В. В. НИКИТИН

СБОРНИК ЛОГИЧЕСКИХ УПРАЖНЕНИЙ

Пособие для учителей математики

ИЗДАТЕЛЬСТВО „ПРОСВЕЩЕНИЕ"
Москва 1970

Никитин В. В.

Н62 Сборник логических упражнений. Пособие для учителей математики. М., «Просвещение», 1970

96 с.

6—5 16(07)

ОТ РЕДАКТОРА

В дореволюционной гимназии (а одно время — и в советской школе) преподавали логику. Логику часто определяют как «науку о законах правильного мышления». Предполагалось, очевидно, что неотъемлемым атрибутом зрелости, по достижении которой человеку выдается аттестат, является умение мыслить (и к тому же — правильно мыслить).

Против самого замысла возразить что-либо трудно, но на деле чаще всего получалось, что умение (или неумение) мыслить — само по себе, а «предмет», именуемый логикой, — сам по себе. Величайшее достижение античной науки — формальная логика Аристотеля оказывалась, если можно так выразиться, слишком классичной, чтобы ее можно было легко приспособить к нуждам быстро развивающихся естественных наук, не говоря уже о чисто практических приложениях.

Сравнительно совсем недавно — в 10—20-х годах нашего столетия — выяснилось, что все плодотворное содержание традиционной логики допускает гораздо более ясное и прозрачное изложение в терминах и представлениях логики современной — так называемой математической (или символической) логики. И в наши дни девять из десяти людей, изучающих логику, благополучно перешагивают через «классический» ее этап и овладевают исчислением высказываний и исчислением предикатов не с бо́льшим (хотя и не с меньшим) трудом, чем несколькими годами раньше или позже овладевают, скажем, химией или аналитической геометрией.

Традиции «гуманитарного» преподавания логики, однако, далеко еще не умерли, и «традиционная формальная логика» не торопится уступать свое место в учебных планах нематематических факультетов. Это отчасти обусловлено и тем обстоятельством, что современные элементарные изложения логики, хотя и отказались от вводных глав, вроде «Теории понятия», составлявших солидную долю объема старых учебников, предполагают все же

наличие у читателя хотя бы минимума «логической культуры», «интеллигентности мышления» или того, что мы привыкли называть «общей эрудицией».

За последнее десятилетие в связи с широко известным проникновением в самые различные области знания и практической деятельности методов и идей машинной математики резко возрос и интерес к ее «идейному фундаменту» — логике. Я уже не говорю о том, что саму задачу обучения «правильному мышлению» тоже как будто бы считать решенной или устаревшей рановато. Жизнь требует своего, и там, где нет ни традиционной «гуманитарной», ни современной «математической» логической базы, в целях ликвидации логической безграмотности, появляются многочисленные «сборники логических упражнений», к жанру которых принадлежит и предлагаемая вниманию читателя книга.

К настоящему времени на русском языке вышло уже несколько элементарных изложений логики и примыкающих к ней проблем, написанных на вполне современном уровне. В дополнение к указанной автором литературе порекомендую их читателю. В первую очередь это недавно вышедшая в серии «Математическое просвещение» книга Р. Р. Столла «Множества. Логика. Аксиоматические теории» (М., «Просвещение», 1968). Более насыщенное (а потому и более трудное) изложение — в «Заметках по логике» Р. Линдсна (М., «Мир», 1968), более прозрачное (но потому и несколько более поверхностное) — в брошюрах Л. А. Калужнина «Что такое математическая логика» (М., «Наука», 1965) и «Язык логики» Х. Фрейденталя (М., «Наука», 1969).

Сказанное, конечно, отнюдь не исключает потребности в книгах, непосредственно связывающих логические понятия и методы с живой практикой школьного преподавания. Разумеется, название настоящей книги достаточно условно, и «логическая» ее специфика состоит разве лишь в том, что особый акцент в ней делается не на собственно математическое содержание задач, а на их логическую структуру. И, как справедливо подчеркивает автор в своем предисловии, именно математические задачи — особенно благодарный материал для воспитания логической культуры школьников.

Считаясь с реальным положением дел и сознавая, что требовать у читателя предварительного знакомства с ло-

гикой (математической ли, традиционной ли — безразлично) было бы неразумно, автор предпосылает своим задачам краткие теоретические сведения по логике. Указания эти, однако, были сведены к минимуму, поскольку приобрести интеллигентность мышления в результате прочтения даже солидного учебника по логике (не говоря уже об отрывочных и беглых подсказках по ходу изложения) — не более реально, чем усвоить интеллигентность поведения, проштудировав учебник хорошего тона. Культура (и поведения, и мышления) приобретается в процессе общения с людьми и в работе. Впрочем, читателю полезно помнить, что смысл всех «логических» терминов весьма близок (хотя и не всегда совпадает буквально) с обыденно-разговорным их значением, что понятия — это близкие аналоги известных каждому из нас по школьной грамматике имен существительных, суждения строятся из понятий по существу так же, как выражающие их предложения строятся из составляющих слов, а умозаключения — это просто цепочки суждений, построенные по простым и понятным правилам (каждое суждение из такой цепочки следует из предыдущих, — если, конечно, умозаключение построено правильно и заслуживает, следовательно, титула доказательства). Единственное — но непременное! — условие успешного усвоения материала книги состоит в том, чтобы ни один «ученый» термин ее не воспринимался как «само собой понятный» до того, как читатель действительно усвоит его содержание. Впрочем, это условие было бы полезно соблюдать при чтении и многих других книг. Что же касается этой, то она безусловно сможет принести пользу как учителям (настоящим и будущим), так и их ученикам-школьникам.

Ю. А. Гастев.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одной из задач средней школы является развитие логического мышления учащихся. Эта задача наиболее успешно решается на уроках математики. При изучении математики логическая структура рассуждений раскрывается с наибольшей четкостью. Обучение умению оперировать понятиями, правильно строить и анализировать суждения (предложения, утверждения, высказывания), проводить умозаключения и доказательства всегда должно быть в центре внимания учителя математики.

Систематическая и целенаправленная работа по развитию логического мышления учащихся затрудняется отсутствием специального пособия, содержащего логические вопросы и задачи из области школьной математики.

Настоящий сборник представляет собой первый опыт создания такого пособия. Сборник рассчитан на учителей математики, которые могут использовать упражнения на уроках и в кружковой работе, и на студентов физико-математических факультетов педвузов.

Книга, состоящая из трех разделов («Понятия», «Суждения» и «Доказательства»), содержит 365 задач и вопросов. Большинство упражнений принадлежит автору, часть задач заимствована из различных источников. Более трудные задачи отмечены звездочкой.

Пособие содержит ответы и решения большинства задач, а также совсем краткие теоретические пояснения и рекомендации по использованию литературы. Автор надеется, что книга сможет оказать помощь учителю в его повседневной работе.

Автор выражает глубокую благодарность Ф. П. Козаченко и Н. А. Ростовцеву за ценные указания и советы. Автор глубоко признателен Н. Н. Шоластеру и А. А. Шершевскому за их обстоятельные рецензии.

Все замечания и предложения автор просит направлять по адресу: Москва, 3-й проезд Марьиной Рощи, 41, издательство «Просвещение», редакция математики.

I. ПОНЯТИЯ

Те «кирпичи», из которых строится здание науки, принято называть понятиями. Каждая наука изучает не только и не столько отдельные, единичные предметы и факты, сколько общие понятия, формирующиеся в результате абстракции от свойств этих единичных предметов и фактов и в фиксировании того общего, что присуще всем им. Так, физика интересуется не столько отдельными предметами, сколько общими понятиями материальной точки и твердого тела, геометрия изучает не конкретные нарисованные на бумаге или на доске треугольники и окружности, а общие понятия треугольника, окружности и т. п. Совокупность свойств, присущих всем треугольникам, составляет, как говорят, содержание понятия треугольника, совокупность свойств всех окружностей — содержание понятия окружности и т. п. Понятие характеризуется также своим «объемом» — так называют множество предметов, подпадающих под определение данного понятия и характеризуемых им.

В одних случаях понятие бывает удобнее задавать его содержанием (например, «Окружность — это множество точек плоскости, равноудаленных от какой-либо ее точки»), в других — объемом («Планеты Солнечной системы — это Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, Плутон»). Между содержанием и объемом существует тесная связь хотя и не вполне однозначная. Наиболее простой пример — понятия с пустым объемом, т. е. такие, что предметов, характеризуемых данным понятием, вообще не существует. Пустота объема понятия может определяться противоречивостью (несовместимостью) его свойств («остроугольный шар» и т. п.), но может быть следствием и чисто фактических обстоятельств. Например, в понятии «космонавт», как мы хорошо знаем, нет ничего противоречивого, между тем объем этого понятия (увеличивающийся на наших глазах) еще совсем недавно был пуст.

Один из распространеннейших способов задания, определения понятий — так называемые определения через род (некоторое более общее понятие) и видовое отличие (т. е. признаки, присущие не любым представителям этого более общего понятия, а лишь некоторым, подпадающим под данное определение). Пример: «Ромб — это равносторонний параллелограмм». Переход от родового понятия к видовому называют ограничением понятия (кривая второго порядка → эллипс → окружность); обратный переход от вида к роду — обобщением (квадрат → правильный многоугольник → многоугольник). Разбиение родового понятия на непересекающиеся (т. е. не имеющие общих признаков) видовые понятия называют делением данного родового понятия («Треугольники бывают остроугольные, прямоугольные и тупоугольные»). Про получающиеся в результате деления понятия говорят, что они находятся в отношении соподчинения.

Понятия, определяемые внешне различным образом, могут и совпадать («равноугольный треугольник» и «равносторонний треугольник»); в этом случае их называют тождественными.

Если же их объемы совпадают лишь частично («треугольник» и «правильный многоугольник»), то понятия пересекаются.

Если содержания двух понятий определяются взаимно отрицающими друг друга свойствами (рациональные и иррациональные числа, соизмеримые и несоизмеримые отрезки и т. п.), то такие понятия называют противоречащими. Если же между двумя понятиями можно «вставить» некоторое третье, «нейтральное» (естественно, что здесь мы даем не определение, а лишь пояснение термина), то их называют противоположными (между положительными и отрицательными числами лежит нуль, между острыми и тупыми углами — прямой угол и т. п.).

Все дополнительные термины, относящиеся к понятиям, поясняются по ходу формулировок задач.

Более подробные сведения о понятиях читатель может найти в книге Д. П. Горского «Логика» (М., Учпедгиз, 1958); см. также: В. В. Никитин и К. А. Рупасов. Определения математических понятий в курсе средней школы. М., Учпедгиз, 1963.

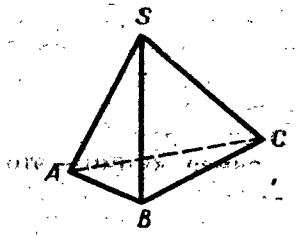

Рис. 1

1. Приведите примеры геометрических понятий, которые выражаются одним, двумя, тремя, четырьмя словами.

2. Приведите из области геометрии примеры синонимов (различных слов, выражающих одно и то же понятие).

3. Как может быть названа фигура *SABC* (рис. 1)? Приведите по крайней мере два названия.

4. Перечислите известные вам свойства прямой. Укажите не менее пяти свойств.

5. Найдите геометрические свойства, общие для прямой и окружности.

6. Что описывается в следующем предложении: свойство прямой или свойство плоскости?

«Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и каждая точка этой прямой принадлежит этой же плоскости».

А в этом предложении?

«Всякая прямая, лежащая в плоскости, делит эту плоскость на две выпуклые области».

7. Укажите свойства, присущие всем треугольникам (основные, или необходимые, свойства); только некоторым треугольникам (отделимые свойства); свойства, не принадлежащие ни одному треугольнику (противоречивые свойства).

8. Приведите примеры теорем, в которых говорится о противоречивых признаках понятий.

9. Перечислите свойства квадрата (приведите не менее 15 свойств).

10. Перечислите свойства правильной усеченной пирамиды (укажите не менее 10 свойств).

11. Укажите свойства, присущие всем прямоугольникам; свойства, присущие лишь некоторым из них.

12. У параллелепипеда все грани — параллелограммы. Является ли это свойство свойством одних лишь параллелепипедов?

13. Найдите общие свойства трапеции и ромба; треугольника и параллелограмма; прямоугольника и круга.

14. Назовите свойства, которые являются общими для всех выпуклых многоугольников.

15. Пусть дан многоугольник с четным числом сторон. Будем называть противоположными такие две стороны многоугольника, которые отделены друг от друга с обеих сторон одинаковым числом вершин. Укажите общие свойства многоугольников, у которых противоположные стороны попарно параллельны.

16. Укажите признаки сходства и различия понятий: параллельные прямые и скрещивающиеся прямые; параллельные прямые и пересекающиеся прямые.

17. В чем сходство прямой и наклонной призм; в чем их различие?

18. Перечислите основные свойства прямоугольника и ромба. Сравните эти свойства с основными свойствами квадрата.

19. Укажите свойства, общие для прямоугольника и ромба. Сравните эти свойства со свойствами параллелограмма.

20. Назовите свойства, которые могут принадлежать параллелограмму только одновременно.

21. Назовите свойства, которые параллелограмму могут принадлежать как одновременно, так и отдельно друг от друга.

22. Назовите свойства, которые параллелограмму могут принадлежать только отдельно друг от друга.

23. Назовите такие свойства, которые параллелограмму могут принадлежать одновременно, причем одно из них (но не другое) может и отдельно принадлежать параллелограмму.

24. Перечислите известные вам свойства правильного (выпуклого) пятиугольника.

25. Докажите, что свойства пятиугольника иметь равные углы и равные стороны являются независимыми.

26. Перечислите известные вам свойства ромба. Из перечисленных свойств укажите пары независимых свойств; пары несовместимых свойств.

27. Для всех ли многоугольников равенство сторон и равенство углов являются независимыми свойствами?

28. Приведите пример свойств, которые для одной фигуры были бы зависимыми, а для другой — независимыми.

29. Рассмотрите свойства четырехугольника; равенство всех сторон, равенство всех углов, равенство диагоналей; установите, в какой зависимости они находятся. Дру-

гими словами, установите, следует ли каждое из указанных свойств из остальных (вместе взятых и в отдельности). Эту же задачу решите для пятиугольника.

30. Найдите зависимость между следующими свойствами трапеции: равенство боковых сторон, перпендикулярность диагоналей, равенство высоты и средней линии.

31. Приведите примеры свойств, которые для одной фигуры были бы зависимыми, а для другой — несовместимыми.

32. Укажите свойства, которые для четырехугольника были бы несовместимыми, а для пятиугольника — независимыми.

33. Какую связь между свойствами четырехугольника устанавливает теорема: «В параллелограмме противоположные стороны попарно равны»?

34. Какую связь между свойствами параллелограмма устанавливает теорема: «В прямоугольнике диагонали равны»?

35. Приведите примеры тождественных понятий.

36. Приведите примеры пересекающихся понятий.

37. Приведите примеры противоречащих понятий.

38. Какие понятия являются противоположными (противоречащими) по отношению к понятиям: «больше», «положительный», «острый»?

39. Приведите пример понятий, имя одного из которых получается прибавлением приставки «не» к имени другого, но не являющихся тем не менее противоречащими.

40. Изобразите с помощью круговых схем («кругов Эйлера») отношение по объему между понятиями: 1) прямые, лежащие в одной плоскости; 2) параллельные прямые; 3) скрещивающиеся прямые. (Пересекающиеся понятия обозначаются пересекающимися кругами, несовместимые — непересекающимися, тождественные — совпадающими; отношение подчинения понятий обозначается включением соответствующих им кругов и т. п.)

41. Найдите геометрические понятия, отношения между которыми соответствовали бы указанным на рисунке 2 схемам.

42. Приведите примеры противоречивых понятий.

43. Покажите несовместимость следующих условий: многогранник, все многогранные углы трехгранные, число вершин нечетное.

44. Приведите примеры несравнимых понятий.

45. Употребляя слова «все», «некоторые», «каждый», укажите отношение по объему между следующими понятиями: 1) прямоугольный треугольник, равнобедренный треугольник; 2) равносторонний треугольник, равноугольный треугольник; 3) прямоугольник, квадрат.

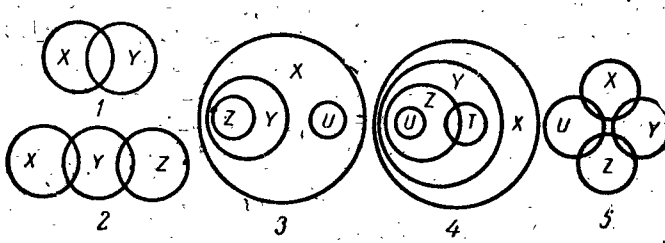

Рис. 2

46. В чем различие следующих предложений: 1) на спектакле присутствовали все учащиеся нашего класса; 2) на спектакле присутствовали учащиеся нашего класса; 3) на спектакле присутствовали только учащиеся нашего класса; 4) на спектакле присутствовали только некоторые учащиеся нашего класса; 5) каждый учащийся нашего класса присутствовал на спектакле?

47. Приведите примеры истинных суждений, содержащих слова: «все», «некоторые», «каждый», «не все», «любой», существует», «не существует», «только некоторые», «всякий».

48. Все ромбы суть параллелограммы. Сформулируйте это предложение, не употребляя слова «все».

49. Не все ромбы суть квадраты. Сформулируйте это предложение, не употребляя выражения «не все».

50. Предлагается последовательное ограничение понятия «четырехугольник»: четырехугольник→параллелограмм→ромб→прямоугольник→квадрат. Все ли в нем правильно?

51. Правильно ли ограничены понятия в следующих примерах: 1) равнобедренный треугольник→прямоугольный треугольник; 2) трапеция→параллелограмм; 3) равносторонний четырехугольник→ромб?

52. Правильно ли обобщены понятия в следующих примерах: 1) ромб, параллелограмм, четырехугольник,

многоугольник; 2) отрезок, прямая; 3) равноугольный треугольник, равносторонний треугольник; 4) параллельные прямые, скрещивающиеся прямые; 5) усеченная пирамида, пирамида; 6) полукруг, круг?

53. Расположите следующие понятия в ряд так, чтобы каждое последующее было родовым по отношению к предыдущему: 1) призма, куб, многогранник, параллелепипед, четырехугольная призма, прямой параллелепипед, выпуклый многогранник, прямоугольный параллелепипед: 2) выпуклый многоугольник, параллелограмм, выпуклый четырехугольник, многоугольник, квадрат, плоский многоугольник, прямоугольник.

54. Определите отношение по объему между следующими понятиями и выразите это отношение графически: 1) многоугольник; 2) треугольник; 3) прямоугольный треугольник; 4) равнобедренный треугольник; 5) равносторонний треугольник; 6) космический корабль.

55. Произведите обобщение и ограничение понятий: 1) треугольник; 2) трапеция; 3) многоугольник; 4) параллелепипед.

56. Найдите отношение между понятиями: 1) остроугольный треугольник, разносторонний треугольник; 2) сектор, сегмент; 3) прямоугольник, равноугольный неправильный четырехугольник.

57. Приведите из области геометрии примеры видовых понятий, которые не имеют специальных названий и к которым мы вынуждены поэтому относить название рода.

58. Приведите из области арифметики и геометрии примеры, иллюстрирующие следующие отношения между понятиями: 1) все A суть B; 2) некоторые A суть B; 3) никакое A не есть B; 4) все A суть не-B; 5) некоторые A суть не-B; 6) никакое A не есть не-B; 7) все не-A суть B; 8) некоторые не-A суть B; 9) никакое не-A не есть B; 10) все не-A суть не-B; 11) некоторые не-A суть не-B; 12) никакое не-A не есть не-B.

59. Какие из предложений предыдущего упражнения равносильны?

60. Изобразите отношения между понятиями, перечисленные в задаче 58, графически.

61. Что можно сказать о принадлежности ромбу свойства A в следующих трех случаях: 1) свойство A принадлежит всем параллелограммам; 2) свойство A принад-

лежит только некоторым параллелограммам; 3) ни один параллелограмм не имеет свойства A?

62. Что можно сказать о свойстве A для параллелограмма, если: 1) A принадлежит всем прямоугольникам; 2) A принадлежит только некоторым прямоугольникам; 3) A не принадлежит ни одному прямоугольнику?

63. Приведите примеры известных вам отношений, обладающих свойством транзитивности.

64. Приведите примеры отношений, которые не обладают свойством транзитивности.

65. Какие известные вам отношения не обладают свойствами симметричности и рефлексивности?

66. Какими основными свойствами обладают отношения: соизмеримость отрезков, равновеликость фигур?

67. Можно ли одному и тому же понятию дать различные определения?

68. С помощью какого признака трапеция выделяется из всех выпуклых четырехугольников?

69. Какие понятия используются в определении параллелограмма?

70. Через какое более общее понятие определяется квадрат?

71. Объедините в одно понятие следующие признаки: выпуклый многоугольник, сумма внутренних углов не превышает суммы внешних, единственная ось симметрии проходит через вершину многоугольника, можно вписать и описать окружность, имеется прямой угол.

72. Какие признаки входят в содержание понятий: прилежащие углы; параллельные прямые; правильный многоугольник?

73. В каждом из приведенных ниже определений укажите родовые и видовые признаки: 1) угол, смежный с каким-нибудь углом многоугольника, называется внешним углом этого многоугольника; 2) две прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся, называются параллельными; 3) отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется его средней линией; 4) два одноименных многоугольника называются подобными, если углы одного равны соответственно углам другого, а стороны, заключающие равные углы, пропорциональны; 5) две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если они пересекаются и образуют прямые двугранные углы.

74. Некоторые названия геометрических фигур (обычно состоящие из нескольких слов) представляют собой как бы краткие определения понятий, так как содержат указания ближайшего рода и видового отличия. Приведите примеры таких названий.

75. В определении «Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны» замените видовой признак.

76. Какие известные вам понятия определяются следующими выражениями: 1) многоугольник с наименьшим числом сторон; 2) наибольшая хорда окружности; 3) треугольник, имеющий хотя бы одну ось симметрии; 4) многогранник с наименьшим числом граней; 5) две прямые, делящие плоскость на три части; 6) четырехугольник, имеющий центр симметрии; 7) хорда, проходящая через центр окружности; 8) равносторонний четырехугольник, один из углов которого прямой; 9) два прилежащих угла, составляющие в сумме 180°; 10) четырехугольник, имеющий четыре оси симметрии; 11) четырехугольник, имеющий центр симметрии и равные диагонали; 12) многоугольник, у которого сумма внутренних углов равна сумме внешних углов.

77. Угол, отличный от развернутого, делит плоскость на две области, из которых одна выпукла, а другая нет. Укажите свойство, по которому можно было бы отличить точки этих областей.

78. Дайте определение понятий: внутренняя и внешняя точки выпуклого многоугольника.

79. Дайте определение усеченной пирамиды, рассматривая ее не как часть пирамиды, а как «самостоятельный» многогранник. Постарайтесь найти несколько определений.

80. Сформулируйте десять различных определений параллелограмма.

81. Найдите хотя бы два различных определения окружности.

82. Дайте определение функции $y=a^x$ (a — положительное число, отличное от единицы).

83. Что такое круг в определении? Ответ поясните примерами.

84. Приведите примеры тавтологий.

85. Приведите примеры избыточных определений.

86. Укажите логические ошибки и опустите лишние

слова в следующих предложениях: 1) луч есть прямая, ограниченная с одной стороны; 2) величина угла не зависит от величины его сторон; 3) секущая — бесконечная прямая, проходящая через какие-нибудь две точки окружности; 4) отрезок — прямая, ограниченная с двух сторон; 5) не существует параллелограмма с равными диагоналями; 6) не существует параллелограмма, со взаимно перпендикулярными диагоналями; 7) параллелограмм не имеет осей симметрии; 8) диагонали ромба не равны между собой; 9) из всех параллелограммов окружность можно описать только около прямоугольника и квадрата; 10) из всех параллелограммов окружность можно вписать только в ромб и квадрат; 11) в подобных и равных треугольниках соответственные углы равны.

87. Используя понятие геометрического места точек, дайте определение понятий: «окружность», «круг», «сфера», «шар», «круговое кольцо», «концентрические окружности», «цилиндрическая поверхность».

88. Определения, в которых указывается способ образования или способ происхождения определяемого предмета, называют иногда генетическими.

Приведите примеры генетических определений.

89. В чем недостаток определений: 1) четырехугольником называется многоугольник, у которого сумма внутренних углов равна 360°; 2) четырехугольник, у которого сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон, называется параллелограммом?

90. Приведите примеры отрицательных определений, т. е. определений, в которых указываются только признаки, не принадлежащие определяемым понятиям.

91. Укажите «стандартный» способ формулировки отрицательного определения, исходящий из соответствующего «положительного» понятия.

92. Перечислите известные вам свойства ромба. Среди названных свойств найдите группы свойств, достаточные для определения ромба.

93. Найдите лишние признаки и устраните неточности в следующих определениях: 1) два отрезка называются соизмеримыми, если они имеют общую наибольшую меру; 2) диаметром круга называется наибольшая хорда, проходящая через центр; 3) параллелограммом называется многоугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны; 4) плоскость и прямая, не ле-

жащая в этой плоскости, называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; 5) две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали; 6) четырехугольник, у которого противоположные стороны равны, называется параллелограммом; 7) два равных угла называются вертикальными, если стороны одного являются продолжениями сторон другого; 8) две непересекающиеся прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости; 9) ромбом называется равносторонний неправильный четырехугольник.

94. Если исходить из определения многоугольника как замкнутой ломаной (допуская самопересечения ломаной), то будет ли верным такое определение параллелограмма: «Четырехугольник, у которого две противоположные стороны равны и параллельны, есть параллелограмм»?

95. Являются ли независимыми признаки, указываемые в обычном определении подобия: «Два треугольника называются подобными, если: а) углы одного соответственно равны углам другого и б) стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого»?

96. «Две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если, пересекаясь, они образуют прямые двугранные углы». Какое слово здесь является лишним?

97. Найдите логическую ошибку в определении: «Двугранным углом называется угол, образованный двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой».

98. «Две фигуры называются подобными, если они имеют одинаковую форму». Почему данное предложение нельзя принять в качестве определения подобия фигур?

99. Если пересечь все грани многогранного угла какой-либо плоскостью, то секущая плоскость вместе с гранями многогранного угла будет ограничивать многогранник, называемый пирамидой. Не следует ли уточнить это определение пирамиды? Всегда ли, пересекая плоскостью все грани многогранного угла, мы получим многогранник?

100. Докажите теорему: «Многогранник, у которого все грани, за исключением одной, имеют общую вершину, есть пирамида».

101. Дайте ответы на следующие вопросы и укажите, на чем основаны эти ответы: 1) Почему в правильном

многоугольнике стороны равны между собой? 2) Почему в равнобедренном треугольнике две стороны равны между собой? 3) Может ли в прямоугольном треугольнике катет быть больше гипотенузы? 4) Делится ли сумма $3a+6b$ (a и b — целые числа) на 3?

102. Объясните, почему $a^{\log_a x}=x$ ($a>0$, $a\neq 1$, $x>0$).

103. Можно ли луч и прямую разделить одной точкой на две равные части?

104. Могут ли быть острыми противоположные углы трапеции?

105. Можно ли сегмент разрезать на секторы?

106. Можно ли сектор разрезать на сегмент и сектор?

107. Существует ли призма, имеющая 1016 ребер?

108. Приведите пример многогранника, у которого все грани — трапеции.

109. Проверьте правильность следующих делений и в случаях, когда деления окажутся неправильными, укажите на характер допущенной ошибки: 1) треугольники делятся на остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равносторонние и равнобедренные; 2) ромбы могут быть равноугольными (квадраты) и неравноугольными; 3) прямоугольники могут быть равносторонними (квадраты) и неравносторонними; 4) треугольники делятся на разносторонние, равнобедренные и равносторонние; 5) две прямые могут быть скрещивающимися, параллельными или пересекающимися; 6) параллелограммы делятся на прямоугольники, ромбы и квадраты; 7) пирамиды могут быть усеченными и неусеченными.

110. Проведите классификацию треугольников, принимая во внимание одновременно два признака: сравнительную длину сторон и величину углов. Составьте соответствующую таблицу с двумя входами.

111. Что общее имеют все эти буквы русского алфавита в отличие от остальных?

В Е З К С Э Ю

112. Разбейте следующие буквы по какому-либо признаку на три группы:

Г П Н Р Т О И С Х

113. Ниже (рис. 3) дано распределение шести фигур на две группы. По какому признаку произведено деление?

Рис. 3

114. Распределите указанные ниже фигуры (рис. 4) на две равные группы четырьмя различными способами. Каждое деление должно быть произведено по определенному признаку.

Рис. 4

115. Что общее имеют все эти геометрические фигуры (рис. 5) в отличие от всех других геометрических фигур?

Рис. 5

116. Буквы русского алфавита следующим образом разбиты на пять групп:

1) А Д М П Т Ш
2) В Е З К С Э Ю
3) И
4) Ж Н О Ф Х
5) Б Г Л Р У Ц Ч Щ Я

Определите, по какому признаку произведено деление.

117. Произведите логическое деление понятия «параллелограмм» сначала по одному основанию, а затем по другому.

118. Проведите классификацию тетраэдров, принимая во внимание в одном случае число равных граней, в другом — число равных трехгранных углов.

119. Вам несомненно известны задачи на отгадывание задуманных чисел. Мы предлагаем вам задачу на отгадывание геометрической фигуры.

Рис. 6

Как определить задуманную кем-нибудь фигуру из числа следующих (рис. 6) с помощью трех вопросов, на которые задумавший фигуру должен отвечать лишь «да» или «нет»?

II. СУЖДЕНИЯ

Суждения (высказывания, утверждения) — это предложения, относительно которых имеет смысл говорить, что они являются истинными или ложными. От традиционной (аристотелевской) логики идет классификация суждений на утвердительные и отрицательные, частные и общие, категорические и условные.

Утвердительное суждение имеет вид: «Все (или некоторые) *A* суть *B*»; отрицательное: «Ни одно *A* не есть *B*» или «Некоторые *A* не суть *B*». Суждения, утверждения которых относятся к некоторым предметам определенного вида, называют частными, относящиеся ко всем предметам данного вида — общими. (Примеров мы здесь не приводим, смысл определений достаточно ясно раскрывается в приводимых ниже задачах.)

Суждения описанного выше вида — это категорические («безусловные») суждения; любое из них можно преобразовать в эквивалентное (имеющее тот же смысл и значение истинности) условное суждение вида «Если *A*, то *B*» (например, вместо «Вертикальные углы равны» — «Если углы — вертикальные, то они равны» и т. п.). Суждение, выраженное предложением, содержащим несколько подлежащих или сказуемых, соединенных союзом «или», часто называют разделительным (более подробно говорят об условно-разделительном и разделительно-категорическом суждениях): «Четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, есть параллелограмм или трапеция» и т. п.

При образовании отрицаний суждений (т. е. суждений, значение которых противоположно данному) полезно помнить, что частноутвердительное суждение «Некоторые *A* суть *B*» и общеотрицательное суждение «Ни одно *A* не есть *B*» являются отрицаниями друг друга, так же как и общеутвердительное суждение «Все *A* суть *B*» и частноотрицательное суждение «Некоторые *A* не суть *B*».

Если верно условное суждение «Если A, то B» то суждение B называют **следствием** суждения A.

В перечисленных терминах легко формулируются такие привычные из школьного курса математики понятия, как прямая, обратная и противоположная теоремы (прямая: «Если A, то B», обратная: «Если B то A», противоположная: «Если не-A, то не-B), необходимые и достаточные признаки (условия). Как обычно, **теоремами** называются доказуемые (или даже доказанные) суждения, **аксиомами** — те суждения, истинность которых в данной теореме принимается без доказательства.

Вполне элементарное изложение освещаемых в данном разделе вопросов читатель сможет найти в книге И. С. Градштейна «Прямая и обратная теоремы» (М., Физматгиз, 1959); полезным также может оказаться знакомство со II главой книги Н. М. Бескина «Методика геометрии» (М., Учпедгиз, 1947).

120. Прочтите следующие равенства слева направо и справа налево и сформулируйте соответствующие правила действий над радикалами:

1) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\,\sqrt[n]{a_2} \ldots \sqrt[n]{a_k}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

121. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ (α — произвольный угол). Что утверждает эта запись?

122. Какие теоремы выражаются равенствами:

$$\sin(-x) = -\sin x? \quad \cos(-x) = \cos x?$$

123. Как кратко с помощью математических символов записать следующие предложения?

1) Ни одно из чисел a, b, c не равно нулю.

2) По крайней мере одно из чисел a, b, c равно нулю.

3) Или числа a и b имеют противоположные знаки, или по крайней мере одно из них равно нулю.

124. Какие слова в следующих теоремах могут быть опущены?

1) Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.

2) Если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то противоположный ему угол содержит 30°.

125. Сформулируйте предложение «Если неверно, что $a \leqslant b$, и неверно, что $b \leqslant c$, то неверно, что $a \leqslant c$», не употребляя слова «неверно».

126. В следующих предложениях слово «может» имеет различный смысл. Объясните это различие.

1) Площадь треугольника может быть найдена, если известны его основание и высота.

2) Точка пересечения высот треугольника может лежать вне треугольника.

127. Выясните точный смысл союза «или» в следующих предложениях:

1) Четырехугольник $ABCD$, у которого $AB \parallel CD$, есть трапеция или параллелограмм

2) В любом треугольнике ABC угол A или угол B острый.

3) AD есть биссектриса, или равноделящая, угла BAC.

128. В следующих теоремах укажите условие и заключение:

1) Вертикальные углы равны между собой.

2) Во всяком треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

3) Отрезок прямой, соединяющей две какие-нибудь точки, короче всякой ломаной, соединяющей эти же точки.

4) Перпендикуляр к одной из двух параллельных прямых есть также перпендикуляр к другой.

5) Сумма углов треугольника равна двум прямым.

6) Всякое сечение шара плоскостью есть круг.

7) Окружности двух больших кругов шара при пересечении делятся пополам.

129. Выделите условие и заключение в каждой из следующих аксиом.

1) Существует одна и только одна прямая, проходящая через две различные точки.

2) Существует одна и только одна плоскость, проходящая через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

3) Если две точки прямой лежат в некоторой плоскости, то эта прямая целиком принадлежит данной плоскости.

4) Если две плоскости имеют общую точку, то у них имеется по крайней мере еще одна общая точка.

130. Выразите в форме условных суждений следующие теоремы:

1) Сумма двух смежных углов равна 180°.

2) Параллелограмм имеет центр симметрии.

3) Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны.

131. Выразите следующие теоремы в форме категорических суждений:

1) Если прямоугольники подобны, то их периметры относятся как сходственные стороны.

2) Если многоугольник правильный, то около него можно описать окружность.

3) Если две прямые перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

132. *A* есть следствие *B*. Запишите это в виде условного предложения.

133. Замените следующие предложения парами более простых по форме предложений, эквивалентных им:

1) Если *A* или *B*, то *C*.

2) Если *A*, то *B* и *C*.

134. Объясните различие между предложениями:

1) Если *A* или *B*, то *C*.

2) Если *A* и *B*, то *C*.

135. Приведите примеры теорем, имеющих следующее строение:

1) *A* и *B* есть *C*.

2) *A* или *B* есть *C*.

3) *A* есть *B* и *C*.

4) *A* есть *B* или *C*.

136. Что называется теоремой, обратной данной?

137. Следует ли истинность (ложность) обратной теоремы из истинности (соответственно ложности) прямой теоремы? Приведите примеры.

138. Какие из следующих предложений обратимы:

1) Если $x=y$, то $x^2=y^2$ (x и y — действительные числа).

2) Если $x=y$, то $x^3=y^3$ (x и y — действительные числа).

3) Для того чтобы две прямые были параллельны, необходимо, чтобы они не имели общей точки.

4) Прямая, параллельная какой-нибудь стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

5) Всякое сечение шара плоскостью есть круг.

6) Для того чтобы число делилось на 5, достаточно, чтобы оно оканчивалось цифрой 5.

7) В правильном пятиугольнике диагонали равны.

8) Для того, чтобы дробь была равной 0, необходимо, чтобы числитель дроби был равен 0.

139. Приведите примеры одновременной ложности прямого и обратного утверждений.

140. Верна ли теорема: «Если произведение двух целых чисел делится на 6, то хотя бы один из множителей делится на 6»? Решите вопрос о справедливости обратной теоремы.

141. Для того чтобы две прямые пересекались, достаточно, чтобы они лежали в одной плоскости. Сформулируйте обратное утверждение. Рассмотрите вопрос об истинности обоих утверждений.

142. Приведите примеры взаимно обратных предложений не из области математики.

143. Докажите, что если тетраэдр имеет два правильных (т. е. имеющих равные плоские углы) трехгранных угла, то он имеет плоскость симметрии. Справедливо ли обратное утверждение?

144. Верно ли утверждение: «Если прямая проходит через середину боковой стороны треугольника и отрезок ее, заключенный между боковыми сторонами, равен половине основания треугольника, то этот отрезок есть средняя линия треугольника»?

145. Если любая прямая, имеющая с многоугольником общую точку, делит его не более чем на две части, многоугольник выпуклый; наоборот, если многоугольник выпуклый, то любая прямая, имеющая с ним общую точку, может делить его не более чем на две части. Докажите оба утверждения.

146. Симметричные фигуры равны. Справедливо ли обратное предложение: «Всякие две расположенные в плоскости равные фигуры симметричны относительно некоторой оси»? Для каких фигур справедливо обратное предложение?

147. В выпуклом многоугольнике, у которого противоположные стороны попарно параллельны, противоположные углы попарно равны. Имеет ли место обратная зависимость?

148. Для того чтобы прямые были параллельны, до-

статочно, чтобы они не имели общей точки. Сформулируйте обратное утверждение. Рассмотрите вопрос об истинности обоих утверждений.

149. Для любой математической задачи мы легко можем сформулировать «обратную» ей задачу. Если задачу «Дано A, требуется найти (построить, доказать) B» мы назовем «прямой», то «обратной» будет: «Дано B, требуется найти (построить, доказать) A».

Приведите примеры взаимно обратных задач на вычисление и построение так, чтобы:

обе взаимно обратные задачи имели решение;

обе взаимно обратные задачи не имели решения;

имела решение только одна из двух задач.

150. Для следующих задач на вычисление и построение составьте обратные задачи. Все ли из них разрешимы?

1) Стороны треугольника ABC равны a *см*, b *см*, c *см*. Вычислить высоты h_a, h_b, h_c.

2) Поверхности двух шаров относятся как $m:n$. Найти отношение их объемов.

3) Зная стороны треугольника, определить радиус вписанной в треугольник окружности.

4) По данным сторонам a, b, c треугольника ABC построить медианы m_a, m_b, m_c.

5. Утроить данный угол α.

6) Дан круг. Построить равновеликий ему квадрат.

151. Какова зависимость между теоремами: прямой, обратной, противоположной и обратной противоположной?

152. Если x — иррациональное число, то по крайней мере одно из чисел A, B, C также является иррациональным. Сформулируйте противоположную теорему.

153. Укажите зависимость между предложениями:

1) «Если A, то B» и «Если не-B, то не-A».

2) «Если A, то B» и «Если не-A, то не-B».

3) «Если A, то B» и «Если A, то не-B».

4) «Если A, то B» и «Если A, то B и C».

154. Для каждой из следующих теорем сформулируйте обратную, противоположную и противоположную обратной теоремы:

1) Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

2) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

3) Если многоугольник правильный, то около него можно описать окружность.

4) Если сумма цифр какого-нибудь числа делится на 3, то это число делится на 3.

5) Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и притом только одну.

155. Приведите примеры теорем, представляющих собой отрицательные суждения.

156. Следующие теоремы, выраженные в утвердительной форме, выразите в отрицательной форме:

1) В прямоугольнике диагонали равны.

2) Параллелограмм имеет центр симметрии.

3) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

4) Если A, то B.

5) A есть следствие B.

157. Сформулируйте признаки неравенства треугольников.

158. Сформулируйте предложения, которые опровергли бы следующие утверждения: 1) весь наш класс присутствовал на вечере самодеятельности; 2) ни один из множителей произведения $A \cdot B \cdot C$ не равен 0; 3) некоторым школьникам по 10 лет; 4) если A, то B.

159. Сформулируйте отрицания следующих суждений: 1) все числа A, B, C — рациональные; 2) некоторые из чисел A, B, C рациональные; 3) ни одно из чисел A, B, C не является рациональным; 4) некоторые из чисел A, B, C не являются рациональными; 5) по крайней мере одно из чисел A, B, C является рациональным.

160. Среди следующих предложений найдите предложения, отрицающие друг друга: 1) все ученики нашего класса решили задачу; 2) некоторые ученики нашего класса решили задачу; 3) все ученики нашего класса не решили задачу; 4) некоторые ученики нашего класса не решили задачу.

161. Сформулируйте отрицания следующих суждений: 1) все положительные числа, и только они, удовлетворяют данному условию; 2) все положительные числа, но не только они удовлетворяют данному условию.

162. Сформулируйте отрицания следующих утверждений: 1) четырехугольник $ABCD$ не является ни прямо-

угольником, ни ромбом; 2) ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник; 3) прямые a и b не пересекаются и не параллельны.

163. Сформулируйте отрицания следующих суждений: 1) число a отрицательно или нуль; 2) эта фигура — трапеция или параллелограмм.

164. Что значит, что A есть необходимый признак B?

165. Что значит, что A является достаточным признаком B?

166. Какие признаки называются характеристическими?

167. A есть необходимый признак B. Сформулируйте обратное предложение.

168. Равносильны ли следующие предложения: 1) A есть достаточный признак B; 2) B есть необходимый признак A?

169. A есть необходимый признак B. Сформулируйте достаточный признак для отрицания B.

170. Если B есть необходимый признак A, то будет ли A достаточным признаком B?

171. Если B есть достаточный признак A, то будет ли A необходимым признаком B?

172. Если B есть необходимый признак A, то будет ли B достаточным признаком A?

173. Если B есть достаточный признак A, то будет ли B необходимым признаком A?

174. C — необходимый признак B, а B — необходимый признак A. Будет ли C необходимым признаком A?

175. C — необходимый признак B, а B — достаточный признак A. Будет ли C необходимым (достаточным) признаком A?

176. C — достаточный признак B, а B — необходимый признак A. Будет ли C необходимым (достаточным) признаком A?

177. C — достаточный признак B, а B — достаточный признак A. Будет ли C достаточным признаком A?

178. Если B есть необходимый и достаточный признак A, то будет ли A необходимым и достаточным признаком B?

179. C — необходимый и достаточный признак B, а B — необходимый и достаточный признак A. Является ли C необходимым и достаточным признаком A?

180. A — необходимый и недостаточный признак B. Что вы можете сказать о B по отношению к A?

181. A является необходимым признаком B, а B — необходимым признаком A. Покажите, что A является необходимым и достаточным признаком B, а B — необходимым и достаточным признаком A. Приведите пример.

182. A является достаточным признаком B, а B — достаточным признаком A. Покажите, что A и B — необходимые и достаточные условия по отношению друг к другу.

183. Возможна ли следующая зависимость между A, B и C: A и B (каждое в отдельности) является необходимым, но недостаточным признаком C; A и B вместе образуют достаточный, но не необходимый признак C?

184. Необходимо или достаточно условие $xy<0$ для того, чтобы имело место $x<0$ и $y>0$?

185. Приведите примеры взаимно обратных теорем. Употребляя выражение «необходимо и достаточно», объедините в одно предложение прямую и обратную теоремы.

186. Сформулируйте необходимый, но недостаточный признак параллелограмма.

187. Сформулируйте достаточный, но не необходимый признак параллелограмма.

188. Назовите признак параллелограмма, который не являлся бы ни достаточным, ни необходимым.

189. Сформулируйте необходимые и достаточные признаки непараллельности прямых.

190. Укажите необходимое и достаточное условие несоизмеримости двух отрезков.

191. При каком необходимом и достаточном условии двузначное число разделится на сумму своих цифр?

192. Покажите, что известные признаки подобия треугольников являются необходимыми и достаточными.

193. Покажите, что известные признаки параллельности двух прямых являются необходимыми и достаточными.

194. Сформулируйте необходимый и достаточный признак подобия ромбов.

195. Найдите необходимые и достаточные условия возможности описания сферы около пирамиды и призмы.

196. Найдите достаточное условие того, чтобы около четырехугольника нельзя было описать окружность.

197. Какое условие будет необходимым и достаточным для того, чтобы треугольник был прямоугольным?

198. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы из отрезков a, b, c можно было построить треугольник?

199. Каждое из следующих предложений разбейте на два предложения так, чтобы одно выражало прямую, а другое — обратную теоремы:

1) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы противоположные стороны четырехугольника были попарно равны;

2) для параллельности двух прямых необходимо и достаточно, чтобы эти прямые были перпендикулярны к некоторой третьей прямой;

3) необходимым и достаточным условием равенства $2x+5=0$ является равенство $x=-2{,}5$;

4) геометрическое место точек, одинаково удаленных от сторон угла, есть биссектриса этого угла.

200. Каждое из следующих предложений разбейте на два предложения так, чтобы одно выражало прямую, а другое — противоположную теоремы:

1) геометрическое место точек, одинаково удаленных от двух данных точек, есть перпендикуляр, проведенный к отрезку прямой, соединяющему эти точки, через его середину;

2) для того чтобы прямоугольник был квадратным, необходимо и достаточно, чтобы диагонали прямоугольника были взаимно перпендикулярны;

3) для того чтобы четырехугольник мог быть вписан в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных его углов была равна 180°.

201. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте «необходимо» или «достаточно», а где возможно, «необходимо и достаточно» или «ненеобходимо и недостаточно» так, чтобы получилось справедливое утверждение:

1) для того чтобы сумма пяти положительных чисел была меньше 100, . . ., чтобы хоть одно число было меньше 20;

2) для того, чтобы основание треугольника равнялось 20 *см*, а высота—10 *см*, . . ., чтобы площадь треугольника равнялась 100 *см*^{2};

3) для того чтобы треугольник имел площадь, равную 50 *см*^{2}, . . ., чтобы основание треугольника равнялось 20 *см*, а высота — 5 *см*;

4) для того чтобы число делилось на 3, . . ., чтобы оно оканчивалось цифрой 5;

5) для того чтобы треугольник имел площадь, равную 100 *см*², . . ., чтобы основание треугольника равнялось 5 *см*;

6) для того чтобы треугольник был прямоугольным, . . ., чтобы имело место $c^2=a^2+b^2$ (где a, b, c — подходящим образом обозначенные стороны треугольника);

7) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, . . ., чтобы четырехугольник имел центр симметрии;

8) для того чтобы две прямые не имели общей точки, . . ., чтобы они были параллельны;

9) для того чтобы число делилось на 12, . . ., чтобы оно делилось на 3;

10) для того чтобы около пирамиды можно было описать сферу, . . ., чтобы боковые ребра пирамиды были равны;

11) для того чтобы корни уравнения $x^2+px+q=0$ имели одинаковые знаки, . . ., чтобы q было больше нуля.

202. В следующих предложениях вместо многоточия поставьте «тогда», а где возможно, «тогда и только тогда» так, чтобы получилось справедливое утверждение:

1) $5x-8=0$. . ., когда $x=1{,}6$;

2) $(x^2-1)\cdot(x-2)=0$. . ., когда $x=2$;

3) $\sin x={}^1/_2$. . ., когда $x=30°\cdot(-1)^n+180°\cdot n$ (где n — любое целое число);

4) сумма четырех чисел четна . . ., когда каждое слагаемое нечетно;

5) сумма пяти чисел больше 100 . . ., когда каждое слагаемое больше 20.

203. Проверьте, справедливы ли следующие утверждения:

1) для того чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы оно оканчивалось 0;

2) для того чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно, чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны;

3) все треугольники подобны между собой;

4) некоторые равнобедренные треугольники суть прямоугольные;

5) для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно чтобы он имел центр симметрии;

6) все равносторонние треугольники суть равнобедренные;

7) некоторые прямоугольные треугольники суть равнобедренные;

8) произведение двух чисел равно нулю, когда по крайней мере один из множителей равен нулю.

204. Выразите следующие теоремы с помощью термина «достаточно»:

1) если две прямые перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны;

2) если в выпуклом четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, то около него можно описать окружность;

3) если треугольник равнобедренный, то он имеет ось симметрии.

205. Выразите следующие теоремы с помощью термина «необходимо»:

1) в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов;

2) в прямоугольнике диагонали равны;

3) в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны.

206. Укажите ошибки в следующих утверждениях:

1) треугольники равновелики, только если они равны;

2) для того чтобы прямая была перпендикулярна к плоскости, необходимо, чтобы она была перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей в плоскости;

3) для того чтобы две прямые были параллельны, достаточно, чтобы они не имели общей точки.

207. Ниже приведены некоторые свойства правильного пятиугольника и несколько задач на нахождение достаточных признаков правильного пятиугольника.

Свойства:

1) все стороны равны; 2) все углы равны; 3) все диагонали равны; 4) все отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, перпендикулярны к сторонам; 5) все отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке; 6) каждая диагональ параллельна стороне, не имеющей с ней общих точек; 7) имеется ось симметрии; 8) если последовательно соединить середины сторон, получим правильный пятиугольник; 9) около многоугольника можно описать окружность; 10) в многоугольник можно вписать окружность.

Задачи:

1) Является ли каждое из названных свойств достаточным для того, чтобы пятиугольник был правильным? 2) В пятиугольнике, около которого можно описать окружность, все стороны (углы) равны. Будет ли пятиугольник правильным? 3) В пятиугольнике, в который можно вписать окружность, все стороны (углы) равны. Будет ли пятиугольник правильный? 4) В пятиугольнике, около которого можно описать окружность, все диагонали равны. Будет ли пятиугольник правильным? 5) В пятиугольнике, около которого можно описать окружность, отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, перпендикулярны к сторонам. Будет ли пятиугольник правильным? 6) В пятиугольнике, около которого можно описать окружность, диагонали параллельны сторонам. Будет ли пятиугольник правильным? 7) Пятиугольник, около которого можно описать окружность, имеет ось симметрии. Будет ли пятиугольник правильным?

208. Составьте по примеру предыдущей задачи аналогичный список свойств и задачи для правильного шестиугольника.

209. Определите, для каких видов многоугольников может иметь место свойство: равенство всех диагоналей многоугольника.

*** 210.** Постройте пятиугольник, отличный от правильного, такой, чтобы все отрезки, соединяющие его вершины и середины противоположных сторон, проходили через одну точку, чтобы три из этих отрезков были перпендикулярны к соответствующим сторонам и чтобы, наконец, пятиугольник имел ось симметрии.

211. Как, не измеряя углов (измеряя лишь расстояния), определить, является ли данный четырехугольник квадратом? Сформулируйте соответствующий признак квадрата.

III. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Подобно тому как из понятий составляются суждения, из суждений строятся умозаключения, представляющие собой цепочки суждений, каждое следующее из которых должно быть следствием из предыдущего (или предыдущих). Если умозаключение построено «правильно» (точный смысл этого слова мы здесь определять не будем, считая, что какие-то интуитивные представления у читателя с ним так или иначе связываются; более подробный и точный анализ можно найти в любом руководстве по математической логике), то его называют доказательством (или выводом) последнего своего суждения («заключения»; начальные суждения в данном умозаключении, из которых выводятся последующие, называют его «посылками»).

Не имея возможности и надобности вдаваться здесь в подробное изложение правил доказательства, принятых в обычных математических рассуждениях, мы будем исходить просто из общепринятых, «школьных» представлений о них; не лишним лишь, пожалуй, будет напомнить читателю, что условное суждение (и умозаключение) считается истинным (про умозаключения говорят «верным», или «правильным») не только в случае истинности (верности) посылок и заключения, но и всегда, когда посылки ложны (независимо от истинности заключения), а также если заключение истинно (опять-таки вне зависимости от истинности посылок). От примеров мы и здесь сознательно воздержимся — их достаточно в нижеследующих задачах.

Содержание данного раздела в еще большей степени, чем предыдущих основано на обычном школьном курсе математики (особенно геометрии); изложения близких вопросов читатель сможет найти в следующих книгах: Ф. Ф. Притуло, Методика изложения геометрических доказательств, М., Учпедгиз, 1958; Д. Пойа, Как решать задачу, М., Учпедгиз, 1959; И. Я. Депман. Рассказы о решении задач, Л., Учпедгиз, 1957; Л. И. Голо-

вина, И. С. Соминский и И. М. Яглом, Математическая индукция, М., «Наука», 1965; Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах, М., Физматгиз, 1961 (впоследствии перепечатано в сборнике избранных научно-популярных статей Я. С. Дубнова, вышедшем в 1964 г. в издательстве «Просвещение»).

212. Что получится, если мы будем пытаться доказывать от противного неверное утверждение?

213. Что называется опровержением данного утверждения?

214. Укажите примеры предложений, которые до настоящего времени не удалось ни доказать, ни опровергнуть.

215. Иногда бывает легче доказать более общую теорему, чем менее общую. Укажите хоть один такой пример.

216. Доказать существование какого-нибудь объекта бывает легче, чем построить (указать) его. Приведите пример.

217. Можно ли провести четкую грань между задачами на доказательство, задачами на вычисление и задачами на построение?

218. Может ли задача на доказательство решаться вычислением или построением?

219. Если в правильной четырехугольной призме боковое ребро равно половине диагонали основания, то полная поверхность такой призмы равновелика правильному восьмиугольнику, построенному на стороне ее основания. Докажите это: 1) вычислением; 2) построением.

220. Из истинной посылки A получено ложное следствие. Какова могла быть причина?

221. Покажите на примере, что из ложного положения можно вывести как верные, так и неверные следствия.

222. Покажите на примере, что одно и то же заключение A может являться следствием как истинного, так и ложного положений.

223. Как доказать утверждение: «Не всякий треугольник является остроугольным»?

224. Как опровергнуть утверждение: «Если число делится на 5, то оно оканчивается цифрой 5»?

225. Известно, что предложение «Все четырехугольники обладают свойством A» ложно. Что можно сказать

о предложении «Некоторые четырехугольники обладают свойством A»?

226. Предложение «Некоторые четырехугольники обладают свойством A» ложно. Что вы скажите о предложении «Все четырехугольники обладают свойством A»?

227. Приведите примеры доказательства от противного.

228. Дайте прямое и косвенное доказательства третьего признака равенства треугольников (по трем сторонам).

229. Почему нельзя обосновать геометрические утверждения общего характера с помощью инструментальных измерений?

230. Какое значение при доказательстве теорем имеет чертеж?

231. Покажите, что всякому доказательству при желании можно придать форму доказательства от противного.

232. Докажите «теорему Гаубера»: «Пусть доказано несколько теорем, условия которых суть $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а заключения — соответственно $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Если условия $A_1, A_2, \ldots, A_n$ исчерпывают все возможные случаи, а каждое из заключений несовместимо ни с одним из остальных, то справедливы все обратные теоремы: из B_1 следует A_1, из B_2 следует A_2, из B_3 — A_3 и т. д.».

233. Рассмотрите частный случай «теоремы «Гаубера», когда $n=2$.

234. Приведите примеры применения «теоремы Гаубера» в геометрии.

235. Обычно следующие теоремы доказываются от противного; найдите для них прямые доказательства.

1) Во всяком треугольнике против равных углов лежат равные стороны.

2) Во всяком треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

3) Диаметр, проведенный через середину хорды, перпендикулярен к этой хорде и делит дугу, стягиваемую ею, пополам.

236. Рассмотрим задачу: доказать, что из трех чисел $\overline{abc}$[1], $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ или все кратны 37, или ни одно не делится на 37.

---

[1] $\overline{abc}$ — это запись трехзначного числа с помощью цифр a, b, c.

Покажите, что предложенная задача может быть сведена к доказательству предложения: если $\overline{abc}$ кратно 37, то и числа $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ кратны 37.

237. Решите следующие две задачи:

1) Известно, что последовательность $u_1=\sqrt{2}$, $u_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $u_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, . . . , $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$ сходится. Найти ее предел.

2) Найти предел последовательности

$$u_n=\frac{2^n}{n!}.$$

***238.** Решение некоторых математических задач может свестись к доказательству их неразрешимости. Решите несколько таких задач.

1) Число $\sqrt[3]{2}$ представить в виде суммы $p+\sqrt{q}$, где p и q — рациональные числа.

2) Разносторонний треугольник разрезать на два равных треугольника.

3) Найти n, при котором сумма $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ является целым числом.

***239.** Докажите теорему: «Если при любом x и постоянном $a\neq 0$ имеет место равенство $f(x+a)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$, то $f(x)$ — периодическая функция». Справедлива ли обратная теорема?

240. Кроме доказательства от противного, существует еще второй вид косвенного доказательства, так называемое косвенное разделительное доказательство. Схема такого доказательства такова:

A есть B или C или D
A не есть B и A не есть C.
Следовательно, A есть D.

Таким образом, в косвенном разделительном доказательстве справедливость доказываемого положения устанавливается не с помощью прямого обоснования утверждения, а лишь косвенно — путем опровержения всех возможных предположений, кроме одного.

Предлагаем вам использовать разделительное доказательство в следующих задачах:

1) Докажите, что треугольники с соответственно параллельными сторонами подобны.

2) Покажите, что уравнение

$$x^2+ax+1=0,$$

если a — целое число и $|a|\neq 2$, может иметь только иррациональные или мнимые корни.

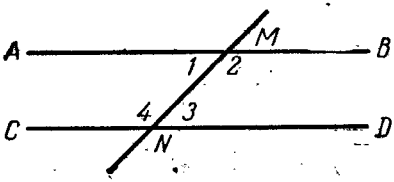

Рис. 7

3) Произведение двух натуральных чисел больше 85. Докажите, что хотя бы один из сомножителей больше 9.

241. Приведите примеры косвенного разделительного доказательства геометрических теорем.

242. В разделительном косвенном доказательстве иногда встречается ошибка, состоящая в том, что перечисляются и рассматриваются не все возможные случаи. Подобная ошибка допущена в приводимом ниже доказательстве. Предлагаем вам найти ее.

Пусть $AB \parallel CD$ и MN — секущая (рис. 7). Докажем, не опираясь на аксиому параллельности, что сумма внутренних односторонних углов равна $2d$.

Возможны три допущения: 1) сумма внутренних односторонних углов больше $2d$; 2) сумма внутренних односторонних углов меньше $2d$; 3) сумма внутренних односторонних углов равна $2d$.

При первом допущении получаем:

$$\angle 1+\angle 4>2d, \quad \angle 2+\angle 3>2d,$$

откуда

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4>4d;$$

между тем в действительности сумма четырех внутренних углов (две пары смежных углов) равна $4d$. Полученное противоречие показывает, что первое допущение должно быть отброшено. По той же причине мы вынуждены отказаться и от второго допущения, так как оно приводит к выводу, что сумма четырех внутренних углов меньше $4d$. Таким образом, единственно возможным остается третье допущение. Предложение доказано.

243. Две прямые a и b в пространстве могут занимать относительно друг друга только три положения: 1) a может быть параллельна b; 2) a может пересекать b; 3) a может скрещиваться с b. Очевидно, каждый из указанных случаев исключает остальные два.

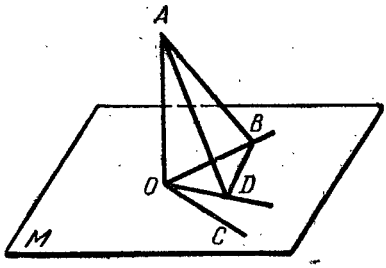

Рис. 8

В чем будет состоять косвенное разделительное доказательство утверждения: «a и b — скрещивающиеся прямые»?

244. Пусть некоторый многоугольник имеет две оси симметрии. Используя метод косвенного разделительного доказательства, покажите, что оси симметрии пересекаются внутри многоугольника.

245. Докажите следующие утверждения от противного:

1) Ни при каком целом n частные $\frac{n-6}{15}$ и $\frac{n-5}{24}$ одновременно не являются целыми числами.

2) Если правильная дробь несократима, то дробь, дополняющая ее до единицы, тоже несократима.

3) Не существует многогранника с нечетным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечетным числом сторон.

246. Найдите дефект в приводимом ниже косвенном доказательстве.

Теорема. Если прямая AO (рис. 8), пересекающаяся с плоскостью M, перпендикулярна к каким-нибудь двум прямым OB и OC, проведенным на этой плоскости через точку пересечения O данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой OD, проведенной на плоскости через ту же точку пересечения O.

Доказательство[1]. Предположим, что AO, перпендикулярная к прямым OB и OC, не будет перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной на плоскости M через точку O. Пусть этой прямой будет AD (D принадлежит M).

Проводим BD перпендикулярно OD. Из рассмотрения прямоугольного треугольника AOB следует, что

$$(AB)^2=(AO)^2+(OB)^2. \qquad (1)$$

[1] Мы приводим доказательство Дж. Черменса (см. «Начала» Евклида. Книги XI—XV, пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского. Гостехиздат, 1949, стр. 181).

Но так как (согласно предположению) AD перпендикулярна OD, то из треугольника AOD следует:

$$(AO)^2=(AD)^2+(OD)^2, \qquad (2)$$

а из треугольника OBD —

$$(OB)^2=(OD)^2+(BD)^2. \qquad (3)$$

Подставляя выражения $(AO)^2$ и $(OB)^2$ из (2) и (3) в (1), получим:

$$(AB)^2=(AD)^2+(BD)^2+2(OD)^2.$$

Следовательно, $(AB)^2>(AD)^2+(BD)^2$,

а это значит, что угол ADB не прямой.

Мы получили противоречие с нашим предположением, что и доказывает теорему.

247. Можно ли доказать справедливость тождества методом подстановки числовых значений букв, входящих в тождество?

248. Покажите, что каков бы ни был данный выпуклый четырехугольник, всегда можно построить другой выпуклый четырехугольник, отношение сторон которого равно отношению углов данного четырехугольника.

249. Докажите теорему: «Для того чтобы параллелограмм был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы какая-либо диагональ параллелограмма была биссектрисой одного из внутренних углов параллелограмма».

250. Покажите, что для нахождения площади кольца, образованного двумя концетрическими окружностями, достаточно знать один линейный элемент кольца. Какой это элемент?

251. Пользуясь методом математической индукции, докажите, что n различных прямых, лежащих в плоскости, разбивают плоскость на области, которые могут быть закрашены двумя красками (например, красной и зеленой) так, что все смежные области (то есть области, имеющие общий отрезок прямой) будут закрашены разными цветами.

252. Метод математической индукции, использующий переход «от n к $n+1$», употребляется не только для доказательства, но и при определении (задании) тех или иных объектов. Например, задать последовательность

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d,\ \ldots$$

можно с помощью равенств:

$$u_1 = a,$$

$$u_{n+1} = u_n + d.$$

Равенство $u_{n+1} = u_n + d$ в соединении с $u_1 = a$ вполне определяет u_n для любого натурального n. Подобные определения называют *индуктивными* (а также *рекуррентными*, или *рекурсивными*).

Определите индуктивно последовательности:

1) $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{n-1}, \ldots$

2) $1, 2, 6, \ldots, n!, \ldots$.

253. Используя формулы

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

и

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

докажите следующие равенства:

1) $1^2 + 3^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$;

2) $1^3 + 3^3 + \ldots + (2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.

Докажите их теперь непосредственно — методом математической индукции.

254. Применяя метод математической индукции, необходимо всегда тщательно следить за тем, чтобы части доказательства были связаны между собой и переход от n к $n+1$ был обоснован. Иначе можно прийти к абсурду. Примером может служить следующее «доказательство»:

«*Все натуральные числа равны между собой.* В самом деле, если у нас только одно число, то оно, очевидно, равно самому себе. Допустим теперь, что равны друг другу n любых чисел ($a_1 = a_2 = \ldots = a_n$), и, исходя из этого предположения, докажем, что будут равны друг другу и $n+1$ любых чисел ($a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$). По предположению $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ (n чисел) и $a_2 = a_3 = \ldots = a_{n+1}$ (n чисел); но тогда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$ ($n+1$ чисел). Таким образом, действительно все натуральные числа равны».

Где допущена ошибка?

255. Докажите методом математической индукции следующие предложения:

1) Для всякого натурального n

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2) При любом натуральном n

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

3) Каково бы ни было натуральное n,

$$|\sin nx|\leqslant n|\sin x|.$$

4) При любом натуральном n n^3+5n кратно 6.

256. Любое ли верное утверждение может быть доказано методом математической индукции?

Можно ли опровергнуть утверждение методом математической индукции?

257. Опровергните следующие утверждения, используя метод математической индукции:

1) Для некоторого натурального n

$$1+2+3+\ldots+n=2^n.$$

2) Для некоторого натурального $n\geqslant 5$

$$n^2=2^n.$$

258. Возможность применения метода математической индукции при решении какой-либо задачи вовсе не означает, что задача должна решаться именно этим способом. Иногда можно получить более простое решение, не прибегая к методу математической индукции. Приведите такие примеры.

259. Следует ли из справедливости теоремы упражнения 239 существование хотя бы одной функции $f(x)$, удовлетворяющей сформулированному в ней условию?

260. Существует неправильный пятиугольник, каждая диагональ которого параллельна одной из сторон. Докажите это утверждение двумя способами: 1) с помощью общего рассуждения, используя свойство параллельной проекции; 2) построением хотя бы одного такого пятиугольника.

261. Опровергнуть следующие утверждения посредством противоречащих им примеров:

1) Не существует тетраэдра, все грани которого — прямоугольные треугольники.

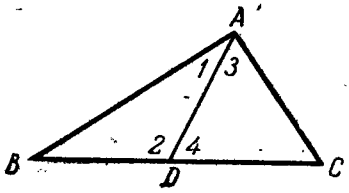

Рис. 9

2) Пятиугольник, у которого все диагонали равны между собой, не может быть неправильным.

262. Найдите ошибку в следующем рассуждении.

Докажем, что сумма углов треугольника равна 180°.

Для этого возьмем произвольный треугольник ABC (рис. 9) и разобьем его отрезком AD на два треугольника. Обозначая через x сумму углов треугольника, получим:

$$x=\angle 1+\angle 2+\angle B,\quad x=\angle 3+\angle 4+\angle C.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$2x=(\angle 1+\angle 3)+\angle B+\angle C+(\angle 2+\angle 4),$$

или

$$2x=\angle A+\angle B+\angle C+180^\circ.$$

Но $\angle A+\angle B+\angle C=x$; следовательно, $2x=x+180^\circ$ и $x=180^\circ$.

263. Задача. Некто задумал число. Отнял от него 3, результат разделил на 2, затем прибавил 3 и умножил на 2. После этого получилось число, которое на 6 больше, чем задуманное. Какое число было задумано?

Решение. Обозначим искомое число через x. Получаем уравнение

$$2\left(\frac{x-3}{2}+3\right)=x+6.$$

Решая его, приходим к равенству $0=3$ . . .

Закончите решение задачи.

264. Решить уравнение $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{5}{3}\right)^9$.

Решение. После очевидных преобразований получаем:

$$3^{x+9}=5^{x+9},$$

откуда в силу равенства показателей степеней находим: $3=5$ — противоречие!

Верно ли, что данное уравнение не имеет решения?

265. Все ли верно в приведенных ниже ответах ученика на вопросы учителя?

Учитель. Существует ли треугольник со сторонами 2, 3, 7?

Ученик. Не существует, так как в треугольнике любая сторона должна быть меньше суммы двух других сторон, а у нас $7>2+3$.

Учитель. Существует ли треугольник со сторонами 5, 5, 5?

Ученик. Существует, так как каждая сторона у нас меньше суммы двух других сторон.

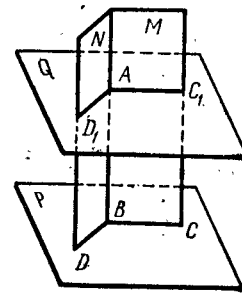

Рис. 10

266. Содержит ли приводимое ниже решение задачи доказательство утверждения: «Через каждую точку пространства можно провести только одну плоскость, параллельную данной плоскости»?

Через данную точку A (рис. 10) провести плоскость, параллельную данной плоскости P, не проходящей через точку A.

Решение. Проведем на плоскости P через какую-либо точку B две какие-либо прямые BC и BD. Построим две вспомогательные плоскости: плоскость M через точку A и прямую BC и плоскость N — через точку A и прямую BD. Через точку A проводим в плоскости M прямую $AC_1 \| BC$, а в плоскости N — прямую $AD_1 \| BD$.

Через прямые AC_1 и AD_1 проводим плоскость Q. Она и будет искомой. В самом деле, стороны угла D_1AC_1, расположенного в плоскости Q, параллельны сторонам угла DBC, расположенного в плоскости P. Следовательно, $Q \| P$.

Так как в плоскости M через точку A можно провести лишь одну прямую, параллельную BC, а в плоскости N через точку A — лишь одну прямую, параллельную BD, то задача имеет единственное решение. Следовательно, через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости.

267. Теорема о квадрате стороны треугольника, лежащей против острого угла, может быть применена для нахождения гипотенузы прямоугольного треугольника. Нельзя ли считать теорему Пифагора следствием из этой теоремы?

268. Если в треугольнике ABC $(AB)^2=(BC)^2+(AC)^2$,

то по теореме Пифагора треугольник ABC — прямоугольный. Правильно ли такое рассуждение?

269. Назовите теоремы, относящиеся к треугольнику и окружности, доказательство которых не опирается на аксиому параллельности.

270. В каком месте доказательства существования подобных треугольников используется аксиома параллельности?

271. Не опираясь на аксиому о параллельных, ее эквиваленты и следствия, докажите теорему: «Если в прямоугольном треугольнике острые углы относятся как 2:1, то гипотенуза в два раза больше меньшего катета».

Рассмотрите также обратную теорему.

272. Укажите примеры предложений стереометрии, истинность которых не зависит от аксиомы параллельности.

273. Назовите несколько теорем, в доказательстве которых используются аксиомы упражнения 129.

274. Какие из следующих предложений не зависят от аксиомы параллельности?

1) Сумма двух углов треугольника всегда меньше 180°.

2) Две прямые, пересеченные третьей, не могут пересекаться по ту сторону секущей, где сумма внутренних односторонних углов больше или равна 180°.

3) Прямая, проходящая в плоскости двух параллельных прямых и пересекающая одну из них, пересекает и другую.

4) Через внешнюю точку A всегда можно провести прямую, параллельную данной прямой a.

275. Покажите зависимость теоремы о сумме углов треугольника от аксиомы параллельности.

276. Покажите, что доказательство теоремы Пифагора опирается на аксиому параллельности.

277. Приводим «доказательство» теоремы Пифагора, предложенное учащимся X класса. «Из треугольника ABC ($\angle C=90°$) имеем: $a=c\sin A$, $b=c\cos A$, что дает: $a^2+b^2=c^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$. Но $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, поэтому $a^2+b^2=c^2$». Что вы скажете о таком доказательстве?

278. Докажите следующие предложения, пользуясь их равносильностью с другими, более простыми:

1) Если $\frac{2t}{1+t^2}$ — иррациональное число, то t также иррационально.

2) Если t — иррациональное число, то по крайней мере одно из чисел $\frac{2t}{1+t^2}$ или $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ также иррационально.

3) Если $x+\frac{1}{x}$ — иррациональное число, то x также иррационально.

279. Сформулируйте и докажите предложения, обратные следующим теоремам:

1) Если через точку M, взятую внутри круга, проведены хорды AB и CD, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ (рис. 11).

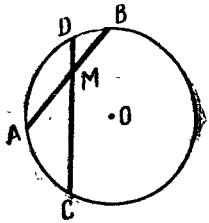

Рис. 11

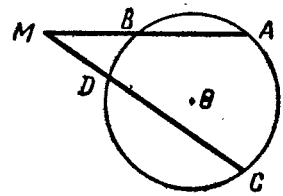

Рис. 12

2) Если из точки M, взятой вне круга, проведены к нему две секущие MA и MC, то $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ (рис. 12).

280. Приведите примеры задач, решение которых, как правило, начинается с предварительного рассмотрения и решения обратной задачи.

281. Некоторые задачи на доказательство могут быть решены вычислением. Докажите этим способом, что объем тела, полученного при вращении кругового сегмента с хордой a около диаметра, параллельного этой хорде, не зависит от величины радиуса круга.

282. Докажите, что пятая степень любого натурального числа оканчивается на ту же цифру, что и само это число.

283. Докажите равносильность предложений:

1) каждая сторона треугольника меньше суммы двух других; 2) какая-либо одна из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон и больше их разности; 3) наибольшая из сторон треугольника меньше суммы двух других сторон.

284. Равносильны ли предложения:

1) через три точки, не лежащие на одной прямой,

всегда можно провести окружность, и притом только одну; 2) через три точки, лежащие на одной прямой, нельзя провести окружность; 3) любые три точки окружности не лежат на одной прямой.

285. Сравните между собой предложения:

1) никакие три точки окружности не лежат на одной прямой; 2) прямая не может иметь с окружностью более двух общих точек.

286. Какие из следующих предложений являются следствиями суждения: «Только некоторые A суть B»?

1) Не всякое B есть A. 2) Не всякое A есть B. 3) Некоторое B не есть A. 4) Некоторое A не есть B. 5) Некоторое B есть A. 6) Некоторое A есть B. 7) Некоторое не-B есть A. 8) Некоторое не-A есть B. 9) Все B суть A.

287. Равносильны ли уравнения:

$$|\sin x|=1 \text{ и } \sin^2 x=1? \quad \lg|x|=3 \text{ и } \lg x^2=6?$$

288. В приведенном ниже примере на совершенно разные вопросы дается один и тот же (причем правильный) ответ. Как вы объясняете такую ситуацию?

1) Почему число A кратно двум? Потому что оно оканчивается цифрой 8.

2) Почему число A не делится на 5? Потому что оно оканчивается цифрой 8.

3) Почему число A не является точным квадратом? Потому что оно оканчивается цифрой 8.

289. Приведите пример истинного условного суждения $A \to B$, в котором и посылка (A), и заключение (B) являлись бы ложными высказываниями.

290. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4, а периметр 10. Требуется найти сумму синусов углов этого треугольника.

291. Сделайте заключение о связи между A и C в следующих случаях:

1) Любое A есть B и любое B есть C.
2) Любое A есть B и никакое B не есть C.
3) Любое A есть B и некоторое B есть C.
4) Любое A есть B и некоторое B не есть C.
5) Никакое A не есть B и любое B есть C.
6) Никакое A не есть B и никакое B не есть C.
7) Никакое A не есть B и некоторое B есть C.
8) Никакое A не есть B и некоторое B не есть C.

9) Некоторое A есть B и любое B есть C.
10) Некоторое A есть B и никакое B не есть C.
11) Некоторое A есть B и некоторое B есть C.
12) Некоторое A есть B и некоторое B не есть C.
13) Некоторое A не есть B и любое B есть C.
14) Некоторое A не есть B и никакое B не есть C.
15) Некоторое A не есть B и некоторое B есть C.
16) Некоторое A не есть B и некоторое B не есть C.

292. Среди следующих предложений найдите равносильные:

1) Любое A есть B.
2) Только B может быть A.
3) Ни одно A не есть не-B.
4) Только не-A может быть не-B.
5) Любое не-B есть не-A.

293. Какие из следующих высказываний истинны, какие ложны?

1) Для всех чисел x и y $x=2y$.
2) Для всякого числа x существует число y такое, что $x=2y$.
3) Для всякого числа y существует число x такое, что $x=2y$.
4) Существует число x такое, что для всех чисел y $x=2y$.
5) Существует число y такое, что для всех чисел x $x=2y$.
6) Существуют такие числа x и y, что $x=2y$.

(Здесь и в следующей задаче x и y — действительные числа.)

294. Равносильны ли следующие высказывания?

1) Для всякого числа x существует число y такое, что $x>y$.
2) Существует число y такое, что для всех x $x>y$.

295. Какие подстановки вместо переменных x и y можно сделать, чтобы следующие выражения стали истинными суждениями: $x+3y=8$; x — следствие y; x легче y; x — столица y?

296. Какие равенства могут получиться при почленном сложении и вычитании двух неверных равенств?

297. Предполагает ли истинность условного суждения истинность посылки (истинность заключения)?

298. Означает ли истинность условного суждения следующее:

1) истинность посылки достаточна для истинности заключения; 2) истинность заключения достаточна для того, чтобы считать истинным посылку; 3) истинность посылки необходима для истинности заключения; 4) истинность заключения необходима для истинности посылки?

Приведите поясняющие ответы примеры.

299. В каждом из следующих примеров найдите посылку и заключение:

1) $ab \neq 0$; $ab > 0$.
2) $\sin\alpha = \cos\beta$; $\alpha + \beta = 90°$.
3) $abc = 0$; $a = b = c = 0$.
4) $ad = bc$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $(abcd \neq 0)$.
5) $a^5 - b^5 \neq 0$; $a^2 - b^2 \neq 0$.
6) $|x - a| < b$; $a - b < x < a + b$.

300. Эквивалентны ли следующие суждения:

1) $|y| < |x|$ и $x^2 > y^2$.
2) $x^3 - y^3 = 0$ и $x - y = 0$.
3) $x^3 - y^3 \neq 0$ и $x - y \neq 0$.
4) $x^2 - y^2 \neq 0$ и $x^3 - y^3 \neq 0$?

301. Какие из следующих суждений будут ложными, если истинно первое из них? второе? . . . восьмое?

1) Все данные числа кратны пятнадцати.
2) Только некоторые из данных чисел кратны трем.
3) Ни одно из данных чисел не кратно пяти.
4) Каждое из данных чисел кратно трем и пяти.
5) Не каждое из данных чисел кратно пятнадцати.
6) Только некоторые из данных чисел не кратны пятнадцати.
7) Все данные числа не кратны пятнадцати.
8) Некоторые из данных чисел кратны пятнадцати.

302. Какие из следующих суждений будут истинными, если ложно первое из них? второе? . . . девятое? (Число 1 всюду из рассмотрения исключено.)

1) Все данные числа составные.
2) Некоторые из данных чисел простые.
3) Ни одно из данных чисел не является составным.
4) Все данные числа простые.
5) Некоторые из данных чисел составные.
6) Не каждое из данных чисел является простым.
7) Все данные числа не являются простыми.
8) Только некоторые из данных чисел составные.
9) Только некоторые из данных чисел простые.

303. Докажите следующие теоремы и решите связанные с ними задачи:

I. 1) Докажите: если три высоты одного треугольника соответственно равны трем высотам другого треугольника, то такие треугольники равны;

2) постройте треугольник по трем его высотам;

3) определите площадь треугольника по трем его высотам.

II. 1) Докажите: если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого треугольника, то такие треугольники равны;

2) постройте треугольник по трем его медианам;

3) определите площадь треугольника по трем его медианам.

III. 1) Докажите: если четыре стороны одной трапеции соответственно равны четырем сторонам другой трапеции, то такие трапеции равны;

2) постройте трапецию по четырем сторонам;

3) определите площадь трапеции по четырем ее сторонам.

IV. 1) Докажите: если сторона, прилежащий угол и сумма двух других сторон одного треугольника соответственно равны стороне, прилежащему углу и сумме двух других сторон другого треугольника, то такие треугольники равны;

2) постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и сумме двух других сторон;

3) определите площадь треугольника по стороне, прилежащему углу и сумме двух других сторон.

V. 1) Докажите: если два угла и периметр одного треугольника соответственно равны двум углам и периметру другого треугольника, то такие треугольники равны;

2) постройте треугольник по двум углам и периметру;

3) определите площадь треугольника по двум углам и периметру.

VI. 1) Докажите: если радиус вписанного круга и высота, опущенная на гипотенузу одного прямоугольного треугольника, соответственно равны радиусу вписанного круга и высоте, опущенной на гипотенузу другого прямоугольного треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны;

2) постройте прямоугольный треугольник по радиусу вписанного круга и высоте, опущенной на гипотенузу;

3) определите площадь прямоугольного треугольника по радиусу вписанного круга и высоте, опущенной на гипотенузу.

Составьте аналогичные задачи.

***304.** Докажите верные, опровергните неверные утверждения:

1) четырехугольник $ABCD$, у которого $AB=CD$ и $A=B=C$, есть прямоугольник;

2) четырехугольник $ABCD$, у которого $AC=BD$ и $\angle A=90°$, есть прямоугольник;

3) четырехугольник $ABCD$, у которого $AC=BD$ и $\angle A=\angle C=90°$, есть прямоугольник;

4) четырехугольник $ABCD$, у которого $AC=BD$ и $\angle A=\angle C$, есть прямоугольник;

5) четырехугольник, имеющий ось симметрии и прямой угол, есть прямоугольник;

6) четырехугольник, имеющий ось симметрии и два прямых противоположных угла, есть прямоугольник;

7) четырехугольник, имеющий ось симметрии и три равных угла, есть прямоугольник;

8) четырехугольник, имеющий ось симметрии и равные диагонали, есть прямоугольник;

9) четырехугольник, имеющий центр симметрии и три равных угла, есть прямоугольник.

305. Для доказательства существования параллельных прямых проводятся два перпендикуляра к одной и той же прямой. Докажите эту теорему, проводя к прямой вместо перпендикуляров наклонные.

306. Как доказать ложность тождества

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta?$$

307. Постройте биссектрису угла, вершина которого недоступна. Найдите хотя бы три различных решения.

308. Середины E и F параллельных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми с вершинами D и B. Докажите, что эти прямые делят диагональ AC на три равные части. Постарайтесь найти несколько различных решений этой задачи.

309. Задачу «Определить площадь трапеции, если диагонали равны 20 *м* и 15 *м*, а высота равна 12 *м*» решите сначала для частного случая, когда трапеция прямоугольная, а затем перейдите к общему случаю.

310. Всегда ли данные задачи необходимы для ее решения? А достаточны? Исследуйте возможные случаи и приведите примеры.

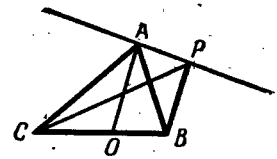

Рис. 13

311. Докажите: для того чтобы четырехугольник был трапецией, не необходимо и недостаточно, чтобы он имел два острых угла.

312. Как известно, площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Нельзя ли это правило вычисления площади ромба распространить на более широкий класс четырехугольников?

313. Докажите, что в правильном шестиугольнике диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке. Внимательно просмотрите доказательство. Какие данные вы использовали? Попытайтесь обобщить задачу.

314. Докажите и обобщите теорему: «Если два прямоугольных треугольника таковы, что катеты первого треугольника соответственно меньше катетов второго, то и гипотенуза первого треугольника меньше гипотенузы второго».

315. В треугольнике ABC AO — биссектриса угла A. Через точку A проводят прямую перпендикулярно AO и из вершины B опускают на эту прямую перпендикуляр BP. Докажите, что периметр треугольника BPC больше периметра треугольника ABC (рис. 13).

Покажите, что условие задачи содержит лишние данные. Обобщите задачу.

316. Докажите и обобщите теорему: «Если число осей симметрии четырехугольника равно четырем, четырехугольник является квадратом».

317. Докажите теоремы:

1) Выпуклый четырехугольник, имеющий центр симметрии, есть параллелограмм.

2) Выпуклый четырехугольник, противоположные углы которого попарно равны, есть параллелограмм.

3) Четырехугольник, каждой своей диагональю делящийся на равновеликие части, есть параллелограмм.

4) Шестигранник, все грани которого четырехугольники, диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам, есть параллелепипед.

5) Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы одна из его медиан была равна половине соответствующей стороны.

318. Определите вид четырехугольника, если существуют две прямые, каждая из которых делит его на две равные части.

319. Середины сторон данного четырехугольника служат вершинами квадрата. Является ли данный четырехугольник квадратом? Обобщите задачу.

320. Докажите теорему: «Если прямая образует прямые углы с двумя пересекающимися прямыми некоторой плоскости, то она пересекает данную плоскость».

321. Могут ли три окружности иметь одну общую точку? две общие точки? три общие точки? четыре общие точки?

322. Могут ли три окружности иметь только одну общую точку? только две общие точки? только три общие точки?

323. Три окружности имеют только две общие точки. Каково взаимное расположение окружностей?

324. Три окружности имеют две общие точки. Каково взаимное расположение окружностей?

325. Следует ли из условия $AB \neq BC \neq CA$, где AB, BC и CA — стороны треугольника, что треугольник ABC разносторонний?

326. Относительно сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $AB \neq A_1B_1$, $BC \neq B_1C_1$, $AC \neq A_1C_1$. Равны или не равны эти треугольники?

327. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \neq BC \neq CD \neq DA$. Какие стороны четырехугольника могут быть равными?

328. В треугольнике ABC такие же углы, как и в треугольнике $A_1B_1C_1$, причем $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Будут ли эти треугольники равны?

329. Какое наибольшее число равных отрезков может иметь совокупность $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если $a_1 \neq a_2$, $a_2 \neq a_3, \ldots, a_{n-1} \neq a_n$?

330. Каков вид треугольника, один из углов которого больше суммы двух других углов? равен сумме двух других углов?

331. Каков вид треугольника, сумма двух любых углов которого больше 90°.

332. Каков вид треугольника, каждый из углов которого меньше суммы двух других углов?

333. Существует ли треугольник, в котором сумма любых двух углов меньше 120°? больше 120°?

334. Существует ли внутри прямоугольника точка, одинаково удаленная от всех его сторон?

***335.** Существует ли четырехугольник, отличный от квадрата и равнобедренной трапеции, около которого можно описать окружность и в который в то же время можно вписать окружность?

***336.** В четырехугольнике, около которого можно описать и в который можно вписать окружности, диагонали взаимно перпендикулярны и два противоположных угла прямые. Будет ли этот четырехугольник квадратом?

337. Сколько острых внутренних углов может иметь выпуклый многоугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны?

338. Существует ли невыпуклый многоугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны?

339. Постройте тетраэдр, у которого сумма плоских углов каждого трехгранного угла равна 180°.

340. Постройте равносторонний неправильный шестиугольник.

341. Постройте равноугольный неправильный шестиугольник.

342. Постройте неправильный шестиугольник с шестью равными сторонами и четырьмя равными углами; с шестью равными углами и четырьмя равными сторонами.

***343.** Постройте выпуклый многогранник, отличный от пирамиды, у которого одна грань — правильный шестиугольник, а остальные грани — равные равнобедренные треугольники. Сделайте развертку поверхности такого многогранника.

***344.** Справедливо ли утверждение: «Многогранник, у которого одна грань — квадрат, а другие грани — равнобедренные треугольники, есть правильная пирамида»?

***345.** Постройте тетраэдр, у которого все грани были бы равные разносторонние треугольники; равные равнобедренные треугольники.

346. Приведите пример невыпуклого многогранника, все грани которого — равные квадраты.

347. В шестиграннике две грани параллельны и представляют собой прямоугольники. Остальные грани — рав-

нобедренные трапеции. Будет ли этот шестигранник усеченной пирамидой?

348. Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны, является плоским. Верно ли это утверждение для шестиугольника, противоположные стороны которого попарно параллельны?

349. Справедливо ли утверждение: «Если прямая проходит через середину боковой стороны треугольника и отрезок ее, заключенный между боковыми сторонами, равен половине основания треугольника, то этот отрезок есть средняя линия треугольника»?

350. Для каких треугольников теорема из задачи 349 верна?

351. Дайте способ построения многогранников с любым возможным числом ребер.

352. Назовите общую меру углов α и β, если $\alpha=\beta\cdot\frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа.

353. Даны два отрезка a и b. Отрезок m укладывается в a целое число раз. Из отрезков $\frac{m}{10^n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ ни один не укладывается в b целое число раз. Соизмеримы или несоизмеримы отрезки a и b?

354. $a+b+c=d$. Может ли каждый из отрезков a, b, c быть несоизмеримым с d?

355. Можно ли при задании треугольника отношение его внутренних углов выбрать произвольно? Решите этот вопрос также для выпуклых четырехугольников и пятиугольников.

356. Какие комбинации внутренних углов возможны в выпуклом четырехугольнике? выпуклом пятиугольнике? (Имеется в виду число острых, прямых и тупых углов.)

357. Определите наименьшее (или наибольшее) число острых (прямых, тупых) внешних углов, которое может иметь выпуклый n-угольник.

358. Как с помощью сгибания бумажного четырехугольника проверить, является ли он квадратом? Сколько раз необходимо это проделать для требуемой проверки?

359. Гранями многогранника служат равные правильные многоугольники; обязательно ли этот многогранник правильный?

***360.** Все грани тетраэдра равны. Значит, ли это, что он правильный? Ту же задачу решите в случае равенства всех двугранных углов; всех трехгранных углов.

***361.** Обязательно ли является многогранник правильным, если все его ребра и многогранные углы равны?

362. В трапеции с острыми углами при основании даны высота и диагонали. Определите сумму оснований трапеции.

***363.** Пусть $SABC$ — треугольная пирамида, M — произвольная точка, взятая внутри пирамиды. Всегда ли

$$MA+MB+MC<SA+SB+SC?$$

364. Докажите от противного теорему: «Через точку можно провести только одну плоскость, параллельную данной плоскости».

365. Покажите, что с помощью циркуля и линейки можно построить центр тяжести любой однородной пластинки, имеющей форму многоугольника. Доказательство проведите методом математической индукции.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

1. Квадрат, тупоугольный треугольник, средняя линия трапеции, линейный угол двугранного угла.

2. Луч и полупрямая; тетраэдр и четырехгранник; биссектриса и равноделящая и т. п.

3. Треугольная пирамида, четырехгранник, тетраэдр, многогранник с наименьшим числом граней.

4. Прямая не замкнута, бесконечна, является линией постоянной кривизны, делит плоскость, в которой она лежит, на две части, определяется любыми двумя своими точками.

5. Прямая и окружность являются линиями постоянной кривизны. Прямая и окружность делят плоскость, в которой они лежат, на две части.

6. Оба свойства в равной мере являются свойствами прямой и плоскости. А еще точнее: в них описываются не свойства прямых и плоскостей самих по себе, а отношения между этими понятиями.

В переводе на язык обычной грамматики: если в предложении имеется подлежащее(-ие) и дополнение(-ия), то сказуемое выражает не свойство подлежащего, а отношение между подлежащим(-и) и дополнением(-ями).

7. Во всяком треугольнике сумма углов равна 180°. Только некоторые треугольники имеют равные стороны. Треугольник не может иметь двух прямых углов.

9. Стороны равны. Углы равны. Диагонали равны. Диагонали взаимно перпендикулярны. Диагонали делят углы квадрата пополам. Диагонали точкой их пересечения делятся пополам. Диагонали являются осями симметрии. В квадрат можно вписать окружность. Около квадрата можно описать окружность. Центры вписанной и описанной окружности совпадают. Имеется центр симметрии. Средние линии перпендикулярны сторонам. Из всех четырехугольников данного периметра квадрат име-

ет наибольшую площадь. Из всех четырехугольников данной площади квадрат имеет наименьший периметр. (Перечисление свойств квадрата можно было бы продолжить).

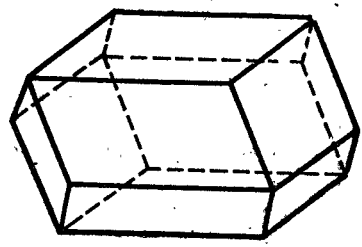

Рис. 14

10. Выпуклый многогранник, число вершин четное, число ребер кратно трем, все многогранные углы трехгранные, все грани, за исключением двух, равны между собой, равные грани суть равнобедренные трапеции, две грани параллельны между собой, можно описать сферу, имеются плоскости симметрии, имеется ось симметрии (и т. д.).

11. Равенство диагоналей, наличие двух осей симметрии — свойства всех прямоугольников. Взаимная перпендикулярность диагоналей, наличие четырех осей симметрии, равенство всех сторон — свойства лишь некоторых прямоугольников.

12. Нет, не является. Существуют многогранники, отличные от параллелепипедов, у которых все грани — параллелограммы. На рисунке 14 изображен один из таких многогранников.

14. Сумма внешних углов выпуклого многоугольника равна 360°. Всякая прямая, проведенная через внутреннюю точку выпуклого многоугольника, пересекает его границу в двух точках.

15. Число сторон четное, противоположные углы попарно равны.

16. Параллельные прямые так же, как и скрещивающиеся прямые, не имеют общей точки (признак сходства). Скрещивающиеся прямые в отличие от параллельных прямых не могут быть расположены в одной плоскости (признак различия). И параллельные, и пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости (признак сходства). Параллельные прямые в отличие от пересекающихся прямых не имеют общей точки (признак различия).

18. Все свойства прямоугольника и все свойства ромба являются свойствами квадрата. (Обратное, вообще говоря, неверно.)

19. Свойства, общие для прямоугольника и ромба, являются свойствами всех параллелограммов.

20. Пример: наличие прямого угла и равенство диагоналей.

21. Пример: равенство всех сторон и равенство диагоналей. Неравноугольный ромб обладает первым свойством, но не вторым; неравносторонний прямоугольник обладает вторым свойством, но не первым; квадрат обладает обоими свойствами.

22. Пример: равенство всех углов и неравенство диагоналей.

23. Пример: иметь равные стороны и быть квадратом. Параллелограмм, обладающий первым свойством, может не иметь второго; наличие же второго свойства влечет и первое.

24. Все стороны равны. Все углы равны. Все диагонали равны. Все отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, равны. Все отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, перпендикулярны к сторонам. Все отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке. Все диагонали параллельны соответствующим сторонам. Имеются оси симметрии. Около многоугольника можно описать окружность. В многоугольнике можно вписать окружность.

25. Постройте равноугольный неправильный и равносторонний неправильный пятиугольники. Существование таких пятиугольников и доказывает независимость указанных свойств.

26. Равенство сторон ромба и наличие острых углов — независимые свойства. Равенство диагоналей ромба и наличие острых углов — несовместимые свойства.

27. Для всех, за исключением треугольников.

28. Равенство всех углов и равенство всех диагоналей для пятиугольника являются независимыми свойствами, а для ромба — зависимыми.

29. Для пятиугольника все перечисленные свойства попарно независимы, но из каждой пары из них третье уже следует.

30. См. задачу 29.

31. Для пятиугольника равенство всех диагоналей и наличие трех прямых углов — несовместимые свойства;

для параллелограмма эти же свойства являются зависимыми.

32. Пример: равенство всех углов (a) и неравенство диагоналей (b). Для четырехугольника a и b — несовместимые свойства, для пятиугольника же a и b независимы. В самом деле: 1) существует прямоугольник с равными углами и неравными диагоналями; 2) существует пятиугольник с равными углами и равными диагоналями; 3) существует пятиугольник с неравными углами и неравными диагоналями.

33. Теорема устанавливает, что из попарной параллельности противоположных сторон четырехугольника следует попарное равенство его противоположных сторон.

34. Рассматриваемая теорема может быть сформулирована так: «Если в параллелограмме все углы прямые (на самом деле достаточно, чтобы хоть один угол был прямой), то его диагонали равны».

38. Меньше, отрицательный, тупой (не больше, неположительный, неострый).

39. Четная функция и нечетная функция. Нечетная и не являющаяся четной, как известно, не одно и то же; к тому же функция может быть одновременно четной и нечетной (придумайте пример).

40. См. рис. 15.

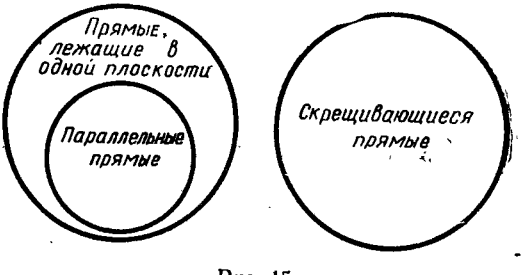

Рис. 15

41. 1) x — прямоугольник, y — ромб; 2) x — прямоугольный треугольник, y — равнобедренный треугольник, z — остроугольный треугольник; 3) x — параллелограмм, y — прямоугольник, z — квадрат, u — остроугольный ромб; 4) x — многоугольник, y — треугольник, z — равнобедренный треугольник, u — равносторонний треуголь-

ник, t — прямоугольный треугольник; 5) x — прямоугольный треугольник; y — равнобедренный треугольник, z — тупоугольный треугольник, u — разносторонний треугольник.

42. Равносторонний прямоугольный треугольник. (Придумайте еще примеры!)

43. Пусть B — число вершин, P — число ребер многогранника. Подсчитаем число ребер. Так как все многогранные углы трехгранные, то из каждой вершины выходит три ребра. Но таким образом мы каждое ребро считаем дважды (оно соединяет две вершины). Следовательно, $3B=\frac{P}{2}$, откуда $2P=3B$; следовательно, B не может быть числом нечетным.

45. 1) Некоторые прямоугольные треугольники суть равнобедренные, некоторые равнобедренные треугольники суть прямоугольные; 2) каждый равносторонний треугольник есть равноугольный, каждый равноугольный треугольник есть равносторонний; 3) все квадраты суть прямоугольники, некоторые прямоугольники суть квадраты.

46. 1) На спектакле могли присутствовать также и учащиеся других классов; 2) на спектакле могли присутствовать не все учащиеся данного класса; 3) учащиеся других классов не присутствовали на спектакле; 4) некоторые учащиеся данного класса не присутствовали на спектакле; 5) пятое и первое предложения равносильны.

48. Каждый ромб есть параллелограмм.

49. Только некоторые ромбы являются квадратами.

50. Ограничение будет правильным, если исключить слово «ромб» или слово «прямоугольник».

52. 1) Правильно; 2) неправильно; 3) неправильно; 4) неправильно; 5) неправильно; 6) неправильно. (Дайте объяснения.)

53. 1) Куб, прямоугольный параллелепипед, прямой параллелепипед, параллелепипед, четырехугольная призма, призма, выпуклый многогранник, многогранник.

56. 1) Пересечение; 2) пересечение; 3) подчинение.

57. Ромб, не имеющий прямых углов, не имеет специального названия (его просто называют «ромб»), хотя прямоугольный ромб имеет название «квадрат». (Приведите аналогичные примеры.)

58. 1) Все равносторонние треугольники суть равнобедренные. 2) Некоторые прямоугольные треугольники являются равнобедренными. 3) Никакой прямоугольный треугольник не является равносторонним. 4) Все прямоугольные треугольники суть неравносторонние.

Дальнейшие примеры предоставляются читателю.

59. 1) и 6), 3) и 4), 7) и 12), 9) и 10).

61. 1) A принадлежит всем ромбам. 2) Все зависит от свойства A: A может принадлежать всем ромбам (например, если A — равенство всех сторон), только некоторым ромбам (A — наличие прямого угла); наконец, A может не принадлежать ни одному ромбу (A — неравенство смежных сторон). 3) Свойство A не имеет ни один ромб.

62. 1) A может принадлежать всем или только некоторым параллелограммам. 2) A принадлежит только некоторым параллелограммам; 3) A принадлежит только некоторым параллелограммам или же этого свойства не имеет ни один параллелограмм.

63. Подобие фигур, параллельность прямых, соизмеримость отрезков, отношение «больше», «меньше», «равно». (Приведите еще примеры.)

64. Например, отношение «не равно»; если $A \neq B$ и $B \neq C$, то отсюда не следует, что $A \neq C$.

65. Отношения «больше», «меньше».

66. Рефлексивность, симметричность, транзитивность.

67. Да. (Приведите пример.)

68. Наличие одной, и только одной, пары параллельных сторон.

70. Ближайшие родовые понятия: «прямоугольник» и «ромб».

71. Равнобедренный прямоугольный треугольник.

74. «Равносторонний треугольник», «разносторонний треугольник», «равнобедренная трапеция» и т. п.

75. Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны.

76. 1) Треугольник; 2) диаметр; 3) равнобедренный треугольник; 4) тетраэдр; 5) параллельные прямые; 6) параллелограмм; 7) диаметр; 8) квадрат; 9) смежные углы; 10) квадрат; 11) прямоугольник; 12) четырехугольник.

77. Если точка принадлежит выпуклой области, то любая прямая, проходящая через нее, пересекает хотя бы одну сторону угла. Если точка принадлежит невыпуклой

области, то по крайней мере одна прямая, проходящая через эту точку, не пересекает сторон угла.

78. Одно из возможных определений: «Точка A называется внутренней (внешней) точкой выпуклого многоугольника, если любая прямая, проходящая через A, пересекает границу многоугольника в двух точках (если существует прямая, проходящая через A, которая с границей многоугольника не имеет общих точек)».

79. 1) Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого все многогранные углы — трехгранные, две грани параллельны между собой и являются подобными неравными многоугольниками, а остальные грани — трапеции.

2) Усеченной пирамидой называется многогранник, у которого две грани параллельны между собой и все ребра, не являющиеся сторонами этих граней, являются отрезками прямых, имеющих общую точку.

(Возможны и другие определения.)

80. 1) Четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

2) Выпуклый четырехугольник, противоположные стороны которого попарно равны.

3) Выпуклый четырехугольник, две противоположные стороны которого равны и параллельны.

4) Четырехугольник, диагонали которого точкой их пересечения делятся пополам.

5) Выпуклый четырехугольник, противоположные углы которого попарно равны.

6) Выпуклый четырехугольник, имеющий центр симметрии.

7) Четырехугольник, сумма квадратов четырех сторон которого равна сумме квадратов диагоналей.

8) Четырехугольник, каждая диагональ которого делит его на равные части.

9) Четырехугольник, каждая средняя линия которого делит его на равные части.

10) Четырехугольник, сумма углов которого, прилежащих к каждой стороне, равна 180°. (Определение избыточно: достаточно взять две смежные стороны.)

81. 1) Геометрическое место точек плоскости, находящихся на данном расстоянии от данной точки.

2) Замкнутая плоская кривая постоянной кривизны. (Возможны и другие определения.)

83. Так называется грубая ошибка, состоящая в том, что первое понятие определяется через второе, а второе — через первое.

Вот типичный пример: прямым углом называется угол, содержащий 90°; градусом называется девяностая часть прямого угла.

84. Равными треугольниками называются такие треугольники, которые равны между собой. Сложением называется арифметическое действие, состоящее в сложении нескольких чисел. (Слово «тавтология» имеет, однако, и другой смысл.)

85. См. задачу 93: 1), 2), 8), 9), 10).

86. 1) Луч — не прямая, а часть прямой; 2) сторонами угла являются лучи, поэтому предложение не имеет смысла; 3) слово «бесконечная» следует опустить; 4) отрезок не прямая, а часть прямой; 5) в прямоугольнике диагонали равны; 6) в ромбе диагонали взаимно перпендикулярны; 7) прямоугольник и ромб имеют оси симметрии; 8) в квадрате диагонали равны; 9) слова «и квадрата» следует опустить; 10) слова «и квадрат» следует опустить; 11) слова «и равных» следует опустить.

88. Поверхность, полученная от вращения полуокружности вокруг стягивающего ее диаметра, называется сферой.

89. Приведенное определение параллелограмма громоздко и неудобно, хотя и логически правильно. Использование такого определения при выводе свойств параллелограмма было бы нелегким. Кроме того, это определение нельзя использовать (непосредственно) для построения параллелограмма.

Аналогичными недостатками страдает и определение четырехугольника.

90. Всякое число, не являющееся алгебраическим, называется трансцендентным. Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны.

91. Неотрицательное число. Ненулевое решение. (Еще примеры!)

93. Можно: 1) опустить слово «наибольшую»; 2) опустить или слово «наибольшая», или слова «проходящая через центр»; 3) слово «многоугольник» заменить словом «четырехугольник»; 4) слова «сколько бы их ни продолжали» исключить; 5) слова «сколько бы их ни продол-

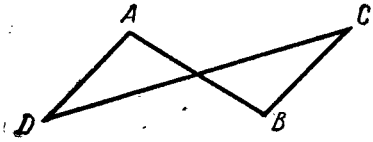

Рис. 16

жали» исключить; 6) вместо слова «равны» сказать «попарно равны»; 7) слово «равных» опустить; 8) опустить слово «непересекающиеся»; 9) слово «неправильный» опустить.

94. Нет; см. рис. 16.

95. Нет. (Объясните почему.)

96. Слово «пересекаясь».

97. Упомянутое в «определении» понятие «угол» не является в действительности родовым для понятия «двугранный угол»: под «двугранным углом» понимается пространственная фигура, а под «углом» — плоская фигура (до определения двугранного угла никаких других углов, кроме обычных «плоских», мы не знаем).

(Дайте правильное определение; проведите аналогичный анализ «определения»: «Комплексным числом называется число вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, а $i=+\sqrt{-1}$».)

98. Понятие «форма» (к которому мы хотим свести понятие подобия) само нуждается в точном математическом определении; поэтому приведенное определение можно рассматривать лишь как наглядное описание понятия подобия фигур.

99. При пересечении плоскостью всех граней многогранного угла мы можем и не получить многогранника (когда?). В определении следовало бы сказать о пересечении плоскостью не граней, а всех ребер угла.

101. 1) По определению. 2) По определению. 3) Нет. (Докажите.) 4) Да. (Докажите.)

102. По определению.

103. Луч нельзя, прямую можно.

105. Нельзя, кроме того случая, когда сегмент есть полукруг.

106. Можно, если дуга сектора содержит больше 180°.

107. Нет, так как число ребер призмы кратно трем.

108. Усеченная пирамида, основаниями которой служат трапеции.

109. 7) Будьте внимательны!

111. Горизонтальную (и только горизонтальную) ось симметрии.

112. Г Р И П Т С Н О Х

Основание деления — число осей симметрии.

113. Основание деления — возможность вычерчивания фигуры с одного росчерка. Фигуры левой группы могут быть вычерчены с одного росчерка, фигуры правой группы не могут. (Задача, разумеется, допускает и другие решения. Например, ни в одном из левых предметов нет точек с тремя подходами, а в каждом правом есть.)

114.

Рис. 17

1) Основание деления — наличие оси симметрии.
2) Основание деления — наличие центра симметрии.
3) Фигуры разбиты на «кривые» и «не кривые».
4) Фигуры разбиты на буквы и не буквы.

115. Например, то, что они помещены на 20 стр. этой книги.

116. Имеется в виду тип симметрии. Пренебрегая деталями, зависящими от особенностей шрифта, буквы разбиты на следующие группы:

1) вертикальная ось симметрии;
2) горизонтальная ось симметрии;
3) центр симметрии;
4) все три типа симметрии;
5) нет симметрии.

119. Необходимо предварительно тщательно изучить свойства данных фигур и найти признаки, по которым их можно было бы отличить друг от друга.

Можно, например, ограничиться следующими вопросами:

1) Является ли задуманная фигура кривой?

2) Имеет ли задуманная фигура ось симметрии?

3) Имеет ли задуманная фигура центр симметрии?

120. 1) Корень из произведения равен произведению корней той же степени из каждого сомножителя. Произведение корней данной степени равно корню той же степени из произведения подкоренных выражений.

2) Корень из частного равен корню той же степени из числителя, деленному на корень из знаменателя. Частное корней одинаковой степени равно корню той же степени из частного подкоренных выражений.

121. Приведенная запись выражает теорему: «Если два угла в сумме составляют 180°, то синусы этих углов равны».

122. $y=\sin x$ — нечетная функция; $y=\cos x$ — четная функция.

123. 1) $abc\neq 0$; 2) $abc=0$; 3) $ab\leqslant 0$.

124. 1) Слово «двух».

2) Слова «прямоугольного», «треугольника», «острый».

125. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

126. 1) Перед словом «может» подразумевается слово «всегда». 2) Перед словом «может» подразумевается слово «иногда».

127. 1) Здесь «или» *разделительное* (употребляется в смысле «или — или»): четырехугольник $ABCD$ не может быть одновременно и трапецией, и параллелограммом.

2) Здесь «или» *неразделительное:* возможность существования двух острых углов (и A, и B) не исключается.

3) «Или» употреблено в смысле «то есть».

132. Если B, то и A.

133. 1) Если A, то C; если B, то C.

2) Если A, то B; если A, то C.

134. В первом случае C является следствием как A, так и B. Во втором случае для наличия C требуется одновременное выполнение условий A и B.

135. 1) Число, кратное двум и трем, делится на 6.

2) Число, оканчивающееся нулем или цифрой 5, делится на 5.

3) Число, кратное пятнадцати, делится на 3 и 5.
4) Число кратное пяти, оканчивается нулем или цифрой 5.

138. Предложения 2 и 5.

139. 1) Прямая «теорема»: «В одной и той же окружности бо́льшая дуга стягивается меньшей хордой». Обратная «теорема»: «В одной и той же окружности меньшая хорда стягивает бо́льшую дугу».

2) Прямая «теорема»: «Во всяком треугольнике против большей стороны лежит меньший угол». Обратная «теорема»: «Во всяком треугольнике против меньшего угла лежит бо́льшая сторона».

146. Нет. (приведите пример!) Обратное предложение справедливо, например, для окружностей.

147. Имеет.

148. Все зависит от того, в плоскости или в трехмерном пространстве рассматриваются прямые.

151. Первая и четвертая (вторая и третья) теоремы представляют собой равносильные предложения. Они одновременно или истинны, или ложны. Из истинности (ложности) какого-нибудь утверждения не следует ни истинность, ни ложность обратного ему утверждения.

152. Если x — рациональное число, то каждое из чисел A, B, C также является рациональным числом.

153. 1) Предложения равносильны; 2) предложения независимы: из истинности первого предложения не следует ни истинность, ни ложность второго предложения, и наоборот; 3) каждое из предложений является отрицанием другого предложения: если справедливо первое предложение, то второе ложно, и наоборот; 4) первое предложение является следствием второго, но не обратно.

155. Например, треугольник не может иметь двух прямых углов; окружность с прямой не может иметь более двух общих точек; около ромба, если он не является квадратом, нельзя описать окружность и т. д.

156. 1) Параллелограмм с неравными диагоналями не есть прямоугольник; 2) четырехугольник, не имеющий центра симметрии, не может быть параллелограммом; 3) треугольник, не имеющий равных углов, не является равнобедренным; 4) если не-B, то не-A; 5) если не-A, то не-B.

157. Треугольники не равны, если: 1) хотя бы один угол первого треугольника отличен от каждого из уг-

лов второго треугольника; 2) хотя бы одна сторона первого треугольника отлична от каждой из сторон второго треугольника; 3) если не равны их периметры. (Можно ли продолжить список?)

158. 1) Достаточно назвать фамилию одного ученика, который не присутствовал на вечере; 2) $A=0$; 3) ни одному из школьников нет 10 лет; 4) A верно, а B нет.

159. 1) По крайней мере одно из чисел A, B, C является иррациональным; 2) все числа A, B, C иррациональные; 3) по крайней мере одно из чисел A, B, C рациональное; 4) все числа A, B, C рациональные; 5) все числа A, B, C иррациональные.

160. Первое и четвертое; второе и третье.

161. 1) Не все положительные числа или не только положительные удовлетворяют условию; 2) не все положительные числа или только положительные удовлетворяют данному условию. (Поясните точный смысл употребленного здесь слова «или»!)

162. 1) Четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник или ромб; 2) треугольник ABC не равнобедренный или не прямоугольный; 3) прямые a и b пересекаются или параллельны.

163. 1) a — положительное число. (Предложите другой вариант ответа!)

2) Эта фигура не является ни трапецией, ни параллелограммом.

164. A называют необходимым признаком B, если A является следствием B.

165. Если из A следует B.

166. Характеристическими признаками называются признаки, являющиеся одновременно необходимыми и достаточными.

167. A есть достаточный признак B.

168. Предложения равносильны.

169. Для того чтобы B было неверно, достаточно, чтобы было неверно A.

175. A и C являются следствиями B; никакая другая связь между A и C из условия задачи не вытекает.

176. B является следствием как A, так и C, и только.

180. B есть достаточный, но не необходимый признак A.

183. A и B вместе, вообще говоря, сильнее, чем каждое из этих условий в отдельности. Значит, совокупность

двух недостаточных признаков может оказаться достаточной для C (дайте пример!); но если оба они необходимы, то это и значит, что «A и B» необходимо! Итак, ответ отрицателен.

184. Условие только необходимо.

188. Например, для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, недостаточно и не необходимо, чтобы четырехугольник имел острый угол. (Сравните: не каждого кота зовут Васькой; Василий — не обязательно кот.)

191. Отношение цифр двузначного числа равняется 2, или сумма этих цифр равна 9, или цифра единиц — 0. (Обратите внимание на то, что смысл союза «или» здесь таков, что достаточной является любая комбинация перечисленных признаков, а необходимым — наличие хотя бы одного из них.)

197. 1) Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы квадрат одной из его сторон был равен сумме квадратов двух других сторон.

2) Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы одна из медиан треугольника была равна половине соответствующей стороны. (Попробуйте найти еще вариант.)

198. $a+b>c$, $|a-b|<c$.

199. 1) Прямая теорема: «Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы противоположные стороны четырехугольника были попарно равны». Обратная теорема: «Для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, достаточно, чтобы противоположные стороны четырехугольника были попарно равны».

2) Прямая теорема: «Если точка лежит на биссектрисе угла, то она одинаково удалена от сторон этого угла». Обратная теорема: «Если точка одинаково удалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла».

200. 1) Прямая теорема: «Если точка лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку прямой через его середину, то она одинаково удалена от концов отрезка». Противоположная теорема: «Если точка не лежит на перпендикуляре, проведенном к отрезку прямой через

его середину, то она неодинаково удалена от концов отрезка».

201. 1) Необходимо; 2) необходимо; 3) достаточно; 4) не необходимо и недостаточно; 5) не необходимо и недостаточно; 6) необходимо и достаточно; 7) необходимо и достаточно; 8) достаточно; 9) необходимо; 10) достаточно; 11) необходимо.

202. 1) Тогда и только тогда; 2) тогда; 3) тогда и только тогда; 4) тогда; 5) тогда. (Следует, однако, иметь в виду, что слово «тогда» и в математике, и в разговорной речи часто подразумевает значение «*и только тогда*»; то же можно сказать и об оборотах «если» и «если и только если». Переформулируйте все перечисленные предложения в форме «из A следует B», исключающей такого рода двусмысленность.)

203. 1) Предложение станет справедливым, если слово «необходимо» заменить словом «достаточно»; 2) если слово «достаточно» заменить словом «необходимо»; 3) предложение ложно; 4) предложение справедливо; 5) справедливо; 6) справедливо; 7) справедливо; 8) справедливо.

205. 1) Для того чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо, чтобы квадрат одной стороны треугольника был равен сумме квадратов двух других сторон; 2) для того чтобы четырехугольник был прямоугольником, необходимо, чтобы диагонали четырехугольника были равны; 3) для того чтобы четырехугольник был ромбом, необходимо, чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны.

206. Предложения станут верными, если: 1) опустить слово «только»; 2) здесь никакой ошибки нет, но к слову «необходимо» можно добавить «и достаточно»; 3) слово «достаточно» заменить словом «необходимо».

207. 1) Из перечисленных свойств только восьмое является достаточным для того, чтобы пятиугольник был правильным; все остальные свойства выражают лишь необходимые признаки.

2) Да. (Многословные, но очень простые доказательства предоставляются читателю.)

3) Из равенства всех углов описанного пятиугольника следует равенство всех его сторон, и наоборот. Пятиугольник будет правильным. Доказательство предоставляем читателю.

4) Из равенства всех диагоналей вписанного пятиугольника легко выводится равенство всех его углов. Действительно, диагонали стягивают равные дуги; углы пятиугольника, как вписанные и опирающиеся на эти дуги, равны между собой. Мы приходим, таким образом, к случаю второму; пятиугольник будет правильным.

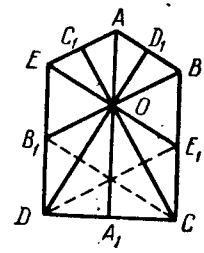

Рис. 18

5) Из условия, что в пятиугольнике отрезки, соединяющие вершины и середины противоположных сторон, перпендикулярны к сторонам, следует равенство всех диагоналей пятиугольника. Получаем четвертый случай; пятиугольник будет правильным.

6) Пусть около пятиугольника $ABCDE$ описана окружность. По условию $BC \| AD$, поэтому $\smile AB = \smile CD$ (как дуги, заключенные между параллельными хордами). Точно так же из $DE \| AC$ следует $\smile CD = \smile EA$ и т. д. Получаем, что $\smile AB = \smile BC = \smile CD = \smile DE = \smile EA$ и пятиугольник $ABCDE$ правильный.

7) Пятиугольник может быть и неправильным. (Приведите пример.)

209. Только для четырехугольника и пятиугольника.

210. См. рис. 18.

211. Нужно измерить все стороны и диагонали четырехугольника. Если окажется, что все стороны равны между собой, а также равны диагонали, четырехугольник будет квадратом. Итак, ромб с равными диагоналями есть квадрат.

212. При этом мы не придем к противоречию — и только. Никакого вывода относительно справедливости или ложности утверждения при этом получить не удается.

213. Доказательство его ложности.

214. «Большая теорема Ферма», проблема четырех красок. Много примеров давно поставленных и не решенных до сих пор задач можно найти в книгах: В. Серпинский. Сто простых, но одновременно и трудных вопросов арифметики. М., Учпедгиз, 1961; Р. Курант и Г. Роббинс. Что такое математика? М., «Просвещение», 1967.

215. «Рассмотрим следующую стереометрическую задачу: «Правильный октаэдр и прямая занимают в пространстве фиксированное положение. Найти плоскость,

проходящую через данную прямую и делящую октаэдр на две равновеликие части». Задача эта может показаться сложной; однако достаточно очень небольшого знакомства с формой правильного октаэдра, чтобы прийти к следующему обобщению: «Замкнутая поверхность, обладающая центром симметрии, и прямая занимают в пространстве фиксированное положение. Найти плоскость, проходящую через данную прямую и делящую объем тела, ограниченного данной поверхностью, на две равновеликие части». Искомая плоскость, конечно, проходит через центр симметрии поверхности и определяется этой точкой и данной прямой. Так как октаэдр обладает центром симметрии, тем самым первоначальная задача оказывается решенной.

Читатель, конечно, не мог не заметить, что вторая задача была более общей, чем первая, и тем не менее она оказалась проще»[1].

В известном смысле такова же ситуация, когда при решении задачи с числовыми данными мы, вводя буквенные обозначения, рассматриваем ее «в общем виде».

216. Классический пример — евклидовское доказательство теоремы о бесконечности последовательности простых чисел: для любых n простых чисел 2, 3, 5, . . . , . . . , p_n мы возьмем число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, которое не делится ни на одно из них и, значит, имеет простой делитель, не совпадающий ни с одним из данных чисел. Никакого способа вычисления этого простого делителя доказательство Евклида не дает.

Такими «чистыми теоремами существования» изобилует «высшая математика».

217. Всякая такая грань довольно условна. Во всяком случае, решение любой задачи «на построение» (или «на вычисление») должно завершаться доказательством того, что построенный (вычисленный) объект действительно удовлетворяет ее условиям.

218. Чаще всего так и делается. Но доказательство (или хотя бы ссылка на очевидность!) все равно нужно (см. предыдущую задачу).

220. В самом рассуждении, с помощью которого получено следствие, допущена ошибка.

---

[1] Д. Пойа. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959, стр. 114.

221. Возведя $5=-5$ в квадрат, мы получаем истинное следствие, в куб — ложное.

222. (См. предыдущую задачу.) $25=25$ получается возведением в квадрат как соотношения $5=5$, так и $5=-5$.

223. Указанием примера.

224. Указанием противоречащего примера.

225. Ничего нельзя сказать — все зависит от свойства A.

226. Предложение ложно.

228. Приводим доказательство от противного. Предположим, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$

$$(AB=A_1B_1,\ BC=B_1C_1,\ AC=A_1C_1)$$

не равны (рис. 19).

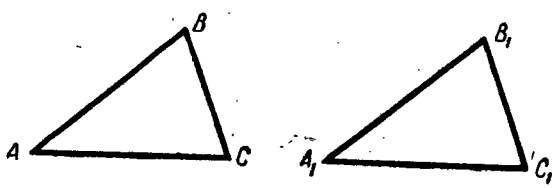

Рис. 19

Тогда при наложении треугольников при совмещении оснований AC и A_1C_1 точки B и B_1 не совпадут. Пусть AB_2C — новое положение треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 20).

Соединив вершины B и B_2, мы получим равнобедренные треугольники ABB_2 и CBB_2. Если D — середина отрезка BB_2, то по свойству равнобедренных треугольников $AD \perp BB_2$, $CD \perp BB_2$ и точки A и C должны лежать на одной прямой (перпендикуляре к отрезку BB_2, проведенном через его середину). Но это невозможно, так как точки B и B_2, а следовательно, и D лежат по одну сторону от AC и потому AC не может пройти через D. Таким образом, точки B и B_2 не могут быть различными, и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

229. Инструментальные измерения могут быть выполнены лишь приближенно и лишь для нескольких, а не для всех возможных фигур данного вида.

230. Чертеж имеет лишь вспомогательное значение как «наглядное пособие», иллюстрирующее наши рассуждения.

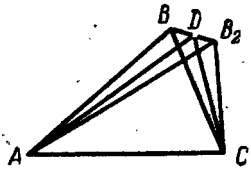

Рис. 20

231. Это достигается следующим тривиальным образом: предположим «противное» доказанному и повторим «прямое» доказательство. Противоречие налицо.

232. Предположим, что при B_1 не имеет места A_1; тогда должно иметь место одно из условий A_2, A_3, . . . — по условию это единственно возможные гипотезы. Но из A_2 следует B_2, несовместимое с B_1; значит, A_2 не может иметь места. Аналогично опровергаются $A_3, A_4, \ldots, A_n$. Таким образом, из B_1 следует A_1 (и вообще из B_k следует A_k).

233. При $n=2$ «теорема Гаубера» сводится к следующему утверждению: «Если справедлива прямая и противоположная теоремы, то справедливы также и обратные им теоремы».

234. Применение «теоремы Гаубера» освобождает нас в некоторых случаях от необходимости доказательства справедливости обратных теорем. Приведем пример.

Пусть установлены следующие пять случаев взаимного расположения двух окружностей радиусов R_1 и R_2, $R_1>R_2$ (d — расстояние между центрами):

1) Если окружности лежат одна вне другой, не касаясь, то $d>R_1+R_2$.

2) Если окружности имеют внешнее касание, то $d=R_1+R_2$.

3) Если окружности пересекаются, то $R_1-R_2<d<R_1+R_2$.

4) Если окружности имеют внутреннее касание, то $d=R_1-R_2$.

5) Если одна окружность лежит внутри другой, не касаясь, то $d<R_1-R_2$.

Так как указанные случаи взаимного расположения окружностей единственно возможны и исключают друг друга, причем получились взаимно исключающие выводы относительно зависимости между R_1, R_2 и d, то из «теоремы Гаубера» следует справедливость всех обратных теорем:

1) Если $d>R_1+R_2$, то окружности расположены одна вне другой, не касаясь.

2) Если $d=R_1+R_2$, то окружности касаются извне.

3) Если $R_1-R_2<d<R_1+R_2$, то окружности пересекаются;

4) Если $d=R_1-R_2$, то окружности касаются изнутри;

5) Если $d<R_1-R_2$, то одна окружность лежит внутри другой, не касаясь.

(Ссылки на «теорему Гаубера» имеются по существу в школьных учебниках; см., например, § 110 первой части геометрии А. П. Киселева.)

236. Пусть справедливость предложения «Если $\overline{abc}$ кратно 37, то и числа $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ кратны 37» доказана. Ввиду «симметрии» (равноправия) чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ в этой формулировке тем самым будут доказаны и предложения: «Если $\overline{bca}$ кратно 37, то и числа $\overline{cab}$ и $\overline{abc}$ кратны 37» и «Если $\overline{cab}$ кратно 37, то и числа $\overline{abc}$ и $\overline{bca}$ кратны 37». Истинность указанных трех предложений равносильна истинности суждения: «Из трех чисел $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$ или все кратны 37, или ни одно не делится на 37».

237. 1) По условию последовательность u_n имеет некий конечный предел c. В таком случае мы имеем право в равенстве $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}}$ перейти к пределу. В результате получим:

$$c=\sqrt{2+c}, \text{ откуда } c=2.$$

Знание о существовании предела открыло нам простой путь для его фактического вычисления.

2) Очевидно,

$$u_n=u_{n-1}\cdot\frac{2}{n}. \quad \text{(A)}$$

Сразу переходить к пределу в этом равенстве, не зная, сходится ли данная последовательность, мы не можем. Необходимо сначала доказать существование предела для u_n. Очевидно, что при $n>2$ последовательность убывает; кроме того, она ограничена снизу любым отрицательным числом. Значит, u_n имеет конечный предел c. Теперь, переходя в равенстве (A) к пределу, получим:

$$c=c\cdot 0, \quad \text{откуда } c=0.$$

238. 1) Пусть

$$\sqrt[3]{2}=p+\sqrt{q} \quad \text{(A)}$$

Очевидно, q больше нуля и не является полным квадратом. Из (A) получаем:

$$2=p^3+3pq+(3p^2+q)\cdot\sqrt{q}.$$

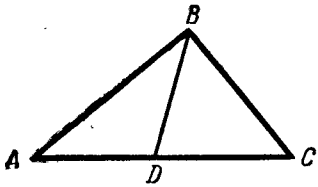

Рис. 21

Отсюда $3p^2+q=0$, что не возможно. Следовательно, нельзя представить $\sqrt[3]{2}$ в виде суммы $p+\sqrt{q}$, где p и q — рациональные числа.

2) Допустим, что треугольник ABC разрезан на равные треугольники ABD и BCD (рис. 21). Тогда AD должно равняться BC, а $CD=AB$, так что $AC=AB+BC$, что невозможно. Таким образом, разносторонний треугольник нельзя разрезать на два равных треугольника.

3) Допустим, что при каком-то n

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}=M, \qquad \text{(A)}$$

где M — некоторое натуральное число. Пусть K — наибольшее целое число, для которого $2^K\leqslant n$, а P — произведение всех нечетных чисел, не превосходящих n. Умножив все члены равенства (A) на $2^{K-1}\cdot P$, получим:

$$\frac{2^{k-1}.P}{2}+\frac{2^{k-1}.P}{3}+\frac{2^{k-1}.P}{4}+\ldots+\frac{2^{k-1}.P}{n}=2^{k-1}MP. \qquad \text{(B)}$$

Все члены равенства (B), за исключением одного (а именно, члена $\frac{2^{k-1}.P}{2^k}$), — целые числа, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что ни при каком n сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$$

не может быть целым числом.

239. Заменим в данном равенстве x на $x+a$:

$$f[(x+a)+a]=\frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)},$$

или

$$f(x+2a)=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}.$$

Но тогда

$$f(x+4a)=f[(x+2a)+2a]=-\frac{1}{f(x+2a)}=-\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}}=f(x).$$

Итак, при любом x $f(x+4a)=f(x)$ и $4a$ — период функции.

Обратное утверждение неверно. Для доказательства достаточно привести пример функции, имеющей период l, для которой не выполняется при произвольном x соотношение

$$f\left(x+\frac{l}{4}\right)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}.$$

Такой функцией может быть, например, $\cos x$. В самом деле, равенство

$$\cos\left(x+\frac{l}{4}\right)=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\ (l=2\pi k)$$

не выполняется хотя бы при $x=\frac{\pi}{2}$.

241. 1) Во всяком треугольнике против большего угла лежит бо́льшая сторона.

2) Если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого треугольника, то против большей из неравных сторон лежит больший угол.

242. Допущения не исчерпывают всех возможных случаев. Не рассмотрен, например, такой случай: $\angle 1+\angle 4<2d$ и $\angle 2+\angle 3>2d$ (или $\angle 1+\angle 4>2d$ и $\angle 2+\angle 3<2d$). Такое предположение, как и третье, также не противоречит тому, что $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=4d$.

243. В опровержении допущений о параллельности и пересечении a и b.

244. Предположения, что оси симметрии параллельны или пересекаются вне многоугольника, легко опровергаются.

245. 1) Предполагая, что одновременно при некотором n

$$\frac{n-6}{15}=A \text{ и } \frac{n-5}{24}=B,$$

где A и B — целые числа, получим: $n=15A+6$ и $n=24B+5$, то есть $15A+6=24B+5$, или $3(8B-5A)=1$, что при целых A и B не может иметь места.

2) Допустим, что дробь $\frac{b-a}{b}$, являющаяся дополнением до единицы данной дроби $\frac{a}{b}$, сократима. Тогда b и $b-a$ должны иметь общий делитель. Это значит, что дол-

жны иметь общий делитель a и b, но это противоречит условию. Следовательно, наше допущение неверно и дробь $\frac{b-a}{b}$ несократима.

3) Предположим, что такой многогранник существует и имеет m граней. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — числа сторон этих граней. Тогда должно быть $2P=n_1+n_2+\ldots+n_m$, где P — число ребер многогранника. По условию m, $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — нечетные числа, поэтому правая часть записанного равенства также нечетное число. Но этого не может быть, потому что левая часть равенства $(2P)$ — четное число. Полученное противоречие показывает, что такого многогранника не существует.

246. Существование перпендикуляра к плоскости устанавливается только после того, как доказана данная теорема. Между тем в приводимом доказательстве заранее исходят из того, что такой перпендикуляр должен существовать. Вопрос о прямой AO остался нерешенным.

247. С помощью подстановки числовых значений букв (если, конечно, множество возможных значений бесконечно) можно лишь опровергнуть утверждение о тождестве, но не доказать его справедливость.

248. Справедливость утверждения следует из того, что в выпуклом четырехугольнике каждая сторона (каждый угол) меньше суммы трех других сторон (углов), и из того, что каждое из этих свойств является достаточным условием существования четырехугольника.

250. Достаточно знать длину a хорды большей окружности, касающейся меньшей. Площадь кольца $S=\frac{1}{4}\pi a^2$. (Докажите!)

251. Очевидно, для $n=1$ утверждение справедливо. Допустим, что оно справедливо для случая n прямых. Это означает следующее: как бы n различных прямых ни разбивали плоскость на области, последние всегда могут быть закрашены в соответствии с условием задачи двумя красками (красной и зеленой). Полагая наше допущение реализованным, проведем на плоскости $(n+1)$-ю прямую AB. Если теперь по одну сторону от AB сохранить цвета всех областей и кусков областей «n-го разбиения», а по другую сторону изменить цвет каждой области на обратный, то каждые две смежные области «$(n+1)$-го разбиения» будут окрашены в разные цвета.

Итак, утверждение справедливо при любом n.

252. 1) $u_1=a$, $u_{n+1}=u_n\cdot q$;

2) $u_1=1$, $u_{n+1}=u_n(n+1)$.

254. Дефект рассуждения состоит в том, что первая и вторая части доказательства никак не связаны между собой: переход от n к $n+1$, о котором идет речь, имеет смысл только для $n\geqslant 2$. (Если разбить группу из двух чисел a_1 и a_2 на две части, то в группах не окажется общих членов и мы не сможем сделать никакого заключения о a_1 и a_2.)

256. Нет — для этого во всяком случае необходимо (но мы вовсе не утверждаем, что достаточно!), чтобы формулировка теоремы содержала (хотя бы неявно) натуральное число n.

257. 1) Для опровержения утверждения достаточно показать, что при любом n $1+2+\ldots+n<2^n$.

2) С помощью метода математической индукции нужно доказать, что при всех $n\geqslant 5$ $n^2<2^n$.

259. Не следует. Из справедливости теоремы следует только одно: если существует функция, удовлетворяющая условию (А), то можно утверждать, что она периодическая. Существует ли такая функция в действительности? На этот вопрос теорема не дает ответа, и здесь требуется специальное исследование.

260. 1) Известно, что в правильном пятиугольнике диагонали параллельны соответствующим сторонам. При параллельном проектировании правильный пятиугольник перейдет в неправильный, параллельность же сторон и диагоналей сохранится.

2) Легко получить нужный неправильный пятиугольник с помощью сжатия (или растяжения) правильного пятиугольника (рис. 22):

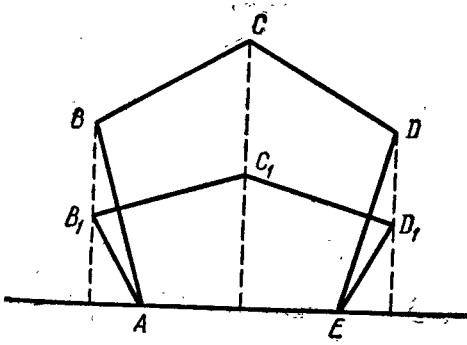

Рис. 22

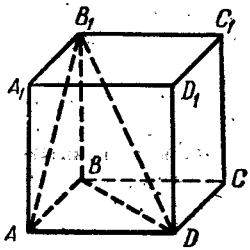

Рис. 23

261. 1) Пусть $A_1B_1C_1D_1ABCD$ — куб (рис. 23). Тогда у тетраэдра B_1ABD все грани — прямоугольные треугольники.

2) Легко построить неправильный пятиугольник, у которого все пять диагоналей будут равны.

Возьмем любой равнобедренный треугольник ACE ($AC=CE=m$) с углом C, меньшим 36° (рис. 24). По обе стороны треугольника на расстоянии $\frac{m}{2}$ от вершины C проведем прямые MN и OP перпендикулярно основанию AE. Затем с центром в точке A раствором циркуля, равным m, опишем дугу, которая пересечется с прямой OP в некоторой точке D. Тем же раствором циркуля с центром в точке E опишем вторую дугу; точку пересечения этой дуги с прямой MN обозначим буквой B.

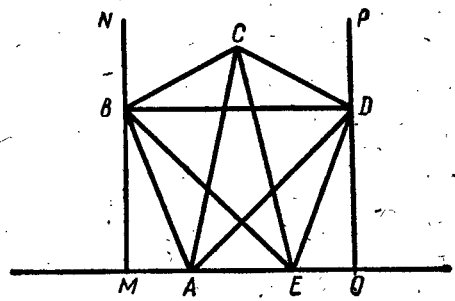

Рис. 24

Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$. Каждая из его диагоналей AC, CE, BE, AD равна m по построению. Нетрудно доказать, что пятая диагональ BD также равна m. (Доказательство предоставляется читателю.) Построенный пятиугольник неправильный. Это следует из того, что $\angle ACE \neq 36°$. (В правильном пятиугольнике угол между диагоналями, выходящими из одной вершины, равен 36°.)

262. Обозначение суммы углов различных треугольников одной и той же буквой x равносильно утверждению,

что эта сумма одинакова для всех треугольников. Но это утверждение (кстати, эквивалентное доказываемому) само нуждается в доказательстве!

263. Мы получили противоречивое равенство. Рассуждение ошибок не содержало. Следовательно, мы где-то использовали неверное допущение. Но единственным допущением было предположение о существовании искомого числа x. Значит, оно было неверно и задача вообще не имеет решения.

264. Уравнение имеет корень $x=-9$. Противоречие $(3=5)$ явилось следствием ошибки в рассуждении. Из $3^{x+9}=5^{x+9}$ (именно потому, что $3\neq5$) следует лишь, что $x+9=0$, откуда $x=-9$.

265. Ответ ученика на первый вопрос правилен. Что касается второго вопроса, то существование треугольника со сторонами 5, 5, 5 следует не из того, что любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон и что у нас как раз $5<5+5$, а из возможности построения равностороннего треугольника (и вообще любого треугольника со сторонами, каждая из которых меньше суммы и больше разности двух других, так что если бы такая теорема доказывалась р а н е е на уроке, то ученик был бы прав!). (См. зад. 198.)

266. Самое последнее утверждение не обосновано: мы построили плоскость, но не доказали ее единственность. Впрочем, теперь это сделать совсем легко (проще всего — от противного).

267. Нельзя — доказательство этой теоремы само основано на теореме Пифагора!

268. Утверждение, что треугольник ABC прямоугольный, следует не из теоремы Пифагора, а из теоремы, ей обратной.

272. 1) Через каждую точку можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную к данной плоскости.

2) Если из точки вне плоскости провести к ней перпендикуляр и наклонные, то: а) перпендикуляр короче всякой наклонной; б) те из наклонных равны, которые имеют равные проекции; в) из двух неравных наклонных больше та, которая имеет большую проекцию.

3) Теорема о трех перпендикулярах.

4) Если двугранные углы равны, то и соответствующие линейные углы равны.

5) Теоремы о равенстве и неравенстве двугранных углов.

6) Прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости, перпендикулярна к последней; и т. д.

273. Можно назвать хотя бы следующие теоремы: 1) две различные прямые не могут иметь более одной общей точки; 2) две различные плоскости или совсем не имеют общих точек, или пересекаются по некоторой прямой и только по этой прямой; 3) существует одна и только одна плоскость, проходящая через данную прямую и точку вне ее.

274. Первое, второе и четвертое предложения.

277. Приводимое «доказательство» опирается на условие $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, которое, однако, само является следствием теоремы Пифагора. Таким образом, здесь налицо «порочный круг».

278. 1) Вместо предложенной теоремы рассмотрим равносильную (противоположную обратной): если t — рациональное число, то $\frac{2t}{1+t^2}$ также рационально. Эта теорема очевидна.

2) Докажем равносильную теорему (противоположную обратной): если $\frac{2t}{1+t^2}$ и $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ — рациональные числа, то и t рационально.

Пусть $\frac{2t}{1+t^2}=A$, $\frac{1-t^2}{1+t^2}=B$. Очевидно, $\frac{1-B}{A}$ — рациональное число; но $\frac{1-B}{A}=\left(1-\frac{1-t^2}{1+t^2}\right):\frac{2t}{1+t^2}=$ $=\frac{2t^2}{1+t^2}:\frac{2t}{1+t^2}=t$.

3) Равносильная теорема (если x — рациональное число, то $x+\frac{1}{x}$ также рационально) очевидна.

279. Обратные теоремы легко доказать от противного.

280. Часто по такому пути следуют при решении задач на построение, главным образом задач, решаемых методом подобия. Сначала решается обратная задача, затем с помощью подобного преобразования получают искомую фигуру. В сборнике геометрических задач на построение И. И. Александрова этот способ назван «методом обратности».

В качестве примера можно привести задачу: «В дан-

ный равносторонний треугольник вписать другой равносторонний треугольник, стороны которого были бы перпендикулярны сторонам данного».

Любопытный случай решения задачи с помощью предварительного решения обратной описывает И. Я. Депман в своей книге «Рассказы о решении задач» (1957, стр. 70).

На столе лежит кусок веревки, вытянутой по прямой. Надо взять его одной рукой за один, другой рукой за другой конец и, не выпуская концов веревки из рук, завязать узел. Прямо решить задачу довольно трудно. Но если начать с развязывания узла (также не выпуская концов веревки из рук), то можно быстро получить решение.

281. Вычисляя объем тела, получим формулу $V=\frac{\pi a^3}{6}$. В выражение объема не входит радиус круга — это и доказывает требуемое.

282. $0^5=0$, $1^5=1$, $2^5=32$, $3^5=243$, $4^5=1024$, $5^5=3125$, $6^5=7776$, $7^5=16\,807$, $8^5=32\,768$, $9^5=59\,049$.

Но если a — последняя цифра числа n, то числа n^5 и a^5 оканчиваются на одну и ту же цифру, а именно на a, как следует из приведенных равенств.

283. Равносильность первого и третьего предложений очевидна. Если каждая, то следовательно, и бо́льшая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон. Обратно, если бо́льшая сторона меньше суммы двух других сторон, то и подавно это относится к меньшим сторонам. Докажем равносильность первого и второго предложений. Из 1) $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ получаем $a<b+c$, $b-c<a$, $c-b<a$, или $a<b+c$, $|b-c|<a$, что дает 2) $|b-c|<a<b+c$.

Проводя рассуждение в обратном порядке, легко показать, что из второго следует первое. Из равносильности первого и третьего и первого и второго предложений следует равносильность второго и третьего.

284. Первое и второе, а также первое и третье предложения представляют собой различные суждения. Из первого предложения непосредственно не следует второе (третье), а из второго (третьего) не следует первое. Второе и третье предложения равносильны: каждое из них является следствием другого. Зависимость между данными предложениями станет ясной, если сформулируем их следующим образом в виде условных суждений:

1) если точки A, B, C не принадлежат прямой, то A, B, C принадлежат окружности (прямая теорема); 2) если точки A, B, C принадлежат прямой, то A, B, C не принадлежат окружности (противоположная теорема); 3) если точки A, B, C принадлежат окружности, то A, B, C не принадлежат прямой (обратная теорема).

285. Предложения равносильны.

286. 2) 4) 5) 6) и 7).

287. Равносильны.

288. Из одного утверждения могут вытекать разные следствия — всего навсего. В нашем случае: если число оканчивается цифрой 8 (посылка), то оно кратно двум (следствие 1), не делится на 5 (следствие 2) и не является полным квадратом (следствие 3).

289. Достаточно взять любое неверное равенство (например, $5=6$) и подвергнуть его любому тождественному преобразованию. (То же, конечно, будет и в случае, если ложная посылка не имеет вид равенства.)

290. Легко доказать, что прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 4, не может иметь периметр 10. (Докажите.) Значит, «этого треугольника» не существует!

291. 1) Любое A есть C. 2) Никакое A не есть C. 7) Некоторое C не есть A. 8) Некоторое не-A есть не-C. 9) Некоторое A есть C. 10) Некоторое A не есть C.

В остальных случаях между A и C однозначной связи нет.

292. Все данные предложения равносильны между собой. Это станет ясным, если вы рассмотрите хотя бы такое предложение: «Любой квадрат (A) есть прямоугольник (B)».

293. 2) 3) 6) истинны, 1) 4) 5) ложны.

294. Не равносильны: 1) истинно, 2) ложно.

295. Например: -1 и 3; $a^2=b^2$ и $a=b$; железо и свинец; Москва и СССР.

296. Как верные, так и неверные.

297. Нет. (Объясните!)

299. 1) $ab>0\to ab\neq 0$.

2) $\alpha+\beta=90^\circ\to\sin\alpha=\cos\beta$.

3) $a=b=c=0\to abc=0$.

4) $ad=bc\leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $(abcd\neq 0)$.

5) $a^2-b^2\neq 0\to a^5-b^5\neq 0$.

6) $|x-a|<b\leftrightarrow a-b<x<a+b$.

300. 1) Эквивалентны. 2) Эквивалентны. 3) Эквивалентны. 4) Неэквивалентны: из $x^2-y^2\neq 0$ следует $x^3-y^3\neq 0$, но из $x^3-y^3\neq 0$ не следует $x^2-y^2\neq 0$.

301. Если истинно 1), то 2), 3), 5), 6), 7) ложны.
» 2), то 1), 4) ложны.
» 3), то 1), 4), 6), 8) ложны.
» 4), то 2), 3), 5), 6), 7) ложны.
» 5), то 1), 4) ложны.
» 6), то 1), 3), 4), 7) ложны.
» 7), то 1), 4), 6), 8) ложны.
» 8), то 3), 7) ложны.

302. Если ложно 1), то 2), 3), 4), 8), 9) истинны.
» 2), то 1), 7) истинны.
» 3), то 1), 5), 6), 7), 8), 9) истинны.
» 4), то 1), 5), 6), 7), 8), 9) истинны.
» 5), то 3), 4) истинны.
» 6), то 3), 4) истинны.
» 7), то 2), 3), 4), 8), 9) истинны.
» 8), то 1), 3), 4), 7) истинны.
» 9), то 1), 3), 4), 7) истинны.

304. 1) Утверждение справедливо. Из равенств $AB=CD$ и $\angle B=\angle C$ следует, что $ABCD$ или равнобедренная трапеция, или прямоугольник. Но $\angle B=\angle C=\angle A$, поэтому $ABCD$ — прямоугольник.

2) Утверждение ложно. Действительно, возьмем прямоугольник ABC_1D. Сместим несколько вершину C_1, не изменяя, однако, ее расстояния от точки A. Пусть C — новое положение вершины C_1. Четырехугольник $ABCD$ не является прямоугольником, хотя $AC=BD$ и $\angle A=90°$.

3) Утверждение справедливо. По условию $\angle A=\angle C=90°$, поэтому $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180°$ и, следовательно, около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Так как $\angle A=90°$, то BD — диаметр описанной окружности. Из $AC=BD$ следует, что AC есть также диаметр этой окружности, но в таком случае $\angle B=\angle D=90°$. Таким образом, $ABCD$ — прямоугольник.

4) Утверждение ложно. В самом деле, существует четырехугольник $ABCD$, отличный от прямоугольника, у которого $AC=BD$ и $\angle A=\angle C$. Таким четырехугольником является дельтоид[1] с равными диагоналями.

5) Утверждение ложно. В этом легко убедиться, если

[1] Дельтоид (или ромбоид) — выпуклый четырехугольник, имеющий лишь одну ось симметрии, совпадающую с его диагональю.

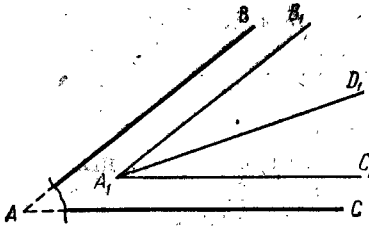

Рис. 25

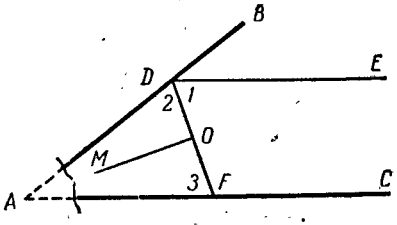

Рис. 26

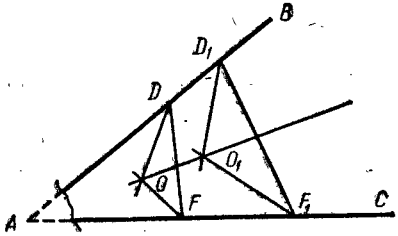

Рис. 27

взять дельтоид $ABCD$ с осью симметрии BD и прямым углом B.

6) Утверждение ложно. Действительно, легко построить дельтоид $ABCD$, у которого BD — ось симметрии и $\angle A = \angle C = 90°$.

7) Утверждение ложно, ибо существует дельтоид с тремя равными углами.

8) Утверждение ложно; см. 4).

9) Утверждение справедливо; четырехугольник, имеющий центр симметрии, есть параллелограмм, имеющий три равных угла, есть прямоугольник.

306. Достаточно привести один опровергающий пример, скажем,

$$\cos(45° + 45°) \neq$$
$$\neq \cos 45° + \cos 45°$$

307. Приведем пять различных решений задачи.

Решение 1 (рис. 25). Внутри данного угла A, на одинаковом расстоянии d от сторон, проводим прямые A_1B_1 и A_1C_1, параллельные AB и AC; d всегда можно выбрать таким, что точка A_1 пересечения прямых A_1B_1 и A_1C_1 окажется в доступной части чертежа. Очевидно, биссектриса A_1D_1 угла A_1 будет и биссектрисой данного угла A.

Решение 2 (рис. 26). Из произвольной точки D стороны AB проводим прямую DE параллельно AC. Образовавшийся угол ADE делим прямой DF пополам. Так как угол второй равен третьему (каждый из них ра-

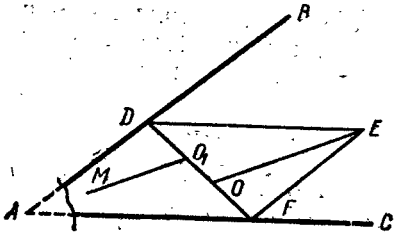

Рис. 28

вен первому), то треугольник ADF равнобедренный. Если теперь O — середина DF и $OM \perp DF$, то OM — искомая биссектриса угла A.

Решение 3 (рис. 27). Построим два произвольных треугольника

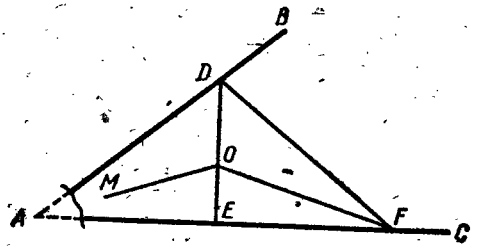

Рис. 29

ADF и AD_1F_1 с общим углом A. Проведя в этих треугольниках биссектрисы углов при вершинах D, D_1, F и F_1, получим точки O и O_1. Прямая OO_1 есть биссектриса угла A.

Решение 4 (рис. 29). Построим произвольный параллелограмм $ADEF$ с углом A и проведем диагональ DF. Биссектриса EO угла E параллельна биссектрисе угла A. Пусть $DO_1 = FO$; тогда, проведя через O_1 прямую MO_1 параллельно EO, получим биссектрису угла A.

Решение 5 (рис. 29). Из произвольной точки D стороны AB опускаем на AC перпендикуляр DE. Строим угол EDF, равный углу EDA. Треугольники ADE и FDE симметричны относительно DE. Если теперь для биссектрисы OF угла DFE построить симметричную относительно DE прямую OM, получим биссектрису угла A.

309. См. ниже, решение задачи 362.

312. Правило распространяется на произвольные выпуклые четырехугольники, диагонали которых взаимно перпендикулярны.

313. Задачу легко решить без ссылки на равенство

всех сторон и углов шестиугольника. В решении используется лишь равенство и параллельность противоположных сторон. Рассуждения, с помощью которых решается данная задача, без всякого изменения переносятся на любой многоугольник с четным числом сторон, у которого противоположные стороны равны и параллельны.

Формулировка обобщенной задачи: «Доказать, что во всяком многоугольнике с четным числом сторон, противоположные стороны которого равны и параллельны, диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке».

315. В решении данной задачи используется лишь факт принадлежности точки P прямой AP. На то, что точка P является основанием перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AP, доказательство совершенно не опирается. Утверждение теоремы остается справедливым при любом расположении точки P на прямой AP. Поэтому задачу можно обобщить так: «В треугольнике ABC через вершину A проведена прямая, образующая прямой угол с биссектрисой угла A. На прямой взята отличная от A точка P. Доказать, что периметр треугольника BPC больше периметра треугольника ABC».

319. Не обязательно. Из условия задачи следует только, что данный четырехугольник имеет равные и взаимно перпендикулярные диагонали. Обобщенная задача: «Середины сторон данного m-угольника служат вершинами правильного m-угольника. Является ли данный многоугольник правильным?»

Можно показать, что при m нечетном данный многоугольник будет правильным, а при любом четном m может быть и неправильным. (Попробуйте!)

320. Пусть прямая AB образует прямые углы с двумя пересекающимися прямыми a и b плоскости S. Предположим, что AB параллельна S. Проведем плоскость P через AB и точку пересечения прямых a и b. Прямая CD пересечения плоскостей S и P параллельна AB, и, следовательно, она также образует прямые углы с a и b. Но это невозможно; поэтому AB пересекает плоскость S.

322. На первые два вопроса ответы положительны, на третий — отрицателен. (Дайте объяснение.)

325. Нет. (Дайте пример и постарайтесь дать более общую формулировку задачи.)

326. Возможны оба случая. (Примеры! Объясните!)

327. Возможны случаи: 1) $AB=AD$; 2) $AB=CD$; 3) $BC=AD$; 4) $AB=CD$ и $BC=AD$ (неравносторонний параллелограмм).

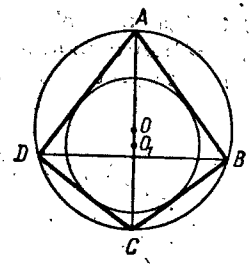

Рис. 30

328. Треугольники могут быть и не равны. Примером могут служить подобные треугольники со сторонами 8, 12, 18 и 12, 18, 27.

329. При $n=2k$ наибольшее число равных отрезков, которое может иметь данная совокупность, равно k, а при $n=2k+1$ равно $k+1$. (Докажите.)

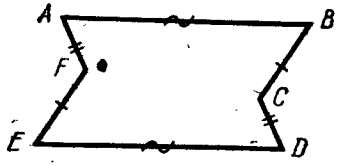

Рис. 31

330. Тупоугольный треугольник; прямоугольный треугольник.

331. Остроугольный треугольник.

332. Остроугольный треугольник.

333. Ответы на оба вопроса отрицательны. (Докажите.)

334. В квадрате (и вообще в любом ромбе) — да; в неравностороннем параллелограмме — нет.

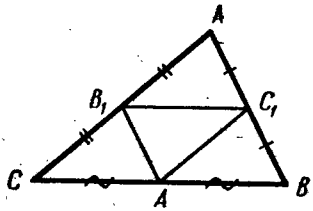

Рис. 32

335. Существует; см. рис. 30.

336. Может и не быть квадратом; см. тот же рис. 30.

337. Или ни одного, или два острых внутренних угла.

338. Существует; см. рис. 31.

339. На рис. 32 приведена развертка такого тетраэдра.

342. См. рис. 33.

343. На рис. 34 приведена развертка искомого многогранника.

344. Многогранник может и не быть пирамидой; на рис. 35 приведена развертка такого многогранника.

345. Если взять разносторонний (равнобедренный) остроугольный треугольник и провести в нем средние линии, то мы получим развертку такого тетраэдра.

346. См. рис. 36.

347. Шестигранник будет усеченной пирамидой только в том случае, если прямоугольные грани подобны.

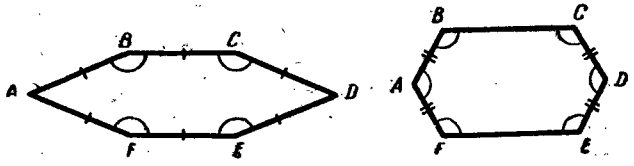

Рис. 33

348. Такой шестиугольник может быть и пространственным; см. рис. 37.

349. Нет.

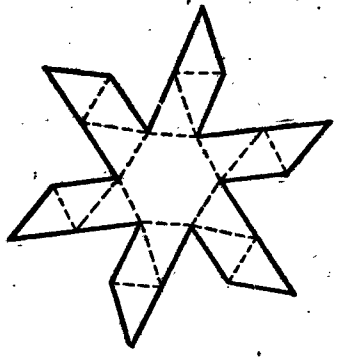

Рис. 34

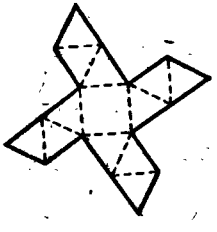

Рис. 35

350. Только для треугольников, у которых угол при вершине больше или равен 60°.

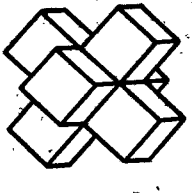

Рис. 36

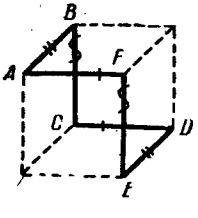

Рис. 37

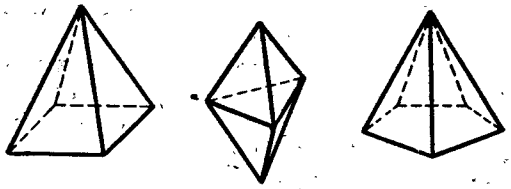

Рис. 38

351. Прежде всего заметим, что если у любого выпуклого многогранника «срезать» все многогранные углы, то получим многогранник с одними только трехгранными углами. При «срезании» трехгранного угла вместо одного получаем три трехгранных угла, причем число ребер многогранника увеличивается на три.

Возьмем теперь следующие три многогранника: четырехугольную пирамиду, многогранник, образованный из двух тетраэдров, и пятиугольную пирамиду (рис. 38). Первый из них имеет 8 ребер, второй 9, третий 10 ребер.

«Срезая» нужное число раз трехгранные углы у какого-либо из данных многогранников, мы получим многогранник с любым заданным числом ребер.

352. Например, $\frac{\alpha}{m}$. В самом деле, из $\alpha=\beta\cdot\frac{m}{n}$ следует, что $\frac{\alpha}{m}=\frac{\beta}{n}$, так что угол $\frac{\alpha}{m}$ укладывается в α ровно m раз, а в β — ровно n раз. (Найдите еще хоть одно решение.)

353. Отрезки a и b могут быть и соизмеримы. Например, $a=1$ *см*, $b=\frac{1}{3}$ *см*, $m=0{,}1$ *см*.

354. Может; например, $a=4-\sqrt{2}$, $b=3-\sqrt{2}$, $c=2\sqrt{2}$.

355. Каждый угол в выпуклом четырехугольнике меньше суммы трех других углов, а в выпуклом пятиугольнике — меньше полусуммы четырех остальных углов. Поэтому, например, в четырехугольнике и пятиугольнике углы не могут относиться как $7:3:2:1$ и $5:4:3:2:1$. В треугольнике отношение углов может быть произвольным.

356. В выпуклом четырехугольнике возможны следующие комбинации углов:

4 прямых угла;
2 прямых, 1 острый и 1 тупой угол;
1 прямой, 1 острый и 2 тупых угла;

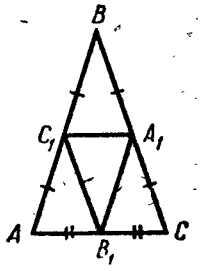

Рис. 39

1 прямой, 2 острых и 1 тупой угол;
1 острый и 3 тупых угла;
2 острых и 2 тупых угла;
3 острых и 1 тупой угол.

Постройте примеры и разберите случай пятиугольника.

357. Наименьшее число острых внешних углов для треугольника равно 0, наибольшее 1. Остроугольный и прямоугольный треугольники не имеют острых внешних углов. Тупоугольный треугольник имеет только один острый внешний угол.

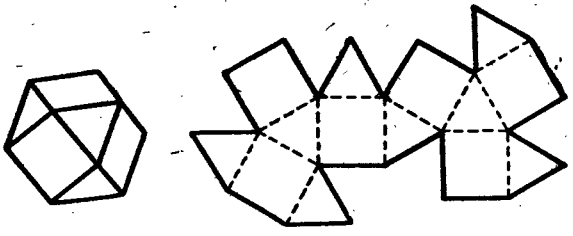
Рис. 40

Для четырехугольника наименьшее число острых внешних углов равно 0 (прямоугольник), наибольшее 3.

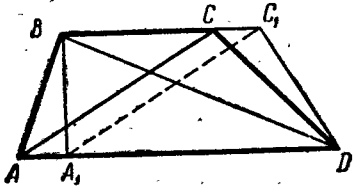

Рис. 41

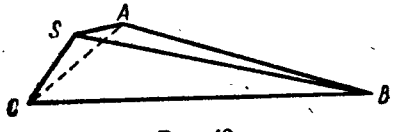

Рис. 42

Если число сторон $m \geqslant 5$, то наименьшее число острых внешних углов равно $m-3$, наибольшее m.

358. По меньшей мере три раза.

359. Многогранник может быть и неправильным; пример: многогранник, составленный из двух правильных тетраэдров.

360. Равенство всех граней и всех трехгран-

ных углов является лишь необходимым условием для того, чтобы тетраэдр был правильным. На рис. 39 приведена развертка неправильного четырехгранника, у которого и грани, и многогранные углы равны между собой.

Для того чтобы тетраэдр был правильным, необходимо и достаточно, чтобы все его двугранные углы были равны.

361. Такой многогранник может быть и неправильным; см. рис. 40.

362. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 41), $AC=a$, $BD=b$, $BA_1=h$. Сместим параллельно диагональ AC по направлению BC на длину AA_1. В результате получим прямоугольную трапецию A_1BC_1D. Очевидно,

$$AD+BC=A_1D+BC_1,$$

так как при параллельном переносе диагонали AC основания трапеции хотя и изменяются, но их сумма остается постоянной. Из прямоугольных треугольников A_1BD и A_1BC_1 находим:

$$A_1D=\sqrt{(BD)^2-(BA_1)^2}=\sqrt{b^2-h^2},$$

$$BC_1=\sqrt{(A_1C_1)^2-(BA_1)^2}=\sqrt{a^2-h^2}.$$

Таким образом,

$$AD+BC=A_1D+BC_1=\sqrt{a^2-h^2}+\sqrt{b^2-h^2}.$$

363. Нет, не всегда. $MA+MB+MS$ может быть больше $SA+SB+SC$. Пусть основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) и AC мало по сравнению с AB. Пусть грань SAC перпендикулярна к плоскости основания пирамиды и представляет собой равнобедренный треугольник ($SA=SC$). Пусть высота пирамиды мала в сравнении с AC (рис. 42).

Возьмем точку M достаточно близко от точки B (почти у точки B). При этих условиях $MA+MB+MC$ будет больше $SA+SB+SC$.

364. Предположим, что через точку A проведены две плоскости M и N, параллельные данной плоскости P. Проведем через A какую-либо плоскость T, пересекающую данную. Плоскость T пересечет P, M и N по прямым a, b, c. Все три прямые лежат в одной плоскости T, причем как b, так и c не пересекают a. Мы получили, что через точку A проходят две прямые b и c, параллельные a. Это невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барыбин К. С. Сборник геометрических задач на доказательство. М., Учпедгиз, 1952.
2. Бескин Н. М. Методика геометрии. М., Учпедгиз, 1947.
3. Богомолов С. А. Геометрия. М., Учпедгиз, 1949.
4. Брадис В. М. Методика преподавания математики в средней школе. М., Учпедгиз, 1949.
5. Брадис В. М. и Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. М., Учпедгиз, 1938.
6. Глаголев Н. А. Элементарная геометрия, ч. I. М., Учпедгиз, 1949.
7. Головина Л. И., Соминский И. С., Яглом И. М. Математическая индукция. М., «Наука», 1966.
8. Горский Д. П. Логика. М., Учпедгиз, 1958.
9. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М., Физматгиз, 1959.
10. Депман И. Я. Метод математической индукции. Л., Учпедгиз, 1957.
11. Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л., Учпедгиз, 1957.
12. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М., Физматгиз, 1961.
13. «Начала» Евклида. Книги I—VI, VII—X, XI—XV, пер. с греч. и коммент. Мордухай-Болтовского. М.—Л., Гостехиздат, 1948—1949.
14. Людмилов. Д. С. Задачи без числовых данных. М., Учпедгиз, 1961.
15. Ляпин С. Е. (ред.). Методика преподавания математики. М., Учпедгиз, 1952.
16. Никитин В. В. и Рупасов К. А. Определения математических понятий в курсе средней школы. М., Учпедгиз, 1963.
17. Притуло Ф. Ф. Методика изложения геометрических доказательств. М., Учпедгиз, 1958.
18. Пойа Д. Как решать задачу. М., Учпедгиз, 1959.
19. Уемов А. И. Задачи и упражнения по логике. М., «Высшая школа», 1961.
20. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С. Алгебра, ч. I. М., Учпедгиз, 1951.
21. Эрдниев П. М. Сравнение и обобщение при обучении математике. М., Учпедгиз, 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора 3
Предисловие 6
I. Понятия 7
II. Суждения 21
III. Доказательства 34
Ответы, решения, указания 57
Литература 95

Виктор Владимирович
Никитин

СБОРНИК ЛОГИЧЕСКИХ
УПРАЖНЕНИЙ

Редактор Ю. А. Гастев.

Художественный редактор В. С. Эрденко.

Технический редактор Л. К. Кухаревич

Корректор М. В. Голубева

Сдано в набор 29/X 1969 г. Подписано к печати 13/IV 1970 г. 84×108¹/₃₂ Типографская № 3. Печ. л. 3. Условн. л. 5,04 Уч.-изд. л. 4,87 Тираж 40 000 экз. (Пл. 1970 г. № 106) А—03727

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Типография № 2 Росглавполиграфпрома, г. Рыбинск, ул. Чкалова, 8. Заказ № 3323

Цена 13 коп.