ИЗДАТЕЛЬСТВО

«МИР»

BASES MATHÉMATIQUES
DU CALCUL DES PROBABILITÉS

par

JACQUES NEVEU

MASSON ET CIE, PARIS

1964

1986

Ж. Невё

Математические основы теории вероятностей

Перевод с французского
В. В. САЗОНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» · МОСКВА 1969

УДК 519.2

Автор книги известен своими работами по применению методов функционального анализа и теории меры к вопросам теории вероятностей.

Мастерски написанная книга содержит компактное и в то же время полное изложение оснований теории вероятностей. Включено много полезных дополнений и упражнений.

Книга может служить хорошим учебником для студентов и аспирантов, желающих серьезно изучить теорию случайных процессов, и отличным справочником для специалистов.

Редакция литературы по вопросам математических наук

Инд. 2-2-3

От переводчика

Это издание заполняет пробел в вероятностной литературе на русском языке. У нас нет книги небольшого объема, после изучения которой можно было бы читать монографическую и журнальную литературу по теории вероятностей. Со времени выхода в свет совершившей переворот в науке о вероятностях монографии А. Н. Колмогорова „Основные понятия теории вероятностей“ прошло уже более тридцати лет. Назрела потребность в книге, отвечающей современному состоянию теории вероятностей (даже если оставить в стороне вопрос об усовершенствовании аксиоматики Колмогорова).

Благодаря тщательному отбору и продуманному изложению материала книга профессора Ж. Невё содержит все основные сведения из теории меры и интегрирования, нужные в теории вероятностей, а также важнейшие вероятностные результаты, которые, будучи интересны и сами по себе, служат также инструментом при изучении других вероятностных проблем или лежат в основе более тонких и глубоких вопросов (сепарабельность и измеримость случайных функций, мартингалы, марковские процессы и т. д). Автор включил в книгу такой нетрадиционный в вероятностном курсе материал, как компактные вероятностные меры и интегрирование на топологических пространствах. Правда, в книге не изложен один из самых мощных методов теории вероятностей — метод характеристических функций, однако достаточно полное его изложение имеется во многих учебных пособиях и монографиях.

Удачно подобранные дополнения и упражнения помогают более глубоко усвоить основной текст. Кроме того, в них намечены важные обобщения и применения излагаемых результатов. При всей лаконичности стиля книга написана очень ясно. Тем не менее для чтения ее требуется достаточно высокая математическая культура и желательно некоторое предварительное знакомство с элементами теории вероятностей.

Перевод сделан с французского издания 1964 г. с учетом всех изменений и добавлений, внесенных автором в английское издание 1965 г.

9 июня 1968
Москва

В. Сазонов

Предисловие

Теория вероятностей и, в частности, теория случайных процессов и векторнозначных случайных величин в их современном состоянии не могут быть поняты без глубокого понимания теории меры. Для того, кто хочет принять участие в дальнейшем развитии теории вероятностей, недостаточно простого знакомства с фундаментальными понятиями и результатами теории меры; необходимо также овладеть ее техническим аппаратом и научиться использовать его в новых ситуациях.

С другой стороны, часто приходится слышать — и в некотором смысле это вполне оправдано — что теория вероятностей есть просто раздел теории меры; однако в пределах теории меры теория вероятностей выделяется природой тех вопросов, которые она старается разрешить, природа же эта определяется не самой теорией меры, а философским и практическим содержанием понятия вероятности.

С 1959 года профессор Невё читал этот курс на факультете наук в Париже. Нет необходимости представлять профессора Невё специалистам по теории вероятностей. Всего за несколько лет он привлек их внимание своими блестящими исследованиями; однако не всем так хорошо известно, как мне, насколько высоко ценят наши студенты и молодые ученые его живой и ясный метод преподавания. Читавшийся им курс, обогащенный его педагогическим опытом, лежит в основе настоящей книги.

Книг по теории меры немало, часть из них богаче по материалу, и некоторые прекрасно написаны. Я уже указывал, однако, почему вероятностникам нужен курс, написанный специально для них; кроме того, для начинающих предпочтительна книга небольших размеров.

При таком положении вещей естественно, что целью профессора Невё было написать книгу, объединяющую результаты различных исследований, а вовсе не оригинальную монографию; автор не претендует на введение новых концепций или установление новых теорем. Тот факт, что каждая глава снабжена весьма полезными дополнениями и упражнениями, подчеркивает существенно учебный характер книги. В этом отношении я хочу отметить два ее достоинства: во-первых, автор избегает громоздких обозначений, во-вторых, в изложение предмета, по существу своему абстрактного, он без колебаний вводит пояснения, содержащие ту или иную интерпретацию, устанавливающие причинные связи и привлекающие внимание к возможным ошибкам.

Тем не менее книга отличается подлинной оригинальностью. Прежде всего, по содержанию — к традиционному материалу по теории меры и интегрирования добавлены различные теоремы о построении вероятности посредством продолжения с алгебры на σ-алгебру, с компактных подклассов на полуалгебры, с конечных произведений пространств на бесконечные произведения пространств (теоремы Колмогорова и Тулчи) и т. д. Включены такие темы, как измеримость, сепарабельность, построение случайных функций, условные ожидания, мартингалы. Результаты общего характера иллюстрируются применениями к моментам остановки, эргодической теории, марковским процессам, а также к ряду других областей. Все эти применения редко включаются в курсы теории меры — некоторые из них потому, что соответствующие результаты лишь недавно были получены, другие — потому, что, будучи весьма важными для теории вероятностей, они не представляют, возможно, большого интереса с точки зрения общей теории меры.

Оригинальность проявляется также в последовательности изложения. Особенно мне нравится то, что профессор Невё систематически выдвигает на первый план алгебраические структуры семейств событий (булевы алгебры, σ-алгебры и т. д.) и избегает преждевременного введения топологических понятий; в результате еще отчетливее выясняется значение последних.

На протяжении всего изложения автору удалось подобрать весьма короткие и изящные доказательства, так что, несмотря на небольшой объем книги, в ней содержится удивительно много материала. Изучаются, например, хотя и кратко, пространства L_p и даже — с помощью умелого использования дополнений и упражнений — теория статистических решений и достаточные статистики.

Нисколько не рискуя, я могу предсказать этой книге долгую жизнь и большой успех — и как учебнику для подготовленных студентов, и как справочнику для специалистов.

Р. Форте

Август 1965
Женева

Введение

Предметом теории вероятностей является математический анализ понятия случайности. Строгое построение теории вероятностей, как и всякой математической дисциплины, возможно лишь на основе некоторой системы точных определений и аксиом. Формулировка таких математических основ и математическая разработка теории исторически относятся к тридцатым годам нашего века. Именно к этому периоду теория меры и интегрирования на пространствах общей природы оказалась достаточно развитой, чтобы обеспечить теорию вероятностей фундаментальными определениями и снабдить ее весьма мощным аппаратом исследования.

С тех пор многочисленные вероятностные исследования, предпринятые как в чисто теоретическом, так и в практическом плане (в том числе и те, в которых использовались функциональные пространства), лишь подтвердили существование глубоких связей между теорией вероятностей и теорией меры. Эти связи настолько близки, что некоторые авторы склонны считать теорию вероятностей не более как ветвью (хотя и исключительно важной!) теории меры.

Во всяком случае, если не ограничиваться изучением весьма элементарных вероятностных моделей и, в частности, не отказываться от рассмотрения случайных функций, глубокое изучение теории вероятностей и математической статистики в настоящее время невозможно без постоянного обращения к теории меры. Следует отметить, что предпринимались попытки трактовать вопросы сходимости в теории вероятностей в узких рамках изучения функций распределения, однако этот подход приводит лишь к обманчивым упрощениям и еще более затемняет интуитивные основы этих вопросов.

Настоящая книга содержит основной материал курса лекций, рассчитанного на студентов, уже владеющих некоторыми элементарными понятиями теории вероятностей. Назначение ее — дать солидную математическую базу для изучения теории вероятностей. Эта книга может служить введением в теорию вероятностей лишь для читателей с достаточно высокой математической культурой.

Главная цель этого курса, следовательно, — научить читателя пользоваться мощным аппаратом теории меры, что даст ему возможность впоследствии разобраться в любом вопросе теории вероятностей. Основной текст дополняется многочисленными упражнениями. Поскольку излагаемый предмет имеет довольно „технический" характер, мы настоятельно советуем прочитать и попытаться решить большинство упражнений (для облегчения этой работы многие упражнения сопровождаются набросками решения). Следуя прочно установившейся к настоящему времени французской традиции для вводных курсов, мы не даем библиографических справок в тексте и, за редкими исключениями, не указываем принадлежности излагаемых результатов их авторам. В конце книги читатель найдет краткую библиографию как к основному тексту книги, так и к дополнениям; в частности, большинство упражнений основано на работах, указанных в этой библиографии.

Мы не хотели бы скрывать от читателя того факта, что теория меры — не единственный (хотя и основной) инструмент теории вероятностей; мы не могли бы настаивать на том, чтобы читатель изучил, если он еще этого не сделал, основные понятия топологии, теорию метрических пространств и теорию гильбертовых и банаховых пространств. В ограниченных рамках этой книги невозможно было поместить какие-либо введения в эти теории. Некоторые упражнения, и даже отдельные части основного текста[1]), используют понятия, заимствованные из этих теорий; однако начинающий читатель может пропустить их без боязни потерять нить изложения; в то же время более подготовленного читателя, возможно, заинтересуют указанные там связи с другими областями математики.

Я хотел бы воспользоваться случаем поблагодарить профессоров Р. Форте, М. Лоэва и А. Тортра за их советы и поддержку. На окончательной форме изложения сказалась также реакция студентов, слушавших мой курс.

Ж. Невё

[1]) Мы пометили их звездочкой.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

∎ — коиец доказательства

(*) — трудная часть текста или трудное упражненне, требующие иногда знакомства с понятиями, не определяемыми в этой книге

$\to$ — знак сходимости

$\Rightarrow$ — знак импликацин („влечет“)

(д.) с. в. — (действительная) случайная велнчина

(д.) с. ф. — (действительная) случайная функция

п. н. — почти наверное

Глава I

Вероятностные пространства

Фундаментальными понятиями теории вероятностей являются понятия *события* и *вероятности*. С аксиоматической точки зрения события представляют собой математические объекты, которые можно комбинировать с помощью логических операций „нет“, „и“, „или“ (в соответствии с правилами, описанными в п. 1 настоящей главы), а вероятность есть числовая характеристика класса событий, свойства которой по определению аналогичны свойствам частоты (см. п. 3).

Другим важным понятием, которое нередко вводится как первичное понятие теории вероятностей, является понятие *элементарного события* или, иными словами, результата случайного эксперимента. Если ограничиться естественным соглашением рассматривать лишь те события и элементарные события, которые относятся к изучаемому эксперименту, то каждое элементарное событие по самому его определению необходимо определяет либо реализацию, либо нереализацию каждого из событий. Введем множество Ω всех элементарных событий (возможных результатов рассматриваемого эксперимента) и идентифицируем каждое событие с подмножеством тех элементарных событий, которые реализуют это событие. Вероятность при этом становится функцией множества аналогичной объему, определенному на некоторых подмножествах евклидова пространства. Описанный подход представляет собой подход с точки зрения теории меры и будет развит в первой главе.

Что касается вероятностей, то их мы определяем сначала на булевых алгебрах (или, как в п. 6, на булевых полуалгебрах), затем продолжаем на σ-алгебры и, таким образом, конструируем вероятностные пространства. Этот подход имеет то преимущество, что он явно выделяет весьма важную теорему теории меры о продолжении. Кроме того, при построении вероятностей в евклидовых пространствах, равно как и в произведениях пространств (см. гл. III), вероятности оказываются естественно определенными сначала на алгебрах и полуалгебрах.

I.1. События

Первичным понятием теории вероятностей является понятие события. Мы будем рассматривать события лишь с точки зрения их осуществления или неосуществления. Анализ этого понятия приведет нас к тому, что мы наделим множество событий, которые мы рассматриваем в связи с некоторой определенной задачей, структурой булевой алгебры.

Рассмотрим сначала два специальных события: *невозможное событие*, обозначаемое $\varnothing$, и *достоверное событие*, обозначаемое Ω.

Каждому событию A поставим в соответствие *дополнительное событие*, обозначаемое A^c. По определению событие A^c реализуется тогда и только тогда, когда событие A не реализуется. Введем как аксиомы следующие свойства этой операции (они представляются „интуитивно“ очевидными):

$$(A^c)^c = A; \qquad \varnothing^c = \Omega; \qquad \Omega^c = \varnothing.$$

Каждой паре событий A, B поставим в соответствие следующие два события: *объединение A и B*, понимаемое как „A или B“ и обозначаемое $A \cup B$ или $\sup(A, B)$, и *пересечение A и B*, понимаемое как „A и B“ и обозначаемое $A \cap B$, AB или $\inf(A, B)$. По определению событие $A \cup B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит по крайней мере одно из событий A, B, а событие $A \cap B$ происходит тогда и только тогда, когда происходят оба события A и B. Операции объединения и пересечения коммутативны и ассоциативны:

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A,$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

так что всякое конечное непустое семейство событий $\{A_i,\ i\in I\}$ имеет объединение $\bigcup\limits_I A_i=\sup\limits_I A_i$ и пересечение $\bigcap\limits_I A_i=\inf\limits_I A_i$. Следующие формулы вводятся опять как аксиомы

$$
\begin{array}{llll}
 & A\cup A=A, & A\cap A=A, & \\
A\cup\varnothing=\varnothing, & A\cap\varnothing=\varnothing, & A\cup\Omega=\Omega, & A\cap\Omega=A.\\
 & A\cup A^c=\Omega, & A\cap A^c=\varnothing, &
\end{array}
$$

Как аксиомы вводятся также следующие соотношения для произвольного конечного непустого семейства событий $\{A_i,\ i\in I\}$:

$$\left(\bigcup_I A_i\right)^c=\bigcap_I A_i^c,\qquad \left(\bigcap_I A_i\right)^c=\bigcup_I A_i^c.$$

Наконец, операции объединения и пересечения дистрибутивны по отношению друг к другу:

$$B\cap\left(\bigcup_I A_i\right)=\bigcup_I(B\cap A_i);\qquad B\cup\left(\bigcap_I A_i\right)=\bigcap_I(B\cup A_i).$$

Структура, которая образуется на множестве событий введенными определениями и аксиомами, называется структурой *булевой алгебры*. Весьма важны также следующие вспомогательные понятия, которые определяются на булевой алгебре событий.

Два события A, B, такие, что $A\cap B=\varnothing$, называются *взаимно исключающими* или *непересекающимися*. Объединение непересекающихся событий мы называем *суммой* и обозначаем $A+B$ вместо $A\cup B$. Аналогично, если $\{A_i,\ i\in I\}$ — заданное конечное непустое семейство попарно непересекающихся событий, то их объединение называется „суммой событий A_i $(i\in I)$" и обозначается $\sum\limits_I A_i$ вместо $\bigcup\limits_I A_i$.

Разностью двух событий A, B называют событие AB^c и обозначают его $A-B$. *Симметрической разностью* двух событий A, B называют событие $(A-B)+(B-A)$ и обозначают его $A\triangle B$. Событие $A-B$ происходит тогда и только тогда, когда событие A происходит, а событие B не происходит. Событие $A\triangle B$ происходит тогда и только тогда, когда происходит лишь одно из событий A, B.

Обозначения $\bigcup\limits_I A_i$, $\bigcap\limits_I A_i$, $\sum\limits_I A_i$ удобно распространить на тот случай, когда семейство событий I пусто. Полагают

$$\bigcup_I A_i=\varnothing,\qquad \sum_I A_i=\varnothing,\qquad \bigcap_I A_i=\Omega\qquad (I \text{ пусто}).$$

В силу этого естественного соглашения все выписанные выше формулы, относящиеся к конечному семейству событий, справедливы также и для пустого семейства событий. Кроме того, это соглашение позволяет, например, записать в простом виде формулу, составляющую содержание следующей элементарной леммы.

Лемма I.1.1. *Для всякого семейства* $\{A_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$, *состоящего из* n $(n\geqslant 1)$ *событий, справедлива формула*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\sum_{i=1}^{n}\left(A_i-\bigcup_{j=1}^{i-1}A_j\right).$$

Для доказательства леммы воспользуемся индукцией по n. При $n=1$ утверждение леммы очевидно. Далее, положив $A=\bigcup\limits_{1}^{n}A_i$, $B=A_{n+1}$, мы видим, что лемма будет доказана, если установить, что $A\bigcup B=A+(B-A)$, каковы бы ни были события A, B. Но это соотношение является простым следствием определений. ∎

Отметим, что предыдущая лемма утверждает попросту, что одно из событий последовательности $A_1, \ldots, A_n$ происходит тогда и только тогда, когда существует первое происходящее событие в этой последовательности. (Событие $A_i-\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}A_j$ происходит тогда и только тогда, когда A_i является первым происходящим событием последовательности.)

Говорят, что событие A *влечет* событие B (символически это обозначается $A\subset B$ или $B\supset A$), если

$A = A \cap B$, или, что равносильно, если $B = A \cup B$. Два события A, B, для которых $A \subset B$ и $B \subset A$, называются *эквивалентными* ($A = B$). Эквивалентные события мы различать не будем. Отношение „влечет" является отношением порядка в множестве событий. Это означает, что

$$A \subset A;$$

$$A \subset B,\ B \subset A \Rightarrow A = B;$$

$$A \subset B,\ B \subset C \Rightarrow A \subset C.$$

Более того, объединение $A \cup B$ (пересечение $A \cap B$) двух событий A и B является верхней (нижней) гранью этих событий относительно рассматриваемого порядка:

$$A \subset C,\ B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C;$$

$$A \supset C,\ B \supset C \Leftrightarrow A \cap B \supset C.$$

Отметим, наконец, что

$$A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c.$$

Дополнения и упражнения

I.1.1. Пользуясь введенными определениями и аксиомами, показать, что для любых событий A, B, C, D справедливы следующие равенства:

$$A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B; \quad A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B);$$

$$(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D);$$

$$(A \cap B) \triangle (A \cap C) = A \cap (B \triangle C);$$

$$(A \triangle B) + (A \triangle B^c) = \Omega.$$

I.1.2. Показать, что относительно операций $\triangle$ и $\cap$ всякая булева алгебра является (в алгебраическом смысле) коммутативным кольцом с единицей (равной Ω), для которого $A \cap A = A$ при всех A. По этой причине операцию взятия симметрической разности $\triangle$ называют также *булевой суммой*, а операцию взятия пересечения $\cap$ называют *булевым произведением*. Обратно, если $\mathcal{A}$ — коммутативное кольцо с единицей, скажем Ω, такое, что $A \cdot A = A$ при всех A, то операции

$$A \cap B = A \cdot B, \quad A \cup B = A \dotplus B \dotplus A \cdot B, \quad A^c = A \dotplus \Omega$$

определяют структуру булевой алгебры на $\mathcal{A}$. (Символы $\dotplus$ и $\cdot$ обозначают здесь соответственно операцию сложения и умножения в кольце $\mathcal{A}$.)

I.2. Испытания и элементарные события

Вторым понятием, которое обычно с самого начала вводят в теории вероятностей, является понятие испытания. Под *испытанием* понимают эксперимент с элементом случайности. Результат испытания называют *элементарным событием*. Каждое относящееся к рассматриваемой модели элементарное событие влечет либо наступление, либо ненаступление каждого данного события, связанного с рассматриваемой моделью. Выразим это соотношение между понятиями элементарного события и события в точных математических терминах.

Рассмотрим сначала множество всех элементарных событий, связанных с рассматриваемой моделью. Вместо изучения самой модели мы будем рассматривать это отвечающее ей множество элементарных событий. Каждому событию A поставим в соответствие подмножество A' множества элементарных событий, состоящее в точности из тех элементов, которые реализуют A. Естественно попытаться „идентифицировать“ A и A'. С этой целью предположим, прежде всего, что соответствие $A \to A'$ взаимно однозначно, т. е. что пространство элементарных событий достаточно велико, а именно для каждых двух различных событий существует по крайней мере одно элементарное событие, реализующее одно из этих событий и не реализующее другое.

Обратимся теперь к определениям п. I.1. Достоверному событию Ω соответствует множество Ω', состоящее из всех элементарных событий, в то время как невозможному событию $\varnothing$ соответствует множество $\varnothing'$, не содержащее ни одного элементарного события. Иными словами, Ω' есть пространство элементарных событий, а $\varnothing'$ есть пустое подмножество Ω'. Если событию A соответствует подмножество A' в Ω', то событию A^c, которое реализуется тогда и только тогда, когда A не реализуется, соответствует множество $(A')^c$, дополнительное к множеству A' в Ω', т. е. множество, состоящее из тех точек Ω' (элементарных событий), которые не принадлежат A'. Аналогично, если A, B — два события и A', B' — множества в Ω', реализующие

A и B соответственно, то множество $(A \cup B)'$ [соотв. $(A \cap B)'$] состоит из тех элементарных событий, которые принадлежат либо A', либо B' [соотв. и A, и B'].

Короче говоря, если обозначить операции дополнения, объединения и пересечения в смысле теории множеств символами ^{c}, $\cup$ и $\cap$ соответственно, то сказанное выше можно записать в виде

$$(A^c)' = (A')^c, \quad (A \cup B)' = A' \cup B', \quad (A \cap B)' = A' \cap B'.$$

Читатель может теперь убедиться, что при соответствии $A \to A'$ введенные в п. I. 1 аксиомы переходят в соответствующие аксиомы теории множеств. Соответствие $A \to A'$ устанавливает изоморфизм булевой алгебры событий в булеву алгебру $\mathscr{P}(\Omega')$, состоящую из всех подмножеств пространства элементарных событий Ω'. (В общем случае существуют подмножества Ω', не отвечающие никакому событию.)

Мы можем, таким образом, идентифицировать событие A и соответствующее ему множество элементарных событий A'. (Знак $'$ в дальнейшем отбрасывается.) Различным понятиям п. I. 1, касающимся событий, соответствуют классические понятия теории множеств. Это обстоятельство объясняет, в частности, двойственную терминологию § I. 1, а именно:

A или B	объединение A и B
A и B	пересечение A и B
A и B взаимно исключают друг друга,	A и B не пересекаются
достоверное событие Ω	пространство Ω
невозможное событие $\varnothing$	пустое множество $\varnothing$

Из всего изложенного выше в дальнейшем будет использоваться по существу лишь следующее:

(а) *множество Ω (пространство элементарных событий);*

(б) *булева алгебра подмножеств Ω (событий). По определению булева алгебра подмножеств Ω есть класс подмножеств Ω, содержащий $\varnothing$, Ω и замкнутый* *относительно операций образования дополнений, конечных объединений и конечных пересечений.*

(Класс $\mathscr{C}$ подмножеств множества Ω называется *замкнутым относительно* некоторой *операции* над множествами, если при применении этой операции к любым подмножествам Ω, принадлежащим $\mathscr{C}$, в результате получается подмножество Ω, тоже принадлежащее $\mathscr{C}$.) Отметим, что в силу соотношений

$$A_1 \cap \ldots \cap A_n = (A_1^c \cup \ldots \cup A_n^c)^c,$$
$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = (A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c)^c,$$

для того чтобы класс $\mathscr{A}$ был булевой алгеброй, достаточно, чтобы он содержал $\varnothing$, Ω и был замкнут относительно образования дополнений и конечных объединений (или дополнений и конечных пересечений).

Для всякого класса $\mathscr{C}$ подмножеств множества Ω существует наименьшая булева алгебра $\mathscr{A}$ подмножеств Ω, содержащая $\mathscr{C}$. Такой булевой алгеброй является класс всех подмножеств Ω, принадлежащих всем булевым алгебрам (подмножеств Ω), содержащим $\mathscr{C}$ (последние существуют, например, $\mathscr{P}(\Omega)$). Эта наименьшая булева алгебра называется булевой алгеброй, *порожденной классом* $\mathscr{C}$. Конструкция, доказывающая ее существование, применима и в более общей ситуации; то же соображение показывает, что если имеется некоторое количество операций над множествами (выше это были дополнение, конечное объединение и конечное пересечение), то для всякого класса $\mathscr{C}$ подмножеств Ω существует наименьший класс подмножеств Ω, содержащий $\mathscr{C}$ и замкнутый относительно рассматриваемых операций.

Доказываемое ниже предложение 2 дает более конкретную конструкцию булевой алгебры, порожденной классом $\mathscr{C}$. Рассмотрим сначала простейший случай конечных булевых алгебр.

Определение I.2.1. *Конечным разбиением* $\mathscr{P} = \{A_i, i \in I\}$ *множества* Ω *называется конечное семейство непустых попарно непересекающихся подмножеств* Ω, *в объединении дающих все* Ω.

Конечное разбиение $\mathscr{P}'$ множества Ω называют *продолжением конечного разбиения* $\mathscr{P}$, если всякое подмножество Ω из $\mathscr{P}$ есть объединение некоторых подмножеств Ω из $\mathscr{P}'$, или (что, как легко видеть, эквивалентно) если каждое подмножество Ω из $\mathscr{P}'$ содержится в некотором подмножестве Ω из $\mathscr{P}$. Отметим, что для всяких двух конечных разбиений $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ множества Ω существует конечное разбиение $\mathscr{P}$, являющееся продолжением обоих разбиений $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$. В самом деле, если $\mathscr{P}_1 = \{A_i,\ i \in I\}$ и $\mathscr{P}_2 = \{B_j,\ j \in J\}$, то в качестве такого разбиения $\mathscr{P}$ можно взять семейство всех непустых подмножеств Ω вида $A_i \cap B_j$ $(i \in I,\ j \in J)$.

Предложение I.2.1. *Булева алгебра* $\mathscr{A}$, *порожденная конечным разбиением* $\mathscr{P}$ *множества* Ω, *состоит из объединений всевозможных подсемейств семейства* $\mathscr{P}$ (*если* $\mathscr{P}$ *имеет* n *элементов, то* $\mathscr{A}$ *состоит из* 2^n *элементов*). *Обратно, если* $\mathscr{A}$ — *конечная булева алгебра подмножеств* Ω, *то множество ее атомов* (*непустых подмножеств* A *множества* Ω, *для которых* $\varnothing \neq B \subset A$, $B \in \mathscr{A} \Rightarrow B = A$) *образует конечное разбиение* Ω, *порождающее* $\mathscr{A}$.

Краткое доказательство. Проверка первого из утверждений предложения несложна и предоставляется читателю. Для доказательства второго утверждения заметим, что если $\mathscr{A} = \{A_i,\ i \in I\}$ — конечная булева алгебра подмножеств Ω, то каждое подмножество B вида $B = \bigcap_I B_i$, где B_i есть A_i или A_i^c $(i \in I)$, либо пусто, либо представляет собой атом алгебры $\mathscr{A}$. Поскольку всякие два непустые множества B не пересекаются и поскольку всякое множество $A \in \mathscr{A}$ (в частности, Ω) является объединением тех непустых множеств B, которые оно содержит, семейство непустых множеств B действительно образует конечное разбиение Ω, порождающее $\mathscr{A}$. Ясно, наконец, что всякий атом из $\mathscr{A}$ совпадает с некоторым множеством B. ∎

Предложение I.2.2. *Пусть* $\mathscr{C}$ — *произвольный класс подмножеств множества* Ω. *Образуем последовательно*

(1) *класс* $\mathscr{C}_1$, *состоящий из* $\varnothing$, Ω *и из* $A \subset \Omega$ *таких, что либо* A, *либо* $A^c \in \mathscr{C}$;

(2) *класс* $\mathscr{C}_2$ *конечных пересечений подмножеств* Ω *из* $\mathscr{C}_1$;

(3) *класс* $\mathscr{C}_3$ *конечных объединений попарно непересекающихся подмножеств* Ω *из* $\mathscr{C}_2$.

Так построенный класс $\mathscr{C}_3$ *совпадает с булевой алгеброй, порожденной классом* $\mathscr{C}$.

Доказательство. Прежде всего очевидно, что

(а) $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}_3$; $\varnothing$, $\Omega \in \mathscr{C}_1$;

(б) класс $\mathscr{C}_1$ замкнут относительно образования дополнений;

(в) класс $\mathscr{C}_2$ замкнут относительно образования пересечений.

Покажем, что $B \in \mathscr{C}_2 \Rightarrow B^c \in \mathscr{C}_3$. Для этого заметим, что если $B = C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n$, где $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}_1$ $(n \geqslant 1)$, то
$B^c = \sum C_1' \cap \ldots \cap C_n'$, где $C_i' = C_i$ или C_i^c $(1 \leqslant i \leqslant n)$, причем сумма берется по всем возможным комбинациям значений C_i', за исключением $C_i' = C_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Поскольку $C_i' \in \mathscr{C}_1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, постольку $C_1' \cap \ldots \cap C_n' \in \mathscr{C}_2$ и, следовательно, $B^c \in \mathscr{C}_3$.

Чтобы установить замкнутость $\mathscr{C}_3$ относительно операции пересечения, т. е. тот факт, что $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathscr{C}_3$ всякий раз, когда $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}_3$, представим подмножества A_i в виде

$$A_i = \sum_{j \in J_i} B_i^j,$$

где $\{B_i^j, j \in J_i\}$ при каждом i есть семейство попарно непересекающихся подмножеств Ω из $\mathscr{C}_2$. Тогда

$$\bigcap_i A_i = \sum_{J_1 \times \ldots \times J_n} B_1^{j_1} \cap \ldots \cap B_n^{j_n} \in \mathscr{C}_3,$$

поскольку класс $\mathscr{C}_2$ замкнут относительно пересечений.

Чтобы доказать замкнутость $\mathscr{C}_3$ относительно образования дополнений, заметим, что если $A = \sum_J B_j \in \mathscr{C}_3$, где B_j — попарно непересекающиеся множества из $\mathscr{C}_2$, то $A^c = \bigcap_J B_j^c$, причем в силу предыдущего $B_j^c \in \mathscr{C}_3$ $(j \in J)$.

Следовательно, $A^c \in \mathscr{C}_3$. Тем самым доказано, что класс $\mathscr{C}_3$ есть булева алгебра, содержащая $\mathscr{C}$. С другой стороны, легко видеть, что всякая булева алгебра, содержащая $\mathscr{C}$, содержит также $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ и $\mathscr{C}_3$. Предложение, таким образом, доказано. ∎

Дополнения и упражнения

Для выполнения упражнений I. 2.1 и I. 2.2 нужна следующая дистрибутивная формула:

$$\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I_j} F_i^j = \bigcap_{\{i_j\} \in K} \bigcup_{j \in J} F_{i_j}^j,$$

где $K = \prod_{j \in J} I_j$ (множество всех последовательностей $\{i_j,\ j \in J\}$).

I. 2.1. Обозначим через $\mathscr{F}_s$, $\mathscr{F}_\sigma$, $\mathscr{F}_d$, $\mathscr{F}_\delta$ соответственно классы конечных объединений, счетных объединений, конечных пересечений и счетных пересечений подмножеств Ω, принадлежащих некоторому заданному классу $\mathscr{F} \in \mathscr{P}(\Omega)$. Каждый из этих классов представляет собой также класс, порожденный $\mathscr{F}$, относительно соответствующей операции. Показать, что классы $\mathscr{F}_{sd} = (\mathscr{F}_s)_d$ и $\mathscr{F}_{s\delta}$ ($\mathscr{F}_{ds}$ и $\mathscr{F}_{d\sigma}$) замкнуты относительно конечных объединений (конечных пересечений). Вывести отсюда, что классы $\mathscr{F}_{sd}$ и $\mathscr{F}_{ds}$ совпадают и представляют собой наименьший класс, содержащий $\mathscr{F}$ и замкнутый относительно образования конечных объединений и пересечений. Показать на примерах, что ни один из классов $\mathscr{F}_{\sigma d}$, $\mathscr{F}_{\sigma\delta}$ ($\mathscr{F}_{\delta s}$, $\mathscr{F}_{\delta\sigma}$) не замкнут относительно счетных объединений (счетных пересечений).

*I. 2.2. ***Операция Суслина*** есть операция, ставящая в соответствие семейству $\{F_{(n_1, \ldots, n_k)}\}$ подмножеств Ω, индексы которых пробегают все *конечные* последовательности $(n_1, \ldots, n_k)$ натуральных чисел, подмножество $F = \bigcup_{\nu} F_\nu$, где индексы $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$ пробегают все *бесконечные* последовательности натуральных чисел и $F_\nu = \bigcap_{k \geqslant 1} F_{(\nu_1, \ldots, \nu_k)}$. Обозначим через $\mathscr{F}_S$ класс всех множеств F, получаемых применением суслинской операции к семействам $\{F_{(n_1, \ldots, n_k)}\}$ подмножеств, содержащихся в заданном классе $\mathscr{F}$ подмножеств Ω. Если класс $\mathscr{F}$ замкнут относительно конечных пересечений, то класс $\mathscr{F}_S$ не уменьшится, если ограничиться лишь такими семействами $\{F_{(n_1, \ldots, n_k)}\}$, для которых

$$F_{(n_1, \ldots, n_k, n_{k+1})} \subset F_{(n_1, \ldots, n_k)}.$$

Показать, что операции счетного объединения и счетного пересечения являются частными случаями суслинской операции. Показать, что класс $\mathcal{F}_S$ замкнут относительно суслинской операции (воспользоваться приведенной выше дистрибутивной формулой). Вывести отсюда, что если $F \in \mathcal{F} \Rightarrow F^c \in \mathcal{F}_S$, в частности, если дополнение F^c каждого множества $F \in \mathcal{F}$ есть счетное объединение множеств из $\mathcal{F}$, то класс $\mathcal{F}_S$ содержит σ-алгебру, порожденную $\mathcal{F}$.

*I.2.3. ***Стоуновское представление.*** Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная абстрактная булева алгебра (см. п. I. 1). Непустое подмножество $\mathcal{F}$ алгебры $\mathcal{A}$ называют *фильтром*, если (а) $\varnothing \notin \mathcal{F}$; (б) $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$; (в) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow AB \in \mathcal{F}$. Фильтр *максимален*, т. е. не содержится (строго) ни в каком другом фильтре, тогда и только тогда, когда для каждого $A \in \mathcal{A}$ либо A, либо A^c принадлежит $\mathcal{F}$. (Для доказательства этого утверждения воспользоваться следующим фактом: если $\mathcal{F}$ — фильтр в $\mathcal{A}$ и $A \in \mathcal{A}$, то множество $\{C: C \supset AB$ для некоторого $B \in \mathcal{F}\}$ либо является фильтром, либо совпадает с $\mathcal{A}$.) Всякий фильтр есть пересечение содержащих его максимальных фильтров. (С помощью леммы Цорна показать, что если $\mathcal{F}$ — некоторый фильтр и $A \notin \mathcal{F}$, то существует максимальный фильтр, содержащий $\mathcal{F}$, но не содержащий A.)

Будем называть максимальные фильтры *элементарными событиями* и обозначать их буквой $\mathscr{E}$. Обозначим через E множество всех элементарных событий. Показать, что отображение $A \to A' = \{\mathscr{E}: A \in \mathscr{E}\}$ есть изоморфизм булевой алгебры $\mathcal{A}$ на булеву алгебру $\mathcal{A}'$ подмножеств E. Для того чтобы элемент A был атомом в $\mathcal{A}$, необходимо и достаточно, чтобы множество A' состояло из одного элементарного события. Если булева алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна некоторой булевой алгебре подмножеств некоторого множества Ω, то отображение Ω в E, ставящее в соответствие элементу ω элементарное событие $\varphi(\omega) = \{A: \omega \in A\}$, обладает следующим свойством: $\{\omega: \varphi(\omega) \in A'\} = A$ для любого $A \in \mathcal{A}$; однако, вообще говоря, $\varphi(A) \neq A'$ и, в частности, $\varphi(\Omega) \neq E$.

Каждому конечному разбиению $\{A'_i, i \in I\}$ множества E на подмножества из $\mathcal{A}'$ поставим в соответствие подмножество $\sum_I A'_i \times A'_i$ произведения $E \times E$. Такие подмножества множества $E \times E$ образуют фундаментальную систему окружений равномерной структуры на E, относительно которой E (*пространство стоуновского представления*) компактно и вполне несвязно. При этом $\mathcal{A}'$ состоит из тех подмножеств E, которые одновременно открыты и замкнуты. (Показать, что E полно и предкомпактно.)

I.3. Вероятности

Определение I.3.1. *Вероятность P на булевой алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω есть отображение булевой алгебры $\mathcal{A}$ в множество действи-*

тельных чисел, удовлетворяющее следующим трем аксиомам:

(а) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *при всех* $A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$;

(б) (*аддитивность*) $P\left(\sum\limits_I A_i\right) = \sum\limits_I P(A_i)$ *для любого конечного семейства* $\{A_i, i \in I\}$ *попарно непересекающихся событий*;

(в) (*непрерывность в* $\varnothing$ *относительно монотонных последовательностей*) *для любой последовательности событий* $\{A_n, n \geqslant 1\}$, *монотонно стремящейся к* $\varnothing$, *т. е. такой, что* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ *и* $\bigcap A_n = \varnothing$, *предел* $\lim\limits_{n \uparrow \infty} \downarrow P(A_n)$ *равен нулю.*

Следующие свойства вероятности являются простыми следствиями аксиом (а) и (б). Ими обладают, разумеется, также те функции множеств, которые не удовлетворяют аксиоме (в).

(1) $P(\varnothing) = 0$;

(2) (*монотонность*) если A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ и $A_1 \subset A_2$ то $P(A_1) \leqslant P(A_2)$;

(3) (*сильная аддитивность*) для любых A_1, $A_2 \in \mathcal{A}$ справедливо равенство

$$P(A_1) + P(A_2) = P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2);$$

(4) (*полуаддитивность*) $P\left(\bigcup\limits_I A_i\right) \leqslant \sum\limits_I P(A_i)$ для любого конечного семейства событий $\{A_i, i \in I\}$.

Более общим образом, если $\{A_i, i \in I\}$ и $\{B_i, i \in I\}$ — два конечных семейства событий, таких, что $A_i \supset B_i$ при всех $i \in I$, то

$$P\left(\bigcup_I A_i\right) - P\left(\bigcup_I B_i\right) \leqslant \sum_I [P(A_i) - P(B_i)]$$

и

$$P\left(\bigcap_I A_i\right) - P\left(\bigcap_I B_i\right) \leqslant \sum_I [P(A_i) - P(B_i)].$$

Свойство (1) следует из аддитивности P и равенства $\varnothing + \varnothing = \varnothing$. Свойство (2) вытекает из равенства $A_2 = A_1 + (A_2 - A_1)$, справедливого при $A_1 \subset A_2$. Свойство (3) следует из разложений $A_1 = A_1A_2 + A_1A_2^c$, $A_2 = A_1A_2 + A_1^cA_2$, $A_1 \cup A_2 = A_1A_2 + A_1^cA_2 + A_1A_2^c$. Полуаддитивность P вытекает из монотонности P и леммы I. 1.1. Наконец, оставшиеся свойства пункта (4) являются следствием полуаддитивности P и формул

$$\bigcup A_i - \bigcup B_i \subset \bigcup (A_i - B_i),$$
$$\bigcap A_i - \bigcap B_i \subset \bigcup (A_i - B_i),$$

справедливых при $A_i \supset B_i$ [1]).

Следующие три леммы являются основополагающими. Они представляют собой по существу следствия аксиомы (в). Напомним, что запись $A_n \downarrow A$ ($A_n \uparrow A$) при $n \uparrow \infty$ означает, что $A_n \supset A_{n+1}$ ($n \geqslant 1$) и $\bigcap\limits_n A_n = A$ $\left(A_n \subset A_{n+1}\ (n \geqslant 1) \text{ и } \bigcup\limits_n A_n = A\right)$.

Лемма I.3.1 (непрерывность относительно монотонных последовательностей).

$$A_n \downarrow A \ (n \uparrow \infty) \text{ в } \mathcal{A} \Longrightarrow P(A_n) \downarrow P(A),$$
$$A_n \uparrow A \ (n \uparrow \infty) \text{ в } \mathcal{A} \Longrightarrow P(A_n) \uparrow P(A).$$

Доказательство. Утверждения леммы вытекают из аксиом (б) и (в) и следующих соотношений:

если $A_n \downarrow A$ в $\mathcal{A}$, то $A_n = (A_n - A) + A$ и $(A_n - A) \downarrow \varnothing$ в $\mathcal{A}$,

если $A_n \uparrow A$ в $\mathcal{A}$, то $A_n = (A - A_n) + A_n$ и $(A - A_n) \downarrow \varnothing$ в $\mathcal{A}$.

Лемма I.3.2 (σ-аддитивность). *Для того чтобы отображение P булевой алгебры $\mathcal{A}$ в множество действительных чисел было вероятностью, необходимо и достаточно, чтобы*

(а) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ *для любого* $A \in \mathcal{A}$, $P(\Omega) = 1$,

(б′) $P\left(\sum\limits_I A_i\right) = \sum\limits_I P(A_i)$ *для всякого счетного семейства (конечного или бесконечного) $\{A_i,\ i \in I\}$ попарно непересекающихся событий, такого, что* $\sum\limits_I A_i \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть P — вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$ и $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ — бесконечное счетное семейство попарно

---

[1]) Эти формулы справедливы при произвольных A_i и B_i. — *Прим. перев.*

непересекающихся событий, такое, что $\sum_{n\geqslant 1} A_n \in \mathcal{A}$. Так как $\sum_{1}^{n} A_m \uparrow \sum_{m\geqslant 1} A_m$ в $\mathcal{A}$ при $n\uparrow\infty$, то в силу аксиомы (б) и предыдущей леммы имеем

$$P\Big(\sum_{m\geqslant 1} A_m\Big) = \lim_{n\uparrow\infty}\uparrow P\Big(\sum_{1}^{n} A_m\Big) = \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1}^{n} P(A_m) = \sum_{m\geqslant 1} P(A_m).$$

Обратно, чтобы показать, что из справедливости аксиом (а) и (б′) вытекает справедливость аксиомы (в), рассмотрим произвольную убывающую к $\varnothing$ последовательность событий $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$. Используя равенства $A_n = \sum_{m\geqslant n}(A_m - A_{m+1})$, имеем

$$1 \geqslant P(A_n) = \sum_{m\geqslant n} P(A_m - A_{m+1}) \downarrow 0 \quad (n\uparrow\infty).$$

Лемма I.3.3 (σ-полуаддитивность). *Для любого счетного семейства событий $\{A_i,\ i\in I\}$, такого, что $\bigcup_I A_i \in \mathcal{A}$, справедливо неравенство*

$$P\Big(\bigcup_I A_i\Big) \leqslant \sum_I P(A_i).$$

Более общим образом, если счетные семейства событий $\{A_i,\ i\in I\}$ и $\{B_i,\ i\in I\}$ таковы, что $A_i \supset B_i$ $(i\in I)$ и $\bigcup_I A_i \in \mathcal{A}$, $\bigcup_I B_i \in \mathcal{A}$, то

$$P\Big(\bigcup_I A_i\Big) - P\Big(\bigcup_I B_i\Big) \leqslant \sum_I [P(A_i) - P(B_i)].$$

(Доказательство предоставляется читателю.)

Дополнения и упражнения

I.3.1. ***Метрическая булева алгебра.*** Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра и P — определенная на $\mathcal{A}$ функция множеств, удовлетворяющая аксиомам (а) и (б). Формула $d(A_1, A_2) = P(A_1 \triangle A_2)$ $(A_1, A_2 \in \mathcal{A})$ определяет функцию d, отображающую $\mathcal{A}\times\mathcal{A}$ в $[0, 1]$ и удовлетворяющую неравенству треугольника. С другой стороны, определим следующее отношение между событиями: $A_1 \underset{P}{=} A_2$, если $P(A_1 \triangle A_2) = 0$. Это отношение является отношением эквивалентности ($A_1 \underset{P}{=} A_1$ для всех A_1; $A_1 \underset{P}{=} A_2$ равносильно отношению $A_2 \underset{P}{=} A_1$; если $A_1 \underset{P}{=} A_2$ и

$A_2 \underset{P}{=} A_3$, то $A_1 \underset{P}{=} A_3$). Кроме того, структура булевой алгебры на $\mathcal{A}$ индуцирует структуру булевой алгебры на множестве $\mathcal{A}/P$ классов $\mathring{A}_1 = \{A : A \underset{P}{=} A_1\}$ P-эквивалентных событий. (Для операции дополнения ^{c}, например, из соотношения

$$A_1 \underset{P}{=} A_2 \Leftrightarrow A_1^c \underset{P}{=} A_2^c$$

следует, что $\mathring{A}_1^c = \{A\colon A^c \in \mathring{A}_1\}$. Поэтому определение $(\mathring{A}_1)^c = \mathring{A}_1^c$ корректно; оно не зависит от выбранного представителя из класса $\mathring{A}_1$.) Так как $P(A_1) = P(A_2)$ при $A_1 \underset{P}{=} A_2$, то на $\mathcal{A}/P$ мы можем определить аддитивную функцию $\mathring{P}$, положив $\mathring{P}(\mathring{A}) = P(A_1)$ $(A_1 \in \mathring{A})$. Булева алгебра $\mathcal{A}/P$ классов P-эквивалентных событий с помощью функции $\mathring{P}$ наделяется метрикой $\mathring{d}$. Булеву алгебру $\mathcal{A}/P$ с метрикой $\mathring{d}$ называют *метрической булевой алгеброй*, ассоциированной с $\mathcal{A}$ и P. Многие понятия теории вероятностей относятся не столько к событиям, сколько к классам P-эквивалентных событий. Обычно мы не делаем различия в обозначениях между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}/P$, P и $\mathring{P}$.

Показать, что функция множеств $P(\cdot)$ равномерно непрерывна на $\mathcal{A}$ (заметить, что $|P(A_1) - P(A_2)| \leqslant P(A_1 \triangle A_2)$). Показать также, что P тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме (в), когда из $A_n \downarrow \varnothing$ в $\mathcal{A}$ следует, что $A_n \to \varnothing$ в смысле метрики d. Если аксиома (в) выполняется, то каждое из условий $A_n \uparrow A$ и $A_n \downarrow A$ в $\mathcal{A}$ $(n \uparrow \infty)$ влечет $A_n \xrightarrow[d]{} A$.

I. 4. Вероятностные пространства

Один из основных результатов этой главы состоит в том, что всякую вероятность, определенную на булевой алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, можно единственным образом продолжить до вероятности, определенной на σ-алгебре, порожденной $\mathcal{A}$. В настоящем пункте вводятся некоторые важные понятия, необходимые для получения этого результата.

Определение I.4.1. *Булевой σ-алгеброй (или борелевским полем) подмножеств множества Ω называется класс $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω, содержащий $\varnothing$, Ω и замкнутый относительно операций дополнения, счетного объединения и счетного пересечения. Пара $(\Omega, \mathcal{A})$, состоящая из множества Ω и (булевой) σ-алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств Ω, называется измеримым пространством.*

Отметим, что для того чтобы класс $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω был σ-алгеброй, достаточно, чтобы он содержал $\varnothing$, Ω и был замкнут относительно операций дополнения и счетного объединения.

Для всякой монотонно возрастающей (убывающей) последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ подмножеств Ω положим $\lim\limits_n \uparrow A_n = \bigcup\limits_n A_n \left(\lim\limits_n \downarrow A_n = \bigcap\limits_n A_n\right)$.

Определение I.4.2. *Класс $\mathscr{C}$ подмножеств множества Ω называется* монотонным, *если он замкнут относительно операций* $\lim\uparrow$ *и* $\lim\downarrow$ (*имеются в виду пределы по последовательностям*).

Предложение I.4.1. *Для того чтобы булева алгебра $\mathscr{A}$ была σ-алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была монотонным классом.*

Доказательство. Ясно, что всякая булева σ-алгебра есть монотонный класс. С другой стороны, покажем, что замкнутый относительно конечных объединений класс $\mathscr{C}$ подмножеств Ω замкнут относительно счетных объединений тогда и только тогда, когда он замкнут относительно операции $\lim\uparrow$. Для этого достаточно лишь заметить, что если $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ — произвольная последовательность подмножеств Ω, то

$$\bigcup_n A_n = \lim_m \uparrow \left(\bigcup_{n \leqslant m} A_n\right). \blacksquare$$

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс подмножеств Ω. Наименьшая содержащая этот класс σ-алгебра (равная пересечению всех σ-алгебр, содержащих $\mathscr{C}$), называется *σ-алгеброй, порожденной $\mathscr{C}$*. Аналогично, наименьший содержащий $\mathscr{C}$ монотонный класс называется *монотонным классом, порожденным $\mathscr{C}$*.

Предложение I.4.2. *Булева σ-алгебра, порожденная булевой алгеброй $\mathscr{A}$, совпадает с монотонным классом, порожденным $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — булева σ-алгебра, порожденная алгеброй $\mathscr{A}$. Монотонный класс, порожденный $\mathscr{A}$, обозначим через $\mathscr{M}$. Согласно предложению I.4.1, $\mathscr{B}$ является монотонным классом. Следовательно, $\mathscr{M} \subset \mathscr{B}$. Достаточно, стало быть, доказать, что $\mathscr{M}$ есть булева алгебра: из предложения I. 4.1 тогда будет следовать, что $\mathcal{M}$ есть булева σ-алгебра и поэтому $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

Чтобы установить замкнутость $\mathcal{M}$ относительно образования дополнений, нужно показать, что класс $\mathcal{M}' = \{B\colon B$ и $B' \in \mathcal{M}\}$ совпадает с $\mathcal{M}$. Совпадение же $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ непосредственно вытекает из очевидных включений $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ и монотонности класса $\mathcal{M}'$, являющейся следствием формул

$$(\lim \uparrow B_n)^c = \lim \downarrow B_n^c, \quad (\lim \downarrow B_n)^c = \lim \uparrow B_n^c.$$

Введем теперь для каждого $A \in \mathcal{M}$ подкласс

$$\mathcal{M}_A = \{B\colon B \in \mathcal{M},\ AB \in \mathcal{M}\}$$

класса $\mathcal{M}$. Из равенства $\lim AB_n = A \lim B_n$, справедливого для всякой монотонной последовательности $\{B_n,\ n \geqslant 1\}$, следует, что $\mathcal{M}_A$ есть монотонный класс. Но при $A \in \mathcal{A}$ имеем, очевидно, $A \subset \mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$, так что $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$. Отсюда в силу эквивалентности

$$A \in \mathcal{M}_B \Leftrightarrow B \in \mathcal{M}_A$$

вытекает, что $A \in \mathcal{M}_B$ при всех $A \in \mathcal{A}$ и $B \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_B \subset \mathcal{M}$ при всех $B \in \mathcal{M}$, и поэтому $\mathcal{M}_B = \mathcal{M}$ при всех $B \in \mathcal{M}$. Таким образом, класс $\mathcal{M}$ замкнут относительно пересечений и, следовательно, является булевой алгеброй. ∎

Определение I.4.3. *Булеву σ-алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называют* б у л е в о й *σ*-а л г е б р о й с ч е т н о г о т и п а *(или* с е п а р а б е л ь н о й*), если существует счетное семейство подмножеств Ω, порождающее $\mathcal{A}$.*

Большинство встречающихся в приложениях σ-алгебр являются σ-алгебрами счетного типа. Таковой является, например, σ-алгебра, порожденная счетным разбиением $\{A_i,\ i \in I\}$ и состоящая из объединений всевозможных подклассов этого разбиения. Предостережем читателя от предположения, что всякая σ-алгебра счетного типа может быть порождена некоторым счетным разбиением пространства.

Для всякой последовательности $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ подмножеств Ω определим множества $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ и $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ формулами

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \lim_n \downarrow \left(\sup_{m\geqslant n} A_m\right) = \bigcap_n \bigcup_{m\geqslant n} A_m,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \lim_n \uparrow \left(\inf_{m\geqslant n} A_m\right) = \bigcup_n \bigcap_{m\geqslant n} A_m.$$

Подмножество $\limsup\limits_n A_n \left(\liminf\limits_n A_n\right)$ *множества* Ω *состоит из тех* $\omega \in \Omega$, *которые содержатся в бесконечно многих (во всех за исключением конечного числа) подмножествах* A_n $(n \geqslant 1)$. Ясно, что всегда $\liminf\limits_n A_n \subset \subset \limsup\limits_n A_n$. Когда эти множества совпадают, их обозначают $\lim\limits_n A_n$. В частности, если последовательность $\{A_n\}$ монотонно возрастает (убывает), то $\lim\limits_n \uparrow A_n = \lim\limits_n A_n$ $\left(\lim\limits_n \downarrow A_n = \lim\limits_n A_n\right)$.

Всякая булева σ-алгебра, очевидно, замкнута относительно операций $\limsup$ и $\liminf$. Отметим также, что *событие* $\limsup\limits_n A_n$ $\left(\liminf\limits_n A_n\right)$ *происходит тогда и только тогда, когда происходит бесконечное число событий* A_n (*происходят все события* A_n, *за исключением самое большее конечного их числа*).

Определение I.4.4. *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *есть совокупность непустого множества* Ω (*пространства элементарных событий*), *булевой* σ-*алгебры подмножеств* Ω (*событий*) *и вероятности* P, *определенной на* $\mathcal{A}$.

Предложение I.4.3 (непрерывность вероятности относительно сходимости последовательностей). *Для всякой последовательности событий* $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ *из вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *справедливы неравенства*

$$P\left(\liminf_n A_n\right) \leqslant \liminf_n P(A_n) \leqslant \limsup_n P(A_n) \leqslant$$
$$\leqslant P\left(\limsup_n A_n\right).$$

В частности, если существует $\lim_n A_n$, *то* $\lim_n P(A_n)$ *существует и равен* $P\left(\lim_n A_n\right)$.

Доказательство. Это предложение обобщает лемму I.3.1 и является ее следствием. В самом деле, согласно этой лемме имеем

$$P\left(\liminf_n A_n\right) = \lim_m P\left(\inf_{n \geqslant m} A_n\right) \leqslant \liminf_m P(A_m),$$

$$P\left(\limsup_n A_n\right) = \lim_m P\left(\sup_{n \geqslant m} A_n\right) \geqslant \limsup_m P(A_m). \blacksquare$$

Следующий результат весьма часто используется в теории вероятностей.

Предложение I.4.4. *Если* $\{A_n, n \geqslant 1\}$ — *последовательность событий в* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *такая, что* $\sum_n P(A_n) < \infty$, *то* $P\left(\limsup_n A_n\right) = 0$.

Доказательство. Для доказательства достаточно устремить n к бесконечности в неравенстве $P\left(\sup_{m \geqslant n} A_m\right) \leqslant \sum_{m \geqslant n} P(A_m)$, являющемся следствием леммы I.3.3. $\blacksquare$

Определение I.4.5. *Множество* N *в вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *называется* ***нулевым*** *(относительно вероятности* P*), если существует множество* $A \in \mathcal{A}$, *такое, что* $N \subset A$, $P(A) = 0$. *Вероятностное пространство* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *называется* ***полным***, *если* $\mathcal{A}$ *содержит все* P*-нулевые подмножества* Ω.

Ясно, что всякое подмножество нулевого множества есть нулевое множество. Из леммы I.3.3 следует также, что объединение любого счетного семейства нулевых множеств есть нулевое множество.

Предложение I.4.5. *Пусть* $\mathcal{N}$ — *класс всех нулевых множеств вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Тогда класс* $\overline{\mathcal{A}}$ *множеств вида* $A \cup N$, *где* $A \in \mathcal{A}$ *и* $N \in \mathcal{N}$, *совпадает с* σ*-алгеброй, порожденной классами* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{N}$, *и формула* $\overline{P}(A \cup N) = P(A)$ *корректно* *определяет единственную вероятность $\bar{P}$ на $\bar{\mathcal{A}}$, продолжающую P. Вероятностное пространство $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ является полным.*

Пространство $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ называется *пополнением* пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. (Рассматриваемая здесь операция пополнения ничего общего не имеет с операцией пополнения в теории метрических и равномерных пространств.)

Доказательство. Класс $\bar{\mathcal{A}}$ (как и классы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$) замкнут относительно операции счетного объединения. Он замкнут также относительно образования дополнений, поскольку если $N \subset B$, где $P(B) = 0$, то

$$(A \cup N)^c = (A \cup B)^c + B \cap (A \cup N)^c.$$

Следовательно, $\bar{\mathcal{A}}$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$.

Поскольку из $A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ вытекает, что $A_1 \triangle A_2 \subset \subset N_1 \cup N_2$ и, следовательно, что $P(A_1 \triangle A_2) = 0$, откуда $P(A_1) = P(A_2)$, то формула $\bar{P}(A \cup N) = P(A)$ определяет $\bar{P}$ на $\bar{\mathcal{A}}$ корректно. Непосредственно проверяется также, что $\bar{P}$ есть вероятность и что вероятностное пространство $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ полно. ■

Интересно связать полученный простой результат со свойствами внешней и внутренней вероятностей, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Определение I.4.6. *Внешняя вероятность P^* и внутренняя вероятность P_* на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ суть функции множеств на $\mathcal{P}(\Omega)$, задаваемые формулами*

$$P^*(\Omega_0) = \inf\{P(A),\ \Omega_0 \subset A \in \mathcal{A}\},$$

$$P_*(\Omega_0) = \sup\{P(A),\ \Omega_0 \supset A \in \mathcal{A}\}.$$

Функции P^* и P_* обладают следующими очевидными свойствами:

$$P_*(\Omega_0) \leqslant P^*(\Omega_0) \text{ для любого } \Omega_0,$$

$$P_*(A) = P(A) = P^*(A) \text{ при } A \in \mathcal{A},$$

$$P_*(\Omega_0) = 1 - P^*(\Omega_0^c) \text{ для любого } \Omega_0.$$

Предложение I.4.6. *Для любого вероятностного пространства* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *введенная в предложении* I.4.5 *σ-алгебра* $\bar{\mathcal{A}}$ *(пополнение* $\mathcal{A}$ *относительно вероятности* P*) совпадает с классом тех подмножеств* Ω, *на которых функции* P_* *и* P^* *принимают одинаковые значения и, следовательно, с классом подмножеств* Ω *вида*

$$\{\Omega_0\colon P^*(\Omega_0) + P^*(\Omega_0^c) = 1\}.$$

Более того, $\bar{P} = P^* = P_*$ *на* $\bar{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Докажем сначала следующую лемму, существенно использующую замкнутость $\mathcal{A}$ относительно операций счетного объединения и счетного пересечения.

Лемма. *Существуют измеримые множества, на которых достигаются верхняя и нижняя грань в формулах, определяющих* P_* *и* P^*.

Чтобы доказать лемму в случае, скажем, внешней вероятности P^*, достаточно заметить, что если Ω_0 — произвольное подмножество Ω и $\{A_n\}$ — последовательность множеств из $\mathcal{A}$, для которой $\Omega_0 \subset A_n$ и $P(A_n) \to P^*(\Omega_0)$, то множество $A = \bigcap A_n$ принадлежит $\mathcal{A}$, содержит Ω_0 и удовлетворяет условию $P(A) = P^*(\Omega_0)$.

В силу этой леммы для каждого подмножества Ω_0 множества Ω существуют два множества A и $A' \in \mathcal{A}$, такие, что $A \subset \Omega_0 \subset A'$ и

$$P(A) = P_*(\Omega_0), \quad P(A') = P^*(\Omega_0).$$

Следовательно, если $P_*(\Omega_0) = P^*(\Omega_0)$, то $A' - A$ есть нулевое множество и $\Omega_0 \in \bar{\mathcal{A}}$. Ясно, что при этом $P^*(\Omega_0) = P_*(\Omega_0) = P^*(\Omega_0)$.

Обратно, для всякого множества $\bar{A} = A \cup N$ из $\bar{\mathcal{A}}$ и множества $B \in \mathcal{A}$, для которого $N \subset B$, $P(B) = 0$, имеем $P(A) \leqslant P_*(\bar{A}) \leqslant P^*(\bar{A}) \leqslant P(A \cup B)$. Следовательно, $P_*(\bar{A}) = P^*(A)$ и предложение доказано. ∎

Предыдущие рассуждения показывают также, что внешняя (внутренняя) вероятность, определенная в $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, совпадает с внешней (внутренней) вероятностью, определенной в $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Те подмножества множества Ω, которые принадлежат пополнению $\mathcal{A}$, какова бы ни была вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$, называются *абсолютно измеримыми*. Ясно, что абсолютно измеримые множества образуют σ-алгебру, на которую может быть продолжена любая вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$.

Дополнения и упражнения

I.4.1. Чему равны $\limsup A_n$ и $\liminf A_n$ в случае, когда Ω есть действительная прямая и A_n суть интервалы $(-\infty, a_n)$ $(n \geqslant 1)$?

I.4.2. Доказать и проинтерпретировать в терминах событий следующие равенства:

$$\left(\liminf_n A_n\right)^c = \limsup_n \left(A_n^c\right),$$

$$\limsup_n (A_n \cup B_n) = \limsup_n A_n \cup \limsup_n B_n,$$

$$\liminf_n A_n \cap \limsup_n B_n \subset \limsup_n (A_n \cap B_n) \subset \limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n.$$

I.4.3. Множество (класс P-эквивалентных множеств) $A \in \mathcal{A}$ в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется *атомом*, если $P(A) > 0$ и если $A \supset B \in \mathcal{A} \Rightarrow P(B) = 0$ или $P(A - B) = 0$ [сравнить с понятием атома в булевой алгебре (предложение I.2.1); убедиться в том, что понятие атома есть понятие, относящееся к метрической булевой алгебре $\mathcal{A}/P$ (упражнение I.3.2)]. Так как два различных (т. е. не P-эквивалентных) атома имеют в пересечении пустое множество (класс P-эквивалентности, содержащий пустое множество), то вероятностное пространство содержит самое большее n атомов, вероятность которых $\geqslant n^{-1}$, и, следовательно, самое большее счетное число атомов. Всякое вероятностное пространство можно разложить на счетное объединение атомов и на „неатомическую" часть. Если неатомическая часть имеет вероятность нуль, то пространство называют *атомическим*.

Если $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство без атомов, то для каждого $a \in [0, 1]$ существует по меньшей мере одно множество $A \in \mathcal{A}$ с вероятностью $P(A) = a$. [Подмножество $\mathcal{B}$ множества $\mathcal{A}/P$, состоящее из тех классов $\overset{\circ}{B}$, для которых $P(\overset{\circ}{B}) \leqslant a$, индуктивно относительно включения $\subset$[1]. Пусть $\overset{\circ}{B}_0$ — максимальный элемент в $\mathcal{B}$. Показать, что если $P(\overset{\circ}{B}_0) < a$, то подмножество $\mathcal{C}$ множества $\mathcal{A}/P$, состоящее из тех классов $\overset{\circ}{C}$, для которых $P(\overset{\circ}{C}) > 0$

[1]) То есть каждое линейно упорядоченное подмножество частично упорядоченного множества $(\mathcal{B}, \subset)$ имеет мажоранту. — *Прим. перев.*

и $\mathring{C} \cap \mathring{B} = \emptyset$, индуктивно относительно $\supset$. Но всякий максимальный элемент в $\mathscr{C}$ необходимо есть атом.]

Показать, что, каковы бы ни были вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ и $\varepsilon > 0$, существует конечное разбиение множества Ω на множества из $\mathscr{A}$, такое, что каждое множество, являющееся элементом разбиения, либо имеет вероятность $\leqslant \varepsilon$, либо является атомом с вероятностью $> \varepsilon$.

1.4.4. ***Следовая и условная вероятности относительно множества.*** Пусть $(\Omega, \mathscr{A})$ — измеримое пространство и Ω_1 — непустое подмножество Ω. Показать, что класс $\Omega_1 \cap \mathscr{A} = \{\Omega_1 A, A \in \mathscr{A}\}$ есть σ-алгебра подмножеств Ω_1 (ее называют *следом* $\mathscr{A}$ на Ω_1). Показать, что если $\mathscr{F}$ — класс подмножеств множества Ω, порождающий σ-алгебру $\mathscr{A}$, то класс $\Omega_1 \cap \mathscr{F}$ порождает σ-алгебру $\Omega_1 \cap \mathscr{A}$.

Показать далее, что если $P^*(\Omega_1) = 1$, то формула $P_1(\Omega_1 A) = P^*(\Omega_1 A)$ однозначно определяет вероятность P_1 на $(\Omega_1, \Omega_1 \cap \mathscr{A})$ (называемую *следом* P на Ω_1). Убедиться, что метрические булевы алгебры $\mathscr{A}/P$ и $\Omega_1 \cap \mathscr{A}/P_1$ изоморфны (использовать лемму предложения I.4.6).

Для любого множества $B \in \mathscr{A}$ положительной P-вероятности формула $P_B(A) = P(AB)/P(B)$ определяет вероятность как на $(\Omega, \mathscr{A})$, так и на $(B, B \cap \mathscr{A})$. Показать, что этот результат верен и для множества B, не принадлежащего $\mathscr{A}$, если положить $P_B(A) = P^*(AB)/P^*(B)$.

1.4.5. ***σ-аддитивные классы множеств.*** Класс $\mathscr{F}$ подмножеств Ω назовем *σ-аддитивным*, если (а) $\Omega \in \mathscr{F}$; (б) $F_1, F_2 \in \mathscr{F}, F_1 F_2 = \emptyset \Rightarrow F_1 + F_2 \in \mathscr{F}$; $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$, $F_1 \supset F_2 \Rightarrow F_1 - F_2 \in \mathscr{F}$; (в) $\mathscr{F} \ni F_n \uparrow \Rightarrow \lim\limits_n F_n \in \mathscr{F}$.

Для всякого класса $\mathscr{C}$ подмножеств Ω существует наименьший содержащий его σ-аддитивный класс (σ-аддитивный класс, „порожденный $\mathscr{C}$“). Показать, что если класс $\mathscr{C}$ подмножеств Ω замкнут относительно образования пересечений, то порожденный им σ-аддитивный класс $\mathscr{F}$ совпадает с порожденной им булевой σ-алгеброй. [Установить, что класс $\mathscr{F}$ замкнут относительно образования пересечений, убедившись сначала, что множество $\{A: A \in \mathscr{F}, AB \in \mathscr{F}$ для всех $B \in \mathscr{C}\}$ есть σ-аддитивный класс, содержащий $\mathscr{C}$, и, следовательно, совпадающий с $\mathscr{F}$, и затем выведя отсюда с помощью аналогичных рассуждений, что класс $\{A: AB \in \mathscr{F}$ при всех $B \in \mathscr{F}\}$ совпадает с $\mathscr{F}$.]

Пусть P_1 и P_2 — две вероятности на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{A})$. Класс $\{F: P_1(F) = P_2(F)\}$ есть σ-аддитивный класс измеримых подмножеств Ω. Вывести отсюда, что если вероятности P_1 и P_2 совпадают на замкнутом относительно пересечений классе $\mathscr{C}$ измеримых множеств, то они совпадают на σ-алгебре, порожденной $\mathscr{C}$.

I.5. Продолжение вероятности

Целью настоящего параграфа является доказательство фундаментальной теоремы о продолжении вероятности с булевой алгебры на порожденную ею σ-алгебру.

При этом мы постараемся выделить и максимально прояснить отдельные этапы этого доказательства.

Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра подмножеств Ω. Обозначим через $\mathcal{G}$ класс, образованный всевозможными счетными объединениями подмножеств Ω из $\mathcal{A}$, или, что эквивалентно, класс объединений возрастающих последовательностей множеств из $\mathcal{A}$. В силу доказываемой ниже леммы для каждой вероятности P на $(\Omega, \mathcal{A})$ можно определить функцию множеств Π на $\mathcal{G}$, положив

$$\Pi(G) = \lim_n \uparrow P(A_n), \text{ если } A_n \uparrow G \ (n \to \infty), \ A_n \in \mathcal{A}.$$

(Лемма эта показывает, что значение предела $\lim\limits_n \uparrow P(A_n)$ не зависит от выбора последовательности $\{A_n\}$, а целиком определяется множеством G.)

Лемма I.5.1. *Для всяких двух возрастающих последовательностей $\{A_m, m \geqslant 1\}$ и $\{A'_n, n \geqslant 1\}$ множеств из $\mathcal{A}$, таких, что $\bigcup\limits_m A_m \subset \bigcup\limits_n A'_n$, имеет место неравенство $\lim\limits_m \uparrow P(A_m) \leqslant \lim\limits_n \uparrow P(A'_n)$. Если при этом $\bigcup\limits_m A_m = \bigcup\limits_n A'_n$, то*

$$\lim_m \uparrow P(A_m) = \lim_n \uparrow P(A'_n).$$

Доказательство. Поскольку для любого m последовательность $\{A_m A'_n, n \geqslant 1\}$ возрастает и $\bigcup\limits_n A_m A'_n = A_m$, то в силу непрерывности P относительно сходимости последовательностей

$$\lim_n \uparrow P(A'_n) \geqslant \lim_n \uparrow P(A_m A'_n) = P(A_m).$$

Утверждение леммы получается из этого соотношения при $m \to \infty$. ∎

В следующем предложении устанавливаются различные свойства определенных выше класса $\mathcal{G}$ и функции Π. В нем утверждается, в частности, что $\mathcal{G}$ есть наименьший класс среди классов подмножеств Ω, содержащих $\mathcal{A}$ и замкнутых относительно операций конечного пересечения и счетного объединения.

Предложение I.5.1. *Определенные выше класс $\mathcal{G}$ и функция Π обладают следующими свойствами:*

(а) $\varnothing \in \mathcal{G}$ *и* $\Pi(\varnothing) = 0$; $\Omega \in \mathcal{G}$ *и* $\Pi(\Omega) = 1$; $0 \leqslant \Pi(G) \leqslant 1$ $(G \in \mathcal{G})$;

(б) $G_1,\ G_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_1 \cup G_2,\ G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}; \\ \Pi(G_1 + G_2) + \Pi(G_1 \cap G_2) = \Pi(G_1) + \Pi(G_2); \end{cases}$$

(в) $G_1 \subset G_2,\ G_1,\ G_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow \Pi(G_1) \leqslant \Pi(G_2)$;

(г) $G_n \uparrow G\ (n \to \infty),\ G_n \in \mathcal{G} \Rightarrow G \in \mathcal{G},\ \Pi(G) = \lim\limits_n \Pi(G_n)$.

Более того, $\mathcal{G}$ есть наименьший среди классов подмножеств Ω, содержащих $\mathcal{A}$ и обладающих перечисленными выше свойствами (касающимися $\mathcal{G}$). Наконец, $\Pi(A) = P(A)$ при $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Наличие у $\mathcal{G}$ и Π свойств, указанных в пункте (а), очевидно. Рассмотрим далее две возрастающие последовательности $\{A_{n,1};\ n \geqslant 1\}$ и $\{A_{n,2};\ n \geqslant 1\}$ множеств из $\mathcal{A}$ с пределами G_1 и G_2 соответственно. Чтобы убедиться в свойствах (б), достаточно заметить, что $A_{n,1} \overset{\cap}{\cup} A_{n,2} \uparrow G_1 \overset{\cap}{\cup} G_2$ $(n \to \infty)$ и перейти к пределу при $n \to \infty$ в равенстве

$$P(A_{n,1}) + P(A_{n,2}) = P(A_{n,1} \cup A_{n,2}) + P(A_{n,1} \cap A_{n,2}).$$

Свойство (в) вытекает из доказанной выше леммы. Для доказательства (г) предположим, что

$$A_{m,n} \uparrow G_n \quad (m \uparrow \infty,\ n \geqslant 1), \quad A_{m,n} \in \mathcal{A} \quad (m,\ n \geqslant 1)$$

и что $G_n \uparrow G$ $(n \uparrow \infty)$. Положим $D_m = \sup\limits_{n \leqslant m} A_{m,n} \in \mathcal{A}$. Последовательность $\{D_m,\ m \geqslant 1\}$ возрастает, поскольку

$$D_m = \sup_{n \leqslant m} A_{m,n} \subset \sup_{n \leqslant m} A_{m+1,n} \subset D_{m+1}.$$

Имеем $A_{m,n} \subset D_m \subset G_m$ и, следовательно, $P(A_{m,n}) \leqslant \leqslant P(D_m) \leqslant \Pi(G_m)$ при всех $n \leqslant m$. Устремляя m и n

в этих соотношениях к $+\infty$, получаем

$$G_m \uparrow G \in \mathscr{G}, \quad \Pi(G) = \lim_m \uparrow \Pi(D_m) = \lim_m \uparrow \Pi(G_m).$$

Остальные утверждения предложения очевидны. ∎

Предложение I.5.2. *Пусть $\mathscr{G}$ — класс подмножеств множества Ω и Π — определенная на $\mathscr{G}$ функция множеств, удовлетворяющая условиям* (а) — (г) *предложения* I.5.1. *Функция множеств Π^*, определенная на $\mathscr{P}(\Omega)$ формулой*

$$\Pi^*(\Omega_1) = \inf\{\Pi(G);\ \Omega_1 \subset G \in \mathscr{G}\}$$

обладает следующими свойствами:

(а) $\Pi^*(G) = \Pi(G)$ *при* $G \in \mathscr{G}$; $0 \leqslant \Pi^*(\Omega_1) \leqslant 1$;

(б) $\Pi^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \Pi^*(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leqslant \Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_2)$, *в частности*, $\Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_1^c) \geqslant 1$;

(в) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \Pi^*(\Omega_1) \leqslant \Pi^*(\Omega_2)$;

(г) $\Omega_n \uparrow \Omega_\infty\ (n \uparrow \infty) \Rightarrow \Pi^*(\Omega_n) \uparrow \Pi^*(\Omega_\infty)$.

Доказательство. Наличие у Π^* свойств (а) очевидно. Чтобы доказать (б), возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $G_1, G_2 \in \mathscr{G}$ так, чтобы $\Omega_i \subset G_i$ и $\Pi^*(\Omega_i) + \varepsilon/2 \geqslant \Pi(G_i)$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\begin{aligned}\Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_2) + \varepsilon \geqslant \Pi(G_1) + \Pi(G_2) &= \\ = \Pi(G_1 \cup G_2) + \Pi(G_1 \cap G_2) &\geqslant \\ \geqslant \Pi^*(\Omega_1 \cup \Omega_2) + \Pi^*(\Omega_1 \cap \Omega_2)&,\end{aligned}$$

и остается лишь положить в этом соотношении $\varepsilon \to 0$. Свойство (в) вытекает из монотонности Π. Для доказательства (г) возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем последовательность чисел $\varepsilon_n > 0$ $(n \geqslant 1)$ и последовательность множеств $G_n \in \mathscr{G}$ так, чтобы $\sum_n \varepsilon_n = \varepsilon$, $\Omega_n \subset G_n$ и $\Pi^*(\Omega_n) + \varepsilon_n \geqslant \Pi(G_n)$. Положим $G'_n = \bigcup_{m \leqslant n} G_m$. Последовательность $\{G'_n,\ n \geqslant 1\}$ есть возрастающая последовательность множеств из $\mathscr{G}$ и $\Omega_n \subset G'_n$ при всех $n \geqslant 1$. Покажем, пользуясь индукцией по n, что

$$\Pi^*(\Omega_n) + \sum_{m \leqslant n} \varepsilon_m \geqslant \Pi(G'_n) \qquad (n \geqslant 1).$$

При $n=1$ это соотношение выполняется в силу выбора множества G_1. Предположим, что оно верно для некоторого n. Тогда, поскольку $\Omega_n \subset G'_n \cap G_{n+1} \in \mathcal{G}$, имеем

$$\Pi(G'_{n+1}) = \Pi(G'_n \cup G_{n+1}) = \Pi(G'_n) + \Pi(G_{n+1}) - \Pi(G'_n \cap G_{n+1}) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\Pi^*(\Omega_n) + \sum_{m \leqslant n} \varepsilon_m\right] + [\Pi^*(\Omega_{n+1}) + \varepsilon_{n+1}] - \Pi^*(\Omega_n) =$$
$$= \Pi^*(\Omega_{n+1}) + \sum_{m \leqslant n+1} \varepsilon_m.$$

Тем самым наше соотношение доказано. Устремляя в нем n к ∞ и принимая во внимание, что $\Omega_\infty \subset \subset \lim_n \uparrow G'_n \in \mathcal{G}$, получаем

$$\lim_n \uparrow \Pi^*(\Omega_n) + \varepsilon \geqslant \Pi\left(\lim_n \uparrow G'_n\right) \geqslant \Pi^*(\Omega_\infty).$$

Так как ε было произвольным и так как в силу свойства (в) $\Pi^*(\Omega_n) \leqslant \Pi^*(\Omega_\infty)$ $(n \geqslant 1)$, свойство (г) доказано. ∎

Следствие. *При выполнении условий предложения* I.5.2 *класс* $\mathcal{D}$ *подмножеств* D *множества* Ω, *для которых* $\Pi^*(D) + \Pi^*(D^c) = 1$, *есть булева* σ*-алгебра и ограничение* Π^* *на* $\mathcal{D}$ *представляет собой полную вероятность на* $(\Omega, \mathcal{D})$.

Доказательство. Из определения $\mathcal{D}$ следует, что

$$D \in \mathcal{D} \Rightarrow D^c \in \mathcal{D}.$$

Далее, поскольку согласно (а) $\Pi^*(\varnothing) + \Pi^*(\Omega) = 1$, то $\varnothing$, $\Omega \in \mathcal{D}$.

Для любых D_1, $D_2 \in \mathcal{D}$ сумма правых частей неравенств

$$\Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*(D_1 \cap D_2) \leqslant \Pi^*(D_1) + \Pi^*(D_2),$$
$$\Pi^*((D_1 \cup D_2)^c) + \Pi^*[(D_1 \cap D_2)^c] \leqslant \Pi^*(D_1^c) + \Pi^*(D_2^c)$$

равна 2. С другой стороны, согласно свойству (б) функции Π^*

$$\Pi^*(D_1 \cup D_2) + \Pi^*[(D_1 \cup D_2)^c] \geqslant 1,$$
$$\Pi^*(D_1 \cap D_2) + \Pi^*[(D_1 \cap D_2)^c] \geqslant 1.$$

Четыре выписанных неравенства могут иметь место одновременно лишь в том случае, когда все они суть равенства. Следовательно, $D_1 \bigcup D_2 \in \mathscr{D}$, так что класс $\mathscr{D}$ замкнут относительно образования конечных объединений и пересечений и функция Π^* аддитивна (в сильном смысле) на $\mathscr{D}$.

Если $\{D_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность множеств из $\mathscr{D}$, то из свойств (в) и (г) функции Π^* вытекает, что

$$\Pi^*\left[\bigcup_n D_n\right] = \lim_n \uparrow \Pi^*(D_n),$$

$$\Pi^*\left[\left(\bigcup_n D_n\right)^c\right] \leqslant \Pi^*(D_m^c) \quad \text{при} \quad m \geqslant 1.$$

Отсюда $\Pi^*\left[\left(\bigcup_n D_n\right)\right] + \Pi^*\left[\left(\bigcup_n D_n\right)^c\right] \leqslant 1$ и, следовательно, (согласно свойству (б)) $\bigcup_n D_n \in \mathscr{D}$. Тем самым показано, что $\mathscr{D}$ есть σ-алгебра подмножеств Ω и что ограничение Π^* на $\mathscr{D}$ представляет собой вероятность. Для завершения доказательства следствия остается лишь заметить, что если

$$\Omega_1 \subset D \in \mathscr{D}, \quad \Pi^*(D) = 0,$$

то

$$\Pi^*(\Omega_1) + \Pi^*(\Omega_1^c) \leqslant 0 + 1 = 1$$

и, следовательно, $\Omega_1 \in \mathscr{D}$. ∎

Теорема о продолжении вероятности, заданной на булевой алгебре, легко вытекает из двух предыдущих предложений и только что доказанного следствия.

Теорема (о продолжении вероятности). *Всякая вероятность P, определенная на булевой алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств Ω, имеет единственное продолжение до вероятности на булевой σ-алгебре, порожденной $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть P — вероятность на $(\Omega, \mathscr{A})$. Применим результаты следствия предложения I.5.2 к классу $\mathscr{S}$ и функции множеств Π, определенным в начале настоящего параграфа. Отметим, что функции Π и Π^* совпадают с P на $\mathcal{A}$, так что $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Следовательно, ограничение P' функции Π^* на σ-алгебру $\mathcal{A}'$, порожденную $\mathcal{A}$ (тоже содержащуюся в $\mathcal{D}$), есть продолжение P до вероятности на этой σ-алгебре.

Для доказательства единственности продолжения P на $\mathcal{A}'$ рассмотрим вероятность Q на $\mathcal{A}'$, ограничение которой на $\mathcal{A}$ совпадает с P. Легко видеть, что $Q = \Pi$ на $\mathcal{G}$ и, следовательно, $Q \leqslant P'$ на $\mathcal{A}'$. Отсюда вытекает, что $Q = P'$, поскольку предположение $Q(A) < P'(A)$ для некоторого $A \in \mathcal{A}'$ приводит к противоречию: $Q(\Omega) = Q(A) + Q(A^c) < P'(A) + P'(A^c) = 1$. Теорема доказана. ∎

Поскольку класс $\mathcal{G}$, очевидно, содержится в $\mathcal{A}'$, то построенная по P' внешняя вероятность P'^* совпадает на $\mathcal{P}(\Omega)$ с функцией множеств Π^*. Отсюда и из предложения I.4.6 вытекает, что $(\Omega, \mathcal{D}, (\Pi^*)_{\mathcal{D}})$ совпадает с пополнением $(\Omega, \mathcal{A}', P')$.

Дополнения и упражнения

I.5.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. Показать, что метрическое пространство $\mathcal{A}/P$ (определенное в упражнении I.3.1) полно. Показать, что если $\mathcal{B}$ — булева алгебра подмножеств Ω, порождающая $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}/P$ изометрично плотному подпространству пространства $\mathcal{A}/P$. Пространство $\mathcal{A}/P$ изометрично, следовательно, метрическому пополнению пространства $\mathcal{B}/P$. [Доказать, что для любой последовательности $\{A_n, n \geqslant 1\}$ множеств из $\mathcal{A}$

$$\sum_n P(A_n \triangle A_{n+1}) < \infty \Rightarrow \overline{\lim_n}\, A_n \underset{P}{=} \underline{\lim_n}\, A_n \Rightarrow \lim_{m,\, n \to \infty} P(A_m \triangle A_n) = 0$$

и заметить, что из любой последовательности Коши $\{A_n, n \geqslant 1\}$ в $\mathcal{A}/P$ можно выбрать подпоследовательность $\{A_{n_j}, j \geqslant 1\}$, для которой $\sum_j P\left(A_{n_j} \triangle A_{n_{j+1}}\right) < \infty$.] Как можно вывести теорему о продолжении вероятности из теоремы о пополнении метрического пространства?

I.5.2. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство и $\mathcal{B}$ — булева алгебра подмножеств Ω, порождающая σ-алгебру $\mathcal{A}$ (возможно, с точностью до нулевых множеств). Показать, что множества $\mathcal{B}_{\sigma\delta}/P$, $\mathcal{B}_{\delta\sigma}/P$ и $\mathcal{A}/P$ совпадают. (Используются обозначения упражнения I.2.1.)

I.5.3. Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, и пусть $\mathcal{F}$ есть σ-фильтр подмножеств Ω (т. е. такой фильтр, что если $F_n \in \mathcal{F}$ $(n \geqslant 1)$, то $\bigcap\limits_n F_n \in \mathcal{F}\Big)$, имеющих внешнюю вероятность $P^*(F) = 1$.

Показать, что существует вероятность P' на σ-алгебре, порожденной классами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{F}$, совпадающая с P на $\mathcal{A}$ и равная 1 на всех множествах из $\mathcal{F}$ [применить предложение I.5.2 к функции множеств $\Pi(\Omega_0) = \inf\{P(A);\ A \in \mathcal{A},\ \Omega_0 \subset A \cup F^c$ для некоторого $F \in \mathcal{F}\}$].

*I.5.4. ***Теорема о емкостях.*** Пусть $\mathcal{F}$ — класс подмножеств Ω, содержащий $\varnothing$ и замкнутый относительно конечных объединений и счетных пересечений. ***Емкостью*** ψ называется отображение класса $\mathcal{P}(\Omega)$ в $\overline{R}$, такое, что

(а) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \psi(\Omega_1) \leqslant \psi(\Omega_2)$;

(б) $\Omega_n \uparrow \Omega_\infty \Rightarrow \psi(\Omega_n) \uparrow \psi(\Omega_\infty)$;

(в) $F_n \downarrow F$ в $\mathcal{F} \Rightarrow \psi(F_n) \downarrow \psi(F)$.

Показать, что для всякого множества A из суслинского класса $\mathcal{F}_S$

$$\psi(A) = \sup\{\psi(F);\ F \in \mathcal{F},\ F \subset A\}.$$

Для доказательства представить A в виде

$$A = \bigcup_\nu F_\nu,\quad \text{где } F_\nu = \lim_p \downarrow F_{(\nu_1, \ldots, \nu_p)}$$

и определить последовательность положительных целых чисел $n_1, n_2, \ldots$ так, чтобы

$$\psi(G_p) > \psi(A) - \varepsilon,\quad \text{где } G_p = \bigcup_{\nu:\ \nu_1 \leqslant n_1, \ldots, \nu_p \leqslant n_p} F_\nu.$$

Положить, далее, $H_p = \bigcup\limits_{\nu_1 \leqslant n_1} \ldots \bigcup\limits_{\nu_p \leqslant n_p} F_{(\nu_1, \ldots, \nu_p)}$. Заметить, что $G_p \subset H_p$ и что последовательность H_p убывает, откуда $\psi\left(\lim\limits_p \downarrow H_p\right) \geqslant$ $\geqslant \psi(A) - \varepsilon$ (так как $H_p \in \mathcal{F}$). Убедиться, наконец, в том, что $\lim\limits_p \downarrow H_p \subset A$, используя следующий факт: для любого $\omega \in \lim\limits_p \downarrow H_p$ непустые множества

$$\left\{\nu:\ \nu_i \leqslant n_i \text{ при всех } i,\ \omega \in F_{(\nu_1, \ldots, \nu_p)}\right\}$$

образуют убывающую последовательность замкнутых множеств в компактном пространстве $\prod\limits_i [1, n_i]$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — произвольное вероятностное пространство. Применяя предыдущий результат к случаю $\mathcal{F} = \mathcal{A}$ и $\psi = P^*$, показать, что суслинский класс $\mathcal{A}_S$ содержится в σ-алгебре абсолютно измеримых подмножеств $(\Omega, \mathcal{A})$ и что, в частности, если пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ полно, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}_S$.

I.6. Булевы полуалгебры, компактные классы и функции распределения на действительной прямой

Вводимое ниже понятие булевой полуалгебры является вспомогательным понятием, которое оказывается особенно полезным при изучении вероятностей на действительной прямой (настоящий параграф) и в произведениях пространств (гл. III).

Определение I.6.1. *Класс $\mathcal{S}$ подмножеств множества Ω называется булевой полуалгеброй, если он удовлетворяет следующим условиям:*

(а) $\varnothing,\ \Omega\in\mathcal{S}$;

(б) *$\mathcal{S}$ замкнут относительно конечных пересечений;*

(в) *дополнение S^c каждого множества $S\in\mathcal{S}$ есть объединение конечного семейства попарно непересекающихся подмножеств Ω из $\mathcal{S}$.*

Предложение I.6.1. *Булева алгебра $\mathcal{A}$, порожденная булевой полуалгеброй $\mathcal{S}$ подмножеств Ω, состоит из сумм $A=\sum_I S_i$ конечных семейств $\{S_i,\ i\in I\}$ попарно непересекающихся подмножеств Ω, принадлежащих $\mathcal{S}$.*

Для каждой аддитивной функции множеств P, отображающей $\mathcal{S}$ в отрезок $[0,1]$, и такой, что $P(\Omega)=1$, формула $P'(A)=\sum_I P(S_i)$ (корректно) определяет единственное аддитивное продолжение P' функции P на алгебру $\mathcal{A}$. Если функция P является σ-аддитивной на $\mathcal{S}$, то P' есть вероятность на $\mathcal{A}$; в этом случае существует единственная продолжающая P вероятность на σ-алгебре, порожденной $\mathcal{S}$ (совпадающей с σ-алгеброй, порожденной $\mathcal{A}$).

Доказательство. Класс $\mathcal{A}$ сумм $\sum_I B_i$ есть булева алгебра подмножеств Ω. В самом деле, он (1) содержит $\varnothing$ и Ω; (2) замкнут относительно конечных пересечений: $(\sum_I S_i)\cap(\sum_J S_j')=\sum_{I\times J} S_iS_j'$; (3) замкнут относительно образования дополнений: $(\sum_I S_i)^c=\bigcap_I S_i^c$ и $S_i^c\in\mathcal{A}$

в силу аксиомы (в) определения булевой полуалгебры. Ясно, что $\mathscr{S}$ порождает $\mathscr{A}$.

Для доказательства корректности определения P' на $\mathscr{A}$ нужно показать, что если $\sum_I S_i = \sum_J S'_j$, то $\sum_I P(S_i) = \sum_J P(S'_j)$. Используя формулы

$$S_i = \sum_J S_i \cap S'_j, \qquad S'_j = \sum_I S_i \cap S'_j$$

и аддитивность P на $\mathscr{S}$, имеем

$$\sum_{i \in I} P(S'_i) = \sum_{I \times J} P(S_i \cap S'_j) = \sum_{j \in J} P(S'_j),$$

что и требовалось. Аддитивность (σ-аддитивность) P' на $\mathscr{A}$ доказывается аналогично. Именно, если конечное (счетное) семейство множеств $A^j = \sum_{i \in I_j} S_i^j$ из $\mathscr{A}$ ($S_i^j \in \mathscr{S}$, множество I_j конечно), пронумерованных индексами $j \in J$, есть разбиение множества $A = \sum_{k \in K} S_k$ из $\mathscr{A}$, то используя разложения

$$S_k = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} S_i^j \cap S_k, \qquad k \in K,$$

и

$$S_i^j = \sum_{k \in K} S_i^j \cap S_k, i \in I_j, j \in J,$$

и пользуясь аддитивностью (σ-аддитивностью) P на $\mathscr{S}$, получаем

$$P'(A) = \sum_{k \in K} P(S_k) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} P(S_i^j \cap S_k) =$$
$$= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} \sum_{k \in K} P(S_i^j \cap S_k) = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} P(S_i^j) = \sum_{j \in J} P'(A_j).$$

Наконец, единственность продолжения P' очевидна, а последнее утверждение теоремы есть следствие теоремы о продолжении из п. I.5. ∎

В теории вероятностей нередко бывает трудно, а иногда и невозможно доказать, что некоторым образом построенная функция множеств σ-аддитивна, даже если она по построению аддитивна. Тем не менее, в довольно широком классе случаев можно установить σ-аддитивность аддитивной функции множеств, доказав, что рассматриваемое пространство удовлетворяет некоторому дополнительному условию компактности. Ниже мы вводим это условие в наипростейшей возможной форме.

Определение I.6.2. *Класс $\mathscr{C}$ подмножеств множества Ω называется* **компактным**, *если для всякой последовательности $\{C_n, n \geqslant 1\}$ множеств из $\mathscr{C}$, для которой $\bigcap C_n = \varnothing$, существует целое число N, такое, что $\bigcap\limits_{n \leqslant N} C_n = \varnothing$.*

Здесь мы имеем дело с компактностью в смысле последовательностей. Всякий класс компактных подмножеств топологического пространства Ω является, очевидно, компактным в смысле данного выше определения. В дальнейшем нам встретятся другие важные компактные классы.

Лемма I.6.1. *Если класс $\mathscr{C}$ подмножеств Ω компактен, то компактен также и наименьший класс $\mathscr{C}'$, содержащий $\mathscr{C}$ и замкнутый относительно операций конечного объединения и счетного пересечения.*

Доказательство. Докажем сначала, что класс $\mathscr{C}_s$ объединений конечных семейств множеств из $\mathscr{C}$ компактен. Рассмотрим последовательность множеств $D_n = \bigcup\limits_{m=1}^{M_n} C_n^m$ из $\mathscr{C}_s$, такую, что $\bigcap\limits_{n \leqslant p} D_n \neq \varnothing$ при всех p. Нужно показать, что $\bigcap\limits_{n} D_n \neq \varnothing$. Пусть $J = \prod\limits_{n} \{1, 2, \ldots, M_n\}$ — пространство всех последовательностей $\{m_n, n \geqslant 1\}$ натуральных чисел, таких, что $1 \leqslant m_n \leqslant M_n$. Обозначим через J_p подмножество J, состоящее из тех последовательностей, для которых $\bigcap\limits_{n \leqslant p} C_n^{m_n} \neq \varnothing$. Из формулы

$$\bigcap_{n \leqslant p} D_n = \bigcup_{J} \Big(\bigcap_{n \leqslant p} C_n^{m_n} \Big)$$

вытекает, что $J_p \neq \varnothing$ при всех $p > 0$. Множества J_p, как легко видеть, убывают. Нам достаточно показать, что существует последовательность $\{m_n\}$, принадлежащая $\lim\downarrow J_p$. В самом деле, тогда $\bigcap_n D_n \supset \bigcap_n C_n^{m_n} \neq \varnothing$, поскольку класс $\mathscr{C}$ компактен и $\bigcap_{n\leqslant p} C_n^{m_n} \neq \varnothing$.

Выберем в каждом множестве J_q по последовательности $\{m_n^{(q)}\}$. Пользуясь индукцией, можно построить последовательность $\{m_n^*\}$, такую, что для каждого p найдется бесконечно много q, для которых $m_n^{(q)} = m_n^*$ $(1\leqslant n\leqslant p)$. Для заданного p возьмем наименьшее из таких q, больших p. Тогда последовательность $\{m_n^{(q)}\}$, а вместе с ней и последовательность $\{m_n^*\}$ принадлежит J_p, поскольку тот факт, принадлежит или не принадлежит J_p данная последовательность, зависит от значений лишь первых p ее членов. Тем самым показано, что $\{m_n^*\}$ принадлежит J_p при всех p. (Предыдущее рассуждение можно заменить ссылкой на теорему Тихонова: если пространство J наделить произведением дискретных топологий сомножителей, то множества J_p образуют убывающую последовательность непустых замкнутых множеств. По теореме Тихонова J компактно, и поэтому $\lim\downarrow J_p \neq \varnothing$.)

Из компактности $\mathscr{C}_s$ следует, очевидно, компактность класса $\mathscr{C}_{s\delta}$, состоящего из счетных пересечений множеств из $\mathscr{C}_s$. Поскольку $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_{s\delta}$, лемма доказана. ∎

Предложение I.6.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — булева алгебра или полуалгебра подмножеств множества Ω, и пусть $\mathscr{C}$ — компактный подкласс $\mathscr{A}$. Всякая аддитивная функция P, отображающая $\mathscr{A}$ в $[0,1]$, и такая, что $P(\Omega) = 1$ и*

$$P(A) = \sup\{P(C);\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}\}$$

при всех $A\in\mathscr{A}$, является вероятностью.

Доказательство. Докажем предложение сначала для случая булевой алгебры. Для этого покажем, что если $A_n\downarrow\varnothing$, $A_n\in\mathscr{A}$, то $P(A_n)\downarrow 0$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и для каждого n выберем множество $C_n\in\mathscr{C}$ так, чтобы $C_n\subset A_n$ и $P(A_n)\leqslant P(C_n)+\varepsilon 2^{-n}$. Поскольку

$\bigcap\limits_n C_n \subset \bigcap\limits_n A_n = \varnothing$, существует натуральное число N, такое, что $\bigcap\limits_{n \leqslant N} C_n = \varnothing$. Используя формулу $A_N = \bigcap\limits_{n \leqslant N} A_n \subset \bigcup\limits_{n \leqslant N} (A_n - C_n)$ и конечную аддитивность и полуаддитивность P, получаем

$$P(A_N) \leqslant \sum_{n \leqslant N} P(A_n - C_n) \leqslant \sum_n [P(A_n) - P(C_n)] \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε имеем $\lim \downarrow P(A_n) = 0$.

Покажем теперь, что справедливость нашего предложения для алгебры $\mathcal{A}$ влечет его справедливость для полуалгебры $\mathcal{S}$. Для этого воспользуемся леммой I.6.1 и предложением I.6.1. Согласно лемме, класс $\mathcal{C}_s$, содержащийся, очевидно, в порожденной $\mathcal{S}$ алгебре $\mathcal{A}$, компактен. С другой стороны, пусть $A = \sum\limits_1^n S_i \in \mathcal{A}$. Выбирая множества C_i из $\mathcal{C}$ так, чтобы $C_i \subset S_i$, $P(S_i) \leqslant P(C_i) + \varepsilon/N$ $(i = 1, \ldots, N)$, получаем

$$\sum_1^n C_i \subset A \quad \text{и} \quad P'(A) \leqslant P'\left(\sum_1^n C_i\right) + \varepsilon.$$

Так как $\sum C_i \in \mathcal{C}_s$, то тем самым показано, что алгебра $\mathcal{A}$, класс $\mathcal{C}_s$ и функция P' удовлетворяют условиям настоящего предложения. Следовательно, функция P' является σ-аддитивной на $\mathcal{A}$. ∎

Вероятности на прямой обычно вводятся с помощью функций распределения [действительная функция F действительного переменного называется *функцией распределения*, если она не убывает, непрерывна слева и удовлетворяет условиям $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$]. Функции распределения имеют весьма незначительную практическую ценность (исключая некоторые вопросы, в которых основную роль играет порядковая структура действительной прямой) и должны были бы давно уже исчезнуть, уступив место вероятностным функциям множеств. Мы покажем, что между функциями распределения и вероятностями на действительной прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Класс $\mathcal{S}$ всех интервалов (открытых, полуоткрытых и замкнутых) на действительной прямой образует, очевидно, булеву полуалгебру и порождает булеву алгебру конечных объединений непересекающихся интервалов. Обозначим через $\mathcal{R}$ булеву σ-алгебру, порожденную $\mathcal{S}$. Так как всякий интервал на R есть счетное пересечение и всякое открытое множество на R есть счетное объединение открытых интервалов, то $\mathcal{R}$ является также наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые множества. Подмножества R, принадлежащие $\mathcal{R}$, называют *борелевскими множествами.*

Предложение I.6.3. *Формула* $P(I_x)=F(x)$, *где* $x \in R$ *и* I_x — *открытый интервал* $(-\infty,\ x)$, *устанавливает взаимно однозначное соответствие между вероятностями* P *на* $(R,\ \mathcal{R})$ *и функциями распределения* F *на* R.

Доказательство. Пусть P — вероятность на $(R, \mathcal{R})$. Из соотношений

$$I_x \subset I_y \text{ при } x<y; \qquad I_{x_n} \uparrow I_x \text{ при } x_n \uparrow x;$$

$$I_{x_n} \downarrow \varnothing \text{ при } x_n \downarrow -\infty; \quad I_{x_n} \uparrow R \text{ при } x_n \uparrow +\infty$$

следует, что $F(x)=P(I_x)$ есть функция распределения. Обратно, пусть F — функция распределения. Определим функцию P на $\mathcal{S}$, положив

$$P\{[a,\ b)\}=F(b)-F(a); \qquad P\{(a,\ b)\}=F(b)-F(a+0);$$

$$P\{[a,\ b]\}=F(b+0)-F(a); \; P\{(a,\ b]\}=F(b+0)-F(a+0).$$

Читатель легко может проверить, что P есть аддитивная функция множеств, отображающая $\mathcal{S}$ в интервал $[0,\ 1]$ и удовлетворяющая условию $P(R)=1$. Обозначим через $\mathcal{C}$ класс всех компактных интервалов на прямой R. Класс $\mathcal{C}$ компактен, и из свойств непрерывности F вытекает, что P и $\mathcal{C}$ удовлетворяют условиям предложения I.6.2. Следовательно, функция P является σ-аддитивной и поэтому имеет единственное продолжение до вероятности на $(R,\ \mathcal{R})$. ∎

Дополнения и упражнения

I. 6.1. Показать, что предложение I. 6.2 останется справедливым, если отказаться от предположения, что $\mathscr{C}$ содержится в $\mathscr{A}$ и заменить в формулировке этого предложения $P(C)$ на $P'(C)$. Показать далее, что если выполнено указанное ослабленное условие и P' есть продолжающая P вероятность на σ-алгебре $\mathscr{A}'$, порожденной $\mathscr{A}$, то подкласс $\mathscr{C}' = \mathscr{C}_\delta \cap \mathscr{A}'$σ-алгебры $\mathscr{A}'$ компактен и

$$P'(A') = \sup \{P'(C'); \ C' \subset A', \ C' \subset \mathscr{C}'\}$$

при всех $A' \subset \mathscr{A}'$.

I. 6.2. Показать, что если $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ — булевы полуалгебры подмножеств Ω, то класс $\mathscr{B} = \{A_1 A_2; A_1 \in \mathscr{A}_1, \ A_2 \in \mathscr{A}_2\}$ тоже является булевой полуалгеброй подмножеств Ω. Булева алгебра (σ-алгебра), порожденная $\mathscr{B}$, совпадает с булевой алгеброй (σ-алгеброй), порожденной $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$.

I. 6.3. Распространить предложение I. 6.3 на пространства R^n, заменяя при этом интервалы I_x на „многомерные интервалы" $I_x = \{\bar{y} : y_i < x_i \ (i = 1, \ldots, n)\}$.

Глава II

Интегрирование случайных величин

II.1. Измеримые отображения

Каждому отображению X множества Ω в множество Ω' соответствует обратное отображение X^{-1}, которое переводит класс $\mathscr{P}(\Omega')$ в подкласс класса $\mathscr{P}(\Omega)$ и определяется формулой $X^{-1}(A') = \{\omega: X(\omega) \in A'\}$. Это обратное отображение является гомоморфизмом относительно объединений, пересечений (бесконечных) и дополнения. Иными словами, оно обладает следующими свойствами:

$$X^{-1}(\varnothing) = \varnothing, \quad X^{-1}(\Omega') = \Omega;$$

$$X^{-1}(A'^c) = (X^{-1}(A'))^c;$$

$$X^{-1}\Big(\bigcup_I A'_i\Big) = \bigcup_I X^{-1}(A'_i), \quad X^{-1}\Big(\bigcap_I A'_i\Big) = \bigcap_I X^{-1}(A'_i),$$

где $\{A'_i,\ i \in I\}$ — произвольное семейство подмножеств Ω'.

Обозначим через $X^{-1}(\mathscr{C}')$ класс всех подмножеств множества Ω вида $X^{-1}(C')$, где C' принадлежит классу $\mathscr{C}$ подмножеств множества Ω'. Из выписанных выше формул непосредственно вытекает, что если $\mathscr{A}'$ есть σ-алгебра (алгебра) подмножеств Ω', то $X^{-1}(\mathscr{A}')$ есть σ-алгебра (алгебра) подмножеств Ω. Аналогично, имеет место следующий результат.

Лемма II.1.1. *Каков бы ни был класс $\mathscr{C}'$ подмножеств Ω', прообраз $X^{-1}(\mathscr{A}')$ σ-алгебры $\mathscr{A}'$ (подмножеств Ω'), порожденной классом $\mathscr{C}'$, совпадает с σ-алгеброй $\mathscr{A}$ (подмножеств Ω), порожденной классом $X^{-1}(\mathscr{C}')$.*

Доказательство. Так как $X^{-1}(\mathscr{A}')$ есть σ-алгебра, содержащая $X^{-1}(\mathscr{C}')$, то $X^{-1}(\mathscr{A}') \supset \mathscr{A}$. С другой стороны, класс $\mathscr{B}' = \{B' : X^{-1}(B') \in \mathscr{A}\}$ является, как легко проверить, σ-алгеброй подмножеств Ω', содержащей $\mathscr{C}'$.

Следовательно, этот класс содержит $\mathscr{A}'$, так что

$$X^{-1}(\mathscr{A}') \subset X^{-1}(\mathscr{B}') \subset \mathscr{A}. \blacksquare$$

Пусть X — отображение Ω в Ω', и пусть $\mathscr{A}$ есть σ-алгебра подмножеств Ω. Класс $\mathscr{A}' = \{A' : X^{-1}(A') \in \mathscr{A}\}$ представляет собой σ-алгебру подмножеств Ω', называемую *σ-алгеброй, индуцированной отображением X* из $\mathscr{A}$. Для всякой вероятности P на $(\Omega, \mathscr{A})$ формула $P'(A') = P[X^{-1}(A')]$ определяет вероятность на $(\Omega', \mathscr{A}')$. Говорят, что вероятностное пространство $(\Omega', \mathscr{A}', P')$ *индуцировано отображением* X из $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Пусть $(\Omega_1, \mathscr{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathscr{A}_2)$ — два измеримых пространства. Отображение X множества Ω_1 в множество Ω_2 называется *измеримым*, если $X^{-1}(\mathscr{A}_2) \subset \mathscr{A}_1$, или, что равносильно, если σ-алгебра подмножеств Ω_2, индуцированная отображением X из $\mathscr{A}_1$, содержит $\mathscr{A}_2$. Из доказанной выше леммы легко вытекает следующий важный результат.

Предложение II.1.1. *Для того чтобы отображение X измеримого пространства (Ω_1, A_1) в (Ω_2, A_2) было измеримым, достаточно, чтобы существовал класс $\mathscr{C}$ подмножеств A_2, порождающий $\mathscr{A}_2$ и такой, что $X^{-1}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{A}_1$.*

Для всякого семейства $\{X_i, i \in I\}$ измеримых отображений (Ω, A) в измеримые пространства $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$ (не обязательно различные) через $\mathscr{B}(X_i, i \in I)$ обозначим σ-подалгебру σ-алгебры $\mathscr{A}$, порожденную семействами $X_i^{-1}(\mathscr{A}_i)$. В частности, $\mathscr{B}(X_1) = X_1^{-1}(\mathscr{A}_1)$. Легко видеть, что σ-алгебра $\mathscr{B}(X_i, i \in I)$ совпадает с наименьшей σ-подалгеброй $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathscr{A}$, обладающей тем свойством, что $X_i (i \in I)$ являются измеримыми отображениями $(\Omega, \mathscr{B})$ в соответствующее пространство $(\Omega_i, \mathscr{A}_i)$.

Дополнения и упражнения

II.1.1. Если отображения X пространства $(\Omega, \mathscr{B})$ в пространство $(\Omega', \mathscr{B}')$ и X' пространства $(\Omega', \mathscr{B}')$ в пространство $(\Omega'', \mathscr{B}'')$ измеримы, то измерима также композиция $X' \circ X$ этих отображений, отображающая $(\Omega, \mathscr{B})$ в $(\Omega'', \mathscr{B}'')$.

II.1.2. Отображение X множества Ω в множество Ω' называется *инъективным*, если $X(\omega_1) \neq X(\omega_2)$ при $\omega_1 \neq \omega_2$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$, *сюръективным*, если $X(\Omega) = \Omega'$, и *биективным*, если оно одновременно инъективно и сюръективно. Обозначим той же буквой X отображение $\mathcal{P}(\Omega)$ в $\mathcal{P}(\Omega')$, определяемое формулой $X(A) = \{X(\omega);\ \omega \in A\}$. Показать

(а) что

$$X\left(\bigcup_I A_i\right) = \bigcup_I X(A_i)$$

для любого семейства $\{A_i,\ i \in I\}$;

(б) что

$$X\left(\bigcap_I A_i\right) = \bigcap_I X(A_i)$$

для любого семейства $\{A_i,\ i \in I\}$ тогда и только тогда, когда X инъективно;

(в) что $X[X^{-1}(A)] = A$ для любого A тогда и только тогда, когда X сюръективно;

(г) что $[X(A)]^c = X(A^c)$ для любого A тогда и только тогда, когда X биективно.

*II.1.3. ***Операция Суслина*** (продолжение упражнения I.2.2). Пусть X — отображение множества Ω в множество Ω' и $\mathcal{F}$ — произвольный класс подмножеств Ω'. Показать, что $X^{-1}(\mathcal{F}_S) = [X^{-1}(\mathcal{F})]_S$.

II.2. Действительные случайные величины

Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. На протяжении всего настоящего пункта мы будем считать его фиксированным. (Первые результаты этого пункта используют лишь структуру булевой алгебры класса $\mathcal{A}$.)

Определение II.2.1. *Действительной ступенчатой случайной величиной (ступенчатой д. с. в.) на пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ называется отображение X множества Ω в действительную прямую R вида*

$$X(\omega) = x_i \quad \text{при} \quad \omega \in A_i \ (i \in I),$$

где $\{A_i,\ i \in I\}$ — конечное разбиение пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ и действительные числа x_i $(i \in I)$ попарно различны.

Предложение II.2.1. *Для того чтобы отображение X множества Ω в R было ступенчатой д. с. в., необходимо и достаточно, чтобы класс $X^{-1}(\mathcal{R})$ был конечной*

σ-подалгеброй σ-алгебры $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств в R).

Доказательство. Условие необходимо, поскольку $X^{-1}(\mathcal{R})$ совпадает, очевидно, с булевой σ-алгеброй, порожденной семейством A_i ($i \in I$). Для доказательства его достаточности рассмотрим конечное разбиение $\{A_i, i \in I\}$ множества Ω на множества из $\mathcal{A}$, порождающее $X^{-1}(\mathcal{R})$ (см. предложение I.2.1) Отображение X постоянно на каждом из множеств A_i. В самом деле, если бы существовали две точки ω и ω' в некотором из множеств A_i, для которых $X(\omega) \neq X(\omega')$, то можно было бы выбрать борелевское множество S в $\mathcal{R}$, содержащее $X(\omega)$ и не содержащее $X(\omega')$. При этом пересечение $X^{-1}(S) \cap A_i$ было бы непустым множеством, принадлежащим $X^{-1}(\mathcal{R})$ и строго содержащимся в A_i, что невозможно. Наконец, значения X на множествах A_i попарно различны, поскольку в противном случае множества A_i не могли бы все принадлежать $X^{-1}(\mathcal{R})$. ∎

Каждому множеству $A \in \mathcal{A}$ поставим в соответствие ступенчатую д. с. в. 1_A, называемую *индикатором* A и определяемую формулой

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \omega \in A, \\ 0 & \text{при} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

Д. с. в., всюду равную единице, будем обозначать 1 (вместо 1_Ω). Очевидно, имеют место следующие формулы:

$$1_{A^c} = 1 - 1_A; \quad 1_{A+B} = 1_A + 1_B; \quad 1_A \cdot 1_B = 1_{AB};$$

$$1_{\sup(A,\,B)} = \sup(1_A,\ 1_B); \quad 1_{\inf(A,\,B)} = \inf(1_A,\ 1_B).$$

Предложение II.2.2. *Множество $\mathcal{E}$ ступенчатых д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$ имеет структуру структурной алгебры (см. ниже), продолжающую структуру булевой алгебры класса $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Утверждение предложения состоит в следующем.

(1) $\mathscr{E}$ *является линейным пространством*. Более точно, $\mathscr{E}$ является подпространством линейного пространства всех действительных функций на Ω, порожденным индикаторными д. с. в. 1_A $(A \in \mathcal{A})$. В самом деле, очевидно, что $1_A \in \mathscr{E}$ при всех $A \in \mathcal{A}$ и что всякая функция $X \in \mathscr{E}$ может быть записана в форме линейной комбинации индикаторных функций: $X = \sum_I x_i 1_{A_i}$. Поскольку, конечно, $cX \in \mathscr{E}$ при всех $X \in \mathscr{E}$ и $c \in R$, то остается лишь показать, что $X, Y \in \mathscr{E} \Rightarrow X + Y \in \mathscr{E}$. Пусть в соответствии с определением $X = x_i$ на A_i $(i \in I)$ и $Y = y_j$ на B_j $(j \in J)$. Имеем, очевидно,

$$X + Y = \sum_I x_i 1_{A_i} + \sum_J y_j 1_{B_j} = \sum_{I \times J} (x_i + x_j) 1_{A_i} 1_{B_j}.$$

Непустые множества $A_i B_j$ образуют конечное разбиение пространства $(\Omega, \mathcal{A})$. Объединяя те из них, которые соответствуют одним и тем же значениям $x_i + x_j$, получаем представление величины $X + Y$ в нужном нам виде: $X + Y = \sum_k z_k 1_{C_k}$, где z_k попарно различны и C_k образуют конечное разбиение Ω.

(2) $\mathscr{E}$ *является алгеброй*. Это означает, что линейное пространство $\mathscr{E}$ обладает следующим свойством: произведение XY двух функций $X, Y \in \mathscr{E}$ принадлежит $\mathscr{E}$. В самом деле, имеем

$$XY = \left(\sum_I x_i 1_{A_i}\right)\left(\sum_J y_j 1_{B_j}\right) = \sum_{I \times J} x_i y_j 1_{A_i B_j}$$

и остается лишь объединить соответствующие непустые множества $A_i B_j$ аналогично тому, как мы это сделали в (1).

(3) $\mathscr{E}$ *является структурой* относительно естественного упорядочения, определенного в пространстве всех действительных функций на Ω: $X \leqslant Y$, если $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$. Иными словами, если $X, Y \in \mathscr{E}$, то $\sup(X, Y)$ и $\inf(X, Y) \in \mathscr{E}$. Действительно,

$$\sup(X, Y) = \sup(x_i, y_j), \quad \inf(X, Y) = \inf(x_i, y_j)$$
$$\text{на } A_i B_j \quad (i \in I,\ j \in J).$$

(4) *Структура $\mathscr{E}$ является продолжением структуры $\mathcal{A}$.* Это утверждение выражается формулами, выписанными перед формулировкой предложения. ∎

Следующие формулы справедливы для всех действительных функций на Ω и, в частности, для ступенчатых д. с. в.:

$$\sup(-X, Y) = -\inf(X, Y),$$
$$\sup(X, Y) + \inf(X, Y) = X + Y.$$

Обозначим $\sup(X, 0)$ через X^+ и $\sup(-X, 0) = -\inf(X, 0)$ через X^-. Очевидно, оба отображения X^+ и X^- множества Ω в R положительны и

$$X = X^+ - X^-.$$

Определение II.2.2. *Действительной случайной величиной (д. с. в.) на Ω называется отображение X множества Ω в расширенную действительную прямую $\overline{R} = [-\infty, \infty]$, являющееся поточечным пределом последовательности ступенчатых д. с. в. Д. с. в. X называют конечной (положительной), если $X(\Omega) \subset R$ $(X(\Omega) \subset \overline{R}_+ = [0, +\infty])$.*

Предложение II.2.3. *Для того чтобы отображение множества Ω в $\overline{R}$ было д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$, необходимо и достаточно, чтобы оно было измеримым по отношению к $\mathcal{A}$ и σ-алгебре $\overline{\mathscr{R}}$ борелевских подмножеств $\overline{R}$. Для выполнения этого условия в свою очередь достаточно, чтобы $\{\omega\colon X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$ при всех $x \in \overline{R}$ (или при всех x из множества, плотного в $\overline{R}$).*

Определение σ-алгебры $\overline{\mathscr{R}}$ борелевских подмножеств $\overline{R}$ аналогично определению σ-алгебры $\mathscr{R}$ (стр. 51). Отметим, что $\mathscr{R}$ является следом $\overline{\mathscr{R}}$ на R (упражнение I. 4.4).

Доказательство. Пусть X — д. с. в. и $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность ступенчатых д. с. в., такая, что $X_n(\omega) \to X(\omega)$ $(\omega \in \Omega, n \to \infty)$ в $\overline{R}$. Так как

$$\sup_{k>0} \liminf_{n\to\infty} \left\{\omega\colon X_n(\omega) < x - \frac{1}{k}\right\} = \{\omega\colon X(\omega) < x\} \quad (x \in R),$$

то $\{\omega: X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$. Следовательно, X измерима, поскольку интервалы $[-\infty, x)$ порождают $\bar{\mathcal{R}}$ (см. предложение II.1.1).

Обратно, пусть X — измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\bar{R}, \bar{\mathcal{R}})$. Поскольку X есть разность $X^+ - X^-$ двух положительных измеримых отображений (этот факт доказывается совсем просто), то достаточно показать, что всякое положительное измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{A})$ в $(\bar{R}, \bar{\mathcal{R}})$ является поточечным пределом последовательности ступенчатых д. с. в. Но если для такого отображения Y положить

$$Y_n = \sum_{q=1}^{n2^n} \frac{q-1}{2^n} 1_{\{q-1 \leqslant Y \cdot 2^n < q\}} + n 1_{\{Y \geqslant n\}} \qquad (n \geqslant 1),$$

то функции Y_n $(n \geqslant 1)$ образуют возрастающую последовательность положительных ступенчатых д. с. в., такую, что

$$Y_n \leqslant Y \text{ на } \Omega; \quad Y_n \geqslant Y - 2^{-n} \text{ на } \{Y < n\};$$
$$Y_n = n \text{ на } \{Y \geqslant n\}.$$

Отсюда очевидно, что $Y(\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} \uparrow Y_n(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega$. ∎

Тем самым мы доказали предложение II.2.3 и одновременно следующий результат.

Предложение II.2.4. *Всякая положительная д. с. в., определенная на $(\Omega, \mathcal{A})$, есть предел по крайней мере одной возрастающей последовательности положительных ступенчатых д. с. в. Более того, эту последовательность можно выбрать так, чтобы сходимость была равномерной на каждом подмножестве Ω, на котором Y ограничена сверху.*

Из самого определения д. с. в. и из критерия, содержащегося в предложении II.2.3, вытекает, что совокупность случайных величин замкнута относительно арифметических операций и переходов к пределу (по последовательностям), если только эти операции не приводят к неопределенным выражениям типа $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ и т. д. Более точно, если X и Y — д. с. в. и $c \in R$, то д. с. в. являются также

(а) cX;

(б) $X + Y$, если $X(\omega) + Y(\omega) \neq \infty - \infty$ ни при каком ω;

(в) XY, если $X(\omega) X(Y) \neq 0 \cdot \infty$ ни при каком ω;

(г) X/Y, если $X(\omega)/Y(\omega) \neq \infty/\infty$ ни при каком ω.

В частности, конечные д. с. в. образуют алгебру. Далее, если $\{X_i, i \in I\}$ — счетное семейство д. с. в., то оба отображения $\sup_I X_i$ и $\inf_I Y_i$ тоже являются д. с. в. Это обстоятельство позволяет определить для всякой последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ д. с. в. две д. с. в. $\limsup_{n \to \infty} X_n$ и $\liminf_{n \to \infty} X_n$. Множество *сходимости* последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ определяется как (измеримое) множество $\{\limsup_n X_n = \liminf_n X_n\}$. Если, в частности, $\limsup_n X_n = \liminf_n X_n$ всюду на Ω, то последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ называют *сходящейся всюду* и общее значение верхнего и нижнего пределов обозначают $\lim X_n$. Из сказанного следует, *что предел всякой сходящейся последовательности д. с. в. есть д. с. в.*

В соответствии с определениями п. II. 1 д. с. в. Y на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется *измеримой относительно σ-подалгебры $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$* (коротко, *$\mathcal{B}$-измеримой*), если σ-алгебра $\mathcal{B}(Y) = \{Y^{-1}(S), S \in \overline{\mathcal{R}}\}$ содержится в $\mathcal{B}$. Следующее предложение характеризует все $\mathcal{B}(X)$-измеримые д. с. в., т. е. д. с. в., измеримые относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$, порожденной д. с. в. X.

Предложение II.2.5. *Пусть $\mathcal{B}(X)$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, порожденная д. с. в. X. Для того чтобы д. с. в. Y на $(\Omega, \mathcal{A})$ была $\mathcal{B}(X)$-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы Y можно было представить в виде $Y = f(X)$, где f — измеримое отображение $(\overline{R}, \overline{\mathcal{R}})$ в себя.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Для доказательства необходимости рассмотрим сначала случай, когда Y есть $\mathcal{B}(X)$-измеримая ступенчатая д. с. в. В этом случае существует такое конечное разбиение

$$\{B_i,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$$

пространства Ω на множества из $\mathscr{B}(X)$ и такие попарно различные действительные числа y_i $(1\leqslant i\leqslant n)$, что $Y=y_i$ на B_i. Поскольку множества B_i принадлежат $\mathscr{B}(X)$, существует такое семейство борелевских множеств S_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ на $\bar{R}$, что $B_i=\{X\in S_i\}$. Борелевские множества

$$S'_i=S_i-\bigcup_{j<i}S_j\quad(1\leqslant i\leqslant n)\qquad\text{и}\qquad(\bigcup S_i)^c=(\sum S'_i)^c$$

образуют конечное разбиение $\bar{R}$ и из соотношений $\{X\in S_iS_j\}=B_iB_j=\varnothing$ $(i\neq j)$ вытекает, что $B_i=\{X\in S'_i\}$. Определим теперь функцию f на $\bar{R}$, положив f равной y_i на S'_i и равной нулю на $(\sum S'_i)^c$. Ясно, что f есть измеримое отображение $(\bar{R},\bar{\mathscr{R}})$ в $(\bar{R},\bar{\mathscr{R}})$ и $Y=f(X)$.

Пусть теперь Y — произвольная (не ступенчатая) $\mathscr{B}(X)$-измеримая д. с. в. и $\{Y_n,\ n\geqslant 1\}$ — последовательность $\mathscr{B}(X)$-измеримых ступенчатых д. с. в., такая, что $Y=\lim Y_n$. Пусть, далее, $Y_n=f_n(X)$ — полученное выше представление Y_n. Положим $f=\limsup\limits_n f_n$. Функция f является измеримым отображением $(\bar{R},\bar{\mathscr{R}})$ в себя и $Y(\omega)=\lim\limits_n f_n[X(\omega)]=f[X(\omega)]$ при всех $\omega\in\Omega$. ∎

Дополнения и упражнения

II.2.1. Пусть E — линейное пространство определенных на измеримом пространстве $(\Omega,\mathscr{A})$ ограниченных измеримых функций, такое, что

(а) $1\in E$;

(б) $f,\ g\in E\Rightarrow\sup(f,\ g)\in E$;

(в) $\{f_n,\ n\geqslant 1\}$ — ограниченная константой возрастающая последовательность функций из $E\Rightarrow\lim f_n\in E$. Показать, что существует σ-подалгебра $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathscr{A}$, такая, что E является пространством всех ограниченных $\mathscr{B}$-измеримых функций. [Положить $\mathscr{B}=\{B\colon 1_B\in E\}$. Для доказательства того, что

$$\{f>a\}\in\mathscr{B}\quad\text{при}\quad f\in E,$$

воспользоваться тем фактом, что

$$1_{\{f>a\}}=\lim_n\uparrow\inf[1,\ n(f-a)^+].]$$

II.2.2. ***Случайные величины со значениями в метрическом пространстве.*** Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство и E — метрическое пространство с метрикой d. Ступенчатые случайные величины и случайные величины со значениями в E определяются аналогично д. с. в.: в определениях II.2.1 и II.2.2 нужно лишь заменить R и $\overline{R}$ на E. Показать, что если X_i $(i=1, \ldots, n)$ — определенные на $(\Omega, \mathcal{A})$ случайные величины со значениями в метрических пространствах E_i $(i=1, \ldots, n)$ соответственно и если u — непрерывное отображение ΠE_i в метрическое пространство E, то отображение $u(X_1, \ldots, X_n)$ является с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$ со значениями в E. В частности, если X_1, X_2 — две с. в. со значениями в E, то $d(X_1, X_2)$ есть д. с. в. Показать далее, что отображение X пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ в метрическое пространство E является с. в. тогда и только тогда, когда

(a) $X(\Omega)$ содержит плотную последовательность;

(б) $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для всякого открытого шара B в E.

II.3. Математическое ожидание действительных случайных величин

Пусть P — вероятность на булевой алгебре (в частности, на булевой σ-алгебре) $\mathcal{A}$ подмножеств Ω. Каждой ступенчатой д. с. в. X, определенной на $(\Omega, \mathcal{A})$, поставим в соответствие действительное число $\sum_I x_i P(A_i)$ (используются обозначения определения II.2.1). Это число называется *математическим ожиданием* величины X или *интегралом от* X и обозначается $E(X)$, EX, $\int X(\omega)P(d\omega)$, $\int X\,dP$, или просто $\int X$.

Предложение II.3.1. *Математическое ожидание $E(\cdot)$, определенное на линейной структуре $\mathscr{E}$ ступенчатых д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$ посредством вероятности P, является единственным положительным линейным функционалом на $\mathscr{E}$, удовлетворяющим условию $E(1_A)=P(A)$. Кроме того, оно обладает свойством непрерывности относительно монотонных последовательностей: $X_n \uparrow X$ (соответственно $\downarrow$) в $\mathscr{E} \Rightarrow E(X_n) \uparrow E(X)$ (соответственно $\downarrow$).*

Обратно, всякий положительный линейный функционал E на $\mathscr{E}$, удовлетворяющий условиям $E(1)=1$ и $X_n \downarrow 0$ в $\mathscr{E} \Rightarrow E(X_n) \downarrow 0$, является математическим *ожиданием относительно вероятности P, определяемой формулой $P(A)=E(1_A)(A\in\mathcal{A})$.*

Доказательство. Из определения $E(\cdot)$ непосредственно вытекает, что

(1) $E(1_A)=P(A)$, $E(1)=1$;

(2) $E(X)\geqslant 0$ при $X\geqslant 0$,

(3) $E(cX)=cE(X)$ для любой действительной постоянной c. Аддитивность E вытекает из следующей цепочки равенств (используются обозначения предложения II.2.2. (1)):

$$E(X+Y)=\sum_k z_k P(C_k)=\sum_l\sum_j (x_l+x_j)P(A_jB_j)=$$
$$=\sum_l x_l P(A_l)+\sum_j y_j P(B_j)=E(X)+E(Y).$$

Отметим, что в силу аддитивности $E(\cdot)$ свойства положительности и монотонности $E(\cdot)$ эквивалентны. В самом деле, если $X\leqslant Y$ в $\mathscr{E}$, то

$$E(Y)=E(X)+E(Y-X)\geqslant E(X).$$

поскольку $Y-X\geqslant 0$.

Пусть $\{X_n,\ n\geqslant 1\}$ — сходящаяся к нулю убывающая последовательность в $\mathscr{E}$ и k — наибольшее значение, которое принимает X_1, а, следовательно, и любая из величин последовательности $\{X_n\}$. Поскольку, очевидно, $0\leqslant X_n\leqslant k1_{\{X_n>\varepsilon\}}+\varepsilon$ $(n\geqslant 1,\ \varepsilon>0)$, постольку

$$0\leqslant E(X_n)\leqslant kP(\{X_n>\varepsilon\})+\varepsilon.$$

Замечая, что $\{X_n>\varepsilon\}\downarrow\varnothing$, выводим из этого неравенства и аксиомы (в) определения вероятности, что $\lim_n\downarrow E(X_n)=0$ (сначала нужно положить $n\to\infty$ и затем $\varepsilon\downarrow 0$). Отсюда вытекает непрерывность $E(\cdot)$ относительно монотонных последовательностей: при $n\uparrow\infty$ имеем

$$X_n\downarrow X\Rightarrow(X_n-X)\downarrow 0$$

и

$$E(X_n)=E(X)+E(X_n-X)\downarrow E(X),$$

а также

$$X_n\uparrow X\Rightarrow(X-X_n)\downarrow 0$$

и

$$E(X_n)=E(X)-E(X-X_n)\uparrow E(X).$$

Доказательство обратного утверждения труда не представляет. ∎

Отвечающее вероятностному пространству $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ математическое ожидание $E(\cdot)$ на пространстве $\mathcal{E}$ ступенчатых д. с. в. можно продолжить, используя, в частности, результат предложения II.2.4, на множество всех положительных д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ с сохранением свойств линейности, монотонности и монотонной непрерывности. С этой целью для всякой положительной д. с. в. X возьмем сходящуюся к X возрастающую последовательность д. с. в. $\{X_n, n \geqslant 1\}$ из $\mathcal{E}$ и положим $E(X) = \lim\limits_n \uparrow E(X_n)$. Такое определение оказывается корректным, т. е. не зависящим от выбора последовательности $\{X_n\}$. Затем устанавливаются нужные свойства так продолженного математического ожидания. Мы осуществим эту программу в несколько более общей ситуации, подсказываемой предыдущим предложением. Читатель заметит, что нижеследующее доказательство является обобщением на функции рассуждения, примененного в лемме I.5.1 и предложении I.5.1 к множествам.

Предложение II.3.2. *Пусть $\mathcal{E}$ — замкнутое относительно структурных операций линейное пространство действительных функций, определенных на множестве Ω (пространство Рисса). Пусть $E(\cdot)$ — положительный линейный функционал на $\mathcal{E}$, такой, что $X_n \downarrow 0$ в $\mathcal{E} \Rightarrow E(X_n) \downarrow 0$. Предположим, кроме того, что $1 \in \mathcal{E}$ и $E(1) = 1$.*

На множестве $\mathcal{F}_+$ пределов $X = \lim\limits_n \uparrow X_n$ возрастающих последовательностей положительных функций из $\mathcal{E}$ формула $E(X) = \lim\limits_n \uparrow E(E)$ корректно определяет продолжение $E(\cdot)$ с $\mathcal{E}_+$ на $\mathcal{F}_+$, обладающее следующими свойствами:

(а) $0 \leqslant E(X) \leqslant \infty$ $(X \in \mathcal{F}_+)$;

(б) $X \in \mathcal{F}_+,\ c \geqslant 0 \Rightarrow cX \in \mathcal{F}_+$ *и* $E(cX) = cE(X)$;
$X_1, X_2 \in \mathcal{F}_+ \Rightarrow \sup(X_1, X_2),\ \inf(X_1, X_2) \in \mathcal{F}_+$ *и* $E(X_1) + E(X_2) = E[\sup(X_1, X_2)] + E[\inf(X_1, X_2)]$;

(в) $X_1 \leqslant X_2$ *в* $\mathcal{F}_+ \Rightarrow E(X_1) \leqslant E(X_2)$;

(г) $X_n \uparrow$ *в* $\mathcal{F}_+ \Rightarrow \lim \uparrow X_n \in \mathcal{F}_+$ *и* $E(\lim \uparrow X_n) = \lim \uparrow E(X_n)$.

Замечание. Усилим сделанное выше предположение о непрерывности E и допустим, что $\lim \downarrow E(X_\alpha)=0$ для всякой обобщенной последовательности $\{X_\alpha\}$ элементов из $\mathscr{E}_+$, сходящейся, убывая, к нулю. Тогда класс $\mathscr{F}_+^*$ пределов возрастающих обобщенных последовательностей положительных функций из $\mathscr{E}$ и продолжение E на $\mathscr{F}_+^*$, корректно определяемое формулой

$$E(\lim \uparrow X_\alpha)=\lim \uparrow E(X_\alpha),$$

по-прежнему обладают перечисленными выше свойствами (а) — (г) (свойство (г) справедливо при этом для всякой возрастающей обобщенной последовательности элементов из $\mathscr{F}_+^*$). Чтобы в этом убедиться, достаточно лишь в нижеследующем доказательстве заменить последовательности на обобщенные последовательности.

Доказательство. Распространим сначала лемму I.5.1 на функции.

Лемма *Если $\{X'_m, m \geqslant 1\}$ и $\{X''_n, n \geqslant 1\}$ — две возрастающие последовательности элементов из $\mathscr{E}_+$, такие, что $\lim\limits_m \uparrow X'_m \leqslant \lim\limits_n X''_n$, то $\lim\limits_m \uparrow E(X'_m) \leqslant \lim\limits_n \uparrow E(X''_n)$.*

Поскольку, согласно предположениям нашего предложения, линейный функционал E непрерывен относительно монотонных последовательностей, т. е. $X_n \downarrow 0 \Rightarrow E(X_n)\downarrow 0$, и поскольку по условию леммы

$$\lim_n \uparrow \inf(X'_m, X''_n)=X'_m \quad (m \geqslant 1)$$

в $\mathscr{E}$, постольку

$$\lim_n \uparrow E(X''_n) \geqslant \lim_n \uparrow E[\inf(X'_m, X''_n)]=E(X'_m) \quad (m \geqslant 1).$$

Полагая теперь $m \to \infty$, убеждаемся в справедливости леммы.

Из доказанной леммы вытекает, что если $X=\lim\limits_n \uparrow X_n$ ($X_n \in \mathscr{E}_+$, $X \in \mathscr{F}_+$), то выражение $\lim\limits_n \uparrow E(X_n)$ зависит лишь от X и не зависит от последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$.

Поэтому данное выше определение $E(X)$ для $X \in \mathcal{J}_+$ корректно и из положительности E следует очевидным образом, что полученное продолжение E с $\mathcal{E}_+$ на $\mathcal{J}_+$ положительно. Следствием леммы является также свойство (в).

Для доказательства свойств (б) достаточно заметить, что если

$$X_1 = \lim_n \uparrow X_{n,1} \quad \text{и} \quad X_2 = \lim_n \uparrow X_{n,2} (X_{n,i} \in \mathcal{E}_+,\ X_i \in \mathcal{J}_+),$$

то

$$cX_1 = \lim_n \uparrow cX_{n,1} \quad \text{при} \quad c \geqslant 0,$$

$$X_1 + X_2 = \lim_n \uparrow (X_{n,1} + X_{n,2}),$$

$$\sup(X_1, X_2) = \lim_n \uparrow \sup(X_{n,1}, X_{n,2})$$

и

$$\inf(X_{n,1}, X_{n,2}) = \lim_n \uparrow \inf(X_{n,1}, X_{n,2}),$$

и затем использовать определение $E(\cdot)$. Осталось доказать свойство (г). Пусть функции $X_n = \lim_m \uparrow Y_{m,n}$ ($Y_{m,n} \in \mathcal{E}_+$, $n \geqslant 1$) принадлежат $\mathcal{J}_+$ и возрастают с ростом n. Полагая

$$Z_m = \sup_{n \leqslant m} Y_{m,n} \in \mathcal{E}_+ \quad (m \geqslant 1),$$

имеем

$$Y_{m,n} \leqslant Z_m \leqslant X_m \quad (m \geqslant n), \quad Z_m \leqslant Z_{m+1};$$

$$E(Y_{m,n}) \leqslant E(Z_m) \leqslant E(X_m) \quad (m \geqslant n), \quad EZ_m \leqslant EZ_{m+1},$$

откуда, устремляя m и затем n к бесконечности, получаем

$$\lim \uparrow X_m = \lim \uparrow Z_m \in \mathcal{J}_+$$

и

$$\lim_m \uparrow EX_m = \lim \uparrow EZ_m = E\left(\lim_m \uparrow Z_m\right). \ \blacksquare$$

В случае когда пространство $\mathcal{E}$ в предыдущем предложении есть пространство ступенчатых д. с. в. на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, из предложения II.2.4 вытекает, что класс $\mathcal{J}_+$ совпадает с классом всех положительных д. с. в. (конечных или бесконечных) на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Предыдущее предложение описывает в этом случае свойства математического ожидания положительных д. с. в.

Д. с. в. X называется *интегрируемой*, если $E(X^+) < \infty$ и $E(X^-) < \infty$. Все ограниченные и все ступенчатые д. с. в., очевидно, интегрируемы. Положительная д. с. в. X интегрируема тогда и только тогда, когда $E(X) < \infty$. Для любой интегрируемой д. с. в. X положим $E(X) = E(X^+) - E(X^-)$. Эта формула определяет продолжение $E(\cdot)$ на все интегрируемые д. с. в. с сохранением свойств линейности, положительности и монотонной непрерывности (см. предложение ниже).

Д. с. в. называется *квазиинтегрируемой*, если по меньшей мере одно из чисел $E(X^+)$ и $E(X^-)$ конечно; это условие является самым общим условием, позволяющим определить математическое ожидание формулой

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-).$$

Предложение II.3.3. *Математическое ожидание $E(\cdot)$ на множестве квазиинтегрируемых д. с. в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, обладает следующими свойствами:*

(а) *$E(X) \in \bar{R}$; $E(X) \in R$ тогда и только тогда, когда X интегрируема, и в этом случае $P(\{X = \pm\infty\}) = 0$; $E(X) \geqslant 0$, если $X \geqslant 0$ или если $P(\{X < 0\}) = 0$;*

(б) *$E(cX) = cE(X)$ для любой конечной константы c; $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, если сумма $X + Y$ определена*[1] *и если X^- и Y^- (или X^+ и Y^+) интегрируемы;*

(в) *$X \leqslant Y \Rightarrow E(X) \leqslant E(Y)$;*

(г) *$X_n \uparrow X \Rightarrow E(X_n) \uparrow E(X)$, если X_n^- интегрируема хотя бы для одного n;*

$X_n \downarrow X \Rightarrow E(X_n) \downarrow E(X)$, если X_n^+ интегрируема хотя бы для одного n.

---

[1]) Достаточно потребовать, чтобы P-вероятность множества, на котором сумма $X + Y$ не определена, была равна нулю. Аналогичные замечания можно сделать относительно свойств (в) и (г) и леммы Фату — Лебега (см. ниже). — *Прим. перев.*

Доказательство. Свойства (а) и первое из свойств (б) непосредственно вытекают из определений. Для доказательства аддитивности $E(\cdot)$ заметим сначала, что если X_1 и X_2 — две положительные д. с. в. и по крайней мере одна из них интегрируема и если $X_1 - X_2 \neq \infty - \infty$ в каждой точке пространства Ω, то д. с. в. $X_1 - X_2$ квазиинтегрируема и $E(X) = E(X_1) - E(X_2)$. В самом деле, имеем $X^+ \leqslant X_1$, $X^- \leqslant X_2$, следовательно, X квазиинтегрируема и $X^+ + X_2 = X^- + X_1$, откуда $E(X) = E(X^+) - E(X^-) = E(X_1) - E(X_2)$. Аддитивность $E(\cdot)$ при выполнении указанных в (б) условий является теперь простым следствием разложения

$$X + Y = (X^+ + Y^+) - (X^- + Y^-).$$

Монотонность $E(\cdot)$ следует из уже доказанных свойств линейности и положительности.

Пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность д. с. в., такая, что при некотором фиксированном n_0 величина $X_{n_0}^-$ интегрируема. Положим $X = \lim\limits_n \uparrow X_n$. Тогда $X_n^- \leqslant X_{n_0}^-$ $(n \geqslant n_0)$, $X^- \leqslant X_{n_0}^-$ и поэтому д. с. в. X_n $(n \geqslant n_0)$ и X квазиинтегрируемы. Далее, $0 \leqslant X_n + X_{n_0}^- \uparrow \uparrow X + X_{n_0}^-$ при $n_0 \leqslant n \uparrow \infty$, так что, согласно свойству (в) и предложению II. 3.2, $E(X_n) + E(X_{n_0}^-) \uparrow E(X) + E(X_{n_0}^-)$. Тем самым показано, что $E(X_n) \uparrow E(X)$. Случай убывающей последовательности разбирается аналогично посредством рассмотрения д. с. в. $-X_n + X_{n_0}^+$ $(n \geqslant n_0)$. ∎

Следствие (лемма Фату—Лебега). *Для всякой последовательности д. с. в. $\{X_n, n \geqslant 1\}$ и интегрируемых д. с. в. Y и Z*

$$X_n \leqslant Y \Rightarrow E\left[\limsup_n X_n\right] \geqslant \limsup_n E(X_n),$$

$$X_n \geqslant Z \Rightarrow E\left[\liminf_n X_n\right] \leqslant \liminf_n E(X_n).$$

В частности, если последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ сходится и если существует интегрируемая д. с. в. U, такая, что $|X_n| \leqslant U$ $(n \geqslant 1)$, то

$$E\left(\lim_n X_n\right) = \lim_n E(X_n).$$

Доказательство. Заметим сначала, что если X, Y — две д. с. в., причем Y интегрируема и $X \leqslant Y$, то X^+ интегрируема, а X квазиинтегрируема. Из предположения $X_n \leqslant Y$ вытекает, следовательно, что величина $\left(\sup_n X_n\right)^+$ интегрируема. Далее, поскольку $\sup_{m \geqslant n} X_m \downarrow \limsup_n X_n$, имеем согласно пункту (г) предыдущего предложения

$$\sup_{m \geqslant n} E(X_m) \leqslant E\left[\sup_{m \geqslant n} X_m\right] \downarrow E\left[\limsup_n X_n\right] \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Второе утверждение следствия доказывается аналогично. Наконец, если $-U \leqslant X_n \leqslant U$, где U — интегрируемая д. с. в., то в силу доказанного

$$E\left[\liminf_n X_n\right] \leqslant \liminf_n E(X_n) \leqslant \\ \leqslant \limsup_n E(X_n) \leqslant E\left[\limsup_n X_n\right].$$

Отсюда следует, что если последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$, кроме того, сходится, то предел $\lim_n E(X_n)$ существует и равен $E\left[\lim_n X_n\right]$. ∎

Каждой положительной д. с. в. X поставим в соответствие определенную на $\mathcal{A}$ функцию множеств $\int_A X$, задаваемую формулой $\int_A X = E[X 1_A]$. Эта функция множеств (называемая *неопределенным интегралом* от X) обладает, очевидно, следующими свойствами:

(а) $0 \leqslant \int_A X \leqslant E(X)$; $\int_A X = 0 \Leftrightarrow P(A\{X > 0\}) = 0$;

(б) $\int_{\sum A_i} X = \sum \int_{A_i} X$ для любого счетного семейства $\{A_i, i \in I\}$ попарно непересекающихся множеств;

(в) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow \int_{A_1} X \leqslant \int_{A_2} X$;

(г) $A_n \uparrow A \Rightarrow \int\limits_{A_n} X \uparrow \int\limits_{A} X$,

$A_n \downarrow A \Rightarrow \int\limits_{A_n} X \downarrow \int\limits_{A} X$, за исключением, возможно, случая, когда $\int\limits_{A_n} X = \infty$ при всех $n \geqslant 1$.

Функцию множеств $\int\limits_{A} X$ можно также определить для любой квазиинтегрируемой д. с. в. X. И в этом более общем случае она обладает свойствами, аналогичными свойствам (а) — (г).

Дополнения и упражнения

II. 3.1. ***Продолжение вероятности.*** Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — полное вероятностное пространство, $\{B_i, i \in I\}$ — счетное разбиение Ω, и пусть $\mathcal{B}$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathcal{A}$ и семейством $\{B_i, i \in I\}$. По лемме к предложению I. 4.6 существуют множества B_i^* $(i \in I)$ в $\mathcal{A}$, такие, что $B_i \subset B_i^*$, $P^*(B_i) = P(B_i^*)$.

Показать, что всякое множество B из $\mathcal{B}$ можно записать в виде $B = \sum\limits_I A_i B_i$, где A_i — принадлежащие $\mathcal{A}$ подмножества множеств B_i^*, причем A_i определяются по B с точностью до эквивалентности. Дать аналогичное представление для $\mathcal{B}$-измеримых д. с. в. Показать, что общий вид вероятности $\overline{P}$ на $(\Omega, \mathcal{B})$, ограничение которой на $\mathcal{A}$ совпадает с P, задается формулой

$$\overline{P}(B) = \sum_I \int\limits_{A_i} X_i \, dP,$$

где X_i — положительные д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, обращающиеся в нуль вне соответствующих множеств B_i^* и удовлетворяющие условию $\sum\limits_I X_i = 1$, причем эти д. с. в. определяются по $\overline{P}$ с точностью до эквивалентности. Вывести отсюда, что за исключением тривиального случая, когда B_i принадлежат $\mathcal{A}$, существует бесконечно много вероятностей $\overline{P}$ на $(\Omega, \mathcal{B})$, продолжающих P.

II.4. Сходимость почти наверное и сходимость по вероятности

Две д. с. в. X и X' называют равными *почти наверное* (или *почти всюду*), если $P(X \neq X') = 0$. Это отношение равенства, которое является, очевидно, отношением эквивалентности, обозначают $X \underset{\text{п. н.}}{=} X'$. Легко показать, что если $X \underset{\text{п. н.}}{=} X'$ и $Y \underset{\text{п. н.}}{=} Y'$, то $cX \underset{\text{п. н.}}{=} cX'$, $X + Y \underset{\text{п. н.}}{=} X' + Y'$ и $XY \underset{\text{п. н.}}{=} X'Y'$ (предполагается, конечно, что входящие в эти соотношения суммы и произведения определены вне некоторых множеств P-вероятности нуль). Аналогично, если $X_i \underset{\text{п. н.}}{=} X'_i$ при всех i из некоторого счетного множества индексов I, то $\sup\limits_I X_i \underset{\text{п. н.}}{=} \sup\limits_I X'_i$ и $\inf\limits_I X_i \underset{\text{п. н.}}{=} \inf\limits_I X'_i$.

Далее, если д. с. в. X имеет математическое ожидание и $X' \underset{\text{п. н.}}{=} X$, то математическое ожидание $E(X')$ существует и равно $E(X)$. В частности, X' интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема X.

Класс эквивалентных случайных величин, содержащий заданную случайную величину X, обозначим через $\tilde{X}$: $\tilde{X} = \{X' : X' \underset{\text{п. н.}}{=} X\}$. Очевидно, класс $\tilde{X}$ определяется любым из своих элементов. Как мы увидим впоследствии, большинство задач теории вероятностей имеет дело с классами эквивалентных д. с. в., а не с самими д. с. в. Описанные выше элементарные свойства классов эквивалентных д. с. в. весьма важны, поскольку они позволяют оперировать с классами точно так же, как с самими д. с. в., при условии, однако, что одновременно рассматривается лишь счетное семейство д. с. в. Обычно идентифицируют (допуская вольность речи) класс эквивалентных случайных величин с произвольно выбранным его представителем. Предостережем читателя: эта идентификация законна лишь в том случае, когда рассматриваются *счетные* семейства д. с. в.

Пусть $\{X_i, i \in I\}$ — счетное семейство д. с. в. и $\tilde{X}_i$ $(i \in I)$ — соответствующие им классы эквивалентности. Как уже было отмечено, класс эквивалентности, содержащий $\sup\limits_I X_i$, зависит лишь от $\tilde{X}_i$ $(i \in I)$ и является, следовательно, верхней гранью для $\tilde{X}_i$ $(i \in I)$. Ниже показывается, что всякое семейство $\{\tilde{X}_i,\ i \in I\}$ *классов эквивалентных д. с. в.*, даже несчетное, имеет верхнюю грань, которая обозначается $\operatorname{ess\,sup}\limits_I \tilde{X}_i$. Следует отметить, что в несчетном случае функция $\sup X_i(\omega)$ аргумента ω (где $X_i \in \tilde{X}_i$) не обязательно является д. с. в., и даже если она измерима, то содержащий ее класс эквивалентности не обязательно равен $\operatorname{ess\,sup}\limits_I \tilde{X}_i$ (ниже приводится соответствующий пример).

Предложение II.4.1. *Множество классов эквивалентных д. с. в., определенных на* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *является полной структурой. Иными словами, для любого семейства* $\{X_i,\ i \in I\}$ (*счетного или несчетного*) *д. с. в., определенных на* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *существуют две с точностью до эквивалентности однозначно определенные д. с. в.* $\operatorname{ess\,sup}\limits_I X_i$ *и* $\operatorname{ess\,inf}\limits_I X_i$, *такие, что для любой д. с. в.* Y

$$X_i \leqslant Y \text{ п. н. } (i \in I) \Leftrightarrow \operatorname{ess\,sup}_I X_i \leqslant Y \text{ п. н.},$$

$$Y_i \geqslant Y \text{ п. н. } (i \in I) \Leftrightarrow \operatorname{ess\,inf}_I X_i \geqslant Y \text{ п. н.}$$

В частности, для любого семейства $\{A_i,\ i \in I\}$ *событий из* $\mathcal{A}$ *существуют два с точностью до эквивалентности однозначно определенных события* $\operatorname{ess\,inf}\limits_I A_i$ *и* $\operatorname{ess\,sup}\limits_I A_i$, *такие, что для любого* $A \in \mathcal{A}$

$$A_i \underset{\text{п. н.}}{\subset} A \ (i \in I) \Leftrightarrow \operatorname{ess\,sup}_I A_i \underset{\text{п. н.}}{\subset} A,$$

$$A_i \underset{\text{п. н.}}{\supset} A \ (i \in I) \Leftrightarrow \operatorname{ess\,inf}_I A_i \underset{\text{п. н.}}{\supset} A.$$

Доказательство. В том случае, когда семейство $\{X_i,\ i \in I\}$ счетно, положим

$$\operatorname{ess\,sup}_I X_i = \sup_I X_i \quad \text{и} \quad \operatorname{ess\,inf}_I X_i = \inf_I X_i.$$

Пусть f — произвольное непрерывное строго возрастающее отображение расширенной прямой $[-\infty, \infty]$ в ограниченный интервал прямой $(-\infty, \infty)$, например arctg. Когда J пробегает счетные подмножества I, величина $E\left[f\left(\sup\limits_J X_i\right)\right]$ остается ограниченной и достигает своего наибольшего значения, скажем σ, на некотором счетном подмножестве J_0. [Таким подмножеством является подмножество $J_0 = \bigcup\limits_1^\infty J_n$, где J_n — счетные подмножества I, для которых $E\left[f\left(\sup\limits_{J_n} X_j\right)\right] + 1/n \geqslant \sigma$, $n = 1, 2, \ldots$]. Положим $U = \sup\limits_{J_0} X_j$.

Если д. с. в. Y удовлетворяет условию $X_i \leqslant Y$ п. н. $(i \in I)$, то, очевидно, $U \leqslant Y$ п. н. Для завершения доказательства существования $\operatorname{ess\,sup} X_i$ достаточно теперь показать, что $X_i \leqslant U$ п. н. для всех $i \in I$. Из определения J_0 вытекает, что при всех $i \in I$ $E(f[\sup(X_i, U)]) = E[f(U)] = \sigma$ и, следовательно, $f[\sup(X_i, U)] \underset{\text{п. н.}}{=} f(U)$, откуда $\sup(X_i, U) \underset{\text{п. н.}}{=} U$ при всех $i \in I$. Тем самым доказано существование $\operatorname*{ess\,sup}\limits_I X_i$. Единственность (с точностью до эквивалентности) величины $\operatorname*{ess\,sup}\limits_I X_i$ непосредственно вытекает из ее определения. Существование и единственность $\operatorname*{ess\,inf}\limits_I X_i$ доказывается аналогично. ∎

Пример. Возьмем в качестве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ отрезок $[0, 1]$ с лебеговой мерой. Пусть $I = [0, 1]$. Определим семейство $\{X_r\}$, положив $X_r(\omega) = 1$ при $\omega = r$ и $X_r(\omega) = 0$ при $\omega \neq r$. В этом случае $X_r = 0$ п. н. и, следовательно, $\operatorname*{ess\,sup}\limits_r X_r = 0$ п. н. С другой стороны, верхняя грань множества функций $\{X_r, r \in [0, 1]\}$ есть функция на $[0, 1]$, тождественно равная 1. Читателю следует обратить внимание на ту роль, которую играют подмножества Ω нулевой вероятности в этом примере и в доказательстве предложения II.4.1.

Если множество $A \in \mathcal{A}$ имеет вероятность нуль, то две д. с. в. X и X', совпадающие на A^c, совпадают почти всюду. Иными словами, ограничение X на A^c вполне определяет класс эквивалентности $\tilde{X}$ величины X. Измеримое отображение множества A^c в $\overline{R}$ (например, ограничение X на A^c) называется *д. с. в., определенной почти всюду*. Д. с. в., определенную почти всюду, всегда можно продолжить до д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$ (например, положив ее равной нулю на том множестве, где она не определена).

Важность свойства полноты вероятностных пространств (см. п. 1.4) объясняется тем обстоятельством, что на полном вероятностном пространстве д. с. в. X можно, не нарушая ее измеримости, произвольно изменить на нулевом множестве (при этом измененная д. с. в. принадлежит $\tilde{X}$). Отметим, что пополнение вероятностного пространства увеличивает число д. с. в., но не приводит ни к каким новым классам эквивалентности.

Определение II.4.1. *Последовательность д. с. в. $\{X_n, n \geqslant 1\}$ называется сходящейся почти наверное (п. н.), если* $\limsup\limits_n X_n \underset{\text{п. н}}{=} \liminf X_n$.

Если последовательность $\{X_n\}$ сходится почти наверное, то пределом ее по определению считается любая из д. с. в., принадлежащая (однозначно определенному) классу эквивалентности д. с. в. $\limsup\limits_n X_n$. Этот класс эквивалентности, равно как и любой из его элементов, мы будем обозначать $\lim\limits_{n\to\infty}$ п. н. X_n.

Критерий Коши. *Для того чтобы последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ п. н. конечных д. с. в. сходилась п. н. к п. н. конечной д. с. в., необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши в смысле сходимости п. н., т. е. чтобы последовательность*

$$\{X_m - X_n;\ m,\ n \geqslant 1\}$$

сходилась п. н. к 0 при $m, n \to \infty$.

Сформулированный критерий немедленно вытекает из критерия Коши для последовательностей действительных чисел, если заметить, что последовательность $\{X_n\}$

($\{X_m - X_n;\ m,\ n \geqslant 1\}$) сходится п. н. к п. н. конечной д. с. в. тогда и только тогда, когда последовательность $\{X_n(\omega)\}$ ($\{X_m(\omega) - X_n(\omega);\ m,\ n \geqslant 1\}$) сходится в R при всех ω, не принадлежащих некоторому множеству нулевой вероятности.

Предложение II.4.2. *Для сходимости п. н. последовательности $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ п. н. конечных д. с. в. достаточно, чтобы для некоторой суммируемой последовательности $\{\varepsilon_n,\ n \geqslant 1\}$ положительных чисел*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n) < \infty;$$

при выполнении этого условия предел последовательности $\{X_n\}$ п. н. конечен.

Доказательство. Для каждого $n \geqslant 1$ положим $A_n = \{|X_{n+1} - X_n| > \varepsilon_n\}$. В силу предположения и предложения I.4.4 имеем $\limsup_n A_n \underset{\text{п. н.}}{=} \varnothing$. Рассмотрим д. с. в. N, принимающую неотрицательные целые значения и определяемую вне нулевого множества $\limsup A_n$ условиями

$$N(\omega) = n \ \text{ на } \bigcup_{m \geqslant n} A_m - \bigcup_{m > n} A_m, \quad N(\omega) = 0 \ \text{ на } \left(\bigcup_{m \geqslant 1} A_m\right)^c.$$

При $\omega \notin \limsup A_n$ последовательность $\{X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)\}$ мажорируется по абсолютному значению, начиная с $(N(\omega)+1)$-го члена, последовательностью $\{\varepsilon_n\}$. Отсюда вытекает существование предела

$$X(\omega) = \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X_1(\omega) + \sum_n [X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)]\ ^{1)}$$

при всех $\omega \notin \limsup A_n$. ∎

Фактически из доказательства можно извлечь также информацию о скорости сходимости X_n к X: при $N(\omega) < m$ имеем

$$|X(\omega) - X_m(\omega)| \leqslant \sum_{n \geqslant m} \varepsilon_n.$$

(Отметим, что $P(\{N < m\}) \uparrow 1$ при $m \uparrow \infty$.)

---

[1]) Правая часть здесь может не иметь смысла и при некоторых $\omega \notin \limsup A_n$, но во всяком случае имеет смысл вне некоторого нулевого множества. — *Прим. перев.*

Определение II.4.2. *Последовательность* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *п. н. конечных д. с. в.* ***сходится по вероятности*** *к п. н. конечной д. с. в., если при любом* $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - X| > 0) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Сходимость по вероятности обозначается $X_n \underset{P}{\to} X$.

Критерий Коши. *Последовательность* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *п. н. конечных д. с. в. сходится по вероятности тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши в смысле сходимости по вероятности, т. е. когда* $X_m - X_n \underset{P}{\to} 0$ $(m,\ n \to \infty)$.

Мы докажем этот критерий одновременно со следующим результатом, характеризующим связь сходимости п. н. со сходимостью по вероятности.

Предложение II.4.3. *Всякая последовательность* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *п. н. конечных д. с. в., сходящаяся п. н. к п. н. конечной д. с. в., сходится по вероятности к тому же самому пределу. Обратно, из всякой последовательности* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *п. н. конечных д. с. в., сходящейся по вероятности, можно выбрать подпоследовательность, п. н. сходящуюся к тому же самому пределу.*

Доказательство. Пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность п. н. конечных д. с. в. и X — п. н. конечная д. с. в. Тогда

(1) $X_n \underset{\text{п. н.}}{\to} X \Rightarrow X_n \underset{P}{\to} X$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_n P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) \leqslant P[\limsup_n \{|X_n - X| > \varepsilon\}] \leqslant$$

$$\leqslant P(\{-\varepsilon + \limsup_n X_n < X < \varepsilon + \liminf_n X_n\}^c) = 0.$$

(2) $X_n \underset{P}{\to} X \Rightarrow (X_m - X_n) \underset{P}{\to} 0$ $(m,\ n \to \infty)$, поскольку для любого $\varepsilon > 0$

$$\{|X_m - X_n| > \varepsilon\} \subset \left\{|X_m - X| \supset \frac{\varepsilon}{2}\right\} \bigcup \left\{|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

и, следовательно,

$$P(|X_m - X_n| > \varepsilon) \leqslant P\left(|X_m - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X_n - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \to 0$$

при $m,\ n \to \infty$.

(3) $X_m - X_n \xrightarrow[P]{} 0$ $(m,\ n \to \infty) \Rightarrow X_{n_j} \xrightarrow[\text{п. н.}]{} X$ и $X_n \xrightarrow[P]{} X$ для некоторой д. с. в. X и некоторой подпоследовательности $\{n_j\}$. В самом деле, определим n_j последовательно, положив $n_1 = 1$ и взяв в качестве n_j наименьшее целое число $N > n_{j-1}$, для которого

$$P\left(|X_r - X_s| > \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{3^j} \quad \text{при} \quad r,\ s \geqslant N.$$

Замечая далее, что $\sum\limits_j P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 1/2^j) < \sum\limits_j 1/3^j < \infty$, и используя предложение II.4.2, приходим к выводу, что последовательность $\{X_{n_j},\ j \geqslant 1\}$ сходится п. н. Пусть X — предел этой последовательности. Тогда

$$P(|X_n - X| > \varepsilon) \leqslant P\left(|X_n - X_{n_j}| > \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|X_{n_j} - X| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Устремляя в этом соотношении n и j к бесконечности и используя сделанное предположение и (1), получаем $X_n \xrightarrow[P]{} X$.

Тем самым как критерий Коши, так и предложение доказаны. ∎

Дополнения и упражнения

II.4.1. Для того чтобы для вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ понятия сходимости п. н. и сходимости по вероятности совпадали, необходимо и достаточно, чтобы это пространство было атомическим.

II.4.2. Возьмем в качестве вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ интервал $[0, 1]$ с σ-алгеброй борелевских множеств и лебеговой мерой. Для каждого целого $n \geqslant 1$ положим

$$A_n = \left[\frac{q}{2^p},\ \frac{q+1}{2^p}\right],$$

где p и q — целые числа, однозначно определяемые условиями $2^p+q=n$, $p\geqslant 0$, $0\leqslant q<2^p$. Показать, что $1_{A_n}\xrightarrow[P]{}0$, но $\limsup\limits_n 1_{A_n}=1$, $\liminf\limits_n 1_{A_n}=0$.

II. 4.3. Функционал

$$\varepsilon(X)=E\left(\frac{|X|}{1+|X|}\right)$$

на множестве V (классов эквивалентности) п. н. конечных д. с. в. обладает следующими свойствами: $\varepsilon(X+Y)\leqslant\varepsilon(X)+\varepsilon(Y)$ и $\varepsilon(cX)\leqslant[\max(1,c)]\,\varepsilon(X)$. Показать, что функция $d(X,Y)=\varepsilon(X-Y)$ является метрикой на V; что топология метрического пространства (V,d) совпадает с топологией сходимости по вероятности (т. е. $d(X_n,X)\to 0\Leftrightarrow X_n\xrightarrow[P]{}X$), и что метрическое пространство (V,d) полно.

Показать далее, что подмножество H пространства V относительно компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ существует действительная постоянная C и конечное семейство $\{A_i,\ i\in I\}$ измеримых множеств, такие, что (а) $P\left(\bigcup\limits_I A_i\right)\geqslant 1-\varepsilon$; (б) $|X|\underset{\text{п.н.}}{\leqslant}C$ на $\bigcup\limits_I A_i$ при всех $X\in H$; (в) $\operatorname{ess\,sup}\limits_{A_i}X-\operatorname{ess\,inf}\limits_{A_i}X\leqslant\varepsilon$ при всех $X\in H$.

II.4.4. ***Теорема Егорова.*** Если $X_n\to X$ п. н. на $(\Omega,\mathcal{A},P)$ и X п. н. конечна, то для всякого $\varepsilon>0$ существует множество A_ε, такое, что $P(A_\varepsilon)>1-\varepsilon$, и $X_n\to X$ равномерно на A_ε. [Выбрать подходящую подпоследовательность $\{n_k\}$ и положить

$$A_\varepsilon^c=\sup_k\sup_{n\geqslant n_k}\left\{|X_n-X|>\frac{1}{k}\right\}.\ ]$$

II. 4.5. Пусть $(\Omega,\mathcal{A},P)$ — вероятностное пространство и $(\Omega,\overline{\mathcal{A}},\overline{P})$ — его пополнение. Показать, что следующие два множества совпадают:

(1) множество д. с. в., определенных на $(\Omega,\overline{\mathcal{A}},\overline{P})$;

(2) множество отображений пространства Ω в $\overline{R}$, каждое из которых всюду, за исключением нулевого множества (своего для каждого отображения), равно некоторой д. с. в., определенной на $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

II.4.6. Пусть $\{X_n,n\geqslant 1\}$ — последовательность д. с. в. Показать что существует наименьший (наибольший) класс эквивалентности д. с. в. Y' (Y'') такой, что для любого $\varepsilon>0$

$$\lim_n P(Y'-X_n\leqslant-\varepsilon)=0\qquad(\lim_n P(Y''-X_n\geqslant\varepsilon)=0).$$

Показать далее, что $Y''\leqslant Y'$ п. н. и что $Y''=Y'$ п. н. тогда и только тогда, когда последовательность $\{X_n\}$ сходится по вероятности.

II. 4.7. Пусть X и X_n $(n \geqslant 1)$ — конечные п. н. д. с. в. и пусть $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ — стремящаяся к нулю убывающая последовательность положительных чисел. Показать, что если

$$\sum_n P[|X_n - X| > \varepsilon_n] < \infty,$$

то $X = \lim\limits_{n \to \infty}$ п. н. X_n.

II. 5. Равномерная интегрируемость и сходимость в среднем

Определение II.5.1. *Семейство $\{X_i, i \in I\}$ интегрируемых д. с. в., определенных на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, называется* равномерно интегрируемым, *если при $a \uparrow \infty$*

$$\sup_I \int_{|X_i| > a} |X_i| \downarrow 0.$$

Предложение II.5.1. *Для абсолютной интегрируемости семейства $\{X_i, i \in I\}$ д. с. в. достаточно, чтобы оно мажорировалось по абсолютному значению интегрируемой д. с. в. X, т. е. чтобы*

$$|X_i| \underset{\text{п. н.}}{\leqslant} X \qquad (i \in I).$$

В частности, всякое конечное семейство интегрируемых д. с. в. равномерно интегрируемо.

Доказательство. Из непрерывности математического ожидания относительно монотонной сходимости вытекает, что

$$\lim_{a \uparrow \infty} \downarrow \int_{\{X > a\}} X = \int_{\{X = \infty\}} X = 0.$$

Отсюда и из неравенства

$$\int_{\{|X_i| > a\}} |X_i| \leqslant \int_{\{X > a\}} X,$$

имеющего место при $|X_i| \leqslant X$, следует справедливость первой части предложения. Вторая часть предложения вытекает из первой, поскольку всякое конечное семейство $\{X_i,\ i \in I\}$ интегрируемых д. с. в. мажорируется интегрируемой д. с. в. $X = \sum_I |X_i|$. ∎

Предложение. II.5.2. *Семейство $\{X_i,\ i \in I\}$ интегрируемых д. с. в. равномерно интегрируемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

(а) (*равномерная абсолютная непрерывность*) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta_\varepsilon > 0$, такое, что*

$$\sup_I \int_A |X_i| \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad P(A) \leqslant \eta_\varepsilon \qquad (A \in \mathcal{A});$$

(б) $\sup\limits_I \int\limits_\Omega |X_i| < \infty$.

Доказательство. Из неравенства

$$\int_A X = \int_{A\{X \leqslant a\}} X + \int_{A\{X > a\}} X \leqslant aP(A) + \int_{\{X > a\}} X,$$

справедливого для любой положительной д. с. в. X при всех $a \geqslant 0$ и $A \in \mathcal{A}$, вытекает, что для любого семейства $\{X_i,\ i \in I\}$ д. с. в.

$$\sup_I \int_A |X_i| \leqslant aP(A) + \sup_I \int_{\{|X_i| > a\}} |X_i|.$$

Необходимость первого условия предложения следует из последнего неравенства, если в нем положить $a \uparrow \infty$, $P(A) \to 0$. Полагая в этом неравенстве $A = \Omega$, получаем необходимость второго условия предложения.

Обратно, из элементарного неравенства

$$\int_\Omega X \geqslant \int_{\{X \geqslant a\}} X \geqslant aP(X \geqslant a),$$

справедливого для любой положительной д. с. в. X, вытекает, что если семейство $\{X_i,\ i \in I\}$ д. с. в. удовлетворяет условию (б) предложения, то

$$\sup_I P(|X_i| \geqslant a) \leqslant \frac{1}{a} \sup_I \int_\Omega |X_i| \downarrow 0$$

при $a \uparrow \infty$. Если семейство $\{X_i,\ i \in I\}$, кроме того, равномерно абсолютно непрерывно, то возьмем $a < \infty$, такое, что $P(|X_i| \geqslant a) \leqslant \eta_\varepsilon$ $(i \in I)$. Тогда $\int\limits_{\{|X_i| \geqslant a\}} |X_i| \leqslant \varepsilon$ для всех $i \in I$ и, следовательно, семейство $\{X_i,\ i \in I\}$ равномерно интегрируемо. ∎

Следствие. *Всякое семейство $\{X_i,\ i \in I\}$ д. с. в., мажорируемое по абсолютной величине некоторой интегрируемой д. с. в, равномерно абсолютно непрерывно. В частности, всякое конечное семейство интегрируемых д. с. в. равномерно абсолютно непрерывно.*

Определение II.5.2. *Последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ (классов эквивалентности) интегрируемых д. с. в. называется сходящейся в среднем (порядка 1) к (классу эквивалентности) интегрируемой д. с. в X, если*

$$\int |X_n - X| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Сходимость в среднем обозначается $X_n \xrightarrow{L_1} X$.

Важность понятия сходимости в среднем объясняется тем фактом, что она определяет возможность перехода к пределу под знаком интеграла. Именно, имеет место следующее

Предложение II.5.3. *Для того чтобы последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ интегрируемых д. с. в. сходилась в среднем к интегрируемой д. с. в. X, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_A X_n \to \int\limits_A X$ равномерно по $A \in \mathcal{A}$ при $n \to \infty$. В частности, если $X_n \xrightarrow{L_1} X$ и $P(A_n \triangle A) \to 0$, то $\int\limits_{A_n} X_n \to \int\limits_A X$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Необходимость условия вытекает из неравенств

$$\left| \int\limits_A X_n - \int\limits_A X \right| \leqslant \int\limits_A |X_n - X| \leqslant \int |X_n - X| \qquad (A \in \mathcal{A}),$$

а достаточность — из равенства

$$\int |X_n - X| = \Big(\int\limits_{A_n} X_n - \int\limits_{A_n} X\Big) - \Big(\int\limits_{A_n^c} X_n - \int\limits_{A_n^c} X\Big),$$

где $A_n = \{X_n > X\}$. Далее, если $X_n \xrightarrow{L_1} X$ и $P(A_n \triangle A) \to 0$, то оба члена правой части неравенства

$$\Big|\int\limits_{A_n} X_n - \int\limits_{A} X\Big| \leqslant \Big|\int\limits_{A_n} X_n - \int\limits_{A_n} X\Big| + \Big|\int\limits_{A_n} X - \int\limits_{A} X\Big|$$

стремятся к 0 при $n \to \infty$. ∎

Следующие два результата мы докажем одновременно.

Критерий Коши. *Для любой последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ интегрируемых д. с. в. следующие два утверждения равносильны:*

(а) *$\{X_n\}$ сходится в среднем порядка 1 при $n \to \infty$;*

(б) *$\{X_n\}$ является последовательностью Коши в смысле сходимости в среднем, т. е. $E|X_n - X_m| \to 0$ при m, $n \to \infty$.*

Предложение II.5.4. *Для любой последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ интегрируемых д. с. в. и любой д. с. в. X следующие два утверждения равносильны:*

(в) *последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема и $X_n \xrightarrow{P} X$ при $n \to \infty$;*

(г) *X интегрируема и $X_n \xrightarrow{L_1} X$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Для доказательства импликации (а)$\Rightarrow$(б) заметим, что если последовательность интегрируемых д. с. в. $\{X_n, n \geqslant 1\}$ сходится в среднем к интегрируемой д. с. в. X, то

$$E|X_n - X_m| \leqslant E|X_n - X| + E|X_m - X| \to 0 \quad \text{при} \quad m,\ n \to \infty.$$

Покажем, далее, что всякая последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ интегрируемых д. с. в., являющаяся последовательностью Коши в смысле сходимости в среднем, равномерно интегрируема. Воспользуемся для этого предложением II.5.2. Во-первых, для любого $\varepsilon > 0$ выберем номер N_ε так, чтобы $\int |X_m - X_n| \leqslant \varepsilon$ при m, $n \geqslant N_\varepsilon$. Из неравенства $\int\limits_A |X_n| \leqslant \int\limits_A |X_m| + \int\limits_A |X_n - X_m|$ тогда вытекает, что

$$\sup_n \int\limits_A |X_n| \leqslant \sup_{m \leqslant N_\varepsilon} \int\limits_A |X_m| + \varepsilon$$

при всех $A \in \mathcal{A}$. Отсюда и из равномерной интегрируемости последовательности $\{X_m,\ m \leqslant N_\varepsilon\}$ (см. предложение II.5.1) следует, что $\sup\limits_n \int |X_n| < \infty$ и что $\sup\limits_n \int\limits_A |X_n| \leqslant 2\varepsilon$ при достаточно малой $P(A)$. Заметим теперь, что поскольку

$$P[|X_m - X_n| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{1}{\varepsilon} E|X_m - X_n| \to 0,$$

то всякая последовательность Коши в смысле сходимости в среднем является последовательностью Коши в смысле сходимости по вероятности. Так как всякая последовательность Коши в смысле сходимости по вероятности сходится по вероятности, то мы показали, что при выполнении (б) последовательность $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ равномерно интегрируема и сходится по вероятности.

При выполнении (в) д. с. в. X необходимо интегрируема. В самом деле, согласно предложению II.4.3 мы можем выбрать подпоследовательность $\{n_j\}$, для которой $X_{n_j} \xrightarrow[\text{п. н.}]{} X$. При этом $|X_{n_j}| \xrightarrow[\text{п. н.}]{} |X|$. Применяя лемму Фату—Лебега, получаем $E|X| \leqslant \liminf\limits_j E|X_{n_j}| \leqslant \sup\limits_n E|X_n| < \infty$ (предложение II.5.2). Далее, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\int |X_n - X| \leqslant \int\limits_{\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\}} |X_n - X| + \int\limits_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |X_n - X| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + \int\limits_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |X_n| + \int\limits_{\{|X_n - X| > \varepsilon\}} |X|.$$

При выполнении условия (в) оба интеграла в последнем выражении стремятся к нулю при $n \to \infty$, так как тогда $P[|X_n - X| > \varepsilon] \to 0$ при $n \to \infty$ и последовательность $\{X_n\}$ равномерно абсолютно непрерывна. Тем самым доказано, что (в)$\Rightarrow$(г).

Для завершения доказательства достаточно теперь заметить, что $X_n \xrightarrow{L_1} X$ влечет $X_n \xrightarrow[P]{} X$ в силу неравенства $P[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] \leqslant \frac{1}{\varepsilon} E|X_n - X|$. ∎

Дополнения и упражнения

II. 5.1. Если X, Y — две положительные интегрируемые д. с. в. и $Z = \sup(X, Y)$, то

$$\int\limits_{\{Z > a\}} Z \leqslant \int\limits_{\{X > a\}} X + \int\limits_{\{Y > a\}} Y \quad (a \geqslant 0).$$

Используя этот факт, показать, что для любой равномерно интегрируемой последовательности д. с. в. $\{X_n, n \geqslant 1\}$

$$E\left[\frac{1}{n} \sup_{1 \leqslant m \leqslant n} |X_m|\right] \to 0 \quad (n \to \infty).$$

II. 5.2. Для равномерной интегрируемости семейства $\{X_i, i \in I\}$ д. с. в. достаточно, чтобы для некоторой определенной на $[0, \infty]$ действительной положительной измеримой функции f, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{x \to +\infty} (1/x) f(x) = \infty$, выполнялось неравенство

$$\sup_I E[f(|X_i|)] < \infty.$$

Примерами таких функций f являются $f(x) = x^p$, $p > 1$, и $f(x) = x(\log x)^+$.

II. 5.3. Если два семейства $\{X_i, i \in I\}$ и $\{Y_j, j \in J\}$ интегрируемых д. с. в. равномерно абсолютно непрерывны (равномерно интегрируемы), то семейство $\{X_i + Y_j; i \in I, j \in J\}$ тоже равномерно абсолютно непрерывно (равномерно интегрируемо).

II. 5.4. Для всякой интегрируемой д. с. в. X функция множеств $\int\limits_A X$ равномерно непрерывна на булевой метрической алгебре $\mathcal{A}$. Семейство $\{X_i, i \in I\}$ интегрируемых д. с. в. равномерно абсолютно непрерывно тогда и только тогда, когда семейство функций множеств $\left\{\int\limits_A X_i, i \in I\right\}$ равностепенно равномерно непрерывно на $\mathcal{A}$.

II. 5.5. Показать, что на всяком вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ без атомов свойства равномерной интегрируемости и равномерной абсолютной непрерывности семейства д. с. в. равносильны (воспользоваться тем обстоятельством, что в рассматриваемом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное разбиение пространства на множества вероятности $< \varepsilon$). Вывести отсюда, что в общем случае условие (б) предложения II. 5.2 можно заменить следующим условием:

для каждого атома A множество (постоянных) значений, принимаемых на нем величинами X_i $(i \in I)$, ограничено, и, следовательно, равномерную интегрируемость в условии (в) предложения II. 5.4 можно заменить на равномерную абсолютную непрерывность.

II. 5.6. Распространить определения и результаты последних двух пунктов на обобщенные последовательности д. с. в.

Обобщенная последовательность $\{X_\alpha\}$ интегрируемых д. с. в. называется *равномерно интегрируемой на бесконечности*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют индекс α_ε и действительное число a_ε такие, что

$$\int\limits_{\{|X_\alpha| > a_\varepsilon\}} |X_\alpha| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant \alpha_\varepsilon.$$

Показать, что последовательность д. с. в. равномерно интегрируема на бесконечности тогда и только тогда, когда она равномерно интегрируема. Доказать аналог предложения II. 5.2 для равномерной интегрируемости на бесконечности. Показать, что предложение II. 5.4 распространяется на обобщенные последовательности д. с. в., если в условии (в) равномерную интегрируемость заменить на равномерную интегрируемость на бесконечности.

II. 6. Пространства L_p

Лемма II. 6.1. *Если φ — действительная непрерывная вогнутая функция, определенная на выпуклой области D в R^n, то*

$$E[\varphi(X_1, \ldots, X_n)] \leqslant \varphi(EX_1, \ldots, EX_n]$$

для любых интегрируемых д. с. в. $X_1, \ldots, X_n$, удовлетворяющих условию

$$(X_1, \ldots, X_n) \in D \quad \textit{п. н.}$$

Нетрудно показать, что $(EX_1, \ldots, EX_n) \in D$ при $(X_1, \ldots, X_n) \in D$ п. н.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — направляющие косинусы гиперплоскости в R^{n+1}, проходящей через точку $(EX_1, \ldots, EX_n, \varphi(EX_1, \ldots, EX_n))$ и лежащей над поверхностью φ. При всех $(x_1, \ldots, x_n) \in D$ имеем, очевидно,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \varphi(EX_1, \ldots, EX_n) + \sum_1^n \lambda_i [x_i - EX_i].$$

Заменяя x_i в правой части этого неравенства на X_i, получаем интегрируемую д. с. в. с интегралом, равным $\varphi(EX_1, \ldots, EX_n)$. Отсюда следует, что д. с. в.

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n)$$

квазиинтегрируема и что $E[\varphi(X_1, \ldots, X_n)] \leqslant \varphi(EX_1, \ldots$ $\ldots, EX_n)$. ∎

Следствие. *Пусть* φ_α $(0<\alpha<1)$ *и* ψ_p $(1 \leqslant p < \infty)$ — *две действительные функции, определенные на множестве* $\{0 \leqslant u,\ v < \infty\}$ *и задаваемые формулами*

$$\varphi_\alpha(u, v) = u^\alpha v^{1-\alpha}; \quad \psi_p(u, v) = (u^{1/p} + v^{1/p})^p.$$

Тогда для любых положительных д. с. в. U, V *справедливы неравенства*

$$E[\varphi_\alpha(U, V)] \leqslant \varphi_\alpha(EU, EV); \quad E[\psi_p(U, V)] \leqslant \psi_p(EU, EV).$$

Доказательство. Достаточно показать, что функции φ_α и ψ_p непрерывны и вогнуты. Так как

$$\varphi_\alpha(cu, cv) = c\varphi_\alpha(u, v), \quad \psi_p(cu, cv) = c\psi_p(u, v) \quad (c \geqslant 0).$$

для этого в свою очередь достаточно показать, что функции от одной переменной $w \in [0, 1]$

$$\varphi_\alpha(w, 1-w) \quad \text{и} \quad \psi_p(w, 1-w)$$

непрерывны и вогнуты. Производя элементарные вычисления, получаем

$$\frac{d^2}{dw^2}\varphi_\alpha(w, 1-w) = -\alpha(1-\alpha)\, u^{\alpha-2}(1-u)^{-\alpha-1} \leqslant 0,$$

$$\frac{d^2}{dw^2}\psi_p(w, 1-w) =$$

$$= -\frac{p-1}{p}\left[w^{1/p} + (1-w)^{1/p}\right]^{p-2}[w(1-w)]^{(1/p)-2} \leqslant 0. \ ∎$$

Поставим в соответствие каждой д. с. в. X действительные числа

$$\|X\|_p = E(|X|^p)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$
$$\|X\|_\infty = \sup\{x : P(|X| > x) > 0\}$$

и покажем, что эти числа обладают следующими свойствами:

(а) $0 \leqslant \|X\|_1 \leqslant \|X\|_p \leqslant \|X\|_q \leqslant \|X\|_\infty \leqslant \infty \quad (1<p<q<\infty);$
$P(|X| \neq 0) = 0 \Leftrightarrow \|X\|_p = 0 \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty);$

(б) $\|XY\|_r \leqslant \|X\|_p \|X\|_q$ при всех p, q, r, таких, что $1 \leqslant p$, q, $r \leqslant \infty$ и $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$; в частности (*неравенство Гёльдера*),

$$\int |XY| \leqslant \|X\|_p \|X\|_q \quad \text{при} \quad 1 \leqslant p, \quad q \leqslant \infty \quad \text{и} \quad 1 = p^{-1} + q^{-1}$$

(при $p = q = 2$ это неравенство есть *неравенство Шварца*);

(в) $\|cX\|_p = c\|X\|_p \quad (c \in R, \ 1 \leqslant p \leqslant \infty),$
$\|X + Y\|_p \leqslant \|X\|_p + \|Y\|_p \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$

(последнее неравенство называется *неравенством Минковского*).

Доказательство. Начнем с доказательства (б). Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $\|X\|_p < \infty$ и $\|X\|_q < \infty$. При $q = \infty$ утверждение непосредственно вытекает из неравенства $|XY| \leqslant |X| \|Y\|_\infty$, справедливого почти всюду на Ω. Аналогично в случае $p = \infty$. Если же p, $q < \infty$, то достаточно применить доказанное выше следствие к функции $\varphi_{r/p}$ и д. с. в. $U = |X|^p$ и $V = |Y|^q$.

Неравенства (а) следуют из (б), если в (б) положить $Y = 1$ и заметить, что $\|1\|_q = 1$ при всех $q \in [1, \infty]$.

Первое из соотношений (в) очевидно. Второе соотношение (в) тривиально, если либо $\|X\|_p$, либо $\|Y\|_p$ равно ∞. В случае, когда $\|X\|_p \|Y\|_p < \infty$ и $p = \infty$, оно вытекает из неравенства $P(|X + Y| > x + y) \leqslant P(|X| > x) + P(|Y| > y)$; если же $p < \infty$, то достаточно применить доказанное выше следствие к функции ψ_p и д. с. в. $U = |X|^p$, $V = |Y|^p$. ∎

Свойство (а) показывает, что действительное число $\|X\|_p$ зависит лишь от класса эквивалентности д. с. в. X. Для каждого $p \in [1, \infty]$ обозначим через $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ множество классов эквивалентности д. с. в. X, для которых $\|X\|_p < \infty$. В силу сказанного в п. II.4 в каждой ситуации, имеющей дело с более чем счетным семейством д. с. в. одновременно, важно делать различие между пространством L_p классов эквивалентности д. с. в., p-я степень модулей которых интегрируема (или в случае $p = \infty$ классов эквивалентности существенно ограниченных д. с. в.), и пространством $\mathcal{L}_p$ д. с. в. X, p-я степень модулей которых интегрируема (или в случае $p = \infty$ существенно ограниченных д. с. в. X).

Из свойства (в) и соотношения $\|X\|_p = 0 \Leftrightarrow X \underset{\text{п. н.}}{=} 0$ вытекает, что пространство L_p есть линейное нормированное пространство. Как известно, сходимость в таких пространствах определяется следующим образом: $X_n \xrightarrow{L_p} X$, если $\|X_n - X\|_p \to 0$ при $n \to \infty$; в случае $p < \infty$ это равносильно следующему условию:

$$\int |X_n - X|^p \to 0 \quad (n \to \infty).$$

При $p < \infty$ эта сходимость называется *сходимостью в среднем порядка p*, а при $p = \infty$ — *существенно равномерной сходимостью*. Она обладает по крайней мере при $p < \infty$ свойствами, аналогичными свойствам, установленным в предыдущем пункте для случая $p = 1$.

Критерий Коши. Пусть $p \in [1, \infty]$. *Для всякой последовательности (классов эквивалентности) д. с. в. $\{X_n\}$ из L_p следующие два утверждения эквивалентны:*

(а) *$\{X_n\}$ есть сходящаяся последовательность в L_p;*

(б) *$\{X_n\}$ есть последовательность Коши в L_p, т. е. $\|X_m - X_n\|_p \to 0$ при $m, n \to \infty$.*

Предложение II.6.1. *Пусть $p \in [1, \infty)$. Для любой последовательности (классов эквивалентности)* *д. с. в. $\{X_n\}$ из L_p и для (класса эквивалентности) любой д. с. в. X следующие два утверждения равносильны:*

(в) *последовательность $\{|X_n|^p\}$ равномерно интегрируема и $X_n \xrightarrow[P]{} X$ при $n \to \infty$;*

(г) *$X \in L_p$ и $X_n \xrightarrow{L_p} X$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. При $p < \infty$ доказательство вполне аналогично доказательству, проведенному в п. II.5 для частного случая $p = 1$. Достаточно лишь всюду в этом доказательстве заменить абсолютные значения $|X|$ на $|X|^p$ и вместо неравенства треугольника $|X + Y| \leqslant \leqslant |X| + |Y|$ использовать его обобщение

$$|X + Y|^p \leqslant 2^{p-1}(|X|^p + |Y|^p),$$

справедливое при всех $p \in [1, \infty)$.

Критерий Коши в случае $p = \infty$ устанавливается непосредственно, подобно тому, как это делается в случае сходимости п. н. Отметим еще, что если $X_n \xrightarrow{L_\infty} X$, то (а) последовательность $\{X_n\}$ существенно равномерно ограниченна, скажем $\sup\limits_n |X_n(\omega)| \leqslant C$ для некоторой постоянной C и почти всех ω, (б) $X_n \xrightarrow[\text{п. н.}]{} X$. ∎

Следствие. *Пусть $p \in [1, \infty)$, и пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность элементов L_p, мажорируемая по абсолютному значению д. с. в. $Y \in L_p$: $|X_n| < Y$. Для любой д. с. в. X следующие утверждения эквивалентны:*

(а) *$X_n \xrightarrow[P]{} X$ при $n \to \infty$;*

(б) *$X \in L_p$ и $X_n \xrightarrow{L_p} X$ при $n \to \infty$.*

Некоторые из установленных выше результатов можно объединить в виде следующего предложения:

Предложение II.6.2. *Для любого $p \in [1, \infty]$ пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ является полной структурой и полным нормированным линейным пространством (банаховым пространством).*

Доказательство. Мы установили выше, что L_p есть нормированное линейное пространство. Из справедливости критерия Коши в L_p следует, что L_p является полным линейным нормированным пространством, т. е. пространством Банаха.

Частично упорядоченное линейное пространство L называется *полной структурой*, если каждое конечное семейство и каждое ограниченное сверху (снизу) бесконечное семейство имеет в нем верхнюю (нижнюю) грань. В силу предложения II.4.1 для завершения доказательства настоящего предложения достаточно теперь показать, что (а) $X_1, X_2 \in L_p \Rightarrow \sup(X_1, X_2) \in L_p$; (б) для всяких двух положительных с. в. X и Y из неравенства $X \leqslant Y$, $Y \in L_p$, следует $X \in L_p$. Но (б) очевидно, а (а) является его следствием, поскольку

$$|\sup(X_1, X_2)| \leqslant |X_1| + |X_2| \in L_p. \blacksquare$$

Следствие. *Пространство $L_2(\Omega, \mathcal{A}, p)$ есть полная структура и относительно скалярного произведения*

$$\langle X, Y\rangle = E(XY)$$

является гильбертовым пространством.

Утверждение следствия вытекает из предыдущего предложения и неравенства Гёльдера, в силу которого $|\langle X, Y\rangle| \leqslant \|X\|_2 \|Y\|_2$, где по определению

$$\|X\|_2 = \sqrt{\langle X, Y\rangle}.$$

Дополнения и упражнения

II.6.1. Для любой д. с. в. X отображение $p \to \|X\|_p$, переводящее $[1, \infty]$ в $[0, \infty]$, непрерывно всюду за исключением, возможно, одной точки p_0. Если такая точка p_0 существует, то $\|X\|_p < \infty$ при $p < p_0$, $\|X\|_p = \infty$ при $p > p_0$ и рассматриваемое отображение непрерывно в p_0 слева. Показать, что на том интервале, где $\|X\|_p < \infty$, функция $\log\|X\|_p$ непрерывна и выпукла (по p).

II.6.2. Пусть u — непрерывное возрастающее отображение множества $[0, \infty]$ на себя и v — обратное отображение. Показать, что $xy \leqslant U(x) + V(y)$ при всех $x, y \in [0, \infty]$, где $U(x) = \int_0^x u(z)\,dz$ и

$V(y) = \int_0^y v(z)\,dz$. Вывести отсюда интегрируемость произведения XY двух д. с. в. X, Y на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, для которых д. с. в. $U[|X|]$ и $V[|Y|]$ интегрируемы. (Пример: $u = x^{p-1}$, где $p > 1$.)

II.6.3. Пусть E — линейное пространство классов эквивалентности ступенчатых д. с. в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Показать, что

$$E \subset L_\infty \subset L_q \subset L_p \subset L_1 \quad (1 < p < q < \infty)$$

и что E и L_r плотны в L_s $(1 \leqslant s \leqslant r \leqslant \infty)$. Сходимость $X_n \xrightarrow{L_q} X$ влечет сходимость $X_n \xrightarrow{L_p} X$, $q > p$; показать, что обратное утверждение верно лишь, когда $\mathcal{A}/P$ конечно.

II.6.4. Всякое положительное линейное отображение T пространства $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в пространство $L_{p'}(\Omega', \mathcal{A}', P')$ непрерывно [пользуясь рассуждением от противного, установить существование постоянной C, такой, что $\| T(X) \|_{p'} \leqslant C \| X \|_p$ для любой положительной д. с. в. $X \in L_p$].

Пусть T — положительное линейное преобразование пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в пространство $L_1(\Omega', \mathcal{A}', P')$, для которого $T(1) = 1'$. Показать, что для любого $p \in [1, \infty]$ ограничение T на $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ есть положительное линейное преобразование $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в $L_p(\Omega', \mathcal{A}', P')$ с нормой равной 1.

II.6.5. Пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность *положительных* интегрируемых д. с. в., сходящаяся по вероятности к положительной д. с. в. X. Показать, что если, кроме того,

$$\int X_n \to \int X \quad (n \to \infty),$$

то $X_n \xrightarrow{L_1} X$.

[Установить, что $(X - X_n)^+ \xrightarrow{L_1} 0$ при $n \to \infty$.]

II.6.6. Пространство $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ является *банаховой алгеброй* [1]. Показать, что между характерами этой алгебры (*характерами* называют линейные непрерывные функционалы u на L_∞, удовлетворяющие условию $u(XY) = u(X)\,u(Y)$ при всех X, $Y \in L_\infty$) и максимальными фильтрами в $\mathcal{A}/P$ (упражнение I.2.3) имеется взаимно однозначное соответствие, задаваемое формулой

$$\mathscr{C} = \{A\colon\ u(1_A) = 1\}.$$

II.6.7. ***Интегрирование с. в. со значениями в банаховом пространстве.*** Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство и E —

[1] В русской литературе банаховы алгебры часто называют нормированными кольцами. — *Прим. перев.*

банахово пространство. В упражнении II.2.2 нами были определены случайные величины со значениями в E (коротко — с. в. в E). Показать, что если X — с. в. в E, то $\|X(\cdot)\|$ есть положительная д. с. в:

Для любой ступенчатой с. в. $X = \sum_I x_i 1_{A_i}$ в E положим

$$\int X\,dP = \sum_I x_i P(A_i).$$

Продолжить по непрерывности это определение интеграла на все с. в. в E, для которых $\|X(\cdot)\| \in L_1$, и показать, что $\left\| \int X\,dP \right\| \leqslant \leqslant \int \|X\|\,dP$. Показать, далее, что пространство $L_1(E)$ классов эквивалентности с. в. в E с интегрируемой нормой является банаховым пространством относительно нормы $|||X||| = \int \|X\|\,dP$ и что определенный выше интеграл задает линейный непрерывный оператор, отображающий $L_1(E)$ в E. Определить пространства $L_p(E)$.

II.6.8. Используя предложение II.6.1 и упражнение II.4.3, найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы подмножество H пространства L_p было относительно компактным ($1 \leqslant p < \infty$).

*II.7. Интегрирование на топологических пространствах

Настоящий пункт посвящен изучению отношений между измеримой и топологической структурой данного пространства Ω. Используя материал п. I.5 и II.3, мы докажем сначала следующий фундаментальный результат, восходящий к Даниэлю.

Предложение II.7.1. *Пусть $\mathscr{E}$ — пространство Рисса (линейная структура) определенных на множестве Ω действительных функций, содержащее функцию, тождественно равную 1. Пусть, далее, E — определенный на $\mathscr{E}$ положительный линейный функционал, удовлетворяющий условию $E(1) = 1$ и непрерывный относительно монотонно сходящихся последовательностей: $\lim_n E(X_n) = 0$ для любой последовательности $\{X_n\}$ функций из $\mathscr{E}$, стремящейся, убывая, к 0 на Ω. Обозначим через $\mathcal{A}$ наименьшую σ-алгебру подмножеств Ω, относительно которой измеримы все функции из $\mathscr{E}$.*

Существует единственная вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})$, такая, что всякая функция X из $\mathcal{E}$ интегрируема и $E(X) = \int X\,dP$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, введенными в предложении II.3.2. Обозначим через $\mathcal{G}$ класс $\{G\colon 1_G \in \mathcal{F}_+\}$ подмножеств Ω и положим $\Pi(G) = E(1_G)$ для всех $G \in \mathcal{G}$. Из предложения II.3.2 следует, что класс $\mathcal{G}$ и функция Π удовлетворяют условиям предложения I.5.2. Введем функцию Π^* на $\mathcal{P}(\Omega)$, положив

$$\Pi^*(\Omega_1) = \inf\{\Pi(G);\ G \in \mathcal{G},\ G \supset \Omega_1\}.$$

Согласно предложению I.5.2 и его следствию, класс $\mathcal{D} = \{D\colon \Pi^*(D) + \Pi^*(D^c) = 1\}$ является σ-алгеброй, а ограничение Π^* на $\mathcal{D}$ представляет собой вероятность.

Для любой функции $Z \in \mathcal{F}_+$ множества вида $\{Z > a\}$ принадлежат $\mathcal{G}$, поскольку $1_{\{Z>a\}} = \lim\limits_n \uparrow \min[1, n(Z-a)^+]$. Отсюда и из определения класса $\mathcal{G}$ следует, что σ-алгебра, порожденная $\mathcal{G}$, совпадает с наименьшей σ-алгеброй, относительно которой все функции из $\mathcal{F}_+$ измеримы. Более того, поскольку каждая функция из $\mathcal{F}_+$ очевидным образом $\mathcal{A}$-измерима (где $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра, введенная в формулировке предложения), то обе эти σ-алгебры совпадают с $\mathcal{A}$.

Покажем, далее, что $\mathcal{D}$ содержит класс $\mathcal{G}$, а следовательно, и порождаемую им σ-алгебру $\mathcal{A}$. Для этого докажем сначала, что

$$\begin{aligned}\Pi^*(\Omega_1) &= \inf\{\Pi(G);\ G \in \mathcal{G},\ G \supset \Omega_1\} = \\ &= \inf\{E(Z);\ Z \in \mathcal{F}_+,\ Z \geqslant 1_{\Omega_1}\}\end{aligned}$$

для любого подмножества Ω_1 множества Ω. Очевидно, достаточно установить, что $\Pi^*(\Omega_1) \leqslant E(Z)$ при всех $Z \in \mathcal{F}_+$, удовлетворяющих условию $Z \geqslant 1_{\Omega_1}$. Поскольку для такой функции Z и любого $a \in (0, 1)$ множество $\{Z > a\}$ содержит Ω_1 и принадлежит $\mathcal{G}$, то

$$E(Z) \geqslant \frac{1}{a}\,\Pi(\{Z > a\}) \geqslant \frac{1}{a}\,\Pi^*(\Omega_1).$$

Устремляя в этом неравенстве a к 1, получаем нужный результат.

Пусть теперь G_0 — произвольное множество из $\mathcal{G}$ и $\{X_n\}$ — последовательность функций из $\mathcal{E}_+$, сходящаяся, возрастая, к 1_{G_0}. Имеем

$$\Pi(G_0) = \lim_n \uparrow E(X_n)$$

и

$$\Pi^*(G_0^c) = \inf\left\{E(Z;\ Z \in \mathcal{J}_+,\ Z \geqslant 1_{G_0^c}\right\} \leqslant \lim_n \downarrow E(1 - X_n).$$

Отсюда вытекает, что $\Pi^*(G_0) + \Pi^*(G_0^c) \leqslant 1$ и, следовательно (поскольку строгое неравенство здесь невозможно), что $G_0 \in D$. Тем самым показано, что $\mathcal{G}$ содержится в $\mathcal{D}$, откуда $\mathcal{A} \subset D$. Обозначим через P ограничение на $\mathcal{A}$ функции множеств Π^* (P является вероятностью).

Согласно предыдущему, каждая функция $Z \in \mathcal{J}_+$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$, порожденной $\mathcal{G}$. Покажем, что $E(Z) = \int Z\,dP$ при всех $Z \in \mathcal{J}_+$. Тем самым будет доказано, что интеграл по P от положительной функции Z из $\mathcal{E}$ равен $E(Z)$ и потому конечен. Поскольку для любой функции $X \in \mathcal{E}$ обе функции X^+ и X^- принадлежат $\mathcal{E}$, то мы получаем далее, что всякая функция X из $\mathcal{E}$ интегрируема по P, причем $\int X\,dP = E(X)$. Для всякой функции из $\mathcal{J}_+$ вида $Z = \sum_I a_i 1_{G_i}$, где $G_i \in \mathcal{G}$ и $a_i \in R_+$ ($i \in I$, множество I конечно) нужный результат непосредственно вытекает из аддитивности E на $\mathcal{J}_+$. Но всякая функция Z из $\mathcal{J}_+$ может быть представлена как предел возрастающей последовательности ступенчатых функций указанного выше вида:

$$Z = \lim_n \uparrow \sum_{q=0}^{n2^n-1} \frac{q}{2^n} 1_{\left\{\frac{q}{2^n} < Z \leqslant \frac{q+1}{2^n}\right\}} + n 1_{\{n < Z\}} =$$

$$= \lim_n \uparrow \frac{1}{2^n} \sum_{q=1}^{n2^n} 1_{\left\{Z > \frac{q}{2^n}\right\}}.$$

Теперь остается лишь заметить, что как функционал $E(Z)$, так и интеграл $\int ZdP$ непрерывны относительно возрастающих последовательностей функций из $\mathscr{J}_+$.

Для доказательства единственности P рассмотрим две вероятности P и P' на $\mathscr{A}$, интегралы по которым от функций из $\mathscr{E}$ совпадают. Рассматривая интегралы по P и P' от функций из $\mathscr{J}_+$, видим, что P и P' должны совпадать на $\mathscr{G}$. Отсюда следует, поскольку класс $\{A\colon P(A)=P'(A)\}$ σ-аддитивен (см. упражнение I.4.5), а класс $\mathscr{G}$ замкнут относительно пересечений и порождает $\mathscr{A}$, что P и P' совпадают на всей σ-алгебре $\mathscr{A}$. ∎

Проведенное доказательство содержит явную конструкцию вероятности P. Эта конструкция, как мы сейчас покажем, позволяет доказать некоторые интересные свойства вероятности P. Ниже мы введем предположение, что пространство $\mathscr{E}$ замкнуто в топологии равномерной сходимости на множестве Ω. По существу это предположение не ограничивает общности, так как пространство $\mathscr{E}$ всегда можно пополнить и продолжить E на пополнение $\mathscr{E}$ по непрерывности.

Следствие. *Предположим, что выполнены условия предыдущего предложения и что, кроме того, пространство $\mathscr{E}$ замкнуто в топологии равномерной сходимости на Ω. Обозначим через $\mathscr{G}$ класс множеств вида $G=\{f>0\}$, $f\in\mathscr{E}_+$. При этих предположениях класс $\mathscr{G}$ порождает σ-алгебру $\mathscr{A}$, причем для любого $G\in\mathscr{G}$*

$$P(G)=\sup\{E(X),\ X\leqslant 1_G,\ X\in\mathscr{E}_+\},$$

и для любого $A\in\mathscr{A}$

$$P(A)=\inf\{P(G);\ G\supset A,\ G\in\mathscr{G}\}$$

(*последнее равенство выражает „аппроксимационное свойство“ P*).

Доказательство. Достаточно доказать, что класс $\mathscr{G}$, определенный в формулировке следствия, совпадает с классом $\mathscr{G}$, введенным в доказательстве предложения. Как явствует из этого доказательства, для любой функции $X\in\mathscr{E}_+$ множество $\{X>0\}$ принадлежит классу $\mathscr{G}$, введенному в предложении. С другой стороны, пусть множество G принадлежит классу $\mathscr{G}$ из предложения, и пусть $\{X_n\}$ — последовательность функций из $\mathscr{E}_+$, сходящаяся, возрастая, к 1_G. Если положить $X = \sum_n 2^{-n} X_n$ (этот ряд сходится равномерно), то $X \in \mathscr{E}_+$ и $G = \{X > 0\}$. ∎

Применим теперь предыдущие результаты к тому случаю, когда $\mathscr{E}$ является пространством ограниченных непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве Ω.

Определение II.7.1. *Бэровскими подмножествами топологического пространства Ω называются подмножества, принадлежащие наименьшей σ-алгебре подмножеств Ω, относительно которой измеримы все непрерывные (или все непрерывные и ограниченные) функции на Ω. Подмножества Ω, принадлежащие σ-алгебре, порожденной замкнутыми подмножествами Ω, называются борелевскими подмножествами Ω.*

Поскольку всякая непрерывная функция на Ω является пределом непрерывных и ограниченных функций на Ω, два данных определения бэровских множеств согласуются друг с другом. Далее, всякое бэровское множество является борелевским, так как множества вида $\{X \leqslant a\}$ замкнуты для любой непрерывной функции на Ω.

Предложение II.7.2. *Пусть Ω — нормальное топологическое пространство (в частности, метризуемое или компактное) и $\mathscr{F}$ — класс всех замкнутых подмножеств Ω типа G_δ (т. е. подмножеств, являющихся пересечениями счетного числа открытых множеств). Класс $\mathscr{F}$ порождает σ-алгебру $\mathscr{A}$ бэровских подмножеств Ω. Формула $E(X) = \int X\,dP$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между вероятностями P на $(\Omega, \mathscr{A})$ и положительными линейными функционалами E на пространстве $C_\infty(\Omega)$ ограниченных непрерывных функций, удовлетворяющими условиям $E(1) = 1$ и*

$$\lim \downarrow E(X_n) = 0 \text{ при } X_n \downarrow 0 \text{ на } \Omega.$$

Всякая вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})$ обладает следующим аппроксимационным свойством:

$$P(A) = \sup\{P(F);\ F \subset A,\ F \in \mathcal{F}\}.$$

Отметим, что в случае, когда пространство Ω метризуемо, всякое замкнутое множество в Ω есть множество типа G_δ, так что в этом случае σ-алгебры бэровских и борелевских множеств совпадают.

Доказательство. Из развитой в предыдущих пунктах теории интегрирования следует, что всякая вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$ определяет на пространстве $\mathcal{A}$-измеримых интегрируемых функций и a fortiori на $C_\infty(\Omega)$ функционал E, обладающий нужными свойствами.

С другой стороны, если E — функционал на $C_\infty(\Omega)$ со свойствами, указанными в формулировке предложения, то к нему можно применить предложение II.7.1 и его следствие. Класс G в рассматриваемом случае совпадает с классом открытых множеств типа F_σ. В самом деле, для любой функции $X \in C_\infty(\Omega)$, где Ω — произвольное топологическое пространство, множество

$$\{X > 0\} = \bigcup_{n \geqslant 1} \{X \geqslant n^{-1}\}$$

является открытым множеством типа F_σ. Далее, если $G = \bigcup_n F_n$ — открытое объединение счетного числа замкнутых множеств в *нормальном* топологическом пространстве, то по теореме Урысона для любого $n \geqslant 1$ существует непрерывная функция X_n, равная нулю на G^c и единице на F_n, все значения которой лежат между 0 и 1. Образуем функцию $X = \sum_n 2^{-n} X_n$. Ясно, что

$$X \in C_\infty(\Omega) \text{ и } G = \{X > 0\}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что класс $\mathcal{F}$ состоит из дополнений к множествам из $\mathcal{G}$ и что утверждаемое в предложении аппроксимационное свойство P равносильно аппроксимационному свойству P, установленному в следствии к предложению

II.7.1 (чтобы установить равносильность, нужно перейти к дополнениям). ∎

Предложение II.7.3. *Пусть Ω — польское пространство (полное сепарабельное метрическое пространство), и пусть $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра его борелевских (= бэровских) подмножеств. Всякая вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})$ обладает по отношению к классу $\mathcal{K}$ компактных подмножеств Ω следующим аппроксимационным свойством:*

$$P(A) = \sup\{P(K);\ K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\}.$$

Доказательство. Так как, согласно предыдущему предложению, этот результат справедлив, если $\mathcal{K}$ заменить на более богатый класс $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств Ω, то достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество K_ε с вероятностью $P(K_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$. В самом деле, тогда для любого замкнутого множества F компактное множество FK_ε имеет вероятность $P(FK_\varepsilon) \geqslant P(F) - \varepsilon$ и, следовательно,

$$\sup\{P(F);\ F \subset A,\ F \in \mathcal{F}\} = \sup\{P(K);\ K \subset A,\ K \in \mathcal{K}\}$$

для любого $A \in \mathcal{A}$.

Пусть ω_i, $i \in I$, — плотная последовательность в Ω. Обозначим через $\overline{B}_{\omega, r}$ замкнутый шар с центром в ω радиуса r. Для любого $r > 0$ имеем, очевидно, $\bigcup\limits_I \overline{B}_{\omega_i, r} = \Omega$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Каждому целому числу $n > 0$ сопоставим конечное подмножество I_n множества I, такое, что $P\left(\bigcup\limits_{I_n} \overline{B}_{\omega_i, 1/n}\right) \geqslant 1 - \varepsilon 2^{-n}$. Замкнутое множество

$$K_\varepsilon = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{I_n} \overline{B}_{\omega_i, 1/n}$$

имеет тогда вероятность $P(K_\varepsilon) \geqslant 1-\varepsilon$. Мы утверждаем, что это множество компактно. В самом деле, из всякой последовательности точек K_ε можно выбрать подпоследовательность, такую, что для любого n все ее члены, начиная с некоторого, принадлежат одному и тому же шару $\overline{B}_{\omega_i, 1/n}$ $(i \in I_n)$. Эта подпоследовательность является последовательностью Коши в полном пространстве Ω и, следовательно, сходится. ∎

В заключение настоящего пункта остановимся кратко на вопросе о том, как можно усилить предыдущие результаты, ограничиваясь рассмотрением положительных линейных функционалов на пространстве Рисса, обладающих следующим более сильным свойством непрерывности: $\lim \downarrow E(X_\alpha) = 0$ для любой обобщенной последовательности $\{X_\alpha\}$, стремящейся убывая к нулю в $\mathscr{E}$.

Согласно замечанию, сделанному после формулировки предложения II.3.2, такие функционалы E можно продолжить на конус $\mathscr{F}_+^*$ пределов монотонно возрастающих обобщенных последовательностей функций из $\mathscr{E}_+$ с сохранением свойств линейности и непрерывности относительно монотонно возрастающих обобщенных последовательностей. Это продолжение осуществляется по формуле $E(\lim \uparrow X_\alpha) = \lim \uparrow E(X_\alpha)$. Рассуждая как в доказательстве предложения II.7.1, можно показать, что на наименьшей σ-алгебре $\mathscr{B}$, относительно которой все функции из $\mathscr{F}_+^*$ измеримы, формулы

$$P(G) = E(1_G)(1_G \in \mathscr{F}_+^*),$$

$$P(B) = \inf\{P(G);\ G \supset B,\ 1_G \in \mathscr{F}_+^*\}\ (B \in \mathscr{B})$$

определяют вероятность P, удовлетворяющую условию $E(X) = \int X\,dP$ при всех $X \in \mathscr{F}_+^*$. Каждая функция X из $\mathscr{E}_+$ (а следовательно, и каждая функция из $\mathscr{E}$) интегрируема по P, и интеграл от нее равен $E(X)$. В общем случае определенная выше σ-алгебра $\mathscr{B}$ строго содержит в себе наименьшую σ-алгебру $\mathscr{A}$, относительно которой все функции из $\mathscr{E}$ измеримы (поскольку, вообще говоря, существуют $\mathscr{A}$-неизмеримые функции из $\mathscr{F}_+^*$). С другой стороны, вероятность P однозначно определяется условием $E(X) = \int X\,dP$ $(X \in \mathscr{F}_+^*)$. Тем не менее могут существовать отличные от P вероятности P' на $(\Omega, \mathscr{B})$, удовлетворяющие условию $E(X) = \int X\,dP'$ при всех $X \in \mathscr{E}$. Это последнее условие обеспечивает совпадение P и P' лишь на σ-алгебре $\mathscr{A}$.

Наиболее интересным случаем применения предыдущих результатов является, несомненно, случай, когда $\mathscr{E}$

есть пространство $C_\infty(\Omega)$ ограниченных непрерывных функций, определенных на вполне регулярном (в частности, нормальном, метризуемом или компактном) топологическом пространстве Ω. В таких пространствах класс $\mathcal{G} = \{G\colon 1_G \in \mathcal{J}_+^*\}$ совпадает с классом открытых множеств, а σ-алгебра $\mathcal{B}$ с σ-алгеброй борелевских множеств. В самом деле, если $X \in \mathcal{J}_+^*$, т. е. если $X = \lim \uparrow X_\alpha$, где $X_\alpha \in C_\infty^*(\Omega)$, то множества $\{X > a\} = \bigcup_\alpha \{X_\alpha > a\}$ открыты. Следовательно, каждая функция $X \in \mathcal{J}_+^*$ измерима относительно σ-алгебры борелевских множеств и каждое множество $G \in \mathcal{G}$ открыто. Обратно, если G — открытое множество во вполне регулярном топологическом пространстве Ω, то для любого $\omega \in G$ существует непрерывная функция X_ω, равная нулю на G^c, единице в ω и принимающая значения лишь из интервала $[0, 1]$. Функция $\sup\limits_{\omega \in G} X_\omega$ совпадает с 1_G, принадлежит $\mathcal{J}_+^*$ и поэтому $G \in \mathcal{G}$.

Предложение II.7.4. *Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ — соответственно класс замкнутых подмножеств и σ-алгебра борелевских подмножеств вполне регулярного топологического пространства Ω. Формула $E(X) = \int X\,dP$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между вероятностями P на $(\Omega; \mathcal{B})$, „регулярными" в том смысле, что $\lim \downarrow P(F_\alpha) = P(\lim \downarrow F_\alpha)$ для любой убывающей обобщенной последовательности множеств из $\mathcal{F}$, и положительными линейными функционалами E на пространстве $C_\infty(\Omega)$ ограниченных непрерывных функций, удовлетворяющими условию $E(1) = 1$ и обладающими следующим свойством непрерывности:*

$$\lim \downarrow E(X_\alpha) = 0$$

для любой обобщенной последовательности $\{X_\alpha\}$ функций из $C_\infty^+(\Omega)$, сходящейся, убывая, к нулю.

Для всякой регулярной вероятности P на (Ω, B)

$$P(B) = \sup\{P(F);\ F \subset B,\ F \in \mathcal{F}\}.$$

Доказательство. Выше было показано, что каждому функционалу E рассматриваемого типа соответствует вероятность P на σ-алгебре $\mathscr{B}$ борелевских множеств в Ω. Из непрерывности продолжения E на $\mathscr{I}_+^*$ следует, что $P(\lim \uparrow G_\alpha) = \lim \uparrow P(G_\alpha)$ для любой возрастающей обобщенной последовательности открытых множеств G_α. Переходя к дополнениям G_α^c, убеждаемся в регулярности P в указанном в формулировке предложения смысле. Аналогично, P обладает нужным аппроксимационным свойством, поскольку $P(B) = \inf \{P(G)$: $G \supset B$, G открыто$\}$ для любого борелевского множества B.

Обратно, пусть P' — вероятность на $(\Omega, \mathscr{B})$ и $E(X) = \int X\,dP'$ — положительный линейный функционал, который эта вероятность определяет на $C_\infty(\Omega)$. Рассмотрим обобщенную последовательность $\{X_\alpha\}$ функций из $C_\infty(\Omega)$, стремящуюся, убывая, к нулю. Будем считать (это не уменьшит общности), что все функции X_α ограничены постоянной C. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ множества $\{X_\alpha \geqslant \varepsilon\}$ образуют убывающую к $\varnothing$ обобщенную последовательность множеств из $\mathscr{F}$, из неравенства

$$E(X_\alpha) \leqslant \varepsilon + CP'(X_\alpha \geqslant \varepsilon)$$

следует, что $\lim \downarrow E(X_\alpha) = 0$, если

$$\lim \downarrow P'(F_\alpha) = 0$$

для любой убывающей к $\varnothing$ обобщенной последовательности множеств из $\mathscr{F}$. Предположим, что P' обладает этим свойством и обозначим через P регулярную вероятность на $(\Omega, \mathscr{B})$, которую мы сопоставили функционалу E в начале доказательства. Ясно, что для завершения доказательства достаточно теперь показать, что $P = P'$ на $\mathscr{B}$.

Для этого в свою очередь достаточно показать, что если вероятность P' регулярна, то

$$\int X\,dP' = \lim_{\alpha} \uparrow \int X_\alpha\,dP'$$

при $X = \lim\limits_{\alpha} \uparrow X_\alpha$ $(X \in \mathscr{F}_+^*,\ X_\alpha \in C_\infty^+)$. В самом деле, тогда интегралы по P и P' совпадают на $\mathscr{F}_+^*$ и, следовательно, $P = P'$ на $\mathscr{B}$. Но если $X = \lim\limits_{\alpha} \uparrow X_\alpha$ в $\mathscr{F}_+^*$, то для любого $a > 0$ множества $\{X > a\}$, $\{X_\alpha > a\}$ открыты и $\{X > a\} = \lim\limits_{\alpha} \uparrow \{X_\alpha > a\}$. Следовательно, если вероятность P' регулярна, то

$$P'(X > a) = \lim_{\alpha} \uparrow P'(X_\alpha > a).$$

Отсюда в силу формулы

$$V = \lim_{n \uparrow \infty} \uparrow 2^{-n} \sum_{q=1}^{n2^n} 1_{\{Y > q/2^n\}},$$

справедливой для любой положительной функции Y, вытекает, что

$$\lim_{\alpha} \uparrow \int X_\alpha \, dP' = \lim_{\alpha,\ n} \uparrow 2^{-n} \sum_{q=1}^{n2^n} P'\left(X_\alpha > \frac{q}{2^n}\right) =$$

$$= \lim_{n} \uparrow 2^{-n} \sum_{q=1}^{n2^n} P'\left(X > \frac{q}{2^n}\right) = \int X \, dP'. \blacksquare$$

В том случае, когда Ω — компактное топологическое пространство, всякий положительный линейный функционал E на $C(\Omega)$, удовлетворяющий условию $E(1) = 1$, обладает свойством непрерывности, приведенным в предыдущем предложении. В самом деле, с одной стороны, всякая обобщенная последовательность непрерывных функций на Ω, сходящаяся, убывая, к нулю, сходится к нулю равномерно (лемма Дини), а с другой стороны, $E(X) \leqslant \sup |X|$. Для компактных пространств результаты настоящего пункта принимают следующую простую форму.

Предложение II.7.5. *Пусть Ω — компактное топологическое пространство и $\mathscr{F}$, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — соответственно класс замкнутых множеств, σ-алгебра бэровских множеств и σ-алгебра борелевских множеств в Ω.*

Скажем, что вероятность P на $(\Omega, \mathscr{B})$ регулярна, если она обладает одним из следующих равносильных свойств:

(а) $P(B) = \sup\{P(F);\ F \in \mathscr{F},\ F \subset B\}$ *для любого* $B \in \mathscr{B}$;

(б) *для всякого* $F \in \mathscr{F}$ *и всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такое открытое множество* G, *содержащее* F, *что* $P(G) \leqslant P(F) + \varepsilon$;

(в) *для любой обобщенной последовательности замкнутых множеств* F_α, *сходящейся, убывая, к* F,

$$\lim \downarrow P(F_\alpha) = P(F).$$

Формула $E(X) = \int X\,dP$, *где* $X \in C(\Omega)$, *устанавливает взаимно однозначное соответствие между*

(1) *положительными линейными функционалами* E *на* $C(\Omega)$, *удовлетворяющими условию* $E(1) = 1$;

(2) *вероятностями на* $(\Omega, \mathscr{A})$;

(3) *регулярными вероятностями на* $(\Omega, \mathscr{B})$.

Доказательство. В силу доказанного выше достаточно лишь показать, что для всякой вероятности P на $(\Omega, \mathscr{B})$ условия (а) — (в) равносильны. Переходя к дополнениям, видим, что свойство (а) равносильно следующему свойству:

$$P(B) = \inf\{P(G);\ G \text{ открыто},\ G \supset B\}.$$

Беря в этой формуле замкнутые множества B, получаем (б). Пусть, далее, P удовлетворяет условию (б) и $\{F_\alpha\}$ — обобщенная последовательность в $\mathscr{F}$, сходящаяся, убывая, к F. Для любого заданного $\varepsilon > 0$ возьмем открытое множество $G \supset F$, такое, что $P(G) \leqslant P(F) + \varepsilon$. Поскольку $(\lim F_\alpha) \cap G^c = \varnothing$, постольку $F_{\alpha_0} \cap G^c = \varnothing$ для некоторого α_0 в силу компактности Ω. Следовательно,

$$\lim \downarrow P(F_\alpha) \leqslant P(F_{\alpha_0}) \leqslant P(G) \leqslant P(F) + \varepsilon,$$

и поэтому вероятность P удовлетворяет условию (в). Наконец, согласно предложению II.7.4 всякая вероятность P, удовлетворяющая условию (в), удовлетворяет также условию (а). ∎

Дополнения и упражнения

II.7.1. Показать, что всякий положительный линейный функционал E на пространстве Рисса $C(\Omega)$ всех непрерывных функций (ограниченных или неограниченных), определенных на топологическом пространстве Ω, обладает следующим свойством:

$$\lim \downarrow E(X_n) = 0$$

при $X_n \downarrow 0$ в $C(\Omega)$. Вывести отсюда, что если такой функционал E не равен тождественно нулю, то $E(1) > 0$. [Показать, что если $X_n \downarrow 0$, то $E[(X_n - \varepsilon)^+] \downarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$, заметив для этого, что ряд $\sum\limits_n (X_n - \varepsilon)^+$ определяет функцию, которая, будучи непрерывна на каждом из открытых множеств $\{X_m < \varepsilon\}$, непрерывна на Ω. Воспользоваться, далее, тем, что если $E(1) = 0$, то $E(X) = E(X-a)^+$ при всех $a > 0$ и $X \in C(\Omega)$].

II.7.2. Пусть Ω — вполне регулярное топологическое пространство, являющееся объединением счетного числа своих компактных подмножеств (или, более общо, являющееся пространством Линделёфа). Показать, что всякий положительный линейный функционал на $C_\infty(\Omega)$, удовлетворяющий условию $\lim\limits_n \downarrow E(X_n) = 0$ для любой последовательности $\{X_n\}$ функций из $C_\infty(\Omega)$, сходящейся, убывая, к нулю, обладает также более сильным свойством непрерывности: $\lim\limits_\alpha \downarrow E(X_\alpha) = 0$ для любой обобщенной последовательности $\{X_\alpha\}$ функций из $C_\infty(\Omega)$, сходящейся, убывая, к нулю. Вывести отсюда, что на таком пространстве всякая вероятность на σ-алгебре бэровских множеств может быть единственным образом продолжена до регулярной вероятности на σ-алгебре борелевских множеств. Распространить этот результат на случай произвольного вполне регулярного пространства и вероятности с носителем, являющимся объединением счетного числа компактных множеств C_j.

II.7.3. ***Теорема Лузина.*** Пусть Ω — польское пространство, и пусть $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра борелевских подмножеств Ω и P — вероятность на $\mathcal{A}$. Показать, что для любой д. с. в. X на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество K_ε с $P(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$, такое, что ограничение X на K_ε является непрерывным отображением K_ε в $\overline{R}$. [Воспользоваться предложением II.7.3 для доказательства этого результата в случае ступенчатой д. с. в. и упражнением II.4.4 для перехода к случаю, когда д. с. в. X п. н. конечна.]

Глава III

Произведения пространств и случайные функции

III.1. Произведение двух измеримых пространств

Пусть Ω_1, Ω_2 — два произвольных множества. Множество всех пар $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$ называется *произведением* Ω_1 и Ω_2 и обозначается $\Omega_1 \times \Omega_2$. Отображение $\Omega_1 \times \Omega_2$ в Ω_i $(i = 1, 2)$, переводящее $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ в ω_i, называется i-й *координатой*.

Для любого подмножества A произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$ его *сечение* в точке $\omega_1 \in \Omega_1$ определяется как подмножество A_{ω_1} тех точек ω_2 из Ω_2 для которых $(\omega_1, \omega_2) \in A$:

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \colon (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

При фиксированном ω_1 отображение $A \to A_{\omega_1}$ класса $\mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ в класс $\mathscr{P}(\Omega_2)$ является гомоморфизмом относительно операций объединения, пересечения и взятия дополнения. Иными словами, для любого семейства $\{A^\alpha\}$ множеств из $\mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$

$$\Bigl(\bigcap_\alpha A^\alpha\Bigr)_{\omega_1} = \bigcap_\alpha A^\alpha_{\omega_1}, \quad \Bigl(\bigcup_\alpha A^\alpha\Bigr)_{\omega_1} = \bigcup_\alpha A^\alpha_{\omega_1}, \quad (A^c)_{\omega_1} = (A_{\omega_1})^c.$$

Сечением в точке ω_1 *отображения* X произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$ в произвольное множество назовем отображение X_{ω_1}, определенное на Ω_2 и задаваемое формулой $X_{\omega_1}(\omega_2) = X(\omega_1, \omega_2)$. В порядке оправдания терминологии заметим, что $(1_A)_{\omega_1} = 1_{A_{\omega_1}}$. Преобразование $X \to X_{\omega_1}$ (ω_1 фиксировано) сохраняет, конечно, обычные операции над функциями, включая поточечную сходимость.

Прямоугольником в $\Omega_1 \times \Omega_2$ называется подмножество вида

$$A_1 \times A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \colon \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2\}.$$

Прямоугольник $A_1 \times A_2$ не содержит точек тогда и только тогда, когда одна из его сторон A_1 или A_2 пуста.

Для всякого прямоугольника $A_1 \times A_2$ его сечение $(A_1 \times A_2)_{\omega_1}$ в точке ω_1 равно либо A_2, либо $\varnothing$, смотря по тому, $\omega_1 \in A_1$ или $\omega_1 \notin A_1$.

Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ суть σ-алгебры подмножеств Ω_1 и Ω_2 соответственно. Прямоугольник $A_1 \times A_2$ называют *измеримым* (по отношению к $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$), если $A_1 \in \mathcal{A}_1$ и $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Предложение III. 1.1. *Измеримые прямоугольники в произведении множеств Ω_1 и Ω_2 с σ-алгебрами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ соответственно образуют булеву полуалгебру в $\Omega_1 \times \Omega_2$.*

Доказательство. Очевидно, что как пустое множество, так и само произведение $\Omega_1 \times \Omega_2$ — измеримые прямоугольники. Пересечение двух измеримых прямоугольников тоже представляет собой измеримый прямоугольник, поскольку

$$(A_1 \times A_2) \cap (A_1' \times A_2') = (A_1 \cap A_1') \cap (A_2 \cap A_2').$$

Наконец, выполнение третьей аксиомы булевых полуалгебр вытекает из равенства

$$(A_1 \times A_2)^c = A_1^c \times A_2 + \Omega_1 \times A_2^c. \ \blacksquare$$

Из предложений III. 1.1 и II. 6.1 следует, что булева алгебра, порожденная измеримыми прямоугольниками, состоит из всевозможных конечных сумм непересекающихся измеримых прямоугольников. Порожденная этой алгеброй (или полуалгеброй измеримых прямоугольников) σ-алгебра обозначается $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ и называется *произведением σ-алгебр* $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, а измеримое пространство

$$(\Omega_1 \times \Omega_2,\ \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

называют *произведением измеримых пространств* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

Предложение III. 1.2. *Для любого фиксированного ω_1 сечение A_{ω_1} в ω_1 произвольного измеримого множества из $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ является измеримым* *множеством в* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$. *Более того, сечение* X_{ω_1} *любой д. с. в.* X *на*

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

есть д. с. в. на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}_{\omega_1}$ — класс подмножеств A произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, для которых $A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. Легко видеть, что все измеримые прямоугольники принадлежат $\mathcal{C}_{\omega_1}$ и что $\mathcal{C}_{\omega_1}$ замкнут относительно операций образования, дополнения и счетного пересечения. Следовательно, $\mathcal{C}_{\omega_1} \supset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ и первая часть предложения доказана. Вторая часть предложения вытекает теперь из соотношения $(X_{\omega_1})^{-1}(B) = [X^{-1}(B)]_{\omega_1}$. ∎

Следствие 1. *Для того чтобы непустой прямоугольник* $B_1 \times B_2$ *в* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *принадлежал* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, *необходимо и достаточно, чтобы* $B_1 \in \mathcal{A}_1$ *и* $B_2 \in \mathcal{A}_2$. *Для того чтобы действительная не равная тождественно нулю функция* $X_1(\omega_1) X_2(\omega_2)$ *на* $\Omega_1 \times \Omega_2$ *была* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-*измерима, необходимо и достаточно, чтобы функции* X_1 *и* X_2 *были* $\mathcal{A}_1$- *и* $\mathcal{A}_2$-*измеримы соответственно.* (Это следствие оправдывает введенный выше термин „измеримый прямоугольник".)

Доказательство. Если прямоугольник $B_1 \times B_2$ непуст, то множество B_1 тоже непусто. Следовательно, существует $\omega_1 \in B_1$ и согласно предыдущему предложению множество $B_2 = (B_1 \times B_2)_{\omega_1}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{A}_2$. Тем же способом показывается, что $B_1 \in \mathcal{A}_1$. В случае функций применимо аналогичное доказательство. ∎

Семейство подмножеств произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$ вида $\Omega_1 \times A_2$, где $A_2 \in \mathcal{A}_2$, образует σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, изоморфную σ-алгебре $\mathcal{A}_2$ измеримых множеств в Ω_2. Эту σ-подалгебру мы тоже будем обозначать символом $\mathcal{A}_2$. Предложение III.1.2 позволяет охарактеризовать эту σ-алгебру иначе.

Следствие 2. *σ-подалгебра* $\mathcal{A}_2$ *σ-алгебры* $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ *совпадает с σ-алгеброй тех измеримых множеств в* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, *которые не зависят от координаты* ω_1 *(т. е. тех* B, *для которых сечения* B_{ω_1} *не зависят от* ω_1).

Доказательство. Отметим сначала, что сечения B_{ω_1} подмножества B множества $\Omega_1 \times \Omega_2$ не зависят от ω_1 тогда и только тогда, когда B имеет вид $\Omega_1 \times C$, причем сечение $B_1 = \Omega \times C$ в ω_1 равно, конечно, C. Согласно следствию 1 для измеримости множества $\Omega_1 \times C$ в $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ необходимо и достаточно, чтобы $C \in \mathcal{A}_2$. ∎

Заметим в заключение, что $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая σ-алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ подмножеств $\Omega_1 \times \Omega_2$. Иными словами, $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ есть наименьшая σ-алгебра подмножеств $\Omega_1 \times \Omega_2$, относительно которой измеримы координатные отображения.

Дополнения и упражнения

III. 1.1. Пусть Ω — несчетное бесконечное множество и $\mathcal{A}$ — наименьшая σ-алгебра подмножеств Ω, содержащая все одноточечные множества. Диагональ $\Delta = \{(\omega, \omega): \omega \in \Omega\}$ множества $\Omega \times \Omega$ не принадлежит $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, хотя все ее сечения принадлежат $\mathcal{A}$. Утверждение, обратное предложению III. 1.2, следовательно, неверно.

*III. 1.2. Пусть Ω и Ω' — непустые множества. Отображение класса $\mathcal{P}(\Omega \times \Omega')$ на класс $\mathcal{P}(\Omega)$, определяемое формулой

$$\mathrm{proj}_\Omega (E) = \{\omega \in \Omega: \ E_\omega \neq \varnothing\},$$

называется *проекцией* на Ω. Понятие проекции есть обобщение понятия координатного отображения. Показать, что для любого семейства $\{E_i, i \in I\}$ множеств из $\mathcal{P}(\Omega \times \Omega')$

$$\mathrm{proj}_\Omega \bigcup_I E_i = \bigcup_I \mathrm{proj}_\Omega (E_i),$$

$$\mathrm{proj}_\Omega \bigcap_I E_i \subset \bigcap_I \mathrm{proj}_\Omega (E_i)$$

и что во втором соотношении включение, вообще говоря, строгое даже для убывающих последовательностей множеств. [Тем не менее, это включение является равенством, если множества E_i $(i \in I)$ суть прямоугольники в $\Omega \times \Omega'$ и если $\bigcap_I E_i \neq \varnothing$.]

Пусть $\mathcal{A}$ — подкласс класса $\mathcal{P}(\Omega)$, содержащий $\varnothing$, $\mathcal{F}$ — некоторый подкласс класса $\mathcal{P}(\Omega')$. Показать, что (в обозначениях упражнения I. 2.1) $\mathrm{proj}_\Omega ((\mathcal{A} \times \mathcal{F})_\rho) \subset \mathcal{A}_\rho$ для всех операций $\rho = s, d, \sigma, \delta$, $sd = ds$, δs и $d\sigma$, а также для операций $s\delta$, $\sigma\delta$ и суслинской операции в том случае, когда класс $\mathcal{F}$ компактен. [Например, в случае суслинской операции показать, что если множество $B \in (\mathcal{A} \times \mathcal{F})_S$ представлено в виде

$$B = \bigcup_{\nu} \bigcap_{p} (A_{\nu_1 \ldots \nu_p} \times F_{\nu_1 \ldots \nu_p}),$$

то

$$\mathrm{proj}_{\Omega}(B) = \bigcup_{\nu} \bigcap_{p} A'_{\nu_1 \ldots \nu_p},$$

где $A'_{\nu_1 \ldots \nu_p} = A_{\nu_1 \ldots \nu_p}$, когда $F_{\nu_1 \ldots \nu_p} \neq \varnothing$, и $A'_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \varnothing$, когда $E_{\nu_1 \ldots \nu_p} = \varnothing$.]

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — полное вероятностное пространство. Пусть, далее, $\mathcal{A}'$ есть σ-алгебра, порожденная компактным классом $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω'. Предположим, кроме того, что для любого $F \in \mathcal{F}$ существует последовательность $\{F_n\}$ множеств из $\mathcal{F}$, для которой $F^c = \bigcup_n F_n$. Показать, что при этих условиях

$$\mathrm{proj}_{\Omega}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}') \subset \mathcal{A}.$$

(Использовать упражнение I. 5.4.)

III. 2. Переходные вероятности и произведения вероятностей

Определение III. 2.1. *Пусть* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ — *измеримые пространства. Переходной вероятностью для этих пространств называется отображение* P_2^1 *произведения* $\Omega_1 \times \mathcal{A}_2$ *в* $[0, 1]$, *удовлетворяющее следующим условиям*:

(а) *для любого* $\omega_1 \in \Omega_1$ *функция* $P_2^1(\omega_1, \cdot)$ *является вероятностью на* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$;

(б) *для любого* $A_2 \in \mathcal{A}_2$ *функция* $P_2^1(\cdot, A_2)$ *измерима на* $(\Omega_1, \mathcal{A})$.

Отметим сразу же два частных случая:

(1) переходная вероятность, не зависящая от ω_1, сводится к вероятности на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$;

(2) если для каждого $\omega_1 \in \Omega_1$ вероятность $P_2^1(\omega_1, \cdot)$ сосредоточена в одной точке, скажем $p(\omega_1)$, пространства Ω_2, то P_2^1 является переходной вероятностью тогда и только тогда, когда p есть измеримое отображение $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ в $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$.

Отметим также, что в случае, когда условие (а) выполнено, для выполнения условия (б) при всех $A_2 \in \mathcal{A}_2$ достаточно, чтобы оно выполнялось для каждого множества из какой-либо полуалгебры, порождающей $\mathcal{A}_2$.

Предложение III.2.1. *Пусть $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ — измеримые пространства, P_1 — вероятность на $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ и P_2^1 — переходная вероятность на $\Omega_1 \times \mathcal{A}_2$. Существует единственная вероятность P на*

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2),$$

такая, что

$$P(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} P_1(d\omega_1) P_2^1(\omega_1, A_2) \qquad (A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2).$$

Для любой положительной (квазиинтегрируемой) д. с. в. X на

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$$

функция

$$Y(\omega_1) = \int_{\Omega_2} P_2^1(\omega_1, d\omega_2) X_{\omega_1}(\omega_2)$$

всюду (P_1-п. в.) определена, $\mathcal{A}_1$-измерима и положительна (квазиинтегрируема по P_1). Более того,

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X\, dP = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} P_2^1(\omega_1, d\omega_2) X_{\omega_1}(\omega_2).$$

Доказательство. В силу предложения I.6.1 и теоремы о продолжении из п. I.5 для доказательства существования и единственности P на произведении пространств $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ достаточно показать, что P является σ-аддитивной на булевой полуалгебре измеримых прямоугольников в $\Omega_1 \times \Omega_2$. Во-первых, очевидно, что $P(A_1 \times A_2) \in [0, 1]$. Далее, если

$$A_1 \times A_2 = \sum_I A_1^i \times A_2^i \quad (I \text{ счетно})$$

в $\Omega_1 \times \Omega_2$, или, что то же,

$$1_{A_1}(\omega_1) 1_{A_2}(\omega_2) = \sum_I 1_{A_1^i}(\omega_1) 1_{A_2^i}(\omega_2)$$

на $\Omega_1 \times \Omega_2$, то, интегрируя по Ω_2 относительно $P_2^1(\omega_1, \cdot)$ и меняя порядок интегрирования и суммирования, находим

$$1_{A_1}(\omega_1) P_2^1(\omega_1, A_2) = \sum_i 1_{A_1^i}(\omega_1) P_2^1(\omega_1, A_2^i).$$

Интегрируя теперь по Ω_1 относительно P_1, получаем

$$P(A_1 \times A_2) = \sum_i P(A_1^i \times A_2^i).$$

Тем самым σ-аддитивность P доказана.

Для любой положительной д. с. в. X на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ и любого $\omega_1 \in \Omega_1$ сечение X_{ω_1} является положительной д. с. в. на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ (предложение III. 1.2). Следовательно, функция Y определена на Ω_1. Более того, соответствие $X \to Y$ линейно, монотонно и непрерывно в том смысле, что

$$X_n \uparrow X \Rightarrow Y_n \uparrow Y \quad (n \uparrow \infty).$$

Отсюда вытекает, что для доказательства $\mathcal{A}_1$-измеримости Y для любой д. с. в. $X \geqslant 0$ достаточно показать, что Y является $\mathcal{A}_1$-измеримой, когда X есть индикатор, скажем, 1_A, где $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Но класс подмножеств A произведения $\Omega_1 \times \Omega_2$, для которых функция $P_2^1(\omega_1, A_{\omega_1})$ является $\mathcal{A}_1$-измеримой, с одной стороны, содержит все измеримые прямоугольники и, следовательно, порожденную ими булеву алгебру, а с другой стороны — замкнут относительно монотонных пределов. Отсюда вытекает (предложение I. 4.2), что этот класс содержит $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

Выражение $\int P_1(d\omega_1) \int P_2^1(\omega_1, d\omega_2) X_{\omega_1}(\omega_2)$, таким образом, имеет смысл для любой положительной д. с. в. на $\Omega_1 \times \Omega_2$ и определяет линейный функционал, монотонный и непрерывный относительно монотонно возрастающей сходимости. С другой стороны, это выражение совпадает с $\int X\,dP$ для д. с. в. вида $1_{A_1 \times A_2}$ $(A_1 \in \mathcal{A}_2$, $A_2 \in \mathcal{A}_2)$. Отсюда с помощью рассуждения, аналогичного проведенному выше, получаем, что рассматриваемое выражение равно $\int X\,dP$ для любой д. с. в. $X \geqslant 0$. Заметим теперь, что если д. с. в. $X \geqslant 0$ интегрируема по P, то д. с. в. $Y \geqslant 0$ интегрируема по P_1 и поэтому п. н. конечна на Ω_1. Следовательно, сечение X_{ω_1} является $P_2^1(\omega_1, \cdot)$-интегрируемым при почти всех ω_1.

В случае когда д. с. в. X незнакопостоянна, но квазиинтегрируема (для определенности, скажем, $EX^+ < \infty$), из сказанного выше следует, что величина $(X^+)_{\omega_1} = (X_{\omega_1})^+$ является $P_2^1(\omega_1, \cdot)$-интегрируемой при почти всех ω_1, и поэтому X_{ω_1} интегрируема при почти всех ω_1. Таким образом, функция Y определена п. н. Более того, Y^+ является P_1-интегрируемой, так что Y квазиинтегрируема по P_1. Последняя утверждаемая в предложении формула имеет смысл и справедлива, поскольку она имеет смысл и справедлива для X^+ и X^- в отдельности. ∎

В ходе этого доказательства мы получили также следующие результаты:

Следствие 1. *При выполнении условий предыдущего предложения для любой д. с. в. $X \geqslant 0$ справедливы следующие соотношения*

$$\int X\,dP = 0 \Leftrightarrow \int X_{\omega_1}\,dP_2^1(\omega_1, \cdot) = 0 \text{ п. н. на } (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1),$$

$$\int X\,dP < \infty \Rightarrow \int X_{\omega_1}\,dP_2^1(\omega_1, \cdot) < \infty \text{ п. н. на } (\Omega_1, \mathcal{A}_1, P).$$

Следствие 2. *При выполнении условий предложения* III.2.1 *существует единственная вероятность P_2 на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, такая, что*

$$P_2(A_2) = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1)\, P_2^1(\omega_1, A_2) \qquad (A_2 \in \mathcal{A}_2).$$

Для любой положительной (квазиинтегрируемой) д. с. в. Z на $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ функция $Y(\omega_1) = \int P_2^1(\omega_1, d\omega_2)\, Z(\omega_2)$ определена п. н., $\mathcal{A}_1$-измерима на Ω_1 и положительна (квазиинтегрируема по P_1). Более того,

$$\int Z\,dP_2 = \int P_1(d\omega_1)\, Y(\omega_1).$$

Частный случай предыдущего предложения, соответствующий не зависящей от ω_1 переходной функции, носит название *теоремы Фубини*.

Предложение III.2.2. *Пусть* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ — *два вероятностных пространства. Существует единственная вероятность* P *на* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ *(обозначаемая также* $P_1 \times P_2$*), такая, что*

$$P(A_1 \times A_2) = P(A_1) P(A_2) \qquad (A_1 \in \mathcal{A}_1,\ A_2 \in \mathcal{A}_2).$$

Для любой положительной или квазиинтегрируемой д. с. в. X*, определенной на* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$*, следующая формула имеет смысл и справедлива:*

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} X\,dP = \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) \int_{\Omega_2} P_2(d\omega_2) X_{\omega_1}(\omega_2) =$$
$$= \int_{\Omega_2} P_2(d\omega_2) \int_{\Omega_1} P_1(d\omega_1) X_{\omega_2}(\omega_1).$$

Вероятностное пространство $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2$ *называется произведением пространств* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ *и* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$*; его обозначают также*

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1) \times (\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2).$$

Доказательство. Достаточно применить предложение III.2.1 как к вероятности P_1 и переходной вероятности $\{P_2'(\omega_1, A_2) = P_2(A_2)\}$, так и к вероятности P_2 и переходной вероятности

$$\{P_1^2(\omega_2, A_1) = P_1(A_1)\},$$

и заметить, что определяемые при этом вероятности P на $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ совпадают. ∎

Следствие 1. *Д. с. в.* X *на* $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, P_1 \times P_2)$ *п. н. равна нулю тогда и только тогда, когда почти все ее сечения* X_{ω_1} *п. н. равны нулю на* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$*. Если определенная на произведении пространств д. с. в.* X *интегрируема, то почти все ее сечения* X_{ω_1} *интегрируемы.*

Следствие 2. *Пусть X — д. с. в. на $(\Omega_1 \times \Omega_2)$, измеримая относительно σ-алгебры $\overline{\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2}$ — пополнения $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ относительно $P_1 \times P_2$. Тогда почти все сечения X_{ω_1} измеримы относительно пополнения $\overline{\mathcal{A}}_2$ σ-алгебры $\mathcal{A}_2$ по P_2. Более того, если X квазиинтегрируема (в частности, положительна), то формула предложения* III.2.2 *по-прежнему справедлива.*

Доказательство. Пусть X' — д. с. в. на $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, такая, что множество $\{X' \neq X\}$ является нулевым. Тогда сечения X'_{ω_1} являются $\mathcal{A}_2$-измеримыми при всех ω_1 и множества $\{X'_{\omega_1} \neq X_{\omega_1}\}$ являются нулевыми в $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ при почти всех ω_1. Утверждение следствия непосредственно вытекает из этого замечания. ∎

Дополнения и упражнения

III.2.1. Каждой д. с. в. X, определенной на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и принимающей значения из $[0, 1]$, сопоставим подмножество

$$G_X = \{(\omega, x) \colon 0 \leqslant x \leqslant X(\omega)\}$$

произведения пространств $\Omega \times [0, 1]$. Показать, что все множества G_X измеримы. [Рассмотреть для этого свойства соответствия $X \to G_X$.] Показать, далее, что если λ — мера Лебега на $[0, 1]$, то $\int X\,dP = [P \times \lambda](G_X)$.

III.2.2. Последняя формула предложения III.2.2, вообще говоря, неверна, если вместо существования $\int X\,dP$ предполагать существование

$$\int dP_1 \int dP_2 X.$$

Чтобы в этом убедиться, возьмем, например, положительную неинтегрируемую д. с. в. Z на пространстве $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ и на произведении этого пространства с дискретным пространством $\{0, 1\}$, обе точки которого равновероятны, определим величину X формулами

$$X(\omega, 0) = Z(\omega), \quad X(\omega, 1) = -Z(\omega).$$

III.2.3. ***Формализм теории статистических решений.*** Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Theta, \mathcal{T})$ и $(\Delta, \mathcal{D})$ — три измеримых пространства, представляющих соответственно пространство наблюдений, пространство параметров и пространство решений. Пусть $P = \{P(\theta, A)\}$ — переходная вероятность относительно $(\Theta, \mathcal{T})$ и $(\Omega, \mathcal{A})$. Вероятность $P(\theta, \cdot)$

управляет наблюдением ω в Ω, когда θ является значением параметра (неизвестным наблюдателю). Пусть $W = \{W(\theta, \delta)\}$ — определенная на $(\Theta, \mathcal{T}) \times (\Delta, \mathcal{D})$ действительная измеримая функция, которая представляет собой *потерю*, или *убыток*, вызванный принятием решения δ, в случае когда параметр имеет значение θ.

Стратегией (или правилом принятия решения) называется измеримое отображение s пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ в пространство $(\Delta, \mathcal{D})$. Стратегия состоит в принятии решения $\delta(\omega)$ по наблюдению ω. *Случайной стратегией* (с. с.) называют переходную вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$ и $(\Delta, \mathcal{D})$, скажем, $S = \{S(\omega, D)\}$. С. с. состоит в принятии решения из пространства решений Δ с вероятностью $S(\omega, \cdot)$ по наблюдению ω [стратегия есть частный случай случайной стратегии с вероятностью $S(\omega, \cdot)$, сосредоточенной в $s(\omega)$]. Случайной стратегии S соответствуют *средняя потеря* $\int\limits_{\Delta} W(\theta, \delta)\, S(\omega, d\delta)$, являющаяся измеримой функцией от (θ, ω), и *риск*

$$R_S(\theta) = \int\limits_{\Omega} P(\theta, d\omega) \int\limits_{\Delta} W(\theta, \delta)\, S(W, d\delta).$$

представляющий собой измеримую функцию от θ.

На множестве с. с. вводится *частичное упорядочение*, называемое *предпочтением* (μ-*предпочтением*); именно, пишут $S \subset S'$ и говорят, что S *предпочтительнее* (μ-*предпочтительнее*), чем S', если $R_S(\cdot) \leqslant R_{S'}(\cdot)$ [$R_S(\cdot) \leqslant R_{S'}(\cdot)$ почти всюду относительно вероятности μ, определенной на $(\Theta(\mathcal{T})$]. С. с. S называется *допустимой* (μ-*допустимой*), если никакая другая с. с. не строго предпочтительнее (строго μ-предпочтительнее), чем S (т. е., если из $S' \subset S$ следует, что $S \subset S'$), или, иными словами, если не существует с. с. S', такой, что $R_{S'} \leqslant R_S$ на Θ и $R_{S'} \neq R_S$ [такой, что μ-почти всюду $R_{S'} \leqslant R_S$ и $\mu\{R_{S'} \neq R_S\} \neq 0$]. С. с. S называется *байесовской* (относительно вероятности μ), если на ней достигается минимум интеграла $\int \mu(d\theta) R_S(\theta)$ по всем с. с. Показать, что всякая байесовская стратегия μ-допустима. Класс $\mathcal{S}$ случайных стратегий называется (μ-)*полным*, если для любой стратегии $S \notin \mathcal{S}$ существует стратегия $S' \in \mathcal{S}$, которая (μ-)предпочтительнее, чем S. Если введенное отношение порядка индуктивно, то из леммы Цорна следует, что класс допустимых с. с. полон. [Показать, что это так, если (а) для любой последовательности $\ldots S_{n+1} \subset S_n \subset \ldots S_1$ случайных стратегий существует с. с. S, которая предпочтительнее всех S_n, (б) существует счетное подмножество Θ_0 множества Θ, такое, что $R_S(\Theta) \subset \overline{R(\Theta_0)}$ при всех S.] Можно показать, что при выполнении некоторых условий класс байесовских стратегий полон.

Частные случаи. I. Пусть нас интересует *проверка гипотезы* $\theta \in T$ при альтернативе $\theta \notin T$ (T — заданное подмножество из $\mathcal{T}$). Пространство решений сводится здесь к двум решениям δ_a и δ_r — принять или отвергнуть гипотезу $\theta \in T$, — а функция потерь W равна нулю, если решение правильно, и положительна в противном случае. Выбор стратегии s (с. с. S) в рассматриваемом случае равносилен указанию *критической области* $\{s = \delta_r\}$ в Ω [*критической функции* q, являющейся измеримым отображением $(\Omega, \mathcal{A})$ в $[0, 1]$, таким, что $S(\cdot, \delta_r) = q(\cdot)$].

II. Пусть нас интересует *оценка* значения $f(\theta)$ действительной измеримой функции f от нашего параметра. Пространством решений Δ здесь является действительная прямая R [или борелевское множество, содержащее $f(\Theta)$]. В качестве функции потерь нередко берется функция

$$W(\theta, \delta) = w(\theta)[f(\theta) - \delta]^2.$$

Стратегия s, т. е. д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$, называется в рассматриваемом случае *оценкой* [она состоит в оценке $f(\theta)$ по $s(\omega)$]. Показать, что для указанной выше функции потерь (и вообще для всякой выпуклой по δ функции потерь) класс неслучайных стратегий полон $\left[\text{стратегия } s(\omega) = \int \delta S(\omega, d\delta) \text{ предпочтительнее стратегии } S\right]$.

III.3. Бесконечные произведения измеримых пространств и канонические вероятностные пространства, связанные со случайными функциями

Произведением произвольного семейства $\{\Omega_t, t \in T\}$ непустых множеств называют совокупность всех семейств вида

$$\omega = \{\omega_t, t \in T\},$$

где $\omega_t \in \Omega_t$ при каждом $t \in T$. Это произведение обозначают $\prod_T \Omega_t$. В частном случае, когда множества Ω_t совпадают, скажем, $\Omega_t = \Omega$ при каждом t, произведение $\prod_T \Omega_t$ обозначается также Ω^T и может быть идентифицировано с пространством всех отображений T в Ω. Произведение пространств играет важную роль при изучении случайных функций: если „функция" в каждый момент t $(t \in T)$ представляется точкой (или состоянием) ω_t в пространстве Ω_t, то пространство $\prod_T \Omega_t$ идентифицируется с пространством всех возможных траекторий за время T. Подчеркнем, что в настоящем пункте мы не делаем никаких специальных предположений относительно множества T (такие предположения приходится делать лишь при изучении „регулярности" случайной функции). Несмотря на это, удобно интерпретировать T как время, поскольку именно этот случай встречается в большинстве приложений (но не во всех!). Аналогично, пространство Ω_t как правило идентифицируется в приложениях с дискретным или евклидовым пространством и нередко не зависит от t; тем не менее, и в этом последнем случае обычно предпочтительно не отбрасывать индекс t в Ω_t, тем самым подчеркивая, что рассматривается момент t.

Отображение $\omega \to \omega_s$ произведения $\prod_T \Omega_t$ в Ω_s называется s-й координатой. Его часто обозначают X_s, так что $\omega_s = X_s(\omega)$. Значение $X_s(\omega)$ есть состояние траектории ω в момент s. Для любого подмножества S множества T *сечение* в $\omega_S = \{\omega_s,\ s \in S\}$ подмножества A произведения $\prod_T \Omega_t$ (соответственно функции Z, определенной на $\prod_T \Omega_t$) определяется как подмножество $A_{\omega_S} = \{\{\omega_u,\ u \in S^c\} : \{\omega_t,\ t \in T\} \in A\}$ произведения $\prod_{S^c} \Omega_u$ (соответственно как функция Z_{ω_S}, определенная на $\prod_{S^c} \Omega_u$ равенством $Z_{\omega_S}[\omega_{S^c}] = Z[\omega_S, \omega_{S^c}]$). Подмножество $A = B \times \prod_{S^c} \Omega_u$ произведения $\prod_T \Omega_t$, где $B \subset \prod_S \Omega_s$, называется *цилиндром с основанием* B. Для того чтобы множество A было цилиндром с основанием в $\prod_S \Omega_s$, необходимо и достаточно, чтобы все его сечения $A_{\omega_{S^c}}$ не зависели от ω_{S^c}; при этом $B = A_{\omega_{S^c}}$. *Прямоугольником* в $\prod_T \Omega_t$ называется подмножество вида

$$\prod_T A_t = \{\omega:\ \omega_t \in A_t\,(t \in T)\},$$

причем предполагается, что подмножества A_t множеств Ω_t отличаются от Ω_t лишь для *конечного* *множества* значений $t \in T$. Всякое сечение прямоугольника тоже является прямоугольником.

Предложение III.3.1. *Пусть* $\{(\Omega_t, \mathcal{A}_t);\ t \in T\}$ — *произвольное семейство измеримых пространств. Семейство измеримых прямоугольников* $\prod\limits_T A_t$ $(A_t \in \mathcal{A}_t,$ $A_t = \Omega_t$, *за исключением самое большее конечного числа значений* $t)$ *образует булеву полуалгебру.*

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения III.1.1, обобщением которого оно является; отметим, что ограничение „$A_t = \Omega_t$, за исключением самое большее конечного числа значений t“ в определении измеримого прямоугольника существенно используется в доказательстве. Согласно предложению I.6.1 конечные суммы непересекающихся измеримых прямоугольников образуют булеву алгебру. Порожденная этой булевой алгеброй σ-алгебра обозначается $\otimes_T \mathcal{A}_t$ и называется произведением σ-алгебр $\mathcal{A}_t (t \in T)$. Она является также наименьшей σ-алгеброй подмножеств $\prod\limits_T \Omega_t$, по отношению к которой измеримы все координатные отображения. Наконец, измеримое пространство $\left(\prod\limits_T \Omega_t,\ \otimes_T \mathcal{A}_t\right)$ называется произведением измеримых пространств $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$. Легко видеть, что если $\{S_i,\ i \in I\}$ есть разбиение множества $S \subset T$, то произведение измеримых пространств $\left(\prod\limits_{S_i} \Omega_s,\ \otimes_{S_i} \mathcal{A}_s\right)$ может быть отождествлено с пространством $\left(\prod\limits_S \Omega_s, \otimes_S \mathcal{A}_s\right)$.

Применение предложения III.1.2 к измеримым пространствам $\left(\prod\limits_S \Omega_s,\ \otimes_S \mathcal{A}_s\right)$ и $\left(\prod\limits_{S^c} \Omega_u,\ \otimes_{S^c} \mathcal{A}_u\right)$, произведение которых есть $\left(\prod\limits_T \Omega_t,\ \otimes_T \mathcal{A}_t\right)$, позволяет утверждать, что всякое сечение A_{ω_S} множества A из $\otimes_T \mathcal{A}_t$ $\left(\text{или всякое сечение } Z_{\omega_S} \text{ д. с. в. } Z \text{ на } \prod\limits_T \Omega_t\right)$ измеримо в $\left(\prod\limits_{S^c} \Omega_u,\ \otimes_{S^c} \mathcal{A}_u\right)$. В частности, если A — цилиндр в $\prod\limits_T \Omega_t$ с основанием B в $\prod\limits_S \Omega_s$, то A тогда и только тогда измерим, т. е. принадлежит $\otimes_T \mathcal{A}_t$, когда его основание B измеримо, т. е. принадлежит $\otimes_S \mathcal{A}_s$. Отождествляя цилиндры с основаниями в $\otimes_S \mathcal{A}_s$ с самими этими основаниями, мы будем, допуская вольность, обозначать через $\otimes_S \mathcal{A}_s$ σ-подалгебру σ-алгебры $\otimes_T \mathcal{A}_t$, состоящую из измеримых цилиндров с основаниями в $\prod\limits_S \Omega_s$, т. е. измеримых подмножеств произведения $\prod\limits_T \Omega_t$, не зависящих от координат $\omega_u (u \in S^c)$.

Предложение III.3.2. *Пусть $\{(\Omega_t, \mathcal{A}_t); t \in T\}$ — произвольное семейство измеримых пространств. Объединение $\mathcal{B}$ σ-алгебр $\otimes_S \mathcal{A}_s$, где S пробегает всевозможные конечные подмножества T, есть булева алгебра, порождающая $\otimes_T \mathcal{A}_t$. Объединение σ-алгебр $\otimes_S \mathcal{A}_s$, где S пробегает всевозможные счетные подмножества T, совпадает с $\otimes_T \mathcal{A}_t$. Оба эти утверждения останутся справедливыми, если в них фразу „всевозможные конечные (счетные) подмножества T" заменить на „семейство $\mathcal{F}$ конечных (счетных) подмножеств T, такое, что всякое конечное (счетное) подмножество T содержится в одном из множеств из $\mathcal{F}$".*

Доказательство. Класс $\mathcal{B}$ замкнут относительно образования дополнений, поскольку таковой является каждая из σ-алгебр $\otimes_S \mathcal{A}_s$. Он замкнут также относительно пересечений, так как если $A_i \in \otimes_{S_i} \mathcal{A}_s$ при $i \in I$, где I — конечное множество, то $A_i \in \otimes_S \mathcal{A}_s$, где $S = \bigcup\limits_i S_i$ — тоже конечное множество, и $\bigcap\limits_I A_i \in \otimes_S \mathcal{A}_s \subset \mathcal{B}$. Следовательно, $\mathcal{B}$ — булева алгебра. Поскольку $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{B} \subset \otimes_T \mathcal{A}_t$ для любого $s \in T$, то $\mathcal{B}$ порождает $\otimes_T \mathcal{A}_t$. Вторая часть предложения доказывается аналогично и использует тот факт, что счетное объединение счетных множеств счетно. ∎

Следствие. *Любая σ-подалгебра $\mathcal{B}$ счетного типа σ-алгебры $\otimes_T \mathcal{A}_t$ содержится в некоторой σ-алгебре*

$\otimes_S \mathcal{A}_s$, где множество $S \subset T$ счетно. В частности, любое измеримое подмножество $\prod_T \Omega_t$ и любая д. с. в. на $\left(\prod_T \Omega_t, \otimes_T \mathcal{A}_t\right)$ зависят лишь от счетного множества координат.

Чтобы сделать „функцию", определенную на семействе $\{(\Omega_t, \mathcal{A}_t);\ t \in T\}$ измеримых пространств состояний, случайной функцией, чаще всего используют следующий метод. Каждому набору $(t_1, \ldots, t_n)$ моментов времени сопоставляется некоторый вероятностный закон, скажем

$$\left(\omega_{t_1}, \ldots, \omega_{t_n}\right) = \left(X_{t_1}(\omega), \ldots, X_{t_n}(\omega)\right)$$

считается распределенным по закону $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$. Затем стараются определить такую вероятность P на измеримом пространстве $\left(\prod_T \Omega_t, \otimes_T \mathcal{A}_t\right)$ траекторией, ограничения которой на σ-алгебры $\otimes_1^n \mathcal{A}_{t_i}$ событий, зависящих лишь от координат $t_1, \ldots, t_n$, совпадали бы с заданными вероятностями $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$. Очевидна важность определения такого продолжения P вероятностей $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$ для задач, связанных со свойствами процесса, зависящими от бесконечного множества моментов времени, например предельными его свойствами или свойствами непрерывности.

Чтобы математически строго сформулировать задачу, приведем следующий предварительный результат, проверка которого предоставляется читателю.

Предложение III.3.3. *Пусть задано семейство вероятностей $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$, определенных на конечных произведениях $\left(\prod_1^n \Omega_{t_i}, \otimes_1^n \mathcal{A}_{t_i}\right)$ измеримых пространств из семейства $\{\Omega_t, \mathcal{A}_t\}$, $t \in T\}$. Для существования функции множеств P на $(\Omega, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B} = \bigcup \left[\otimes_1^n \mathcal{A}_{t_i}\right]$, ограничения которой на σ-алгебры $\otimes_1^n \mathcal{A}_{t_i}$ совпадают с вероятностями $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие согласованности.*

Для всяких двух конечных подмножеств $T_1 \subset T_2$ множества T ограничение P_{T_2} на $\otimes_{T_1}\mathcal{A}_t$ совпадает с P_{T_1}.

(Замечание. Иногда к условию предыдущего предложения добавляют еще следующее условие: если $(t'_1, \ldots, t'_n)$ — некоторая перестановка множества $(t_1, \ldots, t_n)$, то $P_{(t'_1, \ldots, t'_n)}$ получается из $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$ той же самой перестановкой координат. Это условие появляется лишь тогда, когда вероятности $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$ задаются для упорядоченных наборов n моментов времени, мы же их определили для произвольных конечных подмножеств $\{t_1, \ldots, t_n\}$ множества T.)

Важно отдавать себе отчет в том, что указанное выше условие согласованности не обеспечивает, вообще говоря, σ-аддитивности P на $\mathcal{R}$ (см. упражнение III. 3.1), оно гарантирует лишь аддитивность P. Чтобы функция множеств P была σ-аддитивной на $\mathcal{R}$, требуется выполнение дополнительных условий. Если P является σ-аддитивной на $\mathcal{R}$, то по теореме о продолжении из п. 1.6 ее можно единственным образом продолжить до вероятности на $(\Omega, \mathcal{A})$.

Теорема. *Пусть $\{P_{(t_1, \ldots, t_n)}\}$ — семейство вероятностей, определенных на конечных произведениях измеримых пространств из семейства $\{\Omega_t, \mathcal{A}_t); t \in T\}$ и удовлетворяющих условию согласованности из предложения* III.3.3. *Если для каждого $t \in T$ существует компактный подкласс $\mathcal{C}_t$ σ-алгебры $\mathcal{A}_t$, такой, что $P_{(t)}(A) = \sup\{P_{(t)}(C): C \in \mathcal{C}_t, C \subset A\}$ для любого $A \in \mathcal{A}_t$, то существует вероятность P на произведении пространств $\left(\prod_T \Omega_t, \otimes_T \mathcal{A}_t\right)$, продолжающая каждую из вероятностей $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$.*

Доказательство. Пусть P — аддитивная функция множеств, определяемая семейством $\{P_{(t_1, \ldots, t_n)}\}$ (см. предложение III.3.3). Согласно предложению I.6.2 для того, чтобы P была σ-аддитивной на полуалгебре $\mathcal{S}$ измеримых прямоугольников и, следовательно, была продолжимой до вероятности на σ-алгебре $\otimes_T\mathcal{A}_t$, достаточно, чтобы существовал компактный подкласс $\mathscr{C}$ полуалгебры $\mathscr{S}$, такой, что $P(A)=\sup\{P(C);\ C\subset A,\ C\in\mathscr{C}\}$ для любого $A\in\mathscr{S}$.

Но класс $\mathscr{D}$ измеримых прямоугольников вида $C\times\prod_{s\neq t}\Omega_s$, где $C\in\mathscr{C}_t$, $t\in T$, есть компактный класс. В самом деле, пересечение всякого счетного семейства $\left\{C_i\times\prod_{s\neq t_i}\Omega_s,\ i\in I\right\}$ таких множеств имеет вид $\prod_T B_t$, где $B_t=\bigcap_{\{i:\,t_i=t\}} C_i$. Если это пересечение пусто, то одно из множеств B_t, скажем B_u, пусто. Из компактности класса $\mathscr{C}_u$ теперь вытекает существование конечного подмножества J множества $\{i:t_i=u\}$, для которого $\bigcap_J C_i=\varnothing$ и, следовательно, $\bigcap_J\left[C_i\times\prod_{s\neq u}\Omega_s\right]=\varnothing$. Таким образом, класс $\mathscr{D}$ компактен, а вместе с ним компактен и класс $\mathscr{C}$ счетных пересечений множеств из $\mathscr{D}$.

Пусть, далее, $\varepsilon>0$ произвольно и A — измеримый прямоугольник с основанием $\prod_1^n A_{t_i}$ в $\prod_1^n\Omega_{t_i}$. Выберем множества $C_i\in\mathscr{C}_{t_i}$ так, чтобы

$$C_i\subset A_{t_i},\quad P_{(t_i)}(A_{t_i})\leqslant P_{(t_i)}(C_i)+\frac{\varepsilon}{n}.$$

Множество $C=\bigcap_i\left[C_i\times\prod_{t\neq t_i}\Omega_t\right]$ принадлежит $\mathscr{C}$ и содержится в A, а из полуаддитивности P и формулы

$$A-C\subset\bigcup_i\left\{(A_{t_i}-C_i)\times\prod_{s\neq t_i}\Omega_s\right\}$$

вытекает, что

$$P(A)-P(C)\leqslant\sum_i\left[P_{(t_i)}(A_{t_i})-P_{(t_i)}(C_i)\right]\leqslant\varepsilon.$$

Устремляя ε к нулю, получаем $P(A)=\sup\{P(C);\ C\in\mathscr{C},\ C\subset A\}$, что и завершает доказательство теоремы. ∎

Из предложения II.7.3 и только что доказанной теоремы вытекает следующий результат.

Следствие. *Пусть* $\{\Omega_t, \mathcal{A}_t\}$; $t \in T\}$ — *семейство польских пространств с σ-алгебрами борелевских множеств. Для всякого согласованного семейства вероятностей* $\{P_{(t_1, \ldots, t_n)}\}$, *определенных на конечных произведениях пространств* $\{(\Omega_t, \mathcal{A}_t);\ t \in T\}$, *существует единственная вероятность P на* $\left(\prod_T \Omega_t, \otimes_T \mathcal{A}_t\right)$, *продолжающая каждую из вероятностей* $P_{(t_1, \ldots, t_n)}$.

Этот результат применим, в частности, к случаю, когда пространства $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$ изоморфны расширенной числовой прямой $(\overline{R}, \overline{\mathcal{R}})$. В этом случае пространство $\left(\prod_T \Omega_t, \otimes_T \mathcal{A}_t, P\right)$ называется *каноническим вероятностным пространством* действительной случайной функции $X = \{X_t,\ t \in T\}$, „закон по времени" которой задается семейством $\{P_{(t_1, \ldots, t_n)}\}$.

Дополнения и упражнения

* III.3.1. Пусть $(\Omega_0, \mathcal{A}_0, P_0)$ — вероятностное пространство, в котором существует последовательность $\{\Omega_n,\ n \geqslant 1\}$ подмножеств Ω_0, такая, что $\Omega_n \downarrow \varnothing$, $P_0^*(\Omega_n) = 1$. Предположим, кроме того, что диагональ в $(\Omega_0)^n$ измерима в $(\Omega_0, \mathcal{A}_0)^n$. Обозначим через P_n след P_0 на $(\Omega_n, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_0 \cap \Omega_n)$ (упражнение I. 4.4); пусть

$$P_{(1, \ldots, n)} = P_n \circ \varphi_n^{-1}$$

— вероятность, индуцированная на $\left(\prod_1^n \Omega_m, \otimes_1^n \mathcal{A}_m\right)$ вероятностью P_n и отображением $\varphi_n(x) = (x, \ldots, x)$ множества Ω_n в произведение $\prod_1^n \Omega_m$. Показать, что семейство вероятностей

$$\{P_{(1, \ldots, n)},\ n \geqslant 1\}$$

является согласованным для последовательности измеримых пространств $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, и в то же время измеримые множества $\Delta_n = \{\omega\colon \omega_1 = \ldots = \omega_n\}$ в пространстве $\left(\prod_{m \geqslant 1} \Omega_m, \otimes_{m \geqslant 1} \mathcal{A}_m\right)$ имеют единичные вероятности и образуют последовательность, стремящуюся, убывая, к $\varnothing$. Таким образом, на произведении пространств $\left(\prod_{m \geqslant 1} \Omega_m, \otimes_{m \geqslant 1} \mathcal{A}_m\right)$ не может существовать вероятности, продолжающей согласованные вероятности $P_{(1,\ldots,n)}$. *Предположение о существовании аппроксимирующих компактных классов в теореме настоящего пункта является, следовательно, существенным для справедливости этой теоремы.*

III.3.2. ***Гауссовы семейства.*** (а) Пусть T — произвольное непустое множество и $\Gamma=\{\Gamma(s,t);\ s,t\in T\}$ — симметрическое неотрицательно определенное ядро на $T\times T$. (Определение: $\Gamma(s,t)=\Gamma(t,s)$ для всех $s,t\in T$; $\sum c_i c_j \Gamma(t_i,t_j)\geqslant 0$ при любых n, $t_1,\ldots,t_n$ из T и $c_1,\ldots,c_n$ из R.) Существует единственная вероятность P на $(\Omega,\mathcal{A})=(R,\mathcal{R})^T$, такая, что индуцированный ею вероятностный закон каждого вектора $\left(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\right)$ является центрированным гауссовым законом с ковариациями $\{\Gamma(t_i,t_j)\}$.

Обозначим через H линейное пространство функций на T, порожденное семейством функций $\Gamma(s,\cdot)$, $s\in T$. Показать, что определяемое формулой

$$\left\langle\sum_i c_i\Gamma(s_i,\cdot),\ \sum_j c_j'\Gamma(s_j',\cdot)\right\rangle=\sum_i\sum_j c_i c_j'\Gamma(s_i,s_j')$$

скалярное произведение наделяет H структурой отделимого предгильбертового пространства. Это скалярное произведение характеризуется самовоспроизводящим свойством

$$\langle\Gamma(s,\cdot),\ \Gamma(t,\cdot)\rangle=\Gamma(s,t).$$

Убедиться, что гильбертово пространство $\overline{H}$, полученное пополнением H, тоже является пространством функций на T; показать для этого, что $\langle\Gamma(s,\cdot),h\rangle=h(s)$ при всех $h\in\overline{H}$ и всех $s\in T$. Показать, далее, что соответствие

$$\Gamma(s,\cdot)\longleftrightarrow X_s$$

(однозначно) продолжается до изометрии $\overline{H}$ в пространство $L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ и что образ $X(h)$ элемента $h\in\overline{H}$ тоже является центрированной гауссовой д. с. в.; таким образом, $E[X(h)X(h')]=\langle h,h'\rangle$.

(б) *. Если T — компактный интервал на прямой R с лебеговой мерой, обозначаемой в дальнейшем dt, и если ядро Γ непрерывно на $T\times T$, то существует (по крайней мере одна) полная ортонормированная последовательность $\{f_n,\ n\geqslant 1\}$, состоящая из собственных функций интегрального оператора Γ в пространстве $L_2(T,dt)$ $\left(\text{так что } \int\limits_T \Gamma(s,t)f_n(t)\,dt=\lambda_n f_n(s),\ \text{где } \lambda_n\geqslant 0\right)$; более того, функции f_n непрерывны на T (при $\lambda_n\neq 0$) и ряд $\sum\limits_n \lambda_n f_n(s)f_n(t)$ равномерно сходится к $\Gamma(s,t)$ на $T\times T$ (теоремы Гильберта — Шмидта и Мерсера). Показать, что в этом случае пространство $\overline{H}$ может быть идентифицировано с пространством иепрерывных функций h на T, для которых

$$\sum_n \lambda_n^{-1} \left(\int_T h(t) f_n(t)\, dt \right)^2 < \infty;$$

показать также, что

$$\langle h, h' \rangle = \sum_n \lambda_n^{-1} \int_T h(t) f_n(t)\, dt \int_T h'(t) f_n(t)\, dt.$$

[Убедиться сначала, что для всякой меры μ иа T функция

$$\Gamma_\mu = \int \Gamma(\cdot, t)\, \mu(dt)$$

принадлежит $\overline{H}$, причем $(\Gamma_\mu, h) = \int_T \mu(dt)\, h(t)$; показать, далее, что $\{f_n;\ \lambda_n > 0\}$ есть полная ортогональная последовательность в $\overline{H}$; заметить, наконец, что $\sup |f_n| \leqslant C\lambda_n^{-1/2}$, где C — константа, ие зависящая от n.] Последовательность

$$\{\widetilde{X}_n = X(f_n);\ \lambda_n > 0\}$$

является последовательностью независимых центрированных гауссовских д. с. в. с дисперсиями $E\left(\widetilde{X}_n^2\right) = \lambda_n^{-1}$; выразить $X(h)$ и, в частности, X_t $(t \in T)$ как функцию от $\widetilde{X}_n$.

(в) Если $T = R$, то ядро Γ тогда и только тогда имеет вид

$$\Gamma(s, t) = \gamma(s - t) = \int \exp[2\pi i (s - t) u] F(du),$$

где F — положительиая ограниченная симметричная мера на R, когда оно непрерывио и зависит лишь от $(s - t)$ (теорема Бохнера). Доказать, что существует единственное изометричное отображение, скажем Φ, пространства $L_2^C(R, F)$ (пространства классов эквивалентности комплексных измеримых функций с интегрируемым квадратом модуля относительно F) на пространство $\overline{H}$, такое, что $\Phi[\exp(2\pi i t \cdot)] = \gamma(\cdot - t)$.

(г) Пусть $\mathcal{F}'$ — множество классов эквивалентиости множеств конечной меры в пространстве с мерой $(E, \mathcal{F}, \mu)$ (см. п. IV. 1). Показать, что существует семейство гауссовых центрированных д. с. в. $\{X(F),\ F \in \mathcal{F}'\}$ с ковариациями $\Gamma(F_1, F_2) = \mu(F_1 \cap F_2)$. Показать, далее, что для любого счетного семейства $\{F_i,\ i \in I\}$ попарио иепересекающихся классов велнчины

$$\{X(F_i),\ i \in I\}$$

независимы и $\sum_i X(F_i) = X\left(\sum_i F_i\right)$ в смысле $L_2(P)$ всякий раз, когда $\mu\left(\sum_i F_i\right) < \infty$ (*гауссова „мера"*). Показать, наконец, что в рассматриваемом случае отображение пространства $L_2(E, \mu)$ на введенное выше пространство $\overline{H}$, переводящее $f \in L_2(E, \mu)$ в определенную на $\mathcal{F}'$ функцию множеств $f \cdot \mu$, есть изометрия.

III.4. Сепарабельность и измеримость случайных функций

Определение III.4.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство и T — интервал расширенной числовой прямой (интерпретируемой обычно как время). **Действительной случайной функцией** (д. с. ф.) на T называют отображение X произведения $T \times \Omega$ в расширенную числовую прямую $\overline{R} = [-\infty, \infty]$, такое, что для любого $t \in T$ сечение X_t есть д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Каждая из определенных на T функций $X(\cdot, \omega)$, являющаяся сечением в ω д. с. ф. X $(\omega \in \Omega)$, называется **реализацией** или **траекторией** X.*

Данное определение естественным образом обобщает понятие последовательности д. с. в., которое соответствует тому случаю, когда T является множеством N натуральных чисел. (Последовательность д. с. в. мы называем д. с. ф. на N.) Тем не менее это определение недостаточно, поскольку без наложения каких-либо априорных ограничений на иррегулярность реализацией $X(\cdot, \omega)$ оно не позволяет определять или рассматривать такие важные объекты, как

(а) $\{X_t \in B\,(t \in T)\} = \bigcap_{t \in T} X_t^{-1}(B)$ (множества такого типа не обязательно измеримы, так как T нечетно);

(б) $\int_T dt X(t, \omega)$ (траектории д. с. ф. не обязательно измеримы по времени);

(в) $\lim_{t \to s} X(t, \omega)$ (эти пределы не обязательно существуют для всех ω (а если и существуют, могут быть неизмеримыми)).

Настоящий пункт (а также и следующий) посвящен изучению трех типов условий, при выполнении которых приобретает смысл соответственно каждое из трех выписанных выше выражений (и некоторые другие аналогичные им).

Определение III. 4.2. *Д. с. ф. $X = \{X_t, t \in t\}$ называется* **сепарабельной**, *если существуют счетное подмножество S множества T (называемое* **сепарантой**) *и нулевое множество N такие, что при $\omega \notin N$ для любого $u \in T$ имеем*

$$X_u(\omega) \in \bigcap_{I:\, I \ni u} \overline{X(IS, \omega)}.$$

Здесь I пробегает класс $\mathcal{I}$ относительно открытых подинтервалов T и $\overline{X(IS, \omega)}$ обозначает замыкание в $\overline{R}$ множества значений, принимаемых траекторией $X(\cdot, \omega)$, когда t пробегает множество IS. Очевидно, свойство множества S быть сепарантой не нарушается от добавления к нему счетного множества точек, так что сепаранта не единственна.

Наглядно говоря, д. с. ф. X сепарабельна, если почти все ее траектории в той же степени „регулярны", как их ограничения на подходящим образом выбранное счетное множество S; в самом деле, наше определение можно переформулировать так: *для любого $\omega \notin N$ и любого $u \notin S$ существует сходящаяся к u последовательность $\{s_j\}$ точек из S, такая, что $X(u, \omega) = \lim\limits_{j} X(s_j, \omega)$.* Следующее предложение показывает пользу понятия сепарабельности.

Предложение III. 4.1. *Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — сепарабельная д. с. ф., и пусть S — счетное подмножество T, являющееся сепарантой для X. Существует нулевое множество N, такое, что для любого компактного множества $K \subset \overline{R}$ и любого относительно открытого интервала $I \subset T$*

$$\{X_t \in K \ (t \in I)\} \, \Delta \, \{X_t \in K \ (t \in IS)\} \subset N.$$

Множества $\{X_t \in K \ (t \in I)\}$, *следовательно, измеримы*[1]) *и*

$$P(X_t \in K \ (t \in I)) = P(X_t \in K \ (t \in IS)) = \inf_{U \subset I} P(X_t \in K \ (t \in U)),$$

где U *пробегает все счетные подмножества интервала* $I \subset T$. *Более того, для любого* $\omega \notin N$ *имеют место формулы*

$$\sup_I X_t(\omega) = \sup_{IS} X_t(\omega); \qquad \inf_I X_t(\omega) = \inf_{IS} X_t(\omega)$$

$$\limsup_{t \to u} X_t(\omega) = \limsup_{\substack{t \in S \\ t \to u}} X_t(\omega), \quad \liminf_{t \to u} X_t(\omega) = \liminf_{\substack{t \in S \\ t \to u}} X_t(\omega),$$

а также аналогичные формулы с $t \uparrow u$ *и* $t \downarrow u$. *Во всех этих формулах левые части определяют, следовательно, д. с. в.*[2]).

Доказательство. При выполнении условий определения III. 4.2 имеем $X(u, \omega) \in \overline{X(IS, \omega)}$ при всех $u \in I \in \mathcal{J}$ и всех $\omega \notin N$ и, следовательно, $\overline{X(I, \omega)} = \overline{X(IS, \omega)}$ при всех $I \in \mathcal{J}$ и всех $\omega \notin N$. Первое утверждение предложения вытекает теперь из соотношения

$$\omega \in \{X_t \in K \ (t \in T_0)\} \Leftrightarrow \overline{X(T_0, \omega)} \subset K,$$

справедливого для любого замкнутого множества $K \subset \overline{R}$, каждого $\omega \in \Omega$ и всякого подмножества T_0 множества T. Вторая часть предложения следует, в свою очередь, из того факта, что $\sup_{T_0} X_t(\omega)$ $\left(\inf_{T_0} X_t(\omega)\right)$ есть самая правая (самая левая) точка множества $\overline{X(T_0, \omega)}$. ∎

Из вышеизложенного ясно, насколько важную роль играет сепаранта S д. с. ф. X. Сепаранта всегда является плотным множеством в T (лишь при выполнении этого условия множество $\bigcap_{I \ni u} \overline{X(IS, \omega)}$ непусто при всех $\omega \notin N$ и всех $u \in T$). Следующее предложение утверждает, что в одном весьма важном частном случае верно и обратное.

---

[1]) Для справедливости этого утверждения нужно дополнительно предположить, что пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ полно. — *Прим. перев.*

[2]) См. предыдущую сноску. — *Прим. перев.*

Предложение III. 4.2. *Если д. с. ф. $X = \{X_t, t \in T\}$ сепарабельна и непрерывна по вероятности (см. определение* III. 5.1), *то всякое счетное плотное подмножество S множества T является сепарантой для X.*

Для доказательства этого предложения мы воспользуемся следующей леммой.

Лемма. *Для любой непрерывной по вероятности д. с. ф. $X = \{X_t, t \in T\}$ и любого счетного плотного подмножества S множества T существует семейство $\{N^u, u \in T\}$ нулевых множеств, такое, что*

$$X_u(\omega) \in \bigcap_{I \ni u} \overline{X(IS, \omega)}$$

при всех $u \in T$ и $\omega \notin N^u$.

Доказательство. Для любого $u \in T$ и любой сходящейся к u последовательности $\{s_j\}$ точек из S имеем $X_{s_j} \xrightarrow[P]{} X_u$. Далее, согласно предложению II. 4.3, существует подпоследовательность $\{s'_k\}$ последовательности $\{s_j\}$, такая, что если ω не принадлежит некоторому нулевому множеству N^u, то $X_{s'_k}(\omega) \to X_u(\omega)$ и, следовательно, $X_u(\omega) \in \bigcap_{I \ni u} \overline{X(IS, \omega)}$. ∎

Доказательство предложения. Пусть S_0 — счетное подмножество T, являющееся сепарантой для X, и пусть N — нулевое множество, такое, что

$$X_u(\omega) \in \overline{X(IS_0, \omega)}$$

при $u \in I$ и $\omega \notin N$. Далее, если S — счетное плотное подмножество T, то согласно лемме $\overline{X(IS_0, \omega)} \subset \overline{X(IS, \omega)}$ при всех $\omega \notin \bigcup_{S_0} N^u$. Отсюда следует, что $X_u(\omega) \in \overline{X(IS, \omega)}$ для любого $u \in I \in \mathcal{I}$ и всех ω, за исключением, возможно, тех, которые принадлежат нулевому множеству $N \cup \left(\bigcup_{S_0} N^u\right)$. Тем самым доказано, что S есть сепаранта для X. ∎

Следующее предложение, принадлежащее Дж. Л. Дубу, является основополагающим результатом в теории сепарабельных случайных функций. Помимо нижеследующего доказательства, справедливого в общем случае, в заключение раздела будет дано другое, более простое доказательство этого результата для случая д. с. ф., непрерывных по вероятности.

Определение III. 4.3. *Две д. с. ф. X и X', определенные на одном и том же вероятностном пространстве и на одном и том же интервале T расширенной прямой $\overline{R}$, называются* эквивалентными, *если $X_t = X'_t$ п. н. при всех $t \in T$.*

Из эквивалентности X и X' следует, в частности, что для любых $t_1, \ldots, t_n$ вероятностные законы векторов $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ и $(X'_{t_1}, X'_{t_2}, \ldots, X'_{t_n})$ одинаковы. С другой стороны, следует иметь в виду, что две эквивалентные д. с. ф. могут не иметь ни одной общей траектории: из предположения, что множества

$$\{\omega\colon X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)\}$$

при всех $t \in T$ являются нулевыми, вовсе не следует, что множество $\{\omega\colon X_t(\omega) \neq X'_t(\omega)$ хотя бы для одного $t \in T\}$ тоже нулевое и, более того, что оно вообще отлично от Ω!

Предложение III. 4.3. *Для любой д. с. ф. $X = \{X_t, t \in T\}$, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*[1]*, существует определенная на том же самом вероятностном пространстве эквивалентная X сепарабельная д. с. ф. $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \in T\}$.*

Для доказательства этого предложения мы воспользуемся следующей леммой, которую читатель может сравнить с леммой, следующей за предложением III. 4.2.

[1] Для справедливости приводимого ниже доказательства этого предложения нужно дополнительно предположить, что пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ полно. Аналогичное замечание относится к предложению III. 4.4. — *Прим. перев.*

Лемма. *Для любой д. с. ф.* $X=\{X_t,\ t\in T\}$ *существует счетное подмножество* S *множества* T *и семейство* $\{N^u,\ u\in T\}$ *нулевых множеств, такие, что* $X_u(\omega)\in\in\bigcap\limits_{I\ni u}\overline{X(IS,\ \omega)}$ *при всех* $u\in T$ *и всех* $\omega\notin N^u$.

Доказательство. Соотношения, справедливость которых утверждается в лемме, можно записать в виде

$$X_u(\omega)\in\overline{X(IS,\ \omega)} \quad \text{при} \quad \omega\notin N^u \quad \text{и} \quad u\in I\in\mathcal{J},$$

или в виде

$$\{X_t\in K\,(t\in IS)\}\subset\{X_u\in K\}\cup N^u$$
$$(u\in I\in\mathcal{J},\ K-\text{компактное множество}).$$

В этой последней форме мы и будем их доказывать.

Для любого интервала $I\in\mathcal{J}$ и любого множества $K\in\mathcal{K}$ (где $\mathcal{K}$ — класс компактных подмножеств $\overline{R}$) пусть $S_{I,K}$ — счетное подмножество I, на котором достигается нижняя грань

$$\inf_U P\,(X_t\in K\,(t\in U))$$

по всем счетным подмножествам I. Ясно, что для любого $u\in I$ множество

$$N^u_{I,K}=\{X_t\in K\,(t\in S_{I,K})\}\cap\{X_u\notin K\}$$

является нулевым.

Пусть $\mathcal{J}_0$ — счетный подкласс класса $\mathcal{J}$, такой, что каждый интервал $I\in\mathcal{J}$ есть объединение тех интервалов из класса $\mathcal{J}_0$, которые в нем содержатся. В качестве $\mathcal{J}_0$ можно взять, например, класс всех открытых подинтервалов T с рациональными концами. Пусть, далее, $\mathcal{K}_0$ — счетный подкласс класса $\mathcal{K}$, такой, что каждое множество $K\in\mathcal{K}$ есть пересечение всех тех множеств из $\mathcal{K}_0$, которые его содержат. Положим $S=\bigcup S_{I_0,K_0}$ и $N^u=\bigcup N^u_{I_0,K_0}$, где первое объединение берется по $\mathcal{J}_0\times\mathcal{K}_0$, а второе — по всем I_0, содержащим u, и всем K_0, так что S тоже является счетным подмножеством T, а множества N^u $(u \in T)$ — нулевые. Из формул

$$\{X_t \in K\,(t \in IS)\} \subset \bigcap_{I_0 \subset I} \ \bigcap_{K_0 \supset K} \{X_t \in K_0\,(t \in S_{I_0, K_0})\},$$

$$\{X_u \in K\} = \bigcap_{K_0 \supset K} \{X_u \in K_0\}$$

и определения множеств $N^u_{I_0, K_0}$ и N^u теперь следует, что $\{X_t \in K\,(t \in IS)\} \subset \{X_u \in K\} \cup N^u$ $\quad (u \in I \in \mathcal{I},\ K \in \mathcal{K})$. ▮

Доказательство предложения III.4.3. Используя множества S и N^u из предыдущей леммы, построим отображение $\tilde{X}$ произведения $T \times \Omega$ в $\overline{R}$ следующим образом: если $u \in S$ или $\omega \notin N^u$, то полагаем $\tilde{X}(u, \omega) = X(u, \omega)$, если же $u \notin S$ и $\omega \in N^u$, то выбираем значение $\tilde{X}(u, \omega)$ так, чтобы $\tilde{X}(u, \omega) \in \bigcap_{I \ni u} \overline{X(IS, \omega)}$ (такой выбор всегда возможен, поскольку при всех $u \in T$ и всех $\omega \in \Omega$ множества $\bigcap_{I \ni u} \overline{X(IS, \omega)}$ непусты — они являются пересечениями убывающих обобщенных последовательностей непустых компактных множеств). Ясно, что $\tilde{X}_t = X_t$ п. н. при всех $t \in T$, и поэтому $\tilde{X}$ есть д. с. ф. Так как $\tilde{X}_s = X_s$ для всех $\omega \in \Omega$ при $s \in S$, то $\tilde{X}(IS, \omega) = \overline{X(IS, \omega)}$, каковы бы ни были $I \in \mathcal{I}$ и $\omega \in \Omega$. Более того, $\tilde{X}_u(\omega) \in \overline{\tilde{X}(IS, \omega)}$ при всех $u \in I$: это очевидно, если $u \in S$, и следует из выбора $N^u(\tilde{X})$, если $u \notin S$ и $\omega \notin N^u$ $(u \notin S$ и $\omega \in N^u)$. Тем самым доказано, что $\tilde{X}$ есть сепарабельная д. с. ф. и что множество S является сепарантой для $\tilde{X}$. ▮

В том частном случае, когда д. с. ф. X построена с помощью произведения пространств (см. п. III.3), можно дать следующий вариант предыдущей теоремы, который имеет то преимущество, что он изменяет д. с. ф. X лишь ограничением области ее определения и, следовательно, сохраняет интерпретацию X_t как координат пространства Ω.

Предложение III.4.4. *Пусть P — вероятность, определенная на*

$$(\Omega, \mathcal{A}) = (\bar{R}, \bar{\mathcal{R}})^T,$$

и X — д. с. ф. на T, сечение которой в t ($t \in T$) есть координатное отображение $(\Omega, \mathcal{A})$. Существует подмножество $\tilde{\Omega}$ множества Ω с внешней вероятностью $P^*(\tilde{\Omega}) = 1$ такое, что ограничение X на следовое вероятное пространство

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\Omega} \cap \mathcal{A}, P(\cdot) = P^*(\tilde{\Omega} \cap \cdot))$$

является сепарабельной д. с. ф.

(Точное определение следового вероятностного пространства было дано в упражнении I.4.4.)

Доказательство. Пусть $\tilde{X}$ — определенная на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ д. с. ф., построенная по X тем же способом, что и при доказательстве предыдущего предложения. Предположим, кроме того, что множества N^u выбраны в точности равными дополнениям к множествам, на которых $X(u, \cdot) \in \bigcap_{I \ni u} \overline{X(IS, \cdot)}$. Это, очевидно, возможно. Положим теперь $\tilde{\Omega} = \{\omega: X(\cdot, \omega) = \tilde{X}(\cdot, \omega) \text{ на } T\}$. Для доказательства того, что внешняя вероятность $\tilde{\Omega}$ равна 1, нам нужно показать, что всякое содержащее $\tilde{\Omega}$ измеримое подмножество A пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ имеет вероятность, равную 1.

Всякое измеримое подмножество A пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ зависит лишь от счетного семейства координат (предложение III.3), скажем лишь от T_A. Из включения $\tilde{\Omega} \subset A$ следует включение $\{\omega: X(\cdot, \omega) = \tilde{X}(\cdot, \omega)$ на $T_A\} \subset A$. В самом деле, по построению траектория $\tilde{\omega} = \{\tilde{X}(\cdot, \omega)\}$ пространства Ω не принадлежит ни одному из множеств N^u. Следовательно, она принадлежит множеству $\tilde{\Omega}$ и, тем более, множеству A. Если, кроме того, $X(\cdot, \omega) = \tilde{X}(\cdot, \omega)$ на T_A, т. е. если ω и $\tilde{\omega}$ совпадают на T_A, то $\omega \in A$. Но $\tilde{X}(t, \cdot) = X(t, \cdot)$ п. н. при каждом t, а множество T_A счетно, так что действительно мы имеем $P(A) = 1$.

Наконец, д. с. ф. X сепарабельна на $\tilde{\Omega}$, поскольку она совпадает на $\tilde{\Omega}$ с д. с. ф. $\tilde{X}$, а $\tilde{X}$ сепарабельна на всем пространстве Ω. ∎

Определение III. 4.4. *Пусть $(T, \mathcal{T})$ — интервал расширенной прямой $\bar{R}$ с σ-алгеброй $\mathcal{T} = T \cap \bar{\mathcal{R}}$ его борелевских подмножеств, и пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство. Измеримое отображение X произведения пространств $(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{A})$ в $(\bar{R}, \bar{\mathcal{R}})$ называется измеримой д. с. ф.*

Согласно предложению III. 1.2 такое отображение является (обычной) д. с. ф. в смысле определения III 4.1, что оправдывает нашу терминологию. Кроме того, из предложения III. 2.2 следует, что, какова бы ни была вероятность λ на $(T, \mathcal{T})$, если измеримая д. с. ф. X квазиинтегрируема (в частности, положительна) на $(T \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{A}, \lambda \times P)$, то следующая формула имеет точный смысл:

$$E\left(\int_T \lambda(dt) X_t\right) = \int_T \lambda(dt) E(X_t).$$

Этот результат постоянно используется в теории вероятностей.

Теорема. *Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — д. с. ф., определенная и непрерывная по вероятности на интервале T действительной прямой. Существует определенная на том же самом вероятностном пространстве эквивалентная X сепарабельная измеримая д. с. ф.*

Доказательство. Предположим сначала, что интервал T компактен, скажем $T = [t_l, t_r]$, и воспользуемся предположением о непрерывности X по вероятности в следующей форме (см. предложение III. 5.1):

$$\sup_{|t-s|<h} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad h \downarrow 0.$$

Для каждого целого $n > 0$ выберем конечную возрастающую последовательность точек из T, скажем

$$t_0^n = t_l < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = t_r,$$

такую, что $P(|X_u - X_v| > n^{-1}) < 2^{-n}$, когда u и v принадлежат одному и тому же интервалу $[t_{i-1}^n, t_i^n]$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $\{t_i^n\} \subset \{t_j^{n+1}\}$ при всех n и что счетное множество S, образованное всеми точками t_i^n, плотно в T. Определим последовательность $\{X^n, n > 0\}$ отображений произведения $T \times \Omega$ в $\overline{R}$, положив

$$X^n(t, \omega) = X(t_i^n, \omega) \quad \text{при} \quad t_i^n \leqslant t < t_{i+1}^n.$$

Эти отображения являются, очевидно, измеримыми д. с. ф. Поскольку $\sum_n P(|X_t - X_t^n| > n^{-1}) < \sum_n 2^{-n} < \infty$ при всех $t \in T$, постольку $\limsup_{n\to\infty} \{|X_t - X_t^n| > n^{-1}\} \underset{\text{п. н.}}{=} \varnothing$, и поэтому $\lim_{n\to\infty}$ п. н. X_t^n существует и равен X_t п. н. для каждого $t \in T$. Отсюда следует, что определяемое равенством

$$Y(t, \omega) = \limsup_{n\to\infty} X^n(t, \omega)$$

отображение Y произведения $T \times \Omega$ в $\overline{R}$ является эквивалентной X измеримой д. с. ф.

Для завершения доказательства теоремы в случае компактного T остается показать, что д. с. ф. Y сепарабельна. По определению X^n и Y имеем $Y_t = X_t$ при всех $t \in S$. С другой стороны, для любого t Y_t есть верхний предел на всем пространстве Ω величин $\{X_{t^{(n)}}\}$, где $\{t^{(n)} = t_{i_n}^n\}$ — стремящаяся, возрастая, к t последовательность точек из S. Отсюда вытекает, что Y удовлетворяет соотношениям определения сепарабельности с $N = \varnothing$ (определение III. 4.2).

Наконец, нетрудно обобщить предыдущее рассуждение на случай некомпактного интервала T. В этом случае выберем возрастающую последовательность $\{T_n\}$ компактных интервалов, стремящуюся к T, и определим, как сделано выше, д. с. ф. X_n на $T_n \times \Omega$. Положим $Y = \limsup_{n\to\infty} X_n$. Д. с. ф. Y определена на всем пространстве $T \times \Omega$ и обладает нужными свойствами. ∎

Дополнения и упражнения

III. 1.1. Показать, что д. с. ф. $X=\{X_t, t\in T\}$ на полном вероятностном пространстве сепарабельна тогда и только тогда, когда для любого относительно открытого интервала I из T и любого компактного множества $K\subset \overline{R}$ множество

$$\{X_t\in K\ (t\in I)\}$$

измеримо и имеет вероятность, равную $\inf_U P[X_t\in K\ (t\in U)]$, где U пробегает все счетные подмножества I. [Для доказательства достаточности этого условия воспользоваться рассуждением леммы к предложению III.4.3, выбирая множества $N^u_{I,K}$ независимыми от u.]

III.5. Непрерывность действительных случайных функций[1])

Определение III.5.1. *Д. с. ф.* $X=\{X_t, t\in T\}$ *называется непрерывной по вероятности в точке* $s\in T$, *если д. с. в.* X_s *п. н. конечна и*

$$\lim_{t\to s} P(|X_t-X_s|>\varepsilon)=0$$

при всех $\varepsilon>0$; X *называется непрерывной по вероятности на* T, *если она непрерывна по вероятности в каждой точке* T.

Сепарабельная д. с. ф. $X=\{X_t, t\in T\}$ *называется непрерывной п. н. в точке* $s\in T$, *если множество траекторий* $N^s=\left\{X_s=\lim\limits_{t\to s} X_t\right\}^c$, *имеющих разрыв в* s, — *нулевое*; X *называется непрерывной п. н. на* T, *если она непрерывна п. н. в каждой точке* T.

Говорят, что траектории д. с. ф. $X=\{X_t, t\in T\}$ *п. н. непрерывны, если множество* N *разрывных на* T *траекторий является нулевым.*

Ясно, что каждая непрерывная п. н. в точке s (соответственно на T) сепарабельная д. с. ф. непрерывна в s (соответственно на T) и по вероятности, но обратное утверждение неверно. Если сепарабельная д. с. ф. X не непрерывна п. н. в точке s, т. е. если $P(N^s)>0$, то точку s называют *фиксированной точкой разрыва*

---

[1]) Чтобы рассуждения этого раздела были вполне корректны, нужно предположить, что рассматриваемое вероятностное пространство полно. — *Прим. перев.*

д. с. ф. X. Поскольку, в обозначениях определения, $N = \bigcup_T N^s$, д. с. ф., почти все траектории которой непрерывны, непрерывна п. н. на T. Обратное утверждение, однако, неверно, так как множество N может не быть нулевым, даже если все множества N^s $(s \in T)$ — нулевые. Вот простой и типичный пример такой ситуации.

Пусть P — лебегова вероятность на интервале $\Omega = (0, 1)$, и пусть X — д. с. ф., определенная на произведении $T = (0, 1)$ и Ω следующим образом:

$$X(t, \omega) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \omega, \\ 1 & \text{при} \quad t \geqslant \omega. \end{cases}$$

Каждая траектория $X(\cdot, \omega)$ этой д. с. ф. непрерывна всюду, за исключением точки $t = \omega$, и поэтому множества $N^t = \{t\}$ — нулевые, но $N = \Omega$. Разрыв в точке $t(\omega) = \omega$ этой д. с. ф. называется *подвижным разрывом*.

Критерий непрерывности п. н. *Для того чтобы сепарабельная д. с. ф. $X = \{X_t, t \in T\}$ была непрерывна п. н. в точке $s \in T$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{h \downarrow 0} \downarrow P \left[\sup_{t:\ |t-s| < h} |X_t - X_s| > \varepsilon \right] = 0 \quad \textit{при всех} \quad \varepsilon > 0.$$

Доказательство. Для того чтобы $X_t \xrightarrow[\text{п. н.}]{} X_s$, необходимо и достаточно, чтобы

$$Z_h = \sup_{t:\ |t-s| < h} |X_t - X_s| \xrightarrow[\text{п. н.}]{} 0$$

при $h \downarrow 0$. Но семейство $\{Z_h\}$ положительных д. с. в. убывает вместе с h, и поэтому $\lim_{h \downarrow 0} \downarrow Z_h \underset{\text{п. н.}}{=} 0$ тогда и только тогда, когда

$$P(Z_h > \varepsilon) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad h \downarrow 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. ∎

Предложение III.5.1. *Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — д. с. ф., определенная на компактном интервале T действительной прямой R. Имеют место следующие критерии* *различных типов непрерывности X на T (в критериях* (б) *и* (в) *X предполагается сепарабельной*):

(а) *для непрерывности по вероятности на T*:

$$\sup_{|t-s|<h} P[|X_t - X_s| > \varepsilon] \downarrow 0;$$

(б) *для непрерывности п. н. на T*:

$$\sup_s P\left[\sup_{t:|t-s|<h} |X_t - X_s| > \varepsilon\right] \downarrow 0;$$

(в) *для непрерывности траекторий п. н. на T*:

$$P\left[\sup_{|t-s|<h} |X_t - X_s| > \varepsilon\right] \downarrow 0.$$

Во всех этих критериях $\varepsilon > 0$ произвольно мало, s и t принимают значения из T в соответствии с указанным ограничением и сходимость к нулю имеет место при $h \downarrow 0$.

Доказательство. Читатель легко сможет проверить достаточность этих условий. Необходимость их доказывается с помощью следующих рассуждений, использующих равномерную непрерывность.

Если д. с. ф. X непрерывна по вероятности на T, то для любых фиксированных ε, $\eta > 0$ и любого $u \in T$ существует открытый интервал I_u на R с центром в u, для которого $\sup\limits_{t \in I_u} P(|X_t - X_u| > \varepsilon) < \eta$. Пусть $\{I_{u_1}, \ldots, I_{u_n}\}$ — конечное семейство таких интервалов, покрывающее T, и пусть h — положительное число, такое, что каждый интервал $(s-h, s+h)$, $s \in T$, содержится в одном из интервалов I_{u_i}. Из включения

$$\{|X_t - X_s| > 2\varepsilon\} \subset \{|X_t - X_u| > \varepsilon\} \cup \{|X_s - X_u| > \varepsilon\},$$

очевидно, следует, что если $|t - s| < h$, то

$$P[|X_t - X_s| > 2\varepsilon] \leqslant 2\eta.$$

Для завершения доказательства критерия (а) остается устремить η к нулю.

Если д. с. ф. X непрерывна п. н. на T, то для любых ε, $\eta > 0$ и любого $u \in T$ существует открытый интервал I_u на T с центром в u, такой, что

$$P\left[\sup_{t \in I_u} |X_t - X_u| > \varepsilon\right] < \eta.$$

Пусть $\{I_{u_1}, \ldots, I_{u_n}\}$ — конечное семейство таких интервалов, покрывающее T, и пусть h — положительное число, такое, что каждый интервал $(s-h, s+h)$, $s \in T$, содержится в одном из интервалов I_{u_i}. Из неравенства

$$|X_t - X_s| \leqslant |X_t - X_u| + |X_s - X_u|,$$

очевидно, следует, что

$$\sup_{t:|t-s|<h} |X_t - X_s| \leqslant 2 \sup_{t \in I_u} |X_t - X_u| \text{ при } (s-h, s+h) \in I_u,$$

откуда $P\left[\sup_{t:|t-s|<h} |X_t - X_s| > 2\varepsilon\right] < \eta$ при всех $s \in T$. Устремляя теперь η к нулю, убеждаемся в справедливости критерия (б).

Поскольку всякая непрерывная на T функция равномерно непрерывна на T, для всякой д. с. ф. X, почти все траектории которой непрерывны на T, имеем

$$Z_h = \sup_{|t-s|<h} |X_t - X_s| \downarrow 0 \text{ п. н. при } h \downarrow 0,$$

и, следовательно, $P(Z_h > \varepsilon) \downarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$ при $h \downarrow 0$. ∎

Предложение III.5.2. *Каждое из следующих двух условий достаточно для того, чтобы почти все траектории сепарабельной д. с. ф. X, определенной на компактном интервале $T \subset R$, были непрерывны на T:*

(а) *для любого* $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{h} \sup_s P\left[\sup_{t:|t-s|<h} |X_s - X_t| > \varepsilon\right] \to 0$$

при $h \downarrow 0$;

(б) *существуют две положительные неубывающие функции, скажем* $\varepsilon(\cdot)$ и $\eta(\cdot)$, *определенные на интервале* $(0, \delta)$ *и такие, что*

$$\int_0^\delta \varepsilon(h) \frac{dh}{h} < \infty, \quad \int_0^\delta \mu(h) \frac{dh}{h^2} < \infty,$$

для которых

$$P[|X_{t+h} - X_t| \geqslant \varepsilon(h)] \leqslant \eta(h) \quad \text{при всех} \quad t \in T.$$

Доказательство. Чтобы упростить обозначения, предположим, что $T=[0, 1]$. Для любых целых n и m, $n\geqslant 1$, $0\leqslant m<n$, положим

$$Y_n^m=\sup_{m/n\leqslant s\leqslant (m+2)/n} |X_s-X_{m/n}|.$$

При выполнении условия (а) имеем

$$P\left(\sup_m Y_n^m>\varepsilon\right)\leqslant \sum_m P(Y_n^m>\varepsilon)\leqslant n\sup_m P(Y_n^m>\varepsilon)\to 0$$
$$(n\to\infty,\ \varepsilon>0).$$

С другой стороны, если u и v — две точки из T, такие, что $|u-v|<1/n$, то существует по крайней мере одно m, для которого $m/n\leqslant u\leqslant (m+2)/n$, $m/n\leqslant v\leqslant \leqslant (m+2)/n$, и следовательно, $|X_u-X_v|\leqslant 2Y_n^m$. Таким образом,

$$\sup_{|u-v|<1/n} |X_u-X_v|\leqslant 2\sup_m Y_n^m,$$

и поэтому $P(\sup_{|u-v|<m/n} |X_u-X_v|>\varepsilon)\to 0$ при $n\to\infty$, каково бы ни было $\varepsilon>0$.

(б) Для любого целого $m\geqslant 0$ положим

$$Z_m=\sup_{0\leqslant k<2^m} |X_{(k+1)2^{-m}}-X_{k2^{-m}}|\geqslant 0.$$

При выполнении условия (б) имеем, во-первых,

$$P\left[Z_m\geqslant \varepsilon(2^{-m})\right]\leqslant \sum_{0\leqslant k<2^m} P\left[|X_{(k+1)2^{-m}}-X_{k2^{-m}}|\geqslant \geqslant\varepsilon(2^{-m})\right]\leqslant 2^m\eta(2^{-m}).$$

Из предложения II.4.2 и неравенств

$$\sum_{m>n}\varepsilon(2^{-m})\leqslant\frac{1}{\log 2}\int_0^{2^{-n}}\varepsilon(h)\frac{dh}{h}<\infty,$$

$$\sum_{m>n}2^m\eta(2^{-m})\leqslant 2\int_0^{2^{-n}}\eta(h)\frac{dh}{h^2}<\infty,$$

которые получаются разбиением интервала $(0, 2^{-n})$ на интервалы $(2^{-(m+1)}, 2^{-m})$, вытекает, далее, что $\sum_m Z_m<\infty$

п. н. Более точно, существует определенная п. н. и принимающая лишь целые положительные значения д. с. в. N, такая, что

$$\sum_{m>n} Z_m(\omega) \leqslant \sum_{m>n} \varepsilon(2^{-m}) \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon).$$

С другой стороны, из условия (б) следует непрерывность X по вероятности (поскольку $\varepsilon(h) \to 0$, $\eta(h) \to 0$ при $h \to 0$). Множество S действительных чисел t вида $t = k2^{-n}$ (k, n — целые неотрицательные, $k < 2^n$) плотно в интервале $[0, 1]$ и, следовательно, является сепарантой для X. Отсюда вытекает, что величина

$$\sup_{|t-s| \leqslant h} |X_t - X_s|$$

не меняется (с точностью до нулевого множества), если область значений s и t ограничить множеством S. Если $t \in S$, n задано и k таково, что $|t - k2^{-n}| < 2^{-n}$, то $t = k2^{-n} \pm \sum_{n+1}^{n'} \tau_m 2^{-m}$, где $n' \geqslant n$ и $\tau_m = 0$ или 1. Применяя повторно неравенство треугольника, имеем, следовательно,

$$|X_t - X_{k2^{-n}}| \leqslant \sum_{n+1}^{n'} Z_m \leqslant \sum_{m>n} Z_m.$$

Если s и t принадлежат S и $|t - s| < 2^{-n}$, то существует целое k, для которого $|s - k2^{-n}| < 2^{-n}$, $|t - k2^{-n}| < 2^{-n}$ и, следовательно,

$$|X_t - X_s| \leqslant |X_t - X_{k2^{-n}}| + |X_s - X_{k2^{-n}}| \leqslant 2 \sum_{m>n} Z_m.$$

Мы показали, таким образом, что

$$\sup_{|t-s| < 2^{-n}} |X_t - X_s| \leqslant 2 \sum_{m>n} Z_m \xrightarrow[\text{п. н.}]{} 0 \quad (n \to \infty),$$

а это и означает непрерывность почти всех траекторий X. ∎

Можно получить более точный результат. Именно, если $h > 0$ и целое число n таковы, что $h/2 \leqslant 2^{-n} < h$, то для каждого ω, удовлетворяющего условию $h \leqslant 2^{-N(\omega)}$, имеем

$$\sup_{|t-s|<h/2} |X_t - X_s| \leqslant \sup_{|t-s|<2^{-n}} |X_t - X_s| \leqslant 2 \sum_{m>n} Z_m \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\log 2} \int_0^{2^{-n}} \varepsilon(u) \frac{du}{u} \leqslant \frac{2}{\log 2} \int_0^h \varepsilon(u) \frac{du}{u}.$$

Поскольку $\sup\limits_{|t-s|<h} |X_t - X_s| \leqslant 2 \sup\limits_{|t-s|<h/2} |X_t - X_s|$, постольку, полагая $H(\omega) = 2^{-N(\omega)}$, получаем такое

Следствие. *При выполнении условия* (б) *предыдущего предложения существует п. н. строго положительная д. с. в. H, такая, что*

$$\sup_{|t-s|<h} |X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leqslant \frac{4}{\log 2} \int_0^h \varepsilon(u) \frac{du}{u} \quad \textit{при} \quad h \leqslant H(\omega).$$

В качестве применения полученных результатов докажем следующее предложение, принадлежащее Колмогорову.

Предложение III.5.3. *Если сепарабельная д. с. ф. X, определенная на компактном интервале $T \subset R$, удовлетворяет условию*

$$E|X_{t+h} - X_t|^\alpha \leqslant ch^{1+\beta},$$

где α, β, C строго положительны, то

$$\frac{1}{h^\gamma} \sup_{|t-s|<h} |X_t - X_s| \xrightarrow[\text{п. н.}]{} 0 \quad (h \downarrow 0)$$

при всех γ таких, что $\gamma < \beta/\alpha$. В частности, почти все траектории X непрерывны.

Доказательство. Для любых постоянных c и γ, таких, что $c > 0$, $0 < \gamma < \beta/\alpha$, функции $\varepsilon(h) = ch^\gamma$, $\eta(h) = Cc^{-\alpha} h^{1+(\beta-\alpha\gamma)}$ удовлетворяют условию (б) предложения III.5.5, поскольку

$$P(|X_{t+h} - X_t| > ch^\gamma) \leqslant (ch^\gamma)^{-\alpha} E(|X_{t+h} - X_t|^\alpha) \leqslant (Cc^{-\alpha}) h^{1+(\beta-\gamma\alpha)}.$$

Так как

$$\int_0^h \varepsilon(u)\frac{du}{u} = \frac{c}{\gamma}h^{\gamma},$$

имеем по доказанному выше следствию

$$\frac{1}{h^{\gamma}} \sup_{|t-s|<h} |X_t - X_s| \leqslant c\frac{4}{\gamma \log 2}$$

при достаточно малых h. Полученное неравенство доказывает предложение, поскольку c может быть взято сколь угодно малым. ∎

Дополнения и упражнения

III.5.1. Случайная функция $X = \{X_t, t \in T\}$ называется *непрерывной в среднем порядка p* в точке s (на T), если $\lim\limits_{t\to s}\|X_t - X_s\|_p = 0$ (при всех $s \in T$). Доказать результат, аналогичный III.5.1, для непрерывности в этом смысле. Показать, что если интервал T компактен, то д. с. ф. X непрерывна в среднем порядка p на T тогда и только тогда, когда она непрерывна по вероятности на T и семейство функций $\{|X_t|^p, t \in T\}$ равномерно интегрируемо ($p \in [1, \infty)$).

III.5.2. ***Гауссовы случайные функции.*** Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — центрированная гауссова сепарабельная д. с. ф., определенная на произведении пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и интервала $T \subset R$, с ковариационной функцией $\Gamma = \{\Gamma(s, t);\ s, t \in T\}$ [каждый вектор $\left(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\right)$ имеет центрированный гауссов закон распределения с ковариациями

$$\{\Gamma(t_i, t_j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.]$$

Показать, что следующие условия эквивалентны:

(а) д. с. ф. X непрерывна по вероятности на T;

(б) д. с. ф. X непрерывна в среднем порядка p на T $(1 \leqslant p < \infty)$;

(в) функция $\Gamma(s, t)$ непрерывна на $T \times T$;

(г) функция $\Gamma(s, t)$ непрерывна в каждой точке диагонали произведения $T \times T$.

Показать, далее, что если интервал T компактен и если существуют две постоянные $C > 0$ и $\delta > 0$, такие, что

$$E[(X_t - X_s)^2] \leqslant C|t-s|^{\delta}$$

при всех $s, t \in T$, то почти все траектории д. с. ф. X непрерывны, и, более того, $\lim\limits_{h\downarrow 0}$ п. н. $h^{-\gamma}\sup\limits_{|t-s|\leqslant h}|X_t - X_s| = 0$ для любой постоянной $\gamma < \delta/2$. [Воспользоваться предложением III.5.3, приняв при этом во внимание, что для всякой центрированной гауссовой д. с. в. Y справедливо равенство $E(|Y|^p) = K(p)[E(Y^2)]^{p/2}$, где $K(p)$ не зависит от Y.]

Случайной функцией *броуновского движения* называют сепарабельную гауссовскую центрированную д. с. ф. $X = \{X_t, t \in R_+\}$ с ковариационной функцией $\Gamma(s, t) = \min(s, t)$. Используя предыдущие результаты, показать, что

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-(1/2)+\varepsilon} \sup_{\substack{|t-s| \leq h \\ s, t \leq u}} |X_t - X_s| = 0 \text{ п. н.}$$

при всех $\varepsilon > 0$ и $u < \infty$.

III. 6. Моменты остановки

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, которое на протяжении этого раздела мы будем считать фиксированным, и пусть T — интервал расширенной последовательности целых чисел $\overline{Z}$ (дискретный случай) или расширенной прямой (непрерывный случай), являющийся областью изменения „времени".

Определение III.6.1. *Определенная на T д. с. ф. $X = \{X_t, t \in T\}$ и возрастающая последовательность $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ называются **адаптированными**, если при каждом $t \in T$ д. с. в. X_t является $\mathcal{A}_t$-измеримой (события из $\mathcal{A}_t$ называют при этом **предыдущими** по отношению к t).*

Если X — определенная на T д. с. ф., то семейство

$$\{\mathcal{B}_t = \mathcal{B}(X_s, s \leq t);\ t \in T\},$$

очевидно, адаптировано к X. Если $\{X_t\}$ и $\{\mathcal{A}_t\}$ адаптированы, то $\{f_t(X_t)\}$ и $\{\mathcal{A}_t\}$ тоже, очевидно, адаптированы. Этот допускающий обобщение результат говорит в пользу данного определения: всякое свойство, которое может быть определено в терминах семейства $\{\mathcal{A}_t\}$, а не только в терминах $\{X_t\}$, будет автоматически независимым относительно любых преобразований величин X_t.

Определение III.6.2. *Пусть $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ — возрастающее семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$. Отображение τ ненулевого подмножества Ω_τ множества Ω в T*

называется ***моментом остановки***, *если оно удовлетворяет условию* $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{A}_t$ *при всех* $t \in T$. *Каждому моменту остановки* τ *сопоставляется* σ-*алгебра* $\mathcal{A}_\tau$ *подмножеств* A *множества* Ω_τ, *удовлетворяющих условию* $A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{A}_t$ *при всех* $t \in T$ (*события из* $\mathcal{A}_\tau$ *называются* ***предыдущими*** *по отношению к* τ).

В случае, когда τ принимает лишь счетное множество значений, в частности в дискретном случае, определению III.6.2 можно придать следующую эквивалентную форму: τ есть момент остановки относительно семейства $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ тогда и только тогда, когда $\{\tau = t\} \in \mathcal{A}_t$ при всех t, являющихся значениями τ; σ-алгебра $\mathcal{A}_\tau$ состоит из подмножеств A множества Ω_τ, таких, что $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{A}_t$ при всех t, являющихся значениями τ (σ-алгебра в этом случае может, следовательно, быть охарактеризована тем своим свойством, что на каждом множестве $\{\tau = t\}$ она имеет тот же след, что и $\mathcal{A}_t$).

Для доказательства эквивалентности обоих определений заметим сначала, что имеют место равенства

$$\{\tau = t\} = \{\tau \leqslant t\} - \bigcup_{n>0} \left\{\tau \leqslant t - \frac{1}{n}\right\}; \quad \{\tau \leqslant t\} = \bigcup_{s \leqslant t} \{\tau = s\}.$$

Если теперь τ — момент остановки в смысле определения III.6.2, то множества $\{\tau \leqslant t\}$, $\{\tau \leqslant t - 1/n\}$, а потому также и множество $\{\tau = t\}$, принадлежат $\mathcal{A}_t$. Аналогично $A \cap \{\tau = t\} \in \mathcal{A}_t$ при $A \in \mathcal{A}_\tau$. Обратно, если отображение τ принимает лишь счетное число значений и если $\{\tau = s\} \in \mathcal{A}_s$ при всех возможных s, то множество $\{\tau \leqslant t\}$ есть объединение счетного числа множеств из $\mathcal{A}_t$ (именно, непустых множеств $\{\tau = s\}$, $s \leqslant t$). Аналогично, если множество $\tau(\Omega_\tau)$ счетно и $A \cap \{\tau = s\} \in \mathcal{A}_s$ при всех возможных s, то $A \in \mathcal{A}_\tau$.

Сделаем еще несколько замечаний по поводу определения III.6.2. Во-первых, всякий постоянный момент, скажем $\tau = t_0$ на $\Omega_\tau = \Omega$, является моментом остановки с $\mathcal{A}_\tau = \mathcal{A}_{t_0}$ (этот пример оправдывает используемую терминологию). Легко проверить, что $\mathcal{A}_\tau$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\Omega_\tau \cap \mathcal{A}$ и что Ω_τ принадлежит $\mathcal{A}$; для этого нужно представить Ω_τ как объединение множеств

$\{\tau \leqslant t\}$. Кроме того, нетрудно убедиться, что *отображение* τ *пространства* $(\Omega_\tau, \mathcal{A}_\tau)$ *в* T *с* σ*-алгеброй борелевских подмножеств* T *измеримо.*

В случае когда точка $+\infty$ является предельной для интервала T из $\overline{Z}$ или $\overline{R}$, но не принадлежит ему, часто бывает удобно (и согласуется с интуицией) продолжить область определения момента остановки τ до всего пространства Ω, положив $\tau = +\infty$ на Ω_τ^c. Продолженная величина τ является при этом моментом остановки со значениями в $T + \{\infty\}$, если в качестве $\mathcal{A}_\infty$ взять любую σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{A}$, содержащую все σ-алгебры $\mathcal{A}_t$ $(t \in T)$. Затем можно определить σ-алгебру $\mathcal{A}_\tau$ как σ-алгебру подмножеств A пространства Ω, таких, что $A \cap \{\tau \leqslant t\} \subset \mathcal{A}_t$ при всех $t \in T + \{\infty\}$; при этом автоматически будет $A \cap \{\tau = \infty\} \in \mathcal{A}_\infty$.

Если τ — момент остановки относительно $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$, то таковым является также момент $\tau + t_0$ при $t_0 \geqslant 0$ и, более общо, $\theta(\tau)$, где $\theta(\cdot)$ — измеримое отображение T (или подмножества T) в T, удовлетворяющее условию $\theta(t) \geqslant t$ при всех $t \in T$. Легко также показать, что $\Omega_{\theta(\tau)} \cap \mathcal{A}_\tau \subset \mathcal{A}_{\theta(\tau)}$.

Введем следующее отношение порядка в множество моментов остановки относительно фиксированного возрастающего семейства σ-алгебр $\{\mathcal{A}_t\}$: $\tau_1 \leqslant \tau_2$, если $\Omega_{\tau_1} \supset \Omega_{\tau_2}$ и $\tau_1(\omega) \leqslant \tau_2(\omega)$ при всех $\omega \in \Omega_{\tau_2}$. Верхняя и нижняя грани (относительно введенного отношения порядка) двух моментов остановки τ и τ' определяются формулами

$$\tau \vee \tau'(\omega) = \max[\tau(\omega), \tau'(\omega)] \quad \text{на} \quad \Omega_{\tau \vee \tau'} = \Omega_\tau \cap \Omega_{\tau'};$$

$$\tau \wedge \tau'(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega) & \text{на} \quad \Omega_\tau \cap \Omega_{\tau'}^c, \\ \min[\tau(\omega), \tau'(\omega)] & \text{на} \quad \Omega_\tau \cap \Omega_{\tau'}, \\ \tau'(\omega) & \text{на} \quad \Omega_\tau^c \cap \Omega_{\tau'}, \end{cases}$$

$$\Omega_{\tau \wedge \tau'} = \Omega_\tau \cup \Omega_{\tau'}.$$

В частности, часто приходится рассматривать момент остановки $\tau \wedge t_0$; этот момент определен всюду, равен τ

на множестве $\{\tau \leqslant t_0\}$ и равен t_0 на дополнительном множестве. Отметим, что если $T = [\cdot, \infty)$ и если принять соглашение продолжать каждый момент остановки, полагая $\tau = +\infty$ на Ω_τ^c, то моменты остановки $\tau \vee \tau'$ и $\tau \wedge \tau'$ равны на Ω соответственно максимуму и минимуму функций τ и τ'; при этом $\tau \vee \tau' = +\infty$, когда $\tau = +\infty$ или $\tau' = +\infty$, и $\tau \wedge \tau' = +\infty$, когда $\tau = +\infty$ и $\tau' = +\infty$.

Пусть $\{\tau_n\}$ — возрастающая последовательность моментов остановки, определенных относительно фиксированного семейства $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$:

$$\ldots \Omega_{\tau_n} \supset \Omega_{\tau_{n+1}} \supset \ldots; \quad \tau_n(\omega) \leqslant \tau_{n+1}(\omega) \text{ на } \Omega_{\tau_{n+1}}.$$

Предел τ: $\tau(\omega) = \lim \uparrow \tau_n(\omega)$, определенный на $\Omega_\tau = \{\lim \tau_n \in T\}$, тоже является моментом остановки. В самом деле, $\{\tau \leqslant t\} = \lim\limits_n \downarrow \{\tau_n \leqslant t\} \in \mathcal{A}_t$ при всех $t \in T$. Однако в общем случае предел убывающей последовательности моментов остановки, определенных относительно семейства $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$, не является моментом остановки относительно того же самого семейства (см. упражнение III.6.1).

Предложение III.6.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство, τ — момент остановки, определенный на Ω_τ относительно возрастающего семейства $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ и $X = \{X_t,\ t \in T\}$ — определенная на T д. с. ф., адаптированная к семейству $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$. Каждое из следующих условий достаточно, чтобы определяемое равенством $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$ отображение X_τ множества Ω_τ в $\overline{R}$ было $\mathcal{A}_\tau$-измеримым:*

(а) *момент остановки τ принимает лишь счетное множество различных значений (это условие всегда выполняется в дискретном случае);*

(б) *(в непрерывном случае) траектории д. с. ф. X непрерывны справа на T;*

(в) *для любого $u \in T$ ограничение отображения X произведения $T \times \Omega$ в $\overline{R}$ на множество $T_u \times \Omega$ является $\mathcal{T}_u \otimes \mathcal{A}_u$-измеримым, где $T_u = \{t\colon t \in T,\ t \leqslant u\}$ и $\mathcal{T}_u$ — след $\mathcal{R}$ на T_u.*

(Отметим, что всякое отображение X произведения $T\times\Omega$ в $\overline{R}$, удовлетворяющее условию (в), является в силу предложения III.1.2 д. с. ф., адаптированной к $\{\mathcal{A}_t,\ t\in T\}$.)

Доказательство. В случае когда момент остановки τ принимает лишь счетное число различных значений, в объединение в правой части соотношения

$$\{X_\tau\in B\}\{\tau\leqslant t\}=\bigcup_{s\leqslant t}\{X_s\in B\}\{\tau=s\}\in\mathcal{A}_t,$$

справедливого для любого $t\in T$ и любого борелевского множества $B\in\overline{R}$, входит лишь счетное число непустых множеств и поэтому величина X_τ является $\mathcal{A}_\tau$-измеримой.

Покажем, далее, что в непрерывном случае *условие* (б) *влечет условие* (в). Для упрощения обозначений будем считать, что

$$T_u=(0,\ 1]\quad\text{или}\quad[0,\ 1].$$

Положим $X^n(t,\ \omega)=X\left(q2^{-n},\ \omega\right)$, где q — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $q2^{-n}\geqslant t$. Из непрерывности траекторий X справа следует, что

$$X(t,\ \omega)=\lim_n X^n(t,\ \omega)$$

при всех $t\in T_u$ и $\omega\in\Omega$. Поскольку отображения X_n, очевидно, $\mathcal{T}_u\otimes\mathcal{A}_u$-измеримы, то же справедливо и для X.

Предположим теперь, что условие (в) выполнено, и покажем, что ограничение X_τ на множество $A_u=\{\tau\leqslant u\}$ является $\mathcal{A}_u$-измеримым для любого $u\in T$. Предложение тем самым будет, очевидно, доказано. Поскольку отображение τ пространства $(A_u,\ A_u\cap\mathcal{A}_u)$ в $(T_u,\ \mathcal{T}_u)$, как легко убедиться, измеримо, постольку отображение пространства $(A_u,\ A_u\cap\mathcal{A}_u)$ в $(T_u\times\Omega,\ \mathcal{T}_u\otimes\mathcal{A}_u)$, переводящее ω в $(\tau(\omega),\ \omega)$, тоже измеримо. Но отображение X_τ множества A_u в $\overline{R}$ есть композиция предыдущего отображения и отображения X пространства $(T_u\times\Omega,\ \mathcal{T}_u\otimes\mathcal{A}_u)$

в $\bar{R}$, которое измеримо по предположению. Таким образом, доказано, что X_τ является $\mathcal{A}_u$-измеримой на Λ_u и, следовательно, $\mathcal{A}_\tau$-измеримой на Ω_τ. ∎

Замечание. В случае когда σ-алгебры $\mathcal{A}_t$ содержат все нулевые подмножества пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, предложение III.6.1 остается справедливым, если предполагать, что условие (а) или (б) выполняется лишь п. н.

Дополнения и упражнения

III.6.1. Пусть T — интервал расширенной прямой $\bar{R}$ и $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ — возрастающее семейство σ-алгебр в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Показать, что для всякого отображения τ подмножества Ω_τ множества Ω в T следующие условия эквивалентны:

(а) $\{\tau < t\} \in \mathcal{A}_t$ при всех $t \in T$;

(б) $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{A}_{t+0}$ при всех $t \in T$;

(в) $\{\tau < t\} \in \mathcal{A}_{t-0}$ при всех $t \in T$, где $\mathcal{A}_{t+0}$ есть σ-алгебра, являющаяся пересечением σ-алгебр $\mathcal{A}_s$ $(s > t)$, и $\mathcal{A}_{t-0}$ есть σ-алгебра, порожденная σ-алгебрами $\mathcal{A}_s$ $(s < t)$. Показать, далее, что предел любой возрастающей или убывающей последовательности моментов остановки, определенных относительно $\{\mathcal{A}_{t+0}, t \in T\}$, тоже есть момент остановки.

III.6.2. Пусть $X = \{X_t, t \in T\}$ — непрерывная по вероятности д. с. ф., адаптированная к возрастающему семейству σ-алгебр $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ в $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Показать, что существует эквивалентная X измеримая д. с. ф., удовлетворяющая условию (в) предложения III.6.1. [Использовать доказательство теоремы п. III.4.]

III.6.3. ***Время ожидания.*** Пусть X — определенная на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ д. с. ф., удовлетворяющая условию (в) предложения III.6.1 относительно семейства $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$. Предположим, кроме того, что интервал T замкнут слева. Для любого множества $B \subset \bar{R}$ определим на множестве

$$\Omega_B = \bigcup_T \{X_t \in B\}$$

функцию $\tau_B(\omega) = \inf\{t\colon X_t(\omega) \in B\}$ со значениями в T. Если траектории X непрерывны справа, а множество B замкнуто, то τ_B есть первый момент t, для которого $X_t \in B$. Пользуясь упражнением III.1.2 и равенством

$$\{\tau_B \leqslant u\} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \operatorname{proj}_\Omega \{(t, \omega)\colon t \leqslant u + \varepsilon,\ X(t, \omega) \in B\},$$

показать, что τ_B является моментом остановки относительно $\{\mathcal{A}_{t+0},\ t \in T\}$ по крайней мере для всех борелевских множеств $B \in \overline{R}$. Что можно сказать относительно X_{τ_B}?

Распространить предыдущие результаты на величины τ_A, определяемые равенством

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t:\ (t,\ X(t,\ \omega)) \in A\},$$

где A — измеримое в $(T \times \overline{R},\ \mathcal{T} \otimes \overline{\mathcal{R}})$ множество.

Глава IV

Условные математические ожидания и мартингалы

IV. 1. Меры

Определение IV.1.1. *Мерой* μ *на* σ*-алгебре* $\mathcal{A}$ *подмножеств множества* Ω *называется отображение* $\mathcal{A}$ *в* $(-\infty, +\infty]$, *такое, что* $\mu(\varnothing)=0$ *и*

$$\mu\left(\sum_I A_i\right)=\sum_I \mu(A_i) \quad (\sigma\text{-аддитивность}),$$

каково бы ни было счетное семейство $\{A_i, i\in I\}$ *попарно непересекающихся подмножеств* Ω *из* $\mathcal{A}$.

Значение $-\infty$ исключается из множества значений меры с целью избежать появления выражений вида $\infty-\infty$ [в случае $\mu(A)=+\infty$, $\mu(B)=-\infty$ невозможно было бы придать смысл соотношению

$$\mu(A)+\mu(A^cB)=\mu(B)+\mu(B^cA)=\mu(A\cup B)].$$

Мера μ называется *положительной*, если $\mu(A)\geqslant 0$ $(A\in\mathcal{A})$; μ называется *ограниченной*, если

$$\sup\{|\mu(A)|;\ A\in\mathcal{A}\}<\infty.$$

Положительная мера, удовлетворяющая условию $\mu(\Omega)=1$ (и, следовательно, ограниченная), является вероятностью.

Предложение IV.1.1 (Жордан—Хан). *Для всякой меры* μ *на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *формулы*

$$\mu^+(A)=\sup\{\mu(B),\ B\subset A\},\qquad \mu^-(A)=\sup\{-\mu(B),\ B\subset A\}$$

определяют две положительные меры на $(\Omega, \mathcal{A})$. *При этом мера* μ^- *ограничена и* $\mu=\mu^+-\mu^-$ *на* $\mathcal{A}$.

Существует по крайней мере одно множество D *из* $\mathcal{A}$, *для которого*

$$A\subset D\Rightarrow\mu(A)\geqslant 0,\qquad A\subset D^c\Rightarrow\mu(A)\leqslant 0$$

и, следовательно, $\mu^+(A)=\mu(AD)$, $\mu^-(A)=\mu(AD^c)$.

Доказательство. Начнем с доказательства существования множества D, обладающего указанными в формулировке предложения свойствами. Справедливость остальных утверждений предложения будет затем следовать почти непосредственно. Пусть $\mathscr{B}=\{B\colon B\in\mathcal{A},\ \mu^+(B)=0\}$. Класс $\mathscr{B}$ замкнут относительно счетных объединений. В самом деле, если $A\subset\bigcup\limits_n B_n$, где $B_n\in\mathscr{B}$, то

$$\mu(A)=\sum_n\mu\left[A\left(B_n-\bigcup_{m<n}B_m\right)\right]\leqslant\sum_n\mu^+(B_n)=0.$$

Отсюда вытекает, что нижняя грань $\beta=\inf\{\mu(B),\ B\in\mathscr{B}\}$ достигается и, следовательно, конечна. Действительно, если $\{B_n,\ n\geqslant 1\}$ — последовательность множеств из $\mathscr{B}$, для которой $\mu(B_n)\to\beta$, то $\bigcup\limits_n B_n\in\mathscr{B}$ и для любого p

$$\beta\leqslant\mu\left(\bigcup_n B_n\right)=\mu(B_p)+\mu\left(\bigcup_n B_n-B_p\right)\leqslant\mu(B_p)\to\beta\ (p\to\infty),$$

откуда $\mu\left(\bigcup\limits_n B_n\right)=\beta$. Положим $D=\left(\bigcup\limits_n B_n\right)^c$. Нами установлено, таким образом, существование множества $D\in\mathcal{A}$, удовлетворяющего условиям $D^c\in\mathscr{B}$, $\mu(D^c)=\beta$, и, следовательно, такого, что (1) $A\subset D^c\Rightarrow\mu(A)\leqslant 0$, (2) $A\subset D$, $\mu(A)<0\Rightarrow 0<\mu^+(A)$. (В самом деле, если бы $\mu^+(A)$ было равно нулю, то множество $A+D^c$ принадлежало бы $\mathscr{B}$ и мы имели бы $\mu(A+D^c)<\mu(D^c)=\beta$.)

Покажем теперь, рассуждая от противного, что $A\subset D\Rightarrow\mu(A)\geqslant 0$. Если бы существовало подмножество A множества D, для которого $\mu(A)<0$, то для некоторого $A'\subset A$ было бы $\mu(A')<0$, $\mu^+(A')<\infty$. В самом деле, в противном случае $\mu(A^{(1)})\geqslant 1$ для некоторого $A^{(1)}\subset A$, $\mu(A^{(2)})\geqslant 1$ для некоторого $A^{(2)}\subset A-A^{(1)}$ и т. д., и мы имели бы $\mu\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}\right)=+\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A^{(k)}\subset A$, в то время как $\mu(A)<0$. Будем считать далее, что $A\subset D$, $0<\mu^+(A)<\infty$. Возьмем подмножество A_1 множества A, такое, что

$$\mu(A_1)\geqslant\frac{1}{2}\mu^+(A)>0.$$

Подмножество $A - A_1$ множества D имеет отрицательную меру: $\mu(A - A_1) = \mu(A) - \mu(A_1) < 0$ и $0 < \mu^+(A - A_1) < \infty$. Пользуясь индукцией, построим последовательность $\{A_n, n \geqslant 1\}$ подмножеств множества D, такую, что

$$A_{n+1} \subset A - \sum_1^n A_m, \quad \mu(A_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}\mu^+\left(A - \sum_1^n A_m\right) > 0.$$

Возможность построения такой последовательности множеств обеспечивается неравенствами $\mu\left(A - \sum_1^n A_m\right) < 0$, $0 < \mu^+(A - \sum_1^n A_m) < \infty$, которые легко устанавливаются последовательно на каждом шаге индукции. Из равенства $\mu(A) = \mu\left(A - \sum_1^\infty A_m\right) + \sum_1^\infty \mu(A_m)$, где $\mu(A) < 0$ и $\mu(A_m) > 0$, вытекает, с одной стороны, что

$$\mu\left(A - \sum_1^\infty A_m\right) < 0,$$

а с другой стороны, что $\sum \mu(A_m) < \infty$; поэтому $\lim_m \mu(A_m) = 0$, откуда $\mu^+\left(A - \sum_1^\infty A_m\right) \leqslant \mu^+\left(A - \sum_1^n A_m\right) \to 0$ $(n \to \infty)$. Отмеченные свойства множества $A - \sum_1^\infty A_m$ несовместимы со свойством (2) множества D. Тем самым доказано существование множества $D \in \mathcal{A}$, обладающего первыми двумя из свойств, указанных в формулировке предложения.

Если $B \subset A$, то $\mu(B) = \mu(AD) + \mu(BD^c) - \mu[(A - B)D] \leqslant \leqslant \mu(AD)$ и, следовательно, $\mu^+(A) = \mu(AD)$, так что μ^+ есть положительная мера на $\mathcal{A}$. Аналогично, $\mu^-(A) = -\mu(AD^c)$ и поэтому μ^- тоже является положительной мерой. Мера μ^- конечна, поскольку

$$\sup\{\mu^-(A), A \in \mathcal{A}\} = \mu^-(\Omega) = -\mu(D^c) < +\infty.$$

Наконец, в силу равенства $\mu(A) = \mu(AD) + \mu(AD^c)$, справедливого для всех $A \in \mathcal{A}$, имеем

$$\mu = \mu^+ - \mu^-. \quad \blacksquare$$

Отметим, что меры μ^+ и μ^- можно также охарактеризовать как наименьшие положительные меры, мажорирующие μ и $-\mu$ соответственно.

Следствие. *Для того чтобы мера* μ *на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *была ограниченной, (необходимо и) достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $\mu(\Omega) < \infty$.

Доказательство. Из доказанного предложения вытекает, что для любого $A \in \mathcal{A}$

$$-\infty < -\mu^-(\Omega) \leqslant -\mu^-(A) \leqslant \mu(A) \leqslant \mu^+(A) \leqslant \mu^+(\Omega) = \mu(D) \leqslant \infty.$$

Следовательно, мера μ ограничена тогда и только тогда, когда $\mu^+(\Omega) < \infty$. Поскольку

$$\mu(\Omega) = \mu^+(\Omega) - \mu^-(\Omega),$$

это условие равносильно условию следствия. ∎.

Полной вариацией $|\mu|$ меры μ на $(\Omega, \mathcal{A})$ называют положительную меру $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Полная вариация меры μ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена сама мера μ. (Название „полная вариация" объясняется имеющим место для любого $A \in \mathcal{A}$ равенством

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_I |\mu(A_i)|\right\},$$

где верхняя грань берется по всем счетным разбиениям $\{A_i, i \in I\}$ множества A.)

Если μ_1, μ_2 — две ограниченные меры на $(\Omega, \mathcal{A})$, то меры $\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+$ и $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 - (\mu_2 - \mu_1)^-$ являются соответственно верхней и нижней гранью мер μ_1 и μ_2, т. е. наименьшей (наибольшей) мерой, мажорирующей (минорирующей) меры μ_1 и μ_2. Пусть D — множество, входящее в разложение Жордана — Хана меры $(\mu_2 - \mu_1)$. Используя предложение IV. 1.1, нетрудно убедиться в том, что для любого $A \in \mathcal{A}$

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(A) = \sup\{\mu_1(B) + \mu_2(A - B); \quad B \subset A\} = \\ = \mu_1(AD^c) + \mu_2(AD),$$

$$(\mu_1 \wedge \mu_2)(A) = \inf\{\mu_1(B) + \mu_2(A - B); \quad B \subset A\} = \\ = \mu_1(AD) + \mu_2(AD^c).$$

Две положительные ограниченные меры μ_1 и μ_2 на $(\Omega, \mathcal{A})$ называются *взаимно сингулярными*, если $\mu_1 \wedge \mu_2 = 0$. Согласно предыдущему, *для того чтобы меры μ_1 и μ_2 были взаимно сингулярными, необходимо и достаточно, чтобы существовало множество D из $\mathcal{A}$, такое, что $\mu_1(D) = 0 = \mu_2(D^c)$.*

Предложение IV. 1.2. *Линейное пространство $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ ограниченных мер на $(\Omega, \mathcal{A})$ является полной структурой. Пространство $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ является банаховым пространством с нормой $\|\mu\|_1 = |\mu|(\Omega)$.*

Доказательство. Выше уже было показано, что $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ есть структура. Для доказательства того, что эта структура полна, достаточно показать, что если $\{\mu_\alpha\}$ — произвольная возрастающая обобщенная последовательность положительных мер, мажорированная положительной ограниченной мерой ν, то формула $\mu(A) = \lim \uparrow \mu_\alpha(A)$ определяет положительную ограниченную меру (являющуюся верхней гранью мер μ_α). Пусть $\{A_i,\ i \in I\}$ — счетное семейство попарно непересекающихся подмножеств Ω из $\mathcal{A}$. Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой индекс α, что

$$\mu\Big(\sum_I A_i\Big) \leqslant \varepsilon + \mu_\alpha\Big(\sum_I A_i\Big).$$

Отсюда, поскольку $\mu_\alpha\Big(\sum_I A_i\Big) = \sum_I \mu_\alpha(A_i) \leqslant \sum_I \mu(A_i)$, получаем

$$\mu\Big(\sum_I A_i\Big) \leqslant \sum_I \mu(A_i).$$

С другой стороны, так как $\sum_I \mu(A_i) \leqslant \sum_I \nu(A_i) = \nu\Big(\sum_I A_i\Big) < \infty$ и так как $\{\mu_\alpha\}$ — обобщенная последовательность, существуют конечное подмножество I_0 множества I и индекс α, такие, что

$$\sum_I \mu(A_i) \leqslant \varepsilon + \sum_{I_0} \mu_\alpha(A_i).$$

Отсюда, поскольку

$$\sum_{I_0} \mu_\alpha(A_i) \leqslant \mu_\alpha\Big(\sum_I A_i\Big) \leqslant \mu\Big(\sum_I A_i\Big),$$

имеем
$$\sum_i \mu(A_i \leqslant \mu\left(\sum_i A_i\right).$$

Тем самым доказана σ-аддитивность μ. Легко проверить, что $\|\mu\|_1$ является нормой на $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$. Полнота пространства $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ относительно этой нормы будет доказана ниже — после следствия 2 к нижеследующему предложению. ∎

Предложение IV.1.3 (Лебег). *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство и μ — ограниченная (и положительная) мера на $(\Omega, \mathcal{A})$. Существуют интегрируемая (и положительная) д. с. в. X на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и нулевое подмножество N пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, такие, что*
$$\mu(A) = \int_A X\,dP + \mu(AN) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Это разложение μ в сумму неопределенного интеграла по P и сингулярной относительно P меры единственно.

В случае, когда мера μ положительна, X есть наибольшая с точностью до эквивалентности д. с. в., для которой $\int_A X\,dP \leqslant \mu(A)$ при всех $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. В силу предложения IV.1.1 достаточно ограничиться случаем, когда мера μ положительна и ограничена. Пусть $\mathcal{L}$ — семейство всех (классов эквивалентности) положительных д. с. в. Y, таких, что $\int_A Y\,dP \leqslant \mu(A)$ при всех $A \in \mathcal{A}$. Покажем, что семейство $\mathcal{L}$ обладает следующими свойствами:

(а) $0 \in \mathcal{L}$;

(б) $Y_1, Y_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow \sup(Y_1, Y_2) \in \mathcal{L}$;

(в) $Y_n \in \mathcal{L}\ (n \geqslant 1)$ и $Y_n \uparrow Y \Rightarrow Y \in \mathcal{L}$.

Свойство (а) очевидно. Свойство (б) следует из соотношений
$$\int_A \sup(Y_1, Y_2) = \int_{AB} Y_1 + \int_{AB^c} Y_2 \leqslant \mu(AB) + \mu(AB^c) = \mu(A)\ (A \in \mathcal{A}),$$

где $B=\{Y_1 \geqslant Y_2\}$. Наконец, свойство (в) вытекает из непрерывности интеграла относительно монотонной сходимости.

Из сказанного выше, рассуждая так же, как при доказательстве предложения II. 4.1, выводим, что $\mathscr{L}$ содержит максимальный элемент X. Определим теперь положительную ограниченную меру μ', положив $\mu'(A) = \mu(A) - \int_A X\,dP$. Пусть D_n — множество, входящее в разложение Жордана — Хана меры $\mu' - n^{-1}P$; для любого $A \in \mathcal{A}$ имеем

$$\mu'(AD_n) \geqslant n^{-1}P(AD_n), \quad \mu'(AD_n^c) \leqslant n^{-1}P(AD_n^c).$$

Поскольку

$$\int_A (X + n^{-1}1_{D_n})\,dP \leqslant \int_A X\,dP + \mu'(AD_n) \leqslant \mu(A) \quad (A \in \mathcal{A}),$$

д. с. в. $X + n^{-1}1_{D_n}$ принадлежит $\mathscr{L}$ и из максимальности X вытекает, что $P(D_n) = 0$. Следовательно, множество $N = \bigcup_n D_n$ является нулевым в пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. С другой стороны, для любого n имеем $\mu'(N^c) \leqslant \mu'(D_n^c) \leqslant n^{-1}P(D_n^c) \leqslant n^{-1}$ и, следовательно,

$$\mu'(N^c) = 0, \ \mu'(A) = \mu'(AN) = \mu(AN) \quad \text{при всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Мы доказали, таким образом, существование лебегова разложения μ относительно P. Покажем теперь, что это разложение единственно. Пусть

$$\mu(A) = \int_A Z\,dP + \nu(A) \quad (A \in \mathcal{A})$$

— разложение μ рассматриваемого типа. Поскольку $\int_A Z\,dP \leqslant \mu(A)$ на $\mathcal{A}$, то $Z \leqslant X$ п. н., где X — определенная выше д. с. в. С другой стороны, так как мера ν сингулярна относительно P, существует множество

$D \in \mathcal{A}$, такое, что $P(D^c) = 0$, $\nu(D) = 0$. Имеем, очевидно,

$$\int (X - Z)\,dP = \int_D (X - Z)\,dP \leqslant \nu(D) = 0,$$

откуда $Z = X_{\text{п. н.}}$ ∎

Следствие 1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — *вероятностное пространство и* μ — *ограниченная мера на* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Следующие условия равносильны*:

(а) $\mu(N) = 0$ *для всякого нулевого множества* N *пространства* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$;

(б) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$, *такое, что*

$$P(A) \leqslant \delta \Rightarrow |\mu(A)| \leqslant \varepsilon \quad (A \in \mathcal{A});$$

(в) $\mu(A) = \int_A X\,dP$ *для некоторой интегрируемой д. с. в.* X, *определенной на* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Доказательство. Из предыдущего предложения вытекает, что (а)$\Rightarrow$(в). Соотношение (в)$\Rightarrow$(б) было доказано в разделе II.5. Наконец, соотношение (б)$\Rightarrow$(а) очевидно. ∎

Отметим, что мера μ удовлетворяет условию (б) [(в)] на $\mathcal{A}$, если она удовлетворяет ему на алгебре [на полуалгебре], порождающей $\mathcal{A}$. В самом деле, класс множеств, на котором это условие выполнено, является монотонным [монотонным и аддитивным] классом.

Ограниченная мера μ, удовлетворяющая условию (б) следствия 1, называется *абсолютно непрерывной* относительно P. Абсолютная непрерывность μ относительно P обозначается так: $\mu \ll P$. Для того чтобы $\mu \ll P$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu^+, \mu^- \ll P$ или чтобы $|\mu| \ll P$. Если $\mu \ll P$, то класс эквивалентных д. с. в. X, о которых говорится в пункте (в) следствия 1, называется *производной* μ относительно P и обозначается $d\mu/dP$. Эта терминология оправдывается тем фактом, что мера μ есть интеграл (относительно P) от ее производной. (Терминология эта распространяется также на случай, когда мера μ не является абсолютно непрерывной по P. Предостережем читателя, что в этом случае μ

не является интегралом от своей производной.) Наконец, часто удобно записывать условие (в) следствия 1 в следующей краткой форме: $\mu = X \cdot P$ на $(\Omega, \mathcal{A})$.

Следствие 2. *Отображение $X \to X \cdot P$, сопоставляющее классу интегрируемых д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ограниченную меру $X \cdot P$, есть изометрия пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ на подпространство пространства $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$, образованное абсолютно непрерывными по P мерами ($\mathcal{M}$ наделяется при этом нормой $\|\cdot\|_1$, введенной в предложении* IV. 1.2).

Доказательство. Утверждение этого следствия непосредственно вытекает из следствия 1 и того обстоятельства, что полная вариация меры $X \cdot P$ равна $|X| \cdot P$, так что

$$\|X \cdot P\|_1 = \int |X| \, dP. \blacksquare$$

Следствие 2 позволяет завершить доказательство предложения IV. 1.2, т. е. показать, что пространство $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ полно. В самом деле, пусть $\{\mu_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{M}$. Положим

$$P = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|\mu_n\|_1} |\mu_n|.$$

Очевидно, меры μ_n абсолютно непрерывны относительно вероятности P. Согласно следствию 2, производные $d\mu_n/dP$ образуют последовательность Коши в пространстве $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, так что существует предел $X = \lim\limits_{n \to \infty} d\mu_n/dP$ в смысле нормы пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, поскольку это пространство полно; ясно, что при этом

$$X \cdot P = \lim_{n \to \infty} \mu_n \quad \text{в} \quad \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A}).$$

Следующий результат, являющийся небольшим обобщением следствия 1, полезен в теории вероятностей.

Предложение IV. 1.4 (Радон—Никодим). *Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ — вероятностное пространство и μ — мера на $(\Omega, \mathcal{A})$, такая, что $\mu(N) = 0$ для всякого нулевого* *множества из* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Тогда существует единственная с точностью до эквивалентности д. с. в.* X, *такая, что д. с. в.* X^- *интегрируема на* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *и*

$$\mu(A) = \int_A X\,dP \qquad (A \in \mathcal{A}).$$

Для того чтобы д. с. в. X *была положительной (интегрируемой), необходимо и достаточно, чтобы мера* μ *была положительной (ограниченной). Для того чтобы д. с. в.* X *была конечной, необходимо и достаточно, чтобы существовала возрастающая последовательность* $\{C_n,\ n \geqslant 1\}$ *подмножеств* Ω, *в объединении дающих* Ω, *такая, что* $\mu(C_n) < \infty$ $(n \geqslant 1)$ *(т. е. чтобы мера* μ *была* σ*-конечной).*

Доказательство. В случае когда мера μ положительна и ограничена, утверждение предложения сводится к следствию 1. Пусть μ — положительная мера с $\mu(\Omega) = \infty$; положим $\mathcal{C} = \{C\colon \mu(C) < \infty\}$. Поскольку класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно объединений, мы можем выбрать возрастающую последовательность $\{C_n,\ n \geqslant 1\}$ множеств из $\mathcal{C}$, такую, что $\lim\uparrow P(C_n) = \sup\{P(C),\ C \in \mathcal{C}\}$. Пусть μ_n $(n \geqslant 1)$ — положительная ограниченная мера, определяемая формулой $\mu_n(A) = \mu[A(C_n - C_{n-1})]$, $A \in \mathcal{A}$ $(C_0 = \varnothing)$. Легко видеть, что

$$\mu(A) = \sum_n \mu_n(A), \quad \text{если} \quad P\left(A \cap \left(\bigcup_n C_n\right)^c\right) = 0,$$

и что $\mu(A) = \infty$ в противном случае. По следствию 1, примененному к μ_n, существует положительная интегрируемая д. с. в. X_n, такая, что

$$\mu_n(A) = \int_A X_n\,dP, \quad X_n = 0 \quad \text{п. н. на } (C_n - C_{n-1})^c.$$

Определим д. с. в. X, положив $X = X_n$ на $C_n - C_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ и $X = +\infty$ на $\left(\bigcup_n C_n\right)^c$. Ясно, что $\mu(A) = \int_A X\,dP$ при всех $A \in \mathcal{A}$. Более того, X интегрируема тогда и только тогда, когда мера μ ограничена, и X п. н. конечна тогда и только тогда, когда $P\left(\bigcup_n C_n\right) = 1$.

Случай, когда мера μ не является положительной, с помощью предложения IV.1.1. сводится к случаю, когда $\mu \geqslant 0$. Отметим, что если $\mu(A) = \int\limits_A X\,dP$ на $\mathcal{A}$, то $\mu^+(A) = \int\limits_A X^+\,dP$ на $\mathcal{A}$. ∎

Дополнения и упражнения

IV.1.1. Пусть μ — *ограниченная* мера на $(\Omega, \mathcal{A})$. Доказать непосредственно, не используя результатов настоящего пункта, что

(1) μ^+ и μ^- — положительные ограниченные меры и $\mu = \mu^+ - \mu^-$;

(2) существует множество D, для которого $\mu^+(A) = \mu(AD)$, $\mu^-(A) = -\mu(AD^c)$. [Показать, что если $\{D_n\}$ — последовательность множеств из $\mathcal{A}$, такая, что $\sum\limits_n [\mu^+(\Omega) - \mu(D_n)] < \infty$, то множество $D = \limsup D_n$ удовлетворяет этому требованию.]

IV.1.2. Пусть P, $Q = X \cdot P$ — две вероятности на $(\Omega, \mathcal{A})$. Построить лебегово разложение P по отношению к Q в терминах X. Показать, что отображение $u_p(f) = f \cdot X^{1/p}$ есть изометрия пространства $L_p(\Omega, \mathcal{A}, Q)$ в пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ для любого p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ $\left(X^{1/\infty}\right.$ определяется как $\left.1_{\{X \neq 0\}}\right)$.

Две вероятности называются *эквивалентными*, если отвечающие им семейства нулевых множеств совпадают. (Так определенная эквивалентность совпадает с эквивалентностью задаваемой отношением частичной упорядоченности $\ll$.) Для того чтобы вероятности P и Q были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы $Q \ll P$ и чтобы множество $\{dQ/dP = 0\}$ было P-нулевым. Показать также, что u_p есть изометрия $L_p(Q)$ на $L_p(P)$ тогда и только тогда когда P и Q эквивалентны.

IV.1.3. Пусть $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ — произвольное семейство вероятностей на $(\Omega, \mathcal{A})$. Показать, что если существует вероятность, относительно которой все вероятности P_θ абсолютно непрерывны, то существует обладающая этим свойством вероятность, имеющая вид

$$P = \sum_\theta a_\theta P_\theta, \quad \text{где} \quad a_\theta \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \sum_\theta a_\theta = 1.$$

[При $P_\theta \ll Q$ выбрать a_θ так, чтобы для счетного множества $\Theta_0 = \{\theta;\ a_\theta \neq 0\}$ было $\operatorname{ess\,sup}\limits_\Theta \{dP_\theta/dQ > 0\} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{\Theta_0} \{dP_\theta/dQ > 0\}$.] Если множество Θ счетно, то всегда существует вероятность P, по отношению к которой все вероятности P_θ абсолютно непрерывны. Для существования такой вероятности P достаточно также, чтобы существовало счетное подмножество Θ_0 множества Θ, такое, что семейство $\{P_\theta, \theta \in \Theta_0\}$ плотно в семействе $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ в топологии, порожденной нормой банахова пространства $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.

IV. 1.4. Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство. Рассмотрим пары (X, P), состоящие из вероятности P и д. с. в. X, для которых $\int X^2 \, dP < \infty$. Две пары (X, P) и (X', P') назовем *эквивалентными*, если для некоторой (а тогда и для всякой) вероятности Q, такой, что $P \ll Q$ и $P' \ll Q$, множество

$$\left\{X\sqrt{\frac{dP}{dQ}} \neq X'\sqrt{\frac{dP'}{dQ}}\right\}$$

является Q-нулевым. Поскольку пары $(X, Y \cdot P)$ и $(XY^{1/2}, P)$ при $Y \geqslant 0$ эквивалентны, мы предпочтем для пары (X, P) более выразительное обозначение $X\sqrt{P}$. Показать, что пространство классов эквивалентности пар $X\sqrt{P}$ есть гильбертово пространство H относительно скалярного произведения

$$\langle X\sqrt{P}, X'\sqrt{P'}\rangle = \int XX'\sqrt{\frac{dP}{dQ}}\sqrt{\frac{dP'}{dQ}}\,dQ,$$

не зависящего от выбора вероятности Q, для которой $P \ll Q$, $P' \ll Q$. Показать далее, что для всякой вероятности P отображение $X \to X\sqrt{P}$ есть изометрия пространства $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в H. Для каждого $p \neq 2$ аналогичным образом определить банахово пространство $X\sqrt[p]{P}$ так, чтобы оно изометрически продолжало пространство $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

IV. 1.5. Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра подмножеств Ω и m — аддитивное отображение $\mathcal{A}$ в R_+. Формула

$$\mu(A) = \inf \sum_I m(A_i),$$

где нижняя грань берется по всем счетным разбиениям $\{A_i, i \in I\}$ множества A на подмножества из $\mathcal{A}$, определяет положительную меру на $(\Omega, \mathcal{A})$, которая может быть охарактеризована как наибольшая положительная мера на $(\Omega, \mathcal{A})$, мажорируемая m. Показать также, что если $\mathcal{A}$ есть σ-алгебра и ν — положительная мера на $\mathcal{A}$, сингулярная относительно μ, то для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, для которого $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $\nu(A_\varepsilon^c) = 0$.

IV. 1.6. *Линейное пространство* $B(\Omega, \mathcal{A})$ определенных на $(\Omega, \mathcal{A})$ ограниченных д. с. в. с нормой $\|X\| = \sup\limits_\Omega |X(\omega)|$ является банаховым пространством (вообще говоря, отличным от пространств $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$). Показать, что интеграл $\int X\,d\mu$ является билинейным функционалом на банаховых пространствах $B(\Omega, \mathcal{A})$ и $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$, причем

$$\|\mu\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\left|\int X\, d\mu\right|}{\|X\|}, \quad \|X\| = \sup_{\mu \neq 0} \frac{\left|\int X\, d\mu\right|}{\|\mu\|}.$$

Вывести отсюда, что пространство $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ [$B(\Omega, \mathcal{A})$] изометрично замкнутому линейному подпространству (вообще говоря, собственному подпространству) сильного сопряженного к пространству $B(\Omega, \mathcal{A})$ [$\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$].

IV.2. Двойственность пространств L_p и ослабленная топология в пространстве L_1

Следующее предложение, являющееся следствием теоремы Радона — Никодима, утверждает, что сопряженным к банахову пространству $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ классов эквивалентности д. с. в., p-е степени модулей которых интегрируемы ($1 \leqslant p < \infty$), является пространство $L_{p'}(\Omega, \mathcal{A}, p)$, где p' определяется уравнением $1/p + 1/p' = 1$. Сопряженное к $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ пространство содержит пространство $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, но, вообще говоря, с ним не совпадает. (L_1 является сопряженным к L_∞ лишь в том случае, когда булева метрическая алгебра $\mathcal{A}/P$ конечна; в этом случае все пространства L_p изоморфны некоторому евклидову пространству.)

Предложение IV.2.1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и пусть p' удовлетворяет уравнению $1/p + 1/p' = 1$. Всякая д. с. в. (класс эквивалентных д. с. в.)*

$$Y \in L_{p'}(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

определяет непрерывный линейный функционал F на L_p по формуле

$$F(X) = \int XY\, dP \qquad (X \in L_p).$$

Более того, норма функционала F, $\|F\| = \sup\{|F(X)|, \|X\|_p \leqslant 1\}$, равна $\|Y\|_{p'}$.

Обратно, при $1 \leqslant p < \infty$ всякий непрерывный линейный функционал на L_p может быть представлен в таком виде.

Доказательство. Согласно неравенству Гёльдера, если $Y \in L_{p'}$, то д. с. в. XY интегрируема при всех $X \in L_p$ и $\left|\int XY\right| \leqslant \|X\|_p \|Y\|_{p'}$. Отсюда, очевидно, вытекает, что указанная в формулировке предложения формула определяет непрерывный линейный функционал на L_p, причем $\|F\| \leqslant \|Y\|_{p'}$. Покажем, что обратное неравенство справедливо при $Y \neq 0$. Если $p > 1$, то, как нетрудно убедиться, $Z = \varepsilon(Y)|Y|^{p'-1}$ (где $\varepsilon(Y) = +1$ при $Y \geqslant 0$ и $\varepsilon(Y) = -1$ при $Y < 0$) есть д. с. в. из L_p, такая, что $\|Z\|_p = (\|Y\|_{p'})^{p'-1}$ и

$$\|F\|\|Z\|_p \geqslant |F(Z)| = \int |Y|^{p'} = (\|Y\|_{p'})^{p'};$$

следовательно, $\|F\| \geqslant \|Y\|_{p'}$. Проведенное рассуждение справедливо и в случае $p = \infty$, при этом Z полагается равной $\varepsilon(Y)$ и $\|Z\|_\infty = 1$. При $p = 1$ для любого $\eta > 0$ положим $Z_\eta = \varepsilon(Y)\, 1_{\{|Y| \geqslant \|Y\|_\infty - \eta\}}$. Имеем

$$\|Z_\eta\|_1 = P(|Y| \geqslant \|Y\|_\infty - \eta) > 0$$

и $\|F\|\|Z_\eta\|_1 \geqslant |F(Z_\eta)| = \int\limits_{\{|Y| \geqslant \|Y\|_\infty - \eta\}} |Y|$, откуда $\|F\| \geqslant$ $\geqslant \|Y\|_\infty - \eta$ при всех $\eta > 0$.

Обратно, если $p < \infty$ и F — непрерывный линейный функционал на L_p, то формула $\varphi(A) = F(1_A)$ $(A \in \mathcal{A})$ определяет аддитивную функцию множеств на $\mathcal{A}$, удовлетворяющую условию $|\varphi(A)| \leqslant \|F\| [P(A)]^{1/p}$. В силу этого условия функция φ есть ограниченная абсолютно непрерывная относительно P мера (она непрерывна в $\varnothing$). По теореме Радона — Никодима существует интегрируемая д. с. в. Y, такая, что $\varphi(A) = \int\limits_A Y\,dP$, т. е. такая, что $F(X) = \int YX$, какова бы ни была ступенчатая д. с. в. X.

Покажем, далее, что $Y \in L_{p'}$. Предположим сначала, что $p > 1$, т. е. что $p' < \infty$.

Пусть $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность положительных ступенчатых д. с. в., такая, что

$|Y| = \lim\limits_{n\to\infty} \uparrow X_n$. Поскольку $\varepsilon(Y)(X_n)^{p'-1}$ — ступенчатая д. с. в., то как и выше имеем

$$\int (X_n)^{p'} \leqslant F\left[\varepsilon(Y) X_n^{p'-1}\right] \leqslant \|F\| (\|X_n\|_{p'})^{p'-1},$$

откуда $\|X_n\|_{p'} \leqslant \|F\|$ и, следовательно, $Y \in L_{p'}$, так как

$$\|Y\|_{p'} = \lim_{n\to\infty} \uparrow \|X_n\|_{p'}.$$

При $p' = \infty$ имеем аналогично $\|Y\|_\infty \leqslant \|F\|$. В самом деле, в противном случае ступенчатая д. с. в. $X = \varepsilon(Y) 1_{\{|Y| > \|F\|\}}$ была бы отлична от нуля и мы имели бы

$$F(X) = \int\limits_{\{|Y| > \|F\|\}} |Y| > \|F\| P(|Y| > \|F\|) = \|F\| \int |X|,$$

в противоречие с определением $\|F\|$. Таким образом, $F(X)$ и $\int YX$ $(X \in L_p)$ — два непрерывных линейных функционала на L_p, совпадающие на плотном подпространстве пространства L_p, состоящем из ступенчатых д. с. в., и потому совпадающие всюду на L_p. ∎

Из доказательства предложения IV.2.1 вытекает также такое

Следствие. *Для того чтобы непрерывный линейный функционал F на $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$ был представим в виде $F(X) = \int YX$, где $Y \in L_1$, необходимо и достаточно, чтобы аддитивная функция множеств $F(1_A)$ была σ-аддитивна на $\mathcal{A}$.*

Дальнейшая часть настоящего пункта[1]) посвящена изучению ослабленной топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$ в пространстве L_1, индуцированной сильным сопряженным к L_1 пространством L_∞. В частности, будет получен критерий компактности в L_1 относительно этой топологии. В связи с этим напомним, что в пространстве L_p $(p > 1)$ мно-

[1]) Излагаемые далее результаты этого пункта впоследствии использоваться не будут.

жество H относительно компактно в ослабленной топологии $\sigma(L_p, L_{p'})$ тогда и только тогда, когда оно ограничено (этот результат является следствием одной общей теоремы из теории банаховых пространств и того факта, что L_p есть сильное сопряженное к $L_{p'}$).

Предложение IV.2.2. *Всякая последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ интегрируемых д. с. в., такая, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A X_n$ существуют и конечны для любого множества $A \in \mathcal{A}$, равномерно интегрируема. Более того, последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ сходится в смысле топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$ к некоторой интегрируемой д. с. в. X, так что, в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_A X_n = \int\limits_A X$.*

(Для обобщенной последовательности д. с. в. соответствующее предложение неверно, если обобщенная последовательность не имеет счетной базы.)

Доказательство. Утверждение предложения является весьма глубоким результатом и доказывается с помощью теоремы Бэра о категориях в применении к булевой метрической алгебре $\mathcal{A}/P$, являющейся полным метрическим пространством. Напомним, что элементы этого метрического пространства суть классы P-эквивалентности множеств $A \in \mathcal{A}$ и что расстояние в нем задается метрикой $P(A \triangle A')$. Отметим еще, что для любой интегрируемой д. с. в. X отображение $A \to \int\limits_A X$ пространства $\mathcal{A}/P$ в R (равномерно) непрерывно, поскольку

$$\left| \int\limits_A X - \int\limits_{A'} X \right| \leqslant \int\limits_{A \triangle A'} |X| \to 0 \quad \text{при} \quad P(A \triangle A') \to 0,$$

и, следовательно, множество $\left\{A : \left| \int\limits_A X \right| \leqslant \varepsilon \right\}$ замкнуто в $\mathcal{A}/P$ для любого $\varepsilon > 0$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. В силу сделанного предположения объединение замкнутых множеств

$$F_N = \bigcap_{\substack{m \geqslant N \\ n \geqslant N}} \left\{ A: \left| \int_A (X_m - X_n) \right| \leqslant \varepsilon \right\}$$

в $\mathcal{A}/P$ совпадает со всем пространством $\mathcal{A}/P$. По теореме Бэра о категориях существует целое число, скажем N_0, такое, что множество F_{N_0} имеет внутреннюю точку. Иными словами, существуют целое число N_0, элемент $A_0 \in \mathcal{A}/P$ и действительное число $r > 0$, такие, что

$$\left| \int_A (X_m - X_n) \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad m, n \geqslant N_0 \quad \text{и} \quad P(A \triangle A_0) \leqslant r.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_B |X_m - X_n| \leqslant 4\varepsilon \quad \text{при} \quad m, n \geqslant N_0 \quad \text{и} \quad P(B) \leqslant r.$$

В самом деле, в силу соотношений

$$(A_0 \cup B) \triangle A_0 \subset B, \quad (A_0 \cap B^c) \triangle A_0 \subset B,$$

$$\int_B X = \int_{A_0 \cup B} X - \int_{A_0 \cap B^c} X$$

и условия $P(B) \leqslant r$ имеем $\left| \int_B (X_m - X_n) \right| \leqslant 2\varepsilon$ при m, $n \geqslant N_0$. Применяя это неравенство к множествам $B\{X_m \geqslant X_n\}$ и $B\{X_m < X_n\}$, получаем нужный результат.

Поскольку конечная последовательность $\{X_m, 1 \leqslant m \leqslant N_0\}$ равномерно интегрируема, для достаточно малого $r' > 0$ имеем

$$\int_B |X_m| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m \leqslant N_0 \quad \text{и} \quad P(B) \leqslant r'.$$

Сопоставляя этот факт с полученным выше результатом и используя неравенство треугольника, находим, что для всех $m \geqslant 1$

$$\int_B |X_m| \leqslant 5\varepsilon \quad \text{при} \quad P(B) \leqslant \min(r, r').$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ мы показали тем самым, что последовательность $\{X_m, m \geqslant 1\}$ равномерно абсолютно непрерывна.

Для доказательства равномерной интегрируемости последовательности $\{X_m, m \geqslant 1\}$ осталось установить, что $\sup_n \int |X_n| < \infty$ (см. предложение II.5.2). Рассмотрим конечное разбиение пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, состоящее из множеств A_i, $i \in I$, вероятности которых не превосходят $\min(r, r')$, и из атомов A_j, $j \in J$ (см. упражнение I.4.5). Поскольку величины X_n суть константы на A_j и поскольку пределы $\lim_{n \to \infty} \int_{A_j} X_n$ существуют, постольку

$$\sup_n \int_{A_j} |X_n| < \infty \quad \text{при} \quad j \in J.$$

Суммируя теперь по элементам разбиения, получаем нужный результат.

Наконец, положим $Q(A) = \lim_{n \to \infty} \int_A X_n$, $A \in \mathcal{A}$. Функция множеств Q, очевидно, аддитивна. Из равномерной абсолютной непрерывности последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ вытекает, что Q есть мера, абсолютно непрерывная по отношению к P. По теореме Радона — Никодима существует интегрируемая д. с. в. X, для которой $Q(A) = \int_A X$. Имеем, таким образом, $\lim_{n \to \infty} \int X_n Y = \int XY$ для любой индикаторной д. с. в. $Y = 1_A$ и, следовательно, для любой ступенчатой д. с. в. Y. Так как всякая ограниченная д. с. в. Z есть предел по норме пространства L_∞ некоторой последовательности $\{Y_q, q \geqslant 1\}$ ступенчатых д. с. в., то, принимая во внимание ограниченность последовательности $\{X_n\}$ в пространстве L_1, имеем

$$\left| \int X_n Z - \int XZ \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int X_n Y_q - \int XY_q \right| + \int |X_n| |Z - Y_q| + \int |X| |Z - Y_q| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int X_n Y_q - \int XY_q \right| + \left[\sup_n \int |X_n| + \int |X| \right] \| Z - Y_q \|_\infty \to 0,$$

когда $n \to \infty$ и затем $q \to \infty$. ∎

Переформулируем теперь полученные результаты в терминах мер.

Следствие 1 (теорема Витали—Хана—Сакса). *Если последовательность вероятностей* $\{P_n, n \geqslant 1\}$, *определенных на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathcal{A})$, *такова, что предел* $Q(A) = \lim_{n \to \infty} P_n(A)$ *существует при всех* $A \in \mathcal{A}$, *то* Q *есть вероятность на* $(\Omega, \mathcal{A})$. *Более того,* $\sup_n P_n(A) \downarrow 0$ *при* $A \downarrow \varnothing$, $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Положим

$$P = \sum_{n \geqslant 1} \cdot 2^{-n} P_n.$$

Очевидно, P есть вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$ и по теореме Радона — Никодима существуют интегрируемые д. с. в. X_n $(n \geqslant 1)$, такие, что $P_n = X_n \cdot P$. Для завершения доказательства остается лишь применить предыдущее предложение к последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$. ∎

Следствие 2. *Для того чтобы последовательность* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *интегрируемых д. с. в. сходилась в топологии* $\sigma(L_1, L_\infty)$ *к интегрируемой д. с. в.* X, *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim_{n \to \infty} \int_A X_n = \int_A X$ *при всех* $A \in \mathcal{A}$.

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна, а достаточность его вытекает из предложения IV.2.2. ∎

Следствие 3 (критерий Коши для последовательностей в топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$). *Для того чтобы последовательность* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *интегрируемых д. с. в. сходилась в топологии* $\sigma(L_1, L_\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши в этой топологии.*

(Таким образом, пространство L_1 с топологией $\sigma(L_1, L_\infty)$, полно в смысле сходимости последовательностей.)

Доказательство. Необходимость условия очевидна. С другой стороны, если $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность Коши в топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \int X_n Y$ существует при всех $Y \in L_\infty$, так что достаточность условия вытекает из предложения IV.2.2. ∎

Предложение IV.2.3. *Подмножество H пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ относительно компактно в ослабленной топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$ тогда и только тогда, когда оно равномерно интегрируемо.*

Доказательство. Для доказательства необходимости рассмотрим подмножество H пространства L_1, не являющееся равномерно интегрируемым. Мы можем выбрать из множества H последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$, такую, что для некоторого $\eta > 0$

$$\int\limits_{\{|X_n| > n\}} |X_n| \geqslant \eta$$

при всех $n \geqslant 1$. Ясно, что никакая подпоследовательность последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ не является равномерно интегрируемой и поэтому, согласно предложению IV.2.2, не сходится в топологию $\sigma(L_1, L_\infty)$. Следовательно, по теореме Эберлейна множество H не может быть относительно компактным в L_1.

Для доказательства достаточности вложим пространство L_1 в пространство, сопряженное к L_∞. Множество H, будучи равномерно интегрируемым, ограничено в L_1, а следовательно, и в пространстве, сопряженном к L_∞. Отсюда вытекает, что замыкание $\overline{H}$ множества H в топологии $\sigma((L_\infty)', L_\infty)$ в сопряженном к L_∞ пространстве компактно в этой топологии. Поскольку эта топология индуцирует ослабленную топологию $\sigma(L_1, L_\infty)$ на $L_1 (\subset (L_\infty)')$, для завершения доказательства достаточно показать, что $\overline{H} \subset L_1$. Всякий элемент $F \in \overline{H}$ есть непрерывный линейный функционал на L_∞ и является пределом (обобщенной последовательности) функционалов

$$F_\alpha(Y) = \int X_\alpha Y \qquad (Y \in L_\infty,\ X_\alpha \in H);$$

поэтому в силу равномерной абсолютной непрерывности $\overline{H}$ имеем

$$P(A)\leqslant\delta\Rightarrow\sup_{X\in H}\int_A|X|\leqslant\varepsilon\Rightarrow F(1_A)\leqslant\varepsilon.$$

Применяя теперь следствие предложения IV.2.1, получаем $F\in L_1$, так что $\overline{H}\subset L_1$. ∎

Следствие. *Для того чтобы ограниченное подмножество H пространства $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$ было относительно компактно в ослабленной топологии $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$, необходимо и достаточно, чтобы существовала вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})$, такая, что при любом $\varepsilon>0$ и достаточно малом $\delta(\varepsilon)>0$*

$$P(A)\leqslant\delta(\varepsilon)\Rightarrow|\lambda(A)|\leqslant\varepsilon \quad \text{для всех} \quad \lambda\in H.$$

[*Множество H при этом необходимо содержится в подпространстве $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ пространства $\mathcal{M}$.*]

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна, так как из него вытекает, что H содержится в $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и относительно компактно в топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$. [Топология $\sigma(L_1, L_\infty)$ совпадает с топологией, индуцированной на L_1 топологией $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$.]

Для доказательства необходимости покажем сначала, что для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta>0$ и конечное семейство мер $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ из H, такие, что

$$|\lambda_l|(A)\leqslant\delta \quad (1\leqslant l\leqslant m)\Rightarrow|\lambda(A)|\leqslant\varepsilon \quad \text{при всех} \quad \lambda\in H.$$

В самом деле, если бы такого δ и таких мер не существовало, то по индукции можно было бы построить последовательность $\{\lambda_p\}$ мер из H и последовательность множеств $\{A_p\}$, таких, что

$$|\lambda_m|(A_p)\leqslant 2^{-p} \quad (1\leqslant m\leqslant p), \quad |\lambda_{p+1}(A_p)|\geqslant\varepsilon.$$

Положив $P=\sum_1^\infty(1/2^p\|\lambda_p\|)|\lambda_p|$, мы получили бы последовательность $\{\lambda_p\}$ элементов пространства $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, содержащуюся в H и поэтому относительно компактную в топологии $\sigma(L_1, L_\infty)$. Последовательность $\{d\lambda_p/dP\}$

должна поэтому быть равномерно интегрируемой в $L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, что невозможно, поскольку $P(A_p) \to 0$ и $|\lambda_{p+1}(A_p)| \geqslant \varepsilon$.

Пусть для каждого $\varepsilon = 1/n$ числа $\delta_n > 0$ и меры $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{m_n}^{(n)}$ удовлетворяют указанному выше условию. Выберем постоянные $a_j^{(n)}$ $(1 \leqslant j \leqslant m_n;\ n \geqslant 1)$ так, чтобы формула $P = \sum\limits_{j,n} a_j^{(n)} |\lambda_j^{(n)}|$ определяла вероятность. Для любого заданного n, беря δ достаточно малым, имеем

$$P(A) \leqslant \delta \Rightarrow |\lambda_j^{(n)}|(A) \leqslant \delta_n \quad (1 \leqslant j \leqslant m_n) \Rightarrow |\lambda(A)| \leqslant 1/n$$

при всех $\lambda \in H$, что и завершает доказательство необходимости. ∎

Дополнения и упражнения

*IV. 2.1. ***Векторные меры.*** Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство и E — банахово пространство. Отображение μ σ-алгебры $\mathcal{A}$ в пространство E называется *векторной мерой*, если для любого $x' \in E'$ (E' — сопряженное к E пространство) функция множеств $\langle x', \mu(\cdot)\rangle$ является ограниченной мерой на $(\Omega, \mathcal{A})$. Показать, что существует по меньшей мере одна вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})$, такая, что $P(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \theta$ (здесь θ — нулевой элемент пространства E) и что $\mu\left(\sum\limits_i A_i\right) = \sum\limits_i \mu(A_i)$ в смысле сильной сходимости в E для любого счетного семейства $\{A_i, i \in I\}$ попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{A}$. [Используя теорему Эберлейна и предложение IV. 2.2, показать, что семейство мер $\{\langle x', \mu(\cdot)\rangle;\ x' \in U\}$, где U — единичный шар в E', компактно в $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{A})$.]

IV. 2.2. Показать, что пространство непрерывных линейных отображений пространства $L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ в пространство $L_q(\Omega', \mathcal{A}', P')$ является банаховым пространством и полной структурой относительно естественного отношения порядка; верхняя грань $T_1 \vee T_2$ двух таких отображений T_1 и T_2 может быть определена на $(L_p)_+$ формулой

$$T_1 \vee T_2(f) = \sup\{T_1 g + T_2(f-g);\ 0 \leqslant g \leqslant f\} \quad (f \in (L_p)_+).$$

Пусть $p, q < \infty$ и T — отображение рассматриваемого типа. Обозначим через T^* сопряженное к T отображение, действующее из $L_{q'}(\Omega', \mathcal{A}', P')$ в $L_{p'}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Показать, что $(T_1 \vee T_2)^* = T_1^* \vee T_2^*$.

IV.3. Условные математические ожидания

На протяжении этого пункта вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ будет фиксированным, а $\mathcal{B}$ будет обозначать некоторую σ-подалгебру σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Если μ — положительная мера на $(\Omega, \mathcal{A})$, абсолютно непрерывная относительно P, то ограничение $\mu_{\mathcal{B}}$ меры μ на $(\Omega, \mathcal{B})$ абсолютно непрерывно относительно ограничения $P_{\mathcal{B}}$ вероятности P. Пусть X — единственная с точностью до эквивалентности положительная д. с. в., такая, что $\mu = X \cdot P$. Определим д. с. в. $E^{\mathcal{B}}X$ условием $\mu_{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{B}}X \cdot P$ на $(\Omega, \mathcal{B})$. Это определение $E^{\mathcal{B}}X$ (иногда вместо $E^{\mathcal{B}}X$ используют обозначение $E(X|\mathcal{B})$), равно как и приводимое ниже эквивалентное определение, обосновывается теоремой Радона — Никодима.

Определение IV.3.1. *Пусть X — положительная д. с. в. (класс эквивалентности положительной д. с. в.) на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Условным математическим ожиданием $E^{\mathcal{B}}X$ величины (класса) X по отношению к σ-подалгебре $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ называется единственная с точностью до эквивалентности д. с. в. (единственный класс эквивалентности д. с. в.) на $(\Omega, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, такая (такой), что*

$$\int_B X\,dP = \int_B E^{\mathcal{B}}X\,dP_{\mathcal{B}} \quad (B \in \mathcal{B}),$$

или, что равносильно, такая (такой), что $\int XZ\,dP = \int (E^{\mathcal{B}}X) Z\,dP_{\mathcal{B}}$ для любой положительной и $\mathcal{B}$-измеримой д. с. в. Z.

(Первое равенство определения IV.3.1 влечет второе для любой индикаторной д. с. в. $Z = 1_B$ $(B \in \mathcal{B})$, следовательно, в силу линейности, для любой положительной $\mathcal{B}$-измеримой ступенчатой д. с. в., и потому, в силу монотонной непрерывности, для любой положительной $\mathcal{B}$-измеримой д. с. в.)

Так как $E(E^{\mathcal{B}}X) = E(X)$, то положительная д. с. в. $E^{\mathcal{B}}X$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема величина X. Это замечание позволяет распространить данное выше определение на квазиинтегрируемые д. с. в. посредством формулы $E^{\mathscr{B}}X = E^{\mathscr{B}}(X^+) - E^{\mathscr{B}}(X^-)$.

Пусть B — атом пространства $(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$ (если таковой существует). Поскольку всякая $\mathscr{B}$-измеримая д. с. в. п. н. постоянна на B, то

$$E^{\mathscr{B}}X \underset{\text{п. н.}}{=} \frac{1}{P(B)} \int_B X\,dP \text{ на } B.$$

В частном случае, когда σ-алгебра $\mathscr{B}$ порождается счетным разбиением $\{B_i, i \in I\}$ пространства $(\Omega, \mathscr{A})$, эта формула полностью определяет $E^{\mathscr{B}}X$ на Ω. Посредством этой формулы и определяется условное математическое ожидание в элементарной теории вероятностей.

Условное математическое ожидание д. с. в. (класса эквивалентности д. с. в.) есть д. с. в. (класс эквивалентности д. с. в.), в то время как математическое ожидание д. с. в. (класса эквивалентности д. с. в.) есть действительное число. За исключением этого единственного отличия, свойства условного математического ожидания вполне аналогичны свойствам математического ожидания [заметим, между прочим, что $E^{\mathscr{B}_0}X = EX$ для $\mathscr{B}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$]. Мы просто перечислим их, оставляя проверку читателю.

а) $E^{\mathscr{B}}X \geqslant 0$ п. н., если $X \geqslant 0$ п. н.; $E^{\mathscr{B}}X \underset{\text{п. н.}}{=} 0$, если $X \underset{\text{п. н.}}{=} 0$;
$E(E^{\mathscr{B}}X) = EX$; $E^{\mathscr{B}}X$ интегрируемо тогда и только тогда, когда X интегрируема;
$E^{\mathscr{B}}(1) \underset{\text{п. н.}}{=} 1$;

б) $E^{\mathscr{B}}(cX) = cE^{\mathscr{B}}(X)$ при всех $c \in R$;
$E^{\mathscr{B}}(X_1 + X_2) \underset{\text{п. н.}}{=} E^{\mathscr{B}}(X_1) + E^{\mathscr{B}}(X_2)$, если X_1^- и X_2^- или если X_1^+ и X_2^+ интегрируемы;

в) $X_1 \leqslant X_2$ п. н. $\Rightarrow E^{\mathscr{B}}X_1 \leqslant E^{\mathscr{B}}X_2$ п. н.;

г) $X_n \uparrow X$ п. н. $\Rightarrow E^{\mathscr{B}}X_n \uparrow E^{\mathscr{B}}X$ п. н., если $E(X_n^-) < \infty$ хотя бы для одного n;
$X_n \downarrow X$ п. н. $\Rightarrow E^{\mathscr{B}}X_n \downarrow E^{\mathscr{B}}X$ п. н., если $E(X_n^+) < \infty$ хотя бы для одного n.

(Формулировка этих свойств несколько упрощается, если рассматривать лишь интегрируемые д. с. в.). Из свойств (в) и (г) вытекает **обобщенная лемма Лебега — Фату**:

Если $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность д. с. в., а Y, Z — интегрируемые д. с. в., то

$$Y \leqslant X_n \text{ п. н. } (n \geqslant 1) \Rightarrow E^{\mathscr{B}}\left(\liminf_n X_n\right) \leqslant \liminf_n E^{\mathscr{B}}(X_n) \text{ п. н.},$$

$$X_n \leqslant Z \text{ п. н. } (n \geqslant 1) \Rightarrow \limsup_n E^{\mathscr{B}}(X_n) \leqslant E^{\mathscr{B}}\left(\limsup_n X_n\right) \text{ п. н.}$$

Если последовательность $\{X_n, n \geqslant 1\}$ д. с. в. сходится и мажорирована по абсолютной величине интегрируемой д. с. в. U, т. е. $|X_n| \leqslant U$ $(n \geqslant 1)$, то

$$E^{\mathscr{B}}\left(\lim_n X_n\right) \underset{\text{п. н.}}{=} \lim_n E^{\mathscr{B}} X_n.$$

Следующие свойства специфичны для условных математических ожиданий[1]):

(1) Если д. с. в. X является $\mathscr{B}$-измеримой, то $E^{\mathscr{B}} X \underset{\text{п. н.}}{=} X$; более того, $E^{\mathscr{B}}(XY) \underset{\text{п. н.}}{=} XE^{\mathscr{B}} Y$ для любой д. с. в. Y на $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(2) $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2 \Rightarrow E^{\mathscr{B}_1}(E^{\mathscr{B}_2} X) = E^{\mathscr{B}_1} X = E^{\mathscr{B}_2}(E^{\mathscr{B}_1} X)$.

Непосредственное обобщение леммы II.6.1 показывает, что $E^{\mathscr{B}}[\varphi(X)] \geqslant \varphi(E^{\mathscr{B}} X)$ для любой д. с. в. $X \geqslant 0$ и любой действительной непрерывной выпуклой функции φ на $[0, \infty]$. Следовательно, условные моменты $E^{\mathscr{B}}(|X|^p)$ д. с. в. обладают свойствами, аналогичными свойствам обычных моментов. В частности, мы имеем $E^{\mathscr{B}}(|X|^p) \geqslant (E^{\mathscr{B}}|X|)^p$ при всех p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и $E^{\mathscr{B}}|X| \geqslant |E^{\mathscr{B}} X|$. Из этих неравенств вытекает, что $E(|X|^p) = E(E^{\mathscr{B}}(|X|^p)) \geqslant E(|E^{\mathscr{B}} X|^p)$, т. е. что $\|X\|_p \geqslant \|E^{\mathscr{B}} X\|_p$ для любой д. с. в. (класса эквивалентности д. с. в.) $X \in L_p(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Вышесказанное вместе со свойствами (б) и (2) условного математического ожидания $E^{\mathscr{B}}$ приводит к следующему результату.

[1]) Предполагается, конечно, что интегралы от всех функций, стоящих под знаком (условного) математического ожидания, имеют смысл. — *Прим. перев.*

Предложение IV.3.1. *Ограничение условного математического ожидания $E^{\mathscr{B}}$ на пространство $L_p(\Omega, \mathscr{A}, P)$ $(p \geqslant 1)$ есть линейное идемпотентное преобразование с нормой 1 (проекция) пространства $L_p(\Omega, \mathscr{A}, P)$ на его подпространство $L_p(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$. В частности, условное математическое ожидание $E^{\mathscr{B}}$ на гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ есть ортогональная проекция пространства $L_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ на его подпространство $L_2(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$.*

Это последнее свойство иногда берется в качестве определения условного математического ожидания $E^{\mathscr{B}}$ на $L_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$, которое затем продолжается на все д. с. в., интеграл от которых имеет смысл, после чего без труда получаются различные свойства условного математического ожидания, установленные в настоящем пункте.

В случае когда σ-алгебра $\mathscr{B}$, по отношению к которой рассматривается условное математическое ожидание, порождается д. с. в. Z на $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, т. е. $\mathscr{B} = \mathscr{B}(Z)$, д. с. в. $E^{\mathscr{B}}X$ обозначают также $E(X \mid Z)$. Согласно предложению II.2.5 $E(X \mid Z)$ есть действительная измеримая функция от Z. Эту функцию иногда называют, выражаясь нестрого, *условным математическим ожиданием X относительно Z* (она определена, между прочим, лишь с точностью до эквивалентности относительно индуцированной вероятности $P \circ Z^{-1}$).

Дополнения и упражнения

IV.3.1. Показать, что для всякого замкнутого линейного подпространства H пространства $L_2(\Omega, \mathscr{A}, P)$, содержащего функцию, тождественно равную 1, следующие условия эквивалентны:

(1) существует σ-подалгебра $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathscr{A}$, такая, что $H = L_2(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$ [в этом случае автоматически $1 \in H$];

(2) проекция P_H пространства L_2 на H есть положительный оператор;

(3) H есть структура;

(4) $H \cap L_\infty(\Omega, \mathscr{A}, P)$ есть L_2-плотная в H алгебра. [Показать сначала, что (1) $\Rightarrow$ (2), (3) и (4); для доказательства импликации (2) $\Rightarrow$ (3) заметить, что для всякой функции $f \in H$ имеем $P_H(f^+) \geqslant (P_H f)^+ = f^+$ и, следовательно, $P_H f^+ = f^+$, поскольку $\| P_H \| \leqslant 1$;

для доказательства импликаций (3) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1) показать, что $\mathscr{B} = \{B\colon 1_B \in H\}$ есть σ-алгебра и что $H = L_2(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$].

Показать, что эндоморфизм T пространства $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ является условным математическим ожиданием тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим трем условиям:

а) $T[L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)] \subset L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$;

б) $T[f \cdot Tg] = Tf \cdot Tg$ при $f \in L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, P)$;

в) $E(Tf) = Ef$ при всех $f \in L_2$.

[Показать, что из первых двух условий вытекает, что $\{g\colon g \in L_\infty, T(fg) = Tf \cdot g$ при всех $f \in L_2\}$ есть замкнутая относительно монотонных переходов к пределу алгебра и поэтому имеет вид $L_\infty(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$, где $\mathscr{B}$ — некоторая σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Вывести отсюда, что $T[L_\infty(\mathcal{A})] \subset L_\infty(\mathscr{B})]$ и что $Tf = E^{\mathscr{B}}(f \cdot T^{*}1)$; наконец, воспользоваться условием (в).]

Показать, что всякое положительное идемпотентное сжатие T пространства $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, такое, что $T1 = 1$, есть условное математическое ожидание. [Вывести из первой части упражнения, что подпространство $\{f;\ Tf = f\}$ имеет вид $L_2(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$, где $\mathscr{B}$ — некоторая σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$. Показать, далее, что если $E^{\mathscr{B}}f = 0$, то Tf и f ортогональны и, следовательно, $Tf = 0$.]

IV.3.2. ***Сильная сходимость условных математических ожиданий на L_p.*** Показать, что для любых $p \in [1, \infty)$ и $X \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ семейство

$$\{|E^{\mathscr{B}}(X)|^p,\ \mathscr{B} \subset \mathcal{A}\},$$

где $\mathscr{B}$ — всевозможные σ-подалгебры σ-алгебры $\mathcal{A}$, равномерно интегрируемо. Пусть $\{\mathscr{B}_n\}$ — (обобщенная) последовательность σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$, такая, что предел $\lim\limits_n E^{\mathscr{B}_n}(1_A)$ существует для всех $A \in \mathcal{A}$ (или для всех A из полуалгебры, порождающей $\mathcal{A}$) в смысле сходимости по вероятности. Показать, что при всех $p \in [1, \infty)$ и $X \in L_p$ предел $\lim\limits_n E^{\mathscr{B}_n}(X)$ существует в смысле сходимости в L_p. Далее, используя упражнение IV.3.1, показать, что существует σ-подалгебра $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$, такая, что эти пределы равны $E^{\mathscr{B}}(1_A)$ и $E^{\mathscr{B}}(X)$ соответственно.

Показать, что для всякой монотонной (обобщенной) последовательности $\{\mathscr{B}_n\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ имеет место равенство $\lim E^{\mathscr{B}_n}(X) = E^{\mathscr{B}}(X)$ при всех $X \in L_p$ и всех $p \in [1, \infty)$, где в случае убывающей последовательности $\mathscr{B}$ есть пересечение σ-алгебр $\mathscr{B}_n$, а в случае возрастающей последовательности $\mathscr{B}$ есть σ-алгебра, порожденная $\{\mathscr{B}_n\}$. [Свести к случаю $p = 2$; в случае, например, возрастающей последовательности заметить, что указанная сходимость очевидна, когда X принадлежит одному из пространств $L_2\left(\Omega, \mathscr{B}_n, P_{\mathscr{B}_n}\right)$ или ортогонально к $L_2(\Omega, \mathscr{B}, P_{\mathscr{B}})$.]

IV.3.3. Показать, что для всякой положительной д. с. в. X, определенной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, и для всякой σ-подалгебры $\mathscr{B}$ σ-алгебры $\mathscr{A}$, содержащей все нулевые множества из $\mathscr{A}$, множество $\{E^{\mathscr{B}}(X) > 0\}$ принадлежит наименьшему классу эквивалентности множеств из $\mathscr{B}$, содержащему носитель $\{X > 0\}$ д. с. в. X. Для справедливости этого результата предположение о том, что $\mathscr{B}$ содержит нулевые множества из $\mathscr{A}$, существенно (рассмотреть случай, когда $\mathscr{B} = \{\varnothing, \Omega\}$ и д. с. в. X п. н., но не тождественно, равна нулю).

IV.3.4. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ — вероятностное пространство и $Q = X \cdot P$ — вероятность на $(\Omega, \mathscr{A})$. Выразить определенное на $(\Omega, \mathscr{A}, Q)$ условное математическое ожидание $E_Q^{\mathscr{B}}$ в терминах определенного на $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ условного математического ожидания $E_P^{\mathscr{B}}$. При выполнении каких условий для любой положительной д. с. в. Z имеет место равенство $E_Q^{\mathscr{B}}(Z) = E_P^{\mathscr{B}}(Z)$ п. н. по Q?

IV.3.5. ***Достаточные σ-алгебры.*** Пусть $\{P(\theta, \cdot), \theta \in \Theta\}$ — семейство вероятностей на $(\Omega, \mathscr{A})$, абсолютно непрерывных относительно некоторой вспомогательной вероятности. Мы можем считать (см. упражнение IV.1.3), что эта вспомогательная вероятность имеет вид

$$P = \sum_{\theta} a_\theta P(\theta, \cdot),$$

где $a_\theta \geqslant 0$ и $\sum a_\theta = 1$. Положим $p_\theta = dP(\theta, \cdot)/dP$. Показать, что σ-алгебра $\mathscr{B}\left(p_\theta, \theta \in \Theta\right)$ есть наименьшая σ-подалгебра σ-алгебры $\mathscr{A}$, обладающая следующим свойством: для любой положительной д. с. в. Y на $(\Omega, \mathscr{A})$ существует положительная $\mathscr{B}$-измеримая д. с. в. Y', такая, что $E^{\mathscr{B}}_{P(\theta, \cdot)}(Y) = Y'$ п. н. по $P(\theta, \cdot)$ при всех θ. [Выполнить упражнение IV.3.4 и заметить, что если $\mathscr{B}$ обладает указанным выше свойством, то $E^{\mathscr{B}}\left[Y\left(p_\theta - E^{\mathscr{B}} p_\theta\right)\right] = 0$ п. н. по P для всякой д. с. в. Y; взять

$$Y = p_\theta - E^{\mathscr{B}} p_\theta.]$$

Для любой функции f от θ и любой интегрируемой д. с. в. Y при всех θ имеем

$$\int \left[E_P^{\mathscr{B}}(Y) - f(\theta)\right]^2 dP_\theta \leqslant \int [Y - f(\theta)]^2 dP_\theta.$$

На языке теории статистических решений (упражнение III.2.3) это означает, что класс $\mathscr{B}$-измеримых оценок полон относительно квадратической функции убытков. Аналогичный результат справедлив, если ограничиться лишь несмещенными оценками, т. е. такими д. с. в. Y, что $\int Y\,dP_\theta = f(\theta)$, поскольку если Y — несмещенная оценка, то таковой является и $E^{\mathscr{B}}(Y)$.

Приложение. Пусть $U_1, \ldots, U_k$ суть k д. с. в. на $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Показать, что подмножество Θ пространства R^k, на котором функция $\varphi(\theta) = \int \exp\left(\sum_i \theta_i U_i\right) dP$ принимает конечные значения, выпукло. Мы предположим, что это подмножество содержит по крайней мере одну внутреннюю точку. Это допущение не ограничивает общности, поскольку в случае необходимости мы можем редуцировать число параметров. Показать, что „достаточная" σ-алгебра $\mathscr{B}$, отвечающая семейству вероятностей $\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ с P-плотностями на $(\Omega, \mathscr{A})$, равными

$$p_\theta = [\varphi(\theta)]^{-1} \exp\left(\sum_i \theta_i U_i\right),$$

совпадает с $\mathscr{B}(U_i, 1 \leqslant i \leqslant k)$. Пусть Π — вероятность на R^k, индуцированная величинами U_i, т. е. $\Pi(S) = P[(U_1, \ldots, U_k) \in S]$. Показать, что функция f от θ имеет несмещенную оценку тогда и только тогда, когда существует определенная на R^k измеримая функция g, такая, что $f(\theta) = \int \exp(\theta u)\, g(u)\, \Pi(du)$. Функция g, если она существует, единственна с точностью до Π-эквивалентности. Более того, можно показать, что $g(U_1, \ldots, U_k)$ есть несмещенная оценка для $f(\theta)$, которая предпочтительнее всякой другой несмещенной оценки для $f(\theta)$.

IV.3.6. Показать, что если $X_n \downarrow X$ п. н., то $E^{\mathscr{B}}X_n \downarrow E^{\mathscr{B}}X$ п. н. на множестве $\bigcup_n \{E^{\mathscr{B}}X_n < \infty\}$. Используя этот результат, обобщить лемму Фату — Лебега, доказанную в настоящем пункте.

IV.4. Независимость

На протяжении этого пункта вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ считается фиксированным.

Определение IV.4.1. *Конечное семейство $\{\mathscr{B}_i, i \in I\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathscr{A}$ называется независимым (относительно P), если*

$$P\left(\bigcap_I B_i\right) = \prod_I P(B_i),$$

каковы бы ни были $B_i \in \mathscr{B}_i$ $(i \in I)$, или, что эквивалентно, если

$$E\left(\prod_I Y_i\right) = \prod_I E(Y_i),$$

каковы бы ни были положительные $\mathscr{B}_i$-измеримые д. с. в. Y_i $(i \in I)$. Бесконечное семейство $\{\mathscr{B}_i, i \in I\}$ σ-подалгебр *σ-алгебры $\mathcal{A}$ называется* независимым, *если каждое конечное его подсемейство независимо.*

Читателю предлагается проверить эквивалентность обоих данных определений независимости, используя линейность и непрерывность (относительно монотонной сходимости) математического ожидания.

Предложение IV.4.1 (критерий независимости). *Пусть $\{\mathscr{C}_i, i \in I\}$ — произвольное семейство непустых подклассов σ-алгебры $\mathcal{A}$, обладающее следующими свойствами:*

(а) *каждый из классов $\mathscr{C}_i$ замкнут относительно образования пересечений;*

(б) *семейство $\mathscr{C}_i$ $(i \in I)$ независимо в том смысле, что для любых $C_j \in \mathscr{C}_j$ $(j \in J \subset I;\ J$ конечно)*

$$P\left(\bigcap_J C_j\right) = \prod_J P(C_j).$$

Тогда семейство $\{\mathscr{B}_i, i \in I\}$ σ-алгебр, порожденных классами $\mathscr{C}_i$ $(i \in I)$, независимо. Всякое семейство σ-алгебр $\{\mathscr{B}'_i, i \in I\}$, такое, что $\mathscr{B}'_i$ отличается от $\mathscr{B}_i$ лишь на нулевые множества, тоже независимо.

Доказательство. Достаточно, очевидно, рассмотреть случай, когда множество I конечно. Фиксируем какое-либо $i \in I$ и обозначим через $\mathscr{D}$ подкласс σ-алгебры $\mathcal{A}$, состоящий из множеств D, таких, что $P\left[D \cap \bigcap_{j \neq i} C_j\right] = P(D) \prod_{j \neq i} P(C_j)$, каковы бы ни были $C_j \in \mathscr{C}_j$ $(j \neq i)$. Легко видеть, что класс $\mathscr{D}$ содержит $\mathscr{C}_i$ и является σ-аддитивным классом в смысле упражнения I.4.5. Следовательно, $\mathscr{D}$ содержит $\mathscr{B}_i$, и поэтому семейство $\{\mathscr{B}_i, \mathscr{C}_j\ (j \neq i)\}$ обладает свойствами (а) и (б), указанными в формулировке предложения. Повторяя это рассуждение для каждого из остальных $j \in I$, $j \neq i$, убеждаемся в независимости класса $\{\mathscr{B}_i, i \in I\}$. Наконец, очевидно, что семейство $\{\mathscr{B}'_i, i \in I\}$ независимо, если каждое множество из $\mathscr{B}'_i$ имеет вид $B \cup N$, где $B \in \mathscr{B}_i$ и N — некоторое нулевое множество. ∎

Следствие. *Если $\{\mathscr{B}_i, i \in I\}$ — независимое семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathscr{A}$ и $\{I_j, j \in J\}$ — семейство попарно непересекающихся подмножеств I, то семейство $\{\mathscr{B}_{I_j}; j \in J\}$, где $\mathscr{B}_{I_j}$ есть σ-алгебра, порожденная σ-алгебрами $\mathscr{B}_i$ $(i \in I_j)$, тоже независимо.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}_{I_j}$ — подкласс σ-алгебры $\mathscr{A}$, состоящий из множества вида $\bigcap_{i \in K} B_i$ $(B_i \in \mathscr{B}_i)$, где K — конечное подмножество множества I_j. Семейство $\{\mathscr{C}_{I_j}, j \in J\}$ удовлетворяет, очевидно, условиям предыдущего предложения. С другой стороны, каждый из классов $\mathscr{C}_{I_j}$ (являющихся полуалгебрами) порождает соответствующую σ-алгебру $\mathscr{B}_{I_j}$. Остается лишь применить предыдущее предложение. ∎

Предложение IV.4.2. *Для того чтобы две σ-подалгебры $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ σ-алгебры $\mathscr{A}$ были независимы, необходимо и достаточно, чтобы*

$$E^{\mathscr{B}_1}(Y) = E(Y) \text{ п. н.},$$

какова бы ни была $\mathscr{B}_2$-измеримая положительная д. с. в. Y.

Доказательство. Согласно определению условного математического ожидания, для любой фиксированной положительной д. с. в. Y равенство $E^{\mathscr{B}_1}(Y) = E(Y)$ равносильно выполнению соотношения $E(X)E(Y) = E(XY)$ для всех положительных $\mathscr{B}_1$-измеримых д. с. в. X. Утверждение предложения теперь непосредственно вытекает из определения независимости (во второй форме). ∎

Определение IV.4.2. *Семейство д. с. в. $\{X_i, i \in I\}$ называется* ***независимым*** *(относительно P), если независимо семейство $\{\mathscr{B}(X_i), i \in I\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathscr{A}$. Семейство событий $\{A_i, i \in I\}$ называется* ***независимым***, *если независимо семейство д. с. в. $\{1_{A_i}, i \in I\}$.*

Беря в доказанном выше критерии независимости в качестве $\mathscr{C}_i$ $(i \in I)$ класс множеств вида $\{X_i < a\}$ $(a \in R)$ или полагая $\mathscr{C}_i = \{A_i\}$, получаем следующий результат.

Семейство д. с. в. $\{X_i, i \in I\}$ независимо тогда и только тогда, когда

$$P\left[\bigcap_J \{X < a_j\}\right] = \prod_J P(X_j < a),$$

каковы бы ни были действительные числа a_j $(j \in J)$ и конечное подмножество J множества I. Семейство событий $\{A_i, i \in I\}$ независимо тогда и только тогда, когда $P\left(\bigcap_J A_j\right) = \prod_J P(A_j)$ для любого конечного подмножества J множества I.

Следующее определение не связано с независимостью и вводится здесь для формулировки приводимых далее результатов. Определяемые ниже понятия без труда обобщаются на обобщенные последовательности σ-алгебр или д. с. в.

Определение IV.4.3. *Пусть $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность σ-подалгебр σ-алгебры $\mathscr{A}$. События, принадлежащие σ-алгебре $\mathscr{B}_\infty$, образованной пересечением (по N) σ-алгебр, порожденных σ-алгебрами $\mathscr{B}_n$ $(n \geqslant N)$, называются асимптотическими (или остаточными) событиями.*

В частности, если $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}(X_n)$, где X_n — д. с. в., то

$$\mathscr{B}_\infty = \bigcap_N \mathscr{B}\{X_n, n \geqslant N\}.$$

Предложение IV.4.3 (закон нуля — единицы). *Вероятность всякого асимптотического относительно последовательности $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ независимых σ-алгебр события равна либо 0, либо 1. (Иными словами, $\mathscr{B}_\infty = \{\varnothing, \Omega\}$ с точностью до нулевых множеств.)*

Доказательство. Для доказательства достаточно дважды применить следствие к предложению IV.4.1. В самом деле, из независимости семейства $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$

вытекает независимость семейства $\{\mathscr{B}_m (m \leqslant M), \mathscr{A}_N\}$ при $N > M$, где $\mathscr{A}_N$ есть σ-алгебра, порожденная σ-алгебрами $\mathscr{B}_n$ $(n \geqslant N)$. Так как $\mathscr{B}_\infty \subset \mathscr{A}_N$, семейство $\{\mathscr{B}_m (m \leqslant M), \mathscr{B}_\infty\}$ тоже независимо, откуда вытекает независимость семейства $\{\mathscr{B}_n, 1 \leqslant n \leqslant \infty\}$. Таким образом, семейства $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{B}_\infty$ независимы и, в частности, семейство $\mathscr{B}_\infty$ независимо от самого себя, так что

$$P(B \cap B) = P(B) P(B)$$

при всех $B \in \mathscr{B}_\infty$, но это и означает, что либо $P(B) = 0$, либо $P(B) = 1$ $(B \in \mathscr{B}_\infty)$. ∎

Следствие 1. *Асимптотическая относительно последовательности $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ независимых σ-алгебр (т. е. $\mathscr{B}_\infty$-измеримая) д. с. в. X п. н. равна константе.*

Следствие 2. *Если $\{X_n, n \geqslant 1\}$ — конечные независимые д. с. в. и $\{\varphi_n\}$ — стремящаяся к нулю последовательность действительных чисел, то ряд $\sum_n X_n$ и последовательности $\{X_n\}$, $\left\{\varphi_n \left(\sum_1^n X_m\right)\right\}$ либо п. н. сходятся, либо п. н. расходятся.*

В заключение настоящего раздела приведем следующий результат, который настолько же важен, насколько просто и непосредственно его доказательство.

Предложение IV.4.4 (Борель — Кантелли). *Для всякой последовательности событий*

$$\{A_n, n \geqslant 1\}$$

имеем

$$\sum_n P(A_n) < \infty \Rightarrow \limsup_n A_n \underset{\text{н. п.}}{=} \varnothing,$$

$$\sum_n P\left[A_n \,\middle|\, \bigcap_1^{n-1} A_m^c\right] = \infty \Rightarrow \sup_n A_n \underset{\text{п. н.}}{=} \Omega.$$

В частности, если события $\{A_n, n \geqslant 1\}$ независимы, то $\limsup_n A_n \underset{\text{п. н.}}{=} \varnothing$ или Ω в зависимости от того, сходится или расходится ряд $\sum_n P(A_n)$.

Доказательство. Утверждаемые импликации следуют соответственно из неравенства

$$P\left(\sup_{m\geqslant n} A_m\right)\leqslant \sum_{m\geqslant n} P(A_m),$$

если в нем положить $n\to\infty$, и из цепочки равенств

$$P\left(\sup_n A_n\right)=1-P\left(\inf_n A_n^c\right)=1-\prod_n\left[P\left(\bigcap_1^n A_m^c\right)\Big/P\left(\bigcap_1^{n-1} A_m^c\right)\right]=$$
$$=1-\prod_n\left\{1-P\left[A_n\,\Big|\,\bigcap_1^{n-1} A_m^c\right]\right\}.$$

Так как в случае независимости событий $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ имеем $P\left(A_n\,\Big|\,\bigcap_1^{n-1} A_m\right)=P(A_m)$, вторая часть предложения вытекает из первой. ∎

Дополнения и упражнения

IV.4.1. Если $\{\mathcal{B}_i,\ i\in I\}$ — произвольное независимое семейство σ-алгебр в пространстве $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ и $\mathcal{B}'_i$ суть σ-алгебры, такие, что $\mathcal{B}'_i\subset\mathcal{B}_i$ $(i\in I)$, то семейство $\{\mathcal{B}'_i,\ i\in I\}$ тоже независимо. Вывести отсюда, что если $\{X_i,\ i\in I\}$ — независимые д. с. в. и f_i $(i\in I)$ — измеримые функции, то семейство $\{f_i(X_i),\ i\in I\}$ тоже независимо. Для того чтобы семейство д. с. в. $\{X_i,\ i\in I\}$ было независимо, необходимо и достаточно, чтобы

$$E\left[\prod_J f_j(X_j)\right]=\prod_J Ef_j(X_j)$$

для любого конечного семейства $\{f_j,\ j\in J\}$ ограниченных измеримых функций.

IV.4.2. ***Условная независимость.*** Семейство $\{\mathcal{B}_i,\ i\in I\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ вероятностного пространства $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ называется *условно независимым* относительно σ-алгебры $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$, если $E^{\mathcal{B}}\left(\prod_J X_j\right)=\prod_J E^{\mathcal{B}}(X_j)$ для любого конечного множества $J\subset I$ и любого семейства $\{X_j,\ j\in J\}$ $\mathcal{B}_j$-измеримых положительных д. с. в. X_j. Обобщить результаты настоящего раздела, в частности закон нуля — единицы, на случай условной независимости.

IV.4.3. ***Марковская зависимость.*** Пусть T — интервал действительной прямой R или множества целых чисел Z. Говорят, что семейство $\{B_t,\ t\in T\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ подчинено *марковской* *зависимости*, или является *марковским* в пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, если для любого $t \in T$ σ-алгебры $\sigma(\mathcal{B}_s;\ s \leqslant t)$ и $\sigma(\mathcal{B}_s;\ s \geqslant t)$ условно независимы относительно σ-алгебры $\mathcal{B}_t$. Для того чтобы семейство $(\mathcal{B}_t,\ t \in T)$ было марковским,

(1) необходимо, чтобы $E(Y \mid \mathcal{B}_t) = E[Y \mid \sigma(\mathcal{B}_s,\ s \leqslant t)]$ для любого t и любой квазиинтегрируемой д. с. в. Y, измеримой относительно σ-алгебры

$$\sigma(\mathcal{B}_s;\ s \geqslant t);$$

(2) достаточно, чтобы

$$E(1_A \mid \mathcal{B}_t) = E\left[1_A \mid \sigma\left(\mathcal{B}_{s_1}, \ldots, \mathcal{B}_{s_n}, \mathcal{B}_t\right)\right]$$

для любого t, любого события A, принадлежащего одной из σ-алгебр $\mathcal{B}_u$ $(u > t)$ и любого конечного множества чисел s_j, меньших t. Показать, что если семейство $\{\mathcal{B}_t,\ t \in T\}$ — марковское и $u < v$, $u, v \in T$, то σ-алгебры $\sigma(\mathcal{B}_t,\ t \leqslant u)$ и $\sigma(\mathcal{B}_t,\ t \geqslant v)$ условно независимы относительно $\sigma(\mathcal{B}_t,\ u \leqslant t \leqslant v)$. [Здесь $\sigma(\cdot)$ означает «σ-алгебра, порожденная $\cdot$».]

IV. 4.4. ***Гауссовы пространства.*** Замкнутое подпространство H пространства $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ называется *гауссовым*, если любая д. с. в. $X \in H$ индуцирует на R (возможно, вырожденный) гауссов закон, или, что равносильно, если для любой д. с. в. $X \in H$

$$\log E(\exp(itX)) = itE(X) - (1/2)\, t^2 \{E(X^2) - [E(X)]^2\}.$$

Показать, что для того, чтобы замкнутое подпространство H было гауссовым, (1) необходимо, чтобы всякий вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ с координатами $X_m \in H$ имел гауссов закон в R^n, (2) достаточно, чтобы существовало подмножество G подпространства H, линейная оболочка которого плотна в H, такое, что всякий вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ с координатами $X_m \in G$ имел гауссов закон в R^n.

Пусть H — некоторое гауссово пространство, состоящее из центрированных (т. е. ортогональных к 1) д. с. в., и пусть $\mathcal{H}$ — наименьшая σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{A}$, относительно которой все д. с. в. из H измеримы. Показать, что если $\{X_i,\ i \in I\}$ — полная ортонормированная система в H, то произведения полиномов Эрмита $\prod_I \left[1/\sqrt{n_i!}\right] H_{n_i}(X_i)$, где n_i пробегают целые неотрицательные значения, такие, что $\sum_I n_i < \infty$, образуют полную ортонормированную систему в $L_2(\Omega, \mathcal{H}, P)$. [Воспользоваться формулой, определяющей полиномы Эрмита:

$$\exp\left(ux - \frac{1}{2}u^2\right) = \sum_{n \geqslant 0} (u^n/n!)\, H_n(x).]$$

Пусть H_1 — замкнутое подпространство некоторого гауссова пространства H, состоящего из центрированных д. с. в., и пусть $\mathcal{H}_1$ есть σ-алгебра, порожденная H_1. Показать что ограничения на H операторов proj_{H_1} и $E^{\mathcal{H}_1}$ совпадают. [Свести к случаю д. с. в., ортогональных к H_1.] Вывести отсюда, что два ортогональных к 1 гауссовых пространства H_1 и H_2 взаимно ортогональны тогда и только тогда, когда порождаемые ими σ-алгебры $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ независимы.

IV.4.5. Пусть $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ — три σ-подалгебры σ-алгебры $\mathcal{A}$ вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, удовлетворяющие следующим двум условиям: (1) $\mathcal{A}_1$ содержится в σ-алгебре, порожденной $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, (2) σ-алгебра, порожденная $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, не зависит от $\mathcal{A}_3$. Показать, что $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ с точностью до нулевых множеств, т. е. что для любого $A \in \mathcal{A}_1$ существует $B \in \mathcal{A}_2$, такое, что $P(A \Delta B) = 0$. [Вывести из (2), что

$$E^{\mathcal{A}_2}(X) = E^{\mathcal{A}_2 \vee \mathcal{A}_3}(X)$$

для любой $\mathcal{A}_1$-измеримой интегрируемой д. с. в. X.]

IV.5. Теория мартингалов

Всюду на протяжении настоящего пункта $(\Omega, \mathcal{A}\ P)$ — некоторое фиксированное вероятностное пространство, T — интервал расширенного множества целых чисел $\overline{Z}$ (дискретный случай) или расширенной действительной прямой $\overline{R}$ (непрерывный случай), левый и правый концы которого (не обязательно принадлежащие T) обозначаются соответственно t_l и t_r, и $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$ — возрастающее семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$. Фундаментальную роль в нижеследующем будет играть понятие момента остановки, введенное в п. III.6.

Определение IV.5.1. *Д. с. ф. $\{X_t, t \in T\}$, адаптированная к семейству $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$, называется* 1) *субмартингалом (относительно $\{\mathcal{A}_t, t \in T\}$), если $E(X_t^+) < \infty$ при всех $t \in T$ и $X_s \leqslant E^{\mathcal{A}_s}(X_t)$ для любой пары $s < t$, $s, t \in T$;* 2) *мартингалом, если $E|X_t| < \infty$ при всех $t \in T$ и $X_s = E^{\mathcal{A}_s}(X_t)$ для любой пары $s < t$, $s, t \in T$;* 3) *супермартингалом, если д. с. ф. $\{-X_t; t \in T\}$ является субмартингалом.*

(N. B. Всюду в дальнейшем в непрерывном случае мы будем рассматривать, не оговаривая это специально, лишь сепарабельные мартингалы и субмартингалы. Согласно предложению III.4.3, это не ограничивает общности.)

Таким образом, субмартингал — это д. с. ф., которая «растет в смысле условного среднего». Входящие в определение субмартингала неравенства нередко записывают в следующей эквивалентной форме: для любой пары $s<t$, s, $t\in T$, и любого множества $A\in\mathcal{A}_s$

$$\int\limits_A X_s \leqslant \int\limits_A X_t.$$

Из этих неравенств следует, что $E(X_sY)\leqslant E(X_tY)$ при $s<t$, s, $t\in T$, для любой положительной $\mathcal{A}_s$-измеримой д. с. в.

Следующий технический результат часто будет использоваться в дальнейшем (в более общем виде этот результат содержится в упражнении IV.5.4).

Предложение IV.5.1. *Если $\{X_t,\ t\in T\}$ — субмартингал, то д. с. ф. $\{\max(X_t,\ a),\ t\in T\}$ тоже является субмартингалом, каково бы ни было $a\in R$. Кроме того, для любого замкнутого справа подинтервала T_1 интервала T семейство*

$$\{\max(X_t,\ a),\ t\in T_1\}$$

равномерно интегрируемо.

Если $\{X_t,\ t\in T\}$ — мартингал, образованный д. с. в. *из $L_p(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, $p\in[1,\ \infty)$, то* д. с. ф. *$\{|X_t|^p,\ t\in T\}$ является положительным субмартингалом. Кроме того, для любого замкнутого справа подинтервала T_1 интервала T_1 семейство $\{|X_t|^p,\ t\in T\}$ равномерно интегрируемо.*

Доказательство. Если $\{X_t,\ t\in T\}$ — субмартингал, то $\{X_t-a,\ t\in T\}$ — тоже субмартингал. Поэтому достаточно доказать первую часть предложения в случае, когда $a=0$. Для доказательства же того факта, что если $\{X_t,\ t\in T\}$ субмартингал, то и $\{X_t^+,\ t\in T\}$ — тоже субмартингал, достаточно заметить, что $E^{\mathcal{A}_s}(X_t^+)\geqslant\geqslant[E^{\mathcal{A}_s}(X_t)]^+\geqslant X_s^+$ при всех $s<t$, $s,t\in T$. Пусть, далее, t_1 — правый конец замкнутого справа подинтервала T_1

интервала T. Из справедливой для любого $c>0$ цепочки неравенств

$$cP(X_t>c)\leqslant \int\limits_{\{X_t>c\}} X_t^+ \leqslant \int\limits_{\{X_t>c\}} X_{t_1}^+ \leqslant E(X_{t_1}^+)<\infty \qquad (t\in T_1)$$

следует, что $\sup\limits_{T_1} P(X_t>c)\downarrow 0$ при $c\uparrow\infty$, откуда в силу интегрируемости д. с. в. $X_{t_1}^+$ вытекает, что $\sup\limits_{t\in T_1}\int\limits_{\{X_t>c\}} X_{t_1}^+\downarrow 0$ при $c\uparrow\infty$. Равномерная интегрируемость семейства $\{X_t^+,\ t\in T_1\}$ является теперь следствием второго неравенства из выписанной выше цепочки неравенств.

Пусть $\{X_t,\ t\in T\}$ — мартингал. Для любых $s<t$, $s,\ t\in T$, имеем $E^{\mathcal{A}_s}(|X_t|^p)\geqslant|E^{\mathcal{A}_s}(X_t)|^p=|X_s|^p$. Следовательно, если положительные д. с. в. $|X_t|^p$, $t\in T$, интегрируемы, то они образуют субмартингал. Последнее утверждение предложения является простым следствием доказанного выше. ∎

При выполнении весьма широких условий входящие в определение субмартингала неравенства

$$X_s\leqslant E^{\mathcal{A}_s}(X_t) \quad \text{при} \quad s\leqslant t$$

остаются справедливыми, если s и t заменить моментами остановки σ и τ, такими, что $\sigma\leqslant\tau$. Это фундаментальное свойство субмартингалов будет точно сформулировано в предложении IV.5.5, а сейчас мы докажем его частный случай, на котором основывается дальнейшая часть настоящего пункта.

Лемма. *Пусть $\{X_t,\ \mathcal{A}_t;\ t\in T\}$ — субмартингал. Если τ_1, τ_2 — определенные на всем пространстве Ω относительно $\{\mathcal{A}_t,\ t\in T\}$ моменты остановки, принимающие лишь конечное число различных значений из T и такие, что $\tau_1\leqslant\tau_2$, то $X_{\tau_1}\leqslant E^{\mathcal{A}_{\tau_1}}(X_{\tau_2})$. В частности, для любого определенного всюду момента остановки τ, принимающего лишь конечное число различных значений, лежащих между t_0 и t_1, $t_0,\ t_1\in T$, справедливы неравенства*

$$X_{t_0}\leqslant E^{\mathcal{A}_{t_0}}(X_\tau),\qquad X_\tau\leqslant E^{\mathcal{A}_\tau}(X_{t_1}).$$

Если $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — мартингал, то при выполнении тех же условий высказанные выше утверждения справедливы с заменой неравенств на равенства.

Доказательство. Пусть

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_p$$

— возможные значения τ_1 и τ_2. Поскольку д. с. в. X_{τ_1} является $\mathcal{A}_{\tau_1}$-измеримой, то неравенство $X_{\tau_1} \leqslant E^{\mathcal{A}_{\tau_1}}(X_{\tau_2})$ равносильно выполнению неравенств $\int\limits_A X_{\tau_1} \leqslant \int\limits_A X_{\tau_2}$ для всех $A \in \mathcal{A}_{\tau_1}$, т. е. для всех A, таких, что $A\{\tau_1 = t_m\} \in \mathcal{A}_{t_m}$ при $m = 0, \ldots, p$. В силу равенства $A = \sum\limits_m A\{\tau_1 = t_m\}$ и аддитивности интеграла для доказательства этих неравенств достаточно показать, что $\int\limits_B X_{t_m} \leqslant \int\limits_B X_{\tau_2}$ для всех множеств B, содержащихся в множестве $\{\tau_1 = t_m\}$ и принадлежащих $\mathcal{A}_{t_m}$.

Так как $\tau_2 \wedge t_m = t_m$ на B и $\tau_2 \wedge t_p = \tau_2$, для этого в свою очередь достаточно показать, что интеграл $\int\limits_B X_{\tau_2 \wedge t_n}$ как функция от n, $m \leqslant n \leqslant p$, не убывает. Но при $m \leqslant n \leqslant p$ имеем $B\{\tau_2 > t_n\} \in \mathcal{A}_{t_n}$ и, следовательно,

$$\int\limits_B X_{\tau_2 \wedge t_n} = \int\limits_{B\{\tau_2 \leqslant t_n\}} X_{\tau_2} + \int\limits_{B\{\tau_2 > t_n\}} X_{t_n} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B\{\tau_2 \leqslant t_n\}} X_{\tau_2} + \int\limits_{B\{\tau_2 > t_n\}} X_{t_{n+1}} = \int\limits_B X_{\tau_2 \wedge t_{n+1}}.$$

Первая часть леммы тем самым доказана. Частный случай, о котором говорится в лемме, получается из общего при $\tau_1 = t_0$, $\tau_2 = \tau$ и $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = t_1$. Наконец, тривиальные изменения в проведенном выше рассуждении показывают, что в случае мартингала доказанные неравенства превращаются в равенства. ∎

Предложение IV.5.2. *Если* $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — *субмартингал, то для любой положительной постоянной* c

$$cP\left(\sup_T X_t > c\right) \leqslant \sup_T E\left(X_t^+\right) \quad \left(= E\left(X_{t_r}^+\right) < \infty \text{ при } t_r \in T\right).$$

Следовательно, $\sup_T X_t < \infty$ п. н., *когда* $\sup_T E\left(X_t^+\right) < \infty$ *и, в частности, когда интервал* T *замкнут справа.*

Если $\{X_t, \mathcal{A}_t, t \in T\}$ — *мартингал, то для любой положительной постоянной* c

$$cP\left(\sup_T |X_t| > c\right) \leqslant \sup_T E|X_t| \quad \left(= E|X_{t_r}| \text{ при } t_r \in T\right),$$

так что $\sup_T |X_t| < \infty$ п. н., *когда правая часть этого неравенства конечна.*

Доказательство. Рассмотрим сначала мартингал X лишь в конечном числе моментов времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_p$ и обозначим через τ первый из тех моментов (если таковые существуют), для которых $X_t > c$. Величина τ принимает значения из множества $\{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ и является определенным на множестве

$$\Omega_\tau = \left\{\sup_m X_{t_m} > c\right\}$$

моментом остановки, поскольку $\{\tau = t_m\} = \left\{X_{t_k} \leqslant c \text{ при } k < m,\ X_{t_m} > c\right\} \in \mathcal{A}_{t_m}$. Применяя доказанную выше лемму к моментам остановки $\tau \wedge t_p$ и t_p и принимая во внимание, что $X_\tau > c$ на Ω_τ, получаем следующие неравенства:

$$cP(\Omega_\tau) \leqslant \int_{\Omega_\tau} X_\tau = \int_{\Omega_\tau} X_{\tau \wedge t_p} \leqslant \int_{\Omega_\tau} X_{t_p} \leqslant E\left(X_{t_p}^+\right).$$

Тем самым первая часть предложения доказана в случае конечного субмартингала $\left\{X_{t_0}, \ldots, X_{t_p}\right\}$. В общем случае пусть $s_0, s_1, \ldots$ — само T (дискретный случай) или сепаранта в T (непрерывный случай). Принимая во внимание, что

$$\sup_T X_t \underset{\text{п. н}}{=} \lim_n \uparrow \left(\sup_{m \leqslant n} X_{s_m}\right),$$

и переходя к пределу, получаем

$$cP\left(\sup_T X_t > c\right) = c \lim_n \uparrow P\left(\sup_{m \leqslant n} X_{s_m} > c\right) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_n \uparrow \sup_{m \leqslant n} E\left(X_{s_m}^+\right) = \sup_T E\left(X_t^+\right).$$

Далее, поскольку $E(X_t^+)$ как функция от t не убывает, имеем

$$\sup_T E(X_t^+) = \begin{cases} E\left(X_{t_r}^+\right) & \text{при} \quad t_r \in T, \\ \lim\limits_{t \uparrow t_r} E(X_t^+) & \text{при} \quad t_r \notin T. \end{cases}$$

Устремляя теперь c к бесконечности, видим, что $\sup\limits_T X_t < \infty$ п. н., если $\sup\limits_T E(X_t^+) < \infty$. Наконец, если $\{X_t,\ t \in T\}$ — мартингал, то, применяя сказанное выше к субмартингалу $\{|X_t|,\ t \in T\}$, убеждаемся в справедливости второй части предложения. ∎

Доказываемое в следующем предложении неравенство ограничивает сверху среднее число колебаний субмартингала. С помощью этого неравенства будут получены важные результаты о сходимости и непрерывности субмартингалов, излагаемые в дальнейшей части настоящего пункта. Напомним сначала некоторые результаты из теории функций действительного переменного.

Пусть f — функция, отображающая интервал $T \subset \overline{Z}$ или $T \subset \overline{R}$ в $\overline{R}$. *Число* $\gamma_{a,b}(f)$ *пересечений сверху вниз* функцией f интервала $(a, b) \subset R$ определяется как верхняя грань целых чисел $m \geqslant 0$, таких, что для некоторой последовательно $s_1 < s_2 < \ldots < s_{2m}$ точек из T длины $2m$ имеют место неравенства

$$f(s_1) > b,\ f(s_2) < a,\ f(s_3) > b,\ \ldots,\ f(s_{2m}) < a.$$

Для того чтобы функция f не имела разрывов второго рода на $\overline{T}$, необходимо и достаточно, чтобы $\gamma_{a,b}(f) < \infty$ для любой пары $a < b$ из R (или лишь для любой пары $a < b$ из некоторого плотного подмножества прямой R).

Напомним еще, что определенная на интервале $T \subset \overline{Z}$ или $T \subset \overline{R}$ функция f не имеет разрывов второго рода на $\overline{T}$, если она имеет предел слева (справа) в каждой точке t из $\overline{Z}$ или $\overline{R}$, являющейся пределом слева (справа) точек из T, т. е. (1) в дискретном случае, если при $t_r = +\infty$ существует $\lim\limits_{s \uparrow +\infty} f(s)$ и при $t_l = -\infty$ существует $\lim\limits_{s \downarrow -\infty} f(s)$, 2) в непрерывном случае, если при всех $t \in (t_l, t_r]$ существует $f(t-0) = \lim\limits_{s \uparrow t} f(s)$ и при всех $t \in [t_l, t_r)$ существует $f(t-0) = \lim\limits_{s \downarrow t} f(s)$.

[Достаточность указанного выше условия можно доказать, заметив, что если, например, $\liminf\limits_{s \uparrow t} f(s) < \limsup\limits_{s \uparrow t} f(s)$ для некоторого t, то число $\gamma_{a,b}$ бесконечно для всякой пары $a < b$, лежащей между этими верхним и нижним пределами. Чтобы доказать его необходимость, сопоставим каждому $t \in \overline{T}$ открытый интервал I_t, такой, что колебание f как на $I_t \cap (-\infty, t)$, так и на $I_t \cap (t, +\infty)$ меньше заданного ε. Конечное число таких интервалов покрывает $\overline{T}$, и можно показать, что это число мажорирует $\gamma_{a,b}(f)$ при $b - a > 2\varepsilon$.]

Предложение IV.5.3. *Пусть* $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — *субмартингал. Обозначим через* $\gamma_{a,b}(\omega)$ *число пересечений сверху вниз интервала* (a, b) *траекторией* $X(\omega)$ *на* T. *Функция* $\gamma_{a,b}$ *является* д. с. в. *и удовлетворяет неравенству*

$$(b-a)\,E(\gamma_{a,b}) \leqslant \sup_T E\,[(X_t - b)^+].$$

Доказательство. Рассмотрим сначала субмартингал X_t лишь в конечном числе моментов времени $t_0 < t_1 < \ldots < t_p$ из T. Определим индукцией по m моменты остановки τ_m со значениями в $\{t_0, \ldots, t_p\}$, полагая τ_1 равным первому моменту t_q $(0 \leqslant q \leqslant p)$ (если таковой существует), для которого $X_{t_q} > b$, и при $m > 1$ считая τ_m равным первому моменту $t_i > \tau_{m-1}$ (если таковой существует), для которого $X_{t_i} < a$ в случае четного m, и $X_{t_i} > b$, в случае нечетного m. Последовательность подмножеств $\Omega_m = \Omega_{\tau_m}$ множества Ω, на которых эти моменты остановки определены, является, очевидно, убывающей последовательностью, и $t_0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots$ $\ldots < \tau_m \leqslant t_p$ на Ω_m. Ясно также, что если

$$\gamma_{a,b}(t_0, \ldots, t_p;\ \omega)$$

— число пересечений сверху вниз интервала (a, b) последовательностью $\{X_{t_0}(\omega), \ldots, X_{t_p}(\omega)\}$, то

$$\Omega_{2m} = \{\gamma_{a,b}(t_0, \ldots, t_p) \geqslant m\}.$$

Из этого равенства вытекает прежде всего, что $\gamma_{a,b}(t_0, \ldots, t_p)$ есть случайная величина.

Принимая во внимание, что

$$X_{\tau_{2m-1}} > b \text{ на } \Omega_{2m-1}, \quad X_{\tau_{2m}} < a \text{ на } \Omega_{2m},$$

и применяя доказанную выше лемму к моментам остановки $\tau_{2m-1} \wedge t_p$ и $\tau_{2m} \wedge t_p$, получаем

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega_{2m-1}} (X_{\tau_{2m-1}} - b) \leqslant \int\limits_{\Omega_{2m-1}} (X_{\tau_{2m} \wedge t_p} - b) \leqslant$$
$$\leqslant (a-b) P(\Omega_{2m}) + \int\limits_{\Omega_{2m-1} - \Omega_{2m}} (X_{t_p} - b)$$

и, следовательно,

$$(b-a) P[\gamma_{a,b}(t_0, \ldots, t_p) \geqslant m] \leqslant \int\limits_{\Omega_{2m-1} - \Omega_{2m}} (X_{t_p} - b)^+.$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что множества $\Omega_{2m-1} - \Omega_{2m}$ не пересекаются, находим

$$(b-a) E[\gamma_{a,b}(t_0, \ldots, t_p)] =$$
$$= (b-a) \sum_{m \geqslant 1} P[\gamma_{a,b}(t_0, \ldots, t_p) \geqslant m] \leqslant E[(X_{t_p} - b)^+].$$

Тем самым утверждаемое неравенство доказано для ограничения субмартингала X на множество $\{t_0, \ldots, t_p\}$. Поскольку, как легко убедиться,

$$\gamma_{a,b}(\omega) = \lim_n \uparrow \gamma_{a,b}(\{s_0, \ldots, s_n\};\ \omega)$$

для любого (почти любого) ω, где $\{s_0, s_1, \ldots\}$ — само T в дискретном случае (некоторая сепаранта в T в непрерывном случае), постольку утверждение предложения получается теперь предельным переходом. ∎

Следствие. *Пусть* $\{X_t,\ t\in T\}$ — *субмартингал и*

$$\sup_T E(X_t^+)<\infty.$$

Тогда для любого фиксированного s *имеем* $\inf_{t\geqslant s} X_t > -\infty$ *п. н. на множестве* $\{X_s>-\infty\}$ *и, в частности,* $\inf_{t\geqslant s} X_t>-\infty$ *п. н. на* Ω, *если* $E(X_s)>-\infty$.

Доказательство. В силу сделанного предположения и неравенства

$$(X_t-b)^+\leqslant X_t^+ + b^-$$

имеем $\sup_T E(X_t-b)^+<\infty$ при всех $b\in R$. Поскольку величины $\gamma_{a,b}$ убывают при $a\downarrow-\infty$ и $P(\gamma_{a,b}>0)\leqslant E(\gamma_{a,b})$, из предыдущего предложения вытекает, что множества $\{\gamma_{a,b}>0\}$ убывают к нулевому множеству при $a\downarrow-\infty$.

Отметим, с другой стороны, что для всякой траектории субмартингала X_t, удовлетворяющей условию $X_s(\omega)>b$, равенство $\gamma_{a,b}(\omega)=0$ влечет неравенство $\inf_{t\geqslant s} X_t\geqslant a$. Отсюда согласно сказанному выше вытекает, что $\inf_{t\geqslant s} X_t>-\infty$ п. н. на множестве $\{X_s>b\}$. Для завершения доказательства остается теперь только устремить b к $-\infty$. ∎

Теорема. *Почти все траектории субмартингала*

$$\{X_t,\ \mathcal{A}_t;\ t\in T\},$$

удовлетворяющего условию $\sup_T E(X_t^+)<\infty$, *не имеют разрывов второго рода на* $\overline{T}$. (Если интервал T замкнут справа, то условие $\sup_T E(X_t^+)<\infty$ автоматически выполнено.)

Доказательство. В силу сделанного предположения и неравенства

$$(X_t - b)^+ \leqslant X_t^+ + b^-$$

имеем $\sup_T E[(X_t - b)^+] < +\infty$ при всех $b \in R$. Следовательно, согласно предложению IV.5.3, все д. с. в. $\gamma_{a,b}$ интегрируемы ($a < b$, a, $b \in R$). Отсюда вытекает, что существует нулевое множество N, такое, что $\gamma_{a,b} < \infty$ при всех $\omega \notin N$ и всех $a < b$. (N можно определить как счетное объединение множеств вида $\{\gamma_{a,b} = \infty\}$, где $a < b$ — рациональные числа. Поскольку каждой паре $a < b$ действительных чисел можно сопоставить пару a', b' рациональных чисел, такую, что $a \leqslant a' < b' \leqslant b$, и, следовательно, такую, что $\gamma_{a,b} \leqslant \gamma_{a',b'}$, постольку $\gamma_{a,b} < \infty$ на N^c при всех $a < b$, $a, b \in R$.) Принимая теперь во внимание сделанное перед предложением IV.5.3 замечание, убеждаемся, что при $\omega \notin N$ траектории субмартингала X не имеют разрывов второго рода. ∎

В дискретном случае доказанная теорема равносильна следующим двум результатам, которые получаются при рассмотрении пределов траекторий в точках $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

(1) *Если $\{X_n, \mathcal{A}_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ — субмартингал, то для существования предела*

$$\lim_{n \to +\infty} \text{п. н. } X_n$$

достаточно, чтобы $\sup_n E(X_n^+) < \infty$.

(2) *Если $\{X_n, \mathcal{A}_n;\ n = \ldots, -2, -1\}$ — субмартингал, то существует предел*

$$\lim_{n \to -\infty} \text{п. н. } X_n.$$

В терминах обращенной последовательности

$$\{Z_n = X_{-n},\ \mathcal{B}_n = A_{-n}\}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

последний результат принимает следующий вид.

(2а) *Если* $\{\mathscr{B}_n, n \geqslant 1\}$ — *убывающая последовательность σ-алгебр и* $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ — *последовательность* $\mathscr{B}_n$-*измеримых д. с. в.* Z_n, *такая, что* $E(Z_n^+) < \infty$ *и* $Z_{n+1} \leqslant \leqslant E^{\mathscr{B}_{n+1}}(Z_n)$ *при всех* n, *то существует предел*

$$\lim_{n \to +\infty} \text{п. н. } Z_n.$$

В непрерывном случае, применяя доказанную выше теорему к ограничениям определенного на открытом справа интервале T субмартингала $\{X_t, t \in T\}$ на замкнутые справа подинтервалы интервала T, получаем следующий результат: почти все траектории субмартингала не имеют разрывов второго рода на $\overline{T}$, исключая, возможно, момент t_r. Мы видим, таким образом, что основной эффект сделанного в теореме предположения $\sup_T E(X_t^+) < \infty$ состоит в том, что оно устраняет возможность разрыва траекторий в момент t_r.

Предложение IV.5.4. *Пусть* $\{X_t, \mathscr{A}_t; t \in T\}$ — *субмартингал, такой, что семейство* $\{X_t^+, t \in T\}$ *равномерно интегрируемо (это условие, в частности, выполнено, если интервал* T *замкнут справа). За исключением нулевого множества траекторий, пределы* $X_{t-}(\omega) = \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega)$ *существуют в каждой точке* t, *являющейся предельной слева точкой интервала* T. *Эти пределы* X_{t-} *измеримы относительно σ-алгебр* $\mathscr{A}_{t-}$, *порожденных σ-алгебрами* $\mathscr{A}_s$ $(s < t)$, *и удовлетворяют неравенствам*

$$X_s \leqslant E^{\mathscr{A}_s}(X_{t-}) \text{ при } s < t; \quad X_{t-} \leqslant E^{\mathscr{A}_{t-}}(X_s) \text{ при } t \leqslant s.$$

Аналогично, за исключением нулевого множества траекторий, пределы $X_{t+} = \lim_{s \downarrow t} X_s(\omega)$ *существуют в каждой точке* t, *являющейся предельной справа точкой интервала* T. *Эти пределы* X_{t+} *измеримы относительно σ-алгебр* $\mathscr{A}_{t+}$, *являющихся пересечениями σ-алгебр* $\mathscr{A}_s$ $(s > t)$, *и удовлетворяют неравенствам*

$$X_s \leqslant E^{\mathscr{A}_s}(X_{t+}) \text{ при } s \leqslant t; \quad X_{t+} \leqslant E^{\mathscr{A}_{t+}}(X_s) \text{ при } t < s.$$

Доказательство. Мы проведем доказательство для случая пределов слева. Существование X_{t-} вытекает из доказанной выше теоремы; измеримость X_{t-} относительно $\mathcal{A}_{t-}$ очевидна, поскольку все д. с. в. X_s $(s<t)$ измеримы относительно $\mathcal{A}_{t-}$. Для доказательства утверждаемых предложением неравенств заметим сначала, что для любого $a \in R$ д. с. ф. $\{\max(X_t, a), t \in T\}$ есть субмартингал (предложение IV.5.1) и что образующие его д. с. в. равномерно интегрируемы, поскольку таковыми, согласно предположению, являются д. с. в. $\{X_t^+, t \in T\}$. Следовательно, если $s<t$ и $A \in \mathcal{A}_s$, то

$$\int_A \max(X_s, a) \leqslant \lim_{n \uparrow t} \int_A \max(X_n, a) = \int_A \max(X_{t-}, a).$$

Полагая в этом неравенстве $a \to -\infty$, получаем, что для любого $A \in \mathcal{A}_s$

$$\int_A X_s \leqslant \int_A X_{t-},$$

так как величины X_s^+ и X_{t-}^+ интегрируемы (X_{t-}^+ по лемме Фату), или, что равносильно, $X_s \leqslant E^{\mathcal{A}_s}(X_{t-})$. Аналогично при $t \leqslant s$ для всех $A \in \bigcup_{n<t} \mathcal{A}_n$ имеем

$$\int_A \max(X_{t-}, a) = \lim_{n \uparrow t} \int_A \max(X_n, a) \leqslant \int_A \max(X_s, a):$$

Последнее неравенство справедливо при всех A из σ-алгебры $\mathcal{A}_{t-}$, порожденной классом $\bigcup_{n<t} \mathcal{A}_n$, поскольку д. с. в. $\max(X_{t-}, a)$ и $\max(X_s, a)$ интегрируемы. Устремляя a к $-\infty$, получаем, что

$$\int_A X_{t-} \leqslant \int_A X_s$$

при всех $A \in \mathcal{A}_{t-}$, т. е. что $X_{t-} \leqslant E^{\mathcal{A}_{t-}}(X_s)$, если $t \leqslant s$. ∎

В том случае, когда субмартингал $\{X_t, t \in T\}$ определен на открытом справа интервале T и семейство $\{X_t^+, t \in T\}$ не равномерно интегрируемо, предыдущее предложение можно все же применить к ограничениям субмартингала X на замкнутые справа подинтервалы интервала T. При этом все утверждения предложения остаются справедливыми и без предположения о равномерной интегрируемости, за исключением тех, которые касаются пределов в t_r справа. Существо этого предположения еще более проясняется следующим следствием.

Следствие 1. *Пусть* $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — *субмартингал. Для того чтобы предел* $\lim\limits_{n \uparrow t_r} X_n$ *существовал п. н. и удовлетворял неравенству* $X_s \leqslant E^{\mathcal{A}_s}\left(\lim\limits_{u \uparrow t_r} X_u\right)$ *при всех* $s < t_r$, *необходимо и достаточно, чтобы семейство* $\{X_t^+,\ t \in T\}$ *было равномерно интегрируемо*[1]).

Доказательство. Достаточность этого условия вытекает из предыдущего предложения. Необходимость его следует из предложения IV.5.1, примененного к субмартингалу, образованному д. с. в. $X_t\ (t < t_r)$ и $\lim\limits_{u \uparrow t_r} X_u$. ∎

В дискретном случае полученные выше результаты можно сформулировать также в следующем виде.

(1) *Если* $\{X_n, \mathcal{A}_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ — *субмартингал, то предел*

$$X_\infty = \lim_{n \to \infty} \text{п. н. } X_n$$

существует и удовлетворяет условию $X_n \leqslant E^{\mathcal{A}_n}(X_\infty)$ *тогда и только тогда, когда семейство* $\{X_n^+\}$ *равномерно интегрируемо.*

(2) *Если* $\{\mathcal{B}_n,\ n \geqslant 1\}$ — *убывающая последовательность σ-алгебр и* $\{Z_n,\ n \geqslant 1\}$ — *последовательность* $\mathcal{B}_n$-*измеримых* д. с. в. Z_n, *такая, что* $E(Z_n^+) < \infty$ *и* $Z_{n+1} \leqslant E^{\mathcal{B}_{n+1}}(Z_n)$ *при всех* n, *то предел* $\lim Z_n = Z_\infty$ *существует п. н. и удовлетворяет условию* $Z_\infty \leqslant E^{\mathcal{B}_\infty}(Z_n)$ *при всех* n, *где* $\mathcal{B}_\infty$ — *пересечение σ-алгебр* $\mathcal{B}_n$.

[1]) Для справедливости следствия нужно еще потребовать, чтобы $E\left(\left(\lim\limits_{u \uparrow t_r} X_u\right)^+\right) < \infty$. Аналогичное замечание относится к соответствующему результату в дискретном случае (см. ниже). — *Прим. перев.*

Следствие 2 (регуляризация субмартингала справа). *Пусть $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — субмартингал, определенный на интервале $T \subseteq \bar{R}$. Определенная почти всюду д. с. ф.*

$$\{X_{t+}, \mathcal{A}_{t+};\ t \in T \cup \{t_r\}\}$$

(подразумевается, что $X_{t_r+} = X_{t_r}$ в случае, когда $t_r \in T$) есть субмартингал с непрерывными справа траекториями. Более того, почти все траектории этого субмартингала имеют пределы слева во всех точках из T. Если точка $t \in T$ такова, что функция $E(X_t)$ от t непрерывна в ней справа, конечна и $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t+0}$, то $X_{t+} = X_t$ п. н.

Доказательство. Первая часть этого следствия непосредственно вытекает из предыдущего предложения. Для доказательства второй его части заметим, что

$$X_t \leqslant E^{\mathcal{A}_t}(X_{t+}) \leqslant E^{\mathcal{A}_t}(X_s)$$

при всех $t < s$. Из этих неравенств следует, что если $E(X_t) = \lim\limits_{s \downarrow t} E(X_s) \neq \infty$, то $X_t \underset{\text{п. н.}}{=} E^{\mathcal{A}_t}(X_{t+})$. Но если $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t+}$, то $X_{t+} = E^{\mathcal{A}_t}(X_{t+})$. ∎

Аналогичный результат справедлив для регуляризации субмартингала слева $\{X_{t-}, \mathcal{A}_{t-};\ t \in T\}$. Следует, однако, отметить, что регуляризация слева в точке t_r может быть определена лишь в случае, когда семейство $\{X_t^+,\ t \in T\}$ равномерно интегрируемо.

Следующий результат представляет собой упоминавшееся выше обобщение фундаментальной леммы настоящего пункта.

Предложение IV.5.5. *Пусть $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — субмартингал, все траектории которого в непрерывном случае мы предполагаем непрерывными справа. Пусть, далее, τ_1, τ_2 — два определенных на всем пространстве Ω относительно $\{\mathcal{A}_t,\ t \in T\}$ момента остановки, причем $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Каждое из нижеследующих двух условий достаточно для выполнения неравенства $X_{\tau_1} \leqslant E^{\mathcal{A}_{\tau_1}}(X_{\tau_2})$:*

(a) *существует точка $t_0 \in T$, такая, что $\tau_2 \leqslant t_0$ п. н. (это условие выполнено, если интервал T замкнут справа),* (б) *семейство* $\{X_t^+,\ t \in T\}$ *равномерно интегрируемо.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда интервал T замкнут справа. В самом деле, если выполнено условие (а), то можно ограничиться рассмотрением субмартингала $\{X_t,\ \mathcal{A}_t;\ t \leqslant t_0\}$, а если выполнено условие (б) и интервал T не замкнут справа, то д. с. ф.

$$\left\{X_t\,(t \in T),\ \lim_{s \uparrow t_r} X_s\right\}$$

есть субмартингал (предложение IV.5.4) на замкнутом справа интервале $T + \{t_r\}$.

Согласно доказанной в начале настоящего пункта лемме, неравенство

$$X_{\tau_1} \leqslant E^{\mathcal{A}_{\tau_1}}(X_{\tau_2})$$

справедливо для всяких двух моментов остановки τ_1, τ_2, принимающих лишь конечное множество различных значений и удовлетворяющих условию $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Поскольку интервал T замкнут справа, то для любого момента остановки с конечным множеством возможных значений $X_\tau \leqslant E^{\mathcal{A}_\tau}(X_{t_r})$. Рассуждая далее, как в доказательстве предложения IV.5.1, можно показать, что для любого $a \in R$ семейство д. с. в. $\{\max(X_\tau, a)\}$, где τ пробегает всевозможные моменты остановки с конечными множествами значений, равномерно интегрируемо.

Пусть $\{\tau_1^n\}$, $\{\tau_2^n\}$ — две последовательности моментов остановки с конечными множествами значений, сходящиеся, убывая, к заданным моментам остановки τ_1 и τ_2 соответственно (явная конструкция таких последовательностей содержится в доказательстве предложения III.6.1). Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau_1^n \leqslant \tau_2^n$ (заменим в противном случае τ_1^n на $\min(\tau_1^n, \tau_2^n)$). Так как $\mathcal{A}_{\tau_1} \subset \mathcal{A}_{\tau_1^n}$, то для любого $A \in \mathcal{A}_{\tau_1}$ имеем

$$\int_A \max\left(X_{\tau_1^n}, a\right) \leqslant \int_A \max\left(X_{\tau_2^n}, a\right).$$

В силу непрерывности траекторий справа равномерно интегрируемые последовательности $\left\{\max\left(X_{\tau_i^n}, a\right)\right\}_{i=1,2}$

сходятся п. н. при $n\to\infty$ к $\{\max(X_{\tau_i}, a)\}$ и поэтому $\int\limits_A \max(X_{\tau_1}, a)\leqslant\int\limits_A \max(X_{\tau_2}, a)<\infty$. Полагая теперь $a\downarrow-\infty$, получаем $\int\limits_A X_{\tau_1}\leqslant\int\limits_A X_{\tau_2}$ при всех $A\in\mathcal{A}_{\tau_1}$, причем, согласно предложению III.6.1, д. с. в. X_{τ_1} измерима относительно $\mathcal{A}_{\tau_1}$. ∎

Из справедливого для любого момента остановки τ неравенства $X_\tau\leqslant E^{\mathcal{A}_\tau}(X_{t_r})$, рассуждая так же, как при доказательстве предложения IV.5.1, можно ввести следующее

Следствие 1. *Пусть $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t\in T\}$ — субмартингал, все траектории которого в непрерывном случае мы предполагаем непрерывными справа. Если семейство $\{X_t^+,\ t\in T\}$ равномерно интегрируемо, в частности если интервал T замкнут справа, то семейство $\{\max(X_\tau, a)\}$, где $a\in R$ фиксировано, а τ пробегает всевозможные определенные на Ω моменты остановки, равномерно интегрируемо.*

Пусть $\{X_t;\ t\in T\}$ — субмартингал и $\{\tau_s,\ s\in S\}$ — возрастающее семейство определенных на Ω моментов остановки. Предыдущее предложение содержит условия, при выполнении которых д. с. ф. $\{X_{\tau_s}, \mathcal{A}_{\tau_s};\ s\in S\}$ тоже является субмартингалом. Особенно интересный случай указан в приводимом ниже следствии.

Следствие 2. *Пусть $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t\in T\}$ — субмартингал, все траектории которого в непрерывном случае непрерывны справа. Для всякого определенного на Ω относительно $\{\mathcal{A}_t,\ t\in T\}$ момента остановки τ д. с. ф. $\{X_{\tau\wedge t}, \mathcal{A}_{\tau\wedge t};\ t\in T\}$ тоже является субмартингалом.*

(Говорят, что д. с. ф. $\{X_{\tau\wedge t}\}$ *получена* из д. с. ф. *остановкой* в момент τ.)

В заключение настоящего пункта применим полученные выше результаты к мартингалам. Отметим, что, согласно определению, д. с. ф. $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t\in T\}$ — мартингал тогда и только тогда, когда обе д. с. ф. $\{X_t,\ t\in T\}$ и

$\{-X_t,\ t \in T\}$ — субмартингалы. Заметим еще, что если $\{X_t,\ t \in T\}$ — мартингал, то в формуле

$$E(|X_t|) = 2E(X_t^+) - E(X_t)$$

член $E(X_t)$ конечен и не зависит от t. Из теоремы настоящего пункта вытекает, следовательно, что если $\sup\limits_T E(|X_t|) < \infty$ и, в частности, если интервал T замкнут справа, то *почти все траектории мартингала* $\{X_t,\ t \in T\}$ *не имеют разрывов второго рода на* $\overline{T}$. Ясно, далее, что *для мартингала утверждения* предложения IV.5.4 *справедливы с заменой неравенств на равенства, если только мартингал равномерно интегрируем* (в частности, если интервал T замкнут справа).

В случае когда интервал T не замкнут справа, предыдущие результаты можно применить к ограничениям мартингала на замкнутые справа подинтервалы интервала T. Высказанные выше утверждения, за исключением, возможно, относящихся к точке t_r, справедливы, следовательно, для любого мартингала на T. Что касается поведения мартингала в точке t_r, имеет место следующий результат.

Предложение IV.5.6. *Для любого определенного на открытом справа интервале T мартингала $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ следующие три условия равносильны:*

(а) *предел $\lim\limits_{t\uparrow t_r} X_t$ существует в смысле сходимости в L_1;*

(б) *существует по крайней мере одна интегрируемая д. с. в. X, такая, что $X_s = E^{\mathcal{A}_s}(X)$ при всех $s \in T$;*

(в) *семейство $\{X_t,\ t \in T\}$ равномерно интегрируемо.*

Если эти условия выполнены, то предел $\lim\limits_{s\uparrow t_r} X_t$ существует п. н. (и в смысле сходимости в L_1) и $X_s = E^{\mathcal{A}_s}\left(\lim\limits_{t\uparrow t_r} X_t\right)$ при всех $s \in T$.

Кроме того, если рассматриваемый мартингал таков, что $\sup\limits_T E(|X_t|^p) < \infty$ при некотором $p > 1$, то указанные условия выполнены и предел $\lim\limits_{t\uparrow t_r} X_t$ существует в смысле сходимости в L_p.

Доказательство. Так как условные математические ожидания являются непрерывными операторами на пространстве L_1, импликация (а)$\Longrightarrow$(б) непосредственно вытекает из справедливого при $s<t$, s, $t\in T$, равенства $X_s=E^{\mathscr{A}_s}(X_t)$ — можно взять $X=\lim\limits_{t\uparrow t_r}X_t$. При выполнении (б) вторая часть предложения IV.5.1 в применении к мартингалу

$$\{X_t(t\in T),\ X\}$$

показывает, что (б)$\Longrightarrow$(в). Наконец, как мы знаем, если $\sup\limits_T E|X_t|<\infty$, то п. н. существует предел $\lim\limits_{t\uparrow t_r}X_t$. Если, кроме того, семейство $\{X_t,\ t\in T\}$ равномерно интегрируемо, то предел этот существует в смысле сходимости в L_1 (предложение II.5.4).

Для доказательства второй части предложения заметим сначала, что если $\sup\limits_T E(|X_t|^p)<\infty$ при некотором $p>1$, то семейство $\{X_t,\ t\in T\}$ равномерно интегрируемо (упражнение II.5.2). Следовательно, предел $X=\lim\limits_{t\uparrow t_r}X_t$ существует и $\{X_t(t\in T),\ X\}$ — мартингал. С другой стороны, по лемме Фату $E(|X|^p)\leqslant\sup\limits_T E(|X_t|^p)<\infty$. Применяя теперь предложение IV.5.1, видим, что семейство $\{|X_t|^p(t\in T),\ |X|^p\}$ равномерно интегрируемо и, следовательно, X_t сходится к X при $t\uparrow t_r$ в смысле сходимости в L_p (предложение II.6.1). ∎

Дополнения и упражнения

IV.5.1. Пусть $\{X_t,\ t\in T\}$ — субмартингал, образованный интегрируемыми центрированными д. с. в., и пусть $S=\sup\limits_T E(X_t^2)$. Показать, что для любой постоянной $c>0$ справедливо неравенство

$$P\left(\sup_T X_t>c\right)\geqslant S/(S+c^2).$$

[Рассмотреть сначала случай, когда множество T конечно. Пусть τ — первый момент t, для которого $X_t>c$; воспользоваться неравенством $(a+X_\tau)^2\geqslant(a+c)^2$, выбирая положительную постоянную a наилучшим возможным способом.]

Показать, что если $\{X_t, t \in T\}$ — мартингал или положительный субмартингал, такой, что при некотором $p > 1$

$$\sup_T E(|X_t|^p) < \infty,$$

то $\left\| \sup_T |X_t| \right\|_p \leqslant (p/(p-1)) \sup_T \|X_t\|_p$. [Проинтегрировать неравенство $cP(A_c) \leqslant \int_{A_c} X_s$, где $A_c = \left\{ \sup_{t \leqslant s} X_t > c \right\}$, относительно переменной c по мере $c^{p-2}\,dc$ и применить неравенство Гёльдера.]

IV.5.2. ***Усиленный закон больших чисел для последовательностей симметрично зависимых д. с. в.*** Последовательность д. с. в. $\{X_n, n \geqslant 1\}$ называется *симметрично зависимой*, если вероятностный закон каждого вектора

$$\left(X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k}\right)$$

инвариантен относительно перестановок индексов $n_1, n_2, \ldots, n_k$ (индексы $n_1, \ldots, n_k$ предполагаются попарно различными). Всякая последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин симметрично зависима. Пусть $\mathscr{B}_n$ есть σ-алгебра, порожденная событиями, симметрично зависящими от $X_1, \ldots, X_n$ и произвольно зависящими от $X_{n+1}, \ldots$. Обозначим через $\mathscr{B}_\infty$ пересечение убывающей последовательности σ-алгебр $\mathscr{B}_n$.

Пусть $p \geqslant 1$. Используя соображения симметрии, показать, что если f — действительная измеримая функция, такая, что $f(X_1) \in L_p$, и $m \leqslant n$, то

$$E^{\mathscr{B}_n}[f(X_m)] = (1/n) \sum_1^n f(X_j).$$

Вывести отсюда усиленный закон больших чисел: п. н. и в смысле сходимости в L_p

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n f(X_j) = E^{\mathscr{B}_\infty}[f(X_1)].$$

Показать, что д. с. в. X_n условно независимы и условно одинаково распределены относительно $\mathscr{B}_\infty$ (убедиться, что

$$E^{\mathscr{B}_\infty}\left[\prod_{j=1}^k f_j(X_j)\right] = \prod_{j=1}^k E^{\mathscr{B}_\infty}[f_j(X_j)],$$

где f_j $(1 \leqslant j \leqslant k)$ — произвольные ограниченные измеримые функции; для этого вычислить, пользуясь соображениями симметрии,

$$E^{\mathscr{B}_n}\left[\prod_{j=1}^k f_j\left(X_{n_j}\right)\right] \quad \text{при} \quad 1 \leqslant n_1, \ldots, n_k \leqslant n \Bigg).$$

Установить, что и обратно, последовательность условно независимых и условно одинаково распределенных относительно некоторой σ-алгебры д. с. в. симметрично зависима.

Показать, что σ-алгебра $\mathscr{B}_\infty$ отличается от σ-алгебры асимптотических событий

$$A_\infty = \bigcap_N \mathscr{B}(X_n, n \geqslant N)$$

лишь на нулевые множества. [Заметить, что предел $\lim_n (1/n) \sum_1^n f(X_j)$ $\mathscr{A}_\infty$-измерим.] В случае последовательности независимых д. с. в $\{X_n\}$ оператор $E^{\mathscr{B}_\infty}$ совпадает, таким образом, с обычным математическим ожиданием E.

IV. 5.3. Пусть $\{\mathscr{A}_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр в пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Обозначим через $\mathscr{B}$ алгебру $\bigcup \mathscr{A}_n$, и пусть $\mathscr{A}_\infty$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathscr{B}$. Пусть, далее, Q — отображение алгебры $\mathscr{B}$ в $[0, 1]$, ограничение Q_n которого на $\mathscr{A}_n$ есть вероятность при всех n. Обозначим через X_n производную Q_n относительно ограничения P на $\mathscr{A}_n$ (см. предложение IV. 1.3).

Показать, что $\{X_n, \mathscr{A}_n; n \geqslant 1\}$ — положительный супермартингал, сходящийся п. н. к положительной д. с. в. X_∞ — наибольшей $\mathscr{A}_\infty$-измеримой д. с. в., для которой $\int_B X_\infty \, dP \leqslant Q(B)$ при всех $B \in \mathscr{B}$.

В частности, если отображение Q σ-аддитивно на $\mathscr{B}$, то X_∞ есть производная σ-аддитивного продолжения Q на $\mathscr{A}_\infty$ относительно P_∞ (ограничения P на $\mathscr{A}_\infty$). Если $Q_n \ll P_n$ на $\mathscr{A}_n$ при всех n, то последовательность $\{X_n\}$ является мартингалом. Показать, что в этом случае функцию множеств Q можно продолжить до абсолютно непрерывной относительно P_∞ вероятности на $\mathscr{A}_\infty$ тогда и только тогда, когда мартингал $\{X_n\}$ равномерно интегрируем. Вывести отсюда, что такое продолжение Q возможно, если $\sup_n E(X_n \log X_n) < \infty$.

В том случае, когда $\mathscr{A}$ есть σ-алгебра счетного типа и $\{\mathscr{A}_n\}$ — возрастающая последовательность конечных алгебр, порождающая $\mathscr{A}$, приведенные выше результаты можно сформулировать, давая явные выражения для X_n. В частности, это можно сделать в случае, когда $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ есть интервал $[0, 1)$ с мерой Лебега, а алгебры $\mathscr{A}_n$ порождаются диадическими разбиениями

$$\mathscr{P}_n = \{[k2^{-n}, (k+1)\, 2^{-n});\ 0 \leqslant k < 2^n\}$$

интервала $[0, 1)$.

IV. 5.4. Если $\{X_t, \mathscr{A}_t;\ t \in T\}$ — субмартингал, f — непрерывная возрастающая выпуклая функция и $E[f^+(X_t)] < \infty$ при всех $t \in T$, то д. с. ф. $\{f(X_t),\ t \in T\}$ — тоже субмартингал. То же самое заключение верно, если $\{X_t\}$ — мартингал, а f — непрерывная и выпуклая (не обязательно возрастающая) функция. В частности, если $\{X_t\}$ — положительный мартингал и $E[X_t \log X_t] < \infty$, то д. с. ф.

$$\{X_t \log X_t,\ t \in T\}$$

является субмартингалом.

Пусть P, Q — две вероятности на $(\Omega, \mathcal{A})$. Ограничения P и Q на произвольную σ-подалгебру $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ обозначим $P_{\mathcal{B}}$ и $Q_{\mathcal{B}}$. Положим

$$H(\mathcal{B}) = \int X_{\mathcal{B}} \log(X_{\mathcal{B}})\, dP \leqslant \infty,$$

если вероятность $Q_{\mathcal{B}}$ абсолютно непрерывна относительно $P_{\mathcal{B}}$ с плотностью $X_{\mathcal{B}}$ и

$$H(\mathcal{B}) = +\infty$$

в противном случае. Показать, что $H(\mathcal{B})$ — положительная возрастающая функция от $\mathcal{B}$, причем $H(\mathcal{B}) = 0$ тогда и только тогда, когда $Q_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}$. Показать, далее, что если $\{\mathcal{B}_n\}$ — возрастающая последовательность σ-алгебр, порождающая σ-алгебру $\mathcal{B}_\infty$, то

$$H(\mathcal{B}_\infty) = \lim_n \uparrow H(\mathcal{B}_\infty).$$

Наконец, если $\{\mathcal{B}_n\}$ — убывающая последовательность σ-алгебр с пересечением $\mathcal{B}_\infty$ и $\lim\limits_n \downarrow H(\mathcal{B}_n) < \infty$, то $H(\mathcal{B}_\infty) = \lim\limits_n \downarrow H(\mathcal{B}_n)$. [Использовать предыдущее упражнение.]

*IV. 5.5. Пусть T — абстрактное направленное вправо относительно отношения $\leqslant$ множество, и пусть $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — мартингал, образованный д. с. в. из L_p $(1 \leqslant p < \infty)$. Показать, что следующие условия эквивалентны:

(а) $\lim\limits_T X_t$ существует в смысле сходимости в L_p,

(б) семейство д. с. в. $\{X_t,\ t \in T\}$ относительно компактно в ослабленной топологии в L_p (т. е. равномерно интегрируемо при $p = 1$ и ограничено при $p > 1$),

(в) существует д. с. в. X из L_p, такая, что $X_t = E^{\mathcal{A}_t}(X)$.

Показать, далее, что если эти условия выполнены, то $X_t = E^{\mathcal{A}_t}\left(\lim\limits_T X_s\right)$.

IV. 5.6. Пусть $\{X_t, \mathcal{A}_t;\ t \in T\}$ — субмартингал, определенный на открытом интервале $T = (0, 1)$, такой, что $\sup\limits_T E(X_t^+) < \infty$. Показать, что почти все траектории этого субмартингала непрерывны тогда и только тогда, когда для любых действительных $a < b$

$$\lim_{h\downarrow 0}(1/h)\int_0^{1-h} dtP\,(X_t < a,\ X_{t+h} > b) = 0,$$

$$\lim_{h\downarrow 0}(1/h)\int_0^{1-h} dtP\,(X_t > b,\ X_{t+h} < a) = 0.$$

[Заметить, что интегралы $(1/h)\int_0^{1-h} dt 1_{\{X_t < a,\, X_{t+h} > b\}}$ являются д. с. в., мажорированными величиной $\gamma_{a,b}$, и что верхний предел при $h\downarrow 0$ этих д. с. в. ограничен сверху д. с. в.

$$\sum_t 1_{\{X_{t-} \leqslant a,\, X_{t+} \geqslant b\}},$$

а нижний их предел при $h\downarrow 0$ ограничен снизу д. с. в.

$$\sum_t 1_{\{X_{t-} < a,\, X_{t+} > b\}}.$$

Вывести отсюда, что первое условие необходимо и достаточно для того, чтобы $X_{t-} \geqslant X_{t+}$ при всех t для почти всех траекторий субмартингала.]

Таким образом, для того чтобы почти все траектории конечного субмартингала $\{X_t,\ 0 < t < 1\}$ были непрерывными на $(0, 1)$, достаточно, чтобы $\sup_t (1/h)\,P\,[\,|X_{t+h} - X_t| > \varepsilon] \to 0$ при $h\downarrow 0$ для любого $\varepsilon > 0$.

IV.6. Центрированные последовательности случайных величин

В этом пункте теория мартингалов применяется к изучению центрированных последовательностей случайных величин.

Определение IV.6.1. *Пусть* $\{\mathcal{A}_n,\ n \geqslant 1\}$ — *возрастающая последовательность σ-алгебр в пространстве* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. *Адаптированная к последовательности* $\{\mathcal{A}_n\}$ *последовательность* $\{Y_n,\ n \geqslant 1\}$ *интегрируемых д. с. в. называется* ***центрированной***, *если* $E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Y_n) = 0$ *при всех* $n \geqslant 1$. *(Подразумевается, что* $\mathcal{A}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.)

Обычно в качестве σ-алгебр $\mathcal{A}_n$ берутся σ-алгебры, порожденные величинами $Y_m (m \leqslant n)$. Легко видеть, что частичные суммы $X_n = \sum_1^n Y_m (X_0 = 0)$ центрированной последовательности д. с. в. образуют мартингал. Верно, между прочим, и обратное — всякий мартингал $\{X_n, n \geqslant 0\}$, для которого $X_0 = 0$, может быть получен таким образом; достаточно положить

$$Y_n = X_n - X_{n-1}.$$

Отметим, далее, что всякую адаптированную к $\{\mathcal{A}_n, n \geqslant 1\}$ последовательность интегрируемых д. с. в. $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ можно центрировать, положив

$$Y_n = Z_n - E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Z_n),$$

так что любой результат относительно центрированных последовательностей д. с. в. может быть преобразован в некоторый результат относительно произвольных последовательностей интегрируемых д. с. в.. Заметим, наконец, что последовательность $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ независимых д. с. в. центрирована тогда и только тогда, когда $E(Y_n) = 0$ при всех $n \geqslant 1$.

Предложение IV.6.1. *Если $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — центрированная последовательность д. с. в., то*

(1) *из сходимости ряда $\sum_{n \geqslant 1} E(Y_n)^2$ вытекает существование предела $\lim_{n \to \infty} \sum_1^n Y_m$ п. н. и в смысле сходимости в пространстве L_2;*

(2) *для всякой неубывающей стремящейся к ∞ последовательности действительных чисел $\{u_n, n \geqslant 1\}$ из сходимости ряда $\sum_{n \geqslant 1} u_n^{-2} E(Y_n^2)$ вытекает, что*

$$\lim_{n \to \infty} u_n^{-1} \sum_1^n Y_m = 0 \text{ п. н.}$$

Доказательство. Последовательность $\{Y_n, n \geqslant 1\}$, будучи центрированной, ортогональна, поскольку $E(Y_m Y_n) = E(Y_m E^{\mathcal{A}_m}(Y_n)) = 0$ при $m < n$; следовательно,

$$E\left[\left(\sum_1^n Y_m\right)^2\right] = \sum_1^n E(Y_m^2).$$

Применяя теперь предложение IV.5.6 к мартингалу $\left\{X_n = \sum_{1}^{n} Y_m\right\}$, убеждаемся в справедливости первого утверждения предложения.

Далее, если $\{Y_n\}$ — центрированная последовательность и $u_n \neq 0$, то $\{u_n^{-1} Y_n\}$ — тоже центрированная последовательность; поэтому из сходимости ряда $\sum_n u_n^{-2} E(Y_n^2)$ следует, что предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} u_m^{-1} Y_m$ существует и конечен п. н. Второе утверждение предложения вытекает из этого факта и следующей леммы, принадлежащей Кронекеру.

Лемма. *Если $\{u_n, n \geqslant 1\}$ — неубывающая последовательность положительных действительных чисел, стремящаяся к $+\infty$, и если последовательность действительных чисел $\{y_n, n \geqslant 1\}$ такова, что предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} u_m^{-1} y_m$ существует и конечен, то*

$$\lim_{n\to\infty} u_n^{-1} \sum_{1}^{n} y_m = 0.$$

Доказательство. Последовательность $\{v_n = u_n - u_{n-1}\}$ состоит из неотрицательных чисел и $\sum_{1}^{n} v_m = u_n \uparrow \infty$ при $n \uparrow \infty$. С другой стороны, числа $z_n = \sum_{1}^{n} u_m^{-1} y_m$ образуют сходящуюся последовательность. Так как

$$\sum_{1}^{n} y_m = \sum_{1}^{n} u_m (z_m - z_{m-1}) = \sum_{1}^{n} v_m (z_n - z_{m-1}),$$

имеем при $p < n$

$$\left|\sum_{1}^{n} y_m\right| \leqslant \left|\sum_{1}^{p} v_m (z_n - z_{m-1})\right| + \left(\sum_{p+1}^{n} v_m\right) \sup_{p \leqslant m \leqslant n} |z_n - z_m|.$$

Деля обе части этого неравенства на u_n и устремляя к бесконечности сначала n, а затем p, получаем требуемый результат. ▮

С помощью техники моментов остановки предыдущее предложение можно значительно усилить. Отметим, однако, что чтение дальнейшей части настоящего пункта не обязательно для понимания следующих.

Предложение IV.6.2. *Если $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — центрированная последовательность д. с. в., то предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_1^n Y_m$ существует п. н. и п. н. конечен на множестве $\Omega_0 = \left\{\sum\limits_n E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Y_n^2) < \infty\right\}$. Более того, если $\sup\limits_n |Y_n| \in L_2$, то множество Ω_0 совпадает п. н. с множеством, на котором сходится ряд $\sum Y_m$.*

С другой стороны, если $\{U_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность положительных д. с. в., такая, что д. с. в. U_n измерима относительно $\mathcal{A}_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, то $\lim$ п. н $U_n^{-1} \sum\limits_1^n Y_m = 0$ *на множестве*

$$\Omega_1 = \left\{\lim \uparrow U_n = \infty, \ \sum_n U_n^{-2} E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Y_n^2) < \infty\right\}.$$

Это предложение действительно является обобщением результатов предложения IV.6.1, касающихся сходимости п. н. В самом деле, из сходимости ряда

$$\sum_n E(Y_n^2)$$

вытекает интегрируемость и, следовательно, п. н. конечность д. с. в. $\sum\limits_n E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Y_n)^2$, так что $\Omega_0 = \Omega$ п. н. Аналогично, из сходимости ряда

$$\sum_n u_n^{-2} E(Y_n^2)$$

вытекает, что $\sum\limits_n u_n^{-2} E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Y_n^2) < \infty$ п. н. Доказательство предложения IV.6.2 основывается на следующей лемме:

Лемма. *Если $\{Z_n, n \geqslant 0\}$ — произвольная последовательность интегрируемых д. с. в., адаптированная к последовательности $\{\mathcal{A}_n, n \geqslant 0\}$, и ν — определенный всюду и ограниченный сверху некоторым целым числом N момент остановки, то*

$$E(Z_\nu) - E(Z_0) = E\left[\sum_{n<\nu} \left(E^{\mathcal{A}_n}(Z_{n+1}) - Z_n\right)\right].$$

Доказательство леммы. Так как д. с. в. Z_n и $1_{\{\nu>n\}}$ являются $\mathcal{A}_n$-измеримыми,

$$E(Z_{\nu\wedge n+1}) - E(Z_{\nu\wedge n}) = E\left[1_{\{\nu>n\}}(Z_{n+1} - Z_n)\right] =$$
$$= E\left[1_{\{\nu>n\}}\left(E^{\mathcal{A}_n}(Z_{n+1}) - Z_n\right)\right].$$

Суммируя эти равенства по n от 0 до $N-1$ и замечая, что $\nu \wedge 0 = 0$, $\nu \wedge N = \nu$, получаем требуемую формулу. ∎

Доказательство предложения. Пусть $\{Y_n, \mathcal{A}_n;\ n \geqslant 1\}$ — центрированная последовательность и ν_a — момент остановки, равный наименьшему целому числу m (если оно существует), для которого $\sum_{n\leqslant m} E^{\mathcal{A}_n}(Y_{n+1}^2) > a$ (a — положительная постоянная). Положим $X_n = \sum_1^n Y_m$. Последовательность $\{X_{\nu_a\wedge N}, N \geqslant 1\}$ является мартингалом, и из леммы и определения ν_a следует, что

$$E\left(X^2_{\nu_a\wedge N}\right) = E\left[\sum_{n<\nu_a\wedge N}\left(E^{\mathcal{A}_n}(X_{n+1}^2) - X_n^2\right)\right] =$$
$$= E\left[\sum_{n<\nu_a\wedge N} E^{\mathcal{A}_n}(Y_{n+1}^2)\right] \leqslant a.$$

Согласно предложению IV.5.6, предел $\lim_{N\to\infty}$ п. н. $X_{\nu_a\wedge N}$ существует и конечен п. н. на всем пространстве, так что предел $\lim_{N\to\infty} X_N$ существует п. н. на множестве

$$(\Omega_{\nu_a})^c = \left\{\sum_n E^{\mathcal{A}_n}(Y_{n+1}^2) \leqslant a\right\}.$$

Устремляя теперь a к ∞, убеждаемся в существовании предела $\lim X_N$ на Ω_0.

Пусть теперь $\{Y_n, \mathcal{A}_n;\ n \geqslant 1\}$ — центрированная последовательность, такая, что $\sup|Y_n| \in L_2$, и пусть

$X_n=\sum_1^n Y_m$. Обозначим через ν'_a момент остановки, равный наименьшему целому числу m (если оно существует), для которого $|X_m|>a$ (a — положительная постоянная). Из равенства

$$X_{\nu'_a\wedge N}=X_{(\nu'_a\wedge N)-1}+Y_{\nu'_a\wedge N}$$

и определения ν'_a вытекает, что $\left\|X_{\nu'_a\wedge N}\right\|_2\leqslant a+\left\|\sup|Y_n|\right\|_2$. Применяя теперь лемму, получаем

$$E\left[\sum_{n<\nu'_a}E^{\mathcal{A}_n}\left(Y_{n+1}^2\right)\right]=\lim_N\uparrow E\left[\sum_{n<\nu'_a\wedge N}E^{\mathcal{A}_n}\left(Y_{n+1}^2\right)\right]=$$

$$=\lim_N\uparrow E\left(X^2_{\nu'_a\wedge N}\right)<\infty.$$

Следовательно, $\sum_n E^{\mathcal{A}_n}\left(Y_{n+1}^2\right)<\infty$ п. н. на множестве $\left(\Omega_{\nu'_a}\right)^c=\{\sup|X_n|\leqslant a\}$. Отсюда, устремляя a к ∞, получаем, что множество Ω_0 п. н. содержит множество $\{\sup|X_n|<\infty\}$. Тем самым первая часть предложения доказана.

Из допущения второй части предложения вытекает, что $\{U_n^{-1}Y_n\}$ — центрированная последовательность. В самом деле, в силу $\mathcal{A}_{n-1}$-измеримости U_n имеем $E^{\mathcal{A}_{n-1}}\left(U_n^{-1}Y_n\right)=U_n^{-1}E^{\mathcal{A}_{n-1}}\left(Y_n\right)=0$. По доказанному выше ряд $\sum U_m^{-1}Y_m$ сходится п. н. к конечному пределу на множестве

$$\left\{\sum U_n^{-2}E^{\mathcal{A}_{n-1}}\left(Y_n^2\right)<\infty\right\}.$$

Для завершения доказательства предложения теперь остается лишь применить лемму Кронекера. ∎

Следствие. *Пусть $\{Y_n, \mathcal{A}_n;\ n\geqslant 1\}$ — центрированная последовательность и $D_n=\sum_1^n E^{\mathcal{A}_{m-1}}\left(Y_m^2\right)$. Для любого $\varepsilon>0$*

$$\lim_n\frac{\sum_1^n Y_m}{D_n^{1/2}\left(\log D_n\right)^{(1/2)+\varepsilon}}=0 \text{ *п. н.*}$$

на множестве $\left\{\sum_m E^{\mathscr{A}_{m-1}}(Y_m^2) = \infty\right\}$. *(На дополнительном множестве ряд* $\sum_1^n Y_m$ *сходится.)*

Доказательство. Положим $U_n = f(D_n)$, где $f \doteq t^{1/2}(\log t)^{(1/2)+\varepsilon}$. Ясно, что $\lim\uparrow U_n = \infty$ на множестве $\left\{\sum_m E^{\mathscr{A}_{m-1}}(Y_m^2) = \infty\right\}$. С другой стороны, поскольку

$$U_n^{-2}E^{\mathscr{A}_{n-1}}(Y_n^2) = \frac{D_n - D_{n-1}}{f^2(D_n)} \leqslant \int_{D_{n-1}}^{D_n} \frac{dt}{f^2(t)},$$

постольку из имеющей, очевидно, место сходимости на бесконечности интеграла $\int^{\infty} f^{-2}(t)\,dt$ вытекает сходимость всюду ряда $\sum U_n^{-2}E^{\mathscr{A}_{n-1}}(Y_n^2)$. Остается применить предыдущее предложение. ■

Следующее предложение показывает, что при выполнении определенных условий суммы $\sum_1^n Y_m$ бесконечно осциллируют на множестве, где расходится ряд $\sum Y_m$.

Предложение IV.6.3. *Для всякой удовлетворяющей условию* $\sup_n |Y_n| \in L_1$ *центрированной последовательности* $\{Y_n, n \geqslant 1\}$

$$\liminf_n \left(\sum_1^n Y_m\right) \underset{\text{п. н}}{=} -\infty \quad \text{и} \quad \limsup_n \left(\sum_1^n Y_m\right) \underset{\text{п. н}}{=} +\infty$$

на дополнении к множеству, где ряд $\sum Y_m$ *сходится к конечному пределу.*

Доказательство. Пусть ν_a — момент остановки, равный наименьшему целому числу m (если оно существует), для которого $X_m = \sum_1^m Y_k > a$. Поскольку

$X^+_{\nu_a \wedge N} \leqslant X^+_{\nu_a \wedge N-1} + Y^+_{\nu_a \wedge N} \leqslant a + \sup\limits_n Y^+_n$, поскольку в силу сделанного предположения математическое ожидание $E\left(\left|X_{\nu_a \wedge N}\right|\right) = 2E\left(X^+_{\nu_a \wedge N}\right)$ остается ограниченным при $N \to \infty$. Согласно предложению IV.5.6, мартингал $\{X_{\nu_a \wedge N}\}$ должен сходиться к конечному пределу и, следовательно, предел $\lim\limits_{n \to \infty}$ п. н. X_n существует и конечен п. н. на множестве $(\Omega_{\nu_a})^c = \{\sup X_n \leqslant a\}$. Устремляя a к бесконечности, получаем, что предел $\lim X_n$ существует и конечен п. н. на множестве

$$\left\{\sup_n X_n < \infty\right\} = \left\{\limsup_n X_n < \infty\right\},$$

так что $\limsup\limits_n X_n \underset{\text{п. н}}{=} +\infty$ на множестве расходимости последовательности $\{X_n\}$. По симметрии на этом множестве имеем также $\liminf\limits_n X_n \underset{\text{п. н}}{=} -\infty$. ∎

Следствие. *Для всякой последовательности $\{Z_n,\ n \geqslant 1\}$ д. с. в., таких, что $0 \leqslant Z_n \leqslant 1$, имеет место равенство $\left\{\sum\limits_n Z_n < \infty\right\} \underset{\text{п. н}}{=} \left\{\sum\limits_n E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Z_n) < \infty\right\}$. В частности, если $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ — произвольная последовательность событий и $\mathcal{A}_n$ суть σ-алгебры, порожденные событиями $\{A_m,\ m \leqslant n\}$, то*

$$\limsup_{n \to \infty} A_n \underset{\text{п. н}}{=} \left\{\sum_n E^{\mathcal{A}_{n-1}}(1_{A_n}) = \infty\right\}.$$

Доказательство. Д. с. в. $Y_n = Z_n - E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Z_n)$ образуют центрированную последовательность, такую, что $|Y_n| \leqslant 1$ и $-E^{\mathcal{A}_{n-1}}(Z_n) \leqslant Y_n \leqslant Z_n$. Так как из сходимости ряда $\sum Z_m$ следует, что

$$\limsup_n \left(\sum_1^n Y_m\right) \leqslant \sum_n Z_n < \infty,$$

то по предыдущему предложению предел $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sum\limits_1^n Y_m\right)$ существует и конечен на множестве $\left\{\sum Z_n < \infty\right\}$ и поэтому на этом множестве ряд

$$\sum_n E^{\mathscr{A}_{n-1}}(Z_n) = \sum_n Z_n - \lim_n \left(\sum_1^n Y_m \right)$$

сходится. Симметричное рассуждение показывает, что $\sum Z_n < \infty$ на множестве $\left\{\sum E^{\mathscr{A}_{n-1}}(Z_n) < \infty\right\}$. ∎

Дополнения и упражнения

IV. 6.1. Пусть $\{Y_n,\ n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых д. с. в. Показать, что $\sup_n |Y_n| \in L_p$ при некотором $p \in [1, \infty)$ тогда и только тогда, когда $\sum_n \int_{\{|Y_n| > a\}} |Y_n|^p < \infty$ для некоторого действительного положительного a. [Показать сначала, что положительная д. с. в. Y интегрируемая тогда и только тогда, когда сходится бесконечное произведение

$$\prod_{m \geqslant m_0} P(Y \leqslant m),$$

где m пробегает все целые числа $\geqslant m_0$ и m_0 — целое число, такое что $P(Y \leqslant m_0) > 0$.] Вывести отсюда, что если д. с. в. $Y_n\ (n \geqslant 1)$ независимы и одинаково распределены, то для выполнения условия $\sup_n |Y_n| \in L_p$ необходимо и достаточно, чтобы $Y_1 \in L_\infty$ и что, следовательно, это условие не зависит от p.

Переформулировать результаты настоящего пункта для последовательностей независимых д. с. в., принимая во внимание, что для таких последовательностей

$$E^{\mathscr{A}_{n-1}}(Y_n^2) = E(Y_n^2).$$

IV. 6.2. Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ — субмартингал. Показать, что предел $\lim$ п. н. X_n существует и $< \infty$ п. н. на множестве сходимости ряда $\sum_n \left(E^{\mathscr{A}_{n-1}}(X_n^+) - X_{n-1}^+\right)$. Более того, если $\sup(X_n - X_{n-1})^+ \in L_1$, то это множество совпадает п. н. с множеством, на котором последовательность $\{X_n\}$ сходится к пределу $< \infty$.

Пусть $\{X_n,\ n \geqslant 1\}$ — мартингал или положительный субмартингал. Показать, что при $p \geqslant 1$ предел $\lim$ п. н. X_n существует и конечен п. н. на множестве

$$\Omega_p = \left\{ \sum_n \left(E^{\mathscr{A}_{n-1}}\left(|X_n|^p - |X_{n-1}|^p \right) < \infty \right\}.$$

Более того, если $\sup |X_n - X_{n-1}| \in L_p$, то Ω_p совпадает п. н. с множеством сходимости последовательности $\{X_n\}$ к конечному пределу.

Показать также, что подмножества Ω_p убывают с ростом p. [Использовать доказательство предложения IV. 6.2.]

IV. 6.3. Дать новое доказательство предложения IV. 4.4, основывающееся на следствии предложения IV. 6.3. [Заметить, что

$$E^{\mathcal{A}_{n-1}}\left(1_{A_n}\right) = P\left(A_n \mid A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{n-1}^c\right) \text{ п. н. на } \bigcap_{m \geqslant 1} A_m^c.]$$

IV.7 Последовательности независимых случайных величин

В настоящем пункте мы докажем две классические теоремы теории суммирования независимых д. с. в., используя теорию мартингалов и полученное с ее помощью предложение IV. 6.1. Несколько других результатов о сложении независимых д. с. в. включены в предыдущий пункт (см. упражнение IV. 6.1).

Предложение IV. 7.1 (закон больших чисел). *Пусть $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных д. с. в. с $E(|Y_1|) < \infty$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \text{п. н. } \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} Y_m = E(Y_1).$$

Более общим образом, если $E(|Y_1|^p) < \infty$ для некоторого $p \in (0,2)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \text{п. н. } n^{-1/p} \sum_{1}^{n} (Y_m - a) = 0,$$

где $a = E(Y_1)$ при $p \geqslant 1$; при $p < 1$ в качестве a можно очевидно, взять любое действительное число. Обратно, если $E(|Y_1|^p) = \infty$, то

$$\limsup_{n \to \infty} n^{-1/p} \left| \sum_{1}^{n} (Y_m - a) \right| \underset{\text{п.н.}}{=} +\infty$$

при всех $a \in R$.

Доказательство. Пусть $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных д. с. в. с $E(|Y_1|^p) < \infty$. В случае $p \geqslant 1$ мы предположим, кроме того, что $E(Y_1)=0$. Это допущение имеет смысл и не ограничивает общности, поскольку общий случай сводится к этому вычитанием постоянной $E(Y_1)$ из Y_n. Определим теперь новую последовательность $\{Z_n, n\geqslant 1\}$ независимых ограниченных д. с. в., положив $Z_n = Y_n 1_{\{|Y_n|\leqslant n^{1/p}\}}$. С помощью несложных вычислений мы покажем, что

(а) $\sum\limits_{n\geqslant 1} P(Y_n\neq Z_n)<\infty$;

(б) ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-1/p}E(Z_n)$ абсолютно сходится при $p\neq 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} E(Z_n)=0$ при $p=1$;

(в) $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-2/p}E(Z_n^2)<\infty$.

Так как $E\left[(Z_n-EZ_n)^2\right]=E(Z_n^2)-[E(Z_n)]^2\leqslant E(Z_n^2)$, из свойства (в) и из второй части предложения IV.6.1 в применении к центрированной последовательности $\{Z_n-E(Z_n),\ n\geqslant 1\}$ и к последовательности действительных чисел $u_n=n^{1/p}$ вытекает, что $\lim\limits_{n\to\infty}$ п. н. $n^{-1/p}\sum\limits_{1}^{n}[Z_m - E(Z_m)]=0$. Из свойства (б) и, при $p\neq 1$, из леммы Кронекера (стр. 209) следует, далее, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1/p}\sum\limits_{1}^{n}E(Z_m)=0$ и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \text{п. н. } n^{-1/p}\sum_{1}^{n} Z_m = 0.$$

Наконец, согласно свойству (а), при почти всех ω имеем $Y_n(\omega)=Z_n(\omega)$, если n достаточно велико. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}$ п. н. $n^{-1/p}\sum\limits_{1}^{n}Y_m=0$, поскольку $n^{-1/p}\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty$.

Для доказательства свойств (а)—(в) заметим сначала, что при любых $y\geqslant 0$ и $q\in[0,1)$ имеем

$$y^{pq}\sum_{n\geqslant 1} n^{-q}1_{\{y>n^{1/p}\}}=y^{pq}\sum_{n\geqslant 1} n^{-q}1_{\{y^p>n\}}\leqslant$$
$$\leqslant y^{pq}\int_0^{y^p} x^{-q}\,dx=(1-q)^{-1}y^p.$$

(Здесь $1_{\{y>n^{1/p}\}}$ равно 1 при $y>n^{1/p}$ и равно 0 в противном случае.)

Свойство (а) является следствием этого неравенства при $q=0$, поскольку

$$\sum_{n\geqslant 1} P(Y_n\neq Z_n)=\sum_{n\geqslant 1} E\left[1_{\{|Y_1|>n^{1/p}\}}\right]\leqslant E(|Y_1|^p)<\infty.$$

Свойство (б) при $p>1$ тоже следует из этого неравенства. В самом деле, так как $E(Y_1)=0$, имеем

$$|E(Z_n)|=\left|E\left(Y_1 1_{\{|Y_1|\leqslant n^{1/p}\}}\right)\right|=\left|E\left[Y_1 1_{\{|Y_1|>n^{1/p}\}}\right]\right|\leqslant$$
$$\leqslant E\left(|Y_1|\, 1_{\{|Y_1|>n^{1/p}\}}\right)$$

и, применяя наше неравенство с $q=(1/p)<1$, получаем

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/p}|E(Z_n)|\leqslant E\left[|Y_1|\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/p} 1_{\{|Y_1|>n^{1/p}\}}\right]\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} E(|Y_1|^p)<\infty.$$

С другой стороны, для любых $y\geqslant 0$ и $q>1$

$$y^{pq}\sum_{n\geqslant 1} n^{-q} 1_{\{y\leqslant n^{1/p}\}}=y^{pq}\sum_{n\geqslant 1} n^{-q} 1_{\{y^p\leqslant n\}}\leqslant$$
$$\leqslant y^{pq}\left[(y^p)^{-q}+\int_{y^p}^{\infty} x^{-q}\,dx\right]=1+(q-1)^{-1}y^p.$$

Это второе неравенство влечет, во-первых, справедливость (б) при $p<1$. Действительно, полагая $q=1/p$, имеем

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/p}|E(Z_n)|\leqslant\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/p}E(|Z_n|)=$$
$$=E\left[|Y_1|\sum_{n\geqslant 1} n^{-1/p} 1_{\{|Y_1|\leqslant n^{1/p}\}}\right]\leqslant 1+\left(\frac{1}{p}-1\right)^{-1}E(|Y_1|^p)<\infty.$$

Из второго неравенства вытекает также (в): полагая в нем $q=(2/p)>1$, находим

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-2/p}E(Z_n^2)=E\left[|Y_1|^2\sum_{n\geqslant 1} n^{-2/p} 1_{\{|Y_1|\leqslant n^{1/p}\}}\right]\leqslant$$
$$\leqslant 1+\left(\frac{2}{p}-1\right)^{-1}E(|Y_1|^p)<\infty.$$

Наконец, справедливость (б) при $p=1$ очевидна:

$$E(Z_n)=E[Y_1 1_{\{|Y_1|\leqslant n\}}]\to E(Y_1)=0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Таким образом, прямое утверждение полностью доказано. Докажем обратное.

Для всякой последовательности $\{Y_n,\ n\geqslant 1\}$ независимых одинаково распределенных д. с. в. $\limsup_{n\to\infty} n^{-1/p}\left|\sum_1^n (Y_m-a)\right|$ — асимптотическая и потому п. н. равная константе д. с. в. Предположим, что для некоторого $p\in(0, 2)$ и некоторого действительного a эта константа конечна. Из равенства

$$n^{-1/p}(Y_n-a)=n^{-1/p}\sum_1^n (Y_m-a)- \\ -\left(\frac{n-1}{n}\right)^{1/p}\left[(n-1)^{-1/p}\sum_1^{n-1}(Y_m-a)\right]$$

тогда вытекает, что асимптотическая и, следовательно, п. н. постоянная д. с. в. $\limsup_{n\to\infty} n^{-1/p}|Y_n|$ п. н. равна конечной константе, скажем c. Так как при этом верхний предел независимых событий $\{|Y_n|>n^{1/p}(1+c)\}$ п. н. пуст, имеем

$$\sum_{n\geqslant 1} P(|Y_n|>(1+c)n^{1/p})<\infty.$$

Применяя теперь элементарное неравенство

$$\sum_{n\geqslant 1} 1_{\{y>n^{1/p}\}}=\sum_{n\geqslant 1} 1_{\{y^p>n\}}\geqslant y^p-1 \quad (y\geqslant 0)$$

к д. с. в. $|Y_1|/(1+c)$, находим

$$E(|Y_1|^p)\leqslant(1+c)^p\left[1+\sum_{n\geqslant 1} P(|Y_1|>(1+c)n^{1/p})\right]<\infty.$$

Тем самым последнее утверждение предложения доказано. ∎

Предложение IV.7.2. *Пусть $\{Y_n,\ n\geqslant 1\}$ — последовательность независимых д. с. в. и $\varphi_n(t)=E(e^{itY_n})$ $(n\geqslant 1)$ — их характеристические функции. Для сходимости* *п. н. ряда* $\sum_n Y_n$ *достаточно, чтобы бесконечное произведение* $\prod_n \varphi_n(t)$ *сходилось к отличному от нуля пределу на некотором множестве положительной лебеговой меры.*

Доказательство. Пусть $X_n = \sum_1^n X_m$ $(n \geqslant 0)$, и пусть $\mathcal{A}_n$ есть σ-алгебра, порожденная д. с. в. X_m $(m \leqslant n)$. В силу независимости величин Y_m имеем $E(e^{itX_n}) = E\left(\prod_1^n e^{itY_m}\right) = \prod_1^n \varphi_m(t)$. Напомним также, что $|\varphi_n(t)| \leqslant E(|e^{itY_n}|) = 1$ при всех $t \in R$ и $n \geqslant 1$. Для любого действительного t, такого, что $\prod_n |\varphi_n(t)| > 0$, последовательность

$$\{e^{itX_n}/E(e^{itX_n}),\ \mathcal{A}_n;\ n \geqslant 0\}$$

является ограниченным мартингалом со значениями в комплексной плоскости. В самом деле, с одной стороны, согласно предложению IV. 4.2, $E^{\mathcal{A}_n}(e^{itY_{n+1}}) = \varphi_{n+1}(t)$ и, следовательно,

$$E^{\mathcal{A}_n}(e^{itX_{n+1}}) = e^{itX_n} E(e^{itY_{n+1}}) = e^{itX_n}\varphi_{n+1}(t),$$
$$E(e^{itX_{n+1}}) = E(E^{\mathcal{A}_n}(e^{itX_{n+1}})) = E(e^{itX_n})\,\varphi_{n+1}(t).$$

Деля первое из этих равенств на второе, убеждаемся, что рассматриваемая последовательность — мартингал. С другой стороны, образующие этот мартингал д. с. в. ограничены по абсолютной величине сверху постоянной $\left(\prod_m |\varphi_m(t)|\right)^{-1}$, поскольку

$$|E(e^{itX_n})| = \prod_1^n |\varphi_m(t)| \downarrow \prod_m |\varphi_m(t)|$$

при $n \uparrow \infty$. Применение предложения IV. 5.6 к действительной и мнимой частям рассматриваемого мартингала показывает, что мартингал этот п. н. сходится при $n \to \infty$.

Обозначим теперь через T борелевское множество тех точек $t \in R$, в которых произведения $E\left(e^{itX_n}\right) = \prod_1^n \varphi_m(t)$ сходятся к ненулевому пределу при $n \to \infty$. Ясно, что $\prod_m |\varphi_m(t)| > 0$ при $t \in T$. Принимая во внимание вышесказанное и сходимость $E\left(e^{itX_n}\right)$ при $t \in T$, видим, что последовательность $\left\{e^{itX_n}, n \geqslant 1\right\}$ сходится п. н. при всех $t \in T$. По предположению множество T имеет положительную лебегову меру; ниже мы покажем, что при этом $\limsup_{n \to \infty} |X_n| < \infty$ п. н. Отсюда следует, что последовательность $\{X_n, n \geqslant 0\}$ сходится п. н. В самом деле, так как множество T имеет положительную лебегову меру, оно содержит по крайней мере одну пару t, t' с иррациональным отношением t'/t, а всякая *ограниченная* последовательность действительных чисел $\{x_n, n \geqslant 1\}$ сходится, если сходятся две последовательности $\left\{e^{itx_n}, n \geqslant 0\right\}$ и $\left\{e^{it'x_n}, n \geqslant 0\right\}$, отвечающие действительным t, t' с иррациональным отношением t'/t.

Каждому борелевскому множеству $S \subset R$ с конечной и строго положительной лебеговой мерой $\lambda(S)$ сопоставим комплексную функцию действительного переменного x: $f_S(x) = \int_S e^{itx} \lambda(dt)$. Хорошо известно, что непрерывная ограниченная функция $f_S(x)$ стремится к нулю на бесконечности. [Действительно, в случае когда S есть конечное объединение непересекающихся ограниченных интервалов, это проверяется простым подсчетом; общий случай получается с помощью аппроксимации S по мере конечными объединениями непересекающихся интервалов с учетом формулы

$$\sup_x |f_S(x) - f_{S'}(x)| \leqslant \lambda(S \,\Delta\, S').]$$

Покажем, что если такое множество S содержится в T, то последовательность $\{f_S(X_n), n \geqslant 0\}$ сходится п. н. Пусть D — измеримое подмножество произведения $S \times \Omega$, состоящее из тех пар (t, ω), в которых последовательность $\left\{e^{itX_n(\omega)}\right\}$ не сходится при $n \to \infty$. Согласно уже доказанному, все сечения $D_t\,(t \in S)$ множества D имеют нулевую вероятность. Применяя теорему Фубини, получаем

$$\int \lambda(D_\omega)\, P(d\omega) = [\lambda \times P](D) = \int_S \lambda(dt)\, P(D_t) = 0,$$

откуда $\lambda(D_\omega) = 0$ п. н. Но для всякого ω, такого, что $\lambda(D_\omega) = 0$, последовательность $\{e^{itX_n(\omega)}\}$ сходится при почти всех $t \in S$, а следовательно, в силу теоремы Лебега сходится и последовательность $f_S(X_n(\omega)) = \int_S \lambda(dt)\, e^{itX_n(\omega)}$.

Событие $\{\limsup_n |X_n| < \infty\}$ является асимптотическим, и поэтому вероятность его равна либо 0, либо 1. Предположим, что эта вероятность равна 0. Тогда $\limsup_n |X_n| = \infty$ п. н. и предел последовательности $\{f_S(X_n),\ n \geqslant 0\}$, который, как мы видели, существует п. н. для всякого борелевского множества S конечной лебеговой меры, равен п. н. нулю, поскольку функции f_S обращаются в нуль на бесконечности. Полагая $n \to \infty$ в соотношении

$$E[f_S(X_n)] = \int_S \lambda(dt) E\left(e^{itX_n}\right) = \int_S \lambda(dt) \prod_1^n \varphi_m(t),$$

принимая во внимание неравенства

$$|f_S(\cdot)| \leqslant \lambda(S), \quad \left|\prod_1^n \varphi_m(\cdot)\right| \leqslant 1$$

и дважды используя теорему Лебега, получаем

$$0 = \lim_n E[f_S(X_n)] = \lim_n \int_S \lambda(dt) \prod_1^n \varphi_m(t) = \int_S \lambda(dt) \prod_m \varphi_m(t),$$

каково бы ни было борелевское множество $S \subset T$ конечной лебеговой меры. Отсюда $\prod_m \varphi_m(t) = 0$ п. н. на T, что противоречит определению T. Тем самым мы показали, что $\limsup_n |X_n| < \infty$ п. н. ■

Следствие 1. *Пусть Y_n — независимые д. с. в. с характеристическими функциями φ_n, $n \geqslant 1$. Следующие условия равносильны:*

(а) *ряд $\sum Y_n$ сходится п. н.;*

(б) *ряд $\sum Y_n$ сходится по вероятности;*

(в) *произведения $\prod_1^n \varphi_m(t)$ сходятся при $n \to \infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве R;*

(г) *произведения $\prod_1^n \varphi_m(t)$ сходятся при $n \to \infty$ к ненулевому пределу на некотором множестве положительной лебеговой меры.*

Доказательство. Ясно, что из (а) вытекает (б). Из сходимости по вероятности д. с. в. $X_n = \sum_1^n Y_m$ к д. с. в. X и из неравенства $|e^{itx'} - e^{itx}| \leqslant |t||x - x'|$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого фиксированного $u > 0$

$$P\left[|e^{itX_n} - e^{itX}| > \varepsilon\right] \leqslant P\left[|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{u}\right] \to 0 \quad (|t| \leqslant u).$$

Отсюда в силу ограниченности с. в. e^{itX_n} вытекает, что $E(e^{itX_n}) = \prod_1^n \varphi_m(t)$ сходится к $E(e^{itX})$ равномерно на каждом интервале $|t| \leqslant u$.

Так как $\prod_1^n \varphi_m(0) = 1$, то из условия (в) следует сходимость произведений $\prod_1^n \varphi_m(t)$ к ненулевому пределу по крайней мере на некоторой окрестности нуля, и поэтому (в) влечет (г). Наконец, согласно предыдущему предложению, из (г) вытекает (а). ∎

Следствие 2. *Пусть Y_n — независимые д. с. в. с характеристическими функциями φ_n, $n \geqslant 1$. Если бесконечное произведение $\prod_n |\varphi_n(t)|$ строго положительно на множестве положительной лебеговой меры, то существует* *последовательность действительных чисел* $\{a_n, n \geqslant 1\}$, *такая, что ряд* $\sum_n (Y_n - a_n)$ *сходится п. н. (при этом говорят, что ряд* $\sum Y_n$ *квазисходится п. н.).*

Доказательство. Пусть $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ и $\{Y'_n, n \geqslant 1\}$ — вероятностное пространство и последовательность определенных на нем независимых д. с. в., изоморфные $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ и $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ соответственно. Определим на произведении $(\Omega, \mathcal{A}, P) \times (\Omega', \mathcal{A}', P')$ д. с. в. Z_n, положив $Z_n(\omega, \omega') = Y_n(\omega) - Y'_n(\omega')$. В силу следствия предложения IV. 4.1. д. с. в. Z_n независимы и характеристические функции их равны

$$\int_{\Omega \times \Omega'} e^{itZ_n} d(P \times P') = \int_{\Omega} e^{itY_n} dP \int_{\Omega'} e^{-itY'_n} dP' =$$

$$= \varphi_n(t) \varphi_n(-t) = |\varphi_n(t)|^2.$$

Следовательно, согласно сделанному предложению, произведения характеристических функций величин Z_n сходятся к ненулевому пределу на множестве положительной лебеговой меры. Применение предложения IV. 7.2 показывает теперь, что множество сходимости ряда $\sum Z_n$ совпадает п. н. со всем пространством $\Omega \times \Omega'$. В силу теоремы Фубини при почти всех ω' множество сходимости (подмножество Ω) ряда $\sum_n Z_n(\cdot, \omega')$ совпадает п. н. с Ω. Беря одно из таких ω' и полагая $a_n = Y'_n(\omega')$, получаем ряд $\sum_n (Y_n - a_n)$, сходящийся п. н. на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. ∎

Дополнения и упражнения

IV. 7.1. Пусть $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых д. с. в. с одним и тем же законом распределения $P(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$. Показать, что ряд $\sum_{n \geqslant 1} c_n \varepsilon_n$, где $\{c_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность комплексных чисел, сходится п. н. тогда и только тогда, когда $\sum_n |c_n|^2 < \infty$. То же самое условие необходимо и достаточно для сходимости п. н. ряда $\sum_{n \geqslant 1} c_n e^{2\pi i \varphi_n}$, где $\{\varphi_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых д. с. в., равномерно распределенных на $[0, 1)$. (Отметим, что более сильное условие $\sum_n |c_n| < \infty$ необходимо и достаточно для сходимости ряда $\sum_n c_n e^{2\pi i \varphi_n}$ при *любом* выборе φ_n из $[0, 1)$, а также, по крайней мере в случае действительных c_n, для сходимости ряда $\sum_n c_n \varepsilon_n$ при любом выборе $\varepsilon_n = \pm 1$.)

Пусть $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых д. с. в. с *симметричными* вероятностными законами (т. е. таких, что Y_n и $-Y_n$ имеют один и тот же вероятностный закон). Будем считать Y_n координатами пространства $(R, \mathscr{R})^N$. Показать, что ряд $\sum Y_n$ сходится п. н. в R тогда и только тогда, когда сходится п. н. в R ряд $\sum Y_n^2$. [Для любой последовательности $\{\delta_n\}$ действительных чисел, принимающих значения ± 1, определим преобразование θ пространства $(R, \mathscr{R})^N$ на себя, положив $\theta(\{y_n\}) = \{\delta_n y_n\}$. Преобразование θ измеримо и сохраняет вероятностя. Следовательно, для сходимости п. н. ряда $\sum Y_n$ достаточно, чтобы сходился п. н. один из рядов $\sum \delta_n Y_n$, и необходимо, чтобы все такие ряды сходились п. н. С другой стороны, если $\{\varepsilon_n, n \geqslant 1\}$ — определенная на вероятностном пространстве $(\Omega', \mathscr{A}', P')$ последовательность независимых д. с. в. с одним и тем же законом $P(\varepsilon_n = \pm 1) = 1/2$, то из предыдущего можно вывести, что ряд $\sum Y_n^2$ сходится п. н. на R^N тогда и только тогда, когда ряд $\sum \varepsilon_n Y_n$ сходится п. н. на $R^N \times \Omega'$.]

IV. 7.2. Пусть $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных д. с. в. и ν — момент остановки относительно возрастающей последовательности σ-алгебр $\{\mathscr{A}_n = \mathscr{B}(Y_m, m \leqslant n)\}$. Показать, что последовательность $\{Y_{\nu+n}, n \geqslant 1\}$ не зависит от $\mathscr{A}_\nu$ и что образующие ее д. с. в. независимы и имеют тот же вероятностный закон, что и Y_n. [Здесь не предполагается, что $\Omega_\nu = \Omega$, и поэтому нужно сначала дать точную формулировку утверждаемого результата.]

IV. 7.3. Рассмотрим топологическое линейное пространство (классов эквивалентности) конечных д. с. в., определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, с топологией сходимости по вероятности. Пусть L — линейное подпространство этого пространства, порожденное элементами последовательности $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ независимых (не равных константам п. н.) д. с. в. Наша цель — описать замыкание $\bar{L}$ подпространства L.

Показать, что для всякого n существует единственный непрерывный линейный функционал c_n на $\bar{L}$, такой, что $c_n(Y_m) = 1$ при

$m=n$ и $c_n(Y_m)=0$ при $m \neq n$. [Функционал c_n однозначно определен и непрерывен на L, поскольку

$$\lim_{p\to\infty} \sum_m a_m^{(p)} Y_m = 0 \text{ по вероятности } \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \varphi_n\left(a_n^{(p)} t\right) = 1 \quad (t \in R)$$
$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} a_n^{(p)} = 0.]$$

Показать, далее, что для всякой д. с. в. $Z \in \bar{L}$ существует последовательность действительных чисел $\{b_n;\ n \geqslant 1\}$, такая, что

$$Z = \lim_{n\to\infty} \text{ п. н. } \left(\sum_1^n c_m(Z)\, Y_m - b_n\right);$$

кроме того, если постоянная 1 не принадлежит $\bar{L}$ (это так, в частности, когда д. с. в. Y_n имеют симметричные законы распределения), то числа b_n можно взять равными нулю.

[Показать, что д. с. в. $Z - \sum_1^n c_m(Z)\, Y_m$ не зависит от $Y_1, \ldots, Y_n$, и поэтому $\prod_1^n |\varphi_m[c_m(Z)\, t]| \geqslant |E(e^{itZ})|$. Вывести отсюда существование действительных чисел a_n $(n \geqslant 1)$, таких, что д. с. в. $\sum_1^n c_m(Z)\, Y_m - a_n$ сходится п. н. к пределу, отличающемуся от Z лишь на асимптотическую д. с. в. Наконец, если для стремящейся к бесконечности последовательности $\{n_j\}$ предел $\lim_j b_{n_j}$ существует в $\bar{R}$ и не равен нулю, то

$$1 = \lim_j b_{n_j}^{-1}\left[Z - \sum_1^{n_j} c_m(Z)\, Y_m\right] \in \bar{L}.]$$

Глава V

Эргодическая теория и марковские процессы

V.1. Теорема Ионеску Тулчи и теорема о произведении пространств

Настоящий пункт посвящен обобщению предложения III.2.1. Это обобщение интересно в том отношении, что оно дает конструкцию вероятностных пространств, связанных со случайными процессами с дискретным временем. Особенно естественна эта конструкция в случае марковских процессов.

При осуществлении этой конструкции случайность вводится в пространство траекторий способом, отличным от того, каким она вводилась в п. III.3. При рассмотрении процесса мы считаем, что в каждый момент t он представляется точкой (или состоянием) x_t измеримого пространства $(E_t, \mathcal{F}_t)$. Всюду на протяжении настоящей главы предполагается, что область значений индекса t есть множество целых неотрицательных чисел N (т. е. рассматриваются процессы с дискретным временем). Чтобы „сделать процесс случайным", мы предположим, что в каждый момент t нам задан в форме некоторой переходной вероятности вероятностный закон процесса в момент $t+1$ (т. е. вероятностный закон величины x_{t+1}) при условии, что известна эволюция процесса вплоть до момента t (т. е. при условии $[x_0, \ldots, x_t]$). Для того чтобы иметь возможность построить вероятность на пространстве траекторий

$$(\Omega, \mathcal{A}) = \left(\prod_t F_t, \bigotimes_t \mathcal{F}_t\right),$$

необходимо еще задать вероятностный закон процесса в начальный момент $t=0$. В следующем предложении конструируются вероятности P_{x_0} на $(\Omega, \mathcal{A})$, отвечающие различным возможным начальным состояниям $x_0 \in E_0$. Затем будет показано, что эти вероятности можно проинтегрировать по произвольной начальной вероятности P_0 на $(E_0, \mathcal{F}_0)$; устанавливаемая при этом формула (см. следствие 2) лежит в основе всего дальнейшего изложения в настоящей главе.

Отметим еще, что результаты данного пункта являются наиболее общими известными результатами, позволяющими строить вероятности на произведении пространств без использования каких-либо условий топологического характера (как это делалось, например, в теореме п. III. 3).

Предложение V. I.1 (Ионеску Тулча). *Пусть $\{(E_t, \mathcal{F}_t),\ t \in N\}$ — бесконечная последовательность измеримых пространств, и для каждого $t \in T$ пусть $P_{t+1}^{0 \dots t}$ — переходная вероятность для пространств $\left(\prod_0^t E_s, \bigotimes_0^t \mathcal{F}_s\right)$ и $(E_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})$. Тогда каждому $x_0 \in E_0$ соответствует единственная вероятность P_{x_0} на*

$$(\Omega, \mathcal{A}) = \prod_t (E_t, \mathcal{F}_t),$$

значение которой на произвольном измеримом прямоугольнике $\prod_t F_t$ дается формулой

$$P_{x_0}\left[\prod_t F_t\right] = 1_{F_0}(x_0) \int_{x_1 \in F_1} P_1^0(x_0;\, dx_1) \int_{x_2 \in F_2} P_2^{01}(x_0, x_1;\, dx_2) \dots$$

$$\dots \int_{x_T \in F_T} P_T^{0 \dots T-1}(x_0 \dots x_{T-1};\, dx_T),$$

где T настолько велико, что $F_t = E_t$ при $t > T$ (правая часть при этом не зависит от выбора T). Для любой положительной д. с. в. на $(\Omega, \mathcal{A})$, зависящей лишь от координат с индексами, не превосходящими T, имеем

$$\int_\Omega P_{x_0}(d\omega')\, Y(\omega') = \int_{E_1} P_1^0(x_0;\, dx_1) \int_{E_2} P_2^{01}(x_0, x_1;\, dx_2) \dots$$

$$\dots \int_{E_T} P_T^{0 \dots T-1}(x_0 \dots x_{T-1};\, dx_T)\, Y(x_0 \dots x_T).$$

Кроме того, для всякой положительной д. с. в. Y на $(\Omega, \mathcal{A})$ интеграл

$$\int P_{x_0}(d\omega')\, Y(\omega')$$

есть $\mathcal{F}_0$-измеримая функция от x_0.

Определяющая P_{x_0} формула (правую ее часть следует читать справа налево), несмотря на кажущуюся ее сложность, интуитивно проста: с „дифференциальной" точки зрения она означает, что вероятность последовательного попадания в множества состояний $dx_1, \ldots, dx_T$, исходя из начального состояния x_0, равна произведению условных вероятностей попадания в dx_t после пребывания в состояниях $x_0, \ldots, x_{t-1}$ $(0 < t \leqslant T)$. Последнее утверждение предложения означает, что $\{P_{x_0}[A];\ x_0 \in E_0, A \in \mathcal{A}\}$ есть переходная вероятность для пространств $(E_0, \mathcal{F}_0)$ и $(\Omega, \mathcal{A})$.

Доказательство. Докажем предложение сначала в случае конечной последовательности пространств $\{(E_t, \mathcal{F}_t);\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и переходных вероятностей $\{P_{t+1}^{0\ldots t},\ 0 \leqslant t < T\}$. Определим последовательно для убывающих значений t вероятности $P_{x_0 \ldots x_t}$ на произведении пространств $\prod_{s \leqslant T}(E_s, \mathcal{F}_s)$, положив

$$P_{x_0 \ldots x_T}[A] = 1_A(x_0 \ldots x_T),$$

$$P_{x_0 \ldots x_t}[A] = \int_{E_{t+1}} P_{t+1}^{0 \ldots t}(x_0 \ldots x_t;\ dx_{t+1})\, P_{x_0 \ldots x_t x_{t+1}}[A].$$

Это определение оправдано результатами п. III.2, согласно которым на каждом шаге функция множеств $P_{x_0 \ldots x_t}$ есть вероятность на $\bigotimes_{s \leqslant T} \mathcal{F}_s$ и при любом фиксированном $A \in \mathcal{A}$ функция $P_{x_0 \ldots x_t}[A]$ является $\bigotimes_{s \leqslant t} \mathcal{F}_s$-измеримой функцией от $(x_0, \ldots, x_t)$ и $\mathcal{F}_t$-измеримой функцией от x_t (при фиксированных $x_0, \ldots, x_{t-1}$). Очевидно, далее, что для любой положительной д. с. в. Y на $\coprod_{s\leqslant T}(E_s, \mathcal{F}_s)$ при всех $t\leqslant T$

$$\int_{\Omega} P_{x_0\dots x_t}[d\omega'] Y(\omega') = \int_{E_{t+1}} P^{0\dots t}_{t+1}(x_0 \dots x_t; dx_{t+1}) \dots$$
$$\dots \int_{E_T} P^{0\dots T-1}_{T}(x_0 \dots x_{T-1}; dx_T) Y(x_0 \dots x_T).$$

Перейдем теперь к случаю бесконечной последовательности пространств. Как и выше, наряду с P_{x_0} мы определим также вероятности $P_{x_0\dots x_t}$. Предыдущее рассуждение показывает, что при каждом конечном T существуют вероятности $P^{(T)}_{x_0\dots x_t}$ на $\bigotimes_{s\leqslant T}\mathcal{F}_s$, обладающие на этих σ-подалгебрах σ-алгебры $\mathcal{A}$ некоторыми из требуемых свойств. Далее, нетрудно убедиться, что эти определенные для различных T вероятности согласованы. Следовательно, существуют функции множеств $P_{x_0\dots x_t}$, определенные на объединении $\mathcal{B}=\bigcup_T \bigotimes_{s\leqslant T}\mathcal{F}_s$, ограничения которых на $\bigotimes_{s\leqslant T}\mathcal{F}_s$ совпадают с вероятностями $P^{(T)}_{x_0\dots x_t}$. Более того, $\mathcal{B}$ есть булева алгебра подмножеств Ω, порождающая $\mathcal{A}$, и функции множеств $P_{x_0\dots x_t}$ аддитивны на $\mathcal{B}$. Для доказательства продолжимости функций $P_{x_0\dots x_t}$ до вероятностей на $\mathcal{A}$ достаточно, таким образом, показать, что они непрерывны в $\varnothing$ на $\mathcal{B}$ (см. теорему п. I. 5).

Пусть $\{B_n, n\geqslant 1\}$ — убывающая к $\varnothing$ последовательность множеств из $\mathcal{B}$; предположим, что существуют $t\geqslant 0$ и $x_0^*, \dots, x_t^*$, такие, что $\lim\limits_n \downarrow P_{x_0^*\dots x_t^*}(B_n) > 0$. В силу непрерывности интеграла относительно монотонной сходимости имеем

$$\lim_n \downarrow P_{x_0^*\dots x_t^*}(B_n) =$$
$$= \int_{E_{t+1}} P^{0\dots t}_{t+1}(x_0^* \dots x_t^*; dx_{t+1}) \lim_n \downarrow P_{x_0^*\dots x_t^* x_{t+1}}(B_n).$$

Поскольку левая часть этого равенства строго положительна, постольку для некоторого x^*_{t+1}

$$\lim_n P_{x_0^* \dots x_t^* x_{t+1}^*}(B_n) > 0.$$

Пользуясь индукцией, построим теперь последовательность $\omega^* = \{x_0^*, \dots\}$, такую, что $\lim_n \downarrow P_{x_0^* \dots x_u^*}(B_n) > 0$ при всех $u \geqslant t$. С другой стороны, для любого фиксированного n при u настолько большом, что $B_n \in \bigotimes_0^u \mathscr{F}_s$, имеем

$$P_{x_0 \dots x_u}(B_n) = 1_{B_n}(x_0, \dots, x_u).$$

Таким образом, мы должны иметь $\omega^* \in B_n$ при всех n, что невозможно. Тем самым показано, что все функции $P_{x_0 \dots x_t}$ являются вероятностями на $\mathscr{B}$.

Наконец, поскольку, как доказано выше, $P_{x_0 \dots x_t}[B]$ суть измеримые функции от $(x_0, \dots, x_t)$ при $B \in \mathscr{B}$, постольку интеграл $\int P_{x_0 \dots x_t}(d\omega')\, Y(\omega')$ есть измеримая функция от $(x_0, \dots, x_t)$ для любой положительной д. с. в. Y на $(\Omega, \mathscr{A})$. ∎

Смысл формул приводимого ниже следствия становится особенно ясным, если $P_{x_0 \dots x_t}$ интерпретировать как вероятностный закон процесса при условии, что в моменты $0, \dots, t$ процесс находится в состояниях $x_0, \dots, x_t$.

Следствие 1. *Для определенных выше вероятностей $P_{x_0 \dots x_t}$ на $(\Omega, \mathscr{A})$ имеют место следующие соотношения:*

(a) $$\int_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \dots x_s}(d\omega')\, Y(\omega') =$$

$$= \int_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \dots x_s}(d\omega') \int_{\omega'' \in \Omega} P_{x'_0 \dots x'_t}(d\omega'')\, Y(\omega''),$$

каковы бы ни были $s \leqslant t$ *и положительная* д. с. в. Y;

(б) $$\int\limits_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \ldots x_t}(d\omega')\, Y(\omega')\, Z(\omega') = \\ = Z(x_0 \ldots x_t) \int\limits_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \ldots x_t}(d\omega')\, Y(\omega'),$$

каковы бы ни были t, *положительная д. с. в.* Y *и положительная* $\bigotimes\limits_{s \leqslant t} \mathcal{F}_s$*-измеримая (т. е. зависящая лишь от координат с индексом, не большим* t) *д. с. в.* Z.

Отметим, что в правой части формулы (а) интеграл

$$\int\limits_{\omega'' \in \Omega} P_{x'_0 \ldots x'_t}(d\omega'')\, Y(\omega'')$$

определяет функцию от $(x'_0, \ldots, x'_t)$ и, следовательно, от $\omega' = (x'_0, \ldots, x'_t, \ldots)$.

Доказательство. Достаточно проверить указанные соотношения в случае, когда Y и Z суть индикаторные д. с. в. В этом случае их можно записать в виде

(а) $$P_{x_0 \ldots x_s}[A] = \int P_{x_0 \ldots x_s}(d\omega')\, P_{x'_0 \ldots x'_t}[A] \qquad (s \leqslant t,\ A \in \mathcal{A})$$

(б) $$P_{x_0 \ldots x_t}[AB] = 1_B(x_0, \ldots, x_t)\, P_{x_0 \ldots x_t}[A] \qquad \Bigl(A \in \mathcal{A},\ B \in \bigotimes_{s \leqslant t} \mathcal{F}_s\Bigr).$$

Более того, достаточно проверить эти соотношения для случая, когда A и B суть измеримые прямоугольники; но в этом случае их справедливость непосредственно вытекает из определений. ∎

Следствие 2. *Пусть* $\{(E_t, \mathcal{F}_t);\ t \in N\}$ *— последовательность измеримых пространств, и для каждого* $t \in N$ *пусть* $P_{t+1}^{0 \ldots t}$ *— переходная вероятность для пространств* $\left(\prod\limits_0^t E_s,\ \bigotimes\limits_0^t \mathcal{F}_s\right)$ *и* $(E_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})$. *Пусть, далее,* P_0 *— вероятность на* $(E_0, \mathcal{F}_0)$. *Тогда существует един-*

ственная вероятность P на пространстве $(\Omega, \mathcal{A}) = \prod_t (E_t, \mathcal{F}_t)$, *значение которой на каждом измеримом прямоугольнике дается формулой*

$$P\left[\prod_t F_t\right] = \int_{F_0} P_0(dx_0) \int_{F_1} P_1^0(x_0, dx_1) \int_{F_2} P_2^{01}(x_0, x_1; dx_2) \ldots$$
$$\ldots \int_{F_T} P_T^{0 \ldots T-1}(x_0, \ldots, x_{T-1}; dx_T),$$

где T настолько велико, что $F_t = E_t$ при $t > T$.

Для всякого множества $A \in \mathcal{A}$

$$P(A) = \int_{E_0} P_0(dx_0) P_{x_0}(A).$$

Для любой положительной (P-квазиинтегрируемой д. с. в. Y на $(\Omega, \mathcal{A})$ определенная всюду (P_0-почти всюду функция $\int P_{x_0}(d\omega') Y(\omega')$ от x_0 есть вариант условного математического ожидания $E^{\mathcal{F}_0}(Y)$ на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Доказательство. Ясно, что функция множеств

$$\int P_0(dx_0) P_{x_0}(A)$$

является вероятностью (см. п. III.2), принимающей требуемые значения на полуалгебре $\mathcal{P}$ измеримых прямоугольников. Но $\mathcal{P}$ порождает $\mathcal{A}$, тем самым первые два утверждения предложения доказаны. Согласно следствию 1, $\mathcal{F}_0$-измеримая д. с. в. $U(x_0) = \int P_{x_0}(d\omega') Y(\omega')$ удовлетворяет соотношению

$$\int_\Omega P(d\omega') Y(\omega') Z(\omega') = \int_{E_0} P_0(dx_0) \int_\Omega P_{x_0}(d\omega') Y(\omega') Z(\omega') =$$
$$= \int_{E_0} P_0(dx_0) Z(x_0) U(x_0) = \int_\Omega P(d\omega') Z(\omega') U(\omega'),$$

где Z — произвольная положительная $\mathcal{F}_0$-измеримая д. с. в. (отметим, что P_0 совпадает с ограничением P на $\mathcal{F}_0$, поскольку $P_{x_0}(A) = 1_A(x_0)$ при $A \in \mathcal{F}_0$).

В силу самого определения условного математического ожидания отсюда следует, что $U(\omega)=E^{\mathcal{F}_0}(Y)$. ∎

Аналогично, интеграл $\int P_{x_0 \dots x_t}(d\omega') Y(\omega')$ является вариантом условного математического ожидания $E^{\underset{s\leqslant t}{\otimes}\mathcal{F}_s}(Y)$ на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Установленные в следствии 1 свойства вероятностей $P_{x_0 \dots x_t}$ представляют собой, таким образом, два основных свойства условных вероятностей $E^{\underset{s\leqslant t}{\otimes}\mathcal{F}_s}$. Отметим, однако, что соотношения (а) и (б) выполняются всюду на Ω, в то время как соотношения между условными математическими ожиданиями являются соотношениями между классами эквивалентности (которые, согласно определению, выполняются лишь почти всюду).

Следующий частный случай предыдущих результатов приводит к понятиям произведения вероятностей и произведения вероятностных пространств.

Предложение V. 1.2. *Пусть $\{(E_t, \mathcal{F}_t, P_t);\ t\in T\}$ — произвольное непустое семейство вероятностных пространств. Существует единственная вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})=\left(\prod\limits_t E_t,\ \underset{t}{\otimes}\mathcal{F}_t\right)$, такая, что для всякого измеримого прямоугольника*

$$P\left(\prod_T A_t\right)=\prod_T P(A_t).$$

Эта вероятность является единственной вероятностью на $(\Omega, \mathcal{A})$, относительно которой семейство $\{\mathcal{F}_t,\ t\in T\}$ σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$ независимо и ограничения которой на $\mathcal{F}_t$ совпадают с P_t $(t\in T)$.

Доказательство. В случае когда множество T счетно, можно идентифицировать T с N и воспользоваться следствием 2 предложения V. 1.1 с $P_{t+1}^{0,\dots,t}=P_{t+1}$ (независимо от $\omega_0, \dots, \omega_t$). Таким образом, когда T счетно, вероятность P с требуемыми свойствами существует и единственна. В общем случае аналогично существует произведение вероятностей P_s на всяком произведении σ-алгебр $\bigotimes_S \mathcal{F}_t$, где S — счетное подмножество T. Эти вероятности P_S взаимно согласованы и поэтому задают вероятность P на σ-алгебре $\mathcal{A} = \bigotimes_T \mathcal{F}_t = \bigcup_S \left(\bigotimes_S \mathcal{F}_t\right)$ (объединение берется по всем счетным подмножествам множества T). Так определенная вероятность P обладает всеми требуемыми свойствами. ∎

Дополнения и упражнения

V. 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{A})$ — измеримое пространство и $\{\mathcal{B}_i, i \in I\}$ — счетное семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{A}$, порождающее $\mathcal{A}$ и обладающее следующим свойством: $\bigcap_I B_i \neq \varnothing$ каковы бы ни были $B_i \neq \varnothing$, $B_i \in \mathcal{B}_i$ $(i \in I)$. Показать, что существует единственная вероятность P на $(\Omega, \mathcal{A})$, ограничения которой на $\mathcal{B}_i$ совпадают с произвольными заданными вероятностями P_i $(i \in I)$ и для которой

$$P\left(\bigcap_I B_i\right) = \prod_I P_i(B_i),$$

каковы бы ни были $B_i \in \mathcal{B}_i$ $(i \in I)$. [Показать, что если φ — отображение Ω в Ω^I, определяемое формулой $\varphi(\omega) = (\omega, \omega, \ldots)$, то отображение φ^{-1} есть изоморфизм произведения $\bigotimes_I \mathcal{B}_i$ на $\mathcal{A}$. Положить $P \circ \varphi^{-1} = \prod_I P_i$.] Распространить этот результат на случай несчетного семейства $\{\mathcal{B}_i\}$.

V. 1.2. Пусть $\{(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n), n \geqslant 1\}$ — последовательность вероятностных пространств. Пусть, далее, $Q_n = f_n \cdot P_n$ — абсолютно непрерывная относительно P_n вероятность на $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, $n \geqslant 1$. Положим $\rho_n = \int \sqrt{f_n}\, dP_n$. Показать, что вероятность $Q = \prod_n Q_n$ на произведении пространств $\prod (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ абсолютно непрерывна или сингулярна относительно $P = \prod_n P_n$, смотря по тому, положительно или равно нулю произведение $\prod_n \rho_n$. [В случае когда $\prod_n \rho_n > 0$, показать сначала, что функции $g_N = \prod_{n \leqslant N} \sqrt{f_n}$ образуют последовательность Коши в $L_2(P)$. В случае когда $\prod_n \rho_n = 0$, показать, что существуют множества $A_N \in \bigotimes_{n \leqslant N} \mathcal{A}_n$, такие, что $P(A_N) \to 0$ и $Q(A_N) \to 1$ при $N \to \infty$.]

V.2. Построение канонических марковских процессов (дискретное время)

Определенный в предложении V.1.1 случайный процесс, задаваемый последовательностью переходных вероятностей, называется *марковским*, если для каждого момента t зависимость вероятностного закона процесса в следующий момент $t+1$ от эволюции системы вплоть до момента t сводится лишь к зависимости от состояния процесса в момент t. Иными словами, случайный процесс является марковским, если можно положить $P_{t+1}^{0, \ldots, t}(x_0, \ldots, x_t; F) = P_{t+1}^t(x_t, F)$. Согласно результатам п. V.1, для каждых момента t и состояния x_t можно построить вероятностный закон P_{t, x_t} эволюции такого процесса, начиная с момента t. Вероятность P_{t, x_t} определена на σ-алгебре

$$\mathcal{A}_\infty^t = \bigotimes_{s \geqslant t} \mathcal{F}_s$$

событий, задаваемых моментами времени $\geqslant t$ (мы предпочитаем рассматривать $\mathcal{A}_\infty^t$ как σ-алгебру подмножеств произведения $\Omega = \prod_s E_s$, а не произведения $\prod_{s \geqslant t} E_s$; подмножества из $\mathcal{A}_\infty^t$ не зависят, очевидно, от координат с индексами, меньшими t). Всюду в дальнейшем X_t обозначает координатное отображение пространства Ω в E_t, так что $\omega = \{X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots\}$. При выполнении указанного выше предположения определенную на $(\Omega, \mathcal{A})$ с. ф. $\{X_t, t \geqslant 0\}$ мы будем называть марковской.

Предложение V.2.1. *Пусть $\{(E_t, \mathcal{F}_t), t \in N\}$ — последовательности измеримых пространств. Далее, для каждого t пусть P_{t+1}^t — переходная вероятность для пространств $(E_t, \mathcal{F}_t)$ и $(E_{t+1}, \mathcal{F}_{t+1})$. Каковы бы ни были t и $x_t \in E_t$, существует единственная вероятность P_{t, x_t} на $(\Omega, \mathcal{A}_\infty^t)$, значения которой на произвольном измеримом прямоугольнике $\prod_s F_s$ ($F_s = E_s$ при $s < t$) даются* *формулой*

$$P_{t,x_t}\left[\prod_s F_s\right] = 1_{F_t}(x_t)\int_{F_{t+1}} P^t_{t+1}(x_t, dx_{t+1})\int_{F_{t+2}} P^{t+1}_{t+2}(x_{t+1}, dx_{t+2})\ldots$$
$$\ldots\int_{F_T} P^{T-1}_T(x_{T-1}, dx_T),$$

где T настолько велико, что $F_s = E_s$ при $s > T$. Для всякой $\mathcal{A}^t_\infty$-измеримой положительной д. с. в. Y интеграл $\int P_{t,x_t}(d\omega')\,Y(\omega')$ есть $\mathcal{F}_t$-измеримая функция от x_t.

Семейство вероятностей P_{t,x_t} обладает следующим свойством.

Марковское свойство. *Для любых $0 \leqslant s \leqslant t$ и любых положительных д. с. в. Y и Z, измеримых относительно $\mathcal{A}^s_t = \bigotimes\limits_{s \leqslant u \leqslant t} \mathcal{F}_u$ и $\mathcal{A}^t_\infty = \bigotimes\limits_{u \geqslant t} \mathcal{F}_u$ соответственно, имеет место равенство*

$$\int_{\omega' \in \Omega} P_{s,x_s}(d\omega')\,Y(\omega')\,Z(\omega') =$$
$$= \int_{\omega' \in \Omega} P_{s,x_s}(d\omega')\,Y(\omega')\int_{\omega'' \in \Omega} P_{t,X_t(\omega')}(d\omega'')\,Z(\omega'').$$

Если P_0 — вероятность на $(E_0, \mathcal{F}_0)$, то формула

$$P(A) = \int_{E_0} P_0(dx_0)\,P_{x_0}[A]$$

определяет вероятность на $(\Omega, \mathcal{A}) = \prod_t (E_t, \mathcal{F}_t)$. Для любой определенной на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ положительной $\mathcal{A}^t_\infty$-измеримой д. с. в. Y условные математические ожидания $E^{\mathcal{A}^0_t}[Y]$ и $E^{\mathcal{F}_t}[Y]$ совпадают и один из вариантов этих условных математических ожиданий дается интегралом $\int P_{t,X_t(\omega)}(d\omega')\,Y(\omega')$ как функцией от ω.

Доказательство. Для доказательства утверждений первой части предложения достаточно применить предложение V. 1.1 к последовательности пространств $\{(E_s, \mathcal{F}_s);\ s \geqslant t\}$ и переходным вероятностям $\{P_{s+1}^{t, t+1, \ldots, s} = P_{s+1}^s;\ s \geqslant t\}$.

Рассмотрим, далее, определенные в доказательстве предложения V. 1.1 вероятности $P_{x_0 \ldots x_t}$, построенные для последовательности пространств $\{(E_s, \mathcal{F}_s),\ s \geqslant 0\}$ и переходных вероятностей

$$\{P_{s+1}^{0 \ldots s} = P_{s+1}^s;\ s \geqslant 0\}.$$

Из определения вероятностей $P_{x_0 \ldots x_t}$ непосредственно следует, что $P_{x_0 \ldots x_t}(A) = P_{t, x_t}(A)$ для любого измеримого прямоугольника A из $\bigotimes_{s \geqslant t} \mathcal{F}_s$. Это равенство распространяется на все множества из σ-алгебры $\mathcal{A}_\infty^t$, и поэтому вероятность P_{t, x_t} является просто ограничением вероятности $P_{x_0, \ldots, x_t}$ на σ-алгебру $\mathcal{A}_\infty^t$ событий, зависящих от моментов времени, не меньших t. Этот результат является основным моментом доказательства. Марковское свойство вытекает теперь из следствия 1 предложения V. 1.1. В самом деле, если Y и Z — положительные д. с. в., измеримые относительно $\mathcal{A}_t^s$ и $\mathcal{A}_\infty^t$ соответственно, то, согласно этому следствию с $x_0' = X_0(\omega'), \ldots, x_t' = X_t(\omega')$, имеем

$$\int_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \ldots x_s}(d\omega')\, Y(\omega')\, Z(\omega') =$$
$$= \int_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \ldots x_s}(d\omega') \int_{\omega'' \in \Omega} P_{x_0' \ldots x_t'}(d\omega'')\, Y(\omega'')\, Z(\omega'') =$$
$$= \int_{\omega' \in \Omega} P_{x_0 \ldots x_s}(d\omega')\, Y(\omega') \int_{\omega'' \in \Omega} P_{x_0' \ldots x_t'}(d\omega'')\, Z(\omega'')$$

при $s \leqslant t$; остается заменить в этой формуле $P_{x_0 \ldots x_s}$ на P_{s, x_s} и $P_{x_0' \ldots x_t'}$ на $P_{t, X_t(\omega')}$.

Существование вероятности P вытекает из следствия 2 предложения V. 1.1. Более того, нам известно, что для всякой положительной д. с. в. Y на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ функция $\int P_{x_0 \ldots x_t}(d\omega')\, Y(\omega')$ от $(x_0, \ldots, x_t)$ является вариантом условного математического ожидания $E^{\mathscr{A}_t^0}[Y]$. Следовательно, если д. с. в. Y $\mathscr{A}_\infty^t$-измерима, то функция

$$\int P_{t,\, x_t}(d\omega')\, Y(\omega')$$

от $x_t = X_t(\omega)$ есть вариант условного математического ожидания $E^{\mathscr{A}_t^0}[Y]$; поскольку эта функция также $\mathscr{F}_t$-измерима, равенство $E^{\mathscr{F}_t}[Y] = E^{\mathscr{F}_t}\left(E^{\mathscr{A}_t^0}[Y]\right)$ сводится к $E^{\mathscr{F}_t}[Y] = E^{\mathscr{A}_t^0}[Y]$. ∎

Следствие. *При выполнении условий предыдущего предложения существует единственное семейство переходных вероятностей P_t^s для пространств $(E_s, \mathscr{F}_s)$ и $(E_t, \mathscr{F}_t)$, $0 \leqslant s < t$, совпадающих с заданными переходными вероятностями при $t = s + 1$ и удовлетворяющих (обобщенным полугрупповым) соотношениям $P_t^s P_u^t = P_u^s$ при $s < t < u$, т. е.*

$$\int_{x_t \in E_t} P_t^s(x_s, dx_t)\, P_u^t(x_t, F) = P_u^s(x_s, F)$$

$$(x_s \in E_s,\ F \in \mathscr{F}_u,\ s < t < u).$$

Для всякой вероятности $P = \int \mu_0(dx_0)\, P_{x_0}$ на $(\Omega, \mathscr{A})$, построенной по произвольной начальной вероятности μ_0, и для всякой положительной измеримой функции h на (E_u, F_u) условные математические ожидания

$$E^{\mathscr{A}_t^0}[h(X_u)] \quad \text{и} \quad E^{\mathscr{F}_t}[h(X_u)]$$

совпадают при $t < u$. Более того, один из вариантов этих условных математических ожиданий равен $P_u^t[h(X_t)]$, где $P_u^t h$ — положительная измеримая функция на $(E_t, \mathscr{F}_t)$, определяемая формулой

$$P_u^t h(x_t) = \int_{F_u} P_u^t(x_t, dx_u)\, h(x_u) \qquad (t < u).$$

Вероятностные законы μ_t величин X_t, индуцируемые вероятностью P на $(E_t, \mathscr{F}_t)$, выражаются через μ_0 по формуле

$$\mu_t = \int \mu_0(dx_0) P_t^0(x_0, \cdot) \qquad (t \geqslant 0),$$

которую записывают также в виде $\mu_t = \mu_0 P_t^0$. Более общим образом, вероятности μ_t удовлетворяют соотношениям $\mu_t = \mu_s P_t^s$ $(0 \leqslant s < t)$.

Доказательство. Для каждого $s \geqslant 0$ определим переходные вероятности P_{s+h}^s индукцией по $h > 0$, полагая $P_{s+h+1}^s = P_{s+h}^s P_{s+h+1}^{s+h}$. Так построенные вероятности P_t^s $(0 \leqslant s < t)$ удовлетворяют, очевидно, обобщенным полугрупповым соотношениям. С другой стороны, из определяющей вероятность P_{t, x_t} формулы легко следует, что ограничение P_{t, x_t} на σ-алгебру $\mathscr{F}_u \subset \mathscr{A}_\infty^t$ $(t < u)$ совпадает с $P_u^t(x_t, \cdot)$. Следовательно,

$$P_u^t h(X_t) = \int P_{t, x_t}(d\omega') h[X_u(\omega')].$$

Применяя теперь предыдущее предложение, получаем, что $P_u^t h(X_t)$ есть вариант условных математических ожиданий $E^{\mathscr{A}_t^0}[h(X_u)] = E^{\mathscr{F}_t}[h(X_u)]$. Наконец, для любых $s < t$ и любой положительной измеримой функции h на $(E_t, \mathscr{F}_t)$ имеем

$$\mu_s P_t^s(h) = \mu_s\left(P_t^s h\right) = E\left[P_t^s h(X_s)\right] =$$
$$= E\left(E^{\mathscr{F}_s}[h(X_t)]\right) = E[h(X_t)] = \mu_t(h),$$

откуда $\mu_s P_t^s = \mu_t$ на $(E_t, \mathscr{F}_t)$. ∎

Пусть мы имеем марковский процесс. Определим σ-алгебру $\mathscr{A}_\infty$ *асимптотических событий*, положив $\mathscr{A}_\infty = \lim\limits_{t \uparrow \infty} \downarrow \mathscr{A}_\infty^t$. Случайная величина Z называется *асимптотической*, если она $\mathscr{A}_\infty$-измерима (пример: $Z = \limsup\limits_t Z_t$ в предположении, что Z_t $\mathscr{A}_\infty^t$-измеримы). Две асимптотические случайные величины Z и Z' назовем *эквива-*

лентными, если множество $\{Z \neq Z'\}$ является нулевым относительно всех вероятностей P_{t,x_t} ($t \geqslant 0$, $x_t \in E_t$). В частности, два асимптотических события F и F' называются *эквивалентными*, если $P_{t,x_t}(F \triangle F') = 0$ при всех $t \geqslant 0$ и $x_t \in E_t$.

Предложение V.2.2. *Формула*

$$g_t(x_t) = \int_{\Omega} P_{t,x_t}(d\omega') Z(\omega')$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности ограниченных (положительных) асимптотических случайных величин Z и семействами $\{g_t,\ t \geqslant 0\}$ (положительных) измеримых функций на $(E_t, \mathcal{F}_t)$, такими, что

$$g_t = P^t_{t+1} g_{t+1}, \quad \sup_t \sup_{x_t} |g_t(x_t)| < \infty.$$

Кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} \text{п. н. } g_t(X_t) = Z$$

относительно каждой вероятности P_{s,x_s}.

Доказательство. Пусть Z — ограниченная асимптотическая случайная величина. Тогда определенные по Z в формулировке предложения функции $g_t(x_t)$ являются $\mathcal{F}_t$-измеримыми и удовлетворяют условию $|g_t(x_t)| \leqslant \sup_{\omega} |Z(\omega)|$. Очевидно также, что функции $g_t(x_t)$ зависят лишь от класса эквивалентности, к которому принадлежит Z. В силу марковского свойства и $\mathcal{A}^+_\infty$-измеримости Z при всех t имеем $g_s = P^s_t g_t$ при $s < t$. Ясно, наконец, что функции g_t положительны, если положителен класс эквивалентности, к которому принадлежит Z.

Обратно, пусть $\{g_t,\ t \geqslant 0\}$ — семейство функций, обладающее указанными в формулировке предложения свойствами. Положим $Z(\omega) = \lim_{t \to \infty} \inf g_t(X_t(\omega))$. Случайная величина Z определена всюду на Ω и $\mathcal{A}_\infty$-измерима. Кроме того, на каждом из вероятностных пространств

$\left(\Omega, \mathcal{A}^s_\infty, P_{s, x'_s}\right)$ последовательность $\{g_t(X_t), \mathcal{A}^s_t;\ t \geqslant s\}$ является ограниченным мартингалом, поскольку

$$E^{\mathcal{A}^s_t}\left[g_{t+1}(X_{t+1})\right] = P^t_{t+1} g_{t+1}[X_t] = g_t[X_t].$$

Следовательно (см. п. IV. 5), последовательность $g_t(X_t)$ при $t \to \infty$ сходится п. н. к Z. Более того, величины Z и $g_t(X_t)$ при $t \geqslant s$ имеют одинаковые математические ожидания, так что

$$\int P_{s, x'_s}(d\omega)\, Z(\omega) = \int P_{s, x'_s}(d\omega)\, g_s[X_s(\omega)] = g_s(x'_s).$$

Предложение полностью доказано. ∎

В дальнейшем G будет обозначать линейное пространство семейств функций $\{g_t, t \geqslant 0\}$, определенных в предыдущем предложении.

Следствие. *Для всякого марковского процесса следующие два условия равносильны:*

(а) *σ-алгебра классов эквивалентности асимптотических событий конечна;*

(б) *определенное выше пространство G конечномерно.*

Если эти условия выполнены, то существует N положительных элементов пространства G, скажем $g^{(n)} = \{g^{(n)}_t, t \geqslant 0\}$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$, таких, что всякий (положительный) элемент g пространства G единственным образом представляется в виде $g = \sum_{n=1}^{N} c_n g^{(n)}$, где c_n — действительные (положительные) числа. Более того, элементы $g^{(n)}$ можно выбрать так, чтобы $1 = \sum_1^N g^{(n)}$, и в этом случае они однозначно определены (с точностью до перестановки).

Доказательство. Эквивалентность условий (а) и (б) непосредственно следует из предыдущего предложения. Предположим, что эти условия выполнены, и пусть $\{A_n, 1 \leqslant n \leqslant N\}$ — разбиение Ω, состоящее из атомов σ-алгебры $\mathcal{A}_\infty$ (см. п. I. 2). Обозначим через $g^{(n)} = \{g^{(n)}_t, t \geqslant 0\}$

элемент пространства G, сопоставляемый предыдущим предложением классу эквивалентности величины 1_{A_n}. Утверждение второй части следствия теперь вытекает непосредственно из того факта, что всякая (положительная) асимптотическая д. с. в. Z имеет единственное с точностью до эквивалентности представление вида $Z=\sum_1^N c_n 1_{A_n}$, где c_n — действительные (положительные) однозначно определенные числа. ∎

Определение V.2.1. *Говорят, что определенный в начале настоящего пункта марковский процесс имеет* стационарные переходные вероятности, *если все пространства $(E_t, \mathcal{F}_t)$ изоморфны одному и тому же пространству $(E, \mathcal{F})$ и все переходные вероятности P_{t+1}^t совпадают с одной и той же переходной вероятностью P, определенной на $(E, \mathcal{F})$.*

В дальнейшей части этой главы будут рассматриваться лишь стационарные марковские процессы. Ниже мы переформулируем предложения V.2.1 и V.2.2 для таких марковских процессов, введя сначала следующее вспомогательное понятие.

Оператором сдвига (координат) θ на пространстве $\Omega=E^N$ элементов $\omega=\{x_t, t\geqslant 0\}$ называется оператор, задаваемый формулой

$$\theta(\{x_t, t\geqslant 0\})=\{x_{t+1}, t\geqslant 0\}.$$

Целые положительные степени θ_s ($s\geqslant 1$) этого оператора определяются аналогично формулами $\theta_s(\{x_t, t\geqslant 0\})=\{x_{t+s}, t\geqslant 0\}$. Преобразования θ_s измеримы на $(\Omega, \mathcal{A}=\mathcal{A}_\infty^0)$. Более точно, преобразование $(\theta_s)^{-1}$ взаимно однозначно отображает $\mathcal{A}_\infty^0$ на $\mathcal{A}_\infty^s$. Следовательно, преобразование $Z\to Z\theta_s$ взаимно однозначно отображает семейство $\mathcal{A}_\infty^0$-измеримых случайных величин Z на семейство $\mathcal{A}_\infty^s$-измеримых случайных величин. Обратное преобразование, отображающее множество $\mathcal{A}_\infty^s$-измеримых случайных величин Z на множество $\mathcal{A}_\infty^0$-измеримых случайных величин, мы будем обозначать $Z\to Z\theta_{-s}$. (Отметим, что значение обратного преобразования $\theta_{-s}(\omega)$

может быть „определено" на $\omega \in \Omega$ при $s > 0$ лишь как $(\theta_s)^{-1}(\omega)$, т. е. как цилиндр в Ω, первые s координат которого произвольны и $(s+t)$-я координата которого равна t-й координате ω $(t \geqslant 0)$. Тем не менее, если случайная величина Z $\mathcal{A}_\infty^s$-измерима и, следовательно, не зависит от первых s координат, то $Z\theta_{-s}(\omega)$ есть вполне определенное действительное число.)

Если переходные вероятности P_{t+1}^t совпадают, то, как нетрудно убедиться, при любом фиксированном x построенные в предложении V.2.1 вероятности $P_{t,x}$ изоморфны. Более точно, для любой $\mathcal{A}_\infty^0$-измеримой случайной величины Z

$$\int_\Omega P_{t,x}(d\omega') Z\theta_t(\omega') = \int_\Omega P_{0,x}(d\omega') Z(\omega'),$$

или, что эквивалентно, для любой $\mathcal{A}_\infty^t$-измеримой случайной величины Z

$$\int_\Omega P_{t,x}(d\omega') Z(\omega') = \int_\Omega P_{0,x}(d\omega') Z\theta_{-t}(\omega').$$

В следующем предложении вместо $P_{0,x}$ мы пишем P_x.

Предложение V.2.3. *Пусть $(E, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и*

$$P = \{P(x, F)\}$$

— определенная на этом пространстве переходная вероятность. Для любого $x \in E$ существует единственная вероятность P_x на $(\Omega, \mathcal{A}) = (E, \mathcal{F})^N$, значение которой на каждом измеримом прямоугольнике $\prod_s F_s$ дается формулой

$$P_x\left[\prod_s F_s\right] = $$
$$= 1_{F_0}(x) \int_{F_1} P(x, dx_1) \int_{F_2} P(x_1, dx_2) \ldots \int_{F_T} P(x_{T-1}, dx_T),$$

где T настолько велико, что $F_s = E_s$ при $s > T$. Для всякой положительной д. с. в. X на $(\Omega, \mathcal{A})$ функция $\int P_x(d\omega) X(\omega)$ от x является $\mathcal{F}$-измеримой.

Марковское свойство. *Для любого* $s>0$ *и любых положительной* $\mathcal{A}_s^0$*-измеримой д. с. в.* Y *и положительной* $\mathcal{A}$*-измеримой д. с. в.* Z

$$\int\limits_\Omega P_x(d\omega')\,Y(\omega')\,Z(\theta_s\omega') = \int\limits_\Omega P_x(d\omega')\,Y(\omega')\int\limits_\Omega P_{x'_s}(d\omega'')Z(\omega'').$$

Если P_0 — *вероятность на* $(E, \mathcal{F})$, *то формула*

$$P(A) = \int\limits_E P_0(dx_0)P_{x_0}(A)$$

определяет вероятность на $(\Omega, \mathcal{A})$. *Для всякой положительной д. с. в.* Z *на* $(\Omega, \mathcal{A})$ *условные математические ожидания* $E^{\mathcal{A}_t^0}(Z\theta_t)$ *и* $E^{\mathcal{F}_t}(Z\theta_t)$ *совпадают, и функция* $\int P_{X_t(\omega)}(d\omega')Z(\omega')$ *является одним из вариантов этих условных математических ожиданий.*

Это предложение является просто переформулировкой предложения V. 2.1 для случая марковских процессов со стационарными переходными вероятностями и поэтому не требует специального доказательства.

Следствие 1. *При выполнении условий предыдущего предложения итерации* P^t *переходной вероятности* P *удовлетворяют полугрупповому соотношению* $P^tP^s = P^{t+s}$ $(s, t \geqslant 1)$, *т. е.*

$$\int\limits_E P^t(x, dy)\,P^s(y, F) = P^{t+s}(x, F) \quad (x \in E,\ F \in \mathcal{F};\ s, t \geqslant 1).$$

Для всякой вероятности $P = \int \mu_0(dx)\,P_x$, *построенной по произвольной начальной вероятности* μ_0, *и для всякой положительной измеримой функции* h *на* $(E, \mathcal{F})$ *д. с. в.* $P^{u-t}h(X_t)$ *является вариантом совпадающих между собой условных математических ожиданий* $E^{\mathcal{A}_t^0}[h(X_u)]$ *и* $E^{\mathcal{F}_t}[h(X_u)]$ $(t<u)$. *Вероятностные законы* μ_t *величин* X_t, *индуцированные вероятностью* P *на* $(E, \mathcal{F})$, *связаны соотношениями* $\mu_t = \mu_s P^{t-s}$ $(s<t)$, *позволяющими определить их, исходя из* μ_0.

Пусть τ — момент остановки, определенный на всем пространстве $(\Omega, \mathcal{A})$ относительно возрастающего семейства σ-алгебр $\{\mathcal{A}_t^0, t \geqslant 0\}$. Напомним, что σ-алгеброй событий, предшествующих моменту τ, при этом будет σ-алгебра $\mathcal{A}_\tau^0 = \{A;\ A\{\tau = t\} \in \mathcal{A}_t^0\}$. Определим оператор θ_τ на Ω, положив

$$\theta_\tau(\omega) = \{x_{t+\tau(\omega)},\ t \geqslant 0\}.$$

Преобразование θ_τ измеримо, поскольку

$$\theta_\tau^{-1}(A) = \sum_t \theta_t^{-1}(A) \cap \{\tau = t\}.$$

Следствие 2. Строго марковское свойство. *Пусть выполнены условия предыдущего предложения. Если τ — момент остановки, определенный на всем пространстве Ω относительно возрастающего семейства σ-алгебр $\{A_t^0, t \geqslant 0\}$, то для любого $x \in E$*

$$\int_\Omega P_x(d\omega')\, Y(\omega')\, Z(\theta_\tau\omega') = \int_\Omega P_x(d\omega')\, Y(\omega') \int_\Omega P_{x'_\tau}(d\omega'')\, Z(\omega''),$$

каковы бы ни были положительная A_τ^0-измеримая д. с. в. Y и положительная д. с. в. Z на (Ω, A).

Доказательство. Используя марковское свойство применительно к $\mathcal{A}_t^0$-измеримой величине $Y \cdot 1_{\{\tau = t\}}$ и к величине Z, имеем

$$\int_{\{\tau(\omega') = t\}} P_x(d\omega')\, Y(\omega')\, Z(\theta_t\omega') = \int_{\{\tau(\omega') = t\}} P_x(d\omega')\, Y(\omega') \int_\Omega P_{x'_t}(d\omega'')\, Z(\omega'').$$

Для завершения доказательства остается лишь просуммировать эти равенства по t. ∎

Определение V.2.2. *Событие A из пространства $(\Omega, \mathcal{A})$ называется* стационарным, *если* $\theta^{-1}(A) = A$.

Более общим образом, с. в. Z на $(\Omega, \mathcal{A})$ называется стационарной, *если $Z\theta = Z$.*

Очевидно, класс $\mathcal{J}$ стационарных событий является σ-алгеброй. С. в. Z стационарна тогда и только тогда, когда она $\mathcal{J}$-измерима (это следует из равенства $\{Z\theta \in S\} = \theta^{-1}\{Z \in S\}$, справедливого для любой д. с. в. Z и всякого борелевского множества S на действительной прямой). Две стационарные случайные величины Z и Z' называются *эквивалентными*, если множество $\{Z \neq Z'\}$ является нулевым относительно каждой вероятности P_x $(x \in E)$. В частности, два стационарных события F и F' эквивалентны, если $P_x(F \Delta F') = 0$ при всех $x \in E$.

Заметим, что σ-алгебра $\mathcal{J}$ есть σ-подалгебра σ-алгебры асимптотических событий $\mathcal{A}_\infty$ (в самом деле, если событие F стационарно, то $F = \theta_s^{-1}(F) \in \mathcal{A}_\infty^s$ при всех $s \geqslant 0$). Отметим также, что только что определенное отношение эквивалентности для стационарных событий (случайных величин) совпадает с отношением эквивалентности, индуцируемым введенным выше отношением эквивалентности для асимптотических событий (случайных величин). Следующее предложение является поэтому следствием предложения V.2.2.

Предложение V.2.4. *При выполнении условий предложения* V.2.3 *формула*

$$g(x) = \int P_x(d\omega')\, Z(\omega')$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности (положительных) стационарных ограниченных случайных величин Z и (положительными) измеримыми ограниченными функциями g на $(E, \mathcal{F})$, такими, что $Pg = g$ на E. Кроме того,

$$\lim_{t \to \infty} \text{п. н. } g(X_t) = Z$$

относительно каждой вероятности P_x, $x \in E$.

Доказательство. Если Z — стационарная и, следовательно, асимптотическая случайиая величина, то сопоставляемые ей предложением V. 2.2 функции g_t совпадают друг с другом, поскольку

$$g_t(x) = \int P_{t,x}(d\omega') Z(\omega') = \int P_x(d\omega') Z\theta_{-t}(\omega') =$$
$$= \int P_x(d\omega') Z(\omega') = g_0(x).$$

Обратно, если g — инвариантная относительно P ограниченная измеримая функция на $(E, \mathcal{F})$, то случайная величина $Z(\omega) = \liminf\limits_{t \to \infty} g[X_t(\omega)]$ стационарна и мы можем воспользоваться второй частью доказательства предложения V. 2.2. ∎

В случае марковских процессов со стационарными переходными вероятностями следствие предложения V. 2.2 может быть значительно усилено.

Предложение V. 2.5. *Для всякого марковского процесса со стационарными переходными вероятностями следующие два условия равносильны*:

(а) *σ-алгебра классов эквивалентности асимптотических событий конечна*;

(б) *пространство G конечномерно.*

Если эти условия выполнены, то существует конечное число $\sum\limits_1^r d_\rho$ положительных измеримых функций $u_{\rho,\delta}$, где δ — целое число $\operatorname{mod} d_\rho$ *(d_ρ — целое число $\geqslant 1$) и ρ принимает целые значения между 1 и r, таких, что*

1) *всякий (положительный) элемент $g = \{g_t, t \geqslant 0\}$ пространства G однозначно представляется в виде*

$$g_t = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} c_{\rho,\delta} u_{\rho,\delta+t},$$

где $c_{\rho,\delta}$ — (положительные) действительные числа,

2) *всякая ограниченная (положительная) инвариантная относительно P функция g имеет единственное представление в виде*

$$g = \sum_{\rho=1}^{r} b_\rho u_\rho,$$

где b_ρ — действительные (положительные) числа и

$$u_\rho = \sum_{\delta=1}^{d_\rho} u_{\rho,\delta}.$$

Более того, функции $u_{\rho,\delta}$ можно выбрать так, чтобы

$$1 = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} u_{\rho,\delta},$$

и в этом случае семейство функций $u_{\rho,\delta}$ однозначно определено.

Доказательство. Согласно сделанному после определения операторов сдвига замечанию, каждой асимптотической (т. е. $\mathcal{A}_\infty$-измеримой) д. с. в. Z мы можем сопоставить также асимптотические д. с. в. $Z\theta_s$ (где s — целое число, положительное или отрицательное). Операторы θ_s образуют, очевидно, группу преобразований на пространстве асимптотических д. с. в. Если $\{g_t,\ t \geqslant 0\}$ — элемент пространства G, сопоставляемый предложением V.2.2 классу эквивалентности величины Z, то из стационарности процесса вытекает, что

$$\int Z\theta_s\, dP_{t+s,\,x} = g_t(x) \qquad (t \geqslant 0,\ t+s \geqslant 0).$$

Следовательно, классу эквивалентности величины $Z\theta_s$ сопоставляется элемент $\{P_s g_t,\ t \geqslant 0\}$ пространства G при $s \geqslant 0$ и элемент $\{g_{t-s},\ t \geqslant 0\}$ пространства G при $s \leqslant 0$, поскольку

$$\int Z\theta_s\, dP_{t,\,x} = \int dP_{t,\,x} \int Z\theta_s\, dP_{t+s,\,X_{t+s}} =$$
$$= \int dP_{t,\,x} g_t(X_{t+s}) = P_s\, g_t(x) \quad (s \geqslant 0)$$

и

$$\int Z\theta_s\, dP_{t,\,x} = \int Z\theta_s\, dP_{(t-s)+s,\,x} = g_{t-s}(x) \qquad (s \leqslant 0).$$

Отсюда мы заключаем, что если Z и Z' — эквивалентные асимптотические д. с. в., то д. с. в. $Z\theta_s$ и $Z'\theta_s$ — тоже асимптотические и эквивалентные (s — любое целое число). Иными словами, оператор θ_s действует на классы эквивалентности асимптотических д. с. в. Отметим также, что классы эквивалентности стационарных д. с. в. являются просто классами эквивалентности асимптотических д. с. в., инвариантными относительно операторов сдвига θ_s.

Предположим теперь, что условия (а) и (б) выполнены (эквивалентность их следует из следствия предложения V.2.2) и рассмотрим конечное разбиение $\mathscr{P}$ пространства Ω, состоящее из атомов σ-алгебры $\mathscr{A}_\infty$. Для каждого атома A индикатор $1_A\theta_s$ является индикатором некоторого атома (в противном случае функция $1_A=(1_A\theta_s)\theta_{-s}$ не могла бы быть индикатором атома!), т. е. с точностью до эквивалентности индикатором некоторого элемента из $\mathscr{P}$. Следовательно, группа $\{\theta_s\}$ индуцирует группу взаимно однозначных преобразований (группу перестановок) конечного множества $\mathscr{P}$. Отсюда вытекает, что мы можем записать элементы множества $\mathscr{P}$ в виде $A_{\rho,\delta}$ (где $\rho=1, 2, \ldots, r$; δ — целое число $\operatorname{mod} d_\rho$) таким образом, чтобы $1_{A_{\rho,\delta}}\theta_s=1_{A_{\rho,\delta-s}}$.

Пусть $\{g_t^{\rho,\delta}, t\geqslant 0\}$ — положительные элементы пространства G, отвечающие классам эквивалентности индикаторов $1_{A_{\rho,\delta}}$. В силу указанного свойства нумерации $\mathscr{P}$ имеем $g_t^{\rho,\delta-s}=g_{t-s}^{\rho,\delta}$, поскольку

$$g_t^{\rho,\delta-s}(x)=P_{t,x}(A_{\rho,\delta-s})=P_{t,x}(\theta_s^{-1}A_{\rho,\delta})=$$

$$=P_{t-s,x}(A_{\rho,\delta})=g_{t-s}^{\rho,\delta}(x).$$

Положим теперь $u_{\rho,\delta}=g_0^{\rho,\delta}$. Ясно, что $g_t^{\rho,\delta}=u_{\rho,\delta+t}$. Согласно следствию предложения V.2.2 всякий элемент пространства G допускает представление, указанное в формулировке предложения. Далее, стационарные случайные величины — это (с точностью до эквивалентности) те случайные величины, которые постоянны на множествах $\bigcup_\delta A_{\rho,\delta}$. Аналогично, постоянные по t последовательности $\{g_t, t\geqslant 0\}\in G$ могут быть выражены в терминах функций $u_\rho=\sum_\delta u_{\rho,\delta}$. ∎

Дополнения и упражнения

V.2.1. Пусть P — переходная вероятность на $(E, \mathcal{F})$, и пусть выполнены условия предложения V.2.5. Если положить

$$\lambda_{\rho, k} = \exp\left(\frac{2\pi ik}{d_\rho}\right) \quad \text{и} \quad f_{\rho, k} = \sum_\delta (\lambda_{\rho, k})^\delta u_{\rho, \delta},$$

где k — целое число $\operatorname{mod} d_\rho$ и $\rho = 1, \ldots, r$, то $Pf_{\rho, k} = \lambda_{\rho, k} f_{\rho, k}$. Показать, что для всякого комплексного числа λ с модулем 1 пространство ограниченных измеримых функций f, являющихся решениями уравнения $Pf = \lambda f$, конечномерно, причем функции $f_{\rho, k}$, отвечающие тем числам $\lambda_{\rho, k}$, которые равны λ, образуют базис этого пространства. [Воспользоваться тем фактом, что если $Pf = \lambda f$ и $|\lambda| = 1$, то $g_t = \lambda^{-t} f$ принадлежит G.]

V.2.2. Рассмотрим марковский случайный процесс со стационарными переходными вероятностями, определенными на пространстве $(E, \mathcal{F})$. Множество $F \in \mathcal{F}$ называется *почти замкнутым*, если предел $\lim\limits_{t \to \infty} \{X_t \in F\}$ существует п. н. относительно каждой вероятности P_x. Показать, что почти замкнутые множества образуют подалгебру σ-алгебры $\mathcal{F}$. (Очевидно, что если F — замкнутое множество в том смысле, что $X_t \in F \Rightarrow X_s \in F$ $(s < t)$ п. н. P_x $(x \in E)$, то оно также почти замкнуто.) Два почти замкнутых множества F и F' называются *эквивалентными*, если

$$\overline{\lim_n} \{X_n \in F \Delta F'\} = \varnothing \text{ п. н. } P_x \quad (x \in E).$$

Показать, что булева алгебра классов эквивалентности почти замкнутых множеств изоморфна булевой алгебре классов эквивалентности стационарных событий. [Каждому почти замкнутому множеству F сопоставить стационарное событие $\underline{\lim}_n \{X_n \in F\}$; показать, что если A — стационарное событие и $g(x) = P_x(A)$, то множество $F = \{g > a\}$ почти замкнуто и $A \underset{\text{п. н.}}{=} \lim\limits_n \{X_n \in F\}$ при $0 < a < 1$.] Почти замкнутые множества, вообще говоря, не образуют σ-подалгебры σ-алгебры $\mathcal{F}$.

V.3. Равномерная эргодическая теорема

Пусть P — переходная вероятность на измеримом пространстве $(E, \mathcal{F})$. В этом пункте будет доказана теорема о сходимости итераций P по норме и описан класс асимптотических событий соответствующего марковского процесса в случае, когда переходная вероятность P удовлетворяет условию квазикомпактности, точное определение которого дается ниже.

Для всякой переходной вероятности P на $(E, \mathcal{F})$ формула

$$Pf(x) = \int P(x, dy) f(y)$$

определяет положительный эндоморфизм банахова пространства $B(E, \mathcal{F})$ ограниченных измеримых функций на $(E, \mathcal{F})$ с нормой $\|f\| = \sup_E |f(x)|$. Норма $\|P\|$ этого положительного эндоморфизма равна 1, поскольку, очевидно, $P1 = 1$. С другой стороны, формула

$$\mu P(F) = \int \mu(dx) P(x, F)$$

определяет положительный эндоморфизм банахова пространства $\mathcal{M}(E, \mathcal{F})$ ограниченных мер на $(E, \mathcal{F})$. Кроме того, относительно отношения двойственности между пространствами B и $\mathcal{M}$, устанавливаемого билинейной формой $\mu(f) = \int \mu(dx) f(x)$, эти операторы P являются транспонированными по отношению друг к другу: $\mu(Pf) = \mu P(f)$ при всех $f \in B$ и $\mu \in \mathcal{M}$.

Определение V.3.1 *Эндоморфизм Q банахова пространства B называется* компактным, *если он переводит единичный шар B_1 пространства B в относительно компактное множество. Эндоморфизм P называется* квазикомпактным, *если существует последовательность $\{Q_t, t \geq 1\}$ компактных эндоморфизмов пространства B, такая, что*

$$\lim_{t \to \infty} \| P^t - Q_t \| = 0,$$

где P^t — итерации P.

С помощью следующей леммы определению квазикомпактности можно придать другую, на первый взгляд более слабую форму.

Лемма V.3.1. *Для того чтобы эндоморфизм P пространства B был квазикомпактным (необходимо и) достаточно, чтобы существовали целое число $t_0 \geq 1$ и компактный эндоморфизм Q, такие, что $\|P^{t_0} - Q\| < 1$.*

Доказательство. Та часть леммы, которая касается необходимости, очевидна. Прежде чем переходить к доказательству достаточности, напомним следующий элементарный факт относительно компактных операторов: если Q_1 и Q_2 — компактные, а P_1 и P_2 — произвольные эндоморфизмы пространства B, то эндоморфизмы Q_1+Q_2 и $P_1Q_1P_2$ компактны.

Предположим теперь, что при некотором целом $t_0 \geqslant 1$ итерацию P^{t_0} эндоморфизма P можно представить в виде $P^{t_0}=Q+U$, где Q — компактный эндоморфизм и $\|U\|<1$. Положим $Q_t=0$ при $t<t_0$ и $Q_t=P^t-P^lU^m$ при $t_0 \leqslant t$, где целые числа l и m определяются из условий $t=mt_0+l$, $0 \leqslant l<t_0$. При $t \geqslant t_0$ эндоморфизм Q_t можно записать в виде $P^l[(Q+U)^m-U^m]$. Отсюда, разлагая $(Q+U)^m$ по формуле бинома, получаем, что при $t \geqslant t_0$ эндоморфизмы Q_t являются суммами произведений эндоморфизмов, каждое из которых содержит в качестве множителя Q. Следовательно, все Q_t компактны. С другой стороны, полагая $C=\sup\limits_{l<t_0}\|P^l\|<\infty$, имеем

$$\|P^t-Q_t\|=\|P^lU^m\| \leqslant C\|U\|^m \to 0,$$

когда t, а следовательно, и m стремится к бесконечности. ∎

Пусть на измеримом пространстве $(E, \mathscr{F})$ задана переходная вероятность P, и пусть, как и выше, G — пространство последовательностей $g=\{g_t, t \geqslant 0\}$ элементов пространства $B(E, \mathscr{F})$, таких, что

$$|||g|||=\sup_t\|g_t\|<\infty \quad \text{и} \quad g_t=Pg_{t+1}$$

при всех $t \geqslant 0$. Ясно, что линейное пространство G является банаховым относительно нормы $|||g|||$. Кроме того, так как $\|P\|=1$, функция $\|g_t\|$ от t не убывает и, следовательно, $|||g|||=\lim\limits_{t\uparrow\infty}\uparrow\|g_t\|$. С другой стороны, предложение V.2.2 показывает, что изучение пространства G равносильно изучению пространства ограниченных асимптотических случайных величин.

Предложение V.3.1. *Пусть P — переходная вероятность на измеримом пространстве $(E, \mathcal{F})$. Если отвечающий P эндоморфизм пространства $B(E, \mathcal{F})$ квазикомпактен, то определенное выше банахово пространство G конечномерно.*

Доказательство. Согласно хорошо известной классической теореме из теории банаховых пространств, достаточно доказать, что единичный шар G_1 пространства G предкомпактен, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ может быть покрыт конечным числом шаров радиуса меньше ε. Отметим, что свойство предкомпактности G_1 можно также сформулировать в следующем виде: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, нельзя указать более чем конечного числа r_ε элементов G_1 с попарными расстояниями больше ε.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и t — целое число, такое, что $\| P^t - Q_t \| \leqslant \varepsilon/4$. Так как оператор Q_t компактен, то существует конечное число, скажем N, шаров радиуса $\varepsilon/4$ с центрами f_n $(n = 1, \ldots, N)$, которые покрывают образ $Q_t(B_1)$ единичного шара B_1 пространства B. Ясно, что N шаров радиуса $\varepsilon/2$ с центрами f_n $(n = 1, \ldots, N)$ покрывают $P^t(B_1)$ и поэтому множество $P^t(B_1)$ не может содержать более N точек с попарными расстояниями большими ε. Отсюда вытекает, что не существует более N точек множества G_1 с попарными расстояниями превышающими ε. В самом деле, если бы существовало $N+1$ таких точек, скажем $g^{(0)}, g^{(1)}, \ldots, g^{(N)}$, то для достаточно большого s мы имели бы $\| g_s^{(n)} - g_s^{(n')} \| > \varepsilon$ при $n \neq n'$, что невозможно, поскольку $g_s^{(n)} = P^t g_{s+t}^{(n)} \in P^t(B_1)$. ∎

Эргодическая теорема. *Пусть P — переходная вероятность на измеримом пространстве $(E, \mathcal{F})$, такая, что отвечающий ей оператор на $B(E, \mathcal{F})$ квазикомпактен. Тогда существуют такие целые числа $d_\rho \geqslant 1$ $(\rho = 1, \ldots, r)$ и такие $\sum_\rho d_\rho$ ограниченных положительных измеримых функций и $\sum_\rho d_\rho$ вероятностей на $(E, \mathcal{F})$,* *которые мы обозначим через* $u_{\rho,\delta}$ *и* $\Pi_{\rho,\delta}$ *соответственно* (δ — *целое число* $\operatorname{mod} d_\rho$), *что*

$$u_{\rho,\delta} = Pu_{\rho,\delta+1},\quad \Pi_{\rho,\delta} = \Pi_{\rho,\delta-1}P,$$

$$\int_E \Pi_{\rho',\delta'}(dx)\, u_{\rho,\delta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho' = \rho \text{ и } \delta' = \delta \pmod{d_\rho}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\sum_\rho \sum_\delta h_{\rho,\delta} = 1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \left\| P^{nd+t} - \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} u_{\rho,\delta-t} \otimes \Pi_{\rho,\delta} \right\| = 0,$$

где d — *наименьшее общее кратное чисел* d_ρ. *Из указанной сходимости следует также, что*

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \frac{1}{t} \sum_{1}^{t} P^s - \sum_{\rho=1}^{r} u_\rho \otimes \Pi_\rho \right\| = 0,$$

где положено

$$u_\rho = \sum_{\delta=1}^{d_\rho} u_{\rho,\delta} \quad \text{и} \quad \Pi_\rho = \frac{1}{d_\rho} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} \Pi_{\rho,\delta}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что для всякой функции $f \in B$ последовательность $\{P^t f,\ t \geqslant 1\}$ относительно компактна в $B(E, \mathcal{F})$. Достаточно, очевидно, доказать это для функций с нормой, не превосходящей единицы. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем целое $s > 0$ и компактный эндоморфизм Q, такие, что

$$\| P^s - Q \| < \varepsilon/2.$$

Образ $Q(B_1)$ единичного шара B_1 пространства B можно покрыть конечным числом шаров радиуса $\varepsilon/2$. Шары радиуса ε с теми же центрами покроют при этом множество $\{P^t f,\ t \geqslant s\}$, поскольку

$$\| P^t f - Q(P^{t-s} f) \| = \| (P^s - Q) P^{t-s} f \| < \varepsilon/2$$

и $P^{t-s} f \in B_1$ $(t \geqslant s)$. Таким образом, мы показали, что для любого $\varepsilon > 0$ последовательность $\{P^t f,\ t \geqslant 1\}$ можно покрыть конечиым числом шаров радиуса ε.

В силу предложения V.3.1 осуществимо представление элементов пространства G, указанное в предложении V.2.5. Пусть d — наименьшее общее кратное чисел d_ρ ($\rho = 1, \ldots, r$). Поскольку для любой функции $f \in B$ последовательность $\{P^t f,\ t \geqslant 1\}$ условно компактна, с помощью перехода к диагональной последовательности легко показать, что существует возрастающая последовательность целых чисел $\{n_j\}$, для которой предел $g_t = \lim\limits_j P^{n_j d - t} f$ существует в смысле сходимости по норме в B для любого $t \geqslant 0$. Нетрудно видеть, что последовательность $\{g_t\}$ принадлежит G. Так как из указанного в предложении V.2.5 представления $\{g_t\}$ вытекает, что $g_{t+md} = g_t$ при всех целых $m > 0$, то $P^{md-t} g_0 = P^{md-t} g_{md} = g_t$ при $md \geqslant t \geqslant 0$. Следовательно, если $nd \geqslant n'_j d + t$, то

$$\left\| P^{nd-t} - g_t \right\| = \left\| P^{(n-n'_j)d-t} \left(P^{n'_j d} f - g_0 \right) \right\| \leqslant \left\| P^{n'_j d} f - g_0 \right\|.$$

Полагая теперь $n \to \infty$, а затем $n'_j \to \infty$, получаем $g_t = \lim\limits_{n \to \infty} P^{nd-t} f$ в смысле нормы пространства B при всех $t \geqslant 0$.

В силу сказанного выше формула $Sf = \lim\limits_{n \to \infty} P^{nd} f$, $f \in B$, определяет эндоморфизм S пространства B с нормой 1, для которого $SP^{md} = P^{md} S = S$ при всех целых $m \geqslant 0$. Покажем теперь, что последовательность P^{nd} сходится к S в смысле нормы алгебры операторов или, что равносильно, $P^{nd} f$ сходится к Sf по норме равномерно на единичном шаре B_1 пространства B. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем целое $m > 0$ и компактный оператор Q, такие, что $\| P^{md} - Q \| < \varepsilon$. Для любой функции $f \in B_1$ имеем

$$\left\| P^{(m+n)d} f - Sf \right\| = \left\| \left(P^{nd} - S \right) P^{md} f \right\| \leqslant 2\varepsilon + \left\| \left(P^{nd} - S \right) Qf \right\|.$$

Полагая в этом соотношении сначала $n \to \infty$, а затем $\varepsilon \downarrow 0$ и замечая, что поскольку множество $\{Qf,\ f \in B_1\}$ относительно компактно в B_1,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \left(P^{nd} - S \right) Qf \right\| = 0$$

равномерно по $f \in B_1$, получаем $\lim_{n\to\infty} P^{nd}f = Sf$ равномерно по $f \in B_1$.

Для всякой функции $f \in B$ существуют однозначно определенные коэффициенты $c_{\rho,\delta}(f)$, такие, что $Sf = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} c_{\rho,\delta}(f) u_{\rho,\delta}$. Отображения $f \to c_{\rho,\delta}(f)$ являются линейными функционалами, определяемыми мерами на $(E, \mathcal{F})$. В самом деле, так как эндоморфизмы P^{nd} пространства $B(E, \mathcal{F})$ сходятся по норме к эндоморфизму S, то при любом x меры $P^{nd}(x, \cdot)$ сходятся по норме пространства $M(E, \mathcal{F})$, поскольку

$$\|P^{nd}(x, \cdot) - P^{n'd}(x, \cdot)\|_{\mathcal{M}(E, \mathcal{F})} \leqslant \|P^{nd} - P^{n'd}\|$$

(см. упражнение IV. 1.6). Далее, обозначая предельную меру через $S(x, \cdot)$, для любой функции $f \in B(E, \mathcal{F})$ имеем

$$\int S(x, dy) f(y) = Sf(x) = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} u_{\rho,\delta}(x) c_{\rho,\delta}(f).$$

Так как функции $u_{\rho,\delta}$ линейно независимы, отсюда следует, что отображения $c_{\rho,\delta}(\cdot)$ являются линейными комбинациями мер

$$S(x, \cdot), \ldots, (Sx_n, \cdot)$$

при подходящем выборе $x_1, \ldots, x_n$, где $n = \sum_{\rho=1}^{r} d_\rho$. Обозначим эти линейные комбинации $\Pi_{\rho,\delta}$. Меры $\Pi_{\rho,\delta}$ суть вероятности, поскольку интеграл $\int f\, d\Pi_{\rho,\delta} = c_{\rho,\delta}(f)$ положителен, если функция f положительна, и равен единице при $f = 1$. Таким образом, нами получено следующее представление эндоморфизма S:

$$S = \sum_{\rho=1}^{r} \sum_{\delta=1}^{d_\rho} u_{\rho,\delta} \otimes \Pi_{\rho,\delta}$$

(смысл символа $\otimes$ ясен из предыдущего). Так как $P^d u_{\rho,\delta} = u_{\rho,\delta}$, то $Su_{\rho,\delta} = u_{\rho,\delta}$ и, следовательно, $\Pi_{\rho',\delta'}(u_{\rho,\delta})$

равно 1, если $\rho=\rho'$ и $\delta=\delta' \pmod{d_\rho}$ и равно 0 в противном случае. Из перестановочности P и S вытекает, что

$$\sum_\rho \sum_\delta u_{\rho,\delta} \otimes \Pi_{\rho,\delta} P^t = SP^t = P^t S = \sum_\rho \sum_\delta P^t u_{\rho,\delta} \otimes \Pi_{\rho,\delta} =$$
$$= \sum_\rho \sum_\delta u_{\rho,\delta-t} \otimes \Pi_{\rho,\delta} =$$
$$= \sum_\rho \sum_\delta u_{\rho,\delta} \otimes \Pi_{\rho,\delta+t},$$

откуда $\Pi_{\rho,\delta} P^t = \Pi_{\rho,\delta+t}$ при всех $t \geqslant 0$. Наконец, сходимость P^{nd} к S влечет сходимость P^{nd+t} к SP^t и первая часть теоремы полностью доказана.

Для доказательства второй части теоремы отметим сначала, что в силу доказанного выше при всех $t \geqslant 0$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} P^{nd+t} \to \sum_\rho \sum_\delta u_{\rho,\delta-t} \otimes \Pi_{\rho,\delta}.$$

Следовательно, поскольку при $s = Nd + s'$, $0 < s' \leqslant d$,

$$\sum_1^s P^u = \sum_{t=1}^{s'} \sum_{n=0}^{N'} P^{nd+t} + \sum_{t=s'+1}^{d} \sum_{n=0}^{N-1} P^{nd+t},$$

постольку при $s \to \infty$

$$\frac{1}{s} \sum_1^s P^u \to \frac{1}{d} \sum_{t=1}^{d} \sum_\rho \sum_\delta u_{\rho,\delta-t} \otimes \Pi_{\rho,\delta}.$$

Для завершения доказательства теоремы остается лишь заметить, что

$$\frac{1}{d} \sum_{t=1}^{d} \sum_\delta u_{\rho,\delta-t} \otimes \Pi_{\rho,\delta} = \frac{1}{d_\rho} \left(\sum_\delta u_{\rho,\delta} \right) \otimes \left(\sum_\delta \Pi_{\rho,\delta} \right) = u_\rho \otimes \Pi_\rho. \blacksquare$$

Следствие. *При выполнении условий эргодической теоремы множества* $E_{\rho,\delta} = \{u_{\rho,\delta} = 1\}$ *попарно не пересекаются и являются носителями соответствующих мер* $\Pi_{\rho,\delta}$. *Более того,* $P(x, E_{\rho,\delta+1}) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $x \in E_{\rho,\delta}$ *и, следовательно,*

$$P_x [X_t \in E_{\rho,\delta+t} (t \in N)] = 1 \quad \textit{при } x \in E_{\rho,\delta}.$$

Обозначая через $A_{\rho,\delta}$ *попарно непересекающиеся асимптотические события*

$$A_{\rho,\delta}=\underline{\lim_{t}}\{X_t\in E_{\rho,\delta+t}\},$$

имеем

$$P_x(A_{\rho,\delta})=u_{\rho,\delta}(x)\qquad (x\in E)$$

и $A_{\rho,\delta}=\lim\limits_{t\to\infty}$ п. н. $\{X_t\in E_{\rho,\delta+t}\}$ *относительно каждой вероятности* P_x. *Всякое асимптотическое событие эквивалентно некоторой сумме событий* $A_{\rho,\delta}$; *в частности,* $\sum\limits_{\rho}\sum\limits_{\delta}A_{\rho,\delta}=\Omega$ *п. н.* $P_x(x\in E)$.

Доказательство. Так как $0\leqslant u_{\rho,\delta}\leqslant 1$, меры $\Pi_{\rho,\delta}$ являются вероятностями и $\int\Pi_{\rho,\delta}(dx)\,u_{\rho,\delta}(x)=1$, то $\Pi_{\rho,\delta}(E_{\rho,\delta})=1$. Далее, поскольку

$$1-u_{\rho,\delta}(x)=\int P(x,\ dy)\,[1-u_{\rho,\delta+1}(y)],$$

постольку $E_{\rho,\delta}=\{x:\ P(x,\ E_{\rho,\delta+1})=1\}$, так что $P_x[X_1\in E_{\rho,\delta+1}]=1$ при $x\in E_{\rho,\delta}$. Повторяя это рассуждение, получаем

$$P_x[X_t\in E_{\rho,\delta+t}\,(t\in N)]=1$$

при $x\in E_{\rho,\delta}$.

Из предыдущих результатов вытекает также, что при всех $x\in E$

$$P_x[X_t\in E_{\rho,\delta+t}\,(t\geqslant s)]=P_x(X_s\in E_{\rho,\delta+s})=P^s(x,\ E_{\rho,\delta+s}).$$

Правый член в этой цепочке равенств равен 1 при $x\in E_{\rho,\delta}$ и при всех $x\in E$ мажорируется функцией

$$P^s u_{\rho,\delta+s}(x)=u_{\rho,\delta}(x),$$

а левый член стремится к $P_x[A_{\rho,\delta}]$ при $s\uparrow\infty$ в силу самого определения события $A_{\rho,\delta}$. Так как $A_{\rho,\delta}$ — асимптотическое событие, то $P_x(A_{\rho,\delta})$ как функция от x является выпуклой комбинацией функций $u_{\rho',\delta'}$. Но $P_x(A_{\rho,\delta})=1$ на непустом множестве $E_{\rho,\delta}$, и мы получаем

$$P_x[A_{\rho,\delta}]=u_{\rho,\delta}(x)$$

при всех $x \in E$. Наконец, из предложения V.2.5 вытекает, что всякое асимптотическое событие эквивалентно некоторой сумме событий $A_{\rho, \delta}$. ∎

Дополнения и упражненая

V.3.1. Показать, что отвечающий переходной вероятности на $(E, \mathcal{F})$ оператор P на $B(E, \mathcal{F})$ квазикомпактен тогда и только тогда, когда для некоторого целого числа $d \geqslant 1$ предел $\lim\limits_{t \to \infty} P^{td}$ существует в смысле сходимости по норме и является оператором конечного ранга.

V.3.2. ***Условие Дёблина.*** Говорят, что переходная вероятность P на $(E, \mathcal{F})$ удовлетворяет условию (D), если существуют такое целое число $t \in N$, такие два действительных числа $\theta < 1$ и $\eta > 0$ и такая вероятность μ на $(E, \mathcal{F})$, что

$$\mu(F) \geqslant \theta \Rightarrow P^t(\cdot, F) \geqslant \eta \quad \text{на} \quad E \quad (F \in \mathcal{F}).$$

Используя эргодическую теорему, показать, что если оператор P на $B(E, \mathcal{F})$ квазикомпактен, то выполнено условие (D). [Взять в качестве μ выпуклую комбинацию мер $\Pi_{\rho, \delta}$.] Обратно, Дёблин показал, что если выполнено условие (D), то справедлива равномерная эргодическая теорема и поэтому оператор P квазикомпактен (см. предыдущее упражнение); этот последний результат можно доказать и непосредственно. Показать, что если выполнено условие (D), то $\sum d_\rho < 1/(1-\theta)$. [Заметить, что если $\mu(F) \geqslant \theta$, то $\Pi_{\rho, \delta}(F) \geqslant \eta$ $(F \in \mathcal{F})$].

V.3.3. Пусть P — оператор на $B(E, \mathcal{F})$, отвечающий переходной вероятности на $(E, \mathcal{F})$. Показать, что итерации P^n оператора P сходятся по норме к оператору вида $1 \otimes \Pi$, где Π — вероятность на $(E, \mathcal{F})$, тогда и только тогда, когда существуют $t \in N$, постоянная $c > 0$ и вероятность μ на $(E, \mathcal{F})$, такие, что

$$P^t(x, F) \geqslant c\mu(F) \quad (x \in E;\ F \in \mathcal{F}).$$

[Этот факт можно доказать, не опираясь на результаты настоящей главы. Именно, показать сначала, что все меры $[P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)]^+$ $(x, y \in E)$ имеют полную массу, не превосходящую $1-c$. Далее, используя соотношение

$$P^{t+u}(x, \cdot) - P^{t+u}(y, \cdot) = [P^t(x, \cdot) - P^t(y, \cdot)] P^u,$$

установить, что $\sup\limits_{x, y} \| P^s(x, \cdot) - P^s(y, \cdot) \| \to 0$ при $s \uparrow \infty$.]

V.4. Субмарковские операторы

Дальнейшая часть настоящей главы посвящена изучению *индивидуальной эргодической теоремы* в рамках теории марковских процессов.

Выше было отмечено, что всякой переходной вероятности P на пространстве $(E, \mathscr{F})$ отвечают два обозначаемые той же самой буквой P оператора, первый из которых действует на пространстве $B(E, \mathscr{F})$ ограниченных измеримых функций, а второй — на пространстве $M(E, \mathscr{F})$ ограниченных мер на $(E, \mathscr{F})$:

$$Pf(x) = \int_E P(x, dy) f(y),$$

$$\mu P(F) = \int_E \mu(dx) P(x, F).$$

В своей полной общности индивидуальная эргодическая теорема формулируется в терминах оператора P, действующего на пространстве $\mathscr{M}(E, \mathscr{F})$, или, более точно, в терминах ограничений P на инвариантные относительно P подпространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$[1]) пространства $\mathscr{M}(E, \mathscr{F})$. [В том случае, когда существует инвариантная относительно P мера μ, с помощью элементарных преобразований из этой общей эргодической теоремы можно получить также эргодическую теорему в терминах оператора P, действующего на пространстве функций.]

В этом пункте излагаются нужные для дальнейшего предварительные сведения. Рассмотрим два измеримых пространства $(E_i, \mathscr{F}_i)_{i=1, 2}$ с определенными на них положительными мерами Π_i, которые далее считаются фиксированными. Отметим, что для дальнейшего существенны не сами меры Π_i, а лишь классы нулевых множеств, определяемых мерами Π_i (в самом деле, мы будем изучать операторы на пространствах $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, но, как легко показать (см. упражнение IV. 1.2), для изометрии двух пространств $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$ и $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi')$

[1]) По соображениям удобства здесь и в дальнейшем вместо L_p мы пишем L^p

достаточно (и необходимо), чтобы отвечающие мерам Π и Π' классы нулевых множеств в пространстве $(E, \mathcal{F})$ совпадали). Не ограничивая общности, мы можем, следовательно, считать, что меры Π_i являются вероятностями.

Линейный оператор, отображающий пространство $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ в пространство $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, называется *субмарковским*, если он положителен и по норме не превосходит 1. Принадлежащее $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ значение субмарковского оператора T на элементе $f \in L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ мы будем обозначать fT (т. е. условимся считать, что оператор T действует влево). Сопряженный к T оператор, отображающий $L^\infty(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ в $L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$, мы тоже обозначим через T, но будем считать, что он действует вправо. Образ Tg элемента $g \in L^\infty(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ относительно сопряженного оператора T есть единственный элемент пространства $L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$, удовлетворяющий условию

$$\int_{E_1} f \cdot Tg \, d\Pi_1 = \int_{E_2} fT \cdot g \, d\Pi_2$$

при всех $f \in L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$[1]). Сопряженный оператор T тоже положителен, и норма его, равная норме оператора T на L^1, не превосходит 1. Отметим, между прочим, что поскольку оператор T положителен, условие $\|T\|_\infty \leqslant 1$ равносильно условию $T1 \leqslant 1$.

---

[1]) Отметим, что принятые нами обозначения для оператора T и его сопряженного согласуются с обычным обозначением для произведения двух операторов. В самом деле, произведение двух операторов T и T', отображающих соответственно $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ в $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ и $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ в $L^1(E_3, \mathcal{F}_3, \Pi_3)$, определяется как оператор, переводящий элемент $f \in L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ в элемент $(fT)T' \in L^1(E_3, \mathcal{F}_3, \Pi_3)$. Сопряженный к этому произведению оператор отображает $L^\infty(E_3, \mathcal{F}_3, \Pi_3)$ в $L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ и переводит элемент $h \in L^\infty(E_3, \mathcal{F}_3, \Pi_3)$ в элемент $T(T'h) \in L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$, поскольку

$$\langle f, T(T'h)\rangle = \langle fT, T'h\rangle = \langle (fT)T', h\rangle.$$

Если произведение рассматриваемых операторов обозначить TT', то мы получаем „естественные формулы“

$$f(TT') = (fT)T', \quad (TT')h = T(T'h).$$

Субмарковский оператор T называется *марковским*, если $T1 = 1$, или, что равносильно, если при всех $f \in L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$

$$\int fT\,d\Pi_2 = \int f\,d\Pi_1$$

(в случае субмарковского оператора мы имеем лишь

$$\int fT\,d\Pi_2 \leqslant \int f\,d\Pi_1$$

при всех $f \geqslant 0$).

Предложение V.4.1. *Если T — положительный линейный оператор, отображающий пространство*

$$L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$$

в пространство $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, то

$$(\lim_n \uparrow f_n)\,T = \lim_n \uparrow (f_nT)$$

для всякой возрастающей последовательности функций $\{f_n, n \geqslant 1\}$ из $L^1_+(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$, такой, что

$$\lim_n \uparrow f_n \in L^1_+,$$

и

$$T\left(\lim_n \uparrow h_n\right) = \lim_n \uparrow Th_n$$

для всякой возрастающей последовательности функций $\{h_n, n \geqslant 1\}$ из $L^\infty_+(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, такой, что

$$\lim_n \uparrow h_n \in L^\infty_+.$$

Доказательство. Из положительности оператора T следует, что если $\{f_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность в $L^1_+(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$, то $\{f_nT, n \geqslant 1\}$ — тоже возрастающая последовательность в $L^1_+(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$. Кроме того, если предел $f = \lim_n \uparrow f_n$ интегрируем, то последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в пространстве L^1, так как тогда

$$\|f - f_n\| = \int (f - f_n) \downarrow 0.$$

Из непрерывности оператора T вытекает, далее, что последовательность $\{f_nT\}$ сходится к fT в L^1 и, следовательно, $\lim\limits_n \uparrow f_nT = fT$.

Если $\{h_n, n \geqslant 1\}$ — возрастающая последовательность в $L_+^\infty(E_2, \mathscr{F}_2, \Pi_2)$, то $\{Th_n, n \geqslant 1\}$ — тоже возрастающая последовательность в $L_+^\infty(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1)$. Переходя к пределу под знаком интеграла в равенстве

$$\int fT \cdot h_n \, d\Pi_2 = \int f \cdot Th_n \, d\Pi_1,$$

где $f \in L_+^1(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1)$, получаем

$$\int fT \cdot \lim h_n \, d\Pi_2 = \int f \cdot \lim Th_n \, d\Pi_1.$$

Таким образом, если $\lim\limits_n \uparrow h_n \in L_+^\infty$, то $T\left(\lim\limits_n \uparrow h_n\right) = \lim\limits_n \uparrow Th_n$. ∎

Следствие. *Всякий положительный линейный оператор, отображающий пространство $L^1(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1)$ в пространство $L^1(E_2, \mathscr{F}_2, \Pi_2)$, можно однозначно продолжить до линейного положительного отображения конуса положительных измеримых функций (конечных или бесконечных) на пространстве $(E_1, \mathscr{F}_1)$ в конус положительных измеримых функций (конечных или бесконечных) на пространстве $(E_2, \mathscr{F}_2)$, такого, что $\left(\lim\limits_n \uparrow f_n\right) T = \lim\limits_n \uparrow f_nT$. Аналогичный результат справедлив для сопряженного оператора. Более того, продолженные операторы связаны соотношением*

$$\int fT \cdot g \, d\Pi_2 = \int f \cdot Tg \, d\Pi_1.$$

Доказательство. Это следствие можно доказать непосредственно с помощью рассуждения, аналогичного примененному в п. II.3. Можно также поступить следующим образом: сначала определить fT для всех положительных измеримых функций (конечных или бесконечных) на $(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1)$ с помощью формулы $\int_F fT = \int f \cdot T1_F$, используя теорему Радона — Никодима, а затем показать (это нетрудно), что так определенное продолжение обладает всеми нужными свойствами. Аналогично продолжается оператор, сопряженный к T. ∎

Предложение V.4.2. *Пусть* $P=\{P(x_1, \mathcal{F}_2)\}$ — *переходная вероятность для пространств* $(E_1, \mathcal{F}_1)$ *и* $(E_2, \mathcal{F}_2)$. *Если* Π_1 *и* Π_2 — *две вероятности на* $(E_1, \mathcal{F}_1)$ *и* $(E_2, \mathcal{F}_2)$ *соответственно, такие, что* $P(\cdot, F_2)=0$ $\Pi_1=$ *п. н. при* $\Pi_2(F_2)=0$ *(т. е. такие, что вероятность* $\Pi_1 P$ *абсолютно непрерывна относительно* Π_2*), то существует единственный марковский оператор* T, *отображающий пространство* $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ *в пространство* $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, *такой, что меры* $(f\cdot\Pi_1)P$ *и* $(fT)\cdot\Pi_2$ *совпадают между собой при всех* $f\in L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$. *Кроме того, если* h — *ограниченная-измеримая функция на* $(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ *и* $\dot{h}$ — *ее класс эквивалентности в* $L^\infty(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, *то* $\widetilde{Ph}=T(\dot{h})$, *где* T — *сопряженный к* T *оператор.*

Доказательство. Так как согласно определению значение меры $(f\cdot\Pi_1)P$ на множестве $F_2\in\mathcal{F}_2$ равно

$$\int f(x)\,P(x, F_2)\,\Pi_1(dx),$$

то в силу сделанного предположения мера $(f\cdot\Pi_1)P$ абсолютно непрерывна относительно меры Π_2 на $(E, \mathcal{F}_2)$ и поэтому имеет вид $(fT)\cdot\Pi_2$, где (fT) — некоторый элемент пространства $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$. Легко видеть, что соответствие $f\to fT$ есть положительный линейный оператор, отображающий пространство $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ в пространство $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$. Кроме того, из формул

$$\int (f\cdot\Pi_1)\,P(dy)\,h(y)=\int f(x)\cdot Ph(x)\cdot\Pi_1(dx)$$

и

$$\int fT\cdot\dot{h}\cdot d\Pi_2=\int f\cdot T(\dot{h})\,d\Pi_1$$

вытекает, что $\widetilde{Ph}=T(\dot{h})$ и, в частности, что $T1=1$. ∎

В случае когда $(E_1, \mathcal{F}_1)=(E_2, \mathcal{F}_2)$, предыдущее предложение показывает, что переходная вероятность P на $(E, \mathcal{F})$ индуцирует марковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$, если выполнено условие $\Pi P \ll \Pi$. Отметим, что существует много вероятностей на $(E, \mathcal{F})$, удовлетворяющих этому условию. Более точно, для каждой вероятности μ на $(E, \mathcal{F})$ существует по крайней мере одна вероятность Π на $(E, \mathcal{F})$, такая, что $\mu \ll \Pi$ и $\Pi P \ll \Pi$. В самом деле, достаточно положить $\Pi = \sum_{n \geqslant 0} a_n \mu P^n$, где $a_n > 0$ и $\sum_{n \geqslant 0} a_n = 1$.

В п. V.2 каждой переходной вероятности P на измеримом пространстве $(E, \mathcal{F})$ мы сопоставили марковский процесс (со стационарными вероятностями перехода), определенный на произведении пространств $(\Omega, \mathcal{A}) = (E, \mathcal{F})^N$. Вероятностный закон этого процесса в момент n (т. е. вероятностный закон величины X_n) есть μP^n, где μ — вероятностный закон процесса в начальный момент (т. е. вероятностный закон величины X_0), а P^n есть n-я итерация переходной вероятности P. Пусть Π — вероятность на $(E, \mathcal{F})$, такая, что $\Pi P \ll \Pi$, и пусть T — эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$, индуцированный переходной вероятностью P. Легко видеть, что $\Pi P^n \ll \Pi$ при всех $n > 0$ и что P^n индуцируют итерации T^n оператора T, т. е. что $(f \cdot \Pi) P^n = (f T^n) \cdot \Pi$. Отсюда следует, что если μ — начальный вероятностный закон процесса, абсолютно непрерывный относительно Π, т. е. такой, что $\mu = f \cdot \Pi$, где $f \geqslant 0$ и $\int f d\Pi = 1$, то fT^n есть плотность вероятности (относительно Π) величины X_n $(n \geqslant 0)$.

Индивидуальная эргодическая теорема формулируется в терминах субмарковского эндоморфизма пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$. Для справедливости ее вовсе не требуется, чтобы этот эндоморфизм порождался переходной вероятностью на пространстве $(E, \mathcal{F})$ и, следовательно, чтобы ему можно было сопоставить марковский процесс. Тем не менее результаты, которые будут получены в ходе доказательства этой теоремы, представляют большой интерес для теории марковских процессов. Кроме того, то доказательство, которое будет дано ниже, частично основывается на фундаментальном в теории марковских процессов понятии времени ожидания.

С другой стороны, при выполнении некоторых не очень ограничительных условий на вероятностное пространство $(E, \mathcal{F}, \Pi)$ (эти условия выполнены, например, если $(E, \mathcal{F})$ — польское пространство с σ-алгеброй борелевских множеств) всякий марковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$ индуцируется некоторой переходной вероятностью. Дальнейшая часть настоящего пункта (результаты ее в дальнейшем использоваться не будут) посвящена доказательству этого факта в несколько более общей форме.

Предложение V.4.3. *Формула*

$$\int_F f T\, d\Pi_2 = \int_{E_1} f \cdot T(\cdot, F)\, d\Pi_1 \quad (F \in \mathcal{F}_2),$$

где f — произвольный элемент пространства $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между субмарковскими операторами T, отображающими пространство $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ в пространство $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, и „субмарковскими ядрами“, определенными на пространствах $(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ и $(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, т. е. семействами $\{T(\cdot, F),\ F \in \mathcal{F}_2\}$ элементов пространства

$$L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1),$$

удовлетворяющими (в смысле пространства $L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$) следующим условиям:

(а) $0 \leqslant T(\cdot, F) \leqslant 1$ *при всех* $F \in \mathcal{F}_2$;

(б) $T(\cdot, F) = 0$, *если* $\Pi_2(F) = 0$;

(в) *для всякого счетного семейства $\{F_i,\ i \in I\}$ попарно непересекающихся измеримых множеств из $(E_2, \mathcal{F}_2)$ ряд $\sum_I T(\cdot, F_i)$ сходится п. н. к $T\left(\cdot, \sum_I F_i\right)$.*

(Отметим, что в силу свойств (б) и (в) $T(\cdot, F)$ и $T(\cdot, F')$ совпадают, если F и F' эквивалентны.)

Доказательство. Пусть T — субмарковский оператор и $F \in \mathcal{F}_2$. Положим $T(\cdot, F)$ равным $T1_F$ — образу индикатора 1_F относительно сопряженного к T оператора. Поскольку этот сопряженный оператор положителен и не превосходит по норме 1, постольку

$$0 \leqslant T(\cdot, F) \leqslant 1 \text{ в } L^\infty(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1).$$

Ясно, что значение $T(\cdot, F)$ одно и то же для всех эквивалентных F и что, в частности, $T(\cdot, F)=0$ при $\Pi_2(F)=0$. Для доказательства того факта, что семейство $\{T(\cdot, F)\}$ обладает свойством (в), заметим, что для любой функции $f \in L^1(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1)$

$$\int fT\left(\cdot, \sum_I F_i\right) d\Pi_1 = \int_{\sum_I F_i} fT\, d\Pi_2 = \sum_I \int_{F_i} fT\, d\Pi_2 = \sum_I \int f \cdot T(\cdot, F_i)\, d\Pi_1,$$

и поэтому $T\left(\cdot, \sum_I F_i\right) = \sum_I T(\cdot, F_i)$ в $L^\infty(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1)$.

Обратно, если $T(\cdot, F)$ — субмарковское ядро и

$$f \in L^1(E_1, \mathscr{F}_1, \Pi_1),$$

то функция множеств $\varphi_f(F) = \int fT(\cdot, F)\, d\Pi_1$ будет σ-аддитивна на $(E_2, \mathscr{F}_2)$ и абсолютно непрерывна относительно Π_2. Обозначим через fT производную Радона — Никодима функции множеств φ_f по вероятности Π_2 ($fT \in L^1(E_2, \mathscr{F}_2, \Pi_2)$). Легко проверить, что отображение $f \to fT$ является субмарковским оператором T, для которого $T1_F = T(\cdot, F)$. ∎

Пусть T — субмарковский оператор и $\{T(\cdot, F), F \in \mathscr{F}_2\}$ — отвечающее ему ядро. В каждом классе эквивалентности $T(\cdot, F)$ выберем измеримую функцию на $(E_1, \mathscr{F}_1)$ и обозначим ее $\overline{P}(\cdot, F)$. Из определения субмарковского ядра вытекает, что семейство функций $\{\overline{P}(\cdot, F)\}$ обладает следующими свойствами:

(а) $0 \leqslant \overline{P}(x, F) \leqslant 1$ для Π_1-почти всех x; если T — марковский оператор, то $\overline{P}(x, E_2) = 1$ для Π_1-почти всех x;

(б) $\overline{P}(x, F) = 0$ для Π_1-почти всех x при $\Pi_2(F) = 0$;

(в) если $\{F_i, i \in I\}$ — счетное семейство попарно непересекающихся измеримых множеств из пространства $(E_2, \mathscr{F}_2)$, то $\overline{P}\left(x, \sum_I F_i\right) = \sum_I \overline{P}(x, F_i)$ для Π_1-почти всех x.

Отличие семейства функций $\{\overline{P}(\cdot, F)\}$ от переходной вероятности состоит (в случае марковского T) в том, что соотношения в свойствах (а) и (в) выполняются лишь почти всюду. Нахождение индуцирующей T переходной вероятности сводится, следовательно, к такому выбору представителей $\overline{P}(\cdot, F)$ $(F \in \mathcal{F}_2)$ из классов эквивалентности $T(\cdot, F)$, при котором свойства (а) и (в) выполняются уже всюду. Такой выбор не всегда возможен (трудности возникают в связи со свойством (в)). Тем не менее, имеет место следующий результат.

Предложение V.4.4. *Пусть $(E_i, \mathcal{F}_i, \Pi_i)_{i=1,2}$ — два вероятностных пространства. Предположим, что σ-алгебра $\mathcal{F}_2$ есть σ-алгебра счетного типа и что в $\mathcal{F}_2$ содержится компактный подкласс $\mathcal{C}$, такой, что*

$$\Pi_2(F) = \sup\{\Pi_2(C);\ C \in \mathcal{C},\ C \subset F\} \qquad (F \in \mathcal{F}_2).$$

Тогда каждому (суб)марковскому оператору T, отображающему $L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ в $L^1(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$, отвечает по крайней мере одна (суб)переходная вероятность $P = \{P(x_1, F_2)\}$, такая, что

$$\int_F fT\, d\Pi_2 = \int_{E_1} fP(\cdot, F)\, d\Pi_1$$

при всех $f \in L^1(E_1, \mathcal{F}_1, \Pi_1)$ и $F \in \mathcal{F}_2$ (т. е. такая, что индуцируемый ею в смысле предложения V.4.2 оператор совпадает с T).

По определению субвероятность отличается от вероятности лишь тем, что относительно нее масса всего пространства может быть меньше 1. Аналогично отличие субпереходной вероятности от переходной вероятности.

Если $(E_2, \mathcal{F}_2)$ — польское пространство с σ-алгеброй борелевских множеств, то сделанное предположение относительно $(E_2, \mathcal{F}_2, \Pi_2)$ выполняется для всякой вероятности Π_2 на $(E_2, \mathcal{F}_2)$ (см. предложение II.7.3).

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = \{B_n, n \geqslant 1\}$ — счетная булева алгебра, порождающая $\mathcal{F}_2$, и пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно конечных объединений (согласно лемме I.6.1, это не ограничивает общности). Тогда при всех $n \geqslant 1$ существует возрастающая последовательность принадлежащих $\mathscr{C}$ подмножеств B_n, скажем $\{C_n^k,\ k \geqslant 1\}$, такая, что $\Pi_2(B_n) = \lim\limits_{k\to\infty} \uparrow \Pi_2(C_n^k)$. Булева алгебра $\mathscr{T}$, порожденная множествами B_n и C_n^k $(n \geqslant 1,\ k \geqslant 1)$, есть счетная подалгебра σ-алгебры $\mathscr{F}_2$.

Согласно сказанному выше, всякое семейство $\{\overline{P}(\cdot, F),\ F \in \mathscr{F}_2\}$ измеримых функций, выбранных из соответствующих классов эквивалентности $T1_F = T(\cdot, F)$, обладает следующими свойствами:

(1) $0 \leqslant \overline{P}(\cdot, D) \leqslant 1$ вне некоторого нулевого множества из $\mathscr{F}_1$ для любого $D \in \mathscr{D}$; кроме того, если оператор T — марковский, то $\overline{P}(\cdot, E_2) = 1$ вне некоторого нулевого множества из $\mathscr{F}_1$;

(2) для всякой пары D, D' непересекающихся множеств из $\mathscr{D}$

$$\overline{P}(\cdot, D + D') = \overline{P}(\cdot, D) + \overline{P}(\cdot, D')$$

вне некоторого нулевого множества из $\mathscr{F}_1$;

(3) для любого $n \geqslant 1$ существует нулевое множество из $\mathscr{F}_1$, вне которого последовательность функций $\{\overline{P}(\cdot, C_n^k),\ k \geqslant 1\}$ возрастает и сходится к $\overline{P}(\cdot, B_n)$ (в самом деле, так как $1_{C_n^k} \uparrow 1_{B_n}$ Π_2-почти всюду, то

$$T(\cdot, C_n^k) \uparrow T(\cdot, B_n)$$

Π_1-почти всюду).

В эти свойства входит лишь счетное число исключительных нулевых множеств из $\mathscr{F}_1$, и поэтому существует нулевое множество N_1 из $\mathscr{F}_2$, годное как исключительное для всех этих свойств.

Если $x \notin N_1$, то в силу (1) и (2) ограничение функции множеств $\overline{P}(x, \cdot)$ на алгебру $\mathscr{D}$ (и тем более на меньшую алгебру $\mathscr{B}$) положительно и аддитивно. Далее, принимая во внимание свойство (3) и используя рассуждение из первой части доказательства предложения I. 6.2, получаем, что $\overline{P}(x, B_{n_j}) \downarrow 0$ для всякой убывающей к $\varnothing$ последовательности множеств $\{B_{n_j},\ j \geqslant 1\}$ из $\mathscr{B}$. Следовательно, ограничение $\overline{P}(x, \cdot)$ на $\mathscr{B}$ есть вероятность в марковском случае и субвероятность в субмарковском случае. Обозначим через $P(x, \cdot)$ единственное σ-аддитивное продолжение функции множеств $\{\bar{P}(x, B), B \in \mathscr{B}\}$ на σ-алгебру $\mathscr{F}_2$ (теорема I. 5).

При $x \in N_1$ положим $P(x, \cdot) = \Pi_2(\cdot)$. Нетрудно проверить, что так построенная функция $P = \{P(x, F)\}$ есть (суб)переходная вероятность для пространств $(E_1, \mathscr{F}_1)$ и $(E_2, \mathscr{F}_2)$, индуцирующая оператор T. В самом деле, с одной стороны, $P(x, \cdot)$ есть (суб)вероятность на $(E_2, \mathscr{F}_2)$ при всех $x \in E_1$. С другой стороны, для любого $F \in \mathscr{B}$ функция $P(\cdot, F)$ по построению является $\mathscr{F}_1$-измеримой функцией, принадлежащей классу эквивалентности $T(\cdot, F)$. Следовательно, в силу замечания к определению III. 2.1 функция $P(\cdot, F)$ измерима также при всех $F \in \mathscr{F}_2$. Наконец, функция $P(\cdot, F)$ принадлежит к классу эквивалентности $T(\cdot, F)$, $F \in \mathscr{F}_2$, и, значит, $\Pi_1 P \ll \Pi_2$. Ясно также, что P индуцирует T. ∎

В случае когда эндоморфизм T есть условное математическое ожидание, предыдущему предложению можно придать следующую форму.

Следствие. *Пусть $(E, \mathscr{F}, P)$ — вероятностное пространство. Предположим, что σ-алгебра $\mathscr{F}$ есть σ-алгебра счетного типа и что в $\mathscr{F}$ содержится компактный подкласс $\mathscr{C}$, такой, что*

$$\Pi(F) = \sup\{\Pi(C);\ C \in \mathscr{C};\ C \subset F\} \quad (F \in \mathscr{F}).$$

Тогда для каждой σ-подалгебры $\mathscr{G}$ σ-алгебры $\mathscr{F}$ существует по крайней мере одна „регулярная условная вероятность", т. е. семейство $\{P(x, F), x \in E, F \in \mathscr{F}\}$, такое, что

(a) *при всех $x \in E$ функция множеств $P(x, \cdot)$ есть вероятность на $(E, \mathscr{F})$;*

(б) *при всех $F \in \mathscr{F}$ функция $P(\cdot, F)$ $\mathscr{G}$-измерима и эквивалентна $E^{\mathscr{G}}(1_F)$. Для всякой положительной д. с. в. X на $(E, \mathscr{F})$ функция $\int_E P(\cdot, dy) X(y)$ $\mathscr{G}$-измерима и является вариантом условного математического ожидания $E^{\mathscr{G}}(X)$.*

Доказательство. Условное математическое ожидание $E^{\mathscr{Y}}$ является марковским эндоморфизмом пространства $E^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$. Сопряженным к нему является эндоморфизм $E^{\mathscr{Y}}$ пространства $L^\infty(E, \mathscr{F}, \Pi)$. Из предыдущего предложения вытекает, что существует переходная вероятность P на $(E, \mathscr{F})$, такая, что функция $P(\cdot, F)$ есть вариант условного математического ожидания $E^{\mathscr{Y}}(1_F)$, а функция $\int P(\cdot, dy) X(y)$ есть вариант условного математического ожидания $E^{\mathscr{Y}}(X)$, какова бы ни была д. с. в. $X \geqslant 0$. Отсюда, однако, еще не следует $\mathscr{Y}$-измеримость $P(\cdot, F)$; можно утверждать только, что $P(\cdot, F)$ отличается от некоторой $\mathscr{Y}$-измеримой функции лишь на нулевом множестве из $\mathscr{F}$. Тем не менее, если в доказательстве предыдущего предложения с самого начала функции $\overline{P}(\cdot, F)$ выбрать $\mathscr{Y}$-измеримыми, то для построенной по ним переходной вероятности функции $P(\cdot, F)$ будут тоже $\mathscr{Y}$-измеримыми. ∎

V.5. Эргодическое разложение

Следующий результат известен под названием *максимальной эргодической теоремы*. В приводимой ниже общей форме он принадлежит Э. Хопфу. Во всем дальнейшем изложении этот результат будет играть весьма важную роль. Приводимое нами весьма короткое доказательство его принадлежит А. Гарсиа.

Предложение V.5.1. *Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$. Для любых $f, g \in L^1_+(E, \mathscr{F}, \Pi)$ имеет место неравенство*

$$\int_E f \geqslant \int_{B_{f,g}} g,$$

где

$$B_{f,g} = \bigcup_{n \geqslant 0} \left\{ \sum_{k \leqslant n} fT^k > \sum_{k \leqslant n} gT^k \right\}.$$

В этом пункте интегрирование всюду производится по вероятности Π.

Доказательство. Мы докажем, что для любого элемента $h \in L^1$ справедливо неравенство $\int_{A_h} h \geqslant 0$, где

$$A_h = \bigcup_{n \geqslant 0} \left\{ \sum_{k \leqslant n} hT^k > 0 \right\}.$$

Из этого результата вытекает утверждение. В самом деле, если положить $h = f - g$ (f, $g \in L^1_+$), то $B_{f,g} = A_h$ и, следовательно,

$$\int_E f - \int_{B_{f,g}} g \geqslant \int_{B_{f,g}} (f - g) = \int_{A_h} h \geqslant 0.$$

(Отметим, что верно и обратное: полагая $f = h^+$, $g = h^-$, имеем $B_{f,g} = A_h$ и $f = 0$ на $B^c_{f,g}$.)

Пусть $h \in L^1$. Положим $h_n = \sup_{0 \leqslant m \leqslant n} \left(\sum_{k \leqslant m} hT^k \right)$, где $n = 0, 1, \ldots$. Ясно, что $h = h_0 \leqslant h_1 \leqslant \ldots$ и что множества $\{h_n > 0\}$ сходятся, возрастая, к A_h при $n \uparrow \infty$. С другой стороны, поскольку $h \leqslant h + h_n^+T$ и $\sum_{k \leqslant m+1} hT^k = h + \left(\sum_{k \leqslant m} hT^k \right) T \leqslant h + h_n^+T$ при $0 \leqslant m \leqslant n$, постольку $h_{n+1} \leqslant h + h_n^+T$, так что $h_n \leqslant h_{n+1} \leqslant h + h_n^+T$. Принимая теперь во внимание, что T — сжимающий оператор, имеем

$$\int_{\{h_n > 0\}} h \geqslant \int_{\{h_n > 0\}} h_n - \int_{\{h_n > 0\}} h_n^+T \geqslant \int h_n^+ - \int h^+T \geqslant 0.$$

Для завершения доказательства остается положить в этом неравенстве $n \uparrow \infty$. ∎

Следующий результат, имеющий технический характер, будет полезен нам в дальнейших доказательствах.

Следствие. *Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$ и f — элемент пространства L^1_+, такой, что $\{f > 0\} = E$. Если последовательность*

$\{g_p, p \geqslant 1\}$ в L^1 стремится к нулю и либо убывает, либо удовлетворяет условию $\sum_p \|g_p\| < \infty$, то

$$\limsup_{p\to\infty}\left(\sup_n\left|\frac{\sum\limits_{k\leqslant n} g_p T^k}{\sum\limits_{k\leqslant n} fT^k}\right|\right) = 0.$$

Доказательство. Так как $\sum\limits_{k\leqslant n} |g_p T^k| \leqslant \sum\limits_{k\leqslant n} |g_p| T^k$ и $\|g_p\| = \||g_p|\|$, достаточно доказать утверждение в случае положительных g_p. В этом случае в свою очередь достаточно показать, что $\limsup\limits_p B_{p,\varepsilon} = \varnothing$ п. н. при всех $\varepsilon > 0$, где

$$B_{p,\varepsilon} = \sup_n \left\{\sum_{k\leqslant n} g_p T^k > \varepsilon \sum_{k\leqslant n} fT^k\right\}.$$

Согласно предыдущему предложению, имеем $\varepsilon \int\limits_{B_{p,\varepsilon}} f \leqslant \int g_p$. Если $\{g_p\}$ — убывающая последовательность, то последовательность $\{B_{p,\varepsilon}, p \geqslant 1\}$ тоже убывает, каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Применяя предыдущее неравенство, получаем, следовательно, что если g_p стремятся, убывая, к нулю в L^1, то

$$\limsup_p B_{p,\varepsilon} = \lim_p \downarrow B_{p,\varepsilon} = \varnothing \text{ п. н.}$$

по мере $f \cdot \Pi$, а также по мере Π при $\{f > 0\} = E$. Если последовательность $\{g_p\}$ в L^1_+ удовлетворяет условию $\sum\limits_p \|g_p\| < \infty$, то из полученного выше неравенства вытекает сходимость ряда $\sum\limits_p \int\limits_{B_{p,\varepsilon}} f$. Но если этот ряд сходится, то, согласно предложению I.4.4, имеем $\limsup\limits_p B_{p,\varepsilon} = \varnothing$ п. н. по мере $f \cdot \Pi$ и, следовательно, по мере Π при $\{f > 0\} = E$. ∎

Предложение V.5.2. *Для любого субмарковского эндоморфизма T пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$ существует единственное с точностью до эквивалентности подмно-*

жество C множества E ($C \in \mathcal{F}$), такое, что при всех $f \in L^1_+(E, \mathcal{F}, \Pi)$

$$\sum_k fT^k = 0 \quad \text{или } \infty \text{ на } C,$$

$$\sum_k fT^k < +\infty \text{ на дополнении к } C.$$

Класс $\mathcal{C}$ подмножеств множества C вида $C_f = \left\{\sum_k fT^k = \infty\right\}$, $f \in L^1_+$, является σ-алгеброй подмножеств C.

Для всякой конечной положительной измеримой функции h на $(E, \mathcal{F}, \Pi)$ справедливы соотношения

$$Th \leqslant h \text{ на } C \Leftrightarrow Th = h \text{ на } C \Leftrightarrow h\ \mathcal{C}\text{-измерима на } C.$$

В частности, для того чтобы подмножество B множества C принадлежало σ-алгебре $\mathcal{C}$, необходимо, чтобы $T1_B = 1_B$ на C, и достаточно, чтобы $T1_B = 1_B$ на B.

Подмножества C и $D = C^c$ множества E называются соответственно *консервативной и диссипативной частями* E, отвечающими эндоморфизму T. Множества из σ-алгебры $\mathcal{C}$ называются (при $C \neq \varnothing$) *инвариантными множествами.*

В случае когда эндоморфизм T индуцируется переходной вероятностью P, сумма $\sum_{k \geqslant 0} fT^k$ является „плотностью среднего числа попаданий" для марковской случайной функции $\{X_k, k \geqslant 0\}$ с начальным законом $f \cdot \Pi$ и стационарной переходной вероятностью P. В самом деле, если $N(F)$ — число попаданий процесса $\{X_k, k \geqslant 0\}$ в измеримое множество F, т. е. $N(F) = \sum_{k \geqslant 0} 1_F(X_k)$, то

$$E[N(F)] = \int_F \left[\sum_{k \geqslant 0} fT^k\right] d\Pi,$$

поскольку $E[1_F(X_k)] = \int_F fT^k \, d\Pi$. Читатель легко убедится также, что подмножество B множества C принадлежит σ-алгебре $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда

$$P_x[X_k \in B \text{ при всех } k \geqslant 0] = 1 \text{ п. н. при } x \in B.$$

Доказательство. (а) Покажем сначала, что если f, $g \in L^1_+$, то $\sum_k gT^k = 0$ на множестве

$$A = \left\{ \sum_k fT^k = \infty, \ \sum_k gT^k < \infty \right\}.$$

Для этого заметим прежде всего, что $A \subset B_{f,\, ag}$ при любом $a > 0$, где

$$B_{f,\, ag} = \bigcup_{n \geqslant 0} \left\{ \sum_{k \leqslant n} fT^k > a \sum_{k \leqslant n} gT^k \right\}.$$

Применяя предложение V.5.1, получаем $a \int_A g \leqslant \int f$, откуда, полагая $a \to \infty$, выводим, что $g = 0$ на A. Имеем, далее,

$$\left\{ \sum_k gT^k < \infty \right\} = \left\{ \sum_k (gT^m)\, T^k < \infty \right\} \quad \text{при всех} \quad m \geqslant 0,$$

поскольку ряды $\sum_k gT^k$ и $\sum_k (gT^m)\, T^k$ отличаются лишь на $\sum_{k<m} gT^k < \infty$. Используя еще раз предыдущее рассуждение, получаем $gT^m = 0$ на A при всех $m \geqslant 0$ и потому $\sum_{m \geqslant 0} gT^m = 0$ на A.

Пусть p — элемент пространства L^1_+, для которого $\{p > 0\} = E$, и пусть

$$C = \left\{ \sum_k pT^k = \infty \right\}.$$

Полагая теперь $g = p$, находим, что $\sum_k fT^k < \infty$ на множестве $D = C^c$ при всех $f \in L^1_+$, поскольку $\sum_k pT^k \geqslant p > 0$ всюду на E. Беря, далее, $f = p$, получаем, что $\sum_k gT^k = 0$ или ∞ на C при всех $g \in L^1_+$.

Из предыдущего вытекает, в частности, что если $g \in L^1_+$ и $\{g > 0\} = E$, то $\sum_k gT^k = \infty$ на C и $\sum_k gT^k < \infty$ на D. Следовательно, множество C не зависит, с точностью до эквивалентности, от выбора определяющей его строго положительной функции p. Тем самым доказана единственность множества C, а вместе с этим и первое утверждение предложения.

(б) Покажем, что $T(\cdot, C_f^c)=0$ на множестве C_f при всех $f\in L_+^1$. В самом деле, полагая $A_a=\left\{\sum_k fT^k\leqslant a\right\}$, имеем $T(\cdot, A_a)=0$ на множестве $C_f=\left\{\sum_k fT^k=\infty\right\}$, поскольку

$$\int\left(\sum_k fT^k\right)T(\cdot, A_a)=\int_{A_a}\sum_{k\geqslant 1} fT^k\leqslant a\Pi(A_a)<\infty.$$

Замечая теперь, что $A_a\uparrow C_f^c$ при $a\uparrow\infty$, получаем нужный результат.

Отсюда следует, в частности, что для любой функции $g\in L_+^1$, обращающейся в нуль на D,

$$\sum_k gT^k=0 \quad \text{на} \quad D.$$

Действительно,

$$\int_D gT^{k+1}=\int gT^kT(\cdot, D)$$

и $T(\cdot, D)=0$ на C; применяя индукцию по k, получаем $gT^k=0$ на D при всех k.

(в) Покажем теперь, что если h — конечная положительная измеримая функция, такая, что $Th\leqslant h$ на C, то $Th=h$ на C. Положим $g=(1+h)^{-1}1_C$. Очевидно, $0\leqslant g\leqslant 1$, и поэтому $g\in L_+^1$; ясно также, что $\{g>0\}=C$. Используя результаты, полученные в пунктах (а) и (б), находим, что $\sum_k gT^k=\infty$ на C и $\sum_k gT^k=0$ на D. С другой стороны,

$$\int_C\left(\sum_{k<n} gT^k\right)(h-Th)=\int g(h-T^nh)\leqslant\int gh\leqslant 1;$$

полагая здесь $n\to\infty$ и принимая во внимание, что $h-Th\geqslant 0$ на C, получаем

$$\int_C\left(\sum_k gT^k\right)(h-Th)\leqslant 1.$$

Следовательно, $h-Th=0$ на C.

Из только что установленного результата вытекает, в частности, что $T1 = 1$ и $T1_{C_f^c} = 1_{C_f^c}$ на C; действительно, $T1 \leqslant 1$ на E по определению T, и $T1_{C_f^c} \leqslant 1_{C_f^c}$ в силу (б). Вычитая второе из этих равенств из первого, получаем также, что $T1_{C_f} = 1_{C_f}$ на C и, в частности, $T1_C = 1$ на C.

(г) Пусть, наконец, H — выпуклый конус конечных положительных измеримых функций, обращающихся в нуль на D и удовлетворяющих условию $Th = h$ на C. Конус H содержит функцию 1_C (согласно (в)) и замкнут, очевидно, относительно монотонных переходов к пределу. Кроме того, H является структурой. В самом деле, если $h, h' \in H$, то

$$T[\inf(h, h')] \leqslant \inf(Th, Th') = \inf(h, h') \quad \text{на} \quad C$$

и, следовательно, согласно (в), $\inf(h, h') \in H$. Далее, поскольку

$$\inf(h, h') + \sup(h, h') = h + h',$$

имеем также $\sup(h, h') \in H$. Из отмеченных свойств конуса H вытекает, что класс множеств $\mathscr{H} = \{B : B \subset C, T1_B = 1_B$ на $C\}$ является σ-алгеброй подмножеств C.

Покажем, что положительная и конечная измеримая функция h, обращающаяся в нуль на D, принадлежит H тогда и только тогда, когда она $\mathscr{H}$-измерима. В самом деле, если функция h $\mathscr{H}$-измерима, то она есть предел возрастающей последовательности взвешенных сумм индикаторов множеств из $\mathscr{H}$ и потому принадлежит H. Обратно, если $h \in H$, то из формулы

$$1_{\{h > a\}} = \lim_{n \uparrow \infty} \uparrow \inf [1, n(h-a)^+]$$

вытекает, что $1_{\{h > a\}} \in H$ при всех $a > 0$, т. е., что h $\mathscr{H}$-измерима (ср. с упражнением II. 2.1).

Покажем, далее, что σ-алгебра $\mathscr{H}$ и класс $\mathscr{C}$ совпадают. Включение $\mathscr{C} \subset \mathscr{H}$ непосредственно следует из (в). Обратно, если $B \in \mathscr{H}$ и если функция $f \in L_+^1$

выбрана так, что $\{f>0\}=B$, то $\sum_k fT^k=0$ на $C-B$, так как $C-B\in\mathscr{H}$ и

$$\int_{C-B} fT^k = \int_{C-B} f = 0.$$

С другой стороны, поскольку $B\subset C$ и $\sum_k fT^k \geqslant f>0$ на B, постольку $\sum_k fT^k=\infty$ на B. Таким образом, $B=\left\{\sum_k fT^k=\infty\right\}\in\mathscr{C}$.

Для завершения доказательства предложения остается лишь заметить, что для любой конечной положительной измеримой функции h

$$Th=h \quad \text{на} \quad C \Leftrightarrow h1_C \in H.$$

Действительно, из установленного в пункте (б) равенства $T(\cdot, D)=0$ на C вытекает, что для любой такой функции h имеем $Th=T(h1_C)$ на C. ∎

Следствие 1. *Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства*

$$L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$$

и C' — ненулевое инвариантное множество (подмножество множества C из $\mathscr{C}$). Формула

$$f'T'=fT, \quad \text{где} \quad f=\begin{cases} f' & \text{на} \quad C', \\ 0 & \text{на} \quad E-C', \end{cases}$$

определяет эндоморфизм T' пространства $L^1[C', C'\cap\mathscr{F}, \Pi(C'\cap\cdot)]$, для степеней которого справедлива аналогичная формула: $f'T'^k=fT^k$. Транспонированный к T' оператор определен на пространстве $L^\infty[C']$, и его степени обладают следующим свойством:

$$T'^k h'=T^k h \text{ на } C', \text{ если } h=h' \text{ на } C'.$$

Отсюда, в частности, следует, что $T^k h=0$ на C', если $h=0$ на C'. Эндоморфизм T' является марковским и *консервативным, и отвечающая ему σ-алгебра инвариантных множеств равна* $C' \cap \mathscr{C}$.

В случае когда $C' = C$, эндоморфизм T' называется *консервативной частью* эндоморфизма T.

Доказательство. Утверждения следствия вытекают из двух установленных в предыдущем предложении равенств $T1_{C'} = 1$ на C' и $T1_{E-C'} = 0$ на C'. В самом деле, в силу второго из этих равенств $fT = 0$ на $E - C'$, если $f = 0$ на $E - C'$. Отсюда непосредственно следует утверждение о степенях эндоморфизма T'. Из формул

$$\int_{C'} f'T'^k \cdot h' = \int_{C'} f' \cdot T'^k h', \qquad \int_E fT^k \cdot h = \int_E f \cdot T^k h,$$

левые части которых, согласно предыдущему, совпадают, если $f = f'$ на C', $f = 0$ на $E - C'$ и $h = h'$ на C' (функция h произвольна на $E - C'$), вытекает, что $T^k h = T'^k h'$ на C', если $h = h'$ на C'.

Так как $T1_{C'} = 1$ на C', то эндоморфизм T' — марковский. Наконец, из равенства $\sum_k f'T'^k = \sum_k fT^k$ следует, что отвечающая T' консервативная часть равна C' и что σ-алгебра инвариантных множеств для T' совпадает со следом $C' \cap \mathscr{C}$ σ-алгебры $\mathscr{C}$ на C'. ∎

Следствие 2. *Если T — субмарковский эндоморфизм пространства $L'(E, \mathscr{F}, \Pi)$, то для всякой положительной функции h*

$$\sum_k T^k h = \begin{cases} \infty & \text{на} \quad H, \\ 0 & \text{на} \quad C - H, \end{cases}$$

где H — наименьшее принадлежащее $\mathscr{C}$ подмножество множества C, содержащее множество $C \cap \{h > 0\}$.

Доказательство. Так как $h = 0$ на $C - H$, то в силу предыдущего следствия $\sum_k T^k h = 0$ на $C - H$.

Для любого положительного a и любой функции $f \in L^1_+(E, \mathcal{F}, \Pi)$, такой, что $\{f>0\} = C \cap \left\{ \sum_k T^k h \leqslant a \right\}$, имеем при всех $n \geqslant 0$

$$\int \left(\sum_{k \geqslant 0} f T^k \right) T^n h = \int f \left(\sum_{k \geqslant n} T^k h \right) \leqslant a \int f < \infty.$$

Отсюда следует, что $\sum_n T^n h = 0$ на множестве $H'_a = \left\{ \sum_k f T^k = \infty \right\}$, которое, согласно предыдущему предложению, является подмножеством множества C из σ-алгебры $\mathcal{C}$, содержащим множество $\{f > 0\}$. Имеем, таким образом,

$$C \cap \left\{ \sum T^n h = 0 \right\} \supset H'_a \supset C \cap \left\{ \sum T^k h \leqslant a \right\},$$

что возможно лишь в том случае, когда включения в этом соотношении являются равенствами. Следовательно, множество $C \cap \left\{ \sum T^k h = 0 \right\}$ принадлежит $\mathcal{C}$ и совпадает с множеством $C \cap \left\{ \sum T^k h < \infty \right\}$ (чтобы в этом убедиться, нужно положить $a \uparrow \infty$). С другой стороны, это множество не имеет, очевидно, общих точек с множеством

$$C \cap \{h > 0\},$$

а также, поскольку оно принадлежит $\mathcal{C}$, с множеством H. Тем самым мы доказали, что $\sum_k T^k h = \infty$ на H. ∎

Дополнения и упражнения

V.5.1. Пусть T — *идемпотентный* ($T^2 = T$) субмарковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$. Показать, что отвечающая T диссипативная часть D есть наибольшее подмножество (более точно, класс эквивалентности множеств) пространства $(E, \mathcal{F}, \Pi)$, для которого $T1_D = 0$, и что σ-алгебра $\mathcal{C}$ есть наименьшая σ-алгебра подмножеств $C = D^c$, относительно которой функции $T1_F$ $(F \in \mathcal{F})$ измеримы на C.

V. 5.2. Пусть $(E, \mathscr{F})$ — счетное пространство с σ-алгеброй всех его подмножеств, и пусть Π — вероятность на $(E, \mathscr{F})$, такая, что $\Pi(x) > 0$ при всех $x \in E$. Формула

$$fT(y) \cdot \Pi(y) = \sum_x \Pi(x) f(x) P(x, y)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между (суб)марковскими эндоморфизмами T пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$ и *(суб)марковскими матрицами* P на E (матрица с элементами $P(x, y)$, $x, y \in E$, называется (суб)марковской матрицей на E, если $P(x, y) \geqslant 0$ и $\sum_z P(x, z) = 1$ $(\leqslant 1)$ при всех $x, y \in E$).

Показать, что если $\{C_1, C_2, \ldots\}$ — счетное разбиение консервативной части C пространства E, порождающее σ-алгебру $\mathscr{C}$, то

(1) $\sum_k P^k(x, y) < \infty$ $(= 0)$, если $y \notin C$, при всех $x \in E$ $(x \in C)$;

(2) $\sum_k P^k(x, y) = \infty$ или 0 при $x \in C_i$, $y \in C_j$, смотря по тому, $i = j$ или $i \neq j$.

Свойства (1) и (2) полностью характеризуют C и C_i. Показать, что идемпотентные субмарковские матрицы P являются матрицами следующего вида: существует такая конечная или бесконечная последовательность вероятностей Π_n, носители которых C_n не пересекаются, и такое отображение ρ множества $D = \left(\sum C_n\right)^c$ в $[0, 1]$, что

$$P(x, y) = \begin{cases} \Pi_n(y), & \text{если } x \in C_n,\ y \in C_n \text{ при некотором } n, \\ \rho(x)\, \Pi_n(y), & \text{если } x \in D,\ y \in C_n \text{ при некотором } n, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

[Использовать упражнение V. 5.1.]

V. 5.3. ***Разложение Рисса.*** Положительная конечная измеримая функция h на пространстве $(E, \mathscr{F}, \Pi)$ называется *(супер)регулярной* относительно субмарковского эндоморфизма T, если $(Th \leqslant h)$ $Th = h$; такая функция h называется *потенциалом* положительной функции g, если $h = \sum_{k \geqslant 0} T^k g$.

Показать, что всякую супеpрегулярную функцию h можно единственным образом представить в виде суммы конечного потенциала $\sum_{k \geqslant 0} T^k g$ и регулярной функции h', причем $g = h - Th$ и $h' = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow T^n h$. Показать, кроме того, что если супеpрегулярная функция h мажорируется конечным потенциалом, скажем,

$$h \leqslant \sum_{k \geqslant 0} T^k f < \infty,$$

то сама функция h тоже является потенциалом (а именно, потенциалом функции $g = h - Th$). Вывести отсюда, что выпуклый конус регулярных функций есть полная структура.

Если оператор T консервативен, то не существует отличных от нуля конечных потенциалов. Показать, что если оператор T диссипативен, то всякая суперрегулярная функция h является пределом возрастающей последовательности потенциалов. [Рассмотреть функции

$$\min\left(h, \sum_{k \geqslant 0} T^k 1_{D_n}\right),$$

где $D_n = \left\{ \sum_k fT^k \leqslant n \right\}$ и f — функция, принадлежащая L^1_+, такая, что $\{f > 0\} = E$.]

V. 6. Индивидуальная эргодическая теорема

В этом пункте будет доказана весьма общая эргодическая теорема для субмарковского эндоморфизма T пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$. Приводимое доказательство основывается на исследовании определяемых ниже операторов ${}^F T$, имеющем и самостоятельный интерес.

Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства $L_1(E, \mathscr{F}, \Pi)$. Каждому множеству $F \in \mathscr{F}$ поставим в соответствие субмарковский эндоморфизм ${}^F T = T I_{F^c}$, где I_{F^c} — оператор умножения на 1_{F^c}. Согласно определению, имеем, таким образом,

$$f^F T = \begin{cases} fT & \text{на} \quad F^c, \\ 0 & \text{на} \quad F, \end{cases}$$

$${}^F T h = T\left(h 1_{F^c}\right).$$

Рассмотрим также положительные эндоморфизмы

$${}^F H^{(n)} = \sum_{0 \leqslant k < n} ({}^F T)^k T I_F \quad (n > 0).$$

Все эти эндоморфизмы являются субмарковскими, поскольку из неравенства $T 1_F = T1 - {}^F T 1 \leqslant 1 - {}^F T 1$ вытекает, что

$${}^F H^{(n)} 1 = \sum_{0 \leqslant k < n} ({}^F T)^k T 1_F \leqslant \sum_{0 \leqslant k < n} ({}^F T)^k (1 - {}^F T 1) =$$
$$= 1 - ({}^F T)^n 1 \leqslant 1.$$

Предел ${}^F H = \sum_{k \geqslant 0} ({}^F T)^k T I_F$ возрастающей последовательности $\{{}^F H^{(n)}\}$ субмарковских эндоморфизмов тоже есть субмарковский эндоморфизм.

В случае когда эндоморфизм T индуцируется переходной вероятностью P, эндоморфизмы ${}^FT$, ${}^FH^{(n)}$ и ${}^FH$ индуцируются субпереходными вероятностями

$$ {}^FP = \{{}^FP(x, G) = P(x, F^cG)\}, $$

$$ \sum_{0 \leqslant k < n} ({}^FP)^n PI_F \quad \text{и} \quad \sum_{k \geqslant 0} ({}^FP)^n PI_F $$

соответственно. Если обозначить через ${}^F\nu$ первый момент времени $n > 0$, в который марковская случайная функция $\{X_n, n \geqslant 0\}$ со стационарной переходной вероятностью P попадает в множество F (в случае когда $X_n \notin F$ при всех $n > 0$, мы полагаем ${}^F\nu = \infty$), то

$$ P_x[X_n \in G, {}^F\nu > n] = ({}^FP)^n (x, G). $$

Для доказательства этой формулы можно воспользоваться индукцией по n; действительно, в силу марковского свойства и того обстоятельства, что ${}^F\nu$ есть момент остановки $(\{{}^F\nu > n\} \in \mathcal{A}_n^0)$,

$$ P_x[X_{n+1} \in G, {}^F\nu > n+1] = P_x(X_{n+1} \in F^cG, {}^F\nu > n) = $$

$$ = \int_{y \in E} P_x(X_n \in dy, {}^F\nu > n) P(y, F^cG). $$

Используя доказанную формулу, получаем

$$ P_x[X_k \in G, {}^F\nu = k] = P_x(X_k \in FG, {}^F\nu > k-1) = $$

$$ = ({}^FP)^{k-1} P(x, FG) $$

и, складывая эти равенства, находим

$$ P_x[X_{({}^F\nu)} \in G, {}^F\nu \leqslant n] = {}^FH^{(n)}(x, G), $$

$$ P_x[X_{({}^F\nu)} \in G, {}^F\nu < \infty] = {}^FH(x, G). $$

Отсюда вытекает, что

$$ {}^FHh(x) = \int_{\{{}^F\nu < \infty\}} dP_x h[X_{({}^F\nu)}], $$

и в частности ${}^FH1(x) = P_x[{}^F\nu < \infty]$. Ясно также, что если $\mu_0 = f \cdot \Pi$ — вероятностный закон величины X_0, то положительная мера $f{}^FH \cdot \Pi$ есть закон распределения величины $X_{({}^F\nu)}$ на множестве $\{{}^F\nu < \infty\}$.

Предложение V.6.1. *Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, C — отвечающая T консервативная часть E, и пусть $\mathscr{C}$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $C \cap \mathscr{F}$, состоящая из инвариантных относительно T подмножеств в C. Пусть, далее, F — принадлежащее $\mathscr{F}$ подмножество в C и $\bar{F}$ — наименьший класс эквивалентности множеств из $\mathscr{C}$, содержащих F. Тогда*

$$^F Hh = h 1_{\bar{F}} \text{ на } C$$

для любой $\mathscr{C}$-измеримой на C положительной функции h.

Доказательство. Если функция h положительна и $\mathscr{C}$-измерима, то из разложения $h = Th = T(h1_F) + {}^F Th$ вытекает, что при всех $n \geqslant 0$

$$^F H^{(n)} h = \sum_{k<n} ({}^F T)^k T(h1_F) = \sum_{k<n} ({}^F T)^k (h - {}^F Th) = h - ({}^F T)^n h.$$

Следовательно, функция

$$h - {}^F Hh = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow (h - {}^F H^{(n)} h) = \lim_{n \uparrow \infty} \downarrow ({}^F T)^n h$$

положительна и инвариантна относительно ${}^F T$. Отсюда, используя разложение $T = {}^F T + TI_F$, получаем

$$T(h - {}^F Hh) = (h - {}^F Hh) + T[1_F(h - {}^F Hh)]$$

и, поскольку $h = Th$,

$$^F Hh = T({}^F Hh) + T[1_F(h - {}^F Hh)] \geqslant T({}^F Hh).$$

Согласно предложению V.5.2, функция ${}^F Hh$, следовательно, $\mathscr{C}$-измерима на C и $T[1_F(h - {}^F Hh)] = 0$ на C. Так как, очевидно,

$$0 = T[1_F(h - {}^F Hh)] \leqslant 1_F(h - {}^F Hh) \text{ на } C,$$

то, применяя еще раз предложение V.5.2, получаем, $1_F(h - {}^F Hh) = 0$. Но функция $h - {}^F Hh$ является $\mathscr{C}$-измеримой, и поэтому из равенства ее нулю на F следует, что она равна нулю также на $\bar{F}$. Таким образом, мы показали, что ${}^F Hh = h$ на $\bar{F}$.

Поскольку $C - \bar{F} \in \mathscr{C}$, постольку $T(h1_{\bar{F}}) = 0$ на $C - \bar{F}$ для любой функции $h \geqslant 0$. Отсюда легко вытекает, что ${}^F Hh = 0$ на $C - \bar{F}$. ∎

Следствие. *При выполнении условий предыдущего предложения консервативная часть, отвечающая эндоморфизму* ${}^FT$, *равна* $C-\bar{F}$, *а* σ-*алгебра инвариантных относительно* ${}^FT$ *подмножеств множества* $C-\bar{F}$ *совпадает со следом* $\mathscr{C}$ *на* $C-\bar{F}$.

Доказательство. Согласно предыдущему предложению, ${}^FH1=1_{\bar{F}}$. С другой стороны, согласно следствию 2 предложения V.5.2, примененному к оператору ${}^FT$, функция

$${}^FH1=\sum_{k\geqslant 0}({}^FT)^k T1_F$$

на консервативной части, отвечающей оператору ${}^FT$, равна либо 0, либо ∞. Следовательно, консервативная часть ${}^FC$, отвечающая ${}^FT$, и множество $\bar{F}$ не пересекаются. Далее, из неравенства ${}^FT\leqslant T$ непосредственно вытекает, что ${}^FC\subset C$. Резюмируя сказанное, получаем

$${}^FC\subset C-\bar{F}.$$

Заметим теперь, что ограничения операторов T и ${}^FT$ на инвариантное относительно T множество $C-\bar{F}$ совпадают. Применяя следствие 1 предложения V.5.2, убеждаемся, что ${}^FC=C-\bar{F}$ и что следы на $C-\bar{F}$ σ-алгебр множеств, инвариантных относительно T и ${}^FT$ соответственно, совпадают. ∎

Следующий результат (в случае счетного пространства E принадлежащий Дёблину) является частным случаем *эргодической теоремы* (см. ниже).

Предложение V.6.2. *Пусть* T — *субмарковский эндоморфизм пространства* $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, *и пусть* $\mathscr{C}$ *есть* σ-*алгебра инвариантных относительно* T *подмножеств консервативной части* C. *Если* F — *принадлежащее* $\mathscr{F}$ *подмножество в* C *и* $\bar{F}$ — *наименьший класс эквивалентности множеств из* $\mathscr{C}$, *содержащих* F, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\text{п. н.}\frac{\sum\limits_{k\leqslant n}(I^FH)T^k}{\sum\limits_{k\leqslant n}IT^k}=1_{\bar{F}}\quad\text{на } C$$

для всякой функции $f \in L^1_+(E, \mathcal{F}, \Pi)$, *удовлетворяющей условию* $\{f > 0\} = E$.

Доказательство. (а) Так как при любом $k \geqslant 0$

$$\int\limits_{C-\bar{F}} (f^F H) T^k = \int\limits_{C-\bar{F}} f^F H = 0,$$

функции $(f^F H) T^k$ $(k \geqslant 0)$ равны нулю на $C - \bar{F}$. Следовательно, утверждение предложения справедливо на $C - \bar{F}$.

(б) Дальнейшая часть доказательства основана на следующей формуле:

$$\sum_{k \leqslant n} T^k = \sum_{k \leqslant n} ({}^F T)^k + \sum_{k+l<n} \sum ({}^F T)^k T I_F T^l \quad (n \geqslant 0).$$

Для доказательства этой формулы заметим, что она, очевидно, верна при $n = 0$, и что если она верна при некотором n, то она верна также при $n + 1$, поскольку

$$\sum_{k \leqslant n+1} T^k = I + \Big(\sum_{k \leqslant n} T^k\Big) T = I + \Big(\sum_{k \leqslant n} {}^F T^k\Big) ({}^F T + T I_F) +$$

$$+ \sum_{k+l<n} \sum {}^F T^k T I_F T^{l+1} = \sum_{k \leqslant n+1} {}^F T^k + \sum_{k+l<n+1} \sum {}^F T^k T I_F T^l.$$

(в) Из установленной в пункте (б) формулы непосредственно следует, что для любой функции $f \in$ $\in L^1_+(E, \mathcal{F}, \Pi)$

$$\sum_{k \leqslant n} f T^k \leqslant \sum_{k \geqslant 0} f^F T^k + \sum_{l \leqslant n} (f^F H) T^l.$$

С другой стороны, из следствия к предложению V.6.1 и из предложения V.5.2 вытекает, что

$$\sum_{k \geqslant 0} f^F T^k < \infty \text{ на } \bar{F}$$

и что $\sum\limits_{k \geqslant 0} f T^k = \infty$ по крайней мере на множестве $\{f > 0\} \cap C$. Деля правую часть предыдущего неравенства на левую его часть и полагая $n \to \infty$, получаем, следовательно, что для любой функции $f \in L^1_+$, удовлетворяющей условию $\{f > 0\} = E$,

$$1 \leqslant \liminf_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k \leqslant n} (f^F H) T^k}{\sum\limits_{k \leqslant n} fT^k} \quad \text{на } \overline{F}.$$

(г) Из формулы пункта (б) легко вытекает также, что

$$\sum_{k \leqslant n} fT^k + \sum_{l=1}^{m} fT^{n+l} = \sum_{k \leqslant m+n} fT^k \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k < m} \sum_{l \leqslant n} f^F T^k T I_F T^l = \sum_{l \leqslant n} \left[f^F H^{(m)} \right] T^l.$$

Деля обе части этого неравенства на $\sum\limits_{k \leqslant n} fT^k$, убеждаемся, что для любой функции $f \in L^1_+$ с $\{f > 0\} = E$

$$1 \geqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum\limits_{k \leqslant n} (f^F H^{(m)}) T^k}{\sum\limits_{k \leqslant n} fT^k} \qquad (m > 0)$$

при условии, что для любой такой функции f и всех $l \geqslant 0$

$$\lim_{n \to \infty} \text{ п. н. } \frac{fT^{n+l}}{\sum\limits_{k \leqslant n} fT^k} = 0.$$

Выполнение этого условия будет доказано, если мы покажем, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \to \infty} \left\{ fT^{n+l} > \varepsilon \sum_{k \leqslant n} fT^k \right\} = \varnothing.$$

Полагая $g_n = fT^{n+l} - \varepsilon \sum\limits_{k \leqslant n} fT^k$ и замечая, что $g_n = g_{n-1}T - \varepsilon f$, имеем

$$\int g_n^+ = \int\limits_{\{g_n > 0\}} g_{n-1}T - \varepsilon \int\limits_{\{g_n > 0\}} f \leqslant$$

$$\leqslant \int (g_{n-1}T)^+ - \varepsilon \int\limits_{\{g_n > 0\}} f \leqslant \int g_{n-1}^+ - \varepsilon \int\limits_{\{g_n > 0\}} f.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_n \int_{\{g_n>0\}} f \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sum_n \int (g_{n-1}^+ - g_n^+) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} g_0^+ < \infty$$

и, следовательно (согласно предложению I.4.4), что $\limsup_n \{g_n > 0\} = \varnothing$ п. н. по мере $f \cdot \Pi$; последнее соотношение справедливо также и по мере Π, если $\{f > 0\} = E$. Наконец, устремляя m к бесконечности в очевидном неравенстве

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{k \leqslant n} (f^F H) T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} \leqslant$$

$$\leqslant \limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{k \leqslant n} (f^F H^{(m)}) T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} + \sup_n \frac{\sum_{k \leqslant n} [f^F H - f^F H^{(m)}] T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k}$$

и применяя следствие предложения V.5.1 к убывающей к нулю в L_+^1 последовательности функций $g_m = f^F H - f^F H^{(m)}$, находим

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\sum_{k \leqslant n} (f^F H) T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} \leqslant 1.$$

Сопоставление этого неравенства с неравенством, полученным в пункте (в), завершает доказательство предложения. ∎

Эргодическая теорема (Чакон — Орнстейн). *Пусть T — консервативный марковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$, и пусть $\mathcal{C}$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\mathcal{F}$, образованная инвариантными множествами. Для любой функции $g \in L^1$ и любой функции $f \in L_+^1$, удовлетворяющей условию $\{f > 0\} = E$,*

$$\lim_{n \to \infty} \text{п. н.} \frac{\sum_{k \leqslant n} g T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} = \frac{E^{\mathcal{C}}(g)}{E^{\mathcal{C}}(f)}.$$

Доказательство. Если функция g имеет вид $g = f^F H$, $F \in \mathcal{F}$, то, согласно предложению V.6.2, указанный в формулировке теоремы предел существует и равен $1_{\bar{F}}$. Для доказательства теоремы в этом частном случае достаточно, таким образом, показать, что $E^{\mathscr{C}}(f^F H) = E^{\mathscr{C}}(f)\, 1_{\bar{F}}$ для любых $f \in L^1_+$ и $F \in \mathcal{F}$. Но поскольку $C = E$, это последнее равенство равносильно утверждению предложения V.6.1. В самом деле, для любой $\mathscr{C}$-измеримой функции $h \geqslant 0$ имеем

$$\int E^{\mathscr{C}}(f^F H) \cdot h = \int f^F H \cdot h = \int f^F Hh$$

и

$$\int E^{\mathscr{C}}(f)\, 1_{\bar{F}} \cdot h = \int f 1_{\bar{F}} h.$$

Пусть Λ_f — линейное подпространство пространства L^1, порожденное функциями вида $f^F H$, $F \in \mathcal{F}$. В силу предыдущего утверждение теоремы, очевидно, справедливо при всех $g \in \Lambda_f$. Покажем, что оно справедливо также и для всех g, принадлежащих замыканию $\bar{\Lambda}_f$ подпространства Λ_f в L^1. Возьмем последовательность $\{g_p,\ p \geqslant 1\}$ в Λ_f, для которой $\sum_p \|g - g_p\| < \infty$. Имеем, очевидно,

$$\left| \frac{\sum_{k \leqslant n} g T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} - \frac{E^{\mathscr{C}}(g)}{E^{\mathscr{C}}(f)} \right| \leqslant \left| \frac{\sum_{k \leqslant n} g_p T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} - \frac{E^{\mathscr{C}}(g_p)}{E^{\mathscr{C}}(f)} \right| + {}$$

$$+ \sup_n \left| \frac{\sum_{k \leqslant n} (g - g_p) T^k}{\sum_{k \leqslant n} f T^k} \right| + \frac{|E^{\mathscr{C}}(g - g_p)|}{E^{\mathscr{C}}(f)}.$$

Полагая в этом неравенстве сначала $n \to \infty$, а затем $p \to \infty$, получаем нужный результат. В самом деле, первый член справа стремится к нулю, поскольку $g_p \in \Lambda_p$; второй член стремится к нулю согласно следствию предложения V.5.1, а стремление третьего члена к нулю вытекает из неравенства

$$\sum_p \int |E^{\mathscr{C}}(g-g_p)| \leqslant \sum_p \int |g-g_p| < \infty.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно теперь показать, что $\overline{\Lambda}_f = L^1$. Для этого в свою очередь достаточно (в силу теоремы Хана — Банаха) установить, что не существует элемента $h \neq 0$ пространства L^∞, для которого $\int gh = 0$ при всех $g \in \overline{\Lambda}_f$. Пусть $h \in L^\infty$, и пусть $\int gh = 0$ при всех $g \in \overline{\Lambda}_f$. Тогда, в частности, $\int f^{F_0}H \cdot h = 0$, где $F_0 = \{h > 0\}$. Так как $f^{F_0}H \geqslant 0$ и $h > 0$ на F_0, отсюда следует, что $f^{F_0}H = 0$ на F_0. Поскольку, кроме того, $f^{F_0}H = 0$ на F_0^c, постольку $f^{F_0}H = 0$ на всем пространстве E. Принимая теперь во внимание равенства $\int f^{F_0}H = \int_{\overline{F}_0} f$ и $\{f > 0\} = E$, получаем $\overline{F}_0 = \varnothing$ и, следовательно, $F_0 = \varnothing$. Аналогичное рассуждение показывает, что $\{h < 0\} = \varnothing$. Таким образом, функция h должна быть равна нулю. ∎

Предложение V.6.3 (Э. Хопф). *Всякий субмарковский эндоморфизм T пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, обладающий левоинвариантным элементом $f = fT$ из L^1, таким, что $\{f > 0\} = E$, является марковским консервативным эндоморфизмом. Если T — такой эндоморфизм и $\mathscr{C}$ есть σ-подалгебра σ-алгебры $\mathscr{F}$, состоящая из правоинвариантных относительно T множеств, то*

$$\lim_{n\to\infty} \text{п. н.} \frac{1}{n+1} \sum_{k\leqslant n} gT^k = \frac{f}{E^{\mathscr{C}}(f)} \cdot E^{\mathscr{C}}(g) \quad \textit{при} \quad g \in L^1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \text{п. н.} \frac{1}{n+1} \sum_{k\leqslant n} T^k g = \frac{1}{E^{\mathscr{C}}(f)} E^{\mathscr{C}}(fg) \quad \textit{при} \quad fg \in L^1.$$

Более того, эти пределы существуют также в смысле сходимости в пространствах $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$ и $L^1(E, \mathscr{F}, f\cdot\Pi)$ соответственно.

Доказательство. Так как $\sum_k fT^k = \infty \cdot f = \infty$ на E, то эндоморфизм T консервативен и, следовательно, является марковским (см. предложение V.5.2). Поскольку $\sum_{k \leqslant n} fT^k = (n+1)f$, первое из утверждаемых предложением эргодических соотношений есть следствие эргодической теоремы.

Формула

$$gT' = f \cdot T\left(\frac{g}{f}\right)$$

определяет марковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$. В самом деле, если функция g положительна, то функция gT' тоже положительна и

$$\int gT' = \int T\left(\frac{g}{f}\right) \cdot f = \int \frac{g}{f} \cdot fT = \int g.$$

Транспонированный к T' оператор можно определить непосредственно формулой

$$T'\left(\frac{h}{f}\right) = \frac{hT}{f} \qquad (h \geqslant 0).$$

Действительно, из соотношений

$$\int T\left(\frac{g}{f}\right) \cdot \left(\frac{h}{f}\right) \cdot f = \int \left(\frac{g}{f}\right) \cdot hT,$$

$$\int gT' \cdot \left(\frac{h}{f}\right) = \int \left(\frac{g}{f}\right) \cdot T'\left(\frac{h}{f}\right) \cdot f,$$

где $g, h \geqslant 0$, вытекает, что справедливое при всех g равенство $T(g/f) \cdot f = gT'$ равносильно равенству $hT/f = T'(h/f)$ при всех h.

Так как, очевидно, $fT' = f$, оператор T' консервативен. Легко также проверить, что $gT'^k = f \cdot T^k(g/f)$ при всех $g \in L^1_+$. В силу следствия 2 предложения V.5.2 σ-алгебра $\mathscr{C}'$ множеств вида

$$\left\{\sum_k gT'^k = \infty\right\} = \left\{\sum_k T^k(g/f) = \infty\right\},$$

где $g \in L^1_+$, является σ-подалгеброй σ-алгебры $\mathscr{C}$. Поскольку $gT = f \cdot T'(g/f)$, то, меняя в предыдущем рассуждении ролями T и T', получаем обратное включение $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}'$, так что $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$. Для доказательства второго утверждаемого предложением эргодического соотношения достаточно теперь применить уже установленное первое соотношение к оператору T'.

Осталось доказать последнее утверждение предложения о сходимости в норме L_1. Достаточно доказать, например, что последовательность $g_n = 1/(n+1) \sum_{k \leqslant n} gT^k$ сходится в L^1 к $g_\infty = \lim_{n\to\infty}$ п. н. g_n при всех положительных $g \in L^1$. Легко видеть, что функции $g_n (n \geqslant 1)$ и g_∞ положительны и что

$$\int g_n = \int g_\infty = \int g.$$

Далее, с одной стороны, последовательность положительных функций $\{(g_\infty - g_n)^+\}$ сходится п. н. к нулю и мажорируется функцией $g_\infty \in L^1$, а с другой стороны,

$$\int |g_\infty - g_n| = 2 \int (g_\infty - g_n)^+,$$

поэтому согласно теореме о сходимости мажорируемой последовательности $g_n \to g_\infty$ в L_1 при $n \to \infty$. ∎

Следствие (теорема Биркгофа). *Пусть θ — измеримое отображение вероятностного пространства $(E, \mathscr{F}, \Pi)$ в себя, относительно которого вероятность Π инвариантна, т. е. $\Pi(\theta^{-1}F) = \Pi(F)$ при всех $F \in \mathscr{F}$. Обозначим через $\mathscr{J}$ σ-подалгебру σ-алгебры $\mathscr{F}$, состоящую из множеств, инвариантных относительно θ, т. е.*

$$\mathscr{J} = \{I \in \mathscr{F}:\ \theta^{-1} I \underset{\text{п. н.}}{=} I\}.$$

Тогда при всех $h \in L^1$

$$\lim_{n\to\infty} \text{п. н.} \frac{1}{n+1} \sum_{k \leqslant n} h\theta^k = E^{\mathscr{J}}(h).$$

Более того, этот предел существует также в смысле сходимости в пространстве L_1.

Доказательство. Формула

$$\int_F fT = \int_{\theta^{-1}F} f$$

определяет марковский эндоморфизм T пространства L^1. В самом деле, при всех $f \in L^1$ правая часть этого равенства представляет собой ограниченную меру, абсолютно непрерывную относительно Π, и поэтому, согласно теореме Радона — Никодима, имеет вид $\int_F fT$, где fT — некоторый элемент пространства L^1. Более того, соответствие $f \to fT$ линейно, положительно и удовлетворяет условию $\int fT = \int f$. Отметим также, что $1T = 1$.

Далее, легко проверить, что $Th = h \cdot \theta$ и что вообще $T^k h = h \cdot \theta^k$. Утверждение следствия непосредственно вытекает теперь из предыдущего предложения. ∎

В следующем предложении устанавливается, что эргодическая теорема справедлива для произвольного (не обязательно консервативного) субмарковского эндоморфизма.

Предложение V.6.4. *Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathcal{F}, \Pi)$. Для любого элемента $g \in L^1$ и любого элемента $f \in L^1_+$, удовлетворяющего условию $\{f > 0\} = E$, существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} \text{п. н.} \frac{\sum_{k \leqslant n} gT^k}{\sum_{k \leqslant n} fT^k}$$

на E. На диссипативной части D этот предел равен отношению сумм п. н. сходящихся рядов $\sum_k gT^k$ и $\sum_k fT^k$; на консервативной части C он равен $E^{\mathcal{C}}(g')/E^{\mathcal{C}}(f')$, где $E^{\mathcal{C}}$ — условное математическое ожидание на пространстве $(C, C \cap \mathcal{F}, \Pi(C \cap \cdot))$, а f' и g' — функции, определяемые на C формулами $g' = g^C H$, $f' = f^C H$.

Доказательство. Ясно, что на диссипативной части D рассматриваемый предел существует и равен указанному отношению. Далее, применяя к консервативной части T' эндоморфизма T следствие 1 предложения V. 5.2 и эргодическую теорему, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \text{п. н.} \frac{\sum\limits_{k\leqslant n} g'T'^k}{\sum\limits_{k\leqslant n} f'T'^k} = \frac{E^{\mathscr{C}}(g')}{E^{\mathscr{C}}(f')}$$

на C. Для завершения доказательства остается заметить, что определенное на C отношение

$$\frac{\sum\limits_{k\leqslant n} f'T'^k}{\sum\limits_{k\leqslant n} fT^k} = \frac{\sum\limits_{k\leqslant n} (f^C H)\,T^k}{\sum\limits_{k\leqslant n} fT^k},$$

равно как и аналогичное отношение для g и g', сходится п. н. к 1 на C при $n\to\infty$ (предложение V. 6.2).[1] ∎

Дополнения и упражнения

V. 6.1. Усилить предложение V. 5.1; именно, показать, что при выполнении тех же условий $\int\limits_{B_{f,g}} f \geqslant \int\limits_{B_{f,g}} g$. [Применить это предложение к функциям $(f-g)^+$ и $(g-f)^+$.] Положим

$$h = \sup_{n\geqslant 0}\Big(\sum_{k\leqslant n} gT^k \Big/ \sum_{k\leqslant n} fT^k\Big).$$

Доказать, что при всех $p>1$ выполняется неравенство

$$\|h\|_p \leqslant \frac{p}{p-1}\left\|\frac{g}{f}\right\|_p$$

(в смысле нормы пространства $L^p(E, \mathscr{F}, f\cdot\Pi)$). [Проинтегрировать неравенство $\int\limits_{\{h>a\}} g \geqslant \int\limits_{\{h>a\}} af$ по мере $pa^{p-1}\,da$ в пределах от 0 до ∞ и воспользоваться неравенством Гёльдера.] Вывести отсюда, что если эндоморфизм T консервативен и если $f\in L^1_+$, $\{f>0\}=E$,

[1] Предложение V. 6.2 нельзя применить непосредственно к аналогичному отношению для функции g, так как g не удовлетворяет условиям этого предложения. Чтобы преодолеть это затруднение, можно заметить следующее: достаточно доказать предложение V. 6.4 для функций $g\geqslant 0$, воспользоваться изложенным рассуждением с заменой $g\geqslant 0$ на $g+1$ и 1 соответственно и вычесть одну из другой полученные формулы. — *Прим. перев.*

$g/f \in L^p(f \cdot \Pi)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k\leqslant n} gT^k}{\sum\limits_{k\leqslant n} fT^k} = \frac{E^{\mathscr{C}}g}{E^{\mathscr{C}}f}$$

в смысле сходимости в $L^p(f \cdot \Pi)$.

V.6.2. Если T — консервативный марковский эндоморфизм, то $(gh)T = (gT) \cdot h$ для любой $\mathscr{C}$-измеримой функции $h \geqslant 0$ и любой функции $g \geqslant 0$. Вывести отсюда, что эргодическая теорема остается справедливой, если условие $f, g \in L^1$ ослабить, предположив лишь, что $E^{\mathscr{C}}f < \infty$, $E^{\mathscr{C}}g < \infty$. Показать также, что условие $\{f > 0\} = E$ можно ослабить до условия $\{E^{\mathscr{C}}f > 0\} = E$, заметив для этого, что

$$\{E^{\mathscr{C}}f > 0\} = \left\{\sum_k fT^k = \infty\right\}.$$

V.6.3. ***Обобщение предложения*** **V.6.3.** Пусть T — субмарковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, для которого существует инвариантная ($f = fT$) функция f, удовлетворяющая условию $\{f > 0\} = E$, но не обязательно интегрируемая. Показать, что формула $gT' = f \cdot T(g/f)$ определяет марковский эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, имеющий ту же консервативную часть C и ту же σ-алгебру $\mathscr{C}$ инвариантных множеств, что и T (диссипативная часть D не обязательно пуста, когда f не принадлежит L^1). Вывести отсюда, что (1) $T1_C = 1_C$; (2) $gT = g$ на C тогда и только тогда, когда функция g/f является $\mathscr{C}$-измеримой на C.

Показать, что если $g, h \in L^1_+(f \cdot \Pi)$ и $\{h > 0\} = E$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty}$ п. н. $\left(\sum\limits_{k\leqslant n} T^k g \Big/ \sum\limits_{k\leqslant n} T^k h\right)$ существует на C и равен $E^{\mathscr{C}}(fg)/E^{\mathscr{C}}(fh)$ (в соответствии с упражнением V.6.2 этот результат справедлив и при более слабых условиях: $E^{\mathscr{C}}g < \infty$, $E^{\mathscr{C}}h < \infty$, $\{h > 0\} = E$). Вывести отсюда, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \text{п. н.} \frac{1}{n+1} \sum_{k\leqslant n} T^k g$$

существует и равен $E^{\mathscr{C}}(fg)/E^{\mathscr{C}}(f)$ на C, если $g \in L^1_+(f \cdot \Pi)$ (более общим образом, если $E^{\mathscr{C}}(fg) < \infty$); в частности, этот предел равен нулю на множестве $\{E^{\mathscr{C}}f = \infty\}$. Показать также, что предел этот существует в смысле сходимости в L^1 тогда и только тогда, когда

$$g = 0 \quad \text{на} \quad \{E^{\mathscr{C}}f = \infty\}.$$

V.6.4. Если T — консервативный эндоморфизм пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$, то всякая инвариантная относительно T положительная функция h определяется на множестве $\overline{F}$ ее значениями на множестве F (предложение V.6.1). Показать, что, обратно, если h — положительная конечная функция, определенная на множестве F и удовлетворяющая на F условию $h = {}^F Hh$, то продолжающая h на E функция $h' = {}^F Hh$ инвариантна относительно T; показать также, что функция h' конечна (заметить, что $\{h' = \infty\} \in \mathscr{C}$).

V. 6.5. Предложение V. 6.3 можно доказать непосредственно, используя лишь максимальную эргодическую теорему п. V. 5. Для доказательства того, что при выполнении условий этого предложения

$$\lim_{n \to \infty} \text{п. н.} \frac{1}{n+1} \sum_{k \leqslant n} T^k g = \frac{E^{\mathscr{C}}(fg)}{E^{\mathscr{C}}(f)}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant g \leqslant 1,$$

применить следующую схему (с помощью следствия предложения V. 5.1 этот результат можно распространить на функции g, для которых $\int |g| f < \infty$).

Показать, что функция

$$h = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k \leqslant n} T^k g$$

удовлетворяет условию $Th \leqslant h$ и, следовательно, $\mathscr{C}$-измерима ($0 \leqslant g \leqslant 1$). Используя лемму Фату, показать, далее, что $h \leqslant E^{\mathscr{C}}(fg)/E^{\mathscr{C}}(f)$. Для всякого $\varepsilon > 0$ положим $C_\varepsilon = \{h + \varepsilon < E^{\mathscr{C}}(fg)/E^{\mathscr{C}}(f)\}$. Применяя максимальную эргодическую теорему к оператору T' (определение T' см. в доказательстве предложения V. 6.3) и к функциям

$$\frac{E^{\mathscr{C}}(fg)}{E^{\mathscr{C}}(f)} 1_{C_\varepsilon} f, \quad (g + \varepsilon) 1_{C_\varepsilon} f,$$

показать, что

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{E^{\mathscr{C}}(fg)}{E^{\mathscr{C}}(f)} f \geqslant \int_{C_\varepsilon} (g + \varepsilon) f$$

и, следовательно, $\Pi(C_\varepsilon) = 0$. Вывести отсюда, что $h = E^{\mathscr{C}}(fg)/E^{\mathscr{C}}(f)$. Применение предыдущего рассуждения к функции $1 - g$ завершает доказательство.

V. 6.6. ***Обращение предложения* V. 6.3.** Показать, что для всякого субмарковского эндоморфизма T пространства $L^1(E, \mathscr{F}, \Pi)$ следующие два условия равносильны:

(а) существует функция $f \in L^1_+$, такая, что $fT = f$ и $\{f > 0\} = C$;

(б) для любой функции $h \in L^\infty$ последовательность

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k \leqslant n} T^k h \right\}$$

сходится п. н.

Вывести из предложения V. 6.3, что (а) $\Rightarrow$ (б). Для доказательства импликации (б) $\Rightarrow$ (а) воспользоваться результатами п. IV. 2; показать, что сходимость последовательности

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k\leqslant n} T^k 1_F\right\} \qquad (F \in \mathscr{F})$$

по вероятности влечет сходимость последовательности

$$\left\{\frac{1}{n+1}\sum_{k\leqslant n} 1T^n\right\}$$

в смысле ослабленной топологии в пространстве L^1, индуцированной на нем пространством L^∞, и что предел этой второй последовательности может быть взят в качестве функции f в (а).

V. 6.7. *Стационарные последовательности д. с. в.* Пусть θ — оператор сдвига, определенный на произведении пространств $(\Omega, \mathscr{A}) = (E, \mathscr{F})^N$ формулой

$$\theta(\{x_n, n \geqslant 0\}) = \{x'_n, n \geqslant 0\},$$

где $x'_n = x_{n+1}$, $n \geqslant 0$, и пусть $\{X_n, n \geqslant 0\}$ — последовательность координатных отображений пространства $(\Omega, \mathscr{A})$. Вероятность P на $(\Omega, \mathscr{A})$ называется *стационарной*, если $P \cdot \theta^{-1} = P$ на $\mathscr{A}$. Показать, что вероятность P на $(\Omega, \mathscr{A})$ стационарна тогда и только тогда, когда вероятностный закон, индуцированный „вектором" $\left(X_{n_1+h}, \ldots, X_{n_k+h}\right)$ на $(E, \mathscr{F})^k$, не зависит от h при любых $k \geqslant 1$ и $n_1, \ldots, n_k \in N$.

Обозначим через $\mathscr{I}$ σ-подалгебру σ-алгебры $\mathscr{A}$, состоящую из событий, инвариантных относительно θ (стационарных событий). Показать, что для всякой действительной измеримой функции f на $(E, \mathscr{F})$, удовлетворяющей условию $\int |f(X_0)|\, dP < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{0}^{n} f(X_k) = E^{\mathscr{I}}[f(X_0)]$$

в смысле сходимости п. н. и в смысле сходимости в пространстве $L^1(P)$.

Показать, что марковская случайная функция на $(\Omega, \mathscr{A})$ со стационарными переходными вероятностями P, построенная по способу, указанному в п. V. 2, стационарна в смысле данного выше определения тогда и только тогда, когда начальная вероятность μ_0 (вероятностный закон величины X_0) инвариантна относительно P (т. е. $\mu_0 P = \mu_0$).

ЛИТЕРАТУРА

Приводимый ниже краткий список литературы содержит некоторые важные книги и статьи, имеющие отношение к материалу, излагаемому в настоящей книге (как в основном тексте, так и в дополнениях).

Андерсен и Йессен (Andersen E. S., Jessen B.), On the introduction of measures in infinite product sets, *Danske Vid. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 25 (1946), № 4.

Аронсайн (Aronszain N.), Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 337—404. [Русский перевод: сб. *Математика*, 7 : 2 (1963), 67—130.]

Белл (Bell C. B.), On the structure of stochastic independence, *Illinois J. Math.*, 2 (1958), 415—424.

Биркгоф (Birkhoff G.), Теория структур, М., ИЛ, 1952.

Блан-Лапьер и Форте (Blanc-Lapierre A., Fortet R.), Théorie des fonctions aléatoires, Masson et Cie, Éd., Paris, 1953.

Блекуэлл (Blackwell D.), Idempotent Markov chains, *Ann. of Math.*, 43 (1942), 560—567.

— On a class of probability spaces, Proc. of the Third Berkeley Symp. on Math., Stat. and Prob., Vol. II, Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, 1956, 1—6.

Бохнер (Bochner S.), Harmonic Analysis and the theory of Probability, Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, 1955.

Брюнель (Brunel A.), Sur un lemme ergodique voisin du lemme de E. Hopf, *C. R.*, **256** (1963), 5481—5484.

Бурбаки (Bourbaki N.), Éléments de Mathématique, Hermann et Cie, Paris. [Частично переведено на русский язык.]

Буркхолдер (Burkholder D.), Sufficiency in the undominated case, *Ann. Math. Stat.*, 32 (1961), 1191—1200.

Варадарайан (Varadarajan V. S.), Weak convergence of measures on separable metric spaces, *Sankhyā*, **19** (1958), 15—22.

Гарсиа (Garsia A. M.), A simple proof of E. Hopf's maximal ergodic theorem, *J. Math. Mech.*, 14 (1965), 381—382.

Гельфанд И. М., Обобщенные случайные процессы, *ДАН СССР*, **100** (1955), 853—856.

Гельфанд И. М. и Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. (Обобщенные функции, вып. 4), М., Физматгиз, 1961.

Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М., изд-во «Наука», 1965.

Гнеденко Б. В. и Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.—Л., Гостехиздат, 1949.

Гротендик (Grothendieck A.), Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$, *Canad. J. Math.*, 5 (1953), 129—173.

Гуревич (Hurewicz W.), Ergodic theorem without invariant measure, *Ann. of Math.*, 45 (1944), 192—206.

Давенпорт и Рут (Davenport W. B., Root W. L.), Введение в теорию случайных сигналов и шумов, М., ИЛ, 1960.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J. T.), Линейные операторы, т. 1, ИЛ, 1962; т. 2, изд-во «Мир», 1966.

Дуб (Doob J. L.), Вероятностные процессы, М., ИЛ, 1956.

Дубинс (Dubins L. E.), Rises and upcrossings of nonnegative martingales, *Illinois J. Math.*, **6** (1962), 226—241.

Дынкин Е. Б., Основания теории марковских процессов, М., Физматгиз, 1959.

— Марковские процессы, М., Физматгиз, 1963.

Дьедонне (Dieudonné J.), Sur le théorème de Radon—Nikodym (III), *Ann. Univ. Grenoble*, 23 (1948), 25—53.

— Sur le théorème de Jessen, *Fund. Math.*, 37 (1950), 242—248.

— Sur les espaces de Köthe, *J. Analyse Math.*, 1 (1951), 81—115.

Иосида и Какутани (Yosida K., Kakutani S.), Operator-theoretical treatment of Markov's process and mean ergodic theorem, *Ann. of Math.*, 42 (1941), 188—228.

Иржина (Jirina M.), On regular conditional probabilities, *Czech. Math. J.*, 84 (1959), 445—451.

Ито (Ito K.), Multiple Wiener Integral, *J. Math. Soc. Japan*, 3 (1951), 157—169.

— Stationary Random Distributions, *Kyoto Sc. Rep.*, 28A (1954), 209—223.

Ито и Маккин (Ito K., McKean H. P.), Диффузионные процессы и их траектории, М., изд-во «Мир», 1968.

Какутани (Kakutani S.), Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Ann. of Math.*, 42 (1941), 944—1024.

— On the equivalence of infinite product measures, *Ann. of Math.*, 49 (1948), 214—224.

Каппос (Kappos D. A.), Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und Raüme, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 24, Springer Verlag, Berlin, 1960.

Карунен (Karhunen K.), Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 37 (1947).

Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936.

— Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, *Бюлл. МГУ*, 2 (1941), 6, 1—40.

— Algèbres de Boole métriques complètes, VI Zjazd Mat. Pols. Warsaw, 1948, 21—30.

Крамер (Cramér H.), Математические методы статистики, М., ИЛ, 1948.

Крикеберг (Krickeberg K.), Stochastische Konvergenz von Semi-martingales, *Math. Zeit.*, **66** (1957), 470—486.

Леви (Levy P.), Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1937.

— Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948.

— Wiener's random function and other Laplacian random functions, Proc. of the 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, 1951, 171—187.

Ле Кам (Le Cam L.), Convergence in distribution of stochastic processes, *Univ. Calif. Publ. Stat.*, 2 (1957), № 11, 207—236.

Леман (Lehmann E. L.), Проверка статистических гипотез, М., изд-во «Наука», 1964.

Лоэв (Loève M.), Fonctions aléatoires du second ordre, *Rev. Scient.*, 84 (1946), 195—206.

— Теория вероятностей, М., ИЛ, 1962.

Марчевский (Marczewski E.), On compact measures, *Fund. Math.*, 40 (1953), 113—124.

Марчевский и Рылл-Нарджевский (Ryll-Nardzewski C.), Projections in abstract sets, *Fund. Math.*, 40 (1953), 160—164.

Махарам (Maharam D.), On a theorem of von Neumann, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 987—994.

Мейе (Meyer P. A.), Théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités, Séminaire de Théorie du Potentiel, 1960—1961, Paris.

— A decomposition theorem for supermartingales, *Illinois J. Math.*, 6 (1962), 193—205.

Мой (Moy S.), Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces, *Pacific J. Math.*, 4 (1954), 47—63.

Мурье (Mourier E.), Éléments aléatoires à valeurs dans un espace de Banach, Thèse de doctorat, Paris, 1952; *Ann. Inst. H. Poincaré*, 13 (1953), 161—244.

Невё (Neveu J.), Théorie des semi-groupes de Markov, *Univ. Calif. Publ. Stat.*, 2 (1958), 14, 319—394.

— Sur le théorème ergodique ponctuel, *C. R.*, 252 (1961), 1554—1556.

Орей (Orey S.), Recurrent Markov chains, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 805—827.

Парзен (Parzen E.), Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco, 1962.

Прохоров Ю. В., Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, *Теория вероятн. и ее примен.*, I (1956), 177—238.

Райс (Rice S.), Mathematical analysis of random noise, *Bell System Tech. J.*, 23 (1944), 282—332; 24 (1945), 46—156.

Реньи (Renyi A.), A new axiomatic construction of probability, *Mag. Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl.*, 4 (1954), 369—427.

— On mixing sequences of sets, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 9 (1958), 215—228.

Рисс и Надь (Riesz F., Nagy B. Sz.), Лекции по функциональному анализу, М., ИЛ, 1954.
Сакс (Saks S.), Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.
Серегин Л. В., Условия непрерывности вероятностных процессов, *Теория вероятн. и ее примен.*, 6 (1961), 3—30.
Сикорский (Sikorski R.), Булевы алгебры, изд-во «Мир», 1968.
Снелл (Snell J. L.), Applications of martingale system theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73 (1952), 293—312.
Спицер (Spitzer F.), Принципы случайного блуждания, изд-во «Мир», 1968.
Стоун (Stone M. H.), Linear Transformations in Hilbert Space, *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. 15, Providence, R. I., 1932.
— The theory of representations for Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40 (1936), 37—111.
Тортра (Tortrat A.), Calcul des Probabilités, Masson et Cie, Ed. Paris, 1963.
Тулча Ч. И. (Tulcea C. I.), Mesures dans les espaces produits, *Atti Acad. Naz. Lincei Rend.*, 7 (1949), 208—211.
Тулча А. И. и Тулча Ч. И. (Tulcea A. I., Tulcea C. I.), On the lifting property, I, *J. Math. Anal. Appl.*, 3 (1961), 537—546, II, *J. Math. Mech.*, 11 (1962), 773—795.
— Abstract ergodic theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107 (1963), 107—124.
Фелдман (Feldman J.), Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 699—708.
— On the measurability of stochastic processes in product spaces, *Pacific J. Math.*, 14 (1962), 113—120.
— Integral kernels and invariant measures for Markoff transition functions, *Ann. Math. Stat.*. 36 (1965), 517—523.
Феллер (Feller W.), Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, 2, М., изд-во «Мир», 1967.
Форте и Мурье (Fortet R., Mourier E.), Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans les espaces de Banach, *Stud. Math.*, 15 (1955), 62—79.
Халмош (Halmos P. R.), Теория меры, М., ИЛ, 1953.
Халмош и Сэвидж (Halmos P. R., Savage L. J.), Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, *Ann. Math. Stat.*, 20 (1949), 225—241.
Хант (Hunt G. A.), Théorie des Martingales, Cours multigraphié, Faculté des Sciences d'Orsay, 1963.
Харрис (Harris T. E.), The existence of stationary measures for certain Markov Processes, Third Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Vol. II, Univ. of Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, 1956, 113—124.
Хелмс (Helms L. L.), Mean convergence of martingales, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87 (1958), 439—446.
Хида (Hida T.), Canonical representations of Gaussian processes and their applications, *Mem. Coll. Sci. Kyoto*, 23 (1960), 109—155.
Хилле и Филлипс (Hille E., Phillips R. S.), Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, 1962.

Хопф (Hopf E.), The general temporally discrete Markov process, *J. Rat. Mech. and Anal.*, 3 (1954), 13—45.

Хьюит и Сэвидж (Hewitt E., Savage L. J.), Symmetric measures on Cartesian products, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80 (1955), 470—501.

Чакон (Chacon R. V.), On the ergodic theorem without assumption of positivity, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 (1961) 186—190.

Чакон и Орнстейн (Chacon R. V., Ornstein D.), A general ergodic theorem, *Illinois J. Math.*, 4 (1960), 153—160.

Чжун (Chung K. L.), Однородные цепи Маркова, М., изд-во «Мир», 1964.

Чжоу (Chow Y. S.), A martingale inequality and the law of large numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 (1960), 107—111.

Шерман (Sherman S.), On denumerably independent families of Borel fields, *Amer. J. Math.*, 72 (1950), 612—614.

Шидак (Sidak Z.), On relations between strict-sense and wide-sense conditional expectations, *Теория вероятностей и ее применение*, 2 (1957), 283—288.

Шоке (Choquet G.), Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, 5 (1953), 131—295.

— Forme abstraite du théorème de capacitabilité, *Ann. Inst. Fourier*, 9 (1959), 83—89.

— Topology, Academic Press, New York, 1966.

Эберлейн (Eberlein W. F.), Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 217—240.

Якобс (Jacobs K.), Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Vol. 29, Springer Verlag, Berlin, 1960.

— Lecture Notes on Ergodic Theory, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1963.

УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная непрерывность 158
Абсолютно измеримое множество 37
Адаптированность 144
Аддитивность 27
— сильная 27
Аппроксимационное свойство 95, 97, 98
Атом 37

Банахова алгебра 91
Борелевское множество 51, 96
— поле 30
Броуновское движение 144
Булева алгебра 17
— — метрическая 29
— σ-алгебра 30
— — порожденная 22
— — сепарабельная 32
— — счетного типа 32
— полуалгебра 48
— сумма 19
Булево произведение 19
Бэровское множество 96

Вероятности эквивалентные 161
Вероятностное пространство 33
— — атомическое 37
— — индуцированное отображением 54
— — каноническое 123
— — полное 34
Вероятность 26
— внешняя 35
— внутренняя 35
— переходная 109
— регулярная 100, 103
— следовая 38
— стационарная 298
— условная относительно множества 38

Время ожидания 149

Гауссова мера 126
Гауссово пространство 185

Д. с. в. 55, 58
— — — измеримая 60
— — — интегрируемая 67
— — — квазиинтегрируемая 67
— — — конечная 58
— — — положительная 58
— — — определенная почти всюду 74
Д. с. ф. 126
— — — сепарабельная 127
— — — полученная остановкой 201
— — — эквивалентные 130

Емкость 45

Закон больших чисел 216
— — — усиленный 204
— — — — для последовательностей симметрично зависимых д. с. в. 204
— нуля — единицы 182

Измеримое отображение 54
— пространство 30
Инвариантные множества 275
Индивидуальная эргодическая теорема 261, 283
Индикатор 56
Интеграл 62
Испытание 20

Класс эквивалентных д. с. в. 72
Компактный класс 48
Консервативная часть 275
Координата 105
Критическая область 116
— функция 116

Лемма Бореля — Кантелли 183
— Фату — Лебега 68
— — — обобщенная 175

Максимальная эргодическая теорема 272
Марковская зависимость 184
— матрица 282
Марковский оператор 263
— процесс 236
— — со стационарными переходными вероятностями 243
Марковское свойство 237, 245
— семейство 185
Мартингал 186
Математическое ожидание 62
Мера 51
— векторная 172
— гауссова 126
— ограниченная 151
— положительная 151
Меры взаимно сингулярные 155
Множество сходимости 60
Момент остановки 144
Монотонность 27
Монотонный класс 31
— — порожденный 31

Независимость 179, 181
Неопределенный интеграл 69
Непрерывность в среднем порядка p 143
— в $\varnothing$ относительно монотонных последовательностей 27
— относительно монотонных последовательностей 28
— — сходимости последовательностей 33
— по вероятности 136
— п. н. 136
Неравенство Гёльдера 87
— Минковского 87
— Шварца 87
Нулевое множество 34

Объединение 16
Оператор сдвига 243
Операция Суслина 25, 55
Отображение биективное 55
— инъективное 55
— сюръективное 55
Оценка 116

Пересечение 16
П. н. 71
Подвижный разрыв 137
Полная вариация 154
— структура 90
Полный класс случайных стратегий 115
Польское пространство 98
Полуаддитивность 27
Пополнение вероятностного пространства 35
Потенциал функции 282
Потеря 115
— средняя 115
Почти всюду 71
— замкнутость 251
— наверное 71
Предпочтение 115
Предпочтительнее 115
Проверка гипотезы 115
Продолжение вероятности 70
— разбиения 23
Произведение 105, 116
— вероятностных пространств 113
— измеримых пространств 106
— σ-алгебр 106
Пространство Рисса 92
— стоуновского представления 26
— элементарных событий 33
Прямоугольник 105, 117
— измеримый 105

Равномерная абсолютная непрерывность 80

— интегрируемость 79
— — на бесконечности 85
Разбиение 22
Разложение Жордана — Хана 151
— Рисса 282
Разность 17
— симметрическая 17
Реализация 126
Регуляризация субмартингала 199
Риск 115

С. в. 55, 62
— — со значениями в банаховом пространстве 91
— — — — — метрическом пространстве 62
Сепаранта 127
Сечение 105, 117
Симметрично зависимые д. с. в. 204
Симметричный вероятностный закон 225
След 38
Случайная величина асимптотическая 240
— — действительная 58
— — — ступенчатая 55
— — стационарная 247
— стратегия 115
— функция гауссова 143
— — действительная 126
Событие 16
— асимптотическое 182
— дополнительное 16
— достоверное 16
— невозможное 16
— остаточное 182
— предыдущее 144, 145
— стационарное 246
— элементарное 20
События взаимно исключающие 17
— непересекающиеся 17
— эквивалентные 19
С. с. 115
— — байесовская 115
— — допустимая 115
Стационарность 246, 247
Стоуновское представление 26
Стратегия 115
Строго марковское свойство 246
Структура 57
— линейная 92
— полная 90
Субмарковская матрица 282
Субмарковский оператор 262
Субмарковское ядро 267
Субмартингал 186
Сумма 17
Супермартингал 186
Суслинская операция 25
Сходимость в среднем 81
— — — порядка p 88
— всюду 60
— по вероятности 76
— почти наверное 74
— существенно равномерная 88

Теорема Биркгофа 293
— Витали — Хана — Сакса 169
— Дёблина 286
— Егорова 78
— Жордана — Хана 151
— Ионеску Тулчи 228
— Лебега 156
— Лузина 104
— о емкостях 45
— — продолжении вероятности 43
— Радона — Никодима 159
— Фубини 113
— Хопфа 291
— Чакона — Орнстейна 289
— эргодическая 254
— — индивидуальная 261, 283
— — максимальная 272
Точка разрыва фиксированная 136
Траектория 126

Убыток 115
Условие Дёблина 260
Условная независимость 184
Условное математическое ожидание 173

Фильтр 26
— максимальный 26
Функция распределения 50
— регулярная относительно эндоморфизма 282
— суперрегулярная относительно эндоморфизма 282
— характеристическая 221

Характеристическая функция 221

Центрированность 207
Цилиндр 117

Число пересечений сверху вниз 191

Эндоморфизм квазикомпактный 252
— компактный 252
Эргодическая теорема 254, 286, 289

σ-аддитивный класс множеств 38
σ-алгебра достаточная 178
— индуцированная отображением 54
— порожденная 31
σ-полуаддитивность 29

ОГЛАВЛЕНИЕ

От переводчика 5
Предисловие 7
Введение 11
Список обозначений и сокращений 13

Глава I. Вероятностные пространства 15

I.1. События 16
I.2. Испытания и элементарные события 20
I.3. Вероятности 26
I.4. Вероятностные пространства 30
I.5. Продолжение вероятности 38
I.6. Булевы полуалгебры, компактные классы и функции распределения на действительной прямой 46

Глава II. Интегрирование случайных величин 53

II.1. Измеримые отображения 53
II.2. Действительные случайные величины 55
II.3. Математическое ожидание действительных случайных величин 62
II.4. Сходимость почти наверное и сходимость по вероятности 71
II.5. Равномерная интегрируемость и сходимость в среднем 79
II.6. Пространства L_p 85
*II.7. Интегрирование на топологических пространствах 92

Глава III. Произведения пространств и случайные функции 105

III.1. Произведение двух измеримых пространств 105
III.2. Переходные вероятности и произведения вероятностей 109
III.3. Бесконечные произведения измеримых пространств и канонические вероятностные пространства, связанные со случайными функциями 116
III.4. Сепарабельность и измеримость случайных функций 126
III.5. Непрерывность действительных случайных функций 136
III.6. Моменты остановки 144

Глава IV. Условные математические ожидания и мартингалы 151

IV.1. Меры 151
IV.2. Двойственность пространств L_p и ослабленная топология в пространстве L_1 163

IV.3. Условные математические ожидания 173
IV.4. Независимость 179
IV.5. Теория мартингалов 186
IV.6. Центрированные последовательности случайных величин 207
IV.7. Последовательности независимых случайных величин 216

Глава V. Эргодическая теория и марковские процессы 227

V.1. Теорема Ионеску Тулчи и теорема о произведении пространств 227
V.2. Построение канонических марковских процессов (дискретное время) 236
V.3. Равномерная эргодическая теорема 251
V.4. Субмарковские операторы 261
V.5. Эргодическое разложение 272
V.6. Индивидуальная эргодическая теорема 283

Литература 299

Указатель 304

Оглавление 308

Ж. Невё

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редактор *В. И. Авербух*
Художник *В. М. Новоселова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Н. А. Турсукова*
Корректор *Л. А. Брычкова*

Сдано в производство 25/VII 1968 г.
Подписано к печати 16/I 1969 г.
Бумага тип. № 3 84×108$^1/_{32}$=4,88 бум. л.
16,38 усл. печ. л.
Уч. изд. л. 13,87. Изд. № 1/4752
Цена 1 р. 14 к. Зак. 1368
Темплан 1968 г. изд-ва «Мир», пор. № 1'

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29