ROLF NEVANLINNA

RAUM, ZEIT UND RELATIVITÄT

Birkhäuserverlag
Basel und Stuttgart
1964

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Популярная серия

Р. НЕВАНЛИННА

Пространство, время и относительность

Перевод с немецкого
Г. А. Вольперта

Под редакцией
И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1966

В этой книге рассказывается о математических и физических основах теории относительности.

Значительная ее часть посвящена геометрии. Здесь излагаются логические основы этого раздела математики, описывается неевклидова геометрия, геометрия четырехмерного пространства, затрагиваются и некоторые другие вопросы.

Большое внимание уделено обсуждению точного понятия времени и связанных с ним парадоксов, а также понятию движения и пространственно-временной системы. В последней части книги описываются самые основные понятия механики, основанной на теории относительности Эйнштейна.

Изложение подкупает своей простотой и четкостью. Эта книга, блестяще написанная крупным ученым, несомненно, доставит удовольствие всем любителям математики и физики.

Редакция литературы по математическим наукам

От редактора

Автор этой небольшой книги, Рольф Неванлинна, — выдающийся математик, специалист по теории функций комплексного переменного. С его именем связана современная теория мероморфных функций, которая играет очень важную роль в математическом анализе. Р. Неванлинна является профессором университета в Хельсинки, президентом Финского математического союза; в 1959—1962 гг. он был президентом Международного математического союза.

Книга, излагающая содержание общедоступных лекций, которые автор читал в университетах Хельсинки и Цюриха, посвящена теории относительности Эйнштейна.

На русском языке имеется много хороших книг на эту тему (некоторые из них перечислены в списке литературы на стр. 223—228), часть из которых также принадлежит перу выдающихся ученых. Мы надеемся, что и эта книга займет среди них достойное место. Она написана совсем просто, для ее чтения достаточно сведений, излагаемых в курсе средней школы. От других книг по теории относительности она отличается тем, что главное внимание в ней уделяется общим идеям, прежде всего математическим, лежащим в основе теории относительности.

В соответствии с этим в книге довольно бегло говорится об экспериментальных подтверждениях теории относительности, почти ничего не говорится об ее практических применениях, но общей концепции (геометрического) пространства посвящена чуть ли не половина книги, причем связанные с этим кругом проблем чисто математические вопросы дискутируются значительно подробнее, чем физические эксперименты, лежащие в основе теории Эйнштейна. Сам Неванлинна в конце книги говорит, что его интересовало не только (а может быть, даже не столько) создание теории относительности, но и общий ход развития точного естествознания. В частности, он особенно подчеркивает значение решающих поворотов в этом развитии, их связь и взаимодействие. В интересующем его круге вопросов Неванлинна отмечает семь таких поворотов: создание древнегреческими геометрами современной дедуктивной системы геометрии (Евклид); возникновение современных физических воззрений как результата обобщения известных фактов (Коперник, Кеплер, Галилей); создание дедуктивной математизированной системы построения точного естествознания — физики и астрономии (Ньютон); возникновение новых концепций пространства, положившее конец уверенности в логической единственности евклидовой геометрии (Лобачевский, Бойяи, Гаусс); создание теории «искривленных» пространств (Риман); возникновение идеи об едином пространственно-временно́м континууме, подчиненном системе преобразований Лоренца (Эйнштейн, Пуанкаре, Минковский; 1905); рождение идеи об «искривленном» пространственно-временно́м континууме, включающем явления гравитации как факторы геометрического порядка (Эйнштейн; 1916). При этом первым пяти из этих семи научных поворотов он уделяет никак не меньше места, чем последним двум, непосредственно связанным с теорией относительности.

Большое внимание Р. Неванлинна уделяет общефилософским проблемам, связанным с концепциями времени и пространства, а также методическим вопросам, касающимся преподавания математики и физики. Соответствующие страницы книги, выражающие точку зрения видного ученого, представляют бесспорный интерес. Однако в противоположность страницам, на которых излагаются математические теории и физические факты, к этим страницам следует отнестись с известной долей критицизма [1]).

[1]) О философских вопросах, связанных с теорией относительности, см., например, сборник [41] в списке литературы в конце книги.

Основная цель, к которой стремится автор, не сообщить читателю новые факты, а заинтересовать его новым кругом идей, пробудить его пытливость и интерес. Этой цели Р. Неванлинна вполне достигает.

К русскому изданию книги приложен составленный редактором список дополнительной литературы — он может оказаться полезным читателю, пожелавшему продолжить ознакомление с затронутым здесь кругом вопросов. Для удобства этот список литературы разбит на две части; можно считать, что раздел А этого списка содержит дополнительную литературу к главе I «Пространство», а раздел Б — литературу к остальным главам книги Неванлинны. Редактору принадлежат также некоторые подстрочные примечания.

И. М. Яглом

Предисловие автора

На рубеже девятнадцатого и двадцатого столетий началась новая эпоха в истории физики. В 1900 г. Макс Планк (1858—1947) своей гипотезой о квантах заложил основу современной теории атома. Пять лет спустя Альберт Эйнштейн (1879—1955) опубликовал свои первые работы по теории относительности.

Теория Эйнштейна до основания потрясла тогдашнюю картину мира. Она сразу привлекла к себе необычное внимание, возбудила большой интерес, но одновременно встретила и резкое сопротивление. В течение десятилетий новая теория оживленно дискутировалась среди физиков, математиков и философов. Основные принципы теории: относительность времени, постоянство скорости света, привилегированное положение этой скорости как наибольшей из всех возможных — отклоняются от прежних представлений, однако не содержат в себе ничего произвольного. Идеи новой теории органически связаны с классической физикой и неизбежно должны были вырасти на ее почве. В двадцатых годах текущего столетия теория относительности окончательно закрепила свое положение в науке.

Дискуссия о теории относительности в начале столетия происходила не только в кругах специалистов. Оживленное участие в ней приняла также широкая публика. Идеи Эйнштейна являлись в какой-то мере сенсационными, и эта их черта усиливалась привлекающим названием («теория относительности»). Вместе с тем это название дало повод к недоразумениям. В самом деле, теорию Эйнштейна можно было понимать как своеобразную попытку подтвердить старую истину: все в этом мире относительно. Однако название «теория относительности» вполне обосновано. Понятие *относительности* действительно стоит на переднем плане теории Эйнштейна, одновременно дающей весьма точно очерченное и резко дифференцированное теоретическое построение физической картины мира.

Более или менее полное овладение теорией относительности требует обширных физических и математических знаний. Ее точное построение возможно только с помощью методов высшей математики. Но именно поэтому попытка изложить принципы теории Эйнштейна также для широких кругов читателей является особенно привлекательной и важной задачей. Основные идеи теории относительности органически связаны с фундаментальными вопросами, касающимися пространства, времени и движения и с давних времен возбуждавшими человеческую мысль. Правильное представление о теории относительности можно получить, только зная историю идей теории пространства и времени. При таком подходе выявляются обстоятельства, значение которых выходит далеко за пределы математических и физических теорий и знание которых весьма важно для понимания происхождения человеческих понятий и идей.

Настоящая книга адресована в первую очередь не специалистам, а широким кругам читателей, интересующимся теорией относительности. Для понимания изложения требуются знания по математике и физике, не выходящие за пределы программ средней школы.

ГЛАВА I

Пространство

§ 1. Видимое, или воспринимаемое, пространство

Геометрия занимается определенными неизменными, т. е. не зависящими от времени, формами и свойствами пространства. Некоторые из таких геометрических явлений мы наблюдаем в этой аудитории. Занимаемое ею помещение имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Последний ограничен шестью плоскостями: четырьмя стенами, полом и потолком. Эти плоскости пересекаются попарно вдоль двенадцати прямых. Определенные тройки этих прямых пересекаются в вершинах восьми углов аудитории. Мы привели наглядные примеры *основных элементарно-геометрических объектов*: точек, прямых и плоскостей.

Далее мы замечаем, что между геометрическими объектами существуют определенные *отношения*. Например, для заданной точки и заданной прямой существуют две возможности: либо «точка лежит на прямой» (прямая проходит через точку), либо «точка лежит вне прямой» (прямая не проходит через точку). Для двух прямых, лежащих в одной плоскости, опять существует альтернатива: либо эти прямые «параллельны» (не имеют общей точки), либо они «пересекаются»; в последнем случае они имеют одну-единственную общую точку. Две пересекающиеся прямые наклонены одна к другой либо под «прямым» углом, либо под «непрямым» («косым») углом. Для двух отрезков (отрезком называется часть прямой, ограниченная двумя точками) также существуют две возможности: либо эти отрезки «имеют одинаковую длину» (конгруэнтны), либо они «имеют разные длины» (неконгруэнтны); в последнем случае один из этих отрезков «длиннее», а другой «короче».

Эти геометрические явления подчиняются определенным геометрическим *законам*. Примерами таких законов могут служить следующие:

1. Через две точки проходит точно одна прямая.

2. Пусть задана точка P и прямая a. В плоскости, проходящей через P и a, имеется точно одна прямая, проходящая через точку P и при этом параллельная прямой a (аксиома параллельности).

3. Сумма углов треугольника равна 180 градусам.

4. Построим на сторонах прямоугольного треугольника три квадрата, имеющие своими сторонами гипотенузу и катеты треугольника. Тогда площадь квадрата, построенного на гипотенузе, будет равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах (теорема Пифагора).

Из обучения в средней школе мы знаем достаточное число других аналогичных предложений, поэтому нет нужды продолжать здесь их перечисление.

Многие из этих предложений наглядно очевидны. В правильности более сложных предложений мы убеждаемся путем простых измерений или экспериментов. В частности, такой способ применим для проверки правильности теоремы Пифагора. Для этого начертим на куске миллиметровой бумаги прямоугольный треугольник и построим на его сторонах квадраты; подсчитав число квадратных миллиметров, содержащихся в каждом из этих квадратов, мы убедимся (с точностью, соответствующей выполненным измерениям), что квадрат, построенный на гипотенузе, действительно равновелик сумме квадратов, построенных на катетах.

Таким способом мы можем исследовать те геометрические явления, которые доступны восприятиям наших чувств, в первую очередь — зрительным восприятиям; поэтому нашу пространственную окрестность мы будем называть «видимым пространством», или «воспринимаемым пространством». Мы поступаем при этом так, как это принято в эмпирическом, экспериментальном естествознании. Геометрия, как показывает ее название, первоначально была наукой об измерении земли, следовательно, она представляет собой такую же естественную науку, как физика, астрономия, химия, биология и т. д. Задачей каждой естественной науки на эмпирической ступени ее развития является собирание наблюдаемых фактов (из области, которой эта наука занимается), исследование отношений между обнаруженными фактами и обобщение выявленных закономерностей в *законы природы*. В этом состоит и задача геометрии на ее элементарной, эмпирической ступени.

Геометрия по своей природе отличается от других областей естествознания только относительной простотой и бедностью качественной стороны изучаемого ею мира явлений. С точки зрения рассматриваемого материала геометрия является наиболее примитивной из всех естественных наук. Поэтому *эмпирическая* геометрия вряд ли может вызвать к себе такой же интерес, как другие естественные науки (например, биология), в которых количество подлежащих исследованию соотношений значительно больше, а сами соотношения труднее поддаются эмпирическому обнаружению.

Еще более сложные соотношения рассматриваются в гуманитарных науках (например, в истории). Эти науки занимаются явлениями, в которых на первом плане стоят человеческие поступки и их последствия. Здесь предмет исследования как с качественной, так и с количественной стороны настолько сложен и дифференцирован, что с трудом поддается даже только описательному обзору. Еще труднее отыскивать в таких областях общие, пригодные в любом случае правила (например, законы истории). Поэтому в таких науках при критическом (аналитическом и синтетическом) исследовании ограничиваются выявлением и подчеркиванием только таких типичных и важных особенностей, которые могут привести к более глубокому пониманию всего комплекса трудно понимаемых явлений.

В свете сказанного понятно, что рациональное исследование таких сложных областей знания не может производиться столь совершенно, как в точных естественных науках. Однако этот, если так можно сказать, недостаток компенсируется бóльшим и более непосредственным интересом, возбуждаемым к себе более сложным миром явлений этих областей знания. Конечно, изучение таких сложных явлений не должно сводиться к беспорядочному собиранию наблюдений; напротив, оно должно производиться разборчиво, с позиций, позволяющих отделять существенное от несущественного и обращать внимание на действительно важные особенности. Такой же подход к исследованию необходим и в естественных науках, хотя их материал значительно более ограничен. Ниже мы проиллюстрируем это на примере геометрических исследований.

§ 2. В какой мере геометрия правильна? Принцип возможности опытной проверки

Продолжим рассмотрение элементарной геометрии. На чем основано представление, что наши восприятия и измерения в видимом пространстве дают *правильное* знание геометрических явлений? Если мы попытаемся глубже вникнуть в этот вопрос, то сразу же встретимся с трудностями. Проблематичен даже вопрос о природе основных геометрических объектов. Вспомним о простом предложении: «через две точки проходит точно одна прямая». Для того чтобы сделать это предложение наглядным, рассмотрим в видимом пространстве какое-нибудь явление, передающее ту ситуацию, которая содержится в сделанном утверждении. Рассмотрим, например, прямую, ограничивающую с какой-либо стороны пол аудитории и соединяющую вершины двух ее углов. Или отметим на доске мелом две точки и соединим их чертой при помощи линейки. Конечно, при этом мы сознаем, что наши образы «точек» и «прямой» лишь весьма несовершенно передают ситуацию, содержащуюся в сформулированном выше геометрическом предложении. В самом деле, в геометрии точка представляет собой место, не имеющее никаких пространственных размеров, а прямая представляет собой «одномерную» линию, не имеющую толщины и обладающую, кроме того, примечательным свойством прямизны, т. е. свойством отсутствия у нее кривизны. Между тем эти свойства точки и прямой у упомянутых выше физических

воспринимаемых фигур, строго говоря, отсутствуют. Точка, отмеченная на доске мелом, как бы аккуратно мы ее ни поставили, всегда имеет некоторую толщину. Толщиной обладает и линия, проведенная мелом. Далее, какими средствами мы располагаем, чтобы проверить прямизну линии? Если мы ответим, что эта линия прочерчена при помощи хорошей линейки, то проблема будет перенесена на вопрос о прямизне линейки. Правда, в практике имеются различные способы, позволяющие проверить прямизну физических линий. Наиболее точные из них основаны на представлении, что свет распространяется прямолинейно, по крайней мере в безвоздушном пространстве. Но является ли прямолинейность световых лучей определением (следовательно, соглашением) или же она может быть сведена к каким-либо другим признакам прямизны? Если мы будем продолжать эти рассуждения, то попадем в заколдованный круг.

Как бы мы ни пытались разрешить эти трудности, мы всегда обнаружим, в соответствии с предыдущими рассуждениями, следующее:

Наглядное, эмпирическое подтверждение геометрического предложения (вспомним, например, об упомянутых выше предложениях 1—4) осуществляется посредством двух шагов:

Первый шаг. Объекты и отношения, содержащиеся в предложении, сначала сопоставляются с наглядными понятиями, что делает ситуацию, предусмотренную предложением, доступной чувственному восприятию наблюдателя.

Второй шаг. Только после того как для ситуации, подлежащей исследованию, найдено конкретное представление, можно либо путем прямого «рассматривания», либо посредством экспериментов или измерений установить, является ли утверждение, содержащееся в предложении, верным или неверным.

Значение этого принципа возможности опытной проверки для эмпирических исследований особенно подчеркнул физиолог и физик Эрнст Мах (1838—1916), занимавшийся также вопросами теории познания. С некоторыми оговорками принцип возможности опытной проверки является важным инструментом познания; он лежит в основе одного из философских направлений — так называемого позитивизма.

Однако из сказанного выше следует, что, по крайней мере в геометрии, а с соответствующими оговорками — в точном естествознании вообще, применение принципа возможности опытной проверки не всегда приводит к *однозначному* результату. В самом деле, вследствие отмеченной выше грубости физического осуществления геометрических объектов наглядное, конкретное представление любого геометрического предложения всегда будет несколько неопределенным и расплывчатым, что характерно для «эмпирической действительности»; поэтому проверка утверждения, содержащегося в предложении (второй шаг), также становится ненадежной, оставаясь, в лучшем случае, в каких-то пределах точности.

Правда, так обстоит дело не со всеми утверждениями, касающимися воспринимаемой нами действительности. Например, если я скажу, что в этой комнате собрались четыре человека или что на этой доске отмечены мелом четыре точки, то все присутствующие, безусловно, будут единодушны в том, правильно или неправильно сделанное утверждение (в отношении точек — при условии, что они расположены достаточно далеко одна от другой).

Неопределенность и неуверенность начинаются только при проверке более тонких соотношений. Пусть, например, требуется экспериментально проверить, правильна ли теорема Евклида: «Сумма углов треугольника равна в точности 180°». В таком случае прежде всего, согласно принципу возможности опытной проверки, следует заменить треугольник подходящей физической фигурой (первый шаг). После этого можно начать производить измерения (второй шаг), используя для этого транспортир или какой-нибудь более точный прибор. Результат будет положительный: сумма углов окажется равной 180° по крайней мере в пределах «ошибки наблюдения». Поэтому если кто-либо утверждал бы, что сумма углов треугольника равна 179°, то такое утверждение следовало бы считать эмпирически опровергнутым. Тем не менее поставленная цель — доказать правильность утверждения о том, что сумма углов треугольника равна в т о ч н о с т и 180°, остается недостигнутой. В самом деле, вследствие принципиальной неопределенности конкретных предметов и восприятий органов чувств, результаты измерения не могут быть совершенно однозначны; поэтому если уточнить утверждение, отрицающее теорему Евклида, сформулировав его следующим образом: «сумма углов треугольника меньше 180°, а именно в рассматриваемом случае меньше на одну тысячную угловой секунды», то отклонение от теоремы Евклида будет ниже пределов точности наблюдений и измерений и его нельзя будет обнаружить. Таким образом, вопрос о том, является ли теорема Евклида вполне точной, остается нерешенным.

С точки зрения практика такой исчезающе малой неопределенностью смело можно пренебречь. В самом деле, в большей части практических задач совершенно безразлично, равна ли сумма углов треугольника в точности 180° или же она отличается от этого значения на одну тысячную долю угловой секунды. Инженер-строитель или топограф могут быть вполне удовлетворены тем, что рассматриваемая теорема Евклида верна с точностью, бесспорно достаточной для любых занимающих их задач. У них нет никаких оснований останавливаться на тонкостях рассмотренного выше рода.

Поэтому неудивительно, что некоторые практики считают столь критический подход к казалось бы несущественным особенностям теоретической казуистикой, совершенно неинтересной для реалистически мыслящих людей. Однако такая точка зрения ставит границы для мышления, границы, которые на долгое время могут стать серьезным препятствием для развития науки и притом также в таких направлениях, которые рано или поздно могут оказать решающее влияние на практику, в том числе и на технику. Критический анализ рассмотренного выше характера всегда сообщал научным исследованиям импульсы, приводившие к расширению слишком узких представлений и открывавшие перед наукой, а в конце концов даже и перед практикой, неожиданные новые пути. Возникновение теории относительности является замечательным примером такого развития.

Резюмируя сказанное выше, подчеркнем следующее.

Эмпирическая проверка правильности утверждений какой-либо теории (например, геометрической) может производиться только в соответствии с принципом возможности опытной проверки (первый и второй шаги, стр. 15). Однако результат такого способа проверки часто получается однозначным лишь в некоторых пределах.

Если утверждение не согласуется с результатами измерений сильнее, чем это возможно вследствие ошибок наблюдений и измерений, то его следует считать эмпирически опровергнутым.

Наоборот, если утверждение отличается от результатов наблюдения столь мало, что отклонения лежат ниже возможной ошибки наблюдения, то тогда утверждение *возможно* правильно. Однако его *безусловная* правильность остается недоказанной.

Таким образом, принцип возможности опытной проверки может применяться скорее для опровержения какого-либо утверждения из воспринимаемого мира явлений, чем для его подтверждения. Утверждение, что сумма углов треугольника равна 179°, опровергается результатами измерений. В то же время эксперимент не позволяет установить, правильно ли утверждение Евклида о том, что сумма углов треугольника *в точности* равна 180°. Следовательно, вопрос об эмпирической правильности евклидовой геометрии остается нерешенным.

В тех случаях, когда необходимо добиваться уверенного знания, применение принципа возможности опытной проверки ограничивается также некоторыми другими обстоятельствами, нами пока не упоминавшимися. О них будет сказано ниже, в § 6 настоящей главы.

§ 3. Представляемое пространство

Мы видели, что геометрическим объектам и отношениям соответствуют в видимом пространстве конкретные образы (например, фигуры на доске), несовершенно

передающие рассматриваемые геометрические понятия. В самом деле, когда мы думаем о «точке», мы имеем в виду не материальную частицу, а место в пространстве, не имеющее никакого протяжения. Аналогичным образом, думая о «прямой», мы имеем в виду не отрезок, проведенный при помощи линейки, а настоящую «прямую», т. е. в точности одномерную и нигде не искривленную линию. Вообще геометрия занимается геометрическими явлениями, имеющими место не в видимом пространстве, а в бесконечном мировом пространстве, которое в нашем представлении мы наделяем идеальными геометрическими объектами: точками, обладающими в точности качеством «точечности»; прямыми, имеющими только длину, но не толщину, и притом обладающими совершенной «прямизной»; плоскостями, т. е. двумерными нигде не искривленными поверхностями и т. д.

Это идеальное пространство будем называть *представляемым пространством.* Понятие о таком пространстве возникает в результате примечательного во многих отношениях процесса абстракции. Проследим за этим процессом несколько подробнее.

Пусть точка видимого пространства изображена в виде материальной частицы. Эта частица не является в точности точкой, но если мы начнем ее мысленно сжимать, то она все лучше и лучше будет соответствовать тому, что мы понимаем под геометрической точкой: месту в пространстве, не имеющему никакого протяжения.

Более точное представление о геометрической точке может дать следующий пример. Начертим при помощи линейки отрезок a_0 длиною 1 *дм.* Разделим этот отрезок на десять равных частей и остановим внимание на одной из них. Пусть это будет отрезок a_1. Его длина равна 1 *см.* Этот отрезок опять разделим на десять равных частей. Теперь мы получим отрезок a_2 длиною 1 *мм*$=0{,}01$ *дм.* Если мы попытаемся продолжать такой процесс деления, то должны будем скоро прекратить его вследствие «неопределенности» видимого пространства. Однако в нашем представляемом пространстве не имеется никакого препятствия для продолжения этого процесса: здесь мы можем повторить его неограниченное число раз. Каждый из следующих после a_0 отрезков a_1, a_2, ... будет находиться внутри предыдущего. Длина этих отрезков будет становиться все меньше и меньше (например, после сотого деления мы получим исчезающе малый отрезок a_{100} длиною 10^{-100} *дм*; это число изображается десятичной дробью с 99 нулями после запятой). Посредством повторения такого процесса деления мы как бы улавливаем «точку», именно ту точку («место в пространстве, не имеющее протяжения»), которая является общей для всех отрезков a_0, a_1, ...

Далее, очевидно, что прямая содержит бесконечно большое число различных точек. Математически мы выражаем это словами: прямая представляет собой *континуум*, она состоит из бесконечно большого числа непрерывно распределенных точек, заполняющих ее без пропусков.

Подобно тому как точка представляемого пространства является идеальным предельным случаем конкретной точки, т. е. получается из последней путем абстрагирования от ее пространственного протяжения, так и идеальная прямая получается из конкретного отрезка после отвлечения от его «несовершенств». Тогда в качестве существенных признаков прямой остается только ее одномерность и идеальная прямизна.

Однако процесс перехода к идеальным образам состоит не только в абстрагировании, т. е. в исключении из рассмотрения несущественных свойств воспринимаемых объектов. Он сопровождается другой, совершенно противоположной тенденцией: добавлением к воспринимаемым объектам некоторых новых свойств. Мы уже видели, что для прямой такое добавление производится в направлении «микрокосмоса»: отрезок в результате многократного повторного деления понимается как континуум, состоящий из бесконечно большого числа точек. Однако конкретный отрезок прямой, например, линия, ограничивающая потолок аудитории, требует дополнения также в направлении «макрокосмоса». В самом деле, отрезок может быть продолжен за пределы аудитории, правда, практически не очень да-

леко. Но зато в нашем представлении мы можем продолжить его неограниченно в обе стороны, сохраняя при этом его идеальную прямизну.

Таким образом, переход от видимого пространства к представляемому происходит только частично путем процесса абстрагирования, т. е. исключения (с точки зрения геометрии) не имеющих значения деталей и качеств. В существенном этот переход обусловливается также конструктивным, можно сказать — продуктивным моментом.

При описании происхождения понятий последнему обстоятельству в общем случае не уделяется достаточного внимания. Обычно односторонне подчеркивается абстрагирование, а о дополняющей тенденции, существенной для процесса идеализации, почти ничего не говорится. Между тем именно последний момент придает понятиям и идеям их подлинную «производительную силу» и двигает мышление вперед. Такое положение имеет место не только в геометрии: аналогичным образом происходит возникновение понятий и в других областях, по крайней мере в тех случаях, когда рассматриваются не совсем тривиальные соотношения.

Правда, в простых случаях образование понятий происходит путем почти одного абстрагирования или исключения. Например, общее понятие «стул» возникает из множества отдельных стульев путем отвлечения от тех свойств отдельных стульев, которые несущественны для основной функции стула. Такими свойствами являются, например, цвет стула, его стиль и т. п. Конструктивный момент образования понятия сводится здесь к минимуму — к отождествлению отдельных индивидуумов множества стульев с самостоятельным общим понятием «стула».

Эта конструктивная и идеализирующая тенденция особенно четко развита в теоретических науках, прежде всего — в математике, где она сознательно возведена в ранг руководящего принципа. Ее можно проследить также «вниз», вплоть до той ступени человеческого знания, когда возникли элементарные, «донаучные» повседневные понятия и представления. Особенно хорошим примером может служить рассмотренный выше процесс возникновения понятия представляемого пространства из явлений видимого пространства. Здесь этот процесс представляет собой бессознательное и притом скорее психологическое, чем логическое явление. Каждый ребенок очень скоро приспосабливается к понятию представляемого пространства автоматически, как бы по принуждению природы и без какого бы то ни было руководства со стороны. Когда он приходит в школу, геометрические объекты уже знакомы ему и как конкретные предметы, и как мысленно представляемые фигуры. Поэтому если в школе слишком долго и подробно занимаются описанием этих наглядных вещей, то это следует считать большой дидактической ошибкой. Соответствующие понятия представляются школьникам сами собой разумеющимися, и нет ничего скучнее и утомительнее и для детей, и для взрослых, чем выслушивание подробных и педантичных разъяснений, касающихся вещей, которые слушателям заранее известны и понятны. При преподавании геометрии на первый план должны выдвигаться с самого начала совсем другие моменты. Ниже мы вернемся к этому вопросу.

Критика критики

Читатель, критически следивший за нашим изложением, возможно, не совсем согласится с разделением «видимого пространства» и «представляемого пространства». Без сомнения, такое резкое противопоставление схематично. Особенно часто задается вопрос: не обусловлено ли и не подчинено ли понятие видимого пространства уже в какой-то мере сложившемуся понятию представляемого пространства? В известной степени такой вопрос правилен.

Однако здесь мы не можем глубже вникать в этот вопрос. При всяком вводном изложении всегда необходимо идти несколько схематическим путем, так как иначе за частыми оговорками не будут видны главные особенности. При исследовании проблем, связанных с пространством, вполне обосновано различать видимое пространство и представляемое пространство. Особенно

четко это показал Р. Карнап [1]). Несмотря на все возражения, противопоставление обоих пространств дает ключ к пониманию и разъяснению многих проблем.

§ 4. Возможность опытной проверки высказываний о представляемом пространстве

Согласно сказанному выше, все высказывания, что-либо утверждающие о «явлениях природы», следовательно, и геометрические утверждения, подлежат контролю принципом возможности опытной проверки. Но как быть с выводами, к которым нас приводят наши геометрические представления? Наше естественное восприятие пространства соответствует утверждениям Евклида, а в основе этих утверждений лежат навязанные нам природой геометрические представления. Не является ли это положение достаточной гарантией того, что идеальное пространство — *евклидово* и что система Евклида содержит единственно правильную теорию этого пространства? Если кто-либо, задумывающийся над этими вопросами, полагает, что все переживаемое им в его представлении, имеет для него достаточную доказательную силу, то это его частное дело. Однако он никак не может рассчитывать на то, что его субъективное познание будет признано объективным.

Необходимо отметить, что слова «субъективный» и «объективный» часто употребляются несколько легкомысленно, без вполне ясного отчета о том, что следует понимать под этими словами. Вообще противопоставление субъективного и объективного довольно проблематично. Я не буду здесь больше останавливаться на этом общем вопросе, но все же поясню, что я имею в виду, говоря о противопоставлении субъективного и объективного в рассматриваемой конкретной связи.

---

[1]) Р. Карнап (Rudolf Carnap, род. в 1891 г.) — австрийский математик и философ. С 1931 г. живет и работает в США. Автор, по-видимому, имеет в виду его работы «Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftstheorie» (1922), «Physikalische Begriffsbildung» (1922). На русский язык переведена книга Карнапа «Значение и необходимость» (М., ИЛ, 1959); вводная статья к этой книге содержит критику философских взглядов Карнапа. — *Прим. ред.*

1. Если кто-либо утверждает, что пространство евклидово, то он «субъективен», пока свое утверждение обосновывает только своим собственным представлением. В самом деле, он не может быть уверен, что другие индивидуумы воспринимают пространственные отношения подобным же образом. Однако его точка зрения выиграет в объективности, если она будет принята также другими индивидуумами, возможно, опять на основе их «личных представлений».

2. Однако уверенность в правильности геометрического утверждения достигает более высокой степени надежности и объективности, если утверждаемая ситуация может быть «изображена» или «реализована» в видимом пространстве и если восприятия, полученные в этом пространстве, подтверждают высказанное утверждение (либо непосредственно, либо посредственно — путем выполнения определенных экспериментов) в пределах точности, которые необходимо учитывать при любой экспериментальной проверке.

По поводу первого обстоятельства. Нет никаких сомнений в том, что евклидово воззрение на пространство очень широко удовлетворяет указанному выше постулату объективности или, вернее, постулату *внутренней субъективности.* В самом деле, это воззрение и соответствующее понимание пространства, которые, согласно системе Евклида, являются единственно правильным учением о пространстве, господствовали, начиная с древних времен до начала прошлого столетия. Физика Ньютона и «Критика чистого разума» Канта так сильно укрепили авторитет этого воззрения на пространство, что, казалось, не могло оставаться никакого сомнения в его правильности.

Тем не менее нашлись математики, которые не удовлетворились таким положением, и немного более ста лет тому назад внезапно возникла неевклидова геометрия. Однако новые взгляды остались собственностью математиков. Мало что изменилось и сейчас. Широкая публика, практика и в большей части вопросов также точное естествознание продолжают оставаться на точке зрения Евклида, хотя известно, что, например, в определенных вопросах физики, астрономии и космологии

уместнее отказаться от евклидовой геометрии в пользу более общего понимания идеи пространства.

В дальнейшем мы увидим, каким образом возможно существование такого парадоксально странного и противоречивого положения вещей и как следует понимать это положение. Кратко говоря, суть дела состоит в том, что неевклидова геометрия возникла из евклидовой геометрии и что неевклидовы пространства в своих небольших, пространственно ограниченных частях являются приближенно евклидовыми и притом тем точнее, чем меньше рассматриваемые окрестности. Поэтому в таких тесно ограниченных частях пространства можно применять правила Евклида также и в тех случаях, когда от них отказываются в исследованиях, касающихся очень больших, космических областей мирового пространства. Подробнее мы вернемся к этому вопросу в § 9 и 11 настоящей главы.

По поводу второго обстоятельства. Принцип возможности опытной проверки также говорит за евклидово понимание пространства. В практической геометрии евклидовы теоремы применимы и они совпадают с эмпирическим опытом, правда, только в определенных пределах точности, о чем мы уже говорили выше в связи с проверкой эмпирических утверждений. Такое же положение имеет место и в других областях знания, например в экспериментальной физике, в которой непосредственно или косвенно предполагается евклидова природа пространства. Только современные геометрические исследования и теория относительности сделали актуальным вопрос о том, является ли реальная структура пространства евклидовой. Однако новая теория пространства дает столь малые отклонения от евклидовых теорем, что экспериментальное решение вопроса о правильности той или иной геометрии в высшей степени затруднительно. Лишь в последнее время была создана экспериментальная техника, позволившая четко установить те отклонения от законов Евклида, которые обусловлены эффектами Эйнштейна, предсказанными общей теорией относительности.

Как бы ни обстояло дело со всеми этими проблемами, самые важные для нашей темы обстоятельства могут быть сформулированы в виде следующих трех тезисов.

Во-первых, опытное познание, получаемое в видимом и представляемом пространстве, показывает, что евклидовы предложения верны по крайней мере приближенно.

Во-вторых, принципиально невозможно эмпирически доказать полную правильность некоторых евклидовых предложений (например, теоремы о том, что сумма углов треугольника в точности равна 180°).

В-третьих, ни одно из прежних или современных наблюдений не исключает возможности неевклидовой природы пространства.

Обсуждение аксиомы параллельности

При изучении евклидовой системы геометрии с учетом возможности ее эмпирической проверки быстро обнаруживается, что она содержит положения, конкретная трактовка которых на основе нашего естественного воззрения на пространство невозможна. Прежде всего так обстоит дело с теми предложениями, которые содержат понятия, связанные с представлением о бесконечности пространства. Простым, но важным примером такого понятия является понятие *параллельности прямых*.

Параллельное расположение двух прямых представляет собой образ, который мы «видим» при нашем естественном геометрическом представлении пространства, не отдавая при этом себе отчета в свойствах, являющихся решающими при логическом анализе понятия параллельности. Эти свойства следующие:

1. Две параллельные прямые a и b лежат в одной плоскости.

2. Они не пересекаются, т. е. не имеется точки, которая лежит и на прямой a, и на прямой b.

Посредством этих свойств можно определить параллельность. Будем иметь это в виду при анализе фундаментального предложения Евклида о параллельных прямых. Это предложение гласит:

Пусть в плоскости имеется прямая a и точка P вне прямой a. В таком случае в этой плоскости имеется

точно одна прямая b, проходящая через точку P и не пересекающая прямой a.

Это утверждение кажется наглядно очевидным. Евклид придавал ему (точнее, утверждению, что через точку P проходит не более чем *одна* прямая b, параллельная прямой a) значение *аксиомы*, т. е. *основного предложения*, принимаемого без доказательства. Тем не менее содержание этого утверждения остается довольно сомнительным. В самом деле, если мы попытаемся проверить его правильность эмпирически, то сразу же натолкнемся на невозможность такой проверки. Попробуем представить ситуацию, предусмотренную предложением о параллельности, например, двумя сторонами

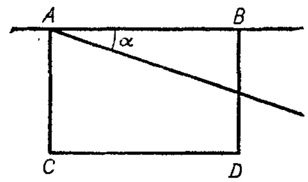


Рис. 1.

AB и CD прямоугольного пола аудитории (рис. 1). Эти стороны кажутся параллельными, по крайней мере они не пересекаются между собой в пределах аудитории. Мы можем проследить за ними дальше, за пределами нашего замкнутого пространства. Тогда мы увидим, что их продолжения также не пересекаются. Если мы будем пытаться следить за их продолжениями еще дальше, то в конце концов они исчезнут из нашего поля зрения, и мы уже не будем знать, как они там себя ведут. Возможно, что где-то очень далеко за пределами аудитории они все-таки пересекутся! Следовательно, мы не можем исключить возможности того, что через точку A нельзя провести ни одной прямой, параллельной CD, а в этом случае та часть предложения о параллельности, которая утверждает существование параллельных прямых, была бы опровергнута.

Аналогичное рассмотрение показывает, что и второе утверждение Евклида, а именно что через точку P проходит *не более* чем одна прямая b, параллельная a (это и есть евклидова аксиома параллельности), не может быть эмпирически непосредственно проверено. В самом деле, если мы будем считать, что прямые AB и CD параллельны, то как мы можем установить, что в рассматриваемой плоскости через точку A не проходят другие прямые, также параллельные CD? Для того чтобы проверить это эмпирически, проведем в плоскости пола через точку A прямую a, пересекающую прямую AB под углом α. Если угол α небольшой, то прямая a не пересечет прямой CD в пределах аудитории. Если мы продолжим прямую a за пределы аудитории, то, возможно, обнаружим, что она пересекает прямую CD. Тогда утверждение аксиомы параллельности будет спасено, но только для прямой a. Если направление прямой a будет отличаться от направления прямой AB на угол, меньший α, то точка пересечения этих прямых отодвинется дальше вправо, н так как эмпирически мы не можем проследить за прямой CD сколь угодно далеко, то сразу же возникнет вопрос: не может ли случиться, что прямая a, если ее направление будет отличаться от направления AB очень мало, вообще не пересечет прямой CD.

Таким образом, наглядность аксиомы параллельности остается сомнительной, хотя в то же время мы имеем естественную, представляющуюся почти неоспоримой наклонность считать евклидову аксиому параллельности правильной. Эта наша наклонность бесспорно является лишь «психологическим фактом». Наше наглядное представление об идеальной прямой неразрывно связано с представлением, что даже *при сколь угодно малом* повороте прямой AB вокруг точки A повернутая прямая обязательно пересечет прямую CD хотя бы в очень далекой точке.

Ввиду особой важности аксиомы параллельности исследуем несколько подробнее, на чем может быть основана ее «естественность». Для этой цели дополним только что рассмотренный пример мысленным экспериментом, который вообще не прибавит ничего нового к ранее сказанному, но зато, возможно, позволит лучше понять проблематичность «наглядности» евклидовой

теории параллельных. К этому эксперименту мы вернемся еще раз ниже, при обсуждении неевклидовой геометрии.

Евклидовы качели

Представим себе следующую ситуацию. На горизонтальной плоскости (на поверхности земли) укреплена вертикальная стойка OP (высотою k), на которую положена доска AB ($AP=BP=a$) так, что она может поворачиваться вокруг точки P. Если доска расположена перпендикулярно к стойке, то определяемая ею прямая L горизонтальна и, следовательно, параллельна своей проекции X на поверхность земли.

Если доска начнет поворачиваться так, что ее конечная точка A станет опускаться, то сначала доска еще не коснется поверхности земли. Но если длина a доски будет больше высоты k стойки, то конечная точка A доски в конце концов все-таки коснется поверхности земли в точке C (рис. 2). При этом доска повернется на угол $\alpha=\angle APC=\angle OCP$, т. е. на угол, противолежащий

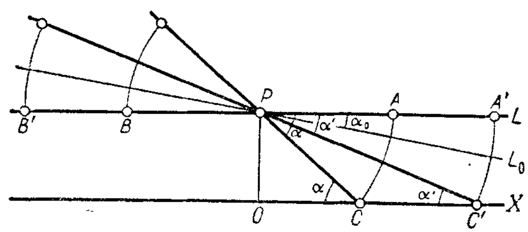


Рис. 2.

в прямоугольном треугольнике POC катету $OP=k$ (гипотенуза этого треугольника равна a). Таким образом, в этом положении доски прямая L уже пересекает прямую X. На вопрос, не может ли случиться, что прямая L пересечет прямую X еще до того, как конечная точка A доски коснется поверхности земли, опыт не дает никакого ответа. В самом деле, пока доска PA своим концом A еще не коснулась земли, все ее точки находятся в воздухе, т. е. расположены выше прямой X; поэтому с точки зрения заданной конкретной ситуации бессмысленно спрашивать, как ведет себя при качании доски ее мысленное продолжение, т. е. *вся* прямая L.

Ситуация изменится, если мы возьмем *более длинную* доску $A'B'$ $(OA'=a'>OA=a)$. При качании доски ее конечная точка A' коснется поверхности земли (в точке C') раньше, чем точка A, причем соответствующий угол поворота $\alpha'=\angle A'PC'=\angle OC'P$ будет меньше прежнего угла α (рис. 2). Следовательно, этот второй опыт показывает, что теперь для перевода прямой L в положение, при котором она пересекает прямую X, требуется поворот доски на меньший угол (α' вместо α). Точка C' пересечения прямых L и X удалена от начальной точки O больше, чем в первом опыте.

Однако опять остается нерешенным вопрос, не пересекается ли воображаемое продолжение прямой L с прямой X при еще меньшем угле поворота, чем α'.

Этот опыт можно повторить сколько угодно раз. Чем длиннее будет доска $(a<a'<a''<\ldots)$, тем меньший угол поворота $(\alpha>\alpha'>\alpha''>\ldots)$ будет достаточен для того, чтобы привести конечную точку $(A, A', A'', \ldots)$ доски в соприкосновение с поверхностью земли.

Проследим за этим процессом дальше. При удлинении доски ее точка пересечения с поверхностью земли $(C, C', C'', \ldots)$ удаляется от точки O все дальше и дальше, и наглядное восприятие показывает, что при достаточном увеличении длины доски точка C удаляется от точки O сколь угодно далеко[1]). При этом угол поворота будет становиться все меньше и меньше $(\alpha>\alpha'>$ $>\alpha''>\ldots)$. Возникает вопрос: безусловно ли необходимо принять, что этот угол станет *сколь угодно* малым? Не дает ли наше естественное, наглядно-геометрическое восприятие основание для предположения, что существует следующая возможность: угол α, несмотря

[1]) Это можно также весьма просто доказать, если принять, что теоремы евклидовой геометрии верны. Пусть стойка имеет длину $k=1$; тогда, согласно теореме Пифагора, $OC=\sqrt{a^2-1}$. При неограниченно возрастающей длине a величина a^2-1 также неограниченно возрастает, и то же самое имеет место и для квадратного корня. Интересно, что этот результат остается верным и в неевклидовой геометрии. К этому обстоятельству мы еще вернемся ниже.

на то что в рассмотренном процессе он непрестанно уменьшается, тем не менее не приближается сколь угодно близко к нулю, а стремится к некоторому предельному значению α_0, не совпадающему с нулем?

Первая возможность — угол α стремится к нулю, когда длина a доски неограниченно возрастает, — соответствует евклидовой точке зрения[1]). В самом деле, тогда прямая L будет пересекать прямую X уже при сколь угодно малом повороте α. Следовательно, горизонтальная прямая L будет единственной проходящей через P прямой, параллельной прямой X.

Вторая возможность — угол α уменьшается, но при неограниченном увеличении длины доски приближается к предельному значению α_0[2]), не совпадающему с нулем, — соответствует «неевклидовой» точке зрения. В самом деле, если прямая L, повернувшись на угол α_0, примет положение L_0, то доска PA, как бы длинна она ни была, не пересечет прямую X, лежащую на поверхности земли; то же самое будет и в том случае, когда прямая L повернется на еще меньший угол, заняв при этом некоторое положение L'. Следовательно, прямая L_0, а также все прямые L', проходящие внутри угла α_0, ограниченного прямыми L и L_0, будут параллельны прямой X, так как они — в противоположность утверждению евклидовой аксиомы параллельных — не пересекают последнюю прямую. Это означает, что человек, сидящий в конце A доски, может спокойно качаться на ней, не ударяясь о землю, *как бы длинна ни была доска*, правда, при условии, что качательное движение происходит в пределах малого угла α_0.

Такая ситуация соответствует законам элементарной *неевклидовой геометрии*, развитой Бойяи (Bólyai) и Ло-

[1]) Если принять систему Евклида, то мы будем иметь $\sin\alpha=$ $=1/a$, так как мы приняли $k=1$. Если a неограниченно возрастает, то $1/a$, следовательно, и α стремятся к нулю. Легко видеть, что угол α для очень больших значений a приближенно равен $180°/\pi a$, что составляет приблизительно $60/a$ угловых градусов. Если высота стойки равна $k=1$ *м*, а длина доски $2a=120$ *м*, то угол α равен примерно одному угловому градусу.

[2]) Угол α_0 играет большую роль в неевклидовой геометрии Лобачевского. Этот угол (точнее, $\angle OPL_0=90°-\alpha_0$) называется *углом параллельности*, отвечающим отрезку OP. — *Прим. ред.*

бачевским[1]). Более глубокое проникновение в логическую структуру этой геометрии показывает, что она так же осмысленна и логически непротиворечива, как и евклидова геометрия. Изложенные выше наглядные соображения показывают также, что не существует никакой принуждающей необходимости рассматривать пространство обязательно как евклидово.

Тем не менее остается фактом, что наша психика имеет ясно выраженную естественную наклонность представлять пространство как *евклидово*. Выше мы указали на некоторые обстоятельства, в известной мере объясняющие эту наклонность. В дальнейшем мы остановимся на этой «евклидовой наклонности» подробнее в свете общих принципов, управляющих образованием понятий и характерных для психологии этого процесса.

§ 5. Принципы, управляющие образованием понятий и представлений

В процессе абстрагирования и идеализации, ведущем к представлению о пространстве, выделяются две характерные тенденции:

1. Устраняются несовершенства, свойственные грубому эмпирическому геометрическому подходу к свойствам видимого пространства.

2. Одновременно геометрические понятия дополняются и расширяются. В результате осуществляется переход от видимого пространства к абстрактному, представляемому пространству.

Эта тенденция, отчетливо выступающая в геометрии, показывает, что образование понятий и представлений подчиняется следующему общему управляющему принципу: человек имеет мощное стремление к выражению своего опыта в *простой* форме. Область применения этой простой формы выражения опыта расширяется так, чтобы обеспечить по возможности всеобъемлющие, пригодные во всех случаях «глобальные» высказывания. Эту тенденцию можно проследить, начиная с самых простых

[1]) Относительно драматической истории открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским, Я. Бойяи и К. Ф. Гауссом см., например, книгу В. Ф. Кагана «Лобачевский», указанную в списке литературы на стр. 224. — *Прим. ред.*

повседневных представлений и кончая общими идеями мировоззренческого характера, а в естествознании — вплоть до возникновения общих теорий.

Так называемая гештальт-психология[1]) внесла много ясности в эту подсознательную тенденцию. В самых различных связях она вскрыла мощное стремление психики к образованию *простых образов*. Если в темной комнате перемещать электрическую лампочку, попеременно зажигаемую и выключаемую, то наблюдатель воспримет достаточно часто повторяющиеся вспышки света как *непрерывный процесс*. Он будет *видеть* непрерывную световую линию, хотя воспринимаемые световые точки в действительности образуют дискретную последовательность. Этот психический процесс дополняет, но одновременно и идеализирует наблюдаемое явление: световая линия воспринимается в виде возможно более *простого* образа, а именно в виде прямой линии или правильно изогнутой кривой линии (например, в виде круговой дуги), несмотря на то что в действительности лампочка совершает, быть может, неравномерное и сложное движение. Следовательно, наше представление бессознательно идеализирует множество вспышек света, воспринимая это множество в виде возможно более простой непрерывной линии.

При логическом образовании понятий мы встречаемся с аналогичным процессом, благодаря которому определенные наблюдаемые нами явления становятся для нас самостоятельными, «реально существующими» объектами и индивидуумами. Представим себе, что лицо A, находящееся среди нас, выходит из комнаты и что спустя минуту в комнату входит лицо B. Мы замечаем у лица B черты, похожие на черты лица A, и если число таких сходных черт достаточно большое, то мы заключаем, что лицо B то же самое, что и лицо A, за минуту до этого находившееся среди нас. Путем такого *отождествления*, основанного на повторном наблюдении сходных черт, возникают все понятия, из которых

[1]) Гештальт-психология (от немецкого слова die Gestalt — форма, вид, образ) — популярное на Западе направление современной психологии, основоположником которого является австрийский психолог X. Эренфельс (1859—1932). — *Прим. ред.*

складываются представления о реальном, объективном внешнем мире, не зависящем от воспринимающего субъекта. Особенно четко этот процесс наблюдается в мире предметов при образовании так называемых конкретных понятий.

Позитивист Эрнст Мах отчетливее, чем кто-либо другой до него, проанализировал такого рода процессы, особенно имея в виду возникновение естественнонаучных понятий и теорий. В стремлении человека к образованию простых, наглядных и логических образов он распознал общий закон, названный им *принципом экономии при образовании понятий.*

Этот принцип, без сомнения, открывает весьма важную и широкую перспективу. Однако в той форме, которую ему придал Мах, этот принцип имеет, по моему мнению, несколько односторонний, а именно слишком «позитивистский» характер. Конечно, экономность является как в практическом, так и в теоретическом отношении весьма важным фактором, однако как самоцель она не имеет смысла. Смысл она приобретает только тогда, когда подчинена более высоким целям. В своем принципе экономии Мах несколько односторонне подчеркнул предпочтение, оказываемое человеком при образовании понятий экономной простоте. В то же время он уделил мало внимания дополняющей и идеализирующей тенденции, которая органически связана с образованием понятий и на которую мы обратили особое внимание, объясняя, как возникает мир понятий. Между тем только путем синтеза тенденций, направленных, с одной стороны, к экономности, а с другой стороны, к идеальной полноте, образование понятий и представлений приобретает свою творческую, движущую силу [1]).

Вернемся к геометрии. Разъясненные выше обстоятельства делают понятной притягательную силу евклидова представления о пространстве. Это представление

[1]) Мах, будучи эмпириком, не уделял достаточно внимания этой стороне процесса образования понятий. Поэтому он не мог правильно оценить роли *идей*, а следовательно, и роли теоретических и математических методов в естествознании.

В области математических наук указанный конструктивный принцип достигает своего наиболее чистого выражения в геометрии. Так же отчетливо выражен он в алгебре и в арифметике. Вряд ли можно найти лучший пример того, как этот принцип управляет образованием теоретических понятий, чем процесс, ведущий в арифметике к постепенному обобщению понятия числа. Натуральные числа 1, 2, 3, ... дополняются числом нуль и отрицательными числами, затем дробными, иррациональными и комплексными числами. Таким образом, несовершенства предшествующей ступени устраняются созданием новых «идеальных» чисел и притом так, что все правила, применявшиеся на предыдущей ступени, сохраняют свою полную силу в расширенной системе чисел («принцип сохранения законов»). Однако это последовательное расширение понятия числа происходит не произвольно, а под ограничительным контролем «экономности»: каждый раз вводится минимальное количество новых понятий, именно столько, сколько достаточно для исключения прежних логических несовершенств. Это экономическое требование может быть выполнено в общем случае только *одним-единственным* способом.

Таким образом, успехи теории как бы заранее детерминируются для дальнейшего развития: им указывается строго предписанный путь.

[Развернутая критика философских воззрений Э. Маха дана В. И. Лениным в его знаменитой книге «Материализм и эмпириокритицизм». — *Прим. ред.*]

неразрывно связано с опытом и восприятиями, получаемыми в видимом пространстве. Однако широкое, глобальное воззрение на мировое пространство есть продукт психической тенденции выходить за тесные границы ближайшей окрестности и рассматривать эту локальную окрестность как часть более широкого целого, уже не допускающего дальнейшего расширения.

При образовании представления о пространстве мы удаляемся из области геометрического опыта, ограниченной нашей ближайшей пространственной окрестностью, и попадаем под влияние тех общих тенденций, о которых шла речь выше. Мы дополняем и идеализируем наш опыт, приобретенный эмпирическим путем, и при этом бессознательно подчиняемся принципу экономии. Не может быть никакого сомнения в том, что конечный результат этого процесса — евклидово воззрение на пространство — занимает, если сравнить его с неевклидовыми теориями пространства, особое положение, обусловленное именно его *простотой.*

В дальнейшем это обстоятельство станет еще более ясным. Однако уже здесь уместно привести простой мысленный эксперимент, наглядно иллюстрирующий исключительное положение, занимаемое евклидовым представлением о пространстве.

Вообразим, что перед нами имеется стеклянный шар, внутри которого находятся миниатюрные живые существа, условия жизни которых иные, чем у нас. А именно, если какое-либо тело в этой миниатюрной вселенной движется, то при его приближении к ограничивающей шар сферической поверхности оно укорачивается. Следовательно, такой же деформации будет подвергаться и эталон длины, применяемый воображаемыми существами для своих измерений. Так как эти существа при своем движении также укорачиваются, то они не могут заметить указанной деформации. При их «равномерном» движении к ограничивающей шар поверхности нам, наблюдающим эту вселенную снаружи, будет казаться, что они движутся все медленнее и медленнее. Так как линейные меры в воображаемой вселенной при приближении к сферической поверхности неограниченно укорачиваются, то эта ограничивающая поверхность никогда не сможет быть достигнута изнутри, следовательно, она будет представлять для шаровой вселенной «бесконечную даль». Если мы попытаемся проникнуть в мир представлений этих миниатюрных существ, то поймем, что они должны воспринимать свою вселенную, внутри которой они заключены, как *бесконечную*, т. е. так же, как мы воспринимаем нашу вселенную. Поэтому наша воображаемая вселенная является, по крайней мере в последнем отношении, «евклидовой».

В этом нет ничего удивительного. Теперь немного изменим эту воображаемую вселенную. А именно, пусть на этот раз она состоит из пространства, заключенного внутри стеклянного кольца, т. е. напоминает внутреннюю область автомобильной камеры (рис. 3). Опять предположим, что в этой вселенной наблюдаются прежние явления деформации, следовательно, поверхность кольца воспринимается воображаемыми существами, заключенными в этой вселенной, как «бесконечная даль».

Однако легко видеть, что «кольцевая вселенная» имеет существенно другую структуру по сравнению с «шаровой вселенной» или нашей евклидовой вселен-

ной. Если из какой-нибудь точки P мы проведем замкнутую линию, то в евклидовом пространстве можно, сохраняя неизменным положение точки P, так непрерывно стягивать проведенную линию, что в конце концов она сольется с точкой P. В кольцевой вселенной это «евклидово» свойство соблюдается не во всех без исключения случаях. Правда, и в этой вселенной существуют замкнутые линии (например, линия α на рис. 3),

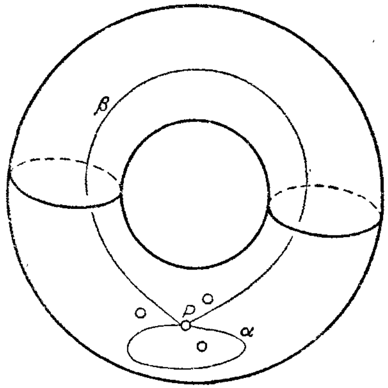


Рис. 3.

которые можно стянуть в точку P. Но этого нельзя сделать с линией β, один раз «окружающей» кольцо и только потом возвращающейся в исходную точку. Как бы ни деформировать петлю β, не разрывая ее, довести ее целиком до начальной точки невозможно. Следовательно, в этом отношении кольцевая вселенная не обладает евклидовой структурой [1]).

---

[1]) Важная ветвь современной геометрии занимается геометрическими свойствами, остающимися неизменными, или инвариантными при непрерывной деформации рассматриваемых фигур (путем стягивания или растяжения без разрыва). Эта ветвь геометрии называется *топологией*. Следовательно, можно сказать, что евклидово пространство и кольцевое пространство отличаются одно от другого своими топологическими свойствами. [О топологии см., например, Болтянский В. Г. и Ефремович В. А., Очерк основных идей топологии, сб. «Математическое просвещение», вып. 2, М., Гостехиздат, 1957, и последующие выпуски. — *Прим. ред.*]

Как наблюдатели, находящиеся снаружи кольцевого пространства, мы сразу замечаем его неевклидову топологическую структуру. Но каким будут считать свое пространство *жители* этой воображаемой вселенной? Представим себе, что они живут на маленькой планете P, являющейся для них «Землей». Здесь они занимаются геометрией и астрономией, наблюдают свою солнечную систему и свои неподвижные звезды, отмеченные на рис. 3 маленькими кружками. Предположим теперь, что небесные тела кольцевой вселенной расположены сравнительно близко (с нашей точки зрения!) к «Земле», так, как это показано на рис. 3. Миниатюрные существа кольцевой вселенной, производя свои астрономические исследования с помощью своих телескопов, не откроют кольцевую структуру своего пространства и будут, без сомнения, считать его *евклидовым* в точности так же, как мы — свое пространство. В самом деле, они будут стремиться к идеальному, «глобальному» пониманию своего пространства, и принцип экономии приведет их к принятию евклидова представления о пространстве, так как евклидово пространство, поскольку в нем не существует замкнутых траекторий типа β, проще кольцевого пространства. Лишь после того, как миниатюрные существа настолько овладеют искусством «космического» полета, что сумеют облететь свою кольцевую вселенную, они узнают, что их прежнее, евклидово понимание своего пространства было неверно. Только тогда они вынуждены будут подумать о новом, более верном понимании своего кольцевого пространства.

Было бы неправильно рассматривать такой мысленный эксперимент только как игру фантазии. В самом деле, быть может мы сами являемся жителями кольцевой вселенной, еще не знающими о существовании траекторий типа β, так как наш опыт ограничен пока слишком небольшой частью нашей вселенной. Поэтому возможности рассмотренного вида должны по серьезному учитываться при исследовании пространства. Именно так и случилось в современной космологии после того, как возникла общая теория относительности, открывшая новые перспективы также для исследования топологических свойств пространства.

Изложенные выше соображения, возможно, помогут правильнее понять принуждающую силу евклидова представления о пространстве. Иммануил Кант (1724—1804) в своей «Критике чистого разума» априори возвел евклидову структуру пространства в категорию свойств, не зависящих от опыта. Пятьдесят лет спустя была открыта возможность существования неевклидовой геометрии. От воззрения Канта на пространство пришлось отказаться. Тем не менее тезис Канта позволяет многое понять.

Особое, «априористическое» положение евклидова понимания пространства объясняется, в свете сказанного выше, фундаментальными принципами, управляющими образованием человеческих понятий. «Априори» лежит не в области логического и даже не в области рационально представимого; оно сводится к «психологическому» обстоятельству, к преобладающей тенденции человеческой психики строить мир понятий на основе принципов дополнения, идеализации и экономии.

§ 6. Логическая структура геометрии

До сих пор мы рассматривали систему элементарной геометрии как эмпирическое учение. Мы видели, что представление о глобальном пространстве возникло на основе восприятий из нашей локальной окрестности. Для нас было важно выяснить прежде всего те обстоятельства, которые привели к пониманию евклидова характера естественного взгляда на пространство.

Что касается внутренней, *логической структуры* элементарной геометрии, то мы временно оставили ее без всякого внимания. Этот вопрос, а также другие с ним связанные вопросы составляют предмет *математического* изучения геометрии [1]).

[1]) Здесь автор противопоставляет геометрию как математическую дисциплину той же геометрии как главе физики. (Сравните с вводной статьей к указанной на стр. 223 книге [2].) — *Прим. ред.*

Выше (стр. 12—13) мы уже видели, что на эмпирической ступени изучения геометрии ее положения выступают как независимые, не связанные один с другим эмпирические «законы природы». Поясним это с помощью еще одной теоремы Евклида:

5. Три медианы треугольника, т. е. отрезки, соединяющие вершины треугольника с серединами противолежащих сторон, пересекаются в одной точке.

Для того чтобы эмпирически проверить правильность этой теоремы, начертим треугольник ABC (рис. 4),

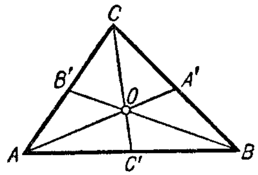


Рис. 4.

разделим его стороны AB, BC и CA пополам и соединим их середины C', A' и B' с противолежащими вершинами C, A и B. Тогда мы увидим, что полученные таким способом прямые — медианы треугольника — действительно проходят через одну и ту же точку O[1]). Это обстоятельство в какой-то мере примечательно, так как три произвольные прямые в общем случае не обладают свойством проходить через одну и ту же точку.

Получила ли рассматриваемая теорема надежное эмпирическое подтверждение? Даже если не считать обстоятельства, отмеченного в сноске, в этом можно сомневаться по следующей причине. Выполненный эксперимент подтвердил правильность теоремы 5 на основе вычерченной вполне определенной по форме и размерам фигуры. Не может ли случиться, что положительный результат получен случайно только для *вычерченной* фигуры? В самом деле, этот *единичный эксперимент* еще не гарантирует, что тем же самым свойством обладают *все* возможные треугольники независимо от их размеров и формы. Для того чтобы отклонить это явно обоснованное сомнение[1]), эксперимент повторяется для еще одного треугольника. Чем больше будет число различных использованных треугольников, для которых правильность теоремы экспериментально подтверждается, тем больше будет уверенность, что рассматриваемая теорема представляет собой закон, правильный в о в с е х случаях.

[1]) В этом мы убеждаемся только с точностью, обеспечиваемой нашими зрительными восприятиями. В связи с этим напомним сказанное в § 1 настоящей главы относительно пределов точности таких наблюдений.

Такой прием доказательства рассматриваемого утверждения основан на *индуктивном методе* эмпирического исследования. Если какое-либо явление природы при заданных одинаковых условиях всегда вновь повторяется, то оно рассматривается как выражение неизменного закона природы, верного во всех случаях, хотя это индуктивное заключение не безусловно обязательно. В самом деле, даже если рассматриваемое правило подтверждается во многих отдельных случаях, все же не имеется гарантии, что новые опыты опять подтвердят это правило. Следовательно, индуктивный метод только показывает, что правило *вероятно*, но не абсолютно *верно*. Индукция и связанное с ним понятие вероятности лежат в основе серьезных философских проблем и широких математических исследований (так называемой теории вероятностей). В рамках нашего изложения у нас нет возможности останавливаться на этих вопросах.

С точки зрения постановки нашего вопроса гораздо важнее другое обстоятельство. Для того чтобы доказать всеобщую правильность рассмотренной выше геометрической теоремы, вовсе нет необходимости прибегать к экспериментальной эмпирической проверке. В самом

[1]) Если кто-нибудь стал бы утверждать, что площадь квадрата, построенного на наибольшей стороне треугольника, равновелика сумме площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, то такое утверждение могло бы оказаться правильным, если бы начерченный треугольник случайно был прямоугольным. Однако для любого косоугольного треугольника это утверждение будет уже неверным. В таком треугольнике квадрат наибольшей стороны a равен сумме квадратов двух других сторон b и c, уменьшенной на удвоенное произведение стороны c и проекции стороны b на c (о б о б щ е н н а я т е о р е м а П и ф а г о р а).

деле, как показал уже Евклид, эта теорема может быть *доказана* с помощью некоторых других теорем или точнее: если только что упомянутые другие теоремы предположить правильными, то из них можно вывести теорему 5 *логически*, не прибегая к каким-либо опытам или эмпирическим наблюдениям. Таким образом ненадежная эмпирическая индукция заменяется пригодным во всех случаях и надежным методом логической, или математической, *дедукции*.

Такая постановка вопроса вносит в геометрическую систему совершенно новую ситуацию. На эмпирически-наглядной ступени геометрического исследования геометрические предложения (P) выступают в качестве независимых один от другого, как бы равноценных законов природы. Логически-математическая ступень исследования вносит в это собрание законов новый внутренний порядок. Предложения (P) делятся на две группы. В первую группу входят предложения (A), принимаемые правильными сразу, во вторую — предложения (T), которые можно вывести логически из других предложений. Первые предложения (A) называются в геометрии *основными предложениями*, или *аксиомами*, вторые (T) — *выводимыми* (доказываемыми) *предложениями*, или *теоремами*.

Следовательно, для построения элементарной геометрии достаточно принять за исходные только часть геометрических предложений, а именно те, которые называются аксиомами (A). Из этих основных предложений все остальные предложения (T) могут быть выведены чисто логическим путем. Таким образом, весьма большое число всех геометрических предложений сводится к системе немногих аксиом.

Как далеко может быть продолжен процесс логического сокращения числа аксиом (A)? Вообразим, что среди предложений (A), принимаемых сразу правильными, содержится предложение A_1, относительно которого на более поздней ступени геометрического исследования выясняется, что оно может быть доказано при помощи остальных аксиом. Такой оборот дела изменяет логическое место предложения A_1: поскольку оно может быть доказано, его следует исключить из группы

аксиом (A) и перевести в группу теорем (T). Следовательно, система аксиом (A) сократилась, а число теорем (T) увеличилось.

В результате логического сокращения числа аксиом возникает в конце концов такая конечная ситуация, при которой система аксиом (A) не содержит ни одного предложения, допускающего вывод из других аксиом. В связи с этим встает вопрос: какая имеется гарантия, что такая, с логической точки зрения идеальная, ситуация достигнута? Этот вопрос представляет собой важную, но трудную проблему. Позже мы к нему вернемся.

С другой стороны, очевидно, что не *все* аксиомы могут быть переведены в группу теорем Логическая дедукция представляет собой всегда нечто относительное, она требует в своем исходном пункте в любом случае каких-то основных предположений. Ex nihil nihil fit — говорили древние: из ничего ничто не возникает. Исследование этого вопроса привело к поразительному результату: выяснилось, что в геометрии процесс логического сокращения числа аксиом может быть проведен очень далеко. А именно весь массив евклидовой планиметрии может быть сведен к системе аксиом, число которых меньше десяти [1]).

Для правильного понимания сказанного выше важно иметь в виду также следующее. Предыдущие рассуждения могут привести к представлению, что подразделение геометрических предложений, с одной стороны, на аксиомы, а с другой — на теоремы предопределено заранее, следовательно, каждое геометрическое предложение *само по себе*, по своей природе, является либо аксиомой (предложением, правильность которого принимается без доказательства), либо теоремой (предложением, допускающим доказательство). Однако действительное положение вещей не таково. Подразделение на аксиомы и теоремы не является заданным абсо-

[1]) Из основных представлений математической логики тривиально вытекает даже, что любая аксиоматическая теория может быть построена на базе системы аксиом, содержащей единственную (но, может быть, весьма сложно формулируемую) аксиому. — *Прим. ред.*

лютно; оно в известном смысле относительно. Поясним это на примере.

Евклидова система геометрии на плоскости обычно строится так, что предложение о параллельных линиях или, точнее, его вторая часть: «к прямой l через точку, лежащую вне l, можно провести только одну параллель l'» принимается за аксиому. Из этой и остальных евклидовых аксиом выводится теорема: «Сумма углов треугольника равна 180°». Однако так поступать необязательно. Последнюю теорему можно было бы принять за аксиому, и тогда можно было бы доказать предложение о параллельных линиях. Следовательно, последнее предложение стало бы теоремой.

По примеру Евклида свободу, остающуюся при установлении системы аксиом, используют для того, чтобы не только свести число аксиом к минимуму, но и выбрать в качестве аксиом такие предложения, содержание которых возможно проще.

В разговорной речи словом «аксиома» обычно называют такое утверждение, которое само по себе очевидно или само собой понятно. Такое понимание слова аксиома происходит из геометрии. На ранних ступенях исследования понимали природу аксиом так: они представляют собой столь простые и очевидные высказывания, что не нуждаются ни в каких доказательствах. Только в конце прошлого столетия глубокий анализ основ геометрии — так называемое аксиоматическое направление — вскрыл истинную природу этих связей. Из сказанного выше вытекает, что аксиомам не следует приписывать какое-то особое положение само собой понятных предложений. В самом деле, как эмпирические правила — равноценны и «ясны» все геометрические положения. Самое большее, чем они могут отличаться одно от другого, это степенью сложности содержащихся в них утверждений [например, предложение (аксиома): «через две точки проходит точно одна прямая» в структурном отношении проще теоремы Пифагора]. Геометрические предложения принимают различное логическое положение только в дедуктивной системе геометрии. Здесь аксиомы принимаются за правильные утверждения, и из этих основных предложений

выводятся путем логических умозаключений остальные предложения (теоремы). Однако, как было уже отмечено выше, при этом следует иметь в виду, что логическое подразделение предложений на аксиомы и теоремы может быть осуществлено весьма различными способами.

Редуцирование (сведение) геометрической системы к некоторому небольшому числу основных понятий имеет место не только для *предложений*. Путем аналогичного логического процесса происходит также редуцирование геометрических *объектов* и *отношений* к некоторым основным объектам и основным отношениям (см. § 1 настоящей главы). Редуцирование предложений производится путем *доказательств*, а редуцирование объектов и отношений — путем *определений*.

Поясним последний процесс примером. Видимый образ окружности нам хорошо знаком. Среди других замкнутых линий окружность выделяется своей равномерной, простой «округлостью». Если мы рассматриваем окружность или мысленно представляем ее себе, то узнаем ее именно как окружность исключительно благодаря ее красивой округлости, не задумываясь при этом о ее других свойствах. Между тем важным свойством окружности является то, что у нее имеется центр O и что ее радиусы (отрезки, соединяющие центр с точками окружности) одинаковы по длине (конгруэнтны). Это наблюдение позволяет нам *определить* окружность, не учитывая ее качественной особенности, как множество всех точек, расположенных на одном и том же расстоянии от заданной точки O. В результате такого определения окружность перестает быть самостоятельным объектом: она оказывается сведенной к некоторым другим объектам и отношениям, а именно к объектам «точка» и «отрезок» и к отношению «конгруэнтность». Первоначальный же признак окружности — свойственный ей видимый образ, ее совершенная округлость — исключается. Это качество окружности теперь уже не является ее существенным свойством, оно заменяется теми представлениями, которые мы связываем с понятиями «точка», «отрезок», «конгруэнтность» и на которых основано определение окружности.

Таким образом, подобно тому как все многообразие геометрических предложений сводится посредством логического анализа к сжатой системе аксиом, из которых все остальные могут быть выведены путем логической дедукции (т. е. могут быть доказаны), так и бо́льшая часть геометрических объектов и отношений может быть сведена к небольшому числу основных объектов и основных отношений, позволяющих дать логическое *определение* всех остальных объектов и отношений.

Выбор основных объектов и основных отношений, как и выбор системы аксиом до известной степени произволен.

Мы уже упомянули, что логическая база евклидовой системы планиметрии может быть сведена к числу аксиом, меньшему десяти. Еще меньше число основных объектов и основных отношений. В качестве основных объектов можно взять только два: *точку* и *прямую.* В качестве основных отношений можно выбрать три следующие [1]):

1. *Отношение связи* — «Точка лежит на прямой» (или, другими словами, прямая проходит через точку).

2. *Отношение порядка* — «Из трех точек, лежащих на одной прямой, одна (и только одна) лежит «между» двумя другими».

3. *Отношение конгруэнтности* — «Два отрезка конгруэнтны».

В формулировку последнего отношения входит новый объект — «отрезок». Однако это понятие используется только ради сокращения формулировки. «Отрезок» не является основным объектом, так как он может быть определен при помощи основного объекта «точка» и основного отношения порядка. В самом деле, под отрезком можно понимать просто *две* точки A и B (ко-

[1]) Автор придерживается системы аксиом геометрии, идущей от знаменитого немецкого математика Давида Гильберта (1862—1943) (см. его книгу [2] в списке литературы на стр. 223). Между тем еще один из предшественников Гильберта в области оснований геометрии итальянец М. Пьерри указывал, что всю евклидову планиметрию можно базировать на единственном основном объекте «точка» и на единственном основном отношении (A, B, C), означающем, что $AB=AC$. — *Прим. ред.*

нечные точки отрезка), а остальные его точки определить при помощи отношения порядка: они лежат «между» A и B. Если заменить слово «отрезок» понятием «пара точек» (A, B), то сразу будет видно, что отношение конгруэнтности действительно относится только к множеству основных объектов «точка» и «прямая».

Мы зашли бы слишком далеко, если бы решили перечислить в этой книге все аксиомы геометрии Евклида. Выше мы уже привели две важные аксиомы: предложение 1 и аксиому параллельности (стр. 12 и 26—27). Эти аксиомы описывают некоторые свойства отношения связи [1]).

Полная система аксиом содержит сверх имевшихся еще у Евклида аксиом также некоторые другие аксиомы, устанавливающие свойства отношений порядка и конгруэнтности. С этой точки зрения система аксиом Евклида была несовершенна. Это обстоятельство нашло свое отражение и в школьных учебниках геометрии. В них основному отношению порядка почти не уделяется внимания, и связанные с этим отношением геометрические обстоятельства специально не оговариваются: они вводятся в геометрию как наглядные и очевидные.

На это замечание не следует смотреть как на критику школьного преподавания геометрии. Как устранить указанный пробел в классическом изложении Евклида, окончательно выяснилось только в нашем столетии благодаря исследованию аксиоматических основ геометрии. К школьному преподаванию на его нижней ступени нельзя предъявлять строжайших логических требований. Наоборот, из дидактических соображений требуется определенный компромисс между эмпирическим и логическим подходами. Для начального изложения следует отбирать некоторое количество наглядного материала и применять его, не выясняя полностью тех логических проблем, которые с этим материалом связаны.

[1]) Отметим (см. стр. 26), что отношение параллельности действительно может быть определено посредством отношения связи: прямые a и b параллельны, если не имеется ни одной такой точки P, которая находилась бы в отношении связи с обеими прямыми.

Тем не менее и при начальном обучении следует возможно раньше переходить к дедуктивному методу. В самом деле, выше мы уже отметили, что геометрия, как собрание *эмпирических* предложений, представляет собой довольно бедное и мало интересное учение. Свое глубокое и важное значение она получает благодаря тому, что допускает полное разъяснение своей внутренней *логической* структуры. В этом отношении система Евклида представляет собой идеал, всегда служивший образцом для научного исследования.

§ 7. Истолкование основных геометрических понятий

Анализ элементарных геометрических фактов приводит к концентрации их, к выявлению основной роли сжатой системы, состоящей из некоторого небольшого числа основных объектов, основных отношений и основных предложений (аксиом). Как только эта основная система установлена, мы можем пойти обратным путем и, используя логическую дедукцию и определения, вывести из этой основной системы все учение Евклида. Таким образом, система аксиом содержит в себе по существу всю элементарную геометрию.

Правда, обнаружить это непосредственно нельзя. Только путем строгого проведения цепи утомительных доказательств и последовательных определений можно убедиться в том, что какое-нибудь сложное геометрическое предложение (вспомним, например, теорему Пифагора) утверждает по существу то же самое, что неявно уже содержится в простых правилах (аксиомах), относящихся к основным объектам и основным отношениям.

«Логически развернутую» указанным способом теорему Пифагора сформулировать и понять значительно труднее, чем ту же теорему в ее естественной эмпирической интерпретации, допускающей при помощи некоторых простых измерений непосредственную наглядную проверку (см. стр. 12). Это обстоятельство объясняет, почему дедуктивный математический метод как противоположность непосредственному восприятию и наблюдению редко пользуется успехом у молодых, а также у взрослых людей, скорее даже наоборот, чаще он вызывает у них

антипатию. В самом деле, каждому преподавателю математики приходится слышать от своих учеников неизменный вопрос: «Зачем нас заставляют доказывать путем сложных рассуждений теоремы, и без того наглядные, очевидные и сами собой понятные?». Этот вопрос естественен и его не следует безразлично или высокомерно отклонять. Впрочем, ученики, задающие такой вопрос, находятся в хорошем обществе: то же самое спрашивали и некоторые выдающиеся мыслители. Так, например, в свое время Шопенгауэр думал, что дедуктивный, математический метод в геометрии пригоден только для того, чтобы сами собой понятные, ясные вещи делать сложными и туманными. С аналогичным недоверием относился к точному естествознанию также Гёте. Обладая редкой способностью зрительного наблюдения, он пытался развить оптику из непосредственного «видимого» восприятия, пренебрегая физическими теориями света, построенными Гюйгенсом и Ньютоном на основе механических аналогий и математической дедукции [1]).

История решила этот спор в пользу Евклида, Ньютона и Гюйгенса. В глубоком смысле этого слова они были «провидцами»: последующие исследования развивались в намеченных ими направлениях. Этот путь оказался нелегким. Успехи естествознания в основном были обусловлены тем, что теоретическое рассмотрение проникло глубоко под тот поверхностный слой, который был достижим и доступен для непосредственного наблюдения.

Однако рассматриваемый вопрос не так легко понятен; поэтому поясним его при помощи некоторых простых мысленных экспериментов.

Вообразим плоскость T и принадлежащие ей геометрические объекты: точки P, прямые l и т. д. В точке S плоскости построим касающуюся плоскости сферу с центром O и диаметром SN (рис. 5). Спроектируем

[1]) Созданные Ньютоном (корпускулярная) и Гюйгенсом (волновая) теории света расходились в своих основах, но обе имели характер теоретических построений. Принятая в настоящее время теория света в известном смысле объединяет эти теории. — *Прим. ред.*

плоскость на сферу, выбрав в качестве центра проекций точку O. Проекцией точки P плоскости T будет точка $\bar{P}$ сферы. Вся плоскость T отобразится на нижнюю половину сферы. При этом прямой l плоскости T будет соответствовать на сфере половина дуги большого круга. «Бесконечно удаленные точки» прямой l отобразятся в концевые точки A и B того диаметра экватора сферы, который параллелен прямой l. В результате такого отображения каждой точке P плоскости T будет

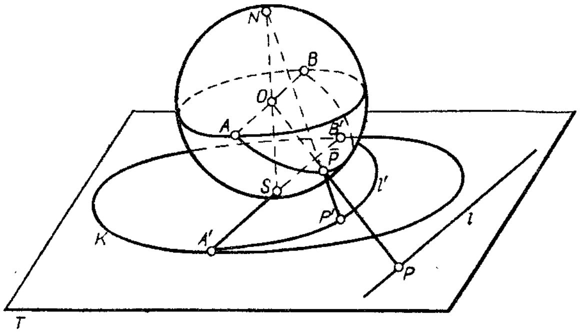


Рис. 5.

соответствовать определенная точка $\bar{P}$ южной полусферы. Это означает, что между обеими поверхностями, т. е. плоскостью и полусферой, существует, как принято говорить в математике, «взаимно однозначное соответствие».

Вообразим теперь, что сфера спроектирована назад на плоскость T, но на этот раз из центра проекций, совпадающего с северным полюсом N сферы. Проекция $\bar{P}$ точки P теперь отобразится в точку пересечения P' прямой $N\bar{P}$ с плоскостью T. Южной полусфере будет соответствовать в плоскости T круг, ограниченный образом экватора, т. е. окружностью K. Дуга $A\bar{P}B$ большого круга перейдет в круговую дугу l' плоскости T, ограниченную двумя диаметрально противоположными точками A' и B' окружности K.

Таким образом, вся плоскость T в результате двукратного последовательного центрального проектирова-

ния (сначала с центром проекций в точке O, а затем — в точке N) отображается на область, заключенную внутри окружности K. При этом прямые l плоскости T переходят в круговые дуги l', пересекающие окружность K каждый раз в двух диаметрально противоположных точках. Если точка P будет удаляться с постоянной скоростью в бесконечность, то ее изображение P' будет все медленнее и медленнее перемещаться к окружности K. Следовательно, окружность K соответствует «бесконечно удаленным точкам» плоскости T.

Будем называть точку P', являющуюся изображением точки P, по-прежнему «точкой», а дугу l', представляющую собой изображение прямой l, — по-прежнему «прямой». Тогда, применяя нашу обычную геометрическую терминологию, мы сумеем описывать геометрические события в плоскости посредством событий, происходящих в круге K, представляющим собой изображение плоскости T. При этом не может возникнуть никаких противоречий: все правила, действующие в плоскости T, будут применимы и в круге K.

В евклидовой плоскости имеет место аксиома параллельности: через точку P_1, лежащую вне прямой l, проходит точно одна прямая l_1, параллельная l. То же самое имеет место и в круге K: через «точку» P_1', лежащую вне «прямой» l', проходит точно одна «прямая» l_1' (т. е. круговая дуга, пересекающая периферию круга K в диаметрально противоположных точках), не встречающая прямую l' внутри круга K (рис. 6).

Следовательно, внутренняя область круга K представляет собой изображение евклидовой плоскости, которым можно пользоваться так же, как и первоначальной плоскостью T. На это могут возразить, что круг K все же не является «настоящей» евклидовой плоскостью, так как «прямые» l' «в действительности» не являются прямыми и, кроме того, они не бесконечно длинные, как это должно быть в соответствии с нашим естественным, наглядно-геометрическим представлением. В таком случае вообразим себе на минуту следующую картину. Пусть сфера изготовлена из какого-нибудь прозрачного материала, например из стекла. Если луч света PO встречает сферу в точке $\bar{P}$, то он преломляется. Предположим, что закон преломления света при прохождении через стекло таков, что преломленный луч света $\bar{P}N$ проходит через северный полюс N. Тогда наблюдатель, находящийся в точке N, увидит точку P в направлении $N\bar{P}$, поэтому ему будет казаться, что точка P переместилась внутрь круга в положение P'.

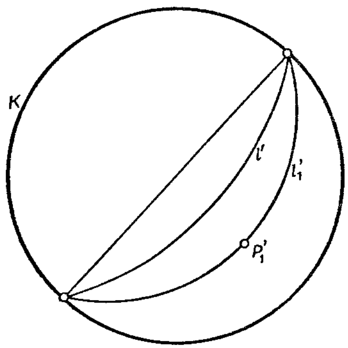


Рис. 6.

Прямая l ему будет казаться искаженной в виде круговой дуги l'. Следовательно, нашему наблюдателю геометрия плоскости T будет представляться в виде искаженной геометрии внутренней части круга K.

Удалим теперь преломляющую сферу. Тогда наблюдатель в точке N увидит события в плоскости T опять «естественными», совпадающими с «настоящими», наглядными геометрическими представлениями. Отсюда следует, что *кажущийся* вид вещей зависит в общем случае от того, через какие очки мы рассматриваем мир.

Рассмотрим еще один пример. Вообразим, что собравшиеся здесь лица вместе обсуждают вопросы геометрии и пусть среди собравшихся имеется один иностранец, не понимающий немецкого языка. Для того чтобы он мог принять участие в разговоре, я предварительно обучу его некоторым немецким геометрическим терминам, но в несколько искаженном виде. Я от-

мечу на доске две точки P и Q и скажу: такие объекты по-немецки называются «прямыми» («Geraden»). Затем я покажу ему прямую l и объясню, что такая фигура называется «точкой» («Punkt»), т. е. я придам указанным терминам обратный по сравнению с немецкой речью смысл. Далее, я скажу ему, что взаимное отношение объектов P и l на рис. 7 выражается словами: «прямая P проходит через точку l» (или «точка» l лежит на «прямой» P). Наконец, я скажу ему, что «прямая» Q не проходит через «точку» l (или «точка» l не

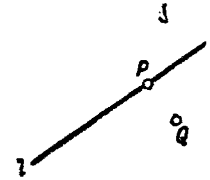


Рис. 7.

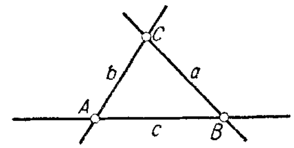


Рис. 8.

лежит на «прямой» Q). Предположим, что иностранец заучил неверные названия перед предстоящим обсуждением.

Теперь я вычерчу на доске фигуру (рис. 8), образованную тремя точками (A, B, C) и тремя отрезками (a, b, c), и затем спрошу: «Верно ли, что прямая a проходит через точки B и C?» Все присутствующие подтвердят это и, как ни странно, в том числе и иностранец, воспринявший мой вопрос совершенно неверно. В самом деле, когда я говорил «прямая a», он рассматривал точку A, когда я говорил «точки B и C», он обращал свое внимание на прямые b и c. Следовательно, услышав вопрос, проходит ли прямая a через точки B и C, он рассматривал точку A и прямые b и c и, в соответствии с заученной им терминологией, видел, что названная сначала «прямая» A действительно проходит через названные потом «точки» b и c.

Легко убедиться, что и все другие наблюдения, которые можно было бы сделать на основе вычерченной фигуры, окажутся обоснованными также в том случае, если они будут восприниматься в неверной интерпретации иностранца. Таким образом, дискуссия о геометрических свойствах нашей фигуры может быть продолжена, и при этом участники дискуссии даже не догадаются, что они толкуют утверждения, принимаемые верными (или неверными), совершенно по-разному.

Объясняется это тем, что наша фигура была намеренно выбрана специальным образом. Она обладает особым свойством: в ней объекты «точка» и «прямая» можно менять ролями, причем все, касающееся отношения связи («точка лежит на прямой», «прямая проходит через точку»), сохраняет свою силу и после перемены ролями точек и прямых [1]).

Таким образом, мы выяснили, что по крайней мере в рассмотренном нами случае совершенно неважно, чтобы «точка» воспринималась в соответствии с нашим естественным, наглядно-геометрическим представлением, как обладающая качеством «точечности», а «прямая» — как обладающая качеством «прямизны», присущей одномерной линии.

Теперь нетрудно понять, что при толковании основных геометрических понятий можно полностью освободиться от наглядно-геометрических представлений, связанных с этими понятиями. Изменим рассмотренную выше фигуру следующим образом. Пусть перед нами лежат шесть шаров, из них три белых A, B, C и три черных a, b, c. Далее представим себе, что определенные белые шары связаны нитями с определенными черными шарами, как это показано на рис. 9.

Теперь введем соглашение: белые шары будем называть «точками», а черные — «прямыми» и далее, если нить идет от белого шара к черному, то будем говорить: первый названный объект («точка») лежит на втором названном объекте (на «прямой»). Напротив, если такое соединение отсутствует, то будем говорить: «точка не лежит на прямой».

Рассмотрев эту фигуру, мы увидим, что и при таком толковании сохраняются все те правила, которые были найдены для фигуры, изображенной на рис. 8. Следо-

[1]) Возможность такой перемены ролей представляет собой важный принцип, называемый «принципом двойственности»; он имеет место, например, в проективной геометрии.

вательно, дискуссию о геометрических свойствах фигуры, изображенной на рис. 8, можно с таким же успехом вести, пользуясь фигурой, изображенной на рис. 9.

Причина этого заключается в следующем: рассмотренные три системы, а именно два «толкования» фигуры на рис. 8 и толкование фигуры на рис. 9 обладают одной и той же логической структурой. Они *структурно подобны* между собой, или, если воспользоваться научной терминологией, *изоморфны* между собой. Это означает, что объекты систем соответствуют

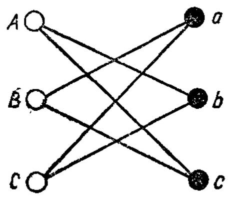


Рис. 9.

один другому взаимно однозначно (точки A, B, C на рис. 8 соответствуют «точкам» A, B, C на рис. 9; прямые a, b, c на рис. 8 соответствуют «прямым» a, b, c на рис. 9). Основное отношение связи для каждой системы также определено таким образом, чтобы при различном толковании соблюдалось соответствие между тем или иным отношением связи. Следовательно, отношения связи соблюдаются при всех трех толкованиях. Если теперь мы будем называть соответствующие один другому объекты (точки, прямые) и соответствующие одно другому отношения (связи) одинаковыми словами, то все утверждения, правильные для одной из трех систем, будут правильными также для двух остальных систем. Следовательно, безразлично, на какой системе производится интерпретация утверждений.

Из аналогичных соображений изоморфны между собой также системы (фигуры) T и K, рассмотренные в первом примере (рис. 5).

При построении таких изоморфных между собой систем используется фундаментальный общий принцип *отображения*, с которым мы уже неоднократно встречались выше по разным поводам. Вообразим, например, ландшафт и его фотографический снимок. Объектам и отношениям в ландшафте соответствуют объекты и отношения на снимке. Будем называть соответствующие объекты (и отношения) ландшафта и снимка одинаковыми словами. Например, изображение дерева ландшафта будем называть также «деревом», а не «изображением дерева» (на практике мы поступаем именно таким образом). В таком случае система, представляемая снимком, и первоначальная система, представляемая ландшафтом, будут между собой изоморфны. Структуру системы-оригинала мы можем изучать с одинаковым успехом и по изображению, и по оригиналу, хотя оригинал и изображение во многих для нас *несущественных* отношениях все же отличаются один от другого. Например, натуральное дерево, во-первых, больше дерева на снимке, во-вторых, представляет собой трехмерное тело, а не двумерную плоскую фигуру, как дерево на снимке, в-третьих, окрашено в разные цвета, а не только в черный и белый, как дерево на снимке и т. д.

Важная роль принципа изоморфизма заключается в том, что он позволяет передавать заданное положение вещей на *различных языках.* И здесь мы имеем «системы», воплощенные в различных «материальных» образах, например в немецких и французских словах. Изоморфизм этих различных языковых изображений по-прежнему недоступен непосредственному рассмотрению. Он обнаруживается только в том случае, если наблюдатель имеет в своем распоряжении шифр, т. е. словарь, осуществляющий соответствие объектов обоих изображений и устанавливающий изоморфизм между двумя системами. В точности так же мы поступили для установления изоморфизма между фигурами, изображенными на рис. 8 и 9: мы перечислили понятия, которым придали один и тот же смысл, хотя для непосредственного наблюдения они были совершенно различны (точки, прямые, отношения связи).

Исключительная важность принципа изоморфизма объясняется тем, что обмен мыслями между людьми возможен только посредством *образов*, в которых конкретизируются передаваемые мысли и которые делают восприятия одних людей доступными пониманию других людей. Эти образы создаются для того, чтобы их могли видеть, слышать, а также понимать те, кто имеет глаза, чтобы видеть, и уши, чтобы слышать; следовательно, они будут правильно, т. е. изоморфно толковать ту информацию, которая будет достигать их сознания.

Мы знаем, но редко отчетливо это сознаем, какое количество этапов требуется нашим мыслям для того, чтобы они могли быть восприняты окружающими нас людьми. Если я с кем-нибудь разговариваю, то прежде всего я должен при помощи моей двигательной нервной системы преобразовать мои мысли в ряд произнесенных слов, которые в виде колебаний воздуха распространяются в воздухе. Эти колебания достигают уха моего собеседника и здесь преобразуются в аналогичные (изоморфные!) колебания барабанной перепонки. Последние колебания воспринимаются слуховым нервом собеседника, и в результате в его сознании возникает система мыслей, которая, как и все перечисленные выше физико-физиологические промежуточные ступени, изоморфна с моей первоначальной системой мыслей, приведшей в движение весь ряд изоморфных между собой «образов».

При этом необходимо подчеркнуть следующее: для правильного толкования услышанной речи важно только, чтобы система мыслей, возбужденная в сознании собеседника, была изоморфной, структурно-правильной картиной моего «оригинала мыслей». То, что собеседник связывает с этой картиной качественно, с точки зрения нашего соглашения не имеет значения. Человек, рассказывающий слушателям о виденном им ландшафте, возможно испытал бы потрясение, если бы он мог перевоплотиться в слушателя и таким путем непосредственно почувствовать, как переживает описываемую ситуацию слушатель. Хотя слушатель воспринимает суть рассказа правильно, *видит* он — под влиянием сопровождающих переживаний — положение вещей, возможно, совсем иначе. Следовательно, здесь имеет место такая же ситуация, как и выше при описании дискуссии на геометрическую тему: говорящий описывает геометрическую систему, имея в виду фигуру на рис. 8, а слушатель, следящий за разговором, имеет в виду изоморфную систему шаров, изображенную на рис. 9.

Отсюда следует, что с учетом логической правильности геометрии безразлично, как наглядно или материально интерпретировать конструктивные элементы геометрии, т. е. точки и прямые, а также существующие между ними отношения; важно лишь, чтобы в различных толкованиях каждый раз были действительны правила (аксиомы), которым подчиняется система. Тогда все эти изоморфные «изображения» будут иметь одно и то же логическое строение, — и эта общая структура и представляет собой собственную суть, внутреннюю идею элементарной геометрии. Однако эта идея обнаруживается только тогда, когда к пониманию геометрии идут по правильному пути и при этом освобождаются от предвзятого мнения о том, что геометрия, рассматриваемая уже как логическое учение, якобы должна быть неразрывно связана с наглядными представлениями, которые на первоначальной эмпирической ступени исследования были присущи геометрии в соответствии с имевшим место естественным взглядом на пространство. Одно только «рассматривание» или прямое наблюдение, рекомендованное Шопенгауэром и Гёте, недостаточны для того, чтобы постичь идею геометрии. Эта идея становится ясной только в том случае, если идти по пути дедукции, строгого математического анализа и синтеза.

При таком положении вещей вряд ли необходимо разъяснять подлинную глубину интереса геометрического исследования, по крайней мере читателям, имеющим склонность к философским размышлениям, т. е. тем, кто в массе пестрых, хаотических переживаний и наблюдений ищет неизменные факторы и руководящие идеи, способные внести порядок в запутанные переживания и придать бытию более высокий смысл.

Однако ценность логической, математической теории отнюдь не исчерпывается указанной философской и теоретико-познавательной чертой. Теоретическое исследование приводит к новым взглядам, значение которых, в том числе и *практическое*, выходит далеко за пределы первоначальных границ эмпирической ступени становления теории. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить, что было сказано выше о различных «толкованиях» элементарной геометрии. Одна и та же логическая структура может проявляться в самых разнообразных теоретических или наглядных системах, причем в таких одеяниях, которые на первый взгляд не имеют ничего общего между собой. И если эта общая структура, независимо от возможности ее самого разнообразного толкования, теоретически разъяснена, то сведения, сконцентрированные в логической теории, можно сразу перенести на все указанные разнообразные толкования или «изображения», при условии что существенные основные понятия (основные объекты и основные отношения) в этих толкованиях удовлетворяют одним и тем же основным правилам (аксиомам). В самом деле, если в одном таком специальном толковании аксиомы теории правильны, то в этом толковании безусловно правильны также все следствия из аксиом (теоремы), и поэтому дальнейшее подтверждение этих теорем (в «изображениях» или в «моделях») излишне.

Переход от одного толкования к другому предпринимается всегда в тех случаях, когда общая теория *применяется* к какой-нибудь новой теоретической или практической области. Именно таким путем математически-логическое исследование позволяет при создании своих абстрактных общих теорий дать сведениям, собранным в этих теориях, такие возможности применения, которые выходят далеко за пределы первоначальной области применимости теории в ее сыром, натуральном состоянии. Научные исследования движутся вперед благодаря теоретико-познавательному интересу. Свой же пафос они получают от предвидения, что теоретическая работа является не только возвышенной самоцелью, но и средством для получения новых результатов общего характера, в том числе и *практических*, и притом таких, которые могут раскрыть совершенно неожиданные связи первоначальной области исследования с другими областями, не имеющими с первой казалось бы никаких точек соприкосновения.

Ниже мы увидим, что теория относительности Эйнштейна в существенном основана на переходе от одного толкования к другому, а именно к толкованию геометрии в области физических событий, о возможности которого раньше и не подозревали.

§ 8. Геометрия как математическая теория

Сделам обзор изложенного в предыдущих параграфах и одновременно дополним обсуждавшиеся выше особенности.

Мы видели, каким образом элементарно-геометрическая структура может быть выражена в различных материальных образах. «Суть» геометрии следует искать в общем строении различных изоморфных образов. При этом следует отвлечься от — если так можно сказать — случайных качественных различий геометрических объектов и отношений, проявляющихся в рассматриваемых образах, и сохранить только то, что является общим для различных «толкований».

Что же остается в качестве признака понятия «точки», если это понятие можно интерпретировать так свободно, как это было сделано при рассмотрении различных «изображений»? В самом деле, один раз мы рассматривали точку как «место» в видимом, или воспринимаемом, пространстве, в другой раз — как «прямую», в третий раз — даже как шар. Что общего, в конце концов, имеют эти символы? Очевидно, немного, однако, несмотря на это, все же нечто весьма важное: точки суть именно объекты, *какие-то* объекты, от особых качественных свойств которых геометрия отвлекается. В качестве их единственного существенного признака остается только один признак: «точки» представляют собой как бы самостоятельно существующие «индивидуумы», которые можно отличать один от другого. Это означает следующее: в геометрии принимается, что относительно двух точек A и B a priori задано или известно, *различны* ли они или *идентичны* (в последнем случае, применяя геометрическую терминологию, говорят, что они

«совпадают») [1]). Имеют ли они, кроме того, форму «точки», «линии», «шара» или какого-нибудь другого объекта — с точки зрения дедуктивной системы геометрии не имеет значения.

«Прямые» также определяются как множество некоторых объектов или предметов. И они принимаются за самостоятельно существующие «индивидуумы», которые можно отличать один от другого. Их множество образует собственный индивидуальный вид наряду с множеством «точек».

Давид Гильберт (1862—1943) начинает свое изложение евклидовой геометрии пространства, появившееся в начале текущего столетия и проложившее в геометрии новые пути, следующими словами: «Вообразим себе три рода вещей, которые будем называть точками, прямыми и плоскостями», и далее «Между этими вещами пусть существуют определенные отношения». Затем Гильберт вводит основные отношения: связи, порядка и конгруэнтности (см. стр. 46). И наконец, перечисляет принятые основные предложения (аксиомы), которым подчиняются основные объекты и основные отношения.

На основе сказанного выше ясно, как следует понимать основное предположение Гильберта об основных объектах. Напротив, на понятии «отношение» следует остановиться подробнее.

Если мы уславливаемся не связывать с основными объектами «точка» и «прямая» первоначальные «геомет-

---

[1]) Такого рода совокупности, образованные объектами произвольной природы, исследуются в так называемой *общей теории множеств*. Наиболее простые множества *конечны*: они содержат конечное число объектов, например десять или миллион и т. д. Наиболее трудные проблемы теории множеств относятся к *бесконечным* множествам, содержащим неограниченное число объектов. К числу последних множеств относятся множества основных объектов геометрии (точек, прямых). Это соответствует нашему естественно-наглядному представлению (см. в связи с этим сказанное по этому поводу на стр. 20), и это можно доказать, исходя из аксиом геометрии. Правда, современные аксиоматические исследования рассматривают также такие геометрические системы, которые не совпадают с евклидовой системой и которые содержат только конечное число основных объектов (так называемые «конечные» геометрии).

рические» свойства, то, очевидно, отношение «точка лежит на прямой» также нельзя больше толковать в соответствии с его естественно-геометрическим представлением. В таком случае возникает вопрос, как же именно следует понимать слово «отношение»?

Вопрос решается так же, как и в случае абстрактных объектов «точка» и «прямая». В самом деле, критическое рассмотрение любого учебника элементарной геометрии показывает, что его логические построения нигде не апеллируют к той наглядной ситуации, которую первоначально мы соединяем с отношением связи. Достаточно, если для заданной точки и заданной прямой принимается также заданным, что точка либо лежит на прямой, либо не лежит на ней (в последнем случае говорят, что точка находится вне прямой). В различных толкованиях геометрии это отношение получает каждый раз новое конкретное осуществление. Так, например, отношение связи между точкой A и прямой b в «шаровом» толковании означает, что в этой конкретной системе «образ» точки A (белый шар) соединен нитью с «образом» прямой b (с черным шаром).

Аналогичным образом обстоит дело и с остальными геометрическими отношениями. Так, например, основное отношение порядка, которое при естественном, наглядно-геометрическом представлении соответствует тому обстоятельству, что точки прямой могут быть «топологически» расположены в определенном порядке — слева направо или наоборот, т. е. справа налево, полностью освобождается от этого наглядного содержания. Тем не менее, можно и впредь говорить о «расположении в определенном порядке», основываясь при этом исключительно на втором основном отношении, уже упоминавшемся на стр. 46:

Если три точки A, B, C лежат на прямой l, то одна вполне определенная из них (например, A) лежит между двумя остальными (B и C).

При этом слово «между» не следует понимать в его обычном смысле. Это слово применяется только с целью указать, что если заданы три совпадающие с прямой l

точки, то одну вполне определенную из них (A) принимают *выделенной* из остальных. Это можно было бы выразить также следующими словами: системе (A, B, C) из трех точек, принадлежащих прямой l, *соответствует* вполне определенная точка (A) системы; об этой точке говорят, что она «лежит между B и C».

И это основное отношение между точками системы точек принимается в евклидовой геометрии плоскости, как *заранее заданное*, независимое от остальных основных допущений. Этим геометрии придается новая структурная черта в дополнение к тому, что содержится в основных допущениях (аксиомах), касающихся основных объектов (точка, прямая) и основного отношения связи (точка лежит на прямой).

Аналогичным образом, конгруэнтность двух отрезков AB и CD (или лучше: двух пар точек A, B и C, D) необходимо понимать следующим образом. Два произвольных отрезка могут находиться один с другим в одном из двух отношений: либо они конгруэнтны, т. е. одинаковы по длине, либо они не конгруэнтны. Следовательно, основное допущение об отношении конгруэнтности (стр. 46) утверждает, что для двух заданных пар точек (A, B и C, D) принимается заданным одно из двух: либо они соответствуют одна другой — в таком случае они называются конгруэнтными (имеющими одинаковую длину), либо, наоборот, они не соответствуют одна другой (тогда эти пары точек называются неконгруэнтными).

Та часть системы евклидовой геометрии, которая занимается только основными отношениями связи и порядка, называется *аффинной* геометрией. Если последнюю дополнить постулатом отношения конгруэнтности, то она переходит в *метрическую* геометрию.

Перейдем, наконец, к основным предложениям, т. е. к аксиомам евклидовой геометрии. Они содержат дальнейшие ограничивающие допущения и правила для основных объектов и основных отношений. С примерами аксиом мы познакомились выше (предложение 1 на стр. 12 и аксиома параллельности). Эти аксиомы касаются отношения связи.

Рассмотрим вновь, с точки зрения этих двух аксиом, рисунок 9 (стр. 55) [1]). На нем изображены три точки и три прямые («точки» A, B, C и «прямые» a, b, c). Кроме того, на нем представлено отношение связи в виде нитей, соединяющих определенные точки с определенными прямыми.

Справедлива ли в этой конкретной системе аксиома: «через две точки проходит точно одна прямая»?

Взгляд на рисунок подтверждает это правило: «через» точки A и B проходит *одна* прямая, а именно прямая c, а через точки B и C — прямая b. Следовательно, пока наша система евклидова.

Но как обстоит дело с аксиомой параллельности? Рассмотрим на рис. 9 прямую a. Вне ее лежит точка A. Через нее проходят две прямые (b и c). Обе пересекают прямую a (первая в точке C, вторая — в точке B). Следовательно, через точку A не проходит *ни одной* прямой, параллельной прямой a. Таким образом, в системе, изображенной на рис. 9, аксиома параллельности не имеет места.

Изменим эту систему, придав ей вид, изображенный на рис. 10. «Точки», «прямые» и «отношения связи» будем понимать так же, как на рис. 9. Через точки A и B на рис. 10 проходит по-прежнему точно одна прямая b. Рассмотрим теперь прямую a и точку B, лежащую вне прямой a. Через точку B проходят две прямые (c и d), не «пересекающие» прямую a. Это означает, что в системе, изображенной на рис. 10, аксиома параллельности неприменима; следовательно, и эта система «не евклидова».

Наконец, рассмотрим рис. 11, изображающий тетраэдр, следовательно, тело в *пространстве*. Однако на минуту будем понимать этот рисунок, как *плоскую* систему, состоящую из четырех «точек» A, B, C, D и шести «прямых» a, b, c, d, e, f. Отношение связи будем интерпретировать так же, как и в пространственном изображении тетраэдра (через каждую точку проходят точно три прямые).

[1]) Дальнейшие рассуждения можно вести также на основе рис. 8, который изоморфен с рис. 9.

Сразу видно, что и в этой системе через каждые две точки проходит точно одна прямая. Но в этой системе удовлетворяется также аксиома параллельности (например, среди трех прямых b, c, e, проходящих через лежащую вне прямой a точку A, имеется точно одна прямая, не пересекающая прямую a, следовательно, параллельная прямой a).

Таким образом, система, изображенная на рис. 11, в отношении аксиомы параллельности — евклидова.

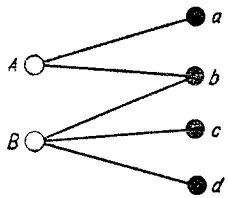


Рис. 10.

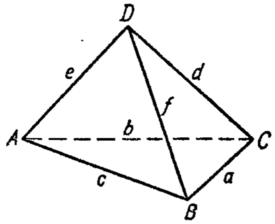


Рис. 11.

Было бы весьма поучительно исследовать эту систему посредством изоморфной с ней системы, в которой точки и прямые представлены, как и на рис. 9, двумя видами шаров, а связь между точкой и прямой — по-прежнему линией, соединяющей белый и черный шары. Если читатель попробует начертить такую систему, то он получит довольно сложную фигуру. Без точных пояснений нелегко будет догадаться, что эта фигура изоморфна с фигурой на рис. 11 и что, следовательно, обе фигуры выражают «на разных языках» одно и то же.

Приведенные выше рассуждения имели своим предметом евклидову систему. Однако они освещают природу математических теорий вообще, из которых учение Евклида представляет собой элементарный классический пример, особенно важный, если учесть его роль в дальнейшем развитии математики.

В школе мы изучали другое элементарное математическое учение: *арифметику* (и алгебру). И это учение может быть развито из сжатой основной системы в принципе так же, как это делается в геометрии.

Основными объектами арифметики являются «числа». Между ними также существуют определенные основные отношения, задаваемые так называемыми правилами операций. Операция сложения относит к каждой паре чисел a, b вполне определенное третье число c, называемое их суммой (обозначается: $a+b=c$). Основное отношение «умножение» определяет для двух заданных чисел a и b вполне определенное третье число c (обозначается $a \cdot b=c$).

Эти арифметические основные понятия (объекты и их отношения) подчиняются определенным основным законам — аксиомам. Примерами таких основных законов могут служить закон коммутативности сложения $(a+b=b+a)$ и закон ассоциативности $[(a+b)+c= =a+(b+c)]$, а также соответствующие аксиомы для умножения $[ab=ba$ и $a(bc)=(ab)c]$.

Из этих основных понятий (чисел, отношений сложения и умножения) и аксиом можно вывести все остальные арифметические понятия и теоремы логическим путем так же, как это делается в геометрии.

Более общие основные системы рассматриваются в важных современных математических теориях, например в теории групп, в алгебре и в топологии.

Из сказанного вытекает полная ошибочность распространенной точки зрения, будто бы математические методы могут применяться только к таким системам понятий, которые касаются категорий количества и операций измерения. В самом деле, какое отношение имеет система аксиом Евклида к количествам или измерениям? Другое дело, что в некоторых математических дисциплинах понятие измеримости также подвергается точному логическому анализу и приводит к созданию специальных высокоразвитых теорий [1]).

Отсюда следует, что математические методы завоевывают и будут завоевывать все новые и новые области знания. Физика в течение последних ста лет стала в основном математической теорией так же, как геометрия еще во времена Евклида. Химия в наши дни благодаря развитию атомной и квантовой теорий быстро подвергается мощному преобразованию в направлении совершенно непредвиденной математизации. Аналогичное развитие претерпевают в настоящее время также некоторые другие области человеческой деятельности, именно такие, которые допускают более или менее ясную абстрактную обозримость. Современные точные теории в национальной экономике, в теории игр и в теории информации показывают, что математические методы начали завоевывать области знания, раньше рассматривавшиеся как абсолютно чуждые математике.

[1]) Автор имеет в виду математическую «теорию меры», являющуюся основой, например, современной теории вероятностей. — *Прим. ред.*

Критика математической теории

Пусть какая-нибудь математическая теория (например, геометрия или арифметика) путем логического анализа сведена к аксиоматической основной системе так, как это было объяснено выше. Такая теория, сведенная к системе аксиом, дает повод к вопросу, на который в свое время мы уже указали, а именно:

Какая имеется гарантия того, что выполненная логическая редукция теории закончена, следовательно, все аксиомы логически *не зависят* одна от другой?

Последующие главы, посвященные возникновению неевклидовой геометрии, частично отвечают на этот принципиальный вопрос.

К этому вопросу присоединяется второй вопрос: *непротиворечива* ли система Евклида?

Рассмотрение системы аксиом элементарной геометрии показывает, что эти аксиомы не содержат явного *непосредственного противоречия*. Такое противоречие имело бы место, если бы некоторые аксиомы содержали утверждения, явно между собою несовместимые, например, если бы наряду с аксиомой, что через две точки проходит точно одна прямая, была бы еще одна аксиома, утверждающая, что через две точки проходит несколько разных прямых. Тем не менее основной вопрос о том, не может ли обнаружиться подобного рода кричащее противоречие на более поздней ступени построения геометрии, продолжает оставаться нерешенным. Когда из аксиом путем логических умозаключений мы выводим все новые и новые теоремы, мы не имеем гарантии, что в конце концов не будут выведены две теоремы, утверждения которых будут содержать непосредственное противоречие. Конечно, известные нам теоремы, выведенные из евклидовых аксиом, таких противоречий не содержат. Однако необходимо заметить, что теоремы Евклида не исчерпывают всех возможных в его системе геометрических теорем, так как количество таких теорем *не ограничено*. Индуктивное заключение: «До настоящего времени в геометрии не обнаружено никакого противоречия, а потому в дальнейшем также исключена возможность противоречия», не является логически единственно возможным. В самом деле, почему такое противоречие не может возникнуть на более поздней ступени геометрического исследования? Если бы это когда-либо случилось, то вся система Евклида рухнула бы и должна была бы быть отброшена вследствие своей внутренней противоречивости.

Поэтому фундаментальной задачей критического исследования является достижение *уверенности*, что теория Евклида представляет собой с логической точки зрения приемлемую, непротиворечивую систему. Современное математическое исследование основ геометрии углубило наши знания в этом направлении и привело к новым ценным концепциям. К этому мы еще вернемся в последующем изложении.

Однако окончательной ясности в этих основных логических проблемах не удалось достичь. Некоторые обстоятельства указывают на то, что эти проблемы, возможно, и не могут быть решены с абсолютной надежностью. В самом деле, как уже неоднократно подчеркивалось, логическая дедукция по своей природе есть нечто относительное. В конце концов она всегда должна апеллировать к некоторому фундаменту, к последней инстанции. Но в тех случаях, когда речь идет о системах, содержащих неограниченное (бесконечное) множество элементов, как это имеет место в геометрии, всегда остается обстоятельство, не поддающееся разъяснению. В понятии «бесконечность» содержится наиболее глубокая и последняя проблема математики.

§ 9. Возникновение неевклидовой геометрии

Выше мы неоднократно останавливались на аксиоме параллельности. Эта аксиома, вследствие своего особо бросающегося в глаза содержания, занимает исключительное положение среди других аксиом элементарной геометрии. Поэтому неудивительно, что геометрическая мысль непрестанно, начиная со времен Евклида, занималась вопросом: является ли аксиома параллельности, как это предполагал Евклид, независящей от других аксиом его системы или, наоборот, она зависит от других аксиом, т. е. может быть с их помощью доказана.

В течение двух тысяч лет исследователи размышляли над загадкой евклидовой теории параллельных, но так и не могли внести окончательную ясность в этот вопрос. Ведущий математик начала XIX столетия Карл Фридрих Гаусс (1775—1855), прозванный «королем математиков», учитывая, с одной стороны, элементарную природу евклидовой системы, а, с другой стороны, — фундаментальное значение, которое элементарная геометрия имеет для всего математического исследования, с полным правом назвал такое положение скандалом в математике.

Гаусс, еще будучи студентом в Гёттингене, вместе со своим другом юности Фаркашем Бойяи (1775—1856) углубился в проблематику теории параллельности. Из его более поздних высказываний можно заключить, что он уже тогда внес достаточную ясность в этот спорный вопрос, но, верный своей привычке не торопиться с опубликованием своих работ, молчал о сделанном открытии. Так прошло несколько десятков лет, пока в теории параллельных не наступил неожиданный поворот. В 1831 г. молодой офицер Янош Бойяи (1802—1860), сын друга юности Гаусса, прислал своему отцу письмо, в котором сообщил о своих исследованиях в области теории параллельных. В экзальтированных выражениях он описывает свой успех: «Я решил проблему, — пишет он, — и таким образом создал новую удивительную теорию пространства».

Этой теорией была та, которую в настоящее время называют «неевклидовой геометрией», хотя с тех пор построено бесчисленное множество других геометрий, отклоняющихся от системы Евклида.

Восторженное письмо Бойяи-сына не встретило у отца особого сочувствия. Он предостерегал сына и призывал его прекратить свои исследования. «Многие из выдающихся исследователей всех времен, — так писал он, — напрасно трудились над этим вопросом», а сам он тоже пожертвовал таким исследованиям много лет, не получив ни малейшего успеха. Однако молодой Бойяи не послушался совета отца и попросил его переслать описание новой теории на оценку Гауссу в Гёттинген. Бойяи-отец выполнил просьбу сына. В своем ответе Бойяи-отцу Гаусс похвалил работу сына, назвав ее гениальной. Однако он добавил, что в своей оценке он должен быть сдержанным, так как у него нет желания хвалить самого себя: он сам получил эти же результаты уже много лет тому назад.

Из ознакомления с оставшимися после Гаусса записками выяснилось, что Гаусс уже давно знал о возможности неевклидовой геометрии, следовательно, и о логической независимости аксиомы параллельности от остальных аксиом Евклида. К этим результатам он пришел, без сомнения, самое позднее в годы 1810—1826, в которые он создал свою знаменитую теорию поверхностей и тем самым открыл перед геометрическим исследованием совершенно новые пути.

Несмотря на это, Бойяи младшему принадлежит незабываемая заслуга самостоятельного открытия неевклидовой геометрии и ее синтетического построения. Правда, эту заслугу он должен разделить с другим исследователем. Русский математик Николай Лобачевский (1792—1856) открыл неевклидову геометрию почти одновременно, ничего не зная о попытках Гаусса и Бойяи [1]).

Таким образом, возникновение неевклидовой геометрии является удивительным результатом неудавшихся

[1]) Н. И. Лобачевскому принадлежит бесспорный приоритет в части публикации его результатов (статья «О началах геометрии» 1829 г.). В связи с этим соответствующая геометрическая система чаще всего называется «неевклидовой геометрией Лобачевского». — *Прим. ред.*

попыток доказать, что аксиома параллельности представляет собой следствие других евклидовых аксиом. При этих попытках естественно было применять так называемый *косвенный метод доказательства.* Этот метод основан, как известно, на следующей идее.

Для того чтобы доказать аксиому параллельности, сначала предполагают, что верна ее *логическая антитеза.* Это противоположное утверждение гласит: «Через точку P, не лежащую на прямой l, проходит несколько (следовательно, по крайней мере две) прямых, параллельных l». Затем из этой «неевклидовой» антитезы и остальных евклидовых аксиом выводят логические следствия в виде дальнейших теорем. Сторонник правильности только евклидовой геометрии будет ожидать, что в конце концов будет получен невозможный результат, т. е. будут выведены две теоремы, содержащие очевидное противоречие. Если такое противоречие действительно обнаружится, то это даст основание сделать заключение: так как антитеза привела к логическому противоречию, то она неверна, следовательно, ее логическая противоположность, т. е. евклидова аксиома параллельности, верна, что и требовалось доказать [1]).

Идя указанным путем, Бойяи и Лобачевский выводили из антитезы аксиомы о параллельных все новые и новые следствия. Как и исходная предпосылка, эти следствия (большей частью) отличаются от евклидовых теорем. Приведем некоторые примеры.

[1]) Строго говоря, последнее заключение не обязательно. Если рассмотренный выше путь приводит к противоречию, то это означает в сущности только следующее: система, предусмотренная антитезой, т. е. противоположность аксиомы параллельности *вместе* с остальными евклидовыми аксиомами, как целое противоречива и поэтому должна быть отброшена. Однако это еще не гарантирует, что *евклидова* система (аксиома параллельности вместе с другими евклидовыми аксиомами) приемлема («правильна»). В самом деле, должна учитываться также возможность, что и в евклидовой системе содержится противоречие. В таком случае должна быть отброшена и эта система. Следовательно, применение непрямого способа заключения в качестве вспомогательного средства для построения теории заранее предполагает, что теория непротиворечива. Отсюда видно, насколько важен упомянутый на стр. 67 логический вопрос о непротиворечивости.

1. Через точку P, лежащую вне прямой l, проходит бесконечное число (а не только две) прямых, параллельных l. Эти прямые лежат внутри пары вертикальных углов, образованных двумя предельными параллелями.

2. Сумма углов треугольника всегда меньше 180°. Отклонение от этого значения (так называемый «угловой дефект» треугольника) прямо пропорционально площади треугольника. Угловой дефект приближается к 180° для очень больших треугольников. Следовательно, для таких треугольников сумма углов почти равна нулю.

3. Геометрическим местом точек, равноудаленных от прямой (и лежащих в одной и той же плоскости, проходящей через рассматриваемую прямую), является не прямая (как в евклидовой геометрии), а изогнутая линия (так называемый *гиперцикл*, или *эквидистанта*).

4. Кривой, пересекающей семейство параллельных прямых под прямым углом, является не прямая, а изогнутая линия (так называемый *орицикл*, или *предельная линия*).

Стороннику евклидовой геометрии эти удивительные теоремы кажутся странными. Однако они не содержат никакого противоречия. В результате укрепилось убеждение, что открытая неевклидова геометрия, по крайней мере с логической точки зрения, является столь же возможной и приемлемой системой, как и классическая евклидова геометрия.

Дальнейшее развитие этих вопросов подтвердило такую точку зрения. Выяснилось также, что неевклидова геометрия представляет собой теорию не только логически возможную, но и широко применимую в других областях.

Наглядное толкование неевклидовой геометрии

Утверждения неевклидовой геометрии отклоняются от наших естественных, евклидовых представлений. Поэтому их нельзя понимать так же легко и непосредственно, как евклидову геометрию. Однако имеется возможность построить модели, которые делают неевклидову вселенную более наглядной и более легко воспринимаемой, чем в ее указанной выше чисто логической формулировке. Мы воспользуемся моделью неевклидовой вселенной, предложенной Анри Пуанкаре (1854—1912) и основанной на ином понимании некоторых евклидовых понятий. В основе этой модели лежит та же исходная идея, что и в модели *евклидовой* плоскости (см. рис. 6, стр. 52). Опять рассмотрим окружность K евклидовой плоскости и лежащие *внутри* нее точки (A, B и т. д.). Если мы предположим, так же как это было сделано при рассмотрении рис. 6, что находящиеся внутри окружности K подвижные «тела» (т. е. плоские и линейные фигуры) при приближении к окружности сжимаются, то воображаемые живые существа, заключенные в области, ограниченной окружностью, будут воспринимать эту область как неограниченную и бесконечную, т. е. в точности так, как это было в мысленном эксперименте, рассмотренном на стр. 51. Следовательно, для этих существ окружность K представляет собой «бесконечную даль». Точки этой окружности, а также точки, лежащие снаружи окружности, для наших воображаемых существ недоступны, более того, они для них не существуют. Вся вселенная наших существ заключена внутри окружности K.

Перейдем теперь к толкованию «прямых» во вселенной K. Как и на рис. 6, будем понимать под «прямой» круговую дугу, заключенную внутри K, однако на этот раз такую дугу, которая (по *нашему* евклидову представлению) пересекает окружность K ортогонально, т. е. под *прямым* углом (рис. 12).

Основное отношение «точка лежит на прямой» будем понимать, как и на рис. 6, в соответствии с нашим естественным наглядным представлением.

После того как таким путем истолкованы основные объекты «точка» и «прямая» и отношение связи, мы можем приступить к исследованию правильности аксиом. При этом мы будем опираться на наши естественные, евклидовы представления.

Сразу видно, что через две «точки» проходит точно одна «прямая». В самом деле, согласно евклидовой геометрии, через две точки A и B проходит одна круговая дуга, пересекающая ортогонально предельную окружность K (см. рис. 12).

Одновременно видно, что аксиома параллельности неприменима: через «точку» C, лежащую вне «прямой» AB, проходит бесконечно большое число «прямых», не пересекающих «прямую» AB в «конечной» области (т. е. *внутри* окружности K). Эти «прямые», параллельные AB, расположены, в согласии с предложением 1

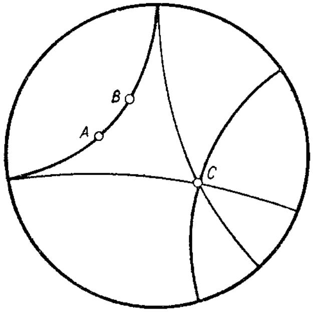


Рис. 12.

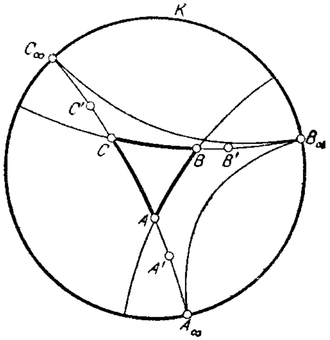


Рис. 13.

(стр. 72), внутри пары вертикальных углов, ограниченных двумя «предельными» «прямыми», параллельными AB (тонкие круговые дуги на рис. 12).

Следовательно, в модели Пуанкаре отношение связи удовлетворяет неевклидовым аксиомам.

Напротив, отношение порядка имеет «евклидов» характер, так как это основное отношение истолковывается в соответствии с нашим естественным наглядным представлением.

Наконец, рассмотрим отношение конгруэнтности. Для углов оно имеет евклидов характер. Следовательно, угол между двумя «прямыми» равен евклидову углу, образуемому касательными, проведенными в точке пересечения «прямых»; поэтому два угла будут конгруэнтны, если углы, образуемые касательными, равны в обычном смысле. Для *«отрезков»* (пар точек) определение «конгруэнтности» несколько более сложно, так как необходимо учитывать упоминавшееся на стр. 73

укорочение расстояний при приближении к окружности K[1]).

Введенное определение конгруэнтности сохраняет в силе евклидовы аксиомы конгруэнтности и евклидовы теоремы конгруэнтности (например, теоремы о конгруэнтности треугольников).

Из сказанного выше следует, что в модели Пуанкаре справедливы все аксиомы неевклидовой геометрии (а евклидовы аксиомы — за единственным исключением аксиомы параллельности). Читателям, желающим получить простое и наглядное представление о явлениях неевклидовой геометрии, рекомендуем изучать эту геометрию при помощи модели Пуанкаре. В качестве примеров остановимся на неевклидовых предложениях 2, 3 и 4, приведенных на стр. 72.

[1]) Для читателей, интересующихся точным определением конгруэнтности отрезков, приведем его в элементарно-геометрической форме. Для этого введем понятие «конгруэнтности» двух «окружностей». Неевклидова окружность изображается любой обыкновенной, т. е. евклидовой окружностью, *целиком* лежащей внутри окружности K. Для того чтобы определить «конгруэнтность» двух таких «окружностей», рассмотрим сначала две окружности C_0 и C, из которых первая концентрична с окружностью K (предоставляем читателю самому выполнить рисунок). Прямая, соединяющая центры окружностей C_0 и C, пусть пересекает предельную окружность K в точках P и Q. Проведем через P и Q круговую дугу L, касающуюся окружности C_0. Если эта круговая дуга касается также окружности C, то тогда будем считать окружности C_0 и C «конгруэнтными». В этом случае говорят, что окружность C «перенесена» в положение C_0. Пусть C' — третья окружность внутри K. И ее можно перенести в положение C_0', концентричное с окружностью K. Если C_0 и C' совпадут, то будем называть окружности C и C' «конгруэнтными». Следовательно, окружность C_0, «конгруэнтная» окружности C, действительно сжимается, когда она приближается к периферии, как это и должно быть на основании сказанного выше.

Теперь можно определить «конгруэнтность» двух отрезков AB и $A'B'$. Через точки A и B проходит точно одна окружность C, ортогонально пересекающая «прямую», проходящую через A и B. Аналогичным образом строится окружность C', проходящая через точки A' и B' и ортогональная к «прямой», проходящей через эти же точки. «Отрезки» AB и $A'B'$ называются «конгруэнтными», если «конгруэнтны» (в указанном выше смысле) окружности C и C'.

Приведенные определения конгруэнтности могут быть сформулированы проще, если воспользоваться некоторыми понятиями высшей математики.

2. Пользуясь евклидовой геометрией, можно доказать, что сумма углов «треугольника» в модели Пуанкаре меньше 180°. Ограничимся случаем, когда рассматриваемый «треугольник» невыпуклый (рис. 13). Он лежит целиком внутри евклидова треугольника, имеющего те же вершины A, B, C. Сразу видно, что углы «треугольника» ABC меньше соответственных углов евклидова треугольника ABC, а так как сумма углов последнего равна 180°, то сумма углов «треугольника» ABC меньше 180°.

Из рис. 13 видно также, что сумма углов «треугольника» уменьшается, когда точки A и C отодвигаются вдоль «прямой» AC, а точка B — вдоль «прямой» CB ближе к окружности K (в положения A', C' и B'). Эта сумма приближается к нулю, когда вершины углов отодвигаются «бесконечно далеко», т. е. до окружности (в положения A_∞, B_∞ и C_∞). «Треугольник» $A'B'C'$ в пределе превращается в фигуру, ограниченную тремя «прямыми», из которых каждые две предельно параллельны одна другой. В евклидовой геометрии такой предельной фигуры не существует.

3. В модели Пуанкаре эквидистанты e (гиперциклы) «прямой» l ($A_\infty B_\infty$) представляют собой евклидовы круговые дуги, соединяющие точки A_∞ и B_∞ (однако они не ортогональны к окружности K, следовательно, не являются «прямыми», см. рис. 14).

4. Орициклы o (предельные линии), ортогонально пересекающие предельные параллели, направленные «к точке A_∞» (в модели Пуанкаре они изображаются круговыми дугами, ортогональными к окружности K), представляют собой евклидовы окружности, касающиеся окружности K в точке A_∞ (рис. 14).

Неевклидовы качели

Какой вид примет эксперимент, рассмотренный на стр. 29—30, если его выполнить в неевклидовом пространстве? Пусть в модели Пуанкаре горизонтальная прямая $A_\infty B_\infty$, проходящая через точку O, изображает поверхность земли (рис. 15). На вертикальной стойке OP лежит «прямая» доска AB, которая в положении равно-

весия горизонтальна и параллельна прямой $A_\infty B_\infty$ (перпендикулярна к прямой OP!). При качании доски ее конечная точка A опустится до поверхности земли при условии, что доска AB достаточно длинная, а угол, на который она поворачивается, больше угла α_0, образуемого «горизонталью» AB с предельной «прямой» PA_∞,

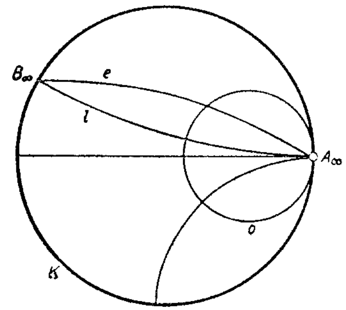


Рис. 14.

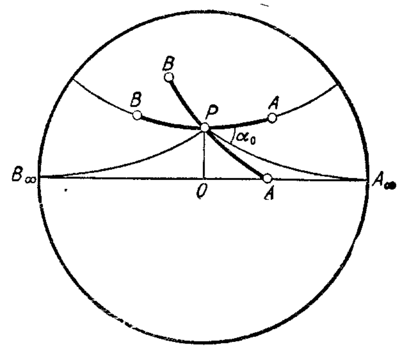


Рис. 15.

параллельной поверхности земли $A_\infty B_\infty$. Этот угол теперь не равен нулю. Правда, он, как это видно из рисунка, очень мал, если высота стойки по сравнению с длиной доски небольшая[1]). Предлагаем читателю сравнить эту ситуацию с соответствующей евклидовой ситуацией, изображенной на рис. 2 (стр. 29).

Отметим еще следующее очень важное свойство неевклидовой геометрии. Модель Пуанкаре, изображенная на рис. 13, показывает, что стороны «треугольника» ABC, если он очень невелик, *почти прямолинейны* также

---

[1]) Вычисления, которые здесь не могут быть приведены, дают для угла α_0 значение

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{e^\rho - 1}{e^\rho + 1},$$

где ρ есть высота (неевклидова) стойки, а $e = 2{,}71\ \ldots$ — основание натуральных логарифмов. Если ρ мало, то α_0 приближенно равно ρ, следовательно, также очень мало.

в евклидовом смысле. Следовательно, сумма углов треугольника в этом случае очень мало отличается от евклидова значения 180°. Отсюда вытекает, что утверждения неевклидовой геометрии для небольших фигур очень мало отклоняются от евклидовых утверждений (это следует также из эксперимента с неевклидовыми качелями при условии, что высота стойки очень мала).

Таким образом, евклидова геометрия в очень небольших частях пространства является *предельным случаем* неевклидовой геометрии (ср. со сказанным на стр. 25).

Выясним теперь, как будет складываться представление о пространстве у воображаемых живых существ, населяющих вселенную Пуанкаре, если у них будет возможность передвигаться только в очень небольших частях своего пространства. В таком случае их видимое пространство будет ограничено только очень небольшой областью внутри окружности K, и поэтому сумма углов доступных для них «треугольников» будет равна *почти* 180°. Если угловой дефект треугольника будет составлять только несколько миллионных долей градуса (именно такой дефект мы предположили на стр. 17), то живые существа вселенной Пуанкаре вообще не сумеют обнаружить отклонение измеряемой ими суммы углов от евклидова значения 180°. С эмпирической точки зрения они вполне могли бы принять 180° за *точное* значение суммы углов своего треугольника. Без сомнения, они так именно и поступили бы. Поэтому они считали бы евклидовым не только видимое пространство своей ближайшей окрестности, но и все пространство в целом. В самом деле, согласно принципу экономии образования понятий, они должны были бы отдать предпочтение такому представлению о пространстве, которое соответствует евклидовой системе, так как последняя в структурном отношении *проще*, чем неевклидова система (это следует также из приведенных выше соображений, относящихся к модели Пуанкаре).

По всей вероятности, геометры этой воображаемой вселенной когда-нибудь усомнились бы, правильно ли их евклидово представление о пространстве. Возможно,

и у них когда-нибудь появился бы свой Бойяи или свой Лобачевский, которые обнаружили бы неевклидову природу пространства или возможность неевклидова понимания пространства. Такая идея сначала могла бы вызвать удивление и оппозицию. Однако постепенно выяснилось бы, что неевклидову теорию пространства следовало бы приинять во внимание и как наглядное представление, и как логически развитую систему. Но и после этого в геометрической практике воображаемой вселенной можно было бы оставаться на почве евклидова понимания пространства. В самом деле, разница между этими двумя системами внутри очень ограниченных локальных окрестностей была бы столь незначительна, что практически не играла бы никакой роли.

Однако и в этой вселенной мог бы наступить день, когда какой-нибудь свободный от предрассудков и дальновидный геометр понял бы, что указанная разница при относительно *больших* расстояниях должна быть велика и заметна. Для того чтобы в этом убедиться, он выбрал бы на «Земле» своей вселенной три точки A, B, C, расположенные далеко одна от другой, и попытался бы *эмпирически* измерить углы треугольника ABC. Согласно принципу возможности опытной проверки он должен был бы «конкретно представить» три стороны треугольника. Затем, исходя из представления, что свет распространяется прямолинейно, он послал бы из каждой вершины треугольника в две остальные вершины световые сигналы. Тогда путем визирования он измерил бы в каждой вершине соответствующие углы. Если треугольник был бы столь большой, что неевклидов угловой дефект треугольника был бы больше предела неточности, обусловленного ошибками наблюдения (см. стр. 16), то проделанный эксперимент доказал бы существование углового дефекта. В результате для больших расстояний следовало бы отказаться от евклидовой геометрии и перейти к неевклидовому представлению о пространстве.

Таким свободным от предрассудков и дальновидным исследователем *в нашем действительном мире* был Гаусс. При своих исследованиях в области дифференциальной геометрии он пришел к следующей идее: возможно, что наше пространство неевклидово, хотя наш предшествующий опыт говорит за евклидово пространство. Так могло получиться потому, что мы также являемся «миниатюрными существами», локально привязанными к ничтожной части вселенной. В связи со своими геодезическими исследованиями Гаусс действительно произвел замечательный опыт рассмотренного выше рода. Можно предполагать, что посредством этого опыта он хотел исследовать также вопрос о возможно неевклидовой структуре реального пространства.

В качестве вершин A, B, C треугольника он выбрал три горные вершины: Брокен, Хохенхаген и Инзельсберг, отстоящие одна от другой приблизительно на 100 *км*. После того как Гаусс указанным выше способом измерил углы A, B, C, он получил для суммы этих углов значение 180° с точностью, допускавшейся примененным способом измерения [1]).

Таким образом, заметного отклонения от евклидова значения обнаружить не удалось. Однако этот результат еще не решает поставленной проблемы, так как выбранный Гауссом треугольник, возможно, был слишком мал для того, чтобы выявить возможность неевклидовой структуры вселенной.

Если бы результат выполненного эксперимента был другим, т. е. недвусмысленно обнаружил бы неевклидову структуру пространства, то молчаливый Гаусс, возможно, придал бы этому эксперименту большее значение, чем он это сделал в действительности. В результате возникла бы большая сенсация, такая же, как почти сто лет спустя, после открытий Эйнштейна. Сдержанность Гаусса при опубликовании своих идей, которые могли бы произвести переворот в науке, объясняется частично тем, что он знал, насколько иногда даже ученые противодействуют идеям, расшатывающим укоренившиеся в сознании общепризнанные представле-

[1]) Подобный эксперимент производил и Лобачевский, определявший сумму углов треугольника, образованного Землей, Солнцем и звездой Сириус. — *Прим. ред.*

ния. Когда один друг Гаусса стал порицать его, зачем он столь долго скрывал свои открытия об основах геометрии, Гаусс ответил, что он опасался «крика беотийцев» [1]).

В заключение сделаем еще одно замечание. Как уже было сказано, логическая независимость аксиомы параллельности от остальных евклидовых аксиом выясняется *косвенным путем*. Бойяи и Лобачевский развили неевклидову геометрию из основной системы, содержащей все евклидовы аксиомы за единственным исключением аксиомы параллельности, которую они заменили ее логической антитезой: «Через точку, лежащую вне прямой, проходит несколько прямых, параллельных заданной прямой». Так как такое основное предположение не привело ни к какому противоречию, то было сделано заключение, что аксиома параллельности не может быть выведена из остальных евклидовых аксиом, по крайней мере косвенным методом доказательства (ср. со сказанным на стр. 71). Следовательно, аксиома параллельности логически независима от остальных аксиом.

Модель Пуанкаре приводит к этому результату *более непосредственным путем*. Правда, при этом геометрические объекты и отношения получают толкования, частично не совпадающие с «естественным» евклидовым пониманием (например, «прямая» в модели Пуанкаре имеет вид круговой дуги и т. п.). Благодаря этому каждое утверждение неевклидовой геометрии получает новое толкование на «евклидовом материале» в рамках евклидовой системы.

Предположим на минуту, что аксиома параллельности может быть доказана при помощи остальных евклидовых аксиом. Эти последние аксиомы, истолкованные в соответствии с моделью Пуанкаре, представляют собой некоторые *правильные* предложения евклидовой геометрии. Пользуясь этим обстоятельством, мы могли бы на основе модели Пуанкаре шаг за шагом проследить логическую цепь доказательств, которая, по нашему предположению, должна была бы привести к под-

[1]) Другими словами, критики невежд. — *Прим. ред.*

тверждению аксиомы параллельности, поступая при этом в точности так же, как мы это делаем в школе, когда с помощью фигуры, вычерченной на доске, проводим какое-нибудь доказательство. Итак, предположим, что в конце концов цепь доказательств привела нас к подтверждению аксиомы параллельности. Но в модели Пуанкаре этот результат соответствовал бы следующему. Если l есть круговая дуга, ортогонально пересекающая предельную окружность K, то через заданную точку P, лежащую внутри окружности K, проходила бы только *одна* круговая дуга l', также пересекающая предельную окружность под прямым углом, но не пересекающая при этом дугу l внутри окружности K. Однако в евклидовой геометрии такого положения не может получиться, как об этом уже было сказано на стр. 74. Напротив, число таких круговых дуг l' бесконечно велико (см. рис. 12).

Это противоречие показывает, что аксиома параллельности действительно логически не зависит от остальных евклидовых аксиом, — правда, в предположении, что система Евклида, на которой были основаны делавшиеся заключения, сама по себе непротиворечива.

§ 10. Отображение пространства в область чисел. Аналитическая геометрия

Геометрические явления в пространстве могут быть описаны также при помощи чисел путем применения так называемых *систем координат*. Такие системы образуются тремя прямыми, исходящими из произвольным образом фиксированной начальной точки O и называемых осями координат. В нашей аудитории мы можем выбрать за начальную точку вершину одного из углов помещения, а за координатные оси — три ребра, пересекающиеся в вершине выбранного угла. Каждая координатная ось должна быть, кроме того, «ориентирована»; это означает, что одно из направлений оси принимается «положительным», а другое — «отрицательным». Далее, выбрав единицу длины, например, метр, мы можем снабдить каждую ось шкалой.

Тогда каждая из осей станет «числовой прямой», точкам которой будут однозначно соответствовать числа. Начальной точке будет отвечать число нуль, точкам положительной и отрицательной полуосей — положительные и соответственно отрицательные числа. Эти числа, отвечающие точкам, называются *координатами* этих точек.

В системе координат, взятой в нашей аудитории, координаты пространственной точки P получаются следующим образом: из точки P опускаются перпендикуляры на каждую из трех осей; тогда положение точки P будет определяться тремя числами: «продольной

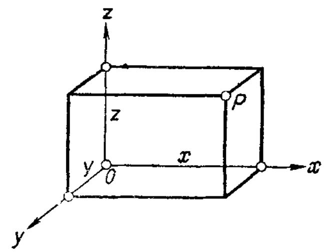


Рис. 16.

координатой» x, «поперечной координатой» y и «высотной координатой» z.

Таким образом, множество всех точек P пространства можно однозначно отобразить на множестве троек чисел (x, y, z).

Это отображение относительно, поскольку оно основано на выборе вполне определенной системы координат (или системы отсчета), выделенной из всех других таких систем заданием осей координат. Если система координат меняется, например, путем поворота вокруг начальной точки или путем параллельного переноса, то изменяются также координаты точки P.

Для осуществления только что выполненного отображения $P \longleftrightarrow (x, y, z)$ мы применили геометрию Евклида. В самом деле, построение, которое было выполнено, основано на евклидовой теории параллельных (рис. 16).

В неевклидовой геометрии построение координат указанным способом невозможно, однако его можно соответствующим образом модифицировать. В этой главе, говоря о координатах, мы всегда будем иметь в виду *евклидовы координаты.*

В геометрии двумерной евклидовой плоскости положение точки относительно координатных осей определяется *двумя* координатами (x, y). В одномерной геометрии, в которой рассматриваются лишь точки, принадлежащие одной прямой линии, для определения положения точки достаточно *одной* координаты x.

Мы видим, что число координат равно *размерности* рассматриваемого «пространства».

Выше в качестве примера осей системы координат мы указали на три «ребра» нашей аудитории. Эти ребра попарно взаимно ортогональны, т. е. перпендикулярны одно к другому. Наряду с такими ортогональными (прямоугольными) системами координат можно применять также косоугольные системы, в которых оси не перпендикулярны одна к другой.

Ортогональные системы координат называются также *декартовыми* системами — по имени философа и математика Рене Декарта (Картезиуса, 1596—1650), впервые выполнившего рассмотренное выше отображение пространства в область чисел и создавшего таким путем *аналитическую геометрию.* С помощью заданной системы координат геометрия как бы переводится на «язык чисел». После того как на систему чисел отображены «точки», все остальные геометрические понятия также получают свои арифметические аналогии или «изображения».

Рассмотрим это соответствие также с точки зрения элементарно-геометрических основных объектов и основных отношений. Для простоты ограничимся геометрией на плоскости. Отображение точек P на пары чисел (x_1, x_2) будем выполнять при помощи прямоугольной системы координат.

Как мы знаем из средней школы, при таком отображении прямой l будет соответствовать уравнение первой степени

$$ax_1 + bx_2 + c = 0.$$

Если «точка» (x_1, x_2) лежит на этой «прямой» l, то это означает, что координаты (x_1, x_2), будучи подставлены в уравнение прямой, удовлетворят ему, т. е. обращают выражение ax_1+bx_2+c в нуль. Напротив, если «точка» (x_1, x_2) лежит вне прямой l, то выражение ax_1+bx_2+c после подстановки в него координат (x_1, x_2) не будет равно нулю.

Для примера возьмем прямую

$$x_1 - x_2 - 1 = 0,$$

т. е. положим $a=1$, $b=-1$, $c=-1$. Точка $x_1=2$, $x_2=1$ лежит на прямой, так как $x_1 - x_2 - 1 = 2 - 1 - 1$ равно нулю; точка же $x_1=1$, $x_2=2$ лежит вне прямой l, так как $1 - 2 - 1$ равно -2, т. е. не равно нулю.

Несколько более абстрактно мы можем сформулировать сказанное выше следующим образом.

В заданной системе координат *точкам* евклидовой плоскости соответствуют пары чисел (x_1, x_2). *Прямым* соответствуют уравнения первой степени или, правильнее, тройки чисел (a, b, c), так как каждая из таких троек определяет одно уравнение первой степени[1]).

Наконец, отношение связи «точка (x_1, x_2) лежит на прямой (a, b, c)» приобретает следующий арифметический смысл: «выражение ax_1+bx_2+c равно нулю». Если же это выражение отличается от нуля, то «точка (x_1, x_2) лежит вне прямой (a, b, c)».

Геометрические отношения порядка и конгруэнтности также имеют свои арифметические аналогии в аналитической геометрии. Например, конгруэнтность отрезков интерпретируется при помощи теоремы Пифагора следующим образом. Пусть точки A и B имеют координаты $x_1=a_1$, $x_2=a_2$ и соответственно $x_1=b_1$, $x_2=b_2$ (в заданной системе координат K). Тогда расстояние r между ними будет определяться гипотенузой AB треугольника ABC, имеющего катеты b_1-a_1 и b_2-a_2. Поэтому

[1]) Точнее, прямую определяют отношения «коэффициентов» a, b, c. В самом деле, два уравнения, коэффициенты которых пропорциональны, например $x_1+3x_2+1=0$ и $2x_1+6x_2+2=0$, определяют одну и ту же прямую.

на основании теоремы Пифагора мы будем иметь

$$r^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2.$$

Далее, пусть $\bar{A}(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ и $\bar{B}(\bar{b}_1, \bar{b}_2)$ — вторая пара точек. Для определения расстояния $\bar{r}$ между ними найдем из таких же соображений, как и выше, соотношение

$$\bar{r}^2=(\bar{b}_1-\bar{a}_1)^2+(\bar{b}_2-\bar{a}_2)^2.$$

Следовательно, отрезки AB и $\bar{A}\bar{B}$ будут одинаковы по длине, т. е. r будет равно $\bar{r}$, если

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2=(\bar{b}_1-\bar{a}_1)^2+(\bar{b}_2-\bar{a}_2)^2.$$

Наоборот, если оба эти выражения не равны одно другому, то отрезки AB и $\bar{A}\bar{B}$ не конгруэнтны.

Легко найти арифметические аналогии также для конгруэнтности углов. Наконец, естественное арифметическое толкование получают и основные отношения порядка. В самом деле, порядок точек на числовой прямой совпадает с порядком арифметических величин координат этих точек на числовой прямой.

Рассмотренным способом, посредством поясненного выше «словаря», вся евклидова геометрия отображается в область чисел. В качестве полной картины геометрии получается система аналитической геометрии, состоящая из «арифметических изображений» геометрических понятий. Обе эти системы изоморфны между собой.

Переход к аналитическому описанию геометрических понятий означает решительный поворот геометрического мышления, особенно в двух следующих отношениях.

1. Неточность и неопределенность понятий, свойственная эмпирической геометрии, благодаря арифметическому толкованию полностью исключается. В самом деле, является ли эмпирически заданная или наглядно представляемая прямая «действительно прямой линией», решить трудно. Иначе обстоит дело в аналитической геометрии: здесь соответствующий геометрическому явлению арифметический образ — тройка чисел (a, b, c) — является ясным и вполне различимым понятием, свободным от любой неоднозначности.

2. Аналитическая геометрия вносит в геометрическое исследование совершенно новый метод. После соответствующей аналитической трактовки геометрии эта наука приобретает полноту и бесспорность, достигнутые в арифметике и в анализе, а вместе с тем — и новый метод исследования. Методы исчисления бесконечно малых проложили путь к *дифференциальной геометрии*, значительно углубившей наши геометрические знания и открывшей для геометрии совершенно новые перспективы.

Арифметическое толкование геометрии внесло значительную ясность также в вопросы логического обоснования геометрии. Теперь цепи геометрических доказательств могут быть прослежены также при помощи арифметических понятий. При помощи таких же заключений, как и на стр. 81—82 (где геометрия была пояснена на модели Пуанкаре), выясняется, что элементарная геометрия Евклида (а также неевклидова геометрия) непротиворечива, при условии что в системе ее арифметического отображения не имеется никаких внутренних противоречий. Разрешение вопроса о непротиворечивости геометрии передается таким образом совершенно другой науке: учению о числах — арифметике и анализу, их основным логическим проблемам. Этими основными проблемами арифметики занимается современная логика. В этом направлении уже многое достигнуто, но от окончательной ясности нас отделяет еще большое расстояние.

Переход к аналитической геометрии позволил также значительно расширить область геометрии. Аналитическая геометрия стала необходимой основой для создания геометрии *многомерных* пространств. Этим вопросом мы займемся в § 12.

§ 11. Геометрия поверхностей

В 1820 г. Гауссу была поручена важная практическая задача: произвести геодезическую съемку земли Ганновер. Следуя своей натуре, Гаусс при решении этой задачи не удовлетворился старыми, традиционными методами геодезии. Он углубился в порученную ему задачу, развил новые методы и стал новатором также в этой области.

Однако Гаусс не остановился на этой частной задаче. В геодезии исследуется форма Земли, для чего подлежащая измерению область покрывается сетью треугольников. По размерам и форме этих небольших треугольников, а также по их взаимному расположению определяются геометрические особенности всей сети треугольников, причем «глобально» (т. е. с точки зрения всей сети треугольников), а не только «локально» (т. е. с точки зрения отдельных треугольников).

Это навело Гаусса на мысль использовать ту же процедуру для изучения свойства любой поверхности в пространстве. В результате поисков Гаусс создал свою общую теорию поверхностей.

Важной задачей этой теории является исследование *геодезических линий* на двумерных поверхностях трехмерного евклидова пространства. Пусть на такой поверхности заданы две точки, A и B. Эти точки можно соединить одна с другой дугами различных кривых, целиком лежащих на поверхности. Поставим перед собой задачу найти среди таких дуг *кратчайшую*. Дугу AB, удовлетворяющую этому свойству минимальности, называют *геодезической линией* (для заданной поверхности). Такие линии с точки зрения геометрии рассматриваемой поверхности являются «прямыми» линиями. В самом деле, только что упомянутое свойство минимальности характеризует именно прямые линии как в евклидовой, так и в неевклидовой плоскости [1]).

Эта проблема минимальности в общем случае имеет *только одно* решение при условии, что заданные точки расположены не слишком далеко одна от другой. Если исключить последнюю возможность, то через две точки A и B проходит единственная «прямая» (геодезическая линия). Следовательно, при таком определении понятия

[1]) Подобного рода задачи на отыскание экстремальных значений решаются методами *вариационного* исчисления — одной из наиболее важных областей приложения исчисления бесконечно малых. [См. по этому поводу популярную книгу Люстерник Л. А., Кратчайшие линии, М., Гостехиздат, 1955. — *Прим. ред.*]

«прямая» на небольших участках поверхности имеет место аксиома связи 1 (см. стр. 46).

Вторая аксиома связи (аксиома параллельности евклидовой геометрии и соответственно антитеза этой аксиомы в неевклидовой геометрии) в общем случае («глобально») не имеет смысла. Но в элементарной геометрии теория параллельных связывается с вопросом о сумме углов треугольника. Выше мы видели, что в системе Евклида аксиома параллельности логически

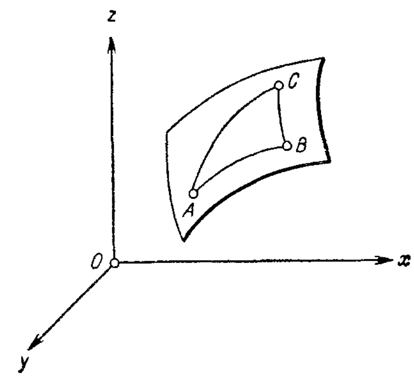
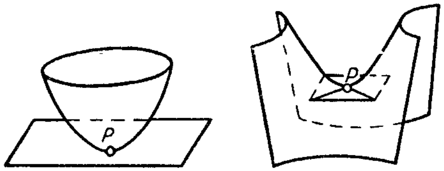


Рис. 17.

эквивалентна тому, что сумма углов треугольника равна в точности 180° (см. стр. 44). Последний вопрос можно исследовать на поверхности *локально*. В самом деле, углы «геодезического треугольника» ABC (рис. 17), т. е. треугольника, ограниченного дугами геодезических линий, можно измерить. Их сумма в общем случае не будет равна 180°. Однако отклонение этой суммы от 180° подчиняется общей закономерности, открытой Гауссом и сформулированной им в виде следующей изящной теоремы:

Угловое отклонение треугольника (т. е. величина, на которую сумма углов треугольника больше или меньше евклидова значения 180°) прямо пропорционально *полной кривизне* рассматриваемого треугольника.

Последняя величина, для которой в этой книге нет возможности дать точное математическое определение, обусловлена изогнутостью рассматриваемой поверхности относительно окружающего пространства. Чем больше эта изогнутость или искривленность, тем больше и «гауссова кривизна». Следует иметь в виду, что кривизне приписывается знак: либо плюс, либо минус. Если поверхность в окрестности своей точки P целиком лежит по одну сторону касательной плоскости, проведенной в точке P (рис. 18, *а*), то кривизна считается положительной. Наоборот, кривизна будет отрицательной,



а *б*

Рис. 18.

если поверхность в точке P пересекает свою касательную плоскость, имея в этой точке седлообразный вид (рис. 18, *б*). Наконец, если поверхность представляет собой плоскость или вблизи точки P ничтожно мало отклоняется от касательной плоскости в этой точке, то кривизна в точке P равна нулю [1]).

Таким образом, эти наглядные понятия связаны с тем, что двумерная поверхность может быть изогнута в окружающем ее трехмерном пространстве. Вообразим теперь, что на такой поверхности живут небольшие дву-

[1]) Переход от понятия «кривизна в точке» к понятию «полная кривизна» области G поверхности (например, геодезического треугольника) совершается путем составления среднего арифметического. Разбивают область G на n частей с равными площадями. В каждой частичной области выбирают произвольную точку и определяют в ией кривизну. Для n областей получаются кривизны $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Наконец, составив среднее арифметическое $\frac{1}{n}(k_1+k_2+\ldots+k_n)$ и умножив его на площадь области G, получают приближенное значение полной кривизны области G, причем тем точнее, чем больше число n.

мерные живые существа, которые имеют возможность передвигаться на поверхности, но при этом ничего не знают об окружающем пространстве. Имея в своем распоряжении небольшие измерительные линейки, эти существа могли бы определить кратчайший путь между точками A и B (вдоль поверхности), т. е. геодезическую линию. Они могли бы измерить также углы в геодезическом треугольнике, следовательно, могли бы определить угловое отклонение этого треугольника.

Теперь из сформулированной выше теоремы Гаусса можно сделать примечательный вывод. В самом деле, согласно этой теореме угловое отклонение треугольника пропорционально полной кривизне треугольника, следовательно, воображаемые «поверхностные существа», ничего не зная об окружающем их пространстве, тем не менее могли бы по измеренному значению углового отклонения треугольника определить кривизну своего двумерного «поверхностного мира»!

Результаты, полученные Гауссом, имеют огромное общее значение. Они открыли перед геометрией неожиданные новые перспективы. В 1854 г. молодой Бернгард Риман (1826—1866) поразил гёттингенских математиков, среди которых находился также уже немолодой Гаусс, своим докладом «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» [1]). Использовав гауссову теорию поверхностей, Риман указал пути построения n-мерной дифференциальной геометрии. Создание этой общей римановой геометрии стало поворотным пунктом математического знания. Изложить здесь идеи Римана в сколько-нибудь доступной форме вряд ли возможно. Поэтому ниже, в § 1 главы V, мы ограничимся только самыми краткими указаниями о существе римановой геометрии.

[1]) Поразительный по глубине заложенных в нем идеям доклад Римана настолько обогнал свое время, что не мог быть полностью оценен гёттингенскими математиками. (Исключением здесь являлся Гаусс, вполне подготовленный своими предшествующими работами к восприятию новых идей, — и действительно очевидцы отметили, что он ушел с доклада в глубокой задумчивости.) Огромное значение идей Римана для математики и физики раскрыли только А. Эйнштейн и Г. Вейль в 10-х годах нашего столетия. — *Прим. ред.*

Примечательно, что многомерная геометрия имеет фундаментальное значение также для современной физики. Специальную теорию относительности можно рассматривать в известной мере как «геометризацию» физического мира явлений, представляемого в виде евклидова четырехмерного мира с тремя координатами места и четвертой координатой времени. Общая же теория относительности (теория тяготения) Эйнштейна представляет собой «неевклидову» четырехмерную геометрию, в которой евклидово пространство специальной теории относительности заменено искривленным четырехмерным римановым пространством (см. § 2 гл. V).

Закончим этот параграф несколькими примерами, поясняющими гауссову теорию поверхностей. Вернемся к исходному пункту исследований Гаусса — к геометрии поверхности Земли. Будем рассматривать Землю как точный шар. Геодезическими линиями шара являются *большие круги*, плоскости которых проходят через центр Земли. Сумма углов геодезического треугольника, ограниченного дугами трех больших кругов, всегда *больше* 180°. Следовательно, угловое отклонение треугольника положительно и при этом, как и в геометрии Бойяи — Лобачевского, прямо пропорционально площади этого треугольника [1]).

Это совпадает с теоремой Гаусса. В самом деле, кривизна шара *постоянна* (равна квадрату обратного значения радиуса шара); поэтому полная кривизна геодезического треугольника G, согласно заключительному замечанию в сноске на стр. 90, равна этой положительной постоянной кривизне, умноженной на площадь треугольника G, следовательно, прямо пропорциональна этой площади.

---

[1]) Вообразим, например, геодезический треугольник G, вершина A которого расположена в северном полюсе, а вершины B и C лежат на экваторе в точках с долготами 0° и α°. В таком треугольнике углы B и C равны 90°, а угол A равен α градусам; следовательно, угловое отклонение треугольника также равно α°. С другой стороны, очевидно, что площадь треугольника G равна полной площади северного полушария, умноженной на $\alpha°/360°$. Таким образом, угловое отклонение треугольника G действительно пропорционально его площади.

Далее, из теоремы Гаусса следует, что полная кривизна геодезического треугольника (определенная, согласно сказанному в сноске на стр. 90, некоторым процессом усреднения) при неограниченном уменьшении треугольника стремится к нулю. В пределе угловое отклонение треугольника исчезает, и поэтому на очень небольшой площади геометрия поверхности почти евклидова. Следовательно, на таких локально ограниченных частях поверхности наши «поверхностные существа» могут применять евклидову геометрию, не делая при этом сколько-нибудь заметных ошибок. Это вполне соответствует нашим естественным наглядным представлениям. В самом деле, небольшая окрестность поверхности в точке P почти совпадает с касательной плоскостью к поверхности в этой точке и притом тем точнее, чем меньше окрестность. Следовательно, свойства поверхности в непосредственной близости к точке P почти такие же, как у плоскости, т. е. евклидовы.

Соответственно этому поступаем и мы, жители земного шара, в нашей практике. Поверхность озера мы рассматриваем как плоскость и при поездке по озеру применяем правила плоской евклидовой геометрии. Отклонения от плоскости, обусловленные кривизной земного шара, столь малы, что их можно не учитывать. Однако ситуация изменяется при плавании по океану. На больших протяжениях геометрия сферы весьма существенно отличается от правил Евклида. Мореплаватель роковым образом ошибся бы, если бы вел свой корабль по правилам евклидовой геометрии.

Мы только что рассмотрели сферическую геометрию как частный случай гауссовой теории поверхностей. Однако сферическую геометрию можно построить также синтетически, путем прямой логической дедукции, исходя из системы аксиом так, как это делается в элементарной евклидовой или неевклидовой геометрии. Но аксиомы связи будут теперь иными. Правда, первая аксиома: через две точки проходит точно одна прямая (причем «прямыми» будут большие круги), остается неизменной, но с одним *исключением*. А именно, если две точки лежат одна от другой на наибольшем возможном расстоянии, т. е. на концах диаметра, то имеется бесконечно большое число соединяющих их «прямых» (больших кругов). В самом деле, через северный и южный полюсы можно провести бесконечно много меридианов. Параллельных же прямых на сфере не имеется совсем: два больших круга всегда пересекаются, причем даже в двух (диаметрально противоположных) точках.

Аксиомы порядка также изменяются. Большой круг представляет собой замкнутую линию, поэтому из трех точек на этом круге каждая лежит «между» двумя другими. Что-либо касающееся порядка можно высказать только о *четырех* точках; они образуют две пары, разделяющие одна другую.

Теория конгруэнтности остается такой же, как в евклидовой и неевклидовой геометрии.

Поверхность шара представляет собой *замкнутую*, *конечную*, но вместе с тем *неограниченную* поверхность. Этими глобальными свойствами она радикально отличается от евклидовой и неевклидовой плоскостей, которые обе бесконечны [1]).

Гауссова теория поверхностей решает также следующую проблему: имеются ли в трехмерном евклидовом пространстве наряду с плоскостями также другие двумерные поверхности, внутренняя геометрия которых евклидова?

Такие поверхности действительно существуют, причем даже в бесконечном числе. Они называются *развертывающимися*, так как их можно развернуть в плоскость, не разрывая и не растягивая [2]). Конические и цилиндрические поверхности, а также поверхности, образуемые касательной к пространственной кривой, когда эта касательная скользит вдоль кривой, являются развертывающимися поверхностями. Для этих поверхностей гауссова кривизна равна нулю. Евклидова природа их внутренней геометрии следует также из того,

[1]) Согласно общей теории относительности Эйнштейна, наше мировое пространство, подобно поверхности шара, конечно и замкнуто (см. стр. 224).

[2]) Точнее, требуется, чтобы на плоскость можно было развернуть, не разрывая и не растягивая, достаточно малый кусок поверхности. — *Прим. ред.*

что путем изгибания они могут быть изоморфно отображены на евклидову плоскость. При этом геодезические линии переходят в прямые на плоскости, а конгруэнтным фигурам на поверхности («отрезкам», «углам», «треугольникам» и т. д.) соответствуют в плоскости конгруэнтные евклидовы образы.

Наконец, возникает вопрос: существуют ли в пространстве поверхности, геометрия которых неевклидова в смысле Бойяи и Лобачевского?

Ответ на этот вопрос дает общая теорема Гаусса, упомянутая на стр. 89. В неевклидовом треугольнике сумма углов меньше 180°. Следовательно, угловое отклонение треугольника *отрицательно*; согласно теореме Гаусса, оно должно быть пропорционально полной кривизне треугольника. С другой стороны, угловое отклонение треугольника, согласно теореме, приведенной на стр. 89, равно площади треугольника (положительной), умноженной на отрицательную постоянную. Но это означает (см. сноску на стр. 90), что поверхность в каждой своей точке имеет *постоянную отрицательную кривизну*.

Обратно, на к а ж д о й такой пространственной поверхности имеют место правила геометрии Бойяи и Лобачевского. Для существ, которые жили бы на таких поверхностях, неевклидова геометрия была бы «естественной».

Рассмотрение свойств таких пространственных поверхностей дает о природе неевклидовой геометрии еще более наглядное представление, чем модель Пуанкаре. В пространстве существует бесконечное множество поверхностей с постоянной отрицательной кривизной. Особенно простым примером поверхности такого рода является так называемая *псевдосфера*. Эта поверхность получается из кривой, называемой *трактрисой*, путем ее вращения вокруг оси x (см. рис. 19). Трактриса обладает следующим свойством: касательная к ней в любой ее точке пересекает ось x на постоянном расстоянии a от точки касания.

Подведем итог. На двумерных пространственных поверхностях, обладающих постоянной кривизной, имеет место элементарная евклидова геометрия, если кривизна равна нулю; элементарная неевклидова геометрия, если кривизна имеет постоянное отрицательное значение, и элементарная сферическая геометрия, если кривизна имеет постоянное положительное значение.

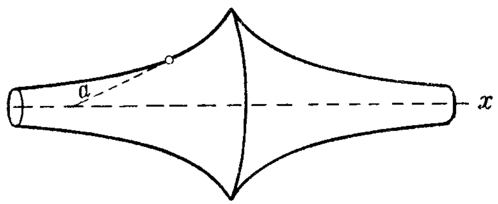


Рис. 19.

Уже один этот изящный результат показывает, насколько теория поверхностей, развитая Гауссом, расширила и обогатила наши знания о геометрической природе мира.

§ 12. Четырехмерная геометрия

Окружающее нас геометрически-физическое пространство трехмерно. Это свойство пространства и связанные с ним представления кажутся нам очевидным фактом. Некоторые практики не видят оснований искать в этом вопросе какую-либо особую проблему. Однако математики и философы уже в прошлом столетии занялись этим вопросом. В результате выяснилось, что элементарно-геометрическая структура ни в коем случае не связана с допущением, что пространство имеет именно три измерения. Аналитическая геометрия самым естественным образом открывает доступ к четырехмерной и многомерным евклидовым системам.

Такие многомерные геометрии рассматривались сначала только как теоретические построения, не имеющие с точки зрения эмпирической трактовки почти никакого значения. Однако на рубеже XIX и XX столетий выяснилось, что этим системам суждено играть в естествознании важную роль. Теория относительности рассматривает физическое событие — движение и покой тела — как геометрическое явление в четырехмерном пространстве с тремя пространственными измерениями

и четвертым временным измерением. Это представление является основой теории относительности Эйнштейна, и то обстоятельство, что математика к тому времени уже заложила глубокий фундамент теории четырехмерного пространства, было существенным условием для возникновения современной физики. Создание теории относительности является одним из замечательнейших примеров поразительного совпадения между идеальным миром, построенным человеческим мышлением, и эмпирическим миром. На этом основана возможность рационального восприятия действительности. Об этом единстве думали древние, когда говорили о «предначертанной гармонии» мира. Эту же мысль выражают слова Галилея: «Книга природы написана математическими знаками».

Прежде чем дать представление о геометрии четырехмерного пространства, целесообразно напомнить о некоторых геометрических свойствах трехмерного пространства и его частей с меньшим числом измерений, т. е. двумерных и одномерных геометрических образов.

Мы видели (стр. 83), что положение точки P в трехмерном пространстве определяется тремя числами: координатами x, y, z относительно заданной системы координат. В двумерном мире для определения положения точки достаточно двух координат. Для того чтобы естественным образом перейти от трех измерений к четырем, целесообразно, с одной стороны, установить, какие признаки *трехмерной* и *двумерной* геометрий являются общими, а с другой стороны, выяснить, чем эти геометрии отличаются одна от другой. Поэтому попытаемся проникнуть в мир представлений жителей воображаемого двумерного мира. Эти «поверхностные существа» привязаны к своему двумерному пространственному миру; представление о третьем измерении у них отсутствует. Им это измерение будет казаться столь же загадочным, как четвертое измерение для нас, живущих в трех измерениях.

Пусть «поверхностные существа» для определения положения точки P в своем мире (будем представлять этот мир в виде плоскости) пользуются прямоугольной системой координат K (рис. 20). Координаты точки P

пусть будут x_1 и x_2. Расстояние r от начала координат до точки P определяется теоремой Пифагора:

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \tag{1}$$

а угол α между отрезком OP и осью x_1 — формулами

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{r}, \qquad \sin\alpha = \frac{x_2}{r}.$$

Для второй точки P' аналогичным образом получаем

$$r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2$$

и

$$\cos\alpha' = \frac{x_1'}{r'}, \qquad \sin\alpha' = \frac{x_2'}{r'}.$$

Угол $\omega = \alpha' - \alpha$, заключенный между лучами OP и OP', вычисляется по формуле элементарной тригонометрии

$$\cos\omega = \cos\alpha' \cos\alpha + \sin\alpha' \sin\alpha = \frac{x_1 x_1' + x_2 x_2'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}. \tag{2}$$

На двух формулах (1) и (2) можно построить всю евклидову планиметрию.

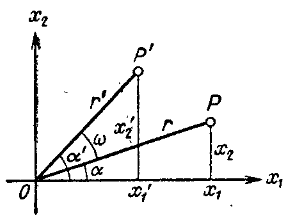


Рис. 20.

Однако в какой-нибудь день может случиться, что геометр воображаемого двумерного мира откроет *третье* измерение, хотя это новое измерение будет казаться жителям двумерного мира столь же загадочным, как четвертое измерение — жителям трехмерного пространства. Но каким образом геометр двумерного мира мог бы открыть это загадочное измерение? Безусловно, не путем геометрического наблюдения, так как геометрические восприятия и представления поверхностных существ неразрывно связаны с их двумерным миром. Однако геометр двумерного мира мог бы рассуждать следующим образом.

«Наши наглядно-геометрические наблюдения не могут навести на след третьего измерения. Но, возможно, это удастся, если отказаться от естественных геометрических представлений и вместо этого обратиться к тому отображению геометрических понятий, которое содержится в аналитической геометрии. Правда, этому аналитическому толкованию не достает геометрической наглядности, тем не менее оно, являясь точным отображением нашего конкретного геометрического мира, одинаково с последним по структуре или изоморфно с ним».

«Что показывает эта геометрическая картина? Прежде всего, что положение точки в нашем двумерном пространстве определяется *двумя* координатами. Следовательно, если трехмерный мир существует, то в аналитической геометрии, соответствующей этому миру, положение точки должно определяться *тремя* координатами x_1, x_2, x_3, из которых две первые являются нашими обычными координатами, а третья представляет собой координату в новом, третьем измерении».

Пока все обстоит просто. Однако как обнаружить геометрические правила, действующие в наглядно непредставляемой трехмерной евклидовой геометрии? Ведь от того, что теперь положение точки определяется тремя числами x_1, x_2, x_3, еще ничего неизвестно о структурных правилах этой геометрической системы. На это геометр двумерного мира ответит:

«Конечно, наша геометрическая наглядность не может помочь обнаружить такие правила. Однако задача станет яснее, если мы попытаемся по возможности просто, при помощи понятной аналогии, обобщить двумерную аналитическую геометрию».

Такая аналогия очевидна. Законы двумерной аналитической геометрии могут быть подытожены двумя формулами (1) и (2), определяющими расстояние между двумя точками и угол между двумя прямыми. Для того чтобы перейти к трехмерной геометрии, достаточно сделать к этим формулам небольшое дополнение, обусловленное новым измерением и соответствующей ему третьей координатой x_3. Из структуры формул (1) и (2) сразу видно, что единственным естественным обобщением двумерной аналитической геометрии на трехмерную будет следующее:

Расстояние r между началом O системы координат и произвольной точкой $P(x_1, x_2, x_3)$ должно вычисляться, по аналогии с теоремой Пифагора, как корень квадратный из суммы квадратов координат, следовательно,

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \qquad (1')$$

Таким же способом обобщается и формула для угла ω между прямыми OP и OP' $[P' = P(x_1', x_2', x_3')]$:

$$\cos\omega = \frac{x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}}. \qquad (2')$$

Как только эти формулы установлены, вся трехмерная аналитическая геометрия в принципе построена. В самом деле, путем естественных заключений по аналогии можно построить полную аналитическую систему, используя для этого основные «метрические величины» (1′) и (2′) в точности так же, как это делается в двумерной геометрии при помощи формул (1) и (2).

Интуиция геометров из двумерного мира не обманула бы их, если бы они указанным способом создали трехмерную евклидову геометрию. Правила, которые они составили бы, были бы действительно точно такими же, как известные нам из нашей трехмерной геометрии [1]). Следовательно, указанным способом воображае-

[1]) С помощью рис. 16 (стр 83) мы может вычислить расстояние $r = OP$ следующим образом. Пусть проекцией точки P на плоскость xy будет точка $\bar{P}$. Согласно теореме Пифагора, имеем

$$(O\bar{P})^2 = x^2 + y^2.$$

Далее, из прямоугольного треугольника $O\bar{P}P$ получаем

$$(OP)^2 = r^2 = (O\bar{P})^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Но этот результат совпадает с формулой (1′), выведенной геометром двумерного мира из формулы (1) путем заключений по аналогии!

мые поверхностные существа могли бы построить трехмерную евклидову геометрию, причем с такой же точностью, как это сделал Евклид. Они могли бы говорить о геометрических соотношениях трехмерной пространственной геометрии настолько точно, что мы, слушая их, не подозревали бы, что у них полностью отсутствует возможность непосредственного наглядно-геометрического представления третьего измерения.

Неспециалисты по математике из двумерного мира, слушая такие разговоры своих геометров о третьем измерении, безусловно стали бы спрашивать их, нельзя ли пояснить эти соотношения наглядно, чтобы таким путем дать возможность *видеть* трехмерный мир непосредственно. На это геометры двумерного мира ответили бы следующим образом:

«Мы не можем связать трехмерный мир ни с каким непосредственным наглядно-геометрическим построением. Мы вынуждены ограничиться теми представлениями, которые связаны с *аналитической* геометрией, а эти представления качественно отличаются от знакомых нам геометрических образов. Если же, несмотря на это, мы захотим получить наглядное геометрическое представление о третьем измерении, то у нас не останется ничего другого, как судить о явлениях трехмерного мира по их *двумерным проекциям*. Для этой цели мы должны проектировать эти явления на наш двумерный мир».

В случае если к геометрам двумерного мира было бы предъявлено требование продемонстрировать такие проекции, то они, возможно, выбрали бы для этой цели *правильные многогранники*, т. е. правильные тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр (рис. 21).

Аналитическая геометрия позволяет легко построить двумерные проекции этих многогранников. Полученные проекции изображены на рис. 21. Мы — трехмерные живые существа — легко воспринимаем эти фигуры как пространственные тела. В нашем представлении мы дополняем эти изображения в третьем измерении, направленным в глубину рисунка, и четко видим симметричное строение многогранников. Для двумерных существ эти изображения менее понятны. Для них отрезки прямых линий на изображениях не дают непосредственного впечатления о симметричном строении правильных многогранников. Все же некоторое представление об этих пространственных образах двумерные существа получат.

Предыдущие мысленные эксперименты мы выполнили с определенным намерением, которое, безусловно, уже стало понятным читателю. Перейдем теперь от

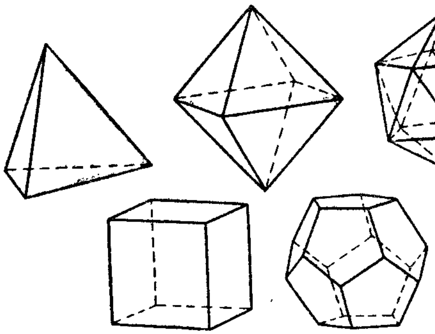


Рис. 21.

воображаемого двумерного мира к нашему трехмерному пространству. Приведенные выше предварительные замечания сразу показывают, как следует предпринять переход от трех измерений к четырем.

И действительно, наши математики при построении четырехмерного пространства поступили в точности так же, как геометры воображаемого двумерного мира при построении трехмерного. Четырехмерная евклидова геометрия была развита на основе аналогий, смысл которых ясен из сравнения формул (1) и (2) с формулами (1′) и (2′). Для нашего наглядно-геометрического представления число измерений, равное трем, не может быть превзойдено. Однако в аналитической геометрии, в этом арифметическом отображении естественного геометрического мира, переход от трех к четырем измерениям совершается так же легко и естественно, как переход от двух к трем измерениям.

В самом деле, по образу действия геометров двумерного мира мы можем рассуждать следующим образом.

В четырехмерном мире положение точки P в прямоугольной системе координат должно определяться *четырьмя* координатами x_1, x_2, x_3, x_4. Расстояние r между началом координат $O(x_1=x_2=x_3=x_4=0)$ и точкой $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ и угол ω между отрезками OP и OP' $[P'=P'(x_1', x_2', x_3', x_4')]$ вычисляются, по аналогии с формулами (1), (2); (1′), (2′), по формулам

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \qquad (1'')$$

$$\cos\omega = \frac{x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' + x_4x_4'}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}\sqrt{x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2+x_4'^2}}. \qquad (2'')$$

Подобно тому как на формулах (1′) и (2′) можно построить всю евклидову трехмерную геометрию, так и на формулах (1″) и (2″) можно построить всю евклидову четырехмерную геометрию. Не требует пояснений, как аналогичным путем можно перейти к еще большему числу измерений и построить пяти-, шести- и еще более многомерные пространства.

Вычисления, необходимые для построения многомерных пространств, не требуют особо больших математических знаний. Для этого достаточно тех сведений, которые студент-математик получает на первом году обучения в высшей школе.

Читатель сейчас, возможно, заинтересуется, каков же вид четырехмерных геометрических объектов. Хотя мы не можем наглядно себе представить эти объекты, тем не менее они полностью могут быть выяснены посредством вычислений.

Из всего многообразия четырехмерных геометрических образов выберем опять — на этот раз четырехмерные — правильные тела. Эти тела ограничены не двумерными плоскостями, а трехмерными телами. Такими граничными телами являются уже знакомые нам правильные тетраэдр, октаэдр, икосаэдр, куб и додекаэдр. Они ограничивают некоторую часть таинственного четырехмерного пространства.

В четырехмерном евклидовом пространстве имеется точно *шесть* правильных тел, а именно следующие:

Прежде всего имеется три тела, ограниченные правильными тетраэдрами. Во-первых, правильное тело с пятью граничными тетраэдрами; число вершин этого тела также равно пяти. Во-вторых, имеется тело, ограниченное 16 тетраэдрами и имеющее 8 вершин. Третье тело более сложное: оно ограничено 600 тетраэдрами и имеет 120 вершин.

Далее, существует одно четырехмерное тело, ограниченное 8 трехмерными кубами и имеющее 16 вершин. Это тело называется четырехмерным кубом.

Пятое четырехмерное правильное тело ограничено октаэдрами, число которых составляет 24; число вершин также равно 24.

Последнее, шестое правильное четырехмерное тело ограничено 120 правильными додекаэдрами и имеет 600 вершин.

Если задать вопрос, какие наглядные представления можно связать с этими телами, то ответ будет таким же, как у геометра из двумерного мира. Либо надо довольствоваться тем, что четырехмерное пространство аналитически исследовано с такой же полнотой, как и трехмерное, либо — если желательно как-то сблизить свойства четырехмерного пространства с обычными пространственными представлениями — прибегнуть к указанному выше методу проекций. Посредством центральной или параллельной проекции можно отобразить четырехмерное тело на трехмерное пространство. Полученные таким способом трехмерные изображения будут трехмерными телами, поддающимися наглядному восприятию.

Опишем несколько частных случаев таких проекций четырехмерных образов на трехмерное пространство.

Рассмотрим упомянутый выше четырехмерный куб. Можно наглядно построить этот куб следующим образом. Начнем с одномерного горизонтального отрезка, который примем за единицу длины. Переместим этот отрезок в сторону, в перпендикулярном к нему направлении, на единицу длины. Получится квадрат. Этот квадрат переместим в вертикальном направлении опять

на единицу длины. Получится куб, ограниченный первоначальным и приподнятым квадратами и, кроме того, четырьмя боковыми квадратами. Наконец, переместим трехмерный куб на единицу длины в направлении, перпендикулярном к его пространству, т. е. в направлении четвертого измерения. В результате получится тело, «нижним» базисом которого будет трехмерный куб, а «верхним» базисом — такой же куб, но в сдвинутом положении. Кроме того, в качестве ограничивающих тел будут еще шесть других трехмерных кубов, образовавшихся из шести боковых квадратов трехмерного куба при его параллельном переносе в направлении четвертого измерения.

Таким образом, мы получили четырехмерный куб, ограниченный 8 обычными кубами и имеющий 16 вершин, из которых 8 принадлежат «нижнему» базисному кубу, а другие 8 — «верхнему» базисному кубу.

Можно получить отчетливую картину структуры четырехмерного куба, если рассмотреть его проекции на трехмерное пространство. На рис. 22 показаны перспективные изображения трехмерного куба (слева) и четырехмерного куба (справа). Эти изображения представляют собой центральные проекции трехмерного куба на двумерную плоскость и четырехмерного куба на трехмерное пространство, причем в том и другом случае центр проекций расположен вне куба на небольшом от него расстоянии. Поэтому в проекции трехмерного куба изображение бокового квадрата, обращенного к наблюдателю, получилось больше, чем изображения остальных квадратов. Так как мы обладаем способностью наглядного восприятия третьего измерения, то для нас не представляет никаких трудностей видеть проекцию трехмерного куба *пространственно*: мы как бы смотрим «внутрь» куба через передний, большего размера квадрат.

Аналогичным образом построена правая проекция на рис. 22, т. е. трехмерное перспективное изображение четырехмерного куба. Трехмерный куб, расположенный наиболее близко к центру перспективы, т. е. к глазу наблюдателя, получился самым большим. Внутри него расположены изображения остальных семи граничных трехмерных кубов. Небольшой трехмерный куб, расположенный в середине проекции, является изображением того граничного трехмерного куба, который с точки зрения наблюдателя расположен «позади» четырехмерного куба. Шесть перспективно искаженных изображений трехмерных кубов соединяют между собой наиболее «близкий» и наиболее «удаленный» трехмерные кубы.

Форма проекции четырехмерного тела на трехмерное пространство зависит от вида применяемой проекции, а также от того, с какого расстояния и в каком

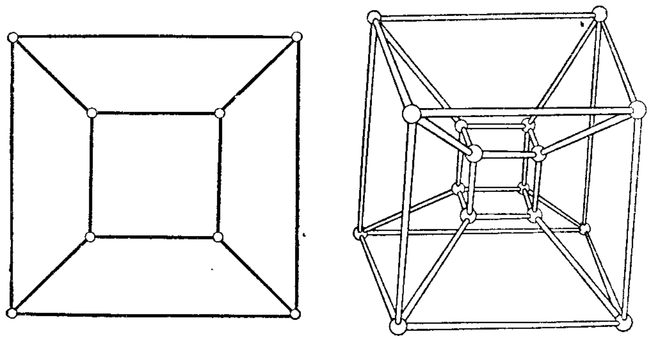


Рис. 22.

направлении производится проектирование. Покажем, какую форму имеет проекция четырехмерного куба на трехмерное пространство при применении параллельной проекции. Предположим, что четырехмерный куб освещается солнцем четырехмерного пространства и поэтому бросает тень на наше трехмерное пространство. На рис. 23 справа изображена получающаяся проекция для того случая, когда одна из диагоналей четырехмерного куба параллельна солнечным лучам и перпендикулярна к нашему трехмерному пространству.

Как выглядит эта тень? Будет легче понять ее фигуру, если сначала рассмотреть тень обыкновенного трехмерного куба на плоскость, причем принять, что этот куб находится в таком же положении относительно очень удаленного центра (Солнце), как ранее четырехмерный куб. Такая плоская проекция обыкновенного трехмерного куба изображена на рис. 23 слева. На первый взгляд полученное изображение представляет собой правильный шестиугольник, разделенный двумя способами на три ромба. Однако наш глаз, привычный к восприятию третьего измерения (в данном случае направленного в глубину рисунка), без труда воспринимает это изображение как пространственное в виде трехмерного куба, ограниченного шестью квадратами.

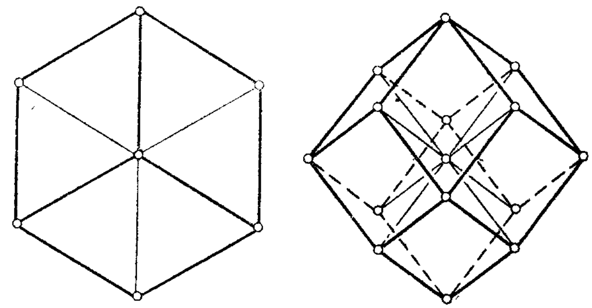


Рис. 23.

Из 8 вершин куба две совпадают в центральной точке проекции. Отрезок, соединяющий эти диаметрально противоположные вершины, перпендикулярен к плоскости рисунка.

Аналогичным образом следует понимать и правую часть рис. 23, представляющую собой параллельную проекцию четырехмерного куба. Эта трехмерная проекция ограничена 12 конгруэнтными ромбами, причем косинус меньшего из углов каждого ромба равен $^1/_3$. Число вершин равно 14. Эти точки являются проекциями 16 вершин четырехмерного куба. Две недостающие вершины совпадают с центральной точкой проекции (так же, как это было и на левом рисунке).

Полученная трехмерная проекция четырехмерного куба представляет собой так называемый ромбододекаэдр. Он состоит из четырех конгруэнтных косоугольных параллелепипедов. Разбиение ромбододекаэдра на параллелепипеды можно осуществить двумя различными способами; для этого достаточно из восьми ребер, выходящих из центральной точки проекции, выбрать ту или иную подходящую четверку (аналогично тому как это можно было сделать при разбиении плоской проекции трехмерного куба, т. е. правильного шестиугольника, на три ромба). Эти косоугольные параллелепипеды представляют собой проекции трехмерных кубов, ограничивающих четырехмерный куб, и заполняют ромбододекаэдр дважды. Их число равно восьми.

Не лишне упомянуть, что природа производит такие ромбододекаэдры в виде кристаллов минерала граната. Следовательно, кристаллы граната можно рассматривать как тень четырехмерного куба на наш трехмерный мир.

Мы уже подчеркнули, что изучение четвертого измерения нельзя рассматривать только как математический курьез. Четырехмерное пространство получило неожиданное и притом фундаментальное для современного физического исследования значение в теории относительности.

Другие многомерные геометрии, причем с еще большим числом измерений, также нашли в нашем столетии широкое применение. Это относится даже к введенным Гильбертом пространствам с бесконечным числом измерений. Эти пространства, имеющие чрезвычайно большое значение для многих математических проблем, играют важную роль также в современной теоретической физике. В частности, гильбертово пространство с бесконечным числом измерений нашло блестящее применение в квантовой механике.

§ 13. Конечные пространства

Согласно евклидовой теории пространства трехмерное мировое пространство безгранично и его протяжение бесконечно. Первое из указанных свойств имеет топологический характер. Оно выражает собой, что пространство ни в каком направлении не имеет границ. Второе свойство имеет метрический характер. Оно показывает, что в любом направлении пространства можно перемещаться *сколь угодно далеко.*

Оба эти свойства отнюдь не требуют, чтобы пространство соответствовало нашим привычным, естественным представлениям. В § 7 гл. I с помощью рис. 5 и 6 мы изобразили двумерный мир, изоморфный с евклидовой плоскостью и являющийся поэтому неограниченным и бесконечным. Правда, этот мир, согласно евклидовому представлению, является ограниченной и конечной частью «естественной» евклидовой плоскости, так как он заключен внутри круга K конечного радиуса. Так обстоит дело с нашей точки зрения. Однако, рассматривая этот K-мир, мы должны исходить из представлений живущих в нем воображаемых существ. Для них этот мир не конечен, так как вследствие предположения о сжатии их масштабов расстояние от фиксированной точки O до подвижной точки P будет неограниченно расти по мере приближения точки P к периферии круга K. Следовательно, эта окружность представляет собой в мире K «бесконечно удаленную» линию, которую миниатюрные существа никогда не могут достигнуть. Таким образом, с их точки зрения неограниченный мир K бесконечно велик.

Этим свойством обладает также неевклидово пространство Бойяи и Лобачевского. Все то, что было сказано об евклидовом мире K, действительно также для неевклидовой плоскости, представляемой моделью Пуанкаре. Аналогичным образом обстоит дело и с кольцевым пространством, рассмотренным в § 5 гл. I, опять, конечно, с точки зрения жителей этого мира и с учетом замечаний, сделанных на стр. 38.

Отсутствие каких бы то ни было *границ* у пространства является фундаментальным предположением для понятия любого пространства. Возражение, что при продвижении в пространстве мы можем натолкнуться на «стену», через которую дальше нельзя проникнуть, должно быть отклонено. Следовательно, мы требуем, чтобы каждая точка пространства имела *полную пространственную окрестность*[1]). У точки стены или границы пространства такой окрестности не может быть.

[1]) В математике это свойство выражается словами: пространство *открыто.*

С другой стороны, «неограниченность» пространства не исключает возможности того, что оно может быть *конечным.* Такие конечные, но неограниченные одно- и двумерные пространства нам знакомы из нашего ближайшего эмпирического окружения. Примером пространства первого вида может служить полная окружность, примером пространства второго вида — поверхность земного шара. В самом деле, эта поверхность не имеет никаких границ или «берегов», но протяжение ее конечное. Расстояние между двумя точками (вдоль

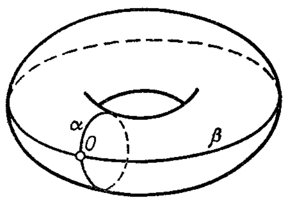


Рис. 24.

земной поверхности) самое большее равно половине длины экватора, т. е. около 20 000 *км.* Аналогичное положение имеет место и для поверхности кольца, изображенного на рис. 24. Это двумерное пространство (поверхность) также не имеет никаких границ, однако оно конечно, в чем легко убедиться, если измерить длину путей на этой поверхности при помощи масштаба окружающего трехмерного евклидова пространства, т. е. так, как это делается в гауссовой теории поверхностей.

Труднее представить себе трехмерное неограниченное, но конечное пространство. Однако, применяя аналитический способ, разъясненный в § 12 гл. I, можно построить такие трехмерные пространства. Подобно тому как поверхность трехмерного куба или шара в двух измерениях неограничена, но конечна, так и трехмерные тела, ограничивающие четырехмерный куб или шар, также неограничены, но конечны. Так как мы не обладаем способностью непосредственного восприятия четвертого измерения, то такие построения остаются довольно абстрактными. Все же существует возможность

дать более наглядное пояснение, оставаясь при этом в рамках обычных трехмерных геометрических построений.

Для того чтобы подготовиться к этому пояснению, вернемся еще раз к упоминавшейся выше кольцевой поверхности, которую можно рассматривать как двумерное пространство. Вообразим, что на этой поверхности живут существа, не обладающие способностью представления о третьем измерении. Эти существа, совершив «кругосветное путешествие» по замкнутым траекториям (меридианам) α и β, придут к выводу, что

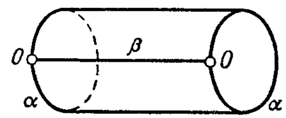


Рис. 25.

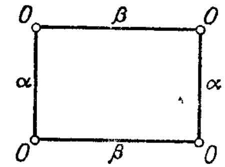


Рис. 26.

их двумерное пространство «глобально» замкнуто, т. е. их мир неограничен, но конечен.

Топологическую структуру такой кольцевой поверхности мы можем объяснить себе следующим образом. Рассечем поверхность вдоль меридиана α и разогнем кольцо так, чтобы оба края сечения разошлись. Тогда из нашей кольцевой поверхности мы получим цилиндрическую поверхность, показанную на рис. 25.

Теперь меридиан β есть не что иное как образующая боковой поверхности цилиндра. Если мы сделаем еще один разрез, на этот раз — боковой поверхности цилиндра вдоль β, то сумеем развернуть ее в плоскость. Развертка будет иметь вид прямоугольника, ограниченного двумя сторонами α и двумя сторонами β (рис. 26). Если мы вновь соединим оба края α и оба края β, то прямоугольник примет первоначальную кольцеобразную форму.

Такое сшивание развертки кольцевой поверхности можно представить себе также иначе, а именно в виде следующего мысленного эксперимента.

Пусть на рис. 27 прямоугольник $A_0B_0B_1A_1$ означает пол комнаты. Я иду по комнате, начиная от точки P_0 стены A_0A_1, до тех пор, пока не достигаю противоположной стены в точке P_1. Предположим, что из точки P_1 видна рядом расположенная комната $B_0C_0C_1B_1$, которая во всех отношениях — по величине, по форме, по меблировке — совершенно одинакова с первой комнатой. Такое полное совпадение меня сначала поразит, но затем у меня возникнет мысль: может быть,

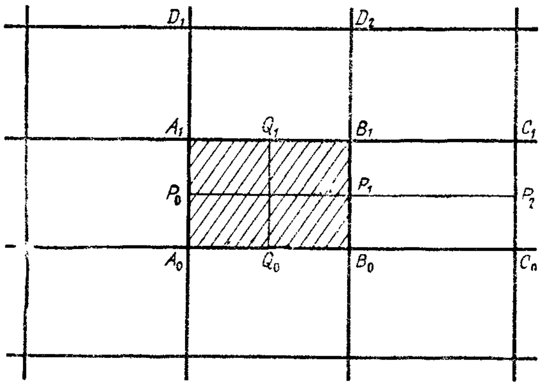


Рис. 27.

я пришел не в новую комнату, а вернулся к первой комнате «с другой стороны», «сзади». Следовательно, я сделал полный оборот по замкнутой поверхности, на которой стена B_0B_1 в действительности совпадает со стеной A_0A_1. Такое мое представление укрепится, если с аналогичным обстоятельством я встречусь при переходе через комнату в поперечном направлении. Я выхожу из точки Q_0 и, достигнув противоположной стены A_1B_1 в точке Q_1, опять вижу перед собой тождественную комнату $A_1B_1D_2D_1$. Я опять прихожу к выводу, что обошел «вокруг» прямоугольника, и поэтому отождествляю сторону A_0B_0 со стороной A_1B_1.

Сделав такое наблюдение, я прихожу к выводу, что «в действительности» живу на кольцевой, не ограниченной, но конечной поверхности пола, имеющей в качестве «меридианов» линии $\alpha=A_0A_1=B_0B_1$ и $\beta=A_0B_0=A_1B_1$.

Такой мысленный эксперимент можно провести аналогичным образом и так же наглядно в *трех* измерениях. Следовательно, на этот раз мы не будем ограничиваться двумерным полом комнаты, а рассмотрим все три измерения комнаты R_0 с восемью вершинами A_1, A_0, B_0, B_1, C_1, C_0, D_0, D_1 (рис. 28).

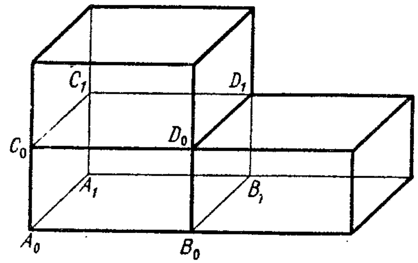


Рис. 28.

Я передвигаюсь по комнате R_0 от стены $A_0A_1C_1C_0$ до противоположной стены $B_0B_1D_1D_0$, к которой пусть примыкает вторая комната R_1, полностью совпадающая с первой. Я отождествляю комнаты R_1 и R_0. Если я повторю этот опыт, но на этот раз пересеку комнату R_0 от стены $A_0B_0D_0C_0$ к стене $A_1B_1D_1C_1$, то отождествлю комнату R_2, лежащую за стеной $A_1B_1D_1C_1$, с комнатой R_0. Наконец, если я поднимусь из комнаты R_0 через ее потолок в расположенную выше комнату R_3, во всех отношениях совпадающую с R_0, то я отождествлю комнаты R_3 и R_0.

Это отождествление, «соединяющее» противолежащие стены комнаты R_0 попарно одна с другой и соответственно пол с потолком, превращает комнату R_0 в «глобально» замкнутое, т. е. неограниченное, но конечное трехмерное пространство.

ГЛАВА II

Время

§ 1. Физические события. Их место и время

Рассмотрим какое-нибудь простое физическое явление, например движение брошенного камня. Прежде всего перед нами возникает геометрическая задача: какой вид имеет траектория камня, т. е. геометрическое место точек, через которые камень проходит при своем движении?

Траекторией будет парабола. Она может быть определена либо эмпирически — посредством прямого наблюдения, либо теоретически. В последнем случае сначала определяется направление и величина начальной скорости, а затем, на основании законов механики и геометрии, выводится уравнение траектории.

Однако движение брошенного камня или его простое падение интересно также в другом отношении. Уже Галилео Галилей (1564—1642), когда он исследовал свойства движений, не ограничивался определением только пространственной картины этого явления. Он поставил перед собой также задачу найти законы, устанавливающие зависимость движения от времени, т. е. законы, позволяющие определить те точки пространства, которые достигаются камнем в последовательные моменты времени.

Таким образом, физика уже с самого своего зарождения дополняет геометрию. Она связывает отдельные явления с *местом* и *временем*, т. е. с теми двумя категориями, которые Кант в своей «Критике чистого разума» считал главными категориями мысленной картины мира.

Рассмотрим с этой точки зрения подробнее какое-нибудь физическое явление, воспринимаемое нами «здесь и теперь».

В пространственном отношении такое явление происходит в определенном месте (точке) P нашего видимого пространства.

В первой главе мы выяснили, что эту ближайшую пространственную окрестность следует понимать сначала как часть более широкого пространства, а затем как часть «глобального» мирового пространства.

Далее, там же мы показали, что такое «пространство» можно толковать различными способами. Мы исследовали проблему пространства как с эмпирической, так и с логической точки зрения. Логический геометрический анализ постепенно освободил понятие пространства от его первоначального вида и от соответствующих «естественных» представлений. Мы видели, что в математической теории пространства последнее рассматривается по Гильберту (стр. 61) как система некоторых объектов и отношений («точек» и т. д.), причем логическая структура этой системы определяется некоторым числом основных положений (аксиом). Такая абстрактная система (например, учение Евклида) допускает различные толкования. При этих толкованиях геометрическая структура представляется различными наглядными моделями в виде «изображений», которые все изоморфны между собой. В конечном счете начальная стадия исследования *эмпирического*, или *физического*, пространства представляет собой не что иное, как возможность особого геометрического толкования среди множества большого числа других изоморфных «изображений».

Именно с этим *эмпирическим пространством* имеет дело физическое исследование при пространственном описании явлений. Однако при переходе от геометрии к физике появляются как совершенно новые обстоятельства *время* и изменяемость явлений во времени. В геометрии эти обстоятельства были категорически абстрагированы. В самом деле, мы определили эмпирическую геометрию как учение о пространственных явлениях, не зависящих от времени, т. е. инвариантных относительно времени. Введение времени, а также понятия движения и покоя вносит в теорию пространства новые аспекты, которые в первой главе книги не были затронуты.

Проблему пространства-времени и примыкающие к ней вопросы *кинематики* (учение о движении тел) мы рассмотрим в третьей главе книги, настоящую же главу посвятим подготовительному анализу понятия *времени*.

§ 2. Абсолютное время

Представим себе следующую ситуацию. Я еду в поезде. После прибытия поезда на станцию A_1 в вагон входит пассажир. На следующей станции A_2 он встает и покидает поезд. Эти два события: вход пассажира в вагон (событие E_1) и его выход из вагона (событие E_2), рассматриваемые в системе отсчета K, связанной с поездом, происходят *в одном и том же месте*. Однако относительно пространственной системы отсчета $\overline{K}$, связанной с железнодорожным полотном, эти события указанным свойством не обладают: они происходят в двух различных точках системы $\overline{K}$: первое — в A_1, второе — в A_2.

Следовательно, *пространственное* совпадение двух событий есть *относительное* понятие, зависящее от пространственной окрестности (пространственной системы отсчета), из которой производится наблюдение явлений.

События E_1 и E_2 происходят также в определенные *моменты времени*, а именно событие E_2 наступает позже события E_1. Так происходит в системе отсчета K, связанной с поездом. Однако, согласно нашему «естественному» восприятию времени, событие E_2 наступает позже события E_1 (и наоборот, E_1 раньше E_2) также в системе отсчета $\overline{K}$, связанной с окружающей местностью и, в частности, с покоящимся в этой местности железнодорожным полотном. В этом смысле понятия «позже» и «раньше» являются *абсолютными* понятиями, не зависящими от систем отсчета (K, $\overline{K}$, ...), в которых производится наблюдение времени.

Аналогичным образом обстоит дело и с понятием «одновременности». Два события, происходящие одновременно в поезде, одновременны также в системе отсчета, связанной с железнодорожным полотном, и притом независимо от того, происходят ли они в одном и том же месте или в различных местах пространственных систем K и $\overline{K}$.

Такое «естественное» понимание понятия времени было принято в классической физике. Согласно этому пониманию, последовательность событий во времени («одновременно», «раньше», «позже») рассматривается как нечто непосредственно, априори данное. В этом состоит смысл выражения: «время абсолютно». Физическая концепция универсального абсолютного времени возникла в результате стремления постулировать применимость нашего «естественного восприятия времени» к тому физическому единству, которое представляет собой физическую глобальную картину мира». «Событие» мы воспринимаем как последовательность пространственных «точек» и сопоставленную ей последовательность временных «моментов». Течение времени определяет понятие «теперь», т. е. то понятие, которое разделяет наши прошлые переживания от будущих, подобно тому как некоторая точка O прямой делит последнюю на два различных множества — на «левую» и на «правую» полупрямые. Следовательно, «время», в соответствии с нашим восприятием, *одномерно*, поэтому наши переживания во времени могут быть изображены посредством *линии* (например, прямой) и лежащих на этой линии точек.

Однако течение времени имеет одно важное дополнительное свойство. А именно на геометрической прямой понятия «слева» и «справа» не имеют абсолютного значения; их можно переменить местами, и такая перемена не будет влиять на топологические свойства прямой (в данном случае — на свойства порядка). Иначе обстоит дело со временем. Моменты времени располагаются в естественном порядке, от прошлого к будущему. Следовательно, пара точек, образуемая двумя моментами времени («отрезок времени»), имеет характер в е к т о р а, его направление определяется начальной и конечной точками (более ранним и более поздним моментами времени). Таким образом, событие представляет собой направленный, необратимый процесс.

Классическая физика без какого бы то ни было критического анализа обобщает структуру воспринимаемого нами характера течения времени на все целое, образуемое физическими событиями. Отдельное такое событие E_0, наблюдаемое, например, в каком-нибудь месте этой комнаты, делит (в смысле последовательности во времени) все другие физические события, где бы они ни происходили, на три класса: на события E, одновременные с E_0, на события, более ранние, чем E_0, и на события, более поздние, чем E_0.

Это обобщение, расширяющее субъективно воспринимаемое время в универсальное представление о времени, напоминает соответствующий процесс, ведущий к образованию понятия пространства. В этом последнем процессе наши эмпирические восприятия геометрического характера приводят от понятия ближайшей пространственной окрестности к глобальному евклидову понятию пространства. «Естественность» представления об абсолютном времени также легко объяснить, если рассматривать это представление как результат принципов, управляющих образованием общих понятий (§ 5 гл. I). Ниже мы вернемся к этому вопросу.

Критическое изучение основ геометрии привело в конце концов к отказу от евклидовой теории пространства как в отношении ее эмпирической доказуемости, так и в отношении ее логической единственности. Полную ясность в этот вопрос удалось внести только в конце прошлого столетия. На понятие пространства стали смотреть совсем по-иному, с гораздо более общей точки зрения и более абстрактно, чем это делалось раньше. В результате евклидова геометрия стала частным и предельным случаем более общих концепций пространства.

Несколько позднее аналогичный кризис пережило представление об абсолютном времени. Критика Эйнштейна показала, что понятие универсального времени

не является единственно возможным ни в эмпирическом, ни в логическом отношении. Понятие времени, подобно понятию «места», также может быть релятивизировано. Это означает, что последовательность событий E во времени может определяться только *относительно* заданной пространственно-временно́й системы, из которой события наблюдаются. Следовательно, последовательность во времени зависит от выбора систем координат, в частности, от «подвижности» или «неподвижности» одной из них относительно другой.

Только отказавшись от понятия абсолютного времени и введя «относительное время», Эйнштейн сумел построить свои специальную и общую теории относительности, внесшие переворот в понимание физической картины мира. Поэтому, прежде чем излагать эти теории, необходимо дать ясное представление об эмпирическом и логическом фундаментах физического понятия времени.

Этой задачей сейчас мы и займемся. Прежде всего мы попытаемся разъяснить общие основы нашего естественного восприятия времени в той мере, в какой это необходимо для понимания *возможности* релятивизации времени. Только затем, в главе III, мы перейдем к изложению тех особых обстоятельств, которыми руководствовался Эйнштейн, определяя место и время событий относительно различных физических пространственно-временны́х систем, движущихся одна относительно другой.

§ 3. Расположение во времени событий, происходящих в одном и том же месте

Вообразим, что собравшиеся в этой аудитории совместно наблюдают происходящие здесь события.

Я стучу рукой по столу. Это есть физическое событие, которое мы воспринимаем «здесь» и «теперь», т. е. в определенном месте пространства и в определенный момент времени. Для пространственной и временно́й локализации такого рода событий отождествим два «совпадающих» события, т. е. два события, происходящие одновременно в одном и том же месте пространства[1]). При этом мы до известной степени идеализируем конкретные ситуации, соответствующие отдельным событиям, делая это с целью точного определения положения наблюдаемого события в пространстве и времени. Возможность такого определения положения в пространстве была уже разъяснена в § 3 гл. I. Неопределенное понятие конкретной точки уточняется путем перехода к представлению идеальной точки. Аналогичным образом, понятие «теперь», которое в нашем переживании всегда связано с небольшим интервалом времени («пороговым интервалом»), освобождается от этой неопределенности путем перехода к представлению о вполне определенном моменте времени — идеальной временно́й точке («в точности теперь»). Именно в таком смысле следует понимать слова о совпадающих, тождественных событиях.

После того как понятие «события» уточнено указанным способом, можно расположить события, происходящие в одном и том же месте, в естественной временно́й последовательности, соответствующей нашим переживаниям.

Я стучу по столу, через некоторое время стучу еще раз по тому же месту стола. Эти два события одинаковы по месту, но различны по времени: первое произошло «раньше», чем второе, а второе, наоборот, «позже» первого. В таком порядке события произошли не только по моему мнению, но и по мнению всех присутствующих. Таким образом, последовательность событий во времени также контролируется «принципом возможности опытной проверки».

Отношение временно́й последовательности пространственно совпадающих событий удовлетворяет следующему очевидному правилу:

[1]) В своей критике времени Эйнштейн обратил внимание на то, что наблюдения, производимые в экспериментальной физике, в конечном счете всегда сводятся к подтверждению такого совпадения. Обычно это совпадение заключается в следующем: указатель измерительного прибора пространственно совмещается с определенной отметкой шкалы прибора.

Если из трех таких событий A, B, C событие A произошло раньше события B, а событие B — раньше C, то событие A произошло также раньше события C.

В логике и математике отношения такого рода называются *транзитивными*. Если отношение «A наступило раньше B» обозначить символом $A<B$, то транзитивность записывается следующим образом:

Если $A<B$ и $B<C$, то также $A<C$.

Отношение $A<B$ (A наступило раньше B) эквивалентно отношению «B наступило позже A», или, в символической записи, $B>A$[1]).

До сих пор мы рассматривали только естественное временно́е расположение событий, происходящих в одном и том же месте. Однако два таких события могут быть связаны одно с другим также другим отношением, а именно *отношением причинности,* т. е. одно из этих событий является «причиной», а другое — «следствием».

Рассмотрим для примера следующее явление: я бросаю какой-нибудь предмет вертикально вверх (событие A); через некоторое время он падает назад на свое первоначальное место (событие B). Следовательно, A произошло раньше B ($A<B$). С другой стороны, событие B *причинно* обусловлено событием A. Возвращение предмета на свое первоначальное место (событие B) не произошло бы, если бы ему не предшествовало бросание предмета вверх (событие A). Таким образом, событие A является «причиной», а событие B — «следствием».

Аналогичным образом, вход какого-либо лица в эту аудиторию (событие A) и его последующий выход (событие B) представляют собой события, расположенные не только во времени, но и находящиеся между собой в причинной связи. В самом деле, необходимым условием наступления события B является предшествующее

[1]) Пространственное совпадение двух событий A и B также транзитивно. Совпадение целесообразно обозначать знаком тождества или эквивалентности: $A=B$. Логическое отношение тождества транзитивно и, кроме того, «рефлексивно» ($A=A$) и «симметрично» (если $A=B$, то $B=A$). Два последних свойства не выполняются для отношения $A<B$. Отношение «A и B неодновременны» (либо $A<B$, либо $A>B$) также и нетранзитивно.

наступление события A, т. е. событие A является причиной, а событие B — следствием.

Иначе обстоит дело со следующими двумя событиями. Какое-либо лицо входит в аудиторию (событие A); позже раздается бой стенных часов (событие B). Событие A наступило раньше события B, однако событие A не обусловливает события B: бой часов раздался бы и в том случае, если бы события A не было совсем. Отношение «событие A есть причина события B» символически записывается в виде: $A \to B$ (событие A обусловливает событие B). Причинное отношение также транзитивно, т. е.

Если $A \to B$ *и* $B \to C$, *то* $A \to C$.

В самом деле, если C обусловливается событием B ($B \to C$), а B в свою очередь обусловливается событием A ($A \to B$), то событие C также является следствием события A ($A \to C$): если не произошло бы события A, то не наступило бы событие B, а потому не было бы и события C.

Если мы сравним временно́е расположение двух событий A и B, связанных отношением причинности, то увидим следующее:

I. *Если A является причиной*, а *B — следствием, то A произошло раньше B*, или, в символической записи, *если $A \to B$, то $A < B$.*

Это правило, согласно которому временно́е и «причинное» расположение событий «направлены в одну сторону», выражает фундаментальное свойство нашего естественного представления о понятиях «время» и «причинность». Будем называть его в дальнейшем п о с т у л а т о м п р и ч и н н о с т и для временно́й последовательности событий.

Из сказанного выше следует, что постулат I необратим: если $A < B$, то не всегда $A \to B$. В самом деле, даже при условии $A < B$ события A и B в причинном отношении могут быть совершенно независимыми одно от другого.

Подытожим результаты, к которым мы пришли.

1. События, происходящие в одном и том же месте, расположены во вполне определенной *временно́й* последовательности.

2. Некоторые из этих событий связаны *причинной* зависимостью.

3. Если имеет место причинное отношение $A \to B$, то заведомо имеет место направленная в ту же сторону временна́я последовательность $A < B$ событий (*постулат причинности*).

Выше мы резко разграничили переживание во времени и причинную связь между событиями. Между тем связь между этими двумя обстоятельствами существенна для возникновения нашего естественного понятия времени. Тем не менее указанное резкое различие обосновано. Как показали рассмотренные в этом параграфе простые примеры, из одной только временно́й последовательности двух событий еще нельзя заключить о «причинном отношении» между ними. Наоборот, причинная связь между событиями безусловно определяет направленную в ту же сторону временную последовательность. Такое положение вещей выражается постулатами 1—3, полное значение которых раскроется в следующем параграфе.

Утверждения, содержащиеся в постулатах 1—3, являются решающими для правильного понимания теории относительности.

§ 4. Сравнение во времени пространственно не совпадающих событий

Перейдем к рассмотрению событий, происходящих в двух точках P_1 и P_2 пространства, столь удаленных одна от другой, что происходящее в точке P_2 событие не может непосредственно наблюдаться из точки P_1. Возьмем для примера события A, происходящие в этой аудитории, находящейся в Цюрихе, и события B, наблюдаемые в аудитории, находящейся в Базеле.

События A, происходящие в Цюрихе, т. е. в одном и том же месте, естественным образом располагаются во времени. Аналогично события B могут быть расположены в «правильной» временно́й последовательности в Базеле.

Возникающая при этом ситуация пояснена на рис. 29. Левая вертикальная линия P_1 изображает «течение времени» для событий A. Точки этой прямой соответствуют взаимно однозначно событиям в Цюрихе, причем так, что возрастанию времени отвечает направление снизу вверх. Следовательно, точка, изображающая событие A, делит события, происходящие в Цюрихе, на два класса: ниже точки A расположены события, случившиеся раньше события A, т. е. уже прошедшие, а выше точки A — события, которые наступят позже события A, т. е. будущие события.

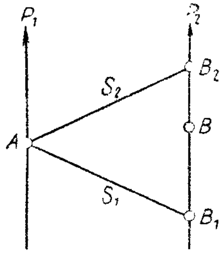


Рис. 29.

Аналогичным образом правая вертикальная прямая P_2 изображает расположение во времени событий B, происходящих в Базеле.

Напротив, не существует никакой возможности *непосредственного* сравнения между собой во времени событий A (в Цюрихе) и событий B (в Базеле). Косвенно это можно сделать при помощи сформулированного в предыдущем параграфе постулата причинности для временно́й последовательности событий. В самом деле, существование причинной связи между событиями ни в каком случае не ограничено событиями, пространственно совпадающими: независимо от того, происходят ли события E_1 и E_2 в одном и том же месте или в разных местах, одно из них может быть причиною другого.

Для более подробного разъяснения этого вопроса представим себе следующее: в P_1 (Цюрих) пришло письмо S_1 из P_2 (Базель). Первое из названных событий (поступление письма в Цюрих) назовем событием A, а последнее (отправление письма из Базеля) — событием B_1. Событие B_1 есть «причина», событие A — «следствие». В самом деле, если бы не было отправления письма, то не было бы и его поступления, следовательно, имеет место отношение $B_1 \rightarrow A$.

Для событий, происходящих в одном и том же месте, справедлив постулат причинности (стр. 122). Однако для нашего естественного восприятия времени существенно, что этот постулат справедлив для любых событий. Поэтому *расширим постулат причинности для временно́й последовательности событий и будем применять его к любым событиям*, где бы они ни происходили.

Так как событие B_1 обусловливает появление события A ($B_1 \rightarrow A$), то из расширенного постулата причинности следует, что имеет место также отношение $B_1 < A$; это означает, что мы рассматриваем B_1 как *более раннее* событие, а событие A — как *более позднее.*

Таким образом, посредством сигнала S_1, т. е. поступления письма в Цюрих, мы расположили во времени событие B_1, случившееся в Базеле, относительно события A в Цюрихе.

Расширим теперь также понятие *транзитивности* расположения событий во времени (стр. 121), распространив его на любые события, независимо от того, в каком месте они происходят. Тогда мы придем к следующему заключению.

Если событие $\bar{B}_1$ в Базеле произошло раньше события B_1, то оно произошло также раньше всех событий, наступивших в Цюрихе позже события A. В частности, само событие A также наступило позже всех тех событий $\bar{B}_1$, которые в Базеле произошли раньше события B_1. В самом деле, из отношений $\bar{B}_1 < B_1$ и $B_1 < A$ вследствие транзитивности отношения временно́го порядка вытекает, что $\bar{B}_1 < A$.

Таким образом, сигнал S_1 позволяет упорядочить во времени большое число событий, происходивших в Базеле, относительно события A, имевшего место в Цюрихе, а именно: все события в Базеле, лежащие в «прошлом» по сравнению с событием B_1, произошли раньше событий в Цюрихе, лежащих в «будущем» по сравнению с событием A. Первые из названных событий, которые мы будем обозначать по-прежнему через

$\overline{B}_1$, изображаются на линии времени P_2 (рис. 29) точками, расположенными ниже точки B_1, а последние события — точками, расположенными на линии времени P_1 выше точки A.

Однако сигнал S_1 не дает возможности расположить во времени события, наступившие в Базеле позже события B_1, относительно событий, имевших место в Цюрихе раньше события A. Для того чтобы внести ясность в этот вопрос, пошлем из Цюриха в Базель с обратной почтой ответ S_2 на сигнал S_1. Если предположить, что «сигнал» S_2 посылается в Базель сразу после поступления в Цюрих сигнала S_1, то оба события — отправление сигнала S_2 и поступление сигнала S_1 (событие A) — могут рассматриваться как совпадающие. Прибытие сигнала S_2 в Базель назовем «событием B_2».

Таким же образом, как и выше, мы придем к заключению, что событие A наступило раньше события B_2, а тем более раньше всех событий в Базеле, наступивших там позже события B_2.

Следовательно, событие A произошло *позже* всех событий $\overline{B}_1$ в Базеле, имевших место в этом городе до события B_1, и раньше всех событий $\overline{B}_2$, имевших место в Базеле после события B_2 ($\overline{B}_1 < B_1 < A < B_2 < \overline{B}_2$).

Таким образом, два сигнала S_1 и S_2 позволяют расположить во времени относительно события A в Цюрихе все события в Базеле, *за исключением событий, происходящих в интервале между событиями B_1 и B_2*. Если для пересылки почты из Базеля в Цюрих (или обратно) по железной дороге требуется один час, то длительность только что указанного интервала неопределенности в Базеле составит два часа.

Этот интервал, однако, сократится, если почта будет доставляться более быстрым транспортом, например самолетом. Самолет, для того чтобы прибыть в Цюрих одновременно с поездом, может вылететь из Базеля позже; соответственно он скорее вернется в Базель. Следовательно, отправление и возвращение письма воздушной почтой сократит прежний интервал B_1B_2 до некоторой его части. Если скорость самолета в 12 раз больше скорости поезда, то интервал неопределенности уменьшится до одной двенадцатой части своей первоначальной длительности, т. е. станет равным только десяти минутам.

Итак, чем быстрее имеющиеся в распоряжении сигналы, тем меньше становится интервал неопределенности B_1B_2 (в Базеле), соответствующий событию A (в Цюрихе). Самым быстрым из известных физических сигналов является электрический сигнал или, что то же самое, радиосигнал. Скорость его распространения такая же, как скорость света, которая равна приблизительно 300 000 километров в секунду. Такому сигналу для того, чтобы дойти из Базеля в Цюрих, требуется только 1/3000 секунды. Следовательно, в этом случае интервал неопределенности в Базеле, соответствующий событию A в Цюрихе, чрезвычайно мал.

Эти рассуждения отнюдь не являются теоретической казуистикой. Изложенный выше метод служит для практического сравнения времени в двух различных пунктах. Вообразим, что в Цюрихе в нашем распоряжении имеются часы, которые принимаются за правильно идущие «нормальные часы». Если часы в других пунктах должны быть установлены по времени в Цюрихе, то из Цюриха в определенный момент времени, например точно в 12 часов, посылается по радио сигнал времени (событие A). Приход этого сигнала времени в Базель назовем событием B_2. Следовательно, событие B_2 наступает позже события A. Тем не менее на практике принимается, что событие B_2 происходит *одновременно* с событием A; поэтому при поступлении сигнала времени в Базель (событие B_2) часы там устанавливают точно на 12 часов. Возникающая при этом ошибка меньше интервала неопределенности. Очевидно, что столь малую разницу во времени, составляющую долю одной тысячной секунды, в практических условиях можно не учитывать.

Продолжим наши принципиальные рассуждения. Вообразим на минуту, что имеются сигналы, еще более быстрые, чем радиосигналы или световые сигналы. Тогда интервал неопределенности, соответствующий событию A, сократится еще больше и притом тем больше, чем быстрее применяемый сигнал. В этом отношении можно различать два принципиально различных допущения.

1. Первое допущение: *существуют сколь угодно быстрые сигналы.*

При таком допущении интервал неопределенности B_1B_2 по мере увеличения скорости сигнала неограниченно сокращается, причем так, что одна вполне определенная *временна́я точка* остается общей для всех интервалов неопределенности. Пусть B есть то событие в Базеле, которое точно совпадает с этим предельным моментом времени. Из сказанного выше вытекает, что все события в Базеле, наступающие раньше события B, должны рассматриваться как «абсолютно более ранние», чем событие A (в Цюрихе). Далее, все события в Базеле, более поздние, чем предельное событие B, должны рассматриваться как «абсолютно более поздние», чем событие A. Следовательно, остается лишь расположить во времени относительно события A само событие B. Для такого расположения имеется одна-единственная возможность: принять, что событие B происходит *одновременно* с событием A.

Итак, мы видим, что при принятии первого допущения интервал неопределенности исчезает. Другими словами, при сделанном допущении отношения: «позже», «раньше» и «одновременно» для любых двух событий являются установленными безусловно, независимо от места, где эти события происходят. Таким образом, из первого допущения вытекает, что время *абсолютно.*

2. Второе допущение: *не существует сколь угодно быстрых сигналов.*

В этом случае интервал неопределенности не может неограниченно уменьшаться. Теперь по мере увеличения скорости сигнала получаются интервалы, имеющие в качестве общей части вполне определенный *предельный интервал* B_1B_2. Этот интервал совпадает с тем интервалом времени в Базеле, начальная точка которого совпадает с отправлением из Базеля наиболее быстрого сигнала (событие B_1), а конечная точка — с возвращением сигнала в Базель (событие B_2) при условии, что сигнал после прибытия в Цюрих (событие A) сразу отправляется назад в Базель.

Начальное событие B_1 предельного интервала B_1B_2, а также события, имевшие место в Базеле раньше события B_1, должны рассматриваться как «абсолютно более ранние», чем событие A. Конечное событие B_2 и более поздние события в Базеле должны рассматриваться как «абсолютно более поздние», чем событие A. Сам предельный интервал B_1B_2 содержит бесконечно большое число событий B (в Базеле), которые наступают позже события B_1 и раньше события B_2. Все эти события B в Базеле остаются неопределенными во времени относительно события A в Цюрихе. Расположение во времени одного из таких событий B относительно события A при помощи подачи каких-либо сигналов времени невозможно.

Итак, мы пришли к следующим выводам:

1. Если существуют сколь угодно быстрые сигналы, то заданное событие O («здесь и теперь») делит все остальные мировые события E на три класса:

1) На события E_1, происходящие раньше O.

2) На события E_2, происходящие позже O.

3) На события E_0, одновременные с событием O.

Расположение событий E и O во времени однозначно установлено. *Время абсолютно.*

2. Если не существует сколь угодно быстрых сигналов, то каждое заданное событие O делит все мировые события также на три класса E_1, E_2, E_0.

События E_1 и E_2 по-прежнему обладают свойствами 1) и 2), а именно события E_1 происходят абсолютно раньше события O, а события E_2 — абсолютно позже события O. Однако расположение во времени относительно события O третьего класса событий — событий E_0, происходящих в интервале между событиями E_1 и E_2, — остается *неопределенным* и не может быть произведено при помощи упоминавшегося выше постулата причинности. Поэтому, если необходимо определить такие понятия, как «событие E_0 происходит одновременно с событием O», «событие E_0 наступает раньше события O», «событие E_0 наступает позже события O», то для этого необходимо привлечь другие принципы или другие соглашения.

Результаты, вытекающие из первого и второго допущений о скорости распространения сигнала, пояснены графически на рис. 30а и 30б.

Каждая вертикальная прямая изображает локальное «течение времени» в заданном месте («местное время»). В случае первого допущения каждое событие O (и каждое событие E_0, одновременное с O) однозначно устанавливает «будущее» и «прошедшее» относительно события O.

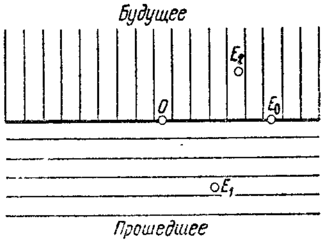


Рис. 30 а.

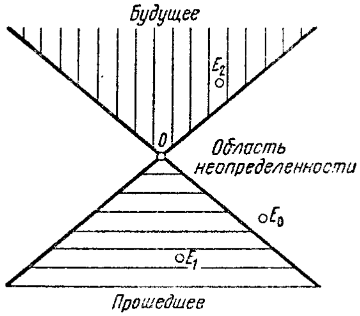


Рис. 30 б.

Напротив, в случае второго допущения каждая локальная линия течения времени содержит интервал неопределенности I, вырезаемый из этой линии областью неопределенности E_0. Точки E_1, лежащие ниже интервала I, изображают локальные события, «абсолютно более ранние» по отношению к событию O, а точки E_2, лежащие выше интервала I, соответствуют событиям, наступившим «абсолютно позже» события O.

Сказанное выше можно сформулировать также следующим образом: события E_1 и E_2 могут находиться с событием O в причинной связи, а именно E_1 может быть «причиной» события O, а E_2 — «следствием» события O. Напротив, область E_0 содержит те события, которые не могут находиться с событием O в причинной связи. Следовательно, события E_0 в причинном отношении, а потому и во временно́м отношении «нейтральны» относительно события O.

До сих пор мы исследовали расположение во времени событий относительно вполне определенного события O. Однако необходимо иметь в виду, что выбор события O произволен. В нашем примере O было заданным событием в Цюрихе, но все предыдущие рассуждения не изменятся, если в качестве O будет выбрано событие в Базеле (или в любом другом месте). Каждому такому событию O при втором допущении о скорости распространения сигнала соответствуют вполне определенные область будущего E_2, область

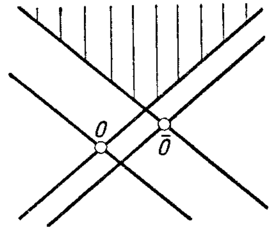


Рис. 31.

прошедшего E_1 и лежащая между E_1 и E_2 область неопределенности E_0.

Если мы будем варьировать событие O, то будут изменяться также соответствующие области E_0, E_1, E_2. При первом допущении о скорости распространения сигнала эти три множества для двух *одновременных* событий O и $\bar{O}$ остаются неизменными. Иначе будет при втором допущении, как это видно из рис. 31, на котором отмечены два события O и $\bar{O}$ и соответствующие им области E_0, E_1, E_2 и $\bar{E}_0$, $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$. Область, общая для будущего относительно события O и будущего относительно события $\bar{O}$, заштрихована. Она охватывает те мировые события, которые являются абсолютно будущими как относительно события O, так и относительно события $\bar{O}$. На рис. 31 событие O лежит в области неопределенности относительно события $\bar{O}$, а событие $\bar{O}$ — в области неопределенности относительно события O. Если событие $\bar{O}$ изменится так, что окажется в «будущем» относительно события O, то «будущее» относительно события $\bar{O}$ также станет частью будущего относительно события O. Такие отношения соответствуют свойству транзитивности расположения во времени (в самом деле, если $O<\bar{O}$ и $\bar{O}<E$, то также $O<E$, т. е. будущее относительно события $\bar{O}$ содержится в будущем относительно события O).

В реальном, эмпирическом мире имеет место второе допущение о скорости распространения сигнала. Более быстрые сигналы, чем световые или радиосигналы, не известны. Поэтому при сравнении во времени событий, происходящих в разных местах, остается область неопределенности, занятая событиями, относительно которых неизвестно, происходят ли они раньше или позже события O. *Это обстоятельство создает логическую и эмпирическую возможность релятивизации времени.*

Из приведенных выше рассуждений следует, что в том случае, когда мы рассматриваем события в сравнительно ограниченной части пространства, длительность временных интервалов неопределенности чрезвычайно коротка (в нашем примере меньше 1/3000 секунды). На практике такой малой длительностью можно пренебречь и, следовательно, остаться на точке зрения классического представления об абсолютном времени.

Иначе обстоит дело, если рассматриваемые события происходят в более протяженной части пространства. Расстояние между Землей и Солнцем уже настолько велико (около 150 миллионов километров), что длительность интервала временной неопределенности становится больше 8 минут. Еще больше возрастает интервал неопределенности в том случае, когда сравниваются события на Земле с событиями на звездах. Световой сигнал, идущий от звезды и попадающий в наши глаза, находится в пути, возможно, миллионы лет, следовательно, интервал неопределенности становится чрезвычайно большим и поэтому до тех пор, пока используется только принцип причинности, события на звездах, происходящие в этом интервале, не могут быть упорядочены во времени относительно прибытия на Землю первого светового сигнала.

Хотя интервалы неопределенности для событий, происходящих в ограниченных частях пространства, исчезающе малы, тем не менее их учет в нашу эпоху весьма

важен. В современной физике приходится иметь дело с чрезвычайно малыми промежутками времени, составляющими ничтожную долю секунды; поэтому здесь нельзя пренебрегать интервалами неопределенности даже при изучении частей пространства «атомных» размеров.

§ 5. Пространственно-временные системы

В предыдущих параграфах мы рассмотрели вопрос о расположении событий во времени. Каждое произвольным образом выбранное событие O определяет (относительно O) прошедшие и будущие события. Остаются неопределенными только события из области неопределенности E_0, соответствующей событию O. Однако и эта область неопределенности стягивается в прямую, на которой расположены одновременные с O события, если допустить, что в нашем распоряжении имеются сколь угодно быстрые физические сигналы (рис. 30 *а*).

Таким образом, наши рассуждения о последовательности событий во времени имели чисто *топологический* характер. Ни о каком *измерении* пространственных или временных интервалов не было никакой речи. Рассмотрим теперь вопрос о расположении событий во времени с *метрической* точки зрения. Об измерении скорости движений можно начать говорить только после того, как будет принято соглашение о понятии конгруэнтности (равенства) пространственных и временных интервалов. В самом деле, скорость движущегося тела есть не что иное, как путь, пройденный телом в единицу времени, следовательно, численное значение скорости зависит от выбора единиц для пространственных и временных интервалов [1]).

Но разве выше, при исследовании расположения событий во времени, мы не говорили о «медленных» и

[1]) Если мы скажем, что скорость автомобиля равна 60, то это утверждение ничего не будет означать до тех пор, пока не будет добавлено, какие единицы длины и времени мы используем. Напротив, утверждение, что скорость автомобиля равна 60 километров в час, имеет вполне определенный смысл.

«быстрых» сигналах? Разве упоминание о таких сигналах не предполагает, что метрические понятия уже введены? Более подробное рассмотрение выполненного исследования показывает, что не было никакой речи об *измерении* длин и интервалов времени. Рассматривался сигнал B_1AB_2, отправленный из Базеля (событие B_1), поступивший в Цюрих (событие A) и сразу же отправленный назад (возвращение в Цюрих; событие B_2). Этот сигнал сравнивался с другим (Базель — Цюрих — Базель), который был быстрее первого, поскольку его выход B'_1 из Базеля и его возвращение B'_2 в Базель были расположены внутри временно́го интервала B_1B_2. Такая констатация, которую можно выразить формулой $B_1 < B'_1 < B'_2 < B_2$, служит только для упорядочивания во времени перечисленных четырех событий в *Базеле*. Никакого измерения длин каких-либо пространственных или временны́х интервалов она не предполагает.

Аналогичным образом должны пониматься слова: «существуют сколь угодно быстрые сигналы». Эти слова означают только следующее. Если событие B_1 происходит раньше B_2 ($B_1<B_2$), то всегда существует такой сигнал $B'_1AB'_2$ (Базель — Цюрих — Базель), для которого временно́й интервал $B'_1B'_2$ содержится как ч а с т ь в интервале $B_1B_2(B_1 < B'_1 < B'_2 < B_2)$.

Дополним теперь наши рассмотрения, выполненные в предшествующих параграфах, *метрическими* соображениями. Об измерении пространственных расстояний мы уже говорили в первой главе. При этом мы исходили из эмпирического понятия видимого пространства. Наша аудитория в Цюрихе может служить примером такой «локальной пространственной окрестности». Применяя эталон длины, например метровую линейку, мы можем измерять в этом пространстве расстояния между отдельными точками. В частности, для этой цели можно использовать систему координат K и определять относительно нее координаты точек (три координаты: «высоту», «ширину» и «длину»). Тогда геометрические явления можно будет описать при помощи евклидовой геометрии и основанной на ней евклидовой аналитической геометрии (см. § 10 гл. I).

Дополним эту нашу ближайшую пространственную окрестность до более протяженной пространственной окрестности, в которой первая «покоится». Наша аудитория находится в покое относительно города Цюриха. Эта более широкая окрестность в свою очередь находится в покое относительно Земли. При помощи геодезических измерений мы можем определять «системы координат» также в дальнейших все более и более протяженных частях пространства и затем измерять в этих системах расстояния и углы.

Так, например, мы можем связать с неизменной пространственной системой, определяемой Землей, прямоугольную декартову систему координат K с началом O, совпадающим с центром Земли, осью x, направленной по какому-нибудь диаметру экватора, осью y, направленной по другому диаметру экватора, перпендикулярному к первому, и осью z, совпадающей с осью Земли. В такой системе координат каждая точка P поверхности Земли определяется тремя пространственными координатами (x, y, z). Эти координаты остаются неизменными, так как точки P не движутся относительно системы K. Следовательно, воспользовавшись теоремой Пифагора, мы можем измерить неизменные (не зависящие от времени) расстояния между отдельными точками P.

Такие покоящиеся относительно Земли системы координат применяются в астрономии для определения движения небесных тел относительно Земли. Конечно, при этом невозможно измерять расстояния непосредственно, при помощи линеек. Для определения положения тел используются, кроме геометрических методов, все известные в физике эмпирические и теоретические методы. К числу таких физических методов относятся оптические методы, использующие прямолинейность распространения света, спектральные методы, связанные с теорией электромагнитных колебаний, методы, использующие механическое взаимодействие тел (например, теорию тяготения Ньютона), и т. п. Ниже мы еще вернемся к этим методам.

С точки зрения вопросов, которыми мы сейчас занимаемся, достаточно установить следующее.

1. Всегда можно выбрать пространственную систему координат K, по крайней мере с некоторой точностью. Примером такой системы может служить рассмотренная выше прямоугольная декартова система (x, y, z), покоящаяся относительно Земли.

2. В зависимости от ситуации можно применять различные пространственные системы отсчета. Для описания движения планет целесообразно пользоваться системой координат K_1, покоящейся относительно центрального тела планетной системы, т. е. относительно Солнца. При исследовании космических проблем удобна так называемая универсальная инерциальная система K_2, т. е. система, относительно которой покоятся (в среднем) неподвижные звезды [1]).

Перейдем к вопросу об *измерении времени.*

Для этой цели выберем сначала локальную пространственную систему координат K, например систему, определяемую этой аудиторией или Землей. Если описать физические события с точки зрения этой системы, то каждому событию E будет соответствовать вполне определенное место P и отвечающие этому месту пространственные координаты (например, прямоугольные декартовы координаты).

Событие E в точке P происходит также в определенный момент времени. Для определения времени используются так называемые «нормальные часы». Для исследования условий, которым должны удовлетворять «правильно» идущие часы, представим себе (опять несколько идеализируя ситуацию), что в каждой покоящейся точке P системы координат имеются «местные нормальные часы», отмечающие время t события E, происходящего в этой точке. Как бы эти часы ни были поставлены, их ход в любом случае должен обладать свойствами, отвечающими введенным в предыдущих параграфах постулатам временной последовательности, а именно:

1) Это означает следующее. Неподвижные звезды движутся относительно Земли. Вместе с тем они движутся также *одна относительно другой.* Поэтому на первый взгляд кажется бессмысленным говорить о системе координат K_2, определяемой неподвижными звездами. Слова «в среднем» придают смысл сделанному определению. Если, например, требуется определить движение Солнца относительно системы неподвижных звезд, то сначала рассматривают это движение относительно большого количества неподвижных звезд. Сравнив эти относительные движения одно с другим, находят, что Солнце имеет относительно неподвижных звезд *среднюю* постоянную скорость. Следовательно, система координат K_2 может быть установлена только приближенно, однако тем точнее, чем больше число использованных неподвижных звезд. В этом смысле понятие системы K_2 является статистическим.

1. Часы должны идти в «будущее» время. Это само собой понятное требование означает только следующее. Если E_1 и E_2 представляют собой два события (в точке P), из которых E_1 более раннее, а E_2 более позднее, то указываемое часами время t_1 (событие E_1) должно быть меньше времени t_2 (событие E_2), т. е. $t_1 < t_2$.

2. Если события E_1 и E_2 происходят в различных точках P_1 и P_2 системы координат K и если событие E_2 является следствием события E_1 $(E_1 \to E_2)$, то местное время $t = t_1$ события E_1 опять должно быть меньше местного времени $t = t_2$ события E_2, т. е. вновь $t_1 < t_2$.

Из наших предыдущих рассуждений вытекает, что часы, помещенные в некоторой точке P_0 пространства, определяют ход часов, находящихся в других точках системы K, следующим образом.

1. Если в распоряжении имеются с к о л ь у г о д н о б ы с т р ы е сигналы, то последовательность во времени событий E_0 и E_1, происходящих в точках P_0 и P_1, в частности *одновременность* этих событий, полностью определена. Из этого вытекает, что часы, находящиеся в точке P_1, должны быть поставлены так, чтобы соответствующие местные показания времени t_0 и t_1 были одинаковы $(t_0 = t_1)$, если события E_0 и E_1 одновременны. Следовательно, нормальные часы, помещенные в точке P_0, в соответствии с тем, что в рассматриваемом случае время абсолютно, *однозначно* устанавливают ход остальных часов (в точках P).

2. Напротив, если существует н а и б о л е е б ы с т р ы й, н о о г р а н и ч е н н ы й п о с к о р о с т и сигнал (в нашей реальной вселенной — световой сигнал), то часы в точках P должны быть установлены так, чтобы соблюдалось следующее правило:

Если событие E_0, происходящее в точке P_0, наблюдается в момент местного времени $t=t_0$, то часы в точке P при наступлении события E (в точке P) должны указывать время t, большее времени t_0, при условии, что событие E наступает «абсолютно позже» события E_0, т. е. при условии, что событие E лежит в «причинном будущем» события E_0. Напротив, если событие E лежит в «причинном (абсолютном) прошлом» события E_0, то время t должно быть меньше времени t_0 ($t<t_0$).

Отсюда для местных часов системы K вытекает следующее *правило*:

Часы в точке P должны быть установлены так, чтобы событие E_0, для которого часы в точке P_0 показывают время t_0, и событие E, для которого часы в точке P показывают то же самое время t_0, были одно относительно другого «причинно нейтральны».

Следовательно, событие E лежит в *области неопределенности* события E_0 и наоборот.

Это правило регулирует ход часов, помещенных в точке P, причем весьма жестко, если точки P и P_0 лежат столь близко одна от другой, что интервал неопределенности мал. Однако устанавливать часы в точках P абсолютно точно относительно часов в точке P_0, как это было возможно при сколь угодно быстром сигнале, оно не позволяет.

Представим себе, что в одном и том же месте P системы K помещены двое часов U_1 и U_2, которые удовлетворяют сформулированному выше правилу, но *не идут абсолютно одинаково*. В таком случае происходящее в P событие E_1, для которого часы U_1 показывают время $t=t_0$, и происходящее в том же месте событие E_2, для которого часы U_2 показывают то же самое время $t=t_0$, не совпадают; они происходят в P в различные моменты времени, хотя показания часов ($t=t_0$) одинаковы. Какие же из часов U_1 и U_2 идут «правильно»? Постулат причинности для временной последовательности событий, лежащий в основе сформулированного выше правила, недостаточен для ответа на поставленный вопрос.

Следовательно, и те, и другие часы с одинаковым правом могут считаться «нормальными часами» в точке P. Если мы выберем в качестве «нормальных» часы U_1, то событие E_1 будет одновременным с событием E_0 в точке P_0 («часы, помещенные в P_0, показывают время $t=t_0$»). Но тогда часы U_2 будут показывать, что событие E_1 наступает раньше или позже события E_0; в самом деле, эти часы отмечают время $t=t_0$ для события E_2, а не для события E_1 (в ситуации, показанной на рис. 32, событие E_1 наступает «позже» события E_2).

В этом смысле «временные координаты» t событий E *относительны*. Они зависят от того, какие из различных

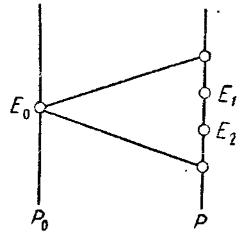


Рис. 32.

часов принимаются за «нормальные», конечно в рамках границ, допустимых с точки зрения сформулированного выше правила. Следовательно, в этих границах в точке P в принципе возможно наличие бесконечно большого числа равноправных, но тем не менее идущих неодинаково часов (относительно часов, помещенных в P_0).

Итак, в принципе было бы возможно установить в заданной системе координат K несколько таких неодинаково идущих часов (U_1, U_2 и т. д.). Однако с точки зрения описания пространственно-временных явлений было бы весьма непрактично оставлять столь широкую свободу для неоднозначного определения местного времени. В действительности ход «нормальных часов» *в каждой точке пространственной системы отсчета* K устанавливается однозначно, по крайней мере в теории. Но и на практике часы системы K жестко регулируются. Для того чтобы достичь такой однозначности хода часов в каждой точке P системы K, необходимо, как это следует из приведенных выше рассуждений, ввести для измерения времени, кроме постулата причинности, также другие правила.

Это необходимо прежде всего из следующих соображений. Выше мы разъяснили некоторые правила, согласно которым должны быть установлены часы, находящиеся в различных точках P пространственной системы отсчета для того, чтобы они «правильно» шли *относительно нормальных часов* U_0, помещенных в произвольно выбранной точке P_0. Но как должны быть установлены сами нормальные часы U_0? Конечно, так, чтобы и они в «беге времени», происходящем в точке P_0, шли в «будущее» (см. правило 1 на стр. 137). Это правило регулирует ход часов U_0, требуя лишь, чтобы показания времени, даваемые этими часами, были правильно *расположены*. Следовательно, это правило имеет только топологический характер и поэтому не может служить для измерения времени в точке P_0. Как же все-таки должны быть установлены часы U_0, чтобы они шли также с «правильной» скоростью, т. е. давали бы возможность правильного измерения длины временны́х интервалов в точке P_0?

Постулат причинности для временно́й последовательности событий, имеющий топологический характер, не позволяет ответить на этот вопрос. Должны быть введены новые критерии измерения времени, не зависящие от постулата причинности. Выясним, какие возможности имеются для выбора таких критериев.

Мы знаем, что единицы времени (год, день, час и т. д.), необходимые для измерения времени, выведены из некоторых периодических явлений природы. Удары пульса, совпадающие с ударами сердца, дают возможность субъективно оценивать длительность наших переживаний; в этом примере интервал времени между двумя последовательными ударами пульса служит единицей времени. Более надежный ритм времени дают периодические космические явления. На основе этих явлений астрономия уже давно создала точные методы измерения времени. Современная атомная физика открыла в этом направлении новые возможности. А именно явления излучения и периоды колебательных процессов, сопровождающие переход атома из одного

уровня энергии на другой, определяют интервалы времени, которые могут служить естественными единицами измерения.

Но каким бы способом ни был установлен ход местных часов, главным принципом регулирования времени остается постулат причинности, причем даже в том случае, когда внимание ему уделяется только бессознательно.

§ 6. Покой и движение относительно пространственно-временно́й системы

Рассмотрим заданную местную трехмерную систему координат (например, прямоугольную) и дополним ее, как это было сделано в предыдущем параграфе, до пространственно-временно́й системы $K(x, y, z, t)$. Следовательно, будем считать, что в каждой точке $P(x, y, z)$ системы находится наблюдатель, снабженный нормальными часами U. Как эти часы поставлены, пока безразлично, лишь бы только их ход удовлетворял постулату причинности для временно́й последовательности событий. Последующие рассуждения будут одинаково пригодны и для «классического» случая сколь угодно быстрых сигналов, и для «релятивистского» случая сигналов с ограниченной скоростью распространения (ср. стр. 128).

Проследим за каким-нибудь физическим явлением, например за движением материальной частицы M из системы K (рис. 33). Пусть эта частица проходит через заданную точку $P(x, y, z)$ в момент времени t, отсчитываемый наблюдателем, находящимся в P, по своим «местным» часам. Следовательно, это физическое событие E определяется тремя пространственными координатами (x, y, z) и одной временно́й координатой t.

Для полного описания движения частицы M относительно системы отсчета K достаточно указать, в какой точке P частица M будет находиться в моменты местного времени t. Тогда каждому значению t будет соответствовать вполне определенная точка P. Математически это выражается следующим образом: положение P частицы M должно быть задано в виде функции

$P = P(t)$, т. е. функции, зависящей от времени t. Так как каждая точка P имеет определенные пространственные координаты, то эти координаты также должны являться функциями времени, т. е.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \tag{1}$$

Эти уравнения движения частицы M (относительно системы отсчета K) позволяют определить, в каком месте $P(x, y, z)$ частица M находится в момент времени t.

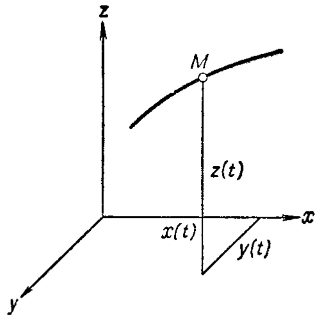


Рис. 33.

Следовательно, эти уравнения полностью определяют движение частицы M.

Кинематику (учение о движении материальных тел или сигналов) со времен Ньютона принято описывать несколько иначе, а именно *геометрически*. Поясним это сначала для простоты на случае прямолинейного движения. Если траекторию этого движения принять за ось x системы координат K, то движение будет определяться одним-единственным уравнением

$$x = x(t). \tag{1'}$$

Следовательно, в момент времени t частица M находится в точке $x = x(t)$ оси x; координаты y и z равны нулю.

Для описания явлений в таком *одномерном* x-пространстве вводится *двумерная* система координат $K(x, t)$, одной осью которой является упомянутая пространственная ось x, а второй осью служит *ось времени* t. Начальная точка O ($x=0$, $t=0$) устанавливается произвольно. На рис. 34 изображена такая система с взаимно перпендикулярными осями x и t. С таким же успехом можно было бы взять косоугольную систему координат.

Если E есть событие в пространственно-временно́й системе K (пространственно одномерной), то ему на

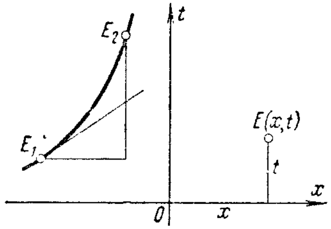


Рис. 34.

рис. 34 соответствует *точка* плоскости (x, t) с координатами x и t. Поэтому будем обозначать это событие так: $E = E(x, t)$.

Два события $E_1(x_1, t_1)$ и $E_2(x_2, t_2)$ совпадают, если они имеют одни и те же координаты ($x_1 = x_2$, $t_1 = t_2$). Двум различным событиям E_1 и E_2 соответствуют различные точки плоскости. Следовательно, мы имеем отображение множества всех событий E в x-пространстве на множество всех точек координатной плоскости (x, t).

Рассмотрим два произвольных события E_1 и E_2 и соответствующие им точки (x_1, t_1) и (x_2, t_2). Если события происходят *в одном и том же месте*, то $x_1 = x_2$ и отвечающие им точки лежат на вертикальной прямой, параллельной оси t («прямая совпадающих по месту событий»). Напротив, если события происходят в разных местах ($x_1 \neq x_2$), но одновременно, то отвечающие им точки лежат на горизонтальной прямой, параллельной оси x («прямая одновременных событий»).

Пространственное расстояние между событиями E_1 и E_2 равно разности

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

их пространственных координат, а временнóе расстояние — разности

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

их временных координат.

Рассмотрим теперь точки, определяемые уравнением (1′) движения частицы M. В момент времени t пространственная координата частицы M равна $x=x(t)$. Этому событию («частица M проходит в момент времени t через точку $x=x(t)$») соответствует на рис. 34 точка E с координатами $x=x(t)$ и t, которую будем называть «точкой наступления события», или, следуя Эйнштейну, «мировой точкой».

С возрастанием времени t «мировая точка» меняет свое положение в плоскости x, t (рис. 35), описывая при этом так называемую *линию событий*, или *мировую линию*, определяющую своими координатами место и время сигнала M. Если при помощи рис. 35 мы захотим определить положение x точки P, в которую движущаяся частица M приходит в заданный момент времени t, то должны будем поступить следующим образом. Отметим на оси t точку с координатой t и проведем через эту точку горизонтальную прямую. Эта прямая изображает все те события, которые наступают в один и тот же момент местного времени t. Продолжим эту горизонтальную прямую до пересечения с мировой линией движущейся частицы M в точке $E(x, t)$. Координата x точки пересечения определит пространственное положение $x=x(t)$ частицы M в момент времени t.

Так как частица M в каждый момент времени t находится во вполне определенном месте, то упомянутая прямая пересекает мировую линию частицы M только в *одной* точке. Это следует также из того, что время при движении сигнала возрастает (постулат причинности!). Следовательно, мировая линия $x=x(t)$ сигнала все время монотонно поднимается *кверху*.

Напротив, вертикальные прямые, параллельные оси времени, могут пересекать мировую линию $x=x(t)$ сигнала M в нескольких точках. Координаты времени точек пересечения определяют те моменты времени, в которые сигнал M находится в рассматриваемом месте. Мировая линия сигнала M может даже совпадать с линией, для которой координата x *постоянна*. Это происходит в том случае, когда частица M *покоится* относительно системы K.

Поясним сказанное двумя примерами.

Пусть частица M в момент времени $t=0$ находится в точке $x=0$. Следовательно, это начальное событие

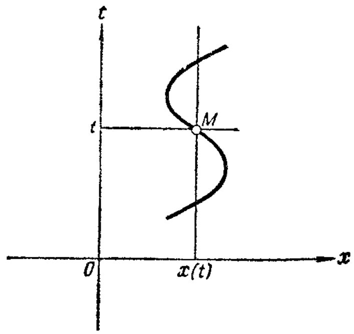


Рис. 35.

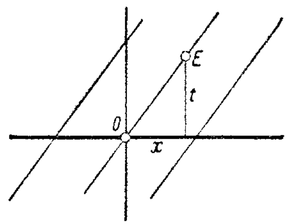


Рис. 36.

изображается началом координат O системы K (рис. 36). Если частица M движется с *постоянной* скоростью *u м/сек*, то в течение t секунд она проходит путь x, равный произведению скорости на время, т. е.

$$x = ut. \tag{2}$$

Это уравнение показывает, что мировые точки E движения лежат на прямой линии, проходящей через начало координат $x=t=0$; *«подъем»* этой линии определяется постоянным отношением координаты t к координате x [1]). Следовательно, этот подъем равен $t/x=1/u$, т. е. обратному значению скорости. При движении сигнала M соответствующая мировая точка E перемещается вдоль указанной прямой мировой линии.

[1]) Это отношение называется также угловым коэффициентом прямой (2). — *Прим. ред.*

Все движения, имеющие заданную постоянную скорость, изображаются семейством параллельных мировых линий с одним и тем же подъемом $1/u$. Если $u=0$, то частица M находится в покое; ее мировой линией будет прямая, параллельная оси t и проходящая через соответствующую точку оси x. Чем быстрее движение частицы M, тем «горизонтальнее» ее «мировая прямая».

В качестве второго примера рассмотрим камень, брошенный в момент времени $t=0$ вертикально вверх со

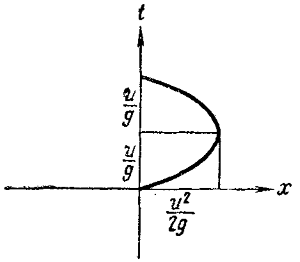


Рис. 37.

скоростью u. Согласно законам классической физики, такой камень через t секунд достигает точки, высота которой над поверхностью Земли определяется формулой

$$x = ut - \frac{gt^2}{2}, \tag{3}$$

где g, равное приблизительно 9,81 *м/сек*^{2}, есть ускорение свободного падения. Мы видим, что высота x сначала возрастает, достигает максимума $u^2/2g$ через $t=$ $=u/g$ секунд, затем уменьшается и в момент времени $t=2u/g$ становится опять равной нулю. Следовательно, в этот момент времени камень возвращается в свое начальное положение.

В системе координат (x, t) этому движению соответствует п а р а б о л а (рис. 37), определяемая уравнением (3) (подчеркнем, что движение происходит в направлении оси x). Движение камня неравномерное, его скорость изменяется с течением времени. Вследствие неравномерности скорости мировая линия рассматриваемого события (парабола) не прямолинейна.

Рассмотрим теперь криволинейную мировую линию тела M, изображенную на рис. 34. Пусть в момент времени $t=t_1$ тело M находится в точке $x=x_1$ (событие E_1), а в момент времени $t=t_2$ $(>t_1)$ — в точке $x=x_2$ (событие E_2). Следовательно, за промежуток времени $\Delta t=$ $=t_2-t_1$ тело M прошло путь $\Delta x=x_2-x_1$ [1]. Отношение $\Delta x/\Delta t$ определяет *среднюю скорость* движения в промежутке времени Δt. Если промежуток Δt уменьшается, то изменяется путь Δx, а также средняя скорость $\Delta x/\Delta t$. В случае прямолинейной мировой линии, другими словами для равномерного движения, средняя скорость совпадает с «мгновенной скоростью».

Средняя скорость определяется обратным значением подъема отрезка E_1E_2. Если t_2 приближается к значению t_1, следовательно, точка E_2 приближается к точке E_1, то отрезок E_1E_2 (хорда или секущая мировой линии) поворачивается вокруг точки E_1 и в момент времени $t_2=t_1$ переходит в *касательную* к мировой линии в точке $E_1(x_1, t_1)$. Таким образом, *обратное значение подъема касательной к мировой линии равно мгновенной скорости движения* [2].

---

[1]) Предполагается, что между моментами t_1 и t_2 тело M двигается по прямой в одном (и притом положительном) направлении, т. е. что $x_2>x_1$. — *Прим. ред.*

[2]) Для читателя, знакомого с дифференциальным исчислением, этот результат можно выразить короче: *мгновенная скорость точки M в момент времени t равна производной dx/dt от пути $x=x(t)$ по времени t.* При бросании камня вертикально вверх его движение определяется уравнением (3). Составив производную dx/dt, мы получим для скорости значение $u-gt$. В этом можно убедиться также элементарным путем. В самом деле, при рассматриваемом движении, происходящем под действием направленной вдоль оси x силы притяжения Земли, ускорение (приращение скорости в одну секунду) равно $-g$; следовательно, начальная скорость, равная u, в течение t секунд уменьшается на gt, т. е. через t секунд она становится равной $u-gt$.

Предлагаем читателю вычислить также среднюю скорость $\Delta x/\Delta t$. Она получается из уравнения (3) элементарным путем, без применения дифференциального исчисления. Выполнив вычисления, читатель получит значение $u-g(t_1+t_2)/2$.

При приближении t_2 к t_1 получается предельное значение $u-gt_1$ (мгновенная скорость в момент времени $t=t_1$).

Этот вывод также наглядно очевиден. Для очень короткого промежутка времени (t_1, t_2) мировая линия почти совпадает со своей касательной в точке (x_1, t_1). Следовательно, если для такого небольшого промежутка времени мы заменим мировую линию только что указанной касательной мировой прямой, то скорость в течение этого промежутка времени будет *постоянной*, а движение равномерным. Тогда скорость $\Delta x/\Delta t$ будет равна обратному значению подъема касательной и будет совпадать с мгновенной скоростью в момент времени $t=t_1$.

До сих пор мы рассматривали для простоты только движения в одномерном пространстве. Перейдем теперь к евклидову *двумерному пространству*. Точки этого пространства будут определяться двумя координатами x, y относительно двумерной системы координат $K(x, y)$. Если в каждой фиксированной точке $P(x, y)$ системы K будут помещены «нормальные часы» для измерения местного времени t в P, то система K превратится в пространственно-временнýю систему $K(x, y, t)$.

Для того чтобы изобразить событие (мировую точку) $E(x, y, t)$ геометрически, поступим так же, как было сделано выше. В начальной точке $x=y=0$ евклидовой плоскости (x, y) проведем *ось времени* t, направив ее под прямым (или каким-нибудь другим) углом к плоскости (x, y). Три оси x, y, t определяют трехмерную систему координат $K(x, y, t)$. Каждому событию E, происходящему в точке (x, y), соответствует в этой трехмерной системе точка $E(x, y, t)$ (рис. 38). Координаты x, y определяют то место P, в котором в момент местного времени t (в P) происходит событие E.

Мировыми линиями событий, происходящих в одном и том же *месте*, по-прежнему являются прямые, параллельные оси времени. *Одновременные* [относительно системы отсчета $K(x, y, t)$] события E лежат в плоскостях, параллельных плоскости (x, y).

Мировые линии *равномерно* движущейся материальной частицы M по-прежнему прямые. Скорость материальной частицы M определяется, как это легко видеть из рис. 38, следующим образом. Пусть $E_1(x_1, y_1, t_1)$ и $E_2(x_2, y_2, t_2)$ суть две точки рассматриваемой мировой

линии. Проекциями «мирового отрезка» E_1E_2 на оси координат будут

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1 \qquad (t_1 < t_2).$$

Пространственное расстояние Δs между событиями E_1 и E_2, согласно теореме Пифагора, будет равно

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Абсолютное значение скорости равно частному от деления пути Δs на время Δt, т. е.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

Следовательно, скорость материальной частицы M получается по «правилу Пифагора» из величин $\Delta x/\Delta t$ и

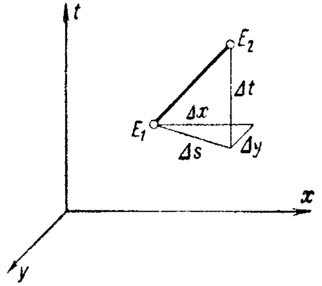


Рис. 38.

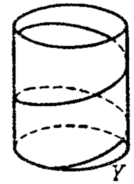


Рис. 39.

$\Delta y/\Delta t$, равных скоростям проекций частицы M на оси x и y системы координат $P(x, y)$.

Если движение частицы M неравномерное, то ее мировая линия уже не будет прямолинейной. Теперь она «поднимается» кверху, в направлении возрастающих значений t, так, как это показано, например, на рис. 39, изображающем случай движения частицы M по окружности Y, лежащей в плоскости (x, y). Мировой линией этой частицы является винтовая линия, проекция которой на плоскость (x, y) совпадает с окружностью Y. Эта винтовая линия лежит на цилиндрической поверхности с основанием Y и осью, параллельной оси t.

Мгновенная скорость частицы M по-прежнему определяется касательной к мировой линии.

С точки зрения физической действительности нас больше всего интересует кинематика в трехмерном евклидовом пространстве $K(x, y, z)$. Если мы захотим применить изложенный выше способ пространственно-временно́го описания движений, то должны будем ввести четырехмерную пространственно-временну́ю систему $K(x, y, z, t)$. События E будут «точками» в этой четырехмерной системе, следовательно, будут определяться четырьмя координатами, из которых три первые (x, y, z) будут указывать место события E, а четвертая (t) — местное время события.

Этот четырехмерный мир событий не допускает естественного *наглядно-геометрического* представления. Тем не менее современная физика и в особенности теория относительности требуют рассматривать мир событий как четырехмерное «пространство», три измерения которого определяют местоположение события, а *четвертое измерение* — время события. В этом представлении нет ничего мистического. Четвертое измерение следует понимать так, как это было подробно изложено в § 12 гл. I. Мир физических событий является наиболее примечательным толкованием четырехмерной геометрии.

§ 7. Парадоксы времени

Ахиллес и черепаха

Соображения, изложенные в предыдущих параграфах, позволяют разъяснить некоторые вопросы, возникшие в связи с проблемой понятия времени. Хорошо известен парадокс греческого софиста Зенона об Ахиллесе и черепахе. Было бы неосторожно рассматривать этот парадокс только как казуистику. В нем содержится примечательная идея, и с точки зрения рассматриваемой нами темы уместно коротко на нем остановиться.

Парадокс Зенона основан на следующем мысленном эксперименте. Быстроногий Ахиллес преследует медленно ползущую черепаху. Зенон утверждает, что Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Для доказательства своего утверждения Зенон рассуждает следующим образом. Пусть Ахиллес начинает свой бег в точке A, а черепаха в этот момент времени находится в точке A_1 (рис. 40). Когда Ахиллес достигнет точки A_1, черепаха будет находиться в точке A_2, когда же Ахиллес прибежит в точку A_2, черепаха окажется уже в точке A_3, и т. д. Это рассуждение можно повторить неограниченное число раз. Правда, последовательные расстояния AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., указывающие, насколько черепаха находится впереди Ахиллеса,

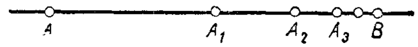


Рис. 40.

становятся все меньше и меньше, но тем не менее черепаха всегда находится впереди Ахиллеса. Следовательно, заключает Зенон, Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Легко выяснить, в чем заключается ошибочность заключения Зенона. Пусть расстояние AA_1 равно, например, 100 метрам, а скорости Ахиллеса и черепахи пусть равны соответственно 10 и 1 *м/сек*[1]). Тогда Ахиллес через 10 секунд достигнет точки A_1. В течение этого промежутка времени черепаха проползет путь $A_1A_2 = 10$ *м*. Еще через одну секунду Ахиллес будет в точке A_2, а черепаха — в точке A_3, причем отрезок A_2A_3 будет равен 1 *м*. Полное время, необходимое Ахиллесу для достижения точки A_2, а черепахе для достижения точки A_3, равно 11 секундам. Аналогичным образом мы увидим, что через 11,1 секунды Ахиллес будет в точке A_3, а черепаха — в точке A_4, причем расстояние A_3A_4 составит 0,1 *м* = 1 *дм*, и т. д.

Расстояние AA_n Ахиллес пробежит в течение $t_n = 11{,}1\ldots1$ секунд; число единиц в этой десятичной дроби равно n. За этот промежуток времени черепаха достигнет точки A_{n+1}. Длина отрезка AA_n равна $111{,}1\ldots1$ метров, причем в этой десятичной дроби число единиц

[1]) При построении рис. 40 для наглядности принято, что скорость Ахиллеса больше скорости черепахи только в два раза.

опять равно n. При увеличении n ($n=1, 2, 3, \ldots$) расстояние AA_n возрастает, однако, *не неограниченно*: оно приближается к *предельному отрезку* AB, длина которого выражается периодической бесконечной десятичной дробью 111,11 ... или, в виде простой дроби

$$\frac{1000}{9} = 111^1/_9 \text{ метра.}$$

Соответственно растут и промежутки времени $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_n$, но и они приближаются к конечному *предельному* значению

$$t = 11{,}11\ldots = \frac{100}{9} = 11^1/_9 \text{ секунды.}$$

Отсюда следует, что через $11^1/_9$ *сек* происходит то, чего и надо было ожидать: Ахиллес догоняет черепаху, а именно в точке B, расстояние которой от точки A равно $AB = 111^1/_9$ *м*.

Таким образом ошибочность парадокса заключается в неправильном применении слова *«никогда»*: «Ахиллес *никогда* не догонит черепаху». Правда, число рассматриваемых моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ бесконечно. Однако время t_n растет не неограниченно: при увеличивающемся n оно приближается к *конечному* предельному значению, равному $11^1/_9$ *сек*. Таким образом, полная длительность бесконечно большого числа последовательных промежутков времени *конечна* и равна $11^1/_9$ *сек*.

Поскольку несколько раз мы уже занимались мысленными экспериментами, будет целесообразно провести еще один такой эксперимент, особенно пригодный для пояснения бесспорной поучительности парадокса Зенона. Вообразим, что мы присутствуем при состязании Ахиллеса с черепахой в качестве неподвижных наблюдателей и производим указанное выше измерение времени по имеющимся у нас часам. Встанем затем на точку зрения Ахиллеса и будем измерять длительность рассмотренных промежутков времени по его «субъективному» переживанию времени. Мы можем себе представить, что напряжение Ахиллеса при беге таково, что указанные выше последовательные промежутки времени, которые по нашему измерению времени сокращаются каждый раз до одной десятой предшествующего промежутка, Ахиллесом в его сознании переживаются как *одинаково длительные*.

Поэтому все эти промежутки он будет оценивать каждый в 10 секунд. Таким образом, для преодоления расстояния AA_n Ахиллесу потребуется по его «собственному измерению» 10^n секунд, т. е. промежуток времени, который при возрастающем n становится сколь угодно большим. Тогда в *нашем* промежутке времени, равном $11^1/_9$ секунды, для Ахиллеса будет содержаться вся бесконечная протяженность времени, вся его вечность. Если, далее, мы представим себе, что жизненные функции Ахиллеса вследствие утомления ускоряются, например, частота его пульса в каждом последовательном интервале увеличивается в десять раз, то тогда заключение Зенона было бы правильным: Ахиллес никогда не догнал бы черепаху. Если продолжительность его жизни конечна, то он должен был бы умереть после того, как пробежал бы определенное *конечное* число интервалов $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$.

Этот мысленный эксперимент можно рассматривать как игру воображения. Тем не менее он открывает перспективы, которые, вероятно, мы не сразу учитываем, когда рассуждаем о времени, например, когда несколько легкомысленно говорим о «вечности», имея при этом в виду бесконечную протяженность времени в направлении прошедшего или в направлении будущего. В самом деле, возможно, что мы в нашем жизненном пути подобны Ахиллесу, возможно, что и за нами наблюдают какие-то более высокоорганизованные существа, которые в соответствии с их «объективным» понятием времени находят, что наша вечность является ничтожно малым промежутком времени в их более широкой временной протяженности.

Тогда для *временной протяженности* имело бы место то же самое, что было для *пространственной протяженности* в примере, рассмотренном на стр. 36. В самом деле, в том примере «бесконечное» пространство воображаемых живых существ, заключенных внутри шара, было только конечной частью *нашего* более широкого пространства.

Замкнутый мир событий

В конце предыдущей главы мы рассматривали неограниченные, но тем не менее конечные пространства. Примером такого одномерного замкнутого пространства может служить экватор M Земли. На рис. 41 жирная горизонтальная линия изображает экватор при его многократном обходе в том и другом направлении. Две последовательно расположенные точки P изображают

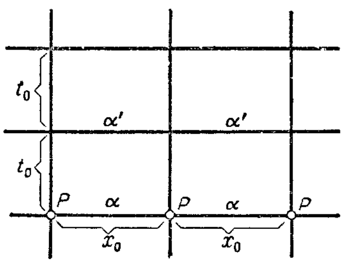


Рис. 41.

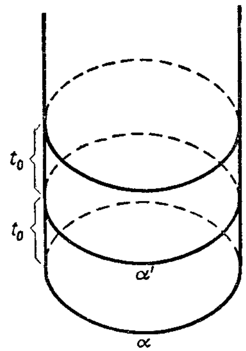


Рис. 42.

одно и то же место экватора. Отождествляя две такие точки, мы каждый раз будем получать полную длину экватора M.

Дополним наше рассмотрение пространственно замкнутого «мира» M путем введения времени. Для этой цели проведем, кроме пространственной оси, также ось времени и в полученном таким способом двумерном пространственно-временно́м мире будем определять пространственные и временны́е координаты событий E. Мировой линией событий, происходящих в одном и том же месте, будет прямая, параллельная оси времени.

Проследим за событиями P, происходящими в какой-нибудь определенной точке P экватора. Среди этих событий имеются такие, которые периодически повторяются. Наиболее примечательным таким временны́м периодом являются сутки. Могут быть и другие периодические явления. Любое лицо, строго придерживаю-

щееся определенного распорядка дня, вспомнит много таких периодически повторяющихся событий.

Вообразим теперь, что мир M таков, что *все* события в нем периодически повторяются. Тогда этот мир будет замкнутым не только в пространственном, но и во временно́м отношении. Через определенный промежуток времени t_0 события в каждом заданном месте будут точно повторяться. Подобно тому как экватор после каждого его полного обхода будет пространственно замыкаться, так и весь мир событий M после истечения каждого временно́го периода t_0 будет замыкаться во временно́м отношении.

«Замыкание» пространственного мира M осуществляется отождествлением тех мировых линий, расстояние между которыми равно пространственному периоду x_0. При этом в качестве изображения мира M получается цилиндрическая поверхность (рис. 42). Каждое горизонтальное сечение этой поверхности (окружность) представляет собой различные точки P экватора в один и тот же момент времени. Напротив, каждая вертикальная образующая представляет собой мировую линию событий, происходящих в одной и той же точке P экватора.

Если мир M, как это было предположено выше, периодичен также во временно́м отношении (с периодом t_0), то такое его свойство будет проявляться в периодичности «мирового цилиндра» также в вертикальном направлении, т. е. в направлении времени. Существа, живущие в таком мире, считали бы его замкнутым и во временно́м отношении. При возрастании времени они отождествляли бы события, которые различались бы по времени своего наступления на временно́й период t_0. Так поступаем и мы в нашей повседневной жизни: мы говорим, что два события (происходящие в различные дни) «одновременны», если они повторяются в один и тот же ч а с суток.

Для описания события в таком мире достаточно ограничиться рассмотрением одной части мирового цилиндра, лежащей между двумя временны́ми сечениями α и α' и имеющей длительность t_0. Если отождествить граничные окружности α и α' этого цилиндра, то он замкнется в конечную неограниченную «поверхность событий». В результате получится замкнутый мир событий M, обладающий такой же *геометрической* структурой, как и замкнутое пространство, рассмотренное в конце предыдущей главы. Следовательно, мы получим *кольцевую поверхность* (тор), изображенную на рис. 43.

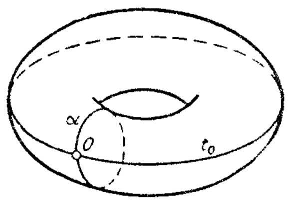


Рис. 43.

Из двух «меридианов» этой поверхности один (t_0) соответствует течению времени в заданной точке P пространства. Второй меридиан (α) представляет собой замкнутое одномерное пространство, соответствующее экватору (место одновременных событий в различных точках экватора).

«Мировая поверхность» M отличается от двумерного замкнутого пространства, изображенного на рис. 24, только в следующем: последнее имеет *два пространственных измерения*, в то время как поверхность событий M имеет *одно пространственное* и *одно временно́е измерение.*

ГЛАВА III

Классическая и релятивистская кинематика

§ 1. Преобразования координат

До сих пор при пространственно-временно́м описании физических событий мы ограничивались одной-единственной заданной пространственно-временно́й системой $K(x, y, z, t)$ (§ 5 и 6 гл. II). Каждая точка (место) P такой системы отсчета имеет определенные, не зависящие от времени пространственные координаты x, y, z. Эти же три числа приписываются каждому событию E, происходящему в точке P, в качестве чисел, определяющих его местоположение (относительно системы K).

Но событие E происходит в точке P системы K также в определенный момент t местного времени, указываемого нормальными часами системы K, помещенными в точке P.

Следовательно, каждому событию E соответствуют в системе отсчета K четыре координаты, а именно: три координаты места и одна координата времени. И наоборот, заданным координатам x, y, z, t соответствует вполне определенное событие (мировая точка) E, а именно то событие, которое происходит в точке (x, y, z) системы K в момент времени t [1]).

[1]) Конечно, таких событий может быть несколько, но все они происходят в одном и том же месте одновременно («здесь и теперь»); следовательно, с нашей точки зрения они совпадают. Такие совпадающие события рассматриваются в этой книге не как различные, а как объединенные в одну-единственную «мировую точку».

Такое взаимно однозначное соответствие между событиями E и координатами x, y, z, t системы K будем обозначать в виде записи

$$E \overset{K}{\longleftrightarrow} (x,\ y,\ z,\ t).$$

Двойная стрелка отмечает указанное соответствие между событиями и их четырьмя координатами, а буква K над стрелкой показывает, в какой системе координат рассматриваются события.

Эти вопросы уже были подробно рассмотрены в § 5 и 6 гл. II. Мы коротко напомнили о них еще раз с целью подчеркнуть те допущения, на которых основано дальнейшее изложение.

Перейдем теперь к новому вопросу:

Как изменяются координаты события E при переходе от заданной физической системы отсчета K к другой системе отсчета $\overline{K}$?

Пусть системой K является, например, покоящаяся относительно Земли система, которую Земля «уводит вместе с собой». Пусть в каждой точке $P(x,\ y,\ z)$ системы K помещены, как мы уже условились об этом выше, нормальные часы U_P, указывающие время t наступления событий E, происходящих в P. В качестве второй системы координат $\overline{K}$ выберем, например, систему, относительно которой покоится Солнце. В этой системе каждое событие E получает новые координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{t}$. Последняя координата, координата времени $\bar{t}$, определяется при помощи нормальных часов $U_{\overline{P}}$, постоянно находящихся в точке $\overline{P}(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$.

Пусть E есть какое-нибудь физическое событие. В системе K этому событию соответствуют координаты $E \to (x,\ y,\ z,\ t)$, а в системе $\overline{K}$ — координаты $E \to (\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t})$. Отсюда следует:

Каждой системе значений $(x,\ y,\ z,\ t)$ соответствует вполне определенная система значений $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t})$. Это означает, что *как только четыре координаты в системе K заданы, то известны также соответствующие координаты в системе $\overline{K}$*. На языке математики такая связь выражается словами: координаты в системе $\overline{K}$ являются (однозначными) функциями координат в системе K и наоборот.

Эта зависимость записывается в виде следующей формулы:

$$(x,\ y,\ z,\ t) \overset{K}{\longleftrightarrow} E \overset{\overline{K}}{\longleftrightarrow} (\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t}).$$

Соответствующие одна другой системы значений

$$(x,\ y,\ z,\ t) \longleftrightarrow (\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \bar{t}) \qquad (1)$$

представляют собой координаты *одного и того же события E* (или совпадающих событий) в системах K и $\overline{K}$.

Формула (1) позволяет перейти от системы координат K к системе координат $\overline{K}$; поэтому ее называют формулой *преобразования координат*.

Конкретный вид формул преобразования координат определяется, во-первых, выбором систем координат K и $\overline{K}$ и, во-вторых, взаимным движением этих систем.

Наиболее простое и в то же время важное преобразование координат получается в случае, когда системы K и $\overline{K}$ движутся одна относительно другой *равномерно и прямолинейно* [1]). Однако и при таком ограничении структура преобразования (1) зависит от упомянутого выбора координатных систем. В классической физике эта структура иная, чем в специальной теории относительности. Подробно об этом будет сказано ниже, в § 2 и 3 настоящей главы.

В дальнейшем для простоты изложения мы ограничимся рассмотрением только *пространственно одномерного* случая. Тогда пространством системы K будет *«неизменяемая» ось x* [2]). Пусть в этой системе в каждой ее точке P с неизменяемой координатой x помещены «нормальные часы», с помощью которых наблюдатель B, находящийся в P, определяет время t событий, происходящих в P. Аналогичным образом, каждая про-

[1]) В рассмотренном выше примере (система K связана с Землей, а система $\overline{K}$ — с Солнцем) этот простой случай не имеет места. Движение Земли относительно Солнца сопровождается довольно сложным вращением.

[2]) Под «неизменяемостью» оси x следует понимать только то, что она состоит из множества точек P с *неизменными* (не зависящими от времени) *взаимными расстояниями*. Если координаты точек P_1 и P_2 этой пространственной системы равны x_1 и x_2, то расстояние P_1P_2 будет равно абсолютному значению разности $x_1 - x_2$.

странственная точка $\overline{P}$ системы $\overline{K}$, движущейся относительно системы K, имеет постоянную, т. е. не зависящую от времени $\overline{t}$ координату $\overline{x}$. С помощью часов, помещенных в точке $\overline{P}$, находящийся там наблюдатель $\overline{B}$ может измерять местное время $\overline{t}$. Событию E в системе K соответствуют координаты (x, t), а в системе $\overline{K}$ — координаты $(\overline{x}, \overline{t})$; следовательно, формула преобразования координат, связывающая между собой координаты события E в системах K и $\overline{K}$, имеет вид

$$(x, t) \longleftrightarrow (\overline{x}, \overline{t}). \qquad (2)$$

В качестве наглядного примера можно за систему $\overline{K}$ принять поезд, а за систему K — железнодорожное полотно, по которому движется поезд. Другим примером может служить река $\overline{K}$, текущая между берегов K, и т. д.

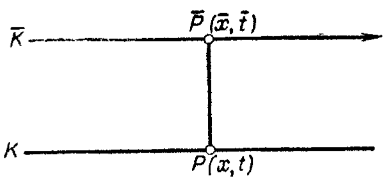


Рис. 44.

На рис. 44 пространственные оси K и $\overline{K}$ начерчены одна рядом с другой, хотя их можно представить себе также наложенными одна на другую; тогда ось $\overline{K}$ будет «скользить» вдоль оси K.

Формулу преобразования (2) будем понимать теперь следующим образом. В точке P, имеющей фиксированную пространственную координату x, находится наблюдатель B, который в момент местного времени t замечает, что мимо него проходит точка $\overline{P}$ системы $\overline{K}$, имеющая пространственную координату $\overline{x}$; в этот момент нормальные часы $U_{\overline{P}}$, помещенные в точке $\overline{P}$, показывают время $\overline{t}$. Следовательно, системе значений x, t соответствует система значений $\overline{x}$, $\overline{t}$ и наоборот, что и показывает формула (2).

При этом событие E, координаты которого равны x, t относительно системы K и $\overline{x}$, $\overline{t}$ относительно системы $\overline{K}$, заключается в следующем: точки P и $\overline{P}$ (или находящиеся в них наблюдатели B и $\overline{B}$) проходят «здесь и теперь» одна мимо другой, либо догоняя одна другую, либо встречаясь.

§ 2. Классические преобразования Галилея

Продолжим рассмотрение двух физических координатных систем $K(x, t)$ и $\overline{K}(\overline{x}, \overline{t})$ и соответствующей формулы преобразований координат

$$(x, t) \longleftrightarrow (\overline{x}, \overline{t}). \qquad (2)$$

При этом сначала будем исходить из представления об *абсолютном времени*. Это означает, что время не зависит от системы координат, относительно которой определяется время событий. Следовательно, если событие E происходит в системе K в точке $P(x)$ в момент времени t, а в системе $\overline{K}$ — в точке $\overline{P}(\overline{x})$ в момент времени $\overline{t}$, то должно иметь место равенство

А. $\qquad t = \overline{t} \quad$ (*время абсолютно*).

Таким образом, в тот момент времени, когда точки $P(x)$ и $\overline{P}(\overline{x})$ проходят одна мимо другой (совпадают), нормальные часы U_P и $U_{\overline{P}}$, помещенные в этих точках, показывают в точности одно и то же время.

Напротив, пространственные координаты x и $\overline{x}$ точек P и $\overline{P}$ при их совпадении, происходящем в результате относительного *движения* систем K и $\overline{K}$, не одинаковы. Связь между этими разными координатами x и $\overline{x}$ определяется формулой (2), в которой теперь следует положить $t = \overline{t}$.

Отсюда вытекает, что если пространственная координата x события E, происходящего в момент времени $t = \overline{t}$, известна относительно системы K, то при помощи формулы (2) может быть вполне определена также пространственная координата $\overline{x}$ этого же события относительно системы $\overline{K}$, и наоборот. На языке математики такая связь выражается словами: координата $\overline{x}$ представляет собой вполне определенную *функцию* от x и t, и, наоборот, координата x является вполне определенной функцией от $\bar{x}$ и t. В виде формул это записывается следующим образом:

$$\bar{x}=\bar{x}(x,\ t),\quad x=x(\bar{x},\ t). \tag{2'}$$

При условии что время абсолютно (предположение А), эти формулы эквивалентны формуле (2).

Выясним теперь, какой вид примут формулы преобразования координат, если ввести дополнительное предположение о движении систем K и $\bar{K}$, а именно считать, что эти системы движутся одна относительно

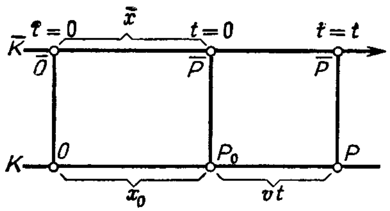


Рис. 45.

другой *равномерно*. Решение этой задачи дается во всех учебниках физики. Приведем его в несколько уточненном виде.

Предположим, что в момент времени $t=\bar{t}=0$ начальная точка $\bar{O}$ системы $\bar{K}$, неизменная пространственная координата которой равна $\bar{x}=0$, совпадает с начальной точкой O $(x=0)$ системы K. Пусть $\bar{P}$ есть произвольная точка системы $\bar{K}$ с неизменной координатой $\bar{x}$, следовательно, отрезок $\bar{O}\bar{P}=\bar{x}$, и пусть в момент времени $t==\bar{t}=0$ эта точка $\bar{P}$ проходит мимо точки P_0 системы K. Если пространственная координата точки P_0 равна x_0, то отрезок $OP_0=x_0$. Далее, пусть t есть произвольный более поздний момент времени $(t>0)$. В течение промежутка времени $(0,\ t)$ точка $\bar{P}$ (покоящаяся в системе $\bar{K}$) перемещается в новое положение относительно системы K (рис. 45). Пусть в момент времени t эта точка $\bar{P}$ совпадает с точкой P (системы K), пространственная координата которой равна $OP=x$.

Введем теперь упомянутое выше предположение:

Б. *Система $\bar{K}$ движется относительно системы K равномерно с постоянной скоростью v.*

Следовательно, скорость точки $\bar{P}$ равна v. В течение промежутка времени $(0,\ t)$ эта точка проходит относительно системы K путь P_0P, и этот путь равен vt (путь равен скорости, умноженной на время). Так как $OP=OP_0+P_0P_1$, то

$$x=x_0+vt,\qquad x_0=x-vt.$$

Учтем теперь (рис. 45), что расстояние $OP_0=x_0$ такое же, как и расстояние $\bar{O}\bar{P}=\bar{x}$. Положив в предыдущих формулах $x_0=\bar{x}$, мы окончательно получим

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}&=x-vt,\\ x&=\bar{x}+vt.\end{aligned}\right\} \tag{G}$$

или

Эти формулы называются **преобразованиями Галилея** и являются основными формулами классической кинематики. Они устанавливают связь между пространственными координатами x и $\bar{x}$ двух точек P и $\bar{P}$ системы K и соответственно системы $\bar{K}$, совпадающих в момент времени t $(=\bar{t})$. Или, иными словами, формулы (G) выражают закон связи между пространственными координатами x и $\bar{x}$ события E, происходящего в момент времени t, при условии, что движение системы $\bar{K}$ относительно системы K принимается *равномерным* (условие Б) [1]).

Если подойти к выполненному выводу формул (G) критически, то нетрудно обнаружить в нем слабое место. Сомнение вызывает утверждение, что $OP_0=\bar{O}\bar{P}$, т. е. что $x_0=\bar{x}$. Словами это равенство выражает следующее:

Отрезок $\bar{O}\bar{P}=\bar{x}$ представляет собой неизменное расстояние между покоящимися в системе $\bar{K}$ точками $\bar{O}$ и $\bar{P}$, измеренное *в системе $\bar{K}$* (при помощи единицы длины этой системы). Наблюдатель в точке *O системы K*

[1]) Выше было принято, что скорость системы $\bar{K}$ относительно системы K постоянна и равна v. Из формул (G) видно, что в этом случае скорость системы K относительно системы $\bar{K}$ равна $-v$, т. е. направлена в противоположную сторону, но по абсолютному значению одинакова со скоростью v.

в момент времени $t=0$ установит, что мимо него точно в этот момент времени проходит точка $\bar{O}$ системы $\bar{K}$ (событие E_0). Другой наблюдатель, также находящийся в системе K, но в точке P_0, *в этот же момент времени* $t=0$ заметит, что мимо точки P_0 проходит точка $\bar{P}$ системы $\bar{K}$ (событие E). Следовательно, отрезок $OP_0=x_0$ определяет пространственное расстояние между событиями E_0 и E в системе K. Или, иными словами, отрезок $OP_0=x_0$ представляет собой «пространственную проекцию» отрезка $\bar{O}\bar{P}=\bar{x}$ системы $\bar{K}$ в момент времени $t=0$ на систему K. Обратно, отрезок $\bar{O}\bar{P}=x$ есть «пространственная проекция» отрезка $OP_0=x_0$ системы K в тот же момент времени $t=0$ на систему $\bar{K}$.

Таким образом, утверждение, что $OP_0=\bar{O}\bar{P}$ (или $x_0=\bar{x}$) означает следующее:

В. *При движении двух систем K и $\bar{K}$ одна относительно другой пространственное расстояние между двумя событиями (E_0 и E) одинаково, независимо от того, в какой системе оно измеряется.*

Это заключение кажется почти само собой разумеющимся, по крайней мере, оно представляет собой наиболее простое из возможных допущений. Поэтому классическая физика принимает его сразу, не занимаясь более детально его обоснованием. Однако более точный анализ показывает, что для принятия этого допущения не имеется каких-либо принуждающих наглядных или логических доводов. Следовательно, говоря о допущениях, лежащих в основе вывода преобразований Галилея, необходимо для ясности и полноты указывать не только допущения А и Б, но также допущение В.

Выведем при помощи преобразований Галилея так называемый *закон сложения скоростей* классической физики.

Для этой цели рассмотрим сигнал, например материальную частицу M, движущуюся относительно систем K и $\bar{K}$. Пусть скорость этой частицы относительно системы $\bar{K}$ постоянна и равна $\bar{u}$. Определим скорость частицы M относительно системы K.

Обычно это определение выполняется следующим образом. Проследим за движением частицы M в течение

единицы времени, например в течение секунды. Так как скорость частицы M относительно системы $\bar{K}$ (измеренная, например, в метрах в секунду) равна $\bar{u}$, то частица M в течение одной секунды проходит относительно системы $\bar{K}$ путь $\bar{u}$ (метров). В течение этого же промежутка времени система $\bar{K}$ перемещается на v (метров) относительно системы K. Следовательно, частица M в течение одной секунды проходит относительно системы K путь $v+\bar{u}$; поэтому скорость частицы M в системе K равна

$$u=\bar{u}+v. \tag{G'}$$

Эта формула и представляет собой классический з а к о н с л о ж е н и я с к о р о с т е й[1]).

§ 3. Релятивистские преобразования Лоренца

Задержимся еще на одну-две минуты на точке зрения классической кинематики и преобразований Галилея. Пусть «галилеева система $\bar{K}$» опять движется со скоростью v относительно галилеевой системы K. Согласно закону сложения скоростей (G′), сигнал S, скорость которого относительно системы $\bar{K}$ равна $\bar{u}$, имеет

[1]) Более точно формула (G′) выводится из формулы (G) следующим образом. Рассмотрим два момента времени $t=t_1$ и $t=t_2$ $(>t_1)$. Пусть в момент времени $t=t_1$ пространственная координата частицы равна x_1 в системе K и $\bar{x}_1$ — в системе $\bar{K}$. В момент времени $t=t_2$ эти координаты пусть равны соответственно x_2 и $\bar{x}_2$. Согласно преобразованиям Галилея (G), мы имеем

$$\bar{x}_1=x_1-vt_1, \qquad \bar{x}_2=x_2-vt_2;$$

следовательно,

$$\bar{x}_2-\bar{x}_1=(x_2-x_1)-v(t_2-t_1),$$

или

$$\frac{\bar{x}_2-\bar{x}_1}{t_2-t_1}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}-v.$$

Здесь слева мы имеем частное от деления пути на время, т. е. скорость $\bar{u}$. Частное справа соответственно равно u. Таким образом, действительно

$$\bar{u}=u-v \quad \text{и} \quad u=\bar{u}+v.$$

относительно системы K скорость $u=v+\bar{u}$. Следовательно, в классической физике сигнал S имеет *различные* скорости относительно двух систем K и $\bar{K}$, движущихся одна относительно другой (это означает, что $v\neq0$).

В частности, необходимо отметить следующее обстоятельство. Если сигнал S посылается в направлении, противоположном первоначальному, т. е. теперь относительно системы $\bar{K}$ он имеет скорость $-\bar{u}$ (следовательно, *абсолютное значение* скорости относительно системы $\bar{K}$ остается неизменным), то его скорость относительно системы K, согласно формуле (G′), будет равна $u=v-\bar{u}$. Эта скорость (относительно системы K) по своему абсолютному значению уже не равна прежней скорости $u=v+\bar{u}$ (относительно системы K)[1].

Согласно представлению классической оптики, свет распространяется в виде колебаний гипотетической среды, называемой «мировым эфиром». Скорость света была определена еще в 1673 г. Рёмером (Römer) путем наблюдения затмений спутников планеты Юпитера. Более поздние и более тонкие измерения уточнили результат, полученный Рёмером. Скорость света довольно точно равна 300 000 *км/сек*. Однако «скорость» представляет собой относительное понятие. Следовательно, когда речь идет о скорости, всегда необходимо указывать, относительно какой системы координат эта скорость определяется. Классическая физика истолковывала результаты измерений так, что $c=300\,000$ *км/сек* есть скорость света относительно *мирового эфира*.

В 1881 г. Майкельсон (Michelson) провел ряд экспериментов с целью определения скорости света относительно Земли *в разных направлениях*. Результат получился совершенно неожиданным. Если через K обозначить местную систему координат, определяемую Землей, а через $\bar{K}$ — систему координат, связанную с эфиром, то, как мы видели несколько выше, скорости световых сигналов, посылаемых относительно поверхности Земли в различных направлениях, должны были бы иметь разные значения в зависимости от направления. Однако опыты Майкельсона показали полное отсутствие такой зависимости, которую следовало бы ожидать согласно закону сложения скоростей (G′). Вместо этого выяснилось, что свет распространяется в любом направлении относительно поверхности Земли *с одной и той же* постоянной скоростью c.

[1]) Пусть, например, системой $\bar{K}$ является поезд, скорость которого v относительно поверхности Земли равна 100 километров в час. В качестве сигнала S будем рассматривать пассажира, передвигающегося в поезде со скоростью 5 *км/час* сначала в направлении движения, а затем в противоположном направлении. Его скорость относительно системы K в первом случае будет равна $u=v+\bar{u}=100+5=105$ *км/час*, а во втором случае — только $v-\bar{u}=100-5=95$ *км/час*.

Согласно классической физике, этот парадоксальный результат можно было бы объяснить, предположив, что Земля увлекает за собой слой эфира таким образом, что сама остается в покое относительно этого слоя. Однако такое предположение несовместимо с другими свойствами эфира, которые необходимо было бы принять для того, чтобы гипотеза эфира не привела к противоречиям.

Создавшееся положение заставило физиков искать для объяснения парадоксального результата, полученного Майкельсоном, другие, более глубокие причины. В результате этих поисков голландский физик Г. А. Лоренц (H. A. Lorentz, 1853—1928) показал, что в кинематике переход от одной системы координат к другой определяется не преобразованиями Галилея, а другими преобразованиями, названными впоследствии *преобразованиями Лоренца*. Фундаментальный смысл этих преобразований был разъяснен только несколько лет спустя (в 1905 г.), когда Эйнштейн вывел их из своего постулата *постоянства скорости света* и при этом окончательно отказался от представления об абсолютном времени.

В § 1 этой главы мы составили для преобразования координат формулы (1) и (2) в наиболее общем виде, не сделав никакого предположения о том, существует или не существует абсолютное время. В § 2 мы предположили, что время абсолютно, и на основе этого допущения вывели преобразования Галилея. Теперь перед нами стоит задача выяснить, какой специальный вид принимают формулы (1) и (2) при предположениях, положенных Эйнштейном в основу теории относительности.

Вывод преобразований Лоренца.

Опять, как и на стр. 159, рассмотрим пространственно одномерный мир событий и соответствующую формулу преобразования координат (2) (стр. 160), позволяющую переходить от системы $K(x, t)$ к другой системе $\overline{K}(\bar{x}, \bar{t})$ (и обратно).

Как и раньше (условие Б), введем предположение:

I. *Система $\overline{K}$ движется относительно системы K с постоянной скоростью.*

В качестве нового постулата Эйнштейн ввел предположение:

II. *Существует сигнал S, скорость с которого одинакова относительно обеих систем K и $\overline{K}$ (независимо от того, в каком направлении этот сигнал посылается).*

Мы намеренно сформулировали постулат в этой общей форме, хотя в действительности Эйнштейн понимал под таким примечательным сигналом световой сигнал, имеющий, в соответствии с результатом опытов Майкельсона, одну и ту же скорость $c = 300\,000$ *км/сек* относительно различных систем (K, $\overline{K}$, ...) даже в том случае, когда эти системы движутся одна относительно другой. Именно этот *постулат постоянства скорости света* находится в противоречии с представлением об абсолютном времени ($t = \bar{t}$) и с классическим законом сложения скоростей и требует релятивизации понятия времени. В результате такой релятивизации двое часов U_P и $U_{\overline{P}}$, помещенных в системах K и $\overline{K}$, при их пространственном совпадении в общем случае не показывают одно и то же время ($t \neq \bar{t}$). Соответственно этому должен быть видоизменен и классический закон сложения скоростей, основанный на постулате абсолютного времени.

Из принятия постулатов I и II прежде всего следует, что преобразование (2) *линейное*, т. е. что формулы, выражающие $\bar{x}$ и $\bar{t}$ в явном виде, представляют собой многочлены первой степени относительно

x и t (и наоборот) [1]). Если, кроме того, мы примем, как и при выводе преобразований Галилея, что начальная точка системы $\overline{K}$, т. е. событие $\bar{x} = 0$, $\bar{t} = 0$, имеет те же самые координаты $x = 0$, $t = 0$ в системе K, то формулы, выражающие преобразования (2), будут иметь вид [2]):

$$\bar{x} = \alpha(x - vt), \quad \bar{t} = \alpha\left(-\frac{v}{c^2}x + t\right). \tag{2''}$$

---

[1]) Доказательство этого утверждения требует применения дифференциального и интегрального исчислений, поэтому мы не приводим его. [Существует и элементарное, но не очень простое доказательство этого утверждения (см. Александров А. Д. и Овчинникова Б. В., Замечания к основам теории относительности, *Вестник Ленинградского университета*, 11, вып. 4 (1953), 95—110.) — *Прим. ред.*]

[2]) Элементарный вывод этих формул может быть выполнен следующим образом. Как уже было сказано выше, они должны быть линейны, т. е. должны иметь вид

$$\bar{x} = \alpha x + \beta t, \quad \bar{t} = \gamma x + \delta t, \tag{а}$$

где коэффициенты α, β, γ и δ постоянны (не зависят от координат). Рассмотрим два события E_0 и E. Событием E_0 пусть является посылка сигнала из точки $x = 0$, $t = 0$ системы K. Согласно сделанному выше предположению, событие E_0 имеет в системе $\overline{K}$ те же самые координаты $\bar{x} = 0$, $\bar{t} = 0$. Вторым событием пусть будет следующее: сигнал S (см. постулат II) проходит через точку x (в системе K) в момент местного времени t. Путь, пройденный сигналом S в течение t секунд, равен x, а так как скорость сигнала, согласно постулату II, равна c, то $x = ct$. Координаты $\bar{x}$, $\bar{t}$ сигнала E могут быть вычислены по формулам преобразования (а). Подставив в них $x = ct$, мы получим

$$\bar{x} = (\alpha c + \beta)\,t, \quad \bar{t} = (\gamma c + \delta)\,t;$$

следовательно, скорость сигнала S относительно системы $\overline{K}$ равна

$$\frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}.$$

С другой стороны, эта скорость, согласно постулату II, равна c; поэтому мы имеем

$$c = \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta},$$

или

$$\gamma c^2 + (\delta - \alpha)\,c - \beta = 0. \tag{б}$$

Пусть теперь сигнал S послан в противоположном направлении, следовательно, его скорость будет теперь равна $-v$, причем

Следовательно, постулаты I и II определяют формулы преобразований с точностью до постоянного множителя α. Эту постоянную можно найти различными способами, из которых простейшим будет, вероятно, следующий.

Преобразования Галилея (G) обладают свойством симметрии, а именно:

III. *Формулы преобразований, осуществляющие переход от системы K к системе $\bar{K}$, по своему виду одинаковы с формулами, осуществляющими обратный переход от системы $\bar{K}$ к системе K.*

Необходимо только значение v скорости системы $\bar{K}$ относительно системы K заменить на $-v$, т. е. на значение скорости системы K относительно системы $\bar{K}$.

опять и относительно системы K, и относительно системы $\bar{K}$. Отсюда вытекает, что уравнение (б) должно иметь место и в том случае, если c заменить на $-c$

$$\gamma c^2 - (\delta - \alpha) c - \beta = 0. \tag{б$'$}$$

Вычтя из уравнения (б) уравнение (б$'$), а затем сложив их, мы найдем

$$\delta = \alpha, \quad \beta = \gamma c^2,$$

и формулы (а) примут вид

$$\bar{x} = \alpha x + \gamma c^2 t, \quad \bar{t} = \alpha t + \gamma x. \tag{а$'$}$$

До сих пор мы использовали только постулат II. Определим теперь скорость точки $\bar{x}=0$ системы $\bar{K}$ относительно системы K. Эта точка $\bar{O}$ ($\bar{x}=0$), согласно предположению, проходит в момент времени $\bar{t}=0$ мимо точки $x=0$ системы K, причем в системе K в этот момент часы показывают местное время $t=0$. Пусть, далее, та же самая точка $\bar{O}(\bar{x}=0)$ проходит мимо точки x системы K в момент местного времени t. Тогда, согласно первой из формул (а$'$),

$$0 = \alpha x + \gamma c^2 t \quad \text{или} \quad \frac{x}{t} = -\gamma \frac{c^2}{\alpha}.$$

Частное x/t есть не что иное, как скорость точки $\bar{O}$ относительно системы K, а эта скорость, согласно постулату I, равна v. Следовательно,

$$v = -\gamma \frac{c^2}{\alpha}, \quad \text{или} \quad \gamma = -\alpha \frac{v^2}{c^2}.$$

Подставив это значение γ в формулы (а$'$), мы получим искомые формулы (2$''$).

Примем теперь, что свойство симметрии (постулат III) должно соблюдаться также в рассматриваемом релятивистском случае[1]). Согласно этому постулату, уравнения (2$''$), решенные относительно x и t, должны иметь вид

$$x = \alpha(\bar{x} + v\bar{t}), \quad t = \alpha\left(\frac{v}{c^2}\bar{x} + \bar{t}\right)$$

(x и t переходят в $\bar{x}$ и $\bar{t}$, а v заменяется на $-v$).

С другой стороны, значения x и t можно вычислить непосредственно из уравнений (2$''$), если принять, что $\bar{x}$ и $\bar{t}$ известны. Следовательно, необходимо решить систему из двух уравнений первой степени с двумя неизвестными x и t. Выполнив это известным элементарным способом, мы получим:

$$x = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}(\bar{x} + v\bar{t}), \quad t = \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}\left(\frac{v}{c^2}\bar{x} + \bar{t}\right). \tag{2$'''$}$$

Постулат III требует, чтобы множители

$$\alpha \quad \text{и} \quad \frac{1}{\alpha\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)},$$

стоящие в правых частях формул (2$''$) и (2$'''$), были одинаковы, т. е., чтобы имело место равенство

$$\alpha^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Так как величина α^2 положительна, то должна быть положительной также разность $1 - v^2/c^2$, следовательно, относительная скорость v систем $\bar{K}$ и K *меньше ско-*

---

[1]) Так как это свойство логически не очевидно, то мы сформулировали его в виде особого (третьего) постулата.

рости света с. Таким образом

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

причем значение квадратного корня следует взять, как будет показано ниже (см. стр. 182), со знаком плюс. Формулы преобразования (2″) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt), \\ \bar{t} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right). \end{aligned}\right\} \qquad \text{(L)}$$

Эти так называемые релятивистские *преобразования Лоренца* не совпадают с классическими преобразованиями Галилея. В частности, время теперь уже не абсолютно. Вместо классического равенства $\bar{t}=t$ мы имеем для связи между показаниями $\bar{t}$ и t двух часов $U_{\bar{P}}$ и U_P, помещенных в точках $\bar{P}$ и P систем $\bar{K}$ и K, при совпадении точек $\bar{P}$ и P вторую из формул (L). Следовательно, время относительно, т. е. зависит от системы координат (K, $\bar{K}$ и т. д.), в которой это время определяется.

По этой же причине сложение скоростей теперь не подчиняется классическому закону (G′). Релятивистскую форму этого закона легко вывести из формул преобразований Лоренца (L) следующим образом.

Пусть теперь S есть *произвольный* сигнал, посылаемый из точки $x=0$ системы K в момент времени $t=0$ (начальное событие E_0). В системе $\bar{K}$ это событие имеет такие же координаты $\bar{x}=0$, $\bar{t}=0$. Далее, пусть сигнал S достигает точки x системы K в момент времени t (событие E). В системе $\bar{K}$ это событие имеет координаты $\bar{x}$, $\bar{t}$, которые вычисляются по координатам x и t при помощи формул (L). Скорость сигнала S относительно системы K равна x/t (частному от деления пути на время).

Разделив левую и правую части первой из формул (L) соответственно на левую и правую части второй из формул (L), мы получим скорость $\bar{u}$ сигнала S относительно системы $\bar{K}$:

$$\bar{u} = \frac{\bar{x}}{\bar{t}} = \frac{x - vt}{t - \frac{v}{c^2}x} = \frac{\frac{x}{t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{x}{t}},$$

или

$$\bar{u} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \qquad \text{(L′)}$$

Это и есть релятивистский закон преобразования скоростей. Поскольку мы предположили, что относительная скорость v и скорость u сигнала S в системе K постоянны, то из формулы (L′) следует, что сигнал S имеет, как и в классическом случае, постоянную скорость $\bar{u}$ также относительно системы $\bar{K}$. Однако теперь скорость $\bar{u}$ равна не разности $u - v$, как в классической физике, а разности $u - v$, деленной на выражение $1 - uv/c^2$.

Из формулы (L′) непосредственно вытекает, что скорость света c действительно принимает одно и то же значение для всех лоренцевых систем K, $\bar{K}$ и т. д. В самом деле, положив в формуле (L′) $u=c$, мы получим

$$\bar{u} = \frac{c - v}{1 - \frac{v}{c}} = c\frac{c - v}{c - v} = c,$$

следовательно, $\bar{u}=c$, как этого и требует постулат постоянства скорости света.

Сравнение преобразований Галилея и Лоренца

Первая из формул преобразований Лоренца (L) отличается от соответствующей формулы $\bar{x}=x-vt$ преобразований Галилея только тем, что в ее правой части перед выражением $x - vt$ стоит еще так называемый «коэффициент Лоренца»

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

где c есть скорость света, а v — скорость системы $\overline{K}$ относительно системы K. Если скорость v мала по сравнению со скоростью c, то мало также и частное v/c, и величина $1 - v^2/c^2$ лишь незначительно отличается от единицы. То же самое имеет место и для квадратного корня, поэтому обратное значение этого корня, равное α, тем меньше отличается от «галилеева значения» $\alpha = 1$, чем меньше относительная скорость v по сравнению со скоростью света c.

Пусть, например, система K есть железнодорожное полотно, а система $\overline{K}$ — поезд, движущийся со скоростью $v = 100$ *км/час*. Тогда частное v/c равно приблизительно одной десятимиллионной, и простое вычисление показывает, что α в этом случае приближенно равно

$$\alpha = 1{,}00\ldots05,$$

где первые 14 десятичных знаков равны нулю.

К аналогичному результату приводит и вторая формула преобразований Лоренца

$$\bar{t} = \alpha\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) = \alpha t - \frac{\alpha v}{c^2}x.$$

Если v мало по сравнению с c, то α лишь очень немного превышает единицу. Кроме того, в члене $(v/c^2)x$ множитель v/c^2 исчезающе мал. Поэтому второй член чрезвычайно мал, если только x не очень велико. Следовательно, временна́я координата $\bar{t}$ с большой точностью равна $\bar{t} = t$, т. е. тому значению, которое требуется постулатом абсолютного времени.

Итак, мы видим, что чем меньше относительная скорость v систем K и $\overline{K}$, тем меньше отличаются преобразования Лоренца от преобразований Галилея. Следовательно, кинематика классической физики содержится в релятивистской кинематике как *предельный случай*. Для сравнительно небольших скоростей v, для таких, которые в нашем повседневном опыте являются «нормальными», выводы теории относительности практически совпадают с выводами механики Ньютона.

В частности, такое совпадение имеет место также для закона сложения скоростей. В самом деле, если

в формуле (L′) c будет неограниченно расти, то в пределе получится классическое правило (G′) : $\bar{u} = u - v$.

Таким образом, в большей части практических случаев безразлично, пользоваться ли преобразованиями Лоренца или преобразованиями Галилея. Иначе обстоит дело в тех случаях, когда рассматриваемые расстояния или скорость v весьма велики. Тогда множитель α становится значительно большим единицы, и преобразования Лоренца приводят к совершенно иным результатам, чем преобразования Галилея. С такими явлениями встречается современная физика, например теория атома, при исследовании чрезвычайно быстрых явлений излучения и колебаний. Когда скорость v приближается к скорости света c, *множитель Лоренца возрастает неограниченно.*

Из сказанного выше видно, что в относительности времени, в постулате постоянства скорости света или в преобразованиях Лоренца нет ничего мистического. Для привыкших к понятиям классической физики кинематика теории относительности сначала кажется странной. Между тем правильное понимание релятивистских понятий вряд ли труднее, чем понимание соответствующих классических понятий, конечно, при условии исключения поверхностного подхода ко всему вопросу и догматической приверженности к старому ходу мыслей.

Тем не менее нельзя отрицать, что классические представления, будучи предельным случаем релятивистских представлений, занимают особое положение. Уже формальный вид преобразований Лоренца показывает, что структура релятивистской кинематики несколько сложнее, чем у классической кинематики. Классическое представление $\bar{t} = t$ (постулат абсолютного времени), без сомнения, проще, чем принятие относительного, зависящего от выбора системы отсчета, времени [вторая из формул (L) преобразований Лоренца].

Стремление человеческого разума к образованию простых и экономных понятий объясняет, почему восприятие пространственно-временны́х явлений сначала привело к *евклидову* представлению и только значительно позднее и притом с большим трудом — к неевклидовой теории пространства. Совершенно аналогично обстояло дело и с понятием времени. В нашем повседневном опыте мы вполне обходимся простым представлением об абсолютном времени. Именно поэтому в течение тысячелетий никакая причина не побуждала человека ввести более сложное релятивистское понятие времени. Однако с развитием науки, при непрестанном уточнении и расширении как практического опыта, так и теоретических знаний возникла необходимость пересмотреть понятие времени, что и привело от классического понимания кинематики к релятивистскому представлению. Несколько позже новые философско-теоретические взгляды привели к чрезвычайно важным практическим последствиям, свидетелями которых мы стали в текущем столетии.

В первые годы возникновения теории относительности противники новых идей производили многочисленные опыты с целью обнаружить мнимые бессмысленности и противоречия релятивистских представлений. Такое отрицательное отношение к теории относительности приходится наблюдать и теперь, правда, только со стороны неспециалистов[1]). В прошедшие годы мне часто приходилось рассматривать попытки доказать противоречивость принципов теории относительности. Ошибочные заключения, выдвигаемые против теории относительности, основываются обычно на следующей путанице.

Желая доказать противоречивость, например, постулата Эйнштейна об инвариантности скорости света, противники теории относительности в своих рассуждениях часто выдвигают (не замечая этого) в качестве противоположных аргументов принципы классической физики, например закон сложения скоростей. Между тем в теории относительности классические принципы неприменимы, и само собой понятно, что при критике *теории относительности* такие аргументы не могут применяться.

[1]) Однако несколько раньше активное противодействие теории относительности оказывали также некоторые физики и философы. Классическим сводом человеческих заблуждений и научного мракобесия служит изданный в гитлеровской Германии том «100 авторов против Эйнштейна», содержащий, увы, «изыскания» далеко не одних только фашистских уч[illegible]. — *Прим. ред.*

Каждому, обладающему определенным кругом знаний в области элементарной математики, должно быть ясно, что в кинематике теории относительности не содержится никаких логических противоречий. Что касается эмпирической применимости этой кинематики, то с течением времени она получает все новые и новые подтверждения.

§ 4. Мир событий и его геометрия

В § 6 гл. II физические события E изображались как точки четырехмерного «мира событий». «Мировая точка» E определялась относительно физической системы координат (пространственно-временно́й системы) K тремя пространственными координатами x, y, z и одной временно́й координатой t.

Для наглядности мы ограничились рассмотрением пространственно одномерной системы K. В этом случае событие E изображалось точкой двумерной «плоскости событий». Такая мировая точка E определялась двумя координатами — одной пространственной (x) и одной временно́й (t) (см. рис. 34, стр. 143).

В настоящей, третьей главе мы перешли к описанию событий E относительно *двух различных* систем K и $\overline{K}$, равномерно движущихся одна относительно другой (скорость v системы $\overline{K}$ относительно системы K постоянна). Теперь каждой мировой точке E соответствуют две пары координат: (x, t) в K и $(\bar{x}, \bar{t})$ — в $\overline{K}$. Связь между этими парами координат устанавливается при помощи общей формулы преобразования координат (2) (стр. 161). Событию E соответствует в системе K точка с координатами (x, t), в системе $\overline{K}$ — точка с координатами $(\bar{x}, \bar{t})$. Следовательно, если оси систем K и $\overline{K}$ начертить в *двух различных* плоскостях, то событию E в к а ж д о й плоскости будет соответствовать определенная изображающая точка. Формула преобразования (2) определяет однозначное соответствие между точками этих плоскостей.

Мы получим более наглядное геометрическое представление этого соответствия, если разные координатные системы K и $\bar{K}$ начертим в *одной и той же* «плоскости событий» (E). При этом возникает следующий вопрос: как провести оси координат x, $\bar{x}$, t и $\bar{t}$ для того, чтобы координаты (x, t) и ($\bar{x}$, $\bar{t}$) какого-нибудь события E были связаны между собой 1) преобразованиями Галилея; 2) преобразованиями Лоренца.

Геометрическое представление преобразований Галилея

Сначала решим поставленную задачу для преобразований Галилея

$$\bar{x} = x - vt, \quad \bar{t} = t.$$

В этом случае одним из удобных способов расположения систем координат K и $\bar{K}$ является следующий

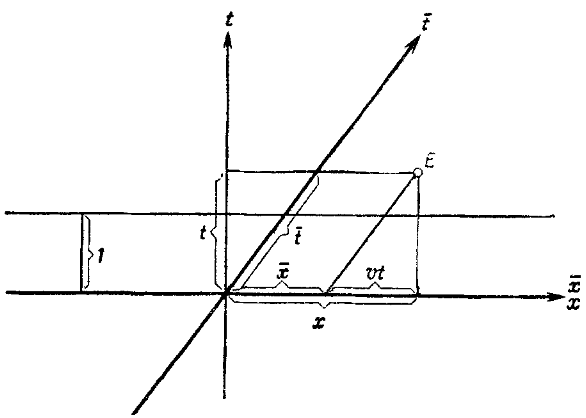


Рис. 46.

(рис. 46). Оси одной из систем, например системы K, проводятся произвольно, причем безразлично, под прямым или не прямым углом одна к другой. Система $\bar{K}$ располагается в той же плоскости. Так как $\bar{t}=t$ (время абсолютно), то ось $\bar{x}$ ($\bar{t}=0$) системы $\bar{K}$ должна совпасть с осью x ($t=0$) системы K.

Наоборот, ось времени (ось постоянного места) при переходе от системы K к системе $\bar{K}$ должна измениться. В самом деле, в системе K ее уравнением будет $x=0$, а в системе $\bar{K}$ в соответствии с первой из формул преобразований Галилея $\bar{x}=x-vt=0$, т. е. $x=vt$. Следовательно, с точки зрения системы K осью $\bar{t}$ будет прямая с подъемом $1/v$ (рис. 46).

Координаты мировой точки E мы определим, спроектировав точку E на соответствующие оси, во-первых, посредством прямой, параллельной оси x (или, что то же самое, оси $\bar{x}$), и, во-вторых, посредством прямой, параллельной оси t или соответственно оси $\bar{t}$. Так как $\bar{t}=t$, то единицы времени ($t=1$, $\bar{t}=1$) должны быть выбраны так, чтобы точки ($x=0$, $t=1$) и ($\bar{x}=0$, $\bar{t}=1$), соответствующие единицам времени, лежали на прямой, параллельной оси x (или $\bar{x}$). Тогда численные значения координат времени t и $\bar{t}$ мирового события E будут *одинаковы*, как этого и требует постулат абсолютного времени $t=\bar{t}$.

Геометрическое представление преобразований Лоренца

Перейдем к преобразованиям Лоренца. Как и выше, расположим одну из систем координат, например K, произвольно в «мировой плоскости» (E). Тогда выбор системы $\bar{K}$ будет однозначно определен преобразованиями Лоренца.

Положение оси $\bar{x}$ системы $\bar{K}$ мы найдем, подставив во вторую из формул преобразований Лоренца (L) $\bar{t}=0$; тогда мы получим

$$t - \frac{v}{c^2}x = 0,$$

следовательно, осью $\bar{x}$ будет прямая, подъем которой (в системе K) равен $t/x=v/c^2$. Таким образом, теперь ось $\bar{x}$ не совпадает с осью x (рис. 47).

Ось времени системы $\bar{K}$ (т. е. ось $\bar{t}$) имеет уравнение $\bar{x}=0$ или, согласно первой из формул (L),

$$x - vt = 0.$$

Следовательно, ось $\bar{t}$ располагается в системе K так же, как и в классическом случае.

После выбора единиц длины и времени в системе K соответствующие единицы в системе $\overline{K}$ однозначно определяются преобразованиями Лоренца. Результат получается несколько более сложным. Приведем его здесь без пояснений, доказательство дадим ниже (стр. 197).

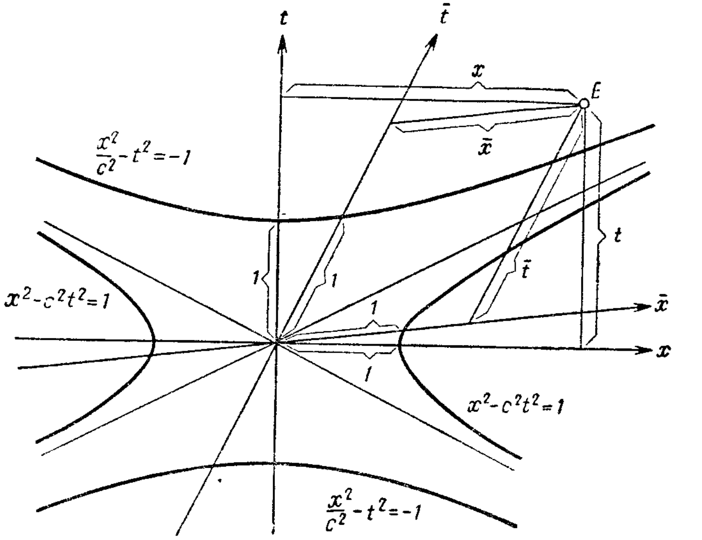


Рис. 47. Единица длины $= 150\,000$ *км*, единица времени $= 1$ *сек*; $c = 2$, $v = 1/2$.

При преобразованиях Галилея единичный временно́й вектор для системы $\overline{K}$ (т. е. вектор, соединяющий общую начальную точку $O = \overline{O}$ обеих систем координат K и $\overline{K}$ с точкой $\bar{x} = 0$, $\bar{t} = 1$) определяется пересечением оси $\bar{t}$, т. е. прямой $x = vt$ в системе K, с прямой $t = \bar{t} = 1$, параллельной оси x. При преобразованиях Лоренца ось $\bar{t}$ остается такой же, как при преобразованиях Галилея, но теперь для получения единичного временно́го вектора ось $\bar{t}$ должна быть пересечена верхней ветвью гиперболы

$$\frac{x^2}{c^2} - t^2 = -1$$

(см. рис. 47).

В классическом случае оси x и $\bar{x}$ совпадают, поэтому единичный пространственный вектор, соединяющий общую начальную точку $O = \overline{O}$ обеих систем координат K и $\overline{K}$ с точкой $\bar{x} = 1$, $\bar{t} = 0$, один и тот же в обеих системах K и $\overline{K}$. Иначе получается при преобразованиях Лоренца. Теперь конечная точка $\bar{x} = 1$, $\bar{t} = 0$ единичного пространственного вектора в системе $\overline{K}$ лежит в пересечении оси $\bar{x}$ (т. е. прямой $t = vx/c^2$) с правой ветвью гиперболы $x^2 - c^2t^2 = 1$ (см. рис. 47).

§ 5. Преобразования Лоренца и постулат причинности

Займемся исследованием интервалов между событиями и пространственными и временны́ми проекциями этих интервалов с точки зрения классической и релятивистской кинематики.

Рассмотрим два события E_1 и E_2 и их координаты: (x_1, t_1), (x_2, t_2) в системе K и $(\bar{x}_1, \bar{t}_1)$, $(\bar{x}_2, \bar{t}_2)$ в системе $\overline{K}$. Пространственными и временными «проекциями» интервала E_1E_2 между событиями E_1 и E_2 будем называть величины

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta\bar{x} = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$$

и

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad \Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1.$$

Подставим координаты рассматриваемых двух событий в формулы преобразований Галилея

$$\bar{x} = x - vt, \quad \bar{t} = t$$

и вычтем полученные равенства для события E_2 из соответствующих равенств для события E_1. Мы получим

$$\Delta\bar{x} = \Delta x - v\,\Delta t, \quad \Delta\bar{t} = \Delta t. \qquad (G'')$$

Аналогичным образом из формул преобразований Лоренца мы найдем

$$\Delta\bar{x} = \alpha(\Delta x - v\,\Delta t), \quad \Delta\bar{t} = \alpha\left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x\right), \qquad (L'')$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

есть коэффициент Лоренца. Мы видим, что в обоих случаях для разностей координат получаются формулы такой же структуры, как и для самих координат.

Таким образом, при преобразованиях Галилея интервал E_1E_2 между двумя событиями E_1 и E_2 имеет одинаковые временны́е проекции в обеих координатных системах, т. е. $\Delta\bar{t}=\Delta t$, что, впрочем, сразу вытекает также из предположения об абсолютном времени. Что касается пространственной проекции Δx, то при переходе к системе $\bar{K}$ она изменяется и, как показывает первая из формул (G″), становится равной $\Delta\bar{x}=\Delta x-v\Delta t$. В теории относительности при переходе от системы K к системе $\bar{K}$ изменяются, как показывают формулы (L″), и пространственная, и временна́я проекции.

Предположим, что события E_1 и E_2 с точки зрения системы K происходят в одном и том же месте. Следовательно, событие E_1 отвечает в системе K неподвижной точке P в момент времени $t=t_1$, а событие E_2 — той же точке P в более поздний момент времени $t=t_2>t_1$. Так как точка P представляет собой «сигнал», то событие E_2, согласно *постулату причинности*, наступает позже события E_1 во всех системах координат, в частности и в системе $\bar{K}$. Поэтому $\bar{t}_2>\bar{t}_1$, или $\Delta\bar{t}>0$. Следовательно, на основании второй из формул (L″) и с учетом того, что $\Delta x=0$, мы имеем

$$\Delta\bar{t}=\alpha\left(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x\right)=\alpha\,\Delta t>0.$$

Так как $\Delta t>0$, то из этого соотношения вытекает, что коэффициент Лоренца α должен быть больше нуля. Мы видим, что сделанный на стр. 172 выбор положительного знака перед квадратным корнем, определяющим коэффициент α, представляет собой *логическое следствие постулата причинности.*

Из этого постулата вытекает еще одно следствие. Выше (стр. 171) мы выяснили, что формулы преобразования Лоренца (L) имеют смысл только в том случае, когда относительная скорость v систем K и $\bar{K}$ *меньше скорости света.* Это обстоятельство, однако, не следует вводить в качестве нового, независимого постулата.

В самом деле, из *постулата причинности* следует общая теорема:

Инвариантная скорость света c является наибольшей возможной скоростью сигнала.

Доказательство. Пусть S есть сигнал, наблюдаемый в точке $x=x_1$ системы K в момент времени $t=t_1$ и проходящий через точку $x=x_2$ в более поздний момент времени $t=t_2$ $(t_2>t_1)$. Пусть координатами этих обоих событий E_1 и E_2 в системе $\bar{K}$ будут $\bar{x}=\bar{x}_1$, $\bar{t}=\bar{t}_1$ и соответственно, $\bar{x}=\bar{x}_2$, $\bar{t}=\bar{t}_2$. Так как $E_1\rightarrow E_2$, то из этого причинного отношения следует, что обе величины $\Delta t=t_2-t_1$ и $\Delta\bar{t}=\bar{t}_2-\bar{t}_1$ положительны. Согласно второй из формул (L″) мы имеем

$$\Delta\bar{t}=\alpha\left(\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x\right).$$

Так как $\Delta\bar{t}>0$ и $\alpha>0$, то отсюда следует, что

$$\Delta t-\frac{v}{c^2}\Delta x>0,$$

или (если предположить, что $v>0$, что не означает никакого ограничения)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}<\frac{c^2}{v}=c\frac{c}{v}. \tag{a}$$

Частное слева («путь, деленный на время») дает (среднюю) скорость сигнала S относительно системы K. Согласно формуле (a) эта скорость не может превысить значения c^2/v.

Этот результат справедлив при любом выборе системы $\bar{K}$, движущейся относительно системы K. Предположим теперь, что существуют системы $\bar{K}$, относительные скорости которых по отношению к системе K сколь угодно близки к скорости света c. В таком случае частное c/v будет принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся от единицы, следовательно, правая часть c^2/v неравенства (a) будет сколь угодно мало отличаться от постоянной c, а потому

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}\leqslant c.$$

Это означает, что скорость сигнала не может быть больше скорости света, что и требовалось доказать.

Таким образом, согласно теории относительности свет является *наиболее быстрым* из всех физических сигналов. Это утверждение стало источником досады для приверженцев классических представлений. Поэтому остановимся более подробно на критическом анализе этого вопроса.

Наше изложение основывается на двух фундаментальных постулатах:

1) на постулате причинности для временно́й последовательности событий;

2) на независимости скорости света c от выбора системы отсчета, в которой эта скорость определяется.

Как бы ни была построена физическая кинематика, постулат причинности должен соблюдаться. Если желательно не исключать возможности, что в природе могут существовать сигналы со скоростями *бо́льшими* скорости света, то необходимо отказаться от постулата Эйнштейна о постоянстве скорости света. Однако этот постулат с большой надежностью подтвержден *эмпирически* в связи с различными обстоятельствами. Не имеется никаких оснований предполагать, что какие-нибудь новые эксперименты опровергнут этот постулат.

Таким образом, заключительный вывод, вытекающий из постулата Эйнштейна, т. е. то, что скорость света является наибольшей из возможных скоростей распространения сигнала, также следует считать обоснованным и логически, и эмпирически.

Противники теории относительности пытались опровергать это следствие, приводя в качестве доказательства такие явления природы, которые на первый взгляд распространяются быстрее света. Однако сразу обнаруживается, что все эти попытки основаны на неверной интерпретации рассматриваемого следствия постулата Эйнштейна. В самом деле, это следствие содержит только утверждение, что свет является наиболее быстрым из всех *физических сигналов*. Но такой сигнал S представляет собой не воображаемый процесс, а процесс, который может быть обнаружен *эмпирически* в виде причинной цепи. Такая цепь образуется последовательностью событий $E_1, E_2, \ldots$, из которых каждое предыдущее является причиной последующего, т. е.

$$S: \qquad E_1 \to E_2 \to \ldots \to E_n \to \ldots$$

Поэтому все эти события на основании постулата причинности последовательны также во времени, т. е. все события $E_{n+1}, E_{n+2}, \ldots$ принадлежат к «абсолютному будущему» события E_n, а все события $E_{n-1}, E_{n-2}, \ldots$ — к «абсолютному прошлому» события E_n.

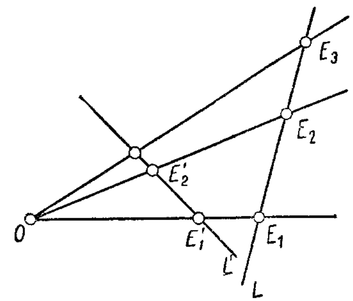


Рис. 48.

Другое дело, что можно мысленно вообразить такие последовательности событий $E_1, E_2, \ldots$, которые «распространяются» сколь угодно быстро. Однако эти события не являются сигналами, они не могут быть расположены в *причинном* порядке. Рассмотрим пример такой последовательности событий.

Пусть O есть некоторая точка, а L — некоторая прямая (рис. 48). Из точки O при помощи прожектора посылается световой сигнал, который несколько позже приходит в точку E_1 прямой L. Если начать поворачивать прожектор вокруг точки O, то световой луч будет встречать прямую L в точках $E_2, E_3, \ldots$ Эти точки, представляющие собой события прибытия света на прямую L, образуют последовательность, которая будет «распространяться» сколь угодно быстро, если только достаточно быстро поворачивать прожектор. Следовательно, скорость процесса $E_1, E_2, \ldots$ может вполне превысить скорость света c.

Такое положение вещей объясняется тем, что последовательность событий E_1, E_2, ... не является «сигналом» — она не расположена в причинном порядке. Правда, событие E_1 есть следствие посылки O_1 светового сигнала из точки O; аналогичным образом, E_2 есть следствие посылки O_2 второго сигнала из O и т. д. Однако событие E_1 не является причиной события E_2.

В самом деле, бессмысленно говорить о естественном «направлении» последовательности событий E_1, E_2, ... или о соответствующем «распространении». Если мы переместим прямую L в положение L', то лучи OE_1 и OE_2 пересекут прямую L' в точках E_1' и E_2'. Эти «события» могут оказаться одновременными, если отрезок OE_1' будет настолько больше отрезка OE_2', что посланный в направлении OE_2 световой сигнал достигнет E_2' одновременно с поступлением в точку E_1' ранее посланного сигнала. Тогда цепь событий E_1', E_2', ... распространялась бы с бесконечно большой скоростью.

Аналогичное недоразумение лежит в основе следующего примера, приводившегося противниками теории относительности с целью ее опровержения. Вообразим систему координат $\bar{K}$, покоящуюся относительно Земли M, следовательно, вращающуюся вместе с Землей. Пусть точка $\bar{P}$ системы $\bar{K}$, находящаяся чрезвычайно далеко от M, проходит мимо неподвижной звезды P. Легко вычислить, что если расстояние $M\bar{P}$ выбрать достаточно большим, то скорость точки P относительно системы $\bar{K}$ будет больше скорости света.

Ошибочность этого заключения состоит в следующем. Для того чтобы приведенный пример мог стать предметом рассмотрения теории относительности, точка $\bar{P}$ должна была бы быть *сигналом*, наблюдаемым из точки P в течение какого-то промежутка времени, заключающего в себе момент совпадения этих точек. Но именно этого в рассматриваемой ситуации не происходит. О сигнале можно было бы говорить, например, в том случае, если бы точка $\bar{P}$ была физическим телом, соединенным с Землей материальным жестким «стержнем». На минуту предположим, что такая фантастическая идея может быть осуществлена. Тогда необходимо

было бы учесть, что вследствие притяжения стержня массами неподвижных звезд неба «стержень» $M\bar{P}$ при вращении Земли должен был бы изгибаться. Следовательно, его конечная точка $\bar{P}$ в своем движении отставала бы от вращения Земли, и скорость точки P относительно системы $\bar{K}$ в соответствии с теорией относительности стала бы меньше скорости света c.

§ 6. Измерение расстояний между событиями. Сокращение и удлинение пространственных и временных расстояний

В дальнейшем будем рассматривать две физические системы K и $\bar{K}$, движущиеся одна относительно другой с постоянной скоростью v. В классической физике разности координат Δx, Δt и $\Delta\bar{x}$, $\Delta\bar{t}$ двух событий E_1 и E_2 определяются формулами (G″), вытекающими из преобразований Галилея, а в теории относительности — формулами (L″), получающимися из преобразований Лоренца.

С точки зрения классической физики при переходе от одной системы координат к другой изменяется только пространственная проекция интервала между событиями, временна́я же проекция в соответствии с постулатом абсолютного времени остается инвариантной: $\Delta t = \Delta\bar{t}$. Напротив, с точки зрения теории относительности изменяются и пространственная, и временна́я проекции. Тем не менее в теории относительности можно каждым двум событиям E_1 и E_2 сопоставить неизменную, инвариантную величину.

С целью наиболее простого определения этой фундаментальной для теории относительности инвариантной величины примем, что единицы длины и времени в рассматриваемых системах отсчета выбраны так, что *скорость света принимает значение* $c=1$. Для этого можно за единицу длины взять расстояние 300 000 *км*, а за единицу времени — одну секунду. Тогда на рис. 47 трассы световых лучей будут делить углы между осями каждой из систем координат K и $\bar{K}$ пополам, и формулы (L″) примут вид

$$\Delta\bar{x} = \alpha(\Delta x - v\Delta t), \quad \Delta\bar{t} = \alpha(\Delta t - v\Delta x),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

есть коэффициент Лоренца.

Возведем эти выражения для $\Delta\bar{x}$ и $\Delta\bar{t}$ в квадрат и вычтем из второго первое, мы получим

$$(\Delta\bar{t})^2 - (\Delta\bar{x})^2 = (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что *при переходе от одной системы координат к другой разность квадратов временнóго и пространственного расстояний между событиями остается инвариантной.*

В зависимости от знака полученной инвариантной величины различают три случая.

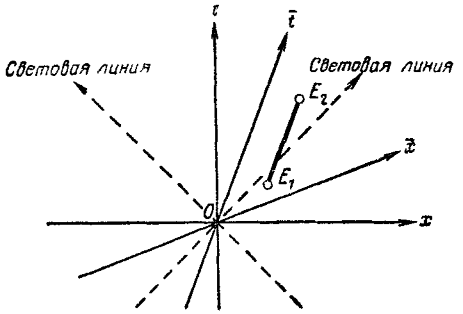


Рис. 49.

1. *Разность* (1) *положительна.* В этом случае интервал E_1E_2 между событиями называется *временно-подобным.* В совмещенных в одной плоскости системах координат K и $\bar{K}$ (рис. 49) «мировой вектор» E_1E_2 поднимается круче «световой линии» $x=t$ и, следовательно, направлен в «абсолютное будущее». Имеется вполне определенная система $\bar{K}$, временнáя ось которой параллельна «мировому вектору» E_1E_2. В этой системе координат события E_1 и E_2 происходят в *одном и том же месте.* Поэтому такая система $\bar{K}$ называется *системой покоя* для событий E_1 и E_2.

Положительный квадратный корень $\Delta\tau$ из инварианта (1), т. е. величина

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}, \qquad (2)$$

называется *собственным временем* двух событий E_1, E_2. Инвариантное значение собственного времени в системе покоя $\bar{K}$ (в которой $\Delta\bar{x}=0$) равно

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta\bar{t})^2 - (\Delta\bar{x})^2} = \Delta\bar{t}.$$

Следовательно, собственное время временно-подобного мирового вектора равно временнóму расстоянию

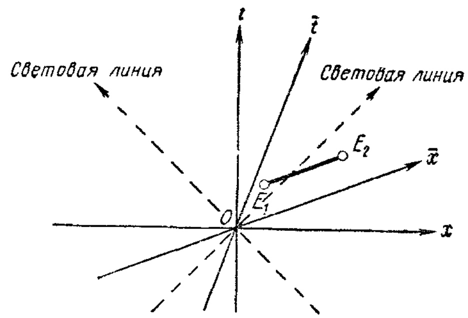


Рис. 50.

рассматриваемых двух событий, измеренному в соответствующей системе покоя.

2. *Разность* (1) *отрицательна.* В этом случае интервал E_1E_2 называется *пространственно-подобным*, и мировой вектор E_1E_2 лежит в *интервале неопределенности,* соответствующем событию E_1, и, следовательно, события E_1 и E_2 «причинно нейтральны». Теперь положительный квадратный корень

$$\Delta\tau = \sqrt{(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2} \qquad (2')$$

определяет *собственную длину* интервала E_1E_2 между событиями E_1 и E_2. В этом случае существует такая лоренцева система $\bar{K}$, относительно которой события E_1 и E_2 происходят *одновременно* (рис. 50). В этой системе

$\Delta\bar{t}=0$, и инвариантная собственная длина $\Delta\tau$ интервала E_1E_2 между событиями E_1 и E_2 принимает значение

$$\Delta\tau=\sqrt{(\Delta\bar{x})^2-(\Delta\bar{t})^2}=|\Delta\bar{x}|.$$

Таким образом, собственная длина пространственно-подобного интервала E_1E_2 равна пространственной длине в «собственной системе», в которой оба события одновременны.

3. *Разность* $(\Delta x)^2-(\Delta t)^2$ *равна нулю.* В этом случае мировой вектор E_1E_2 называется *световым вектором* [1]), так как он лежит на световой трассе, исходящей из мировой точки E_1. В любой лоренцевой системе световой вектор E_1E_2 имеет собственную длину

$$\Delta\tau=\sqrt{(\Delta x)^2-(\Delta t)^2}=0.$$

Сокращение и удлинение временны́х интервалов

Рассмотрим временно-подобный мировой вектор E_1E_2 (рис. 49). Его инвариантная «длина», т. е. собственное время, определяется выражением

$$\Delta\tau=\sqrt{(\Delta t)^2-(\Delta x)^2}.$$

Входящие в это выражение координаты могут быть определены в любой лоренцевой системе. В соответствующей системе покоя $\Delta\bar{x}=0$, $\Delta\bar{t}=\Delta\tau$, следовательно,

$$\Delta\tau=\Delta\bar{t}=\sqrt{(\Delta t)^2-(\Delta x)^2}=\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}.$$

Здесь величина $\Delta x/\Delta t$ (точнее, ее абсолютное значение) есть не что иное, как относительная скорость v $(<c=1)$ системы K по отношению к системе покоя $\bar{K}$. Следовательно, временны́е длины $\Delta\bar{t}$ и Δt мирового вектора E_1E_2 связаны между собой соотношением

$$\Delta\bar{t}=\Delta t\sqrt{1-v^2}.$$

[1]) Или *изотропным* вектором. — *Прим. ред.*

Квадратный корень в правой части меньше единицы; поэтому $\Delta\bar{t}<\Delta t$.

Из полученной формулы мы видим, что временно́е расстояние Δt между событиями E_1 и E_2 в произвольной лоренцевой системе K *больше* временно́го расстояния $\Delta\bar{t}$ между этими же событиями в системе покоя $\bar{K}$ (в которой события E_1 и E_2 происходят в одном и том же месте).

Таким образом, если временно́е расстояние между событиями E_1 и E_2 измеряется по часам, находящимся

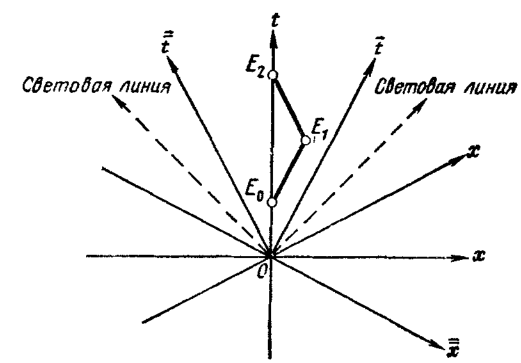


Рис. 51.

в системе K, движущейся относительно системы покоя $\bar{K}$, то оно *удлиняется* по сравнению с соответствующим расстоянием в системе покоя $\bar{K}$.

Применим этот результат к следующему случаю. Пусть из точки $E_0(x_0, t_0)$ лоренцевой системы K посылается сигнал S (например, материальное тело или путешественник M), который затем движется с постоянной скоростью и в момент времени $t=t_1$ прибывает в точку $x=x_1$ [событие $E_1(x_1, t_1)$]. Сразу после прибытия в эту точку сигнал посылается назад, в свое исходное положение $x=x_0$ (опять с постоянной скоростью), в которое он возвращается в момент времени $t=t_2$ [событие $E_2(x_2, t_2)$]. Линия движения $E_0E_1E_2$ сигнала изображена на рис. 51.

В первой фазе движения (E_0E_1) скорость сигнала S относительно системы K равна

$$v_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$

Во второй фазе (E_1E_2) абсолютным значением скорости будет

$$v_2 = \frac{x_1 - x_0}{t_2 - t_1}.$$

При возвращении тела M в исходное положение $x = x_0$ часы, остававшиеся в этой точке системы K, покажут время $t = t_2$, следовательно, все путешествие длилось $t_2 - t_0$ секунд. Однако, если измерять время в тех системах, относительно которых тело M *покоится*, то получится другая длительность путешествия. В самом деле, применив вторую из формул (L″), мы найдем, что при измерении времени в системе покоя $\overline{K}$ длительность первой фазы E_0E_1 путешествия будет равна

$$\overline{t}_1 - \overline{t}_0 = (t_1 - t_0)\sqrt{1 - v_1^2} < t_1 - t_0.$$

Для обратного путешествия E_1E_2 измерение времени в соответствующей системе покоя $\overline{\overline{K}}$ (рис. 51) дает длительность

$$\overline{\overline{t}}_2 - \overline{\overline{t}}_1 = (t_2 - t_1)\sqrt{1 - v_2^2} < t_2 - t_1.$$

Если ход часов U_M, движущихся вместе с телом M (следовательно, покоящихся относительно M), соответствует времени системы покоя, то длительность всего путешествия по этим часам будет равна

$$(\overline{t}_1 - \overline{t}_0) + (\overline{\overline{t}}_2 - \overline{\overline{t}}_1) \quad \text{секунд.}$$

Но этот интервал времени *меньше* интервала

$$(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) = t_2 - t_0.$$

Следовательно, *часы U_M, движущиеся относительно системы K и идущие в соответствии с временем системы покоя тела M, дают для длительности путешествия $E_0E_1E_2$ меньшее время, чем часы, остающиеся в исходной точке $x = x_0$ системы K.*

Таким образом, можно сказать, что ход часов, находящихся в движении относительно системы K, замедляется. С точки зрения путешественника M поездка требует меньше времени, чем с точки зрения наблюдателя, ожидающего возвращения путешественника M в точке $x = x_0$, покоящейся относительно системы K — поразительный аргумент для старой истины: путешествие освежает и омолаживает.

Правда, разница во времени, как и вообще все релятивистские эффекты, практически получается чрезвычайно малой. Рассмотрим для примера реактивный самолет, летящий со скоростью 1000 *км/час* из пункта A в пункт B и тотчас же возвращающийся назад. Если расстояние между пунктами A и B равно 2500 *км*, то, как показывают простые вычисления, часы пассажира за время путешествия отстанут по сравнению с нормальными часами, находящимися в пункте A, на одну стомиллионную долю секунды.

Впрочем, успехи в области космических полетов открывают новые возможности. Если ракета совершит перелет от Земли к Луне и обратно со скоростью 3 *км/сек*, то пройденный ею путь составит 750 000 *км* и отставание часов путешественников по сравнению с земными часами будет уже больше одной стотысячной доли секунды. Такая с точки зрения практики ничтожная разница во времени все же по порядку своей величины такова, что может быть обнаружена атомными часами. Следовательно, ракетные космические перелеты в сочетании с новейшими точными способами измерения времени могут дать непосредственное подтверждение релятивистского удлинения и сокращения времени. Правда, этот релятивистский эффект в настоящее время эмпирически блестяще подтвержден при помощи косвенных методов; поэтому вряд ли можно предполагать, что он будет опровергнут будущими прямыми измерениями.

Чем быстрее будут летать ракеты, тем значительнее будет удлинение и сокращение времени. Если скорость сигнала повысится, например, до половины скорости света (при атомных явлениях такие скорости встречаются и наблюдаются), то сокращение времени составит уже около 13%. При приближении скорости v к скорости света сокращение приблизится к 100%. Таким образом, длительность какого-либо явления рассмотренного выше рода становится сколь угодно малой, если скорость движущегося тела приближается к максимально возможной скорости, т. е. к скорости света.

Сокращение и удлинение пространственных расстояний.

Перейдем к определению пространственных расстояний между событиями в различных лоренцевых системах. Пусть E_1 и E_2 суть два события, в причинном отношении нейтральные, следовательно, интервал E_1E_2 между событиями E_1 и E_2 — пространственно-подобный. Пусть, далее, события E_1 и E_2 в заданной лоренцевой системе K имеют координаты (x_1, t_1) и соответственно (x_2, t_2).

При сделанном допущении относительно характера событий E_1 и E_2 существует вполне определенная лоренцева система $\bar{K}$, ось $\bar{x}$ которой параллельна отрезку E_1E_2 (см. рис. 50). Следовательно, в этой системе события E_1 и E_2 происходят *одновременно*, и поэтому $\Delta\bar{t} = \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = 0$. Подставив это значение $\Delta\bar{t}$ во вторую из формул (L″) и имея в виду, что, согласно принятому раньше условию, $c=1$, мы найдем $\Delta t = v\Delta x$. Внеся это значение в первую из формул (L″), мы получим

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\Delta\bar{x} + v\,\Delta\bar{t}) = \frac{\Delta\bar{x}}{\sqrt{1-v^2}},$$

где v есть скорость системы $\bar{K}$ относительно системы K.

Таким образом, пространственное расстояние между событиями E_1 и E_2 получает свое минимальное значение в особой, так называемой собственной системе $\bar{K}$, в которой события E_1 и E_2 происходят *одновременно*. Это минимальное расстояние равно собственной длине отрезка E_1E_2. В любой другой лоренцевой системе K, движущейся со скоростью v относительно собственной системы $\bar{K}$, пространственное расстояние Δx между событиями E_1 и E_2 больше собственной длины $\Delta\bar{x}$. Для получения Δx следует умножить собственную длину $\Delta\bar{x}$ на коэффициент Лоренца $\alpha = 1/\sqrt{1-v^2} > 1$. Если скорость v сравнительно мала, то этот коэффициент удлинения почти не отличается от единицы (а Δx почти равно своему минимальному значению). С возрастанием скорости v удлинение увеличивается, и притом неограниченно, если скорость v приближается к скорости света $c=1$.

Четырехмерный мир событий

Все, что было сказано до сих пор о преобразованиях Галилея и Лоренца для случая одномерного пространства, легко обобщить на случаи, когда системы координат имеют два или три пространственных измерения.

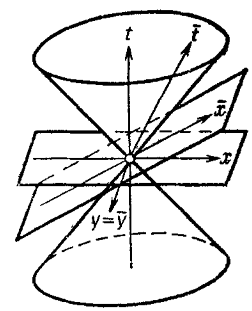


Рис. 52.

Если система $\bar{K}$ скользит в направлении какой-либо координатной оси (например, оси x) трехмерной пространственной системы K, то преобразования Галилея и Лоренца сохраняют свой прежний вид (G) и (L) (стр. 163 и 172). Появляются только дополнительные формулы

$$\bar{y} = y, \quad \bar{z} = z$$

для пространственных координат y и z.

Геометрическое представление преобразований Лоренца для случая двумерного пространства (плоскость xy) получается из аналогичного представления для одномерного пространства (рис. 47) путем вращения последнего вокруг оси t. Тогда угол, ограниченный световыми трассами, перейдет в «световой конус» (рис. 52), ограничивающий области «абсолютного прошедшего» и «абсолютного будущего» для начального события O. Между боковыми поверхностями этого двойного конуса лежит «область неопределенности» (относительно события O). Плоскости xy и $\bar{x}\bar{y}$ лоренцевых систем K и $\bar{K}$, изображающие события, одновременные с событием O, проходят внутри этой промежуточной области. Каждая из осей времени (t и $\bar{t}$) направлена от конуса прошедшего к конусу будущего.

Читатель, возможно, заметил, что существует примечательная аналогия между лоренцевой плоскостью событий (плоскость xt) и евклидовой пространственной плоскостью (плоскость xy). В евклидовой плоскости применяются прямоугольные координаты x, y (системы K, $\bar{K}$ и т. д.). Пусть точка P имеет в системе K координаты (x, y), а в системе $\bar{K}$ — координаты $(\bar{x}, \bar{y})$. Расстояние между точками, например между начальной точкой O и точкой P, вычисляется по теореме Пифагора (рис. 20). Квадрат этого расстояния равен

$$r^2 = x^2 + y^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2.$$

Следовательно, сумма квадратов x^2+y^2 остается при переходе от одной прямоугольной системы (K) к другой ($\bar{K}$) инвариантной. Эта инвариантность может быть использована для вывода формул преобразования координат $(\bar{x}, \bar{y})$ в координаты (x, y). Эти формулы имеют вид

$$\bar{x} = \alpha(x - vy), \quad \bar{y} = \alpha(y + vx),$$

где α и v суть постоянные, причем

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Формулы преобразований Лоренца для плоскости событий (x, t) (здесь вместо координаты y мы имеем координату t) имеют аналогичную структуру, но постоянная α теперь равна

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Мы видим, что инвариантной *сумме квадратов* координат (x, y), определяющей инвариантное евклидово расстояние между двумя точками O и P, в лоренцевой плоскости соответствует инвариантная *разность квадратов* координат двух мировых точек $O(x=t=0)$ и $E(x, t)$; эта разность квадратов ($x^2 - t^2$ или $t^2 - x^2$) определяет квадрат «лоренцева расстояния» между этими точками (собственной длины или собственного времени).

Смысл евклидовой постоянной v следующий: она определяет тангенс угла поворота ω, осуществляющего переход системы K в систему $\bar{K}$, т. е.

$$v = \operatorname{tg} \omega.$$

В лоренцевой плоскости постоянная v есть относительная скорость систем K и $\bar{K}$.

В евклидовой плоскости расстояние между двумя точками равно нулю только тогда, когда эти точки совпадают. В лоренцевой плоскости расстояние между двумя мировыми точками равно нулю в том случае, когда эти точки лежат на одной и той же световой линии. Эти световые линии разбивают все другие мировые отрезки на два класса: на временно-подобные и на пространственно-подобные.

Геометрическим местом точек $P(x, y)$, находящихся на постоянном евклидовом расстоянии от точки O, является окружность

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

В лоренцевой плоскости таким геометрическим местом является гипербола

$$x^2 - t^2 = \pm r^2,$$

причем знак плюс или минус берется в зависимости от того, является ли мировой вектор $OE(x, t)$ пространственно-подобным или временно-подобным. На этом обстоятельстве основан выбор единиц длины и времени в лоренцевой плоскости (см. стр. 180—181).

ГЛАВА IV

Классическая и релятивистская динамика

§ 1. Основной закон динамики Ньютона

В XVI и XVII столетиях на основе, созданной Коперником и Галилеем, началось быстрое развитие физики. В течение 150 лет была подготовлена почва для появления великого ученого Исаака Ньютона (1643—1727), которого с полным правом можно считать создателем основ классической картины мира.

В качестве фундаментального принципа физики Ньютон взял свой основной закон динамики. Этот закон обобщил в себе все, что до того времени было известно в физике, и открыл путь для дальнейшего развития точного естествознания.

Мощные идеи Ньютона не могли бы развиться без достаточной математической основы. Такая основа была создана самим Ньютоном, когда он открыл дифференциальное и интегральное исчисления. Эти учения, развитые независимо Ньютоном и Готтфридом Вильгельмом Лейбницем (1646—1716), являются краеугольным камнем современной математики. Таким образом, Ньютон является одним из величайших первооткрывателей не только в области механики, но и в области новой математики.

Основной закон динамики Ньютона состоит в следующем. Сила f, под действием которой движется материальное тело, равна массе m тела, умноженной на ускорение a движения, т. е.

$$f = ma.$$

Ускорение определяет приращение скорости в единицу времени. Если тело M находится в части простран-

ства, в которой силы отсутствуют ($f=0$), то $ma=0$, и поэтому равно нулю также ускорение a. Таким образом, основной закон динамики Ньютона содержит в себе как частный случай закон инерции, согласно которому тело, находящееся в галилеевой системе, движется *равномерно* (с постоянной скоростью), если на тело не действуют никакие внешние силы.

Пусть мгновенная скорость тела M в системе K равна u. Если $u=u_1$ и $u=u_2$ суть его скорости в моменты времени t_1 и t_2 ($>t_1$), то приращение скорости в течение промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ равно $\Delta u = u_2 - u_1$. Разделив Δu на время Δt, мы получим приращение скорости в единицу времени. Следовательно, ускорение равно

$$a = \frac{\Delta u}{\Delta t}. \tag{1}$$

Однако эта формула точна только в том случае, когда ускорение a постоянное, т. е. когда движение тела M ускоряется или замедляется *равномерно* (в первом случае a больше нуля, а во втором — меньше нуля). Так происходит, например, при свободном падении тела. Ускорение g, обусловленное силой притяжения Земли, можно рассматривать приближенно постоянным ($g=9{,}81$ *м/сек*^{2}).

Закон Ньютона сохраняет свою универсальную применимость и в том случае, когда сила и ускорение *зависят* от положения и времени. Тогда приращение Δu скорости, деленное на время Δt, дает уже не точное, мгновенное ускорение тела M, а «среднее ускорение» в промежутке времени Δt. Мгновенное ускорение в момент времени $t=t_1$ получается как предельное значение частного от деления средней скорости Δu на промежуток времени Δt при неограниченном уменьшении Δt. Следовательно, отношение (1) дает значение мгновенного ускорения в момент времени $t=t_1$ тем точнее, чем меньше берется промежуток времени Δt [1]).

[1]) Мгновенное ускорение получается из среднего ускорения в точности так же, как мгновенная скорость — из средней скорости (стр. 146—147). Таким образом, скорость есть «производная пути по времени», а ускорение — «производная скорости по времени».

С этой оговоркой мы будем пользоваться в дальнейшем средним ускорением (1) вместо мгновенного ускорения.

Основной закон Ньютона позволил взглянуть на открытые Галилеем законы падения тел в совершенно новом свете. Теперь под законы Галилея была подведена единая динамическая точка зрения. Согласно Ньютону, падение тела происходит потому, что два материальных тела притягиваются одно к другому с силой, прямо пропорциональной массам этих тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния между телами. Следовательно, падение яблока с дерева представляет собой только частный случай общего *закона тяготения* Ньютона.

Этот же закон управляет вечным движением небесных тел: и они «падают» одно на другое. Орбиты планет вычислил непосредственно из астрономических наблюдений уже Иоганн Кеплер (1571—1630). Эти орбиты представляют собою приближенно эллипсы, в одном из фокусов которых находится большое центральное тело — Солнце. Ньютон сумел вычислить движение планет, исходя из своего общего закона тяготения, математически с исключительно большой точностью. Это было одним из величайших триумфов человеческой мысли.

Динамика Ньютона является основой картины мира классической физики. Она полностью сохраняет свое значение и в настоящее время, когда классическая физика вынуждена уступить свое место теории относительности. Объясняется это, как мы неоднократно подчеркивали выше, тем, что классическая теория представляет собою предельный случай новой теории: она отклоняется от теории относительности ничтожно мало до тех пор, пока приходится иметь дело со сравнительно небольшими расстояниями и скоростями, как это и наблюдается в повседневной жизни.

§ 2. Принцип относительности классической физики

Выше мы часто отмечали, что понятия покоя и движения по своей природе относительны. Бессмысленно говорить, что тело M находится само по себе в покое

или в движении, так как всегда приходится иметь дело с *относительным* состоянием движения одного тела относительно другого, принимаемого за неизменяемую систему отсчета. Такими «неизменяемыми» системами отсчета являются те пространственные системы координат K, $\overline{K}$, ..., которыми мы пользовались в главе III при рассмотрении классической и релятивистской кинематики.

Среди систем координат классической физики особого внимания заслуживают галилеевы системы. Согласно классической кинематике все эти системы равноценны. Ни одной из них нельзя отдать *принципиального* предпочтения, хотя с практической точки зрения целесообразно в зависимости от ситуации считать предпочтительной ту или другую систему отсчета. Для пассажира, едущего в поезде, «неизменяемая» система координат, связанная с поездом, является более естественной системой отсчета, чем система координат, связанная с железнодорожным полотном. В свою очередь последняя система является более удобной системой отсчета для наблюдателя, не едущего в поезде.

Принципиальная равноценность различных галилеевых систем находит свое выражение также в симметрии формул преобразования Галилея, что уже было отмечено на стр. 170. Формулы, осуществляющие переход от одной системы K к другой системе $\overline{K}$, имеют такую же структуру, как и формулы для обратного перехода от системы $\overline{K}$ к системе K (изменяется только знак относительной скорости v).

Так обстоит дело с точки зрения кинематики. Но такая же равноценность различных галилеевых систем имеет место и в *динамике*.

Для пояснения рассмотрим движение тела M относительно двух различных пространственно-одномерных галилеевых систем K и $\overline{K}$, движущихся одна относительно другой с постоянной скоростью v. Пусть u и $\overline{u}$ суть скорости тела M относительно систем K и $\overline{K}$. Тогда, согласно классическому закону сложения скоростей,

$$\overline{u} = u - v.$$

Если скорости u и $\bar{u}$ в момент времени $t=t_1$ равны соответственно u_1 и $\bar{u}_1$, а в момент времени $t=t_2$ равны u_2 и $\bar{u}_2$, то приращением скорости u в течение промежутка времени $\Delta t=t_2-t_1$ будет

$$\Delta\bar{u}=\bar{u}_2-\bar{u}_1=(u_2-v)-(u_1-v)=u_2-u_1=\Delta u,$$

следовательно,

$$\Delta\bar{u}=\Delta u.$$

Это означает, что приращение скорости тела M одинаково относительно обеих систем K и $\bar{K}$. Отсюда следует, что ускорение тела M, т. е. приращение скорости, деленное на приращение $\Delta t=\Delta\bar{t}$ (абсолютного) времени, также имеет одно и то же значение $a=\bar{a}$ в обеих системах K и $\bar{K}$.

Таким образом, второй множитель a произведения ma, входящего в основной закон Ньютона, остается инвариантным.

Согласно другому всеобщему закону (не зависящему от предыдущего рассмотрения) масса m тела M представляет собой для этого тела специфическую, постоянную величину, не зависящую от состояния движения тела. Этот фундаментальный закон называется *законом сохранения массы.*

Следовательно, произведение ma также является для движения тела M характерной постоянной величиной *в любой галилеевой системе.* Поэтому сила f при ее определении в различных галилеевых системах (K, $\bar{K}$, ...) также будет одной и той же.

Из всего сказанного следует, что *основной закон динамики имеет инвариантную форму, не зависящую от того, относительно какой галилеевой системы определяются входящие в этот закон величины (сила, масса, ускорение).*

Таким образом, равноценность всех галилеевых систем имеет место не только в классической кинематике, но и в классической динамике. В этом и состоит *классический принцип относительности.*

Согласно этому принципу, в механике совершенно безразлично, какую галилееву систему взять в качестве

основной: законы кинематики и динамики имеют одинаковую форму во всех галилеевых системах.

Из принципа относительности следует, что в физике не имеет никакого смысла говорить об *абсолютном пространстве.* Законы кинематики и динамики построены так, что все галилеевы системы полностью равноправны между собой, и с принципиальной точки зрения ни одна из таких систем отсчета не может претендовать на то, чтобы в каком-либо отношении считаться «абсолютной». Несмотря на то что этот вывод является фундаментальной особенностью физики Ньютона, невозможность установления «абсолютной» системы координат с полной ясностью была обнаружена значительно позже, в конце XIX столетия. Препятствием для разъяснения среди прочих обстоятельств была гипотеза эфира: мировой эфир рассматривался как среда, устанавливающая «абсолютную» систему координат мирового пространства (систему покоя эфира). Однако не существовало никакого способа, который позволил бы обнаружить эту «абсолютную» систему. Опыт Майкельсона (стр. 166) дал отрицательный результат, позволивший окончательно решить этот вопрос. С другой стороны, принцип возможности опытной проверки, сформулированный Махом, исключает из эмпирического исследования понятия, не влекущие за собой следствий, допускающих эмпирическую проверку. Таким образом, критический подход Маха также внес существенный вклад в релятивизацию пространства.

При неравномерном движении одной системы отсчета относительно другой возникают так называемые принуждающие силы (силы инерции) например центробежные. Долгое время пытались рассматривать возникновение таких сил как доказательство существования абсолютного пространства. В частности, сплющенность земного шара пытались объяснить как результат вращения Земли относительно «абсолютного пространства». Однако, как убедительно показал Мах, это явление имеет естественное объяснение: его можно понимать как действие материи, распределенной в мировом пространстве. Земля совершает сложное относительное движение по отношению к небу неподвижных звезд. Как уже было сказано на стр. 136, с неподвижными звездами можно связать систему координат, но только приближенно, статистически, однако не имеется никаких оснований для возведения этой системы в ранг абсолютной пространственной системы.

Аналогичным образом можно объяснить известный опыт Фуко с маятником: если подвесить шар на длинном шнуре и привести его в колебательное движение, то плоскость, в которой будут происходить эти колебания, в течение 24 часов повернется на 360°. Вместо того чтобы объяснять это явление как следствие вращения Земли относительно «абсолютного пространства», естественнее понимать его как результат притяжения качающегося маятника распределенной в мировом пространстве материей.

§ 3. Релятивистский принцип относительности. Динамика Эйнштейна — Минковского

Применение классического принципа относительности ограничивается только областью механики. К электромагнитным и оптическим явлениям он неприменим. Электромагнитная теория (включающая в себя также волновую оптику) была исчерпывающе развита в прошлом столетии. Это было заслугой в первую очередь двух великих ученых. Майкл Ф а р а д е й (1791—1867) своими блестящими открытиями в области электромагнитных и связанных с ними индукционных явлений подготовил почву, на которой позже, около ста лет тому назад, Джемс Клерк М а к с в е л л (1831—1879) создал свою теорию электромагнитных и оптических явлений. Вся эта теория может быть выражена знаменитыми четырьмя уравнениями (в частных производных) Максвелла, из которых выводятся все электромагнитные и оптические явления.

При создании своей теории Максвелл оставался на почве классической физики. В частности, он исходил из старого представления об абсолютном времени. Тем более примечательно, что основные законы его теории, выражаемые упомянутыми четырьмя уравнениями, *не* подчиняются классическому принципу относительности:

вид этих уравнений зависит от выбора галилеевой системы, взятой за основу для изучения электромагнитных явлений природы. И еще более примечательно, что уравнения Максвелла *инвариантны относительно преобразований Лоренца.* Более того, преобразования Лоренца можно вывести, если поставить требование, чтобы основное уравнение Максвелла, так называемое волновое уравнение, оставалось инвариантным во всех системах K, $\overline{K}$, ..., движущихся одна относительно другой с постоянной скоростью.

Таким образом, в самой классической физике содержится скрытое указание на теорию относительности. Однако историческое развитие шло не по этому пути. К понятию относительного времени и к преобразованию Лоренца пришли только почти сорок лет спустя после возникновения теории Максвелла и независимо от нее. При этом побуждающей причиной была, как мы видели в главе III, совсем другая: возникла необходимость привести *кинематику* в соответствие с постулатом Эйнштейна о постоянстве скорости света.

Только после того, как Эйнштейн релятивизировал понятие времени и заменил преобразования Галилея преобразованиями Лоренца, было обнаружено, что теория Максвелла обладает примечательным свойством инвариантности относительно преобразований Лоренца. Это обстоятельство привело к укреплению позиций теории относительности.

Однако переход от понятия абсолютного времени и преобразований Галилея к относительному времени и преобразованиям Лоренца приводит к тому, что принцип относительности классической динамики теряет свою применимость. Читатель может в этом убедиться, повторив рассуждения, изложенные на стр. 201—202 по поводу ускорения, но взяв при этом за основу преобразования Лоренца. Это означает, что классический закон сложения скоростей, использованный для доказательства инвариантности ускорения относительно преобразований Галилея, теперь должен быть заменен правилом Лоренца (L′) (стр. 173).

Возникшее затруднение было преодолено Эйнштейном и Минковским следующим образом. Они приняли, что принцип относительности должен быть сохранен и в теории относительности, но в таком измененном виде, чтобы законы природы оставались инвариантными относительно *преобразований Лоренца (релятивистский принцип специальной теории относительности)*.

Как уже было отмечено, этот постулат сразу применим к классической электромагнитной теории. Напротив, основной закон динамики Ньютона не удовлетворяет этому требованию инвариантности. *Поэтому необходимо так видоизменить основной закон Ньютона, чтобы он оставался инвариантным относительно преобразований Лоренца.*

Эйнштейн и Минковский показали, что такое изменение основного закона динамики почти автоматически вытекает из основных постулатов. Для пояснения вернемся на минуту к классическому закону Ньютона: сила равна произведению массы на ускорение ($f=ma$). Этот закон часто формулируется несколько по-иному, для чего вводится понятие *импульса* движущегося тела M. Импульс p определяется как произведение массы m на скорость u:

$$p=mu=m\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Так как в классической физике масса m тела принимается *постоянной*, то приращение Δp импульса в единицу времени равно постоянной m, умноженной на соответствующее приращение скорости u, т. е. равно ma. Но последнее произведение есть не что иное, как сила.

Таким образом, основной закон динамики может быть сформулирован также следующим образом: сила f равна приращению импульса p в единицу времени:

$$f=\frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Перейдем теперь к теории относительности. Пусть тело M движется относительно лоренцевой системы K со скоростью $u=\Delta x/\Delta t$. Если эта скорость постоянна, то мировая линия тела M прямолинейна, и имеется вполне определенная система покоя K_0, в которой тело M покоится (рис. 49). Время t_0 в этой системе покоя

есть собственное время (время, показываемое часами, покоящимися относительно движущегося тела M). Так как пространственная координата x_0 тела M в системе K_0 постоянна, то (см. стр. 190) приращение Δt_0 времени t_0 в течение промежутка Δt равно

$$\Delta\tau=\Delta t_0=\sqrt{(\Delta t)^2-(\Delta x)^2}=\Delta t\sqrt{1-\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}=$$
$$=\Delta t\sqrt{1-u^2}. \quad (2)$$

До сих пор мы принимали скорость u тела M постоянной. Однако формула (2) применима также при неравномерном движении тела M, т. е. при переменной, зависящей от времени скорости u. В этом случае система K_0 должна быть принята за «мгновенную систему покоя», в которой ось t_0 совпадает с касательной к мировой линии в точке M (рис. 34). Следовательно, система покоя K_0 изменяется с возрастанием времени. Для очень коротких промежутков времени Δt мировая линия почти совпадает со своей касательной, откуда следует, что формула (2) будет тем точнее, чем короче промежуток времени Δt.

Эйнштейн и Минковский рассуждают далее так. В теории относительности интервал времени Δt не инвариантен, так как время относительно. Если вести описание движения тела M с точки зрения другой лоренцевой системы $\bar{K}(\bar{x}, \bar{t})$, то интервал Δt заменится интервалом $\Delta\bar{t}$, который можно вычислить по второй из формул (L″) (стр. 181), если известны Δt и Δx. Однако *собственное время* $\Delta\tau$ *остается инвариантным*:

$$\Delta\tau=\sqrt{(\Delta t)^2-(\Delta x)^2}=\sqrt{(\Delta\bar{t})^2-(\Delta\bar{x})^2}.$$

Поэтому относительное время (Δt в системе K, $\Delta\bar{t}$ в системе $\bar{K}$ и т. д.) *должно быть заменено инвариантным собственным временем* $\Delta\tau$.

Следовательно, импульс в системе $K(x, t)$ будет равен

$$p=m_0\frac{\Delta x}{\Delta\tau},$$

где m_0 есть *масса* тела M в *системе покоя* K_0. Так как

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1-u^2},$$

то

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}} u. \tag{3}$$

Если желательно сохранить первоначальное определение импульса (импульс равен массе, умноженной на скорость), то массу m тела M в системе K следует принять равной

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{3'}$$

Это означает, что в теории относительности масса m тела M является *переменной* величиной, зависящей от той лоренцевой системы K, в которой она определяется. Наименьшее значение масса получает в системе покоя K_0, где $u=0$ и $m=m_0$.

Следовательно, посредством видоизмененного определения (3) импульса сразу достигается поставленная цель: величина приращения импульса в единицу времени, стоящая в правой части основного закона динамики, т. е. сила, сохраняет одно и то же значение в любой лоренцевой системе. Таким образом, при использовании определения (3) основной закон динамики остается инвариантным во всех лоренцевых системах [1]), т. е. *релятивистский принцип относительности распространяется и на динамику.*

Для достижения этого результата пришлось отказаться от прежней, классической инвариантности. В теории относительности закон сохранения массы не соблюдается: масса m, согласно релятивистской формуле (3′), принимается зависящей от состояния движения тела M, ее величина изменяется при переходе от одной системы отсчета к другой.

На первый взгляд кажется, что такая «релятивизация» массы усложняет динамику. Однако в действительности усложнения не получается. Правда, закон сохранения массы теряет свою применимость, но зато новое, релятивистское определение массы приводит к поразительному единообразию динамики.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим несколько подробнее выражение (3′) для массы. Скорость u тела M, входящая в это выражение, определена в предположении такого выбора единиц для длины и времени, при котором скорость света принимает значение $c=1$. Если вернуться к произвольным единицам и соответствующее значение скорости света опять обозначить через c, то значение u скорости тела M заменится на u/c. Тогда мы получим

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Элементарное вычисление показывает, что если скорость тела M по сравнению со скоростью света c очень мала, то найденное значение m приближенно равно [1])

$$m = m_0\left(1+\frac{u^2}{2c^2}\right).$$

Следовательно, в этом случае имеет место равенство

$$mc^2 = m_0c^2 + \frac{m_0}{2}u^2. \tag{4}$$

[1]) В точной формулировке это означает следующее. Пусть импульс материальной точки M в заданный момент времени, соответствующий времени t в лоренцевой системе K и времени $\bar{t}$ в лоренцевой системе $\bar{K}$, равен p в системе K и $\bar{p}$ в системе $\bar{K}$. Приращения импульса за промежутки времени Δt и $\Delta\bar{t}$ пусть равны соответственно Δp и $\Delta\bar{p}$. Тогда частное $\Delta p/\Delta t$ будет равно частному $\Delta\bar{p}/\Delta\bar{t}$ тем точнее, чем короче интервал времени Δt (и $\Delta\bar{t}$). Точно это равенство соблюдается для производных dp/dt и $d\bar{p}/d\bar{t}$. Доказательство основано на применении дифференциального исчисления и поэтому не приводится.

[1]) Точным значением для m при сделанном допущении будет

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{u^4}{c^4}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\frac{u^6}{c^6}+\ldots\right),$$

где ряд, заключенный в скобки, сходится. Если отношение u/c мало, то все члены этого ряда, начиная с третьего, исчезающе малы по сравнению с двумя первыми членами.

Здесь второй член в правой части дает классическое значение *кинетической энергии* тела. Поэтому естественно понимать все выражение (4) как *полную* энергию E тела M:

$$E = mc^2. \tag{4'}$$

Таким образом, полная энергия E складывается из двух частей: из кинетической энергии и постоянной величины m_0c^2, не зависящей от рассматриваемой лоренцевой системы. Эта последняя величина равна энергии тела в системе покоя ($u=0$). Поэтому Эйнштейн и Минковский рассматривали эту «энергию покоя» как внутреннюю энергию тела M. При небольшой относительной скорости u эта составная часть полной энергии E весьма велика по сравнению с кинетической энергией. Эйнштейн видел в этом указание на огромные количества энергии, связанные в атомах. В современной атомной теории эта смелая мысль получила блестящее подтверждение. Формула

$$E = mc^2$$

выражает собой фундаментальный закон современной физики.

Если единицы длины и времени опять выбрать так, чтобы скорость света была равна $c=1$, то формула $E=mc^2$ примет простой вид:

$$E = m.$$

Таким образом, теория относительности приводит к неожиданной связи между двумя общими физическими понятиями — массой и энергией: *масса эквивалентна энергии*.

ГЛАВА V

Общая теория относительности

§ 1. Риманова геометрия

Когда мы говорили о гауссовой теории поверхностей (§ 11 гл. I), мы затронули вопрос об определении длин кривых, расположенных на изогнутой поверхности F. Особенно интересовали нас геодезические линии, т. е. самые короткие линии, соединяющие две точки на поверхности. Вернемся к этой задаче.

Сначала рассмотрим простейший случай, когда поверхность F представляет собой плоскость. Выберем на этой плоскости прямоугольную систему координат $K(x, y)$. Расстояние между двумя точками $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ на плоскости, согласно теореме Пифагора, равно

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \tag{1}$$

где

$$\Delta x = x_1 - x_0, \qquad \Delta y = y_1 - y_0.$$

Пусть l — какая-либо линия, расположенная в плоскости F и соединяющая точки A и B. Построим ломаную l_n, угловые точки которой $A=P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n=B$ принадлежат линии l. Длина L_n этой ломаной, «вписанной» в линию l, равна сумме длин $\Delta_1 s, \ldots, \Delta_n s$ отрезков $AP_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}B$, т. е.

$$L_n = \Delta_1 s + \ldots + \Delta_n s.$$

Если $\Delta_\nu x$ и $\Delta_\nu y$ суть проекции отрезка $P_{\nu-1}P_\nu$ на координатные оси, то

$$P_{\nu-1}P_\nu = \Delta_\nu s = \sqrt{(\Delta_\nu x)^2 + (\Delta_\nu y)^2}.$$

Будем увеличивать число n угловых точек ломаной l_n, следовательно, угловые точки будут располагаться на линии l все чаще и чаще. Длина L_n ломаной l_n будет при этом изменяться. Если принять, что L_n при возрастающем n приближается к предельному значению L, то это предельное значение L принимается за длину дуги линии l. (Совершенно так же поступают в элементарной геометрии, когда длину дуги окружности определяют как предельное значение длины вписанной в эту дугу ломаной.)

Как изменится выражение (1) для длины отрезка, если от прямоугольной системы координат $K(x, y)$ мы перейдем к произвольной «косоугольной» (точнее — произвольной аффинной) системе координат $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y})$? При таком переходе связь между разностями координат Δx и Δy в системе K и разностями координат $\Delta\bar{x}$ и $\Delta\bar{y}$ в системе $\bar{K}$ определяется линейными уравнениями

$$\Delta x = \alpha\Delta\bar{x} + \beta\Delta\bar{y}, \quad \Delta y = \gamma\Delta\bar{x} + \delta\Delta\bar{y},$$

где коэффициенты α, β, γ и δ — постоянные. Подставив эти выражения Δx и Δy в формулу (1), мы получим для квадрата длины Δs отрезка AB выражение

$$(\Delta s)^2 = a(\Delta\bar{x})^2 + 2c\,\Delta\bar{x}\,\Delta\bar{y} + b(\Delta\bar{y})^2. \qquad (1')$$

Здесь постоянные a, b и c имеют значения

$$a = \alpha^2 + \gamma^2, \quad b = \beta^2 + \delta^2, \quad c = \alpha\beta + \gamma\delta.$$

Из линий l, лежащих в плоскости F и соединяющих точки A и B, прямолинейный отрезок AB имеет наименьшую длину L. Следовательно, этот отрезок является геодезической линией, проходящей через точки A и B.

Положение вещей изменяется, если F представляет собой кривую поверхность. В этом случае длина L линии l, лежащей на поверхности F, может быть вычислена путем следующего видоизменения приведенного выше способа.

Пусть P есть некоторая точка линии l. Касательная плоскость F_P к поверхности F в точке P вблизи точки касания почти совпадает с поверхностью F. В такой небольшой окрестности точки P дуга l почти прямая. Следовательно, если рассматривать небольшую

часть $PQ = \Delta l$ дуги l как прямолинейный отрезок, лежащий в касательной плоскости F_P, то для вычисления длины Δl можно использовать формулу (1′). При этом $\bar{x}$ и $\bar{y}$ следует рассматривать как координаты в касательной плоскости F_P, отсчитанные в системе координат K_P, произвольным образом расположенной в плоскости F_P. Индекс P при букве K означает, что взятая система координат применяется в окрестности точки P.

При перемещении точки P вдоль кривой поверхности F изменяет свое положение также касательная плоскость F_P. Отсюда следует, что коэффициенты a, b и c, входящие в формулу (1′), используемую для вычисления длины небольших дуг линии в окрестности точки P, теперь будут не постоянными величинами, как в случае плоскости, а *функциями точки* P. Геодезические линии на поверхности F в общем случае будут представлять собой не прямые линии, а кривые. Например, на сфере геодезическими линиями являются дуги больших кругов.

Основываясь на этих соотношениях гауссовой теории поверхностей, Риман построил свою общую (двумерную) дифференциальную геометрию на следующем постулате.

Длина Δs малого отрезка линии, исходящего из точки P поверхности F, вычисляется по формуле

$$(\Delta s)^2 = a(\Delta x)^2 + 2c\,\Delta x\,\Delta y + b(\Delta y)^2, \qquad (2)$$

где коэффициенты a, b и c суть *заданные функции* точки P в «местной» системе координат $K_P(x, y)$.

Эта так называемая *фундаментальная метрическая форма* используется для определения длины криволинейной дуги l, лежащей на поверхности F. Для этой цели дугу l разбивают на малые отрезки Δl, определяют длину Δs каждого отрезка Δs по формуле (2) и затем складывают полученные длины Δs.

При этом Риман полностью отказался от учета того обстоятельства, что поверхность F «вложена» в трехмерное евклидово пространство. Положение точек P этой поверхности определяется каждый раз при помощи местной системы координат K_P, а вычисление длины Δs

дуги, начинающейся в точке P, производится посредством фундаментальной метрической формы так, как предписывается формулой (2).

Для изложения даже самых первоначальных основ римановой геометрии требуется применение методов высшей математики. Выше (в этом параграфе, а также в § 11 гл. I) мы вынуждены были ограничиться только некоторыми элементарными и наглядными толкованиями основных идей гауссовой теории поверхностей и римановой геометрии. При этом мы рассматривали только простейший случай двумерного пространства, т. е. поверхности. Обобщение римановой геометрии на трехмерное пространство и на пространства с еще большим числом измерений производится так же, как это было сделано в § 12 гл. I для евклидова пространства. Положение точки P в таких многомерных пространствах определяется координатами x, y, z ... местной системы координат K, причем число координат равно числу измерений рассматриваемого пространства F. Квадрат $(\Delta s)^2$ длины малого отрезка линии в пространстве F определяется квадратичной формой

$$(\Delta s)^2 = a(\Delta x)^2 + b(\Delta y)^2 + c(\Delta z)^2 + \ldots$$
$$\ldots + 2d\,\Delta x\,\Delta y + 2e\,\Delta x\,\Delta z + 2f\,\Delta y\,\Delta z + \ldots, \quad (2')$$

где $a, b, c, d, e, f, \ldots$ суть функции начальной точки отрезка кривой.

Эта квадратичная форма, называемая римановой фундаментальной метрической формой, определяет метрическую структуру «риманова пространства» F. В частности, эта квадратичная форма позволяет вычислить *кривизну* пространства F. Евклидова геометрия пространства F получается из римановой геометрии в том частном случае, когда кривизна пространства F равна нулю (ср. § 11 гл. I).

§ 2. Переход от специальной теории относительности к общей

Согласно Эйнштейну и Минковскому, физику можно понимать как геометрию четырехмерного мира событий. В двумерном мире событий лоренцевы системы $K(x, t)$

играют такую же роль, как прямоугольные системы координат $K(x, y)$ в евклидовой плоскости (стр. 82—84). Релятивистская лоренцева геометрия отличается от евклидовой геометрии на плоскости только следующим: в лоренцевой геометрии квадрат расстояния между двумя «мировыми точками» E_1 и E_2 (т. е. квадрат лоренцевой длины мирового вектора E_1E_2) равен *разности* квадратов проекций мирового вектора на оси (пространственную и временну́ю), а в евклидовой геометрии квадрат расстояния между двумя точками P_1 и P_2 равен *сумме* квадратов соответствующих проекций на оси x и y (теорема Пифагора).

Квадрат длины $\Delta\tau$ лоренцева вектора E_1E_2 (стр. 189—190) равен

$$(\Delta\tau)^2 = \pm[(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2], \quad (3)$$

причем знак плюс или минус перед правой частью следует взять в зависимости от того, имеет ли место соотношение $|\Delta x| > \Delta t$ или $|\Delta x| < \Delta t$. В первом случае вектор E_1E_2 пространственно-подобный, а во втором случае — временно-подобный. Длина $\Delta\tau$ равна нулю только для световых векторов, для которых $(\Delta x)^2 = (\Delta t)^2$.

То, что выражение (3) может иметь различные знаки (+ или —), на языке математики выражают, называя эту лоренцеву квадратичную форму *неопределенной*. Соответствующую евклидову квадратичную форму $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ называют *определенной*, так как ее знак вполне определен, а именно он всегда положительный.

Прямым линиям евклидовой геометрии соответствуют в лоренцевой геометрии прямые мировые линии. Временно-подобные прямые мировые линии изображают равномерные движения и обладают, подобно евклидовым прямым, следующим примечательным экстремальным свойством. Пусть AB есть временно-подобный мировой отрезок. Соединим конечные события A и B временно-подобной ломаной $AE_1 \ldots E_{n-1}B$. Тогда сумма собственных длин $\Delta\tau$ отрезков AE_1, E_1E_2 будет *меньше* собственной длины мирового вектора (ср. доказательство, приведенное на стр. 191—192). Это *максимальное свойство* характеризует прямые линии (равномерные движения) как «геодезические линии» лоренцевой геометрии мира событий.

С другой стороны, согласно закону инерции, мировая линия прямолинейна (движение равномерно) в том случае, когда рассматриваемое тело движется в поле, не создающем никаких внешних сил. Если движение происходит под действием силы, то соответствующая мировая линия искривляется (движение происходит неравномерно).

Однако в римановой геометрии могут быть криволинейными также геодезические линии (для примера укажем на большие круги в геометрии сферической поверхности). В этом случае евклидова длина Δs [см. формулу (1)] отрезка кривой заменяется корнем квадратным из фундаментальной формы (1′) Гаусса — Римана, в которой коэффициенты a, b и c уже не постоянные, а переменные, зависящие от той точки P, из которой исходит рассматриваемый отрезок кривой.

Это обстоятельство естественным образом привело Эйнштейна к мысли рассматривать специальную теорию относительности («лоренцеву геометрию») как частный случай более общей теории, обобщающей лоренцеву геометрию в риманову геометрию мира событий подобно тому, как евклидова геометрия обобщается в теорию Гаусса — Римана.

В развитой на основе этой идеи общей теории относительности собственная длина $\Delta\tau$ малого временноподобного мирового вектора определяется относительно местной лоренцевой системы $K_E(x, t)$ корнем квадратным из неопределенной квадратичной «мировой формы»

$$a(\Delta x)^2 + 2c\,\Delta x\,\Delta t + b(\Delta t)^2, \qquad (3')$$

где Δx и Δt суть пространственная и временна́я проекции мирового вектора, начало которого находится в точке $E(x, t)$. Здесь коэффициенты a, b и c суть функции рассматриваемой мировой точки E, т. е. функции координат x и t. Эти коэффициенты определяются из условия, что движение тела должно происходить по *геодезической* линии, собственная длина которой обладает упомянутым выше экстремальным свойством.

Таким путем возникает, в качестве обобщения специальной теории относительности и соответствующей элементарной лоренцевой геометрии, общая теория относительности — риманова геометрия мира событий.

Эту монументальную идею Эйнштейн применил в своей теории тяготения. Коэффициенты a, b и c неопределенной фундаментальной квадратичной формы (3′) мировой метрики определяются в этой теории распределением материи в мировом пространстве, с учетом положения и величины масс. В качестве отправного пункта используется следующее обстоятельство: в очень малых частях мирового пространства геодезические линии, по которым движутся небесные тела, приближенно совпадают с орбитами, определяемыми на основании классической теории тяготения Ньютона.

Подобно тому как евклидова геометрия является предельным случаем римановой геометрии для малых пространственных окрестностей, так и лоренцева геометрия специальной теории относительности представляет собой предельный случай римановой геометрии мира событий общей теории относительности в том случае, если ограничиться рассмотрением явлений в достаточно малой области физического мира событий. В самом деле, теория тяготения Эйнштейна настолько точно совпадает с законами Ньютона даже в пространстве, занимаемом нашей солнечной системой, что отклонения лежат ниже упомянутой в § 2 гл. I минимальной ошибки наблюдения. Только при движении Меркурия — самой малой планеты нашей солнечной системы «эффекты Эйнштейна» достигают значений, немного превышающих минимальную ошибку наблюдения. Но и в этом случае экспериментальное подтверждение теории тяготения Эйнштейна остается ненадежным. Такая же ненадежность получается и при экспериментальном определении отклонения световых лучей, вызываемого, согласно общей теории относительности, полем тяготения небесных тел. Однако в последние годы были разработаны более точные экспериментальные методы для эмпирической проверки теории тяготения. Благодаря опытам Мёссбауэра (Mössbauer), получившего в 1961 г. Нобелевскую премию, в настоящее время теоретическую картину мира, вытекающую из общей теории относительности, следует считать эмпирически подтвержденной.

В очень протяженных частях космоса результаты теории тяготения Эйнштейна дают чрезвычайно большие отклонения от физической картины классической физики. Они дают основание предполагать, что мировое пространство замкнутое, т. е. конечное, но безграничное. Следовательно, пространственно-временно́й мир должен быть «цилиндрическим», подобным тому, который был описан в § 7 гл. II. Пространственный базис этого пространственно-временно́го мира образован конечным трехмерным пространством. Исходя из этой гипотезы, Эйнштейн даже пытался с помощью своей теории тяготения определить конечный объем пространства.

С логической точки зрения вполне возможна гипотеза, что мир замкнут также во временно́м отношении. Такой мир уже не был бы цилиндрическим в направлении времени и имел бы в целом структуру, описанную в § 7 гл. II.

Заключение

В нашей попытке изложить основные идеи картины мира, раскрываемой современным точным естествознанием, мы достигли границ, перейти за которые без применения методов высшей математики невозможно. Впрочем, и те сведения, которые нам удалось дать в элементарном изложении, остались частично незаконченными, так как мы, где только могли, старались избегать «высшей математики». Особенно это относится к параграфам, посвященным динамике, римановой геометрии и общей теории относительности. Эту теорию можно было затронуть только вскользь, ограничившись лишь общими, довольно неопределенными указаниями.

С другой стороны, при критическом рассмотрении того или иного вопроса часто полезно ограничивать изложение элементарными методами и не прибегать к методам высокоразвитых специальных дисциплин. Часто ученый, именно вследствие своих технических навыков, склонен направлять свое внимание односторонне на дальнейшее развитие теории и не останавливаться в достаточной мере на фундаментальных, принципиальных аспектах теории. Даже специалисту всегда полезно возвращаться к тем исходным предпосылкам, из которых выросли теория и созданная этой теорией «картина мира». Критический пересмотр этих предпосылок может помочь лучше понять подлинное содержание представлений, ранее принятых за очевидные или оставшихся неосознанными. Это ведет к углублению понимания теории, к расширению поля зрения. Такой критический пересмотр может превратиться в кризис. Выявляется, что старые представления слишком узки или даже представляют собой необоснованные предубеждения. Старая картина мира расшатывается в своих основах и вынуждена уступить свое место новым взглядам, открывающим путь к созданию более широкого представления о действительности.

Следя за ходом развития точного естествознания, мы останавливались на тех этапах этого развития, которые приводили к решающим поворотам мышления в направлении более широкого понимания действительности. Такими этапами были: блестящее достижение греческой античной мысли — поднятие эмпирической геометрии на высокую ступень математической теории (Евклид); возникновение современной физики (Коперник, Кеплер, Галилей); создание Ньютоном классической физико-математической универсальной картины мира, в частности подчинение кинематических явлений динамическим законам; возникновение неевклидовой геометрии (Бойяи, Лобачевский) и ее обобщение в дифференциально-геометрические теории Гаусса и Римана; критика Эйнштейном понятия времени, вызвавшая появление специальной теории относительности; толкование мира физических событий как лоренцевой геометрии четырехмерного пространственно-временно́го многообразия (Эйнштейн, Минковский) и, наконец, объяснение гравитации с помощью римановой метрики четырехмерного мира на основе общей теории относительности Эйнштейна.

Главная цель нашего изложения состояла в том, чтобы оттенить следующие важные и общие обстоятельства.

Каждый из упомянутых этапов развития естествознания представлял собой глубокий переворот в представлениях. На место старых воззрений приходили существенно новые взгляды. Однако переход к более новой точке зрения ни в коем случае не означает полного отказа от прежних представлений. Эти представления образуют почву, из которой органически произрастает новая теория; они продолжают жить в новой теории либо в модифицированной форме, либо в качестве предельных случаев новых закономерностей.

Так, например, переход от евклидова понимания пространства к неевклидовой геометрии ни в коем случае не означает крушения учения Евклида. Новые теории пространства расширяют и модифицируют евклидовы представления, и, что особенно важно, евклидова структура пространства сохраняет с большой точностью свою правильность в достаточно малых, но с точки зрения практики обычных пространственных областях.

Аналогичным образом, понятие времени, введенное Эйнштейном, содержит старую теорию абсолютного времени в качестве предельного случая. Релятивизация времени, следовательно, представление, что временно́е течение физических явлений зависит от состояния движения наблюдателя, распространяется только на узкую область физической действительности. Поэтому в практической жизни и даже в широких областях физического знания последователь теории относительности может пользоваться классическим понятием абсолютного времени без всякого опасения прийти к практически существенным противоречиям.

Кинематика и динамика теории относительности также хорошо совпадают с учением Ньютона, если ограничиться рассмотрением сравнительно небольших пространственных и временны́х расстояний и скоростей.

Теория гравитации Эйнштейна дает ничтожно малые отклонения от законов притяжения Ньютона даже в области пространства, занимаемой нашей солнечной системой. Только при значительно бо́льших, космических расстояниях отклонения становятся существенными.

Современная квантовая теория, на которой мы не могли здесь остановиться, также содержит в себе классическую физику как предельный случай.

Точное естествознание, несмотря на все перевороты, все же в целом сохраняет монументальную непрерывность. Natura non facit saltis, природа не делает скачков.

Это всегда надо учитывать, если желательно иметь правильное представление о современном положении точного естествознания. Теория относительности и квантовая физика существенным образом изменили физическую картину мира. В течение нескольких десятилетий мы переживали все новые и новые неожиданности.

Стремительность развития точного естествознания, перевороты, вызванные этим развитием в теории и в технике, в какой-то мере внушают тревогу. Однако не может быть никакого сомнения в том, что в настоящее время точное естествознание находится в фазе продуктивного и мощного развития. Каких-либо признаков упадка в этой области культуры не видно. Новые смелые научные идеи основаны в противоположность некоторым другим явлениям современной культуры не на беспорядочном экспериментировании или произвольных идеях. Если вникнуть в природу современных научных переворотов, то нетрудно увидеть, что точное естествознание непрерывно движется вперед по тому пути, по которому человеческая мысль начала идти еще в древние времена.

Литература

А. По темам «Пространство» и, частично, «Время»

[1] «Начала» Евклида, т.т. I—III, М.—Л., Гостехиздат, 1948—1950.

Классическое сочинение, содержащее первый дошедший до нас опыт дедуктивного построения геометрии.

[2] Гильберт Д., Основания геометрии, М.—Л., Гостехиздат, 1948.

Эта книга, принадлежащая перу одного из крупнейших математиков XX века, содержит одну из первых последовательно дедуктивных систем построения геометрии, а также тщательный логический анализ предложенной аксиоматики. В русском издании перевод книги сопровождается обстоятельной вводной статьей П. К. Рашевского, содержащей, в частности, разбор общих вопросов аксиоматического построения геометрии, во многом перекликающийся с гл. I настоящей книги.

[3] Сборник «Об основаниях геометрии», М., Гостехиздат, 1956.

В этой книге собраны многие классические работы, связанные с проблемами обоснования геометрии, в том числе упомянутые в гл. I настоящей книги работы К. Ф. Гаусса, Я. Бойяи, Н. И. Лобачевского, Б. Римана и др.

[4] Рашевский П. К., Геометрия и ее аксиоматика, Сборник «Математическое просвещение», вып. 5, М., Физматгиз, 1960, стр. 73—98.

Научно-популярная статья, близкая к вступительному очерку того же автора, предпосланному русскому изданию книги Д. Гильберта [2].

[5] Розенфельд Б. А., Аксиомы и основные понятия геометрии, «Энциклопедия элементарной математики» (ЭЭМ), кн. IV, М., Физматгиз, 1963, стр. 9—48.

По своему характеру эта статья близка к статье П. К. Рашевского [3]; однако в ней больше внимания уделено истории дедуктивного построения геометрии.

[6] Каган В. Ф., Очерки по геометрии, М., Изд. Московского университета, 1963.

Первый раздел этой книги, принадлежащей перу замечательного ученого и популяризатора геометрии, имеет много точек соприкосновения с содержанием настоящей книги.

[7] Каган В. Ф., Лобачевский, Изд. Академии наук СССР, М.—Л., 1948.

Подробная биография Н. И. Лобачевского, в которой обстоятельно разобран широкий круг вопросов, связанных с темой настоящей книги.

[8] Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия, М., Гостехиздат, 1955.

Сборник популярных статей известного геометра и педагога, весьма широко затрагивающий весь круг вопросов, связанный с неевклидовой геометрией Лобачевского.

[9] Кокстер Г. С. М., Введение в геометрию, М., «Наука», 1966.

Обстоятельный учебник геометрии, рассчитанный на настоящих и будущих учителей математики; содержит доступное изложение многих разделов геометрии, затронутых в гл. 1 настоящей книги (основания геометрии, неевклидова геометрия, теория поверхностей, многомерная геометрия и т. д.).

[10] Розенфельд Б. А. и Яглом И. М., Неевклидовы геометрии, ЭЭМ, кн. V, М., «Наука», 1966, стр. 393—475.

В этой статье, посвященной разным типам «неевклидовых» геометрий, наряду с неевклидовой геометрией Лобачевского затрагиваются и геометрические системы, служащие для интерпретации фактов классической и релятивистской механики.

[11] Розенфельд Б. А. и Яглом И. М., Многомерные пространства, ЭЭМ, кн. V, стр. 349—392.

Научно-популярная статья, посвященная затронутому в § 12 гл. I вопросу о многомерных пространствах.

[12] Яглом И. М. и Атанасян Л. С., Геометрические преобразования, ЭЭМ, кн. IV, М., Физматгиз, 1963, стр. 49—158.

§ 6 этой обширной статьи содержит обсуждение вопроса о геометрической трактовке физических «принципов относительности».

[13] Александров П. С., Колмогоров А. Н., Николай Иванович Лобачевский (к 150-летию со дня рождения), М.—Л., Гостехиздат, 1943.

Книга [13], состоящая из нескольких статей двух выдающихся советских математиков, затрагивает целый ряд вопросов, связанных с содержанием гл. I настоящей книги.

Б. По темам «Время» и «Относительность»

[14] Лоренц Г. А., Пуанкаре А., Эйнштейн А., Минковский Г., Принцип относительности, М.—Л., ОНТИ, 1935.

Сборник классических статей основоположников теории относительности.

[15] Эйнштейн А., Сущность теории относительности, М., ИЛ, 1955.

Принадлежащее самому Эйнштейну серьезное изложение основ специальной и общей теории относительности.

[16] Эйнштейн и развитие физико-математической мысли, М., Изд. Академии наук СССР, 1962.

[17] Эйнштейн и современная физика, М., Гостехиздат, 1956.

Сборники [16] и [17] содержат статьи общего характера, принадлежащие математикам и физикам разных стран (в том числе и самому Эйнштейну); имеют много точек соприкосновения с содержанием настоящей книги.

[18] Эйнштейн А., О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение), Птр., научное книгоиздательство, 1923. (Книга включена также в сборник [41].)

Превосходное изложение основных идей теории относительности для широкого круга читателей, принадлежащее ее творцу.

[19] Ландау Л. Д., Румер Ю. Б., Что такое теория относительности, М., «Сов. Россия», 1963.

[20] Гарднер М., Теория относительности для миллионов, М., Атомиздат, 1965.

[21] Шварц Дж., Как это произошло (иллюстрированый рассказ о том, как теория относительности устанавливает связи причин и следствий), М., «Мир», 1965.

[22] Смилга В., Очевидное? Нет, еще неизведанное, М., «Молодая гвардия», 1966.

Книги [19]—[22] рассчитаны на начинающих читателей, обладающих минимальной математической и физической подготовкой; однако несмотря на то, что они содержат мало нового для читателей этой книги, эти книги могут оказаться небесполезными для некоторых из них. Особенно хочется порекомендовать здесь превосходно написанную брошюру [19], принадлежащую выдающимся советским физикам, и книгу [21], ярко и интересно иллюстрированную (ее можно было бы, быть может, назвать «теория относительности в картинках»).

[23] Борн М., Эйнштейновская теория относительности, М., «Мир», 1964.

Одно из лучших популярных изложений теории относительности, написанное выдающимся физиком.

[24] Дьюрелл К., Азбука теории относительности, М., «Мир», 1964.

Одно из лучших популярных изложений теории относительности, написанное выдающимся педагогом.

[25] Жуков А. И., Введение в теорию относительности, М., Физматгиз, 1961.

[26] Соколовский Ю. И., Теория относительности в элементарном изложении, М., «Наука», 1964.

[27] Кузнецов Б. Г., Беседы о теории относительности, М., Изд. Академии наук СССР, 1960.

[28] Петров А. З., Пространство-время и материя, Изд. Казанского университета, 1961.

Книги [25]—[28] — лишь некоторые из популярных изложений теории относительности, вышедшие в нашей стране в последние годы.

[29] Фридман А. А., Мир как пространство и время, М., «Наука», 1965.

Популярное изложение идей общей теории относительности, принадлежащее выдающемуся физику, активно участвовавшему в разработке относящихся сюда проблем.

[30] Эддингтон А. С., Теория относительности, Л.—М., ОНТИ, 1934.

[31] Паули В., Теория относительности, М.—Л., Гостехиздат, 1947.

[32] Weyl H., Raum. Zeit. Materie., Berlin, 1923 (существуют несколько переводов на английский и французский языки).

Книги [30]—[32] — классические учебники теории относительности, написанные выдающимися учеными и рассчитанные на студентов-физиков. Особо хочется отметить здесь замечательную и как чисто литературное произведение книгу [32], выдержавшую очень много изданий и переведенную на ряд языков, но, к сожалению, не на русский. (Из имеющихся на русском языке серьезных изложений основ теории относительности лучшими, возможно, являются книги [30] и [33].)

[33] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, М., Физматгиз, 1962.

Этот том многотомной «Теоретической физики» лауреата Нобелевской премии Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица содержит превосходное изложение идей специальной теории относительности.

[34] Бергман П. Г., Введение в теорию относительности, М., ИЛ, 1947.

[35] Синг Д., Общая теория относительности, М., ИЛ, 1963.

[36] Тоннела М. А., Основы электромагнетизма и теории относительности, М., ИЛ, 1962.

[37] Мак-Витти Г. К., Общая теория относительности и космология, М., ИЛ, 1961.

Книги [34]—[37] рассчитаны на подготовленного читателя; самая простая из них — книга П. Г. Бергмана [34], представляющая собой хороший учебник для студентов.

[38] Мандельштам Л. И., Лекции по физическим основам теории относительности. Собрание сочинений, т. V, М., Изд. АН СССР, 1950, стр. 90—305.

Курс лекций по специальной теории относительности выдающегося ученого и педагога, рассчитанный на студентов-физиков.

[39] Эйнштейн А., Инфельд Л., Эволюция физики, М., «Наука», 1965.

[40] Эйнштейн А., Физика и реальность, М., «Наука», 1963.

Книги [39]—[40] посвящены общим проблемам физики; они не предполагают у читателя серьезной подготовки и имеют много точек соприкосновения с содержанием настоящей книги.

[41] Философские вопросы современной физики, М., Изд. АН СССР, 1059.

[42] Франк Ф., Философия науки, М., ИЛ, 1960.

[43] Уитроу Дж., Естественная философия времени, М., «Прогресс», 1964.

Книги [41]—[43] посвящены философии науки; они тесно связаны с вопросами, затрагиваемыми в настоящей книге.

Оглавление

Р. Неванлинна

ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ
И ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ

Редактор *Д. В. Беклемишев*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *А. Д. Хомяков*

Сдано в производство 13/VII 1966 г.
Подписано к печати 15/XI 1966 г.
Бумага 84×108 1/32. 3,63 бум. л.
12,18 усл. печ. л.
Уч.-изд. л.10,76. Изд. № 1/3562
Цена 98 к. Зак. № 272
(Тем. план 1966 г. изд-ва «Мир», пор. № 29)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.