической „окружности“ $\rho(z)=\rho$

$$\Lambda(\rho)=\int\limits_{\rho(z)=\rho} d\sigma$$

и снова полагаем

$$l(\rho)=\max_i\int\limits_{\gamma_i} d\sigma,$$

где γ_i $(i=1,\ \ldots,\ q_\rho)$ — замкнутые кривые, из которых составлена линия уровня $\rho(z)=\rho$. При этом мы предполагаем, что эта линия для каждого конечного ρ $(0<\rho<\rho_1\leqslant\infty)$ расположена на компактной части поверхности R и при $\rho\to\rho_1$ стремится к идеальной ее границе.

Пусть теперь на R задан полный регулярный аналитический дифференциал $dw = du + i\,du' = f\,dz$. Тогда

$$A(\rho) = D(\rho) = \int\int |f|^2\,dx\,dy,$$

и, интегрируя неравенство (10.53) в пределах от ρ_0 до ρ $(0 < \rho_0 < \rho)$, получаем оценку

$$D(\rho) \geqslant D(\rho_0)\, e^{4\pi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{l(r)}}. \tag{10.54}$$

10.107. Возьмем теперь ρ_0 столь малым, чтобы поверхность $\rho(z) \leqslant \rho_0$ лежала в некотором параметрическом круге K_ζ $(|z-\zeta| < 1)$ с центром в точке $z = \zeta$. Тогда, если коварианта f в точке $z = \zeta$ не равна нулю и нормирована так, что $f(\zeta) = 1$, то [1])

$$D(\rho_0) \geqslant \pi\rho_0^2,$$

и мы имеем неравенство

$$D(\rho) \geqslant \pi\rho_0^2 e^{4\pi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{l(r)}}, \tag{10.54'}$$

которое и при $\rho_0 \to 0$ дает положительную границу для $D(\rho)$. Соотношение (10.54′) можно рассматривать как обобщение теоремы Бибербаха о площадях, имеющей место для круга $|z-\zeta| < 1$: оно переходит в эту теорему, если поверхность R односвязна и за $d\sigma$ принимается величина $|dw|$, где $w = w(z, \zeta)$ — функция, конформно отображающая поверхность R на круг $|w| < d \leqslant \infty$ так, что $z = \zeta$ переходит в точку $w = 0$ и $\left|\frac{dw}{dz}\right| = 1$ при $z = \zeta$. Отсюда следует, что постоянная 4π в показателе справа в (10.54) не может быть увеличена, ибо это неравенство переходит в равенство для дифференциала $dw(z, \zeta)$.

10.108. Для *размаха* $s = s(\zeta)$ поверхности R имеем, согласно пп. 9.37 и 10.52, определение

$$s(\zeta) = \min \frac{\pi}{D(w)},$$

где $dw = f\,dz$ — полный дифференциал на R, удовлетворяющий условию $f(\zeta) = 1$, и минимум $s(\zeta)$ (если он положителен) достигается для бергмановой коварианты

$$f(z, \zeta) = \frac{\sum f_i(z)\overline{f_i(\zeta)}}{\sum |f_i(\zeta)|^2},$$

[1]) Это верно только при некотором ограничении на выбор $d\sigma$, например при $d\sigma = |dw|$. Для дальнейшего (п. 10.108 и след.) это не имеет значения. — *Прим. перев.*

где f_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — полная ортонормированная система подпространства $[f]$ полных аналитических ковариант с конечной нормой на поверхности R. Применяя соотношение (10.54′) к этой экстремальной ковариантe, получаем оценку

$$\frac{1}{s(\zeta)} \geqslant \rho_0^2 e^{4\pi \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{l(r)}}.$$

Отсюда следует критерий Сарио [1]:

Для того, чтобы поверхность R имела размах, равный нулю, достаточно, чтобы интеграл

$$\int^{\rho_1} \frac{dr}{l(r)} \tag{10.55}$$

расходился [1]).

10.109. Сравнение с теоремой п. 10.95, содержащей достаточное условие для того, чтобы *емкость* равнялась нулю, показывает, что критерий (10.55) представляет собой существенное усиление предыдущего условия: в самом деле, $l(\rho) \leqslant \Lambda(\rho)$, и порядок роста величины l существенно меньше, чем у Λ, если кривая $\rho(z) = \rho$ при возрастании ρ быстро разветвляется, так, что длины отдельных частей γ_i имеют одинаковый порядок роста. Простые примеры таких поверхностей могут быть указаны в виде подобластей числовой плоскости с помощью принципа построения канторовых множеств. Таким путем легко убедиться в том, что, как утверждалось в п. 10.52, существуют поверхности, для которых емкость положительна, в то время как размах равен нулю [2]).

10.110. Регулярное покрытие. Для исследования метрической структуры римановой поверхности иногда бывает полезно ограничить параметрическое представление поверхности некоторыми добавочными регуляризующими условиями [3]). Мы говорим, что последовательность параметрических окрестностей поверхности R образует *регулярное покрытие* R, если эти окрестности покрывают поверхность так, что соответствующие параметрические круги K^1, K^2, ... удовлетворяют следующим двум дополнительным условиям:

1. Существует конечное *число покрытия* m, которое для каждого параметрического круга K указывает наибольшее возможное число соседних с ним параметрических кругов заданной последовательности.

---

[1]) Из этой теоремы следует, что упомянутые в п. 9.58 поверхности $\tilde{R}$ имеют размах, равный нулю (Сарио [1], Курант [1*]).

[2]) Относительно таких примеров см. Сарио [1] и Альфорс и Бёрлинг [1].

[3]) Относительно следующих пп. 10.110—10.114 ср. мою заметку [2].

2. Существует *постоянная покрытия* d $(0 < d < 1)$, такая, что круги $k^{\mu}_{z_\mu}$ $(|z_\mu| \leqslant 1-d)$ и $k^{\nu}_{z_\nu}$ $(|z_\nu| \leqslant 1-d)$, принадлежащие двум соседним параметрическим кругам k^{μ} $(|z_\mu| < 1)$ и k^{ν} $(|z^{\nu}| < 1)$, всегда содержат точки, эквивалентные относительно соответствующего соотношения соседства $z_\mu \longleftrightarrow z_\nu$.

То, что каждая риманова поверхность R допускает такое регулярное покрытие, получается немедленно, если отобразить универсальную поверхность наложения $\hat{R}$ поверхности R согласно основной теореме Римана; в нормальном представлении E можно тогда непосредственно указать регулярную покрывающую систему (K) метрического фундаментального многоугольника π. Также и при других представлениях поверхности R, например, когда она задана в виде многолистной поверхности наложения некоторой области комплексной числовой плоскости, в общем случае легко путем „перенесения" найти регулярное параметрическое представление поверхности.

10.111. Регулярные комплексы отрезков. Если поверхность R уже представлена „регулярно", как было указано выше, то системе (K) можно поставить в соответствие комплекс отрезков следующим образом. В каждом параметрическом круге K^{μ} берем точку, например центр $z_\mu = 0$, и соединяем соответствующую „узловую точку" P_μ на R с узловыми точками P_ν соседних кругов K^{ν} с помощью путей $\lambda_{\mu\nu}$, прообразы которых лежат в $K^{\mu}_{z_\mu} + K^{\nu}_{z_\nu}$. Систему всех таких „отрезков" λ мы называем комплексом отрезков, соответствующим (K).

Комплекс (λ) называется *регулярным*, если выполняется следующее условие: пусть K^{μ} — параметрический круг системы (K) и λ_μ — некоторый отрезок, выходящий из соответствующей узловой точки P_μ. Тогда длина $\int |dz_\mu|$ части λ_μ, пробегающей в K^{μ}, не должна превышать некоторой постоянной L, не зависящей от μ.

Для регулярного параметрического представления (K) всегда можно построить регулярный комплекс (λ) так, что $L < 1$. В самом деле, если $K^{\mu}_{z_\mu}$ и $K^{\nu}_{z_\nu}$ — соседние круги, то берем в первом какую-либо точку z'_μ $(|z'_\mu| \leqslant 1-d)$, которая в $K^{\nu}_{z_\nu}$ имеет эквивалентную точку z'_ν $(|z'_\nu| \leqslant 1-d)$. Если тогда отрезок λ_μ составить из прямолинейных параметрических отрезков $(0, z'_\mu)$ и $(0, z'_\nu)$, то, очевидно, $L \leqslant 1-d < 1$.

10.112. Критерий для нулевой границы. Для открытой римановой поверхности, представленной регулярно системой (K^{μ}), имеет место следующая

Теорема. *Пусть* G_n $(n=1, 2, \ldots)$ *— последовательность множеств, состоящих из конечного числа параметрических кругов* (K^{μ}) *и обладающих следующими свойствами:*

1°. *Множества* G_n *отделяют заданную точку* P_0 *поверхности* R *от идеальной границы.*

2°. *Существует конечное число* N, *такое, что каждая точка поверхности принадлежит не более чем* N *различным множествам кругов* G_n.

Пусть тогда Λ_n *— число параметрических кругов, входящих в* G_n. *Если ряд*

$$\sum \frac{1}{\Lambda_n}$$

расходится, то поверхность R *имеет нулевую границу.*

10.113. Доказательству этой теоремы предпошлем простую лемму:

Пусть G *— соединение некоторого числа заданных параметрических кругов* K^{μ}. *Пусть на* G *определен однозначный аналитический дифференциал* dw *и, далее,*

$$D=\int\int\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy$$

— интеграл Дирихле от dw *по* G.

Если тогда

$$q_{\nu}=\max\left|\frac{dw}{dz_{\nu}}\right|$$

на K^{ν} [1]), *то*

$$D\geqslant\frac{\pi d^2}{m}\sum q_{\nu}^2,$$

где m *— число покрытия,* d *— постоянная покрытия системы* (K) *и суммирование производится по кругам* K^{ν}, *входящим в* G.

Доказательство. В каждом круге K_z $(|z|\leqslant 1-d)$ множества G возьмем точку $z=z_0$, где достигается максимум q величины $\left|\frac{dw}{dz}\right|$. Если

$$\frac{dw}{dz}=c_1+2c_2(z-z_0)+\ldots+nc_n(z-z_0)^{n-1}+\ldots,$$

то, согласно теореме Бибербаха о площадях, имеем

$$\int\int\limits_{|z-z_0|\leqslant d}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 dx\,dy=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n|c_n|^2d^{2n}\geqslant\pi|c_1|^2d^2=\pi q^2d^2,$$

---

[1]) Нужно брать часть K^{ν}, соответствующую $|z_{\nu}|\leqslant 1-d$. — *Прим. перев.*

и так как каждая точка G принадлежит не более чем m кругам K^μ, то

$$\pi d^2 \sum q_\nu^2 \leqslant mD,$$

что и требовалось доказать.

10.114. Чтобы теперь доказать критерий п. 10.112, рассмотрим последовательность $R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_\nu \subset \ldots$, $R_\nu \to R$, исчерпывающую R, где R_ν ограничена конечным числом жордановых кривых $\gamma_i^\nu (i = 0, 1, \ldots, n_\nu)$. Тогда для каждого n существует столь большое число ρ, что R_ρ содержит объединение множеств $G_1, \ldots, G_n$; не нарушая общности, можно предположить, что все G_ν отделяют γ^0 от Γ.

Мы образуем гармоническую меру $\omega(\gamma^\rho, P)$ части γ^ρ границы куска поверхности $R_\rho - R_0$ и рассматриваем соответствующий интеграл Дирихле [1])

$$D_\rho = \iint\limits_{R_\rho - R_0} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx\, dy = \int\limits_{\gamma^\rho + \gamma^0} \omega\, d\omega' = \int\limits_{\gamma^\rho} d\omega'.$$

Пусть теперь (λ) — регулярный комплекс отрезков, принадлежащий системе (K^μ) и построенный согласно п. 10.111. Рассмотрим часть L_ν комплекса отрезков, принадлежащую множеству кругов G_ν $(\nu \leqslant n)$; так как L_ν отделяет границу γ^0 от γ^ρ, то можно найти некоторую ее часть L'_ν, которая также разделяет γ^0 и γ^ρ и вместе с γ^0 ограничивает некоторую часть F_ν поверхности $R_\rho - R_0$. Дифференциал $d\omega'$ на $R_\rho - R_0$ однозначен и регулярен, и, следовательно, его полное приращение по всей границе поверхности $R_\rho - R_0$ равно нулю. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma^0} d\omega' = \int\limits_{L'_\nu} d\omega' = \int\limits_{\gamma^\rho} d\omega' = D_\rho,$$

следовательно,

$$D_\rho \leqslant \int\limits_{L'_\nu} |d\omega'| \leqslant \int\limits_{L_\nu} \left| \frac{dw}{dz} \right| |dz|.$$

Если теперь λ — отрезок комплекса L_n, соединяющий два соседних параметрических круга K^i и K^j, то, сохраняя обозначения леммы п. 10.113, имеем

$$\int\limits_{\lambda} \left| \frac{dw}{dz} \right| |dz| < q_i + q_j,$$

---

[1]) Вся граница $R_\rho - R_0$ состоит из γ^ρ и γ^0; $dw = d\omega + i d\omega'$. — *Прим. перев.*

и так как из каждого узла выходит не более чем m отрезков, то

$$D_\rho < m \sum_{G_\nu} q_i,$$

где суммирование производится по кругам K^i, входящим в G_ν. Число этих кругов равно Λ_ν, и из леммы следует, что

$$\Big(\sum q_i\Big)^2 \leqslant \Lambda_\nu \sum q_i^2 \leqslant \frac{m\Lambda_\nu}{\pi d^2} D'_\nu,$$

где D'_ν означает интеграл Дирихле по G_ν. Следовательно,

$$D_\rho^2 < m^2 \Big(\sum q_i\Big)^2 < \frac{m^3 \Lambda_\nu}{\pi d^2} D'_\nu$$

и, в силу $\sum_{\nu=1}^{n} D'_\nu \leqslant N D_\rho$,

$$\sum \frac{1}{\Lambda_\nu} \leqslant \frac{m^3}{\pi d^2} \frac{1}{D_\rho^2} \sum_1^n D'_\nu \leqslant \frac{m^3 N}{\pi d^2} \frac{1}{D_\rho}.$$

Если теперь ряд

$$\sum \frac{1}{\Lambda_\nu}$$

расходится, то $D_\rho \to 0$ при $\rho \to \infty$, и тогда гармоническая мера идеальной границы Γ должна равняться нулю. Таким образом, критерий п. 10.112 доказан.

10.115. Критерий для полных дифференциалов. Предыдущий метод ведет к аналогичному критерию для того, чтобы поверхность R имела *размах, равный нулю*, т. е. чтобы на R не существовало никакого *полного* аналитического дифференциала dw с конечным интегралом Дирихле, кроме $dw \equiv 0$ (полное обоснование см. у Сарио [1]). Этот критерий состоит в следующем (см. теоремы пп. 10.96 и 10.108).

В предположениях теоремы п. 10.112 рассмотрим в каждой цепочке кругов G_n количества $\Lambda_n^1, \Lambda_n^2, \ldots$ кругов, которым соответствуют *связные* части соответствующего комплекса $L_n \left(\sum_i \Lambda_n^i = \Lambda_n\right)$, и обозначим через l_n максимальное их значение,

$$l_n = \max_i \Lambda_n^i \leqslant \Lambda_n.$$

Если тогда ряд

$$\sum_n \frac{1}{l_n}$$

расходится, то поверхность R имеет размах, равный нулю.

Очевидно, в предыдущих критериях не предполагается, что *вся* поверхность R представлена „регулярно"; достаточно, чтобы условие регулярности выполнялось в цепочках кругов G_n.

10.116. Теория открытых римановых поверхностей в течение последних лет чрезвычайно интенсивно развивалась, и поэтому я не мог полностью учесть результаты, частично полученные во время редактирования настоящей монографии. В заключение я хочу лишь коротко указать на следующие исследования, тесно связанные с рассмотренной выше проблематикой теории открытых римановых поверхностей.

Изложенная в гл. X несколько абстрактная теория абелевых интегралов на открытых римановых поверхностях дополняется более конкретными исследованиями для частных классов поверхностей. См. Хорних [1], П. Ю. Мирберг [1]—[6], Л. Мирберг [1].

Проблемой Пенлеве существования ограниченных аналитических функций на открытых римановых поверхностях занимались Альфорс [1], П. Ю. Мирберг [7], Альфорс и Бёрлинг [1].

Относительно попыток перенести риманово билинейное соотношение на абелевы интегралы на открытых римановых поверхностях следует указать на работы Альфорса [2] и Виртанена [1].

Наконец, упомяну исследования Бенке и Штейна по открытым римановым многообразиям, и в случае одной комплексной переменной содержащие далеко идущие результаты, касающиеся существования на открытых поверхностях абелевых интегралов с заданными периодами.

ЛИТЕРАТУРА [1])

Александров П. С.

[1**] Комбинаторная топология, М. — Л., 1947.

[2**] Введение в теорию функций и теорию множеств, М. — Л., 1948.

Александров П. С. и Хопф (Alexandroff P., Hopf H.)

[1*] Topologie, Bd. I, Berlin, 1935.

Альфорс (Ahlfors L. V.)

[1] Open Riemann surfaces and extremal Problems on compact subregions, Comment Math. Helvet., **24** (1950).

[2] Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, **I**, **35** (1947).

Альфорс и Бёйрлинг (Ahlfors L., Beurling A.)

[1] Conformal invariants and functions theoretic null-sets, Acta math., **83** (1950).

Аппель и Гурса (Appel P., Goursat E.)

[1*] Théorie des functions algébriques et de leurs intégrales, tt. I — II, Paris, 1929—1930.

Ахиезер Н. И.

[1**] Элементы теории эллиптических функций, М. — Л., 1948.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.

[1**] Теория линейных операторов, М. — Л., 1950.

Бадер (Bader R.)

[1] La théorie du potentiel sur une surface de Riemann, Comptes rendus, **228** (1949).

Бергман (Bergman S.)

[1*] The karnel function and conformal mapping, Math. surveys, New York, **5** (1950).

[2] Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen, Math. Ann., **96** (1922).

Бёйрлинг (Beurling A.)

См. Альфорс и Бёйрлинг.

---

[1]) Литература по теории конформных отображений и теории униформизации настолько обширна, что мне пришлось ограничиться приведением списка лишь тех работ, на которые в настоящей монографии имеются прямые ссылки.

[В список литературы переводчиком внесено несколько названий книг советских авторов. Эти названия отмечены двумя звездочками. — *Прим. перев.*]

Бибербах (Bieberbach L.)
[1*] Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II, Berlin, 1931.
[2] Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung, Rend. circolo mat. Palermo, **38** (1914).
[3] Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstrassische Funktionentheorie, Math. Ann., **78** (1918).

Бохнер (Bochner S.)
[1] Über orthogonale Systeme analytischer Funktionen, Math. Z., **14** (1922).
[2] Fortsetzung Riemannscher Flächen, Math. Ann., **98** (1928).

Брело (Brelot M.)
[1] Familles de Perron et Problème de Dirichlet, Acta Szeged, **9** (1939).

Ван-дер-Варден (van der Waerden B. L.)
[1] Topologie und Uniformisierung der Riemannschen Flächen, Ber. sächs. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl., **93** (1941).

Вейль (Weyl H.)
[1*] Die Idee der Riemannschen Fläche, 2. Aufl., Leipzig und Berlin, 1923.

Виртанен (Virtanen K. J.)
[1] Über Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichem Geschlecht, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A, I, **56** (1949).
[2] Über eine Integraldarstellung von quadratisch integrierbaren analytischen Differentialen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **69** (1950).
[3] Über die Existenz von beschränkten harmonischen Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **75** (1950).

Волковыский Л. И.
[1**] Проблема типа односвязной римановой поверхности, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **34** (1950).

Гарабедян и Шиффер (Garabedian P., Schiffer M.)
[1] Identities in the theory of conformal mapping, Proc. Amer. Math. Soc., **65** (1949).

Гильберт (Hilbert D.)
[1*] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig und Berlin, 1912.

Голузин Г. М.
[1**] Геометрическая теория функций комплексного переменного, М. — Л., 1952.

Грунский (Grunsky H.)
[1] Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung mehrfachzusammenhängender schlichter Bereiche, Schr. Math. Inst. Univ. Berlin, **1** (1932).

Гурвиц (Hurwitz A.)
[1*] Теория аналитических и эллиптических функций, М. — Л., 1933.

урса (Goursat E.)
См. Аппель и Гурса.

юлиа (Julia G.).
[1*] Principes geométriques de l'Analyse, tt. I — II, Paris, 1930—1932.

Зейферт и Трельфалль (Seifert H., Threlfall W.)
[1*] Топология, М. — Л., 1938.

Йоханссон (Johansson S.).
[1] Beweis der Existenz linear-polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen, Math. Ann., **62** (1906).

[2] Zur Theorie der Uniformisierung Riemannscher Flächen, Acta Soc. Sci. Fenn., **40** (1910).

Каратеодори (Carathéodory C.)
[1*] Конформное отображение, М. — Л., 1934.
[2] Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann., **73** (1913).

Керекьярто (Kerékjártó B. V.)
[1*] Vorlesungen über Topologie, Berlin, 1923.

Кёбе (Koebe P.)
[1] Über die Uniformisierung der algebraischen Curven, Math. Ann., **69** (1910).
[2] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, III, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1908.
[3] Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, IV, Acta math., **41** (1918).
[4] Abbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereichen, Math. Z., **7** (1922).
[5] Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen, I, Ber. preuss. Akad. Wiss., 1927.

Клейн (Klein F.)
[1*] Gesammelte Abhandlungen, Bd. III, Berlin, 1923.
[2] Briefwechsel zwischen Klein und Poincaré. См. Klein [1*], S. 615—618.

Курант (Courant R.)
[1*] Геометрическая теория функций комплексной переменной, М. — Л., 1934.
[2*] Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности, М., 1953.

Лаасонен (Laasonen P.)
[1] Zum Typenproblem der Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. I, **52** (1942).

Лехто (Lehto O.)
[1] Anwendung orthogonaler Systeme auf gewisse funktionentheoretische Extremal- und Abbildungsprobleme, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I, **67** (1949).
[2] On Hilbert spaces with a kernel function, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser A, I, **74** (1950).

Локки (Lokki O.)
[1] Über Existenzbeweise einiger mit Extremaleigenschaft versehenen analytischen Funktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **76** (1950).

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.
[1**] Элементы функционального анализа, М. — Л., 1951.

Маркушевич А. И.
[1**] Теория аналитических функций, М. — Л., 1950.

Мирберг Л. (Myrberg L.)
[1] Normalintegrale auf zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **71** (1950).

Мирберг П. Ю. (Myrberg P. J.)
[1] Über die Existenz der Greenschen Funktion auf einer gegebenen Riemannschen Fläche, Acta math., **61** (1933).

[2] Über die Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, **45**, 3 (1935).
[3] Über transzendente hyperelliptische Integrale erster Gattung, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **14** (1943).
[4] Über Integrale auf transzendenten Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **31** (1945).
[5] Über analytische Funktionen auf transzendenten zweiblättrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten, Acta math., **76** (1944).
[6] Über analytische Funktionen auf transzendenten Riemannschen Flächen, X. Congr. math. scand., Copenhague, 1946.
[7] Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen, Ann. Acad. Sci Fenn., Ser. A, I, **58** (1949).

Неванлинна (Nevanlinna R.)
[1*] Однозначные аналитические функции, М. — Л., 1941.
[2] Ein Satz über offene Riemannsche Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **54** (1940).
[3] Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **1** (1941).
[4] Eindeutigkeitsfragen in der Theorie der konformen Abbildung, 10, Congr. math. scand., Copenhague, 1946.
[5] Über die Anwendung einer Klasse von Integralgleichungen für Existenzbeweise in der Potentialtheorie, Acta Szeged, A, **12** (1950).
[6] Über Mittelwerte von Potentialfunktionen, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A, I, **57** (1949).

Нейман (Neumann C.)
[1*] Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 2. Aufl., Leipzig, 1884.

Осгуд (Osgood W. F.)
[1*] Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II/2, Leipzig und Berlin, 1932.

Парро (Parreau M.)
[1] Moyennes des fonctions harmoniques et analytiques, Ann. Inst. Fourier, 3 (1951).

Перрон (Perron O.)
[1] Über die Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$, Math. Z., **18** (1928).

Поссель (de Possel R.)
[1] Sur le prolongement des surfaces de Riemann, Comptes rendus, **186**, **187** (1928).
[2] Sur les ensembles du type maximum et le prolongement des surfaces de Riemann, Comptes rendus, **194** (1932).

Пуанкаре (Poincaré H.)
[1*] Oeuvres, t. I, Paris, 1916.
[2] См. Клейн [2].

Пфлюгер (Pfluger A.)
[1] Über das Anwachsen eindeutiger analytischer Funktionen auf offenen Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **64** (1949).

Радо (Radó T.)
[1] Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Szeged, **2** (1925).
[2] Über eine nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, Math. Z., **20** (1924).

Раух (Rauch H. E.)
[1] Generalizations of some theorems of R. Nevanlinna, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **51** (1948).

Риман (Riemann B.)
[1*] Gesammelte mathematische Werke, 2. Aufl., Leipzig, 1892.

Ройден (Royden H. L.)
[1] Some remarks on open Riemann surfaces, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **85** (1951).

Сарио (Sario L.)
[1] Über Riemannsche Flächen mit hebbarem Rand, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **50** (1948).
[2] Existence des fonctions d'allure donnée sur une surface de Riemann, Comptes rendus, **229** (1949).
[3] Existence des intégrales abéliennes sur les surfaces de Riemann arbitraires, Comptes rendus, **230** (1950).

Стойлов (Stoilow S.)
[1*] Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris, 1938.

Трельфалль (Threlfall W.)
См. Зейферт и Трельфалль.

Фату (Fatou P.)
[1*] Fonctions automorphes. См. Аппель и Гурса [1*], t. 2.

Форд (Ford L. R.)
[1*] Автоморфные функции, М. — Л., 1936.

Фрике и Клейн (Fricke, Klein)
[1*] Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I — II, Leipzig und Berlin, 1897.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
[1*] Grundzüge der Mengenlehre, 2. Aufl., Berlin, 1927.
См. также: Теория множеств, М. — Л., 1937.

Хейнс (Heins M.)
[1] The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces, Ann. of Math., **50** (1949).

Хопф (Hopf H.)
[1*] См. Александров и Хопф.
[2] Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven, Compositio Math., **2** (1935).

Хорних (Hornich H.)
[1] Integrale erster Gattung auf speziellen transzendenten Riemannschen Flächen, Mh. Math. Phys., **40** (1933).

Чеботарев Н. Г.
[1**] Теория алгебраических функций, М. — Л., 1948.

Шварц (Schwarz H. A.)
[1*] Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. II, Berlin, 1890.

Шиффер (Schiffer M.)
[1] См. Гарабедян и Шиффер.
[2] Приложение, см. Курант [2*].

Шоттки (Schottky F.)
[1] Über die konforme Abbildung mehrfachzusammenhängender ebener Flächen, Crelles J., **83** (1877).

Штейнер (Steiner A.)
[1] Eine direkte Konstruktion der Abelschen Integrale erster Gattung, Diss., Zürich, 1950.

Штребель (Strebel K.)
[1] Über das Kreisnormierungsproblem der konformen Abbildung, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, **101** (1951).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелевы дифференциалы на замкнутых римановых поверхностях 181
— — второго рода 201
— — первого рода 188
— — третьего рода 202
Абелевы интегралы, см. абелевы дифференциалы
— потенциалы 370
Автоморфные функции 300, 303, 374
Аксиома отделимости 54
— счетности 57, 102, 163, 166, 231
Алгебраические функции 15, 33, 35, 210
— образы 41
— элементы функции 15, 33
Алгеброидные функции 303
Александров 56, 57, 58
Альфорс 384, 395, 397, 404, 405, 418, 423
Аналитические образы 303
Аппель 209

Бадер 389
Базис дифференциалов первого рода 197
— группы гомологий 187
Бенке 423
Бергман 379, 380, 383, 384, 399, 416
Бергмана билинейная форма 379
— ядро 380
Бёйрлинг 418, 423
Бибербах 291, 320, 324, 334, 377, 383, 417, 420
Больяи 243
Бохнер 379, 380
Брело 425

Ван-дер-Варден 232
Вейерштрасс 305
Вейль 13, 49, 62, 91, 209, 231
Виртанен 384, 404, 423
Вычеты 142

Гарабедян 340
Гармоническая мера 157, 176, 233, 352
Гармонический дифференциал 116, 394
Гильберт 62, 306
Гильбертово пространство 198, 376
Гиперцикл 244
Гиперэллиптические поверхности 210
Гомеоморфность 53, 94
Гомотопия 67
Грейб 169
Грунский 314, 316
Группа гомологий замкнутой поверхности 187
— —, инвариантность 66
— —, определение 66
— — открытой поверхности 385
— — поверхности с краем 199
— преобразований наложения 92, 343
Гурвиц 10, 121, 122
Гурса 209

Двумерные многообразия 55
Деформации 67
Дивергенция 116
Дискретная группа линейных преобразований 245

Емкостная постоянная 223, 351

Замыкание предельной точечной вершины 185
— римановой поверхности 273, 296
Зейферт 425

Индекс кривой относительно точки 143
Индуцированная топология 50
Интеграл Дирихле 133, 142
— Пуассона 157, 389
Интегральная теорема Коши 146
Йоханссон 291

Каратеодори 62, 185
Кёбе 6, 62, 221, 306, 308, 328, 330, 341, 350
Классы поверхностей 394
Клейн 6, 13, 46, 62, 209, 259, 268
Ковариантные векторы 114
— тензоры 116

Конформные классы 44, 277
— соотношения соседства 55, 62
Краевая задача 153, 160
— — вторая 400
— — для жордановой области 176
— — для круга 156
— — для кругового кольца 158
— — для полуплоскости 158
— — с особенностями 166, 169
— —, нормированные решения 355
Круговая нормировка 341
Курант 62, 231, 306, 328, 340, 342, 344, 414

Лаасонен 408
Лехто 314, 379
Линейные преобразования 239
— — бесконечно малые 289
— —, классификация 242
— — перестановочные 288
Лобачевский 243
Локки 314

Метод выметания 14
Метрика Бергмана 382, 383, 384, 399, 416
— Пуанкаре 243, 272, 320, 382, 384, 416
— сферическая 244, 272
— топологического пространства 49, 50
Метрические критерии 405
— пространства 49
Мирберг Л. 423
Мирберг П. Ю. 372, 423
Модулярная группа 280

Неевклидовы движения 242
Нейман 6, 13, 62, 169, 170, 175, 366
Неподвижные точки линейных преобразований 240
Нормальная форма 257
— — абелевых потенциалов 368
— — многоугольника 254, 257, 258
Нулевая граница 354, 356, 363, 366, 419

Области жордановы 176
— с параллельными разрезами 306, 308
Осгуд 209
Ориентация индуцированная 63
— когерентная 105
— поверхности 56
— римановой поверхности 62
Орицикл 244
Ортонормированные абелевы дифференциалы 198
Отображения конформные 62
Отображения многозначные 291
— на области с разрезами 312, 313, 338
— поверхностей на себя 285
— топологические 53
Отождествление 53

Перенесение аналитического продолжения 124
— деформаций 79
— отображений 84
— путей 74
Перрон 14
Поверхности односвязные 69
—, подобные однолистным 9, 306, 308
—, пространственная модель 348
Поверхность с краем 112, 271, 308, 346
Поверхность наложения безграничная 76
— — интегральных функций 91
— —, определение 73
— — разветвленная 96
— — римановой поверхности 100
— —, существование для заданной группы 87
— — универсальная 90, 292
Полнота пространства H 376
Поссель 273
Предельные вершины круговые и точечные 184
Представление поверхности с помощью многоугольника 109, 181
Преобразования бесконечно малые 289
— наложения 91
Пример Прюфера 58, 61
Принцип аргумента 17, 146, 310, 316, 326
— Дирихле 14
— максимума и минимума 129, 234
— Харнака 14, 156, 159, 164, 178, 223, 234, 356
Проблема Пеилеве 337
Продолжаемость поверхностей 273
Проектирование 73
Пространства компактные 50
— топологические 48
— Хаусдорфа 49, 54
Прямоугольник деформации 68
Пуанкаре 6, 46, 62, 243, 244, 268, 281, 305, 374, 382, 416
Пфлюгер 414, 416

Радо 13, 57, 58, 59, 62, 63, 102, 104, 231, 273
Размах 322, 381, 417, 422
—, экстремальные свойства 331
Раух 410

Рациональные функции 118, 206, 300
Регулярное покрытие 418
Регулярные комплексы отрезков 419
Решетка двоякопериодическая 266
— эквивалентных точек 266
Риман 6, 10, 12, 13, 44, 121, 122, 175, 301
Римановы поверхности замкнутые 181
— —, некоторые классы 394
— —, определение 62
— — открытые 346
— — сингулярные 357, 358, 367, 405
— — с краем 271, 346
— соотношения 194, 196, 203
Род поверхности 9, 186, 270, 274, 301, 348
Ройден 395, 404

Сарио 273, 337, 342, 344, 365, 395, 414
Свободные стороны 247
Сепарабельность 377
Симплексы дифференцируемые 131
— особые 63
— прямолинейные 63
— топологические 103
Соотношение Римана—Гурвица 121, 301
Стойлов 12, 96, 294

Теорема Абеля 206
— о вычетах 145
— о монодромии 25, 127
— Руше 17, 328
— Римана об отображении 175
— —, гиперболический случай 228
— —, параболический случай 232
— —, эллиптический случай 175
Точки разветвления 96, 298
Трельфалль 425
Триангулируемость римановой поверхности 272
Триангуляция 103, 271

Угловой дефект 270
Униформизация, общее определение 294
—, построение униформизирующей поверхности 295
— с помощью комплексной переменной 292, 299
— с помощью поверхностей, подобных однолистным 342
Униформизация с помощью слабейшей поверхности наложения 298
— с помощью универсальной поверхности наложения 292
Уравнение Гамильтона — Якоби 406
Устранимые особенности 337

Фату 305
Форд 305
Формула Гаусса — Боннэ 148
— Грина 140
— Эйлера для многогранников 10
Формулы преобразования интегралов 141
Фрике 209
Фундаментальная группа, определение 69
— —, топологическая инвариантность 69
Фундаментальная область 245
Фундаментальный многоугольник 246, 278
— — метрический 259
— —, нормальная форма 254
— —, элементарное преобразование 255
Функция Грина 222, 233, 350, 372

Характеристика поверхности 119, 122
Хейнс 229, 232
Хопф 56, 57, 58, 169, 316
Хорних 423

Цепи особые 64
Циклы 65

Четырехугольник с нулевыми углами 275

Шварц 6, 13, 16, 46, 62, 133, 154, 167, 170, 175, 231, 268, 366
Шиффер 314, 340
Шоттки 340
Штейн 423
Штейнер 192
Штребель 342

Эквивалентность конформная 44, 62, 218, 278
Экстремальные свойства отображений на области с разрезами 313

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства 3

Из предисловия автора 4

Введение 5

Глава I. Алгебраические функции 15
§ 1. Алгебраические элементы функции 15
§ 2. Построение алгебраической функции по ее элементам . . . 35

Глава II. Понятие римановой поверхности 47
§ 1. Топологическое пространство, многообразие, риманова поверхность 47
§ 2. Группы гомологий 63
§ 3. Фундаментальная группа 67
§ 4. Поверхности наложения 73
§ 5. Триангуляция многообразия 103

Глава III. Основные теоретико-функциональные теоремы 113
§ 1. Функции, дифференциалы 113
§ 2. Функции и ковариванты на замкнутых римановых поверхностях 118
§ 3. Аналитическое продолжение 123
§ 4. Принцип максимума и минимума 129
§ 5. Интегральные теоремы 131
§ 6. Аналитическое продолжение и интегралы 150

Глава IV. Теоремы существования 153
§ 1. Альтернирующий метод Шварца 153
§ 2. Решение краевой задачи для круга 156
§ 3. Аксиома счетности 163
§ 4. Решения с заданными особенностями 166
§ 5. Замкнутые поверхности 169
§ 6. Решение краевой задачи для произвольной жордановой области 176

Глава V. Замкнутые римановы поверхности 181
§ 1. Римановы поверхности, представленные с помощью многоугольников 181
§ 2. Дифференциалы первого рода 188
§ 3. Дифференциалы второго и третьего рода 201
§ 4. Рациональные функции 206
§ 5. Интегралы алгебраических функций 210

Глава VI. Теорема Римана об отображении 220
§ 1. Предварительные замечания 220
§ 2. Функция Грина открытой поверхности 222

§ 3. Односвязные поверхности гиперболического типа 228
§ 4. Параболический случай 232

Глава VII. Группы линейных преобразований 239
§ 1. Линейные преобразования 239
§ 2. Дискретные группы конформных отображений единичного круга на себя 245
§ 3. Нормальная форма фундаментального многоугольника . . . 254
§ 4. Метрический фундаментальный многоугольник 259
§ 5. Конформные отображения числовой плоскости на себя . . 266

Глава VIII. Униформизация 268
§ 1. Нормальная форма римановой поверхности 268
§ 2. Продолжаемость римановой поверхности 273
§ 3. Конформные классы 277
§ 4. Униформизация 291

Глава IX. Поверхности, подобные однолистным 306
§ 1. Предварительные замечания 306
§ 2. Поверхности с краем, подобные однолистным 308
§ 3. Экстремальные свойства отображений на области с разрезами 313
§ 4. Отображения открытых поверхностей, подобных однолистным 321
§ 5. Экстремальные свойства размаха 331
§ 6. Другие нормированные отображения поверхностей с положительным размахом на области с разрезами 338
§ 7. Приложения к униформизации 342

Глава X. Открытые римановы поверхности 346
§ 1. Строение открытой поверхности 346
§ 2. Функция Грина, емкость, гармоническая мера 350
§ 3. Краевые задачи для некомпактных подобластей 355
§ 4. Нормированные потенциалы с заданными особенностями . 364
§ 5. Автоморфные потенциалы 370
§ 6. Абелевы интегралы первого рода 374
§ 7. Подпространства интегрируемых с квадратами дифференциалов 384
§ 8. Некоторые классы римановых поверхностей 394
§ 9. Метрические критерии 405

Литература 424

Предметный указатель 430

Р. Неванлинна
УНИФОРМИЗАЦИЯ

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*
Технический редактор *А. Н. Никифорова*
Корректор *И. Ф. Рождественская*

Сдано в производство 4/IV 1955 г.
Подписано к печати 14/VII 1955 г.
Т06304. Бумага $60\times92^{1}/_{16}=13{,}6$ бум. л.
27,3 печ. л.
Уч.-издат. л. 23,8. Изд. № 1/2309.
Цена 18 р. 65 к. Зак. 295.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Министерство культуры СССР.
Главное управление полиграфической
промышленности.
4-я тип. им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.