

Лекции
по теории
унитарной
симметрии
элементарных
частиц

НГУЕН ВАН ХЪУ

НГУЕН ВАН ХЬЕУ

**Лекции
по теории
унитарной
симметрии
элементарных
частиц**



**АТОМИЗДАТ
МОСКВА 1967**

Книга представляет собой курс лекций, прочитанных автором в Объединенном институте ядерных исследований (г. Дубна). В ней приведено систематизированное изложение теории изотопической инвариантности, унитарной симметрии и симметрии $SU(6)$ элементарных частиц и их взаимодействий: сильных, слабых и электромагнитных. Дается также обзор составных моделей элементарных частиц, и предсказания теории сравниваются с опытом. Обсуждены возможности дальнейшей экспериментальной проверки следствий теории.

Книга рассчитана на физиков-экспериментаторов и теоретиков, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в теории элементарных частиц.

Нгуен Ван Хьеу
ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ УНИТАРНОЙ СИММЕТРИИ
ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Редактор **З. Г. Толстикова**
Художественный редактор **А. С. Александров**
Технический редактор **Н. А. Власова**
Корректор **Л. А. Ушкарева**

Сдано в набор 13.II. 1967 г. Подписано в печать 24.V. 1967 г. Бумага $84 \times 108/32$
типографская № 1 Усл. печ. л. 18,06 Уч. изд. л. 17,11 Тираж 4000 экз.
Заказ изд. 1727

Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7
Зак. тип. 809 Цена 1 р. 26 коп.

Экспериментальная типография ВНИИПП
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва И-51, Цветной бульвар, 30.

Предисловие

Теория симметрии элементарных частиц, получившая бурное развитие в последнее время, представляет собой важное направление исследований физики высоких энергий. Начало этой теории было положено еще в тридцатых годах XX века при изучении структуры легких ядер и ядерных сил между нуклонами. На опыте было обнаружено, что энергии связи так называемых зеркальных ядер H^3 и He^3 , C^{13} и N^{13} и т. д. одинаковы (после исключения кулоновских сил). Это явление и много других данных о состояниях зеркальных ядер привели к гипотезе о зарядовой симметрии, согласно которой ядерные силы между двумя протонами и между двумя нейтронами одинаковы.

Для объяснения экспериментальных данных по нуклон-нуклонному рассеянию была выдвинута гипотеза о зарядовой независимости, утверждающая, что одинаковы не только ядерные силы между двумя протонами и двумя нейтронами, но и между протоном и нейтроном. Согласно этой гипотезе протон и нейтрон ведут себя во всех процессах как два различных состояния одной и той же частицы — нуклона, и заряд нуклона играет такую же роль, что и его спин при отсутствии LS -связи.

Чтобы различить эти состояния нуклона, было введено понятие изотопического спина, по аналогии со спином, и зарядовую независимость ядерных сил рассматривают как следствие сохранения изотопического спина в ядерных взаимодействиях. Для описания сохранения изотопического спина, по аналогии с сохранением момента в квантовой механике, был применен аппарат теории групп.

В связи с тем что число обнаруженных элементарных частиц и резонансов, т. е. число известных изотопических мультиплетов возрастает, возникла необходимость обобщить теорию изотопической инвариантности. В последнее время делаются различные попытки построить теории высшей симметрии. Важным достижением в этих исследованиях является открытие унитарной симметрии $SU(3)$, сделанное Гелл-Манном и Нееманом. Многие предсказания этой симметрии были подтверждены опытом. В настоящее время широко обсуждаются возможности обобщений унитарной симметрии: симметрии $SU(6)$, $SL(6)$, $U(6, 6)$, алгебры токов и т. д.

Благодаря применению теории групп к изучению элементарных частиц теория симметрии быстро развивалась. Она достигла заметных успехов. Всем физикам, работающим в области физики высоких энергий, нельзя не познакомиться с этими достижениями. Однако в литературе до сих пор отсутствовали монографии, посвященные систематизированному изложению результатов исследований в этой важной области теории элементарных частиц. Настоящая книга известного вьетнамского ученого Нгуен Ван Хьеу, который сам внес большой вклад в развитие теории симметрии, заполняет этот пробел.

Основная часть книги посвящена изучению классификации элементарных частиц в симметриях $SU(2)$, $SU(3)$, $SU(6)$, а также следствий этих симметрий в процессах сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий.

Первая глава носит вводный характер, в ней автор изложил основные понятия теории групп и теории представлений групп. Книга написана на высоком теоретическом уровне. Она, несомненно, будет полезна всем начинающим физикам-теоретикам, экспериментаторам, а также всем, кто желает познакомиться с теорией симметрии элементарных частиц.

Академик Н. Н. БОГОЛЮБОВ

От автора

Настоящая книга представляет собой курс лекций, прочитанных мною в Объединенном институте ядерных исследований. Цель этих лекций — дать систематизированное изложение теории унитарной симметрии элементарных частиц и помочь физикам-экспериментаторам и начинающим физикам-теоретикам овладеть техникой этой теории.

В гл. 1 изложены основные понятия теории групп и теории представлений групп Ли, и в частности представлений группы $SU(n)$. Результаты по изучению представлений группы $SU(n)$ используются во всех последующих главах.

Унитарная симметрия является обобщением теории изотопической инвариантности. Поэтому для понимания унитарной симметрии необходимо также кратко изложить теорию изотопической инвариантности сильных взаимодействий, а также изотопические свойства электромагнитных и слабых взаимодействий. Это рассмотрено в гл. 2.

При изучении теории изотопической инвариантности часто применяют известный аппарат теории сложения моментов в квантовой механике с использованием таблиц коэффициентов Клебша — Гордана. Для изучения высших симметрий $SU(3)$ и $SU(6)$ этот метод неудобен, поскольку в этих случаях каждое состояние характеризуется многими квантовыми числами, а таблицы коэффициентов Клебша — Гордана весьма сложны. Существует, однако, более простой метод, называемый тензорным методом, при помощи которого можно получить все соотношения между амплитудами процессов, не прибегая к использованию коэффициентов Клебша — Гордана. Этот

метод мы будем применять систематически при изучении симметрий $SU(2)$, $SU(3)$ и $SU(6)$.

Теория унитарной симметрии и ее применение к изучению сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий изложены в гл. 3—5. По мере возможности предсказания теории унитарной симметрии сравниваются с опытом. Часть гл. 3 посвящена изучению составных моделей элементарных частиц. В настоящее время предложено много различных составных моделей с унитарной симметрией. Они могут быть разделены на три класса: модель кварков с дробными зарядами, модели с четырьмя фундаментальными частицами, образующими триплет и синглет, и модели с несколькими триплетами. В моделях двух последних классов нет необходимости вводить дробные заряды. Все эти модели кратко рассматриваются в гл. 3.

Гл. 6 (последняя) посвящена изучению возможностей классификации известных барионов и мезонов в рамках симметрии $SU(6)$, а также изучению электромагнитных свойств барионов и мезонов в этой симметрии. В частности, дается вывод отношения магнитных моментов протона и нейтрона. Кратко рассмотрена также связь между симметрией $SU(6)$ и моделями составных частиц. Отметим, что в рамках модели кварков и подобных моделях без дробных зарядов можно получить многие массовые соотношения, хорошо согласующиеся с опытом. Читатели, интересующиеся массовыми формулами в модели кварков, могут найти полное изложение этой проблемы в лекциях Н. Н. Боголюбова *. В настоящее время обнаружены многие мезонные резонансы 2^+ , 1^+ и 0^+ . Возможности классификации этих резонансов в симметрии $SU(6)$ также рассматриваются подробно.

В конце книги приводятся таблицы мезонных и барионных резонансов с указанием всех их характеристик.

В заключение мне хочется выразить глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за его постоянное внимание и весьма ценные советы, а также Р. М. Лебедеву, М. А. Маркову, М. Г. Мещерякову, Я. А. Смородинскому и А. Н. Тавхелидзе за интерес к работе и поддержку. Я благодарен О. Г. Бокову, Л. Енковски, В. В. Кухтину и Нгуен Тьен Нгуен за помощь в работе над рукописью.

* Н. Н. Боголюбов. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев., «Наукова думка», 1966.

Группы и представления групп

§ 1. Основные понятия из теории групп

1.1. Определение группы

Группой называется всякое множество G элементов, в котором определена групповая операция (называемая также групповым действием, или групповым умножением), ставящая в соответствие каждой паре элементов a и b из множества G некоторый элемент (ab) из G . Эта групповая операция должна удовлетворять следующим аксиомам.

1. *Ассоциативность.* Для любых трех элементов a , b и c из множества G имеет место соотношение

$$(ab)c = a(bc).$$

2. *Существование левой единицы.* В множестве G имеется такой элемент e , что $ea = a$ для любого элемента a из множества G .

3. *Существование левого обратного.* Для любого элемента a из множества G существует такой элемент a^{-1} , что

$$a^{-1}a = e.$$

Можно показать [1, гл. 1; 2, гл. 1], что левая единица является также правой единицей ($ae = a$), а левый обратный элемент — одновременно и правым обратным ($aa^{-1} = e$).

Если множество G конечно, т. е. содержит конечное число элементов, то группа G называется конечной, а число элементов группы — ее порядком. В противном случае группа G называется бесконечной.

Если для любых элементов a и b из группы G выполняется равенство $ab = ba$, то группа называется комму-

тативной, или абелевой. В этом случае вместо произведения ab пишется сумма $a + b$, тогда групповая операция называется сложением и обратный элемент a^{-1} обозначается a , а единичный элемент — 0.

Примеры

1. Совокупность всех перестановок n целых чисел $1, 2 \dots n$ образует группу. Пусть g_1 и g_2 — некоторые перестановки. Произведение $g_1 g_2$ есть перестановка, которая получается в результате последовательного применения сначала перестановки g_2 , а затем перестановки g_1 . Эта группа конечна и называется группой перестановок или симметрической группой. Ее порядок равен $n!$

2. Совокупность всех действительных чисел образует коммутативную группу, причем групповой операцией служит обычное сложение чисел. Мы говорим при этом, что действительные числа образуют группу относительно сложения. Аналогично векторы в n -мерном пространстве образуют коммутативную группу относительно векторного сложения. Совокупность всех трансляций в n -мерном векторном пространстве

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = x_\alpha + a_\alpha \quad (1)$$

также образует коммутативную группу, причем произведением двух трансляций на векторы a_α и b_α является трансляция на вектор $a_\alpha + b_\alpha$.

3. Совокупность всех ортогональных вещественных матриц $n \times n$, т. е. матриц O с вещественными элементами $O_{\alpha\beta}$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq n$), удовлетворяющими условиям

$$\left. \begin{aligned} O_{\alpha\beta} O_{\beta\gamma}^T &= O_{\alpha\beta} O_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\gamma}; \\ O_{\alpha\beta}^T O_{\beta\gamma} &= O_{\beta\alpha} O_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

или в матричном виде

$$OO^T = I; \quad O^T O = I, \quad (2')$$

где I — единичная матрица, образует группу относительно умножения матриц. Действительно, пусть O_1 и O_2 — ортогональные матрицы. Тогда произведение $O_1 O_2$ и обратные матрицы O_1^{-1} , O_2^{-1} также ортогональны. Такая группа называется ортогональной группой $O(n)$.

Рассмотрим теперь связь между группой $O(n)$ и группой вращений в некотором вещественном n -мерном евкли-

довом пространстве E . Пусть x и y — два вектора в пространстве E с компонентами x_α и y_α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Их скалярное произведение определяется соотношением

$$(xy) = x_\alpha y_\alpha, \quad (3)$$

а длина вектора x по определению равна

$$\|x\| = \sqrt{(xx)} = \sqrt{x_\alpha x_\alpha}. \quad (4)$$

Вращением в пространстве E называется любое линейное преобразование векторов этого пространства

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = O_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (5)$$

которое сохраняет длины векторов и, следовательно, скалярные произведения любых двух векторов. Эти вращения образуют группу, причем произведение $g_1 g_2$ двух вращений g_1 и g_2 есть вращение, которое получается в результате последовательного действия вращений g_2 и g_1 . Можно показать [3], что матричные элементы $O_{\alpha\beta}$ вращения (5) удовлетворяют условию (2) или (2'), т. е. представляют собой матричные элементы ортогональных матриц. Если O_1 и O_2 — матрицы вращений g_1 и g_2 , то матрицей вращения $g_1 g_2$ является произведение $O_1 O_2$. Таким образом, группа вращений в вещественном n -мерном пространстве отождествляется с ортогональной группой $O(n)$.

4. Совокупность унитарных матриц $n \times n$, т. е. матриц с комплексными элементами $U_{\alpha\beta}$, $1 \leq (\alpha, \beta) \leq n$, удовлетворяющих условиям

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha\beta} U_{\beta\gamma}^\dagger &= U_{\alpha\beta} U_{\gamma\beta}^* = \delta_{\alpha\gamma}; \\ U_{\alpha\beta}^\dagger U_{\beta\gamma} &= U_{\beta\alpha}^* U_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

или в матричном виде

$$UU^\dagger = I; \quad U^\dagger U = I, \quad (6')$$

образует группу относительно умножения матриц. Если матрицы U_1 и U_2 унитарны, то обратные U_1^{-1} , U_2^{-1} и произведение $U_1 U_2$ также унитарны. Эта группа называется унитарной группой $U(n)$.

Рассмотрим теперь связь между группой $U(n)$ и группой линейных преобразований в комплексном n -мерном векторном пространстве E , в котором скалярное произ-

ведение двух векторов x и y с компонентами x_α и y_α , $1 \leq \alpha \leq n$, определяется следующим образом:

$$(xy) = x_\alpha^* y_\alpha = (yx)^*, \quad (7)$$

а норма вектора x равна

$$\|x\| = \sqrt{(xx)} = \sqrt{|x_\alpha|^2}. \quad (8)$$

Линейные преобразования в данном комплексном пространстве

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = U_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (9)$$

сохраняющие норму (2) и, следовательно, скалярное произведение (7), выражаются унитарными матрицами [3]. Они образуют группу унитарных преобразований, или унитарную группу $U(n)$.

5. Совокупность всех невырожденных линейных преобразований (с ненулевыми определителями) в комплексном n -мерном векторном пространстве

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = A_{\alpha\beta} x_\beta, \quad (10)$$

т. е. совокупность всех несобственных матриц $n \times n$, для которых существуют обратные, образует группу, называемую однородной линейной группой $GL(n)$.

6. Унимодулярные линейные преобразования в комплексном n -мерном векторном пространстве, т. е. преобразования вида (10) с определителем, равным 1, или, что то же самое, матрицы A с единичным определителем

$$\det A = 1, \quad (11)$$

образуют группу, так как

$$\det(A_1 A_2) = (\det A_1) (\det A_2),$$

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Она называется унимодулярной группой $SL(n)$.

7. Унитарные унимодулярные преобразования в комплексном n -мерном векторном пространстве, или, что то же самое, унитарные унимодулярные матрицы $n \times n$

$$U^+ U = U U^+ = I; \quad \det U = 1, \quad (12)$$

образуют так называемую унитарную унимодулярную группу $SU(n)$.

8. В вещественном четырехмерном пространстве Минковского со скалярным произведением

$$(xy) = g_{\alpha\beta} x_{\alpha} y_{\beta}, \quad (13)$$

где

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1; & \alpha = \beta = 0, \\ -1; & \alpha = \beta = 1, 2, 3, \\ 0; & \alpha \neq \beta, \end{cases} \quad (14)$$

и нормой $\|x\|$, определяемой соотношением

$$\|x\|^2 = (xx) = g_{\alpha\beta} x_{\alpha} x_{\beta}, \quad (15)$$

линейные преобразования

$$x_{\alpha} \rightarrow x'_{\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} x_{\beta}, \quad (16)$$

сохраняющие норму (15) и, следовательно, скалярное произведение (13), образуют группу. Эта группа называется однородной группой Лоренца. Если обозначить λ матрицу преобразования (16), а G — матрицу с элементами (14), то из условия сохранения скалярного произведения (13) следует, что λ удовлетворяет соотношению

$$\lambda^T G \lambda = G. \quad (17)$$

Рассмотрим более общие преобразования пространства Минковского:

$$x_{\alpha} = x'_{\alpha} = a_{\alpha} + \lambda_{\alpha\beta} x_{\beta}. \quad (18)$$

Каждое такое преобразование, обозначаемое $\{a, \lambda\}$, есть комбинация однородного преобразования Лоренца (16) и трансляции (1). Эти преобразования образуют так называемую неоднородную группу Лоренца, или группу Пуанкаре. Можно показать, что групповая операция для этой группы дается правилом

$$\{a_1, \lambda_1\} \{a_2, \lambda_2\} = \{a_1 + \lambda_1 a_2, \lambda_1 \lambda_2\}, \quad (19)$$

а обратный преобразованию $\{a, \lambda\}$ элемент равен

$$\{a, \lambda\}^{-1} = \{-\lambda^{-1} a, \lambda^{-1}\}. \quad (20)$$

1.2. Подгруппы

Множество H элементов некоторой группы G называется ее подгруппой, если оно является группой в силу того же группового умножения, которое действует в груп-

ле G . Очевидно, что множество H представляет собой подгруппу группы G в том и только в том случае, когда наряду с любыми двумя элементами a и b оно содержит также произведение ab и обратный элемент a^{-1} (или b^{-1}). Символически мы пишем: $ab \in H, a^{-1} \in H, b^{-1} \in H$, если $a \in H, b \in H$ или $HH \in H, H^{-1} = H$.

Примеры

1. Сама группа G и ее специальная подгруппа, состоящая из одного единичного элемента e , являются тривиальными подгруппами группы G .

2. Группа целых чисел представляет собой подгруппу группы действительных чисел.

3. Группа вращений вокруг некоторой оси является подгруппой группы вращений в трехмерном пространстве.

4. Рассмотрим ортогональные (или унитарные) преобразования в вещественном (комплексном) n -мерном векторном пространстве со скалярным произведением (3) [или (7) соответственно], оставляющие неизменными последние $n - m$ компонент любого вектора, т. е. ортогональные (унитарные) матрицы вида

$$\left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \\ O_{\alpha\beta} & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & 0 & \dots & 0 & \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 1 \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ & 0 & & & 1 \end{array} \right) \quad \text{или} \quad \left(\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & \\ U_{\alpha\beta} & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & \cdot & & & \\ & 0 & \dots & 0 & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & \\ 0 & \cdot & & 1 & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & 0 & & \cdot & \\ \cdot & & & & 1 \end{array} \right)$$

элементы $O_{\alpha\beta}$ ($U_{\alpha\beta}$) которых равны единице, если $\alpha = \beta > m$, и равны нулю, если $\alpha \neq \beta$ и один из индексов больше m . Эти преобразования образуют группу $O(m)$ [или $U(m)$] ортогональных (унитарных) преобразований в m -мерном пространстве, порожденном первыми m базисными векторами. Группа $O(m)$ [или $U(m)$] является подгруппой группы $O(n)$ [$U(n)$]. Аналогично группа вра-

щений в евклидовом трехмерном пространстве есть подгруппа однородной группы Лоренца.

1.3. Прямое произведение

Пусть заданы две группы G_1 и G_2 . Рассмотрим множество G , образованное парами $\{x_1, x_2\}$, где $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_2$, и введем в множестве G групповую операцию, определяемую следующим образом: если $\{x_1, x_2\} \in G$ и $\{y_1, y_2\} \in G$, то полагаем $\{x_1, x_2\} \{y_1, y_2\} = \{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2\}$. Очевидно, что $\{x_1, x_2\} \{y_1, y_2\} \in G$. Множество G с этой групповой операцией удовлетворяет всем аксиомам определения групп, причем единичным элементом группы G служит пара $\{e_1, e_2\}$, где e_1 и e_2 — единичные элементы групп G_1 и G_2 соответственно, а элементом в группе G , обратным $\{x_1, x_2\}$, является пара $\{x_1^{-1}, x_2^{-1}\}$. Эта группа G называется прямым произведением групп G_1 и G_2 и обозначается $G_1 \otimes G_2$.

Рассмотрим теперь две подгруппы группы G , образованные элементами вида $\{x_1, e_2\}$ и $\{e_1, x_2\}$, где x_1 пробегает элементы всей группы G_1 , а x_2 — всей группы G_2 . Эти подгруппы могут быть отождествлены с группами G_1 и G_2 соответственно. По определению произведения в группе G мы имеем

$$\{x_1, e_2\} \{e_1, x_2\} = \{x_1, x_2\} = \{e_1, x_2\} \{x_1, e_2\}.$$

Это означает, что элементы группы G_1 , рассматриваемые как элементы группы G , коммутируют с элементами группы G_2 , которые рассматриваются также как элементы группы G .

Примеры

1. Пусть E_1 и E_2 — n_1 - и n_2 -мерные векторные пространства. Рассмотрим теперь $(n_1 + n_2)$ -мерное векторное пространство E , каждый вектор x которого может быть представлен однозначно в виде суммы $x_1 + x_2$, где x_i принадлежит E_i . Это пространство E называется прямой суммой пространств E_1 и E_2 , а E_1 и E_2 — подпространствами пространства E . Рассмотрим в пространстве E линейные преобразования A , оставляющие инвариантными подпространства E_1 и E_2 , т. е. такие линейные преобразования, которые переводят каждый вектор x_1 (или x_2) пространства E_1 (или E_2) в вектор x_1 (или x_2') этого же

пространства. Каждое такое преобразование представляет собой пару независимых преобразований A_1 и A_2 в пространствах E_1 и E_2 соответственно. Тогда напомним $A = \{A_1, A_2\}$. Порядок осуществления преобразований A_1 и A_2 несуществен. Если $A = \{A_1, A_2\}$, $B = \{B_1, B_2\}$, то $AB = \{A_1B_1, A_2B_2\}$. Если преобразования в пространствах E_1 и E_2 образуют группы G_1 и G_2 соответственно, то множество всех рассматриваемых преобразований в E является группой $G_1 \otimes G_2$. Элементы вида $\{A_1, I\}$ (или $\{I, A_2\}$) служат преобразованиями в пространстве E_1 (или E_2). Поэтому группы G_1 и G_2 могут быть отождествлены с подгруппами группы G , образованными элементами вида $\{A_1, I\}$ и $\{I, A_2\}$ соответственно.

Если G_1 и G_2 — унитарные унимодулярные группы $SU(n_1)$ и $SU(n_2)$ соответственно, то группы $G = SU(n_1) \otimes SU(n_2)$ также являются унитарными унимодулярными преобразованиями в пространстве E . Это означает, что группа $SU(n_1) \otimes SU(n_2)$ есть подгруппа группы $SU(n_1 + n_2)$.

2. Пусть задано $(n_1 \times n_2)$ -мерное векторное пространство, каждый вектор x которого имеет $n_1 \times n_2$ компонент $x_{\alpha_1 \alpha_2}$, нумерующихся парами индексов α_1 и α_2 , $1 \leq \alpha_1 \leq n_1$, $1 \leq \alpha_2 \leq n_2$. Линейное преобразование в этом пространстве имеет вид

$$x_{\alpha_1 \alpha_2} \rightarrow x'_{\alpha_1 \alpha_2} = A_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} x_{\beta_1 \beta_2}. \quad (21)$$

Унитарные преобразования имеют матричные элементы $U_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2}$, удовлетворяющие условию

$$U_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} U_{\gamma_1 \gamma_2, \beta_1 \beta_2}^* = U_{\beta_1 \beta_2, \alpha_1 \alpha_2}^* U_{\beta_1 \beta_2, \gamma_1 \gamma_2} = \delta_{\alpha_1 \gamma_1} \delta_{\alpha_2 \gamma_2}. \quad (22)$$

Эти унитарные преобразования образуют группу $U(n_1 \times n_2)$. Рассмотрим теперь линейные преобразования специального вида с матричными элементами

$$U_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} = U_{\alpha_1 \beta_1}^{(1)} U_{\alpha_2 \beta_2}^{(2)}, \quad (23)$$

где $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ — унитарные матрицы $n_1 \times n_1$ -го и $n_2 \times n_2$ -го порядка соответственно, или символически

$$U = U^{(1)} \otimes U^{(2)}. \quad (23')$$

Произведением двух преобразований $U = U^{(1)} \otimes U^{(2)}$ и $V = V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ есть преобразование с матрицей

$$\begin{aligned} (UV)_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} &= U_{\alpha_1 \alpha_2, \gamma_1 \gamma_2} V_{\gamma_1 \gamma_2, \beta_1 \beta_2} = \\ &= U_{\alpha_1 \gamma_1}^{(1)} U_{\alpha_2 \gamma_2}^{(2)} V_{\gamma_1 \beta_1}^{(1)} V_{\gamma_2 \beta_2}^{(2)} = (U^{(1)} V^{(1)})_{\alpha_1 \beta_1} (U^{(2)} V^{(2)})_{\alpha_2 \beta_2}, \end{aligned} \quad (24)$$

или символически

$$UV = (U^{(1)} \otimes U^{(2)}) (V^{(1)} \otimes V^{(2)}) = (U^{(1)}V^{(1)}) \otimes (U^{(2)}V^{(2)}). \quad (24')$$

Эти соотношения показывают, что группа преобразований вида (23) [или (23')] является прямым произведением $U(n_1) \otimes U(n_2)$ групп $U(n_1)$ и $U(n_2)$, образованных унитарными преобразованиями $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$. Так как преобразования вида (23) [или (23')] есть частные случаи унитарных преобразований в $(n_1 \times n_2)$ -мерном пространстве, удовлетворяющих условию (22), то прямое произведение $U(n_1) \otimes U(n_2)$ можно рассматривать как подгруппу группы $U(n_1 \times n_2)$. Элементы групп $U(n_1)$ и $U(n_2)$ отождествляются с элементами вида $U^{(1)} \otimes I$ и $I \otimes U^{(2)}$ группы $U(n_1) \otimes U(n_2)$, коммутирующими друг с другом.

3. Одним из основных законов физики является принцип релятивистской инвариантности, согласно которому любая физическая теория должна быть инвариантной относительно преобразований группы Лоренца L с матрицами Λ , удовлетворяющими условию (17). С другой стороны, для теоретического описания свойств симметрии элементарных частиц предполагают, что кроме пространственно-временных динамических величин, связанных с пространством — временем (энергия — импульс, спин, момент импульса и т. д.), состояния систем элементарных частиц характеризуются также и другими квантовыми числами и величинами, связанными с внутренними свойствами частиц (изотопический спин, гиперзаряд и т. д.), причем сохранение этих величин связано с инвариантностью теории относительно некоторой группы внутренней симметрии S . Таким образом, на векторы состояния систем элементарных частиц действуют две группы преобразований: группа Лоренца L и группа внутренней симметрии S . Если преобразования этих групп коммутируют, то они вместе образуют группу $L \otimes S$.

1.4. Инвариантные подгруппы и фактор-группы

Пусть заданы некоторая группа G и ее подгруппа H . Рассмотрим множество элементов вида xa , где x — любой фиксированный элемент группы G , а a пробегает значения всей подгруппы H . Это множество обозначим xH и назовем левым смежным классом элемента x по под-

группе H . Если x и y — различные элементы группы G , то левые смежные классы xH и yH либо не имеют общих элементов, либо полностью совпадают. Аналогично определяется правый смежный класс Hx . Так как $eH = He = H$, то сама подгруппа H есть смежный класс. Правые и левые смежные классы, вообще говоря, различаются. Они совпадают для любого элемента $x \in H$, если подгруппа H удовлетворяет условию $xH = Hx$ или $xHx^{-1} = H$ для любого $x \in G$. Элемент ax^{-1} назовем сопряженным к a элементом. Итак, для совпадения левых и правых смежных классов по подгруппе H , необходимо и достаточно, чтобы для любого $a \in H$ и $x \in G$ сопряженный к a элемент ax^{-1} также являлся некоторым элементом подгруппы H . Такая подгруппа называется инвариантной подгруппой или нормальным делителем. В коммутативной группе каждая подгруппа — инвариантная.

Рассмотрим теперь множество с элементами в виде смежных классов группы G по инвариантной подгруппе H . Если $A = aH$ и $B = bH$ — два смежных класса, то их произведением AB назовем смежный класс $aH \cdot bH = abH$, а обратным A — смежный класс $A^{-1} = (aH)^{-1} = a^{-1}H$. Это означает, что смежные классы группы G по инвариантной подгруппе H образуют группу, называемую фактор-группой G/H группы G по инвариантной подгруппе H . Сама инвариантная подгруппа H , как смежный класс, представляет собой единичный элемент этой фактор-группы.

Пример

В примере 8 п. 1.1 была рассмотрена неоднородная группа Лоренца, элементами которой служат преобразования

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = a_\alpha + \lambda_{\alpha\beta} x'_\beta.$$

Обозначим эти преобразования $\{a, \lambda\}$. Трансляционные преобразования

$$x_\alpha \rightarrow x'_\alpha = a_\alpha + x_\alpha$$

образуют подгруппу неоднородной группы Лоренца и обозначаются $\{a, I\}$. Пусть $\{b, \lambda\}$ — любой элемент неоднородной группы Лоренца. Рассмотрим сопряженный

элемент $\{b, \lambda\} \{a, I\} \{b, \lambda\}^{-1}$. Согласно формулам (19) и (20), имеем

$$\begin{aligned} \{b, \lambda\} \{a, I\} \{b, \lambda\}^{-1} &= \{b + \lambda a, \lambda\} \{-\lambda^{-1}b, \lambda^{-1}\} = \\ &= \{b + \lambda a - \lambda \lambda^{-1}b, \lambda \lambda^{-1}\} = \{\lambda a, I\}. \end{aligned}$$

Итак, преобразование $\{b, \lambda\} \{a, I\} \{b, \lambda\}^{-1}$, сопряженное к трансляции $\{a, I\}$, является также трансляцией, и в этом случае трансляционная подгруппа — инвариантная.

1.5. Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм

Пусть заданы две группы G_1 и G_2 . Если существует соответствие между элементами групп G_1 и G_2 , то мы говорим, что существует отображение одной группы в другую. Если, например, в соответствии с каждым элементом $x_1 \in G_1$ существует единственный элемент $x_2 \in G_2$, который мы обозначим $f(x_1)$, $x_2 = f(x_1)$, то существует однозначное отображение f группы G_1 в группу G_2 . Это однозначное отображение f назовем гомоморфным отображением, или гомоморфизмом группы G_1 в группу G_2 , если оно сохраняет групповую операцию, т. е. удовлетворяет условию

$$f(xy) = f(x)f(y); \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}.$$

Группы G_1 и G_2 называются гомоморфными.

Взаимно однозначное гомоморфное отображение одной группы в другую называется изоморфным отображением или изоморфизмом, а эти группы — изоморфными. При изучении групп нас интересуют только групповые свойства их элементов. Поэтому все изоморфные группы можно считать одинаковыми. Изоморфизм группы G в себя называется автоморфизмом. Одним из возможных автоморфизмов является отображение вида

$$x \rightarrow f_a(x) = axa^{-1},$$

где a — некоторый элемент из группы G . Автоморфизмы такого типа называются внутренними.

Рассмотрим гомоморфизм группы G_1 в группу G_2

$$x_1 \rightarrow x_2 = f(x_1).$$

Совокупность всех элементов $f(x_1)$, $x_1 \in G_1$ называется образом группы G_1 при гомоморфизме f . Этот образ

представляет собой, вообще говоря, некоторую подгруппу G'_2 группы G_2 , причем единичным элементом всей подгруппы G'_2 , т. е. единичным элементом e_2 группы G_2 , является образ единичного элемента e_1 группы G_1

$$f(e_1) = e_2.$$

Пусть K множество всех элементов y_1 группы G_1 , превращающихся в единичный элемент e_2 группы G_2 при гомоморфизме f

$$f(y_1) = e_2; \quad y_1 \in K.$$

Это множество называется ядром гомоморфизма. Нетрудно проверить, что K — подгруппа группы G_1 . Более того, это — инвариантная подгруппа. Действительно, пусть $y_1 \in K$ и x_1 — любой элемент из группы G_1 . Тогда

$$f(x_1 y_1 x_1^{-1}) = f(x_1) f(y_1) f(x_1^{-1}) = f(x_1) f(x_1)^{-1} = e_2.$$

Это означает, что $x_1 y_1 x_1^{-1} \in K$, т. е. K — инвариантная подгруппа.

Пример

В п. 1.1 мы рассмотрели однородную группу Лоренца h , элементами которой являются преобразования в вещественном четырехмерном пространстве Минковского, оставляющие инвариантной квадратичную форму (13). Сопоставим каждому четырехмерному вектору x_α матрицу 2×2 :

$$\hat{x} = x_\alpha \tau_\alpha, \quad (25)$$

где

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Нетрудно проверить, что $\hat{x}^+ = \hat{x}$, если x_α — вещественный вектор. Из соотношения

$$\text{Sp}(\tau_\alpha \tau_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$$

следует, что компоненты вектора x_α выражаются через матрицу \hat{x} следующим образом:

$$x_\alpha = \frac{1}{2} \text{Sp}(\tau_\alpha \hat{x}), \quad (27)$$

а квадрат вектора x_α равен

$$x^2 = (xx) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \det \hat{x}. \quad (28)$$

Рассмотрим преобразование матрицы \hat{x}

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = A\hat{x}B, \quad (29)$$

где A и B — матрицы 2×2 , и найдем условия, которым должны удовлетворять матрицы A и B для того, чтобы преобразование (29) было преобразованием Лоренца. Мы будем рассматривать вещественные преобразования, для которых компоненты x'_α вещественны, если x_α вещественны, т. е. $\hat{x}^+ = \hat{x}'$, если $\hat{x}^+ = \hat{x}$. С другой стороны,

$$\hat{x}'^+ = B^+\hat{x}^+A^+ = B^+\hat{x}A^+.$$

Сравнивая полученное выражение с формулой (29), имеем $B = \pm A^+$. Итак, вещественные линейные преобразования вектора x_α , т. е. матрицы \hat{x} , имеют вид

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = \pm A\hat{x}A^+. \quad (30)$$

Для преобразований Лоренца $x'^2 = x^2$, т. е. $\det \hat{x}' = \det \hat{x}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \det \hat{x}' &= \pm \det (A\hat{x}A^+) = \pm \det A \det \hat{x} \det A^+ = \\ &= \pm |\det A|^2 \det \hat{x}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что преобразование (30) будет вещественным преобразованием Лоренца только при условии, что из знаков плюс и минус выбирается первый:

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = A\hat{x}A^+, \quad (30')$$

а матрица A удовлетворяет условию

$$|\det A| = 1.$$

Поскольку в преобразование (30) входят одновременно A и A^+ , то всегда можно выбрать фазу матрицы A так, чтобы

$$\det A = 1. \quad (31)$$

Можно показать, что любое (вещественное) преобразование Лоренца вектора x_α приводит к преобразованию (30') матрицы \hat{x} . Иначе говоря, существует соответствие между однородными преобразованиями Лоренца и унимо-

дулярными матрицами 2×2 , причем две матрицы $\pm A$ относятся к одному и тому же преобразованию Лоренца. Покажем, что это соответствие является гомоморфизмом, т. е. если матрицам A_1 и A_2 соответствуют преобразования Лоренца λ_1 и λ_2 , то матрице $A_1 A_2$ — преобразование Лоренца $\lambda_1 \lambda_2$. Действительно, пусть

$$x' = \lambda_2 x; \quad x'' = \lambda_1 x' = \lambda_1 \lambda_2 x.$$

Тогда

$$\hat{x}' = A_2 \hat{x} A_2^+;$$

$$\hat{x}'' = A_1 \hat{x}' A_1^+ = A_1 A_2 \hat{x} A_2^+ A_1^+ = (A_1 A_2) \hat{x} (A_1 A_2)^+,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, существует гомоморфизм группы $SL(2)$ в однородную группу Лоренца, причем ядро гомоморфизма состоит из матриц $+I$ и $-I$. Очевидно, что это ядро представляет собой дискретную инвариантную подгруппу группы $SL(2)$, так как для любой матрицы $A \in SL(2)$

$$A(\pm I)A^{-1} = \pm I.$$

Гомоморфные непрерывные группы называются локально изоморфными, если ядро гомоморфизма является дискретной подгруппой. Итак, группа Лоренца и группа $SL(2)$ локально изоморфны.

Трехмерные вращения представляют собой специальные преобразования Лоренца, оставляющие неизменными временные компоненты любых векторов: $x'_0 = x_0$. Они образуют группу вращений — подгруппу группы Лоренца. Покажем прежде всего, что если унимодулярная матрица A в формуле (30') унитарна, то соответствующее ей преобразование Лоренца является вращением. Действительно, согласно формулам (26), (27) и (30'), имеем

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{x};$$

$$x'_0 = \frac{1}{2} \text{Sp } \hat{x}' = \frac{1}{2} \text{Sp } A \hat{x} A^+ = \frac{1}{2} \text{Sp } A^+ A \hat{x}.$$

Если, матрица A унитарна, ($A^+ A = 1$), то $x'_0 = \frac{1}{2} \times \times \text{Sp } \hat{x} = x_0$, т. е. соответствующее преобразование является вращением. Обратно, унимодулярная матрица

A , соответствующая вращению, унитарна. Отметим, что любое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено в виде произведения трех специальных вращений: на угол φ_2 ($0 \leq \varphi_2 \leq 2\pi$) вокруг оси Oz на угол θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) вокруг Ox и на угол φ_1 ($0 \leq \varphi_1 \leq 2\pi$) вокруг Oz . Углы φ_1 , θ и φ_2 называются углами Эйлера; они полностью характеризуют данное вращение. Рассмотрим прежде всего вращение на угол φ вокруг оси Oz :

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi; \\ x'_2 &= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi; \\ x'_3 &= x_3; \\ x'_0 &= x_0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Проверим, что это вращение соответствует матрице

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Действительно, согласно соотношению (30'),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_0 + x'_3 & x'_1 - ix'_2 \\ x'_1 + ix'_2 & x'_0 - x'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & e^{i\varphi}(x_1 - ix_2) \\ e^{-i\varphi}(x_1 + ix_2) & x_0 - x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда мы получим формулу (32). Аналогично вращение на угол θ вокруг оси Ox :

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1; \\ x'_2 &= x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta; \\ x'_3 &= -x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta; \\ x'_0 &= x_0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

соответствует матрице

$$A_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

так как из уравнения

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'_0 + x'_3 & x'_1 - i x'_2 \\ x'_1 + i x'_2 & x'_0 - x'_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} &\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} x_0 + x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta & x_1 - i(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) \\ x_1 + i(x_2 \cos \theta + x_3 \sin \theta) & x_0 - (x_3 \cos \theta - x_2 \sin \theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

вытекают соотношения (34). Мы показали, что произведение вращений соответствует произведению матриц, характеризующих вращения, входящие в данное произведение. Итак, для произвольного вращения с углами Эйлера φ_1 , θ и φ_2 соответствующая ему матрица 2×2 равна

$$A_{\{\varphi_1, \theta, \varphi_2\}} = A_{\varphi_1} A_{\theta} A_{\varphi_2},$$

где A_{φ} и A_{θ} даются в соотношениях (33) и (35). Так как эти матрицы унитарны, то матрица $A_{\{\varphi_1, \theta, \varphi_2\}}$, представляющая собой произведение трех унитарных матриц, также унитарна, что и требовалось доказать.

Таким образом, существует соответствие между вращениями в трехмерном пространстве и унимодулярными унитарными матрицами 2×2 , причем каждому вращению соответствуют две матрицы $\pm A$. Иначе говоря, существует гомоморфизм унитарной унимодулярной группы $SU(2)$ в группу вращений в трехмерном пространстве $O(3)$, причем ядро гомоморфизма состоит из матриц $+I$ и $-I$.

§ 2. Группы Ли и алгебры Ли

2.1. Топологические группы. Компактные и некомпактные группы

В настоящем параграфе введем понятия, которые нам понадобятся в дальнейшем. Определим прежде всего топологические пространства. Топологическим пространством называется любое множество E элементов, в котором выделена система подмножеств, называемых окрестностями и удовлетворяющих следующим аксиомам:

1. Каждая точка x пространства E принадлежит некоторой окрестности $U(x)$ этой точки.
2. Всякое подмножество, содержащее окрестность $U(x)$ точки, является также окрестностью этой точки.
3. Пересечение * конечного числа окрестностей точки x есть также окрестность этой точки.
4. Окрестность $U(x)$ точки x есть также окрестность достаточно близких к x точек y , лежащих в некоторой окрестности $V(x)$ точки x .

Примером топологического пространства является n -мерное векторное пространство. В качестве окрестности точки x можно выбрать множество точек шара с некоторым радиусом R и центром x , т. е. множество точек y , удовлетворяющих условию $\|x - y\| \leq R$.

Топологическое пространство называется компактным, если каждая последовательность его точек содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке этого пространства, т. е. каждое бесконечное множество его точек обладает предельной точкой.

Множество M в некотором топологическом пространстве E называется компактным в E (в себе), если каждая последовательность точек этого множества содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке пространства E (множества M). Проиллюстрируем это определение на простых примерах. Действительная числовая прямая некомпактна, так как существует бесконечная последовательность точек, например $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$, которая не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности. Наоборот, каждый ограниченный

* Объединением множеств A и B служит множество C , каждый элемент которого принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B , а пересечением A и B является множество, состоящее из общих элементов множеств A и B .

интервал $a \leq x \leq b$ на этой прямой компактен. Действительно, пусть x_1, x_2, \dots — бесконечное множество точек на этом интервале. Разделим этот интервал на две части: $a \leq x \leq c$ и $c \leq x \leq b$. Тогда по крайней мере один из них содержит бесконечное число точек данного множества. Этот интервал снова разделим на две части и продолжим этот процесс. Таким образом, существует такая точка x_0 , что любой интервал, содержащий эту точку, содержит бесконечное число точек данного множества. Это означает, что x_0 есть предельная точка бесконечного множества точек x_1, x_2, \dots , что и требовалось доказать.

Аналогично можно показать, что в n -мерном евклидовом пространстве любое замкнутое ограниченное множество, т. е. замкнутое множество точек, абсолютные значения координат x_α которых не превосходят некоторого числа $|x_\alpha| \leq M$, компактно. Например, сферы и замкнутые шары с конечными радиусами являются компактными множествами в трехмерном евклидовом пространстве, а гиперboloиды — некомпактные множества.

Перейдем теперь к определению топологической группы. Пусть задано множество G , удовлетворяющее всем групповым аксиомам (см. п. 1.1). Если это множество G является одновременно топологическим пространством, причем групповая структура группы согласуется с топологической структурой пространства G , то G называется топологической или непрерывной группой. Более точно, множество G называется топологической или непрерывной группой, если

- 1) G — группа;
- 2) G — топологическое пространство;
- 3) групповая и топологическая структуры группы G согласуются, а именно: если x и y — элементы G , то для любой окрестности W произведения xy существуют такие окрестности X и Y элементов x и y соответственно, что из $x \in X$ и $y \in Y$ вытекает $xy \in W$, и для любой окрестности Z элемента x^{-1} существует такая окрестность X элемента x , что из $x \in X$ вытекает $x^{-1} \in Z$. Короче говоря, произведение xy есть непрерывная функция x и y , а x^{-1} — непрерывная функция x .

Если топологическая группа, рассматриваемая как топологическое пространство, является компактным про-

странством, то она называется компактной группой. В противном случае G есть некомпактная группа.

Рассмотрим некоторые примеры. Действительная числовая прямая представляет собой коммутативную некомпактную группу. Группа поворотов вокруг фиксированной оси компактна, так как каждый поворот характеризуется углом φ , значение которого лежит в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, т. е. в компактном множестве. Группа вращений в трехмерном евклидовом пространстве компактна, так как каждое вращение характеризуется тремя вещественными числами, например углами Эйлера $\varphi_1, \theta, \varphi_2$, а эти углы можно рассматривать как координаты точек в ограниченном множестве трехмерного пространства, т. е. в компактном множестве. Наоборот, группа Лоренца некомпактна. Действительно, рассмотрим, например, гиперboloид $x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1$. В преобразовании Лоренца каждая точка этого гиперboloида переходит в его другую точку, причем для любой пары точек одной полы существует преобразование Лоренца, переводящее одну точку в другую. Выберем на некоторой полё последовательность точек x_1, x_2, \dots , уходящую в бесконечность. Обозначим λ_n преобразование Лоренца, переводящее вершину x_0 данной полы в точку x_n , $n = 1, 2, 3, \dots$. Мы имеем бесконечную последовательность преобразований Лоренца. Так как последовательность точек x_n не содержит сходящейся подпоследовательности, то из последовательности преобразований Лоренца λ_n нельзя выделить сходящую подпоследовательность.

В заключение укажем еще на одну особенность компактных групп по сравнению с некомпактными группами. Пусть задана некоторая ограниченная функция на группе $f(g)$, $g \in G$ и существует интеграл этой функции по всей группе

$$J = \int_G f(g) dg.$$

Если для всех $g_0 \in G$ выполняется равенство

$$\int_G f(g) dg = \int_G f(g_0 g) dg = \int_G f(g g_0) dg, \quad (36)$$

то мы говорим, что на группе G установлено инвариантное интегрирование. В качестве простого примера рас-

смотрим группу поворотов вокруг фиксированной оси. Каждый элемент группы характеризуется вещественным числом φ — углом поворота, причем углы φ и $\varphi + 2\pi$ соответствуют одному и тому же повороту. Каждая функция на группе будет тогда периодической функцией φ с периодом 2π . Если g_0 и g — повороты на углы φ_0 и φ соответственно, то g_0g является вращением на угол $\varphi_0 + \varphi$. В данном случае равенство (36) означает, что

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi + \varphi_0) d\varphi.$$

Так как $f(\varphi)$ — ограниченная периодическая функция с периодом 2π , то это равенство выполняется автоматически. Итак, для данного случая инвариантным интегрированием является обычное интегрирование по углу поворота φ от 0 до 2π . Можно показать, что для группы трехмерных вращений инвариантный интеграл по группе определяется формулой

$$\int f(g) dg = \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\pi} f(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \sin \theta d\theta,$$

где $\varphi_1, \theta, \varphi_2$ — углы Эйлера [4, 5].

Возвращаемся теперь к общей формуле (36). Если группа G компактна, то этот инвариантный интеграл существует для любой ограниченной функции на группе [1, гл. 5] в отличие от некомпактных групп, для которых такого инвариантного интеграла ограниченной функции на группе не существует. Ниже мы покажем, что из существования инвариантного интегрирования на группе вытекает унитарность представлений компактных групп.

2.2. Группы Ли

Выше мы рассмотрели различные примеры непрерывных (или топологических) групп. Все они — группы Ли. Непрерывная группа G называется группой Ли, если каждый ее элемент может быть задан при помощи конечного числа параметров. В дальнейшем будем рассматривать только вещественные параметры. Минимальное число независимых параметров, необходимых для характеристики элементов группы Ли G , называется порядком, или размерностью, группы G . Ли при изучении этих

групп задает их элементы в виде преобразований в конечномерном пространстве. Адо показал, что для любой группы Ли существует изоморфная ей группа преобразований в некотором векторном пространстве [6]. Поэтому ради простоты в дальнейшем группы Ли будем рассматривать как группы преобразований в векторных пространствах. Иначе говоря, будем предполагать, что каждый элемент группы Ли представляет собой оператор, действующий в некотором векторном пространстве. Этот оператор зависит от вещественных параметров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ и обозначается

$$g = T(\xi_1, \dots, \xi_m). \quad (37)$$

Параметры, входящие в минимальное число независимых необходимых параметров, называются существенными. Мы всегда будем предполагать, что параметры группы Ли существенны. Если это так, то различным значениям параметров в областях изменения этих параметров соответствуют различные элементы группы и число m в операторе (37) равно размерности группы. Мы будем выбирать параметры так, чтобы нулевым значениям всех параметров соответствовал единичный элемент группы

$$e = T(0, 0, \dots, 0). \quad (38)$$

Если в пространстве, в котором действуют операторы $T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$ группы G , введем некоторый базис, то каждый оператор $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ будет выражаться некоторой матрицей. Если все матричные элементы $T_{\alpha\beta}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ этих операторов дифференцируемы по параметрам ξ_i , то мы говорим, что операторы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ дифференцируемы. Предполагаем, что все операторы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ рассматриваемой группы Ли G дифференцируемы. Во многих случаях это требование выполняется автоматически. Например, так называемые локально связанные компактные группы Ли всегда дифференцируемы (см. книгу [1], гл. 7).

Рассмотрим теперь частные производные $\frac{\partial T(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_i}$ операторов $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ группы Ли G по параметрам ξ_i , взятые в точке $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$, т. е. при единичном элементе, и положим

$$X_i = \frac{1}{i} \frac{\partial T(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_i} \Big|_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0}. \quad (39)$$

Эти операторы называются инфинитезимальными операторами или генераторами группы Ли G . Группа Ли размерности m обладает m генераторами.

Для примера рассмотрим группу трехмерных вращений. Каждый элемент этой группы представляется в виде ортогональной матрицы 3×3 , зависящей от трех параметров. Вместо углов Эйлера мы выбираем эти параметры следующим образом. Каждому вращению сопоставим вектор, направленный по положительному направлению оси поворота и равный углу поворота по абсолютной величине. Такой вектор полностью характеризует данное вращение. Проекции ξ_1 , ξ_2 и ξ_3 этого вектора на оси координат будем выбирать в качестве существенных параметров вращений. Итак, каждое вращение представляется матрицей 3×3 $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Найдем теперь генераторы X_i группы трехмерных вращений. Имеем

$$X_1 = \frac{1}{i} \frac{\partial T(\xi_1, 0, 0)}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0},$$

причем $T(\xi_1, 0, 0)$ — матрица вращения на угол ξ_1 вокруг оси Ox , которая, согласно соотношениям (34), равна

$$T(\xi_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \xi_1 & \sin \xi_1 \\ 0 & -\sin \xi_1 & \cos \xi_1 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем

$$X_1 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Аналогично $T(0, \xi_2, 0)$ и $T(0, 0, \xi_3)$ являются вращениями вокруг осей Oy и Oz соответственно на углы ξ_2 и ξ_3 , и мы имеем

$$X_2 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X_3 = \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40')$$

Нетрудно поверить, что генераторы X_i группы вращений удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_1 X_2 - X_2 X_1 = i X_3; & [X_2, X_3] &= i X_1; \\ [X_3, X_1] &= i X_2, \end{aligned} \quad (41)$$

т. е.

$$[X_i, X_j] = i \varepsilon_{ijk} X_k, \quad (41')$$

где ε_{ijk} — полностью антисимметричный тензор третьего ранга. Величину $[X_i, X_j]$ называем коммутатором операторов X_i и X_j .

Так как группа трехмерных вращений и группа $SU(2)$ локально изоморфны, а между генераторами локально изоморфных групп существует взаимно однозначное соответствие, то для установления коммутационных соотношений генераторов группы вращений можно рассматривать вместо этой группы группу $SU(2)$. Для определения генераторов любой группы $SU(n)$ достаточно рассмотреть элементы этой группы с бесконечно малыми значениями параметров. Так как нулевым значениям параметров соответствует единичная матрица I , то в первом порядке по малым параметрам ξ_i имеем

$$T(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i \xi_i X_i, \quad (42)$$

где

$$X_i = \frac{1}{i} \left. \frac{\partial T(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_i} \right|_{\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0}.$$

Из условия унитарности матриц $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$

$$T(\xi_1, \dots, \xi_m) T(\xi_1, \dots, \xi_m)^+ = T(\xi_1, \dots, \xi_m)^+ T(\xi_1, \dots, \xi_m) = I$$

следует, что для любой унитарной группы $U(n)$

$$(I - i \xi_i X_i^+) (I + i \xi_j X_j) \approx I + i \xi_j (X_j - X_j^+) \approx I.$$

Отсюда получаем

$$X_i^+ = X_i, \quad (43)$$

т. е. генераторы X_i унитарной группы $U(n)$ — эрмитовы матрицы. В первом порядке по ξ_i определитель матрицы $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ вида (42) равен

$$\det T(\xi_1, \dots, \xi_m) = 1 + i \xi_i \text{Sp} X_i.$$

Если матрица $T(\xi_1, \dots, \xi_m)$ унимодулярна, то

$$\text{Sp} X_i = 0. \quad (44)$$

Итак, генераторы унимодулярной группы имеют шпуры, равные нулю, а генераторы группы $SU(n)$ являются эрмитовыми матрицами с нулевыми шпурами. Для группы $SU(2)$ эти генераторы представляют собой эрмитовы

матрицы 2×2 с нулевыми шпурами. Существуют три независимые матрицы, удовлетворяющие этим условиям:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Их обычно называют матрицами Паули.

Итак, группа $SU(2)$ зависит от трех параметров. Нелегко проверить, что генераторы σ_1 , σ_2 и σ_3 группы $SU(2)$, деленные на 2, удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям, что и генераторы группы вращений:

$$\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \varepsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}. \quad (44')$$

Здесь показано, что для группы вращений, или группы $SU(2)$, коммутаторы двух генераторов являются линейными комбинациями всех генераторов группы. Такое свойство имеется и для любой группы Ли. Пусть G — группа Ли с размерностью m , а X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) — ее генераторы. Тогда коммутаторы $[X_i, X_j]$ любых двух генераторов представляют собой линейные комбинации всех генераторов

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad (45)$$

где C_{ij}^k — постоянные, называемые структурными константами. Из выражения (45) следует, что C_{ij}^k антисимметричны относительно двух нижних индексов

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k, \quad (46)$$

а из тождества Якоби

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_j, [X_k, X_i]] + [X_k, [X_i, X_j]] = 0 \quad (47)$$

получаем соотношение

$$C_{ii}^m C_{jk}^l + C_{jl}^m C_{ki}^l + C_{kl}^m C_{ij}^l = 0. \quad (48)$$

Структурные константы каждой группы Ли однозначно определяются структурой данной группы. Обратное, они также полностью характеризуют данную группу с точностью до локального изоморфизма, а именно для каждой системы постоянных C_{ij}^k , удовлетворяющих условиям (46) и (48), существует группа Ли G , структур-

ными константами которой служат данные постоянные C_{ij}^k . Любая группа G со структурными константами C_{ij}^k локально изоморфна группе G . (Подробности см. в книге [1], гл 10; [2], гл. 3.)

2.3. Алгебры Ли

Рассмотрим теперь связь между группами Ли и так называемыми алгебрами Ли. Пусть задано множество L , обладающее следующими свойствами:

1. Если X и Y — элементы L , то сумма $X + Y$ и произведение λX с любым вещественным (комплексным) числом λ также принадлежат L . Отсюда следует, что если X_1, \dots, X_m — элементы L , то любая линейная комбинация $\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i$ с вещественными (комплексными) коэффициентами λ_i также есть элемент L .

2. Существует некоторая операция, которая сопоставляет каждой паре элементов X и Y множества L определенный элемент того же множества, обозначаемый через XY и называемый произведением элементов X и Y .

3. Произведение элементов и произведение элементов на числа λ удовлетворяют условиям

$$(X_1 + X_2)Y = X_1Y + X_2Y; \quad Y(X_1 + X_2) = YX_1 + YX_2;$$

$$\lambda(XY) = (\lambda X)Y = X(\lambda Y).$$

Такое множество L называется алгеброй над полем вещественных (или комплексных) чисел. Если кроме аксиом 1—3 произведения алгебры L удовлетворяют также соотношениям

$$XY + YX = 0; \tag{49}$$

$$X(YZ) + Y(ZX) + Z(XY) = 0, \tag{50}$$

то они называются алгеброй Ли.

Мы будем рассматривать лишь конечномерные алгебры Ли. Для каждой конечномерной алгебры Ли существует такая система линейно независимых элементов $X_i, i = 1, 2, \dots, m$, что каждый ее элемент является линейной комбинацией элементов $X_i, i = 1, 2, \dots, m$. Система X_i называется базисом этой алгебры, а m — ее размерностью. Из аксиом 1—3 следует, что произведение любых

двух базисных элементов X_i и X_j имеет вид

$$X_i X_j = C_{ij}^k X_k, \quad (51)$$

причем для алгебры Ли структурные константы C^k удовлетворяют условиям (46) и (48), вытекающим из соотношений (49) и (50). Алгебра Ли называется коммутативной, если $XY = 0$ для любой пары X и Y .

Примером алгебры Ли служит алгебра, базис которой состоит из трех матриц Паули σ_1 , σ_2 и σ_3 , причем произведение двух элементов σ_i и σ_j алгебры Ли определяется как коммутатор матриц σ_i и σ_j :

$$\sigma_i \sigma_j = [\sigma_i, \sigma_j].$$

Вообще говоря, генераторы группы Ли образуют алгебру Ли, в которой произведением элементов алгебры является коммутатор генераторов. В дальнейшем в качестве произведения XY элементов алгебры Ли будем пользоваться обозначением коммутатора $[X, Y]$. Алгебра Ли (генераторов) группы Ли полностью определяется этой группой. Обратно, алгебра Ли группы Ли определяет эту группу однозначно с точностью до локального изоморфизма.

Аналогами подгруппы и инвариантной подгруппы в алгебре служат подалгебра и идеал. Если в алгебре Ли L существует множество L' элементов, которое само является алгеброй Ли, то это множество называется подалгеброй L' алгебры Ли L . Оно имеет следующее свойство: для любой пары элементов $X \in L'$ и $Y \in L'$ произведение $[X, Y]$ принадлежит L' : $[X, Y] \in L'$. Символически мы пишем

$$[L', L'] \in L'.$$

Если N — такая подалгебра алгебры Ли L , что для любых $X \in N$ и $Y \in L$ произведение $[X, Y] \in N$, или символически

$$[N, L] \in N,$$

то N называется идеалом алгебры Ли L .

Существует тесная связь между подгруппой группы Ли и подалгеброй алгебры Ли, а также между инвариантной подгруппой и идеалом. Если G — группа Ли и L — алгебра Ли, то алгебра L' подгруппы G' является подалгеброй алгебры Ли L , а алгебра Ли инвариантной

подгруппы H служит идеалом алгебры Ли L . (Подробности см. в книгах [1], гл. 10; [2], гл. 3)

Напомним, что группа называется простой, если она не имеет инвариантной подгруппы, отличной от самой группы, за исключением дискретных инвариантных подгрупп, и называется полупростой, если она не имеет коммутативной (недискретной) инвариантной подгруппы. Алгебра Ли называется простой, если она не имеет идеала, отличного от самой алгебры, и называется полупростой, если она не имеет коммутативного идеала. Алгебра Ли простой группы Ли проста, и алгебра полупростой группы Ли полупроста.

Пусть задана некоторая группа Ли G конечной размерности m , генераторы которой образуют алгебру Ли L той же размерности. Если в алгебре L существуют коммутирующие элементы, то эти элементы образуют коммутативную подалгебру алгебры Ли L .

При изучении алгебр Ли обычно выделяют некоторую коммутативную подалгебру, называемую подалгеброй Картана. Элементы подалгебры Картана K алгебры Ли L обозначим H_i . Тогда

$$[H_i, H_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, l.$$

Размерность l подалгебры Картана алгебры Ли L называется рангом алгебры Ли L , или рангом группы G , алгеброй Ли которой является алгебра Ли L .

§ 3. Представления групп Ли

3.1. Определение представлений групп Ли

Пусть E — некоторое векторное пространство, элементы которого обозначим x и назовем векторами в данном пространстве. Если введем некоторый базис, состоящий из линейно независимых векторов e_1, e_2, \dots, e_n , то любой вектор x можно представить в виде

$$x = x_\alpha e_\alpha.$$

Вектор x полностью определяется своими компонентами x_α . Рассмотрим линейное преобразование R пространства E . При этом преобразовании вектор x превращается в x' :

$$x \rightarrow x' = Rx.$$

Компоненты x'_α вектора x' выражаются линейно через компоненты x_α вектора x :

$$x'_\alpha = R_{\alpha\beta} x_\beta,$$

где $R_{\alpha\beta}$ — матрица преобразования R . Преобразование R также называем линейным оператором в пространстве E . Будем говорить, что задано представление R

$$g \rightarrow R(g) \quad (52)$$

(абстрактной) группы G в пространстве E , если каждому элементу $g \in G$ сопоставляется несобственное преобразование $R(g)$ пространства E так, что произведению элементов группы G соответствует произведение преобразований, т. е.

$$R(g_1) R(g_2) = R(g_1 g_2), \quad (53)$$

или в матричном виде

$$R(g_1)_{\alpha\beta} R(g_2)_{\beta\gamma} = R(g_1 g_2)_{\alpha\gamma}. \quad (53')$$

Отсюда следует, что единичному элементу e соответствует единичный оператор I (тождественное преобразование)

$$R(e) = I, \quad (54)$$

поскольку

$$R(e) R(g) = R(eg) = R(g),$$

а обратному элементу g^{-1} — обратное преобразование

$$R(g)^{-1} = R(g^{-1}), \quad (55)$$

так как

$$R(g^{-1}) R(g) = R(g^{-1} g) = R(e) = I.$$

Иначе говоря, если существует гомоморфизм группы G в группу R преобразований пространства E , то R называется представлением группы G . Если группа G изоморфна группе R , то представление R называется точным. Простая группа обладает лишь точными представлениями, так как ядро гомоморфизма состоит только из единичного элемента. Если задано представление R группы G в пространстве E , то мы говорим также, что пространство E преобразуется по представлению R группы G .

Примеры

1. Рассмотрим группу трансляций в трехмерном пространстве. Каждая трансляция характеризуется вектором переноса g . Пусть E — некоторое комплексное про-

странство и каждой трансляции на вектор \mathbf{r} сопоставим оператор умножения векторов из E на комплексное число $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, где \mathbf{k} — некоторый фиксированный трехмерный вектор. Тогда произведению трансляций \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , т. е. трансляции $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2$, соответствует оператор умножения на $e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2)} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_2} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_1}$, т. е. произведение операторов, соответствующих трансляциям \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Мы получаем, таким образом, представление группы трансляций.

2. Если элементы группы G есть преобразования в некотором пространстве, то соответствие

$$g \rightarrow R(g) \equiv g$$

также дает некоторое представление группы G . Это представление группы G совпадает с группой G (существуют, конечно, и другие представления, не совпадающие с G).

3. Если всякому элементу группы G сопоставим единичный оператор в пространстве E

$$g \rightarrow I,$$

то получим единичное представление группы G .

Отметим, что в одном и том же пространстве E могут быть различные представления одной и той же группы. Среди них имеются представления, которые различаются несущественно и могут быть отождествлены. Это — эквивалентные представления, определяющиеся следующим образом. Пусть задано некоторое представление R группы G в пространстве E , при котором каждому элементу g соответствует оператор $R(g)$. Рассмотрим теперь новые операторы

$$R'(g) = A^{-1}R(g)A, \quad (56)$$

где A — некоторый оператор в пространстве E . Мы имеем

$$\begin{aligned} R'(g_1)R'(g_2) &= A^{-1}R(g_1)AA^{-1}R(g_2)A = \\ &= A^{-1}R(g_1)R(g_2)A = A^{-1}R(g_1g_2)A = R'(g_1g_2), \end{aligned}$$

т. е. соответствие

$$g \rightarrow R'(g)$$

дает новое представление R' группы G в пространстве E . Представления R и R' , связанные соотношением (56), называются эквивалентными. В дальнейшем эквивалентные представления различать не будем.

3.2. Унитарные представления

Пусть E — гильбертово пространство, т. е. каждой паре векторов x и y пространства E сопоставляется комплексное число, называемое скалярным произведением (xy) и удовлетворяющее условиям

$$(xy) = (yx)^*, ((x_1 + x_2)y) = (x_1y) + (x_2y) \quad (57)$$

и

$$(x\lambda y) = (\lambda^*xy) = \lambda(xy) \quad (58)$$

для любого комплексного числа λ . Преобразование R в этом пространстве называется унитарным, если оно не меняет скалярного произведения любой пары векторов, т. е. если для любой пары векторов x и y выполняется условие

$$(RxRy) = (xy). \quad (59)$$

Это определение унитарных преобразований в случае конечномерного пространства совпадает с определением, данным в п. 1.1.

Рассмотрим теперь унитарные представления группы. Пусть гильбертово пространство E преобразуется по представлению R группы G . Если все операторы $R(g)$ этого представления унитарны, то оно называется унитарным представлением. Покажем, что для любой компактной группы каждое ее представление эквивалентно некоторому унитарному представлению. Доказательство этого утверждения основывается на том, что для компактной группы можно ввести инвариантное интегрирование.

Покажем прежде всего, что если операторы $R(g)$ неунитарны относительно заданного скалярного произведения (xy) , то можно ввести такое новое скалярное произведение $(xy)'$, что относительно него все операторы $R(g)$ унитарны, т. е.

$$(R(g)xR(g)y)' = (xy)'. \quad (60)$$

Отметим, что для любой пары векторов x и y величина

$$f(g) = (R(g)xR(g)y)$$

является некоторой ограниченной функцией на группе G и для компактной группы G существует инвариантный

интеграл [см. формулу (36)]

$$\int_G f(h) dh = \int_G f(gh) dh = \int_G f(hg) dh,$$

где g — любой элемент группы G . Положим

$$(xy)' = \int_G (R(h) x R(h) y) dh. \quad (61)$$

Нетрудно проверить, что произведение $(xy)'$ удовлетворяет соотношениям (57) и (58), т. е. удовлетворяет условиям для скалярного произведения. По отношению к этому скалярному произведению все операторы $R(g)$ унитарны, так как, согласно соотношениям (36) и (61),

$$\begin{aligned} (R(g) x R(g) y)' &= \int_G (R(h) R(g) x, R(h) R(g) y) dh = \\ &= \int_G (R(hg) x R(hg) y) dh = \int_G (R(h) x R(h) y) dh = (xy)', \end{aligned}$$

т. е. условие унитарности (60) выполняется. Пусть теперь e_α — некоторый базис, ортонормированный относительно старого скалярного произведения

$$(e_\alpha e_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

а e'_α — базис, ортонормированный относительно нового скалярного произведения

$$(e'_\alpha e'_\beta)' = \delta_{\alpha\beta}.$$

Обозначим A оператор, переводящий e_α в e'_α :

$$Ae_\alpha = e'_\alpha.$$

Если

$$x = x_\alpha e_\alpha, \quad y = y_\alpha e_\alpha,$$

то

$$Ax = x_\alpha e'_\alpha, \quad Ay = y_\alpha e'_\alpha$$

и, следовательно,

$$(Ax Ay)' = x_\alpha y_\alpha = (xy), \quad (62)$$

или

$$(xy)' = (A^{-1} x A^{-1} y). \quad (62')$$

Положим теперь

$$R'(g) = A^{-1} R(g) A,$$

Из соотношений (62'), (60) и (62) следует, что

$$\begin{aligned}(R'(g) x R'(g) y) &= (A^{-1} R(g) A x A^{-1} R(g) A y) = \\ &= (R(g) A x R(g) A y) = (A x A y)' = (x y),\end{aligned}$$

т. е. все операторы $R'(g)$ унитарны относительно старого скалярного произведения. Таким образом, каждое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению. Поэтому в дальнейшем для компактной группы Ли мы можем ограничиться лишь унитарными представлениями.

3.3. Неприводимые представления

Пусть задано некоторое представление R группы G в пространстве E и пусть E_1 — некоторое подпространство пространства E , т. е. некоторое множество элементов из E , которое само является пространством. В преобразовании $R(g)$ вектор x из пространства E_1 превращается в вектор $R(g)x$, который принадлежит E , но может и не принадлежать E_1 . Если векторы $R(g)x$ принадлежат E_1 при любых x из E_1 и любых преобразованиях $R(g)$, т. е. если во всех преобразованиях $R(g)$ векторы из E_1 превращаются в векторы этого же подпространства, то говорим, что E_1 является инвариантным подпространством представления R . Представление R в пространстве E называется приводимым, если существует нетривиальное подпространство E_1 , инвариантное относительно данного представления. Если такого нетривиального инвариантного подпространства не существует, то представление называется неприводимым.

Пусть R — некоторое приводимое представление группы G в пространстве E , E_1 — некоторое инвариантное подпространство представления R , а E_2 — ортогональное дополнение* к E_1 . Покажем, что если представление R унитарно, то E_2 — также инвариантное подпространство. Действительно, пусть $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$. Так как E_1 является инвариантным подпространством, то $R(g)^{-1}x_1 = R(g^{-1})x_1$ также принадлежит E_1 , и мы имеем

$$(R(g)^{-1}x_1, x_2) = 0.$$

* Согласно определению ортогонального дополнения E_2 к подпространству E_1 , каждый вектор x из E может быть представлен однозначно в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_i \in E_i$ и x_1, x_2 ортогональны, т. е. $(x_1, x_2) = 0$.

Так как представление R унитарно, то

$$\begin{aligned}(R(g)^{-1} \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2) &= (R(g) \hat{R}(g)^{-1} \mathbf{x}_1 R(g) \mathbf{x}_2) = \\ &= (\mathbf{x}_1 R(g) \mathbf{x}_2) = 0.\end{aligned}$$

Итак, если $\mathbf{x}_2 \in E_2$, то $R(g)\mathbf{x}_2$ ортогонален любому вектору $\mathbf{x}_1 \in E_1$ для любого $R(g)$, т. е. $R(g)\mathbf{x}_2 \in E_2$ для любого $R(g)$. Тем самым доказано, что E_2 является инвариантным подпространством. В данном случае пространство E расщепляется на два ортогональных инвариантных подпространства: E_1 и E_2 . Если представления R_1 и R_2 , индуцируемые представлением \hat{R} в подпространствах E_1 и E_2 соответственно, приводимы, то они снова расщепляются, и в результате R расщепляется на неприводимые представления в ортогональных подпространствах. Приводимое представление, расщепляемое на неприводимые, называется вполне приводимым. Не всякое приводимое представление вполне приводимо, но приводимое унитарное представление вполне приводимо.

Для компактной группы Ли каждое представление эквивалентно унитарному, т. е. вполне приводимому представлению. Можно показать также, что конечномерные приводимые представления любой полупростой группы Ли вполне приводимы [6, гл. 3]. Для этих случаев достаточно изучить неприводимые представления.

Покажем теперь, что неприводимые унитарные представления компактной группы G конечномерны. Пусть \mathbf{e} — единичный вектор в пространстве E , преобразующемся по унитарному неприводимому представлению R группы G . Тогда в силу унитарности преобразований $R(g)$

$$\|R(g)\mathbf{e}\| = \sqrt{(R(g)\mathbf{e}R(g)\mathbf{e})} = \sqrt{(\mathbf{e}\mathbf{e})} = \|\mathbf{e}\| = 1.$$

Таким образом, отображение

$$g \rightarrow R(g)\mathbf{e}$$

является отображением группы G в единичную сферу пространства E . Так как группа компактна, то множество векторов $R(g)\mathbf{e}$ также компактно. В функциональном анализе показано, что любое компактное множество на единичной сфере гильбертова пространства содержится в конечномерном пространстве. С другой стороны, из неприводимости представления R следует, что E совпадает с пространством, порожденным множеством векторов $R(g)\mathbf{e}$, т. е. совпадает с множеством всех линейных ком-

бинаций линейно независимых векторов среди векторов $R(g)e$, причем число этих линейно независимых векторов конечно. Таким образом, пространство E конечномерно.

Мы говорили, что пространство, преобразующееся по неприводимому представлению R , порождается множеством векторов $R(g)e$ для всех $R(g)$ и некоторого вектора e . Остановимся теперь более подробно на этом свойстве неприводимых представлений. Пусть задано представление R группы G в пространстве E , и E_1 — инвариантное подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению R_1 и индуцируемое представлением R . Если мы знаем некоторый вектор x подпространства R_1 , то мы можем построить это подпространство следующим образом. Сначала действуем на x всеми операторами $R(g)$ из представления R . Мы получим тогда множество векторов $R(g)x$. Затем образуем все возможные линейные комбинации векторов из этого множества. Мы получим таким путем подпространство, инвариантное относительно представления R , причем оно не может распадаться на два ортогональных инвариантных подпространства, так как порождается множеством векторов $R(g)x$, каждый из которых получается из вектора x при помощи некоторого преобразования $R(g)$.

Неприводимые представления обладают рядом специфических свойств, одно из которых заключается в следующей лемме Шура: если представление R группы G в пространстве E неприводимо, то любой оператор A в пространстве E , коммутирующий со всеми операторами $R(g)$, кратен единичному оператору. Иначе говоря, из условия

$$[R(g), A] = 0 \quad (63)$$

для всех $R(g)$ следует, что

$$A = \lambda I. \quad (64)$$

Докажем эту лемму. Как и любой оператор в комплексном пространстве E , оператор A имеет по крайней мере один собственный вектор x , соответствующий собственному значению λ [3]:

$$Ax = \lambda x. \quad (65)$$

Пусть E_1 — подпространство, состоящее из таких собственных векторов x . Тогда для любого $x \in E_1$ и любого

$R(g)$ имеем $AR(g)x = R(g)Ax = R(g)\lambda x = \lambda R(g)x$, т. е. $R(g)x$ также принадлежит E_1 . Итак, E_1 является инвариантным подпространством. В силу неприводимости представления R подпространство E_1 совпадает с пространством E . Поэтому равенство (65) выполняется для любого вектора x из пространства E , т. е. оператор A имеет вид выражения (64), что и требовалось доказать.

3.4. Инфинитезимальные операторы.

Спряженные и контраградиентные представления.

Произведение представлений

Рассмотрим представление R группы Ли G в пространстве E . Операторы $R(g)$ зависят от существенных параметров ξ_1, \dots, ξ_m , характеризующих элементы g группы G , и обозначаются $R(\xi_1, \dots, \xi_m)$. Из соотношений (38) и (54) следует, что нулевым значениям параметров ξ_i соответствует единичный оператор в пространстве E

$$R(0, 0, \dots, 0) = I,$$

а при бесконечно малых значениях параметров ξ_i

$$R(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i\xi_j \frac{1}{i} \frac{\partial R(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_m=0}. \quad (66)$$

Операторы

$$Y_j = \frac{1}{i} \frac{\partial R(\xi_1, \dots, \xi_m)}{\partial \xi_j} \Big|_{\xi_1=\xi_2=\dots=\xi_m=0} \quad (67)$$

называются инфинитезимальными операторами представления R . Из гомоморфизма групп G и R преобразований $R(g)$ следует, что инфинитезимальные операторы Y_j удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям (45), что и генераторы группы Ли G :

$$[Y_i, Y_j] = C_{ij}^k Y_k. \quad (68)$$

В частности, инфинитезимальные операторы $K_i (i = 1, \dots, l)$, соответствующие генераторам H_i подгруппы Картана (см. п. 2.3), коммутируют

$$[K_i, K_j] = 0; \quad i, j = 1, 2, \dots, l. \quad (69)$$

В п. 3.3 мы указали метод, при помощи которого можно найти инвариантное подпространство E_1 , преобразующееся по неприводимому представлению, исходя из некоторого заданного вектора этого подпространства. Так

как каждое конечное преобразование эквивалентно бесконечной последовательности бесконечно малых преобразований вида (66), которые полностью определяются инфинитезимальными операторами Y_i , то подпространство E_1 можно построить, пользуясь только инфинитезимальными операторами, т. е. применяя следующий прием. Пусть x — некоторый заданный вектор в подпространстве E_1 , преобразующемся по неприводимому представлению группы G . Действуем на этот вектор x всеми инфинитезимальными операторами Y_i , затем на полученные векторы снова действуем всеми операторами Y_i и продолжаем этот процесс до тех пор, пока все новые векторы будут выражены линейно через полученные раньше векторы. Из этого максимального инвариантного множества выделим систему линейно независимых векторов, через которые выражаются линейно все остальные векторы. Полученная система является базисом подпространства E_1 .

В п. 3.3 мы доказали лемму Шура, утверждающую, что в пространстве E , преобразующемся по неприводимому представлению R группы G , любой оператор A , коммутирующий со всеми преобразованиями $R(g)$, кратен единице. Нетрудно показать, что если оператор A коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами Y_i данного представления, то он коммутирует со всеми преобразованиями $R(g)$. Итак, лемму Шура можно сформулировать следующим образом: в пространстве E , преобразующемся по неприводимому представлению группы Ли G , любой оператор, коммутирующий со всеми инфинитезимальными операторами данного представления, кратен единице.

Рассмотрим теперь различные представления, связанные с данным представлением R и имеющие такую же размерность, что и R , но не эквивалентные представлению R . Если соответствие (52)

$$g \rightarrow R(g)$$

является некоторым представлением группы G , то соответствие

$$g \rightarrow R(g)^*, \quad (70)$$

где $R(g)^*$ — матрица, комплексно сопряженная к $R(g)$, служит также представлением группы G , как это нетрудно проверить. Это представление называется сопряжен-

ным к R представлением и обозначается R^* . Покажем теперь, что наряду с отображениями (52) и (70) соответственно

$$g \rightarrow R(g^{-1})^T = [R(g)^{-1}]^T \quad (71)$$

является также представлением группы G . Действительно, положим

$$\bar{R}(g) = R(g^{-1})^T. \quad (72)$$

Мы получим

$$\begin{aligned} \bar{R}(g_1) \bar{R}(g_2) &= R(g_1^{-1})^T R(g_2^{-1})^T = [R(g_2^{-1}) R(g_1^{-1})]^T = \\ &= R(g_2^{-1} g_1^{-1})^T = R((g_1 g_2)^{-1})^T = \bar{R}(g_1 g_2), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Это представление называется контраградиентным к R представлением \bar{R} .

Отметим, что для унитарных представлений контраградиентное к R представление \bar{R} совпадает с сопряженным к R представлением R^* . Действительно, так как все операторы $R(g)$ унитарны

$$R(g)^+ = R(g)^{-1} = R(g^{-1}),$$

то

$$R(g)^* = R(g^{-1})^T.$$

Введение контраградиентных представлений позволяет образовать инварианты групп. Пусть x — вектор с компонентами x_α , преобразующийся по представлению R группы G , а y — вектор с компонентами y_α , преобразующийся по представлению \bar{R} , причем R может быть неунитарным. Мы имеем

$$x'_\alpha = R(g)_{\alpha\beta} x_\beta, y'_\alpha = \bar{R}(g)_{\alpha\beta} y_\beta = R(g^{-1})_{\beta\alpha} y_\beta.$$

Отсюда получаем

$$y'_\alpha x'_\alpha = y_\beta R(g^{-1})_{\beta\alpha} R(g)_{\alpha\gamma} x_\gamma = y_\beta R(e)_{\beta\gamma} x_\gamma = y_\beta x_\beta,$$

т. е. сумма $y_\alpha x_\alpha$ инвариантна.

Если бесконечно малым значениям параметров соответствует преобразование (66) для представления R , то для представления \bar{R} имеем

$$\overline{R(\xi_1, \dots, \xi_m)} = I - i\xi_j Y_j^T. \quad (73)$$

С другой стороны, если обозначить \bar{Y}_j инфинитезимальные операторы представления R , то

$$\overline{R(\xi_1, \dots, \xi_m)} = I + i\xi_j \bar{Y}_j. \quad (74)$$

Сравнивая представления (73) и (74), получаем

$$\bar{Y}_j = -Y_j^T. \quad (75)$$

Рассмотрим, наконец, произведение двух представлений. Произведения нескольких представлений определяются аналогично. Пусть R_1 и R_2 — два представления группы G в пространствах E_1 и E_2 с размерностями n_1 и n_2 соответственно, а e_α и f_β — базисы в этих пространствах. Рассмотрим пространство E с размерностью $n_1 \times n_2$, базис которого образуется из произведений $e_\alpha \otimes f_\beta$. Каждый вектор x в этом пространстве E определяется формулой

$$x = e_\alpha \otimes f_\beta x_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}. \quad (76)$$

Далее, пусть векторы e_α и f_β преобразуются следующим образом в преобразованиях $R_1(g)$ и $R_2(g)$ пространств E_1 и E_2 соответственно:

$$\left. \begin{aligned} R_1(g) e_\alpha &= e'_\alpha = R_1(g)_{\beta\alpha} e_\beta, \alpha = 1, 2, \dots, n_1; \\ R_2(g) f_\alpha &= f'_\alpha = R_2(g)_{\beta\alpha} f_\beta, \alpha = 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Тогда компоненты x_α и y_β векторов x и y в пространствах E_1 и E_2 соответственно преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x'_\alpha &= R_1(g)_{\alpha\beta} x_\beta, \alpha = 1, 2, \dots, n_1; \\ y'_\alpha &= R_2(g)_{\alpha\beta} y_\beta, \alpha = 1, 2, \dots, n_2. \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Действительно, мы получаем

$$\begin{aligned} x' &= R_1(g) x = R_1(g) x_\alpha e_\alpha = x_\alpha e'_\alpha = x_\alpha R_1(g)_{\beta\alpha} e_\beta, \\ y' &= R_2(g) y = R_2(g) y_\alpha f_\alpha = y_\alpha f'_\alpha = y_\alpha R_2(g)_{\beta\alpha} f_\beta. \end{aligned}$$

Сравнивая эти выражения с определениями

$$x' = x'_\beta e_\beta, \quad y' = y'_\beta f_\beta,$$

получаем соотношения (78). Покажем теперь, что если соотношения (77) определяют представления R_1 и R_2 в пространствах E_1 и E_2 , то они также определяют некото-

рое представление R в пространстве E . Действительно; в преобразованиях (77) вектор $e_{\alpha\beta} = e_\alpha \otimes f_\beta$ превращается в вектор $e'_{\alpha\beta}$, который обозначим $R(g)e_{\alpha\beta}$:

$$R(g)e_{\alpha\beta} = e'_{\alpha\beta} = e'_\alpha \otimes f'_\beta = R_1(g)_{\gamma\alpha} e_\gamma \otimes R_2(g)_{\delta\beta} f_\delta,$$

или

$$R(g)e_{\alpha\beta} = R_1(g)_{\gamma\alpha} R_2(g)_{\delta\beta} e_{\gamma\delta}. \quad (79)$$

Отсюда следует, что компоненты $x_{\alpha\beta}$ вектора x из пространства E преобразуются следующим образом:

$$x'_{\alpha\beta} = R(g)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} x_{\gamma\delta} = R_1(g)_{\alpha\gamma} R_2(g)_{\beta\delta} x_{\gamma\delta}. \quad (80)$$

Итак, матричные элементы преобразования $R(g)$ связаны с матричными элементами преобразований $R_1(g)$ и $R_2(g)$ соотношением

$$R(g)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = R_1(g)_{\alpha\gamma} R_2(g)_{\beta\delta}. \quad (81)$$

Пусть g и h — любые элементы из группы G . Из соотношения (81) следует, что

$$\begin{aligned} R(gh)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} &= R_1(gh)_{\alpha\gamma} R_2(gh)_{\beta\delta} = \\ &= R_1(g)_{\alpha\alpha'} R_1(h)_{\alpha'\gamma} R_2(g)_{\beta\beta'} R_2(h)_{\beta'\delta} = R(g)_{(\alpha\beta)(\alpha'\beta')} R(h)_{(\alpha'\beta')(\gamma\delta)}. \end{aligned}$$

Итак, соответствие

$$g \rightarrow R(g)_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$$

является представлением группы G . Оно называется произведением представлений R_1 и R_2 .

Соотношение (81) позволяет установить связь между инфинитезимальными операторами Y_k представления R и инфинитезимальными операторами $Y_k^{(1)}$ и $Y_k^{(2)}$ представлений R_1 и R_2 . Для бесконечно малых значений параметров

$$R_1(\xi_1, \dots, \xi_m)_{\alpha\gamma} \approx \delta_{\alpha\gamma} + i\xi_k (Y_k^{(1)})_{\alpha\gamma};$$

$$R_2(\xi_1, \dots, \xi_m)_{\beta\delta} \approx \delta_{\beta\delta} + i\xi_k (Y_k^{(2)})_{\beta\delta},$$

и, следовательно,

$$[R(\xi_1, \dots, \xi_m)]_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} \approx \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + i\xi_k [\delta_{\alpha\gamma} (Y_k^{(2)})_{\beta\delta} + (Y_k^{(1)})_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}], \quad (82)$$

или в матричном виде

$$R(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i\xi_k [I^{(1)} \otimes Y_k^{(2)} + Y_k^{(1)} \otimes I^{(2)}]. \quad (82')$$

Сравнивая с определением

$$R(\xi_1, \dots, \xi_m) = I + i\xi_k Y_k,$$

получаем

$$Y_k = I^{(1)} \otimes Y_k^{(2)} + Y_k^{(1)} \otimes I^{(2)}. \quad (83)$$

Здесь $I^{(i)}$ — единичный оператор в пространстве E_i , и операторы $Y_k^{(1)}$ действуют только на первый индекс, а $Y_k^{(2)}$ — на второй. Отметим, что произведение неприводимых представлений, вообще говоря, приводимо и может быть разложено на неприводимые представления, если оно вполне приводимо. Эти разложения будут рассмотрены в дальнейшем в конкретных случаях.

Для простоты при определении произведения представлений предполагается, что базисные векторы имеют вид произведений $e_\alpha \otimes f_\beta$. В действительности нет необходимости в этой специализации пространства E . Вообще говоря, для определения произведения представлений достаточно ввести непосредственно базис $e_{\alpha\beta}$, преобразующийся по формуле (79).

§ 4. Группа $SU(n)$ и ее представления

4.1. Генераторы группы $SU(n)$ и ее основные представления

В качестве примера применения общей теории, изложенной в предыдущих параграфах, мы рассмотрим группу $SU(n)$. Докажем ряд общих утверждений для унитарных унимодулярных групп, которыми будем пользоваться при изучении симметрий $SU(2)$, $SU(3)$ и $SU(6)$.

Посмотрим прежде всего, от скольких вещественных параметров зависят элементы группы $SU(n)$. Напомним, что из условия

$$\det U(\xi_1, \dots, \xi_m) = 1$$

для матрицы $U(\xi_1, \dots, \xi_m)$, бесконечно близкой к единице:

$$U(\xi_1, \dots, \xi_m) \approx I + i\xi_k X_k,$$

следует, что шпуры генераторов X_k равны нулю:

$$\text{Sp } X_k = 0, \quad (84)$$

а из условия унитарности

$$U(\xi_1, \dots, \xi_m)^+ U(\xi_1, \dots, \xi_m) = I$$

следует, что матрицы X_k эрмитовы:

$$X_k^+ = X_k \quad (85)$$

[см. формулы (43) и (44)]. Каждая комплексная матрица $n \times n$ имеет n^2 комплексных матричных элементов, т. е. зависит от $2n^2$ вещественных параметров. Условие эрмитовости (85) эквивалентно n^2 уравнениям и уменьшает число независимых матриц до n^2 . Так как шпур эрмитовой матрицы действителен, то условие (84) дает одно новое уравнение и число независимых матриц, удовлетворяющих условиям (84) и (85), равно $n^2 - 1$. Итак, размерность m группы $SU(n)$ равна

$$m = n^2 - 1. \quad (86)$$

Для $n = 2, 3, 6$ $m = 3, 8, 35$ соответственно.

Рассмотрим теперь некоторые основные неприводимые представления группы $SU(n)$. Представлением с наименьшей размерностью является одномерное представление, в котором всем элементам $g = U$ соответствует умножение на 1:

$$U \rightarrow 1,$$

и, следовательно, все инфинитезимальные операторы равны нулю:

$$Y_k = 0. \quad (87)$$

Нетрудно показать, что одним из неприводимых представлений с наименьшей размерностью, отличной от 1, является представление

$$U \rightarrow U.$$

В данном случае сама группа $SU(n)$ рассматривается как ее представление. Это представление называется фундаментальным. Его инфинитезимальные операторы совпадают с генераторами группы

$$Y_k = X_k. \quad (88)$$

Другим неприводимым представлением с наименьшей размерностью, отличной от единицы, служит контраградиентное к фундаментальному представление, совпадающее с сопряженным, инфинитезимальные операторы которого равны

$$Y_k = \bar{X}_k = -X_k^T. \quad (89)$$

Условимся теперь об обозначениях. Базисные векторы в пространстве E_1 , преобразующемся по фундаменталь-

ному представлению, обозначим e^α ; $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что эти базисные векторы удовлетворяют условию

$$(e^\alpha, e^\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

т. е. ортонормированы. В преобразовании U вектор e^α превращается в некоторый вектор e'^α

$$e'^\alpha = Ue^\alpha = U_{\beta\alpha}e^\beta. \quad (90)$$

Пусть Ψ — вектор в E_1 с компонентами Ψ_α

$$\Psi = \Psi_\alpha e^\alpha. \quad (91)$$

Тогда в преобразовании U он превращается в вектор Ψ' с компонентами Ψ'_α

$$\Psi'_\alpha = U_{\alpha\beta}\Psi_\beta. \quad (92)$$

В дальнейшем векторы в пространстве E_1 , преобразующемся по фундаментальному представлению, будем называть ковариантными спинорами первого ранга. Итак, компоненты ковариантных спиноров первого ранга преобразуются по закону (92).

Аналогично в пространстве $E_{\bar{1}}$, преобразующемся по представлению, контраградиентному к фундаментальному представлению, выберем некоторый базис e_α . Преобразование векторов e_α имеет вид

$$e'_\alpha = U^*e_\alpha = U_{\beta\alpha}^*e_\beta. \quad (93)$$

Если Ψ — некоторый вектор из пространства $E_{\bar{1}}$ с компонентами Ψ^α

$$\Psi = \Psi^\alpha e_\alpha, \quad (94)$$

то по аналогии с формулой (92) мы имеем

$$\Psi'^\alpha = U_{\alpha\beta}^*\Psi^\beta = \Psi^\beta U_{\beta\alpha}^+. \quad (95)$$

Векторы в пространстве $E_{\bar{1}}$ называются контравариантными спинорами первого ранга. Итак, компоненты контравариантных спиноров первого ранга преобразуются по закону (95).

В заключение отметим, что если Ψ_α — компоненты ковариантного спинора, то комплексно сопряженные величины $(\Psi_\alpha)^*$ преобразуются как компоненты контравариантного спинора, который обозначим Ψ^+ . Таким образом,

$$(\Psi^+)^\alpha = (\Psi_\alpha)^*.$$

Перейдем теперь к изучению пространств, преобразующихся по представлениям, являющимся произведениями фундаментальных представлений и контраградиентным к фундаментальному представлению. Рассмотрим прежде всего пространство E_p , преобразующееся по представлению $U \otimes U \otimes \dots \otimes U$, которое можно представить в виде произведения p фундаментальных представлений U . Базисные векторы $e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ в этом пространстве преобразуются следующим образом:

$$e'^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U^p e^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U_{\beta_1 \alpha_1} U_{\beta_2 \alpha_2} \dots U_{\beta_p \alpha_p} e^{\beta_1 \dots \beta_p} \quad (96)$$

по аналогии с законом (79) для произведения двух представлений.

Предположим, что векторы $e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ ортонормированы:

$$(e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, e^{\beta_1 \dots \beta_p}) = \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_p \beta_p}.$$

Произвольный вектор Ψ^p в пространстве E_p определяется формулой

$$\Psi^p = \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p} e^{\alpha_1 \dots \alpha_p}. \quad (97)$$

Компоненты $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ преобразуются по закону

$$\Psi'_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_p} = U_{\alpha_1 \beta_1} U_{\alpha_2 \beta_2} \dots U_{\alpha_p \beta_p} \Psi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}, \quad (98)$$

как это нетрудно проверить. Векторы в пространстве E_p с компонентами вида $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ называются ковариантными спинорами p -го ранга. Итак, компоненты ковариантных спиноров p -го ранга преобразуются как произведения p компонент ковариантных спиноров первого ранга.

Аналогично ортонормированные базисные векторы $e_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$

$$(e_{\alpha_1 \dots \alpha_p}, e_{\beta_1 \dots \beta_p}) = \delta_{\alpha_1 \beta_1} \dots \delta_{\alpha_p \beta_p}$$

в пространстве E_p^- , преобразующемся по представлению $U^* \otimes U^* \otimes \dots \otimes U^*$, являющемуся произведением p контраградиентных к фундаментальному представлений U^* , преобразуются следующим образом:

$$e'_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U^{\bar{p}} e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U_{\beta_1 \alpha_1}^* U_{\beta_2 \alpha_2}^* \dots U_{\beta_p \alpha_p}^* e_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p}, \quad (99)$$

а компоненты $\Psi^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ вектора $\Psi^{\bar{p}}$

$$\Psi^{\bar{p}} = \Psi^{\alpha_1 \dots \alpha_p} e_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (100)$$

преобразуются по закону

$$\begin{aligned} \Psi'^{\alpha_1 \dots \alpha_p} &= U_{\alpha_1 \beta_1}^* U_{\alpha_2 \beta_2}^* \dots U_{\alpha_p \beta_p}^* \Psi^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_p} \\ &= \Psi^{\beta_1 \dots \beta_p} U_{\beta_1 \alpha_1}^+ \dots U_{\beta_p \alpha_p}^+. \end{aligned} \quad (101)$$

Эти векторы называются контравариантными спинорами p -го ранга. Итак, соотношение (101) является законом преобразования компонент контравариантных спиноров p -го ранга.

Нетрудно увидеть, что если $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ — компоненты ковариантного спинора ранга p , то $(\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p})^*$ — компоненты контравариантного спинора такого же ранга

$$(\Psi^+)^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p})^*.$$

В пространстве E_{pq} , преобразуемом по представлению

$$\underbrace{U \otimes \dots \otimes U}_p \otimes \underbrace{U^* \otimes \dots \otimes U^*}_q,$$

введем ортонормированный базис $e_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$

$$\left(e_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}, e_{\beta_1' \dots \beta_q'}^{\alpha_1' \dots \alpha_p'} \right) = \delta_{\alpha_1 \alpha_1'} \dots \delta_{\alpha_p \alpha_p'} \delta_{\beta_1 \beta_1'} \dots \delta_{\beta_q \beta_q'}.$$

Тогда

$$U^{p\bar{q}} e_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U_{\gamma_1 \alpha_1} \dots U_{\gamma_p \alpha_p} U_{\delta_1 \beta_1}^* \dots U_{\delta_q \beta_q}^* e_{\delta_1 \dots \delta_q}^{\gamma_1 \dots \gamma_p}. \quad (102)$$

Компоненты вектора

$$\Psi^{p\bar{q}} = \Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q} e_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (103)$$

преобразуются по закону

$$\Psi'^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U_{\alpha_1 \gamma_1} \dots U_{\alpha_p \gamma_p} U_{\beta_1 \dots \delta_1}^* \dots U_{\beta_q \delta_q}^* \Psi_{\gamma_1 \dots \gamma_p}^{\delta_1 \dots \delta_q}. \quad (104)$$

Эти векторы называются смешанными спинорами, ковариантными p раз и контравариантными q раз. Так как каждый спинор полностью определяется своими компо-

нентами, то в дальнейшем для характеристики спиноров, т. е. векторов в пространствах типа $E_{p\bar{q}}$, будем пользоваться их компонентами $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$. Отметим, что если $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ — компоненты спинора, p раз ковариантного и q раз контравариантного, то $(\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q})^*$ — компоненты некоторого спинора, q раз ковариантного и p раз контравариантного, который обозначаем Ψ^+ . Мы имеем, таким образом,

$$(\Psi^+)_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q})^*.$$

В заключение рассмотрим три специальных спинора высших рангов: спинор второго ранга в пространстве $E_{\bar{1}}$ с компонентами

$$\Psi_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} \quad (105)$$

и спиноры n -го ранга в пространстве E_n или $E_{\bar{n}}$ с компонентами

$$\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}; \quad (106)$$

$$\Psi^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \quad (107)$$

где $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$, если два (или больше) индекса α_i и α_j совпадают, равно 1, если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — четная перестановка $(1, 2, \dots, n)$, и равно -1 , если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — нечетная перестановка. Этот спинор называем полностью антисимметричным тензором n -го ранга. Для спинора (105) в силу условия $UU^+ = 1$ имеем закон преобразования

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = U_{\beta\delta} U_{\alpha\gamma}^* \delta_{\delta}^{\gamma} = U_{\beta\gamma} U_{\gamma\alpha}^+ = (UU^+)_{\beta\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha},$$

а для спиноров (106) и (107) в силу условия $\det U = 1$

$$\varepsilon'_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = U_{\sigma_1 \beta_1} \dots U_{\alpha_n \beta_n} \varepsilon_{\beta_1 \dots \beta_n} = \det U \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$$

и

$$\varepsilon'^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = U_{\alpha_1 \beta_1}^* \dots U_{\alpha_n \beta_n}^* \varepsilon^{\beta_1 \dots \beta_n} = \det U^* \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_n}.$$

Таким образом, компоненты спиноров (105)—(107) не меняются при всех преобразованиях группы $SU(n)$. Ина-

че говоря, эти спиноры являются инвариантами группы $SU(n)$. Если обозначим e_{β}^{α} , $e^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ и $e_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ базисы в пространствах $E_{1\bar{1}}$, E_n и $E_{\bar{n}}$ соответственно, то векторы в этих пространствах с компонентами (105) — (107) имеют вид

$$\delta = e_x^z = e_1^1 + \dots + e_n^n; \quad (105')$$

$$\varepsilon^p = e^{123\dots n} - e^{213\dots n} + e^{231\dots n} - \dots \quad (106')$$

$$\varepsilon_p = e_{123\dots n} - e_{213\dots n} + e_{231\dots n} - \dots \quad (107')$$

Эти векторы служат базисами одномерных пространств, инвариантных относительно группы $SU(n)$, т. е. являются базисами пространств, преобразующихся по ее одномерным представлениям.

4.3. Неприводимые представления

Рассмотренные в п. 4.2 произведения фундаментальных и контраградиентных им представлений приводимы. Так как эти представления являются произведениями унитарных представлений, то они унитарны и, следовательно, вполне приводимы (см. п. 3.3). Теперь займемся разложением этих представлений на неприводимые.

Начнем с простого примера представления $U \otimes U$ в пространстве E_2 с базисом $e^{\alpha_1 \alpha_2}$. Векторы в этом пространстве — ковариантные спиноры второго ранга. Из произвольного спинора $\Psi_{\alpha_1 \alpha_2}$ образуем симметричный и антисимметричный спиноры с компонентами

$$\Psi_{\{\alpha_1 \alpha_2\}} = \frac{1}{2} (\Psi_{\alpha_1 \alpha_2} + \Psi_{\alpha_2 \alpha_1}); \quad (108)$$

$$\Psi_{[\alpha_1 \alpha_2]} = \frac{1}{2} (\Psi_{\alpha_1 \alpha_2} - \Psi_{\alpha_2 \alpha_1}). \quad (109)$$

В соответствии с этим пространство E_2 разлагается на два подпространства E_2^s и E_2^a , базисы которых образуются из $n(n+1)/2$ векторов

$$e^{\{\alpha_1 \alpha_2\}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{\alpha_1 \alpha_2} + e^{\alpha_2 \alpha_1}), & \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ e^{\alpha_1 \alpha_2}, & \alpha_1 = \alpha_2, \end{cases} \quad (108')$$

и $n(n-1)/2$ векторов

$$\mathbf{e}^{[\alpha_1\alpha_2]} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2} - \mathbf{e}^{\alpha_2\alpha_1}) \quad (109')$$

соответственно. Любой вектор в пространстве E_2^s имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_s = & \sum_{\alpha_1 > \alpha_2} \Phi_{\alpha_1\alpha_2} \mathbf{e}^{[\alpha_1\alpha_2]} = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha\alpha} \mathbf{e}^{\alpha\alpha} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha_1 > \alpha_2} \Phi_{\alpha_1\alpha_2} (\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2} + \mathbf{e}^{\alpha_2\alpha_1}). \end{aligned} \quad (110)$$

Если обозначить $\Psi_{\alpha_1\alpha_2}^s$ компоненты вектора Ψ_s в исходном базисе $\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2}$, то

$$\Psi_s = \sum_{\alpha_1\alpha_2} \Psi_{\alpha_1\alpha_2}^s \mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2}. \quad (111)$$

Сравнивая выражения (110) и (111), получаем

$$\Psi_{\alpha_2\alpha_1}^s = \Psi_{\alpha_1\alpha_2}^s = \begin{cases} \Phi_{\alpha_1\alpha_2}, & \alpha_1 = \alpha_2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha_1\alpha_2}, & \alpha_1 > \alpha_2, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{\alpha_2\alpha_1}, & \alpha_1 < \alpha_2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\Psi_{\alpha_2\alpha_1}^s = \Psi_{\alpha_1\alpha_2}^s$. Таким образом, векторы в пространстве E_2^s — симметричные спиноры. Аналогично векторы в пространстве E_2^a — антисимметричные спиноры. Так как любой вектор вида (108') ортогонален любому вектору вида (109'), то подпространства E_2^s и E_2^a ортогональны. Они являются инвариантными подпространствами. Действительно, нетрудно проверить, что в любом преобразовании $U \otimes U$ симметричный спинор второго ранга превращается в симметричный спинор второго ранга, т. е. вектор из подпространства E_2^s превращается в вектор из этого подпространства, и аналогично антисимметричный спинор превращается в антисимметричный спинор, т. е. подпространство E_2^a превращается в себя. Покажем, что они преобразуются по неприводимым представлениям. Выберем любые два базисных вектора, например вида выражения (108'). С помощью конкретных выражений (83)

матриц Y_k — инфинитезимальных операторов данного представления — мы можем показать, что существует такая последовательность инфинитезимальных операторов $Y_{k_1}, Y_{k_2}, \dots, Y_{k_m}, \dots$, что в результате действия этих операторов на один из выбранных векторов можно получить вектор, пропорциональный второму. Тем самым неприводимость представлений в E_2^s и E_2^a доказана (ср. с методом построения неприводимых представлений, изложенным в п. 3.4).

Таким образом, любой ковариантный спинор второго ранга разлагается на симметричный и антисимметричный ковариантные спиноры

$$\Psi_{\alpha_1 \alpha_2} = \Psi_{\{\alpha_1 \alpha_2\}} + \Psi_{[\alpha_1 \alpha_2]}, \quad (112)$$

образующие неприводимые представления.

Рассмотрим теперь представление $U \otimes U^*$ в пространстве $E_{1\bar{1}}$ с базисом e_β^α . Векторы в этом пространстве являются спинорами второго ранга с компонентами Ψ_α^β . Покажем прежде всего, что сумма Ψ_α^α инвариантна относительно всех преобразований $U \otimes U^*$. Действительно, согласно формуле (104), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha^{\prime\beta} &= U_{\alpha\gamma} U_{\beta\delta}^* \Psi_\gamma^\delta; \\ \Psi_\alpha^{\prime\alpha} &= U_{\alpha\gamma} U_{\alpha\delta}^* \Psi_\gamma^\delta = U_{\alpha\gamma} U_{\delta\alpha}^+ \Psi_\gamma^\delta = (U^+ U)_{\delta\gamma} \Psi_\gamma^\delta = \\ &= \delta_{\delta\gamma} \Psi_\gamma^\delta = \Psi_\alpha^\alpha, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Отсюда следует, в частности, что если спинор Ψ_α^β имеет шпур, равный нулю, то это свойство инвариантно относительно всех преобразований $U \otimes U^*$. Рассмотрим теперь произвольный спинор $\Psi^{\beta\alpha}$ и разложим его на две части, первая из которых имеет нулевой шпур, а вторая пропорциональна δ_α^β :

$$\Psi_\alpha^\beta = \left(\Psi_\alpha^\beta - \frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \Psi_\gamma^\gamma \right) + \frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \Psi_\gamma^\gamma. \quad (113)$$

В п. 4.2 мы показали, что спинор δ_α^β является инвариантом. Таким образом, спиноры с нулевым шпуром $\Psi_\alpha^\beta - \frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \Psi_\gamma^\gamma$ и спиноры $\frac{1}{n} \delta_\alpha^\beta \Psi_\gamma^\gamma$, кратные спинору δ_α^β , образуют инвариантные подпространства в $E_{1\bar{1}}$. Эти подпро-

странства ортогональны, так как скалярное произведение δ_α^β на произвольный спинор Φ_β^α равно шпуру этого спинора

$$\delta_\alpha^\beta \Phi_\beta^\alpha = \Phi_\alpha^\alpha.$$

При помощи указанного выше метода можно показать, что спиноры с нулевым шпуром образуют неприводимые представления. Таким образом, формула (113) представляет собой разложение произвольного спинора Ψ_α^β на неприводимые. Первый спинор в этой формуле имеет $n^2 - 1$ компонент, а второй является инвариантом.

Отметим, что инвариантность суммы Ψ_α^α — частный случай следующего общего факта. Если $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{\beta_1 \dots \beta_q}$ — смешанный спинор $(p + q)$ -го ранга, p раз ковариантный и q раз контравариантный, то сумма $\Psi_{\alpha_2 \dots \alpha_p}^{\alpha_2 \dots \alpha_p}$ является смешанным спинором $(p + q - 2)$ -го ранга, $p - 1$ раз ковариантным и $q - 1$ раз контравариантным. Доказательство этого важного утверждения не отличается от доказательства инвариантности суммы Ψ_α^α .

Рассмотрим теперь спиноры высших рангов. Из любого ковариантного спинора, например p -го ранга, можно образовать полностью симметричный спинор $\Psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}$, который неприводим. Аналогично, если $p \leq n$, можно образовать также полностью антисимметричный спинор $\Psi_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]}$, который также неприводим. Так как для полностью антисимметричного спинора все индексы должны быть разными, то не существует полностью антисимметричного спинора ранга $p > n$. Симметричный спинор p -го ранга имеет $\frac{1}{p!} n(n + 1) \dots (n + p - 1)$ независимых компонент, а антисимметричный спинор p -го ранга имеет $\frac{1}{p!} n(n - 1) \dots (n - p + 1)$ компонент. Кроме спиноров $\Psi_{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}$ и $\Psi_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]}$ существуют также и другие спиноры, симметризованные по некоторым парам индексов и затем антисимметризованные по другим парам. Эти спиноры характеризуются так называемыми схемами Юнга, содержащими клетки, причем антисимметричным индексам соответствуют клетки, расположенные в одном столбце, а симметризованным индексам — в одной стро-

ке. Так, любой ковариантный спинор третьего ранга $\Psi_{\alpha\beta\gamma}$ может быть представлен в виде суммы следующих четырех неприводимых спиноров: полностью симметричного спинора

$$\Psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} = \frac{1}{6} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} + \Psi_{\beta\alpha\gamma} + \Psi_{\beta\gamma\alpha} + \Psi_{\gamma\beta\alpha} + \Psi_{\gamma\alpha\beta} + \Psi_{\alpha\gamma\beta}), \quad (114)$$

полностью антисимметричного спинора

$$\Psi_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{6} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} - \Psi_{\beta\alpha\gamma} + \Psi_{\beta\gamma\alpha} - \Psi_{\gamma\beta\alpha} + \Psi_{\gamma\alpha\beta} - \Psi_{\alpha\gamma\beta}), \quad (115)$$

спинора, симметризованного по α и β и затем антисимметризованного по β и γ ,

$$\Psi_{\{\alpha[\beta\gamma]\}} = \frac{1}{3} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} + \Psi_{\beta\alpha\gamma} - \Psi_{\alpha\gamma\beta} - \Psi_{\gamma\alpha\beta}) \quad (116)$$

и спинора, симметризованного по β и γ и затем антисимметризованного по α и β ,

$$\Psi_{[\alpha\{\beta\gamma\}]} = \frac{1}{3} (\Psi_{\alpha\beta\gamma} + \Psi_{\alpha\gamma\beta} - \Psi_{\beta\alpha\gamma} - \Psi_{\beta\gamma\alpha}). \quad (117)$$

Действительно, нетрудно видеть, что

$$\Psi_{\alpha\beta\gamma} = \Psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} + \Psi_{[\alpha\beta\gamma]} + \Psi_{\{\alpha[\beta\gamma]\}} + \Psi_{[\alpha\{\beta\gamma\}]} \quad (118)$$

Отметим, что спиноры (116) и (117) удовлетворяют тождеству вида

$$\Psi_{\{\alpha[\beta\gamma]\}} + \Psi_{\{\beta[\gamma\alpha]\}} + \Psi_{\{\gamma[\alpha\beta]\}} = 0. \quad (119)$$

Неприводимые спиноры (114)–(117) характеризуются следующими схемами Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \beta & \alpha \\ \hline \gamma & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \beta & \gamma \\ \hline \alpha & \\ \hline \end{array}$$

Числа их компонент равны $\frac{1}{3!} n(n+1)(n+2)$, $\frac{1}{3!} n(n-1)(n-2)$, $\frac{1}{3} n(n^2-1)$ и $\frac{1}{3} n(n^2-1)$.

Аналогично любой ковариантный спинор p -го ранга разлагается на сумму неприводимых спиноров, симметризованных и антисимметризованных по определенным схемам Юнга.

Мы рассмотрели ковариантные спиноры. При помощи полностью антисимметричного спинора n -го ранга $\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ для любых контраградиентных и смешанных спиноров можно ввести эквивалентные им ковариантные спиноры. Например, контравариантный спинор Ψ^α эквивалентен полностью антисимметричному ковариантному спинору пятого ранга:

$$\Psi_{[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \Psi^\nu,$$

так как произведения $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} \Psi^\nu$ образуют спинор седьмого ранга, шесть раз ковариантный и один раз контравариантный, а суммирование по ν превращает его в ковариантный спинор пятого ранга. Аналогичным методом можно спустить все верхние индексы любого спинора и превратить его в ковариантный спинор. Для характеристики последнего можно пользоваться схемой Юнга. Итак, все спиноры характеризуются полностью схемами Юнга.

Как было указано, не существует полностью антисимметричного спинора ранга $p > n$. Это означает, что каждый столбец в схеме Юнга содержит не больше n клеток. Более того, полностью антисимметричный спинор n -го ранга является инвариантом, так что их можно не рассматривать. Итак, каждый столбец фактически содержит не больше $n - 1$ клеток, т. е. схема Юнга содержит не больше $n - 1$ строк, каждая из которых может содержать любое число клеток. Числа клеток в этих строках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ полностью определяют соответствующее неприводимое представление. Иначе говоря, каждое неприводимое представление характеризуется $n - 1$ целыми числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, являющимися числами клеток в $n - 1$ строках в соответствующей схеме Юнга. Во многих случаях эквивалентные спиноры, например типа Ψ^α и $\Psi_{[\alpha\beta\gamma\delta\epsilon]}$, физически неэквивалентны. Тогда необходимо рассмотреть отдельно верхние и нижние индексы и для характеристики спиноров нужно ввести две схемы Юнга: одну для верхних индексов, а другую для нижних. Чтобы образовать неприводимые представления, необходимо также вычесть шпуры по всем парам индексов, содержащим один верхний и один нижний индексы.

В заключение отметим, что группа $SU(n)$ компактна. Следовательно, все ее представления можно считать уни-

тарными. Они вполне приводимы и распадаются на неприводимые представления, а последние конечномерны. При помощи изложенного выше метода мы исчерпываем все возможные неприводимые представления группы $SU(n)$.

Литература

1. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М., Гостехиздат, 1954.
2. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. М., Гостехиздат, 1950.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. III, ч. 2, гл. 2. М., Гостехиздат, 1957.
4. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, гл. 1. М., Физматгиз, 1958.
5. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца, гл. 1. М., Физматгиз, 1956.
6. Джекобсон Н. Алгебра Ли. М., «Мир», 1964.

Группа $SU(2)$ и изотопическая инвариантность

§ 1. Неприводимые представления группы $SU(2)$

1.1. Группа вращений и состояния с определенными моментами

В квантовой механике предполагается, что при вращениях пространства волновые функции состояний физических систем преобразуются по неприводимым представлениям группы вращений. Обозначим J_i инфинитезимальные операторы, соответствующие генераторам X_i группы вращений, определяемым формулами (40) и (40') в гл. 1. Из инвариантности волнового уравнения относительно группы вращений следует, что гамильтониан H коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами J_i :

$$[H, J_i] = 0.$$

Следовательно, инфинитезимальные операторы выражают сохраняющиеся физические величины. Они называются операторами углового момента.

Операторы углового момента удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$$

[см. гл. 1, формулу (41')]. Из этих соотношений следует, что полный момент

$$\mathbf{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

коммутирует со всеми J_i :

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0.$$

Согласно лемме Шура (см. гл. 1, п. 3.4), для каждого неприводимого представления оператор \mathbf{J}^2 кратен единице, т. е. имеет определенное собственное значение. Иначе

говоря, состояния с определенными угловыми моментами описываются неприводимыми представлениями группы вращений. Так как группа вращений и группа $SU(2)$ локально изоморфны (см. гл. 1, п. 1.5), то группу вращений в дальнейшем будем отождествлять с группой $SU(2)$.

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства неприводимых представлений группы $SU(2)$. Индексы спиноров обозначим a, b, \dots . Так как каждый индекс может принимать только два значения $a, b = 1, 2$, то единственными антисимметричными спинорами являются антисимметричные спиноры второго ранга ε^{ab} и ε_{ab} . Для удобства мы выберем эти спиноры так, чтобы $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon_{ab}$. Например, можно положить

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon^{21} = -\varepsilon^{12} = 1. \quad (1)$$

Нетрудно проверить следующее соотношение:

$$\varepsilon^{ab}\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{cb}\varepsilon^{ba} = \delta_c^a. \quad (2)$$

Спиноры ε^{ab} и ε_{ab} позволяют поднимать или опускать индексы спиноров. Например,

$$\Psi_a = \varepsilon_{ab}\Psi^b; \quad \Psi^a = \varepsilon^{ab}\Psi_b, \quad (3)$$

т. е. контравариантный спинор Ψ^a эквивалентен ковариантному спинору Ψ_a . Аналогично спиноры Ψ_{ab} и Ψ_b^a связаны соотношениями

$$\Psi_{ab} = \varepsilon_{ac}\Psi_b^c; \quad \Psi_b^a = \varepsilon^{ac}\Psi_{cb}. \quad (4)$$

Если Ψ_b^a имеет нулевой шпур, то Ψ_{ab} симметричен. Действительно, если $\Psi_a^a = 0$, то, согласно (2),

$$\varepsilon^{ab}\Psi_{ab} = \varepsilon^{ab}\varepsilon_{ac}\Psi_b^c = -\varepsilon^{ba}\varepsilon_{ac}\Psi_b^c = -\delta_c^b\Psi_b^c = -\Psi_c^c = 0,$$

а равенство нулю произведения $\varepsilon^{ab}\Psi_{ab}$ означает, что $\Psi_{ab} = \Psi_{ba}$. Обратно, если $\Psi_{ab} = \Psi_{ba}$, то

$$\Psi_a^a = \varepsilon^{ac}\Psi_{ca} = 0,$$

т. е. Ψ_b^a имеет нулевой шпур. Итак, неприводимый симметричный спинор $\Psi_{\{ab\}}$ полностью эквивалентен смешанному спинору Ψ_b^a с нулевым шпуром.

Рассмотрим теперь любой неприводимый смешанный спинор $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$, для которого шпуры по всем парам индексов a_i и b_j равны нулю:

$$\Psi_{\{a_1 \dots a_{i-1} c a_{i+1} \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_{j-1} c b_{j+1} \dots b_q\}} = 0. \quad (5)$$

Опуская все верхние индексы с помощью ϵ_{ab} , получаем ковариантный спинор ранга $p + q$:

$$\Psi_{c_1 \dots c_q a_1 \dots a_p} = \epsilon_{c_1 b_1} \dots \epsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}, \quad (6)$$

причем из симметричности спинора $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$ по верхним индексам и по нижним индексам следует симметричность спинора (6) по всем индексам a_1, \dots, a_p и по всем индексам c_1, \dots, c_q . Покажем теперь, что спинор (6) симметричен также относительно перестановки любой пары индексов a_i и c_j . Действительно, умножая его на $\epsilon^{j a_i}$ и суммируя по c_j и a_i , получим, согласно формулам (2) и (5),

$$\begin{aligned} \epsilon^{c_j a_i} \Psi_{c_1 \dots c_j \dots c_q a_1 \dots a_i \dots a_p} &= \epsilon^{c_j a_i} \epsilon_{c_1 b_1} \dots \epsilon_{c_j b_j} \dots \epsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_i \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_j \dots b_q\}} = \\ &= - \epsilon_{c_1 b_1} \dots \delta_{b_j}^{a_i} \dots \epsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_i \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_j \dots b_q\}} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если все шпуры (5) равны нулю, то ковариантный спинор (6) симметричен по отношению ко всем перестановкам всех индексов:

$$\epsilon_{c_1 b_1} \dots \epsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}} = \Psi_{\{a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q\}}. \quad (7)$$

Спинор $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$ также можно выразить через $\Psi_{\{a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q\}}$

$$\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}} = \epsilon^{b_1 c_1} \dots \epsilon^{b_q c_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q\}}. \quad (8)$$

Следовательно все неприводимые представления группы $SU(2)$ могут быть рассмотрены как ковариантные симметричные спиноры $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}$

Как было показано в п. 4.3 гл. 1, симметричные ковариантные спиноры можно получить симметризацией произвольных спиноров с компонентами $\Psi_{a_1 \dots a_p}$, являющихся векторами в пространстве E_r , преобразующем-

ся по представлению $U \otimes U \otimes \dots \otimes U$. Так как любой вектор в E_r определяется формулой

$$\Psi = \Psi_{a_1 \dots a_r} e^{a_1 \dots a_r},$$

где $e^{a_1 \dots a_r}$ — ортонормированный базис в E_r , то симметричные спиноры являются векторами в подпространстве E_r^s с базисом

$$e^{\{a_1 \dots a_r\}} = \frac{\sum_{P(a_1 \dots a_r)} e^{a_1 \dots a_r}}{\left\| \sum_{P(a_1 \dots a_r)} e^{a_1 \dots a_r} \right\|}, \quad (9)$$

где $\sum_{P(a_1 \dots a_r)}$ обозначает суммирование по всем перестановкам индексов a_1, \dots, a_r .

Рассмотрим теперь матричные элементы инфинитезимальных операторов J_i . В исходном базисе $e^{a_1 \dots a_r}$ имеем

$$\begin{aligned} & (J_i)_{(a_1 \dots a_r)(b_1 \dots b_r)} = \\ & = \sum_{i=1}^r \delta_{a_i b_i} \dots \delta_{a_{i-1} b_{i-1}} \left(\frac{\sigma_i}{2} \right)_{a_i b_i} \delta_{a_{i+1} b_{i+1}} \dots \delta_{a_r b_r}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\sigma_i/2$ — инфинитезимальные операторы фундаментального представления, т. е. генераторы группы $SU(2)$ [см. гл. 1, формулы (82) и (83)]. Так как σ_i не коммутируют, то только один из них имеет диагональный вид. В качестве диагонального оператора выбираем σ_3 :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тогда оператор J_3 диагонален. Допустим, что q индексов среди a_1, \dots, a_r равны 1, а $r - q$ остальных равны 2. Тогда из формул (10) и (11) получаем

$$(J_3)_{(a_1 \dots a_r)(b_1 \dots b_r)} = \left(\frac{q}{2} - \frac{r-q}{2} \right) \delta_{a_1 b_1} \dots \delta_{a_r b_r}.$$

В частности,

$$J_3 e^{\{a_1 \dots a_r\}} = \left(\frac{q}{2} - \frac{r-q}{2} \right) e^{\{a_1 \dots a_r\}}, \quad (12)$$

где q — число индексов, равных 1. Так как при данном r векторы $e^{\{a_1 \dots a_r\}}$ полностью характеризуются числом

индексов, равных 1 (или 2), то соотношение (12) показывает, что каждому собственному значению J_3 соответствует единственный вектор в E_r^s . В пространстве E_r^s оператор J_3 имеет $r + 1$ собственных значений

$$J_3 = -\frac{r}{2}, -\frac{r}{2} + 1, \dots, \frac{r}{2} - 1, \frac{r}{2}.$$

Итак, размерностью E_r^s будет $r + 1$. Положим, $j = r/2$. Число j называется полным моментом состояния, характеризующего данным неприводимым представлением. Для данного j оператор J_3 имеет $2j + 1$ собственных значений

$$-j, -j + 1, \dots, j - 1, j.$$

При помощи формул (10) и (11) можно показать, что для любого $e^{\{a_1 \dots a_r\}}$

$$J^2 e^{\{a_1 \dots a_r\}} = j(j + 1) e^{\{a_1 \dots a_r\}}. \quad (13)$$

1.2. Некоторые спиноры низших рангов

В качестве примеров рассмотрим некоторые спиноры низших рангов, характеризующие состояния с моментами $j = 1/2, 1, 3/2, 2$.

1) $j = 1/2$. Состояние с $j = 1/2$ описывается спинором Ψ_a или эквивалентным ему спинором Ψ^a , $a = 1, 2$. Рассмотрим сначала ковариантный спинор Ψ_a . Базис в пространстве E_1 , преобразующемуся по данному представлению, состоит из векторов e^1 и e^2 . Каждый спинор представим в виде столбца с двумя элементами:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Согласно формулам (10) и (11),

$$J_3 e^1 = \frac{1}{2} e^1; \quad J_3 e^2 = -\frac{1}{2} e^2. \quad (15)$$

Если вместо Ψ_a пользоваться Ψ^a

$$\Psi^a = \varepsilon^{ab} \Psi_b,$$

то для e^1 ($\Psi_1 = 1, \Psi_2 = 0$) имеем $\Psi^1 = 0, \Psi^2 = 1$, а для e^2 ($\Psi_1 = 0, \Psi_2 = 1$) имеем $\Psi^1 = -1, \Psi^2 = 0$.

Иначе говоря, между базисом e^a в пространстве E_1 и базисом f_a в пространстве $E_{\bar{1}}$ имеет место соответствие

$$e^1 \longleftrightarrow f_2, \quad e^2 \longleftrightarrow -f_1, \quad (16)$$

так как f_1 содержит компоненты $\Psi^1 = 1, \Psi^2 = 0$, а f_2 — компоненты $\Psi^1 = 1, \Psi^2 = 1$. Отметим, что инфинитезимальные операторы J_i контравариантного представления Ψ^a связаны с инфинитезимальными операторами $\sigma_i/2$ фундаментального представления Ψ_a соотношением

$$J_i = \overline{\left(\frac{\sigma_i}{2}\right)} = -\frac{(\sigma_i)^T}{2} \quad (17)$$

(см. гл. 1, формулу (75)). Поэтому

$$J_3 f_2 = \frac{1}{2} f_2, \quad J_3 f_1 = -\frac{1}{2} f_1, \quad (18)$$

что находится в согласии с соотношением (16).

2) $j = 1$. Состояния с $j = 1$ можно описывать при помощи симметричного ковариантного спинора второго ранга $\Psi_{\{ab\}}$. Пусть e^{ab} — базис в пространстве E_2 , преобразующемся по представлению $U \otimes U$. Тогда симметричными спинорами являются векторы в подпространстве E_2^s с базисом

$$e^{\{11\}} = e^{11}, \quad e^{\{12\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{12} + e^{21}), \quad e^{\{22\}} = e^{22}.$$

Согласно общей формуле (10), имеем

$$J_i e^{ab} = \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{a'a} e^{a'b} + \left(\frac{\sigma_i}{2}\right)_{b'b} e^{ab'}, \quad (19)$$

и, в частности,

$$J_3 e^{\{11\}} = e^{\{11\}}; \quad J_3 e^{\{12\}} = 0; \quad J_3 e^{\{22\}} = -e^{\{22\}}. \quad (20)$$

Поэтому положим,

$$e_+ = e^{\{11\}}, \quad e_0 = e^{\{12\}}; \quad e_- = e^{\{22\}}. \quad (21)$$

С другой стороны, состояния с $j = 1$ также можно описывать с помощью контравариантного симметричного спинора Ψ^{ab} или смешанного спинора Ψ_b^a с нулевым шпуром. Так как в дальнейшем мы иногда будем пользоваться смешанным спинором Ψ_b^a , то рассмотрим этот спинор подробно. Любой спинор Φ_b^a разлагается на два

ортогональных спинора, один из которых имеет нулевой шпур, а другой кратен δ_b^a :

$$\Phi_b^a = \left(\Phi_b^a - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_c^c \right) + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_c^c.$$

Соответственно пространство E_{11} с базисом \mathbf{f}_a^b , преобразующееся по представлению $U \otimes U^*$, разлагается на два ортогональных подпространства. Спиноры, кратные δ_b^a , принадлежат одномерному подпространству с базисом

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a \mathbf{f}_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{f}_1^1 + \mathbf{f}_2^2). \quad (22)$$

Второе подпространство, все векторы которого ортогональны δ , имеет базис

$$\mathbf{f}_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{f}_1^1 - \mathbf{f}_2^2), \mathbf{f}_2^1.$$

Из формулы для инфинитезимальных операторов произведений двух представлений [см. гл. 1, формулы (82) и (83)] и формулы для инфинитезимальных операторов контравариантного представления (17) видно, что J_i действуют на \mathbf{f}_b^a следующим образом:

$$J_i \mathbf{f}_b^a = \left(\frac{\sigma_i}{2} \right)_{a'a} \mathbf{f}_b^{a'} - \left(\frac{\sigma_i}{2} \right)_{b'b}^T \mathbf{f}_b^{a'}. \quad (23)$$

В частности,

$$J_3 \mathbf{f}_2^1 = \mathbf{f}_2^1; J_3 \left(\frac{\mathbf{f}_1^1 \pm \mathbf{f}_2^2}{\sqrt{2}} \right) = 0; J_3 \mathbf{f}_1^2 = -\mathbf{f}_1^2. \quad (24)$$

Поэтому положим,

$$\mathbf{f}_+ = \mathbf{f}_2^1; \mathbf{f}_0 = \frac{\mathbf{f}_1^1 - \mathbf{f}_2^2}{\sqrt{2}}; \mathbf{f}_- = \mathbf{f}_1^2. \quad (25)$$

Если представить эти спиноры в виде матрицы

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1^1 & \Psi_1^2 \\ \Psi_2^1 & \Psi_2^2 \end{pmatrix},$$

то получим

$$\mathbf{f}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \mathbf{f}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Очевидно, для всех полученных спиноров шпуры равны нулю: $\Psi_a^a = 0$.

Как известно, спиноры $\Psi_{\{ab\}}$ и Ψ_b^a связаны соотношениями (4). Например, спинору $e_1 = e^{\{11\}}$ ($\Psi_{11} = 1$ и остальные $\Psi_{ab} = 0$) соответствует смешанный спинор с компонентами $\Psi_1^2 = 1$, $\Psi_b^a = 0$ для $a \neq 2$ или $b \neq 1$, т. е. спинор f_2^1 . Аналогично спинору $e_3 = e^{\{12\}}$ ($\Psi_{12} = \Psi_{21} = 1/\sqrt{2}$, остальные $\Psi_{ab} = 0$) соответствует смешанный спинор с компонентами $\Psi_1^1 = -1/\sqrt{2}$, $\Psi_2^2 = 1/\sqrt{2}$, $\Psi_b^a = 0$ для $b \neq a$, т. е. спинор $-f_0$, а спинору e_- соответствует спинор $-f_-$. Таким образом, имеет место соответствие

$$e_{+ \leftarrow \rightarrow} = f_{+}; e_{0 \leftarrow \rightarrow} = -f_0; e_{- \leftarrow \rightarrow} = -f_{-}, \quad (27)$$

и соотношения (20) и (24) согласуются. Отметим, что для получения неприводимых представлений с базисами (21) и (25) можно также применить метод, указанный в п. 3.4 гл. 1. Так, мы заранее знаем, что e^{11} — единственный ковариантный спинор второго ранга с $J_3 = +1$. Он должен принадлежать некоторому неприводимому представлению. Действуя на этот спинор инфинитезимальными операторами J_i несколько раз, можно получить все остальные спиноры в данном неприводимом представлении. Действительно, положим,

$$J_{+} = \frac{1}{2} (J_1 + iJ_2); J_{-} = \frac{1}{2} (J_1 - iJ_2)$$

и соответственно

$$\sigma_{+} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_{-} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно выражению (19),

$$J_{-} e^{11} = e^{12} + e^{21}; J_{-} (e^{21} + e^{12}) = 2e^{22},$$

т. е. получаем все спиноры (21). Аналогично единственным смешанным спинором с $J_3 = +1$ является f_2^1 , и, согласно формуле (23),

$$J_{-} f_2^1 = f_2^2 - f_1^1; J_{-} (f_2^2 - f_1^1) = -2f_1^2,$$

т. е. получаем все спиноры (25).

3) $j = 3/2$. Состояние с $j = 3/2$ можно характеризовать с помощью ковариантного симметричного спинора

третьего ранга $\Psi_{\{abc\}}$ или смешанного спинора $\Psi_{\{ab\}}^c$ с нулевыми шпурами. В первом случае состояния с заданным собственным значением J_3 определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} e_{+3/2} &= e^{\{111\}} = e^{111}; \\ e_{+1/2} &= e^{\{112\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (e^{112} + e^{121} + e^{211}); \\ e_{-1/2} &= e^{\{122\}} = \frac{1}{\sqrt{3}} (e^{122} + e^{212} + e^{221}); \\ e_{-3/2} &= e^{\{222\}} = e^{222}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

и во втором случае

$$\left. \begin{aligned} f_{+3/2} &= f_2^{11}; \\ f_{+1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (f_2^{12} + f_2^{21} - f_1^{11}); \\ f_{-1/2} &= \frac{1}{\sqrt{3}} (f_1^{21} + f_1^{12} - f_2^{22}); \\ f_{-3/2} &= f_1^{22}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Компоненты спиноров в соотношениях (28) и (29) получаются непосредственно из этих формул. Нетрудно увидеть, что компоненты Ψ_{ab}^c спиноров в выражениях (29) удовлетворяют условиям

$$\Psi_{ab}^c = \Psi_{ba}^c$$

и

$$\Psi_{ab}^a = \Psi_{ba}^a = 0.$$

Отметим, что все спиноры в выражениях (28) и (29) могут быть получены из $e_{3/2}$ или $f_{3/2}$ путем действия на эти спиноры оператором J несколько раз.

Например,

$$\begin{aligned} J_- f_2^{11} &= f_2^{21} + f_2^{12} - f_1^{11}; \\ J_- (f_2^{21} + f_2^{12} - f_1^{11}) &= f_2^{22} - f_1^{21} + f_2^{22} - f_1^{12} - f_1^{12} - f_1^{21} = \\ &= 2(f_2^{22} - f_1^{21} - f_1^{12}); \\ J_- (f_2^{22} - f_1^{21} - f_1^{12}) &= -f_{1a}^{22} - f_1^{22} - f_1^{22} = -3f_1^{22}. \end{aligned}$$

4) $j = 2$. Если пользоваться ковариантным симметричным спинором четвертого ранга $\Psi_{\{abcd\}}$, то состояния с определенными J_3 описываются спинорами:

$$\left. \begin{aligned} e_{++} &= e^{\{1111\}} = e^{1111}; \\ e_{+} &= e^{\{1112\}} = \frac{1}{2} (e^{1112} + e^{1121} + e^{1211} + e^{2111}); \\ e_0 &= e^{\{1122\}} = \frac{1}{\sqrt{6}} (e^{1122} + e^{1212} + e^{2112} + \\ &\quad + e^{1221} + e^{2121} + e^{2211}); \\ e_{-} &= e^{\{1222\}} = \frac{1}{2} (e^{1222} + e^{2122} + e^{2212} + e^{2221}); \\ e_{--} &= e^{\{2222\}} = e^{2222}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

а если пользоваться смешанным спинором с нулевыми шпурами

$$\Psi_{\{ab\}}^{\{cd\}} = \varepsilon^{ce} \varepsilon^{df} \Psi_{\{abef\}},$$

то состояния с определенными J_3 характеризуются спинорами:

$$\left. \begin{aligned} f_{++} &= e_{22}^{11}; \\ f_{+} &= \frac{1}{2} (e_{21}^{11} + e_{12}^{11} - e_{22}^{21} - e_{22}^{12}); \\ f_0 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (e_{11}^{11} - e_{12}^{12} - e_{12}^{21} - e_{21}^{12} - e_{21}^{21} + e_{22}^{22}); \\ f_{-} &= \frac{1}{2} (e_{12}^{22} + e_{21}^{22} - e_{11}^{12} - e_{11}^{21}); \\ f_{--} &= e_{11}^{22}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Если действовать J_- на e_{++} и f_{++} несколько раз, то можно получить все спиноры в выражениях (30) и (31).

1.3. Векторы, тензоры и спин-тензоры

В гл. 1 мы изучили связь между группой вращений и группой $SU(2)$. Там показано, что если представим любой трехмерный вектор x_i в виде матрицы 2×2

$$\hat{x} = x_i \sigma_i, \quad \text{Sp} \hat{x} = 0,$$

то вращению трехмерного пространства соответствует следующее преобразование матрицы \hat{x} :

$$\hat{x} \rightarrow \hat{x}' = U\hat{x}U^+,$$

или

$$\hat{x}_{ab} \rightarrow \hat{x}'_{ab} = U_{aa'}\hat{x}_{a'b}U_{b'b}^+ = U_{aa'}U_{bb'}^*\hat{x}_{a'b'}$$

(см. гл. 1, п. 1.5). Это означает, что по отношению к группе $SU(2)$ \hat{x}_{ab} преобразуется как смешанный спинор:

$$\Psi_a^b \rightarrow \Psi_a'^b = U_{aa'}U_{bb'}^*\Psi_a'^b. \quad (32)$$

Обратно, если представим смешанный спинор с нулевым шпуром Ψ_a^b в виде

$$\Psi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_a^b V_i, \quad (33)$$

где $(\sigma_i)_a^b = (\sigma_i)_{ab}$ — матричные элементы матриц Паули, то при вращениях величины V_i преобразуются как компоненты трехмерного вектора. Вектор V_i получается из Ψ_a^b при помощи формулы

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a \Psi_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp}(\Psi\sigma_i). \quad (34)$$

Таким образом, спиноры второго ранга группы $SU(2)$ эквивалентны трехмерным векторам, причем эта связь дается формулами (33) и (34). Численный коэффициент $1/\sqrt{2}$ появляется из условия нормировки

$$V_i^+ V_i = (\Psi^+)_b^a \Psi_a^b = \text{Sp}(\Psi^+ \Psi).$$

Из соотношений (33) и (34) можно найти связь между так называемым каноническим базисом (25) \mathbf{f}_+ , \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_- и декартовым базисом \mathbf{f}_x , \mathbf{f}_y и \mathbf{f}_z в трехмерном пространстве. Для \mathbf{f}_+ , например

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_{21}; \quad V_x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad V_y = \frac{i}{\sqrt{2}}; \quad V_z = 0.$$

В результате получим

$$\mathbf{f}_+ = \frac{\mathbf{f}_x + i\mathbf{f}_y}{\sqrt{2}}; \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_- = \frac{\mathbf{f}_x - i\mathbf{f}_y}{\sqrt{2}}; \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_z. \quad (35')$$

Рассмотрим теперь спинор четвертого ранга Ψ_{cd}^{ab} с нулевыми шпурами $\Psi_{ad}^{ab} = \Psi_{cb}^{ab} = 0$. Этот спинор может быть представлен в виде

$$\Psi_{cd}^{ab} = (\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b T_{ij},$$

где T_{ij} — тензор в трехмерном пространстве. Для неприводимого спинора $\Psi_{\{cd\}}^{\{ab\}}$ с нулевыми шпурами имеем представление

$$\begin{aligned} \Psi_{\{cd\}}^{\{ab\}} = \frac{1}{N} [& (\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b + (\sigma_i)_c^b (\sigma_j)_d^a + (\sigma_i)_d^a (\sigma_j)_c^b + \\ & + (\sigma_i)_d^b (\sigma_j)_c^a] T_{ij}, \end{aligned} \quad (36)$$

где N — коэффициент нормировки. Так как

$$\begin{aligned} \Psi_{\{ad\}}^{\{ab\}} &= \frac{1}{N} [(\sigma_i)_a^b (\sigma_j)_d^a + (\sigma_i)_d^a (\sigma_j)_a^b] T_{ij} = \\ &= \frac{1}{N} [(\sigma_j \sigma_i)_d^b + (\sigma_i \sigma_j)_d^b] T_{ij} = \frac{2}{N} \delta_d^b T_{ii} = 0, \end{aligned}$$

то равенство нулю шпура $\Psi_{\{ad\}}^{\{ab\}}$ означает, что T_{ij} имеет нулевой шпур

$$T_{ii} = 0.$$

Представим T_{ij} в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров:

$$T_{ij} = T_{\{ij\}} + T_{[ij]}.$$

Так как $T_{[ii]}$ равен нулю автоматически, то

$$T_{\{ii\}} = 0. \quad (37)$$

Нетрудно видеть, что $T_{[ij]}$ не дает вклада в выражение (36). Из условия нормировки

$$T_{\{ij\}}^+ T_{\{ij\}} = (\Psi^+)_{\{cd\}}^{\{ab\}} \Psi_{\{ab\}}^{\{cd\}}$$

следует, что $N = 8$. Итак,

$$\Psi_{\{cd\}}^{\{ab\}} = \frac{1}{4} [(\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b + (\sigma_i)_c^b (\sigma_j)_d^a] T_{\{ij\}}, \quad (38)$$

и, обратно,

$$T_{\{ij\}} = \frac{1}{2} (\sigma_i)_c^a (\sigma_j)_d^b \Psi_{\{cd\}}^{\{ab\}}. \quad (39)$$

Таким образом, спиноры $\Psi_{\{cd\}}^{\{ab\}}$ с нулевыми шпурами эквивалентны трехмерным симметричным тензорам второго ранга с нулевым шпуром $T_{\{ij\}}$. Аналогично неприводимые спиноры $\Psi_{\{b_1 \dots b_p\}}^{\{a_1 \dots a_p\}}$ ранга $2p$ с нулевыми шпурами (5) эквивалентны трехмерным симметричным тензорам ранга p $T_{i_1 \dots i_p}$ с нулевыми шпурами

$$T_{\{i_1 \dots i_{p-1} \dots i_p\}} = 0, \quad (40)$$

Рассмотрим, наконец, неприводимые спиноры нечетного ранга, например $\Psi_{\{ab\}}^c$ с $\Psi_{\{ab\}}^a = 0$. Положим,

$$(R_i)_b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_c^a \Psi_{\{ab\}}^c. \quad (41)$$

Тогда

$$\Psi_{\{ab\}}^c = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_a^c (R_i)_b. \quad (42)$$

Величины $(R_i)_b$ преобразуются как компоненты трехмерного вектора относительно индекса i и как компоненты спинора относительно индекса b . Аналогично все неприводимые спиноры нечетного ранга $\Psi_{\{a_1 \dots a_p b\}}^{\{c_1 \dots c_p\}}$ эквивалентны так называемым спин-тензорам:

$$(R_{\{i_1 \dots i_p\}})_b^{\sim} = \frac{1}{2^{p/2}} (\sigma_{i_1})_{c_1}^{a_1} \dots (\sigma_{i_p})_{c_p}^{a_p} \Psi_{\{a_1 \dots a_p b\}}^{\{c_1 \dots c_p\}}; \quad (43)$$

$$\Psi_{\{a_1 \dots a_p b\}}^{\{c_1 \dots c_p\}} \sim \sum_{P(c_1 \dots c_p)} (\sigma_{i_1})_{a_1}^{c_1} \dots (\sigma_{i_p})_{a_p}^{c_p} (R_{\{i_1 \dots i_p\}})_b^{\sim}. \quad (44)$$

По отношению к индексам i_1, \dots, i_p $(R_{\{i_1 \dots i_p\}})_b^{\sim}$ является трехмерным симметричным тензором с нулевыми шпурами:

$$(R_{\{i_1 \dots i_{p-1} \dots i_p\}})_b^{\sim} = 0.$$

Кроме того, из условия (5) следует соотношение

$$(\sigma_i)_k^{bd} (R_{\{i_1 \dots i_k \dots i_p\}})_d^{\sim} = 0 \quad (45)$$

для любого $1 \leq k \leq p$.

1.4. Разложение произведения неприводимых представлений на неприводимые представления. Коэффициенты Клебша — Гордана

В п. 1.1. мы изучили неприводимые представления группы $SU(2)$. Произведение двух неприводимых представлений, вообще говоря, является приводимым представлением. Займемся теперь разложением этих произведений на неприводимые представления. Пусть даны два неприводимых представления, которые мы выберем в виде ковариантных симметричных спиноров $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}$ и $\Psi_{\{b_1 \dots b_q\}}$. Они описывают состояния с моментами $j_1 = p/2$ и $j_2 = q/2$. Рассмотрим произведения

$$\Phi_{\{a_1 \dots a_p\} \{b_1 \dots b_q\}} = \Psi_{\{a_1 \dots a_p\}} \Psi_{\{b_1 \dots b_q\}}. \quad (46)$$

Они преобразуются по представлению, являющемуся произведением неприводимых представлений, по которым трансформируются $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}$ и $\Psi_{\{b_1 \dots b_q\}}$. Спинор $\Phi_{\{a_1 \dots a_p\} \{b_1 \dots b_q\}}$ симметричен по всем индексам a_1, \dots, a_p и по всем индексам b_1, \dots, b_q . Разделим его на две части, первая из которых симметрична относительно перестановки индексов a_1 и b_1 , а вторая антисимметрична относительно этой перестановки. Тогда первая часть полностью симметрична по индексам $a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$. Так как антисимметричный спинор эквивалентен скаляру, то во второй части антисимметричные индексы a_1 и b_1 можно не рассматривать. Иначе говоря, вторая часть есть спинор ранга $p + q - 2$ $\Phi_{\{a_2 \dots a_p\} \{b_2 \dots b_q\}}$, симметричный по индексам a_2, \dots, a_p и по всем индексам b_2, \dots, b_q . Этот спинор, в свою очередь, может быть представлен в виде суммы полностью симметричного спинора ранга $p + q - 2$ и спинора вида $\Phi_{\{a_3 \dots a_p\} \{b_3 \dots b_q\}}$. Продолжая этот процесс, мы получаем наконец разложение произведения (46) в сумму симметричных спиноров следующих рангов: $p + q, p + q - 2, p + q - 4, \dots, p + q - 2q$ (если $p \geq q$) или $p + q - 2p$ (если $q \geq p$). Таким образом, произведение двух представлений, характеризующих состояния с моментами j_1 и j_2 , разлагается на неприводимые представления, соответствующие моментам $j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, |j_1 - j_2|$. Это — известное правило сложения моментов в квантовой механике.

Обозначим e_m^j базисный вектор с $J_3 = m$ в пространстве, преобразующемся по представлению с $J^2 = j(j+1)$, и аналогично для $e_{m_1}^{j_1}$ и $e_{m_2}^{j_2}$. Тогда произведение $e_{m_1}^{j_1} e_{m_2}^{j_2}$ может быть представлено в виде линейной комбинации спиноров e_m^j , причем из формулы для инфинитезимальных операторов произведения двух представлений [см. гл. 1, формулу (83)] следует, что $m = m_1 + m_2$. Итак,

$$e_{m_1}^{j_1} e_{m_2}^{j_2} = \sum_{i=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} e_m^j. \quad (47)$$

Так как спиноры $e_{m_1}^{j_1}$, $e_{m_2}^{j_2}$ и e_m^j ортонормированы, то мы имеем также обратную формулу

$$e_m^j = \sum_{m_1+m_2=m} C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} e_{m_1}^{j_1} e_{m_2}^{j_2}. \quad (48)$$

Коэффициенты $C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$ называются коэффициентами сложения моментов или коэффициентами Клебша — Гордана. Их свойства изучены подробно в работах [1—4].

§ 2. Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий

2.1. Изотопические мультиплеты

Экспериментальные исследования ядерных сил привели к гипотезе о зарядовой независимости ядерного взаимодействия между протонами и нейтронами, обобщением которой является гипотеза об изотопической инвариантности сильных взаимодействий барионов и мезонов. В теории изотопической инвариантности предполагается, что мезоны и барионы образуют изотопические мультиплеты, описываемые неприводимыми представлениями группы $SU(2)$, рассматриваемой как группа вращений в некотором (нереальном) трехмерном изотопическом пространстве. Инфинитезимальные операторы T_i , $i = 1, 2, 3$, этих представлений, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k,$$

называем операторами изотопического спина. Для каждого неприводимого представления, т. е. для каждого изотопического мультиплета, оператор $T^2 = T_1^2 + T_2^2 + T_3^2$ кратен единице

$$T^2 = T(T + 1)I,$$

где I — единичный оператор. Величина T называется изотопическим спином данного мультиплета.

Частицы в одном изотопическом мультиплете имеют разные заряды и рассматриваются как различные состояния одной и той же частицы, соответствующие различным собственным значениям оператора T_3 . Предполагается далее, что T_i коммутируют с операторами углового момента J_i , а также с операторами, выражающими другие сохраняющиеся величины, характеризующие сильно взаимодействующие частицы, например барионное число B , странность S и т. д. Тогда все частицы в одном изотопическом мультиплете имеют один и тот же спин J , одно и то же барионное число B , одну и ту же странность S и т. д., как это следует из леммы Шура (см. гл. 1, п. 3.3 и 3.4). Заряд каждой компоненты изотопического мультиплета связан с оператором T_3 и другими квантовыми числами формулой Гелл-Манна — Нишиджимы

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2},$$

где Y — гиперзаряд.

Рассмотрим некоторые изотопические мультиплеты. Нуклоны (протон и нейтрон) образуют изотопический дублет ($T = 1/2$). Волновые функции нуклонов отождествим с ковариантным изотопическим спинором и обозначим N_a . Тогда

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \Psi; \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \Psi, \quad (49)$$

где p и n — полные волновые функции протона и нейтрона, а Ψ — пространственная волновая функция. В дальнейшем удобно вместо выражения (49) пользоваться записью

$$N = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Поскольку волновая функция нуклона рассматривается как ковариантный изотопический спинор N_a , то сопряженная (дираксовски) волновая функция является контравариантным изотопическим спинором и обозначается \bar{N}^a . Тогда

$$\bar{p} = (1 \ 0) \otimes \bar{\Psi}; \quad \bar{n} = (0 \ 1) \otimes \bar{\Psi} \quad (51)$$

или сокращено по аналогии с формулой (50)

$$\bar{N} = (\bar{p}\bar{n}). \quad (52)$$

Для дублета каскадных гиперонов, например, мы имеем аналогичные выражения. Что касается других гиперонов, то Λ — гиперон представляет собой изотопический скаляр ($T = 0$), т. е. его волновая функция не меняется при изотопических вращениях, а Σ -гипероны образуют изотопический триплет ($T = 1$). Если рассматривать волновую функцию этого триплета как ковариантный симметричный спинор второго ранга, то

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma^+)_{11} &= 1 \otimes \Psi, \quad (\Sigma^+)_{12} = (\Sigma^+)_{21} = (\Sigma^+)_{22} = 0; \\ (\Sigma^0)_{12} &= (\Sigma^0)_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \Psi, \quad (\Sigma^0)_{11} = (\Sigma^0)_{22} = 0; \\ (\Sigma^-)_{22} &= 1 \otimes \Psi, \quad (\Sigma^-)_{12} = (\Sigma^-)_{21} = (\Sigma^-)_{11} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

где Ψ — пространственная волновая функция. В дальнейшем по аналогии с формулой (50) вместо соотношений (53) мы пользуемся сокращенной записью

$$\Sigma^+ = (\Sigma)_{11}; \quad \Sigma^- = (\Sigma)_{22}; \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 = (\Sigma)_{12} = (\Sigma)_{21}. \quad (54)$$

Если же пользоваться смешанным изотопическим спинором второго ранга для описания триплета Σ -гиперонов, тогда

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma^+)_{11}^2 &= 1 \otimes \Psi, \quad (\Sigma^+)_{11}^1 = (\Sigma^+)_{22}^2 = (\Sigma^+)_{22}^1 = 0; \\ (\Sigma^0)_{11}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \Psi, \quad (\Sigma^0)_{22}^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \Psi, \quad (\Sigma^0)_{12}^1 = (\Sigma^0)_{21}^2 = 0; \\ (\Sigma^-)_{22}^1 &= 1 \otimes \Psi, \quad (\Sigma^-)_{11}^1 = (\Sigma^-)_{22}^2 = (\Sigma^-)_{12}^1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

или сокращенно

$$\Sigma_1^2 = \Sigma^+, \quad \Sigma_2^1 = \Sigma^-, \quad \Sigma_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0, \quad \Sigma_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0.$$

Для удобства мы введем по аналогии с выражением (50) также матрицу

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1^1 & \Sigma_1^2 \\ \Sigma_2^1 & \Sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \Sigma^0 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Как было показано в п. 1.3, для описания триплета можно пользоваться также трехмерным вектором, связанным со смешанным спинором второго ранга соотношениями (33) и (34). Тогда вместо соотношений (55) напомним

$$\left. \begin{aligned} (\Sigma^+)_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \Psi, \quad (\Sigma^+)_y = \frac{i}{\sqrt{2}} \otimes \Psi, \quad (\Sigma^+)_z = 0; \\ (\Sigma^0)_x &= (\Sigma^0)_y = 0, \quad (\Sigma^0)_z = 1 \otimes \Psi; \\ (\Sigma^-)_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \otimes \Psi, \quad (\Sigma^-)_y = -\frac{i}{\sqrt{2}} \Psi, \quad (\Sigma^-)_z = 0, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

или сокращенно

$$\Sigma_x = \frac{\Sigma^+ + \Sigma^-}{\sqrt{2}}, \quad \Sigma_y = i \frac{\Sigma^+ - \Sigma^-}{\sqrt{2}}, \quad \Sigma_z = \Sigma^0. \quad (58)$$

Отметим, что эти формулы представляют собой сокращенную запись соотношений (57) и не совпадают с формулами (35) и (35'), связывающими различные базисы. Из данных формул для волновой функции триплета Σ -гиперонов можно получить аналогичные формулы для сопряженной волновой функции, заменяя верхние индексы на нижние и обратно. Например, по аналогии с матрицей (56)

$$\bar{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\Sigma}_0^-}{\sqrt{2}} & \bar{\Sigma}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & -\frac{\bar{\Sigma}_0^+}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Приведем еще формулы для барионных резонансов с $T = 3/2$. Если рассматривать волновую функцию этого мультиплета как ковариантный симметричный изотопический спинор третьего ранга, то в сокращенном виде по-

лучим

$$\left. \begin{aligned} (\Delta)_{111} = \Delta^{+++}; (\Delta)_{112} = (\Delta)_{121} = (\Delta)_{211} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^+; \\ (\Delta)_{122} = (\Delta)_{212} = (\Delta)_{221} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta^0; (\Delta)_{222} = \Delta^- \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Для мезонных мультиплетов формулы в точности такие же. Например, для K -мезонов

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K_0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{K} = \begin{pmatrix} \widetilde{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} \quad (61)$$

и для π -мезонов

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} & \pi^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\pi}^0}{\sqrt{2}} & \bar{\pi}^- \\ \bar{\pi}^+ & -\frac{\bar{\pi}^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Представить волновую функцию π -мезонов в виде смешанного спинора π_b^a особенно удобно при изучении зарядового сопряжения C . В преобразовании зарядового сопряжения C

$$\pi^+ \rightarrow \pi^-, \quad \pi^- \rightarrow \pi^+, \quad \pi^0 \rightarrow \pi^0,$$

т. е.

$$\pi_2^1 \rightarrow \pi_1^2, \quad \pi_1^2 \rightarrow \pi_2^1, \quad \pi_1^1 \rightarrow \pi_1^1, \quad \pi_2^2 \rightarrow \pi_2^2.$$

Эти преобразования можно записать в единой формуле

$$\pi_b^a \xrightarrow{C} \pi_a^b \quad \text{или} \quad C \pi_b^a C^{-1} = \pi_a^b. \quad (63)$$

Волновые функции частиц в изотопических мультиплетах меняются при преобразованиях изотопической группы. Рассмотрим специальное важное преобразование, соответствующее матрице

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом преобразовании спинор (50) для нуклона переходит в

$$\varepsilon \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ -p \end{pmatrix},$$

т. е.

$$p \rightarrow n, \quad n \rightarrow -p, \quad (64)$$

а матрица (56) для Σ -гиперонов переходит в

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & \Sigma^+ \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \varepsilon^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} & -\Sigma^- \\ -\Sigma^+ & \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\Sigma^0 \rightarrow -\Sigma^0, \Sigma^+ \rightarrow -\Sigma^-, \Sigma^- \rightarrow -\Sigma^+. \quad (64')$$

Для других мультиплетов имеются аналогичные переходы:

$$\left. \begin{aligned} \Xi^0 &\rightarrow \Xi^-, \Xi^- \rightarrow -\Xi^0; \\ K^+ &\rightarrow K^0, K^0 \rightarrow -K^+, \widetilde{K}^0 \rightarrow K^-, K^- \rightarrow -\widetilde{K}^0; \\ \pi^0 &\rightarrow -\pi^0, \pi^+ \rightarrow -\pi^-, \pi^- \rightarrow -\pi^+; \\ \Delta^{++} &\rightarrow \Delta^-, \Delta^- \rightarrow -\Delta^{++}, \Delta^+ \rightarrow -\Delta^0, \Delta^0 \rightarrow \Delta^+ \end{aligned} \right\} \quad (64'')$$

и т. д. Изотопическая инвариантность требует, чтобы матричные элементы процессов рассеяния и распада были инвариантными относительно всех преобразований изотопической группы, и в частности относительно преобразований вида (64), (64'), (64''). Инвариантность относительно этих частных преобразований называется зарядовой симметрией. Рассматриваемое специальное преобразование группы $SU(2)$ соответствует некоторому вращению в трехмерном изотопическом пространстве. Из соотношений (58) и (64') следует, что в данном преобразовании

$$\Sigma_x \rightarrow -\Sigma_x, \Sigma_y \rightarrow \Sigma_y, \Sigma_z \rightarrow -\Sigma_z.$$

Итак, рассматриваемое преобразование зарядовой симметрии соответствует повороту на угол π вокруг второй оси в изотопическом пространстве.

При изучении процессов взаимодействия мезонов и барионов во многих случаях удобно классифицировать состояния систем частиц по полным изотопическим спинам этих состояний. Изотопические волновые функции состояний систем частиц с определенными изотопическими спинами обычно имеют определенные свойства симметрии по отношению к перестановке двух одинаковых частиц, причем одинаковыми частицами считаются различные частицы в одном изотопическом мультиплете.

К таким частицам применяется обобщенный принцип Паули, согласно которому полные волновые функции систем не меняются при перестановке двух одинаковых бозонов, но они меняют знак при перестановке двух одинаковых фермионов.

2.2. Изотопическая инвариантность лагранжиана взаимодействия

Выше предполагалось, что волновые функции мезонов и барионов преобразуются по неприводимым представлениям изотопической группы $SU(2)$. Изотопическая инвариантность требует, чтобы лагранжиан сильных взаимодействий был инвариантным относительно всех преобразований изотопической группы. Это приводит к ряду ограничений на константы связи сильно взаимодействующих частиц.

Рассмотрим некоторые примеры. Трехлинейный лагранжиан взаимодействия π -мезона с нуклонами представляет собой линейную комбинацию произведений вида

$$\bar{N}^a \gamma_5 N_b \tau^c_a.$$

Как известно, для того чтобы образовать инварианты из этих произведений, необходимо суммировать по каждой паре верхних и нижних индексов. Так как $\pi^c_c = 0$, то единственным инвариантом является

$$\bar{N}^a \gamma_5 N_b \pi^b_a.$$

Итак, лагранжиан πN -взаимодействия имеет вид

$$L_{\pi NN} = i \sqrt{2} g_{\pi NN} \bar{N}^a \gamma_5 N_b \pi^b_a, \quad (65)$$

причем для удобства в формулу (65) был введен коэффициент $\sqrt{2}$. Выразим π^b_a через трехмерный вектор π_i :

$$\pi^b_a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\tau_i)_a^b \pi_i \quad (66)$$

[см. формулы (33) и (34)], тогда,

$$L_{\pi NN} = i g_{\pi NN} \bar{N} \tau_i \gamma_5 N \pi_i. \quad (67)$$

Подставляя в формулу (65) спиноры (50) и (52) и матрицу (62), получаем

$$L_{\pi NN} = i g_{\pi NN} [V\sqrt{2} \bar{p} \gamma_5 n \pi^+ + V\sqrt{2} \bar{n} \gamma_5 p \pi^- + (\bar{p} \gamma_5 p - \bar{n} \gamma_5 n) \pi^0]. \quad (68)$$

Аналогично для взаимодействий ηNN , $K\Sigma N$ и $K\Lambda N$ лагранжианы имеют вид

$$L_{\eta NN} = i g_{\eta NN} \bar{N}^a \gamma_5 N_a \eta = i g_{\eta NN} \bar{N} \gamma_5 N \eta; \quad (69)$$

$$L_{K\Sigma N} = i V\sqrt{2} g_{K\Sigma N} \widetilde{K}^b \bar{\Sigma}_b^a \gamma_5 N_a + \text{э. с.} = \\ = i g_{K\Sigma N} \widetilde{K} \bar{\Sigma}_i \tau_i \gamma_5 N + \text{э. с.}; \quad (70)$$

$$L_{K\Lambda N} = i g_{K\Lambda N} \widetilde{K}^a \bar{\Lambda} \gamma_5 N_a + \text{э. с.} = \\ = i g_{K\Lambda N} \widetilde{K} \bar{\Lambda} \gamma_5 N + \text{э. с.} \quad (71)$$

Рассмотрим теперь $K\Lambda\Sigma$ -взаимодействия. Лагранжиан имеет вид линейной комбинации произведений типа $\bar{\Lambda} \Xi_a K_b$.

Для того чтобы образовать инварианты из этих произведений, необходимо умножить их на ε^{ab} и затем просуммировать по a и b . Таким образом,

$$L_{K\Lambda\Sigma} = g_{K\Lambda\Sigma} \bar{\Lambda} \gamma_5 \Xi_a K_b \varepsilon^{ab} + \text{э. с.} \quad (72)$$

Так как элементы матрицы τ_2 равны $i\varepsilon^{ab}$, то можно переписать формулу (72) следующим образом:

$$L_{K\Lambda\Sigma} = i g_{K\Lambda\Sigma} K^T \tau_2 \bar{\Lambda} \gamma_5 \Xi + \text{э. с.} \quad (73)$$

Аналогично для взаимодействия $K\Sigma\Sigma$

$$L_{K\Sigma\Sigma} = V\sqrt{2} g_{K\Sigma\Sigma} \bar{\Sigma}_b^a \gamma_5 \Xi_a K_c \varepsilon^{bc} + \text{э. с.} = \\ = i g_{K\Sigma\Sigma} K^T \tau_2 \bar{\Sigma}_i \tau_i \gamma_5 \Xi + \text{э. с.} \quad (74)$$

Если вместо волновой функции K -мезонов ввести волновую функцию \widetilde{K} -мезонов, то формулы (72) — (74) можно переписать в виде

$$L_{K\Lambda\Sigma}^{\sim} = i g_{K\Lambda\Sigma}^{\sim} \widetilde{K}^a \bar{\Lambda} \gamma_5 \Xi_a + \text{э. с.} = \\ = i g_{K\Lambda\Sigma}^{\sim} \widetilde{K} \bar{\Lambda} \gamma_5 \Xi + \text{э. с.} \quad (75)$$

и

$$\begin{aligned}
 L_{K\Sigma\Xi}^{\sim} &= i\sqrt{2}g_{K\Sigma\Xi}^{\sim} \overline{K}^b \overline{\Sigma}_b^a \gamma_5 \Xi_a + \text{э.с.} = \\
 &= i g_{K\Sigma\Xi}^{\sim} \overline{K} \overline{\Sigma}_i \tau_i \gamma_5 \Xi + \text{э.с.} \quad (74)
 \end{aligned}$$

Для взаимодействий типа $\pi\Sigma\Sigma$ и $\eta\Sigma\Sigma$ имеются выражения, аналогичные соотношениям (65) и (67)–(69). Что касается взаимодействий $\eta\Lambda\Lambda$, $\pi\Lambda\Sigma$, $\eta\Sigma\Sigma$ и $\pi\Sigma\Sigma$, то нетрудно проверить, что следующие лагранжианы являются единственными, выполняющими изотопическую инвариантность:

$$L_{\tau,\Lambda\Lambda} = i g_{\tau,\Lambda\Lambda} \overline{\eta} \Lambda \gamma_5 \Lambda; \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
 L_{\pi\Lambda\Sigma} &= i g_{\pi\Lambda\Sigma} \overline{\pi}_b^a \overline{\Sigma}_a^b \gamma_5 \Lambda + \text{э.с.} = \\
 &= i g_{\pi\Lambda\Sigma} \overline{\pi}_i \overline{\Sigma}_i \gamma_5 \Lambda + \text{э.с.}; \quad (76)
 \end{aligned}$$

$$L_{\tau,\Sigma\Sigma} = i g_{\tau,\Sigma\Sigma} \overline{\Sigma}_b^a \Sigma_a^b \eta = i g_{\tau,\Sigma\Sigma} \overline{\Sigma}_i \gamma_5 \Sigma_i \eta; \quad (77)$$

$$L_{\pi\Sigma\Sigma} = i\sqrt{2} g_{\pi\Sigma\Sigma} \overline{\Sigma}_b^a \Sigma_c^b \pi_c^a = g_{\pi\Sigma\Sigma} \varepsilon_{ijk} \overline{\Sigma}_i \gamma_5 \Sigma_j \pi_k, \quad (78)$$

причем для получения второго равенства в соотношении (78) достаточно воспользоваться формулой

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \varepsilon_{ijk} \tau_k$$

и соотношениями типа (66) для Σ_b^a и π_b^a . Отметим, что из спиноров $\overline{\Sigma}_b^a$, Σ_d^c и π_f^e можно образовать два инварианта:

$$\overline{\Sigma}_b^a \Sigma_c^b \pi_c^a \quad \text{и} \quad \overline{\Sigma}_a^b \Sigma_b^c \pi_c^a.$$

Однако они отличаются только знаком. Действительно,

$$\begin{aligned}
 &\overline{\Sigma}_b^a \Sigma_c^b \pi_c^a + \overline{\Sigma}_a^b \Sigma_b^c \pi_c^a = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\Sigma}_i \Sigma_j \pi_k [(\tau_i)_b^a (\tau_j)_c^b (\tau_k)_a^c + (\tau_i)_a^b (\tau_j)_b^c (\tau_k)_c^a] = \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \overline{\Sigma}_i \Sigma_j \pi_k [(\tau_j)_c^b (\tau_i)_b^a (\tau_k)_a^c + (\tau_i)_c^b (\tau_j)_b^a (\tau_k)_a^c] = 0,
 \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned}
 &\tau_j \tau_i + \tau_i \tau_j = \delta_{ij}; \quad \text{Sp} \tau_k = 0; \\
 &(\tau_j)_c^b (\tau_i)_b^a (\tau_k)_a^c + (\tau_i)_c^b (\tau_j)_b^a (\tau_k)_a^c = \text{Sp} [(\tau_j \tau_i + \tau_i \tau_j) \tau_k] = 0.
 \end{aligned}$$

Из инвариантности лагранжиана следует инвариантность матричных элементов процессов распада, рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях и вытекает ряд соотношений между амплитудами процессов распада, рассеяния и рождения частиц в одном изотопическом мультиплете. Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из изотопической инвариантности для процессов распада частиц с наименьшими изотопическими спинами. Так как нас интересуют только соотношения между амплитудами различных процессов с участием частиц из одного и того же изотопического мультиплетта, а не сами амплитуды, то можно ограничиться изучением изотопической структуры амплитуд процессов. Итак, в дальнейшем спиновую структуру матричных элементов процессов распада и рассеяния явно выписывать не будем.

Рассмотрим сначала распад мезонов с $T = 0$, например распад f^0 -мезона на два π -мезона. Рождающиеся π -мезоны имеют разные импульсы, их обозначают $\pi(q_1)$ и $\pi(q_2)$. Если изотопическая инвариантность выполняется, то матричный элемент рассматриваемого распада имеет вид

$$M_{f^0 \rightarrow 2\pi} = g f^0 \bar{\pi}_b^a(q_1) \bar{\pi}_a^b(q_2) = g f^0 [\bar{\pi}^+(q_1) \bar{\pi}^-(q_2) + \bar{\pi}^-(q_1) \bar{\pi}^+(q_2) + \bar{\pi}^0(q_1) \bar{\pi}^0(q_2)]. \quad (79)$$

Отсюда следует, что вероятность распада на π^+ с импульсом q_1 и π^- с импульсом q_2 равна вероятности распада на π^+ с импульсом q_2 и π^- с импульсом q_1 , а также равна вероятности распада на два π^0 -мезона, один из которых имеет импульс q_1 , а другой — импульс q_2 . Итак, вероятность распада на π^+ и π^- в сумме в два раза больше вероятности распада на два π^0 :

$$\frac{W(f^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{W(f^0 \rightarrow 2\pi^0)} = 2. \quad (80)$$

Отметим, что матричный элемент (79) инвариантен относительно преобразования зарядового сопряжения C только в том случае, если f^0 -мезон имеет C -четность, равную $+1$. Действительно, в этом случае

$$f^0 \rightarrow f^0, \quad \pi_b^a \pi_a^b \xrightarrow{C} \pi_a^b \pi_b^a \equiv \pi_b^a \pi_a^b,$$

т. е. матричный элемент (79) не меняется при C -преобразовании. Нетрудно проверить также, что матричный элемент (79) удовлетворяет требованию статистики Бозе. Действительно, f^0 -мезон имеет спин и четность 2^+ , поэтому система двух π -мезонов в распаде $f^0 \rightarrow 2\pi$ находится в D -состоянии и ее пространственная волновая функция симметрична относительно перестановки двух π -мезонов. В силу статистики Бозе изотопическая волновая функция и, следовательно, матричный элемент распада $f^0 \rightarrow 2\pi$ должны быть симметричными относительно этой перестановки. Матричный элемент (79) действительно удовлетворяет этому условию.

Рассмотрим теперь распад ϕ -мезона с нулевым изотопическим спином, спином и четностью, равными 1^- , и C -четностью, равной -1 , на два π -мезона. Если этот распад происходил бы, то его матричный элемент имел бы такой же вид, что и матричный элемент (79). Однако поскольку при зарядовом сопряжении $\phi \rightarrow -\phi$, то такой матричный элемент должен бы изменить знак при C -преобразовании, т. е. нарушить C -инвариантность. Таким образом, изотопическая инвариантность и C -инвариантность запрещают распад $\phi \rightarrow 2\pi$. Этот распад также запрещается требованием статистики Бозе. Действительно, поскольку система двух π -мезонов в этом распаде находилась бы в P -состоянии, то ее пространственная волновая функция антисимметрична относительно перестановки двух π -мезонов. Тогда матричный элемент этого распада должен быть антисимметричным, а на деле матричный элемент вида (79) симметричен.

При изучении распада f^0 -мезона на пару $K\bar{K}$ удобно рассматривать волновую функцию K -мезона как контравариантный спинор \bar{K}^a . Для сопряженной функции мы имеем тогда спинор $\bar{\bar{K}}^a$. Так как f^0 -мезон имеет C -четность, равную $+1$, то матричный элемент распада этого мезона на пару $K\bar{K}$, удовлетворяющий изотопической инвариантности и C -инвариантности, имеет вид

$$M_{f^0 \rightarrow K\bar{K}} = gf^0 [\bar{K}^a(q_1) \bar{\bar{K}}_a(q_2) + \bar{K}^a(q_2) \bar{\bar{K}}_a(q_1)]. \quad (81)$$

Так как

$$K = \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}, \quad \bar{K} = (K^- \bar{K}^0)$$

и, следовательно,

$$\bar{K} = (\bar{K}^+ \bar{K}^0), \quad \widetilde{\bar{K}} = \begin{pmatrix} \widetilde{\bar{K}^-} \\ \widetilde{\bar{K}^0} \end{pmatrix},$$

то из формулы (81) следует выражение

$$M_{f^0 \rightarrow \bar{K}\widetilde{\bar{K}}} = gf^0 [\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^-(q_2) + \bar{K}^0(q_1) \widetilde{\bar{K}^0}(q_2) + \\ + \bar{K}^+(q_2) \bar{K}^-(q_1) + \bar{K}^0(q_2) \widetilde{\bar{K}^0}(q_1)]. \quad (82)$$

Итак, вероятность распада f^0 -мезона на пару K^+K^- равна вероятности распада на пару $K^0\widetilde{K}^0$:

$$\frac{W(f^0 \rightarrow K^+K^-)}{W(f^0 \rightarrow K^0\widetilde{K}^0)} = 1, \quad (83)$$

если пренебречь разностью масс K^\pm - и K^0 -мезонов. Аналогично для распада φ -мезона на пару $K\widetilde{K}$

$$M_{\varphi \rightarrow K\widetilde{K}} = g\varphi [\bar{K}^a(q_1) \widetilde{\bar{K}}_a(q_2) - \bar{K}^a(q_2) \widetilde{\bar{K}}_a(q_1)] = \\ = g\varphi [\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^-(q_2) + \bar{K}^0(q_1) \widetilde{\bar{K}^0}(q_2) - \bar{K}^+(q_2) \bar{K}^-(q_1) - \\ - \bar{K}^0(q_2) \widetilde{\bar{K}^0}(q_1)], \quad (84)$$

так как φ -мезон имеет C -четность, равную -1 . Отсюда получаем также

$$\frac{W(\varphi \rightarrow K^+K^-)}{W(\varphi \rightarrow K^0\widetilde{K}^0)} = 1. \quad (85)$$

Рассмотрим теперь распад K^* -мезона с $T = 1/2$ на π - и K -мезоны. Мы имеем матричный элемент

$$M_{K^* \rightarrow K\pi} = g\bar{\pi}_b^a \bar{K}^b K_a^* = \\ = g \left[\bar{\pi}^+ \bar{K}^0 K^{*+} + \bar{\pi}^- \bar{K}^+ K^{*0} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 (\bar{K}^+ K^{*+} - \bar{K}^0 K^{*0}) \right]. \quad (86)$$

Поэтому вероятности распада связаны соотношениями

$$W(K^{*+} \rightarrow K^0 \pi^+) = W(K^{*-} \rightarrow K^0 \pi^-) = \\ = 2W(K^{*+} \rightarrow K^+ \pi^0) = 2W(K^{*0} \rightarrow K^0 \pi^0). \quad (87)$$

В частности, ширины резонансов K^{*+} и K^{*-} равны между собой, как и должно быть.

Как и в случае распада ϕ -мезона на два π -мезона, C -инвариантность или требования статистики Бозе, приводит к ряду запретов для процессов распада мезонов с $T = 1$ и $Y = 0$. Волновые функции Ψ_b^a этих мезонов по аналогии с формулой (63) при C -преобразовании преобразуются следующим образом:

$$C\Psi_b^a C^{-1} = \pm \Psi_a^b,$$

причем знак плюс или минус выбирается одинаково для всех частиц в одном мультиплете. В частности, для A_2^0 -мезона (со спином и четностью 2^+) и ρ -мезона

$$C(A_2)_b^a C^{-1} = (A_2)_a^b, \quad C\rho_b^a C^{-1} = -\rho_a^b. \quad (88)$$

В п. 2.2 мы получили тождество

$$\bar{\Sigma}_a^b \Sigma_b^c \pi_c^a + \bar{\Sigma}_b^a \Sigma_a^c \pi_c^b = 0.$$

Аналогично

$$\rho_a^b \bar{\pi}_c^a(q_1) \bar{\pi}_c^a(q_2) + \rho_b^a \bar{\pi}_c^b(q_1) \bar{\pi}_a^c(q_2) = 0.$$

При помощи этого тождества нетрудно увидеть, что матричный элемент распада ρ -мезона на два π -мезона

$$\begin{aligned} M_{\rho \rightarrow \pi\pi} &= g \rho_b^a \bar{\pi}_a^c(q_1) \bar{\pi}_c^b(q_2) = \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \rho^+ [\bar{\pi}^+(q_1) \bar{\pi}^0(q_2) - \bar{\pi}^+(q_2) \bar{\pi}^0(q_1)] + \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}} \rho^0 [\bar{\pi}^+(q_1) \bar{\pi}^-(q_2) - \bar{\pi}^+(q_2) \bar{\pi}^-(q_1)] + \\ &+ \frac{g}{\sqrt{2}} \rho^- [\bar{\pi}^-(q_1) \bar{\pi}^0(q_2) - \bar{\pi}^-(q_2) \bar{\pi}^0(q_1)] \end{aligned} \quad (89)$$

инвариантен относительно преобразования зарядового сопряжения C . Итак, мы имеем следующие отношения между вероятностями распада:

$$\left. \begin{aligned} W(\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) &= W(\rho^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = W(\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-); \\ W(\rho^0 \rightarrow 2\pi^0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Отметим, что матричный элемент (89) антисимметричен относительно перестановки двух π -мезонов и, следовательно, удовлетворяет требованию статистики Бозе, так как система двух π -мезонов находится в P -состоянии.

Если A_2 -мезон распадался бы на два π -мезона, то матричный элемент этого распада имел бы такой же вид, что и матричный элемент (89) (с заменой ρ на A_2). Однако такой матричный элемент не удовлетворял бы ни C -инвариантности, ни требованию статистики Бозе, как это можно легко проверить. Это означает, что распад $A_2 \rightarrow 2\pi$ запрещен. Для распада A_2 -мезона на пару $K\bar{K}$ имеем матричный элемент

$$\begin{aligned}
 M_{A_2 \rightarrow K\bar{K}} &= g (A_2)_b^a [\bar{K}^b(q_1) \widetilde{K}_a(q_2) + \bar{K}^b(q_2) \widetilde{K}_a(q_1)] = \\
 &= g A_2^+ [\bar{K}^+(q_1) \widetilde{K}^0(q_2) + \bar{K}^+(q_2) \widetilde{K}^0(q_1)] + \\
 &+ g A_2^- [\bar{K}^-(q_1) \widetilde{K}^0(q_2) + \bar{K}^-(q_2) \widetilde{K}^0(q_1)] + \\
 &+ \frac{g}{\sqrt{2}} A_2^0 [\bar{K}^+(q_1) \bar{K}^-(q_2) - \bar{K}^0(q_1) \widetilde{K}^0(q_2) + \\
 &+ \bar{K}^+(q_2) \bar{K}^-(q_1) - \bar{K}^0(q_2) \widetilde{K}^0(q_1)]. \quad (91)
 \end{aligned}$$

Отсюда вытекают соотношения

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}(A_2^+ \rightarrow K^+ \widetilde{K}^0) &= \mathcal{W}(A_2^- \rightarrow K^- \widetilde{K}^0) = \\
 &= 2\mathcal{W}(A_2^0 \rightarrow K^+ K^-) = 2\mathcal{W}(A_2^0 \rightarrow K^0 \widetilde{K}^0). \quad (92)
 \end{aligned}$$

Отметим, что на опыте наблюдаются не K^0 - и \widetilde{K}^0 -мезоны, а K_1^0 и K_2^0 -мезоны. Подставляя в формулы (81), (84) и (91) выражения

$$K^0 = \frac{K_1^0 - K_2^0}{\sqrt{2}}, \quad \widetilde{K}^0 = \frac{K_1^0 + K_2^0}{\sqrt{2}},$$

получаем

$$\begin{aligned}
 K^0(q_1) \widetilde{K}^0(q_2) + \widetilde{K}^0(q_1) K^0(q_2) &= K_1^0(q_1) K_1^0(q_2) + \\
 &+ K_2^0(q_1) K_2^0(q_2); \\
 K^0(q_1) \widetilde{K}^0(q_2) - \widetilde{K}^0(q_1) K^0(q_2) &= K_1^0(q_1) K_2^0(q_2) - \\
 &- K_1^0(q_1) K_2^0(q_1).
 \end{aligned}$$

Это означает, что в распадах f^0 - и A_2^0 - мезонов всегда наблюдаются пары $K_1^0 K_1^0$ и $K_2^0 K_2^0$, а в распаде ϕ -мезона — только пары $K_1^0 K_2^0$.

Рассмотрим теперь распады барионных резонансов. Для распада Ξ^* -гиперона с $T = 1/2$ на Ξ -гиперон и π -мезон имеем такие же соотношения, что и для распада K^* -мезона на K - и π -мезоны [см. выражение (85) и (86)], а именно

$$\begin{aligned} W(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+) &= W(\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^0 \pi^-) = \\ &= 2W(\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \pi^0) = 2W(\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- \pi^0), \end{aligned} \quad (93)$$

а для распада Y^* -гиперона на π -мезон и Σ -гиперон из матричного элемента

$$\begin{aligned} M_{Y^* \rightarrow \Sigma \pi} &= g \Sigma_c^a Y_b^{*b} \bar{\pi}_c = -g \bar{\Sigma}_a^c Y_b^{*a} \bar{\pi}_c = \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^+ (\bar{\Sigma}^0 Y^{*+} - \bar{\Sigma}^- Y^{*0}) + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^- (\bar{\Sigma}^0 Y^{*-} - \bar{\Sigma}^+ Y^{*0}) + \\ &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 (\bar{\Sigma}^- Y^{*-} - \bar{\Sigma}^+ Y^{*+}) \end{aligned} \quad (94)$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} W(Y^{*+} \rightarrow \Sigma^0 \pi^+) &= W(Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0) = W(Y^{*0} \rightarrow \Sigma^+ \pi^-) = \\ &= W(Y^{*0} \rightarrow \Sigma^- \pi^+) = W(Y^{*-} \rightarrow \Sigma^0 \pi^-) = W(Y^{*-} \rightarrow \Sigma^- \pi^0). \end{aligned} \quad (95)$$

Рассмотрим, наконец, распад резонанса Δ с $T = 3/2$ на π -мезон и нуклон:

$$M_{\Delta \rightarrow N \pi} = g \bar{N}^a \bar{\pi}^{\{bc\}} \Delta_{\{abc\}}. \quad (96)$$

Пользуясь выражениями для \bar{N}^a и $\Delta_{\{abc\}}$ и выражением типа (54) для $\pi^{\{bc\}}$, получаем

$$\begin{aligned} M_{\Delta \rightarrow N \pi} &= g \bar{\pi}^+ \bar{p} \Delta^{++} + \frac{g}{\sqrt{3}} (\sqrt{2} \bar{\pi}^0 \bar{p} + \bar{\pi}^+ \bar{n}) \Delta^+ + \\ &\quad + \frac{g}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} \bar{\pi}^0 \bar{n} + \bar{\pi}^- \bar{p}) \Delta^0 + g \bar{\pi}^- \bar{n} \Delta^-, \end{aligned} \quad (97)$$

г. е.

$$\begin{aligned} W(\Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p) &= 3W(\Delta^+ \rightarrow n \pi^+) = \frac{3}{2} W(\Delta^+ \rightarrow p \pi^0) = \\ &= 3W(\Delta^0 \rightarrow p \pi^-) = \frac{3}{2} W(\Delta^0 \rightarrow n \pi^0) = W(\Delta^- \rightarrow \pi^- n). \end{aligned} \quad (98)$$

В заключение сделаем еще одно замечание, касающееся полной вероятности распада частиц из каждого мультиплета. Рассмотрим, например, частицы из мультиплета Δ с $T = 3/2$. Δ^{++} распадается только по одному каналу, а Δ^+ по двум:

$$\begin{aligned} \Delta^{++} &\rightarrow p + \pi^+, \\ \Delta^+ &\rightarrow \begin{cases} p + \pi^0 \\ n + \pi^+. \end{cases} \end{aligned}$$

Вероятности этих распадов не равны, но их полные вероятности равны между собой:

$$W(\Delta^{++} \rightarrow p + \pi^+) = W(\Delta^+ \rightarrow p + \pi^0) + W(\Delta^+ \rightarrow n + \pi^+),$$

как это нетрудно проверить. Это приводит к тому, что ширины всех резонансов в мультиплете Δ одинаковы. Такая же ситуация наблюдается для всех других изотопических мультиплетов.

2.4. Изотопическая инвариантность амплитуд рассеяния

Развитую выше спинорную технику применим теперь к изучению следствий изотопической инвариантности в процессах рассеяния и рождения частиц. Рассмотрим прежде всего амплитуду упругого рассеяния π -мезона на нуклоне. Она является инвариантной комбинацией произведений вида

$$\bar{\pi}_b^a(q_2) \pi_d^c(q_1) \bar{N}^e(p_2) N_f(p_1).$$

Из этих произведений можно образовать три инварианта, а именно:

$$\bar{\pi}_b^a(q_2) \pi_a^b(q_1) \bar{N}^c(p_2) N_c(p_1)$$

и

$$\bar{N}^a(p_2) [\bar{\pi}_a^b(q_2) \pi_b^c(q_1) \pm \pi_a^b(q_1) \bar{\pi}_b^c(q_2)] N_c(p_1).$$

Выражения, содержащие ε^{ab} , сводятся к этим инвариантам, так как $\varepsilon^{ab} \pi_b^c \varepsilon_{cd} = -\pi_d^a$. Однако в силу тождества

$$\begin{aligned} &\bar{\pi}_a^b(q_2) \pi_b^c(q_1) + \pi_a^b(q_1) \bar{\pi}_b^c(q_2) = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\pi}_i(q_2) \pi_j(q_1) (\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i)_a^c = \delta_a^c \bar{\pi}_i(q_2) \pi_i(q_1) = \\ &= \delta_a^c \bar{\pi}_b^d(q_2) \pi_d^b(q_1) \end{aligned}$$

только два из них независимы. Таким образом, амплитуда рассеяния π -мезона на нуклоне имеет вид

$$M_{\pi N \rightarrow \pi N} = A_1 \bar{\pi}_b^a(q_2) \pi_a^b(q_1) \bar{N}^c(p_2) N_c(p_1) + \\ + A_2 \bar{N}^a(p_2) [\bar{\pi}_a^b(q_2) \pi_b^c(q_1) - \pi_a^b(q_1) \bar{\pi}_b^c(q_2)] N_c(p_1). \quad (99)$$

Если вместо спинора π_b^a пользоваться трехмерным вектором π_i , то

$$M_{\pi N \rightarrow \pi N} = \\ = \frac{1}{2} \bar{\pi}_i(q_2) \pi_j(q_1) \bar{N}(p_2) [\{\tau_i \tau_j\} A_1 + [\tau_i \tau_j] A_2] N(p_1). \quad (100)$$

Мы показали, что из произведений волновых функций частиц можно образовать три инварианта, но только два из них независимы. Для того чтобы знать, сколько независимых инвариантов можно образовать из произведений волновых функций, можно рассуждать следующим образом. Так как π -мезон имеет $T = 1$, а нуклон имеет $T = 1/2$, то из правила сложения момента следует, что начальное и конечное состояния могут иметь изотопические спины $T = 1/2$ и $T = 3/2$ соответственно. Следовательно, существуют две независимые изотопические амплитуды, описывающие рассеяние в состояниях с определенными изотопическими спинами $T = 1/2$ и $T = 3/2$.

Из общей изотопической структуры (99) можно получить выражения амплитуд конкретных процессов. Рассмотрим, например, процесс

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p.$$

Так как для протона $N_1 = 1$ и $N_2 = 0$, для π^+ -мезона $\pi_1^2 = 1$ и $\bar{\pi}_2^1 = 1$, а остальные компоненты равны нулю, то из формулы (99) получаем

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = A_1 - A_2. \quad (101)$$

Аналогично

$$M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = A_1 + A_2; \quad (102)$$

$$M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = -\sqrt{2} A_2. \quad (103)$$

Амплитуды других процессов получаются из амплитуд (101) и (103) при помощи зарядовой симметрии. Исключая неизвестные произвольные функции A_1 и A_2 , получа-

ем соотношение между амплитудами трех рассматриваемых процессов

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n). \quad (104)$$

Отсюда следует, что сечения этих процессов должны удовлетворять неравенствам треугольника типа

$$\begin{aligned} & |V\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - V\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)| \leq \\ & \leq \sqrt{2\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)} \leq \sqrt{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) + \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)}. \end{aligned} \quad (105)$$

В области больших энергий и малых углов сечение перезарядки $\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n)$ очень мало по сравнению с упругими сечениями. Тогда предположив, что $A_2 = 0$, получим приближительное равенство сечений упругого рассеяния π^+ - и π^- -мезонов на протоне.

Для того чтобы получить соотношения между амплитудами или сечениями процессов типа

$$\pi + N \rightarrow K + \Sigma,$$

достаточно в конечных состояниях процессов в соотношении (101) заменить

$$p \rightarrow K^+, n \rightarrow K^0, \pi^{\pm 0} \rightarrow \Sigma^{\pm 0}.$$

В качестве второго примера рассмотрим рассеяние K -мезона на нуклоне. Из произведений волновых функций этих частиц можно образовать три инварианта:

$$\begin{aligned} & \bar{K}^a(q_2) K_a(q_1) \bar{N}^b(p_2) N_b(p_1); \\ & \bar{K}^a(q_2) K_b(q_1) \bar{N}^b(p_2) N_a(p_1); \\ & \bar{K}^a(q_2) K_b(q_1) \bar{N}^c(p_2) N_d(p_1) \epsilon^{bd} \epsilon_{ac}. \end{aligned}$$

Однако из соотношения

$$\epsilon^{bd} \epsilon_{ac} = -\delta_a^b \delta_c^d + \delta_c^b \delta_a^d$$

следует, что только два из них независимы. Итак,

$$\begin{aligned} M_{KN \rightarrow KN} = & A_1 \bar{K}^a(q_2) K_a(q_1) \bar{N}^b(p_2) N_b(p_1) + \\ & + A_2 \bar{K}^a(q_2) K_b(q_1) \bar{N}^b(p_2) N_a(p_1). \end{aligned} \quad (106)$$

Нетрудно доказать следующее тождество:

$$\delta_b^a \delta_d^c = \frac{1}{2} [(\tau_i)_a^d (\tau_i)_b^c + \delta_a^d \delta_b^c].$$

Отсюда следует, что второй член в правой части формулы (106) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} A_2 [\bar{K}^a(q_2) (\tau_i)_a^b K_b(q_1) \bar{N}^c(p_2) (\tau_i)_c^d N_d(p_1) + \bar{K}^a(q_2) K_a(q_1) \bar{N}^b(p_2) N_b(p_1)].$$

Итак, мы имеем

$$M_{KN \rightarrow KN} = B_1 \bar{K}(q_2) K(q_1) \bar{N}(p_2) N(p_1) + B_2 \bar{K}(q_2) (\tau_i) K(q_1) \bar{N}(p_2) (\tau_i) N(p_1), \quad (107)$$

где B_1 и B_2 просто связаны с A_1 и A_2 . Из общей структуры (106) получаем следующие выражения для амплитуд конкретных процессов:

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = A_1 + A_2; \quad (108)$$

$$M(K^0 p \rightarrow K^0 p) = A_1; \quad (109)$$

$$M(K^0 p \rightarrow K^+ n) = A_2. \quad (110)$$

Таким образом, амплитуды рассматриваемых процессов удовлетворяют соотношению

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(K^0 p \rightarrow K^0 p) + M(K^0 p \rightarrow K^+ n). \quad (111)$$

При больших энергиях и малых углах сечение $\sigma(K^0 p \rightarrow K^+ n)$ очень мало. Тогда из полученных соотношений следует равенство сечений рассеяния K^+ - и K^0 -мезонов на протоне. Если в соотношениях (108)—(110) заменим $K^+ \rightarrow p$, $K^0 \rightarrow n$, то получим соотношения для амплитуд рассеяния нуклона на нуклоне.

Мы применили спиновую технику к изучению соотношений между амплитудами рассеяния как следствие изотопической инвариантности. При анализе экспериментальных данных во многих случаях необходимо построить амплитуды рассеяния в состояниях с определенными изотопическими спинами. Для этой цели можно применить также спиновую технику. Рассмотрим, например, рассеяние π -мезона на нуклоне. Начальное и конечное состояния могут иметь $T = 1/2$ или $T = 3/2$. Для

того чтобы образовать волновые функции состояний с $T = 1/2$ из произведений $\pi_b^a N_c$ и $\bar{\pi}_a^b \bar{N}^c$, достаточно суммировать эти произведения по a и c . Таким образом, если начальное и конечное состояния имеют $T = 1/2$, то волновые функции этих состояний равны $\pi_b^a N_a$ и $\bar{\pi}_a^b \bar{N}^a$ соответственно. Поэтому матричный элемент рассеяния в состоянии с $T = 1/2$ имеет вид

$$M_{\pi N \rightarrow \pi N}^{1/2} = A \bar{N}^a \bar{\pi}_a^b \pi_b^c N_c. \quad (99')$$

Так как

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_a^b \pi_b^c &= -\pi_a^b \bar{\pi}_b^c + \delta_a^c \bar{\pi}_d^b \pi_b^d = \\ &= \frac{1}{2} (\bar{\pi}_a^b \pi_b^c - \pi_a^b \bar{\pi}_b^c) + \frac{1}{2} \delta_a^c \bar{\pi}_d^b \pi_b^d, \end{aligned}$$

то выражение для $M_{\pi N \rightarrow \pi N}^{1/2}$ можно переписать в виде

$$M_{\pi N \rightarrow \pi N}^{1/2} = \frac{1}{2} A (\bar{\pi}\pi) (\bar{N}N) + \frac{1}{2} A \bar{N}(\bar{\pi}\pi - \pi\bar{\pi}) N.$$

Сравнивая с формулой (99), мы видим, что в данном случае

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2} A,$$

и вместо соотношений (101) и (103) имеем

$$M^{1/2} (\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = 0; \quad (101')$$

$$M^{1/2} (\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = A; \quad (102')$$

$$M^{1/2} (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = -\frac{1}{\sqrt{2}} A. \quad (103')$$

Таким образом, если рассеяние π -мезона на нуклоне идет только через состояние с $T = 1/2$, то мы имеем соотношения

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = 0, \quad M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = -\sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n). \quad (104')$$

Рассмотрим теперь случай, когда рассеяние π -мезона на нуклоне идет только через состояние с $T = 3/2$. Из произведений $\pi_b^a N_c$ и $\bar{\pi}_a^b \bar{N}^c$ образуем прежде всего волновые функции состояний с $T = 3/2$. Для этого необходимо

симметризовать эти произведения по b и c , т. е. образовать суммы

$$\pi_b^a N_c + \pi_c^a N_b, \quad \bar{\pi}_a^b \bar{N}^c + \bar{\pi}_a^c \bar{N}^b,$$

а затем симметричным образом вычесть шпуры. В результате получим неприводимые спиноры

$$\pi_b^a N_c + \pi_c^a N_b - \frac{1}{3} (\delta_c^a \pi_b^d N_d + \delta_b^a \pi_c^d N_d)$$

и

$$\bar{\pi}_a^b \bar{N}^c + \bar{\pi}_a^c \bar{N}^b - \frac{1}{3} (\delta_a^c \bar{\pi}_d^b \bar{N}^d + \delta_a^b \bar{\pi}_d^c \bar{N}^d),$$

которые описывают состояния с $T = 3/2$. Амплитуда рассеяния в состоянии с $T = 3/2$ пропорциональна произведению этих волновых функций и имеет вид

$$\begin{aligned} M_{\pi N \rightarrow \pi N}^{3/2} &= A \left[\bar{\pi}_a^b \bar{N}^c + \bar{\pi}_a^c \bar{N}^b - \frac{1}{3} (\delta_a^c \bar{\pi}_d^b \bar{N}^d + \delta_a^b \bar{\pi}_d^c \bar{N}^d) \right] \times \\ &\times \left[\pi_b^a N_c + \pi_c^a N_b - \frac{1}{3} (\delta_c^a \pi_b^d N_d + \delta_b^a \pi_c^d N_d) \right] = \\ &= \frac{4}{3} A \left\{ 2 \bar{\pi}_b^a \pi_a^b \bar{N}^c N_c - \bar{N}^a [\bar{\pi}_a^b \pi_b^c - \pi_a^b \bar{\pi}_b^c] N_c \right\}. \quad (99'') \end{aligned}$$

Сравнивая с формулой (99), получим

$$A_1 = -\frac{1}{2} A_2 = \frac{2}{3} A.$$

Амплитуды конкретных процессов равны

$$M^{3/2} (\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = 4A; \quad (101'')$$

$$M^{3/2} (\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = \frac{4}{3} A; \quad (102'')$$

$$M^{3/2} (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = -\frac{4\sqrt{2}}{3} A. \quad (103'')$$

Таким образом, если амплитуда рассеяния π -мезона на нуклоне в состоянии с $T = 3/2$ дает главный вклад, а амплитуда рассеяния в состоянии с $T = 1/2$ очень мала, то мы имеем следующие соотношения между амплитудами конкретных процессов:

$$M (\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = 3M (\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = -\frac{3}{\sqrt{2}} M (\pi^- p \rightarrow \pi^0 n). \quad (104'')$$

В частности, в области энергии, где резонанс с $T = 3/2$ и $J = 3/2$ дает существенный вклад, имеем приближенные равенства

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \approx 9\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) \approx \frac{9}{2} \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n), \quad (105'')$$

что было подтверждено опытом.

Мы изучили подробно несколько примеров. Изложенный метод можно применить к любым процессам распада, рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях.

2.5. G -четность

При зарядовом сопряжении истинно нейтральные частицы переходят в себя, а их волновые функции либо не меняются, либо меняют знак. В первом случае говорят, что частица имеет C -четность $+1$, а во втором случае C -четность частицы равна -1 . Так как заряженные частицы переходят в свои античастицы, то для этих частиц нельзя ввести понятие C -четности. Для частиц, которые вместе с античастицами входят в один и тот же изотопический мультиплет, можно обобщить это понятие, а именно ввести так называемую G -четность.

Рассмотрим, например, π -мезон. В C -преобразовании имеем

$$\pi^+ \rightarrow \pi^-, \quad \pi^- \rightarrow \pi^+, \quad \pi^0 \rightarrow \pi^0.$$

В п. 2.1 мы рассмотрели специальное изотопическое преобразование — зарядовую симметрию, в котором $\pi^+ \rightarrow -\pi^+$, $\pi^- \rightarrow -\pi^-$, $\pi^0 \rightarrow -\pi^0$. Комбинируя C -преобразование и зарядовую симметрию, получаем G -преобразование, в котором $\pi^+ \rightarrow -\pi^+$, $\pi^- \rightarrow -\pi^-$, $\pi^0 \rightarrow -\pi^0$. Итак, все π -мезоны являются собственными состояниями G -преобразования. Соответствующее собственное значение равно -1 и называется G -четностью мезона. Аналогично ρ -мезон имеет G -четность $+1$, а G -четности ω - и ϕ -мезонов равны -1 . C -инвариантность и изотопическая инвариантность приводят к новому закону сохранения — сохранение G -четности, который очень часто применяется при изучении правил отбора в процессах сильных взаимодействий. Так, сохранение G -четности запрещает распады ρ -мезонов на три π -мезона, а также ω - и ϕ -мезонов на два π -мезона. В заключение отметим, что определенными G -четностями обладают не только мезоны, но и системы

частиц, содержащие одновременно частицы из некоторого мультиплета и их античастицы, например системы нуклон - антинуклон. Для процессов взаимодействия таких систем сохранение G -четности дает ряд правил отбора. Однако на этом подробно останавливаться мы не будем.

§ 3. Изотопические свойства электромагнитных взаимодействий

3.1. Электромагнитный ток

Лагранжиан электромагнитных взаимодействий для всех полей равен

$$L_e = ieA_\mu J_\mu^e,$$

где J_μ^e — электромагнитный ток этих полей. Для нуклона

$$J_\mu^e = \bar{\Psi}_p \gamma_\mu \Psi_p,$$

где Ψ_p — полевой оператор протона. Если ввести оператор нуклонного поля

$$N = \begin{pmatrix} \Psi_p \\ \Psi_n \end{pmatrix},$$

то

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\mu N + \frac{1}{2} \bar{N} \gamma_\mu \tau_3 N. \quad (112)$$

Это соотношение означает, что электромагнитный ток для нуклона состоит из двух частей: первая часть инвариантна относительно изотопической группы, а вторая часть является третьей компонентой некоторого изотопического вектора [так как $\bar{N}^a N_b$ — спинор второго ранга и, согласно формуле (34), $\bar{N}^a (\tau_i)_a^b N_b$ является трехмерным вектором]. Этим свойством обладают также и другие барионы и мезоны. Таким образом, электромагнитный ток для сильно взаимодействующих частиц имеет вид

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} (J_\mu^0 + J_\mu^1), \quad (113)$$

где J_μ^0 — изотопический скаляр, а J_μ^1 — третья компонента некоторого изотопического вектора. Изоскалярный ток имеет G -четность -1 , а G -четность изовекторного тока равна $+1$, как это нетрудно проверить. Действитель-

но, для изоскалярного тока G -преобразование совпадает с C -преобразованием, так как он является изотопическим скаляром, а C -четность векторного тока равна -1 . Что касается изовекторного тока, то в зарядовой симметрии он меняет знак, так как зарядовая симметрия является вращением на угол π вокруг второй оси в изотопическом трехмерном пространстве.

3.2. Формфакторы и амплитуды электромагнитных процессов

Рассмотрим теперь электромагнитные процессы сильно взаимодействующих частиц, матричные элементы которых пропорциональны матричным элементам электромагнитного тока

$$\langle A | J_{\mu}^e | B \rangle,$$

где $|A\rangle$ и $|B\rangle$ — состояния систем сильно взаимодействующих частиц. К таким процессам относятся рассеяние электронов на нуклоне, фоторождение, электророждение, а также радиационный распад мезонов и барионов с испусканием одного фотона. Так как сильные взаимодействия изотопически инвариантны, то матричные элементы тока J_{μ}^e обладают такими же трансформационными свойствами, что и сам ток. Это означает, что каждый матричный элемент тока J_{μ}^e есть сумма двух членов, первый из которых (матричный элемент J_{μ}^0) не меняется при изотопических преобразованиях, а второй (матричный элемент J_{μ}^1) является третьей компонентой некоторого изотопического вектора. Эти трансформационные свойства приводят к ряду следствий.

В качестве примера рассмотрим матричные элементы тока J_{μ}^e между состояниями барионов, например нуклонов. Поскольку нас интересуют только изотопические соотношения, то можно не рассматривать спиновую структуру. Тогда

$$\langle N | J^0 | N \rangle = F^0 \bar{N} N; \quad (114)$$

$$\langle \bar{N} | J^1 | N \rangle = F^1 \bar{N} \tau_3 N. \quad (115)$$

Следовательно, формфакторы (электрические и магнитные) протона и нейтрона выражаются через два незави-

симых формфактора — изоскалярный и изовекторный:

$$F^p = \frac{1}{2} (F^0 + F^1); \quad (116)$$

$$F^n = \frac{1}{2} (F^0 - F^1). \quad (117)$$

В данном случае изотопическая инвариантность не дает никаких новых следствий. Однако дело обстоит совсем иначе при изучении формфакторов частиц с высшими изотопическими спинами. Действительно, для матричных элементов J_μ^0 и J_μ^1 между состояниями Σ -гиперона

$$\langle \Sigma | J_\mu^0 | \Sigma \rangle = F^0 \bar{\Sigma}_b^a \Sigma_a^b; \quad (118)$$

$$\langle \Sigma | J_\mu^1 | \Sigma \rangle = F^1 \Sigma_b^a (\tau_3)_a^c \Sigma_c^b. \quad (119)$$

Формфакторы частиц Σ^+ , Σ^0 и Σ^- выражаются через F^0 и F^1 следующим образом:

$$F^{\Sigma^+} = \frac{1}{2} (F^0 + F^1); \quad (120)$$

$$F^{\Sigma^0} = \frac{1}{2} F^0; \quad (121)$$

$$F^{\Sigma^-} = -\frac{1}{2} (F^0 - F^1) \quad (122)$$

(знаки формфакторов были выбраны так, чтобы электрические формфакторы частиц с зарядом ± 1 при нулевом значении передачи импульса были равны ± 1 соответственно). Отсюда получаем соотношение между формфакторами Σ -гиперонов

$$F^{\Sigma^+} - F^{\Sigma^-} = 2F^{\Sigma^0}. \quad (123)$$

В частности, магнитные моменты Σ -гиперонов связаны соотношением вида (123)

$$\mu_{\Sigma^+} - \mu_{\Sigma^-} = 2\mu_{\Sigma^0}. \quad (123')$$

Аналогичный метод также можно применить к изучению амплитуд фоторождения. Для процессов фоторождения π -мезона на нуклоне мы имеем

$$\langle \pi N | J^0 | N \rangle = A_0 \bar{N}^a \bar{\pi}_a^b N_b; \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi N | J^1 | N \rangle = & A_1 \bar{\pi}_a^b (\tau_3)_b^c \bar{N}^c N_c + \\ & + A_2 \bar{N}^a (\bar{\pi}_a^b (\tau_3)_b^c - (\tau_3)_a^b \bar{\pi}_b^c) N_c. \end{aligned} \quad (125)$$

Отметим, что из произведения $\bar{N}^a \bar{\pi}_b^c N_d$ можно образовать также третью комбинацию с требуемыми трансформационными свойствами, а именно

$$\bar{N}^a (\bar{\pi}_a^b (\tau_3)_b^c + (\tau_3)_a^b \bar{\pi}_b^c) N_c.$$

Однако этот член выражается через два независимых члена в формуле (125). Аналогичная ситуация имела место при изучении рассеяния π -мезона на нуклоне. Таким образом, амплитуда фоторождения π -мезона на нуклоне имеет следующую изотопическую структуру:

$$M(\gamma N \rightarrow \pi N) \sim \bar{\pi}_i \bar{N} [A'_0 \tau_i + A'_1 \{\tau_i \tau_3\} + A'_2 [\tau_i \tau_3]] N. \quad (126)$$

Из данной общей структуры можно получить выражения для амплитуд конкретных процессов:

$$M(\gamma p \rightarrow \pi^0 p) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} A_0 + \sqrt{2} A_1; \quad (127)$$

$$M(\gamma p \rightarrow \pi^+ n) \sim A_0 + 2A_2; \quad (128)$$

$$M(\gamma n \rightarrow \pi^0 n) \sim -\frac{1}{\sqrt{2}} A_0 + \sqrt{2} A_1; \quad (129)$$

$$M(\gamma n \rightarrow \pi^- p) \sim A_0 - 2A_2. \quad (130)$$

Отсюда получаем соотношение

$$M(\gamma p \rightarrow \pi^+ n) + M(\gamma n \rightarrow \pi^- p) = \sqrt{2} (M(\gamma p \rightarrow \pi^0 p) + M(\gamma n \rightarrow \pi^0 n)). \quad (131)$$

Рассмотрим, наконец, радиационный распад бариона с $T = 3/2$ на барион с $T = 1/2$, например

$$\Delta \rightarrow N + \gamma.$$

Амплитуда имеет вид

$$M_{\Delta \rightarrow N \gamma} = g \bar{N}^a \Delta_{abc} (\tau_3)_d^b \varepsilon^{cd}, \quad (132)$$

где \bar{N}^a и Δ_{abc} — волновые функции, данные в п. 1.1. Для конкретных процессов

$$\left. \begin{aligned} M(\Delta^+ \rightarrow p \gamma) &= \frac{2}{\sqrt{3}} g; \\ M(\Delta^0 \rightarrow n \gamma) &= \frac{2}{\sqrt{3}} g. \end{aligned} \right\} \quad (133)$$

Итак,

$$M(\Delta^+ \rightarrow p\gamma) = M(\Delta^0 \rightarrow n\gamma).$$

Это соотношение также можно получить из зарядовой симметрии, учитывая то, что только изовекторный ток дает вклад.

3.3. Нарушение изотопической инвариантности электромагнитным взаимодействием

Электромагнитный ток не инвариантен относительно изотопических преобразований, поэтому радиационные поправки должны привести к нарушению изотопической инвариантности сильных взаимодействий. Рассмотрим, например, вклад от радиационных поправок второго порядка к амплитудам процессов сильных взаимодействий. Соответствующие матричные элементы содержат произведение двух электромагнитных токов

$$\frac{1}{4} (J^0(x) + J^1(x))(J^0(y) + J^1(y)).$$

Если J^1 преобразуется как изотопический вектор, то из правила сложения момента (см. п. 1.4) следует, что эти матричные элементы состоят из трех частей, одна из которых есть инвариант, а другие преобразуются как компоненты с $T_3 = 0$ изотопического вектора ($T = 1$) и изотопического симметричного тензора второго ранга с нулевым шпуром ($T = 2$). В частности, электромагнитное взаимодействие приводит к расщеплению масс частиц в одном изотопическом мультиплете, и из указанных трансформационных свойств радиационных поправок можно получить соотношения между разностями масс частиц в каждом мультиплете.

Рассмотрим более подробно электромагнитное расщепление масс частиц. Предположим, что при отсутствии электромагнитного взаимодействия (а также слабых взаимодействий) массы всех частиц в одном изотопическом мультиплете совпадают. При включении электромагнитного взаимодействия происходит перенормировка массы. Из изотопических свойств электромагнитного тока следует, что добавка к массовому члену в лагранжиане, возникающая в результате перенормировки масс, состоит из трех частей с различными трансформационными свойст-

вами. Первая часть является инвариантом и включается в первоначальную массу, одинаковую для всех частиц в каждом мультиплете, а другие преобразуются как компоненты с $T_3 = 0$ изотопических вектора и тензора. Итак, во втором порядке по электромагнитному взаимодействию массы всех частиц в каждом изотопическом мультиплете выражаются через три неизвестные константы. Поэтому для мультиплетов с $T \geq 3/2$ существуют соотношения между массами их компонент.

В качестве примера рассмотрим барионный изотопический мультиплет с $T = 3/2$.

Массовый член в лагранжиане имеет вид

$$L_M = M_0 \bar{\Psi}^{(abc)} \Psi_{\{abc\}} + a_1 (\tau_3)_a^b \bar{\Psi}^{(acd)} \Psi_{\{bcd\}} + a_2 (\tau_3)_a^b (\tau_3)_c^d \bar{\Psi}^{(ace)} \Psi_{\{bde\}}. \quad (134)$$

Отсюда, например, мы получаем для масс барионных резонансов Δ выражения:

$$M_{\Delta^{++}} = M_0 + a_1 + a_2; \quad (135)$$

$$M_{\Delta^+} = M_0 + \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_2; \quad (136)$$

$$M_{\Delta^0} = M_0 - \frac{1}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_2; \quad (137)$$

$$M_{\Delta^-} = M_0 - a_1 + a_2. \quad (138)$$

Следовательно, разности масс этих частиц связаны соотношением

$$M_{\Delta^{++}} - M_{\Delta^-} = 3(M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0}). \quad (139)$$

§ 4. Изотопические свойства слабых взаимодействий

4.1. Сохранение векторного тока и изотопические свойства тока $\Delta S = 0$

В универсальной ($V - A$)-теории слабых взаимодействий часть лагранжиана, соответствующая сохраняющим странность процессам слабых взаимодействий барионов и мезонов с лептонами, имеет вид

$$L_{\Delta S=0}^l = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{l}_\mu^i J_\mu^i + \text{э. с.},$$

где j_μ^l — лептонный ток; J_μ — сумма векторного и аксиального токов сильно взаимодействующих частиц J_μ^V и J_μ^A , причем J_μ^V и изовекторная часть J_μ^1 электромагнитного тока (113) являются различными компонентами одного и того же изотопического вектора

$$V_\mu^i = (V_\mu)_a^b (\tau_i)_b^a, \quad (140)$$

а именно

$$\left. \begin{aligned} J_\mu^1 &= (V_\mu)_a^b (\tau_3)_b^a; & J_\mu^V &= (V_\mu)_a^b (\tau_+)_b^a, \\ (J_\mu^V)^+ &= (V_\mu)_a^b (\tau_-)_b^a, & r_\pm &= \frac{\tau_1 + i\tau_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

Так как изовекторный (и изоскалярный) электромагнитный ток сохраняется, то векторный ток слабых взаимодействий с $\Delta S = 0$ также сохраняется:

$$\frac{\partial V_\mu^i}{\partial x_\mu} = \frac{\partial J_\mu^V}{\partial x_\mu} = 0.$$

Константа векторного тока слабых взаимодействий сильно взаимодействующих частиц с $\Delta S = 0$ не подвергается перенормировке в результате сильных взаимодействий. Тем самым объясняется равенство перенормированных (т. е. наблюдаемых) векторных констант β -распада нейтрона и распада μ -мезона в предположении универсальности перенормированных констант слабых взаимодействий. Иначе говоря, векторная константа β -распада нейтрона равна универсальной перенормированной константе G .

Гипотеза о сохранении векторного тока V_μ^i приводит к весьма важным и интересным следствиям. Например, из сохранения векторного тока V_μ^i следует, что матричный элемент этого тока для β -распада нейтрона имеет такой же вид, что и матричный элемент электромагнитного тока J_μ^e между состояниями протонов или нейтронов. Он зависит от формфакторов F_i^q , $i = 1, 2$, причем формфактор F_1^q соответствует электрическим формфакторам $F_1^{p, n}$, а формфактор F_2^q , аналогичный магнитным формфакторам $F_1^{p, n}$, называется формфактором слабого магнетизма. Так как F_i^q равны соответствующим изовекторным электромагнитным формфакторам, а последние связаны с формфакторами протона и нейтрона соотноше-

ниями (116) и (117), то

$$F_i^{\beta} = F_i^{\rho} - F_i^n. \quad (142)$$

Рассмотрим теперь матричные элементы токов J_{μ}^0 , V_{μ}^i между состояниями π -мезонов:

$$\langle \pi | J_{\mu}^0 | \pi \rangle = H^0 \bar{\pi}_b^a \pi_a^b; \quad (143)$$

$$\langle \pi | V_{\mu}^i | \pi \rangle = H^1 \bar{\pi}_b^a (\tau_i)_a^c \pi_c^b. \quad (144)$$

Отсюда следует, что матричный элемент электромагнитного тока для π -мезона равен

$$\begin{aligned} \langle \pi | J_{\mu}^e | \pi \rangle &= \frac{1}{2} [H^0 \bar{\pi}_a^b + H^1 \bar{\pi}_b^a (\tau_3)_a^c \pi_c^b] = \\ &= \frac{1}{2} [\bar{\pi}^+ \pi^+ (H^0 + H^1) + \bar{\pi}^0 \pi^0 H^0 + \bar{\pi}^- \pi^- (H^0 - H^1)], \end{aligned} \quad (145)$$

а матричный элемент тока V_{μ}^i для β -распада π -мезона равен

$$\langle \pi | J_{\mu}^V | \pi \rangle = H^1 \bar{\pi}_b^a (\tau_+)_a^c \pi_c^b = \frac{1}{\sqrt{2}} H^1 (\bar{\pi}^0 \pi^- - \bar{\pi}^+ \pi^0). \quad (146)$$

Если π^0 -мезон — истинно нейтральная частица, то из формулы (145) следует, что $H^0 = 0$. Таким образом, формфактор β -распада π -мезона связан с их электромагнитными формфакторами H^e :

$$H^{\beta} = \sqrt{2} H^e. \quad (147)$$

Так как константа β -распада π -мезона равна произведению универсальной константы G на формфактор H при нулевой передаче, а при нулевой передаче $H^e = 1$, то константа β -распада π -мезона равна $\sqrt{2}G$. Этот результат был получен впервые Герштейном и Зельдовичем и затем Файнманом и Гелл-Манном. Отсюда следует, что вероятность β -распада π -мезона равна

$$W(\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \bar{\nu}) = \frac{G^2 (m_{\pi^-} - m_{\pi^0})^5}{30\pi^3};$$

это подтверждается опытом.

Мы изучили некоторые следствия, вытекающие из изотопических свойств векторного тока V_{μ} . Что касается аксиального тока J_{μ}^A , то в настоящее время предполагают, что он также является компонентой некоторого изо-

топического вектора. Итак, для полного тока слабых взаимодействий с $\Delta S = 0$

$$J_\mu = (J_\mu)_a^b (\tau_+)^a_b; \quad J_\mu^+ = (J_\mu)_a^b (\tau_-)^a_b. \quad (148)$$

Эта гипотеза, более сильная, чем гипотеза о сохранении векторного тока, может быть проверена в экспериментах с нейтрино. Так, из нее вытекает ряд соотношений между сечениями процессов рождения π -мезона при столкновении нейтрино и антинейтрино с нуклонами. Матричные элементы этих процессов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M(\nu N \rightarrow l^- \pi N) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u \langle \pi N | J_\mu | N \rangle; \\ M(\bar{\nu} N \rightarrow l^+ \pi N) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v \langle \pi N | J_\mu^+ | N \rangle, \end{aligned} \right\} (149)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \pi N | J_\mu | N \rangle &= \langle \pi N | (J_\mu)_a^b | N \rangle (\tau_+)^a_b; \\ \langle \pi N | J_\mu^+ | N \rangle &= \langle \pi N | (J_\mu)_a^b | N \rangle (\tau_-)^a_b. \end{aligned}$$

Из изотопической инвариантности сильных взаимодействий следует, что

$$\begin{aligned} (\tau_i)_b^a \langle \pi N | (J_\mu)_a^b | N \rangle &= A_\mu \bar{\pi}_b^a (\tau_i)_a^b \bar{N}^c N_c + \\ &+ B_\mu \bar{N}^a [\bar{\pi}_a^b (\tau_i)_b^c - (\tau_i)_a^b \bar{\pi}_b^c] N_c, \end{aligned} \quad (150)$$

по аналогии с формулами (99) и (125). Отсюда получаем для конкретных процессов:

$$M(\nu p \rightarrow l^- \pi^+ p) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u (A_\mu - B_\mu); \quad (151)$$

$$M(\nu n \rightarrow l^- \pi^+ n) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u (A_\mu + B_\mu); \quad (152)$$

$$M(\nu n \rightarrow l^- \pi^0 p) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u (-\sqrt{2} B_\mu); \quad (153)$$

$$M(\bar{\nu} n \rightarrow l^+ \pi^- n) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v (A_\mu - B_\mu); \quad (151')$$

$$M(\bar{\nu} p \rightarrow l^+ \pi^- p) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v (A_\mu + B_\mu); \quad (152')$$

$$M(\bar{\nu} p \rightarrow l^+ \pi^0 n) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v (-\sqrt{2} B_\mu). \quad (153')$$

Отметим, что матричные элементы лептонного тока для процессов с нейтрино и антинейтрино

$$\bar{u}\gamma_{\mu}(1 + \gamma_5)u, \bar{\nu}\gamma_{\mu}(1 + \gamma_5)\nu$$

вообще различаются. Они равны друг другу при нулевом значении передачи импульса лептонов. Таким образом, мы имеем следующие соотношения для дифференциальных сечений при нулевой передаче импульса лептонов:

$$\sigma(\nu p \rightarrow l^{-}\pi^{+}p)|_{k_{\nu} \parallel k_e} = \sigma(\tilde{\nu}n \rightarrow l^{+}\pi^{-}n)|_{k_{\nu} \parallel k_l}; \quad (154)$$

$$\sigma(\nu n \rightarrow l^{-}\pi^{+}n)|_{k_{\nu} \parallel k_l} = \sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^{+}\pi^{-}p)|_{k_{\nu} \parallel k_l}; \quad (154')$$

$$\sigma(\nu n \rightarrow l^{-}\pi^0 p)|_{k_{\nu} \parallel k_l} = \sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^{+}\pi^0 n)|_{k_{\nu} \parallel k_l}. \quad (154'')$$

Из выражений (151) — (153) получаем неравенства треугольника для соответствующих процессов при любых значениях передачи:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sigma(\nu p \rightarrow l^{-}\pi^{+}p)} - \sqrt{\sigma(\nu n \rightarrow l^{-}\pi^{+}n)} &\leq \sqrt{2\sigma(\nu n \rightarrow l^{-}\pi^0 p)} \leq \\ &\leq \sqrt{\sigma(\nu p \rightarrow l^{+}\pi^{-}p)} + \sqrt{\sigma(\nu n \rightarrow l^{-}\pi^{+}n)} \end{aligned} \quad (155)$$

и т. д. Аналогичные соотношения имеют место также и для соответствующих процессов с антинейтрино

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\sigma(\tilde{\nu}n \rightarrow l^{+}\pi^{-}n)} - \sqrt{\sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^{+}\pi^{-}p)} \right| &\leq \\ &\leq \sqrt{2\sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^{+}\pi^0 n)} \leq \sqrt{\sigma(\tilde{\nu}n \rightarrow l^{+}\pi^{-}n)} + \\ &+ \sqrt{\sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^{+}\pi^{-}p)}. \end{aligned} \quad (155'')$$

Нетрудно увидеть, что такие же соотношения, что и соотношения (154) — (155), можно получить и для процессов парного рождения K -мезона и Σ -гиперона при столкновении нейтрино или антинейтрино с нуклонами. Для получения этих соотношений достаточно в конечных состояниях рассмотренных процессов произвести замены $p \rightarrow K^{+}$, $n \rightarrow K^0$, $\pi^{\pm 0} \rightarrow \Sigma^{\pm 0}$. Например, вместо соотношения (154) теперь имеем

$$\sigma(\nu p \rightarrow l^{-}K^{+}\Sigma^{+})|_{k_{\nu} \parallel k_l} = \sigma(\tilde{\nu}n \rightarrow l^{+}K^0\Sigma^{-})|_{k_{\nu} \parallel k_l} \quad (156)$$

и т. д. Для процессов рождения K -мезона и Λ -гиперона справедливо соотношение

$$\sigma(\nu n \rightarrow l^- \Lambda K^+) |_{\mathbf{k}_\nu, \parallel \mathbf{k}_l} = \sigma(\widetilde{\nu} p \rightarrow l^+ \Lambda K^0) |_{\mathbf{k}_\nu, \parallel \mathbf{k}_l}. \quad (157)$$

Вместо сложных неравенств типа (155) можно получить простые соотношения, если рассмотреть рождение π -мезона и нуклона в резонансном состоянии с $T = 3/2$. В данном случае все матричные элементы выражаем через одну неизвестную амплитуду (спиновая структура не рассматривается)

$$(\tau_i)_b^a \langle \Delta | (J_\mu)_a^b | N \rangle = A_\mu \bar{\Lambda}^{bcd} N_a \epsilon_{ca} (\tau_i)_b^a. \quad (158)$$

Для конкретных процессов

$$\langle \Delta^{++} | J_\mu | p \rangle = - \langle \Delta^- | J_\mu | n \rangle = A_\mu; \quad (159)$$

$$\langle \Delta^+ | J_\mu | n \rangle = - \langle \Delta^0 | J_\mu | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu \quad (160)$$

и, следовательно,

$$\sigma(\nu p \rightarrow l^- \Delta^{++}) = 3\sigma(\nu n \rightarrow l^- \Delta^+); \quad (161)$$

$$\sigma(\widetilde{\nu} n \rightarrow l^+ \Delta^-) = 3\sigma(\widetilde{\nu} p \rightarrow l^+ \Delta^0). \quad (161')$$

Так как во всех рассмотренных процессах изотопический спин конечного состояния получается сложением изотопического спина начального состояния с единицей (по правилам сложения моментов), то говорим, что эти процессы удовлетворяют правилу $\Delta T = 1$.

В заключение отметим, что векторный и аксиальный токи обладают определенными G -четностями. Так, для векторного тока нуклона

$$\begin{aligned} \bar{N} \gamma_\mu \tau_i N \xrightarrow{C} - N^T C^{-1} \gamma_\mu \tau_i C \bar{N}^T &= - \bar{N} \gamma_\mu \tau_i^T N \xrightarrow{T_2} \\ &\rightarrow - \bar{N} \tau_2 \gamma_\mu \tau_i^T \tau_2 N = \bar{N} \gamma_\mu \tau_i N. \end{aligned}$$

Здесь T_2 обозначает зарядовую симметрию, в которой $N \rightarrow -i\tau_2 N$. Аналогично

$$\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_i N \xrightarrow{C} + \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_i^T N \xrightarrow{T_2} - \bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_i N.$$

4.2. Изотопические свойства тока с $\Delta S = \pm 1$

Для процессов слабых взаимодействий сильно взаимодействующих частиц с лептонами, в которых странность меняется, предполагают, что соответствующая часть лаг-

ранжиана имеет вид

$$L'_{\Delta S \neq 0} = \frac{G}{\sqrt{2}} j'_\mu S_\mu + \text{э. с.}$$

В этом лагранжиане S_μ — ток сильно взаимодействующих частиц, преобразующийся при изотопических преобразованиях как компонента изотопического спинора и меняющий странность системы частиц на величину, равную единице по абсолютному значению. Здесь ток S_μ определяется с точностью до мультипликативной константы. Предположим, что в рассматриваемых процессах третья компонента изотопического спина системы сильно взаимодействующих частиц, а также ее полный изотопический спин меняются на величину, равную $1/2$ по абсолютному значению. Поскольку, по нашему определению, лептонный ток переводит нейтрино в отрицательный лептон, т. е. уменьшает заряд лептонов на единицу, то ток S должен увеличить заряд систем сильно взаимодействующих частиц на единицу, т. е. $\Delta Q = 1$. Из формулы Гелл-Манна — Нишиджимы следует, что условия $|\Delta S| = 1$, $|\Delta T_3| = 1/2$ и $\Delta Q = 1$ влекут за собой $\Delta S = 1$ и $\Delta T_3 = 1/2$. Мы имеем, таким образом, правило $\Delta Q = \Delta S$.

Условие $\Delta T_3 = 1/2$ означает, что третья компонента изотопического спина системы сильно взаимодействующих частиц увеличивается на $+1/2$, т. е. S_μ преобразуется как оператор рождения частицы с $T = 1/2$ и $T_3 = 1/2$ или оператор уничтожения частицы с $T = 1/2$ и $T_3 = -1/2$. Отсюда следует, что матричные элементы вида

$$\langle A | S_\mu | B \rangle$$

для любых состояний систем сильно взаимодействующих частиц $|A\rangle$ и $|B\rangle$ преобразуются как изотопический спинор с $T = 1/2$ и $T_3 = -1/2$. Это трансформационное свойство матричных элементов тока S_μ приводит к ряду соотношений между вероятностями распада, а также между сечениями рождения странных частиц в опытах с нейтрино.

Рассмотрим лептонные распады K -мезонов. Так как матричный элемент S_μ^+ преобразуется как компонента спинора с $T = 1/2$ и $T_3 = 1/2$, то

$$\langle \pi | S_\mu^+ | K \rangle = B_\mu \bar{\pi}_1^a K_a. \quad (162)$$

Отсюда получаем для конкретных процессов

$$\begin{aligned} M(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \langle \pi^0 | S_\mu^+ | K^+ \rangle = \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \frac{1}{\sqrt{2}} B_\mu; \end{aligned} \quad (163)$$

$$\begin{aligned} M(K^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu \langle \pi^- | S_\mu^+ | K^0 \rangle = \\ &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu B_\mu, \end{aligned} \quad (164)$$

т. е.

$$M(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(K^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-). \quad (165)$$

Так как распад $\widetilde{K}^0 \rightarrow \nu + l^+ + \pi^-$ запрещен в силу правила $\Delta S = \Delta Q$, то для распадов $K_{1,2}^0$ -мезонов амплитуды равны

$$M(K_{1,2}^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-) = \frac{1}{\sqrt{2}} M(K^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-). \quad (166)$$

Итак, вероятности лептонных распадов K^+ - и $K_{1,2}^0$ -мезонов связаны соотношением

$$W(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) = W(K_{1,2}^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-). \quad (167)$$

Аналогично

$$W(K^- \rightarrow \widetilde{\nu} l^- \pi^0) = W(K_{1,2}^0 \rightarrow \widetilde{\nu} l^- \pi^+). \quad (168)$$

Эти соотношения вместе с CP -инвариантностью дают

$$\begin{aligned} W(K^+ \rightarrow \nu l^+ \pi^0) &= W(K^- \rightarrow \widetilde{\nu} l^- \pi^0) = \\ &= \frac{1}{2} W(K_{1,2}^0 \rightarrow \nu l^+ \pi^-, \widetilde{\nu} l^- \pi^+). \end{aligned} \quad (169)$$

Соотношение типа (165) также имеет место для лептонных распадов Ξ -гиперонов $\Xi \rightarrow \Sigma + l^- + \widetilde{\nu}$. В этих процессах ток S_μ дает вклад. Следовательно, мы должны рассмотреть матричный элемент этого тока

$$\langle \Sigma | S_\mu | \Xi \rangle = C_\mu \bar{\Sigma}_2^a \Xi_a. \quad (170)$$

Отсюда получаем

$$\langle \Sigma^+ | S_\mu | \Xi^0 \rangle = C_\mu; \quad (171)$$

$$\langle \Sigma^0 | S_\mu | \Xi^- \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} C_\mu, \quad (172)$$

т. е.

$$M(\Xi^0 \rightarrow l \tilde{\nu} \Sigma^+) = \sqrt{2} M(\Xi^- \rightarrow l \tilde{\nu} \Sigma^0). \quad (173)$$

Применим теперь предложенную гипотезу об изотопических свойствах токов S_μ и S_μ^\dagger к изучению процессов рождения гиперонов при столкновении антинейтрино с нуклоном. В данном случае $\Delta S = -1$ и амплитуды рассматриваемых процессов содержат матричный элемент тока S_μ^\dagger между состояниями нуклона и гиперона. Например,

$$\langle \Sigma | S_\mu^\dagger | N \rangle = A_\mu \bar{\Sigma}_1^a N_a. \quad (174)$$

Для конкретных процессов мы имеем

$$M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \Sigma^0) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v \frac{1}{\sqrt{2}} A_\mu; \quad (175)$$

$$M(\tilde{\nu} n \rightarrow l^+ \Sigma^-) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{v} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \bar{v} A_\mu. \quad (176)$$

Итак,

$$\sigma(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \Sigma^0) = \frac{1}{2} \sigma(\tilde{\nu} n \rightarrow l^+ \Sigma^-). \quad (177)$$

Аналогичное соотношение также имеется для сечения рождения барионных резонансов с $Y = 1$ и $T = 1$:

$$\sigma(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ Y^{*0}) = \frac{1}{2} \sigma(\tilde{\nu} n \rightarrow l^+ Y^{*-}). \quad (177')$$

Отметим, что во всех рассмотренных процессах изотопические спины конечного и начального состояний различаются на $1/2$. Выражая это свойство рассматриваемых процессов, мы говорим, что они удовлетворяют правилу $\Delta T = 1/2$.

4.3. Изотопические свойства нелептонных слабых взаимодействий с $\Delta S \neq 0$

По аналогии с правилами $\Delta T = 1$ и $\Delta T = 1/2$ для лептонных процессов слабых взаимодействий с $\Delta S = 0$ и $|\Delta S| = 1$ в нелептонных процессах имеет место также

правилу $\Delta T = 1/2$, согласно которому части лагранжиана слабых взаимодействий, сопряженные друг другу в силу эрмитовости лагранжиана) и соответствующие лептонным процессам, преобразуются как компоненты изотопических спиноров с $T = 1/2$ и $T_3 = \pm 1/2$; $T_3 = 1/2$ для процессов с $\Delta S = 1$ и $T_3 = -1/2$ для процессов с $\Delta S = -1$. Из этого предположения вытекают различные соотношения между амплитудами лептонных распадов странных частиц

В процессе распада K -мезона

$$K \rightarrow 2\pi$$

конечные состояния могут иметь только $T = 0$ или $T = 1$ в силу правила $\Delta T = 1/2$. Однако два π -мезона находятся в S -состоянии и пространственная функция симметрична. Следовательно, изотопическая волновая функция системы двух π -мезонов также симметрична, как это следует из обобщенного принципа Паули.

Нетрудно видеть, что

$$\pi_b^a(q_1) \pi_a^b(q_2) = \pi_b^a(q_2) \pi_a^b(q_1).$$

С другой стороны, в п. 2.2 и 2.3 было получено тождество

$$\pi_b^a(q_1) \pi_c^b(q_2) (\tau_i)_a^c = - \pi_b^a(q_2) \pi_c^b(q_1) (\tau_i)_a^c.$$

Эти соотношения означают, что изотопическая волновая функция состояния с $T = 0$ симметрична, а состояния с $T = 1$ — антисимметрична. Таким образом, в распаде $K \rightarrow 2\pi$ конечные состояния должны иметь $T = 0$ и, следовательно, распад $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$ запрещен. Так как в распаде K -мезона $\Delta S = -1$, то $\Delta T_3 = 1/2$ и матричный элемент этого распада преобразуется как изотопический спинор с $T = 1/2$ и $T_3 = -1/2$:

$$\begin{aligned} \langle 2\pi | L | K \rangle &= A \bar{\pi}_b^a(q_1) \bar{\pi}_a^b(q_2) K_2 = \\ &= A [\bar{\pi}^0(q_1) \bar{\pi}^0(q_2) + \bar{\pi}^+(q_1) \bar{\pi}^-(q_2) + \bar{\pi}^+(q_2) \bar{\pi}^-(q_1)] K^0. \end{aligned} \quad (178)$$

Аналогичное выражение имеется также для распада \bar{K} -мезона. Таким образом, в силу правила $\Delta T = 1/2$ должны выполняться соотношения

$$\frac{W(K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0)}{W(K_1^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = 0; \quad (179)$$

$$\frac{W(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0)}{W(K_1^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)} = \frac{1}{2}. \quad (180)$$

Рассмотрим теперь распады гиперонов. Для этих процессов $\Delta S = 1$, их матричные элементы преобразуются как спиноры с $T = 1/2$ и $T_3 = 1/2$. Например, матричные элементы распадов Λ^- , Ξ^- и Ω^- -гиперонов имеют вид

$$\langle \pi N | L | \Lambda \rangle = A \bar{\pi}_a^2 \bar{N}^a \Lambda = A (\bar{\pi}^- \bar{p} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \bar{n}) \Lambda; \quad (181)$$

$$\langle \pi \Lambda | L | \Xi \rangle = B \bar{\pi}_1^a \bar{\Lambda} \Xi_a = B \bar{\Lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \Xi^0 + \bar{\pi}^- \Xi^- \right); \quad (181')$$

$$\langle \pi \Xi | L | \Omega^- \rangle = C \bar{\pi}_a^2 \bar{\Xi}^a \Omega^- = C \left(\bar{\pi}^- \bar{\Xi}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\pi}^0 \bar{\Xi}^- \right) \Omega^-. \quad (181'')$$

Итак, имеют место соотношения:

$$M(\Lambda \rightarrow p\pi^-) = -\sqrt{2}M(\Lambda \rightarrow n\pi^0); \quad (182)$$

$$M(\Xi^- \rightarrow \Lambda\pi^-) = \sqrt{2}M(\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi^0); \quad (182')$$

$$M(\Omega^- \rightarrow \Xi^0\pi^-) = -\sqrt{2}M(\Omega^- \rightarrow \Xi^-\pi^0), \quad (182'')$$

т. е. вероятности распадов на π^- -мезон вдвое больше вероятностей распадов на π^0 -мезон, а все корреляционные эффекты одинаковы для всех распадов каждой частицы. Аналогично матричный элемент распада Σ -гиперона равен

$$\langle \pi N | L | \Sigma \rangle = A_1 \bar{N}^2 \bar{\pi}_b \Sigma_a^b + A_2 \bar{N}^a \bar{\pi}_a^b \Sigma_b^2, \quad (183)$$

т. е. зависит от произвольных констант A_1 и A_2 , так как в силу тождества

$$\bar{\pi}_a^b \Sigma_b^c + \Sigma_a^b \bar{\pi}_b^c = 2\delta_a^c \bar{\pi}_a^b \Sigma_b^d$$

(аналогичное тождество получено в п. 2.4 при изучении рассеяния π -мезона на нуклоне) третья возможная структура $N^a \Sigma_a^b \bar{\pi}_b^2$ линейно выражается через две другие. Для конкретных процессов

$$M(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2; \quad (184)$$

$$M(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+) = A_1 + A_2; \quad (185)$$

$$M(\Sigma^- \rightarrow n\pi^-) = A_1. \quad (186)$$

Итак, между амплитудами распадов Σ -гиперона имеет место соотношение

$$M(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^+) - M(\Sigma^- \rightarrow n\pi^-) = \sqrt{2}M(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0). \quad (187)$$

В заключение сделаем некоторые замечания по поводу правила $\Delta T = 1/2$ в нелептонных распадах мезонов и гиперонов. Если лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид произведения заряженных токов

$$L = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\mu^t + I_\mu + S_\mu) (j_\mu^t + I_\mu + S_\mu)^\dagger,$$

то часть лагранжиана, отвечающая за нелептонные распады барионов и мезонов, равна

$$L' = \frac{G}{\sqrt{2}} (I_\mu S_\mu^\dagger + S_\mu I_\mu^\dagger).$$

Для того чтобы объяснить правило $\Delta T = 1/2$, необходимо добавить к L' произведение нейтральных токов. Действительно, если I_μ и S_μ — токи $V - A$, образованные, например, из волновых функций p , n и λ , то

$$L' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \bar{p}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) n \bar{\lambda}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) p + \text{э. с.}$$

Применив преобразование Фирца, можно переписать L' в виде

$$L' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \bar{p}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \bar{p}\lambda\gamma_\mu (1 + \gamma_5) n + \text{э. с.}$$

Если к L' добавить еще член, пропорциональный произведению нейтральных токов:

$$L'' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \bar{n}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) \bar{n}\lambda\gamma_\mu (1 + \gamma_5) n + \text{э. с.}$$

то

$$L' + L'' = \frac{G'}{\sqrt{2}} \{ \bar{p}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) p + \bar{n}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) n \} \bar{\lambda}\gamma_\mu (1 + \gamma_5) + \text{э. с.} \quad (188)$$

Поскольку сумма в фигурных скобках в правой части соотношения (188) является изотопическим скаляром, то сумма $L' + L''$ преобразуется при изотопических преобразованиях как волновая функция нейтрона, т. е. как изотопический спинор. Очевидно, что в рамках теории без

нейтральных токов мы не можем объяснить правило $\Delta T = 1/2$, если не предположить какие-нибудь специальные динамические модели.

Литература

- Вигнер Е. Теория групп, гл. XVII. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, гл. 2. М., Физматгиз, 1958.
Любарский Г. А. Теория групп и ее применение в физике, гл. XI. М., Гостехиздат, 1957.
Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца, гл. II. М., Физматгиз, 1958.

Дополнительная литература

Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий

- Бете Г., Гофман Ф. Мезоны и поля. Том II, гл. XXVII. М., Изд-во иностр. лит., 1957.
Марков М. А. Гипероны и К-мезоны, Ч. II. М., Физматгиз, 1958.
Маршак Р., Судершан Э. Введение в физику элементарных частиц, гл. V. М., Изд-во иностр. лит., 1962.

Изотопические свойства электромагнитных и слабых взаимодействий

- Gell-Mann M., Rosenfeld A. H. *Ann. Rev. Nucl. Sci.*, **7**, 407 (1957).
Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **29**, 698 (1955).
Lee T. D., Yang C. N. *Phys. Rev.*, **119**, 1414 (1960).
Маршак Р., Судершан Э. Введение в физику элементарных частиц, гл. V. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
Нгуен Ван Хьен «Ж. эксперим. и теор. физ.», **45**, 202 (1963).
Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие элементарных частиц, § 7, 6, 9, 14, М., Физматгиз, 1963.
Feunman R., Gell-Mann M. *Phys. Rev.*, **109**, 193 (1958).
Шехгер В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», **41**, 1953 (1961).

Группа $SU(3)$ и классификация элементарных частиц в унитарной симметрии

Введение

В теории изотопической инвариантности элементарные частицы образуют изотопические мультиплеты, описываемые неприводимыми представлениями изотопической группы $SU(2)$. Векторы состояния частиц в некотором изотопическом мультиплете являются собственными векторами одного из трех инфинитезимальных операторов данного представления. В качестве такого оператора мы выбрали T_3 . Итак, частицы с разными зарядами в данном мультиплете характеризуются соответствующими собственными значениями одного из инфинитезимальных операторов. Иначе говоря, одно из квантовых чисел, характеризующих элементарные частицы, — заряд — связано с одним из генераторов группы симметрии. Как известно, в число квантовых чисел, определяющих данную частицу или систему частиц, кроме заряда входят также гиперзаряд, барионное число и другие величины. Естественным обобщением изотопической инвариантности является теория симметрии, в которой каждый мультиплет может содержать частицы с разными зарядами, изотопическими спинами и гиперзарядами. Такая группа симметрии должна иметь некоторый генератор, связанный с гиперзарядом. Так как эта величина для каждой частицы имеет вполне определенное значение, то соответствующий оператор Y , диагональный с T_3 , должен коммутировать с T_3 . Таким образом, естественным обобщением изотопической симметрии является симметрия некоторой группы, имеющей два коммутирующих генератора, один из которых может быть отождествлен с T_3 , а другой — связан с гиперзарядом. С другой стороны, по-

вая группа симметрии должна содержать изотопическую группу $SU(2)$ как подгруппу, если каждый изотопический мультиплет полностью лежит в некотором мультиплете новой симметрии. Таким образом, группа высшей симметрии, обобщающей изотопическую инвариантность, удовлетворяет двум условиям: 1) она является группой второго ранга и 2) содержит подгруппу $SU(2)$.

Одной из таких групп оказывается группа унитарной симметрии $SU(3)$, многие предсказания которой были подтверждены экспериментом. В этой главе мы изучим общие свойства группы $SU(3)$ и ее представления. Полученные результаты затем будут применяться при изучении классификации элементарных частиц. В последующих главах рассмотрим экспериментальные следствия унитарной симметрии в процессах сильных, электромагнитных и слабых взаимодействий.

§ 1. Группа $SU(3)$ и ее представления

1.1. Генераторы группы $SU(3)$

Как было показано в гл. 1, п. 4.1, генераторами группы $SU(n)$ являются $n^2 - 1$ эрмитовых матриц $n \times n$ с нулевыми шпурами. Для группы $SU(3)$ такие генераторы могут быть выбраны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k. \quad (2)$$

Структурные константы f_{ijk} полностью антисимметричны по отношению к перестановкам индексов. Значения неза-

висимых отличных от нуля констант f_{ijk} равны

$$f_{123} = 1, f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{367} = \frac{1}{2},$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Коммутационные соотношения (2) полностью определяют структуру группы. В дальнейшем нам понадобятся также следующие соотношения для матриц λ_i :

$$\text{Sp}(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}; \quad (3)$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = 2d_{ijk}\lambda_k + \frac{4}{3}\delta_{ij}, \quad (4)$$

где константы d_{ijk} полностью симметричны относительно перестановок индексов. Среди них независимыми ненулевыми оказываются

$$d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}}, d_{448} = d_{558} = d_{668} =$$

$$= d_{778} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},$$

$$d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} =$$

$$= d_{355} = -d_{366} = -d_{277} = \frac{1}{2}.$$

Выбор генераторов в виде матриц (1) удобен тем, что эти матрицы аналогичны матрицам σ_i для группы $SU(2)$, и при изучении различных подгрупп $SU(2)$ группы $SU(3)$ сразу видно, к каким подгруппам относятся каждые матрицы. В данном выборе λ_3 и λ_8 коммутируют и связаны с квантовыми числами частиц: зарядом и гиперзарядом. Нетрудно увидеть, что λ_1 , λ_2 и λ_3 образуют алгебру Ли группы $SU(2)$. В дальнейшем эти генераторы будут отождествлены с генераторами изотопической группы. Тогда λ_3 связан с зарядом, а второй диагональный оператор λ_8 — с гиперзарядом. При изучении изотопической инвариантности иногда удобно вместо σ_1 и σ_2 пользоваться σ_{\pm} . По аналогии с этим положим,

$$t_{+} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, t_{-} = \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2) = \left. \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_+ = \frac{1}{2} (\lambda_4 + i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
u_- = \frac{1}{2} (\lambda_4 - i\lambda_5) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i\lambda_7) = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_- = \frac{1}{2} (\lambda_6 - i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
t_3 = h_1 = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} y = h_2 = \frac{1}{2} \lambda_8 = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Мы имеем тогда коммутационные соотношения

$$[h_1, h_2] = 0, \quad [h_i, t_{\pm}] = \pm \alpha_i^t t_{\pm},$$

$$[h_i, u_{\pm}] = \pm \alpha_i^u u_{\pm}, \quad [h_i, v_{\pm}] = \pm \alpha_i^v v_{\pm}; \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где

$$\alpha_i^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha_i^u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}; \quad \alpha_i^v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Представим значения $\pm \alpha_i^t$, $\pm \alpha_i^u$, $\pm \alpha_i^v$ двумерными векторами с компонентами $\pm \alpha_1^t$, $\pm \alpha_1^u$ и $\pm \alpha_1^v$ на оси Ox и компонентами $\pm \alpha_2^t$, $\pm \alpha_2^u$ и $\pm \alpha_2^v$ на оси Oy соответственно. Мы получаем так называемую корневую диаграмму группы $SU(3)$, а векторы с данными компонентами называем корнями (рис. 1).

При изучении изотопической инвариантности видно, что среди изотопических преобразований зарядовая сим-

Метрия, соответствующая специальному преобразованию с матрицей

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

играет особую роль. Аналогом этого преобразования в группе $SU(3)$ является преобразование с матрицей

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме ε_t можно ввести два других преобразования подобного типа, а именно

$$\varepsilon_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

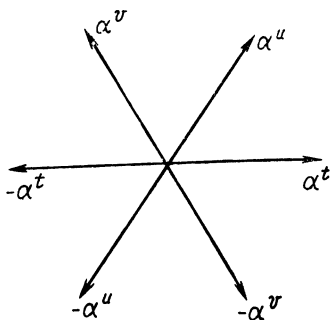


Рис. 1.

В этих преобразованиях генераторы t_{\pm} , u_{\pm} и v_{\pm} группы $SU(3)$ трансформируются следующим образом:

$$\varepsilon_t t_{\pm} \varepsilon_t^{-1} = -t_{\mp}, \quad \varepsilon_t u_{\pm} \varepsilon_t^{-1} = -v_{\pm}, \quad \varepsilon_t v_{\pm} \varepsilon_t^{-1} = u_{\pm}; \quad (8)$$

$$\varepsilon_u t_{\pm} \varepsilon_u^{-1} = -v_{\mp}, \quad \varepsilon_u u_{\pm} \varepsilon_u^{-1} = -u_{\mp}, \quad \varepsilon_u v_{\pm} \varepsilon_u^{-1} = t_{\mp}; \quad (9)$$

$$\varepsilon_v t_{\pm} \varepsilon_v^{-1} = -u_{\pm}, \quad \varepsilon_v u_{\pm} \varepsilon_v^{-1} = t_{\pm}, \quad \varepsilon_v v_{\pm} \varepsilon_v^{-1} = -v_{\mp}, \quad (10)$$

а для операторов h_1 и h_2 :

$$\varepsilon_t h_1 \varepsilon_t^{-1} = -h_1, \quad \varepsilon_t h_2 \varepsilon_t^{-1} = h_2; \quad (11)$$

$$\varepsilon_u h_1 \varepsilon_u^{-1} = \frac{1}{2} (h_1 - \sqrt{3}h_2), \quad \varepsilon_u h_2 \varepsilon_u^{-1} = -\frac{1}{2} (\sqrt{3}h_1 + h_2); \quad (12)$$

$$\varepsilon_v h_1 \varepsilon_v^{-1} = \frac{1}{2} (h_1 + \sqrt{3}h_2), \quad \varepsilon_v h_2 \varepsilon_v^{-1} = \frac{1}{2} (\sqrt{3}h_1 - h_2). \quad (13)$$

Группа $SU(3)$ полностью характеризуется своими генераторами. Соотношения (8)–(13) показывают, что эта группа полностью определяется заданием генераторов t_{\pm} и h_1 подгруппы $SU(2)$ и дискретных преобразований, со-

ответствующих матрицам ε_u и ε_v . Смысл этих дискретных преобразований будет выяснен подробно в п. 1.5. При этом будем пользоваться коммутационными соотношениями между h_i и ε_t , ε_u и ε_v :

$$\left. \begin{aligned} [h_i, \varepsilon_t] &= -2\alpha_i^t \varepsilon_t (\alpha_k^t h_k); \\ [h_i, \varepsilon_u] &= -2\alpha_i^u \varepsilon_u (\alpha_k^u h_k); \\ [h_i, \varepsilon_v] &= -2\alpha_i^v \varepsilon_v (\alpha_k^v h_k), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

или в векторном виде

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{h}, \varepsilon_t] &= -2\alpha^t \varepsilon_t (\alpha_{\mathbf{h}}^t \mathbf{h}); \\ [\mathbf{h}, \varepsilon_u] &= -2\alpha^u \varepsilon_u (\alpha_{\mathbf{h}}^u \mathbf{h}); \\ [\mathbf{h}, \varepsilon_v] &= -2\alpha^v \varepsilon_v (\alpha_{\mathbf{h}}^v \mathbf{h}). \end{aligned} \right\} \quad (14')$$

1.2. Неприводимые представления группы $SU(3)$

Теория представлений группы $SU(n)$ была изложена в гл. 1, § 4. Применим теперь эти результаты к группе $SU(3)$. Спинорные индексы обозначим α, β и т. д. Так как каждый индекс принимает три значения, то не существует полностью антисимметричного спинора ранга больше 3, а полностью антисимметричные спиноры третьего ранга $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ и $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ являются инвариантами. Будем выбирать эти спиноры так, чтобы $\varepsilon_{123} = \varepsilon^{123} = 1$. При помощи этих спиноров можно превращать каждую пару антисимметричных верхних индексов в нижний индекс и наоборот:

$$\psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \psi^{[\beta\gamma]}; \quad \psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \psi_{[\beta\gamma]}. \quad (15)$$

Это означает, что все неприводимые представления группы $SU(3)$ можно рассматривать как спиноры, симметричные по всем верхним индексам и по всем нижним индексам и имеющие нулевые шпуры. Неприводимое представление, соответствующее спинору с p верхними и q нижними симметричными индексами, обозначим $D(q, p)$. Так, $D(q, 0)$ соответствует ковариантному спинору ранга q , а $D(0, p)$ — контравариантному спинору ранга p .

Подсчитаем число независимых компонент ковариантного спинора ранга q . Если каждый индекс принимал бы только два значения, то число независимых компонент этого спинора было бы равно $q+1$, как это имеет место

для группы $SU(2)$ (см. гл. 2, § 1). В действительности каждый индекс принимает три значения. Рассмотрим теперь только те компоненты, для которых q' индексов принимают значения 1 и 2, а $q - q'$ остальных индексов — значение 3. Число таких компонент равно $q' + 1$. Так как q' меняется от нуля до q , то число всех компонент симметричного ковариантного спинора ранга q равно

$$N(q, 0) = \sum_{q'=0}^q (q' + 1) = \frac{(q+1)(q+2)}{2}.$$

Аналогично число независимых компонент симметричного контравариантного спинора ранга p равно

$$N(0, p) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}.$$

Рассмотрим теперь смешанный спинор ранга $p + q$, q раз ковариантный и p раз контравариантный, $\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_p}$. Число компонент такого спинора было бы равно

$$N(q, 0) N(0, p) = \frac{1}{4} (q+1)(q+2)(p+1)(p+2),$$

если все шпуры

$$\psi_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_p}$$

были бы произвольными. Так как число таких шпуров равно числу компонент смешанного спинора ранга $p + q - 2$, $q - 1$ раз ковариантного и $p - 1$ раз контравариантного, т. е. равно

$$N(q-1, 0) N(0, p-1) = \frac{1}{4} q(q+1)p(p+1),$$

то для неприводимого спинора ранга $p + q$, все шпуры которого равны нулю, получим

$$\frac{1}{4} q(q+1)p(p+1)$$

условий. Итак, число независимых компонент неприводимого смешанного спинора, q раз ковариантного и p раз контравариантного, равно

$$N(q, p) = \frac{1}{4} (q+1)(q+2)(p+1)(p+2) - \frac{1}{4} q(q+1)p(p+1) = \frac{1}{2} (p+1)(q+1)(p+q+2).$$

Например,

$$N(1, 0) = 3, N(0, 1) = \bar{3}, N(1, 1) = 8, N(3, 0) = 10, \\ N(0, 3) = \bar{10}, N(2, 2) = 27.$$

Инфинитезимальные операторы представления, соответствующие генераторам $t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}$ и h_i , обозначим $T_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$ и H_i соответственно, а инфинитезимальные операторы, соответствующие генераторам $\lambda_i - \Lambda_i$. Для ковариантного спинора первого ранга

$$(\Lambda_i)_{\alpha\beta} = (\lambda_i)_{\alpha\beta},$$

а для контравариантного спинора первого ранга

$$(\Lambda_i)_{\alpha\beta} = (\bar{\lambda}_i)_{\alpha\beta} = -(\lambda_i^T)_{\alpha\beta} = -(\lambda_i)_{\beta\alpha}.$$

Пользуясь формулами для инфинитезимальных операторов произведений представлений, данными в гл. 1 [см. формулы (82) и (83)], можно получить выражения инфинитезимальных операторов для любого представления. Если в пространстве $E_{q\bar{p}}$, преобразующемся по представлению

$$\underbrace{U \otimes \dots \otimes U}_q \otimes \underbrace{U^* \otimes \dots \otimes U^*}_p,$$

выберем ортонормированный базис $e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}$, то действие Λ_i на эти векторы выражается формулой

$$\Lambda_i e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \\ = \sum_{r=1}^q (\lambda_i)_{\alpha_r \alpha_r'} e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha_r' \alpha_{r+1} \dots \alpha_q} - \\ - \sum_{r=1}^p (\lambda_i^T)_{\beta_r \beta_r'} e_{\beta_1 \dots \beta_{r-1} \beta_r' \beta_{r+1} \dots \beta_p}^{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad (16)$$

Так как генераторы h_i диагональны, то соответствующие инфинитезимальные операторы H_i также диагональны. Обозначим числа ковариантных индексов, равных 1, 2 и 3, $q(1), q(2)$ и $q(3)$ соответственно, а числа контравариантных индексов — $p(1), p(2)$ и $p(3)$. Тогда из формулы (16) и конкретного вида матриц λ_i [см. формулу (5)] нетрудно увидеть, что базисный вектор с данными числами индек-

сов, равных 1, 2 и 3, соответствует следующим собственным значениям операторов H_i :

$$H_1 e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \left\{ \frac{1}{2} [q(1) - p(1)] - \frac{1}{2} [q(2) - p(2)] \right\} e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}; \quad (17)$$

$$H_2 e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}} [q(1) - p(1)] + \frac{1}{2\sqrt{3}} [q(2) - p(2)] - \frac{1}{\sqrt{3}} [q(3) - p(3)] \right\} e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}. \quad (18)$$

Аналогичные соотношения также имеют место для канонического базиса неприводимых представлений.

Собственные значения операторов H_i будем рассматривать как компоненты двумерных векторов, которые называем весами. Изображая эти векторы на графиках, мы получаем так называемые весовые диаграммы. Тогда базисные векторы с некоторым весом выражаются одной точкой на весовой диаграмме. Во многих случаях использование весовой диаграммы оказывается весьма удобным.

Произведение двух неприводимых представлений, вообще говоря, приводимо и разлагается на неприводимые представления. Рассмотрим некоторые примеры. Как известно, любой произвольный смешанный спинор вида ψ_x^β преобразующийся по представлению $3 \times \bar{3}$, разлагается на сумму инвариантного спинора, пропорционального δ_x^β и неприводимого спинора с нулевым шпуром [см. гл. 1, § 4, формулу (113)]:

$$\psi_x^\beta = \frac{1}{3} \delta_x^\beta \psi_y^\gamma + \left(\psi_x^\beta - \frac{1}{3} \delta_x^\beta \psi_y^\gamma \right).$$

Таким образом,

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

или

$$D(1, 0) \otimes D(0, 1) = D(0, 0) \oplus D(1, 1).$$

Если для получения неприводимых спиноров из произвольного смешанного спинора второго ранга следует вычесть шпур, то для получения неприводимых спиноров из произвольного ковариантного или контравариантного

спинора необходимо симметризовать или антисимметризовать индексы:

$$\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\{\alpha\beta\}} + \psi_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2}(\psi_{\alpha\beta} + \psi_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(\psi_{\alpha\beta} - \psi_{\beta\alpha}).$$

Антисимметричный ковариантный спинор второго ранга эквивалентен контравариантному спинору первого ранга [см. соотношения (15)], поэтому можно получить закон умножения представлений

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3},$$

или

$$D(1, 0) \otimes D(1, 0) = D(2, 0) \oplus D(0, 1).$$

Аналогично

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3,$$

или

$$D(0, 1) \otimes D(0, 1) = D(0, 2) \oplus D(1, 0).$$

Приведем еще несколько формул, которые можно получить таким же методом:

$$6 \otimes 3 = 8 \oplus 10;$$

$$D(2, 0) \otimes D(1, 0) = D(1, 1) \oplus D(3, 0);$$

$$\bar{6} \otimes \bar{3} = 8 \oplus \bar{10};$$

$$D(0, 2) \otimes D(0, 1) = D(1, 1) \oplus D(0, 3);$$

$$6 \otimes \bar{6} = 1 \oplus 8 \oplus 27;$$

$$D(2, 0) \otimes D(0, 2) = D(0, 0) \oplus D(1, 1) \oplus D(2, 2);$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27;$$

$$D(1, 1) \otimes D(1, 1) = D(0, 0) \oplus D(1, 1) \oplus D(1, 1) \oplus D(3, 0) \oplus \\ \oplus D(0, 3) \oplus D(2, 2);$$

$$10 \otimes \bar{10} = 1 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 64;$$

$$D(3, 0) \otimes D(0, 3) = D(0, 0) \oplus D(1, 1) \oplus D(2, 2) \oplus D(3, 3).$$

1.3. Некоторые спиноры низших рангов

Изучим теперь подробно некоторые простейшие неприводимые представления, часть из которых будет использована в дальнейшем. Трехмерное комплексное пространство E_1 с базисом e^a , $a = 1, 2, 3$, преобразуется по фунда-

ментальному представлению $D(1, 0)$. Векторы в этом пространстве являются ковариантными спинорами первого ранга с компонентами ψ_α . Каждый базисный вектор соответствует некоторому весу. Представим эти векторы на весовой диаграмме (рис. 2).

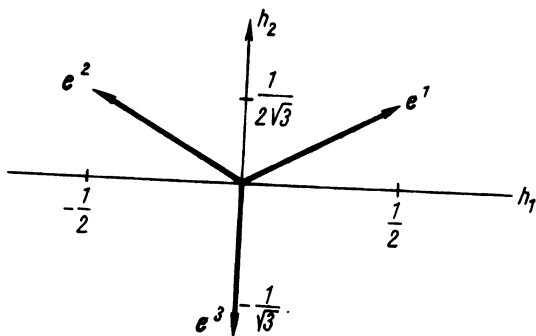


Рис. 2.

Из этой диаграммы сразу видно, что

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} e^1; & \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e^2 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} e^2; \\ \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e^3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} e^3. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Аналогично для контраградиентного к фундаментальному представлению — контравариантного спинора первого ранга — мы имеем весовую диаграмму на рис. 3.

Соответствующие уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e_1 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} e_1; & \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} e_2; \\ \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} e_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} e_3. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Рассмотрим теперь представление $D(2, 0)$. Конический базис этого представления получается из базиса $e^{\alpha\beta}$ представления $U \otimes U$ путем симметризации индексов

$$e^{\{\alpha\beta\}} = \frac{e^{\alpha\beta} + e^{\beta\alpha}}{\|e^{\alpha\beta} + e^{\beta\alpha}\|}.$$

Итак, в исходном базисе $e^{\alpha\beta}$ шесть базисных векторов $e^{\{\alpha\beta\}}$ представления $D(2, 0)$ имеют следующие нену-

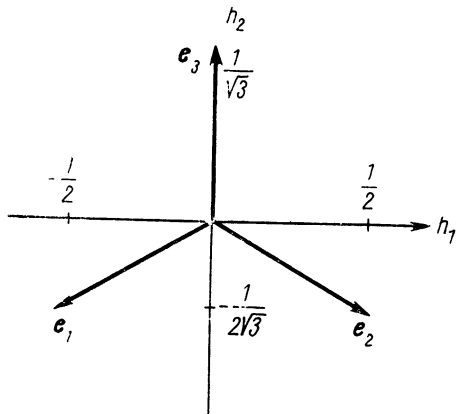


Рис. 3.

левые компоненты:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}^1 = e^{\{11\}}: \Psi_{11} &= 1; \\ \mathbf{f}^2 = e^{\{12\}}: \Psi_{12} = \Psi_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \mathbf{f}^3 = e^{\{22\}}: \Psi_{22} &= 1; \\ \mathbf{f}^4 = e^{\{13\}}: \Psi_{13} = \Psi_{31} &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \mathbf{f}^5 = e^{\{23\}}: \Psi_{23} = \Psi_{32} &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \mathbf{f}^6 = e^{\{33\}}: \Psi_{33} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из общих формул (17) и (18) сразу видно, каким собственным значениям операторов H_i соответствуют эти векторы. Таким образом, получаем весовую диаграмму, изображенную на рис. 4.

Чтобы получить соответствующие результаты для представления $D(0, 2)$, достаточно заменить нижние индексы на верхние и обратно и поменять знаки весов всех базисных векторов.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться представлением $D(1, 1)$, по которому преобразуется смешанный спинор второго ранга ψ_{β}^{γ} с нулевым шпуром $\psi_{\alpha}^{\alpha} = 0$. Как известно, произвольный смешанный спинор второго ран-

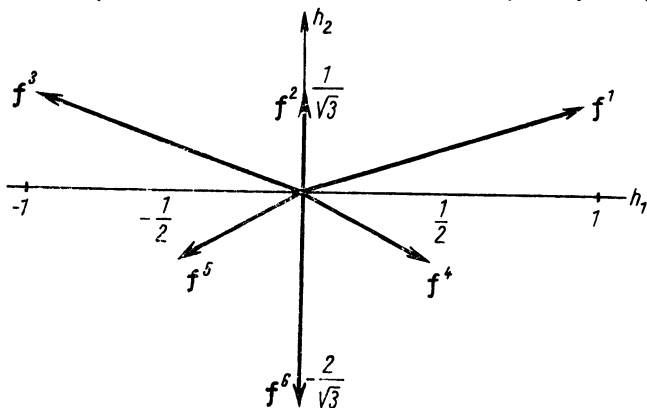


Рис 4

га φ_{β}^{α} разлагается на сумму спинора с нулевым шпуром и инвариантного спинора, пропорционального δ_{β}^{α} :

$$\varphi_{\beta}^{\alpha} = \left(\varphi_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{\beta}^{\alpha} \varphi_{\gamma}^{\gamma} \right) + \frac{1}{3} \delta_{\beta}^{\alpha} \varphi_{\gamma}^{\gamma}.$$

Соответственно пространство $E_{1\bar{1}}$ с базисом e_3^{α} , преобразующееся по представлению $U \otimes U^*$, разлагается на два ортогональных подпространства. Инвариантный спинор δ_{β}^{α} принадлежит одномерному подпространству с базисом

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} (e_1^1 + e_2^2 + e_3^3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{\beta}^{\alpha} e_3^{\alpha}.$$

В исходном базисе этот вектор имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\psi_1^1 = \psi_2^2 = \psi_3^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (22)$$

Базисные векторы во втором подпространстве, преобразующемся по представлению $D(1, 1)$, ортогональны вектору (22). Очевидно, что базисные векторы e_β^a с $a \neq \beta$ удовлетворяют этому условию. Число этих векторов равно шести. Два остальных имеют вид линейных комбинаций векторов e_1^1, e_2^2 и e_3^3 . Эти комбинации должны быть выбраны так, чтобы они были ортогональными вектору (22), нормированными и ортогональными друг другу. Этим условиям удовлетворяют следующие комбинации:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (e_1^1 - e_2^2); \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3).$$

Таким образом, базисы в пространстве $D(1, 1)$ можно выбрать в виде

$$e_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1^1 - e_2^2), e_1^2, e_3^1, e_3^2, e_1^3, e_2^3, \frac{1}{\sqrt{6}} (e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3).$$

В исходном базисе эти векторы имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\left. \begin{aligned} f^1 = e_2^1: \quad \psi_1^2 &= 1; \\ f^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1^1 - e_2^2): \quad \psi_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \psi_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ f^3 = e_1^2: \quad \psi_2^1 &= 1; \\ f^4 = e_3^1: \quad \psi_1^3 &= 1; \\ f^5 = e_3^2: \quad \psi_2^3 &= 1; \\ f^6 = e_1^3: \quad \psi_3^1 &= 1; \\ f^7 = e_2^3: \quad \psi_3^2 &= 1; \\ f^8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3): \\ \psi_1^1 = \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \psi_3^3 &= -\frac{2}{\sqrt{6}}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

На основе формул (17) и (18) нетрудно найти веса этих векторов. В результате получим весовую диаграмму, изображенную на рис. 5.

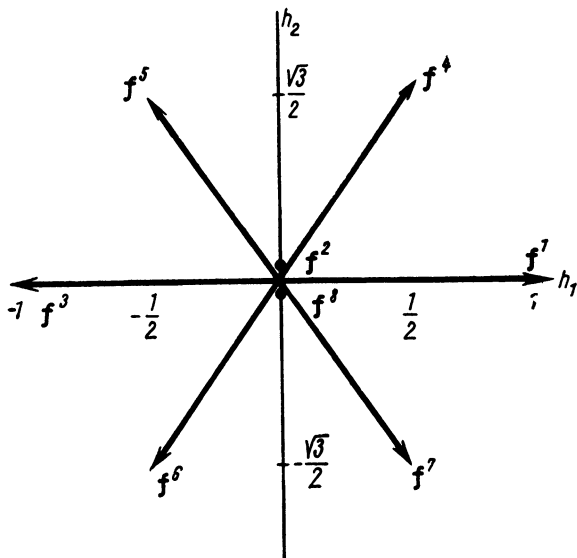


Рис. 5.

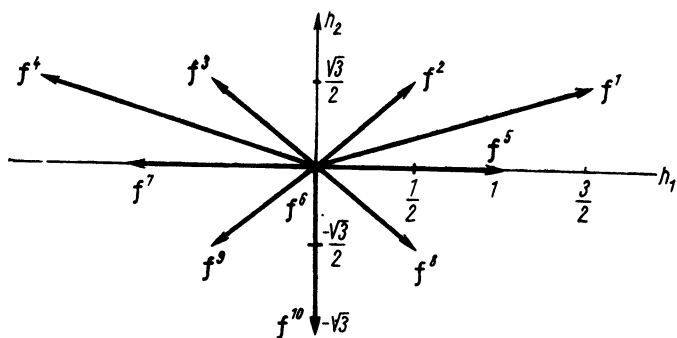


Рис. 6.

Рассмотрим теперь представление $D(3, 0)$, базис которого состоит из векторов

$$e^{\{\alpha\beta\gamma\}} = \frac{\sum_{P(\alpha\beta\gamma)} e^{\alpha\beta\gamma}}{\left\| \sum_{P(\alpha\beta\gamma)} e^{\alpha\beta\gamma} \right\|}.$$

В исходном базисе эти векторы имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^1 &= \mathbf{e}^{\{111\}}: \psi_{111} = 1; \\
 \mathbf{f}^2 &= \mathbf{e}^{\{211\}}: \psi_{211} = \psi_{121} = \psi_{112} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{f}^3 &= \mathbf{e}^{\{221\}}: \psi_{221} = \psi_{212} = \psi_{122} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{f}^4 &= \mathbf{e}^{\{222\}}: \psi_{222} = 1; \\
 \mathbf{f}^5 &= \mathbf{e}^{\{113\}}: \psi_{113} = \psi_{131} = \psi_{311} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{f}^6 &= \mathbf{e}^{\{213\}}: \psi_{213} = \psi_{123} = \psi_{132} = \psi_{312} = \\
 &= \psi_{321} = \psi_{231} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \\
 \mathbf{f}^7 &= \mathbf{e}^{\{223\}}: \psi_{223} = \psi_{232} = \psi_{322} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{f}^8 &= \mathbf{e}^{\{133\}}: \psi_{133} = \psi_{313} = \psi_{331} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{f}^9 &= \mathbf{e}^{\{233\}}: \psi_{233} = \psi_{323} = \psi_{332} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \\
 \mathbf{f}^{10} &= \mathbf{e}^{\{333\}}: \psi_{333} = 1.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Весовая диаграмма данного представления изображена на рис. 6.

Чтобы получить соответствующие результаты для представления $D(0, 3)$, достаточно замесить верхние индексы на нижние и обратно и поменять знаки весов всех базисных векторов на обратные.

Рассмотрим, наконец, представление $D(2, 2)$, базис которого состоит из следующих 27 векторов:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}^1 &= \mathbf{e}_{22}^{11}, \\
 \mathbf{f}^2 &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{22}^{12} + \mathbf{e}_{22}^{21} - \mathbf{e}_{12}^{11} - \mathbf{e}_{21}^{11}), \\
 \mathbf{f}^3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_{22}^{22} + \mathbf{e}_{11}^{11} - \mathbf{e}_{12}^{12} - \mathbf{e}_{21}^{12} - \mathbf{e}_{12}^{21} - \mathbf{e}_{21}^{21}), \\
 \mathbf{f}^4 &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{12}^{22} + \mathbf{e}_{21}^{22} - \mathbf{e}_{11}^{12} - \mathbf{e}_{11}^{21}), \\
 \mathbf{f}^5 &= \mathbf{e}_{11}^{22},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^6 &= \frac{1}{\sqrt{20}} [(\mathbf{e}_{22}^{12} + \mathbf{e}_{22}^{21} + \mathbf{e}_{12}^{11} + \mathbf{e}_{21}^{11}) - \\
&\quad - 2(\mathbf{e}_{23}^{13} + \mathbf{e}_{23}^{31} + \mathbf{e}_{32}^{13} + \mathbf{e}_{32}^{31})], \\
\mathbf{f}^7 &= \frac{1}{\sqrt{10}} [(\mathbf{e}_{22}^{22} - \mathbf{e}_{11}^{11}) - \\
&\quad - (\mathbf{e}_{23}^{23} - \mathbf{e}_{13}^{13} + \mathbf{e}_{23}^{32} - \mathbf{e}_{13}^{31} + \mathbf{e}_{32}^{32} - \mathbf{e}_{31}^{31} + \mathbf{e}_{32}^{23} - \mathbf{e}_{31}^{13})], \\
\mathbf{f}^8 &= \frac{1}{\sqrt{20}} [(\mathbf{e}_{12}^{22} + \mathbf{e}_{21}^{22} + \mathbf{e}_{11}^{12} + \mathbf{e}_{11}^{21}) - \\
&\quad - 2(\mathbf{e}_{13}^{23} + \mathbf{e}_{31}^{23} + \mathbf{e}_{13}^{32} + \mathbf{e}_{31}^{32})], \\
\mathbf{f}^9 &= \frac{1}{\sqrt{20}} [2(\mathbf{e}_{22}^{22} + \mathbf{e}_{11}^{11}) + (\mathbf{e}_{12}^{12} + \mathbf{e}_{21}^{12} + \mathbf{e}_{12}^{21} + \mathbf{e}_{21}^{21}) - \\
&\quad - 3(\mathbf{e}_{23}^{23} + \mathbf{e}_{13}^{13} + \mathbf{e}_{32}^{23} + \mathbf{e}_{31}^{13} + \mathbf{e}_{23}^{32} + \mathbf{e}_{13}^{31} + \\
&\quad + \mathbf{e}_{32}^{32} + \mathbf{e}_{31}^{31}) + 6\mathbf{e}_{33}^{33}], \\
\mathbf{f}^{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{23}^{11} + \mathbf{e}_{32}^{11}), \\
\mathbf{f}^{11} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_{23}^{21} + \mathbf{e}_{23}^{12} - \mathbf{e}_{13}^{11} + \mathbf{e}_{32}^{21} + \mathbf{e}_{32}^{12} - \mathbf{e}_{11}^{11}), \\
\mathbf{f}^{12} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_{13}^{21} + \mathbf{e}_{13}^{12} - \mathbf{e}_{23}^{22} + \mathbf{e}_{31}^{21} + \mathbf{e}_{31}^{12} - \mathbf{e}_{32}^{22}), \\
\mathbf{f}^{13} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{13}^{22} + \mathbf{e}_{31}^{22}), \\
\mathbf{f}^{14} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{22}^{13} + \mathbf{e}_{22}^{31}), \\
\mathbf{f}^{15} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_{21}^{13} + \mathbf{e}_{12}^{13} - \mathbf{e}_{22}^{23} + \mathbf{e}_{21}^{31} + \mathbf{e}_{12}^{31} - \mathbf{e}_{22}^{32}), \\
\mathbf{f}^{16} &= \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_{21}^{23} + \mathbf{e}_{12}^{23} - \mathbf{e}_{11}^{13} + \mathbf{e}_{21}^{32} + \mathbf{e}_{12}^{32} - \mathbf{e}_{11}^{31}), \\
\mathbf{f}^{17} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{11}^{23} + \mathbf{e}_{11}^{32}), \\
\mathbf{f}^{18} &= \frac{1}{\sqrt{30}} [(\mathbf{e}_{23}^{21} + \mathbf{e}_{23}^{12} + 2\mathbf{e}_{13}^{11} + \mathbf{e}_{32}^{21} + \mathbf{e}_{32}^{12} + 2\mathbf{e}_{31}^{11}) - \\
&\quad - 3(\mathbf{e}_{33}^{31} + \mathbf{e}_{33}^{13})], \\
\mathbf{f}^{19} &= \frac{1}{\sqrt{30}} [(\mathbf{e}_{13}^{21} + \mathbf{e}_{13}^{12} + 2\mathbf{e}_{23}^{22} + \mathbf{e}_{31}^{21} + \mathbf{e}_{31}^{12} + 2\mathbf{e}_{32}^{22}) -
\end{aligned}
\tag{25}$$

$$\begin{aligned}
& - 3 (\mathbf{e}_{33}^{32} + \mathbf{e}_{33}^{23}), \\
\mathbf{f}^{20} = & \frac{1}{\sqrt{30}} [(\mathbf{e}_{21}^{13} + \mathbf{e}_{12}^{13} + 2\mathbf{e}_{22}^{23} + \mathbf{e}_{21}^{31} + \mathbf{e}_{12}^{31} + 2\mathbf{e}_{22}^{32}) - \\
& - 3 (\mathbf{e}_{32}^{33} + \mathbf{e}_{23}^{33})], \\
\mathbf{f}^{21} = & \frac{1}{\sqrt{30}} [(\mathbf{e}_{21}^{23} + \mathbf{e}_{12}^{23} + 2\mathbf{e}_{11}^{13} + \mathbf{e}_{21}^{32} + \mathbf{e}_{12}^{32} + 2\mathbf{e}_{11}^{31}) - \\
& - 3 (\mathbf{e}_{31}^{33} + \mathbf{e}_{13}^{33})], \\
\mathbf{f}^{22} = & \mathbf{e}_{33}^{11}, \\
\mathbf{f}^{23} = & \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{33}^{12} + \mathbf{e}_{33}^{21}), \\
\mathbf{f}^{24} = & \mathbf{e}_{33}^{22}, \\
\mathbf{f}^{25} = & \mathbf{e}_{22}^{33}, \\
\mathbf{f}^{26} = & \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_{21}^{33} + \mathbf{e}_{12}^{33}), \\
\mathbf{f}^{27} = & \mathbf{e}_{11}^{33}.
\end{aligned}$$

Эти векторы изображены на весовой диаграмме рис. 7.

Отметим, что для построения рассмотренных неприводимых представлений можно применить метод, изложенный в гл. 1 (см. п. 3.4). Рассмотрим, например, представление $D(1, 1)$. Очевидно, что базисный вектор \mathbf{e}_z^1 в пространстве $E_{1\bar{1}}$ принадлежит этому представлению. Инфинитезимальные операторы Λ_i данного представления могут перевести этот вектор в остальные векторы (23) или в их линейные комбинации. Действительно,

$$\begin{aligned}
T_- \mathbf{e}_2^1 &= -\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2; \quad T_- (\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2) = 2\mathbf{e}_1^2; \\
V_- \mathbf{e}_1^2 &= \mathbf{e}_1^3; \quad T_+ \mathbf{e}_1^3 = -\mathbf{e}_2^3; \\
U_- \mathbf{e}_2^1 &= \mathbf{e}_2^3; \quad T_- \mathbf{e}_2^3 = -\mathbf{e}_1^3; \\
U_+ \mathbf{e}_1^3 &= \mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_3^3.
\end{aligned}$$

Получены все векторы \mathbf{e}_β^α , $\alpha \neq \beta$. Для векторов с $\alpha = \beta$ имеются две комбинации:

$$\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2, \quad \mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_3^3.$$

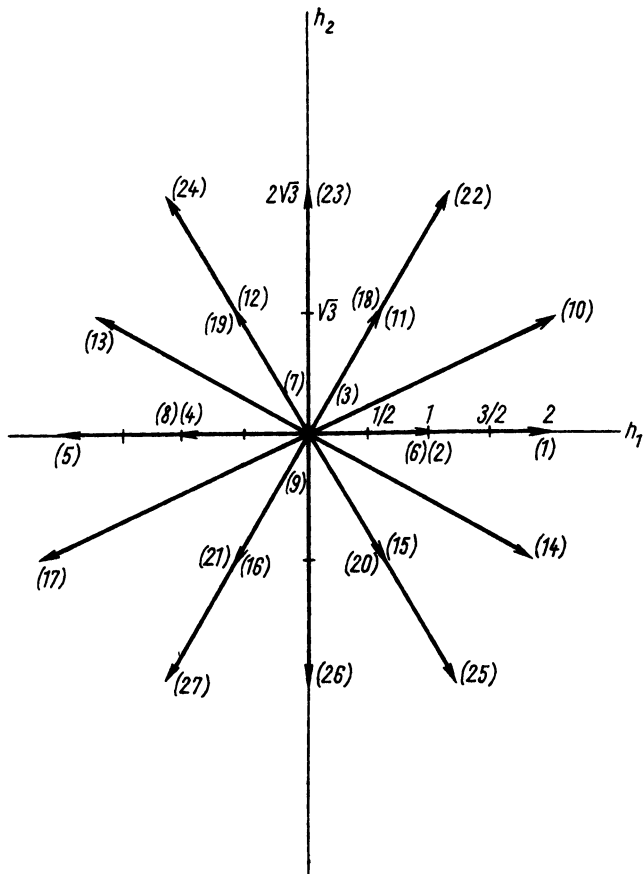


Рис. 7.

Из них можно образовать две другие ортогональные комбинации, а именно

$$\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2;$$

$$\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_3^3 - \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 - 2\mathbf{e}_3^3).$$

Таким образом, получены все базисные векторы (23).

1.4. Подгруппы $SU(2)$

Группа $SU(3)$ содержит три различные подгруппы $SU(2)$. Каждая из них оставляет инвариантным один из трех базисных векторов трехмерного пространства, в котором действуют все преобразования группы $SU(3)$. Нетрудно увидеть, что генераторами одной из таких подгрупп являются t_{\pm} и t_3 . Эту подгруппу называем T -подгруппой. Другими подгруппами $SU(2)$ будут подгруппы с генераторами

$$u_{\pm}, u_3 = \frac{1}{4} (\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8) \quad (26)$$

и

$$v_{\pm}, v_3 = \frac{1}{4} (-\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8). \quad (27)$$

Назовем их U - и V -подгруппами соответственно. Каждое неприводимое представление группы $SU(3)$ содержит различные неприводимые представления одной из этих подгрупп, причем неприводимые представления одной подгруппы не совпадают с неприводимыми представлениями других подгрупп.

Генератор $h_2 = \frac{1}{2} \lambda_8$ коммутирует со всеми генераторами T -подгруппы. Следовательно, в каждом неприводимом представлении T -подгруппы инфинитезимальный оператор $H_2 = \frac{1}{2} \lambda_8$ кратен единице. Иначе говоря, все состояния одного T -мультиплета соответствуют одному и тому же собственному значению оператора H_2 или оператора

$$Y^t = \frac{2}{\sqrt{3}} H_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Lambda_8. \quad (28)$$

Аналогично оператор

$$Y^u = H_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} H_2 = \frac{1}{2} \Lambda_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \Lambda_8 \quad (29)$$

коммутирует с генераторами U -подгруппы, а оператор

$$Y^v = -\left(H_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} H_2\right) = -\frac{1}{2} \Lambda_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \Lambda_8 \quad (30)$$

коммутирует с генераторами V -подгруппы. Для каждого неприводимого представления U -подгруппы (или V -под-

группы) Y^u (или Y^v) имеет вполне определенное значение.

Рассмотрим расщепление некоторых неприводимых представлений группы $SU(3)$ на неприводимые представления ее подгрупп $SU(2)$. Начнем с фундаментальных представлений с базисами e^1, e^2 и e^3 . Так как t_{\pm} и t_3 действуют только на e^1 и e^2 :

$$t_- e^1 = e^2; t_+ e^2 = e^1; t_3 e^1 = \frac{1}{2} e^1;$$

$$t_3 e^2 = -\frac{1}{2} e^2; t_{\pm} e^3 = t_3 e^3 = 0,$$

то e^1 и e^2 образуют неприводимое представление T -подгруппы. Это — фундаментальное представление группы $SU(2)$. Вектор e^3 является базисом одномерного представления. Иначе говоря, представление $D(1,0)$ расщепляется на T -спинор (с T -спином $1/2$) с базисами e^1 и e^2 и T -скаляр e^3 (с T -спином 0). Аналогично оно расщепляется на U -спинор (с U -спином $1/2$) с базисами e^1 и e^3 и U -скаляр e^2 (с U -спином 0) или на V -спинор (с V -спином $1/2$) с базисами e^2 и e^3 и V -скаляр e^1 (с V -спином 0). Нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} Y^t e^{1,2} &= \frac{1}{3} e^{1,2}, & Y^t e^3 &= -\frac{2}{3} e^3; \\ Y^u e^{1,3} &= \frac{1}{3} e^{1,3}, & Y^u e^2 &= -\frac{2}{3} e^2; \\ Y^v e^{2,3} &= \frac{1}{3} e^{2,3}, & Y^v e^1 &= -\frac{2}{3} e^1. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Для представления $D(0,1)$ мы имеем такое же расщепление. В данном случае знаки в правых частях (31) следует заменить на обратные.

При изучении расщеплений высших представлений весьма удобно пользоваться следующим методом. Выберем какой-нибудь базисный вектор, который принадлежит определенному неприводимому представлению некоторой подгруппы. Так как инфинитезимальные операторы этой подгруппы переводят этот вектор в остальные базисные векторы данного представления или их комбинации, то для получения базиса этого представления достаточно подействовать на выбранный вектор всеми инфинитезимальными операторами рассматриваемой

подгруппы. Проиллюстрируем этот метод на примере представления $D(1, 1)$. Рассмотрим вектор e_2^1 , соответствующий значениям $T_3 = 1$ и $Y^t = 0$. Если этот вектор не принадлежит определенному неприводимому представлению, то он имеет вид суммы двух или нескольких векторов, принадлежащих различным неприводимым представлениям. Все последние векторы должны быть собственными векторами операторов T_3 и Y^t с одними и теми же собственными значениями в силу условий $T_3 e_2^1 = e_2^1$ и $Y^t e_2^1 = 0$. Однако e_2^1 является единственным вектором со значениями $T_3 = 1$ и $Y^t = 0$. Следовательно, он должен принадлежать определенному неприводимому представлению. Действуем теперь на этот вектор операторами T_{\pm} и T_3 . Мы получаем тогда базис представления с $T = 1$ и $Y^t = 0$

$$e_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^1 - e_2^2), e_1^2. \quad (32)$$

Аналогично из e_3^1 получаем T -спинор с $T = 1/2$ и $Y^t = 1$

$$e_3^1, e_3^2, \quad (32')$$

а из e_1^3 — другой T -спинор

$$T = \frac{1}{2}, Y^t = -1: e_2^3, e_1^3. \quad (32'')$$

Последний вектор в выражении (23)

$$T = 0, Y^t = 0: \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1^1 + e_2^2 - 2e_3^3). \quad (32''')$$

Аналогично представление $D(1, 1)$ расщепляется на U - или V -мультиплеты следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} U = 1, Y^u = 0: & e_3^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^1 - e_3^3), e_2^3, \\ U = \frac{1}{2}, Y^u = 1: & e_2^1, e_2^3, \\ U = \frac{1}{2}, Y^u = -1: & e_3^2, e_1^2, \\ U = 0, Y^u = 0: & \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1^1 + e_3^3 - 2e_2^2); \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned}
 V = 1, Y^v = 0: & \quad \mathbf{e}_3^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2^2 - \mathbf{e}_3^3), \mathbf{e}_2^3, \\
 V = \frac{1}{2}, Y^v = 1: & \quad \mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_1^3, \\
 V = \frac{1}{2}, Y^v = -1: & \quad \mathbf{e}_3^1, \mathbf{e}_2^1, \\
 V = 0, Y^v = 0: & \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_1^1).
 \end{aligned} \right\} (34)$$

Рассмотрим теперь представление $D(3, 0)$. Имеются следующие T -, U - и V -мультиплеты:

$$\left. \begin{aligned}
 T = \frac{3}{2}, Y^t = 1: & \quad \mathbf{e}^{\{111\}}, \mathbf{e}^{\{112\}}, \mathbf{e}^{\{122\}}, \mathbf{e}^{\{222\}}, \\
 T = 1, Y^t = 0: & \quad \mathbf{e}^{\{113\}}, \mathbf{e}^{\{123\}}, \mathbf{e}^{\{223\}}, \\
 T = \frac{1}{2}, Y^t = -1: & \quad \mathbf{e}^{\{133\}}, \mathbf{e}^{\{233\}}, \\
 T = 0, Y^t = -2: & \quad \mathbf{e}^{\{333\}};
 \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned}
 U = \frac{3}{2}, Y^u = 1: & \quad \mathbf{e}^{\{111\}}, \mathbf{e}^{\{113\}}, \mathbf{e}^{\{133\}}, \mathbf{e}^{\{333\}}, \\
 U = 1, Y^u = 0: & \quad \mathbf{e}^{\{112\}}, \mathbf{e}^{\{132\}}, \mathbf{e}^{\{332\}}, \\
 U = \frac{1}{2}, Y^u = -1: & \quad \mathbf{e}^{\{122\}}, \mathbf{e}^{\{322\}}, \\
 U = 0, Y^u = -2: & \quad \mathbf{e}^{\{222\}};
 \end{aligned} \right\} (36)$$

$$\left. \begin{aligned}
 V = \frac{3}{2}, Y^v = 1: & \quad \mathbf{e}^{\{222\}}, \mathbf{e}^{\{223\}}, \mathbf{e}^{\{233\}}, \mathbf{e}^{\{333\}}, \\
 V = 1, Y^v = 0: & \quad \mathbf{e}^{\{221\}}, \mathbf{e}^{\{231\}}, \mathbf{e}^{\{331\}}, \\
 V = \frac{1}{2}, Y^v = -1: & \quad \mathbf{e}^{\{211\}}, \mathbf{e}^{\{311\}}, \\
 V = 0, Y^v = -2: & \quad \mathbf{e}^{\{111\}}.
 \end{aligned} \right\} (37)$$

Аналогично представление $D(2, 2)$ с базисом (25) расщепляется на следующие изотопические мультиплеты:

$$\left. \begin{array}{ll}
 T = 2, Y = 0: & f^1, f^2, f^3, f^4, f^5; \\
 T = 1, Y = 0: & f^6, f^7, f^8; \\
 T = 0, Y = 0: & f^9; \\
 T = \frac{3}{2}, Y = 1: & f^{10}, f^{11}, f^{12}, f^{13}; \\
 T = \frac{3}{2}, Y = -1: & f^{14}, f^{15}, f^{16}, f^{17}; \\
 T = \frac{1}{2}, Y = 1: & f^{18}, f^{19}; \\
 T = \frac{1}{2}, Y = -1: & f^{20}, f^{21}; \\
 T = 1, Y = 2: & f^{22}, f^{23}, f^{24}; \\
 T = 1, Y = -2: & f^{25}, f^{26}, f^{27}.
 \end{array} \right\} \quad (38)$$

Если в правых частях соотношений (25) сделать замену индексов $2 \leftrightarrow 3$, то выражения (38) дают расщепление на U -мультиплеты, а если сделать замену индексов $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ и $3 \rightarrow 1$, то выражения (38) определяют расщепление на V -мультиплеты.

1.5. Дискретные преобразования

В п. 1.1 показано, что задание T -подгруппы и дискретных преобразований, соответствующих матрицам ϵ_u и ϵ_v , эквивалентно заданию всей группы $SU(3)$. Аналогично группа $SU(3)$ полностью определяется заданием U -подгруппы и дискретных преобразований ϵ_t, ϵ_v или заданием V -подгруппы и дискретных преобразований ϵ_t, ϵ_u . Чтобы выяснить смысл этих дискретных преобразований, воспользуемся соотношениями (14), или в векторном виде — (14'). Пусть E_t, E_u и E_v — преобразования в пространствах неприводимых представлений, соответствующие преобразованиям ϵ_t, ϵ_u и ϵ_v группы $SU(3)$. Мы имеем тогда следующие коммутационные соотношения между операторами E_t, E_u и E_v и инфинитезимальными

операторами

$$\left. \begin{aligned} [H_i, E_t] &= -2\alpha_i^t E_t (\alpha_k^t H_k); \\ [H_i, E_u] &= -2\alpha_i^u E_u (\alpha_k^u H_k); \\ [H_i, E_v] &= -2\alpha_i^v E_v (\alpha_k^v H_k), \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

или в векторном виде

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{H}, E_t] &= -2\alpha^t E_t (\alpha^t \mathbf{H}); \\ [\mathbf{H}, E_u] &= -2\alpha^u E_u (\alpha^u \mathbf{H}); \\ [\mathbf{H}, E_v] &= -2\alpha^v E_v (\alpha^v \mathbf{H}). \end{aligned} \right\} \quad (39')$$

Рассмотрим теперь результат действия преобразований E_t , E_u и E_v на собственные векторы $|h_i\rangle$ операторов H_i . Здесь h_i — собственные значения H_i . Мы имеем

$$H_i |h_i\rangle = h_i |h_i\rangle, \quad (40)$$

или

$$\mathbf{H} |h_i\rangle = \mathbf{h} |h_i\rangle. \quad (40')$$

Тогда из формул (39') получаем, например,

$$\begin{aligned} \mathbf{H} E_t |h_i\rangle &= E_t \mathbf{H} |h_i\rangle - 2\alpha^t E_t (\alpha^t \mathbf{H}) |h_i\rangle = \\ &= E_t \mathbf{h} |h_i\rangle - 2\alpha^t E_t (\alpha^t \mathbf{h}) |h_i\rangle = \\ &= [\mathbf{h} - 2\alpha^t (\alpha^t \mathbf{h})] E_t |h_i\rangle, \end{aligned} \quad (41)$$

т е.

$$\mathbf{H} E_t |h_i\rangle = [\mathbf{h} - 2\alpha^t (\alpha^t \mathbf{h})] E_t |h_i\rangle.$$

Таким образом, если $|h_i\rangle$ — собственный вектор оператора \mathbf{H} , соответствующий собственному значению \mathbf{h} , то $E_t |h_i\rangle$ есть также собственный вектор этого оператора с собственным значением $\mathbf{h} - 2\alpha^t (\alpha^t \mathbf{h})$. Так как $\alpha^{tt} = 1$, то $(\alpha^t \mathbf{h})$ равно проекции вектора \mathbf{h} на α^t . Следовательно, векторы \mathbf{h} и $\mathbf{h} - 2\alpha^t (\alpha^t \mathbf{h})$ имеют одну и ту же проекцию на ось, перпендикулярную α^t , а их проекции на α^t имеют противоположные знаки. Они переходят друг в друга при отражении относительно прямой Δ_t , перпендикулярной α^t . Заключаем, таким образом, что если изобразить векторы состояния $|h_i\rangle$ посредством весовых векторов \mathbf{h} , то преобразование E_t является отражением относительно прямой Δ_t , перпендикулярной α^t . Аналогично имеем соотношения

$$\mathbf{H} E_u |h_i\rangle = [\mathbf{h} - 2\alpha^u (\alpha^u \mathbf{h})] E_u |h_i\rangle; \quad (41')$$

$$\mathbf{H} E_v |h_i\rangle = [\mathbf{h} - 2\alpha^v (\alpha^v \mathbf{h})] E_v |h_i\rangle, \quad (41'')$$

означающие, что E_u и E_v есть отражения относительно прямых Δ_u и Δ_v , перпендикулярных α^u и α^v соответственно (рис. 8).

Три приведенные подгруппы $SU(2)$ можно рассматривать как группы вращений в трехмерных пространствах T -, U - и V -спинов. В гл. 2 п. 2.1 мы показали, что E_t является вращением на угол π вокруг второй оси в трехмерном пространстве T -спина. Это преобразование называем T -зарядовой симметрией. Аналогично E_u и

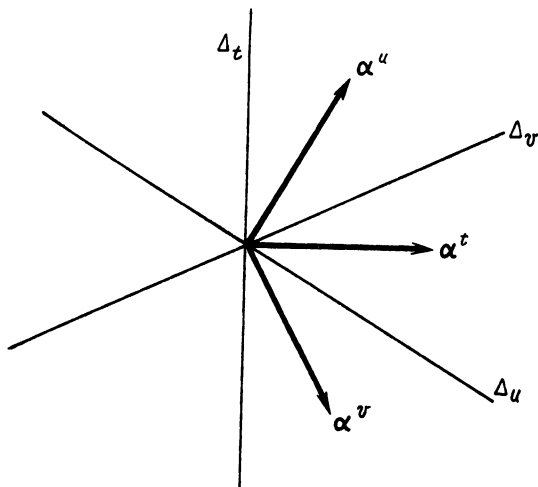


Рис. 8.

E_v — вращениями на угол вокруг вторых осей в трехмерных пространствах U - и V -спинов соответственно. Их называем U - и V -зарядовыми симметриями.

Кроме трех рассмотренных зарядовых симметрий существует еще одно дискретное преобразование: отражение относительно начала координат на весовой диаграмме. Это отражение называем R -преобразованием. В R -преобразовании веса всех векторов состояний меняют знак ($\mathbf{h} \rightarrow -\mathbf{h}$) и каждое представление переходит в свое контраградиентное:

$$RD(p, q) = D(q, p);$$

$$R e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \eta e_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_p}, \quad |\eta| = 1. \quad (42)$$

Если $p \neq q$, то представление $D(q, p)$ переходит при R -преобразовании в представление $D(p, q)$ и только представления типа $D(q, q)$ переходят в себя. Очевидно, что R -преобразование не является элементом группы $SU(3)$, в то время как зарядовые симметрии входят в группу $SU(3)$.

§ 2. Классификация элементарных частиц и резонансов в унитарной симметрии

2. 1. Унитарные мультиплеты

Применим полученные результаты к изучению классификации элементарных частиц и резонансов. Мы постулируем, что элементарные частицы и резонансы образуют унитарные мультиплеты, описываемые неприводимыми представлениями группы $SU(3)$. Далее предполагаем, что генераторы группы $SU(3)$ коммутируют с генераторами однородной группы Лоренца, а также с отражениями пространства — времени. Тогда в силу леммы Шура (см. гл. 1, п. 3.4) все частицы в одном унитарном мультиплете имеют одинаковые спины и четности. Группа $SU(3)$ содержит три подгруппы $SU(2)$. Одну из этих подгрупп, а именно T -подгруппу, рассмотрим как изотопическую. В п. 1.4 было изучено расщепление некоторых унитарных мультиплетов на мультиплеты подгруппы $SU(2)$. В частности, формулы (32) — (32'') и (35) показывают, какие изотопические мультиплеты содержатся в унитарном октетте (т. е. в представлении $D(1, 1)$) и в унитарном декуплете (т. е. в представлении $D(3, 0)$).

Рассмотрим сначала унитарный октет. Он состоит из изотопического триплета с $Y^t = 0$, двух изотопических дублетов с $Y^t = \pm 1$ и изотопического синглета с $Y^t = 0$. С другой стороны, существуют восемь псевдоскалярных мезонов и восемь барионов со спином и четностью $\frac{1}{2}^+$, образующих такие же изотопические мультиплеты:

$$T = 1, Y = 0: \quad \pi^\pm, \pi^0 \text{ и } \Sigma^\pm, \Sigma^0;$$

$$T = \frac{1}{2}, Y = 1: \quad K^+, K^0 \text{ и } p, n;$$

$$T = \frac{1}{2}, Y = -1: \quad \widetilde{K}^0, K^- \text{ и } \Xi^0, \Xi^-;$$

$$T = 0, Y = 0: \quad \eta \text{ и } \Lambda.$$

Следовательно, естественно предположить, следуя Гелл-Манну и Нееману, что эти мезоны и барионы образуют унитарные октуплеты. Для них $Y^t = Y$. Однако это еще не означает, что инфинитезимальный оператор Y^t может быть отождествлен с оператором гиперзаряда Y для любого мультиплетта. Действительно, для некоторого неприводимого представления, например фундаментального представления, Y^t и Y в принципе могут быть связаны следующим образом:

$$Y = ay^t + bI,$$

где I — единичный оператор, а a и b — константы. Мы требуем, чтобы частицы и античастицы преобразовывались по неприводимым представлениям, контраградиентным друг к другу. Тогда для представления, контраградиентного к фундаментальному,

$$Y = \widetilde{a}y^t - b\widetilde{I}, \quad \widetilde{y}^t = -(y^t)^T,$$

где \widetilde{I} — единичный оператор для рассматриваемого представления.

Пусть теперь Y_1 и Y_2 — операторы гиперзаряда для двух представлений. Тогда для представления, являющегося произведением этих представлений, оператор гиперзаряда имеет вид

$$Y = Y_1 \otimes I_2 + I_1 \otimes Y_2.$$

Иначе говоря, операторы гиперзаряда для произведений представлений определяются так же, как инфинитезимальные операторы произведений представлений [см. гл. 1, формулу (83)]. В частности, для представления $D(1, 1)$

$$\begin{aligned} Y &= (ay^t + bI) \otimes \widetilde{I} + I \otimes (\widetilde{a}y^t - b\widetilde{I}) = \\ &= a(y^t \otimes \widetilde{I} + I \otimes \widetilde{y}^t) = aY^t. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что для представлений $D(p, q)$ с $q = p$ оператор гиперзаряда Y пропорционален инфинитезимальному оператору Y^t :

$$Y = aY^t.$$

Это соотношение в действительности имеет место для унитарного октуплета, если $a = 1$. Таким образом, если мы требуем, чтобы восемь псевдоскалярных мезонов и восемь барионов $\frac{1^+}{2}$ образовывали унитарные мультиплеты, то для фундаментального представления и контраградиентного к нему представления гиперзаряд Y связан со вторым диагональным генератором соотношениями

$$Y = y^t + bI \quad (43)$$

и

$$Y = \tilde{y}^t - b\tilde{I} \quad (43')$$

соответственно.

Чтобы определить константу b , необходимо рассмотреть представления $D(q, p)$ с $q \neq p$. Тогда имеем

$$Y = Y^t + b(q - p)I. \quad (44)$$

В частности, для унитарного декуплета $q = 3, p = 0$

$$Y = Y^t + 3bI.$$

Унитарный декуплет содержит следующие изотопические мультиплеты [см. формулу (35)]: $T = 3/2$ и $Y^t = 1$; $T = 1$ и $Y^t = 0$; $T = 1/2$ и $Y^t = -1$; $T = 0$ и $Y^t = -2$. С другой стороны, существуют барионные резонансы со спином и четностью $\frac{3^+}{2}$, которые могут быть отождествлены с тремя изотопическими мультиплетами с $T = 3/2, 1$ и $1/2$ из декуплета. Это Δ -резонанс с $T = 3/2$ и $Y = 1$; Y^* -резонанс с $T = 1$ и $Y = 0$; Ξ^* -резонанс с $T = 1/2$ и $Y = -1$. Если они образуют унитарный декуплет, то для этого мультиплета мы имеем также $Y = Y^t$. Отсюда следует, что $b = 0$.

Таким образом, классификация известных псевдоскалярных мезонов или барионов $\frac{1^+}{2}$ в унитарной симметрии требует, чтобы гиперзаряд Y был связан с инфинитезимальным оператором Y^t соотношением (44), где b — произвольная константа. Если барионные резонансы $\frac{3^+}{2}$ образуют унитарный декуплет, то $b = 0$, и для любых представлений инфинитезимальный оператор Y^t является оператором гиперзаряда.

Выше мы говорили, что три известных барионных резонанса $\frac{3^+}{2}$: Δ с $T = 3/2$ и $Y = 1$; Y^* с $T = 1$ и $Y = 0$; Ξ^* с $T = 1/2$ и $Y = -1$ — можно считать компонентами некоторого унитарного декуплета. Этот декуплет должен содержать также некоторый барион $\frac{3^+}{2}$ с изотопическим спином $T = 0$ и гиперзарядом $Y = Y' = -2$. Это недавно обнаруженный Ω^- -гиперон. В дальнейшем мы покажем также, что масса Ω^- -гиперона прекрасно согласуется с предсказанием теории нарушенной унитарной симметрии. Таким образом, открытие Ω^- -гиперона полностью подтверждает правильность теории унитарной симметрии. Отметим, что для дальнейшего уточнения этого вывода необходимо определить спин и четность Ω^- -гиперона.

Рассмотрим теперь произвольный мультиплет. Из формул (18) и (27) следует, что базисный вектор $e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ описывает состояние с гиперзарядом, равным

$$\frac{1}{3} \{ [q(1) - p(1)] + [q(2) - p(2)] - 2[q(3) - p(3)] \};$$

$$Y e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \frac{1}{3} \{ [q(1) - p(1)] + [q(2) - p(2)] - 2[q(3) - p(3)] \} e_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}, \quad (45)$$

где $q(1)$, $q(2)$ и $q(3)$ — числа ковариантных индексов, равных 1, 2 и 3 соответственно, а $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ — числа контравариантных индексов. Для каждого мультиплета суммы $q(1) + q(2) + q(3) = q$ и $p(1) + p(2) + p(3) = p$ полностью определены. Пусть $q(1)$ увеличивается на единицу. Тогда $q(3)$ уменьшается на единицу, а гиперзаряд увеличивается на единицу, как это следует из формулы (45). Поэтому в каждом унитарном мультиплете Y принимает максимальное значение, если $q(1) + q(2) = q$, $q(3) = 0$, $p(3) = p$, $p(1) + p(2) = 0$. Это максимальное значение равно

$$Y_{\max} = \frac{q}{3} + \frac{2p}{3}.$$

Аналогично минимальное значение $Y_{\text{мин}}$ равно

$$Y_{\text{мин}} = - \left(\frac{p}{3} + \frac{2q}{3} \right).$$

Итак, в каждом мультиплете гиперзаряд принимает значения

$$-\frac{2q+p}{3}, -\frac{2q+p}{3} + 1, \dots, \frac{2p+q}{3} - 1, \frac{2p+q}{3}.$$

Перепишем $Y_{\text{макс}}$ в виде

$$Y_{\text{макс}} = q + \frac{2}{3}(p - q).$$

Очевидно, что гиперзаряд принимает целочисленные значения, когда $p - q = 3n$, где n — целые числа. Все частицы в мультиплетях с $p - q \neq 3n$ имеют дробные гиперзаряды и, следовательно, дробные заряды. В частности, частицы в унитарном триплете, осуществляющем фундаментальное представление, имеют гиперзаряды $1/3, 1/3, -2/3$ и заряды $2/3, -1/3, -1/3$ соответственно.

В заключение отметим, что для описания окуплета иногда удобно вместо спинора ψ_{β}^{α} с $\psi_{\alpha}^{\alpha} = 0$ ввести восьмеричный вектор:

$$\psi_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_{\beta}^{\alpha} O_i. \quad (46)$$

Тогда из формулы (3) получаем обратное соотношение:

$$O_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{\beta}^{\alpha} (\lambda_i)_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp}(\psi \lambda_i). \quad (47)$$

2. Мультиплеты подгрупп $SU(2)$ и дискретные преобразования

Каждый унитарный мультиплет содержит различные мультиплеты подгрупп $SU(2)$. Расщепление унитарных окуплета и декуплета на изотопические мультиплеты, т. е. мультиплеты Т-подгруппы, было дано в § 1.

Окуплет барионов $\frac{1}{2}^{+}$, например, содержит следующие изотопические мультиплеты [см. формулы (32)

и (32)"]:

$$\left. \begin{aligned} T = 1, Y = 0: \Sigma^+ = \mathbf{e}_2^1, \Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2), \Sigma^- = \mathbf{e}_1^2; \\ T = \frac{1}{2}, Y = 1: \rho = \mathbf{e}_3^1, n = \mathbf{e}_3^2; \\ T = \frac{1}{2}, Y = -1: \Xi^0 = \mathbf{e}_2^3, -\Xi^- = \mathbf{e}_1^3; \\ T = 0, Y = 0: \Lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 - 2\mathbf{e}_3^3), \end{aligned} \right\} (48)$$

а декуплет содержит следующие изотопические мультиплеты [см. формулу 61 (35)]:

$$\left. \begin{aligned} T = \frac{3}{2}, Y = 1: \Delta^{++} = \mathbf{e}^{\{111\}}, \Delta^+ = \mathbf{e}^{\{112\}}, \\ \Delta^0 = \mathbf{e}^{\{122\}}, \Delta^- = \mathbf{e}^{\{222\}}; \\ T = 1, Y = 0: Y^{*+} = \mathbf{e}^{\{113\}}, Y^{*0} = \mathbf{e}^{\{123\}}, Y^{*-} = \mathbf{e}^{\{223\}} \\ T = \frac{1}{2}, Y = -1: \Xi^{*0} = \mathbf{e}^{\{133\}}, \Xi^{*-} = \mathbf{e}^{\{233\}}; \\ T = 0, Y = -2: \Omega^- = \mathbf{e}^{\{333\}}. \end{aligned} \right\} (49)$$

Отметим, что необходимо ввести знак минус перед Ξ^- , так как в теории изотопической инвариантности мы условились рассматривать Ξ^0 и Ξ^- как компоненты ковариантного спинора

$$\mathbf{e}^1 = \Xi^0, \quad \mathbf{e}^2 = \Xi^-,$$

а в формулах (48) состояния с $T = 1/2$ и $Y = -1$ являются компонентами контравариантного спинора

$$\mathbf{e}_a = \varepsilon_{ba}\mathbf{e}^b,$$

т. е.

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^1 = \Xi^0, \quad \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}^2 = -\Xi^-.$$

Из формул (48) и (49) можно получить компоненты спинора, описывающего какую-нибудь частицу. Так, для Σ^0 мы имеем $\psi_1^1 = 1/\sqrt{2}$, $\psi_2^2 = -1/\sqrt{2}$, все остальные компоненты равны нулю, а единственной ненулевой компонентой спинора, описывающего протон, является

$\psi_1^3 = 1$. Иногда удобно представить октуплет барионов в виде матрицы.

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda}{\sqrt{6}} & n \\ -\Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda \end{pmatrix} \quad (50)$$

по аналогии с представлением изотопических триплетов в виде матриц 2×2 . Для октуплета псевдоскалярных мезонов мы имеем такую же матрицу

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} & K^0 \\ -K^- & \tilde{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta \end{pmatrix} \quad (51)$$

Так как мультиплеты частиц и античастиц описываются контраградиентными друг к другу представлениями, то для антибарионов мы имеем матрицу

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \tilde{\Sigma}^- & -\tilde{\Xi}^- \\ \tilde{\Sigma}^+ & -\frac{\tilde{\Sigma}^0}{\sqrt{2}} + \frac{\tilde{\Lambda}}{\sqrt{6}} & \tilde{\Xi}^0 \\ \tilde{p} & \tilde{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{\Lambda} \end{pmatrix} \quad (52)$$

Рассмотрим теперь расщепление унитарного октуплета и декуплета на мультиплеты U - и V -спинов. Октуплет расщепляется согласно формулам (33) и (34). Для идентификации базисных векторов мультиплетов U - и V -спинов в этих формулах необходимо выразить комбинации

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_3^3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_2^2)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2^2 - \mathbf{e}_3^3), \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_1^1)$$

через базисные векторы (32) — (32'') изотопических мультиплетов, т. е. через физические векторы состояния частиц. Мы имеем для октуплета барионов $\frac{1^+}{2}$, например,

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_3^3) &= \frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda; \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_2^2) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda; \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2^2 - \mathbf{e}_3^3) &= -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda; \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_1^1) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Из соотношений (33), (34), (48) и (53) получаем связь между мультиплетами T -, U - и V -спинов, содержащимися в октуплете барионов $\frac{1^+}{2}$:

$$\left. \begin{aligned} U = 1, Y^u = 0: \rho, \frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda, -\Xi^-, \\ U = \frac{1}{2}, Y^u = 1: \Sigma^+, \Xi^0, \\ U = \frac{1}{2}, Y^u = -1: n, \Sigma^-, \\ U = 0, Y^u = 0: \frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda; \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} V = 1, Y^v = 0: n, -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda, \Xi^0, \\ V = \frac{1}{2}, Y^v = 1: \Sigma^-, -\Xi^-, \\ V = \frac{1}{2}, Y^v = -1: \rho, \Sigma^+, \\ V = 0, Y^v = 0: -\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Расщепления октуплета барионов $\frac{1+}{2}$ на мультиплеты T -, U - и V -спинов можно изобразить графически при помощи весовых диаграмм (рис. 9).

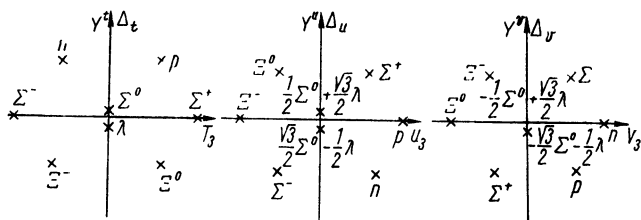


Рис. 9.

Аналогично для октуплета псевдоскалярных мезонов мы имеем весовые диаграммы, изображенные на рис. 10,

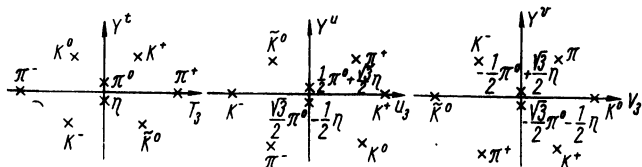


Рис. 10.

а расщепления декуплета даются диаграммами на рис. 11.

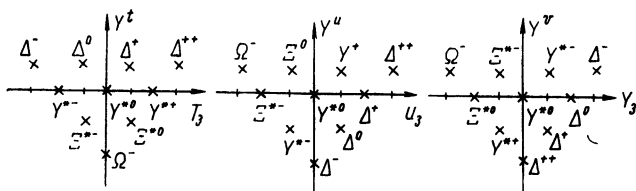


Рис. 11.

В каждой весовой диаграмме частицы, лежащие на одной и той же горизонтальной прямой, принадлежат одному и тому же мультиплету соответствующей подгруппы $SU(2)$.

Рассмотрим, наконец, дискретные преобразования E_t , E_u , E_v . Мы показали, что в T -зарядовой симметрии

E_i векторы состояния частиц преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 p \rightarrow n, n \rightarrow -p, \Sigma^\pm &\rightarrow -\Sigma^\pm, \Sigma^0 \rightarrow -\Sigma^0; \\
 \Xi^0 &\rightarrow -\Xi^-, \Xi^- \rightarrow \Xi^0, \Lambda \rightarrow \Lambda; \\
 K^+ &\rightarrow K^0, K^0 \rightarrow -K^+, \pi^\pm \rightarrow -\pi^\mp, \pi^0 \rightarrow -\pi^0; \\
 \widetilde{K}^0 &\rightarrow -K^-, K^- \rightarrow \widetilde{K}^0, \eta \rightarrow \eta; \\
 \Delta^{++} &\rightarrow \Delta^-, \Delta^- \rightarrow -\Delta^{++}, \Delta^+ \rightarrow -\Delta^0, \Delta^0 \rightarrow \Delta^+; \\
 Y^{*\pm,0} &\rightarrow -Y^{*\mp,0}, \Xi^{*0} \rightarrow \Xi^{*-}, \Xi^{*-} \rightarrow -\Xi^{*0}, \Omega^- \rightarrow \Omega^-.
 \end{aligned} \right\} (56)$$

Аналогично при U -зарядовой симметрии

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma^+ &\rightarrow \Xi^0, \Xi^0 \rightarrow -\Sigma^+, p \leftrightarrow \Xi^-, \left(\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda \right) \rightarrow \\
 &\rightarrow -\left(\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda \right), n \rightarrow \Sigma^-, \Sigma^- \rightarrow -n; \\
 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda \right) &\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 - \frac{1}{2} \Lambda \right), \\
 K^\pm &\rightarrow -K^\mp, \left(\frac{1}{2} \pi^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \right) \rightarrow -\left(\frac{1}{2} \pi^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \right); \\
 K^0 &\rightarrow \pi^-, \pi^- \rightarrow -K^0, \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pi^0 - \frac{1}{2} \eta \right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \pi^0 - \frac{1}{2} \eta \right); \\
 \Delta^{++} &\rightarrow \Omega^-, \Omega^- \rightarrow -\Delta^{++}, Y^+ \rightarrow -\Xi^0, \Xi^0 \rightarrow Y^+; \\
 \Delta^+ &\leftrightarrow -\Xi^{*-}, Y^{*0} \rightarrow -Y^{*0}, \Delta^0 \rightarrow Y^{*-}; \\
 Y^{*-} &\rightarrow -\Delta^0, \Delta^- \rightarrow \Delta^-,
 \end{aligned} \right\} (57)$$

а при V -зарядовой симметрии

$$\left. \begin{aligned}
 \Sigma^- &\rightarrow -\Xi^-, \Xi^- \rightarrow \Sigma^-, n \leftrightarrow -\Xi^0; \\
 \left(-\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda \right) &\rightarrow -\left(-\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \Lambda \right), p \rightarrow \Sigma^+; \\
 \Sigma^+ &\rightarrow -p, \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 + \frac{1}{2} \Lambda \right) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Sigma^0 + \frac{1}{2} \Lambda \right);
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \pi^{\pm} &\rightarrow -K^{\pm}, K^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}, K^0 \leftrightarrow -\tilde{K}^0, \left(-\frac{1}{2}\pi^0 + \right. \\
 &+ \left. \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \right) \rightarrow -\left(-\frac{1}{2}\pi^0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta \right), K^+ \rightarrow \pi^+, \pi^+ \rightarrow -K^+; \\
 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^0 + \frac{1}{2}\eta \right) &\rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi^0 + \frac{1}{2}\eta \right), \Delta^- \rightarrow \Omega^-, \\
 \Omega^- &\rightarrow -\Delta^-; \\
 Y^{*-} &\rightarrow -\Xi^{*-}, \Xi^{*-} \rightarrow Y^{*-}, \Delta^0 \leftrightarrow -\Xi^{*0}; \\
 Y^{*0} &\rightarrow -Y^{*0}, \Delta^+ \rightarrow Y^{*+}, Y^{*+} \rightarrow -\Delta^+, \Delta^{++} \rightarrow \Delta^{++}.
 \end{aligned} \right\} (58)$$

Мы показали, что эти преобразования являются отражениями относительно прямых, перпендикулярных корням $\alpha^t, \alpha^u, \alpha^v$. На весовых диаграммах они соответствуют отражениям относительно осей ординат Y^t, Y^u и Y^v соответственно.

Что касается R -преобразования, то оно переводит представление $D(3, 0)$, например, в представление $D(0, 3)$, т. е. переводит унитарный декуплет барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$ в некоторый сопряженный декуплет, содержащий такие же изотопические мультиплеты, что и обычный декуплет, но с обратными гиперзарядами. Такого мультиплета до сих пор еще не было обнаружено. Так как R -преобразование превращает верхние индексы в нижние и обратно, то октуплеты барионов $\frac{1^+}{2}$ и псевдоскалярных мезонов преобразуются следующим образом:

$$RB_{\beta}^{\alpha}R^{-1} = \eta_{\beta}^R B_{\alpha}^{\beta}, RP_{\beta}^{\alpha}R^{-1} = \eta_{\beta}^R P_{\alpha}^{\beta}, |\eta_{\beta}^R| = |\eta_{\beta}^R| = 1. \quad (59)$$

Отметим, что мезонные мультиплеты, описываемые представлениями $D(q, p)$ с $q = p$, переходят в себя при зарядовом сопряжении. Так, для октуплета псевдоскалярных мезонов имеем

$$\left. \begin{aligned}
 \pi^+ &\leftrightarrow \pi^-, \pi^0 \leftrightarrow \pi^0; \\
 K^+ &\leftrightarrow K^-, K^0 \leftrightarrow \tilde{K}^0, \eta \leftrightarrow \eta,
 \end{aligned} \right\} (60)$$

т. е.

$$CP_{\beta}^{\alpha}C^{-1} = P_{\alpha}^{\beta},$$

а для октуплета векторных мезонов или мезонов 2^+

$$CV_\beta^\alpha C^{-1} = -V_\alpha^\beta; CT_\beta^\alpha C^{-1} = T_\alpha^\beta. \quad (60')$$

Аналогичные законы преобразования изотопических мультиплетов были рассмотрены в гл. 2 [формула (88)]. Барийонный октуплет, например, преобразуется следующим образом:

$$CB_\beta^\alpha C^{-1} = \tilde{B}_\alpha^\beta, \quad (60'')$$

т. е. переходит в мультиплет античастиц. Соотношения (59) — (60') показывают, что для мезонных мультиплетов последовательное осуществление R - и C -преобразований переводит каждую частицу в себя. Это комбинированное преобразование обозначим $G' = RC$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} G' P_\beta^\alpha G'^{-1} &= \eta_P^\alpha P_\beta^\alpha; G' V_\beta^\alpha G'^{-1} = \eta_V^\alpha V_\beta^\alpha; \\ |\eta_P^{G'}| &= |\eta_V^{G'}| = 1. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Величину $\eta^{G'}$ называем G' -четностью частиц. Она является обобщением понятия G -четности в теории изотопической инвариантности. Сохранение G' -четности дает новое правило отбора в процессах взаимодействий частиц. Например, для векторного мезона, являющегося унитарным синглетом, G' -четность совпадает с C -четностью, т. е. равна -1 , поскольку волновая функция этого мезона не меняет знака при R -отражении. Этот мезон не может распадаться на два псевдоскалярных мезона (или два векторных мезона) из одного и того же октуплета, так как G' -четность системы двух частиц из одного мезонного октуплета равна $+1$.

2.3. Массовая формула и смешивание

Если унитарная симметрия выполняется точно, то частицы в каждом унитарном мультиплете должны иметь одну и ту же массу. Следовательно, наличие разницы масс частиц в унитарных мультиплетах означает, что унитарная симметрия нарушается в сильных взаимодействиях. Изучение унитарной симметрии имеет смысл при условии, что нарушающее симметрию взаимодействие достаточно слабо по сравнению с основным взаимодействием, в котором симметрия выполняется

точно. Итак, мы предполагаем лагранжиан сильных взаимодействий состоящим из двух частей, первая из которых инвариантна относительно группы $SU(3)$, а вторая, неинвариантная относительно группы $SU(3)$, дает малые вклады во все матричные элементы диаграмм сильных взаимодействий. К этой второй части применяем теорию возмущений и ограничиваемся первым приближением. Очевидно, что только в этом случае унитарная симметрия может давать реальные следствия.

Посмотрим теперь, каким условиям должна удовлетворять часть лагранжиана, нарушающая унитарную симметрию. Так как гиперзаряд сохраняется, то эта часть должна быть инвариантной относительно калибровочных преобразований волновых функций

$$\psi \rightarrow e^{iaY} \psi,$$

т. е. должна быть собственной функцией оператора гиперзаряда Y , соответствующей собственному значению, равному нулю. Далее изотопическая инвариантность требует, чтобы эта часть лагранжиана была изотопическим инвариантом. Минимальным неприводимым представлением группы $SU(3)$, содержащим изотопический синглет с нулевым гиперзарядом, является октуплет. Итак, если мы предположим, что нарушающая симметрию часть лагранжиана преобразуется по некоторому возможному представлению с минимальным числом компонент, то она должна быть компонентой с $T = 0$ и $Y = 0$ некоторого октуплета. В п. 2.1 было показано, что для описания октуплета вместо спинора Ψ_{β}^{α} можно пользоваться восьмимерным вектором O_i

$$O_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\beta}^{\alpha} (\lambda_i)_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp} (\Psi \lambda_i).$$

Из формул (32) -- (32'') следует, что компонента с $T = 0$ и $Y = 0$ октуплета соответствует восьмимерному вектору

$$O_i = 0; \quad i \leq 7; \quad O_8 = 1.$$

Если же теперь восемь компонент октуплета представим в виде матрицы типа (50) — (52), то компонента с $T = 0$, $Y = 0$ дается формулой

$$O_8 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp} (\Psi \lambda_8) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\beta}^{\alpha} (\lambda_8)_{\alpha}^{\beta}.$$

Нарушение симметрии приводит к расщеплению масс частиц в унитарных мультиплетях. Следовательно, массовый член в лагранжиане содержит часть, инвариантную относительно группы $SU(3)$. В первом порядке по нарушающему симметрию взаимодействию эта часть является компонентой с $T = 0$ и $Y = 0$ некоторого октуплета. Например, массовый член в лагранжиане барионного поля имеет общий вид

$$L_M = M_0 \bar{B}_\beta^\alpha B_\alpha^\beta + a_1 \bar{B}_\beta^\alpha B_\gamma^\beta (\lambda_8)_\alpha^\gamma + a_2 \bar{B}_1^\beta B_\beta^\alpha (\lambda_8)_\alpha^\gamma. \quad (62)$$

Первый член в правой части формулы (62) является инвариантом, а два последних — компонентами октуплетов. Инвариантная часть лагранжиана состоит из двух независимых членов, так как произведение двух представлений $D(1, 1)$ содержит два представления $D(1, 1)$. Из формулы (62) можно выразить массы частиц через три константы M_0 , a_1 и a_2 и, следовательно, получить соотношения между массами частиц. Однако для этой цели более удобно пользоваться другим выражением, эквивалентным (62), а именно

$$L_M = a \bar{B}_\beta^\alpha B_\alpha^\beta + b \bar{B}_\alpha^\beta B_\beta^\alpha + c \bar{B}_3^\alpha B_\alpha^\beta. \quad (62')$$

Константы a , b и c в этой формуле выражаются линейно через M_0 , a_1 и a_2 . Пользуясь матрицей (50) для B и транспонированной матрицей для \bar{B} , получаем из формулы (62') следующие выражения для масс частиц:

$$M_N = a + c;$$

$$M_\Xi = a + b;$$

$$M_\Sigma = a;$$

$$M_\Lambda = a + \frac{2}{3}(b + c).$$

Отсюда следует, что массы барионов должны удовлетворять соотношению, полученному Гелл-Манном:

$$3M_\Lambda + M_\Sigma = 2(M_N + M_\Xi), \quad (63)$$

которое хорошо согласуется с опытом (4535 и 4518 $M_{\text{эв}}$).

Аналогично массовый член в лагранжиане декуплета барионов имеет вид

$$L_M = a \bar{D}^{\alpha\beta\gamma} D_{\alpha\beta\gamma} + b \bar{D}^{3\alpha\beta} D_{3\alpha\beta}. \quad (64)$$

Массы частиц выражаются через a и b следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\Delta} &= a; \\ M_{Y^*} &= a + \frac{1}{3} b; \\ M_{\Xi^*} &= a + \frac{2}{3} b; \\ M_{\Omega^-} &= a + b. \end{aligned}$$

Отсюда получаем правило интервалов

$$M_{Y^*} - M_{\Delta} = M_{Y^*} - M_{\Xi^*} = M_{\Omega^-} - M_{\Xi^*}. \quad (65)$$

Первое равенство хорошо согласуется с экспериментальными данными (147 и 145 Мэв), а из второго можно предсказать массу Ω^- -гиперона, равную 1676 Мэв, что было подтверждено опытом ($M_{\Omega^-}^{\text{эксперим}} = 1675$ Мэв).

Массовые соотношения для мезонов также можно получить аналогично. Поскольку лагранжианы мезонных полей содержат квадрат масс, то в данном случае мы имеем соотношения между квадратами масс. Так для октуплета псевдоскалярных мезонов массовый член в лагранжиане имеет вид

$$L_m = m_0^2 \bar{P}_\beta^\alpha P_\alpha^\beta + a_1 \bar{P}_\beta^\alpha P_1^\beta (\lambda_8)_\alpha^\gamma + a_2 \bar{P}_\gamma^\beta P_\beta^\alpha (\lambda_8)_\alpha^\gamma,$$

или

$$L_m = a \bar{P}_\beta^\alpha P_\alpha^\beta + b \bar{P}_\alpha^3 P_3^\alpha + c \bar{P}_3^\alpha P_\alpha^3.$$

Требование C -инвариантности приводит к некоторым ограничениям в выборе произвольных констант b и c . Действительно, при зарядовом сопряжении

$$P_\beta^\alpha \rightarrow P_\alpha^\beta, \quad \bar{P}_\beta^\alpha \rightarrow \bar{P}_\alpha^\beta$$

и L_m превращается в

$$CL_m C^{-1} = a \bar{P}_\beta^\alpha P_\alpha^\beta + b \bar{P}_3^\alpha P_\alpha^3 + c \bar{P}_\alpha^3 P_3^\alpha.$$

С другой стороны, L_m должен быть инвариантным относительно C -преобразования

$$CL_m C^{-1} = L_m.$$

Отсюда

$$b = c,$$

и, следовательно,

$$L_m = a\bar{P}_\beta^\alpha P_\alpha^\beta + b(\bar{P}_\alpha^3 P_3^\alpha + \bar{P}_3^\alpha P_\alpha^3). \quad (66)$$

Квадраты масс частиц равны

$$m_K^2 = a + b;$$

$$m_\pi^2 = a;$$

$$m_\eta^2 = a + \frac{4}{3} b.$$

Отсюда следует, что массы псевдоскалярных мезонов связаны соотношением

$$4m_K^2 = 3m_\eta^2 + m_\pi^2, \quad (67)$$

согласующимся с опытом с точностью 5% $(976 \text{ Мэв})^2$ и $(923 \text{ Мэв})^2$.

Если для трех рассмотренных унитарных мультиплетов массовые формулы хорошо согласуются с опытом, то для векторных мезонов и мезонов 1^+ и 2^+ ситуация совсем иная. Допустим, что известные векторные мезоны ρ и K^+ являются компонентами октуплета. Этот октуплет должен содержать некоторый изотопический синглет с $Y = 0$, обозначаемый φ^0 , масса которого определяется через m_ρ^2 и $m_{K^*}^2$ формулой

$$m_{\varphi^0}^2 = \frac{1}{3} [4m_{K^*}^2 - m_\rho^2] = (931 \text{ Мэв})^2.$$

Вместо этого мезона на опыте наблюдались два подобных мезона ω и φ с массами $m_\omega = 783 \text{ Мэв}$ и $m_\varphi = 1020 \text{ Мэв}$. Очевидно, что никакой из этих мезонов нельзя отождествлять с φ^0 . Сакураи отметил, что этот факт можно объяснить следующим образом. Наряду с октуплетом векторных мезонов ρ , K^* , \tilde{K}^* и φ^0 существует некоторый векторный мезон ω^0 , являющийся унитарным синглетом. Если унитарная симметрия выполняется точно, то матричный элемент S -матрицы между состояниями ω^0 и φ^0 должен быть равным нулю. Поскольку в действительности унитарная симметрия нарушается, то этот матричный элемент отличается от нуля. Иначе говоря, в результате нарушения унитарной симметрии возможен переход $\varphi^0 \leftrightarrow \omega^0$ в сильных взаимодействиях. Диаграмма этого перехода имеет такой же вид, что и

диаграмма собственной энергии мезонов, определяющая оператор квадрата масс \mathfrak{M}^2 мезонов. Это означает, что недиагональный матричный элемент $\langle \omega^0 | \mathfrak{M}^2 | \varphi^0 \rangle$ оператора \mathfrak{M}^2 отличается от нуля. Следовательно, состояния ω^0 - и φ^0 -мезонов не являются собственными состояниями оператора \mathfrak{M}^2 и не могут быть физическими. Физическими должны быть состояния, обозначенные φ и ω , для которых недиагональные матричные элементы оператора \mathfrak{M}^2 равны нулю:

$$\langle \varphi | \mathfrak{M}^2 | \omega \rangle = \langle \omega | \mathfrak{M}^2 | \varphi \rangle = 0. \quad (68)$$

Волновые функции состояний φ и ω представляют собой ортонормированные линейные комбинации волновых функций состояний φ^0 и ω^0

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi^0 \cos \theta + \omega^0 \sin \theta; \\ \omega &= -\varphi^0 \sin \theta + \omega^0 \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

Обратно, φ^0 и ω^0 выражаются через φ и ω следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^0 &= \varphi \cos \theta - \omega \sin \theta; \\ \omega^0 &= \varphi \sin \theta + \omega \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Угол θ называется углом $\varphi\omega$ -смешивания.

По определению оператора квадрата масс \mathfrak{M}^2 , квадраты масс φ^0 - и ω^0 -мезонов, а также φ - и ω -мезонов равны

$$m_{\varphi^0}^2 = \langle \varphi^0 | \mathfrak{M}^2 | \varphi^0 \rangle, \quad m_{\omega^0}^2 = \langle \omega^0 | \mathfrak{M}^2 | \omega^0 \rangle \quad (71)$$

и

$$m_{\varphi}^2 = \langle \varphi | \mathfrak{M}^2 | \varphi \rangle, \quad m_{\omega}^2 = \langle \omega | \mathfrak{M}^2 | \omega \rangle \quad (72)$$

соответственно. Подставив выражения (70) в (71), получим

$$\begin{aligned} m_{\varphi^0}^2 &= (\cos \theta \langle \varphi | - \sin \theta \langle \omega |) \mathfrak{M}^2 (\cos \theta | \varphi \rangle - \sin \theta | \omega \rangle) = \\ &= \cos^2 \theta \langle \varphi | \mathfrak{M}^2 | \varphi \rangle + \sin^2 \theta \langle \omega | \mathfrak{M}^2 | \omega \rangle - \\ &- \sin \theta \cos \theta \langle \varphi | \mathfrak{M}^2 | \omega \rangle - \sin \theta \cos \theta \langle \omega | \mathfrak{M}^2 | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Из этого соотношения и соотношений (68) и (72) вытекает формула

$$m_{\varphi^0}^2 = \cos^2 \theta m_{\varphi}^2 + \sin^2 \theta m_{\omega}^2. \quad (73)$$

Таким образом, вместо соотношения между квадратами масс четырех частиц из октуплета мы имеем формулу для квадратов масс частиц, образующих нонуплет:

$$\cos^2 \theta m_\phi^2 + \sin^2 \theta m_\omega^2 = \frac{1}{3} [4m_{K^*}^2 - m_\rho^2]. \quad (74)$$

Зная значения масс частиц, мы можем определить экспериментально значение угла смешивания θ . В следующей главе будет показано, что угол θ можно также определить при помощи других опытов. Одновременное определение значения угла ϕ -смешивания позволяет подтвердить правильность теории.

В гл. 4 изучим симметрию $SU(6)$. Мы покажем, что в этой симметрии значение угла θ полностью определяется, а именно

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{1}{3}}. \quad (75)$$

В данном случае соотношение (74) имеет вид

$$4m_{K^*}^2 = m_\rho^2 + 2m_\phi^2 + m_\omega^2. \quad (76)$$

Нетрудно проверить, что это формула прекрасно согласуется с опытом.

Для мезонов 2^+ имеет место такая же ситуация. Из опыта известно существование следующих мезонов 2^+ :

A_2 -мезоны с $T = 1$, $Y = 0$ и со схемами распада

$$A_2 \rightarrow K\bar{K}, \rho\pi;$$

f^0 -мезон с $T = 0$, $Y = 0$

$$f^0 \rightarrow 2\pi, K\bar{K};$$

f' -мезон с $T = 0$, $Y = 0$

$$f' \rightarrow 2\pi, K\bar{K}, K\bar{K}^*;$$

K^{**} -мезон с $T = 1/2$, $Y = +1$

$$K^{**} \rightarrow K\pi, K\rho, K\omega, K^*\pi.$$

По аналогии с нонуплетом векторных мезонов эти мезоны обозначим ρ' , ω' , ϕ' и K' соответственно. Массы трех первых мезонов равны

$$m_{\rho'} = 1310 \text{ Мэв}, \quad m_{\omega'} = 1250 \text{ Мэв}, \quad m_{\phi'} = 1520 \text{ Мэв}.$$

Что касается K' -мезона, то имеются разные данные. В некоторых работах дается значение $m_{K'} = 1410 \text{ Мэв}$, а в

других — значение $m_{K'} = 1430$ Мэв. Нетрудно проверить, что первое значение $m_{K'}$ и указанные значения $m_{\rho'}$, $m_{\omega'}$ и $m_{\phi'}$ хорошо согласуются с формулой вида (76)

$$4m_{K'}^2 = m_{\rho'}^2 + 2m_{\phi'}^2 + m_{\omega'}^2.$$

Если взять значение $m_{K'} = 1430$ Мэв, то из формулы вида (74)

$$\cos^2 \theta' m_{\phi'}^2 + \sin^2 \theta' m_{\omega'}^2 = \frac{1}{3} [4m_{K'}^2 - m_{\rho'}^2],$$

где θ' — угол $\phi'\omega'$ -смешивания, следует, что

$$\cos^2 \theta' = 0,79.$$

В последнее время были обнаружены различные мезонные резонансы, среди которых можно выделить некоторый нонуплет 1^+ . В этот нонуплет входят следующие резонансы:

E -мезон с $T = 0$, $Y = 0$ и с массой $m = 1420$ Мэв

$$E \rightarrow K^* + \tilde{K}, K + \tilde{K} + \pi;$$

H -мезон с $T = 0$, $Y = 0$ и с массой $m = 975$ Мэв

$$H \rightarrow 3\pi;$$

B -мезон с $T = 1$, $Y = 0$ и с массой $m = 1220$ Мэв

$$B \rightarrow \omega + \pi;$$

Клп-резонанс с $T = 1/2$, $Y = 1$ и массой $m = 1175$ Мэв, который мы называем $K^{*'}_1$ -мезоном. Для этого нонуплета массовая формула вида (76)

$$4m_{K^{*'}_1}^2 = m_B^2 + 2m_H^2 + m_E^2$$

также хорошо согласуется с опытом. Для дальнейшей проверки существования этого нонуплета необходимо определить точно их спины и четности, а также G -четности трех первых резонансов. Все эти девять мезонов должны иметь одинаковые спины и четности. Поскольку B -мезон имеет G -четность $+1$, то E - и H -мезоны должны иметь G -четность (или C -четность) -1 , как это следует из формулы вида (60):

$$CA_{\beta}^{\alpha} C^{-1} = A_{\alpha}^{\beta}.$$

В настоящее время имеются также некоторые указания на существование высших мезонных мультиплетов.

Например, два резонанса K^+K^+ с массами 1055 и 1280 Мэв могут принадлежать только 27-плетам или высшим мультиплетам, а трехмезонный резонанс $K\pi\pi$ с $T = 3/2$, $Y = 1$ и $m = 1270$ Мэв может принадлежать декуплету, 27-плету или какому-нибудь мультиплету с большим числом компонент. Здесь могут происходить также различные процессы смешивания между состояниями из нескольких различных унитарных мультиплетов. В гл. 6 будет показано, что в рамках симметрии $SU(6)$ схемы смешивания полностью определяются.

Рассмотрим теперь возможности классификации новых барионных резонансов в унитарной симметрии. Экспериментом было установлено существование четырех резонансов $3/2^-$

$$T = 0, Y = 0 : M = 1520 \text{ Мэв};$$

$$T = \frac{1}{2}, Y = 1 : M = 1512 \text{ Мэв};$$

$$T = \frac{1}{2}, Y = -1 : M = 1820 \text{ Мэв};$$

$$T = 1, Y = 0 : M = 1660 \text{ Мэв}.$$

Эти резонансы нельзя включить в один унитарный октуплет, частицы из которого обозначим

$$\Lambda\left(\frac{3}{2}^-\right), N\left(\frac{3}{2}^-\right), \Xi\left(\frac{3}{2}^-\right) \text{ и } \Sigma\left(\frac{3}{2}^-\right),$$

так как их массы не удовлетворяют формуле вида (63)

$$3M_{\Lambda\left(\frac{3}{2}^-\right)} + M_{\Xi\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 2\left(M_{N\left(\frac{3}{2}^-\right)} + M_{\Sigma\left(\frac{3}{2}^-\right)}\right).$$

Если три из указанных резонансов принадлежат этому октуплету, то из массовой формулы можно определить массу четвертого. Мы имеем следующие случаи:

$$1) M_{N\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 1512 \text{ Мэв}; M_{\Lambda\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 1520 \text{ Мэв}; M_{\Xi\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 1660 \text{ Мэв}. \text{ Тогда } M_{\Sigma\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 1598 \text{ Мэв}.$$

$$2) M_{N\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 1512 \text{ Мэв}; M_{\Xi\left(\frac{3}{2}^-\right)} = 1660 \text{ Мэв}; M_{\Sigma\left(\frac{3}{2}^-\right)} =$$

$= 1820 \text{ Мэв}$. Тогда $M_{\Lambda} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1668 \text{ Мэв}$.

3) $M_N \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1512 \text{ Мэв}$; $M_{\Lambda} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1520 \text{ Мэв}$; $M_{\Xi} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1820 \text{ Мэв}$. Тогда $M_{\Sigma} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 2104 \text{ Мэв}$.

4) $M_{\Lambda} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1520 \text{ Мэв}$; $M_{\Sigma} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1660 \text{ Мэв}$; $M_{\Xi} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1820 \text{ Мэв}$. Тогда $M_N \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1290 \text{ Мэв}$.

Возможен также случай, когда наряду с рассматриваемым октетом барионных резонансов $\frac{3^-}{2}$ существует также некоторый унитарный синглет $Y^0 \left(\frac{3^-}{2} \right)$ и между состояниями $\Lambda \left(\frac{3^-}{2} \right)$ и $Y^0 \left(\frac{3^-}{2} \right)$ происходит смешивание. В таком случае три резонанса с $T = 1$ и $T = \frac{1}{2}$ принадлежат октету и отождествляются с $\Sigma \left(\frac{3^-}{2} \right)$, $N \left(\frac{3^-}{2} \right)$ и $\Xi \left(\frac{3^-}{2} \right)$, а резонанс $T = Y = 0$, $M = 1520 \text{ Мэв}$ является суперпозицией состояния с массой $M_{\Lambda} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1668 \text{ Мэв}$ и синглетного состояния $Y^0 \left(\frac{3^-}{2} \right)$. Масса другого суперпозиционного состояния, ортогонального к состоянию резонанса с $T = Y = 0$ и $M = 1220 \text{ Мэв}$, определяется тогда значением угла смешивания.

Наряду с барионными резонансами $\frac{3^-}{2}$ существуют барионные резонансы $\frac{5^+}{2}$ которые могут быть рассмотрены как частицы $N \left(\frac{5^+}{2} \right)$, $\Lambda \left(\frac{5^+}{2} \right)$ и $\Xi \left(\frac{5^+}{2} \right)$ из некоторого октета, а также барионные резонансы, которые мы можем отождествлять с частицами $\Delta \left(\frac{7^+}{2} \right)$ и $Y^* \left(\frac{7^+}{2} \right)$ из

некоторого дскуплета $\frac{7^+}{2}$. Их массы равны:

$$M_N\left(\frac{5^+}{2}\right) = 1668 \text{ Мэв}; \quad M_{\Lambda}\left(\frac{5^+}{2}\right) = 1815 \text{ Мэв};$$

$$M_{\Xi}\left(\frac{5^+}{2}\right) = 1933 \text{ Мэв}; \quad M_{\Delta}\left(\frac{7^+}{2}\right) = 1924 \text{ Мэв};$$

$$M_{Y^*}\left(\frac{7^+}{2}\right) = 2065 \text{ Мэв}.$$

Из массовых формул для октуплета и декуплета следует, что остальные частицы имеют следующие массы:

$$M_{\Sigma}\left(\frac{5^+}{2}\right) = 1797 \text{ Мэв (для октуплета)}$$

и

$$M_{\Xi^+}\left(\frac{7^+}{2}\right) = 2206 \text{ Мэв}, \quad M_{\Omega^-}\left(\frac{7^+}{2}\right) = 2347 \text{ Мэв (для декуплета)}.$$

Что касается $\Lambda\eta$ -резонанса со спином и четностью $\frac{1^-}{2}$, $T = 0$, $Y = 0$ и массой порядка 1680 Мэв, то он может быть синглетом или компонентой октуплета, нонулета и т. п. Дальнейшие поиски других барионных резонансов $\frac{1^-}{2}$ будут давать ответ на вопрос, какому унитарному мультиплету может принадлежать $\Lambda\eta$ -резонанс.

В заключение мы приведем общую массовую формулу Окубо, справедливую для всех унитарных мультиплетов:

$$M = M_0 + aY + b\left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4}\right] \text{ (для барионов)} \quad (77)$$

и

$$m^2 = m_0^2 + \alpha Y + \beta\left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4}\right] \text{ (для мезонов)}. \quad (78)$$

Если данный мезонный мультиплет превращается в себя при зарядовом сопряжении, то для этого мультиплета $\alpha = 0$.

§ 3. Модель кварков с дробными зарядами и модели унитарной симметрии без дробных зарядов

3.1. Модель с триплетом фундаментальных частиц

До настоящего времени было сделано много попыток построить модели элементарных частиц, в которых мезоны и многие из барионов являются составными системами, образованными из более фундаментальных частиц. Например, Ферми и Янг выдвинули идею, что π -мезоны могут быть рассмотрены как составные системы пар нуклон — антинуклон. Саката, Марков, Окунь и другие ученые развили схему Ферми — Янга и построили модель, в которой из трех фундаментальных частиц p , n , Λ образуются все мезоны и остальные барионы. Если имеет место полное вырождение между тремя фундаментальными частицами p , n , Λ , то модель Сакаты — Маркова — Окуня также обладает симметрией группы $SU(3)$, непосредственным следствием которой является существование псевдоскалярных и векторных синглетов и октуплетов, как это отметили Салам, Икеда и другие ученые. Разница между этой моделью и так называемым восьмимерным путем Гелл-Манна и Неемана заключается в том, что в первой модели барионы p , n , Λ образуют триплет, а во второй эти барионы вместе с пятью остальными известными барионами Σ^+ , Σ^0 , Σ^- , Ξ^0 , Ξ^- образуют октуплет.

Перейдем теперь к построению модели составных частиц, предложенной Гелл-Манном и Цвейгом, в которой имеет место восьмимерная унитарная симметрия Гелл-Манна и Неемана. Отметим прежде всего, что фундаментальные частицы должны образовывать мультиплет, преобразующийся по фундаментальному представлению, т. е. образуют триплет. Дело в том, что всякое неприводимое представление группы $SU(3)$ может быть получено следующим методом: вначале можно образовать произведение q фундаментальных представлений и p представлений, контраградиентных к фундаментальному, и затем разложить это произведение на неприводимые. Таким путем мы можем получить, в частности, представление $D(q, p)$. С другой стороны, если фундаментальные частицы образуют фундаментальный мультиплет, т. е.

преобразуются по фундаментальному представлению, то волновая функция системы q фундаментальных частиц и p их античастиц преобразуется по представлению, содержащемуся в произведении q фундаментальных и p контраградиентных к фундаментальному представлений. Отсюда следует, что в таком случае всякое неприводимое представление можно реализовать в виде волновой функции систем фундаментальных частиц и их античастиц. Эти фундаментальные частицы будем называть кварками и обозначим их t_p, t_n, t_Λ по аналогии с p, n, Λ в модели Сакаты — Маркова — Окуня. Как было показано в п. 2.1, они имеют заряды $2/3, -1/3, -1/3$ и гиперзаряды $1/3, 1/3, -2/3$ соответственно. Предположим, что их спин равен $1/2$.

Рассмотрим теперь состояния систем кварк — антикварк. Волновые функции этих систем образуют представление $D(1, 0) \otimes D(0, 1)$, которое разлагается на неприводимые представления $D(0, 0)$ и $D(1, 1)$. Следовательно, синглеты и октуплеты псевдоскалярных и векторных мезонов можно считать составными системами пар кварк — антикварк. Отметим, что возможность отождествления псевдоскалярных и векторных мезонов не единственная, а только простейшая. Пользуясь формулами типа (48) для псевдоскалярных мезонов, например, нетрудно получить следующие соответствия:

$$\left. \begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow (\tilde{t}_n t_p), \quad \pi^0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{t}_p t_p - \tilde{t}_n t_n), \quad \pi^- \rightarrow (\tilde{t}_p t_n); \\ K^+ &\rightarrow (\tilde{t}_\Lambda t_p), \quad K^0 \rightarrow (\tilde{t}_\Lambda t_n), \quad K^- \rightarrow (\tilde{t}_p t_\Lambda), \quad \bar{K}^0 \rightarrow (\tilde{t}_n t_\Lambda); \\ \eta &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} (\tilde{t}_p t_p + \tilde{t}_n t_n - 2\tilde{t}_\Lambda t_\Lambda); \\ X &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} (\tilde{t}_p t_p + \tilde{t}_n t_n + \tilde{t}_\Lambda t_\Lambda). \end{aligned} \right\} (79)$$

Очевидно, что октуплет барионов нельзя рассматривать как системы кварк — антикварк. Для того чтобы найти составные системы, которые могут быть отождествлены с этими барионами, рассмотрим прежде всего декуплет барионных резонансов с волновыми функциями, преобразующимися по представлению $D(3, 0)$. Отметим, что простейшим методом построения представления

$D(3, 0)$ является симметризация произведения трех фундаментальных представлений. Следовательно, простейшими составными системами, которые могут быть отождествлены с барионными резонансами из октуплета, являются системы трех кварков, причем унитарные волновые функции этих систем полностью симметричны относительно перестановок кварков. Поскольку барионные резонансы несут барионное число, равное единице, то барионное число кварка равно $1/3$. Теперь мы можем однозначно ответить на вопрос, какими системами могут быть барионы из октуплета. Они должны быть системами трех кварков, так как их барионное число равно единице. Как известно, из произведения трех фундаментальных представлений можно образовать неприводимое представление путем симметризации, например по первому и второму индексам, и затем антисимметризации по второму и третьему индексам. Мы получаем тогда спинор $\psi_{\{\alpha[\beta]\gamma\}}$ эквивалентный спинору ψ_{β}^{α} с нулевым шпуром.

Таким образом, можно получить октуплет из произведения трех фундаментальных представлений путем симметризации по одной паре индексов и антисимметризации по другой. Иначе говоря, барионы из октуплета также являются системами трех кварков, причем унитарные волновые функции этих систем симметричны относительно перестановок одной пары кварков и антисимметричны по другой паре.

Если кварки существуют, то их массы не могут быть меньше $1/3$ массы нуклона, поскольку в таком случае нуклоны были бы нестабильны и распадались бы на три кварка. Кварки могут рождаться вместе с их античастицами в процессах столкновения мезонов и барионов с протоном при достаточно большой энергии, а также в аннигиляции пар протон — антипротон. До сих пор они еще не обнаружены. Этот факт можно объяснить, если предположить, что массы кварков велики, а относительно малые значения масс барионов и мезонов обусловлены тем, что энергия связи этих систем большая. Однако остается непонятным, почему до сих пор не обнаружены другие составные системы с дробными зарядами, например системы двух кварков, двух кварков и антикварка и т. д., массы которых также могут быть порядка масс барионов и мезонов.

3.2. Модели с четырьмя фундаментальными частицами

Попробуем теперь построить модели унитарной симметрии без дробных зарядов. Для этого напомним прежде всего физические требования, из которых вытекает существование частиц с дробными зарядами и гиперзарядами. В п. 2.1 мы показали, что отождествление восьмикомпонентных семейств барионов (N, Σ, Λ, Ξ) и мезонов (K, \bar{K}, π, η) с унитарными октуплетами приводит к следующему соотношению между оператором гиперзаряда для фундаментального представления и генератором y^t группы $SU(3)$:

$$Y = y^t + bI, \quad y^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

а для контраградиентного к нему представления

$$Y = \tilde{y}^t - bI, \quad \tilde{y}^t = - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{3} & \\ & & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

где b — произвольная константа. Ее можно выбрать так, чтобы заряды и гиперзаряды фундаментальных частиц были целыми. Это означает, в частности, что октуплет мезонов можно рассматривать как системы кварка и антикварка с целыми зарядами. Если же еще потребовать, чтобы известные барионные резонансы были системами трех кварков, то константа b обязательно станет равной нулю, что приведет к дробным значениям зарядов кварков. Таким образом, для построения модели без дробных зарядов достаточно освободиться от последнего требования.

Нетрудно видеть, что заряды кварков равны ± 1 или 0 только в двух случаях, когда $b = 2/3$ и $b = -4/3$, так как

для кварков

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} + \frac{b}{2} & & \\ & -\frac{1}{3} + \frac{b}{2} & \\ & & -\frac{1}{3} + \frac{b}{2} \end{pmatrix}.$$

В обоих случаях октуплеты и синглеты мезонов могут быть рассмотрены как системы кварк — антикварк. Поскольку из этих кварков нельзя построить барионы и барионные резонансы, то в качестве фундаментальной частицы необходимо ввести наряду с этим триплетом кварков по крайней мере еще один кварк, который обозначим s и будем считать его унитарным синглетом. Мы имеем, таким образом, составную модель с четырьмя фундаментальными частицами со спином $1/2$, три из которых образуют унитарный триплет t_p, t_n, t_Λ , а четвертый s унитарный синглет. Предположим, что заряд и гиперзаряд синглетного кварка s равны нулю. Тогда известные барионы (N, Σ, Λ, Ξ) можно рассматривать как системы триплетного кварка, триплетного антикварка и синглетного кварка, т. е. состоящие из октуплетного мезона и синглетного кварка. Барионное число кварков тогда равно единице.

Как было показано, кварки имеют заряды ± 1 и 0 , если $b = 2/3$ или $b = -4/3$. Если сохранить данное выше определение гиперзаряда

$$Y = y^t + bI,$$

то в первом случае кварки t_p, t_n, t_Λ будут иметь гиперзаряд $1, 1, 0$, а во втором случае — гиперзаряды $-1, -1, -2$ соответственно. Если же мы хотим, чтобы гиперзаряды кварков по абсолютному значению не превышали единицы, то во втором случае необходимо ввести новое квантовое число z , равное, например, -1 для триплетных кварков. Положим далее

$$Y = -z + y^t + bI.$$

Тогда триплетные кварки имеют гиперзаряды $0, 0, -1$, а заряд Q равен

$$Q = T_3 + \frac{Y+z}{2}.$$

Эта формула применима также и к синглетному кварку s , если для этой частицы $z = 0$. Таким образом, в первом случае кварки имеют следующие заряды, гиперзаряды и изотопические спины:

	Q	Y	T_3	T
t_p	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_n	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_Λ	0	0	0	0
s	0	0	0	0

связанные друг с другом формулой

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}. \quad (80)$$

Во втором случае наряду с известными квантовыми числами существует еще одно новое квантовое число z , связанное с остальными формулой

$$Q = T_3 + \frac{Y + z}{2}, \quad (81)$$

и значения этих квантовых чисел для кварков равны

	Q	Y	z	T_3	T
t_p	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_n	-1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
t_Λ	-1	-1	-1	0	0
s	0	0	0	0	0

Новое квантовое число z называем суперзарядом. Поскольку Q , T_3 и Y сохраняются, то суперзаряд z тоже сохраняется. Отметим, что в первом случае можно также ввести новое квантовое число z , отличающее синглетный кварк от триплетных. Если унитарная симметрия выполняется строго, то это новое квантовое число также сохраняется, так как тогда переход $t_\Lambda \leftrightarrow s$ запрещен. С другой стороны, можно предполагать, что переход $t_\Lambda \leftrightarrow s$ яв-

ляется причиной нарушения унитарной симметрии в любых процессах сильных взаимодействий. В данном случае существует тесная связь между несохранением нового квантового числа z и нарушением унитарной симметрии.

Перейдем теперь к изучению структуры мезонов. В обеих рассматриваемых моделях девять известных псевдоскалярных мезонов, например, могут быть отождествлены с состояниями систем кварк — антикварк таким же образом, что и в модели с триплетом кварков с дробными зарядами [см. формулы (79)]. Другими состояниями систем кварк — антикварк являются $(\tilde{t}_p s)$, $(\tilde{i}_n s)$, $(\tilde{t}_\Lambda s)$, $(\tilde{s} t_p)$, $(\tilde{s} t_n)$, $(\tilde{s} t_\Lambda)$, $(\tilde{s} s)$. Если их спины и четности равны 0^- , то мы имеем еще семь псевдоскалярных мезонов: два унитарных триплета и один унитарный синглет. Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &\rightarrow (\tilde{s} s), \quad \sigma \rightarrow (\tilde{s} t_p), \quad \tau \rightarrow (\tilde{s} t_n), \quad \delta \rightarrow (\tilde{s} t_\Lambda), \\ \tilde{\sigma} &\rightarrow (\tilde{t}_p s), \quad \tilde{\tau} \rightarrow (\tilde{t}_n s), \quad \tilde{\delta} \rightarrow (\tilde{t}_\Lambda s). \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

В первой модели их квантовые числа равны

	Q	Y	T_3	T
ε	0	0	0	0
σ	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
τ	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
δ	0	0	0	0

а во второй

	Q	Y	z	T_3	T
ε	0	0	0	0	0
σ	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
τ	-1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
δ	-1	-1	-1	0	0

Аналогично кроме девяти известных векторных мезонов мы имеем векторные мезоны ϵ^* , σ^* , τ^* и δ^* с такими же квантовыми числами, что и псевдоскалярные мезоны ϵ , σ , τ , δ . В первой модели квантовые числа σ^* и τ^* равны соответствующим квантовым числам K^{*+} и K^{*0} . Они могут быть отождествлены с κ -мезонами ($K\pi$ -резонанс с $M = 725$ Мэв), если последние имеют спин и четность 1^- . Во второй же модели триплетные мезоны σ , τ , δ , σ^* , τ^* , δ^* имеют отличные от нуля суперзаряды. Они не могут распадаться на известные мезоны по сильным взаимодействиям, даже если их массы достаточно велики. Поэтому некоторые из них могут распадаться только по слабым взаимодействиям, если в последних суперзаряд не сохраняется, и время их жизни имеет порядок времени жизни K - и π -мезонов.

Состояния систем кварков и антикварков, которые могут быть отождествлены с известными барионами и барионными резонансами, также можно построить аналогично. На этом мы не будем останавливаться. Отметим только важный факт, что во второй модели существуют барионы с отличными от нуля суперзарядами. Некоторые из этих барионов либо стабильны, либо распадаются только по слабым взаимодействиям.

В рассматриваемых моделях с четырьмя кварками полное вырождение по трем кваркам t_p , t_n , t_λ приводит к унитарной симметрии сильных взаимодействий. Если же наблюдается полное вырождение по всем четырем кваркам, то имеет место более высокая симметрия — симметрия $SU(4)$ Тарьянэ и Теплица, Маки, Хара, Владимирского и других.

3.3. Модели с несколькими триплетами кварков

Трудность с дробными зарядами и барионными числами можно также преодолеть, если предположить, что элементарные частицы образуются из нескольких триплетов фундаментальных частиц. Одна из моделей такого типа была предложена Швингером. В этой модели существуют два фундаментальных триплета: фермионный триплет ψ_α с зарядами $-1, 0, 0$ и барионным числом 1 и бозонный триплет ϕ_α с зарядами $-1, 0, 0$ и барионным числом 2 . Известные барионы тогда могут быть отождествлены с состояниями систем $\widetilde{\psi}^\beta \phi_\alpha$, а известные мезо-

ны — с состояниями систем $\widetilde{\varphi}^{\beta}\varphi_{\alpha}$ или $\widetilde{\psi}^{\beta}\psi_{\alpha}$. Очевидно, что в данном случае наряду с октетлетами барионов $\frac{1^+}{2}$, псевдоскалярных и векторных мезонов должны существовать соответствующие синглеты. В частности, должен существовать девятый барион с $J^P = \frac{1^+}{2}$; $T = 0$, $Y = 0$, $Q = 0$.

В модели Швингера имеется также некоторое новое сохраняющееся квантовое число, отличающее фундаментальные фермион ψ_{α} и бозон φ_{α} и связанное с остальными квантовыми числами формулой типа (81). Наряду с известными частицами, для которых это новое квантовое число равно нулю, существуют мультиплеты, для которых последнее не равно нулю. Некоторые частицы в этих мультиплетах стабильны, по крайней мере, относительно сильного и электромагнитного взаимодействий.

Другими моделями без дробных зарядов являются модели с тремя фундаментальными триплетами со спином $1/2$. Подобие схемы предложены Боголюбовым и др. и Намбу. Обозначим фундаментальные частицы q_{α} , r_{α} и s_{α} ; $\alpha = 1, 2, 3$. Предположим, что их изотопические спины T , заряды Q , гиперзаряды Y и барионные числа B равны

	Q	Y	B	T_3	T
q_1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_2	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_3	0	0	1	0	0
r_1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
r_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
r_3	0	-1	1	0	0
s_1	0	0	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s_2	-1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
s_3	-1	-1	-1	0	0

Введем еще одно квантовое число z , равное 0 для q_α , +1 для r_α и -1 для s_α . Тогда получим формулу (81). В этой модели мезоны отождествляются с системами $\widetilde{q}^\alpha q_\beta$, $\widetilde{r}^\alpha r_\alpha$ и $\widetilde{s}^\alpha s_\alpha$ по аналогии с моделью с одним триплетом [см. формулы (79)], а барионы $\frac{1^+}{2}$ и барионные резонансы $\frac{3^+}{2}$ — с системами трех фундаментальных частиц ($q_\alpha r_\beta s_\gamma$). При этом унитарные части волновых функций этих систем обладают такими же свойствами симметрии относительно перестановок фундаментальных частиц, что и в модели с триплетом кварков с дробными зарядами и барионным числом (см. п. 3.1). Иначе говоря, волновая функция декуплета симметрична относительно перестановок индексов $q_\alpha, r_\beta, s_\gamma$, а волновая функция октуплета получается путем симметризации по одной паре индексов и затем антисимметризации по другой. Обозначим Q_0, Y_0 матрицы заряда и гиперзаряда кварков в модели с одним триплетом, а $Q_q, Y_q, Q_r, Y_r, Q_s, Y_s$ матрицы заряда и гиперзаряда фундаментальных частиц в рассматриваемой модели. Мы имеем соотношения

$$Q_q = Q_0 + \frac{1}{3}; \quad Y_q = Y_0 + \frac{2}{3};$$

$$Q_r = Q_0 + \frac{1}{3}; \quad Y_r = Y_0 - \frac{1}{3};$$

$$Q_s = Q_0 - \frac{2}{3}; \quad Y_s = Y_0 - \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$Q_q + Q_r + Q_s = 3Q;$$

$$Y_q + Y_r + Y_s = 3Y.$$

Отсюда следует, что системы ($q_\alpha r_\beta s_\gamma$) имеют такие же заряды и гиперзаряды, что и соответствующие системы кварков с дробными зарядами и барионным числом в модели с одним триплетом. Нетрудно увидеть, что барионные числа и изотопические спины соответствующих систем двух моделей также равны. Так, в модели с одним триплетом мы имеем следующее отождествление

$$\Delta^{++} = (t_p t_p t_p); \quad \Omega^- = (t_\Lambda t_\Lambda t_\Lambda);$$

$$Y^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} (t_p t_p t_\Lambda + t_p t_\Lambda t_p + t_\Lambda t_p t_p)$$

и т. д., а в модели с тремя триплетами

$$\Delta^+ = (q_1 r_1 s_1); \quad \Omega^- = (q_3 r_3 s_3);$$

$$Y^+ = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_1 r_1 s_3 + q_1 r_3 s_1 + q_3 r_1 s_1)$$

и т. д.

В рассматриваемой схеме с тремя фундаментальными триплетами полное вырождение по частицам в каждом триплете приводит к унитарной симметрии или, точнее, к симметрии $SU(3) \otimes SU(3) \otimes SU(3)$, а полное вырождение по всем девяти частицам соответствует симметрии $SU(9)$. Последней, по-видимому, не существует или она нарушается весьма сильно, так как в противном случае существовали бы частицы с ненулевыми суперзарядами z с массами порядка масс барионов и мезонов, причем частицы с $z \neq 0$ должны были бы рождаться в паре при столкновении нуклонов и мезонов достаточно высоких энергий.

Рассмотрим, наконец, модель с двумя триплетами q_α и r_α со спином $1/2$, предложенную Бакри, Нуитом и Ван Ховом. В этой модели существует также новое сохраняющееся квантовое число z . Квантовые числа фундаментальных частиц равны

	Q	Y	z	B	T_3	T
q_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_2	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
q_3	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	0	0
r_1	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
r_2	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
r_3	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	1	0	0

Нетрудно проверить, что в этой схеме мезоны могут быть отождествлены с состояниями систем $\widetilde{q^\alpha q_\beta}$ или $\widetilde{r^\alpha r_\beta}$, а барионы и барионные резонансы — систем $\widetilde{r^\alpha q_\beta q_\gamma}$. На основе этой модели Бакри, Нуит и Ван Хов предложили симплектическую симметрию $Sp(6)$, более широкую, чем унитарная симметрия.

Литература

Группа $SU(3)$ и ее представления

- Берестецкий В. Б. «Успехи физ. наук», **85**, 393 (1965).
 Behrends R. E., Dreitlein J. et al. Rev. Mod. Phys., **34**, 1 (1962).
 De Swart J. J. Rev. Mod. Phys., **35**, 916 (1963).
 Ikeda M., Ogawa S., Ohnuki Y. Prog. Theor. Phys., **22**, 715 (1959).
 Огневский В. И. Международная зимняя школа теоретической физики при Объединенном институте ядерных исследований. Дубна, 1964.
 Смородинский Я. А. «Успехи физ. наук», **84**, 3 (1964).

Классификация элементарных частиц и резонансов по неприводимым представлениям группы $SU(3)$

- Gell-Mann M. Phys. Rev., **125**, 1067 (1962).
 Glashow S. L., Sakurai J. J. Nuovo cimento, **26**, 622 (1962).
 Meshkov S., Levinson C. A., Lipkin H. J. Phys. Rev. Lett., **10**, 361 (1963).
 Néeman Y. Nucl. Phys., **26**, 222 (1961).

Массовая формула и смешивание

- Gell-Mann M. Phys. Rev., **125**, 1607 (1962).
 Боголюбов Н. Н. и др. Препринт ОИЯИ, Р. 2141, 1965.
 Владимирский В. В. В кн. XII Международная конференция по физике высоких энергий. Т. 1. М., Атомиздат, 1966, стр. 791.
 Bacry H., Nuyts J., Van Hove L. Phys. Lett., **9**, 279 (1964).
 Gell-Mann M., Phys. Lett., **8**, 214 (1964).
 Zweig G. Preprint CERN, 8182/TH. 401, 8419/TH. 412, 1964.
 Maki Z. Progr. Theor. Phys., **31**, 331 (1964).
 Nambu Y. Preprint EFINS-65-6, 1965.
 Okubo S. Progr. Theor. Phys., **27**, 949 (1962).
 Sakurai J. J. Phys. Rev. Lett., **9**, 472 (1962).
 Schwinger J. Phys. Rev., **135**, B816 (1964).
 Tarjanne P., Teplitz V. L. Phys. Rev. Lett., **11**, 447 (1963).
 Hara Y. Phys. Rev., **134**, B701 (1964).

Глава четвертая

Унитарная симметрия и сильные взаимодействия

§ 1. Трехлинейные лагранжианы и трехчастичные вершины

1.1. Трехлинейные лагранжианы взаимодействия

В теории изотопической инвариантности существуют соотношения между константами связи для частиц в одних и тех же изотопических мультиплеттах. Например, все константы связи π -мезонов с нуклонами выражаются через одну произвольную константу, и лагранжиан взаимодействия π -мезонов с нуклонами имеет вид [см. гл. 2, формулы (65) и (67)]

$$L_{\pi N N} = i \sqrt{2} g_{\pi N N} \pi_b^a \bar{N}^b N_a = i g_{\pi N V} \pi_i \bar{N} \tau_i N.$$

Аналогично в унитарной симметрии константы связи для всех частиц в одних и тех же унитарных мультиплеттах связаны друг с другом. В качестве примера рассмотрим трехлинейное взаимодействие октуплета псевдоскалярных мезонов с октуплетом барионов $\frac{1^+}{2}$. Этот лагранжиан является инвариантной линейной комбинацией произведений типа

$$\bar{B}_{\beta}^{\alpha} \gamma_5 B_{\gamma}^{\beta} P_{\sigma}^{\gamma},$$

где B — волновая функция барионов, \bar{B} — сопряженная к B волновая функция, а P — волновая функция псевдоскалярных мезонов. Как известно, для образования инвариантов из этих произведений необходимо провести суммирование по всем парам верхних и нижних индексов. Нетрудно увидеть, что существуют два различных способа суммирования, в результате которых получаем два независимых инварианта

$$\bar{B}_{\beta}^{\alpha} \gamma_5 B_{\gamma}^{\beta} P_{\alpha}^{\gamma} \pm \bar{B}_{\gamma}^{\beta} \gamma_5 B_{\beta}^{\alpha} P_{\alpha}^{\gamma}.$$

Таким образом, в унитарной симметрии трехлинейный лагранжиан взаимодействия октуплета псевдоскалярных мезонов с октуплетом барионов $\frac{1^+}{2}$ зависит от двух произвольных констант:

$$L_{PBB} = \frac{i}{\sqrt{2}} g^F [\bar{B}_\beta^\alpha \gamma_5 B_\gamma^\beta - \bar{B}_\gamma^\alpha \gamma_5 B_\beta^\alpha] P_\alpha^\gamma + \frac{i}{\sqrt{2}} g^D [\bar{B}_\gamma^\beta \gamma_5 B_\beta^\alpha + \bar{B}_\beta^\alpha \gamma_5 B_\gamma^\beta] P_\alpha^\gamma. \quad (1)$$

Как известно, для описания октуплетов псевдоскалярных мезонов и барионов $\frac{1^+}{2}$ можно пользоваться восьмимерными векторами B_i и P_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ вместо спиноров B_β^α и P_β^α [см. гл. 3, формулы (46) и (47)]

$$P_i = \frac{1}{\sqrt{2}} P_\beta^\alpha (\lambda_i)^\beta_\alpha, \quad B_i = \frac{1}{\sqrt{2}} B_\beta^\alpha (\lambda_i)^\beta_\alpha; \\ P_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)^\alpha_\beta P_i, \quad B_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)^\alpha_\beta B_i.$$

Преобразуем трехлинейный лагранжиан взаимодействия следующим образом:

$$L_{PBB} = -\frac{i}{4} g^F \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k \text{Sp}([\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k) + \frac{i}{4} g^D \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k \text{Sp}(\{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k).$$

Так как

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k, \quad \{\lambda_i, \lambda_j\} = 2d_{ijk} \lambda_k + \frac{4}{3} \delta_{ij}, \quad \text{Sp} \lambda_i \lambda_j = 2\delta_{ij},$$

то

$$\text{Sp}([\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k) = 4i f_{ijk}, \quad \text{Sp}(\{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k) = 4d_{ijk}.$$

Отсюда получаем

$$L_{PBB} = g^F f_{ijk} \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k + i g^D d_{ijk} \bar{B}_i \gamma_5 B_j P_k. \quad (2)$$

Напомним, что из двух трехмерных векторов группы $SU(2)$ можно образовать один вектор путем векторного умножения:

$$[\mathbf{AB}]_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k.$$

В случае восьмимерных векторов группы $SU(3)$ имеем иное положение: из двух восьмимерных векторов A_i и B_j

можно образовать два восьмимерных вектора двумя способами, в которых используются коэффициенты f_{ijk} или d_{ijk} :

$$[\mathbf{AB}]_i^F = f_{ijk}A_jB_k, \quad [\mathbf{AB}]_i^D = d_{ijk}A_jB_k.$$

В соответствии с названиями коэффициентов векторного умножения первый тип связи в формуле (2) называется типом F , а второй — типом D .

В теории изотопической инвариантности трехлинейный лагранжиан взаимодействия псевдоскалярных мезонов с барионами $\frac{1^+}{2}$ содержит 12 независимых членов и, следовательно, 12 произвольных констант (см. гл. 2, п. 1.2). В унитарной симметрии эти константы выражаются через две независимые константы g^F и g^D в формуле (1) или (2). Чтобы найти эти выражения, достаточно подставить в формулу (1) матрицы B_β^α , \bar{B}_β^α и P_β^α , данные в гл. 3 п. 2.2:

$$B_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda, \quad B_b^a = \Sigma_b^a + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda\delta_b^a, \quad B_a^3 = N_a,$$

$$B_3^a = \Xi^a = \varepsilon^{ab}\Xi_b;$$

$$P_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta, \quad P_b^a = \pi_b^a + \frac{1}{\sqrt{6}}\eta\delta_b^a, \quad P_a^3 = K_a,$$

$$P_3^a = \widetilde{K}^a = \varepsilon^{ab}\widetilde{K}_b.$$

Получим

$$\begin{aligned} L_{PVB} = & -i\sqrt{2}g^F\pi_a^c\bar{\Sigma}_c^b\gamma_5\Sigma_b^a + \frac{i}{\sqrt{2}}(g^D + g^F)\pi_a^c\bar{N}^a\gamma_5N_c + \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}(g^D - g^F)\pi_a^c\bar{\Xi}_c\gamma_5\Xi^a + \frac{i}{\sqrt{3}}g^D\pi_a^c[\bar{\Lambda}\gamma_5\Sigma_c^a + \bar{\Sigma}_c^a\gamma_5\Lambda] + \\ & + i\sqrt{\frac{2}{3}}g^D\eta\bar{\Sigma}_b^a\gamma_5\Sigma_b^a + \frac{i}{2\sqrt{3}}(3g^F - g^D)\eta\bar{N}^a\gamma_5N_a - \\ & - \frac{i}{2\sqrt{3}}(3g^F + g^D)\eta\bar{\Xi}_a\gamma_5\Xi^a - i\sqrt{\frac{2}{3}}g^D\eta\bar{\Lambda}\gamma_5\Lambda + \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}(g^D + g^F)K_a\bar{\Sigma}_b^a\gamma_5\Xi^b + \frac{i}{\sqrt{2}}(g^D + g^F)\widetilde{K}^a\bar{\Xi}_b\gamma_5\Sigma_b^a + \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}(g^D - g^F)K_a\bar{N}^b\gamma_5\Sigma_b^a + \frac{i}{\sqrt{2}}(g^D - g^F)\widetilde{K}^a\bar{\Sigma}_a^b\gamma_5N_b + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D) K_a \bar{\Lambda} \gamma_5 \Xi^a + \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D) \tilde{K}^a \bar{\Xi} \gamma_5 \Lambda - \\
& - \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D) K_a \bar{N}^u \gamma_5 \Lambda - \frac{i}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D) \tilde{K}^a \bar{\Lambda} \gamma_5 N_a.
\end{aligned} \tag{3}$$

Сравнивая это выражение с определениями констант в теории изотопической инвариантности (см. гл. 2, п. 2.2), получим выражения последних констант через g^F и g^D :

$$\left. \begin{aligned}
g_{\pi NN} &= \frac{1}{2} (g^D + g^F); & g_{\pi \Xi \Xi} &= \frac{1}{2} (g^D - g^F); \\
g_{\gamma NN} &= + \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D); & g_{\gamma \Xi \Xi} &= - \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D); \\
g_{\pi \Sigma \Sigma} &= -g^F; & g_{\gamma \Sigma \Sigma} &= \sqrt{\frac{2}{3}} g^D; \\
g_{\gamma \Lambda \Lambda} &= - \sqrt{\frac{2}{3}} g^D; & g_{\pi \Sigma \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}} g^D; \\
g_{K \Sigma N} &= \frac{1}{2} (g^D - g^F); & g_{K \Sigma \Xi} &= \frac{1}{2} (g^D + g^F); \\
g_{K \Lambda N} &= - \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F + g^D); & g_{K \Lambda \Xi} &= + \frac{1}{2\sqrt{3}} (3g^F - g^D).
\end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Аналогично для трехлинейного взаимодействия октуплета и синглета векторных мезонов с октуплетом барионов

нов $\frac{1^+}{2}$

$$\begin{aligned}
L_{VBB} &= \frac{i}{\sqrt{2}} f^F [\bar{B}_\beta^\alpha \gamma_\mu B_\nu^\beta - \bar{B}_\nu^\beta \gamma_\mu B_\beta^\alpha] (V_\mu)_\alpha^\nu + \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}} f^D [\bar{B}_\nu^\beta \gamma_\mu \bar{B}_\beta^\alpha + \bar{B}_\beta^\alpha \gamma_\mu B_\nu^\beta] (V_\mu)_\alpha^\nu + \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}} f^S \bar{B}_\beta^\alpha \gamma_\mu B_\alpha^\beta \omega_\mu,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $(V_\mu)_\beta^\alpha$ и ω_μ^0 — волновые функции октуплета и синглета векторных мезонов. Отсюда получаем, учитывая

смешивание состояний φ^0 - и ω^0 -мезонов:

$$\begin{aligned}
 g_{\rho NN} &= \frac{1}{2} (f^D + f^F); & g_{\rho \Xi \Xi} &= \frac{1}{2} (f^D - f^F); \\
 g_{\omega NN} &= \frac{1}{2} \cos \theta f^S - \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \theta (3f^F - f^D); \\
 g_{\rho \Xi \Xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S + \frac{1}{2\sqrt{3}} \sin \theta (3f^F + f^D); \\
 g_{\varphi NN} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \theta (3f^F - f^D); \\
 g_{\varphi \Xi \Xi} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S - \frac{1}{2\sqrt{3}} \cos \theta (3f^F + f^D); \\
 g_{\rho \Sigma \Sigma} &= -f^F; & g_{\rho \Sigma \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f^D; \\
 g_{\omega \Sigma \Sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta f^D; \\
 g_{\varphi \Sigma \Sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S + \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta f^D; \\
 g_{\omega \Lambda \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta f^S + \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta f^D; \\
 g_{\varphi \Lambda \Lambda} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta f^S - \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta f^D; \\
 g_{K^* \Sigma N} &= \frac{1}{2} (f^D - f^F); & g_{K^* \Xi \Xi} &= \frac{1}{2} (f^D + f^F); \\
 g_{K^* \Lambda N} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} (3f^F + f^D); & g_{K^* \Lambda \Xi} &= +\frac{1}{2\sqrt{3}} (3f^F - f^D).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим, наконец, следствия R -инвариантности лагранжиана взаимодействия. Так как векторные мезоны из октуплета могут распадаться на два псевдоскалярных мезона, то их G' -четность равна $+1$. Следовательно, при R -отражении их волновые функции преобразуются:

$$RV_{\beta}^{\alpha}R^{-1} = -V_{\alpha}^{\beta}.$$

С другой стороны, при R -отражении билинейные комбинации волновых функций в лагранжиане (5) преобразу-

ются следующим образом:

$$R (\bar{B}_\beta^\alpha \gamma_\mu B_\gamma^\beta \pm \bar{B}_\gamma^\beta \gamma_\mu B_\beta^\alpha) R^{-1} = \pm (\bar{B}_\beta^\alpha \gamma_\mu B_\alpha^\beta \pm \bar{B}_\alpha^\beta \gamma_\mu B_\beta^\alpha).$$

Отсюда следует, что лагранжиан (5) R -инвариантен только при $f^D = 0$. Аналогично в зависимости от G -четности псевдоскалярных мезонов одна из констант g^F и g^D в формуле (1) равна нулю, если этот лагранжиан инвариантен относительно R -преобразования. Опыт показывает, что обе эти константы отличны от нуля, причем $g^D/g^F \approx 3/2$. Это означает, по-видимому, что в действительности R -инвариантность не имеет места. Другим аргументом в пользу этого заключения является то, что R -инвариантность требует, например, существования сопряженного декуплета $D(3, 0)$, так как один из этих мультиплетов переходит в другой при R -преобразовании, а такого сопряженного декуплета до сих пор еще не было обнаружено.

1.2. Соотношения между константами распада резонансов

Применим теперь развитый в п. 1.1 метод к изучению соотношений между константами распадов мезонных и барионных резонансов. Рассмотрим сначала распады векторного мезона ω^0 , являющегося унитарным синглетом, на два псевдоскалярных мезона из октуплета. Матричный элемент, инвариантный относительно группы $SU(3)$, имеет следующую унитарную структуру:

$$M_{\omega^0 \rightarrow PP} = f \omega^0(p) \bar{P}_\beta^\alpha(q_1) \bar{P}_\alpha^\beta(q_2) = f \omega^0(p) \text{Sp} [\bar{P}(q_1) \bar{P}(q_2)], \quad (7)$$

где q_1 и q_2 — импульсы псевдоскалярных мезонов.

При зарядовом сопряжении C этот матричный элемент меняет знак, так как

$$C \omega^0 C^{-1} = -\omega^0, \quad C P_\beta^\alpha C^{-1} = P_\alpha^\beta$$

(см. гл. 3, п. 2.2). Следовательно, требование инвариантности S -матрицы относительно зарядового сопряжения, т. е. сохранение C -четности, запрещает распад векторного синглета ω^0 на два псевдоскалярных мезона. Такой же запрет дает требование статистики Бозе: полная волновая функция одинаковых бозонов симметрична относительно перестановок этих частиц. Так как два псевдоскалярных мезона, рождающихся в распаде векторного ме-

эти, находясь в P -состоянии и пространственная часть их волновой функции антисимметрична относительно перестановки псевдоскалярных мезонов, то унитарная часть волновой функции должна быть также антисимметричной. С другой стороны, унитарная часть [см. формулу (7)] матричного элемента распада $\omega^0 \rightarrow P + \bar{P}$ симметрична относительно перестановки псевдоскалярных мезонов ($\text{Sp}[\bar{P}(q_1)\bar{P}(q_2)] = \text{Sp}[\bar{P}(q_2)\bar{P}(q_1)]$) в противоречии с выводом о том, что унитарная часть волновой функции антисимметрична. Таким образом, требование статистики Бозе также запрещает распады синглета на два псевдоскалярных мезона

$$M_{\omega^0 \rightarrow PP} = 0. \quad (8)$$

Аналогично из C -инвариантности или из требования статистики Бозе следует, что в распаде октуплета векторных мезонов на два псевдоскалярных мезона из октуплета дает вклад только связь типа F , а константа связи типа D равна нулю, т. е.

$$\begin{aligned} M_{V \rightarrow PP} &= gV_{\beta}^{\alpha}(p) [\bar{P}_{\alpha}^{\gamma}(q_1)\bar{P}_{\gamma}^{\beta}(q_2) - \bar{P}_{\alpha}^{\beta}(q_2)\bar{P}_{\gamma}^{\gamma}(q_1)] = \\ &= g\text{Sp}\{V(p) [\bar{P}(q_1)\bar{P}(q_2) - \bar{P}(q_2)\bar{P}(q_1)]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая смешивание между φ^0 - и ω^0 -мезонами, получаем отсюда константы связи для конкретных распадов

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} &= \sqrt{2}g, \quad g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \eta} = 0; \\ g_{K^{*+} \rightarrow K^+ \pi^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}}g, \quad g_{\varphi \rightarrow K^+ K^-} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta g, \end{aligned} \right\} (10)$$

где θ — угол $\varphi\omega$ -смешивания. Таким образом, в унитарной симметрии константы взаимодействия для распадов векторных мезонов на пары псевдоскалярных мезонов связаны соотношениями

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} : g_{K^{*+} \rightarrow K^+ \pi^0} : g_{\varphi \rightarrow K^+ K^-} &= 1 : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2}; \\ g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \eta} &= 0. \end{aligned} \right\} (11)$$

Соотношения между константами процессов в соотношениях (10) и константами других наблюдаемых распадов можно получить из изотопической инвариантности. Если бы массы всех частиц в одном унитарном мультиплете были одинаковы, то из соотношений (11) можно было бы

сразу получить соотношения между вероятностями соответствующих распадов. Однако из-за нарушения симметрии массы частиц в каждом мультиплете не равны друг другу, и необходимо учесть разницу кинематических факторов в выражениях вероятностей. Дальше мы получим соотношения между вероятностями в предположении, что для констант связи имеют место соотношения, вытекающие из унитарной симметрии.

В отличие от истинно нейтральных векторных мезонов истинно нейтральные мезоны 2^+ имеют C -четность $+1$. Поэтому C -инвариантность не запрещает распад мезона 2^+ , который является унитарным синглетом и обозначается ω'^0 , на два псевдоскалярных мезона из октуплета. Эти распады также не запрещены требованием статистики Бозе, поскольку рождающиеся псевдоскалярные мезоны находятся в D -состоянии, и пространственная часть волновой функции двух псевдоскалярных мезонов симметрична. Матричный элемент рассматриваемых распадов имеет следующую унитарную структуру:

$$M_{\omega'^0 \rightarrow PP} = g\omega'^0(p) \text{Sp} [\bar{P}(q_1) \bar{P}(q_2)]. \quad (12)$$

Что касается распадов октуплета мезона 2^+ на пары псевдоскалярных мезонов из октуплета, то из C -инвариантности или из требования статистики Бозе следует, что только связь типа D дает вклад

$$\begin{aligned} M_{T \rightarrow FP} &= iT_\beta^z(p) [\bar{P}_\alpha^\nu(q_1) \bar{P}_\nu^\beta(q_2) + \bar{P}_\alpha^\nu(q_2) \bar{P}_\nu^\beta(q_1)] = \\ &= f \text{Sp} \{T(p) [\bar{P}(q_1) \bar{P}(q_2) + \bar{P}(q_2) \bar{P}(q_1)]\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Как и в гл. 3, частицы из октуплета мезонов 2^+ обозначим ρ' , K' , \tilde{K}' и ϕ'^0 , а смешанные состояния ϕ'^0 и ω'^0 — ϕ' и ω' . Учитывая смешивание между ϕ'^0 и ω'^0 , из соотношений (12) и (13) получим выражения для констант связи конкретных распадов через g и f :

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho'^+ \rightarrow K^0 \tilde{K}^0} &= f; \quad g_{\rho'^+ \rightarrow \pi^+ \eta} \sqrt{\frac{2}{3}} f; \\ g_{K'^+ \rightarrow K^0 \pi^+} &= f; \quad g_{K'^+ \rightarrow K^+ \eta} = -\frac{1}{\sqrt{6}} f; \\ g_{\phi'^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0} &= \sqrt{\frac{2}{3}} f \cos \theta' - g \sin \theta'; \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 g_{\omega' \rightarrow \pi^+ \pi^-} &= \sqrt{\frac{2}{3}} f \sin \theta' + g \cos \theta'; \\
 g_{\varphi' \rightarrow K^+ K^-} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} f \cos \theta' - g \sin \theta'; \\
 g_{\omega' \rightarrow K^+ K^-} &= -\frac{1}{\sqrt{6}} f \sin \theta' + g \cos \theta'; \\
 g_{\varphi' \rightarrow \gamma \gamma} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} f \cos \theta' - g \sin \theta'; \\
 g_{\omega' \rightarrow \gamma \gamma} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} f \sin \theta' + g \cos \theta';
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где θ' — угол смешивания между φ'^0 - и ω'^0 -мезонами. Таким образом, имеются следующие соотношения между константами распадов мезонов 2^+ на два псевдоскалярных мезона:

$$\begin{aligned}
 g_{\rho'^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0} : g_{\rho'^+ \rightarrow \pi^+ \eta} : g_{K'^+ \rightarrow K^0 \pi^+} : g_{K'^+ \rightarrow K^+ \eta} &= \\
 &= 1 : \sqrt{\frac{2}{3}} : 1 : -\frac{1}{\sqrt{6}}; \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 3g_{\varphi' \rightarrow \gamma \eta} + g_{\varphi' \rightarrow \pi^+ \pi^-} &= 4g_{\varphi' \rightarrow K^+ K^-}; \\
 3g_{\omega' \rightarrow \gamma \eta} + g_{\omega' \rightarrow \pi^+ \pi^-} &= 4g_{\omega' \rightarrow K^+ K^-};
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$|g_{\varphi' \rightarrow \pi^+ \pi^-}|^2 + |g_{\omega' \rightarrow \pi^+ \pi^-}|^2 = |g_{\varphi' \rightarrow \gamma \eta}|^2 + |g_{\omega' \rightarrow \gamma \eta}|^2; \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 |g_{\varphi' \rightarrow \pi^+ \pi^-}|^2 + |g_{\omega' \rightarrow \pi^+ \pi^-}|^2 &= |g_{\varphi' \rightarrow K^+ K^-}|^2 + \\
 &+ |g_{\omega' \rightarrow K^+ K^-}|^2 + \frac{1}{2} |g_{\rho'^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0}|^2, \quad (18)
 \end{aligned}$$

не считая изотопических соотношений. В частном случае, когда $\cos \theta' = \sqrt{2/3}$, имеются еще два простых соотношения:

$$g_{\omega' \rightarrow \pi^+ \pi^-} : g_{\varphi' \rightarrow K^+ K^-} = -\sqrt{2}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 g_{\omega' \rightarrow \pi^+ \pi^-} - g_{\omega' \rightarrow \gamma \eta} &= \frac{2\sqrt{2}}{3} g_{\rho'^+ \rightarrow K^+ \tilde{K}^0} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (g_{\varphi' \rightarrow \pi^+ \pi^-} - g_{\varphi' \rightarrow \gamma \eta}). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Из выражений (15) — (20) можно получить соотношений между вероятностями распада, учитывая разницу фазовых объемов различных распадов.

Мезоны 2^+ могут распадаться на псевдоскалярный и векторный мезоны. Из C -инвариантности и инвариантности относительно группы $SU(3)$ следует, что матричные элементы этих распадов:

$$M_{\omega' \rightarrow \omega^0 P} = 0; \quad (21)$$

$$M_{\omega' \rightarrow VP} = 0; \quad (22)$$

$$M_{T \rightarrow \omega^0 P} = 0; \quad (23)$$

$$M_{T \rightarrow VP} = gT_{\beta}^{\alpha} [\bar{V}_{\alpha}^{\gamma} \bar{P}_{\gamma}^{\beta} - \bar{V}_{\gamma}^{\beta} \bar{P}_{\alpha}^{\gamma}]. \quad (24)$$

В данном случае константы взаимодействия для всех распадов выражаются через одну произвольную константу:

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho' \rightarrow \rho + \pi^0} &= \sqrt{2} g; & g_{K' \rightarrow K + \rho^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g; \\ g_{\rho' \rightarrow \rho + \eta} &= 0; & g_{\rho' \rightarrow \omega \pi^+} &= 0; \\ g_{\varphi' \rightarrow K^+ + K^-} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \cos \theta'; & g_{\rho' \rightarrow \varphi \pi^+} &= 0; \\ g_{K' \rightarrow K^+ + \pi^0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g; & g_{\omega' \rightarrow \rho + \pi^-} &= 0; \\ g_{\varphi' \rightarrow \omega \eta} &= 0; & g_{K' \rightarrow K + \omega} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta g; \\ g_{\varphi' \rightarrow \rho + \pi^-} &= 0; & g_{\omega' \rightarrow \omega \eta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Таким образом, получим следующие соотношения между константами распадов мезонов 2^+ на векторный и псевдоскалярный мезоны:

$$\begin{aligned} g_{\rho' \rightarrow \rho + \pi^0} : g_{K' \rightarrow K^+ + \pi^0} : g_{K' \rightarrow K + \rho^0} : g_{K' \rightarrow K + \omega} : g_{\varphi' \rightarrow K^+ + K^-} = \\ = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta' : \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta', \end{aligned} \quad (26)$$

не считая изотопических соотношений. Отметим, что равенство нулю ряда констант в формуле (25) является следствием сохранения G -четности.

Рассмотрим теперь распады декуплета барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$ на октуплет барионов $\frac{1^+}{2}$ и октуплет псевдоскалярных мезонов. Матричные элементы этих распадов имеют следующую унитарную структуру:

$$M_{D \rightarrow BP} = g \bar{B}_i^a \bar{P}_j^b D_{\alpha\gamma\sigma} \epsilon^{\beta\delta\sigma}. \quad (27)$$

Для констант связи конкретных процессов с точностью до знака

$$\left. \begin{aligned} g_{\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+} &= g; & g_{\Delta^{++} \rightarrow K^+ \Sigma^+} &= g; \\ g_{Y^{*+} \rightarrow \Lambda\pi^+} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g; & g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0} &= \frac{1}{\sqrt{6}} g; \\ g_{Y^{*+} \rightarrow \Xi^0 K^+} &= \frac{1}{\sqrt{3}} g; & g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^0 \pi^-} &= \frac{1}{\sqrt{3}} g; \\ g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- \eta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g; & g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Sigma^- \tilde{K}^0} &= \frac{1}{\sqrt{3}} g; \\ g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Lambda K^-} &= \frac{1}{\sqrt{2}} g; & g_{\Omega^- \rightarrow \Xi^- \tilde{K}^0} &= g. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Аналогичные выражения также имеются для констант распадов декуплета барионных резонансов $\frac{7^+}{2}$ на октуплет барионов $\frac{1^+}{2}$ и октуплет псевдоскалярных мезонов.

Из этих выражений сразу вытекают соотношения между константами процессов распада. Так, между константами наблюдаемых распадов барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} g_{\Delta^{++} \rightarrow p\pi^+} : g_{Y^{*+} \rightarrow \Lambda\pi^+} : g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \pi^0} : g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^- \pi^+} &= \\ = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{6}} : \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Остальные соотношения между константами наблюдаемых распадов являются следствиями изотопической инвариантности.

В предыдущей главе мы обсудили возможность существования октуплетов барионных резонансов. Частицы в этих октуплетах обозначим N' , Λ' , Σ' и Ξ' . Матричный элемент распада каждого из этих октуплетов на октуп-

лет барионов $\frac{1^+}{2}$ и оккуплет псевдоскалярных мезонов содержит две произвольные константы:

$$M_{B' \rightarrow BP} = g_1 \bar{P}_\beta^\alpha \bar{B}_\alpha^\gamma B_\gamma^\beta + g_2 \bar{P}_\beta^\alpha \bar{B}_\gamma^\beta B_\alpha^\gamma. \quad (30)$$

Подставив в формулу (30) матрицы \bar{P}_β^α , \bar{B}_β^α и \bar{B}'_β^α , данные в гл. 3 (п. 2.2), получим соотношения между константами конкретных процессов:

$$g_{\Sigma' \rightarrow \Sigma \eta} = g_{\Sigma' \rightarrow \Lambda \pi^+} = g_{\Lambda' \rightarrow \Sigma \pi^+} = -g_{\Lambda' \rightarrow \Lambda \eta}; \quad (31)$$

$$g_{\Xi' \rightarrow \Xi \pi^+} = g_{\Sigma' \rightarrow \rho K^0}; \quad (32)$$

$$g_{\Xi' \rightarrow \Sigma \tilde{K}^0} = g_{\rho' \rightarrow n \pi^+}; \quad (33)$$

$$g_{\Xi' \rightarrow \Lambda K^-} = g_{\rho' \rightarrow \rho \eta}. \quad (34)$$

Наконец, для констант распадов унитарного синглета Y^0 получим соотношения

$$g_{Y^0 \rightarrow \Sigma \pi^-} = g_{Y^0 \rightarrow \rho K^-} = g_{Y^0 \rightarrow \Lambda \eta}. \quad (35)$$

Аналогичные соотношения также имеют место для распадов $\Lambda \eta$ -резонанса, если последний — унитарный синглет.

1.3. Соотношения между вероятностями

Чтобы получить соотношения между вероятностями распадов, недостаточно знать соотношения между константами, поскольку кинематические факторы в выражениях вероятностей зависят от масс частиц, а частицы в каждом унитарном мультиплете в действительности имеют разные массы. Иначе говоря, для каждого типа распада необходимо иметь выражение вероятности через константу связи и массы распадающейся и рождающейся частиц.

Рассмотрим матричные элементы M и вероятности W типов распада, (см. п. 4.2).

Распад $1^- \rightarrow 0^- + 0^-$

$$M = g_i (q_1 - q_2)_\mu \bar{\varphi}(q_1) \bar{\varphi}(q_2) V_\mu(p),$$

где $\varphi(q_i)$ и q_i — волновые функции и импульсы псевдоскалярных мезонов; $V_\mu(p)$ и p — волновая функция и импульс векторного мезона;

$$W = \frac{|g_i|^2}{6\pi M^2} |\mathbf{k}|^3, \quad (36)$$

где M — масса векторного мезона; m_i — массы псевдоскалярных мезонов; \mathbf{k} — трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс

$$|\mathbf{k}| = \frac{M}{2} \sqrt{1 - 2 \frac{m_1^2 + m_2^2}{M^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{M^4}}.$$

Распад $2^+ \rightarrow 0^- + 0^-$

$$M = g_i (q_1 - q_2)_\mu (q_1 - q_2)_\nu \bar{\varphi}(q_1) \bar{\varphi}(q_2) T_{\mu\nu}(p),$$

где $T_{\mu\nu}(p)$ — волновая функция мезона 2^+ с импульсом p ;

$$W = \frac{4}{15\pi} \frac{|g_i|^2}{M^2} |\mathbf{k}|^5, \quad (37)$$

где M — масса мезона 2^+ , \mathbf{k} — трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс.

Распад $2^+ \rightarrow 1^- + 0^-$

$$M = g_i \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} (q_1 - q_2)_\mu p_\nu \bar{V}_\sigma(q_1) \bar{\varphi}(q_2) T_{\rho\tau}(p) (q_1 - q_2)_\tau,$$

где $T_{\rho\tau}(p)$, $V_\sigma(q_1)$ и $\varphi(q_2)$ — волновые функции мезонов 2^+ , 1^- и 0^- с импульсами p , q_1 и q_2 соответственно;

$$W = \frac{2}{5\pi} |g_i|^2 |\mathbf{k}|^5, \quad (38)$$

где M , m_1 и m_2 — массы мезонов 2^+ , 1^- и 0^- соответственно; \mathbf{k} — трехмерный импульс рождающихся частиц в системе центра масс.

Распад $\frac{3^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$

$$M = g_i \bar{u}(p_2) u_\mu(p_1) q_\mu \bar{\varphi}(q),$$

где $u_\mu(p_1)$, $u(p_2)$ и $\varphi(q)$ — волновые функции барионов $\frac{3^+}{2}$, $\frac{1^+}{2}$ и мезона 0^- с импульсами p_1 , p_2 и q соответственно;

$$W = \frac{|g_i|^2}{24\pi} \frac{[(M_1 + M_2)^2 - m^2]}{M_1^2} |\mathbf{k}|^3, \quad (39)$$

где M_1 , M_2 и m — массы барионов $\frac{3^+}{2}$, $\frac{1^+}{2}$ и мезона 0^- соответственно; \mathbf{k} — трехмерный импульс рождающихся

частиц в системе центра масс.

$$\text{Распад } \frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$$

$$\left. \begin{aligned} M &= g_i \bar{u}(p_2) \gamma_5 u_\mu(p_1) q_\mu \bar{\varphi}(q); \\ W &= \frac{|g_i|^2}{24\pi} \frac{[(M_1 - M_2)^2 - m^2]}{M_1^2} |k|^3. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и в предыдущем случае.

$$\text{Распад } \frac{1^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$$

$$\left. \begin{aligned} M &= g_i \bar{u}(p_2) u(p_1) \varphi(q); \\ W &= \frac{|g_i|^2}{8\pi} \frac{(M_1 + M_2)^2 - m^2}{M_1^2} |k|. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\text{Распад } \frac{5^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$$

$$\left. \begin{aligned} M &= g_i \bar{u}(p_2) \gamma_5 u_{\mu\nu}(p_1) \varphi(q) q_\mu q_\nu; \\ W &= \frac{|g_i|^2}{40\pi} \frac{(M_1 - M_2)^2 - m^2}{M_1^2} |k|^5. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\text{Распад } \frac{7^+}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$$

$$\left. \begin{aligned} M &= g_i \bar{u}(p_2) u_{\mu\nu\sigma}(p_1) \varphi(q) q_\mu q_\nu q_\sigma; \\ W &= \frac{|g_i|^2}{140\pi} \frac{(M_1 + M_2)^2 - m^2}{M_1^2} |k|^7. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

На основе формул для вероятностей (36) — (43) можно получить соотношения между вероятностями распадов, рассмотренных в предыдущем разделе, в предположении о том, что для констант связи имеют место соотношения, являющиеся следствиями унитарной симметрии. Отметим, что в случае, когда для одной частицы существуют разные изотопические каналы распада, необходимо сложить вероятности всех соответствующих распадов. Например,

$$\begin{aligned} W(Y^* \rightarrow \Sigma\pi) &= W(Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+\pi^0) + W(Y^{*+} \rightarrow \Sigma^0\pi^+) = \\ &= W(Y^{*0} \rightarrow \Sigma^+\pi^-) + W(Y^{*0} \rightarrow \Sigma^0\pi^0) + W(Y^{*0} \rightarrow \Sigma^-\pi^+). \end{aligned}$$

Таблица 1

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\rho \rightarrow \pi\eta)}{W(\rho \rightarrow 2\pi)}$	0	—
$\frac{W(K^* \rightarrow K\pi)}{W(\rho \rightarrow 2\pi)}$	0,28	$0,47 \pm 0,03$
$\frac{W(\varphi \rightarrow K\tilde{K})}{W(\rho \rightarrow 2\pi)}$	0,022	$0,023 \pm 0,008$

Таблица 2

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\rho' \rightarrow \pi\eta)}{W(\rho' \rightarrow K\tilde{K})}$	1,83	$0,83 \pm 0,5$
$\frac{W(K' \rightarrow K\eta)}{W(\rho' \rightarrow K\tilde{K})}$	0,25	<1
$\frac{W(K' \rightarrow K\pi)}{W(\rho' \rightarrow K\tilde{K})}$	7,5	6 ± 5
$\frac{W(\varphi' \rightarrow 2\pi) + 1,9W(\omega' \rightarrow 2\pi)}{W(\varphi' \rightarrow 2\eta) + 1,2W(\omega' \rightarrow 2\eta)}$	17	—
$\frac{W(\varphi' \rightarrow 2\pi) + 1,9W(\omega' \rightarrow 2\pi)}{W(\varphi' \rightarrow K\tilde{K}) + 5,4W(\omega' \rightarrow K\tilde{K}) + 6,2W(\rho' \rightarrow K\tilde{K})}$	2,7	—

Таблица 3

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(K' \rightarrow K^*\pi)}{W(\rho' \rightarrow \rho\pi)}$	0,37	$0,63 \pm 0,3$
$\frac{W(K' \rightarrow K\rho)}{W(\rho' \rightarrow \rho\pi)}$	0,115	$0,20 \pm 0,09$
$\frac{W(K' \rightarrow \omega K)}{W(\rho' \rightarrow \rho\pi)}$	0,035	$0,10 \pm 0,07$
$\frac{W(\varphi' \rightarrow K^*K)}{W(\rho' \rightarrow \rho\pi)}$	0,0037	—

Таблица 4

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(Y^* \rightarrow \Sigma\pi)}{W(\Delta \rightarrow N\pi)}$	0,043	$0,02 \pm 0,01$
$\frac{W(Y^* \rightarrow \Lambda\pi)}{W(\Delta \rightarrow N\pi)}$	0,355	$0,40 \pm 0,05$
$\frac{W(\Xi^* \rightarrow \Xi\pi)}{W(\Delta \rightarrow N\pi)}$	0,08	$0,06 \pm 0,02$

Таблица 5

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\Lambda' \rightarrow \Sigma\pi)}{W(\Sigma' \rightarrow \Lambda\pi)}$	1,5	—
$\frac{W(\Lambda' \rightarrow \Lambda\eta)}{W(\Sigma' \rightarrow \Lambda\pi)}$	0,0023	—
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Xi\pi)}{W(\Sigma' \rightarrow N\bar{K})}$	1,32	$0,78 \pm 0,07$
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Sigma\bar{K})}{W(N' \rightarrow N\pi)}$	0,106	$0,080 \pm 0,007$
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Lambda\bar{K})}{W(N' \rightarrow N\eta)}$	182	—
$\frac{W(\Lambda' \rightarrow N\bar{K})}{W(\Lambda' \rightarrow \Sigma\pi)}$	0,5	$0,55 \pm 0,07$

Таблица 6

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
$\frac{W(\Sigma' \rightarrow \Lambda\pi)}{W(\Lambda' \rightarrow \Sigma\pi)}$	3,7	$0,30 \pm 0,04$
$\frac{W(\Xi' \rightarrow \Xi\pi)}{W(\Sigma' \rightarrow N\bar{K})}$	2,4	—

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Отношение вероятностей	Теоретическое значение
$\frac{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\eta\right)}{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\pi\right)}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$\frac{W\left(\Xi\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\pi\right)}{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}$	0,76
$\frac{W\left(\Lambda\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\pi\right)}{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\pi\right)}$		$\frac{W\left(\Xi\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\tilde{K}\right)}{W\left(N\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	
$\frac{W\left(\Lambda\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\eta\right)}{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\pi\right)}$	1,52	$\frac{W\left(\Xi\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\tilde{K}\right)}{W\left(N\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow N\eta\right)}$	0,11
$\frac{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\pi\right)}{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\eta\right)}$	0,04		4,63
$\frac{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\pi\right)}{W\left(\Sigma\left(\frac{5^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\eta\right)}$			

Полученные соотношения между вероятностями для четырех первых типов распада даны в табл. 1—4. В табл. 5 даны соотношения между вероятностями распадов $\frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$ в случае, когда октуплет барионов $\frac{3^-}{2}$ состоит из частиц с массами

$$M_N\left(\frac{3^-}{2}\right) = 1512 \text{ Мэв}, \quad M_\Sigma\left(\frac{3^-}{2}\right) = 1660 \text{ Мэв},$$

$$M_\Lambda\left(\frac{3^-}{2}\right) = 1668 \text{ Мэв}, \quad M_\Xi\left(\frac{3^-}{2}\right) = 1820 \text{ Мэв}, \text{ а барионный}$$

резонанс с $T = 0$, $Y = 0$ и массой 1520 Мэв является синглетом, который обозначим $Y^0\left(\frac{3^-}{2}\right)$. В табл. 6 даны соотношения между вероятностями распадов $\frac{3^-}{2} \rightarrow \frac{1^+}{2} + 0^-$ другом случае, когда октуплет образуют частицы с массами

Таблица 8

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Отношение вероятностей	Теоретическое значение
$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma K\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	6,87 · 10 ⁻³	$\frac{W\left(\Xi\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\pi\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	0,17
$\frac{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\pi\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$		$\frac{W\left(\Xi\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\eta\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	
$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\pi\right)}$	0,52	$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(\Xi\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\tilde{K}\right)}$	0,02
$\frac{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\pi\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$		$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(\Xi\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Lambda\tilde{K}\right)}$	
$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\eta\right)}$	0,20	$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(\Omega^-\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\tilde{K}\right)}$	0,11
$\frac{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Sigma\eta\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$		$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	
$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}$	0,02	$\frac{W\left(\Omega^-\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\tilde{K}\right)}{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	0,21
$\frac{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$		$\frac{W\left(\Omega^-\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi\tilde{K}\right)}{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	
$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi K\right)}$	0,28	$\frac{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	1,54
$\frac{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow \Xi K\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$		$\frac{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(\Lambda\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$	
$\frac{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}$	3,54 · 10 ⁻³		
$\frac{W\left(Y\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}{W\left(\Delta\left(\frac{7^+}{2}\right) \rightarrow N\pi\right)}$			

Таблица 9

Отношение вероятностей	Теоретическое значение	Отношение вероятностей	Теоретическое значение
$\frac{W\left(Y\left(\frac{1^-}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}{W\left(Y\left(\frac{1^-}{2}\right) \rightarrow \Lambda\eta\right)}$	11,2	$\frac{W\left(Y\left(\frac{1^-}{2}\right) \rightarrow \Sigma\pi\right)}{W\left(Y\left(\frac{1^-}{2}\right) \rightarrow \Lambda\eta\right)}$	19,9
$\frac{W\left(Y\left(\frac{1^-}{2}\right) \rightarrow \Lambda\eta\right)}{W\left(Y\left(\frac{1^-}{2}\right) \rightarrow N\tilde{K}\right)}$			

$$M_{\Lambda} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1512 \text{ Мэв}, \quad M_{\Sigma} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1660 \text{ Мэв};$$

$$M_{\Lambda} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1520 \text{ Мэв}, \quad M_{\Xi} \left(\frac{3^-}{2} \right) = 1598 \text{ Мэв}.$$

В табл. 7 и 8 приведены соотношения между вероятностями распадов барионов $\frac{5^+}{2}$ и $\frac{7^+}{2}$ соответственно, а в табл. 9 между вероятностями распадов $\Lambda\eta$ -резонанса в том случае, когда этот резонанс является синглетом $Y^0 \left(\frac{1^-}{2} \right)$.

1.4. Следствия сохранения U - и V -спинов

Группа унитарной симметрии содержит три подгруппы $SU(2)$, которые мы назвали группами T -, U - и V -спинов (см. гл. 3, п. 1.4). Требование сохранения T -спина, т. е. инвариантность относительно T -подгруппы, приводит к ряду изотопических соотношений между амплитудами процессов распада, рассеяния и рождения частиц. Аналогично сохранение U - или V -спинов должно привести к новым соотношениям, не совпадающим со следствиями изотопической инвариантности. Разумеется, все соотношения, являющиеся следствиями сохранения T -, U - или V -спинов, должны быть получены при помощи развитого выше метода. Однако при изучении конкретных процессов иногда достаточно рассмотреть следствия сохранения U - или V -спина. В таком случае удобно рассмотреть волновые функции частиц как спиноры U - или V -подгруппы и применить технику группы $SU(2)$. Тогда имеем следующие U -дублеты:

$$\begin{pmatrix} \rho'^+ \\ \tilde{K}'^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \tilde{K}^0 \end{pmatrix}$$

с $U = 1/2$ и U -триплет

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ \frac{1}{2} \pi + \frac{\sqrt{3}}{2} \eta \\ K^- \end{pmatrix}$$

с $U = 1$; по аналогии с T -дублетами

$$\begin{pmatrix} K'^+ \\ K'^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}$$

с $T = 1/2$ и T -триплетом

$$\begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}$$

с $T = 1$. Из сохранения T -спина (вернее из T -зарядовой симметрии) вытекает следующее соотношение между константами связи для распадов K' -мезона на K - и π -мезоны:

$$g_{K'^0 \rightarrow K^+ \pi^-} = g_{K'^+ \rightarrow K^0 \pi^+}.$$

Аналогично в силу сохранения U -спина (вернее из U -зарядовой симметрии)

$$g_{\tilde{K}'^0 \rightarrow \pi^+ K^-} = g_{\rho'^+ \rightarrow \tilde{K}^0 K^+}.$$

Получаем, таким образом, одно из соотношений (15).

В гл. 3 (см. п. 1.1) мы показали, что задание изотопической подгруппы и двух дискретных преобразований — U - и V -зарядовых симметрий — полностью эквивалентно заданию группы $SU(3)$ в целом. Это означает, что для изучения следствий унитарной симметрии достаточно исходить из изотопических соотношений и ко всем соотношениям применить U - и V -симметрии. Этот метод, вообще говоря, весьма громоздок, так как U - и V -зарядовые симметрии обычно превращают физические (наблюдаемые) процессы в нефизические (ненаблюдаемые), в которых либо все начальные частицы являются странными частицами (для рассеяния), либо масса распадающейся частицы меньше суммы масс рождающихся частиц (для распада). Однако для изучения некоторых конкретных процессов этот метод может оказаться весьма удобным. Например, известно изотопическое соотношение

$$g_{K'^0 \rightarrow K^+ \pi^-} = g_{K'^+ \rightarrow K^0 \pi^+}.$$

При U -зарядовой симметрии (с точностью до знака волновой функции)

$$K'^0 \rightarrow \rho'^-, K'^+ \rightarrow K^-, \pi^- \rightarrow K^0, K'^+ \rightarrow K'^-, K^0 \rightarrow \pi^-, \\ \pi^+ \rightarrow \tilde{K}^0,$$

и это соотношение превращается в

$$g_{\rho' \rightarrow K^- K^0} = g_{K' \rightarrow \pi^- K^0}.$$

Таким образом, получаем одно из соотношений в (15).

§ 2. Амплитуды процессов рассеяния и рождения частиц

2.1. Унитарная структура амплитуд процессов рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях

Мы показали, что в теории унитарной симметрии константы связи для распадов частиц в каждом унитарном мультиплете связаны некоторыми соотношениями. Аналогично из требования инвариантности S -матрицы относительно преобразований группы унитарной симметрии $SU(3)$ вытекают различные соотношения между амплитудами процессов рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях. Рассмотрим следствия унитарной симметрии в некоторых таких процессах.

Исследуем прежде всего процессы типа

$$P + B \rightarrow P' + B', \quad (I)$$

где P и P' — унитарные октуплеты псевдоскалярных мезонов, а B и B' — унитарные октуплеты барионов $\frac{1}{2}^+$.

Обозначим q и q' 4-импульсы начального и конечного мезонов, p и p' — 4-импульсы начального и конечного барионов, $u(p)$ и $u(p')$ — пространственные части волновых функций барионов (или пространственные волновые функции барионов), P_{β}^{α} , $P_{\beta}^{\prime\alpha}$, B_{β}^{α} и $B_{\beta}^{\prime\alpha}$ — унитарные части волновых функций (или унитарные волновые функции) мезонов и барионов соответственно. Как известно, матричный элемент процесса (I) содержит две независимые спиновые структуры:

$$\Gamma_1 = \bar{u}(p') u(p); \quad \Gamma_2 = \bar{u}(p') i\hat{Q} u(p), \quad (44)$$

где $Q = \frac{1}{2}(q + q')$. Что касается унитарной структуры, то в матричный элемент процесса (I) должны входить

инвариантные относительно группы $\hat{S}U(3)$ линейные комбинации произведений

$$\bar{B}_\beta^{\prime\alpha} \bar{P}_\delta^{\prime\gamma} B_\sigma^\epsilon P_\nu^\tau.$$

Для образования инвариантов из таких произведений необходимо провести суммирование по всем парам нижних и верхних индексов. Если унитарные волновые функции октуплета представить в виде матриц 3×3 , то суммирование по паре индексов из различных матриц означает умножение этих матриц:

$$A_\alpha^\beta B_\beta^\gamma = (AB)_\alpha^\gamma,$$

а суммирование по паре индексов из одной матрицы дает шпур матрицы

$$(AB)_\alpha^\alpha = \text{Sp}(AB).$$

Из произведений четырех волновых функций четырех рассматриваемых октуплетов можно образовать девять следующих инвариантов:

$$\left. \begin{aligned} & \text{Sp}(\bar{B}'B) \text{Sp}(\bar{P}'P); \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{Sp}(BP); \\ & \text{Sp}(\bar{B}'P) \text{Sp}(B\bar{P}'); \text{Sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P); \\ & \text{Sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P); \text{Sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P), \text{Sp}(B\bar{B}'P\bar{P}'); \\ & \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP); \text{Sp}(\bar{B}'P\bar{P}'P). \end{aligned} \right\} (45)$$

Может случиться, что не все эти инварианты независимы. Для того чтобы определить число независимых инвариантов, посмотрим, какие неприводимые представления содержатся в произведении волновых функций частиц в начальном или конечном состоянии. Из произведений $B_\beta^\alpha P_\delta^\gamma$ можно образовать следующие неприводимые представления:

1) инвариант $B_\beta^\alpha P_\alpha^\beta$ — суммированием по всем парам верхнего и нижнего индексов;

2) два октуплета — суммированием по каждой возможной паре индексов и вычитанием шпура

$$B_\beta^\alpha P_\gamma^\beta - \frac{1}{3} \delta_\gamma^\alpha B_\beta^\delta P_\delta^\beta; \quad B_\gamma^\beta P_\beta^\alpha - \frac{1}{3} \delta_\gamma^\alpha B_\beta^\delta P_\delta^\beta;$$

3) декуплет $D_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\sigma\rho} D_{\{\beta\gamma\}}^{[\sigma\rho]}$ — симметризацией по нижним индексам и антисимметризацией по верхним

индексам

$$X_{\{\beta\gamma\}}^{[\sigma\rho]} = B_{\beta}^{\sigma} P_{\gamma}^{\rho} + B_{\gamma}^{\sigma} P_{\beta}^{\rho} - B_{\beta}^{\rho} P_{\gamma}^{\sigma} - B_{\gamma}^{\rho} P_{\beta}^{\sigma}$$

и вычитанием шпура

$$D_{\{\beta\gamma\}}^{[\sigma\rho]} = X_{\{\beta\gamma\}}^{[\sigma\rho]} - \frac{1}{2} (\delta_{\beta}^{\sigma} X_{\{\tau\gamma\}}^{[\tau\rho]} + \delta_{\gamma}^{\sigma} X_{\{\tau\beta\}}^{[\tau\rho]} - \delta_{\beta}^{\rho} X_{\{\tau\gamma\}}^{[\tau\sigma]} - \delta_{\gamma}^{\rho} X_{\{\tau\beta\}}^{[\tau\sigma]});$$

4) сопряженный декуплет — симметризацией по верхним индексам, асимметризацией по нижним индексам и вычитанием шпура;

5) 27-плет $H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}}$ — симметризацией по верхним и нижним индексам

$$V_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} = B_{\gamma}^{\alpha} P_{\delta}^{\beta} + B_{\delta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} + B_{\gamma}^{\beta} P_{\delta}^{\alpha} + B_{\delta}^{\beta} P_{\gamma}^{\alpha}$$

и вычитанием шпура

$$H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} = V_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} - \frac{1}{6} (\delta_{\gamma}^{\alpha} V_{\{\tau\delta\}}^{\{\tau\beta\}} + \delta_{\delta}^{\alpha} V_{\{\tau\gamma\}}^{\{\tau\beta\}} + \delta_{\gamma}^{\beta} V_{\{\tau\delta\}}^{\{\tau\alpha\}} + \delta_{\delta}^{\beta} V_{\{\tau\gamma\}}^{\{\tau\alpha\}}).$$

В качестве двух независимых октуплетов удобно выбрать симметричную и антисимметричную комбинации

$$B_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} + B_{\gamma}^{\beta} P_{\beta}^{\alpha} - \frac{2}{3} \delta_{\gamma}^{\alpha} B_{\delta}^{\beta} P_{\beta}^{\delta}, \quad B_{\beta}^{\alpha} P_{\gamma}^{\beta} - B_{\gamma}^{\beta} P_{\beta}^{\alpha}.$$

Симметричный октуплет обозначим 8_s , а антисимметричный 8_a . Таким образом, волновая функция системы в начальном состоянии является суперпозицией следующих неприводимых представлений: 1, 8_s , 8_a , 10, $\overline{10}$, 27 (см. также гл. 3, п. 1.2). Волновая функция системы в конечном состоянии имеет аналогичный вид. Из инвариантности относительно группы $SU(3)$ следует, что матричные элементы процессов равны нулю, если начальные и конечные состояния принадлежат различным неприводимым представлениям группы $SU(3)$. Это означает, что отличны от нуля только матричные элементы восьми следующих переходов:

$$1 \rightarrow 1, \quad 8_s \rightarrow 8_s, \quad 8_a \rightarrow 8_a, \quad 8_s \rightarrow 8_a,$$

$$8_a \rightarrow 8_s, \quad 10 \rightarrow 10, \quad \overline{10} \rightarrow \overline{10}, \quad 27 \rightarrow 27.$$

Таким образом, существуют восемь независимых унитарных амплитуд, инвариантных относительно группы $SU(3)$, через которые выражаются амплитуды всех процессов типа (I). Отсюда следует, что среди девяти инвариант-

ных унитарных амплитуд (45) только восемь независимы и удовлетворяют некоторому тождеству. Это тождество всегда можно выбрать так, чтобы оно было полностью симметричным по отношению к перестановкам всех октуплетов. Тогда оно содержит явно комбинации структур (45), симметричные относительно перестановок всех октуплетов. Существуют две такие независимые комбинации: сумма трех первых среди амплитуд (45) и сумма шести последних. Искомое тождество можно записать в виде

$$a [\text{Sp}(\bar{B}'B) \text{Sp}(\bar{P}'P) + \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{Sp}(BP) + \text{Sp}(\bar{B}'P) \text{Sp}(B\bar{P}')] = \\ = b [\text{Sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P) + \text{Sp}(\bar{B}'BPP\bar{P}') + \text{Sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P) + \\ + \text{Sp}(B\bar{B}'P\bar{P}') + \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP) + \text{Sp}(\bar{B}'P B\bar{P}')], \quad (46)$$

где a и b — некоторые константы, причем без конкретного рассмотрения нельзя исключить случай, когда одна из них равна нулю. Представим матрицы $B_\beta^\alpha, \bar{B}'_\beta{}^\alpha, P_\beta^\alpha, \bar{P}'_\beta{}^\alpha$ в виде

$$B_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha B_i, \quad \bar{B}'_\beta{}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha \bar{B}'_i, \\ P_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha P_i, \quad \bar{P}'_\beta{}^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha \bar{P}'_i$$

(см. гл. 3, п. 2.1). Из соотношения (46) получим

$$[a \text{Sp}(\lambda_i \lambda_j) \text{Sp}(\lambda_k \lambda_l) + \text{Sp}(\lambda_i \lambda_k) \text{Sp}(\lambda_j \lambda_l) + \text{Sp}(\lambda_i \lambda_l) \text{Sp}(\lambda_j \lambda_k)] = \\ = b [\text{Sp}(\lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l) + \text{Sp}(\lambda_i \lambda_j \lambda_l \lambda_k) + \text{Sp}(\lambda_j \lambda_i \lambda_k \lambda_l) + \\ + \text{Sp}(\lambda_j \lambda_i \lambda_l \lambda_k) + \text{Sp}(\lambda_i \lambda_k \lambda_j \lambda_l) + \text{Sp}(\lambda_i \lambda_l \lambda_j \lambda_k)]. \quad (47)$$

Чтобы определить a и b , рассмотрим частный случай, положив $i = j = k = l = 3$. Тогда выражения в скобках в обеих частях соотношения (46) равны 12, и следовательно $12a = 12b, a = b$.

Таким образом, между девятью амплитудами (45) существует тождество

$$\text{Sp}(\bar{B}'B) \text{Sp}(\bar{P}'P) + \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{Sp}(BP) + \text{Sp}(\bar{B}'P) \text{Sp}(B\bar{P}') = \\ = \text{Sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P) + \text{Sp}(\bar{B}'BPP\bar{P}') + \text{Sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P) + \\ + \text{Sp}(B\bar{B}'P\bar{P}') + \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP) + \text{Sp}(\bar{B}'P B\bar{P}'), \quad (48)$$

и в качестве независимых инвариантных унитарных амплитуд можно выбрать следующие:

$$\left. \begin{aligned} T^1 &= \text{Sp}(\bar{B}'B) \text{Sp}(\bar{P}'P), \quad T^2 = \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}') \text{Sp}(BP), \\ T^3 &= \text{Sp}(\bar{B}'P) \text{Sp}(\bar{B}\bar{P}'); \\ T^4 &= \text{Sp}(\bar{B}'B\bar{P}'P), \quad T^5 = \text{Sp}(\bar{B}'B\bar{P}\bar{P}'), \\ T^6 &= \text{Sp}(B\bar{B}'\bar{P}'P); \quad T^7 = \text{Sp}(B\bar{B}'P\bar{P}'), \\ T^8 &= \text{Sp}(\bar{B}'\bar{P}'BP) - \text{Sp}(\bar{B}'PB\bar{P}'). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Отметим, что при изучении соотношений между амплитудами процессов в принципе можно не заботиться о том, сколько амплитуд независимы, и работать с лишними амплитудами. Дело в том, что коэффициенты этих амплитуд всегда можно выразить линейно через остальные, и амплитуды процессов содержат явно некоторые комбинации всех этих коэффициентов, так как число эффективных независимых коэффициентов равно числу независимых амплитуд.

Напишем общее выражение матричного элемента процесса (I), который содержит спиновые независимые амплитуды (44) и унитарные независимые амплитуды (49), т. е.

$$M_I = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^2 \Gamma_j T^i F_i^j(s, t), \quad (50)$$

где $F_i^j(s, t)$ — 16 функций инвариантных переменных

$$s = -(p + q)^2, \quad t = -(p - p')^2.$$

Рассмотрим частный случай, когда процесс (I) упругий в том смысле, что B и B' — один и тот же барионный октет, а P и P' — один и тот же октет псевдоскалярных мезонов: $B' = B$, $P = P'$. В этом случае процесс рассеяния

$$P + B \rightarrow P + B$$

переходит в себя при отражении времени T , и из инвариантности относительно T -преобразования вытекают некоторые ограничения на произвольные функции $F_i^j(s, t)$. Отметим, что при T -преобразовании начальные частицы превращаются в конечные и обратно. Поэтому

унитарные волновые функции преобразуются следующим образом при T -преобразовании:

$$B_\beta^\alpha \rightarrow \bar{B}_\alpha^\beta; \bar{B}_\beta^\alpha \rightarrow B_\alpha^\beta; P_\beta^\alpha \rightarrow \bar{P}_\alpha^\beta; \bar{P}_\beta^\alpha \rightarrow P_\alpha^\beta.$$

Найдем соответствующие преобразования независимых инвариантных амплитуд вида (49) с $B' = B$, $P' = P$. Например,

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\bar{B}\bar{P}BP) &= \bar{B}_\alpha^\beta \bar{P}_\beta^\gamma B_\gamma^\delta P_\delta^\alpha \rightarrow B_\beta^\alpha P_\beta^\gamma \bar{B}_\delta^\gamma \bar{P}_\alpha^\delta = \\ &= \bar{B}_\delta^\gamma P_\beta^\gamma B_\beta^\alpha \bar{P}_\alpha^\delta = \text{Sp}(\bar{B}P\bar{B}P); \\ \text{Sp}(\bar{B}P\bar{B}P) &\rightarrow \text{Sp}(\bar{B}\bar{P}BP). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при T -преобразовании амплитуда T^8 меняет знак. Аналогично можно показать, что все первые семь среди амплитуд (49) инвариантны относительно отражения времени. Итак, при T -преобразовании

$$\left. \begin{aligned} T^i &\rightarrow T^i, \\ T^8 &\rightarrow -T^8, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, 7. \quad (51)$$

Для того чтобы найти преобразования спиновых инвариантных амплитуд (41), отметим прежде всего, что при T -преобразовании конечная частица с импульсом \mathbf{p}' и поляризацией r' превращается в начальную частицу с импульсом $-\mathbf{p}'$ и поляризацией $-r'$ и обратно. Можно показать, что волновая функция бариона $\frac{1^+}{2}$ с импульсом $-\mathbf{p}'$ и поляризацией $-r'$ выражается антилинейно через волновую функцию этой же частицы с импульсом \mathbf{p}' и поляризацией r' следующим образом:

$$u_{-r'}(-\mathbf{p}') = \gamma_4 U \bar{u}_{r'}(\mathbf{p}')^T, \quad (52)$$

где U — унитарная матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$U^T = -U, U \gamma_\mu^T U^{-1} = \gamma_\mu.$$

Аналогично *

$$\bar{u}_{-r}(-\mathbf{p}) = u_r(\mathbf{p})^T U^{-1} \gamma_4. \quad (53)$$

* Докажем соотношения (52) и (53). Сделаем соответствующие преобразования уравнения Дирака

$$(i \hat{p} + m) u(\mathbf{p}) = (i [p_4 \gamma_4 + \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}] + m) u(\mathbf{p}) = 0,$$

Итак, спиновые амплитуды (44) преобразуются при T -отражении следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{u}(p') u(p) &\rightarrow u(p)^T U^{-1} \gamma_4 \gamma_4 U \bar{u}(p')^T = \bar{u}(p') u(p) \\ \bar{u}(p') i\hat{Q}u(p) &\rightarrow u(p)^T U^{-1} \gamma_4 i(\gamma_4 Q_4 - \gamma \mathbf{Q}) \gamma_4 U \bar{u}(p')^T = \\ &= u(p)^T i\hat{Q}^T \bar{u}(p')^T = \bar{u}(p') i\hat{Q}u(p),\end{aligned}\quad (54)$$

т. е.

$$\Gamma_j \rightarrow \Gamma_j.$$

Так как матричный элемент (50) инвариантен относительно T -преобразования, то из трансформационных свойств (54) и (51) независимых спиновых и унитарных амплитуд Γ_j и T^i следует, что две функции $F_8^i(s, t)$ равны нулю. Таким образом, для упругих процессов только

Так как

$$\bar{u}(\mathbf{p})(i\hat{p} + m) = 0, \quad (i\hat{p} + m)^T \bar{u}(\mathbf{p})^T = 0,$$

$$U(i\hat{p} + m)^T \bar{u}(\mathbf{p})^T = (i\hat{p} + m)U\bar{u}(\mathbf{p})^T = 0,$$

то
$$\gamma_4(i\hat{p} + m)U\bar{u}(\mathbf{p})^T = (i[p_4\gamma_4 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}] + m)\gamma_4 U\bar{u}(\mathbf{p})^T = 0.$$

$$\gamma_4 U\bar{u}(\mathbf{p})^T = u(-\mathbf{p}).$$

Это соотношение можно также переписать в виде

$$u(-\mathbf{p}) = \gamma_4 U \gamma_4^T u(\mathbf{p})^* = U u(\mathbf{p})^*.$$

Далее, пусть

$$\Sigma_3 u_r = r u_r,$$

где

$$\Sigma_3 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_2 \gamma_1}{2i}$$

оператор проекции спина на оси z . Тогда поскольку

$$\Sigma_3^\dagger = \Sigma_3, \quad \Sigma_3^* = \Sigma_3^T,$$

$$U \Sigma_3^T = U \frac{\gamma_2^T \gamma_1^T - \gamma_1^T \gamma_2^T}{2i} = \frac{\gamma_2 \gamma_1 - \gamma_1 \gamma_2}{2i} U = -\Sigma_3 U,$$

то

$$\Sigma_3^* u_r^* = \Sigma_3^T u_r^* = r u_r^*,$$

$$U \Sigma_3^T u_r^* = -\Sigma_3 U u_r^* = r U u_r^*,$$

г. е.

$$\Sigma_3 (\gamma_4 U u_r^T) = -r (\gamma_4 U u_r^T).$$

Следовательно,

$$\gamma_4 U u_r^T = u_{-r}.$$

семь инвариантных унитарных амплитуд $T^1 - T^7$ дают вклад

$$F_8^i(s, t) = 0. \quad (55)$$

Общее выражение матричного элемента процесса

$$B_1 + B_2 \rightarrow B'_1 + B'_2, \quad (II)$$

где B_i и B'_i — октуплеты барионов, которые можно получить аналогичным методом. Обозначим $(B_1)_\beta^\alpha$, $(B_2)_\beta^\alpha$, $(B'_1)_\beta^\alpha$ и $(B'_2)_\beta^\alpha$ унитарные волновые функции. Тогда по аналогии с выражениями (49) имеем следующие независимые унитарные амплитуды:

$$\left. \begin{aligned} T^1 &= \text{Sp}(\bar{B}_1 B_1) \text{Sp}(\bar{B}'_2 B_2); & T^2 &= \text{Sp}(\bar{B}'_1 \bar{B}'_2) \text{Sp}(B_1 B_2); \\ T^3 &= \text{Sp}(\bar{B}'_1 B_2) \text{Sp}(\bar{B}'_2 B_1); & T^4 &= \text{Sp}(\bar{B}'_1 B_1 \bar{B}'_2 B_2); \\ T^5 &= \text{Sp}(\bar{B}'_1 B_1 B_2 \bar{B}'_2), & T^6 &= \text{Sp}(B_1 \bar{B}'_1 \bar{B}'_2 B_2); \\ T^7 &= \text{Sp}(B_1 \bar{B}'_1 B_2 \bar{B}'_2), & T^8 &= \text{Sp}(\bar{B}'_1 \bar{B}'_2 B_1 B_2) - \\ & & & - \text{Sp}(\bar{B}'_1 B_2 B_1 \bar{B}'_2). \end{aligned} \right\} (56)$$

Если барионы в процессе (II) имеют спин и четность $\frac{1}{2}^+$, то существуют восемь спиновых независимых амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \bar{u}(p'_2) u(p_2) \bar{u}(p'_1) u(p_1); \\ \Gamma_2 &= \bar{u}(p'_2) i \hat{P}_1 u(p_2) \bar{u}(p'_1) i \hat{P}_2 u(p_1); \\ \Gamma_3 &= \bar{u}(p'_2) u(p_2) \bar{u}(p'_1) i \hat{P}_2 u(p_1); \\ \Gamma_4 &= \bar{u}(p'_2) i \hat{P}_1 u(p_2) \bar{u}(p'_1) u(p_1); \\ \Gamma_5 &= \bar{u}(p'_2) \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p'_1) \gamma_5 u(p_1); \\ \Gamma_6 &= \bar{u}(p'_2) i \hat{P}_1 \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p'_1) i \hat{P}_2 \gamma_5 u(p_1); \\ \Gamma_7 &= \bar{u}(p'_2) \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p'_1) i \hat{P}_2 \gamma_5 u(p_1); \\ \Gamma_8 &= \bar{u}(p'_2) i \hat{P}_1 \gamma_5 u(p_2) \bar{u}(p'_2) \gamma_5 u(p_1), \end{aligned} \right\} (57)$$

где $P_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p'_1)$, $P_2 = \frac{1}{2}(p_2 + p'_2)$. Матричный элемент процесса (II)

$$M_{II} = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 \Gamma_j T^i F_i^j(s, t), \quad (58)$$

где $F_i^l(s, t)$ — функции от инвариантных переменных

$$s = -(p_1 + p_2)^2; \quad t = -(p_1 - p_1')^2.$$

В частном случае, когда $B_1 = B_1'$ и $B_2 = B_2'$, т. е. в случае упругого рассеяния, инвариантность относительно отражения времени дает некоторые ограничения на $F_i^l(s, t)$. Как было показано, при T -преобразовании

$$\left. \begin{array}{l} T^i \rightarrow T^i, \\ T^8 \rightarrow -T^8. \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, 7 \quad (59)$$

Поскольку

$$U\gamma_5^T U^{-1} = \gamma_5, \quad U(i\hat{P}_i\gamma_5)^T U^{-1} = -i\hat{P}_i\gamma_5,$$

то спиновые амплитуды преобразуются следующим образом при T -преобразовании:

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_j \rightarrow \Gamma_j; \quad j = 1, 2, \dots, 6; \\ \Gamma_j \rightarrow -\Gamma_j; \quad j = 7, 8. \end{array} \right\} \quad (60)$$

Матричный элемент (58) должен быть инвариантным относительно преобразований (59) и (60). Отсюда

$$F_i^l(s, t) = 0, \quad (61)$$

если $j = 7, 8; i = 1, 2, \dots, 7$ и $j = 1, \dots, 6; i = 8$. Таким образом, матричный элемент упругого рассеяния октуплетов барионов $\frac{1^+}{2}$

$$M_{II} = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^6 \Gamma_i T^i F_i^l(s, t) + \sum_{j=7,8} \Gamma_j T^8 F_j^l(s, t), \quad (62)$$

причем в унитарных амплитудах T^i мы положим $B_1' = B_1, B_2' = B_2$. Если же барионы в начальном и конечном состояниях являются одинаковыми частицами, то матричный элемент должен быть симметричным относительно перестановки

$$B_1 \longleftrightarrow B_2, \quad \bar{B}_1 \longleftrightarrow \bar{B}_2, \quad P_1 \longleftrightarrow P_2, \quad P_1' \longleftrightarrow P_2'.$$

Отсюда получаем

$$F_i^3(s, t) = F_i^4(s, t). \quad (63)$$

Кроме того, из требования статистики Ферми вытекают некоторые свойства симметрии $F_i^l(s, t)$ относительно

замены t на u :

$$u = -(\rho_1 - \rho_2')^2.$$

Однако на этом останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь процессы аннигиляции пар барион — антибарион:

$$B + \tilde{B} \rightarrow P + P', \quad (III)$$

где B и \tilde{B} — октуплеты барионов $\frac{1^+}{2}$ и их античастиц, а P и P' — октуплеты псевдоскалярных мезонов. Обозначим ρ и ρ' 4-импульсы бариона и антибариона, а q и q' — 4-импульсы мезонов P и P' . Как и в случае процесса (I), существуют две независимые спиновые амплитуды

$$\Gamma_1 = \bar{v}(\rho') u(\rho); \quad \Gamma_2 = \bar{v}(\rho') i \hat{Q} u(\rho), \quad (64)$$

где $Q = \frac{1}{2}(q - q')$, и восемь независимых унитарных амплитуд, которые можно выбрать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \text{Sp}(B\tilde{B}) \text{Sp}(\tilde{P}P'); \\ T_2 &= \text{Sp}(B\tilde{P}) \text{Sp}(\tilde{B}P') - \text{Sp}(B\tilde{P}') \text{Sp}(\tilde{B}P); \\ T_3 &= \text{Sp}(B\tilde{P}) \text{Sp}(\tilde{B}P') + \text{Sp}(B\tilde{P}') \text{Sp}(\tilde{B}P); \\ T_4 &= \text{Sp}[B\tilde{B}(\tilde{P}P' - P'P)]; \quad T_5 = \text{Sp}[B\tilde{B}(\tilde{P}P' + P'P)]; \\ T_6 &= \text{Sp}[\tilde{B}B(\tilde{P}P' - P'P)]; \quad T_7 = \text{Sp}[\tilde{B}B(\tilde{P}P' + P'P)]; \\ T_8 &= \text{Sp}[B\tilde{P}\tilde{B}P' - B\tilde{P}'\tilde{B}P]. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Матричный элемент процесса (III) имеет вид

$$M_{III} = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^8 \Gamma_j T^i F_i^j(s, \nu), \quad (66)$$

причем в качестве инвариантных переменных удобно выбрать следующие:

$$\xi = -(\rho + \rho')^2, \quad \nu = \frac{1}{4}(\rho - \rho')(q - q').$$

Требование инвариантности S -матрицы относительно зарядового сопряжения приводит к некоторым ограничениям на $F_i^j(s, \nu)$. Действительно, при C -преобразовании барион с импульсом p превращается в антибарион с тем же импульсом, и наоборот, а мезон с унитарной волновой функцией P_β^α превращается в мезон с волновой функцией P_α^β и т. д.

$$B_\beta^\alpha \rightarrow \tilde{B}_\alpha^\beta, \tilde{B}_\beta^\alpha \rightarrow B_\alpha^\beta, P_\beta^\alpha \rightarrow P_\alpha^\beta, P_\beta^{\prime\alpha} \rightarrow P_\alpha^{\prime\beta}.$$

Поэтому унитарные амплитуды (65) преобразуются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} T^i &\rightarrow T^i; & i = 1, 3, 5, 7, 8; \\ T^i &\rightarrow -T^i; & i = 2, 4, 6. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Что касается спиновых амплитуд (67), то C -преобразование приводит к замене $p \leftrightarrow p'$ и изменению знака каждой амплитуды, так как барион подчиняется статистике Ферми. Итак,

$$\bar{v}(p') u(p) \rightarrow -\bar{v}(p) u(p'); \quad \bar{v}(p') i\hat{Q}u(p) \rightarrow -\bar{v}(p) i\hat{Q}u(p').$$

Пользуясь соотношениями

$$u(p') = C\bar{v}(p')^T; \quad \bar{v}(p) = [C^{-1}u(p)]^T,$$

где C — матрица зарядового сопряжения

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T, \quad C^T = -C,$$

видим, что при зарядовом сопряжении спиновые амплитуды (64) преобразуются следующим образом:

$$\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1, \quad \Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2. \quad (68)$$

Отметим, что при этом переменная s не меняется, но переменная ν меняет знак

$$F_i^j(s, \nu) \rightarrow F_i^j(s, -\nu). \quad (69)$$

Из формул (67) — (69) следует, что матричный элемент (66) может быть инвариантным относительно C -преобразования только в том случае, когда функции $F_i^j(s, \nu)$

удовлетворяют следующим условиям:

$$F_i^j(s, -\nu) = \begin{cases} F_i^j(s, \nu) & \text{для } \begin{cases} j = 1; i = 1, 3, 5, 7, 8, \\ j = 2; i = 2, 4, 6; \end{cases} \\ -F_i^j(s, \nu) & \text{для } \begin{cases} j = 2; i = 1, 3, 5, 7, 8, \\ j = 1; i = 2, 4, 6. \end{cases} \end{cases} \quad (70)$$

Если мезоны P и P' — образуют один и тот же оккуплет псевдоскалярных мезонов, то в силу статистики Бозе матричный элемент (66) инвариантен относительно перестановки двух мезонов, т. е. относительно замены $q \longleftrightarrow q'$, $P_\beta^\alpha \longleftrightarrow P_\beta'^\alpha$. Так как при этом преобразовании

$$T^i \rightarrow (-1)^{i+1} T^i; \quad (71)$$

$$\Gamma_j \rightarrow (-1)^{j+1} \Gamma_j \quad (72)$$

и $\nu \rightarrow -\nu$, то функции $F_i^j(s, \nu)$ должны удовлетворять условию

$$F_i^j(s, -\nu) = (-1)^{i+j} F_i^j(s, \nu). \quad (73)$$

Сравнивая с соотношениями (70), получим

$$F_8^1(s, \nu) = 0. \quad (74)$$

Таким образом, по аналогии с упругим рассеянием мезона на барионе матричный элемент аннигиляции пары барион — антибарион на пару псевдоскалярных мезонов из одного и того же оккуплета зависит от семи унитарных амплитуд.

Рассмотрим, наконец, рождение декуплета барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$ при столкновении оккуплета псевдоскалярных мезонов с оккуплетом барионов $\frac{1^+}{2}$:

$$P + B \rightarrow P' + D. \quad (IV)$$

В данном случае из унитарных волновых функций частиц можно образовать шесть инвариантных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} T^1 &= \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} \bar{P}'_\alpha \gamma B_\sigma^\delta P_\beta^\sigma; & T^2 &= \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} \bar{P}'_\alpha \gamma B_\beta^\sigma P_\sigma^\delta; \\ T^3 &= \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} P_\alpha^\gamma B_\sigma^\delta \bar{P}'_\beta \sigma; & T^4 &= \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} P_\alpha^\gamma B_\beta^\sigma \bar{P}'_\sigma \delta; \\ T^5 &= \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} B_\alpha^\gamma \bar{P}'_\sigma \delta P_\beta^\sigma; & T^6 &= \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} B_\alpha^\gamma \bar{P}'_\beta \sigma P_\sigma^\delta; \\ & & \bar{D}_{[\gamma\delta]}^{\{\alpha\beta\}} &= \varepsilon_{\gamma\delta\tau} \bar{D}^{\{\alpha\beta\tau\}}. \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Среди этих унитарных амплитуд только четыре независи-
мые. Однако на этом останавливаться не будем, по-
скольку в принципе можно работать с лишними ампли-
тудами, как это было отмечено выше при изучении
мезон-барионного рассеяния. Матричный элемент про-
цесса (IV)

$$M_{IV} = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 \Gamma_j T^i F_i^j(s, t), \quad (76)$$

где унитарные амплитуды T^i даны в формулах (75), а
спиновые амплитуды Γ_j выражаются через пространст-
венные волновые функции бариона $\frac{1^+}{2}$ и $u(p)$ и барион-
ного резонанса $u_\mu(p')$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 &= \bar{u}_\mu(p') (q - q')_\mu \gamma_5 u(p); \\ \Gamma_2 &= \bar{u}_\mu(p') (q + q')_\mu \gamma_5 u(p); \\ \Gamma_3 &= \bar{u}_\mu(p') (q - q')_\mu \gamma_5 i \frac{\hat{q} + \hat{q}'}{2} u(p); \\ \Gamma_4 &= \bar{u}_\mu(p') (q + q')_\mu \gamma_5 i \frac{\hat{q} + \hat{q}'}{2} u(p). \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Здесь q и q' — 4-импульсы мезонов P и P' .

В заключение отметим, что аналогичным методом
также можно получить матричные элементы процессов
рождения векторных мезонов и барионных резонансов:

$$P + B \rightarrow V + B; \quad (V)$$

$$B + B \rightarrow V + D; \quad (VI)$$

$$B + \bar{B} \rightarrow V + P; \quad (VII)$$

$$P + B \rightarrow V + D. \quad (VIII)$$

2.2. Соотношения между амплитудами процессов

Из общих выражений матричных элементов рассмот-
ренных процессов рассеяния, аннигиляции и рождения
частиц можно получить соотношения между сечениями
конкретных процессов. Перейдем теперь к выводу этих
соотношений.

Рассмотрим прежде всего процессы мезон-барионно-
го рассеяния. Для изучения соотношений между их сече-

ниями достаточно рассмотреть унитарную структуру.
 Матричный элемент

$$M_1 = \sum_{i=1}^7 T^i A_i, \quad (78)$$

где A_i — функции от пространственно-временных переменных (импульсов, поляризации и т. д.). Амплитуды каждого конкретного процесса выражаются этими семью независимыми произвольными функциями A_i . Так, для процесса

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$$

только две унитарные амплитуды отличны от нуля

$$T^1 = T^7 = 1,$$

так как в данном случае только следующие матричные элементы матриц B, \bar{B}, P и \bar{P} отличны от нуля

$$B_1^3 = \bar{B}_3^1 = P_1^2 = \bar{P}_2^1 = 1.$$

Таким образом,

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = A_1 + A_7.$$

Аналогичные выражения также можно получить для амплитуд остальных процессов. Коэффициенты при произвольных функциях $A_1 - A_7$ даны в табл. 10. Для удобства вместо $-K^-$ и $-\Xi^-$ в матрицах барионов и мезонов пишем K^- и Ξ^- .

Из значений коэффициентов при A , данных в табл. 10, получим следующие соотношения между амплитудами рассматриваемых процессов:

$$M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n); \quad (79)$$

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M(K^0 p \rightarrow K^0 p) = M(K^0 p \rightarrow K^+ n); \quad (80)$$

$$\begin{aligned} M(\tilde{K}^0 p \rightarrow \tilde{K}^0 p) - M(K^- p \rightarrow K^- p) &= \\ &= -M(K^- p \rightarrow \tilde{K}^0 n); \end{aligned} \quad (81)$$

$$M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+) - M(\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-) = \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0); \quad (82)$$

$$\begin{aligned} M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+) - M(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) &= \sqrt{2} M(\tilde{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0) = \\ &= \sqrt{2} M(\tilde{K}^0 p \rightarrow \pi^0 \Sigma^+); \end{aligned} \quad (83)$$

$$M(\tilde{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda) = \sqrt{2} M(K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda); \quad (84)$$

$$M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+) + M(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = 2M(K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0); \quad (85)$$

$$M(\tilde{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0) + M(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) = M(K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-); \quad (86)$$

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) = M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+); \quad (87)$$

$$M(K^- p \rightarrow K^- p) - M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+); \quad (88)$$

$$M(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = M(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0); \quad (89)$$

$$M(\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-) = M(\tilde{K}^0 p \rightarrow K^+ \Xi^0); \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} M(\pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda) - \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow K^0 \Sigma^0) = \\ = 2 [M(K^- p \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) - M(K^- p \rightarrow K^0 n)]; \end{aligned} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{6} M(\tilde{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda) - \sqrt{2} M(\tilde{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Sigma^0) = \\ = 2 [M(\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-) - M(\tilde{K}^0 p \rightarrow K^+ n)]; \end{aligned} \quad (92)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{3} M(K^- p \rightarrow \pi^0 \Lambda) + \sqrt{2} M(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n) = \\ = M(K^- p \rightarrow \pi^0 \Sigma^0) - M(K^- p \rightarrow \tilde{K}^0 n); \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} M(K^- p \rightarrow \eta \Lambda) - \frac{1}{\sqrt{3}} M(K^- p \rightarrow \eta \Sigma^0) = \\ = M(K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0) + \frac{1}{\sqrt{6}} M(K^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda). \end{aligned} \quad (94)$$

Среди соотношений (79) — (94) восемь первых можно получить из изотопической инвариантности, а остальные являются новыми следствиями унитарной симметрии. Если S -матрица инвариантна относительно R -преобразований, то получим еще некоторые соотношения. Однако не будем предполагать R -инвариантности, поскольку R -преобразование не принадлежит группе $SU(3)$, и в действительности R -инвариантность не имеет места, как это было отмечено.

По аналогии с полученными соотношениями между амплитудами мезон-барионного рассеяния для процессов

Процесс	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6	T^7
$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$	1						1
$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p$	1					1	
$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$						$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\pi^- + p \rightarrow \eta + n$						$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$K^+ + p \rightarrow K^+ + p$	1		1	1			1
$K^- + p \rightarrow K^- + p$	1	1				1	1
$K^0 + p \rightarrow K^0 + p$	1			1			
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \tilde{K}^0 + p$	1					1	
$K^0 + p \rightarrow K^+ + n$			1				
$K^- + p \rightarrow \tilde{K}^0 + n$		1					
$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$			1	1			
$\pi^- + p \rightarrow K^+ + \Sigma^-$			1				
$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Sigma^0$				$\frac{1}{\sqrt{2}}$			
$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda$				$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$-\frac{2}{\sqrt{6}}$	
$K^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$		1				1	
$K^- + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$		1					
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Sigma^0$						$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda$						$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$		1				$\frac{1}{2}$	
$K^- + p \rightarrow \eta + \Sigma^0$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda$						$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Процесс	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6	T^7
$K^- + p \rightarrow \eta + \Lambda$		1		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \pi^0 + \Sigma^+$					$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \eta + \Sigma^+$				$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$		
$K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0$		1					
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow K^+ + \Xi^0$			1				
$K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^-$		1	1				

барион-барионного рассеяния и антибарион-барионного рассеяния имеем соотношения:

$$M(\Xi^- p \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^-) = M(\Xi^- p \rightarrow n \Xi^0); \quad (95)$$

$$M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) = M(\Xi^0 p \rightarrow \Xi^0 p); \quad (96)$$

$$M(pp \rightarrow pp) = M(\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p) + M(\Sigma^+ p \rightarrow p \Sigma^+); \quad (97)$$

$$M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) = M(\Xi^- p \rightarrow \Xi^- p) - M(\Xi^- p \rightarrow \Sigma^- \Sigma^+); \quad (98)$$

$$M(\tilde{p} p \rightarrow \tilde{\Sigma}^- \Sigma^-) = |M(\tilde{p} p \rightarrow \tilde{\Xi}^0 \Xi^0)| \quad (99)$$

и т. д.

Рассмотрим теперь аннигиляцию пары барион — антибарион в покое на два псевдоскалярных мезона. В данном случае $p_4 = p'_4$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = 0$, т. е. $p = p'$, $v = \frac{1}{4}(p - p') \times (q - q') = 0$. Так как нечетные функции v должны обращаться в нуль при $v = 0$, то только четные функции $F_i^j(s, v)$ в матричном элементе (66) могут давать вклад. Более того, для бариона и антибариона в покое волновые функции $u(p)$ и $v(p)$ имеют вид

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v = C \bar{u}^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_y \varphi \end{pmatrix},$$

где φ — двумерный спинор, и $\bar{v}u = 0$, т. е. первая спиновая амплитуда равна нулю. Таким образом, матричные

элементы аннигиляции пар барион — антибарион в покое на пары псевдоскалярных мезонов зависят только от трех четных функций $F_i^2(s, 0)$, а именно: $F_2^2(s, 0)$, $F_4^2(s, 0)$ и $F_6^2(s, 0)$. Соответствующие коэффициенты даны в табл. 11.

Таблица 11

Процесс	T^2	T^4	T^6
$\tilde{p} + p \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	0	-1	0
$\tilde{p} + p \rightarrow K^+ + K^-$	1	-1	1
$\tilde{p} + p \rightarrow K^0 + \tilde{K}^0$	0	0	1
$\tilde{\Lambda} + p \rightarrow K^+ + \pi^0$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$
$\tilde{\Lambda} + p \rightarrow K^+ + \eta$	1	-1	$\frac{1}{2}$
$\tilde{\Sigma}^+ + p \rightarrow K^+ + \pi^-$	1	0	1
$\tilde{\Sigma}^- + p \rightarrow K^+ + \pi^+$	1	0	0
$\tilde{\Sigma}^+ + p \rightarrow K^0 + \eta$	0	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
$\tilde{\Xi}^0 + p \rightarrow K^+ + K^0$	1	0	0

Отметим, что в табл. 11 не были включены процессы

$$\tilde{p} + p \rightarrow 2\pi^0, 2\eta, \eta + \pi^0;$$

$$\tilde{n} + p \rightarrow \pi^+ + \eta, \tilde{\Xi}^- + p \rightarrow K^+ + K^+,$$

которые запрещены либо сохранением C - и P -четностей, либо сохранением G - и P -четностей и требованием статистики Бозе. Не рассматриваются также процессы, амплитуды которых определяются амплитудами процессов при помощи изотопических соотношений.

Из значений коэффициентов, данных в табл. 11, получаем следующие соотношения между амплитудами рас-

смаатриваемых процессов:

$$M(\tilde{p}p \rightarrow \tilde{K}^0 K^0) = \sqrt{\frac{3}{2}} M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^0 \eta); \quad (100)$$

$$M(\tilde{\Sigma}^- p \rightarrow K^+ \pi^+) = M(\tilde{\Xi}^0 p \rightarrow K^+ K^0); \quad (101)$$

$$M(\tilde{p}p \rightarrow K^+ K^-) = M(\tilde{p}p \rightarrow \pi^+ \pi^-) + M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^+ \pi^-); \quad (102)$$

$$M(\tilde{p}p \rightarrow K^+ K^-) = \frac{1}{2} M(\tilde{p}p \rightarrow K^0 \tilde{K}^0) + M(\tilde{\Lambda} p \rightarrow K^+ \eta); \quad (103)$$

$$M(\tilde{\Sigma}^+ p \rightarrow K^+ \pi^-) = M(\tilde{\Sigma}^- p \rightarrow K^+ \pi^+) + M(\tilde{p}p \rightarrow K^0 \tilde{K}^0) \quad (104)$$

и т. д.

Как было показано, амплитуды процессов рождения барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$ при столкновении псевдоскалярных мезонов с протоном выражаются через четыре из шести произвольных функций A_i пространственно-временных переменных. Однако можно рассмотреть все шесть функций A_i и пользоваться матричным элементом

$$M_{III} = \sum_{i=1}^6 T^i A_i, \quad (105)$$

где T^i определяются из формул (75). Коэффициенты при A_i для каждого процесса даны в табл. 12.

Отсюда получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^- p \rightarrow \pi^+ \Delta^-) &= M(K^- p \rightarrow \pi^+ Y^{*-}) = \\ &= M(K^- p \rightarrow \pi^- Y^{*+}) = M(K^- p \rightarrow K^+ \Xi^{*-}); \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} |M(K^+ p \rightarrow K^0 \Delta^{++})|^2 + 3 |M(\pi^+ p \rightarrow K^+ Y^{*+})|^2 &= \\ = |M(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Delta^{++})|^2 + 3 |M(\pi^+ p \rightarrow \eta \Delta^{++})|^2. \end{aligned} \quad (107)$$

Аналогичный метод можно также применить к изучению амплитуд процессов рождения векторных мезонов

Процесс	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6
$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^+$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Delta^+$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$				$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\pi^- + p \rightarrow \pi^+ + \Delta^-$	-1		-1			
$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \Delta^0$	$-\frac{2}{\sqrt{6}}$		$-\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
$\pi^- + p \rightarrow \eta + \Delta^0$			$-\frac{1}{3\sqrt{2}}$		$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	
$\pi^+ + p \rightarrow \pi^0 + \Delta^{++}$			$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\pi^+ + p \rightarrow \eta + \Delta^{++}$			$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{2}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$
$K^+ + p \rightarrow K^+ + \Delta^+$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$K^- + p \rightarrow K^- + \Delta^+$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$K^+ + p \rightarrow K^0 + \Delta^{++}$				-1	-1	
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow K^- + \Delta^{++}$		-1				-1
$K^- + p \rightarrow \pi^- + Y^{*+}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$\pi^+ + p \rightarrow K^+ + Y^{*+}$			$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$K^- + p \rightarrow \pi^+ + Y^{*-}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			
$\pi^- + p \rightarrow K^+ + Y^{*-}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			
$K^- + p \rightarrow \pi^0 + Y^{*0}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2\sqrt{3}}$		
$K^- + p \rightarrow \eta + Y^{*0}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$

Процесс	T^1	T^2	T^3	T^4	T^5	T^6
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + Y^{*0}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
$\pi^- + p \rightarrow K^0 + Y^{*0}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$			$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \pi^0 + Y^{*+}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$		$\frac{1}{\sqrt{6}}$	
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow \eta + Y^{*+}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{3\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
$K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^{*0}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
$\tilde{K}^0 + p \rightarrow K^+ + \Xi^{*0}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		
$K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^{*-}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$			

при столкновении псевдоскалярных мезонов с протоном. В частности,

$$M(K^+ p \rightarrow K^{*+} p) = M(\pi^+ p \rightarrow \rho^+ p) + M(\pi^+ p \rightarrow K^{*+} \Sigma^+); \quad (108)$$

$$M(K^- p \rightarrow K^{*-} p) = M(\pi^- p \rightarrow \rho^- p) + M(K^- p \rightarrow \rho^- \Sigma^+); \quad (109)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^- p \rightarrow \rho^+ \Delta^-) &= M(K^- p \rightarrow \rho^+ Y^{*-}) = \\ &= M(K^- p \rightarrow \rho^- Y^{*+}) = M(K^- p \rightarrow K^{*+} \Xi^{*-}). \end{aligned} \quad (110)$$

Наконец, приведем соотношение между амплитудами процессов рождения X -мезона, представляющего собой унитарный синглет:

$$\begin{aligned} M(\pi^- p \rightarrow X n) &= \frac{1}{\sqrt{2}} M(K^- p \rightarrow X \Sigma^0) - \\ &- \sqrt{\frac{3}{2}} M(K^- p \rightarrow X \Lambda). \end{aligned} \quad (111)$$

Как и в случае трехчастичных вершин, многие из полученных соотношений между амплитудами рассеяния являются следствием сохранения U - или V -спина либо U - или V -зарядовой симметрии (U - и V -подгруппы были рассмотрены в гл. 3, п. 1.4). Поэтому они могут быть выведены без изучения общей структуры матричных элементов применением либо техники группы $SU(2)$, либо дискретных преобразований U - или V -зарядовой симметрий.

Действительно, применим к процессам $K^-p \rightarrow \pi^+\Sigma^-$ и $\pi^-p \rightarrow K^+\Sigma^-$ сначала преобразование V -зарядовой симметрии, затем преобразование U -зарядовой симметрии и отражение времени. Так как при V -зарядовой симметрии с точностью до знака волновых функций

$$K^- \longleftrightarrow \pi^-, \pi^+ \longleftrightarrow K^+, p \longleftrightarrow \Sigma^+, \Xi^- \longleftrightarrow \Sigma^-$$

(см. гл. 3, п. 2.2), то эти процессы переходят в процессы

$$\pi^- + \Sigma^+ \rightarrow K^+ + \Xi^- \text{ и } K^- + \Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + \Xi^-$$

соответственно. Далее, при U -зарядовой симметрии с точностью до знака волновых функций

$$K^+ \longleftrightarrow K^-, \pi^- \longleftrightarrow K^0, \pi^+ \longleftrightarrow \tilde{K}^0, \Sigma^+ \longleftrightarrow \Xi^0, \Xi^- \longleftrightarrow p$$

(см. гл. 3, п. 2.2), и последние процессы переходят в

$$K^0 + \Xi^0 \rightarrow K^- + p \text{ и } K^+ + \Xi^0 \rightarrow \tilde{K}^0 + p$$

соответственно. В силу T -инвариантности амплитуды этих процессов равны амплитудам их обратных процессов

$$K^- + p \rightarrow K^0 + \Xi^0 \text{ и } \tilde{K}^0 + p \rightarrow K^+ + \Xi^0.$$

Таким образом, из инвариантностей относительно преобразований V - и U -зарядовой симметрии и отражения времени вытекают соотношения (89) и (90):

$$M(K^-p \rightarrow \pi^+\Sigma^-) = M(K^-p \rightarrow K^0\Xi^0);$$

$$M(\pi^-p \rightarrow K^+\Sigma^-) = M(\tilde{K}^0p \rightarrow K^+\Xi^0).$$

Отметим, что соответствующих соотношений для амплитуд рождения векторных мезонов не существует, так как в этом случае нельзя пользоваться T -инвариантностью.

Применим теперь к процессам

$$\Xi^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \Sigma^-, \quad \Sigma^- + p \rightarrow \Sigma^- + p, \quad \tilde{p} + p \rightarrow \tilde{\Xi}^0 + \Xi^0$$

преобразование U -зарядовой симметрии. Поскольку при этом преобразовании $\Xi^- \longleftrightarrow p$, $\Sigma^+ \longleftrightarrow \Xi^0$, $\Sigma^- \longleftrightarrow n$, то эти процессы превращаются в процессы

$$p + \Xi^- \rightarrow \Xi^0 + n, \quad n + \Xi^- \rightarrow n + \Xi^-, \quad \tilde{\Xi}^- + \Xi^- \rightarrow \tilde{n} + n.$$

Таким образом, U -зарядовая симметрия дает соотношение

$$M(\Xi^- p \rightarrow \Sigma^+ \Sigma^-) = M(\Xi^- p \rightarrow n \Xi^0);$$

U - и T -зарядовые симметрии приводят к соотношению

$$M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) = M(\Xi^0 p \rightarrow \Xi^0 p),$$

а U - и T -зарядовые симметрии вместе с T -инвариантностью дают соотношение

$$M(\tilde{p} p \rightarrow \tilde{\Sigma}^- \Sigma^-) = M(\tilde{p} p \rightarrow \tilde{\Xi}^0 \Xi^0).$$

Получаем снова соотношения (95), (96) и (99).

Покажем теперь, что соотношения (87) и (88) являются следствиями сохранения V -спина. Если рассматривать частицы как компоненты V -мультиплетов, то получим следующие V -дублеты:

$$\begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix}$$

по аналогии с T -дублетами

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix}.$$

Из сохранения T -спина мы получили соотношение

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(K^0 p \rightarrow K^0 p) + M(K^0 p \rightarrow K^+ n)$$

(см. гл. 2, п. 4.2). Аналогично из сохранения V -спина вытекают соотношения

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) + M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+);$$

$$M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) = M(K^- p \rightarrow K^- p) - M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+).$$

Таким образом, снова получены соотношения (87) и (88), а также соотношения между амплитудами рождения векторных мезонов (108) и (109).

Если теперь рассматривать рассеяние частиц в V -дублете

$$\begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix},$$

то по аналогии с изотопическим соотношением

$$M(pp \rightarrow pp) = M(np \rightarrow np) + M(np \rightarrow pn)$$

найдем

$$M(pp \rightarrow pp) = M(\Sigma^+ p \rightarrow \Sigma^+ p) + M(\Sigma^+ p \rightarrow p \Sigma^+),$$

а если рассматривать рассеяние частиц в V -дублетах

$$\begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma^- \\ \Xi^- \end{pmatrix},$$

получим

$$M(\Sigma^- p \rightarrow \Sigma^- p) = M(\Xi^- p \rightarrow \Xi^- p) - M(\Xi^- p \rightarrow \Sigma^- \Sigma^+).$$

Таким образом, соотношения (97) и (98) также являются следствием сохранения V -спина.

Рассмотрим теперь рождение барионных резонансов $\frac{3}{2}^+$. Барионные резонансы Δ^- , Y^{*-} , Ξ^{*-} и Ω^- -гиперон образуют V -мультиплет с V -спином, равным $3/2$. Напомним, что имеются следующие V -дублеты:

$$\begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix}.$$

Следовательно, сохранение V -спина приводит к соотношениям между амплитудами процессов

$$\begin{aligned} \pi^- + p &\rightarrow \pi^+ + \Delta^-, \quad \pi^- + p \rightarrow K^+ + Y^{*-}, \\ K^- + p &\rightarrow \pi^+ + Y^{*-}, \quad K^- + p \rightarrow K^+ + \Xi^{*-} \end{aligned}$$

по аналогии с следствиями сохранения T -спина в процессах:

$$\begin{aligned} K^+ + \Xi^0 &\rightarrow K^- + \Delta^{++}, \quad K^+ + \Xi^0 \rightarrow \tilde{K}^0 + \Delta^+, \\ K^0 + \Xi^0 &\rightarrow K^- + \Delta^+, \quad K^0 + \Xi^0 \rightarrow \tilde{K}^0 + \Delta^0. \end{aligned}$$

Здесь имеется соответствие

$$\begin{pmatrix} \Delta^{++} \\ \Delta^+ \\ \Delta^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \Delta^- \\ Y^{*-} \\ \Xi^{*-} \\ \Omega^- \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \dots \Sigma^+ \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \tilde{K}^0 \\ K^- \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^+ \\ -K^+ \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ K^0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} \pi^- \\ K^- \end{pmatrix}.$$

Соотношения (106)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^- \rho \rightarrow \pi^+ \Delta^-) &= M(K^- \rho \rightarrow \pi^+ Y^{*-}) = \\ &= M(\pi^- \rho \rightarrow K^+ Y^{*-}) = M(K^- \rho \rightarrow K^+ \Xi^{*-}) \end{aligned}$$

в действительности являются следствиями сохранения V -спина. Аналогично при сохранении V -спина

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}} M(\pi^- \rho \rightarrow \rho^+ \Delta^-) &= M(K^- \rho \rightarrow \rho^+ Y^{*-}) = \\ &= M(\pi^- \rho \rightarrow K^{*+} Y^{*-}) = M(K^- \rho \rightarrow K^{*+} \Xi^{*-}). \end{aligned}$$

2.4. Сравнение некоторых соотношений между сечениями с экспериментом

Из полученных в п. 2.2 соотношений между амплитудами вытекает ряд равенств и неравенств треугольника между сечениями, а также между поляризациями в различных процессах. Так, например, имеют место равенства между сечениями

$$\sigma(K^- \rho \rightarrow \pi^+ \Sigma^-) = \sigma(K^- \rho \rightarrow K^0 \Xi^0); \quad (112)$$

$$\sigma(\pi^- \rho \rightarrow K^+ \Sigma^-) = \sigma(\tilde{K}^0 \rho \rightarrow K^+ \Xi^0), \quad (113)$$

а также между поляризациями в соответствующих процессах. Из соотношений (87) и (88) получаем неравенства треугольника

$$\left| \sqrt{\sigma(\pi^+ \rho \rightarrow \pi^+ \rho)} - \sqrt{\sigma(K^+ \rho \rightarrow K^+ \rho)} \right| \leq \sqrt{\sigma(\pi^+ \rho \rightarrow K^+ \Sigma^+)}; \quad (114)$$

$$\sqrt{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) - \sigma(K^- p \rightarrow K^- p)} \leq \sqrt{\sigma(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+)}. \quad (115)$$

Что касается сечений рождения барионных резонансов, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^+ \Delta^-) &= \sigma(K^- p \rightarrow \pi^+ Y^{*-}) = \\ &= \sigma(\pi^- p \rightarrow K^+ Y^{*-}) = \sigma(K^- p \rightarrow K^+ \Xi^{*-}); \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \sigma(K^+ p \rightarrow K^0 \Delta^{++}) + 3\sigma(\pi^+ p \rightarrow K^+ Y^{*+}) &= \\ = \sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Delta^{++}) + 3\sigma(\pi^+ p \rightarrow \eta \Delta^{++}). \end{aligned} \quad (117)$$

Если симметрия выполняется строго и массы частиц в каждом унитарном мультиплете равны, то можно сразу сравнить с опытом полученные соотношения между дифференциальными сечениями при одинаковых значениях s и t или соотношения между полными сечениями при одинаковых значениях s . Однако поскольку массы частиц в каждом унитарном мультиплете в действительности не равны между собой, то существуют значения s , лежащие в физической области одного процесса (около порога) и нефизической области другого. Во избежание этой трудности в качестве переменной, при одинаковых значениях которой сравниваются сечения, можно выбрать разность $Q = E - \Sigma m$, где E — полная энергия в системе центра масс, а Σm — сумма масс рождающихся частиц. Отметим, что при малых энергиях кинематические множители в сечениях различных процессов различны, поэтому из соотношений между амплитудами получаются соотношения не между сечениями, а между отношениями сечений к значениям этих множителей. Иначе говоря, полученные соотношения следует сравнить не с экспериментальными, а с некоторыми «исправленными» значениями сечений.

Рассмотрим прежде всего соотношения (112) и (113). При малых энергиях процессы в левых частях проходят через резонанс (барионный резонанс Y^* дает вклад), а сечения процессов в правых частях очень малы. Здесь нарушение симметрии существенно. Если бы симметрия выполнялась строго, то барионный резонанс Y^* мог бы давать вклад во все процессы, и сечения процессов в пра-

вых частях соотношений (112) и (113) также проходили бы через резонанс.

На рис. 12, а приведены данные, относящиеся к неравенству (115). В рассматриваемой области энергии это неравенство выполняется. При больших энергиях ($Q \geq 1$ Гэв) сечение процесса $K^-p \rightarrow \pi^- \Sigma^+$ весьма мало. Если пренебречь этим сечением, то

$$\sigma(K^-p \rightarrow K^-p) \approx \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^-p).$$

Соответствующие экспериментальные данные представлены на рис. 12, б. Поскольку сечение $\sigma(\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^+)$ фактически достаточно мало при всех Q , то получим приближенное равенство

$$\sigma(K^+p \rightarrow K^+p) \approx \sigma(\pi^+p \rightarrow \pi^+p),$$

которое не выполняется при малых энергиях, где барионный резонанс Δ^{++} дает вклад в сечение $\sigma(\pi^+p \rightarrow \pi^+p)$. Значения сечений соответствующих процессов даны на рис. 13, а и б. Отметим, что если бы симметрия выполнялась строго и массы частиц в одном мультиплете были равны, то резонанс Δ^{++} давал бы вклад в сечение $\sigma(\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^+)$.

Из соотношений (87) и (88) между амплитудами можно получить при помощи оптической теоремы также следующие соотношения между полными сечениями упругих процессов и дифференциальными сечениями неупругих процессов при нулевом значении передачи импульса

$$|\sigma_{tot}(\pi^+p) - \sigma_{tot}(K^+p)| \leq \sqrt{16\pi \left. \frac{d\sigma}{dt}(\pi^+p \rightarrow K^+\Sigma^+) \right|_{t=0}}; \quad (118)$$

$$|\sigma_{tot}(\pi^-p) - \sigma_{tot}(K^-p)| \leq \sqrt{16\pi \left. \frac{d\sigma}{dt}(K^-p \rightarrow \pi^-\Sigma^+) \right|_{t=0}}. \quad (119)$$

Здесь уместно выписать также изотопическое соотношение

$$|\sigma_{tot}(\pi^+p) - \sigma_{tot}(\pi^-p)| \leq \sqrt{8\pi \left. \frac{d\sigma}{dt}(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) \right|_{t=0}}. \quad (120)$$

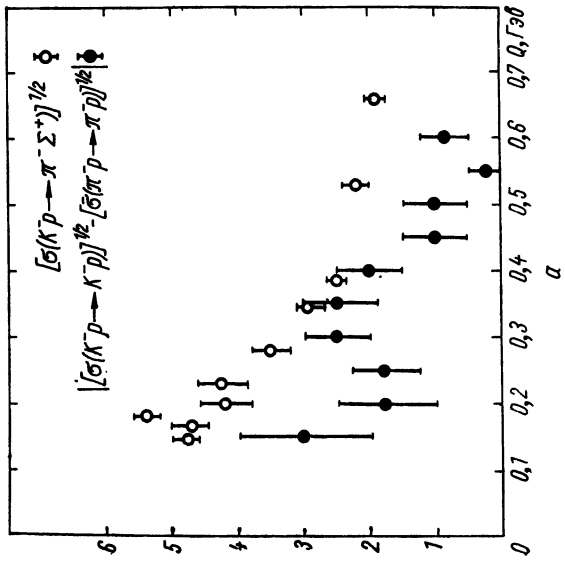
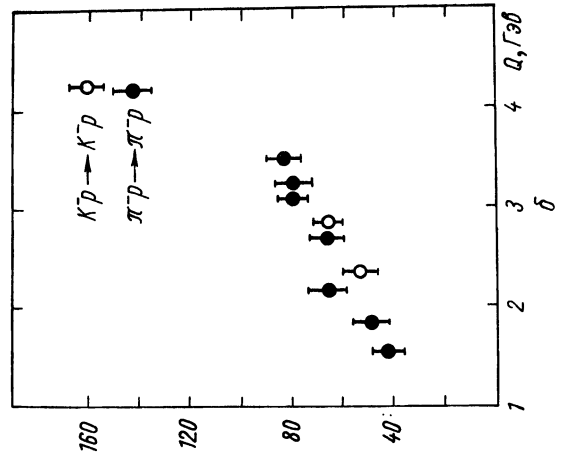


Рис. 12.

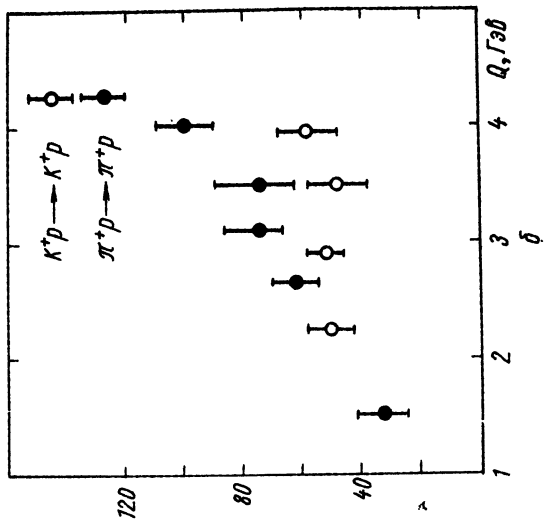
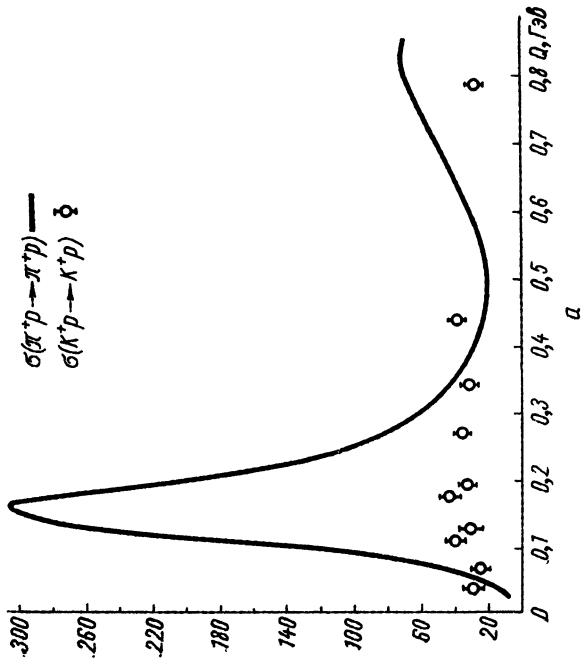


Рис. 13.

Согласно имеющимся данным при больших энергиях

$$\sigma_{tot}(\pi^+p) - \sigma_{tot}(K^+p) \approx (4,0 \pm 0,5) \text{ мбарн};$$

$$\sigma_{tot}(\pi^-p) - \sigma_{tot}(K^-p) \approx (6,0 \pm 0,5) \text{ мбарн};$$

$$\sigma_{tot}(\pi^-p) - \sigma_{tot}(\pi^+p) \approx (2,0 \pm 0,6) \text{ мбарн},$$

а сечения неупругих процессов при нулевой передаче импульса пока неизвестны.

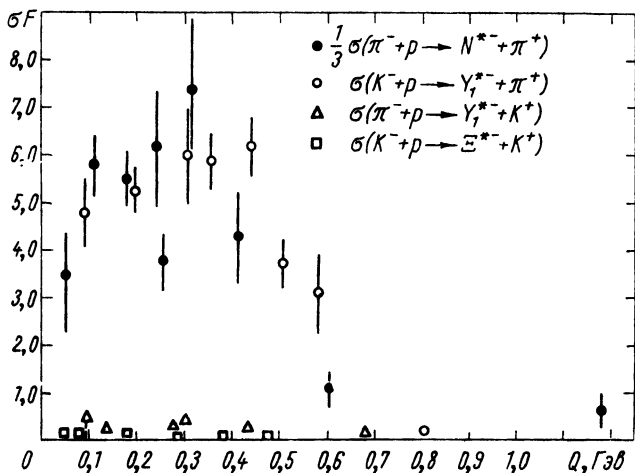


Рис. 14.

Рассмотрим теперь соотношения между сечениями рождения барионных резонансов (116) и (117). На рис. 14 приведены данные, относящиеся к равенствам (116).

В области энергии, где измерены соответствующие сечения, $\frac{1}{3} \sigma(\pi^-p \rightarrow \pi^+\Delta^-)$ и $\sigma(K^-p \rightarrow \pi^+Y^{*-})$ приблизительно равны друг другу, но сильно отличаются от $\sigma(\pi^-p \rightarrow K^+Y^{*-})$ и $\sigma(K^-p \rightarrow K^+\Xi^{*-})$. Может быть, это обусловлено существованием некоторых резонансных состояний систем $\pi^+\Delta^-$ и π^+Y^{*-} . Если массы π - и K -мезонов были бы равны и массы Δ^- , Y^{*-} и Ξ^{*-} также равны, то эти резонансы могли бы давать вклад также в

процессы с рождением K^+Y^{*-} и $K^+\Xi^{*-}$ соответственно. Что касается соотношения (117), то в рамках ошибок эксперимента оно выполняется (рис. 15).

На основе полученных результатов мы можем заключить, что в области энергии, где сечения процессов проходят резонансы, соотношения между сечениями, полученные в унитарной симметрии, не согласуются с экспериментальными данными. Здесь нарушение симметрии

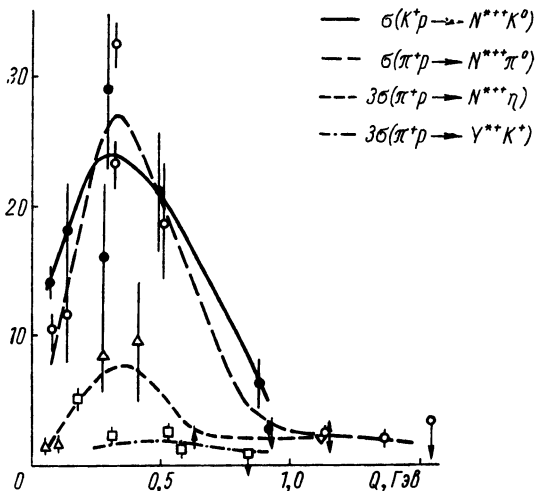


Рис. 15.

играет важную роль. Поэтому следствия унитарной симметрии следует проверить при достаточно большой энергии, где резонансные состояния дают несущественные вклады. К сожалению, в настоящее время сечения неупругих процессов при больших энергиях еще не были измерены с достаточной точностью. Для дальнейшей проверки унитарной симметрии этот пробел должен быть заполнен. Отметим, что необходимо измерить не только полные сечения неупругих процессов, но и дифференциальные сечения этих процессов при нулевом угле вылета. Если соотношения, полученные в унитарной симметрии, не выполняются даже при больших энергиях, то экспериментальные данные позволят судить о том, до какой степени нарушается симметрия.

Литература

Лагранжиан взаимодействия и трехчастичные вершины

- Белов В. П., Шехтер В. М. «Ядерная физика», 2, 757 (1965).
Боков О. Г. Препринт ОИЯИ, Р—2444, 1965.
Dullemond C. et al. Phys. Rev. Lett., 10, 423 (1963).
Gell-Mann M. The Eight Fold Way, CTSL—20, 1961.
Glashow S. L., Rosenfeld A. H. Phys. Rev. Lett., 10, 192 (1963).
Glashow S. L., Socolov R. H. Phys. Rev. Lett., 15, 329 (1965).
Иоффе Б. Л., Кобзарев И. Ю., Померанчук И. Я. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 48, 375 (1965).
Маринов М. С. «Ядерная физика», 2, 321 (1965).
Нгуен Ван Хьеу, Тихонин Ф. Ф. Препринт ОИЯИ, Р—2568, 1966.
Okubo S. Progr. Theor. Phys., 28, 24 (1962).
Okubo S. Phys. Lett., 5, 165 (1963).
Sakurai J. J. Phys. Lett., 10, 132 (1964).
Тапака К. Phys. Rev., 133, B1509 (1964).
Фам Куи Ты. «Ядерная физика», 3, 347 (1966).
Енковски Л., Кухтин В. В., Нгуен Т хи Хонг. «Ядерная физика», 5, 891 (1967).

Мезон-барионное рассеяние и рождение резонансов

- Freund P. G. O. et al. Nuovo cimento, 25, 307 (1962).
Harari H., Lipkin H. J. Phys. Rev. Lett., 13, 208 (1964).
Levinson C. A. et al. Phys. Lett., 1, 44 (1962).
Logunov A. A. Nguyen van Hieu, Hsien Ting chang, Nuovo cimento, 33, 1312 (1964).
Meshkov S. et al. Phys. Rev. Lett., 10, 361 (1963).
Meshkov S., Snow G. A., Yodh G. B. Phys. Rev. Lett., 12, 87 (1964).
Шехтер В. М. «Ж. эксперим. и теор. физ.», 43, 205 (1962).

Электромагнитные и слабые взаимодействия в унитарной симметрии

§ 1. Электромагнитные взаимодействия

1.1. Электромагнитный ток в унитарной симметрии

Как известно, в теории изотопической инвариантности предполагается, что электромагнитный ток сильно взаимодействующих частиц

$$J_{\mu}^e = \frac{1}{2} (J_{\mu}^0 + J_{\mu}^1), \quad (1)$$

где J_{μ}^0 — инвариант изотопической группы; J_{μ}^1 — третья компонента некоторого изотопического вектора V_{μ}^i , $i = 1, 2, 3$,

$$J_{\mu}^1 = V_{\mu}^3 = (V_{\mu})_b^a (\tau_3)_a^b. \quad (2)$$

Так как эти токи не меняют гиперзаряд систем частиц, то они инвариантны относительно калибровочных преобразований волновых функций

$$\psi \rightarrow e^{iaY} \psi,$$

где Y — оператор гиперзаряда. Иначе говоря, это собственные функции оператора Y с нулевыми собственными значениями. Если же существуют еще другие сохраняющиеся квантовые числа, например суперзаряд Z (см. гл. 3, п. 3.2 и 3.3), то для токов J_{μ}^0 и J_{μ}^1 эти квантовые числа также равны нулю. Поскольку октуплет представляет собой унитарный мультиплет с наименьшим числом компонент, содержащий изотопический скаляр и изотопический вектор с нулевым гиперзарядом (а также суперзарядом и пр.), то естественным обобщением изотопических свойств электромагнитного тока является предположение о том, что токи J_{μ}^0 и J_{μ}^1 принадлежат одному и тому же унитарному октуплету $(V_{\mu})_b^a$. Для описания октуплета

вместо спинора $(V_\mu)_\beta^\alpha$ можно пользоваться восьмимерной величиной

$$V_\mu^i = (V_\mu)_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta, \quad (3)$$

[см. гл. 3, формулы (46) и (47)]. Тогда V_μ^8 есть компонента этого октуплета с $T = Y = 0$, а V_μ^3 - компонентой с $Y = 0$, $T = 1$, $T_3 = 0$ [ср. с формулами (1), (32) и (32'') в гл. 3]. Поэтому наше предположение приводит к тому, что электромагнитный ток J_μ^e представляет собой линейную комбинацию компонент V_μ^3 и V_μ^8 октуплета V_μ^i ($i = 1, 2 \dots 8$):

$$J_\mu^e = aJ_\mu^3 + bJ_\mu^8,$$

где a и b — некоторые константы, общие для всех частиц.

Чтобы определить константы a и b , рассмотрим ток J_μ^e для свободных кварков. Так как кварки t_p, t_n, t_λ имеют заряды $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$, то ток J_μ^e равен

$$J_\mu^e = \frac{2}{3} \bar{\Psi}^1 \gamma_\mu \Psi_1 - \frac{1}{3} \bar{\Psi}^2 \gamma_\mu \Psi_2 - \frac{1}{3} \bar{\Psi}^3 \gamma_\mu \Psi_3,$$

где Ψ_α — волновые функции кварков. С другой стороны, спинор $(V_\mu)_\beta^\alpha$ для свободных кварков равен

$$(V_\mu)_\beta^\alpha = \bar{\Psi}^\alpha \gamma_\mu \Psi_\beta - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \bar{\Psi}^\gamma \gamma_\mu \Psi_\gamma$$

Поэтому для свободных кварков

$$J_\mu^e = (V_\mu)_\beta^\alpha (\lambda^e)_\alpha^\beta,$$

где λ^e — диагональная матрица с диагональными элементами $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$. Нетрудно проверить соотношение

$$\lambda^e = \frac{1}{2} \lambda_3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \lambda_8.$$

Отсюда получаем $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Поскольку эти константы общие для всех частиц, электромагнитный ток в унитарной симметрии

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} \left(V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8 \right) = \frac{1}{2} \left[(\lambda_3)_\alpha^\beta + \frac{1}{\sqrt{3}} (\lambda_8)_\alpha^\beta \right] (V_\mu)_\beta^\alpha. \quad (4)$$

В гл. 3 (п. 4 и 2) было рассмотрено разложение унитарных мультиплетов в мультиплеты подгрупп T -спина,

U -спина и V -спина. В частности, было показано, что V -синглетами служат комбинации

$$\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda, \quad \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \eta, \quad \rho^0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi^0,$$

а ортогональные к ним комбинации

$$\Sigma^0 - \sqrt{3}\lambda, \quad \pi^0 - \sqrt{3}\eta, \quad \rho^0 - \sqrt{3}\varphi^0$$

являются компонентами с $V_3 = 0$ V -триплетов. Таким же образом можно показать, что электромагнитный ток [см. формулу (4)]

$$J_\mu^e = \frac{1}{2} \left[V_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V_\mu^8 \right]$$

представляет собой синглет подгруппы V -спина.

Формулу (4) можно переписать в более удобном для применений виде:

$$J_\mu^e = \frac{2}{3} (V_\mu)_1^1 - \frac{1}{3} (V_\mu)_2^2 - \frac{1}{3} (V_\mu)_3^3.$$

Поскольку $(V_\mu)_{\alpha\beta}^{\alpha\beta}$ удовлетворяет условию $(V_\mu)_\alpha^\alpha = 0$, то $-(V_\mu)_2^2 - (V_\mu)_3^3$ можно заменить на $(V_\mu)_1^1$. Следовательно,

$$J_\mu^e = (V_\mu)_1^1. \quad (5)$$

1.2. Электромагнитные вершины

Предположение, что электромагнитный ток является компонентой унитарного октуплета, приводит к ряду экспериментально проверяемых следствий. Рассмотрим некоторые из них. Так, найдем в общем виде матричный элемент октуплетного тока $(V_\nu)_\beta^\alpha$ между состояниями октуплета барионов $\frac{1}{2}^+$:

$$\begin{aligned} \langle p_2 | (V_\mu)_\beta^\alpha | p_1 \rangle = & \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^F(k^2) + \right. \\ & \left. + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right\} (\bar{B}_\nu^\alpha B_\beta^\nu - \bar{B}_\beta^\nu B_\nu^\alpha) + \\ & + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^D(k^2) \right\} \times \\ & \times \left(\bar{B}_\nu^\alpha B_\beta^\nu + \bar{B}_\beta^\nu B_\nu^\alpha - \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \bar{B}_\delta^\nu B_\nu^\delta \right), \quad (6) \end{aligned}$$

где M — масса барионов, а $k = p_1 - p_2$.

Подставив в выражение матричного элемента $(V_{\mu})_1^1$ матрицы B_{β}^{α} и \bar{B}_{β}^{α} , данные в гл. 3 (см. п. 2.2), получим

$$\begin{aligned} \langle p_2 | J_{\mu}^e | p_1 \rangle = & \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_{\mu} u(p_1) f_1^F(k^2) + \right. \\ & \left. + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_{\nu}}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right\} (\bar{p}p + \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ - \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \bar{\Xi}^- \Xi^-) + \\ & + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_{\mu} u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_{\nu}}{2M} u(p_1) \right\} \left[\frac{1}{3} \bar{p}p - \right. \\ & - \frac{2}{3} \bar{n}n - \frac{1}{3} \bar{\lambda}\lambda + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^+ \Sigma^+ + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^0 \Sigma^0 + \frac{1}{3} \bar{\Sigma}^- \Sigma^- - \\ & \left. - \frac{2}{3} \bar{\Xi}^0 \Xi^0 + \frac{1}{3} \bar{\Xi}^- \Xi^- + \frac{1}{3} (\bar{\Sigma}^0 \lambda + \bar{\lambda} \Sigma^0) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Таким образом, формфакторы барионов и формфакторы электромагнитного $\Sigma\lambda$ -перехода выражаются через формфакторы типа F и D следующим образом:

$$\begin{aligned} f_i^p(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^n(k^2) &= -\frac{2}{3} f_i^D(k^2); \\ f_i^{\Xi^-}(k^2) &= f_i^F(k^2) - \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Xi^0}(k^2) &= -\frac{2}{3} f_i^D(k^2); \\ f_i^{\Sigma^+}(k^2) &= f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2), & f_i^{\Sigma^-}(k^2) &= f_i^F(k^2) - \frac{1}{3} f_i^D(k^2); \\ f_i^{\Sigma^0}(k^2) &= \frac{1}{3} f_i^D(k^2); & f_i^{\lambda}(k^2) &= -\frac{1}{3} f_i^D(k^2); \\ f_i^{\Sigma\lambda}(k^2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} f_i^D(k^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда следует, в частности, что магнитные моменты барионов связаны соотношениями

$$\mu_p = \mu_{\Sigma^+}; \quad (9)$$

$$\mu_{\Xi^-} = \mu_{\Sigma^-}; \quad (10)$$

$$\mu_n = -2\mu_{\Sigma^0} = \mu_{\Xi^0} = 2\mu_{\lambda}, \quad (11)$$

не считая изотопического соотношения между магнитными моментами Σ -гиперонов. В силу сохранения заряда все электрические формфакторы заряженных частиц равны единице при $k^2 = 0$, а формфакторы нейтральных частиц обращаются в нуль при $k^2 = 0$. Отсюда следует, что

$f_1^D(0) = 0$. Так как формфакторы $\Sigma\lambda$ -перехода пропорциональны $f_i^D(k^2)$, то

$$f_1^{\Sigma\lambda}(0) = 0, \quad (12)$$

т. е. в распаде

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$$

только один формфактор $f_2^{\Sigma\lambda}(k^2)$ дает вклад согласно требованиям сохранения электромагнитного тока. Что касается константы $f_2^{\Sigma\lambda}(0)$, то из формул (8)

$$f_2^{\Sigma\lambda}(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mu_n. \quad (13)$$

Отметим, что R -инвариантность требует, чтобы $f_i^D(k^2) = 0$ и, следовательно, $\mu_n = 0$, что, очевидно, противоречит опыту.

Рассмотрим теперь соотношения между формфакторами псевдоскалярных мезонов. Матричный элемент тока $(V_\mu)_\beta^\alpha$ между состояниями мезонов с импульсами p_1 и p_2 имеет вид

$$\begin{aligned} \langle p_2 | (V_\mu)_\beta^\alpha | p_1 \rangle = & (p_1 + p_2)_\mu \left[f^F(k^2) (\bar{P}_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma - \bar{P}_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha) + \right. \\ & \left. + f^D(k^2) (\bar{P}_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma + \bar{P}_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha - \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \bar{P}_\delta^\gamma P_\gamma^\delta) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Покажем теперь, что в силу C -инвариантности формфактор типа D равен нулю. Действительно, электромагнитный ток меняет знак при зарядовом сопряжении C , а $(V_\mu)_\beta^\alpha$ преобразуется следующим образом:

$$(V_\mu)_\beta^\alpha \rightarrow - (V_\mu)_\alpha^\beta. \quad (15)$$

С другой стороны, при C -преобразовании

$$P_\beta^\alpha \rightarrow P_\alpha^\beta, \quad \bar{P}_\beta^\alpha \rightarrow \bar{P}_\alpha^\beta,$$

следовательно,

$$(\bar{P}_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma \pm \bar{P}_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha) \rightarrow \pm (\bar{P}_\gamma^\beta P_\alpha^\gamma \pm \bar{P}_\alpha^\gamma P_\gamma^\beta). \quad (16)$$

Сравнивая (15) и (16), получим

$$f^D(k^2) = 0. \quad (17)$$

Отсюда следует, что формфакторы всех нейтральных мезонов равны нулю, а формфакторы заряженных мезонов

равны по величине. В частности,

$$f^{K^0}(k^2) = 0; \quad (18)$$

$$f^{\pi^+}(k^2) = f^{K^+}(k^2). \quad (19)$$

Перейдем теперь к изучению электромагнитных распадов элементарных частиц и резонансов. Унитарная часть матричного элемента электромагнитного тока между состоянием синглета или октуплета векторных мезонов и состоянием октуплета псевдоскалярных мезонов равна

$$\langle P | J_\mu^e | \omega^0 \rangle = g^S \bar{P}_1^1 \omega^0; \quad (20)$$

$$\langle P | J_\mu^e | V \rangle = g^F (\bar{P}_\gamma^1 V_\gamma^1 - \bar{P}_\gamma^2 V_\gamma^2) + g^D (\bar{P}_\gamma^1 V_\gamma^1 + \bar{P}_\gamma^2 V_\gamma^2 - \frac{2}{3} \bar{P}_\gamma^3 V_\gamma^3). \quad (21)$$

При зарядовом сопряжении

$$\omega^0 \rightarrow -\omega^0, \quad \bar{P}_\beta^\alpha \rightarrow \bar{P}_\alpha^\beta, \quad V_\beta^\alpha \rightarrow -V_\alpha^\beta,$$

а ток J_μ^e меняет знак. Отсюда следует, что в силу C -инвариантности константа g^F в формуле (21) равна нулю. Учитывая $\phi\omega$ -смешивание, из формул (20) и (21) получим выражения констант конкретных распадов через g^S и g^D :

$$\left. \begin{aligned} g_{\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0} \gamma} &= \frac{1}{3} g^D; \quad g_{K^* \pm \rightarrow K^{\pm} \gamma} = \frac{1}{3} g^D; \\ g_{K^* 0 \rightarrow K^0 \gamma} &= -\frac{2}{3} g^D; \quad g_{\rho^0 \rightarrow \gamma \gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} g^D; \\ g_{\phi \rightarrow \pi^0 \gamma} &= \frac{g^D}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{g^S}{\sqrt{2}} \sin \theta, \\ g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma} &= \frac{g^D}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{2}} \cos \theta; \\ g_{\phi \rightarrow \gamma \gamma} &= -\frac{g^D}{3} \cos \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \sin \theta; \\ g_{\omega \rightarrow \gamma \gamma} &= -\frac{g^D}{3} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Таким образом, в унитарной симметрии существуют следующие соотношения между константами радиационных

распадов векторных мезонов на псевдоскалярные мезоны:

$$g_{\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma} : g_{K^{*\pm} \rightarrow K^{\pm}\gamma} : g_{K^{*0} \rightarrow K^0\gamma} : g_{\rho^0 \rightarrow \gamma\gamma} = 1 : 1 : -2 : \sqrt{3}; \quad (23)$$

$$|g_{\omega \rightarrow \pi^0\gamma}|^2 + |g_{\varphi \rightarrow \pi^0\gamma}|^2 = 3(|g_{\omega \rightarrow \gamma\gamma}|^2 + |g_{\varphi \rightarrow \gamma\gamma}|^2). \quad (24)$$

Рассмотрим радиационные распады мезонов 2^+ на псевдоскалярные мезоны. Из C -инвариантности следует

$$\langle P | J_{\mu}^e | \omega'^0 \rangle = 0; \quad (25)$$

$$\langle P | J_{\mu}^e | T \rangle = f^F (\bar{P}_{\gamma}^1 T_{\gamma}^1 - \bar{P}_{\gamma}^1 T_{\gamma}^1); \quad (26)$$

и, следовательно, константы радиационных распадов всех нейтральных частиц равны нулю, а константы распадов K'^{\pm} и ρ'^{\pm} равны по абсолютной величине:

$$g_{K'^{\pm} \rightarrow K^{\pm}\gamma} = g_{\rho'^{\pm} \rightarrow \pi^{\pm}\gamma}; \quad (27)$$

$$g_{\rho'^0 \rightarrow \pi^0\gamma} = g_{\rho'^0 \rightarrow \gamma\gamma} = g_{\omega'^0 \rightarrow \pi^0\gamma} = \dots = g_{K'^0 \rightarrow K^0\gamma} = 0. \quad (28)$$

Отметим, что одно из равенств (28), а именно последнее ($g_{K'^0 \rightarrow K^0\gamma} = 0$), является новым следствием унитарной симметрии, а остальные могут быть получены из C -инвариантности.

Аналогичные соотношения также имеются для констант радиационных распадов частиц из мезонного нонуплета 1^+ . Если этот нонуплет имеет C -четность -1 , то мы имеем соотношения вида (23) и (24), а если C -четность нонуплета 1^+ равна $+1$, то имеют место соотношения вида (27) и (28).

Поскольку X -мезон — унитарный синглет, то матричный элемент тока J_{μ}^e — компоненты октуплета — между состояниями X - и ω^0 -мезона равен нулю:

$$\langle \omega^0 | J_{\mu}^e | X \rangle = 0, \quad (29)$$

а матричный элемент между состояниями X -мезона и октуплета векторных мезонов зависит от

$$\langle V | J_{\mu}^e | X \rangle = \bar{f} V^1 X. \quad (30)$$

Учитывая $\varphi\omega$ -смешивание, получаем

$$g_{X \rightarrow \rho^0\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{f}, \quad g_{X \rightarrow \omega\gamma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sin \theta \bar{f}; \quad (31)$$

$$g_{\varphi \rightarrow X\gamma} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cos \theta \bar{f}.$$

Следовательно,

$$g_{X \rightarrow \rho^0 \gamma} : g_{X \rightarrow \omega \gamma} : g_{\varphi \rightarrow X \gamma} = 1 : \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} : \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}, \quad (32)$$

где θ — угол $\varphi\omega$ -смешивания.

Многие из написанных соотношений можно получить весьма просто, если применить технику подгруппы $SU(2)$ V -спина и пользоваться тем, что электромагнитный ток является V -синглетом. Например, матричный элемент электромагнитного тока между состояниями V -дублетов

$$\left(\begin{array}{c} K^+ \\ -\pi^+ \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} K^{*+} \\ -\rho^+ \end{array} \right)$$

должен быть инвариантом V -подгруппы и равен

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} K^+ \\ \pi^+ \end{array} \right) \middle| J_\mu^e \middle| \left(\begin{array}{c} K^{*+} \\ \rho^+ \end{array} \right) \right\rangle = g(\bar{K}^+ K^{*+} + \bar{\pi}^+ \rho^+).$$

Отсюда получим одно из соотношений (23)

$$g_{K^{*+} \rightarrow K^+ \gamma} = g_{\rho^+ \rightarrow \pi^+ \gamma}.$$

Аналогично найдем соотношение (27).

Метод V -спина оказывается весьма удобным при изучении ряда электромагнитных процессов. Поскольку комбинация $\pi^0 - \sqrt{3}\eta$ является компонентой V -триплета, а ток — V -синглетом, то матричный элемент произведения двух токов между вакуумом и состоянием $\pi^0 - \sqrt{3}\eta$ равен нулю:

$$\langle 0 | J_\mu^e(x) J_\mu^e(y) | \pi^0 - \sqrt{3}\eta \rangle = 0.$$

Отсюда получим

$$\langle 0 | J_\mu^e(x) J_\nu^e(y) | \pi^0 \rangle = \sqrt{3} \langle 0 | J_\mu^e(x) J_\nu^e(y) | \eta \rangle. \quad (33)$$

С другой стороны, матричные элементы радиационных распадов $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$; $\eta \rightarrow \gamma + \gamma$ пропорциональны матричным элементам произведения токов между вакуумом и состояниями этих частиц. Поэтому из равенства (33) получаем соотношение между константами рассматриваемых распадов

$$g_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = \sqrt{3} g_{\eta \rightarrow \gamma\gamma}. \quad (34)$$

Рассмотрим теперь матричные элементы виртуальных переходов между фотоном и нейтральными векторными мезонами ρ^0 , ω , φ . Матричные элементы равны

$$\langle 0 | J_\mu^e | \omega^0 \rangle = 0 \quad (35)$$

$$\langle 0 | J_\mu^e | V \rangle = fV_1^1 \quad (36)$$

по аналогии с соотношениями (29) и (30). Отсюда

$$g_{\rho \rightarrow \gamma} : g_{\omega \rightarrow \gamma} : g_{\varphi \rightarrow \gamma} = 1 : \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} : \frac{\cos \theta}{\sqrt{3}}, \quad (37)$$

где θ — угол $\varphi\omega$ -смешивания.

Рассмотрим, наконец, электромагнитные распады дуплета барионных резонансов. Унитарная часть матричного элемента имеет вид

$$\langle B | J_\mu^e | D \rangle = f\varepsilon^{1\sigma\beta} \bar{B}_x^\gamma D_{\beta\gamma 1}. \quad (38)$$

Константы конкретных процессов с точностью до знака равны:

$$\begin{aligned} g_{\Delta^+ \rightarrow p\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f; & g_{\Delta^0 \rightarrow n\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f; \\ g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f; & g_{Y^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \gamma} &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} f; \\ g_{Y^{*0} \rightarrow \lambda\gamma} &= \frac{1}{2} f; & g_{Y^{*-} \rightarrow \Sigma^- \gamma} &= 0; \\ g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \gamma} &= \frac{1}{\sqrt{3}} f; & g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- \gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Найдем соотношения:

$$\begin{aligned} g_{\Delta^+ \rightarrow p\gamma} : g_{\Delta^0 \rightarrow n\gamma} : g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+ \gamma} : g_{Y^{*0} \rightarrow \Sigma^0 \gamma} : g_{Y^{*0} \rightarrow \lambda\gamma} : g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0 \gamma} &= \\ &= 1 : 1 : 1 : -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1, \end{aligned} \quad (40)$$

$$g_{Y^{*-} \rightarrow \Sigma^- \gamma} = g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- \gamma} = 0, \quad (41)$$

среди которых только одно соотношение

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p\gamma} = g_{\Delta^0 \rightarrow n\gamma}$$

получается из изотопической инвариантности. Отметим, что все соотношения (40) и (41) можно получить просто

из сохранения V -спина. Действительно, существуют следующие V -мультиплеты:

$$\begin{pmatrix} \Delta^+ \\ -Y^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Sigma^- \\ \Xi^- \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Delta^0 \\ Y^{*0} \\ \Xi^{*0} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ \frac{1}{2} \Sigma^0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \\ \Xi^0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta^- \\ Y^{*-} \\ \Xi^{*-} \\ \Omega^- \end{pmatrix},$$

а комбинация

$$\sqrt{3}\Sigma^0 + \lambda$$

является V -синглетом, как и ток J_μ^e . Тогда из инвариантности относительно подгруппы V -спина сразу вытекают соотношения

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p\gamma} = g_{Y^{*+} \rightarrow \Sigma^+\gamma}; \\ g_{\Delta^0 \rightarrow n\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} g_{Y^{*0} \rightarrow \lambda\gamma} - \frac{1}{2} g_{Y^{*0} \rightarrow \Sigma^0\gamma} = g_{\Xi^{*0} \rightarrow \Xi^0\gamma}; \\ g_{Y^{*-} \rightarrow \Sigma^-\gamma} = g_{\Xi^{*-} \rightarrow \Xi^-\gamma} = \sqrt{3} g_{Y^{*0} \rightarrow \Sigma^0\gamma} + g_{Y^{*0} \rightarrow \lambda\gamma} = 0.$$

С другой стороны, из сохранения T -спина получим

$$g_{\Delta^+ \rightarrow p\gamma} = g_{\Delta^0 \rightarrow n\gamma}.$$

Нетрудно видеть, что все эти соотношения полностью эквивалентны соотношениям (40) и (41).

1.3. Соотношения между вероятностями распадов

На основе полученных выше соотношений между константами радиационных распадов можно получить соотношения между вероятностями соответствующих процессов. Рассмотрим радиационные распады векторных мезонов. Матричные элементы конкретных процессов имеют вид.

$$M(V \rightarrow P\gamma) = eg_i \bar{\varphi}(q) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{e}_\alpha k_\beta q_\gamma \xi_\delta, \quad (42)$$

где k и q — импульсы фотона и псевдоскалярного мезона, e_α и ξ_δ — волновые функции фотона и векторного мезона, а константы g_i различных процессов связаны между собой соотношениями (23) и (24). Обозначим M и m

Массы векторного и псевдоскалярного мезонов. Вероятность

$$W(V \rightarrow P\gamma) = \frac{\alpha |g_i|^2}{96\pi} \left(\frac{M^2 - m^2}{M} \right)^3. \quad (43)$$

Соотношения между вероятностями даны в табл. 13.

Т а б л и ц а 13

Отношение вероятностей	Теоретическое значение
$\frac{W(K^{*\pm} \rightarrow K^\pm\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,58
$\frac{W(K^{*0} \rightarrow K^0\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	2,32
$\frac{W(\rho^0 \rightarrow \eta\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,36
$\frac{W(\omega \rightarrow \pi^0\gamma) + 0,44W(\varphi \rightarrow \pi^0\gamma)}{W(\omega \rightarrow \eta\gamma) + 0,12W(\varphi \rightarrow \eta\gamma)}$	21

Матричные элементы радиационных распадов мезонов 2^+ на псевдоскалярные мезоны имеют вид

$$M(T \rightarrow P\gamma) = eg_i \bar{\varphi}(q) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{e}_\alpha p_\beta k_\gamma k_\sigma T_{\delta\sigma}, \quad (44)$$

где p_β и $T_{\delta\sigma}$ — импульс и волновая функция мезона 2^+ . Найдем отношение вероятностей

$$\frac{W(K'^{\pm} \rightarrow K^\pm\gamma)}{W(\rho'^{\pm} \rightarrow \pi^\pm\gamma)} = \left(\frac{m_{K'}^2 - m_K^2}{m_{\rho'}^2 - m_\pi^2} \right)^5 \left(\frac{m_{\rho'}}{m_{K'}} \right)^5 \approx 0,85. \quad (45)$$

Отметим, что

$$W(K'^0 \rightarrow K^0\gamma) = 0. \quad (46)$$

Рассмотрим теперь радиационные распады мезонов 1^+ на псевдоскалярные мезоны и фотон. Матричный элемент каждого процесса имеет вид

$$M(A \rightarrow P\gamma) = eg_i \bar{\varphi}(q) \bar{e}_\mu(k) [q_\mu A_\nu(p) k_\nu - A_\mu(p)(qk)], \quad (47)$$

а вероятность

$$W(A \rightarrow P\gamma) = \frac{\alpha |g_i|^2}{96\pi} \left(\frac{M^2 - m^2}{M} \right)^3, \quad (48)$$

где M и m — массы мезонов 1^+ и 0^- соответственно. Между константами g_i имеют место соотношения (23) и (24) или (27) и (28) в зависимости от C -четности мезонов 1^+ . Для рассмотренного в предыдущей главе нонуплета мезонов 1^+ с C -четностью -1 из соотношений (23), (24) и (48) получим соотношения между вероятностями, приведенные в табл. 14.

Таблица 14

Отношение вероятностей	Теоретическое значение
$\frac{W(K^{*\prime\pm} \rightarrow K^{\pm}\gamma)}{W(B^{\pm} \rightarrow \pi^0\gamma)}$	0,51
$\frac{W(K^{*\prime 0} \rightarrow K^0\gamma)}{W(B^{\pm} \rightarrow \pi^0\gamma)}$	2,03
$\frac{W(B^0 \rightarrow \eta\gamma)}{W(B^{\pm} \rightarrow \pi^0\gamma)}$	1,58

Аналогично равенство (32) приводит к соотношениям между вероятностями распадов

$$X \rightarrow \rho^0 + \gamma; \quad X \rightarrow \omega + \gamma; \quad \varphi \rightarrow X + \gamma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & W(X \rightarrow \rho^0\gamma) : W(X \rightarrow \omega\gamma) : W(\varphi \rightarrow X\gamma) = \\ & = \left(\frac{m_X^2 - m_\rho^2}{m_X} \right)^3 : \frac{\sin^2 \theta}{3} \left(\frac{m_X^2 - m_\omega^2}{m_X} \right)^3 : \frac{\cos^2 \theta}{3} \left(\frac{m_\varphi^2 - m_X^2}{m_\varphi} \right)^3 = 13 : 3 : 1, \end{aligned} \quad (49)$$

Из равенства (34) получим

$$\frac{W(\eta \rightarrow \gamma\gamma)}{W(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} = \frac{1}{3} \left(\frac{m_\eta}{m_\pi} \right)^3 = 23. \quad (50)$$

Соотношения (37) можно проверить изучением электромагнитных распадов нейтральных векторных мезонов

$$\rho^0 \rightarrow e^+ + e^-; \quad \mu^+ + \mu^-;$$

$$\omega \rightarrow e^+ + e^-; \quad \mu^+ + \mu^-;$$

$$\varphi \rightarrow e^+ + e^-; \quad \mu^+ + \mu^-.$$

Матричные элементы процессов такого типа имеют вид

$$M(V \rightarrow l^+ l^-) = e^2 g_{V \rightarrow \gamma} \frac{1}{M^2} \bar{u}(k_1) \gamma_{\mu\nu} v(k_2) \xi_{\mu}, \quad (51)$$

где ξ_{μ} , $u(k_1)$, $v(k_2)$ — волновые функции векторных мезонов и лептонов соответственно; M — масса мезонов, а $g_{V \rightarrow \gamma}$ — константы виртуальных переходов между состояниями фотона и векторных мезонов. Вероятность равна

$$W(V \rightarrow l^+ l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3} |g_{V \rightarrow \gamma}|^2 \frac{1}{M^3} \left[1 + 2 \left(\frac{m_l}{M} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[1 - 4 \left(\frac{m_l}{M} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (52)$$

где m_l — масса лептонов. Из соотношений (52) и (37) получим

$$W(\rho^0 \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-) : W(\omega \rightarrow e^+ e^-, \mu^+ \mu^-) : W(\varphi \rightarrow e^+ e^-, \\ \mu^+ \mu^-) = 1 : \frac{3}{8} \sin^2 \theta : \frac{3}{2} \cos^2 \theta \approx 1 : \frac{1}{8} : 1. \quad (53)$$

При изучении формфакторов барионов мы показали, что матричный элемент распада

$$\Sigma^0 \rightarrow \lambda + \gamma$$

полностью определяется магнитным моментом нейтрона

$$M(\Sigma \rightarrow \lambda \gamma) = - \sqrt{\frac{3}{2}} e \mu_n e_{\mu} \bar{u}_{\lambda}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_{\nu}}{2M} u_{\Sigma}(p_1), \quad (54)$$

где M — средняя масса барионов. Таким образом, вероятность этого распада равна

$$W(\Sigma \rightarrow \lambda \gamma) = \frac{3\alpha}{2} \mu_n^2 \frac{\omega^3}{M^2}; \quad \omega = \frac{M_{\Sigma^0}^2 - M_{\lambda}^2}{2M_{\Sigma^0}}. \quad (55)$$

Рассмотрим, наконец, распады барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$. Матричные элементы этих процессов имеют вид

$$M(D \rightarrow B \gamma) = e \bar{u}(q) \left\{ g_i \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{ik_{\mu}}{m+M} \gamma_{\nu} \right) \gamma_5 + \right. \\ \left. + f_i \frac{1}{(m+M)^2} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} p_{\sigma} k_{\rho} \right\} u_{\mu}(p) \bar{e}_{\nu}, \quad (56)$$

где $u(q)$ и $u_{\mu}(p)$ — волновые функции барионов и барионных резонансов с импульсами q и p соответственно,

m и M — их массы, а константы g_i и f_i для конкретных процессов связаны между собой [см. формулу (40)], Вероятность равна

$$\begin{aligned}
 W(D \rightarrow B\gamma) = & \frac{e^2}{24\pi} \frac{M^2 - m^2}{M} \left\{ |g_i|^2 \left[\left(1 - \frac{m}{M}\right)^2 - \right. \right. \\
 & - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{m}{M}\right)^3 \left(1 + \frac{m}{M}\right) \left. \right] + 4 |f_i|^2 \left(\frac{M}{m+M}\right)^4 \times \\
 & \times \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right)^2 - \operatorname{Re} g_i f_i^* \left(\frac{M}{m+M}\right)^2 \times \\
 & \times \left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)^2 \left(3 + \frac{m}{M}\right) \left. \right\}. \quad (57)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что отношения кинематических факторов при $|g_i|^2$, $|f_i|^2$ и $\operatorname{Re} f_i^* g_i$ различны для различных процессов. Поэтому из соотношений между константами нельзя получить простые соотношения между вероятностями. Таким образом, в данном случае для проверки предсказаний унитарной симметрии необходимо прежде всего изучить поляризационные эффекты и определить независимые константы в каждом процессе (с точностью до фазы), а затем сравнить с равенствами (40). Отметим также, что в силу соотношений (41) вероятность распадов

$$Y^{*-} \rightarrow \Sigma^- + \gamma, \quad \Xi^{*-} \rightarrow \Xi^- + \gamma.$$

должна обращаться в нуль.

1.4. Проверка унитарной симметрии в опытах с встречными пучками

Создание ускорителей с встречными пучками электронов и позитронов открывает новые возможности экспериментальной проверки предсказаний унитарной симметрии относительно электромагнитных формфакторов мезонов, а также формфакторов в вершинах различных электромагнитных переходов между состояниями мезонов.

Рассмотрим сначала рождение пар псевдоскалярных мезонов при столкновении электрона и позитрона высоких энергий. Поскольку формфактор K^0 -мезона равен нулю, то процесс

$$e^+ + e^- \rightarrow K^0 + \tilde{K}^0$$

не происходит. Далее, равенство формфакторов π - и K -мезонов приводит к тому, что отношение сечений процессов

$$e^+ + e^- \rightarrow K^+ + K^-$$

и

$$e^+ + e^- \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

равно отношению кинетических коэффициентов в выражении сечения. Матричный элемент имеет вид:

$$M = ef(k^2) \bar{v}(-k_2) \gamma_\mu u(k_1) \bar{\varphi}(p_1) \varphi(p_2) (p_1 - p_2)_\mu \frac{1}{k^2}, \quad (58)$$

где $u(k_1)$ и $v(-k_2)$ — волновые функции электрона и позитрона с импульсами k_1 и k_2 , $\varphi(p_i)$ — волновые функции мезонов с импульсами p_i , $k_1 + k_2 = p_1 + p_2$, а $f(k^2)$ — формфактор данного мезона. Полное сечение равно

$$\sigma(E) = \frac{\alpha}{6} |f(-E^2)|^2 \left(1 - \frac{4m^2}{E^2}\right)^{3/2} \frac{1}{E^2}, \quad (59)$$

где $E = \sqrt{-k^2}$ — полная энергия в системе центра масс, m — масса мезонов. Отсюда получим

$$\frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow K^+K^-)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-)} = \left(\frac{E^2 - 4m_K^2}{E^2 - 4m_\pi^2}\right)^{3/2}. \quad (60)$$

Аналогично матричный элемент процесса рождения псевдоскалярного мезона и векторного мезона, например

$$e^+ + e^- \rightarrow \rho^+ + \pi^-,$$

имеет вид

$$M = eg(k^2) \bar{v}(-k_2) \gamma_\mu u(k_1) \bar{\varphi}(p_2) \xi_\nu(p_1) \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} (p_1 + p_2)_\sigma (p_1 - p_2)_\rho, \quad (61)$$

где $\xi(p_1)$ и $\varphi(p_2)$ — волновые функции векторного и псевдоскалярного мезонов с импульсами p_1 и p_2 . Их массы обозначим m_1 и m_2 соответственно. Полное сечение

$$\sigma(E) = \frac{1}{3} \alpha |g(-E^2)|^2 \left(1 - \frac{m_1^2 + m_2^2}{E^2} + \frac{(m_2^2 - m_1^2)^2}{E^4}\right)^{3/2}. \quad (62)$$

Из этой формулы и соотношений вида (23), (24) и (32) между формфакторами сразу вытекают соотношения

между сечениями процессов:

$$\begin{aligned}
 e^+ + e^- &\rightarrow \rho^+ + \pi^-; & e^+ + e^- &\rightarrow \rho^0 + \pi^0; \\
 e^+ + e^- &\rightarrow K^{*+} + K^-; & e^+ + e^- &\rightarrow K^{*0} + K^0; \\
 e^+ + e^- &\rightarrow \rho^0 + \eta; & e^+ + e^- &\rightarrow \omega + \pi^0; \\
 e^+ + e^- &\rightarrow \varphi + \pi^0; & e^+ + e^- &\rightarrow \omega + \eta; \\
 e^+ + e^- &\rightarrow \varphi + \eta; & e^+ + e^- &\rightarrow \chi + \rho; \\
 e^+ + e^- &\rightarrow \varphi + \chi; & e^+ + e^- &\rightarrow \omega + \chi.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим процессы

$$e^+ + e^- \rightarrow \pi^0 + \gamma$$

и

$$e^+ + e^- \rightarrow \eta + \gamma.$$

Из соотношения вида (34) и выражения для сечения следует, что отношение сечений равно

$$\frac{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \eta + \gamma)}{\sigma(e^+ + e^- \rightarrow \pi + \gamma)} = \frac{1}{3} \left(\frac{E^2 - m_\eta^2}{E^2 + m_\eta^2} \right)^3 \left(\frac{E^2 + m_\pi^2}{E^2 - m_\pi^2} \right)^3. \quad (63)$$

1.5. Соотношения между амплитудами фоторождения

Спинорную технику, развитую в гл. 4, можно применить также к изучению процессов фоторождения. Однако многие соотношения между амплитудами различных процессов можно получить методом V -спина. Поскольку электромагнитный ток является V -синглетом, то можно сказать, что в электромагнитном взаимодействии V -спин сохраняется. С другой стороны, имеем следующие V -мультиплеты (см. гл. 3, п. 2.2):

$$\left(\begin{array}{c} \rho \\ -\Sigma^+ \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} n \\ -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \\ \Xi^0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} K^+ \\ -\pi^+ \end{array} \right).$$

Отсюда получаем, как следствие сохранения V -спина, соотношение

$$-\langle n\pi^+ | J_\mu^e | \rho \rangle = \sqrt{2} \langle \left(-\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \right) K^+ | J_\mu^e | \rho \rangle$$

или

$$\frac{1}{2} M(\gamma p \rightarrow \Sigma^0 K^+) = \sqrt{\frac{3}{2}} M(\gamma p \rightarrow \lambda K^+) + M(\gamma p \rightarrow n\pi^+). \quad (64)$$

Аналогично для амплитуд фоторождения частиц из V -мультиплетов

$$\begin{pmatrix} K^+ \\ -\pi^+ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta^0 \\ Y^0 \\ \Xi^0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K^{*+} \\ -\rho^+ \end{pmatrix}$$

(см. гл. 3, п. 2.2) найдем соотношения

$$M(\gamma p \rightarrow \Delta^0 \pi^+) = -\sqrt{2} M(\gamma p \rightarrow Y^0 K^+); \quad (65)$$

$$M(\gamma p \rightarrow \Delta^0 \rho^+) = -\sqrt{2} M(\gamma p \rightarrow Y^0 K^{*+}). \quad (66)$$

Можно получить также ряд других более сложных соотношений. Однако на этом останавливаться не будем.

1.6. Электромагнитное расщепление масс частиц в изотопических мультиплетах

Как было отмечено в гл. 2 (п. 3.3), перенормировка массы в результате электромагнитного взаимодействия приводит к расщеплению масс частиц в каждом изотопическом мультиплете, и в массовом члене лагранжиана возникает добавка, инвариантная по отношению к изотопической группе (и, следовательно, по отношению к группе унитарной симметрии). Эта добавка преобразуется как произведение электромагнитного тока на себя относительно изотопической группы, а также относительно группы унитарной симметрии. Так как ток преобразуется как компонента октуплета, то произведение тока на себя должно содержаться в произведении двух октуплетов

$$8 \times 8 = 1 + 8 + 8 + 10 + \bar{10} + 27.$$

Поэтому оно может содержать части, преобразующиеся по представлениям 1, 8, 10, $\bar{10}$ и 27 группы $SU(3)$. Напомним, что электромагнитный ток является V -синглетом с $Y = 0$, $Q = 0$, а декуплет и сопряженный декуплет содержат только V -синглеты с $Y = 1$, $Q = +2$ и $Y = -1$, $Q = -2$ соответственно (см. гл. 3, п. 2.2). Поэтому произведение тока на себя не может содержать частей, при-

надлежащих декуплету и сопряженному декуплету. Таким образом, мы заключаем, что, наряду с инвариантным членом, добавка к массовой части лагранжиана за счет электромагнитного взаимодействия содержит еще два члена, являющихся компонентами с нулевыми V -спином, гиперзарядом и зарядом октуплета и 27-плета.

Рассмотрим электромагнитную добавку к массовой части лагранжиана барионов. Октуплетный член имеет вид*

$$\frac{b}{3} (2\bar{B}_\alpha^1 B_1^\alpha - \bar{B}_\alpha^2 B_2^\alpha - \bar{B}_\alpha^3 B_3^\alpha) + \frac{c}{3} (2\bar{B}_1^\alpha B_\alpha^1 - \bar{B}_2^\alpha B_\alpha^2 - \bar{B}_3^\alpha B_\alpha^3) = \\ = b\bar{B}_\alpha^1 B_1^\alpha + c\bar{B}_1^\alpha B_\alpha^1 - \frac{b+c}{3} B_\beta^\alpha B_\alpha^\beta. \quad (67)$$

Так как последний член в правой части соотношения (67) является инвариантом, то его можно включить в синглетный член. Следовательно, в качестве вклада типа октуплета можно взять два первых члена в правой части соотношения (67). Аналогично вклад типа 27-плета имеет вид линейной комбинации произведения

$$\bar{B}_1^1 B_1^1$$

и двух рассмотренных (октуплетного и синглетного) членов. Таким образом, электромагнитная добавка к массам барионов имеет вид

$$\delta M = a_1 \bar{B}_\beta^\alpha B_\alpha^\beta + a_2 \bar{B}_\alpha^1 B_1^\alpha + a_3 \bar{B}_1^\alpha B_\alpha^1 + a_4 \bar{B}_1^1 B_1^1. \quad (68)$$

Значения δM для каждой частицы и значение параметра $\Sigma\lambda$ -смешивания выражаются через a_i следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta M_p &= a_1 + a_2; & \delta M_n &= a_1; \\ \delta M_{\Sigma^+} &= a_1 + a_2; & \delta M_{\Sigma^-} &= a_1 + a_3; \\ \delta M_{\Sigma^0} &= a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{2} a_3 + \frac{1}{2} a_4; \\ \delta M_\lambda &= a_1 + \frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{6} a_3 + \frac{1}{6} a_4; \\ \delta M_{\Xi^0} &= a_1; & \delta M_{\Xi^-} &= a_1 + a_3; \\ M_{\Sigma\lambda} &= \frac{1}{2\sqrt{3}} (a_2 + a_3 + a_4). \end{aligned} \quad (69)$$

* Напомним, что компонентой с $V = Y = Q = 0$ октуплета является комбинация $\frac{1}{\sqrt{6}} (2\Phi_1^1 - \Phi_2^2 - \Phi_3^3)$.

Отсюда получаем соотношение между разностями масс частиц в изотопических мультиплетах

$$M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} = M_n - M_p + M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0}, \quad (70)$$

которое хорошо согласуется с опытом:

$$M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0} = (5,5 \pm 1) \text{ Мэв};$$

$$M_n - M_p = +1,3 \text{ Мэв};$$

$$M_{\Sigma^-} - M_{\Sigma^+} = (+7,7 \pm 0,3) \text{ Мэв}.$$

Что касается параметра $\Sigma\lambda$ -смешивания, то

$$M_{\Sigma\lambda} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ (M_p - M_n) + (M_{\Xi^-} - M_{\Xi^0}) + \left(M_{\Sigma^0} - \frac{M_{\Sigma^+} + M_{\Sigma^-}}{2} \right) \right\}. \quad (71)$$

Аналогично найдем добавку к массам частиц из декуплета

$$\delta M = a_1 \bar{D}^{\{\alpha\beta\gamma\}} D_{\{\alpha\beta\gamma\}} + a_2 \bar{D}^{\{1\alpha\beta\}} D_{\{1\alpha\beta\}} + a_3 \bar{D}^{\{11\alpha\}} D_{\{11\alpha\}}. \quad (72)$$

Для конкретных частиц имеем:

$$\left. \begin{aligned} \delta M_{\Delta^{++}} &= a_1 + a_2 + a_3; & \delta M_{\Delta^+} &= a_1 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{1}{3} a_3; \\ \delta M_{\Delta^0} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2; & \delta M_{\Delta^-} &= a_1; \\ \delta M_{Y^{*+}} &= a_1 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{1}{3} a_3; & \delta M_{Y^{*-}} &= a_1; \\ \delta M_{Y^{*0}} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2; & \delta M_{\Xi^{*0}} &= a_1 + \frac{1}{3} a_2; \\ \delta M_{\Xi^{*-}} &= a_1; & \delta M_{\Xi^-} &= a_1. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Очевидно, что изотопическое соотношение (см. гл. 2, п. 3.3)

$$M_{\Delta^{++}} - M_{\Delta^-} = 3(M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0})$$

выполняется. Кроме того,

$$M_{\Delta^+} - M_{\Delta^0} = M_{Y^{*+}} - M_{Y^{*0}},$$

$$M_{\Delta^0} - M_{\Delta^-} = M_{Y^{*0}} - M_{Y^{*-}} = M_{\Xi^{*0}} - M_{\Xi^{*-}}. \quad (74)$$

В заключение отметим, что соотношение (70) для мезонов является тождеством в силу C -инвариантности, а формула, аналогичная равенству (71), дает параметр $\pi\eta$ -смешивания:

$$\delta_{\pi\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}} [2(m_K^2 - m_{K^0}^2) + (m_{\pi^0}^2 - m_{\pi^+}^2)]. \quad (75)$$

§ 2. Слабые взаимодействия

2.1. Токи слабых взаимодействий в унитарной симметрии

В гл. 2 были изучены изотопические свойства тока слабых взаимодействий барионов и мезонов с $\Delta S = 0$

$$J_\mu = J_\mu^V + J_\mu^A$$

и тока слабых взаимодействий барионов и мезонов с $\Delta S = \Delta Q = 1$

$$S_\mu = S_\mu^V + S_\mu^A.$$

Мы предположили, что $J_\mu^{V,A}$ — компоненты изотопических триплетов ($T_3 = -1, T = 1$) с $Y = 0$, а $S_\mu^{V,A}$ — компоненты изотопических дублетов

$$\left(T_3 = -\frac{1}{2}, T = \frac{1}{2}\right) \text{ с } Y = -1.$$

С другой стороны, известно, что октуплет является унитарным мультиплетом с наименьшим числом компонент, который содержит изотопический триплет с $Y = 0$ и изотопические дублеты с $Y = \pm 1$. Поэтому естественным обобщением рассмотренных изотопических свойств токов слабых взаимодействий барионов и мезонов служит предположение о том, что токи J_μ^V и S_μ^V , а также J_μ^A и S_μ^A вместе с сопряженными к ним токами принадлежат одним и тем же октуплетам $(V_\mu)_\beta^\alpha$ и $(A_\mu)_\beta^\alpha$ соответственно:

$$\left. \begin{aligned} J_\mu^V &= \alpha_V (V_\mu)_2^1; & (J_\mu^V)^\dagger &= \alpha_V (V_\mu)_1^2; \\ S_\mu^V &= \beta_V (V_\mu)_3^1; & (S_\mu^V)^\dagger &= \beta_V (V_\mu)_1^3; \\ J_\mu^A &= \alpha_A (A_\mu)_2^1; & (J_\mu^A)^\dagger &= \alpha_A (A_\mu)_1^2; \\ S_\mu^A &= \beta_A (A_\mu)_3^1; & (S_\mu^A)^\dagger &= \beta_A (A_\mu)_1^3, \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

где $\alpha_{V,A}$ и $\beta_{V,A}$ — четыре произвольные константы. Поскольку ток слабых взаимодействий J_μ^V и изовекторный электромагнитный ток J_μ^1 — разные компоненты одного и того же изотопического триплета, а изовекторный и изо-скалярный токи J_μ^1 и J_μ^0 принадлежат одному и тому же унитарному октуплету, то полный электромагнитный ток J_μ^e — компонента рассматриваемого векторного октуплета $(V_\mu)_\beta^\alpha$

$$J_\mu^e = (V_\mu)_1^1$$

[см. формулу (5)].

В универсальной $V-A$ теории слабых взаимодействий Гелл-Манна и Фейнмана лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид

$$L_W = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_\mu^l + J_\mu + S_\mu)(j_\mu^l + J_\mu + S_\mu)^\dagger,$$

где j_μ^l — лептонный ток, причем J_μ^V равен (а не пропорционален) нормированной компоненте с $T_3 = -1$ изотопического триплета, нормированной компонентой с $T_3 = 0$ которого является изовекторный электромагнитный ток. Иначе говоря, константа α_V равна единице. Это предположение вместе с предположением о сохранении векторного тока позволяет объяснить приблизительное равенство константы распада μ -мезона и векторной константы β -распада нейтрона. С другой стороны, опыт показывает, что константы $\beta_{V,A}$ отличаются от единицы, как мы увидим ниже. Таким образом, экспериментальные данные согласуются с предположением об универсальности токов j_μ^l и J_μ^V , но не согласуются с предположением об универсальности всех токов j_μ^l , J_μ^V , S_μ^V . Что касается аксиального тока J_μ^A , то перенормировка за счет сильных взаимодействий может менять эффективную константу связи этого тока.

Отметим, что экспериментальные данные также не противоречат предположению о том, что константа α_V в формуле (76) меньше единицы на несколько процентов. Следуя Кабиббо, предположим, что $\alpha_{V,A}$ и $\beta_{V,A}$ связаны соотношением

$$\alpha_{V,A}^2 + \beta_{V,A}^2 = 1.$$

Положим

$$\frac{\beta_{A, V}}{\alpha_{V, A}} = \operatorname{tg} \tau_{V, A}.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} J_{\mu}^V &= \cos \tau_V (V_{\mu})_2^1; & (J_{\mu}^V)^+ &= \cos \tau_V (V_{\mu})_1^2; \\ S_{\mu}^V &= \sin \tau_V (V_{\mu})_3^1; & (S_{\mu}^V)^+ &= \sin \tau_V (V_{\mu})_1^3; \\ J_{\mu}^A &= \cos \tau_A (A_{\mu})_2^1; & (J_{\mu}^A)^+ &= \cos \tau_A (A_{\mu})_1^2; \\ S_{\mu}^A &= \sin \tau_A (A_{\mu})_3^1; & (S_{\mu}^A)^+ &= \sin \tau_A (A_{\mu})_1^3. \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Если $(V_{\mu})_2^1$ и $(V_{\mu})_3^1$ — нормированные векторы в восьмимерном пространстве, которые ортогональны друг другу, то векторный и аксиальный токи сильно взаимодействующих частиц

$$\begin{aligned} &\cos \tau_V (V_{\mu})_2^1 + \sin \tau_V (V_{\mu})_3^1; \\ &\cos \tau_A (A_{\mu})_2^1 + \sin \tau_A (A_{\mu})_3^1 \end{aligned}$$

также нормированные векторы. В данном случае универсальность слабых взаимодействий понимается в том смысле, что лептонные токи и токи сильно взаимодействующих частиц нормированны.

Отметим, что $(V_{\mu})_2^1$ и $(V_{\mu})_3^1$ образуют V -дублет, и при вращении на угол α вокруг третьей оси в трехмерном пространстве V -спина компонента $(V_{\mu})_2^1$ превращается в комбинацию

$$\cos \frac{\alpha}{2} (V_{\mu})_2^1 + \sin \frac{\alpha}{2} (V_{\mu})_3^1.$$

Таким образом, векторный и аксиальный токи слабых взаимодействий получаются из нормированных токов $(V_{\mu})_2^1$ и $(A_{\mu})_2^1$ вращениями на углы $2\tau_V$ и $2\tau_A$ соответственно вокруг третьей оси в трехмерном пространстве V -спина. Мы покажем ниже, что эксперимент дает весьма близкие значения углов τ_V и τ_A . Это означает, что полный ток слабых взаимодействий сильно взаимодействующих частиц получается из одной нормированной компоненты октуплета $(J_{\mu})_{\beta}^{\alpha}$

$$(J_{\mu})_2^1 = (V_{\mu})_2^1 + (A_{\mu})_2^1$$

вращением на угол 2τ вокруг третьей оси в пространстве V -спина. Таким образом,

$$L_W = \frac{G}{\sqrt{2}} [j'_\mu + \cos \tau (J_\mu)_2^1 + \sin \tau (J_\mu)_3^1] \times \\ \times [j'_\mu + \cos \tau (J_\mu)_2^1 + \sin \tau (J_\mu)_3^1]^+ . \quad (78)$$

Оценим теперь углы τ_V и τ_A на основе имеющихся экспериментальных данных. Рассмотрим распады

$$K^- \rightarrow \mu^- + \nu$$

и

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \nu .$$

Их матричные элементы равны:

$$\left. \begin{aligned} M(K^- \rightarrow \mu^- \nu) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_2) P_\mu g_K; \\ M(\pi^- \rightarrow \mu^- \nu) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_2) P_\mu g_\pi, \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

где P , k_1 и k_2 — импульсы псевдоскалярных мезонов μ -мезона и антинейтрино соответственно, а g_K и g_π — некоторые константы, определяющиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle 0 | S_\mu^A | K^- \rangle &= P_\mu g_K; \\ \langle 0 | J_\mu^A | \pi^- \rangle &= P_\mu g_\pi, \end{aligned} \quad (80)$$

поскольку в данном случае, как легко показать, только аксиальный ток дает вклад. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \langle 0 | S_\mu^A | K^- \rangle &= \sin \tau_A \langle 0 | (A_\mu)_3^1 | K^- \rangle; \\ \langle 0 | J_\mu^A | \pi^- \rangle &= \cos \tau_A \langle 0 | (A_\mu)_2^1 | \pi^- \rangle, \end{aligned} \quad (81)$$

а из унитарной симметрии следует равенство

$$\langle 0 | (A_\mu)_2^1 | \pi^- \rangle = \langle 0 | (A_\mu)_3^1 | K^- \rangle . \quad (82)$$

Подставляя выражения (81) в формулы (80) и пользуясь равенством (82), получаем

$$\frac{g_K}{g_\pi} = \operatorname{tg} \tau_A . \quad (83)$$

При помощи матричных элементов (79) можно показать, что отношение вероятностей рассматриваемых распадов равно

$$\begin{aligned} \frac{W(K \rightarrow \mu\nu)}{W(\pi \rightarrow \mu\nu)} &= \left(\frac{g_K}{g_\pi}\right)^2 \frac{m_K}{m_\pi} \frac{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2} = \\ &= \operatorname{tg}^2 \tau_A \frac{m_K}{m_\pi} \frac{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_K^2}\right)^2}{\left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (84)$$

Пользуясь экспериментальными значениями вероятностей распадов $K \rightarrow \mu + \nu$ и $\pi \rightarrow \mu + \nu$, найдем

$$\tau_A = 0,266 \pm 0,005. \quad (85)$$

Изучение распадов

$$\begin{aligned} K^- &\rightarrow \pi^0 + e^- + \tilde{\nu}; \\ \pi^- &\rightarrow \pi^0 + e^- + \tilde{\nu} \end{aligned}$$

позволяет оценить величину угла τ_V . Матричные элементы этих распадов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \nu) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_1) \times \\ &\quad \times (p + q)_\mu f_K(k^2); \\ M(\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \nu) &= \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_1) \times \\ &\quad \times (p + q)_\mu f_\pi(k^2), \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

где p и q — импульсы псевдоскалярных мезонов в начальных и конечных состояниях соответственно; $k = k_1 + k_2 = p - q$, $f_K(k^2)$ и $f_\pi(k^2)$ — некоторые факторы, определяемые соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \langle \pi^0 | J_\mu^V | \pi^- \rangle &= (p + q)_\mu f_\pi(k^2), \\ \langle \pi^0 | S_\mu^V | K^- \rangle &= (p + q)_\mu f_K(k^2). \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Можно показать, что в данном случае только векторный ток дает вклад.

Чтобы найти соотношение между f_K и f_π , рассмотрим прежде всего матричный элемент тока $(V_\mu)_\beta^\alpha$ между состояниями псевдоскалярных мезонов. Поскольку при S -преобразовании $(V_\mu)_\beta^\alpha$ переходят в $-(V_\mu)_\alpha^\beta$, то связь должна быть связью типа F :

$$\langle P | (V_\mu)_\beta^\alpha | P \rangle = f(k^2) (p + q)_\mu (\bar{P}_\nu^\alpha P_\nu^\beta - \bar{P}_\nu^\beta P_\nu^\alpha). \quad (88)$$

Для рассматриваемых переходов

$$\left. \begin{aligned} \langle \pi^0 | (V_\mu)_2^1 | \pi^- \rangle &= \sqrt{2} f(k^2) (p + q)_\mu; \\ \langle \pi^0 | (V_\mu)_3^1 | K^- \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} f(k^2) (p + q)_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Отсюда получим

$$\frac{f_K(k^2)}{f_\pi(k^2)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \tau_V. \quad (90)$$

Если пренебречь зависимостью формфакторов от k^2 , то для отношения вероятностей

$$\frac{W(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \nu)}{W(\pi^- \rightarrow \pi^0 e^- \nu)} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \tau_V \frac{15}{192} \left(\frac{m_K}{m_{\pi^+} - m_{\pi^0}} \right)^5. \quad (91)$$

Сравнивая с опытом, найдем значение угла τ_V :

$$\tau_V \approx 0,241 \pm 0,008, \quad (92)$$

которое приблизительно равно τ_A . Этот общий угол в дальнейшем обозначим τ .

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, предположение о том, что J_μ^V и S_μ^V , а также J_μ^A и S_μ^A принадлежат одним и тем же оккуплетам, является непосредственным следствием модели кварков. Действительно, кварки t_p , t_n и t_λ обозначим ψ_1 , ψ_2 и ψ_3 . Тогда

$$\begin{aligned} J_\mu^V &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi_2; & S_\mu^V &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi_3; \\ J_\mu^A &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2; & S_\mu^A &\sim \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_3. \end{aligned}$$

Отсюда и следует наше утверждение. Во-вторых, из релятивистской инвариантности вытекает, что матричный

элемент распада $K^- \rightarrow \pi^0 + e^- + \tilde{\nu}$ имеет следующий вид:

$$M(K^- \rightarrow \pi^0 e^- \tilde{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_2) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_1) \times \\ \times \{(p+q)_\mu f_K(k^2) + (p-q)_\mu g_K(k^2)\},$$

где $f_K(k^2)$ и $g_K(k^2)$ — произвольные формфакторы. В случае, когда унитарная симметрия выполняется строго, начальный и конечный мезоны являются различными компонентами одного и того же унитарного мультиплетта, и вследствие T -инвариантности или сохранения векторного тока второй формфактор обращается в нуль: $g_K(k^2) = 0$. Получим тогда первый из матричных элементов (86). Поэтому экспериментальное определение $g_K(k^2)$ позволяет судить о степени нарушения унитарной симметрии.

2.2. Лептонные распады барионов

Предложенные свойства симметрии тока слабых взаимодействий можно проверить изучением лептонных распадов барионов

$$B_1 \rightarrow B_2 + l^\pm \pm \nu,$$

где B_1 и B_2 — барионы из октуплета, l^\pm — заряженные лептоны. Обозначим k_1 и k_2 импульсы лептона и антилептона. Матричные элементы процессов с испусканием пар $l^\pm \tilde{\nu}$ равны

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^- \tilde{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \\ + \gamma_5) v(k_2) \langle B_2 | (J_\mu)_2^1 | B_1 \rangle, \quad (93)$$

при $\Delta S = 0$, и

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^- \tilde{\nu}) = \frac{G}{\sqrt{2}} \sin \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \\ + \gamma_5) v(k_2) \langle B_2 | (J_\mu)_3^1 | B_1 \rangle, \quad (94)$$

если $\Delta S = 1$, а матричные элементы процессов с испусканием пар $l^\pm \nu$ равны

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^+ \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \cos \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_2) \times \\ \times \langle B_2 | (J_\mu)_1^2 | B_1 \rangle, \quad (95)$$

при $\Delta S = 0$, и

$$M(B_1 \rightarrow B_2 l^+ \nu) = \frac{G}{\sqrt{2}} \sin \tau \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u(k_2) \times \\ \times \langle B_2 | (J_\mu)_1^3 | B_1 \rangle, \quad (96)$$

если $\Delta S = -1$. Поэтому изучение лептонных распадов барионов сводится к изучению матричных элементов

$$\langle B | (J_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle = \langle B | (V_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle + \langle B | (A_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle. \quad (97)$$

Из соображений релятивистской инвариантности, T -инвариантности и инвариантности относительно группы $SU(3)$ следует, что эти матричные элементы имеют вид

$$\langle B | (V_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle = \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^F(k^2) + \right. \\ \left. + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^F(k^2) \right\} (\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma - \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha) + \\ + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) f_1^D(k^2) + \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} u(p_1) f_2^D(k^2) \right\} \times \\ \times \left(\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma + \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha - \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \bar{B}_\delta^\gamma B_\gamma^\delta \right); \quad (98)$$

$$\langle B | (A_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle = \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1) g_1^F(k^2) + \right. \\ \left. + \frac{ik_\mu}{M} \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) g_2^F(k^2) \right\} \cdot (\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma - \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha) + \\ + \left\{ \bar{u}(p_2) \gamma_\mu \gamma_5 u(p_1) g_1^D(k^2) + \frac{ik_\mu}{M} \bar{u}(p_2) \gamma_5 u(p_1) g_2^D(k^2) \right\} \times \\ \times \left(\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma + \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha - \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \bar{B}_\delta^\gamma B_\gamma^\delta \right), \quad (99)$$

где M — масса барионов, а p_1 и p_2 — импульсы барионов в начальном и конечном состояниях соответственно. Отметим, что если требуется только релятивистская инвариантность, то матричные элементы токов $(V_\mu)_\beta^\alpha$ и $(A_\mu)_\beta^\alpha$ должны содержать также спиновые структуры

$$\frac{ik_\mu}{M} \bar{u}(p_2) u(p_1) \text{ и } \bar{u}(p_2) \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} \gamma_5 u(p_1)$$

соответственно. Однако в случае, когда начальный и конечный барионы принадлежат одному и тому же октету

плету, а унитарная симметрия выполняется точно, существование таких членов приводит к нарушению T -инвариантности. Отсутствие спиновой амплитуды

$$\frac{ik_{\mu}}{M} \bar{u}(p_2) u(p_1)$$

в матричном элементе векторного тока — также следствие сохранения векторного тока.

Произвольные формфакторы векторного тока

$$f_1^{F,D}(k^2) \text{ и } f_2^{F,D}(k^2)$$

можно определить на основе экспериментальных данных по электромагнитным формфакторам нуклонов. Действительно, поскольку электромагнитный ток J_{μ}^e является компонентой $(V_{\mu})_1^1$, то формфакторы нуклонов выражаются через формфакторы в соотношении (98):

$$f_i^p(k^2) = f_i^F(k^2) + \frac{1}{3} f_i^D(k^2); \quad f_i^n(k^2) = -\frac{2}{3} f_i^D(k^2)$$

[см. формулы (8)], и обратно, произвольные формфакторы $f_1^{F,D}(k^2)$ и $f_2^{F,D}(k^2)$ полностью определяются электромагнитными формфакторами протона и нейтрона

$$f_i^F(k^2) = f_i^p(k^2) + \frac{1}{2} f_i^n(k^2), \quad f_i^D(k^2) = -\frac{3}{2} f_i^n(k^2). \quad (100)$$

Что касается формфакторов $g_1^{F,D}(k^2)$ и $g_2^{F,D}(k^2)$, то в принципе они могут быть определены при помощи измерения вероятностей четырех процессов лептонного распада барионов. Тогда вероятности остальных распадов и поляризационные эффекты во всех процессах определяются полностью.

Рассмотрим конкретные физические процессы лептонных распадов:

$$n \rightarrow p + e^{-} + \tilde{\nu}; \quad (I)$$

$$\Sigma^{-} \rightarrow \lambda + e^{-} + \tilde{\nu}; \quad (II)$$

$$\Sigma^{+} \rightarrow \lambda + e^{+} + \nu; \quad (III)$$

$$\Lambda \rightarrow p + e^{-} + \tilde{\nu}; \quad p + \mu^{-} + \tilde{\nu}; \quad (IV)$$

$$\Sigma^{-} \rightarrow n + e^{-} + \tilde{\nu}; \quad n + \mu^{-} + \tilde{\nu}; \quad (V)$$

$$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \tilde{\nu}; \quad \Sigma^+ + \mu^- + \tilde{\nu}; \quad (\text{VI})$$

$$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \tilde{\nu}; \quad \Sigma^0 + \mu^- + \tilde{\nu}; \quad (\text{VII})$$

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda + e^- + \tilde{\nu}; \quad \Lambda + \mu^- + \tilde{\nu}. \quad (\text{VIII})$$

Матричные элементы этих процессов имеют вид:

$$M^J (B_1 \rightarrow B_2 l^\pm \nu(\tilde{\nu})) = \frac{G}{\sqrt{2}} \bar{u}(k_1) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(k_2) \bar{u}(p_2) \times \\ \times \left[\gamma_\mu f_1^J(k^2) + \frac{\sigma_{\mu\nu} k_\nu}{2M} f_2^J(k^2) + \gamma_\mu \gamma_5 g_1^J(k^2) + \right. \\ \left. + \frac{ik_\mu}{M} \gamma_5 g_2^J(k^2) \right] \bar{u}(p_1), \quad (101)$$

$J = \text{I, II, ..., VIII}$, причем из формул (93) — (95) — (98), (99) получим выражения формфакторов $f_i^J(k^2)$ и $g_i^J(k^2)$:

$$f_i^{\text{I}} = \cos \tau (f_i^{\text{F}} + f_i^{\text{D}}), \quad g_i^{\text{I}} = \cos \tau (g_i^{\text{F}} + g_i^{\text{D}});$$

$$f_i^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau f_i^{\text{D}}, \quad g_i^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau g_i^{\text{D}};$$

$$f_i^{\text{III}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau f_i^{\text{D}}; \quad g_i^{\text{III}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau g_i^{\text{D}}; \quad (102)$$

$$f_i^{\text{IV}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sin \tau (3f_i^{\text{F}} + f_i^{\text{D}}), \quad g_i^{\text{IV}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \sin \tau (3g_i^{\text{F}} + g_i^{\text{D}}),$$

$$f_i^{\text{V}} = -\sin \tau (f_i^{\text{F}} - f_i^{\text{D}}), \quad g_i^{\text{V}} = -\sin \tau (g_i^{\text{F}} - g_i^{\text{D}}),$$

$$f_i^{\text{VI}} = \sin \tau (f_i^{\text{F}} + f_i^{\text{D}}), \quad g_i^{\text{VI}} = \sin \tau (g_i^{\text{F}} + g_i^{\text{D}}),$$

$$f_i^{\text{VII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (f_i^{\text{F}} + f_i^{\text{D}}), \quad g_i^{\text{VII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (g_i^{\text{F}} + g_i^{\text{D}}),$$

$$f_i^{\text{VIII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (3f_i^{\text{F}} - f_i^{\text{D}}), \quad g_i^{\text{VIII}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \tau (3g_i^{\text{F}} - g_i^{\text{D}}).$$

До сих пор еще не проведено последовательное изучение следствий унитарной симметрии в процессах лептонных распадов барионов. В качестве грубого приближения пренебрежем вкладом формфакторов $f_2^J(k^2)$ и

$g_2^J(k^2)$, а также зависимостью формфакторов $f_1^J(k^2)$ и $g_1^J(k^2)$ от k^2 . Положим

$$f_1^J(k^2) \approx f^J; \quad g_1^J(k^2) = g^J; \quad \alpha_J = \frac{g^J}{f^J}.$$

Что касается вероятности распада и величин, характеризующих поляризационные эффекты, воспользуемся известными выражениями из теории β -распада нейтрона. Все эти величины зависят только от f^J и g^J . Константы выражаются через $f_1^F(0)$ и $g_1^D(0)$ соотношениями (102), а в силу сохранения заряда $f_1^F(0) = 1$, $f_1^D(0) = 0$. Это означает, что константы f^J для всех процессов полностью определены. Произвольными тогда являются константы $g^F = g_1^F(0)$ и $g^D = g_1^D(0)$, которые могут быть определены из значений вероятностей двух процессов. В качестве одного из таких процессов выберем β -распад нейтрона. Из экспериментальных данных получим

$$g^D + g^F = 1,15 \pm 0,04, \quad (103)$$

причем это значение суммы $g^D + g^F$ слабо зависит от угла τ , поскольку значение τ весьма мало, а вероятность β -распада нейтрона пропорциональна $\cos^2\tau \approx 1 - \tau^2$. Поскольку вероятности распадов (II) и (III) пропорциональны $(g^D)^2$, то величину этой константы можно было бы определить из значений вероятностей этих распадов. Однако до сих пор последние еще не были измерены с достаточной точностью. Поэтому воспользуемся другими данными. Отметим, что вероятности распадов (IV) — (VIII) пропорциональны $\sin^2\theta \approx \tau^2$ и сильно зависят от τ . Поэтому для определения g^F и g^D желательно исключить зависимость от τ , рассматривая отношение двух распадов с изменением странности. Так, например, сравнивая отношение вероятностей распадов (IV) и (V) с опытом, получим уравнение

$$\frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} (3g^F + g^D)^2}{1 + 3(g^F - g^D)^2} \cdot \frac{1,5}{5,8} = \frac{8,1 \pm 1,0}{13 \pm 2}. \quad (104)$$

Система уравнений (103) и (104) имеет два решения:

- 1) $g^F = 0,39 \pm 0,05$; $g^D = 0,76 \pm 0,05$;
- 2) $g^F = 0,92 \pm 0,05$; $g^D = 0,23 \pm 0,05$.

Чтобы выбрать одно из них, вычислим вероятность распада IV в каждом из этих случаев по формуле

$$\frac{W(\Lambda \rightarrow pe^{-\nu})}{W(\Lambda)} = \sin^2 \tau \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} (3g^F + g^D)^2 \right] \cdot 3,8 \cdot 10^{-3},$$

где $W(\Lambda)$ — полная вероятность распада Λ -гиперона. Сравнивая с экспериментальным значением

$$\frac{W(\Lambda \rightarrow pe^{-\nu})}{W(\Lambda)} \approx 8,1 \pm 1,0,$$

видим, что первое решение хорошо согласуется с опытом при $\tau = 0,26 \pm 0,02$, а второе — при $\tau = 0,195 \pm 0,015$. Следовательно, надо выбрать первое решение. Из этих значений констант g^F и g^D можно получить вероятности других распадов. В частности:

$$\frac{W(\Sigma^- \rightarrow \Lambda e^{-\nu})}{W(\Sigma^-)} = (0,65 \pm 0,08) \cdot 10^{-4},$$

что находится в согласии с экспериментальным значением $(0,75 \pm 0,28) \cdot 10^{-4}$. Отметим, что в данном случае второе решение дает значение $(0,06 \pm 0,03) \cdot 10^{-4}$.

Изучение корреляционных и поляризационных эффектов также позволяет определить константы g^F и g^D и проверить предсказания унитарной симметрии. Рассмотрим, например, распад поляризованного бариона. Для углового распределения электрона пользуемся формулой

$$W_J(\theta) = 1 + \beta_e \rho_J \cos \theta, \quad (105)$$

где β_e — скорость электрона в единицах скорости света, θ — угол между направлением вылета электрона и вектором поляризации начального бариона, а константа

$$\rho_J = -2 \frac{\alpha_J (\alpha_J - 1)}{1 + 3\alpha_J^2}.$$

На опыте можно определить ρ_J и, следовательно, α_J . Например, для процесса IV эксперимент дает значение

$$\alpha_{IV} = -0,7 \pm 0,3.$$

С другой стороны,

$$\alpha_{IV} = \frac{g^{IV}}{f^{IV}} = \frac{3g^F + g^D}{3f^F + f^D} = g^F + \frac{1}{3} g^D.$$

Таким образом, уравнение

$$g^F + \frac{1}{3} g^D = -0,7 \pm 0,3$$

вместе с уравнением (103) также позволяет определить g^F и g^D . Если эти константы уже известны, то параметр асимметрии в угловом распределении электрона при распаде поляризованного бариона, поляризация бариона отдачи, параметр электронно-нейтринной корреляции и т. д. для всех процессов полностью определяются, и сравнение теоретических предсказаний с опытом позволяет проверить предположенные свойства симметрии токов слабых взаимодействий. Поскольку в настоящее время еще не имеется достаточно точных соответствующих экспериментальных данных, то на этом останавливаться не будем.

2.3. Рождение мезонов и барионов при столкновении нейтрино и антинейтрино с нуклоном

Перейдем теперь к изучению возможностей экспериментальной проверки свойств симметрии слабых токов в нейтринных опытах. Рассмотрим рождение барионных резонансов при столкновении антинейтрино с нуклоном. В гл. 2 были получены изотопические соотношения между сечениями различных процессов. Если ток слабых взаимодействий сильно взаимодействующих частиц обладает предположенными свойствами симметрии относительно группы $SU(3)$, то между амплитудами процессов с рождением Δ^0 и Y^{*0} на протоне также имеется соотношение, которое не является изотопическим, поскольку Δ^0 и Y^{*0} входят в различные изотопические мультиплеты. Матричные элементы этих процессов пропорциональны матричным элементам тока слабых взаимодействий между состояниями протона и соответствующего барионного резонанса

$$\left. \begin{aligned} M(\bar{\nu}p \rightarrow l^+ \Delta^0) &\sim \cos \tau \langle \Delta^0 | (J_\mu)_1^2 | p \rangle; \\ M(\bar{\nu}p \rightarrow l^+ Y^{*0}) &\sim \sin \tau \langle Y^{*0} | (J_\mu)_1^3 | p \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Поэтому для получения соотношения между амплитудами этих процессов необходимо изучить матричный эле-

мент тока $(J_\mu)_\beta^\alpha$ между состояниями октуплета барионов и декуплета барионных резонансов:

$$\langle D | (J_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle = \bar{D}^{\alpha\gamma\delta} N_\gamma^\sigma \epsilon_{\delta\sigma\beta} A_\mu. \quad (107)$$

Здесь A_μ — некоторая функция от пространственно-временных переменных, представляющая собой билинейную комбинацию волновых функций начального бариона $\frac{1^+}{2}$ и конечного бариона $\frac{3^+}{2}$ и трансформирующаяся как 4-вектор при преобразованиях Лоренца. Для матричных элементов (106)

$$\langle \Delta^0 | (J_\mu)_1^2 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu; \quad (108)$$

$$\langle Y^{*0} | (J_\mu)_1^3 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} A_\mu. \quad (109)$$

Отсюда

$$M(\tilde{\nu}p \rightarrow l^+ Y^{*0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \tau M(\tilde{\nu}p \rightarrow l^+ \Delta^0). \quad (110)$$

Таким образом, все поляризационные эффекты в обоих процессах должны быть одинаковыми, а их дифференциальные и полные сечения связаны соотношениями

$$\sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^+ Y^{*0}) = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \tau \sigma(\tilde{\nu}p \rightarrow l^+ \Delta^0). \quad (111)$$

Отметим, что токи $(J_\mu)_1^3$ и $-(J_\mu)_1^2$ образуют V -дублет, а рассматриваемые процессы являются процессами рождения частиц из V -триплета

$$\begin{pmatrix} \Delta^0 \\ Y^{*0} \\ \Xi^{*0} \end{pmatrix}$$

на протоне — частице из V -дублета

$$\begin{pmatrix} p \\ -\Sigma^+ \end{pmatrix}.$$

Тогда из сохранения V -спина сразу получаем соотношение

$$\langle Y^{*0} | (J_\mu)_1^3 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Delta^0 | (J_\mu)_1^2 | p \rangle.$$

Иначе говоря, соотношение (110) является следствием сохранения V -спина.

Рассмотрим теперь матричный элемент тока $(J_\mu)_3^\alpha$ между состояниями оккуплета барионов. Так как

$$\begin{aligned} \langle B | (J_\mu)_\beta^\alpha | B \rangle &= (\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma - \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha) C_\mu^F + \\ &+ (\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma + \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha - \frac{2}{3} \delta_\beta^\alpha \bar{B}_\delta^\gamma B_\gamma^\delta) C_\mu^D \end{aligned} \quad (112)$$

и

$$\langle n | (J_\mu)_1^2 | p \rangle = C_\mu^F + C_\mu^D; \quad (113)$$

$$\langle \Sigma^0 | (J_\mu)_1^3 | p \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} (C_\mu^F - C_\mu^D); \quad (114)$$

$$\langle \lambda | (J_\mu)_1^3 | p \rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}} (3C_\mu^F + C_\mu^D), \quad (115)$$

то

$$\langle n | (J_\mu)_1^2 | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Sigma^0 | (J_\mu)_1^3 | p \rangle - \sqrt{\frac{3}{2}} \langle \lambda | (J_\mu)_1^3 | p \rangle \quad (116)$$

Это соотношение также можно получить как следствие сохранения V -спина. Действительно, получим V -дублеты

$$\left(\begin{array}{c} (J_\mu)_1^3 \\ -(J_\mu)_1^2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} p \\ -\Sigma^+ \end{array} \right)$$

и V -триплет

$$\left(\begin{array}{c} n \\ -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda \\ \Xi^0 \end{array} \right).$$

Из сохранения V -спина найдем

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \langle n | (J_\mu)_1^2 | p \rangle = \left\langle -\frac{1}{2} \Sigma^0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda | (J_\mu)_1^3 | p \right\rangle,$$

т. е. получим снова соотношение (116).

Аналогично для процессов рождения частиц V -дублетов

$$\left(\begin{array}{c} K^+ \\ -\pi^+ \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} p \\ -\Sigma^+ \end{array} \right)$$

от нейтрино и частиц V -дублетов

$$\left(\begin{array}{c} \pi^- \\ K^- \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} p \\ -\Sigma^+ \end{array} \right)$$

от антинейтрино имеем

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\nu p \rightarrow l^- K^+ p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\nu p \rightarrow l^- \pi^+ p) + \frac{1}{\cos \tau} M(\nu p \rightarrow l^- K^+ \Sigma^+); \quad (117)$$

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ K^- p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \pi^- p) + \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \pi^- \Sigma^+). \quad (118)$$

Эти соотношения можно получить таким же методом, что и соотношения между амплитудами мезон-барионного рассеяния

$$M(K^+ p \rightarrow K^+ p) = M(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) + M(\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^+);$$

$$M(K^- p \rightarrow K^- p) = M(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) + M(K^- p \rightarrow \pi^- \Sigma^+).$$

Для процессов рождения псевдоскалярного мезона и барионного резонанса сохранение V -спина приводит к ряду соотношений между амплитудами

$$\frac{1}{\sqrt{3} \cos \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \pi^+ \Delta^-) = \frac{1}{\cos \tau} \dot{M}(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ K^+ Y^{*-}) = \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \pi^+ Y^{*-}) = \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ K^+ \Xi^{*-}), \quad (119)$$

а также к следующему соотношению между сечениями

$$\frac{1}{\sin^2 \tau} \sigma(\nu p \rightarrow l^- K^0 \Delta^{++}) + \frac{3}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu p \rightarrow l^- K^+ Y^{*+}) = \frac{1}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu p \rightarrow l^- \pi^0 \Delta^{++}) + \frac{3}{\cos^2 \tau} \sigma(\nu p \rightarrow l^- \eta \Delta^{++}). \quad (120)$$

Для соответствующих процессов рождения векторных мезонов

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\nu p \rightarrow l^- K^{*+} p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\nu p \rightarrow l^- \rho^+ p) + \frac{1}{\cos \tau} M(\nu p \rightarrow l^- K^{*+} \Sigma^+); \quad (121)$$

$$\frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ K^{*-} p) = \frac{1}{\cos \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \rho^- p) + \\ + \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \rho^- \Sigma^+); \quad (122)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3} \cos \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \rho^+ \Delta^-) = \frac{1}{\cos \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ K^{*+} Y^{*-}) = \\ = \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ \rho^+ Y^{*-}) = \frac{1}{\sin \tau} M(\tilde{\nu} p \rightarrow l^+ K^{*+} \Xi^{*-}). \quad (123)$$

2.4. Нелептонные распады гиперонов и мезонов

В нелептонных распадах гиперонов и мезонов гиперзаряд и изотопический спин не сохраняются. В гл. 2 рассматривались следствия предположения, о том, что части лагранжиана, отвечающие за эти распады, являются компонентами изотопических спиноров. Поскольку в этих процессах гиперзаряд меняется на единицу по абсолютной величине, то соответствующие части лагранжиана преобразуются как волновые функции частиц с $Y = \pm 1$ при калибровочных преобразованиях волновых функций всех частиц

$$\psi \rightarrow e^{i a Y} \psi,$$

где Y — оператор гиперзаряда

$$L \rightarrow e^{\pm i a L}.$$

Так как заряд сохраняется, то изменения изотопического спина и гиперзаряда удовлетворяют условию

$$\Delta Q = \Delta T_3 + \frac{\Delta Y}{2} = 0,$$

вытекающему из формулы Гелл-Манна — Нишиджимы. Таким образом, для процессов с $\Delta Y = \Delta S = +1$ соответствующая часть лагранжиана является компонентой с $T_3 = +\frac{1}{2}$ изотопического спинора с $Y = -1$, а для процессов $\Delta Y = \Delta S = -1$ — компонентой с $T_3 = -\frac{1}{2}$ изотопического спинора с $Y = +1$ (подробно см. гл. 2, § 4).

Перейдем теперь к изучению этих процессов в унитарной симметрии. Поскольку октуплет является унитар-

ным мультиплетом с наименьшим числом компонент, который содержит изотопические спиноры с $Y = \pm 1$, то можно предположить, что части лагранжиана, отвечающие за нелептонные распады гиперонов и мезонов, принадлежат октуплету. Рассмотрим следствия этого предположения в процессах нелептонного распада гиперонов. Так как в этих процессах $\Delta S = \Delta Y = 1$, то соответствующая часть лагранжиана является компонентой с $T_3 = +\frac{1}{2}$, $Y = -1$, т. е. компонентой Ψ_3^2 некоторого октуплета Ψ_β^α . Введем матрицу

$$\lambda_v^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i \lambda_7),$$

которая является матрицей V-спина, соответствующей матрице τ_+ изотопического спина. Тогда

$$\Psi_3^2 = (\lambda_v^+)_\alpha^\beta \Psi_\beta^\alpha.$$

Нетрудно показать, что матричные элементы процессов нелептонного распада барионов имеют следующую унитарную структуру:

$$M(B \rightarrow BP) = \sum_{i=1}^8 A_i T_i, \quad (124)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{Sp}(\bar{B}B) \text{Sp}(\bar{P}\lambda_v^+), \quad T_2 = \text{Sp}(\bar{B}\bar{P}) \text{Sp}(B\lambda_v^+); \\ T_3 &= \text{Sp}(\bar{B}\lambda_v^+) \text{Sp}(B\bar{P}), \quad T_4 = \text{Sp}(\bar{B}\bar{P}\lambda_v^+); \\ T_5 &= \text{Sp}(\bar{B}B\lambda_v^+\bar{P}); \quad T_6 = (B\bar{B}\bar{P}\lambda_v^+); \\ T_7 &= \text{Sp}(B\bar{B}\lambda_v^+\bar{P}); \quad T_8 = \text{Sp}(\bar{B}\bar{P}B\lambda_v^+ - B\bar{P}\bar{B}\lambda_v^+). \end{aligned} \quad (125)$$

Как и в случае мезон-барионного рассеяния, здесь мы воспользовались тождеством между девятью возможными амплитудами. Для конкретных процессов имеем:

$$M(\lambda \rightarrow p\pi^-) = \frac{1}{\sqrt{6}} A_4 - \sqrt{\frac{2}{3}} A_6 + \frac{1}{\sqrt{6}} A_8; \quad (126)$$

$$M(\lambda \rightarrow n\pi^0) = -\frac{1}{2\sqrt{3}} A_4 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_6 - \frac{1}{2\sqrt{3}} A_8; \quad (127)$$

$$M(\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0) = -\frac{1}{\sqrt{2}} A_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} A_8; \quad (128)$$

$$M(\Sigma^+ \rightarrow n\pi^+) = A_3 + A_8; \quad (129)$$

$$M(\Sigma^- \rightarrow n\pi^-) = A_3 + A_4; \quad (130)$$

$$M(\Xi^0 \rightarrow \Lambda\pi^0) = \frac{1}{\sqrt{3}} A_4 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_6 - \frac{1}{2\sqrt{3}} A_8; \quad (131)$$

$$M(\Xi^- \rightarrow \Lambda\pi^-) = -\sqrt{\frac{2}{3}} A_4 - \sqrt{\frac{2}{3}} A_6 + \frac{1}{\sqrt{6}} A_8. \quad (132)$$

Из этих выражений для матричных элементов процессов через произвольные функции A_i следует, что в данном случае унитарная симметрия не дает новых соотношений по сравнению с правилом $\Delta T = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим теперь нелептонные распады мезонов в слабых взаимодействиях

$$P \rightarrow P' + P'',$$

где P , P' и P'' — мезоны из псевдоскалярного октетета. Как и в случае нелептонных распадов барионов, здесь существуют восемь независимых унитарных амплитуд. Поскольку мезоны P' и P'' рождаются в S -состоянии, то согласно требованиям статистики Бозе, унитарные волновые функции этих мезонов должны входить симметрично в матричный элемент. Отсюда следует, что матричный элемент имеет вид:

$$\begin{aligned} M(P \rightarrow P'P'') &= A_1 \text{Sp}(\bar{P}'\bar{P}'') \text{Sp}(P\lambda^W) + A_2 \times \\ &\times \{ \text{Sp}(\bar{P}'P) \text{Sp}(\bar{P}''\lambda^W) + \text{Sp}(\bar{P}''P) \text{Sp}(\bar{P}'\lambda^W) \} + \\ &+ A_3 \text{Sp}[(\bar{P}'P'' + \bar{P}''\bar{P}')P\lambda^W] + A_4 \text{Sp}[(\bar{P}'\bar{P}'' + \bar{P}''\bar{P}')\lambda^W P], \end{aligned} \quad (133)$$

где λ^W — некоторая комбинация восьми матриц λ_i , причем для распадов с $\Delta Y = \Delta S = 1$

$$\lambda^W = \lambda_{\sigma}^+ = \frac{1}{2} (\lambda_6 + i\lambda_7),$$

а для распадов с $\Delta Y = \Delta S = -1$

$$\lambda^W = \lambda_{\sigma}^- = \frac{1}{2} (\lambda_6 - i\lambda_7).$$

Напомним, что для описания октуплета можно пользоваться либо спинорами второго ранга Ψ_β^α с $\Psi_\alpha^\alpha = 0$, либо восьмимерными величинами Ψ_i

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_\beta^\alpha (\lambda_i)_\alpha^\beta; \quad \Psi_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_i)_\beta^\alpha \psi_i.$$

При зарядовом сопряжении унитарные волновые функции мезонных мультиплетов преобразуются следующим образом:

$$\Psi_\beta^\alpha \rightarrow \eta_C \Psi_\alpha^\beta; \quad \eta_C = \pm 1. \quad (134)$$

η_C называется зарядовой четностью данного унитарного октуплета. Так как

$$(\lambda_i)_\beta^\alpha = (\lambda_i)_\alpha^\beta, \quad i = 1, 3, 4, 6, 8;$$

$$(\lambda_i)_\beta^\alpha = -(\lambda_i)_\alpha^\beta, \quad i = 2, 5, 7,$$

то восьмимерные компоненты Ψ_i преобразуются следующим образом:

$$\psi_i \rightarrow \eta_C \psi_i, \quad i = 1, 3, 4, 6, 8;$$

$$\psi_i \rightarrow -\eta_C \psi_i, \quad i = 2, 5, 7. \quad (135)$$

Очевидно, что матричный элемент (133) есть компонента некоторого октуплета

$$\begin{aligned} L_\beta^\alpha = & A_1 \text{Sp}(\bar{P}' \bar{P}'') P_\beta^\alpha + A_2 [\text{Sp}(\bar{P}' P) \bar{P}_\beta'^\alpha + \text{Sp}(\bar{P}'' P) \bar{P}_\beta''^\alpha] + \\ & + A_3 \left\{ (\bar{P}'_\beta \bar{P}_\gamma'^{\delta} + \bar{P}_\beta'' \bar{P}_\gamma''^{\delta}) P_\delta^\alpha - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \text{Sp}[(\bar{P}' \bar{P}'' + \bar{P}'' \bar{P}') P] \right\} + \\ & + A_4 \left\{ P_\beta^\gamma (\bar{P}_\gamma^{\delta} \bar{P}_\delta'^\alpha + \bar{P}_\gamma'' \bar{P}_\delta''^\alpha) - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \text{Sp}[P(\bar{P}' \bar{P}'' + \bar{P}'' \bar{P}')] \right\}. \quad (136) \end{aligned}$$

Поскольку для псевдоскалярного октуплета $\eta_C = +1$, то при зарядовом сопряжении амплитуды при A_3 и A_4 переходят друг в друга:

$$\begin{aligned} & (\bar{P}'_\beta \bar{P}_\gamma'^{\delta} + \bar{P}_\beta'' \bar{P}_\gamma''^{\delta}) P_\delta^\alpha - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \text{Sp}[(\bar{P}' \bar{P}'' + \bar{P}'' \bar{P}') P] \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow & P_\alpha^\delta (\bar{P}_\delta^{\gamma} \bar{P}_\gamma'^{\beta} + \bar{P}_\delta'' \bar{P}_\gamma''^{\beta}) - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \text{Sp}[P(\bar{P}' \bar{P}'' + \bar{P}'' \bar{P}')], \quad (137) \end{aligned}$$

а другие амплитуды переходят в себя. Поэтому L_β^α обладает определенной зарядовой четностью только в том

случае, если константы удовлетворяют некоторым условиям. Нетрудно показать, что

$$L_{\beta}^{\alpha} \xrightarrow{C} L_{\alpha}^{\beta},$$

если $A_3 = A_4$, и

$$L_{\beta}^{\alpha} \xrightarrow{C} -L_{\alpha}^{\beta},$$

если $A_1 = A_2 = 0$, $A_3 = -A_4$. Таким образом, для матричного элемента рассматриваемого распада получим

$$\begin{aligned} M(P \rightarrow P' P'') &= A_1 \text{Sp}(\bar{P}' \bar{P}'') \text{Sp}(P \lambda^W) + \\ &+ A_2 \{ \text{Sp}(\bar{P}' P) \text{Sp}(\bar{P}'' \lambda^W) + \text{Sp}(\bar{P}'' P) \text{Sp}(\bar{P}' \lambda^W) \} + \\ &+ A_3 \text{Sp}[(\bar{P}' \bar{P}'' + \bar{P}'' \bar{P}') (P \lambda^W + \lambda^W P)] \end{aligned} \quad (138)$$

или

$$M(P \rightarrow P' P'') = A \text{Sp}[(\bar{P}' \bar{P}'' + \bar{P}'' \bar{P}') (P \lambda^W - \lambda^W P)]. \quad (139)$$

Применим теперь эти выражения к распаду

$$K_1^0 \rightarrow 2\pi^0.$$

Напомним, что

$$K^0 = (P)_2^3, \quad \tilde{K}^0 = (P)_3^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 + CP\tilde{K}^0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (K^0 - \tilde{K}^0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(P)_2^3 - (P)_3^2] = -\frac{i}{\sqrt{2}} P_{\beta}^{\alpha} (\lambda_{\gamma})_{\alpha}^{\beta}, \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. K_1^0 — седьмая компонента октуплета P_{β}^{α} . Иначе говоря, унитарная волновая функция K_1^0 -мезона $(K_1^0)_{\beta}^{\alpha}$ имеет только две ненулевые компоненты

$$(K_1^0)_2^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (K_1^0)_3^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и пропорциональна матрице

$$(K_1^0)_3^{\alpha} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\lambda_{\gamma})_{\beta}^{\alpha}.$$

Аналогично унитарная волновая функция π^0 -мезона $(\pi^0)_\beta^\alpha$ имеет ненулевые компоненты

$$(\pi^0)_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\pi^0)_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и пропорциональна матрице λ_3

$$(\pi^0)_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_3)_\beta^\alpha.$$

Поэтому для распада $K_1^0 \rightarrow 2\pi$ матричные элементы (138) и (139) равны

$$M(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0) = A_1 \text{Sp}(\bar{\pi}^0 \pi^0) \text{Sp}(K_1^0 \lambda^W) + \\ + A_2 \{ \text{Sp}(\bar{\pi}^0 K_1^0) \text{Sp}(\bar{\pi}^0 \lambda^W) + \text{Sp}(\bar{\pi}^0 K_1^0) \times \\ \times \text{Sp}(\bar{\pi}^0 \lambda^W) \} + A_3 \text{Sp}[(\bar{\pi}^0 \pi^0 + \bar{\pi}_0 \pi^0) (K_1^0 \lambda^W + \lambda^W K_1^0)] \quad (140)$$

или

$$M(K_1^0 \rightarrow 2\pi^0) = A \text{Sp}[(\bar{\pi}^0 \pi^0 + \bar{\pi}_0 \pi^0) (K_1^0 \lambda^W - \lambda^W K_1^0)]. \quad (141)$$

Предположим, что CP -четность сохраняется. Поскольку в распаде $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ P -четность меняется, то C -четность также меняется. Это означает, что матричный элемент (140) или (141) должен менять знак при зарядовом сопряжении. Поскольку при C -преобразовании

$$(\pi^0)_\beta^\alpha \rightarrow (\pi^0)_\alpha^\beta, \quad (K_1^0)_\beta^\alpha \rightarrow - (K_1^0)_\alpha^\beta,$$

то матричный элемент (140) поменяет знак только при условии, если

$$(\lambda^W)_\beta^\alpha = (\lambda^W)_\alpha^\beta,$$

а матричный элемент (141) поменяет знак при

$$(\lambda^W)_\beta^\alpha = -(\lambda^W)_\alpha^\beta.$$

С другой стороны, для распада $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ λ^W должна быть некоторой комбинацией λ_6 и λ_7 , так как матричный элемент этого распада является суммой матричных элементов переходов с $\Delta Y = +1$ и $\Delta Y = -1$. Отсюда следует, что в матричном элементе (140) матрица λ^W пропорциональна λ_6 , а в выражении (141) матрица λ^W пропор-

циональна λ_7 . Подставляя в формулу (140) или (141) явные выражения матриц $(\pi^0)_\beta^\alpha$, $(K_1^0)_\beta^\alpha$ и $(\lambda^W)_\beta^\alpha$, нетрудно проверить, что они тождественно равны нулю. Таким образом, унитарная симметрия и CP -инвариантность приводят к тому, что распад $K_1^0 \rightarrow 2\pi^0$ запрещен.

Отметим, что если лагранжиан слабых взаимодействий имеет вид произведения заряженных токов [см. формулу (78)], то часть лагранжиана, отвечающая за нелептонные процессы, содержит различные неприводимые представления в произведении 8×8 . Поэтому если лагранжиан нелептонных слабых взаимодействий действительно принадлежит октаплету, то это свойство, а также правило $\Delta T = 1/2$ либо означает, что лагранжиан слабых взаимодействий не имеет вид (78), либо является следствием какой-то динамики.

Литература

Электромагнитные взаимодействия

- Badier S., Bouchiat C. Phys. Lett., 15, 961 (1965).
Боков О. Г., Нгуен Ван Хьеу, Средниава. «Ядерная физика», 4, 850 (1966).
Glashow S. L. Phys. Rev. Lett., 11, 48 (1963).
Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьесу. «Ядерная физика», 2, 529 (1965).
Cabibbo N., Gatto R. Nuovo cimento, 21, 872 (1961).
Coleman S., Glashow S. L. Phys. Rev. Lett., 6, 423 (1961).
Lipkin H. J. et al. Phys. Lett., 7, 81 (1963).
Macfarlane A. J., Sudarshan E. C. G. Nuovo cimento, 31, 1176 (1964).
Oakes R. J. Phys. Rev., 132, 2349 (1963).
Okubo S., Sakita B. Phys. Rev. Lett., 11, 50 (1963).
Okubo S. Phys. Lett., 4, 14 (1963).
Rosen S. P. Phys. Rev. Lett., 11, 100 (1963).
Chan C. H. Phys. Lett., 8, 211 (1964).

Слабые взаимодействия

- Block M. Phys. Rev. Lett., 12, 262 (1964).
Brene N. et al. Phys. Lett, 11, 344 (1964).
Gell-Mann M. Phys. Rev. Lett., 12, 155 (1964).
Cabibbo N. Phys. Rev. Lett., 10, 351 (1963).
Cabibbo N. Phys. Rev. Lett., 12, 62 (1964).
Нгуен Ван Хьеу. В кн. XII Международная конференция по физике высоких энергий. Т. I. М., Атомиздат, 1964, стр. 181.
Окунь Л. Б. Слабое взаимодействие и унитарная симметрия, Изд. ВИНТИ АН СССР, 1965.
Dalitz R. H. Preprint, Oxford, 1964.
Sugawara H. Progr. Theor. Phys., 31, 213 (1964).
Чувило И. В. Препринт ОИЯИ, Р-1829, 1964.

Глава шестая

Спиновая и унитарная симметрия $SU(6)$

§ 1. Группа $SU(6)$ и ее неприводимые представления

1.1. Группа $SU(6)$ и подгруппы $SU(3) \times SU(2)$ и $SU(4) \otimes SU(2)$

В квантовой механике спиновые волновые функции частиц со спином являются спинорами спиновой группы $SU(2)$. Если же необходимо, чтобы выполнялась еще унитарная симметрия, то волновые функции барионов и мезонов должны быть также спинорами группы унитарной симметрии $SU(3)$. В таком случае эти волновые функции должны носить индексы обеих групп: спиновые и унитарные индексы. Например, частицы в унитарном триплете со спином (кварки) описываются волновыми функциями $\psi_{(a, \alpha)}$, где $a = 1, 2$ — спиновый индекс, а $\alpha = 1, 2, 3$ — унитарный индекс. Преобразования спиновой группы $SU(2)$ затрагивают индекс a , но оставляют инвариантным индекс α :

$$\psi_{(a\alpha)} \xrightarrow{SU(2)} U_{ab}^{(2)} \psi_{(b\alpha)}. \quad (1)$$

Преобразования же группы унитарной симметрии $SU(3)$ не затрагивают индекса a :

$$\psi_{(a\alpha)} \xrightarrow{SU(3)} U_{\alpha\beta}^{(3)} \psi_{(a\beta)}. \quad (2)$$

Преобразования (1) и (2) коммутируют друг с другом, и последовательное действие этих двух преобразований приводит к новому унитарному унимодулярному преобразованию волновых функций:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(a\alpha)} &\xrightarrow{SU(2)} U_{ab}^{(2)} \psi_{(b\alpha)} \xrightarrow{SU(3)} U_{ab}^{(2)} U_{\alpha\beta}^{(3)} \psi_{(b\beta)}; \\ \psi_{(a\alpha)} &\xrightarrow{SU(3)} U_{\alpha\beta}^{(3)} \psi_{(a\beta)} \xrightarrow{SU(2)} U_{ab}^{(2)} U_{\alpha\beta}^{(3)} \psi_{(b\beta)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Новые преобразования образуют группу $SU(3) \otimes SU(2)$ (см. гл. 1, п. 1.3). По сравнению с группами $SU(3)$ и $SU(2)$ группа $SU(3) \otimes SU(2)$ не содержит ничего нового. Она означает только, что группы $SU(3)$ и $SU(2)$ рассматриваются одновременно.

Рассмотрим теперь самые общие унитарные унимодулярные преобразования волновых функций $\psi_{(a,a)}$, по отношению к которым шесть пар индексов (a_α) ведут себя как шесть единых индексов A :

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(a\alpha)} &\rightarrow U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} \psi_{(b\beta)}; \\ \psi_A &\rightarrow U_{AB}^{(6)} \psi_B. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Эти преобразования образуют группу $SU(6)$. Преобразования (1) — (3) являются частными случаями преобразований (4). Действительно, частные преобразования с матрицами

$$U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} = \delta_{\alpha\beta} U_{ab}^{(2)}$$

соответствуют преобразованиям (1) из группы $SU(2)$, частные преобразования вида (2) из группы $SU(3)$ — матрицам

$$U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} = \delta_{ab} U_{\alpha\beta}^{(3)},$$

а преобразования вида (3) из группы $SU(3) \otimes SU(2)$ — матрицам

$$U_{(a\alpha)(b\beta)}^{(6)} = U_{ab}^{(2)} U_{\alpha\beta}^{(3)}.$$

Это означает, что группы $SU(2)$, $SU(3)$ и $SU(3) \otimes SU(2)$ являются подгруппами группы $SU(6)$. С другой стороны, не всякое преобразование вида (4) эквивалентно последовательному действию двух преобразований (1) и (2), т. е. эквивалентно некоторому преобразованию (3). Поэтому подгруппа $SU(3) \otimes SU(2)$ отличается от группы $SU(6)$.

Если вместо группы унитарной симметрии $SU(3)$ рассмотрим только изотопическую группу $SU(2)$, то вместо группы $SU(3) \otimes SU(2)$ получим группу $SU(2) \otimes SU(2)$, и самые общие унитарные унимодулярные преобразования волновых функций $\psi_{(a\alpha\alpha')}$ при $a = 1, 2$, $\alpha' = 1, 2$ образуют группу $SU(4)$. Подобная группа была предложена Вигнером при изучении классификации состояний ядер по спину и изотопическому спину. Очевидно, что группа

$SU(4)$ является подгруппой группы $SU(6)$. Поскольку в качестве изотопической группы выбрана группа преобразований, которые не затрагивают индекса $\alpha = 3$, то в преобразованиях группы $SU(4)$ волновые функции $\psi_{(a3)}$ не меняются. Эти волновые функции зависят от спинового индекса $a = 1, 2$ и преобразуются по спиновой группе $SU(2)$. Это — спиновая группа «странных кварков t_λ ».

Преобразования из группы $SU(4)$ имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(a\alpha')} &\rightarrow U_{(a\alpha')(b\beta')} \psi_{(b\beta')}; \\ \psi_{(a3)} &\rightarrow \psi_{(a3)}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а преобразования из спиновой группы странных кварков $SU(2)$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(a\alpha')} &\rightarrow \psi_{(a\alpha')}; \\ \psi_{(a3)} &\rightarrow U_{ab}^{(2a)} \psi_{(b3)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Одновременные осуществления преобразований (5) и (6) приводят к новым унитарным унимодулярным преобразованиям $\psi_{(a\alpha)}$, образующим группу $SU(4) \otimes SU(2)$. Эта группа также является подгруппой группы $SU(6)$.

Если пренебречь электромагнитным взаимодействием (а также слабыми взаимодействиями), то изотопическая инвариантность выполняется строго. С другой стороны, унитарная симметрия нарушается даже в сильных взаимодействиях. Поэтому разумно рассмотреть случай, когда симметрия $SU(6)$ нарушается, а симметрия $SU(4)$ выполняется. В данном случае волновые функции частиц следует рассматривать не как представления группы $SU(3) \otimes SU(2)$, поскольку симметрия группы $SU(3)$ не выполняется, а как представления группы $SU(4) \otimes SU(2)$. Симметрия $SU(4)$ в действительности также нарушается. Поэтому после редукции группы $SU(6)$ к группе $SU(4) \otimes SU(2)$ необходимо еще редуцировать группу $SU(4)$ к группе $SU(2) \otimes SU(2)$. Таким образом, существуют две цепи редукций группы $SU(6)$. В первой цепи

$$SU(6) \supset SU(3) \otimes SU(2)_\sigma \supset SU(2)_T \otimes U(1)_Y \otimes SU(2)_\sigma, \quad (7)$$

где $SU(2)_T$ — изотопическая группа, $SU(2)_\sigma$ — спиновая группа, а $U(1)_Y$ — группа калибровочных преобразований странных кварков

$$\psi_{(a\alpha')} \rightarrow \psi_{(a\alpha')}, \quad \psi_{(a3)} \rightarrow e^{ie} \psi_{(a3)}, \quad (8)$$

которая разделяет унитарные индексы $\alpha' = 1, 2$ с индексом $\alpha = 3$. Во второй же цепи

$$SU(6) \supset SU(4) \otimes SU(2)_{\sigma(3)} \supset SU(2)_T \otimes SU(2)_{\sigma(\alpha')} \otimes SU(2)_{\sigma(3)} \supset SU(2)_T \otimes U(1)_Y \otimes SU(2)_{\sigma}, \quad (5)$$

где $SU(2)_T$ — изотопическая группа, $SU(2)_{\sigma(\alpha')}$ — спиновая группа нестранных кварков

$$\left. \begin{aligned} \psi_{(a\alpha')} &\rightarrow U_{ab}^{(2)} \psi_{(b\alpha')}; \\ \psi_{(a3)} &\rightarrow \psi_{(a3)}, \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

а $SU(2)_{\sigma(3)}$ — спиновая группа странных кварков, состоящая из преобразований вида (6). Заранее нельзя сказать, какая из цепей редукций — (7) или (9) — осуществляется в природе. На этот вопрос может ответить только опыт. Ниже мы увидим, что экспериментальные данные согласуются с предположением о том, что осуществляется цепь редукций (9).

1.2. Генераторы

Группа $SU(6)$ унитарных унимодулярных матриц 6×6 имеет $6^2 - 1 = 35$ генераторов — 35 независимых эрмитовых матриц 6×6 с нулевыми шпурами. Покажем, что эти генераторы можно выразить через генераторы λ_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ группы унитарной симметрии $SU(3)$ и генераторы σ_i , $i = 1, 2, 3$ спиновой группы $SU(2)$. Шести-мерные волновые функции $\psi_{(a\alpha)}$ представим в виде столбца

$$\begin{pmatrix} \psi_{(11)} \\ \psi_{(12)} \\ \psi_{(13)} \\ \psi_{(21)} \\ \psi_{(22)} \\ \psi_{(23)} \end{pmatrix}.$$

Бесконечно малые преобразования из спиновой группы

$$\psi_{(a\alpha)} \rightarrow \left[\delta_{ab} + i \sum_{j=1}^3 \epsilon_j (\sigma_j)_{ab} \right] \psi_{(b\alpha)}$$

где λ_i — генераторы группы $SU(3)$. Эти матрицы обозначим

$$I^{(2)} \otimes \lambda_j, \quad j = 1, 2, \dots, 8, \quad (11)$$

где $I^{(2)}$ — единичная матрица для спиновой подгруппы $SU(2)$. Очевидно, что 11 матриц [см. выражение (10) и (11)] являются в то же время генераторами группы $SU(6)$. 24 остальных генератора можно выбрать следующим образом. В каждом из генераторов в формуле (10) подгруппы $SU(2)$ заменим единичную матрицу $I^{(3)}$ на генераторы λ_j группы $SU(3)$. Тогда получим 24 матрицы

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & \lambda_j \\ \hline \lambda_j & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c} 0 & -i\lambda_j \\ \hline i\lambda_j & 0 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c|c} \lambda_j & 0 \\ \hline 0 & -\lambda_j \end{array} \right),$$

которые мы обозначим

$$\sigma_i \otimes \lambda_j; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \dots, 8. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что матрицы в формуле (12) независимы, эрмитовы и имеют шпуры, равные нулю. Они называются тензорными произведениями генераторов σ_i и λ_j .

Посмотрим теперь, какие генераторы группы $SU(6)$ совпадают с генераторами подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Поскольку бесконечно малые преобразования из подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{(a\alpha)} &\rightarrow \left[\delta_{ab} + i \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i (\sigma_i)_{ab} \right] \left[\delta_{\alpha\beta} + i \sum_{j=1}^8 \tau_j (\lambda_j)_{\alpha\beta} \right] \psi_{(b\beta)} \approx \\ &\approx \left[\delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} + i \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i (\sigma_i)_{ab} \delta_{\alpha\beta} + i \sum_{j=1}^8 \tau_j (\lambda_j)_{\alpha\beta} \delta_{ab} \right] \psi_{(b\beta)}, \end{aligned}$$

то генераторами этой подгруппы являются $\sigma_i \otimes I^{(3)}$ и $I^{(2)} \otimes \lambda_j$. Иначе говоря, совокупность всех генераторов групп $SU(2)$ и $SU(3)$ образует систему генераторов группы $SU(3) \otimes SU(2)$, а переход от $SU(3) \otimes SU(2)$ к $SU(6)$ эквивалентен введению новых генераторов, образующихся из тензорных произведений генераторов групп $SU(3)$ и $SU(2)$. Отметим, что все генераторы группы $SU(6)$ коммутируют с отражением пространства. Отсюда следует, что все частицы в каждом мультиплете группы $SU(6)$ имеют одну и ту же четность.

1.3. Некоторые неприводимые представления группы $SU(6)$

В гл. 1 были описаны все неприводимые представления группы $SU(n)$. Полученные результаты непосредственно применимы к группе $SU(6)$. Поэтому не будем останавливаться на описании всех неприводимых представлений группы $SU(6)$, а ограничимся рассмотрением некоторых неприводимых представлений, которыми будем пользоваться при изучении классификации известных элементарных частиц и резонансов.

Напомним, что только частицы в унитарных мультиплеттах $D(p, q)$ с $p - q = 3n$, где n — целое число, имеют целые заряды и гиперзаряды (и нулевой суперзаряд Z , если последний существует). С другой стороны, спинор группы $SU(6)$, p раз ковариантный и q раз контравариантный, является также спинором группы $SU(3)$, p раз ковариантным и q раз контравариантным. Поэтому для изучения классификации известных элементарных частиц и резонансов, которые имеют целые заряды и гиперзаряды (и нулевой суперзаряд Z), достаточно рассмотреть неприводимые представления группы $SU(6)$, для которых разность числа верхних индексов и числа нижних индексов равна $3n$, где n — целое число. Простейшими из таких неприводимых представлений являются следующие:

1) Неприводимое представление, описываемое спинором второго ранга Φ_B^A с $\Phi_A^A = 0$ и имеющее $6^2 - 1 = 35$ независимых компонент.

2) Неприводимое представление, описываемое полностью антисимметричным ковариантным спинором третьего ранга

$$\psi_{\{ABC\}} \text{ с } \frac{6 \cdot (6-1) \cdot (6-2)}{2 \cdot 3} = 56 \text{ компонентами.}$$

3) Неприводимое представление, описываемое полностью антисимметричным ковариантным спинором третьего ранга

$$\psi_{[ABC]} \text{ с } \frac{6(6-1)(6-2)}{2 \cdot 3} = 20 \text{ компонентами.}$$

4) Неприводимое представление, описываемое ковариантным спинором третьего ранга $\psi_{\{A[B,C\}}$, симметризованным по первой паре индексов и затем антисим-

метризованным по второй. Этот спинор антисимметричен относительно перестановки двух последних индексов и удовлетворяет условию

$$\Psi_{\{A\{B\}C\}} + \Psi_{\{B\{C\}A\}} + \Psi_{\{C\{A\}B\}} = 0 \quad (13)$$

[см. гл. 1, формулу (119)]. Чтобы найти размерность этого представления, отметим прежде всего, что спинор третьего ранга, симметризованный по одной паре индексов, имеет $\frac{6(6+1)}{2} = 21$ независимых компонент. Сим-

метризуя этот спинор по другой паре, получим полностью симметричный спинор третьего ранга с 56 компонентами. Остальные 70 компонент образуют спинор, антисимметричный по второй паре индексов. Таким образом, рассматриваемый спинор $\Psi_{\{A\{B\}C\}}$ имеет 70 независимых компонент.

1.4. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(3) \times SU(2)$

Каждое неприводимое представление группы $SU(6)$ является также представлением (вообще говоря, приводимым) подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Для применения группы $SU(6)$ к изучению классификации элементарных частиц и резонансов необходимо знать неприводимые представления подгрупп $SU(3) \otimes SU(2)$. Рассмотрим прежде всего представление (35) группы $SU(6)$. Спинор $\Phi_B^A = \Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ можно рассмотреть как представление спиновой группы $SU(2)$. Поскольку условие

$$\Phi_A^A = \Phi_{(a\alpha)}^{(a\alpha)} = 0$$

не означает, что шпур $\Phi_{(a\beta)}^{(a\alpha)}$ должен обращаться в нуль при любых α и β , то $\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ является приводимым представлением группы $SU(2)$. Разложим его на два неприводимых представления спиновой группы $SU(2)$.

$$\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \left[\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)} \right] + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)}. \quad (14)$$

Первый член в формуле (14) обозначим $X_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$. Очевидно,

$$X_{(a\beta)}^{(a\alpha)} = 0$$

в условии

$$X_{(ax)}^{(ax)} = 0$$

выполняется без того, чтобы $X_{(bx)}^{(ax)}$ обращался в нуль. Иначе говоря, $X_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ является приводимым представлением группы $SU(3)$ и разлагается на неприводимые представления этой группы

$$X_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \left[X_{(b\beta)}^{(a\alpha)} - \frac{1}{3} \delta_{\beta}^{\alpha} X_{(b\gamma)}^{(a\gamma)} \right] + \frac{1}{3} \delta_{\gamma}^{\alpha} X_{(b\gamma)}^{(a\gamma)}. \quad (15)$$

Первый член в соотношении (15) обозначим $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$. Таким образом,

$$V_{(a\beta)}^{(a\alpha)} = 0, \quad V_{(b\alpha)}^{(a\alpha)} = 0. \quad (16)$$

Это означает, что $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ принадлежит одновременно неприводимым представлениям группы $SU(2)$ и неприводимым представлениям группы $SU(3)$. Этот спинор описывает октуплет мезонов со спином 1. Что касается второго члена в соотношении (15), то он описывает унитарный синглет со спином 1. Рассмотрим второй член в формуле (14). Очевидно, что он описывает частицы со спином 0. Поскольку

$$\Phi_{(c\alpha)}^{(c\alpha)} = 0,$$

то $\Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)}$ описывает унитарный октуплет. Таким образом, можно сделать вывод, что 35-плет группы $SU(6)$ содержат октуплет со спином 1, синглет со спином 1 и октуплет со спином 0. Запишем символически

$$(35) = (8.3)_{3 \times 2} + (1.3)_{3 \times 2} + (8.1)_{3 \times 2}. \quad (17)$$

В скобках в правой части соотношения (17) первые цифры указывают размерности соответствующих унитарных мультиплетов, а вторые цифры равны числам спиновых состояний ($2s + 1$, где s — спин частиц). Положим

$$X_{(b\gamma)}^{(a\gamma)} = \sqrt{3} V_b^a;$$

$$\Phi_{(c\beta)}^{(c\alpha)} = \sqrt{2} P_{\beta}^{\alpha}.$$

Тогда из формул (14) и (15) следует

$$\Phi_B^A = \Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = V_{(b\beta)}^{(a\alpha)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_{\beta}^{\alpha} V_b^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^{\alpha} P_{\beta}^{\alpha}, \quad (18)$$

где $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ удовлетворяет условию (16), а V_b^a и P_{β}^{α} условиям

$$V_a^a = 0; \quad (19)$$

$$P_\alpha^\alpha = 0. \quad (20)$$

Таким образом, получим выражение волновой функции 35-плета группы $SU(6)$ через физические волновые функции, являющиеся неприводимыми представлениями подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Коэффициенты $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ в формуле (18) были выбраны в соответствии с условием нормировки

$$\bar{\Phi}_A^B \Phi_B^A = \bar{V}^{(b\beta)} V_{(b\beta)}^{(a\alpha)} + \bar{V}_a^b V_b^a + \bar{P}_\alpha^\beta P_\beta^\alpha \quad (21)$$

Как известно, для описания частицы со спином 1 можно пользоваться также трехмерным вектором. Это означает, что вместо $V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ и V_b^a можно ввести трехмерные векторы

$$(V_i)_\beta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_a^b V_{(b\beta)}^{(a\alpha)}; \quad V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_a^b V_b^a.$$

Тогда

$$V_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a (V_i)_\beta^\alpha, \quad V_b^a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a V_i,$$

следовательно,

$$\Phi_B^A = \Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a (V_i)_\beta^\alpha + \frac{1}{\sqrt{6}} (\sigma_i)_b^a \delta_\beta^\alpha V_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a P_\beta^\alpha. \quad (22)$$

Условие нормировки имеет следующий вид:

$$\bar{\Phi}_A^B \Phi_B^A = (\bar{V}_i)_\alpha^\beta (V_i)_\beta^\alpha + \bar{V}_i V_i + (\bar{P})_\alpha^\beta P_\beta^\alpha. \quad (23)$$

Рассмотрим теперь разложение 56-плета группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$. Этот мультиплет описывается спинором $\psi_{\{ABC\}}$, симметричным относительно перестановок индексов A, B, C , т. е. перестановок пар $(a\alpha)$, $(b\beta)$ и $(c\gamma)$. Среди компонент этого мультиплета существуют компоненты, симметричные относительно перестановок всех спиновых индексов a, b, c , и описывают частицы со спином $3/2$. Они симметричны также и по отношению к перестановкам унитарных индексов α, β, γ и описывают декуплет. Отметим, что не существует полностью антисимметричного спинора третьего ранга группы $SU(2)$, так как индексы a, b, c могут принимать только два значения. Поэтому остальные компоненты 56-плета должны быть

симметризованными по одной паре спиновых индексов и по соответствующей паре унитарных индексов и затем антисимметризованными по другой паре спиновых индексов и по соответствующей паре унитарных индексов. Поскольку антисимметричный спинор второго ранга группы $SU(2)$ является инвариантом, то спинор третьего ранга группы $SU(2)$, антисимметричный по двум индексам, эквивалентен спинору первого ранга, т. е. описывает частицу со спином $1/2$. Что касается унитарных волновых функций, то они описывают октет (см. гл. 3, п. 3.1).

Таким образом, 56-плет группы $SU(6)$ содержит декуплет со спином $3/2$ и октет со спином $1/2$

$$(56) = (10 \cdot 4)_{3 \times 2} + (8 \cdot 2)_{3 \times 2}. \quad (24)$$

Можно показать, что спинор $\psi_{\{ABC\}}$ выражается через волновые функции декуплета и октета следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{\{ABC\}} = D_{\alpha\beta\gamma} \varphi_{abc} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \{ \varepsilon_{\alpha\beta\delta} B_{\gamma}^{\delta} \varepsilon_{ab} \varphi_c + \\ + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} B_{\alpha}^{\delta} \varepsilon_{bc} \varphi_a + \varepsilon_{\gamma\alpha\delta} B_{\beta}^{\delta} \varepsilon_{ca} \varphi_b \}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь $D_{\alpha\beta\gamma}$ и B_{β}^{α} — унитарные волновые функции декуплета и октета, а φ_{abc} и φ_a — спиновые волновые функции со спинами $3/2$ и $1/2$ соответственно. Если вместо симметричного спинора третьего ранга φ_{abc} пользоваться спин-тензором $(\varphi_i)_a$, то

$$\begin{aligned} \psi_{\{ABC\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} D_{\alpha\beta\gamma} (\sigma_i)_{ab} (\varphi_i)_c + \frac{1}{3\sqrt{2}} \{ \varepsilon_{\alpha\beta\delta} B_{\gamma}^{\delta} \varepsilon_{ab} \varphi_c + \\ + \varepsilon_{\beta\gamma\delta} B_{\alpha}^{\delta} \varepsilon_{bc} \varphi_a + \varepsilon_{\gamma\alpha\delta} B_{\beta}^{\delta} \varepsilon_{ca} \varphi_b \}. \end{aligned} \quad (26)$$

1.5. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(4) \times SU(2)$

Каждое неприводимое представление группы $SU(6)$ содержит различные неприводимые представления подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$. Так, спинор третьего ранга $\psi_{\{ABC\}} = \psi_{\{(a\alpha)(b\beta)(c\gamma)\}}$ содержит следующие мультиплеты подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$:

$$\begin{aligned} \psi_{\{(a\alpha')(b\beta')(c\gamma')\}}; \quad \psi_{\{(a\alpha')(b\beta')(c3)\}}; \\ \psi_{\{(a\alpha')(b3)(c3)\}}; \quad \psi_{\{(a3)(b3)(c3)\}}, \end{aligned}$$

где индексы α', β', γ' принимают значения 1, 2. $\Psi_{\{(a\alpha')(b\beta')(c\gamma')\}}$ является симметричным спинором третьего ранга группы $SU(4)$ и инвариантом спиновой группы странных кварков $SU(2)$. Он имеет $\frac{4(4+1)(4+2)}{2 \cdot 3} = 20$ независимых компонент и обозначается (20.1).

$\Psi_{\{(a\alpha')(b\beta')(c3)\}}$ является симметричным спинором второго ранга группы $SU(4)$ и спинором первого ранга группы $SU(2)$. Поскольку симметричный спинор второго ранга группы $SU(4)$ содержит $\frac{4(4+1)}{2} = 10$

компонент, а спинор первого ранга группы $SU(2)$ — 2 компоненты, то неприводимое представление $\Psi_{\{(a\alpha')(b\beta')(c3)\}}$ имеет $10 \times 2 = 20$ независимых компонент и обозначается (10.2). Аналогично $\Psi_{\{(a\alpha')(b3)(c3)\}}$ содержит $4 \times 3 = 12$ компонент и обозначается (4.3), а $\Psi_{\{(a3)(b3)(c3)\}}$ имеет 4 компоненты и обозначается (1.4). Таким образом, разложение по мультиплетам подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$ имеет вид

$$(56) = (20.1)_{4 \times 2} + (10.2)_{4 \times 2} + (4.3)_{4 \times 2} + (1.4)_{4 \times 2}. \quad (27)$$

Нетрудно проверить, что мультиплеты группы $SU(4) \otimes SU(2)$ в правой части (27) содержат следующие изотопические мультиплеты:

$$(20.1)_{4 \times 2} = (4.4)_{2 \times 2} + (2.2)_{2 \times 2}; \quad (28)$$

$$(10.2)_{4 \times 2} = (3.4)_{2 \times 2} + (3.2)_{2 \times 2} + (1.2)_{2 \times 2}; \quad (29)$$

$$(4.3)_{4 \times 2} = (2.4)_{2 \times 2} + (2.2)_{2 \times 2}; \quad (30)$$

$$(1.4)_{4 \times 2} = (1.4)_{2 \times 2}. \quad (31)$$

В скобках в правых частях соотношений (28) — (31) первые цифры указывают числа компонент изотопических мультиплетов $(2T+1)$, а вторые цифры — числа спиновых состояний $(2s+1)$.

Рассмотрим теперь 35-плет с волновой функцией Φ_B^A , удовлетворяющей условию $\Phi_A^A = 0$. Мы имеем следующие представления подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$:

$$\Phi_{(b\beta')}^{(a\alpha')}, \quad \Phi_{(b3)}^{(a\alpha')}, \quad \Phi_{(b\beta')}^{(a3)}, \quad \Phi_{(b3)}^{(a3)}.$$

$\Phi_{(b\beta')}^{(a\alpha')}$ — приводимое представление группы $SU(4)$, которое можно разложить на неприводимые:

$$\Phi_{(b\beta')}^{(a\alpha')} = \left[\Phi_{(b\beta')}^{(a\alpha')} - \frac{1}{4} \delta_b^a \delta_{\beta'}^{\alpha'} \Phi_{(c\gamma')}^{(c\gamma')} \right] + \frac{1}{4} \delta_b^a \delta_{\beta'}^{\alpha'} \Phi_{(c\gamma')}^{(c\gamma')}. \quad (32)$$

Аналогично $\Phi_{(b3)}^{(a3)}$ — приводимое представление спиновой группы странных кварков, разлагаемое следующим образом:

$$\Phi_{(b3)}^{(a3)} = \left[\Phi_{(b3)}^{(a3)} - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c3)}^{(c3)} \right] + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_{(c3)}^{(c3)}. \quad (33)$$

Отметим, что в силу условия

$$\Phi_C^C = \Phi_{(c\gamma)}^{(c\gamma)} = \Phi_{(c\gamma')}^{(c\gamma')} + \Phi_{(c3)}^{(c3)} = 0$$

последние члены в правых частях (32) и (33) не независимы. Они принадлежат одному и тому же неприводимому представлению подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$, а именно синглету. Первый член в правой части соотношения (32) есть синглет группы $SU(2)$ и спинор второго ранга группы $SU(4)$. Число их компонент равно $4^2 - 1 = 15$. Первый член в правой части соотношения (33) — синглет группы $SU(4)$ и спинор второго ранга группы $SU(2)$ с $2^2 - 1 = 3$ компонентами. $\Phi_{(b\beta')}^{(a3)}$ и $\Phi_{(b3)}^{(a\alpha')}$ являются спинорами первого ранга группы $SU(4)$ и спинорами первого ранга группы $SU(2)$. Таким образом, разложение

$$(35) = (15.1)_{4 \times 2} + (4.2)_{4 \times 2} + (\bar{4}.2)_{4 \times 2} + (1.3)_{4 \times 2} + (1.1)_{4 \times 2}. \quad (34)$$

Мультиплеты $SU(4) \otimes SU(2)$ в правой части (34) содержат следующие изотопические мультиплеты:

$$(15.1)_{4 \times 2} = (3.3)_{2 \times 2} + (1.3)_{2 \times 2} + (3.1)_{2 \times 2}; \quad (35)$$

$$(4.2)_{4 \times 2} = (2.3)_{2 \times 2} + (2.1)_{2 \times 2}; \quad (36)$$

$$(\bar{4}.2)_{4 \times 2} = (2.3)_{2 \times 2} + (2.1)_{2 \times 2}; \quad (37)$$

$$(1.3)_{4 \times 2} = (1.3)_{2 \times 2}; \quad (38)$$

$$(1.1)_{4 \times 2} = (1.1)_{2 \times 2}. \quad (39)$$

1.6. Классификация барионов и мезонов в симметрии $SU(6)$

В теории унитарной симметрии волновые функции барионов и мезонов представляют собой неприводимые спиноры группы $SU(3) \otimes SU(2)$.

Предположим теперь, что барионы и мезоны образуют мультиплеты группы $SU(6)$. Тогда октет барионов $\frac{1^+}{2}$ и декуплет барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$ можно включить в 56-плет группы $SU(6)$. Аналогично псевдоскалярные и векторные мезоны могут быть рассмотрены как компоненты 35-плета группы $SU(6)$, содержащего октет векторных мезонов ($\rho, K^*, \tilde{K}^*, \varphi^0$), синглетный векторный мезон (ω^0) и октет псевдоскалярных мезонов (π, K, \tilde{K}, η). Получим, таким образом, следующие схемы расщепления 56-плета и 35-плета группы $SU(6)$ на мультиплеты группы $SU(3) \otimes SU(2)$:

$$\begin{array}{l}
 (56) \begin{array}{l} \nearrow \Delta, Y^*, \Xi^*, \Omega^- \quad \left(s^P = \frac{3^+}{2} \right) \\ \searrow N, \Sigma, \lambda, \Xi \quad \left(s^P = \frac{1^+}{2} \right) \end{array} \\
 \\
 (35) \begin{array}{l} \nearrow \rho, K^*, \tilde{K}, \varphi^0 \quad (s^P = 1^-) \\ \rightarrow \omega^0 \quad (s^P = 1^-) \\ \searrow \pi, K, \tilde{K}, \eta \quad (s^P = 0^-) \end{array}
 \end{array}$$

Рассмотрим теперь расщепление мультиплетов группы $SU(6)$ на мультиплеты группы $SU(4) \otimes SU(2)$. Для 56-плета согласно формулам (27)–(31) получим следующую схему:

$$(56) \begin{array}{l} \nearrow \Delta, N \quad (Y = 1) \\ \rightarrow Y^*, \Sigma, \lambda \quad (Y = 0) \\ \rightarrow \Xi^* \Xi \quad (Y = -1) \\ \searrow \Omega \quad (Y = -2) \end{array}$$

Для изучения расщепления 35-плета воспользуемся формулами (35)–(39). В формуле (35) мы имеем векторный мезон с изотопическим спином $T = 1$, псевдоска-

лярный мезон с $\vec{T} = 1$ и векторный мезон с $T = 0$. Первые два триплета отождествляются с ρ - и π -мезонами соответственно, а последний мезон обозначим ω . В формуле (38) есть также векторный мезон с $T = 0$. Его обозначим φ . Получим тогда схему

$$(35) \begin{array}{l} \nearrow \rho, \omega, \pi \quad (Y = 0) \\ \nearrow K^*, K \quad (Y = 1) \\ \longrightarrow \tilde{K}^*, \tilde{K} \quad (Y = 1) \\ \searrow \varphi \quad (Y = 0) \\ \searrow \eta \quad (Y = 0) \end{array}$$

Векторные мезоны с $Y = T = 0$ условно обозначим ω и φ и покажем, что они действительно отождествляются с известными ω - и φ -мезонами. Для этого рассмотрим связь между этими состояниями и состояниями ω^0 и φ^0 в схеме расщепления 35-плета на унитарные мультиплеты. Как известно, ω^0 и φ^0 являются спинорами второго ранга группы $SU(3)$ с ненулевыми компонентами:

$$\begin{aligned} \varphi^0 : \psi_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \psi_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}; \\ \omega^0 : \psi_1^1 &= \psi_2^2 = \psi_3^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

[см. гл. 3, формулы (22) и (23)]. Если представить эти мезоны в виде матриц 3×3 , то получим диагональную матрицу

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\varphi^0}{\sqrt{6}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{3}} \\ \frac{\varphi^0}{\sqrt{6}} + \frac{\omega^0}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \varphi^0 + \frac{\omega^0}{\sqrt{3}} \end{array} \right) \quad (40)$$

Что касается φ - и ω -мезонов, то [см. формулы (32) и (33)] волновая функция φ -мезона отлична от нуля только в том случае, если унитарные индексы α и β равны 3, а волновая функция ω -мезона отлична от нуля, при условии, если унитарные индексы α, β равны 1, 2, причем $\psi_1^1 = \psi_2^2$, поскольку ω -мезон имеет $T = 0$. Таким образом, унитар-

ные волновые функции φ - и ω -мезонов имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}\varphi: \psi_3^3 &= 1; \\ \omega: \psi_1^1 &= \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Если представить эти мезоны в виде матрицы, то

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} & & \\ & \frac{\omega}{\sqrt{2}} & \\ & & \varphi \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Сравнивая матрицы (40) и (41), получим

$$\left. \begin{aligned}\varphi &= -\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\omega^0; \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi^0 + \sqrt{\frac{2}{3}}\omega^0.\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Из соотношений (42) и определения угла $\varphi\omega$ -смешивания *

$$\varphi = -\cos\theta\varphi^0 + \sin\theta\omega^0; \quad \omega = \sin\theta\varphi^0 + \cos\theta\omega^0$$

получим

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \sin\theta = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Это значение θ прекрасно согласуется со значением, полученным в гл. 3 на основе экспериментальных данных по массам частиц. Следовательно, ω - и φ -мезоны в схеме расщепления на мультиплеты $SU(4) \otimes SU(2)$ — наблюдаемые частицы. Это показывает, по-видимому, что среди цепей редукций (7) и (9) в природе осуществляется последняя.

§ 2. Некоторые следствия симметрии $SU(6)$

2.1. Электромагнитные свойства барионов

В унитарной симметрии электромагнитный ток является компонентой октуплета. С другой стороны, по отношению к вращениям, т. е. к спиновой группе $SU(2)$, за-

* Эти соотношения отличаются от соотношений (69) в гл. 3 знаком волновой функции φ^0 , что не существенно, так как волновые функции частиц всегда определяются с точностью до фазы.

ряд представляет собой инвариант (скаляр), а магнитный момент — вектор (с тремя компонентами). Это означает, что заряд и магнитный момент образуют мультиплеты (8.1) и (8.3) соответственно группы $SU(3) \otimes \otimes SU(2)$. Предположим теперь, что эти мультиплеты принадлежат 35-плету группы $SU(6)$ — мультиплету группы $SU(6)$ с наименьшим числом компонент, содержащему октуплеты со спинами 0 и 1. Тогда матричные элементы операторов заряда Q и магнитного момента M_i между состояниями барионов из 56-плета получаются из билинейных комбинаций

$$J_B^A = \bar{\Psi}^{\{ACD\}} \Psi_{\{BCD\}} - \frac{1}{6} \delta_B^A \Psi^{\{CDE\}} \Psi_{\{CDE\}}, \quad (43)$$

преобразующихся как компоненты 35-плета группы $SU(6)$ при помощи соответствующих проекционных операций.

Как известно, волновая функция 35-плета выражается через волновые функции унитарных мультиплетов следующим образом:

$$\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_i)_b^a (V_i)_\beta^\alpha + \frac{1}{\sqrt{6}} \delta_\beta^\alpha (\sigma_i)_b^a V_i + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a P_\beta^\alpha.$$

Если вместо спиноров второго ранга группы $SU(3)$ (V_i) $_\beta^\alpha$ и P_β^α пользоваться восьмимерными величинами

$$V_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_i)_\beta^\alpha (\lambda_j)_\alpha^\beta;$$

$$P_j = \frac{1}{\sqrt{2}} P_\beta^\alpha (\lambda_j)_\alpha^\beta;$$

$j = 1, 2, 3, \dots, 8$ для описания октуплета, то

$$\Phi_{(b\beta)}^{(a\alpha)} = \frac{1}{2} (\sigma_i)_b^a (\lambda_j)_\beta^\alpha V_{ij} + \frac{1}{\sqrt{6}} \delta_\beta^\alpha (\sigma_i)_b^a V_i + \frac{1}{2} \delta_b^a (\lambda_j)_\beta^\alpha P_j, \quad (44)$$

причем в этой формуле по i производится суммирование от 1 до 3, а по j — от 1 до 8. Обозначим Π_j и Π_{ij} проекционные операторы на состояния (8.1) и (8.3) соответственно:

$$(\Pi_j)_A^B \Phi_B^A = P_j; \quad (45)$$

$$(\Pi_{ij})_A^B \Phi_B^A = V_{i,j}. \quad (46)$$

Нетрудно проверить, что

$$(\Pi_j)_A^B = \frac{1}{2} \delta_a^b (\lambda_j)_\alpha^\beta; \quad (47)$$

$$(\Pi_{ij})_A^B = \frac{1}{2} (\sigma_i)_a^b (\lambda_j)_\alpha^\beta. \quad (48)$$

Для того чтобы получить матричные элементы операторов заряда и магнитного момента между состояниями барионов из 56-плета, необходимо проектировать ток (43) на состояния $(8.1)_{3 \times 2}$ и $(8.3)_{3 \times 2}$. Отметим, что по отношению к группе унитарной симметрии электромагнитный ток является компонентой октуплета, соответствующей матрице

$$\lambda^e = \frac{1}{2} \left(\lambda_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right).$$

Поэтому мы должны пользоваться проекционными операторами

$$(\Pi^e)_A^B = \frac{1}{2} \delta_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta;$$

$$(\Pi_i^e)_A^B = \frac{1}{2} (\sigma_i)_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta.$$

Таким образом, предположение о том, что заряд и магнитный момент принадлежат 35-плету группы $SU(6)$ приводит к тому, что матричные элементы операторов заряда Q и магнитного момента M_i между состояниями барионов из 56-плета имеют вид

$$\langle 56 | Q | 56 \rangle = q \delta_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta J_{(b\beta)}^{(a\alpha)}; \quad (49)$$

$$\langle 56 | M_i | 56 \rangle = \mu (\sigma_i)_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta J_{(b\beta)}^{(a\alpha)}, \quad (50)$$

где $J_{(b\beta)}^{(a\alpha)}$ выражается через волновые функции барионов соотношением (43), а q и μ — произвольные константы. Подставим теперь в соотношение (43) выражение (25) волновой функции $\psi_{\{ABC\}}$. Из формул (49) и (50) получим

$$\begin{aligned} \langle 56 | Q | 56 \rangle &= q \{ \bar{\varphi}^{acd} \varphi_{acd} \bar{D}^{\alpha\gamma\delta} (\lambda^e)_\alpha^\beta D_{\beta\gamma\delta} + \\ &+ \frac{1}{3} \bar{\varphi}^a \varphi_a (\bar{B}_\gamma^\alpha B_{\beta\gamma}^\gamma - \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha) (\lambda^e)_\alpha^\beta \}; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
\langle 56 | M_i | 56 \rangle = & \mu \left\{ \bar{\varphi}^{acd} (\sigma_i)_a^b \varphi_{bcd} \bar{D}^{\alpha\gamma\delta} (\lambda^e)_\alpha^\beta D_{\beta\gamma\delta} + \right. \\
& + \frac{1}{3} \bar{\varphi}^a (\sigma_i)_a^b \varphi_b \left[(\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma + \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha) + \frac{2}{3} (\bar{B}_\gamma^\alpha B_\beta^\gamma - \right. \\
& - \bar{B}_\beta^\gamma B_\gamma^\alpha) \left. \right] (\lambda^e)_\alpha^\beta + \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{\varphi}^{acd} (\sigma_i)_a^b \varphi_{c\epsilon db} D^{\alpha\gamma\delta} (\lambda^e)_\alpha^\beta B_{\gamma\epsilon\delta}^\sigma + \\
& \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \bar{\varphi}^c \epsilon^{ad} (\sigma_i)_a^b \varphi_{bcd} \bar{B}_{\sigma\epsilon}^\gamma \epsilon^{\delta\sigma\alpha} (\lambda^e)_\alpha^\beta D_{\beta\gamma\delta} \right\}. \quad (52)
\end{aligned}$$

Формула (51) показывает, что для заряда октуплета имеется связь типа F , в согласии с условием нормировки заряда. Если положим $q = 3$, то из этой формулы получим для всех частиц нужные заряды: p имеет заряд $+1$, Δ^{++} — заряд $+2$, заряды нейтральных частиц равны нулю и т. д. Рассмотрим теперь формулу (52). Напомним, что в унитарной симметрии магнитные моменты барионов выражаются через две произвольные константы μ^F и μ^D . Из формулы (52) видно, что в симметрии $SU(6)$ эти константы не независимы. Их отношение равно

$$\frac{\mu^D}{\mu^F} = \frac{3}{2}. \quad (53)$$

Поскольку магнитные моменты нуклонов выражаются через μ^F и μ^D следующим образом:

$$\mu_p = \mu^F + \frac{1}{3} \mu^D; \quad \mu_n = -\frac{2}{3} \mu^D$$

(см. гл. 5, п. 1.1), то

$$\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2},$$

что хорошо согласуется с опытом.

Кроме соотношения (53) формула (52) дает еще другие следствия. Она показывает, что магнитные моменты частиц в декуплете барионных резонансов, магнитные моменты частиц в октуплете барионов и константы дипольных магнитных переходов между состояниями декуплета и октуплета выражаются через одну произвольную константу. В частности, магнитный момент Ω^- -гиперона равен μ_p (в единицах отрицательного заряда), где μ_p — магнитный момент протона, а матричный элемент диполь-

ного магнитного перехода между состояниями протона и резонанса Δ^+ равен

$$\langle p | M_i | \Delta^+ \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \mu_p \bar{\varphi}^c \varepsilon^{ad} (\sigma_i)_a^b \varphi_{bcd}, \quad (54)$$

где φ_a и φ_{bcd} — спиновые волновые функции протона и резонанса.

2.2. Электромагнитные распады мезонных резонансов

В предыдущей главе было отмечено, что матричные элементы электромагнитных распадов барионных резонансов зависят от двух констант. В симметрии $SU(6)$ одна из этих констант выражается через магнитный момент протона. Что касается второй константы, то она неизвестна. Поэтому мы не можем сделать никаких заключений относительно вероятностей радиационных распадов барионных резонансов.

Рассмотрим теперь радиационные распады векторных мезонов на псевдоскалярные мезоны. Матричные элементы этих процессов пропорциональны матричным элементам дипольных магнитных переходов между состояниями векторных и псевдоскалярных мезонов. В симметрии $SU(6)$ векторные и псевдоскалярные мезоны принадлежат 35-плету с волновой функцией Φ_B^A , удовлетворяющей условию $\Phi_A^A = 0$. Поэтому матричные элементы рассматриваемых дипольных магнитных переходов получаются из билинейных комбинаций

$$I_B^A = \bar{\Phi}_C^A \Phi_B^C \pm \bar{\Phi}_B^C \Phi_C^A \quad (55)$$

проектированием на состояние (8.3). Если пользоваться симметричными комбинациями, то

$$\begin{aligned} \langle 35 | M_i | 35 \rangle &= \mu (\sigma_i)_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta [\bar{\Phi}_C^A \Phi_B^C + \bar{\Phi}_B^C \Phi_C^A] = \\ &= \mu \left\{ \frac{1}{i} \varepsilon_{ijk} [(\bar{V}_j)_\gamma^\alpha (V_k)_\beta^\gamma - (\bar{V}_j)_\beta^\gamma (V_k)_\gamma^\alpha] (\lambda^e)_\alpha^\beta + \right. \\ &+ \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{V}_i P_\beta^\alpha (\lambda^e)_\alpha^\beta + [(\bar{V}_i)_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma + (\bar{V}_i)_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha] (\lambda^e)_\alpha^\beta + \\ &\left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{P}_\beta^\alpha (\lambda^e)_\alpha^\beta V_i + [\bar{P}_\gamma^\alpha (V_i)_\beta^\gamma + \bar{P}_\beta^\gamma (V_i)_\gamma^\alpha] (\lambda^e)_\alpha^\beta \right\}, \quad (56) \end{aligned}$$

а если пользоваться антисимметричными комбинациями,

то

$$\begin{aligned} \langle 35 | M_i | 35 \rangle &= \mu (\sigma_i)_a^b (\lambda^e)_\alpha^\beta [\bar{\Phi}_C^A \Phi_B^C - \bar{\Phi}_B^C \Phi_C^A] = \\ &= \mu \left\{ \frac{1}{i} \epsilon_{ijk} [(V_j)_\gamma^\alpha (V_k)_\beta^\gamma + (V_j)_\beta^\gamma (V_k)_\gamma^\alpha] (\lambda^e)_\alpha^\beta + \right. \\ &+ [(\bar{V}_i)_\gamma^\alpha P_\beta^\gamma - (\bar{V}_i)_\beta^\gamma P_\gamma^\alpha] (\lambda^e)_\alpha^\beta + [\bar{P}_\gamma^\alpha (V_i)_\beta^\gamma - \bar{P}_\beta^\gamma (V_i)_\gamma^\alpha] (\lambda^e)_\alpha^\beta \}. \end{aligned} \quad (57)$$

Поскольку матричный элемент (57) не меняет знак при зарядовом сопряжении, то из C -инвариантности следует, что только матричный элемент (56) дает вклад. В частности, матричные элементы всех радиационных распадов векторных мезонов на псевдоскалярные зависят от одной константы, через которую выражаются также магнитные моменты векторных мезонов. Напомним, что в унитарной симметрии матричные элементы рассматриваемых электромагнитных распадов зависят от двух констант: g^S и g^D (см. гл. 5, п. 1.2). Из выражения (56) следует, что в симметрии $SU(6)$ эти константы пропорциональны

$$g^S = \frac{2}{\sqrt{3}} g^D.$$

С другой стороны, угол ϕ -смешивания полностью определяется:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Поэтому для распадов ϕ - и ω -мезонов вместо соотношений

$$g_{\phi \rightarrow \pi^0 \gamma} = -\frac{g^D}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{g^S}{\sqrt{2}} \sin \theta,$$

$$g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma} = \frac{g^D}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{2}} \cos \theta;$$

$$g_{\phi \rightarrow \gamma \gamma} = \frac{g^D}{3} \cos \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \sin \theta;$$

$$g_{\omega \rightarrow \gamma \gamma} = -\frac{g^D}{3} \sin \theta + \frac{g^S}{\sqrt{6}} \cos \theta$$

[см. гл. 5, соотношение (16)] получим

$$\begin{aligned} g_{\phi \rightarrow \pi^0 \gamma} &= 0; \quad g_{\omega \rightarrow \pi^0 \gamma} = g^D; \\ g_{\phi \rightarrow \gamma \gamma} &= \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g^D; \quad g_{\omega \rightarrow \gamma \gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} g^D. \end{aligned} \quad (58)$$

Отсюда следует, что распад

$$\varphi \rightarrow \pi^0 + \gamma$$

запрещен, а отношения вероятностей других распадов φ - и ω -мезонов к вероятности распада

$$\rho^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$$

полностью определены. Значения этих отношений, а также других отношений, данных в табл. 10, приведены в табл. 15.

Таблица 15

Отношение вероятностей	Теоретические значения
$\frac{W(K^{*\pm} \rightarrow K^{\pm}\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,58
$\frac{W(K^{*0} \rightarrow K^0\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	2,32
$\frac{W(\rho^0 \rightarrow \eta\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,36
$\frac{W(\omega \rightarrow \pi\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	9,9
$\frac{W(\omega \rightarrow \eta\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0,052
$\frac{W(\varphi \rightarrow \pi^0\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	0
$\frac{W(\varphi \rightarrow \eta\gamma)}{W(\rho^{\pm,0} \rightarrow \pi^{\pm,0}\gamma)}$	2,53

2.3. Мезон-барионное и барион-барионное рассеяния

Применим теперь симметрию $SU(6)$ к изучению мезон-барионного и барион-барионного рассеяния. Отметим прежде всего, что инвариантность матричного элемента по отношению к группе $SU(6)$ влечет за собой инвариантность относительно спиновой группы $SU(2)$, т. е. приводит к сохранению полного спина системы частиц

в процессе рассеяния. Однако в действительности полный спин системы сохраняется только при условии, если орбитальный момент l равен нулю. В состояниях $l \neq 0$ всегда имеется LS -связь, и сохраняющейся величиной является только полный момент $J^2 = (L+S)^2$. Поэтому симметрию $SU(6)$ можно применять только к амplitудам рассеяния в S -состоянии.

Рассмотрим рассеяние мезона из 35-плета на барионе из 56-плета в S -состоянии. Матричный элемент, инвариантный относительно группы $SU(6)$, имеет вид

$$\begin{aligned}
 M(35 + 56 \rightarrow 35 + 56) = & A_1 \bar{\Phi}_B^A \Phi_A^B \Psi^{CDE} \Psi_{CDE} + \\
 & + A_2 (\bar{\Phi}_B^A \Phi_C^B + \bar{\Phi}_C^B \Phi_B^A) \bar{\Psi}^{CDE} \Psi_{ADE} + \\
 & + A_3 (\bar{\Phi}_B^A \Phi_C^B - \bar{\Phi}_C^B \Phi_B^A) \bar{\Psi}^{CDE} \Psi_{ADE} + \\
 & + A_4 \bar{\Phi}_B^A \Phi_D^C \bar{\Psi}^{BDE} \Psi_{ACE}. \quad (59)
 \end{aligned}$$

В матричном элементе (59) содержатся: матричный элемент рассеяния октуплета псевдоскалярных мезонов на октуплете барионов, матричный элемент процессов рождения векторных мезонов и барионных резонансов при столкновении псевдоскалярного мезона с барионом и т. д. Пользуясь выражениями (18) и (25) волновых функций Φ_B^A и Ψ_{ABC} через волновые функции мультиплетов $SU(3) \otimes SU(2)$, можно получить выражение для матричного элемента мезон-барионного рассеяния в S -состоянии. Отметим, что в унитарной симметрии существует семь независимых амплитуд, а в симметрии $SU(6)$ — только четыре. Из выражения (59) можно получить следующее соотношение между амплитудами упругого рассеяния π - и K -мезонов на протоне в S -состоянии:

$$\begin{aligned}
 [M_S(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) - M_S(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)] = \\
 = \frac{1}{2} [M_S(K^+ p \rightarrow K^+ p) - M_S(K^- p \rightarrow K^- p)] = \\
 = [M_S(K^0 p \rightarrow K^0 p) - M_S(\tilde{K} p^0 \rightarrow \tilde{K} p^0)]. \quad (60)
 \end{aligned}$$

Аналогично матричный элемент рассеяния 56-плета на 56-плете в S -состоянии имеет вид

$$\begin{aligned}
 M(56 + 56 \rightarrow 56 + 56) = & A_1 [\bar{\Psi}^{ABC}(1) \Psi_{ABC}(1) \times \\
 & \times \bar{\Psi}^{EFG}(2) \Psi_{EFG}(2) - \bar{\Psi}^{ABC}(1) \Psi_{ABC}(2) \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \bar{\Psi}^{\{EFG\}}(2) \Psi_{\{EFG\}}(1)] + A_2 [\bar{\Psi}^{\{ABC\}}(1) \Psi_{\{ABD\}}(1) \times \\ & \times \bar{\Psi}^{\{DEF\}}(2) \Psi_{\{CEF\}}(2) - \bar{\Psi}^{\{ABC\}}(1) \Psi_{\{ABD\}}(2) \times \\ & \times \bar{\Psi}^{\{DEF\}}(2) \Psi_{\{CEF\}}(1)]. \end{aligned} \quad (61)$$

Здесь цифры 1 и 2 были введены для того, чтобы различить тождественные частицы. Требование принципа Паули учитывается при получении матричного элемента (61). Подставляя в соотношение (61) выражение (25) для волновой функции $\Psi_{\{ABC\}}$, можно получить матричный элемент нуклон-нуклонного рассеяния в S -состоянии и показать, что в симметрии $SU(6)$ амплитуды рассеяния нейтрона на протоне в состояниях 1S_0 и 3S_1 совпадают

$$M_{1S_0}(np \rightarrow np) = M_{3S_1}(np \rightarrow np). \quad (62)$$

Результаты фазового анализа нуклон-нуклонного рассеяния показывают, что в области энергий от 100 до 400 $Mэв$ соотношение (62) хорошо согласуется с опытом.

В заключение отметим, что поскольку симметрия $SU(6)$ требует сохранения полного спина, то область ее применимости весьма ограничена. Так, она неприменима к изучению распадов барионных резонансов, распадов векторных мезонов и т. д. Для изучения этих распадов необходимо построить теорию, которая позволит учесть LS -связь.

§ 3. Возможные интерпретации симметрии $SU(6)$

3.1. Симметрия $SU(6)$ как динамическая симметрия

Обсудим теперь вопросы, которые должны быть решены, если предложенная симметрия $SU(6)$ является некоторой динамической симметрией. Во-первых, теория симметрии $SU(6)$ — нековариантная теория. Дело в том, что три спиновых оператора: $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ijk} \sigma_k$, $i, j, k = 1, 2, 3$, входящие в число генераторов группы $SU(6)$, составляют лишь три компоненты антисимметричного тензора второго ранга в пространстве Минковского $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$. При преобразовании Лоренца каждая компонента σ_{ij} может превращаться в линейную комбинацию всех компонент $\sigma_{\mu\nu}$. Поэтому теория ковариантна только при

условии, если группа симметрии содержит наряду с σ_{ij} все компоненты $\sigma_{\mu\nu}$. Во-вторых, в процессах распада, рассеяния и рождения частиц LS -связь оказывается весьма существенной. Поэтому необходимо построить теорию релятивизированной симметрии $SU(6)$ так, чтобы она позволяла учитывать эту связь. В-третьих, наличие разницы масс частиц в каждом мультиплете группы $SU(6)$ показывает, что симметрия $SU(6)$ нарушается. Теория релятивизированной нарушенной симметрии $SU(6)$ должна также объяснять расщепление масс частиц в каждом мультиплете.

3.2. Симметрия $SU(6)$ и модель кварков

Одним из важных результатов симметрии $SU(6)$ является предсказание отношения магнитных моментов протона и нейтрона. Этот результат также можно получить в рамках модели кварков. Предположим, что барионы и барионные резонансы из 56-плета образуются из трех кварков, находящихся в S -состоянии, причем полные волновые функции этих систем трех кварков симметричны относительно их перестановок. Поскольку унитарные волновые функции частиц из декуплета симметричны по унитарным индексам, то они также симметричны по спиновым индексам, и эти частицы имеют спин $3/2$. Аналогично частицы из октуплета являются состояниями с полным спином $1/2$. Пусть кварки имеют заряды $2/3$, $-1/3$, $-1/3$. Из унитарной симметрии следует, что их магнитные моменты равны $2/3\mu$, $-1/3\mu$, $-1/3\mu$, где μ — произвольная константа. Если кварки имеют только дираковские магнитные моменты, то $\mu = \frac{e}{2M}$, где M — масса

кварка. Рассмотрим Ω^- -гиперон. Он образуется из трех λ -кварков с магнитным моментом $-1/3$. Тогда состояние Ω^- -гиперона с проекцией спина $+3/2$ отождествляется с системой, в которой все λ -кварки имеют проекцию спина $+1/2$ и, следовательно, их магнитные моменты складываются. Таким образом, магнитный момент Ω^- -гиперона по абсолютной величине равен μ и имеет такой же знак, что и его заряд. Аналогично можно вычислить магнитные моменты протона, нейтрона и других частиц, а также константы дипольных магнитных переходов между состояниями барионов и барионных резонансов, между со-

стояниями псевдоскалярных и векторных мезонов и т. д. Для протона и нейтрона получим $\mu_p = \mu$, $\mu_n = -2/3 \mu$ и, следовательно, $\mu_p/\mu_n = -3/2$. Вообще говоря, все предсказания симметрии $SU(6)$ можно рассмотреть как следствия составной модели элементарных частиц, в которой барионы и барионные резонансы образуются из трех кварков, находящихся в S -состоянии, а псевдоскалярные и векторные мезоны образуются из кварка и антикварка в S -состоянии.

Отметим, что в рассматриваемой модели можно вычислить не только отношение магнитных моментов протона и нейтрона, но и их абсолютные значения. Например, магнитный момент протона равен μ . Если кварки имеют только дираковский магнитный момент, то $\mu = \frac{e}{2M}$. Поскольку масса кварка M , по-видимому, большая (гораздо больше $1/3 M_N$, где M_N — масса нуклона), то магнитный момент протона должен быть существенно меньше экспериментального значения $2,79 e/2M_N$. Таким образом, для получения значения магнитного момента протона, необходимо предположить, что магнитные моменты кварков существенно больше их дираковских магнитных моментов. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Струминский и А. Н. Тавхелидзе рассмотрели вопрос о магнитном моменте кварков и показали, что кварки в связанных состояниях имеют эффективные магнитные моменты, существенно превосходящие значения их магнитных моментов в свободном состоянии. В частности, магнитный момент протона может быть равным $2,79 e/2M_N$ даже если свободные кварки имеют магнитные моменты $\frac{2}{3} \frac{e}{2M}$, $-\frac{1}{3} \frac{e}{2M}$ и $-\frac{1}{3} \frac{e}{2M}$ соответственно.

Как было отмечено, чтобы объяснить предсказания симметрии $SU(6)$ в рамках модели кварков, необходимо предположить, что волновые функции барионов и барионных резонансов как систем трех кварков симметричны относительно перестановок кварков. С другой стороны, кварки имеют спин $1/2$, т. е. являются фермионами. Таким образом, если кварки существуют, то они не подчиняются обычной статистике Ферми — Дирака (по крайней мере, когда они находятся в связанном состоянии). В гл. 3 было показано, что можно построить модели уни-

тарной симметрии без дробных зарядов и без дробных барионных чисел. В одной из таких моделей все частицы образуются из трех фундаментальных триплетов.

В рамках этой модели можно также получить все предсказания симметрии $SU(6)$. Поскольку барионы и барионные резонансы образуются из трех кварков в трех различных триплетах, то здесь уже не существует вопроса о статистике кварков. Однако в данном случае, кроме известных квантовых чисел, существует еще одно квантовое число — суперзаряд Z , которое может не сохраняться только в слабых взаимодействиях. Известные барионы, мезоны и резонансы имеют нулевой суперзаряд. В принципе должны существовать также частицы с ненулевыми суперзарядами. Если рассматривать совокупность всех барионов с $Z = 1$, то по крайней мере один из них должен быть стабильным по отношению к сильным и электромагнитным взаимодействиям. Если суперзаряд не сохраняется в слабых взаимодействиях, то масса этого бариона должна быть больше массы протона, так как в противном случае протон распадался бы на барион и пару лептонов или на барион и фотон. Аналогично среди мезонов с $Z = 1$ должен существовать по крайней мере один мезон, который может распадаться только по слабым взаимодействиям. Такие барионы и мезоны должны были бы рождаться (попарно, конечно) при столкновении элементарных частиц высокой энергии, если их массы не слишком велики.

§ 4. Классификация новых мезонных резонансов по высшим представлениям группы $SU(6)$

4.1. Мезонные резонансы

В последнее время экспериментом были обнаружены некоторые мезонные резонансы со спином и четностью 2^+ (см. гл. 3, п. 2.3). Рассмотрим возможность классификации этих мезонных резонансов по неприводимым представлениям группы $SU(6)$. Как известно, по отношению к спиновой группе $SU(2)$ волновые функции частиц со спином 2 являются спинорами четвертого ранга. Поскольку спиноры ранга меньше четырех группы $SU(6)$ не могут содержать спиноры четвертого ранга спиновой подгруппы $SU(2)$, то в симметрии $SU(6)$ мезонные резонан-

сы со спином 2 описываются только спинорами четвертого ранга или высших рангов группы $SU(6)$. В рамках модели кварков это означает, что частицы со спином 2 следует рассматривать только как системы, содержащие не меньше четырех фундаментальных фермионов со спином $1/2$ (кварков и антикварков).

Отметим, что между симметрией $SU(6)$ и моделью кварков существует следующее соответствие: мезонный 35-плет, описываемый спинором с одним верхним и одним нижним индексами Φ_{B}^A , характеризует состояния систем из одного кварка и одного антикварка, а барионный 56-плет, описываемый спинором с тремя нижними индексами, характеризует состояния систем из трех кварков. Грубо говоря, каждый нижний индекс соответствует одному кварку, а верхний — антикварку. Если сохранить это соответствие и для других мультиплетов, то в симметрии $SU(6)$ мезоны всегда описываются спинорами с равными числами верхних и нижних индексов, так как они могут быть рассмотрены как состояния систем, состоящих из равных чисел кварков и антикварков. Таким образом, для классификации мезонных резонансов со спином 2 в симметрии $SU(6)$ необходимо рассмотреть спиноры четвертого ранга, 2 раза ковариантные и 2 раза контравариантные, или спиноры ранга $2p$, $p > 2$, p раз ковариантные и p раз контравариантные. Существуют следующие неприводимые спиноры четвертого ранга, 2 раза ковариантные и 2 раза контравариантные:

$$\Phi_{[CD]}^{[AB]}, \Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}, \Phi_{\{CD\}}^{[AB]} \text{ и } \Phi_{[CD]}^{\{AB\}},$$

причем шпуры этих спиноров равны нулю:

$$\Phi_{[AD]}^{[AB]} = \Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}} = \Phi_{\{AD\}}^{[AB]} = \Phi_{[AD]}^{\{AB\}} = 0.$$

Спиноры $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ совпадают со своими контргradientными, а $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ контргradientно $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$. С другой стороны, частицы и античастицы принадлежат контргradientным друг другу представлениям, а существование частиц влечет за собой существование античастиц. Поэтому $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$ должны быть рассмотрены одновременно.

Подсчитаем теперь число независимых компонент рассматриваемых спиноров четвертого ранга. Отметим, что существует $\frac{6(6+1)}{2} = 21$ различная симметричная пара индексов $\{AB\}$, $\frac{6(6-1)}{2} = 15$ различных антисимметричных пар индексов $[AB]$. Поэтому если бы шпуры спиноров $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$, $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$, $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$, $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$ были произвольными,

то они имели бы $15 \times 15 = 225$, $21 \times 21 = 441$ и $15 \times 21 = 315$ независимых компонент соответственно. Рассмотрим теперь их шпуры по одной паре индексов: $\Phi_{[AD]}^{[AB]}$, $\Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}}$, $\Phi_{\{AD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{[AD]}^{\{AB\}}$.

Первые шпуры являются спинорами с одним верхним и одним нижним индексами. Они имеют $6^2 = 36$ независимых компонент, и условия

$$\Phi_{[AD]}^{[AB]} = \Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}} = 0$$

эквивалентны 36 уравнениям. Следовательно, спиноры $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ с нулевыми шпурами имеют $225 - 36 = 189$ и $441 - 36 = 405$ независимых компонент соответственно. Что касается шпуров $\Phi_{\{AD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{[AD]}^{\{AB\}}$, то они имеют 35 независимых компонент, так как равенство

$$\Phi_{\{AB\}}^{[AB]} = \Phi_{[AB]}^{\{AB\}} = 0$$

выполняется автоматически. Следовательно, спиноры $\Phi_{\{CD\}}^{[AB]}$ и $\Phi_{[CD]}^{\{AB\}}$ с нулевыми шпурами имеют $315 - 35 = 280$ независимых компонент. Таким образом, в рамках теории симметрии $SU(6)$ мезонные резонансы 2^+ могут принадлежать только 189-, 405, $(280 + \overline{280})$ -плету или мультиплетам с большим числом компонент. Рассмотрим подробно 189-плет и 405-плет.

4.2. Разложения 189- и 405-плетов на неприводимые представления подгрупп $SU(3) \otimes SU(2)$ и $SU(4) \otimes SU(2)$.

Можно показать, что 189-плет и 405-плет группы $SU(6)$ содержат следующие унитарные мультиплеты — неприводимые представления подгруппы $SU(3)$

$$189 = (1.5) + (8.5) + 2(8.3) + (10.3) + (\overline{10}.3) + (1.1) + (8.1) + (27.1); \quad (63)$$

$$405 = (1.5) + (8.5) + (27.5) + 2(8.3) + (10.3) + \\ + (\overline{10}.3) + (27.3) + (1.1) + (8.1) + (27.1). \quad (64)$$

Обозначим S , O_β^α , $D_{\alpha\beta\gamma}$, $\overline{D}^{\alpha\beta\gamma}$ и $H_{\gamma\delta}^{\{\alpha\beta\}}$ унитарные волновые функции унитарных синглета, октета, декуплета, сопряженного декуплета и 27-плета соответственно. В каждом из мультиплетов 189 и 405 содержатся два октета со спином 1. Эти октеты обозначим $O_\beta'^\alpha$ и $O_\beta''^\alpha$. Состояния частиц со спином 1 будем характеризовать спином второго ранга

$$\varphi_b^a, \quad a, b = 1, 2$$

с нулевым шпуром $\varphi_a^a = 0$, а состояния частиц со спином 2 — спином четвертого ранга

$$\varphi_{\{cd\}}^{\{ab\}}, \quad a, b, c, d = 1, 2,$$

симметричного по каждой паре верхних и нижних индексов и имеющего нулевой шпур.

$$\varphi_{\{ad\}}^{\{ab\}} = 0.$$

Можно показать, что спиноры

$$\Phi_{[CD]}^{[AB]} \text{ и } \Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}, \text{ где } A = (a, \alpha), \quad a = 1, 2 \text{ и } \alpha = 1, 2, 3$$

группы $SU(6)$, антисимметричные или симметричные по каждой паре индексов и имеющие нулевые шпур

$$\Phi_{[AD]}^{[AB]} = \Phi_{\{AD\}}^{\{AB\}} = 0,$$

которые описывают 189-плет и 405-плет, разлагаются на волновые функции, описывающие неприводимые представления подгруппы $SU(3) \otimes SU(2)$ следующим образом:

$$\Phi_{[CD]}^{[AB]} = \frac{1}{2} \varphi_{\{cd\}}^{\{ab\}} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} \left(O_\mu^\nu + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_\mu^\nu S \right) \varepsilon_{\nu\gamma\delta} + \\ + \frac{1}{2} \varphi^{\{ab\}} \varepsilon_{cd} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} D_{\mu\nu\gamma\delta} + \frac{1}{2} \varphi_{\{cd\}} \varepsilon^{ab} \varepsilon_{\gamma\delta\nu} \overline{D}^{\nu\alpha\beta} + \\ + \frac{1}{4\sqrt{3}} [O_\gamma'^\alpha \delta_\delta^\beta (\varphi_c^b \delta_d^a - \varphi_d^a \delta_c^b) - O_\gamma'^\beta \delta_\delta^\alpha (\varphi_c^a \delta_d^b - \\ - \varphi_d^b \delta_c^a) - O_\delta'^\alpha \delta_\gamma^\beta (\varphi_d^b \delta_c^a - \varphi_c^a \delta_d^b) + O_\delta'^\beta \delta_\gamma^\alpha (\varphi_d^a \delta_c^b -$$

$$\begin{aligned}
& -\varphi_c^b \delta_d^a] + \frac{1}{4\sqrt{3}} [O_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} (\varphi_c^a \delta_d^b + 2\varphi_a^b \delta_c^a) - O_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} (\varphi_c^b \delta_d^a + \\
& + 2\varphi_a^a \delta_c^b) - O_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta} (\varphi_a^a \delta_c^b + 2\varphi_c^b \delta_d^a) + O_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} (\varphi_a^b \delta_c^a + \\
& + 2\varphi_c^a \delta_d^b)] + \frac{1}{2} H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} (\delta_c^a \delta_d^b - \delta_d^a \delta_c^b) + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{30}} [O_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} (\delta_c^a \delta_d^b + 4\delta_d^a \delta_c^b) - O_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} (\delta_c^b \delta_d^a + \\
& + 4\delta_d^b \delta_c^a) - O_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta} (\delta_d^a \delta_c^b + 4\delta_c^a \delta_d^b) + O_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} (\delta_d^b \delta_c^a + 4\delta_c^b \delta_d^a)] + \\
& + \frac{1}{12\sqrt{10}} [\delta_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} (\delta_c^a \delta_d^b - 5\delta_d^a \delta_c^b) - \delta_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} (\delta_c^b \delta_d^a - 5\delta_d^b \delta_c^a)]; \quad (65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}} = & H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} \Phi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} (\delta_\gamma^{\alpha} O_\delta^{\beta} + \delta_\gamma^{\beta} O_\delta^{\alpha} + \delta_\delta^{\alpha} O_\gamma^{\beta} + \\
& + \delta_\delta^{\beta} O_\gamma^{\alpha}) \Phi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} (\delta_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} + \delta_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta}) \Phi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \\
& + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\mu} D_{\mu\gamma\delta} \varepsilon^{ab} \Phi_{\{cd\}} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\gamma\delta\nu} \bar{D}^{\nu\alpha\beta} \varepsilon_{cd} \Phi^{\{ab\}} + \\
& + \frac{1}{4} H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} (\varphi_c^a \delta_d^b + \varphi_a^a \delta_c^b + \varphi_c^b \delta_d^a + \varphi_a^b \delta_c^a) + \\
& + \frac{1}{4\sqrt{3}} [O_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} (\varphi_c^b \delta_d^a - \varphi_a^a \delta_c^b) + O_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} (\varphi_c^a \delta_d^b - \\
& - \varphi_a^b \delta_c^a) + O_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta} (\varphi_a^b \delta_c^a - \varphi_c^a \delta_d^b) + O_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} (\varphi_a^a \delta_c^b - \\
& - \varphi_c^b \delta_d^a)] + \frac{1}{4\sqrt{30}} [O_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} (\varphi_c^a \delta_d^b - 4\varphi_a^b \delta_c^a) + \\
& + O_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} (\varphi_c^b \delta_d^a - 4\varphi_a^a \delta_c^b) + O_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta} (\varphi_a^a \delta_c^b - 4\varphi_c^b \delta_d^a) + \\
& + O_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} (\varphi_a^b \delta_c^a - 4\varphi_c^a \delta_d^b)] + \frac{1}{2\sqrt{3}} H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b) + \frac{1}{8\sqrt{15}} \times \\
& \times [7 (O_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} \delta_c^a \delta_d^b + O_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} \delta_c^b \delta_d^a + O_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta} \delta_d^a \delta_c^b + \\
& + O_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} \delta_d^b \delta_c^a) - 8 (O_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} \delta_d^a \delta_c^b + O_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} \delta_d^b \delta_c^a + \\
& + O_\delta^{\alpha} \delta_\gamma^{\beta} \delta_c^a \delta_d^b + O_\delta^{\beta} \delta_\gamma^{\alpha} \delta_c^b \delta_d^a)] + \frac{1}{12\sqrt{14}} [5 (\delta_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} \delta_c^a \delta_d^b + \\
& + \delta_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} \delta_c^b \delta_d^a) - 7 (\delta_\gamma^{\alpha} \delta_\delta^{\beta} \delta_d^a \delta_c^b + \delta_\gamma^{\beta} \delta_\delta^{\alpha} \delta_d^b \delta_c^a)]. \quad (66)
\end{aligned}$$

С другой стороны, если рассмотреть разложение 189- и 405-плета группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$, то имеем

$$189 = (1.1) + (6.1) + (\bar{6}.1) + (15.1) + (20'.1) + \\ + (4.2) + (\bar{4}.2) + (20.2) + (\bar{20}.2) + (15.3); \quad (67)$$

$$405 = (1.1) + (15.1) + (84.1) + (4.2) + (\bar{4}.2) + (36.2) + \\ + (\bar{36}.2) + (1.3) + (10.3) + (\bar{10}.3) + (15.3) + (4.4) + \\ + (\bar{4}.4) + (1.5). \quad (68)$$

В скобках первые и вторые цифры равны размерностям соответствующих неприводимых представлений групп $SU(4)$ и $SU(2)$, причем последняя является так называемой «спиновой группой странных кварков». Обозначим A' пару индексов (a, α) , а A'' — пару $(a, 3)$, где $a, \alpha = 1, 2$ — спиновый и изоспиновый индексы. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{[C'D']}^{[A'B']} &= \psi_{[C'D']}^{[A'B']} + \frac{1}{4} (\delta_C^{A'} \psi_D^{B'} - \delta_C^{B'} \psi_D^{A'} - \\ &- \delta_D^{A'} \psi_C^{B'} + \delta_D^{B'} \psi_C^{A'}) + \frac{1}{4\sqrt{15}} (\delta_C^{A'} \delta_D^{B'} - \delta_C^{B'} \delta_D^{A'}) C; \\ \Phi_{[C'D'']}^{[A'B'']} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{[C'D']}^{A'} \varphi^{B''} + \frac{1}{4\sqrt{3}} (\delta_C^{A'} \psi_D \varphi^{B''} - \\ &- \delta_D^{A'} \psi_C \varphi^{B''}); \\ \Phi_{[C'D']}^{[A''B'']} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{A''B''} \psi_{[C'D']}; \\ \Phi_{[C'D'']}^{[A'B'']} &= \frac{1}{2} \psi_C^{A'} \varphi_{D''}^{B''} + \frac{1}{4} \delta_{D''}^{B''} \psi_C^{A'} - \\ &- \frac{3}{8\sqrt{15}} \delta_C^{A'} \delta_{D''}^{B''} C; \\ \Phi_{[C''D'']}^{[A'B'']} &= \frac{3}{4\sqrt{3}} \varepsilon_{C''D''} \psi^{A'} \varphi^{B''}; \\ \Phi_{[C''D'']}^{[A''B'']} &= \frac{3}{2\sqrt{15}} \varepsilon^{A''B''} \varepsilon_{C''D''} C; \end{aligned} \right\} (69)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\{C'D\}}^{\{A'B\}} &= \Psi_{\{C'D\}}^{\{A'B\}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \delta_C^{A'} \psi_D^{B'} + \delta_C^{B'} \psi_D^{A'} + \\
&+ \delta_D^{A'} \psi_C^{B'} + \delta_D^{B'} \psi_C^{A'} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{70}} (\delta_C^{A'} \delta_D^{B'} + \delta_C^{B'} \delta_D^{A'}) C; \\
\Phi_{\{C'D\}}^{\{A'B''\}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_{\{C'D\}}^{A'} \varphi^{B''} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{10}} (\delta_C^{A'} \psi_D \varphi^{B''} + \\
&+ \delta_D^{A'} \psi_C \varphi^{B''}) \\
\Phi_{\{C'D\}}^{\{A''B''\}} &= \Psi_{\{C'D\}}^{\{A''B''\}}; \\
\Phi_{\{C'D\}}^{\{A''B''\}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi_D \varphi_{C''}^{\{A''B''\}} + \frac{5}{4\sqrt{30}} \times \\
&\times (\delta_{C''}^{A''} \psi_D \varphi^{B''} + \delta_{C''}^{B''} \psi_D \varphi^{A''}); \\
\Phi_{\{C'D\}}^{\{A'B''\}} &= \frac{1}{2} \psi_C^{A'} \varphi_{D''}^{B''} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \delta_C^{A'} \varphi_{D''}^{B''} + \\
&+ \frac{1}{4\sqrt{2}} \delta_{D''}^{B''} \psi_C^{A'} - \frac{5\sqrt{3}}{8\sqrt{70}} \delta_C^{A'} \delta_{D''}^{B''} C; \\
\Phi_{\{C'D''\}}^{\{A''B''\}} &= \varphi_{\{C'D''\}}^{\{A''B''\}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} (\delta_{C''}^{A''} \varphi_{D''}^{B''} + \delta_{C''}^{B''} \varphi_{D''}^{A''} + \\
&+ \delta_{D''}^{A''} \varphi_{C''}^{B''} + \delta_{D''}^{B''} \varphi_{C''}^{A''}) + \frac{5\sqrt{3}}{6\sqrt{70}} (\delta_{C''}^{A''} \delta_{D''}^{B''} + \delta_{C''}^{B''} \delta_{D''}^{A''}) C,
\end{aligned} \tag{70}$$

где

$$\begin{aligned}
&\Psi_{\{C'D\}}^{\{A'B\}}, \Psi_{\{C'D\}}^{A'}, \Psi_{[C'D]}^{[A'B]}, \Psi_{[C'D]}^{A'}, \Psi_{D'}^{B'}, \Psi_{\{C'D\}}, \\
&\Psi_{[C'D]}, \Psi_{D'} -
\end{aligned}$$

— спиноры группы $SU(4)$, описывающие мультиплеты размерности 84, 36, 20, 20, 15, 10, 6 и 4 соответственно, а $\varphi_{\{C'D''\}}^{\{A''B''\}}, \varphi_{C''}^{\{A''B''\}}, \varphi_{D''}^{B''}, \varphi^{B''}$ — спиноры спиновой группы странных кварков $SU(2)$, описывающие неприводимые представления размерности 5, 4, 3 и 2 соответственно.

4.3. Спиновые и изотопические мультиплеты в неприводимых представлениях подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$

Для изучения классификации частиц по рассматриваемым мультиплетам группы $SU(6)$ и подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$ необходимо знать, какие спиновые и

изотопические мультиплеты содержатся в этих мультиплетах. Иначе говоря, необходимо изучить разложение записанных нами выше неприводимых представлений группы $SU(4) \otimes SU(2)$ на мультиплеты группы $SU(2) \otimes SU(2)$. Для неприводимых представлений группы $SU(4) \otimes SU(2)$, содержащихся в 189-плете группы $SU(6)$, получим следующие разложения:

$$(20.2) = (2.1) + (4.1) + (2.3) + (2.3) + (4.3) + (2.5)$$

$$(20.1) = (1.1) + (5.1) + (3.3) + (1.5)$$

$$(15.3) = (1.1) + (3.1) + (1.3) + (3.3) + (1.5) + (3.5) + (3.3)$$

$$(15.1) = (3.1) + (1.3) + (3.3)$$

$$(4.2) = (2.1) + (2.3)$$

$$(6.1) = (3.1) + (1.3)$$

$$(1.1) = (1.1)$$

Аналогично для мультиплета 405

$$(84.1) = (1.1) + (5.1) + (3.3) + (3.3) + (5.3) + \\ + (1.5) + (3.5) + (5.5)$$

$$(15.1) = (3.1) + (1.3) + (3.3)$$

$$(36.2) = (2.1) + (4.1) + (2.3) + (2.3) + (4.3) + \\ + (4.3) + (2.5) + (4.5)$$

$$(4.2) = (2.1) + (2.3)$$

$$(10.3) = (3.1) + (1.3) + (3.3) + (3.5)$$

$$(4.4) = (2.3) + (2.5)$$

$$(1.5) = (1.5)$$

$$(1.3) = (1.3)$$

В разложениях первая цифра (в скобках) обозначает размерность изотопических мультиплетов, вторая — размерность спиновых мультиплетов.

Волновые функции разложений имеют вид

$$(20.2): \Psi_{[C'D']}^{A''} \Phi^{B''} = \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\{v^8\}}^{\alpha 3} \chi^{\{ab\}} \epsilon_{cd} + \frac{1}{2} \xi_{\{v^8\}}^{\alpha 3} \epsilon^{ab} \epsilon_{cd} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{v^8} \xi^{\alpha 3} \chi^{\{cd\}} + \frac{1}{\sqrt{6}} (\xi_{\delta}^3 \delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_d^a \chi_c^b - \xi_{\gamma}^3 \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_c^a \chi_d^b) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\sqrt{6}} [\xi_{\gamma}^3 \delta_{\delta}^{\alpha} (\delta_c^b \chi_d^a + 2\delta_d^b \chi_c^a - \delta_d^a \chi_c^b) - \\
& - \xi_{\delta}^3 \delta_{\gamma}^{\alpha} (\delta_d^b \chi_c^a + 2\delta_c^b \chi_d^a - \delta_c^a \chi_d^b)] + \frac{1}{2\sqrt{3}} (\xi_{\gamma}^3 \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_d^b \delta_c^a - \\
& - \xi_{\delta}^3 \delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_c^b \delta_d^a); \quad (71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(20.1): \Psi_{[C'D']}^{[A'B']} &= \frac{1}{2} \xi_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} \varepsilon^{ab} e_{cd} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta} e_{\gamma\delta} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} (\xi_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} \chi_c^b \delta_d^a - \xi_{\gamma}^{\beta} \delta_{\delta}^{\alpha} \chi_c^a \delta_d^b - \xi_{\delta}^{\alpha} \delta_{\gamma}^{\beta} \chi_d^b \delta_c^a + \\
& + \xi_{\delta}^{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha} \chi_d^a \delta_c^b) + \frac{1}{2\sqrt{6}} (\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} \delta_d^a \delta_c^b - \delta_{\gamma}^{\beta} \delta_{\delta}^{\alpha} \delta_d^b \delta_c^a). \quad (72)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(15.3): \Psi_{C'}^{A'} \Phi_{D''}^{B''} &= \xi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \delta_c^a \delta_d^b + \frac{1}{2} \xi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} (\chi_c^b \delta_d^a - \chi_d^a \delta_c^b) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} (\chi_c^b \delta_d^a - \chi_d^a \delta_c^b) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \xi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} (\delta_c^a \delta_d^b - 2\delta_d^a \delta_c^b) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{6}} \delta_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} (\delta_c^a \delta_d^b - 2\delta_d^a \delta_c^b); \quad (73)
\end{aligned}$$

$$(15.1): \Psi_{D'}^{A'} = \xi_{\gamma}^{\alpha} \chi_d^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_{\delta}^{\alpha} \chi_d^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\delta}^{\alpha} \delta_d^a; \quad (74)$$

$$(4.2): \Psi_{C'} \Phi^{A''} = \xi_{\gamma}^3 \chi_c^a + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\gamma}^3 \delta_c^a; \quad (75)$$

$$(6.1): \psi^{[A'B']} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{ab} \xi^{\{\alpha\beta\}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta} \chi^{\{ab\}}; \quad (76)$$

$$(1.1): \delta_{C'}^{A'} = \delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_c^a; \quad (77)$$

$$\begin{aligned}
(84.1): \Psi_{[C'D']}^{\{A'B'\}} &= \xi_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{4} \xi_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} (\delta_c^a \chi_d^b + \delta_c^b \chi_d^a + \\
& + \delta_d^a \chi_c^b + \delta_d^b \chi_c^a) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \xi_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_c^b \delta_d^a) + \\
& + \frac{1}{4} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} (\delta_{\gamma}^{\alpha} \xi_{\delta}^{\beta} + \delta_{\gamma}^{\beta} \xi_{\delta}^{\alpha} + \delta_{\delta}^{\alpha} \xi_{\gamma}^{\beta} + \delta_{\delta}^{\beta} \xi_{\gamma}^{\alpha}) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} (\delta_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} + \delta_{\gamma}^{\beta} \delta_{\delta}^{\alpha}) + \frac{1}{4\sqrt{2}} [\xi_{\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} (\chi_c^b \delta_d^a - \chi_d^a \delta_c^b) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \xi_{\nu}^{\beta} \delta_{\delta}^{\alpha} (\chi_c^a \delta_d^b - \chi_d^b \delta_c^a) + \xi_{\delta}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} (\chi_d^b \delta_c^a + \chi_c^a \delta_d^b) + \\
& + \xi_{\delta}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} (\chi_d^a \delta_c^b - \chi_c^b \delta_d^a) \Big] + \frac{1}{8 \sqrt{3}} \left[\xi_{\nu}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} (\chi_c^a \delta_d^b - \right. \\
& - 3 \chi_d^b \delta_c^a) + \xi_{\nu}^{\beta} \delta_{\delta}^{\alpha} (\chi_c^b \delta_d^a - 3 \chi_d^a \delta_c^b) + \xi_{\delta}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} (\chi_d^a \delta_c^b - \\
& - 3 \chi_c^b \delta_d^a) + \xi_{\delta}^{\beta} \delta_{\nu}^{\alpha} (\chi_d^b \delta_c^a - 3 \chi_c^a \delta_d^b) \Big] + \frac{1}{6 \sqrt{10}} \left[\delta_{\nu}^{\alpha} \delta_{\delta}^{\beta} \times \right. \\
& \times (4 \delta_c^a \delta_d^b - 5 \delta_d^a \delta_c^b) + \delta_{\nu}^{\beta} \delta_{\delta}^{\alpha} (4 \delta_c^b \delta_d^a - 5 \delta_d^b \delta_c^a) \Big]; \quad (78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(36.2) : \Psi_{\{C'D'\}}^{B'} \Phi^{A''} &= \xi_{\{\nu\delta\}}^{3\beta} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{4} \xi_{\{\nu\delta\}}^{3\beta} (\delta_c^a \chi_d^b + \\
& + \delta_c^b \chi_d^a + \delta_d^a \chi_c^b + \delta_d^b \chi_c^a) + \frac{1}{2 \sqrt{3}} \xi_{\{\nu\delta\}}^{3\beta} (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_c^b \delta_d^a) + \\
& + \frac{1}{2 \sqrt{2}} \xi_{\{\nu\delta\}}^{3\beta} (\delta_c^a \chi_d^b - \delta_c^b \chi_d^a + \delta_d^a \chi_c^b - \delta_d^b \chi_c^a) + \\
& + \frac{1}{\sqrt{6}} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} (\delta_{\nu}^{\beta} \xi_{\delta}^3 + \delta_{\delta}^{\beta} \xi_{\nu}^3) + \frac{1}{3 \sqrt{10}} \left[\xi_{\nu}^3 \delta_{\delta}^{\beta} (5 \delta_c^b \chi_d^a - \right. \\
& - 4 \delta_d^b \chi_c^a) + \xi_{\delta}^3 \delta_{\nu}^{\beta} (5 \delta_d^b \chi_c^a - 4 \delta_c^b \chi_d^a) + \frac{1}{6 \sqrt{2}} \left[\xi_{\nu}^3 \delta_{\delta}^{\beta} (2 \delta_c^a \chi_d^b + \right. \\
& + \delta_d^a \chi_c^b - \delta_c^b \chi_d^a) + \xi_{\delta}^3 \delta_{\nu}^{\beta} (2 \delta_d^a \chi_c^b + \delta_c^a \chi_d^b - \delta_d^b \chi_c^a) \Big] + \\
& + \frac{1}{6 \sqrt{5}} \left[\delta_c^a \delta_d^b (4 \xi_{\nu}^3 \delta_{\delta}^{\beta} - 5 \xi_{\delta}^3 \delta_{\nu}^{\beta}) + \delta_d^a \delta_c^b (4 \xi_{\delta}^3 \delta_{\nu}^{\beta} - 5 \xi_{\nu}^3 \delta_{\delta}^{\beta}) \right]; \quad (79)
\end{aligned}$$

$$(4.2) \Psi_{D'} \Phi^{B''} = \xi_{\delta}^3 \chi_d^b + \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_{\delta}^3 \delta_d^b; \quad (80)$$

$$\begin{aligned}
(10.3) : \Psi_{\{C'D'\}}^{\{A''B''\}} &= \xi_{\{\nu\delta\}}^{33} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{4} \xi_{\{\nu\delta\}}^{33} (\delta_c^a \chi_d^b + \\
& + \delta_c^b \chi_d^a + \delta_d^a \chi_c^b + \delta_d^b \chi_c^a) + \frac{1}{2 \sqrt{3}} \xi_{\{\nu\delta\}}^{33} (\delta_c^a \delta_d^b + \\
& + \delta_c^b \delta_d^a) + \frac{1}{2} \xi_{\nu\delta}^{33} \chi^{\{ab\}} \epsilon_{\nu\delta} \epsilon_{cd}; \quad (81)
\end{aligned}$$

$$(4.4) : \Psi_{D'} \Phi_{C''}^{\{A''B''\}} = \xi_{\delta}^{33} \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}} + \frac{1}{\sqrt{30}} \left[\delta_c^a \chi_d^b + \delta_c^b \chi_d^a - \right. \quad (82)$$

$$\left. - 3 (\delta_d^a \chi_c^b + \delta_d^b \chi_c^a) \right] \xi_{\delta}^{33}; \quad (82)$$

$$(1.5) : \Phi_{\{C''D''\}}^{\{A''B''\}} = \chi_{\{cd\}}^{\{ab\}}; \quad (83)$$

$$(1.3) : \Phi_{D''}^{B''} = \chi_d^b; \quad (84)$$

где $\xi_{\gamma\delta}^{\{\alpha\beta\}}$, ξ_{γ}^{α} и т. д. — спиноры группы $SU(2)_{\tau}$, описывающие мультиплеты размерности 5, 3 и т. д., а $\chi_{cd}^{\{ab\}}$, χ_c^a и т. д. — спиноры группы $SU(2)_{\sigma}$. При определении вида разложений исходят из обычных требований симметрии, ортонормировки и равенства нулю шпура. Значение гиперзаряда определяется числом верхних и нижних индексов «3».

С помощью полученных разложений в следующем разделе будут получены параметры смешивания частиц из разных унитарных мультиплетов с одинаковыми спинами.

4.4. Параметры смешивания

Как было указано во введении, физически наблюдаемые частицы принадлежат мультиплетам не $SU(3) \otimes SU(2)$, а $SU(4) \otimes SU(2)$. Это приводит к тому, что если данное неприводимое представление группы $SU(6)$ содержит различные мультиплеты с одним и тем же спином, то физические частицы являются определенными линейными суперпозициями состояний с одинаковыми квантовыми числами из различных унитарных мультиплетов. Для определения углов смешивания применяется следующий метод. На основе разложений спиноров $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ группы $SU(6)$ на неприводимые представления группы $SU(4) \otimes SU(2)$ [см. формулы (69), (70)] и разложений последних на изотопические мультиплеты с определенными спинами [формулы (71) — (84)] можно найти проекционные операторы на каждое физическое состояние. Действуя этими проекционными операторами на выражения $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ через волновые функции унитарных мультиплетов [формулы (65), (66)], мы сразу получим конкретные линейные комбинации волновых функций состояний из унитарных мультиплетов, описывающие физические частицы.

Продемонстрируем это на примере изотопического мультиплета со спином 1 и гиперзарядом 0, содержащегося в представлении (20.1) группы $SU(4) \otimes SU(2)$ и в 189-плете группы $SU(6)$. Волновую функцию этой частицы обозначим T_i^j , где $i = 1, 2, 3$ — индекс вектора в трехмерном пространстве, а $j = 1, 2, 3$ — индекс изото-

пического вектора. Соответствующий проекционный оператор обозначим $(\Pi_i^I)_{[A'B']}^{[C'D']}$. Он должен удовлетворять условию

$$(\Pi_i^I)_{[A'B']}^{[C'D']} \Phi_{[C'D']}^{[A'B']} = T_i^I. \quad (85)$$

С помощью формулы (72) можно показать, что

$$\begin{aligned} (\Pi_i^I)_{[A'B']}^{[C'D']} = \frac{1}{2\sqrt{2}} & [(\tau_i)_\alpha^\gamma \delta_\beta^{\delta'} (\sigma_j)_{\beta'}^{\delta} \delta_\alpha^d - (\tau_i)_\beta^\delta \delta_\alpha^{\delta'} (\sigma_j)_{\alpha'}^{\delta} \delta_b^d - \\ & - (\tau_i)_\alpha^\delta \delta_\beta^{\delta'} (\sigma_j)_a^d \delta_b^{\delta} + (\tau_i)_\beta^\delta \delta_\alpha^{\delta'} (\sigma_j)_b^d \delta_a^{\delta}]. \end{aligned} \quad (86)$$

Действуя теперь этим проекционным оператором на выражение (65) спинора $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$, получим

$$\begin{aligned} T_i^I = (\Pi_i^I)_{[A'B']}^{[C'D']} \Phi_{[C'D']}^{[A'B']} = & \left[\frac{2}{\sqrt{6}} (O')_\gamma^\alpha (\tau_j)_\alpha^\gamma + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon^{\alpha\beta\sigma} D_{\sigma\gamma\beta} (\tau_j)_\alpha^\gamma - \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_{\gamma\beta\sigma} \bar{D}^{\sigma\alpha\beta} (\tau_j)_\alpha^\gamma \right] V_i, \end{aligned} \quad (87)$$

где

$$V_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{Sp} (\varphi \sigma_i)$$

пространственная волновая функция со спином 1 (нормированный трехмерный вектор). Обозначим π , σ и $\tilde{\sigma}$ нормированные волновые функции частиц в правой части соотношения (87). Тогда из этой формулы

$$T_i^{II} = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\pi_j + \sigma_j + \tilde{\sigma}_j) V_i. \quad (88)$$

Последнее соотношение показывает, что рассмотренный изотопический триплет со спином 1 и гиперзарядом 0 является суперпозицией трех изотопических триплетов с такими же спинами и гиперзарядами, принадлежащими трем унитарным мультиплетам (8.3), (10.3) и $(\overline{10.3})$. Применяя этот метод, можно получить параметры смешивания для всех изотопических мультиплетов.

Введем следующие обозначения для состояний с определенным изотопическим спином и гиперзарядом в каждом унитарном мультиплете со спином s :

	$Y = 0, T = 0$	$Y = 0, T = 1$	$Y = 0, T = 2$	$Y = +1, T = \frac{1}{2}$	$Y = +1, T = \frac{3}{2}$	$Y = -1, T = \frac{1}{2}$	$Y = -1, T = \frac{3}{2}$	$Y = +2, T = 0$	$Y = +2, T = 1$	$Y = -2, T = 0$	$Y = -2, T = 1$
$(1, 2s + 1)$	$g(s)$										
$(8, 2s + 1)$	$\eta(s)$	$\pi(s)$		$K(s)$		$\tilde{K}(s)$					
$(10, 2s + 1)$		$\sigma(s)$			$\delta(s)$	$\xi(s)$					$\tau(s)$
$(\bar{10}, 2s + 1)$		$\tilde{\sigma}(s)$		$\tilde{\xi}(s)$			$\tilde{\delta}(s)$	$\tilde{\tau}(s)$			
$(27, 2s + 1)$	$a(s)$	$b(s)$	$c(s)$	$d(s)$	$e(s)$	$\tilde{d}(s)$	$\tilde{e}(s)$		$f(s)$		$\tilde{f}(s)$

Для случая октетов O' и O'' со спином 1 пользуются обозначениями $\eta'(s)$, $\pi'(s)$... и $\eta''(s)$, $\pi''(s)$... соответственно. Как уже отмечалось, многие из этих состояний не физические. Физические состояния с изотопическим спином $T = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$, с гиперзарядом Y и спином s обозначим $S(Y, s)$, $D(Y, s)$, $T(Y, s)$, $Q(Y, s)$, $F(Y, s)$ соответственно. Чтобы отличать различные изотопические мультиплеты с одинаковыми квантовыми числами, пользуются индексами 1, 2, 3... Например, в 189-плете содержатся три дублета с $Y = \pm 1, s = 1$. Эти частицы обозначим $D_1(\pm 1, 1)$, $D_2(\pm 1, 1)$ и $D_3(\pm 1, 1)$. Формулы смешивания следующие:

189-плет

$$s = 2$$

$$S_1(0, 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} [V\sqrt{2} g(2) + \eta(2)];$$

$$S_2(0, 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} [-g(2) + V\sqrt{2} \eta(2)]; \quad (89)$$

$$D(1, 2) = K(2); D(-1, 2) = \tilde{K}(2); T(0, 2) = \pi(2). \quad (90)$$

$$s = 1$$

$$S_1(0, 1) = \eta'(1); S_2(0, 1) = \eta''(1); \quad (91)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1(1,1) &= \frac{1}{3} [-\tilde{\xi}(1) - 2K'(1) + 2K''(1)]; \\ D_2(1,1) &= \frac{1}{3} [2\tilde{\xi}(1) + K'(1) + 2K''(1)]; \\ D_3(1,1) &= \frac{1}{3} [-2\tilde{\xi}(1) + 2K'(1) + K''(1)]; \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [\sigma(1) + \tilde{\sigma}(1) + 2\pi'(1)]; \\ T_2(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma(1) + \tilde{\sigma}(1) - \pi'(1)]; \\ T_3(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [\sigma(1) - \tilde{\sigma}(1) + 2\pi''(1)]; \\ T_4(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma(1) - \tilde{\sigma}(1) - \pi''(1)]; \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

$$Q(1,1) = \delta(1); \quad Q(-1,1) = \tilde{\delta}(1); \quad (94)$$

$$S(-2,1) = \tau(1); \quad S(+2,1) = \tilde{\tau}(1). \quad (95)$$

$s = 0$

$$F(0,0) = c(0); \quad Q(+1,0) = e(0); \quad Q(-1,0) = \tilde{e}(0); \quad (96)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [V\sqrt{2} \pi(0) - V\sqrt{3} b(0)]; \\ T_2(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [V\sqrt{3} \pi(0) + V\sqrt{2} b(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1(1,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [K(0) + 2d(0)]; \\ D_2(1,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [2K(0) - d(0)]; \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{60}} [3V\sqrt{3} a(0) + 2V\sqrt{2} \eta(0) - 5g(0)]; \\ S_2(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{60}} [V\sqrt{3} a(0) + 4V\sqrt{2} \eta(0) + 5g(0)]; \\ S_3(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [V\sqrt{3} a(0) - V\sqrt{2} \eta(0) + g(0)]; \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

$$T(2,0) = f(0); \quad T(-2,0) = \tilde{f}(0). \quad (100)$$

Напишем обратные соотношения, которые будут использованы при изучении массовых соотношений:

$$\begin{aligned} & \mathbf{s} = 2 \\ & \left. \begin{aligned} g(2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [-\sqrt{2} S_1(0,2) + S_2(0,2)]; \\ \eta(2) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [S_1(0,2) + \sqrt{2} S_2(0,2)]. \end{aligned} \right\} \quad (89') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{s} = 1 \\ & \left. \begin{aligned} K'(1) &= \frac{1}{3} [-2D_1(1,1) + D_2(1,1) + 2D_3(1,1)]; \\ K''(1) &= \frac{1}{3} [2D_1(1,1) + 2D_2(1,1) + D_3(1,1)]; \\ \tilde{\xi}(1) &= \frac{1}{3} [-D_1(1,1) + 2D_2(1,1) - 2D_3(1,1)]; \end{aligned} \right\} \quad (92') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} \pi'(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\sqrt{2} T_1(0,1) - T_2(0,1)]; \\ \pi''(1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\sqrt{2} T_3(0,1) - T_4(0,1)]; \\ \sigma(1) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [T_1(0,1) + \sqrt{2} T_2(0,1) + T_3(0,1) + \\ & \quad + \sqrt{2} T_4(0,1)]; \\ \tilde{\sigma}(1) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [T_1(0,1) + \sqrt{2} T_2(0,1) - T_3(0,1) - \\ & \quad - \sqrt{2} T_4(0,1)]. \end{aligned} \right\} \quad (93') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{s} = 0 \\ & \left. \begin{aligned} \pi(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\sqrt{2} T_1(0,0) + \sqrt{3} T_2(0,0)]; \\ b(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\sqrt{3} T_1(0,0) - \sqrt{2} T_2(0,0)]; \end{aligned} \right\} \quad (97') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} K(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [D_1(1,0) + 2D_2(1,0)]; \\ d(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [2D_1(1,0) - D_2(1,0)]; \end{aligned} \right\} \quad (98') \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 g(0) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} [V\sqrt{5}S_1(0,0) - V\sqrt{5}S_2(0,0) - V\sqrt{2}S_3(0,0)]; \\
 \eta(0) &= \frac{1}{V\sqrt{15}} [V\sqrt{2}S_1(0,0) + 2V\sqrt{2}S_2(0,0) - \\
 &\quad - V\sqrt{5}S_3(0,0)]; \\
 a(0) &= \frac{1}{2V\sqrt{5}} [3S_1(0,0) + S_2(0,0) + V\sqrt{10}S_3(0,0)].
 \end{aligned} \right\} (99')$$

405-плет

$s = 2$

$$T(2,2) = f(2); T(-2,2) = \tilde{f}(2); F(0,2) = c(2); \quad (101)$$

$$Q(1,2) = e(2); Q(-1,2) = \tilde{e}(2); \quad (102)$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_1(0,2) &= \frac{1}{V\sqrt{5}} [-b(2) + 2\pi(2)]; \\
 T_2(0,2) &= \frac{1}{V\sqrt{5}} [2b(2) + \pi(2)];
 \end{aligned} \right\} (103)$$

$$\left. \begin{aligned}
 D_1(1,2) &= \frac{1}{V\sqrt{5}} [V\sqrt{2}K(2) + V\sqrt{3}d(2)]; \\
 D_2(1,2) &= \frac{1}{V\sqrt{5}} [V\sqrt{3}K(2) - V\sqrt{2}d(2)];
 \end{aligned} \right\} (104)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_1(0,2) &= \frac{1}{V\sqrt{10}} [V\sqrt{5}g(2) - 2\eta(2) + a(2)]; \\
 S_2(0,2) &= \frac{1}{V\sqrt{15}} [V\sqrt{5}g(2) + \eta(2) - 3a(2)]; \\
 S_3(0,2) &= \frac{1}{V\sqrt{30}} [V\sqrt{5}g(2) + 4\eta(2) + 3a(2)].
 \end{aligned} \right\} (105)$$

$s = 1$

$$T(2,1) = f(1); T(-2,1) = \tilde{f}(1); F(0,1) = c(1); \quad (106)$$

$$S(-2,1) = \tau(1); S(2,1) = \tilde{\tau}(1); \quad (107)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_1(0,1) &= \frac{1}{V\sqrt{5}} [V\sqrt{3}\eta''(1) + V\sqrt{2}a(1)]; \\
 S_2(0,1) &= \frac{1}{V\sqrt{5}} [V\sqrt{2}\eta''(1) - V\sqrt{3}a(1)]; \\
 S_3(0,1) &= \eta'(1);
 \end{aligned} \right\} (108)$$

$$\begin{aligned}
D_1(1,1) &= \frac{1}{\sqrt{15}} [2\sqrt{10}K'(1) - K''(1) - \\
&\quad - 2\sqrt{10}\tilde{\xi}(1) + 12d(1)]; \\
D_2(1,1) &= \frac{1}{3\sqrt{5}} [V\sqrt{10}K'(1) + 4K''(1) - \\
&\quad - \sqrt{10}\tilde{\xi}(1) - 3d(1)]; \\
D_3(1,1) &= \frac{1}{5\sqrt{6}} [2V\sqrt{10}K'(1) + 4K''(1) + \\
&\quad + 3\sqrt{10}\tilde{\xi}(1) + 2d(1)]; \\
D_4(1,1) &= \frac{1}{\sqrt{30}} [V\sqrt{10}K'(1) - 4K''(1) - 2d(1)];
\end{aligned}
\tag{109}$$

$$\begin{aligned}
T_1(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [2\pi'(1) - \sigma(1) - \tilde{\sigma}(1)]; \\
T_2(0,1) &= \frac{1}{3\sqrt{5}} [4V\sqrt{2}\pi''(1) + V\sqrt{5}\sigma(1) - \\
&\quad - \sqrt{5}\tilde{\sigma}(1) + V\sqrt{3}b(1)]; \\
T_3(0,1) &= \frac{1}{3\sqrt{5}} [-\pi''(1) + V\sqrt{10}\sigma(1) - \\
&\quad - \sqrt{10}\tilde{\sigma}(1) - 2\sqrt{6}b(1)]; \\
T_4(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{30}} [-2V\sqrt{2}\pi''(1) + V\sqrt{5}\sigma(1) - \\
&\quad - \sqrt{5}\tilde{\sigma}(1) + 2V\sqrt{3}b(1)]; \\
T_5(0,1) &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\pi'(1) + \sigma(1) + \tilde{\sigma}(1)];
\end{aligned}
\tag{110}$$

$$\begin{aligned}
Q_1(1,1) &= \delta(1); Q_1(-1,1) = \tilde{\delta}(1); Q_2(1,1) = \\
&= e(1); Q_2(-1,1) = \tilde{e}(1).
\end{aligned}
\tag{111}$$

$s = 0$

$$T(2,0) = f(0); T(-2,0) = \tilde{f}(0); F(0,0) = c(0); \tag{112}$$

$$Q(1,0) = e(0); Q(-1,0) = \tilde{e}(0); \tag{113}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{S}_1(0,0) &= \frac{1}{10} [\sqrt{35} g_1'(0) - 8\eta(0) - a(0)]; \\ S_2(0,0) &= \frac{1}{2\sqrt{15}} [\sqrt{35} g(0) + 4\eta(0) + 3a(0)]; \\ S_3(0,0) &= \frac{1}{5\sqrt{3}} [-\sqrt{5} g(0) - \sqrt{7} \eta(0) + 3\sqrt{7} a(0)]; \end{aligned} \right\} (114)$$

$$\left. \begin{aligned} D_1(1,0) &= \frac{1}{5} [2\sqrt{6} K(0) + d(0)]; \\ D_2(1,0) &= \frac{1}{5} [-K(0) + 2\sqrt{6} d(0)]; \end{aligned} \right\} (115)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [-2\pi(0) + b(0)]; \\ T_2(0,0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\pi(0) + 2b(0)]. \end{aligned} \right\} (116)$$

Наконец, обратные соотношения для 405-плета
 $s = 2$.

$$\left. \begin{aligned} \pi(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [2T_1(0,2) - T_2(0,2)]; \\ b(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [-T_1(0,2) + 2T_2(0,2)]; \end{aligned} \right\} (103')$$

$$\left. \begin{aligned} K(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\sqrt{2} D_1(1,2) + \sqrt{3} D_2(1,2)]; \\ d(2) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\sqrt{3} D_1(1,2) - \sqrt{2} D_2(1,2)]; \end{aligned} \right\} (104')$$

$$\left. \begin{aligned} g(2) &= \frac{1}{\sqrt{6}} [\sqrt{3} S_1(0,2) + \sqrt{2} S_2(0,2) + S_3(0,2)]; \\ \eta(2) &= \frac{1}{\sqrt{15}} [-\sqrt{6} S_1(0,2) + S_2(0,2) + 2\sqrt{2} S_3(0,2)]; \\ a(2) &= \frac{1}{\sqrt{10}} [S_1(0,2) - \sqrt{6} S_2(0,2) + \sqrt{3} S_3(0,2)]. \end{aligned} \right\} (105')$$

$s = 1$

$$\left. \begin{aligned} \eta'(1) &= S_3(0,1); \\ \eta''(1) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\sqrt{3} S_1(0,1) + \sqrt{2} S_2(0,1)]; \\ a(1) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\sqrt{2} S_1(0,1) - \sqrt{3} S_2(0,1)]; \end{aligned} \right\} (108')$$

$$\left. \begin{aligned}
 K'(1) &= \frac{1}{15} [2\sqrt{10}D_1(1,1) + 5\sqrt{2}D_2(1,1) + \\
 &\quad + 2\sqrt{15}D_3(1,1) + 5\sqrt{3}D_4(1,1)]; \\
 K''(1) &= \frac{1}{15} [-D_1(1,1) + 4\sqrt{5}D_2(1,1) + \\
 &\quad + 2\sqrt{6}D_3(1,1) - 2\sqrt{30}D_4(1,1)]; \\
 \tilde{\xi}(1) &= \frac{1}{15} [2\sqrt{10}D_1(1,1) + 5\sqrt{2}D_2(1,1) - \\
 &\quad - 3\sqrt{15}D_3(1,1)];
 \end{aligned} \right\} (109')$$

$$d(1) = \frac{1}{5\sqrt{15}} [4\sqrt{15}D_1(1,1) - 5\sqrt{3}D_2(1,1) + \\
 + \sqrt{10}D_3(1,1) - 5\sqrt{2}D_4(1,1)];$$

$$\pi'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} [\sqrt{2}T_1(0,1) + T_5(0,1)];$$

$$\pi''(1) = \frac{1}{3\sqrt{5}} [4\sqrt{2}T_2(0,1) - T_3(0,1) - \\
 - 2\sqrt{3}T_4(0,1)];$$

$$\sigma(1) = \frac{1}{6} [-\sqrt{6}T_1(0,1) + 2T_2(0,1) +$$

$$+ 2\sqrt{2}T_3(0,1) + \sqrt{6}T_4(0,1) + 2\sqrt{3}T_5(0,1)]; \left. \right\} (110')$$

$$\tilde{\sigma}(1) = \frac{1}{6} [\sqrt{6}T_1(0,1) + 2T_2(0,1) +$$

$$+ 2\sqrt{2}T_3(0,1) + \sqrt{6}T_4(0,1) - 2\sqrt{3}T_5(0,1)];$$

$$b(1) = \frac{1}{\sqrt{15}} [T_2(0,1) - 2\sqrt{2}T_3(0,1) + \\
 + \sqrt{6}T_4(0,1)].$$

$s = 0$

$$g(0) = \frac{1}{6\sqrt{5}} [-3\sqrt{7}S_1(0,0) - \sqrt{105}S_2(0,0) + \\
 + 2\sqrt{3}S_3(0,0)];$$

$$\eta(0) = \frac{1}{15} [-12S_1(0,0) + 2\sqrt{15}S_2(0,0) - \\
 - \sqrt{21}S_3(0,0)];$$

$$a(0) = \frac{1}{10} [S_1(0,0) - \sqrt{15}S_2(0,0) - 2\sqrt{21}S_3(0,0)];$$

$$\left. \begin{aligned} K(0) &= \frac{1}{5} [2\sqrt{6} D_1(1,0) - D_2(1,0)]; \\ d(0) &= \frac{1}{5} [D_1(1,0) + 2\sqrt{6} D_2(1,0)]; \end{aligned} \right\} \quad (115')$$

$$\left. \begin{aligned} \pi(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [-2T_1(0,0) + T_2(0,0)]; \\ b(0) &= \frac{1}{\sqrt{5}} [T_1(0,0) + 2T_2(0,0)]. \end{aligned} \right\} \quad (116')$$

Пользуясь этими формулами смешивания и массовой формулой Гелл-Манна — Окубо, нетрудно получить соотношения между массами физических состояний, т. е. массами частиц.

4.5. С-четность

Определим теперь С-четность некоторых унитарных и изотопических мультиплетов, содержащих одновременно частицы и античастицы. Напомним, что если унитарные волновые функции частиц из октета и 27-плета преобразуются согласно

$$CO_{\beta}^{\alpha} C^{-1} = \eta O_{\alpha}^{\beta}, \quad CH_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} C^{-1} = \eta H_{\{\alpha\beta\}}^{\{\gamma\delta\}}, \quad (\eta = \pm 1), \quad (117)$$

то эти мультиплеты имеют С-четность η . Для изотопических мультиплетов имеются аналогичные определения. Понятие С-четности можно также ввести для мультиплетов группы $SU(6)$, содержащих одновременно частицы и античастицы, например 35-плет, 189-плет, 405-плет и т. д.

Рассмотрим сначала 35-плет, описываемый спином Φ_B^A группы $SU(6)$ с нулевым шпуром. Этот мультиплет содержит октет со спином 0, октет и синглет со спином 1

$$\Phi_B^A = \varphi_b^a V_{\beta}^{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{3}} \varphi_b^a \delta_{\beta}^{\alpha} S + \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a O_{\beta}^{\alpha}, \quad (118)$$

где V_{β}^{α} и S — унитарные волновые функции векторных мезонов, а O_{β}^{α} — унитарная волновая функция псевдоскалярных мезонов. Чтобы определить С-преобразование для мультиплетов группы $SU(6)$, следует отметить, что С-преобразование опускает верхние унитарные индексы и поднимает нижние, но не затрагивает спиновых индексов. С другой стороны, для спиноров группы $SU(6)$

унитарные и спиновые индексы образуют единые двойные индексы, так что опускание (поднимание) унитарных индексов всегда влечет за собой опускание (поднимание) спиновых индексов. Например, C -преобразование связывает Φ_B^A и Φ_A^B . Так как спиновые индексы при этом преобразовании не затрагиваются, то в одном из спинов Φ_B^A и Φ_A^B следует поднять и опустить соответствующие спиновые индексы. Это можно сделать при помощи антисимметричных спиноров второго ранга ε_{ab} и ε^{ab} .

Таким образом,

$$C\Phi_B^A C^{-1} = \eta \varepsilon_{bb'} \Phi_{(a'\alpha)}^{(b'\beta)} \varepsilon^{a'a}. \quad (119)$$

Подставив в соотношение (119) выражение Φ_B^A через волновые функции $SU(3) \otimes SU(2)$, получим

$$CV_\beta^\alpha C^{-1} = -\eta V_\alpha^\beta, \quad CSC^{-1} = -\eta S; \quad (120)$$

$$CO_\beta^\alpha C^{-1} = \eta O_\alpha^\beta. \quad (121)$$

Таким образом, C -четности векторных и псевдоскалярных мезонов в 35-плете имеют обратные знаки. В частности, если $\eta = 1$, то псевдоскалярные мезоны имеют C -четность $+1$, а векторные мезоны C -четность -1 , что подтверждается экспериментом.

Рассмотрим теперь 189- и 405-плеты группы $SU(6)$. По аналогии с соотношением (119) получим

$$C\Phi_{[(c\gamma)(d\delta)]}^{[(a\alpha)(b\beta)]} C^{-1} = \eta \varepsilon_{cc'} \varepsilon_{dd'} \Phi_{[(a'\alpha)(b'\beta)]}^{[(c'\gamma)(d'\delta)]} \varepsilon^{a'a} \varepsilon^{b'b}. \quad (122)$$

$$C\Phi_{\{(c\gamma)(d\delta)\}}^{\{(a\alpha)(b\beta)\}} C^{-1} = \eta \varepsilon_{cc'} \varepsilon_{dd'} \Phi_{\{(a'\alpha)(b'\beta)\}}^{\{(c'\gamma)(d'\delta)\}} \varepsilon^{a'a} \varepsilon^{b'b}. \quad (123)$$

Предположим для определенности, что $\eta = 1$. Подставляя в соотношение (122) выражение (65), получим C -четности всех унитарных мультиплетов, содержащихся в 189-плете группы $SU(6)$:

$$\left. \begin{aligned} s = 2 : CO_\beta^\alpha C^{-1} &= O_\alpha^\beta; \quad CSC^{-1} = S. \\ s = 1 : CO_\beta'^\alpha C^{-1} &= O_\alpha'^\beta; \quad CO_\beta''^\alpha C^{-1} = -O_\alpha''^\beta; \\ &CD_{\alpha\beta\gamma} C^{-1} = -\bar{D}^{\alpha\beta\gamma}. \\ s = 0 : CH_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} C^{-1} &= H_{\{\alpha\beta\}}^{\{\gamma\delta\}}; \quad CO_\beta^\alpha C^{-1} = O_\alpha^\beta; \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

$$CSC^{-1} = S.$$

Аналогично из формул (123) и (66) получим для 405-плета:

$$\left. \begin{aligned}
 s = 2 : CH_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} C^{-1} &= H_{\{\alpha\beta\}}^{\{\gamma\delta\}}; CO_{\beta}^{\alpha} C^{-1} = O_{\alpha}^{\beta} \\
 CSC^{-1} &= S. \\
 s = 1 : CH_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} C^{-1} &= -H_{\{\alpha\beta\}}^{\{\gamma\delta\}}; \\
 CO_{\beta}^{\prime\alpha} C^{-1} = O_{\alpha}^{\prime\beta}; CO_{\beta}^{\prime\prime\alpha} C^{-1} &= -O_{\alpha}^{\prime\prime\beta}. \\
 s = 0 : CH_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}} C^{-1} &= H_{\{\alpha\beta\}}^{\{\gamma\delta\}}; CO_{\beta}^{\alpha} C^{-1} = O_{\alpha}^{\beta}; \\
 CSC^{-1} &= S.
 \end{aligned} \right\} (125)$$

Отметим, что в обоих мультиплеттах $SU(6)$ два октета со спином 1 имеют разные C -четности.

C -четности физических изотопических мультиплетов, являющихся суперпозициями состояний из разных унитарных мультиплетов, можно определить двумя способами: либо пользоваться непосредственно соотношениями смешивания (69)—(116) и законами преобразования (124), (125) для унитарных мультиплетов, либо подставить в соотношения (112), (123) разложения спиноров $\Phi_{[CD]}^{[AB]}$ и $\Phi_{\{CD\}}^{\{AB\}}$ по цепи $SU(6) \supset SU(4) \otimes SU(2) \supset SU(2) \otimes SU(2)$. В результате получим C -четности для изотопических мультиплетов из 189-плета, содержащих одновременно частицы и античастицы

$$\begin{aligned}
 C = +1 : S_1(0,2), S_2(0,2), T_1(0,0), T_2(0,0), T_1(0,1), T_2(0,1), \\
 S_1(0,0), S_2(0,0), S_3(0,0), S_1(0,1), T(0,2), F(0,0); \\
 C = -1 : T_3(0,1), T_4(0,1), S_2(0,1).
 \end{aligned}$$

Аналогично для 405-плета

$$\begin{aligned}
 C = +1 : T_1(0,2), T_2(0,2), S_1(0,2), S_2(0,2), S_3(0,2), S_3(0,1) \\
 T_1(0,1), T_5(0,1) S_1(0,0), S_2(0,0), S_3(0,0), \\
 T_1(0,0), T_2(0,0), F(0,0), F(0,2); \\
 C = -1 : S_1(0,1), S_2(0,1), T_2(0,1), T_3(0,1), T_4(0,1).
 \end{aligned}$$

4.6. Соотношения между константами распада

При классификации мезонов по рассмотренным мультиплетам 189 и 405 необходимо проверить, выполняются ли массовые соотношения. Изучение соотношений между вероятностями распадов резонансов также может дать дополнительную информацию.

Рассмотрим сначала распад мезонов 0^+ и 2^+ на два псевдоскалярных мезона. Преследуя цель идентификации известных мезонов 2^+ с частицами из рассматриваемых мультиплетов 189 и 405, предположим, что константа η в формулах (122) и (123) равна $+1$. Тогда унитарные мультиплеты со спином и четностью 0^+ и 2^+

Таблица 16

Мезоны 2^+ в представлении 189

Распад	Константа
$T^+(0,2) \rightarrow K^+ \tilde{K}^0$	g_5
$T^+(0,2) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\sqrt{\frac{2}{3}} g_5$
$D^+(1,2) \rightarrow K^0 \pi^+$	g_5
$D^+(1,2) \rightarrow K^+ \eta$	$-\frac{1}{\sqrt{6}} g_5$
$S_1(0,2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{2}{3} g_5 - \frac{1}{3} g_4$
$S_1(0,2) \rightarrow K^+ K^-$	$-\frac{1}{3} g_5 - \frac{1}{\sqrt{3}} g_4$
$S_1(0,2) \rightarrow \eta \eta$	$-\frac{2}{3} g_5 - \frac{1}{\sqrt{3}} g_4$
$S_2(0,2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{\sqrt{2}}{3} g_5 + \sqrt{\frac{2}{3}} g_4$
$S_2(0,2) \rightarrow K^+ K^-$	$-\frac{1}{3\sqrt{2}} g_5 + \sqrt{\frac{2}{3}} g_4$
$S_2(0,2) \rightarrow \eta \eta$	$-\frac{\sqrt{2}}{3} g_5 + \sqrt{\frac{2}{3}} g_4$

Мезоны 0^+ в представлении 189

Распад	Константа
$S_1(0, 0) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{60}} \left(\frac{3}{2\sqrt{10}} g_3 + 2g_2 - 5g_1 \right)$
$S_2(0, 0) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{60}} \left(5g_1 + 4g_2 + \frac{1}{2\sqrt{10}} g_3 \right)$
$S_3(0, 0) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(g_1 - g_2 + \frac{1}{2\sqrt{10}} g_3 \right)$
$D_1^+(1, 0) \rightarrow K^+ \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} g_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} g_3 \right)$
$D_2^+(1, 0) \rightarrow K^+ \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{2} g_2 - \frac{1}{2\sqrt{15}} g_3 \right)$
$T_1^+(0, 0) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} g_2 - \frac{3}{\sqrt{10}} g_3 \right)$
$T_2^+(0, 0) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{2} g_2 + \frac{3}{\sqrt{15}} g_3 \right)$
$Q^{++}(1, 0) \rightarrow K^+ \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} g_3$
$F^{++}(0, 0) \rightarrow \pi^+ \pi^+$	g_3
$T^{++}(2, 0) \rightarrow K^+ K^+$	g_3

имеют C -четность $+1$. Матричные элементы распадов этих мезонов на два псевдоскалярных мезона имеют следующую унитарную структуру:

$$0^+ \rightarrow 0^- + 0^-$$

$$M(0 \rightarrow 8 + 8) = g_1 S(q) \bar{P}_\beta^\alpha(p_1) \bar{P}_\alpha^\beta(p_2). \quad (126)$$

$$M(8 \rightarrow 8 + 8) = g_2 T_\beta^\alpha(q) [\bar{P}_\alpha^\gamma(p_1) \bar{P}_\gamma^\beta(p_2) + \bar{P}_\gamma^\beta(p_1) \bar{P}_\alpha^\gamma(p_2)]. \quad (127)$$

$$M(27 \rightarrow 8 + 8) = g_3 H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}}(q) \bar{P}_{\alpha.}^\gamma(p_1) \bar{P}_{\beta.}^{\delta\gamma}(p_2). \quad (128)$$

Мезоны 2^+ в представлении 405

Распад	Константа
$S_1(0, 2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{5} g_4 - \sqrt{2} g_5 + \frac{1}{2\sqrt{30}} g_6 \right)$
$S_2(0, 2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{15}} \left(\sqrt{5} g_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} g_5 - \frac{3}{2\sqrt{30}} g_6 \right)$
$S_3(0, 2) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{\sqrt{30}} \left(\sqrt{5} g_4 + 2\sqrt{2} g_5 + \frac{3}{2\sqrt{30}} g_6 \right)$
$D_1^+(1, 2) \rightarrow K^+ \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(g_5 + \frac{1}{2\sqrt{5}} g_6 \right)$
$D_2^+(1, 2) \rightarrow K^+ \pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} g_5 - \frac{1}{\sqrt{30}} g_6 \right)$
$T_1^+(0, 2) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(2\sqrt{\frac{2}{3}} g_5 - \frac{3}{\sqrt{30}} g_6 \right)$
$T_2^+(0, 2) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} g_5 + \frac{6}{\sqrt{30}} g_6 \right)$
$Q^{++}(1, 2) \rightarrow K^+ \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} g_6$
$F^{++}(0, 2) \rightarrow \pi^+ \pi^+$	g_6
$T^{++}(2, 2) \rightarrow K^+ K^+$	g_6

$$2^+ \rightarrow 0^- + 0^- \quad M(0 \rightarrow 8 + 8) = g_4 S(q) \bar{P}_\beta^\alpha(p_1) \bar{P}_\alpha^\beta(p_2). \quad (129)$$

$$M(8 \rightarrow 8 + 8) = g_5 T_\beta^\alpha(q) [\bar{P}_\alpha^\gamma(p_1) \bar{P}_\gamma^\beta(p_2) + \bar{P}_\gamma^\beta(p_1) \bar{P}_\alpha^\gamma(p_2)]. \quad (130)$$

$$M(27 \rightarrow 8 + 8) = g_6 H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}}(q) \bar{P}_\alpha^\gamma(p_1) \bar{P}_\beta^\delta(p_2). \quad (131)$$

Здесь $H_{\{\gamma\delta\}}^{\{\alpha\beta\}}(q)$, $T_\beta^\alpha(q)$ и $S(q)$ означают распадающиеся 27-плет, октет и синглет соответственно с импульсом q , а $\bar{P}_\beta^\alpha(p_1)$ и $\bar{P}_\alpha^\beta(p_2)$ — октеты псевдоскалярных мезонов с импульсами p_1 и p_2 . Исходя из этих матричных элементов и используя формулы смешивания, можно получить

Мезоны 0^+ в представлении 405

Распад	Константа
$S_1(0,0) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{10} \left(\sqrt{35} g_1 - \frac{8}{\sqrt{2}} g_2 - \frac{1}{2\sqrt{30}} g_3 \right)$
$S_2(0,0) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{2\sqrt{15}} \left(\sqrt{35} g_1 + 2\sqrt{2} g_2 + \frac{3}{2\sqrt{30}} g_3 \right)$
$S_3(0,0) \rightarrow \pi^+ \pi^-$	$\frac{1}{5\sqrt{3}} \left(-\sqrt{5} g_1 - \sqrt{\frac{7}{2}} g_2 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{7}{30}} g_3 \right)$
$D_1(1,0) \rightarrow K^+ \pi^0$	$\frac{1}{5} \left(2\sqrt{3} g_2 + \frac{1}{2\sqrt{15}} g_3 \right)$
$D_2(1,0) \rightarrow K^+ \pi^0$	$\frac{1}{5} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} g_2 + \sqrt{\frac{2}{5}} g_3 \right)$
$T_1^+(0,0) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{15}} \left(-2\sqrt{2} g_2 + \frac{3}{\sqrt{10}} g_3 \right)$
$T_2^+(0,0) \rightarrow \pi^+ \eta$	$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} g_2 - \frac{3}{\sqrt{10}} g_3 \right)$
$Q^{++}(1,0) \rightarrow K^+ \pi^+$	$\frac{1}{\sqrt{2}} g_3$
$F^{++}(0,0) \rightarrow \pi^+ \pi^+$	g_3
$T^{++}(2,0) \rightarrow K^+ K$	g_3

выражения для констант конкретных наблюдаемых распадов g_1 , g_2 , g_3 и т. д. Результаты приведены в табл. 16—19.

Из данных выражений для констант распадов вытекают различные соотношения между константами. Учитывая кинематические факторы (фазовый объем), можно найти также соотношения между вероятностями распадов, если известны значения масс соответствующих частиц. Ввиду отсутствия экспериментальных данных в настоящее время это возможно только для нонета 2^+ в 189-плете (подробно см. гл. 4).

Аналогично для распадов мезонов 2^+ на октет псевдоскалярных мезонов и нонет векторных мезонов имеем

матричные элементы

$$\left. \begin{aligned}
 M(0 \rightarrow 8 + 8) &= 0; \\
 M(8 \rightarrow 8 + 8) &= f T_{\beta}^{\alpha}(q) [\bar{V}_{\alpha}^{\gamma}(p_1) \bar{P}_{\gamma}^{\beta}(p_2) - \\
 &\quad - \bar{V}_{\gamma}^{\beta}(p_1) \bar{P}_{\alpha}^{\gamma}(p_2)]; \\
 M(27 \rightarrow 8 + 8) &= 0.
 \end{aligned} \right\} (132)$$

Выражения констант конкретных распадов даны в табл. 20 и 21.

Таблица 20

Мезоны 2^+ в представлении 189

Распад	Константа	Распад	Константа
$T^+(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^0$	$\sqrt{2} f$	$S_1(0, 2) \rightarrow K^{*+}K^-$	f
$T^+(0, 2) \rightarrow \omega\pi^+$	0	$S_1(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^-$	0
$T^+(0, 2) \rightarrow \rho^+\eta$	0	$S_2(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^-$	0
$T^+(0, 2) \rightarrow \phi\pi^+$	0	$S_1(0, 2) \rightarrow \omega\eta$	0
$D^+(1, 2) \rightarrow K^{*+}\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} f$	$S_2(0, 2) \rightarrow \omega\eta$	0
$D^+(1, 2) \rightarrow K^+\omega$	$\frac{1}{\sqrt{2}} f$	$S_2(0, 2) \rightarrow K^{*+}K^-$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} f$
$D^+(1, 2) \rightarrow K^+\rho^0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} f$		

Таблица 21

Мезоны 2^+ в представлении 405

Распад	Константа	Распад	Константа
$T_1^+(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^0$	$2\sqrt{\frac{2}{5}} f$	$D_2^+(1, 2) \rightarrow K^+\omega$	$\sqrt{\frac{3}{10}} f$
$T_1^+(0, 2) \rightarrow \omega\pi^+$	0	$D_2^+(1, 2) \rightarrow K^+\rho^0$	$\sqrt{\frac{3}{10}} f$
$T_1^+(0, 2) \rightarrow \rho^+\eta$	0	$S_1(0, 2) \rightarrow K^{*+}K^-$	$-\sqrt{\frac{3}{5}} f$
$T_1^+(0, 2) \rightarrow \phi\pi^+$	0		

Распад	Константа	Распад	Константа
$T_2^+(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^0$	$\sqrt{\frac{2}{5}} f$	$S_1(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^-$	0
$T_2^+(0, 2) \rightarrow \omega\pi^+$	0	$S_1(0, 2) \rightarrow \omega\eta$	0
$T_2^+(0, 2) \rightarrow \rho^+\eta$	0	$S_2(0, 2) \rightarrow K^{*+}K^-$	$\frac{1}{\sqrt{10}} f$
$T_2^+(0, 2) \rightarrow \phi\pi^+$	0	$S_2(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^-$	0
$D_1^+(1, 2) \rightarrow K^{*+}\pi^0$	$\frac{1}{\sqrt{5}} f$	$S_2(0, 2) \rightarrow \omega\eta$	0
$D_1^+(1, 2) \rightarrow K^+\omega$	$\frac{1}{\sqrt{5}} f$	$S_3(0, 2) \rightarrow K^{*+}K^-$	$\frac{2}{\sqrt{5}} f$
$D_1^+(1, 2) \rightarrow K^+\rho^0$	$\frac{1}{\sqrt{5}} f$	$S_3(0, 2) \rightarrow \rho^+\pi^-$	0
$D_2^+(1, 2) \rightarrow K^{*+}\pi^0$	$\sqrt{\frac{3}{10}} f$	$S_3(0, 2) \rightarrow \omega\eta$	0

Таблица 22

Мезоны 1^+ в представлении 189

Распад	Константа
$S_1(0, 1) \rightarrow n\gamma$	0
$S_1(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	0
$S_2(0, 1) \rightarrow \eta\gamma$	$-\frac{1}{3} h_2$
$S_2(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} h_2$
$D_1^+(1, 1) \rightarrow K^+\gamma$	$\frac{1}{3} \left(-2h_1 + \frac{2}{3} h_2 \right)$
$D_2^+(1, 1) \rightarrow K^+\gamma$	$\frac{1}{3} \left(2h_1 + \frac{2}{3} h_2 \right)$
$D_3^+(1, 1) \rightarrow K^+\gamma$	$\frac{1}{3} \left(h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right)$

Распад	Константа
$D_1^0(1,1) \rightarrow K^0\gamma$	$\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 - \frac{4}{3} h_2 \right)$
$D_2^0(1,1) \rightarrow K^0\gamma$	$\frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} h_3 - \frac{4}{3} h_2 \right)$
$D_3^0(1,1) \rightarrow K^0\gamma$	$\frac{1}{3} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} h_3 - \frac{2}{3} h_2 \right)$
$T_1^+(0,1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 - h_1 \right)$
$T_2^+(0,1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 - h_1 \right)$
$T_3^+(0,1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 + \frac{2}{3} h_2 \right)$
$T_4^+(0,1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 - \frac{2}{3} h_2 \right)$
$T_1^0(0,1) \rightarrow \pi^0\gamma$	0
$T_2^0(0,1) \rightarrow \pi^0\gamma$	0
$T_3^0(0,1) \rightarrow \pi^0\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 + \frac{2}{3} h_2 \right)$
$T_4^0(0,1) \rightarrow \pi^0\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} h_3 - \frac{2}{3} h_2 \right)$
$T_1^0(0,1) \rightarrow \eta\gamma$	0
$T_2^0(0,1) \rightarrow \eta\gamma$	0
$T_3^0(0,1) \rightarrow \eta\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{6}} \left(-h_3 + \frac{2}{\sqrt{3}} h_2 \right)$
$T_4^0(0,1) \rightarrow \eta\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(-h_3 - \frac{2}{\sqrt{3}} h_2 \right)$
$Q^+(1,1) \rightarrow K^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} h_3$
$Q^0(1,1) \rightarrow K^0\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} h_3$

Мезоны 1^+ в представлении 405

Распад	Константа
$S_1(0,1) \rightarrow \pi^0 \gamma$	$\frac{1}{\sqrt{5}} h_2$
$S_2(0,1) \rightarrow \pi^0 \gamma$	$\frac{2}{\sqrt{30}} h_2$
$S_3(0,1) \rightarrow \pi^0 \gamma$	0
$S_1(0,1) \rightarrow \eta \gamma$	$-\frac{1}{\sqrt{15}} h_2$
$S_2(0,1) \rightarrow \eta \gamma$	$\frac{2}{3\sqrt{10}} h_2$
$S_3(0,1) \rightarrow \eta \gamma$	0
$D_1^+(1,1) \rightarrow K^+ \gamma$	$\frac{1}{15} \left(2\sqrt{10} h_1 - \frac{1}{3} h_2 \right)$
$D_2^+(1,1) \rightarrow K^+ \gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(\sqrt{10} h_1 + \frac{4}{3} h_2 \right)$
$D_3^+(1,1) \rightarrow K^+ \gamma$	$\frac{1}{5\sqrt{6}} \left(2\sqrt{10} h_1 + \frac{4}{3} h_2 \right)$
$D_4^+(1,1) \rightarrow K^+ \gamma$	$\frac{1}{\sqrt{30}} \left(\sqrt{10} h_1 - \frac{4}{3} h_2 \right)$
$D_1^0(1,1) \rightarrow K^0 \gamma$	$\frac{1}{15} \left(\frac{2}{3} h_2 - \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{3}} h_3 \right)$
$D_2^0(1,1) \rightarrow K^0 \gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(-\frac{8}{3} h_2 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} h_3 \right)$
$D_3^0(1,1) \rightarrow K^0 \gamma$	$\frac{1}{5\sqrt{6}} \left(-\frac{8}{3} h_2 + \sqrt{30} h_3 \right)$
$D_4^0(1,1) \rightarrow K^0 \gamma$	$\frac{8}{3\sqrt{30}} h_2$
$Q^+(1,1) \rightarrow K^+ \gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} h_3$
$Q^0(1,1) \rightarrow K^0 \gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} h_3$

Распад	Константа
$T_1^+(0, 1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{6} \left(2h_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} h_3 \right)$
$T_2^+(0, 1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{4}{9} \sqrt{\frac{2}{5}} h_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} h_3$
$T_3^+(0, 1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{3} h_2 - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} h_3 \right)$
$T_4^+(0, 1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{30}} \left(-\frac{3\sqrt{2}}{3} h_2 - \sqrt{\frac{5}{2}} h_3 \right)$
$T_5^+(0, 1) \rightarrow \pi^+\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(h_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} h_3 \right)$
$T_1^0(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	0
$T_2^0(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} h_2 + \sqrt{\frac{5}{3}} h_3 \right)$
$T_3^0(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{3} h_2 + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{3}} h_3 \right)$
$T_4^0(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{30}} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} h_2 + \sqrt{\frac{5}{3}} h_3 \right)$
$T_5^0(0, 1) \rightarrow \pi^0\gamma$	0
$T_1^0(0, 1) \rightarrow \eta\gamma$	0
$T_2^0(0, 1) \rightarrow \eta\gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} h_2 - \sqrt{5} h_3 \right)$
$T_3^0(0, 1) \rightarrow \eta\gamma$	$\frac{1}{3\sqrt{5}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} h_2 - \sqrt{10} h_3 \right)$
$T_4^0(0, 1) \rightarrow \eta\gamma$	$\frac{1}{\sqrt{30}} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} h_2 - \sqrt{5} h_3 \right)$
$T_5^0(0, 1) \rightarrow \eta\gamma$	0

Рассмотрим радиационные распады мезонов 1^+ на псевдоскалярные мезоны. В зависимости от C -четности частиц матричные элементы этих процессов равны

$$\left. \begin{aligned} M(8' \rightarrow 8 + \gamma) &= h_1 (O_\gamma^1 \bar{P}_1^\gamma - O_1^\gamma \bar{P}_\gamma^1); \\ M(8'' \rightarrow 8 + \gamma) &= h_2 (O_\gamma^1 \bar{P}_1^\gamma + O_1^\gamma \bar{P}_\gamma^1 - \frac{2}{3} O_8^\gamma \bar{P}_\gamma^8); \\ M(10 \rightarrow 8 + 8) &= h_3 D_{1\alpha\beta}^1 \bar{P}_\gamma^\beta \varepsilon^{1\alpha\gamma}; \\ M(\bar{10} \rightarrow 8 + 8) &= -h_3 \bar{D}^{1\alpha\beta} \bar{P}_\beta^\gamma \varepsilon_{1\alpha\gamma}; \\ M(27 \rightarrow 8 + 8) &= 0. \end{aligned} \right\} (133)$$

Выражения для констант приведены в табл. 22 и 23.

4.7. Заключение

Используя имеющиеся в настоящее время данные по бозонным резонансам, рассмотрим возможность классификации этих резонансов по представлениям 189 и 405 группы $SU(6)$. Критерием справедливости идентификации при этом будет выполнение массовых соотношений, которые можно также использовать для предсказания масс еще не обнаруженных частиц.

Из-за недостатка экспериментальных данных из массовых соотношений можно проверить только формулу

$$4m_D^2(1,2) = m_T^2(0,2) + m_{S_1}^2(0,2) + 2m_{S_2}^2(0,2) \quad (134)$$

для нонета мезонов 2^+ в 189-плете. Массы известных мезонов 2^+ A_2 (1310), K^{**} (1410), f^0 (1250) и f' (1520) или в наших обозначениях T (0,2), D (1,2), S_1 (0,2) и S_2 (0,2) удовлетворяют этой формуле в пределах экспериментальных ошибок. Поскольку имеется экспериментальная работа, где приведено несколько иное значение массы резонанса K^{**} (1430 Мэв), которое не согласуется с формулой (134), то желательно уточнение этой величины. В 405-плете, кроме нонета, имеется еще 27-плет со спином 2^+ , для заполнения которого пока не хватает экспериментальных данных. Если у обнаруженного недавно резонанса M_1 (1280) в системе K^+K^+ спин и четность равны 2^+ , то его можно поместить только в представление 405.

Рассмотрим изотопические мультиплеты со спином и четностью 1^+ , входящие в 189- и 405-плеты, и возможность отождествления их с известными резонансами.

$D (\pm 1, 1)$. Имеются не вполне достоверные данные о существовании четырех резонансов с $T_z = 1/2$ и массами 1360, 1320, 1215 и 1175 Мэв. Если у этих частиц $T = 1/2$ и $s^P = 1^+$, то три из них могут быть сопоставлены частицам $D (\pm 1, 1)$ в 189-плете или же все четыре — в 405-плете.

$Q (\pm 1, 1)$. Возможным кандидатом является резонанс в системе $K\pi\pi$ с массой 1270 Мэв, если подтвердится, что спин и четность этого резонанса равны 1^+ . Возможно также, что $Q (\pm 1, 1)$ можно отождествить с каким-либо из четырех резонансов, перечисленных в предыдущем абзаце, если у этого резонанса $T = 3/2$. Отметим, что в 405-плете содержится два изоквартета $Q (\pm 1, 1)$ (в 189-плете — один).

$T (0, 1)$. Достоверно установлено существование резонанса $B (1215)$ ($C = -1$); имеются данные о резонансе $A_1 (1072)$ с C -четностью ($C = +1$), но некоторые авторы приводят соображения против существования этого резонанса. В данном случае нам недостает двух резонансов для 189-плета и трех — для 405-плета (если существование A_1 считается достоверным). Напомним, что изотриплеты имеют определенные C -четности, например, в 189-плете для $T_1 (0, 1)$ и $T_2 (0, 1)$, $C = +1$, а для $T_3 (0, 1)$ и $T_4 (0, 1)$ $C = -1$.

$S (0, 1)$. Хорошо известны резонансы $D (1286)$ с C -четностью ($C = +1$) и $E (1420)$ с C -четностью ($C = -1$) со спином и четностью 1^+ и $T = Y = 0$; помимо этого имеются экспериментальные данные о резонансе $H (975)$, у которого предполагаются такие же квантовые числа. Этим частицам можно сопоставить два изосинглета $S (0, 1)$ (различающиеся C -четностью) в 189-плете или три изосинглета $S (0, 1)$ (у двух $C = -1$, у одного $C = +1$) в 405-плете.

$F (0, 1)$. В 405-плете содержится изоквинтет с нулевым гиперзарядом. Достоверных данных о существовании мезонного резонанса 1^+ с $T = 2$, $Y = 0$ еще нет, однако возможно отождествление его с одним из резонансов $X^- (962)$, $R^- (1675)$ или $3\pi (1000)$, у которых предполагаются квантовые числа $T = 2$, $Y = 0$.

$S (\pm 2, 1)$ и $T (\pm 2, 1)$. Изосинглет с $Y = 2$ содержится как в 405-плете, так и в 189-плете, изотриплет с $Y = 2$ — только в 405-плете. Экспериментальными данными по этим частицам мы еще не располагаем.

Что касается мезонов 0^+ , то здесь число частиц с 0^+ спином и четностью 0^+ в 189- и 405-плете одинаково, но массовые формулы разные. Приведем некоторые данные о возможных кандидатах в нашу схему.

$S(0,0)$: $\sigma(390)$, $\varepsilon^0(720)$. Рассматриваемые нами представления группы $SU(6)$ содержат три частицы $S(0,0)$, однако отождествить их с наблюдаемыми резонансами трудно, так как данные о двух мезонах σ и ε^0 недостоверны.

$D(\pm 1,0)$. Имеются экспериментальные данные всего лишь об одном резонансе $\chi(725)$ с $T = \frac{1}{2}$ и со спином и четностью 0^+ . Представления же 189 и 405 содержат по две частицы $D(+1,0)$.

$T(0,0)$. Пока известен лишь один изотриплет $\pi\eta(1040)$ со спином и четностью 0^+ и $Y = 0$, в то время как оба представления содержат по две частицы $T(0,0)$.

$T(2,0)$. Обнаруженный резонанс $M_2(1055)$ со спином и четностью 0^+ , $T = 1$, $Y = 2$ может быть отождествлен с частицей $T(2,0)$. Как было сказано, наряду с резонансом $M_2(1055)$ существует также резонанс $M_1(1280)$ с $T = 1$, $Y = 2$. Если $M_2(1055)$ имеет спин 0, а $M_1(1280)$ — спин 2, то они могут принадлежать 405-плету. Если же оба резонанса имеют спин 0, то для классификации этих резонансов невозможно ограничиться одним представлением 405 или 189.

Итак, для классификации мезонов 0^+ пока имеется мало экспериментальных данных, особенно для резонансов с высшими квантовыми числами $T > 1$, $Y > 1$. Поэтому необходимы дальнейшие поиски резонансов 0^+ , в частности в системе двух псевдоскалярных мезонов $\pi^+\pi^+$, $K^+\pi^+$. В настоящее время имеются указания на существование $\pi\pi$ -резонанса с $T = 2$ и массой 1540 Мэв, а также $K\pi$ -резонанса с $T = 3/2$ и массой 780 Мэв. Однако эти данные еще не очень достоверны, и необходимо провести дальнейшие поиски подобных резонансов. В частности, эти резонансы могут быть обнаружены в реакциях типа

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + n;$$

$$K^+ + p \rightarrow K^+ + \pi^+ + n;$$

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \pi^- + \Sigma^+$$

и т. д.

Прежде чем рассматривать классификацию мезонов 1^+ и 0^+ по представлениям 189 и 405 группы $SU(6)$, необходимо выделить те мезоны, которые образуют 35-плет с четностью $P = +1$, содержащий октет 0^+ и нонет 1^+ . Мы знаем, что если выбрать в качестве мезонов 1^+ из нонета резонансы B (1220) с $T = 1, Y = 0, K\pi$ (1175) с $T = \frac{1}{2}, E$ (1420) и H (975) с $T = Y = 0$, то массовая формула для нонета хорошо выполняется в пределах экспериментальных ошибок. Таким образом, весьма вероятно, что эти резонансы образуют 35-плет и не могут быть включены в схему классификации по 189- или 405-плетам.

В гл. 3 и 4 обсуждались возможности существования унитарных мультиплетов барионных резонансов $\frac{3^-}{2} \frac{5^+}{2} \frac{7^+}{2}$. Развитую здесь технику можно также применить к изучению классификации этих резонансов по высшим мультиплетам группы $SU(6)$.

Литература

Группа $SU(6)$ и классификация элементарных частиц

- Дао Вонг Дык, Фам Куи Ты. «Ядерная физика», 2, 748 (1965).
 Gürsey F., Radicati L. A. Phys. Rev. Lett., 13, 173 (1964).
 Енковски Л., Кухтин В. В. Нгуен Ван Хьеу. «Ядерная физика», 5, 215.
 Gürsey F., Pais A., Radicati L. A. Phys. Rev. Lett., 13, 299 (1964).
 Kadishevsky V. G. et al., Fortschr. Phys., 13, 599 (1965).
 Pais A. Phys. Rev. Lett., 13, 175 (1964).
 Robaschik D., Uhlmann A. Preprint JINR E—2557, 1966.
 Sakita B. Phys. Rev., 136, B1756 (1964).

Электромагнитные свойства барионов и мезонов Мезон-барионное и барион-барионное рассеяния

- Anisovich V. V. et al. Phys. Lett., 16, 194 (1965).
 Bégin M. A., Lee B. W., Pais A. Phys. Rev. Lett., 13, 514 (1964).
 Биленький С. М. и др. «Ядерная физика», 2, 762 (1965).
 Johnson L. J., Treiman S. B. Phys. Rev. Lett., 14, 189 (1965).

Захаров В. И., Тютин И. В. «Ядерная физика», **2**, 918 (1965).
Sakita B. Phys. Rev. Lett., **13**, 643 (1964).
Soloviev L. D. Phys. Lett., **16**, 345 (1965).

Модель кварков и симметрия $SU(6)$

Боголюбов Н. Н. Физика высоких энергий и теория элементарных частиц. Киев, Изд-во «Наукова думка», 1966.
Боголюбов Н. Н., Струминский Б. В., Тавхелидзе А. Н. Препринт ОИЯИ, Д—1968 (1965).
Струминский Б. В. Препринт ОИЯИ, Р—1939 (1965).

Приложение

В этом приложении приведены характеристики новых мезонных и барионных резонансов. В таблицы не включены данные, относящиеся к барионам $\frac{1^+}{2}$ и к октету псевдоскалярных мезонов, а также данные по нонету векторных мезонов и по декуплету барионных резонансов $\frac{3^+}{2}$. Хорошо установленные квантовые числа отмечены знаком. Приведен также список оригинальных экспериментальных работ. Этот список ни в коем случае нельзя считать полным. Другие таблицы резонансов читатели могут найти также в следующих работах: Rosenfeld H. A. et al., Rev. Mod. Phys., 37, 633 (1965). Шехтер В. Резонансные состояния элементарных частиц, ВИНТИ АН СССР, 1965. Gerson Goldhaber, Proc. Coral Gable Conf., 1965. Sulamith Goldhaber, Preprint UCRL 16295 (1965). Tripp D. Preprint CERN 65—7 (1965). S amios N. P. Preprint, Brookhaven (1966).

Мезонные резонансы

Обозначение	$m, \text{ Мэв}$	$\Gamma, \text{ Мэв}$	$s^P G$	T	Каналы распада	Относительная вероятность распада, %	Реакции	Литература
σ	390 ± 10	80	0	0	$\pi^+ \pi^-$		$\pi^0 p \rightarrow 2\pi^+ \pi^-$ $p\gamma \rightarrow p\pi^+ \pi^-$	[1—4]
ϵ^0 (или S_0)	720	50	0^{++}	0	$2\pi^0,$ $\pi^+ \pi^-$		$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$ $\pi^+ d \rightarrow pp$ нейтралы $\pi^+ d \rightarrow pp\pi^- \pi^+$	[5], [6], [7], [8], [9], [10]*
κ	725	< 12	0^+	$1/2$	$K\pi$	~ 100	$\pi^- p \rightarrow \Sigma\pi K$ $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 p^0 p$ $K^- p \rightarrow \Sigma^- \pi^0 K^+$ $K^- p \rightarrow \Sigma^- \pi^+ K^0$	[11—13]
$\eta\pi$ (1040)	1040		0^+	1	$\rightarrow \eta\pi^- \rightarrow$ $\rightarrow \pi^+ \pi^-$ $\pi^0 \pi^-$		$\pi^- p \rightarrow p\pi^+ \pi^- \pi^0$	[14], [15]
$K_1 K_1$ (1020)	1020		0^{+-} (0^{++})	1	$K^\pm K_1,$ ($K\bar{K}$) \pm		$\bar{p}p \rightarrow K_1^0 K_1^0 m\pi$ $\bar{p}p \rightarrow K_1^0 K_1^\pm m\pi$ $\pi^- p \rightarrow K_1^0 K_1^0 n$	[16], [17], [18]
M_2	1055	60	0^+	1	$K^+ K^+$		$K^+ p \rightarrow K^+ K^+ \Delta\pi^0$	[19]

H	975 ± 15	120	1^+	0	$\rightarrow \rho^0 \pi_0^\pm \rightarrow$ $\rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$	$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \pi^+ p$	[15], [20]
D	1286 ± 6	40 ± 10	1^{++} (2^{--})	0	$K^+ \bar{K}^0 \pi^-$, $K^0 K^- \pi^+$	$\pi^- p \rightarrow Dn$ $\bar{p} p \rightarrow K_1^0 K_1^\pm \pi^\mp \pi^\pm \pi^- \pi^0$	[21], [22]
E	1420 ± 10	60 ± 10	1^+ (2^{--})	0	$\bar{K}^* K, K^* \bar{K}$	$\bar{p} p \rightarrow K_1^0 K_1^\pm \pi^\mp \pi^\pm \pi^-$ $\pi^- p \rightarrow K_1^0 K_1^\pm \pi^- p$	[21], [23], [24]
X^0 (или η')	959 ± 2	< 12	0^{--} (или 1^{++})	0 (или 1)	$\left. \begin{array}{l} \pi^+ \pi^- \eta^0 \\ \pi^0 \pi^0 \eta^0 \end{array} \right\}$ $\pi^+ \pi^- \gamma$	$K^- p \rightarrow \Lambda X^0$	[68]
$K_{\text{лп}}(1175)$	1175		0^- , $1^+, 2^-$	$1/2$, $3/2$	$K^0 \pi^- \pi^+$, $\pi^- \pi^0 K^+$, $\pi^- \pi^+ K^0$	$\pi^- p \rightarrow \Lambda^0 K^0 \pi^- \pi^+$ $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^0 K^+ \Lambda^0$ $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ K^0 \Sigma^0$	[25], [26]
C	1215 ± 15	60 ± 10	(1^+)	$1/2$, $3/2$	$K\rho, K^* \pi$	$\bar{p} p \rightarrow K \bar{K} \pi^+ \pi^-$ $\bar{p} p \rightarrow K_1^0 K_1^\pm \pi^\pm$	[27], [28]
C'	1320 ± 25	60 ± 20	(1^+)	$1/2$, $3/2$	$K^{*0} \pi^+$ $K^+ K^0$	$K^+ p \rightarrow K^+ \pi^- \pi^+ p$	[29]
A_1	1072 ± 8	125	1^{+-} (или 2^{--})	1 —	$\rho \pi$ $K \bar{K}$	$\pi^+ p \rightarrow \rho \pi^+ \pi^+ \pi^-$ $\pi^+ p \rightarrow \rho \pi^+ \pi^+ \pi^- \pi^0$	[14], [30—38], [39]*, [40]**

Обозначение	$m, \text{ Мэв}$	$\Gamma, \text{ Мэв}$	$s^P G$	T	Каналы распада	Относительная вероятность распада, %	Реакции	Литература
B	1220	125 ± 17	$\geq 1^{++}$ —	1 —	ω ρ $\bar{K}K$	≈ 100 < 30 < 10	$\pi^\pm p \rightarrow B^\pm p$	[41—46], [71]
R^0	1670 ± 30	180 ± 40	—	1 (или 0)	$\pi^+\pi^-$		$\pi^+d \rightarrow \rho\rho\pi^+\pi^-$ $\pi^-p \rightarrow \pi\pi^+\pi^-$	[47], [9]
R^-	1675 ± 15	66 ± 10	—	1 (или 2)	π^- -ней- тральные $\pi^+\pi^-\pi^-$ - нейтральные		$\pi^-p \rightarrow \rho R^-$	[48]
$K(1270)$	1270 ± 20	60 ± 20	—	$3/2$	$K^*\pi$ $K\rho$	~ 75 ~ 25	$\bar{p}p \rightarrow K_1^0 K^\pm \pi^\mp \pi^\mp \pi^\mp \pi^0$ $K^+d \rightarrow K^+\pi^-\pi^+\rho n$	[49]
X^-	962 ± 5	15 ± 2	—	1 или 2	$\eta^0 \pi^0 \pi^-$		$\pi^-p \rightarrow \rho X^-$	[50]
$3\pi(1000)$	1000 ± 20	—	—	—	—		—	[51]
f^0	1250 ± 20	118 ± 16	2^{++} —	0 —	2π $2\pi^+2\pi^-$ $\bar{K}K$	~ 100 < 4 < 4	$\pi^-p \rightarrow f^0 n$	[52—57], [72], [73]

f_1'	1520	85	2^{++}	0	$K_1 K_1,$ $KK^* (890)$ $K\pi$	$K^- p \rightarrow (\Lambda^0 \Sigma^0) \bar{K}^0 K^0$ $K^- p \rightarrow \Lambda \bar{K} K \pi$	[58], [59]
K^{**}	1410 (или 1430 ± 20)	100 ± 20	2^+	1/2	$K_1^0 \eta$ $K_1^0 \omega$	$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^+ \pi^-$ $\pi^- p \rightarrow \Sigma^0 K^+ \pi^-$	[60], [61], [62]
A_2	1310 + 9 (или 1290 ± 10)	70 ± 10	2^{+-}	1	~ 100 $< 3,5$ < 3 (3 ± 2)	$\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^- \pi^+ p$ $\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi^-$ - нейтралы	[34], [35], [36], [46], [57], [63], [64], [65], [40], [66], [67]
M_1	1280 ± 20	110 ± 40	2^+ (или 0^+)	1	$K^+ K^+$	$K^+ p \rightarrow K^+ K^+ \Lambda$ $K^+ p \rightarrow K^+ K^+ \Sigma^0$	[19]
$\pi\pi (1540)$	1540 ± 30	156 ± 80	2	2	$\pi^+ \pi^+,$ $\pi^- \pi^-,$ $\pi^- \pi^+$	$\bar{p} p \rightarrow 4\pi$	[69]
R^+	1620 ± 20	80 ± 40			$\pi^+ \pi^0$	$\pi^+ p \rightarrow p \pi^+ \pi^0$	[70]
N	1910	90 ± 40			$\pi^+ \pi^0$	$\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^0$	[70]
$K\pi (780)$	~780			$\frac{3}{2}$ \geq	$K^+ \pi^+$	$\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ K^0 \Lambda$ $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ K^0 \Sigma^0$ $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^0 K^0 \Sigma^+$	[79]

* В работах [10], [39] и [40] поиски резонанса не привели к положительным результатам.

Барийные резонансы

Обозначение	$M, M\pi$	$\Gamma, M\pi$	s^p	T	Каналы распада	Относит. вероятность распада, %	Реакции	Литература
$N_{1/2}^*$ (1480)	1497		1^+	$\frac{1}{2}$	πN		$\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- p \pi^-$	[74—78]
	1512	260	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$			$K^- p \rightarrow \pi^+ n K^-$	
	1425 ± 14	58	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$\pi^0 p K^-$	
$N_{1/2}^*$ (1675)	1675		1^+	$\frac{1}{2}$	λK		$\pi^- p \rightarrow K^0 \lambda \pi^+ \pi^-$	[79—81]
			$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$			$K^+ \lambda \pi^- \pi^0$	
$N_{1/2}^*$ (1512)	1518 ± 10	120	3^-	$\frac{1}{2}$	πN	~ 75	$\pi^- p \rightarrow \eta n$	[82—84]
			$\frac{2}{2}$	$N \pi \pi$	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$			
			$\frac{1}{2}$	ηN	$\pi^- p \rightarrow n \pi^- \pi^+$			
$N_{1/2}^+$ (1950)	1950		3^-	$\frac{1}{2}$	λK		$\gamma p \rightarrow \pi^+ n$	[79—81]
			$\frac{2}{2}$			$\pi^0 p$		
$N_{1/2}^*$ (1688)	1688	100	5^+	$\frac{1}{2}$	λK		$\pi^- p \rightarrow K^0 \lambda \pi^+ \pi^-$	[82—86]
			$\frac{2}{2}$	πN	~ 85	$K^+ \lambda \pi^- \pi^0$		
			$\frac{1}{2}$	$\pi \pi N$	< 2	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$		
					ηN		$\pi^+ n(p) \rightarrow (p) N^*$	
					λK		$\gamma p \rightarrow \pi^0 p$	
							$\pi^+ n$	

$N_{1/2}^*$ (2190)	2190	~200	$\frac{7^-}{2}$ $\frac{9^+}{2}$	$\frac{1}{2}$ —	πN	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$	[87—89]
$N_{1/2}^*$ (2650)	2645 ± 10	~200	$\frac{9^+}{2}$	$\frac{1}{2}$ —	πN ηN	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$ $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$ $\pi^0 p$ ηp	[90—92]
$N_{1/2}^*$ (1920)	1924	~200	$\frac{7^+}{2}$ —	$\frac{3}{2}$ —	πN ΣK	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$ $\pi^+ p \rightarrow \Sigma^+ K^+$	[93], [89], [84], [118]
$N_{3/2}^*$ (2360)	2360	~200	$\frac{9^-}{2}$ $\frac{11^+}{2}$	$\frac{3}{2}$ —	πN πN	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$ $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$	[87], [92], [89]
$N_{3/2}^*$ (2825)	2825	260	$\frac{11^+}{2}$	$\frac{3}{2}$ —	πN	$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$ $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$	[91, 92]

60

Обозначение	$M, M_{\text{эв}}$	$\Gamma, M_{\text{эв}}$	s^p	T	Каналы распада	Относит. вероятность распада, %	Реакции	Литература
$N_{3/2}^*(1660)$	1692	230	1^- 2	3 2	πN		$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm p$	[93], [94] [111], [84]
	1648 ± 12	~ 200	1^- 2	3 2				
$Y_0(1405)$	1660	~ 200	5^- 2	3 2	$\Sigma\pi$ $\lambda\pi\pi$ K^-p	~ 100 < 1	$\pi^- p \rightarrow K^\pm \lambda \pi^0$ $K^- p \rightarrow K^- p$ $K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^- K^0$ $K^- p \rightarrow \Sigma^- \pi^0 K^+$ $\bar{p} \bar{p} \rightarrow \Sigma^+ \pi^- \Sigma^0$	[89] [95], [96] [97], [98]
	1405	35 ± 1	1^- 2	0				
	1411 ± 1	37 ± 1		—				
$Y_0(1670)$	~ 1670	~ 20	1^- 2	0	$\lambda\eta$		$K^- p \rightarrow \lambda \pi^+ \pi^- \pi^0$ $\pi^- p \rightarrow \lambda K^+ \pi^-$ нейтр. ральные	[115], [120]
$Y_0^*(1520)$	1520	16 ± 2	3^- 2	0	$\Sigma\pi$ $\bar{K}N$ $\lambda\pi\pi$	55 ± 7 29 ± 4 16 ± 2	$K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ $K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$ $K^- p \rightarrow \lambda \pi^+ \pi^-$	[99]—[102]

$Y_0^* (1815)$	1815 ± 5	50	$\frac{5^+}{2}$	0	$\bar{K}N$ $\Sigma\pi$ $\lambda\pi\pi$ $\lambda\eta$	~ 75 ~ 9 ~ 15 ~ 1	$K^- p \rightarrow K^- p \pi^+ \pi^-$ $\bar{p}p \rightarrow \Sigma^+ \pi^- \pi\pi^0$ $\gamma p \rightarrow K^+ Y^0$ $K^- n (p) \rightarrow K^- \pi^- p (p)$ $K^- p \rightarrow K^- p$	[100], [103]
$Y_0^* (2299)$	2299 ± 6 2245	35 ± 12	0	0	$K^0 \bar{p} \pi^+$, $K^+ \bar{n} \pi^-$, $K^0 \bar{p} \pi^0$		$\bar{p}p \rightarrow \bar{\lambda} Y^-$ $\gamma p \rightarrow K^+ Y$	[98], [104]
$Y_1^{**} (1750)$	1750			1	$Y_0 (1520) \pi^-$		$K^- p \rightarrow Y_0 (1520) \pi^- \pi^+$	[102]
$Y_1^* (1660)$	1660 ± 10	44 ± 5	$\frac{3^-}{2}$	1	$\bar{K}N$ $\Sigma^\pm \pi^\mp$ $\lambda\pi$ $\Sigma\pi\pi$ $\lambda\pi\pi$	~ 15 ~ 30 ~ 5 ~ 30 ~ 20	$K^- p \rightarrow K^- p$ $K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^- \pi^- \pi^+$ $K^- p \rightarrow \Sigma^- \pi^+ \pi^+ \pi^-$ $K^- d \rightarrow (p) \pi^- \lambda$	[103—108]
$Y_1^* (1762)$	1762 ± 17	75 ± 7 60	$\frac{5^-}{2}$	1	$\bar{K}N$ $\lambda\pi$ $\Sigma\pi$ $Y_1^* (1385) \pi$ $Y_0^* (1520) \pi$	~ 60 ~ 16 $\ll 3$ ~ 10 ~ 10	$K^- n \rightarrow \Sigma^- \pi^+ \pi^-$ $K^- n \rightarrow K^- \pi^- p$	[100], [109]f

Обозначение	M, M_{π}	Γ, M_{π}	s^P	T	Каналы распада	Относит. вероятность распада, %	Реакции	Литература
Y_1^* (2065)	2022 ± 20	120	$7^+ / 2$	1	$\bar{K}N$	~25	$K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$	[110]
	2065	~160	—	—	$\lambda\pi$		$K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^- \pi^+ \pi^-$	[104]
	2097 ± 6	34 ± 11			$\Sigma^- \pi^- \pi^+$ $(KN\pi)^0$ $(KN)^0$ $(KN\pi)^{0,\pm}$		$\gamma p \rightarrow K^+ Y_1^*$ $\bar{p} p \rightarrow \Sigma^+ \pi^- \pi^0 \bar{\lambda}^0$ $\bar{p} p \rightarrow \lambda^0 K^0 \bar{n}$	[98]
Y_1^* (1950)	1942 ± 9	43 ± 18	$3^- / 2$	1	$\Sigma^* \pi$	~65	$\bar{p} p \rightarrow \bar{\lambda} Y^*$	[98]
Σ^* (1820)	1816 ± 3	16 ± 4		—	—		$\lambda \bar{K}$ $\Sigma \pi$ $\Sigma \pi \pi$ $\Sigma^0 \pi^+$	$K^- p \rightarrow \Sigma^0 K^+ \pi^-$ $K^- p \rightarrow \lambda^0 \bar{K}^0 K^0$ $K^- p \rightarrow \Sigma^- \pi^+ \pi^0 K^0$
Σ^* (1933)	1933 ± 16	140 ± 35	$5^+ / 2$	$1 / 2$	$\Sigma^- \pi^+$	~5	$K^- p \rightarrow \Sigma^- \pi^+ K^0$	[112]
Σ^* (1705)	1705	1705	—	—			$N \pi \pi$	~5
$N_{3/2}^+$	1580		$5 / 2$	5		$pp \rightarrow p \pi^+ \pi^+ \pi \pi^-$ $p \pi^+ \pi^- p \pi^0$		

Литература

1. Samios N. P. et al. Phys. Rev. Lett., 9, 139 (1962).
2. Kirz J. et al. Phys. Rev., 130, 2481 (1963).
3. Del Fabbro R. et al. Phys. Rev. Lett., 12, 674 (1964).
4. Brown L. M., Faier H. Proc. Coral Gable Conf., 1965, 219.
5. Kikugawa M. et al. Nuovo cimento, 40, 647 (1965).
6. Feldman M. et al. Phys. Rev. Lett., 14, 869 (1965).
7. Durand L., Chin Y. Phys. Rev. Lett., 14, 329 (1965).
8. Hagopian V. et al. Phys. Rev. Lett., 14, 1077 (1965).
9. Forino A. et al. Phys. Lett., 19, 65 (1965).
10. Cohn H. et al. Phys. Rev. Lett., 15, 906 (1965).
11. Alexander G. et al. Phys. Rev. Lett., 8, 447 (1962).
12. Wojcicki S. G. et al. Phys. Lett., 5, 283 (1962).
13. Connolly P. L. et al. Proc. Sienna Conf., 1963.
14. Alitti J. et al. Phys. Lett., 15, 69 (1965).
15. Proc. Oxford Conference, 1965.
16. Alexander G. et al. Phys. Rev. Lett., 9, 460 (1962).
17. Baltay C. et al. Phys. Rev., 142, 932 (1966).
18. Erwin A. R. et al. Phys. Rev. Lett., 9, 34 (1962).
19. Ferro-Luzzi M. Phys. Lett., 17, 155 (1965).
20. ABBHLM Collab. Phys. Lett., 11, 167 (1964).
21. Miller D. H. et al. Phys. Rev. Lett., 14, 1074 (1965).
22. D'Andlau C. Phys. Lett., 17, 347 (1965).
23. Armenteros R. et al. Preprint CERN (1965).
24. Hess R. J. et al. Preprint UCRL—11443.
25. Wangler T. P. et al. Phys. Lett., 9, 71 (1964).
26. Miller D. H., Kovács A. Z. et al. Phys. Lett., 15, 74 (1965).
27. Armenteros R. et al. Phys. Lett., 9, 207 (1964).
28. Armenteros R. et al. Proc. Dubna Conf., 1964.
29. Almeida S. P. et al. Phys. Lett., 16, 184 (1965).
30. Bellini G. et al. Nuovo cimento, 29, 896 (1963).
31. Huson F. R. et al. Bull. Am. Phys. Soc., 8, 325 (1963).
32. Aderholz M. et al. Phys. Lett., 10, 226 (1964).
33. Allard J. F. et al. Phys. Lett., 12, 143 (1964).
34. Chung S. U. et al. Phys. Rev. Lett., 12, 621 (1964).
35. Deutschmann M. et al. В кн. XII Международная конференция по физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1964.
36. Deutschmann M. et al. Phys. Lett., 12, 356 (1964).
37. Goldhaber G. et al. Phys. Rev. Lett., 12, 336 (1964).
38. Lander R. L. et al. Phys. Rev. Lett., 13, 346a (1964).
39. Forino A. et al. Phys. Lett., 19, 68 (1965).
40. Barnes V. et al. Phys. Rev. Lett., 16, 41 (1965).
41. Abolins M. et al. Phys. Rev. Lett., 11, 381 (1963).
42. Bondár L. et al. Phys. Lett., 5, 209 (1963).
43. Chung S. U. et al. Proc. Siena Conf., 1963.
44. Aderholz M. et al. Phys. Lett., 10, 240 (1964).
45. Goldhaber G. et al. Phys. Rev. Lett., 15, 118 (1965).
46. Hess R. I. et al. В кн. XII Международная конференция по физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1964.
47. Goldhaber G. et al. Phys. Lett., 17, 354 (1965).
48. Séquinot J. et al. Phys. Lett., 19, 712 (1965).
49. Böck R. et al. Phys. Lett., 12, 65 (1964).

50. Kienzle W. et al. Phys. Lett., **19**, 438 (1965).
51. Trebukhovskiy Yu. V. et al. Phys. Lett., **6**, 190 (1963).
52. Selove W. et al. Phys. Rev. Lett., **9**, 272 (1962).
53. Bondár L. et al. Phys. Lett., **5**, 153 (1963).
54. Guiragossian Z. G. T. Phys. Rev. Lett., **11**, 85 (1963).
55. Veillet J. J. et al. Phys. Rev. Lett., **10**, 29 (1963).
56. Lee J. J. et al. Phys. Rev. Lett., **12**, 342 (1964).
57. Chung S. U. et al. Phys. Rev. Lett., **15**, 325 (1965)
58. Barnes V. et al., Phys. Rev. Lett., **15**, 322 (1965).
59. London G. W. et al. Bull. Amer. Phys. Soc., **10**, 517 (1965).
60. Haque N. et al. Phys. Lett., **14**, 338 (1965).
61. Hardy L. M. et al. Phys. Rev. Lett., **14**, 401 (1965).
62. Focardi L. et al. Phys. Lett., **16**, 351 (1965).
63. Aderholz M. et al. Phys. Lett., **10**, 248 (1964).
64. Goldhaber G. et al. В кн. XII Международная конференция по физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1964.
65. Chung S. U. et al. Phys. Rev. Lett., **15**, 325 (1965).
66. Deutschmann M. et al. Phys. Lett., **20**, 93 (1966).
67. Lefebvres F. et al. Phys. Lett. **19**, 434 (1965).
68. Kalbfleisch G. R. et al. Phys. Rev. Lett., **12**, 527 (1964);
Goldberg M. et al. Phys. Rev. Lett., **12**, 546 (1964); Gold-
berg M. et al. Phys. Rev. Lett., **13**, 249 (1964).
69. Accensi A. et al. Phys. Lett., **20**, 557 (1966).
70. Deutschmann M. et al. Phys. Lett., **18**, 351 (1965).
71. Carmony D. D. et al. Phys. Rev. Lett., **12**, 254 (1964).
72. Bruyant F. et al. Phys. Lett., **10**, 232 (1964).
73. Sodickson L. et al. Phys. Rev. Lett., **12**, 485 (1964).
74. Cocconi G. et al. Phys. Lett., **8**, 134 (1964).
75. Bereyre P. et al. Phys. Lett., **8**, 137 (1964).
76. Roper L. D. Phys. Rev. Lett., **12**, 340 (1964).
77. Auvil P. et al. Phys. Lett., **12**, 76 (1964).
78. Adelman S. L. Phys. Rev. Lett., **14**, 1043 (1965).
79. Wangler T. P. et al. Phys. Rev., **137**, B414 (1965).
80. Hoff G. T. Phys. Rev., **139**, B671 (1965).
81. Hoff G. 1., Hoff R. B. Preprint, Chicago, COO—264—300.
82. Peierls R. F. Phys. Rev., **118**, 325 (1960).
83. Bellettini G. et al. Nuovo cimento, **29**, 1195 (1963).
84. Devlin T. J. et al. Phys. Rev. Lett., **14**, 1031 (1965).
85. Kraemer R. et al. Phys. Rev., **136**, B496 (1964).
86. Helland J. A. et al. Phys. Rev. Lett., **10**, 27 (1963).
87. Diddens A. N. et al. Phys. Rev. Lett., **10**, 262 (1963).
88. Schwartz J. et al. Bull. Amer. Phys. Soc., **9**, 420 (1964).
89. Helland J. et al. Phys. Rev., **134**, B1079 (1964).
90. Alvarez R. et al. Phys. Rev. Lett., **12**, 710 (1964).
91. Citron A. et al. Phys. Rev. Lett., **13**, 205 (1964).
92. Wahlig M. A. et al. Phys. Rev. Lett., **13**, 103 (1964).
93. Devlin T. J. et al. Phys. Rev., **125**, 690 (1962).
94. Carruthers P. Phys. Rev. Lett., **4**, 303 (1960).
95. Alston M. H. et al. Phys. Rev. Lett., **6**, 698 (1962).
96. Alexander G. et al. Phys. Rev. Lett., **8**, 447 (1962).
97. Engler A. et al. Phys. Rev. Lett., **15**, 224 (1965).
98. Böck R. K. et al. Phys. Lett., **17**, 166 (1965).
99. Ferro-Luzzi M. et al. Phys. Rev. Lett., **8**, 28 (1962).
100. Barbaro-Galiferi A. et al. Phys. Lett., **6**, 296 (1963).

101. Watson M. B. et al. Phys. Rev., 131, 2248 (1963).
102. Almeida S, Lynch G. Phys. Lett., 9, 204 (1964).
103. Chamberlain O. et al. Phys. Rev., 125, 1696 (1962).
104. Blanpied W. A. et al. Phys. Rev. Lett., 14, 741 (1965).
105. Alvarez L. M. et al. Phys. Rev. Lett., 10, 184 (1963).
106. Eberhard P. et al. Phys. Rev. Lett., 14, 466 (1965).
107. Taher-Zadeh M. et al. Phys. Rev. Lett., 11, 470 (1963).
108. Leveque A. et al. Phys. Lett., 18, 69 (1965).
109. Bell R. B. et al. Phys. Rev. Lett., 16, 203 (1966).
110. Wohl C. G. et al. Bull. Amer. Phys. Soc., 10, 529 (1965).
111. Donnachie A. et al. Phys. Lett., 19, 146 (1965).
112. Badier J. et al. Phys. Lett., 16, 171 (1965).
113. Smith G. A. et al. Phys. Rev. Lett., 13, 61 (1964).
114. Smith G. A., Lindsey J. S. Preprint, UCRL—16162.
115. Berley D. et al. Phys. Rev. Lett., 15, 641 (1965).
116. Schumann T. G. Phys. Rev. Lett., 15, 531 (1965).
117. Alexander G. et al. Phys. Rev. Lett., 15, 207 (1965).
118. Holladay W. G. Phys. Rev., 139, B1348 (1965).
119. Wohl C. G. Preprint, UCRL—16288.
120. Ван Юн-Чан и др. В кн. XII Международная конференция по физике высоких энергий. М., Атомиздат, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
От автора	5
<i>Глава первая. Группы и представления групп</i>	7
§ 1. Основные понятия из теории групп	7
1.1. Определение групп	7
1.2. Подгруппы	11
1.3. Прямое произведение	13
1.4. Инвариантные подгруппы и фактор-группы	15
1.5. Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм	17
§ 2. Группы Ли и алгебры Ли	23
2.1. Топологические группы. Компактные и некомпактные группы	23
2.2. Группы Ли	26
2.3. Алгебры Ли	31
§ 3. Представления групп Ли	33
3.1. Определение представлений групп Ли	33
3.2. Унитарные представления	36
3.3. Неприводимые представления	38
3.4. Инфинитезимальные операторы. Сопряженные и контрградиентные представления. Произведение представлений	41
§ 4. Группа $SU(n)$ и ее представления	46
4.1. Генераторы группы $SU(n)$ и ее основные представления	46
4.2. Спиноры высших рангов	49
4.3. Неприводимые представления	52
<i>Л и т е р а т у р а</i>	58
<i>Глава вторая. Группа $SU(2)$ и изотопическая инвариантность</i>	59
§ 1. Неприводимые представления группы $SU(2)$	59
1.1. Группы вращений и состояния с определенными моментами	59
1.2. Некоторые спиноры низших рангов	63
1.3. Векторы, тензоры и спин-тензоры	68
1.4. Разложение произведения неприводимых представлений на неприводимые представления. Коэффициенты Клебша—Гордана	72
§ 2. Изотопическая инвариантность сильных взаимодействий	73
2.1. Изотопические мультиплеты	73
2.2. Изотопическая инвариантность лагранжиана взаимодействий	79

2.3. Изотопическая инвариантность и распады резонансов	82
2.4. Изотопическая инвариантность амплитуд рассеяния	88
2.5. G -четность	94
§ 3. Изотопические свойства электромагнитных взаимодействий	95
3.1. Электромагнитный ток	95
3.2. Формфакторы и амплитуды электромагнитных процессов	96
3.3. Нарушение изотопической инвариантности электромагнитным взаимодействием	99
§ 4. Изотопические свойства слабых взаимодействий	100
4.1. Сохранение векторного тока и изотопические свойства тока с $\Delta S = 0$	100
4.2. Изотопические свойства тока с $\Delta S = \pm 1$	105
4.3. Изотопические свойства нелептонных слабых взаимодействий с $\Delta S \neq 0$	108
Литература	112
<i>Глава третья. Группа $SU(3)$ и классификация элементарных частиц в унитарной симметрии</i>	113
Введение	113
§ 1. Группа $SU(3)$ и ее представления	114
1.1. Генераторы группы $SU(3)$	114
1.2. Неприводимые представления группы $SU(3)$	118
1.3. Некоторые спиноры низших рангов	122
1.4. Подгруппы $SU(2)$	132
1.5. Дискретные преобразования	136
§ 2. Классификация элементарных частиц и резонансов в унитарной симметрии	139
2.1. Унитарные мультиплеты	139
2.2. Мультиплеты подгрупп $SU(2)$ и дискретные преобразования	143
2.3. Массовая формула и смешивание	150
§ 3. Модель кварков с дробными зарядами и модели унитарной симметрии без дробных зарядов	161
3.1. Модель с триплетом фундаментальных частиц	161
3.2. Модели с четырьмя фундаментальными частицами	164
3.3. Модели с несколькими триплетами кварков	168
Литература	172
<i>Глава четвертая. Унитарная симметрия и сильные взаимодействия</i>	173
§ 1. Трехлинейные лагранжианы и трехчастичные вершины	173
1.1. Трехлинейные лагранжианы взаимодействия	178
1.2. Соотношения между константами распадов резонансов	178
1.3. Соотношения между вероятностями	184
1.4. Следствия сохранения U - и V -спинов	191
§ 2. Амплитуды процессов рассеяния и рождения частиц	193
2.1. Унитарная структура амплитуд процессов рассеяния и рождения частиц в сильных взаимодействиях	193
2.2. Соотношения между амплитудами процессов	205
2.3. Сохранение U - и V -спинов	214
2.4. Сравнение некоторых соотношений между сечениями с экспериментом	217
Литература	224

Глава пятая. Электромагнитные и слабые взаимодействия в унитарной симметрии	225
§ 1. Электромагнитные взаимодействия	225
1.1. Электромагнитный ток в унитарной симметрии	225
1.2. Электромагнитные вершины	227
1.3. Соотношения между вероятностями распадов	234
1.4. Проверка унитарной симметрии в опытах с встречными пучками	238
1.5. Соотношения между амплитудами фоторождения	240
1.6. Электромагнитное расщепление масс частиц в изотопических мультиплетях	241
§ 2. Слабые взаимодействия	244
2.1. Токи слабых взаимодействий в унитарной симметрии	244
2.2. Лептонные распады барионов	250
2.3. Рождение мезонов и барионов при столкновении нейтрино и антинейтрино с нуклоном	256
2.4. Нелептонные распады гиперонов и мезонов	260
Литература	266
Глава шестая. Спиновая и унитарная симметрии $SU(6)$	267
§ 1. Группа $SU(6)$ и ее неприводимые представления	267
1.1. Группа $SU(6)$ и подгруппы $SU(3) \times SU(2)$ и $SU(4) \times SU(2)$	267
1.2. Генераторы	270
1.3. Некоторые неприводимые представления группы $SU(6)$	273
1.4. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(3) \times SU(2)$	274
1.5. Разложение неприводимых представлений группы $SU(6)$ на неприводимые представления подгруппы $SU(4) \times SU(2)$	277
1.6. Классификация барионов и мезонов в симметрии $SU(6)$	280
§ 2. Некоторые следствия симметрии $SU(6)$	282
2.1. Электромагнитные свойства барионов	282
2.2. Электромагнитные распады мезонных резонансов	286
2.3. Мезон-барионное и барион-барионное рассеяния	288
§ 3. Возможные интерпретации симметрии $SU(6)$	290
3.1. Симметрия $SU(6)$ как динамическая симметрия	290
3.2. Симметрия $SU(6)$ и модель кварков	291
§ 4. Классификация новых мезонных резонансов по высшим представлениям группы $SU(6)$	293
4.1. Мезонные резонансы	293
4.2. Разложение 189- и 405-плетов на неприводимые представления подгрупп $SU(3) \otimes SU(2)$ и $SU(4) \otimes SU(2)$	295
4.3. Спиновые и изотопические мультиплеты в неприводимых представлениях подгруппы $SU(4) \otimes SU(2)$	299
4.4. Параметры смешивания	303
4.5. С-четность	312
4.6. Соотношения между константами распада	315
4.7. Заключение	324
Литература	327