

В. В. НИКОЛЬСКИЙ

ТЕОРИЯ
ЭЛЕКТРО-
МАГНИТНОГО
ПОЛЯ

ВЫСШАЯ ШКОЛА · 1961

1962
Дубинин

В. В. НИКОЛЬСКИЙ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для радиотехнических
специальностей вузов



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва—1961

ПРЕДИСЛОВИЕ

Содержание книги отвечает обычным требованиям к одноименному курсу для радиотехнической специальности втузов, причем за образец взята составленная акад. В. А. Котельниковым программа 0701/14. Ею определены последовательность изложения материала и названия глав. Однако содержание книги несколько шире регламентированного данной программой. Причина этому — продолжавшееся в последние годы развитие техники и теории сверхвысокочастотных устройств, равно как и их дальнейшее проникновение в радиотехническую практику.

Характер изложения определился в известной мере на основе лекций автора по данному курсу на радиотехническом факультете и по курсу «Прикладная электродинамика и техника СВЧ» на факультете усовершенствования инженеров ВЗЭИ.

Автор благодарен многим лицам, которые помогли в работе над книгой своими советами, и прежде всего профессорам М. С. Нейману, Л. Н. Дерюгину и А. Л. Микаэляну, кандидату технических наук А. Г. Гуревичу и А. Н. Мялику, а также редактору кандидату физико-математических наук В. Б. Брагинскому. Участие в рецензировании книги со стороны кафедры теоретических основ радиотехники МЭИ в лице доцента Н. Н. Федорова встречено с признательностью.

ВВЕДЕНИЕ

Предметом данного курса является теория электромагнитных явлений и, главным образом, быстропеременных, волновых. Последние, как известно, представляют особый интерес для радиотехники, которая использует процесс движения электромагнитной энергии. Носитель этой энергии — *электромагнитное поле* — существенно отличается от привычной материальной среды; об этом ясно свидетельствует факт передачи электромагнитной энергии через вакуум. Электромагнитное поле выступает, таким образом, как особая форма материи.

Начало практическому применению распространяющегося электромагнитного поля было положено изобретением А. С. Попова. С тех пор радиотехника прошла поистине гигантский путь развития. За это время возникла как самостоятельная дисциплина прикладная теория электромагнитного поля, обслуживающая радиотехнические нужды. Ниже мы постараемся оценить роль теории электромагнитного поля в современной радиотехнике.

Общеизвестно значение теории цепей для электро- и радиотехники. До тех пор, пока понятие электрической цепи сохраняет смысл, оно разрешает отвлечься от существования поля, значительно упрощая таким путем анализ. Однако вполне безупречное использование этого понятия возможно лишь в случае постоянства мгновенного тока во всех ее сечениях. Нетрудно убедиться, что для переменного тока это условие в той или иной мере всегда нарушается. Пусть вдоль произвольного замкнутого проводника (рис. 1) в направлении стрелки распространяется переменный электромагнитный процесс, и в сечении S_1 в момент t_1 течет ток $i_1 = I_m \sin \omega t_1$. Очевидно, что на расстоянии l от S_1 в S_2

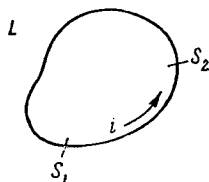


Рис. 1

электромагнитный процесс запаздывает на время $\tau = l/v$, где v — скорость распространения. Поэтому в S_2 в тот же момент t_1 ток равен $i_2 = I_m \sin \omega(t_1 - \tau) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$, где $\varphi = \omega\tau$. Учитывая хорошо известную связь скорости v , частоты $f = \omega/2\pi$ и соответствующей длины волны λ , запишем:

$$\varphi = 2\pi \frac{l}{\lambda}. \quad (\text{В.1})$$

Как видно, для всей системы можно говорить о постоянстве мгновенного тока, т. е. пренебречь фазовым запаздыванием φ , только в том случае, если ее размеры значительно меньше длины волны

$$L \ll \lambda. \quad (\text{В.2})$$

Тогда это, как говорят, «квазистационарная»¹ система.

Исследование неквазистационарных систем (за исключением специальных случаев) требует отказа от теории цепей, внимание сосредоточивается на их электромагнитном поле. Для выяснения важнейших приложений теории поля в радиотехнике целесообразно произвести сжатый обзор радиотехнических систем, размеры которых не могут быть малы в сравнении с длиной волны. Прежде всего назовем радиотракт — пространство между приемником и передатчиком. Процесс, происходящий в радиотракте, — это распространение радиоволн. Далее, принципиально неквазистационарными системами являются антенны. Как будет показано в шестой главе, эффект излучения электромагнитной энергии (не учитываемый теорией цепей) резко растет с ослаблением условия (В.2). Чаше всего размеры антенн сравнимы с длиной волны или даже значительно превышают ее. Из сказанного ясно, что теория электромагнитного поля является базой радиотехнических дисциплин «Распространение радиоволн» и «Антенны». Однако этим ее роль отнюдь не ограничивается.

По мере укорочения длины волны все труднее оставаться в рамках теории цепей и при расчете радиотехнической аппаратуры. Уже в метровом диапазоне широко распространены колебательные системы, значительно отличающиеся от обычных резонансных контуров с резко разграниченными индуктивными и емкостными элементами. При переходе к более коротким волнам — дециметровым, сантиметровым и миллиметровым — размеры аппаратуры и ее элементов уже не могут быть малы в сравнении с длиной волны. Развитие радиотехники, использующей эти волны (им соответствуют так называемые «сверхвысокие» частоты — СВЧ), относится к последним двум десятилетиям и стимулировалось возникшей в этот период радиолокацией, а в настоящее время СВЧ находят применение также в радиорелейной связи, радиоастрономии

и ряде научных исследований. Неизбежный на СВЧ отказ от квазистационарных систем вызвал к жизни особый тип радиотехнической аппаратуры. Для передачи энергии здесь используются специальные металлические трубы — волноводы, в качестве колебательных систем — полые резонаторы; получили распространение новые принципы генерации, усиления, излучения радиоволн. Анализ этих систем базируется на теории электромагнитного поля. Методы и результаты теории поля проникают во все радиотехнические дисциплины при переходе к диапазону СВЧ.

Основными постулатами теории электромагнитного поля, играющими в ней такую же роль, как законы Ньютона в механике, являются уравнения Максвелла. К ним привел длительный процесс постепенного накопления и обобщения опыта в области электромагнитных явлений. Напомним (см. общий курс физики), что решающим звеном здесь оказалась гипотеза Максвелла о токе смещения, дополнившая фарадеевскую идею близкодействия. Следствием явился вывод Максвелла о существовании электромагнитных волн, сделанный задолго до того времени, когда, наконец, возросшие экспериментальные возможности позволили их обнаружить. Честь экспериментального открытия электромагнитных волн принадлежит Герцу. Первостепенную роль в обосновании теории Максвелла сыграли опыты П. Н. Лебедева, обнаружившего и измерившего световое давление.

К настоящему времени макроскопическая теория электромагнитного поля завершена и отличается исключительной стройностью и полнотой. Единственно возможный в развитии науки путь постепенного обобщения, который исторически привел к уравнениям Максвелла, вряд ли оказывается наиболее целесообразным при изучении законченной теории. Для радиотехники, использующей теорию поля в своих целях, характерен обратный процесс — нисхождение от основных уравнений поля к частным задачам. Такой — дедуктивный — путь избран и в настоящей книге, излагающей теорию электромагнитного поля. Ее содержание предусматривает изучение основ этой теории и приложений, важных для радиотехники.

Заканчивая введение, отметим, что для успешного усвоения предлагаемого материала необходимо хорошее знание курса физики в объеме программы втуза (в особенности, раздела «Электричество и магнетизм») и электротехники, а также векторного анализа. Некоторые математические сведения в краткой форме даны в приложении. Примеры и упражнения, которыми завершаются самостоятельные темы книги, конкретизируют или развивают предыдущее изложение, а иногда имеют цель подготовить к последующему. Они должны значительно облегчить изучение курса.

¹ От латинских слов *quasi* (якобы) и *stationarius* (постоянный).

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

§ 1. Векторы электромагнитного поля

Электромагнитное поле можно рассматривать как особую форму материи. Оно характеризуется четырьмя векторными величинами: \mathbf{E} — напряженность электрического поля; \mathbf{D} — электрическая индукция; \mathbf{H} — напряженность магнитного поля; \mathbf{B} — магнитная индукция.

Определить поле в некоторой области пространства — значит указать эти *векторы поля* в любой ее точке. Электромагнитное поле предстает как совокупность полей *электрического* (векторы \mathbf{E} , \mathbf{D}) и *магнитного* (векторы \mathbf{H} , \mathbf{B}), находящихся во взаимной зависимости.

Лишь в некоторых специальных случаях (например, видимый свет) электромагнитное поле непосредственно воздействует на органы чувств человека, однако наблюдению доступны многочисленные *электромагнитные явления*, в основе которых лежат различные превращения энергии поля. Простейшие из явлений удобны для выяснения физического содержания векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} и могут специально воспроизводиться с целью их *измерения*. Так, напряженность электрического поля \mathbf{E} , по определению, измеряется силой, действующей в поле на неподвижный единичный точечный заряд¹, т. е. на достаточно малое тело, заряд которого в используемой системе единиц есть +1. Опыт показывает, что эта сила пропорциональна заряду. В практической системе единиц *MKS*, которая применяется в этой книге, единица измерения силы — *ньютон* ($1 \text{ н} = 0,102 \text{ кг}$); единица заряда — *кулон* (κ), а напряжен-

ность \mathbf{E} измеряется в *вольтах на метр* (в/м):

$$F[\kappa] = q[\kappa] E[\text{в/м}]. \quad (1.1)$$

В аналогичном определении вектора магнитной индукции \mathbf{B} можно исходить из того экспериментального факта, что на достаточно малую плоскую рамку с током I (рис. 2) в поле действует момент силы

$$\mathbf{K} = IS[\mathbf{n}_0, \mathbf{B}], \quad (1.2)$$

где S — площадь рамки, а \mathbf{n}_0 — единичный вектор нормали к ее плоскости, образующий с направлением тока праввинтовую систему.

Практическая единица измерения тока — *ампер* (a); длины — *метр* (m), а магнитной индукции — *вебер на квадратный метр* (вб/м^2).

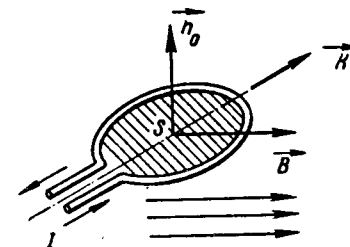


Рис. 2

Для поля в вакууме справедливы соотношения

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.3)$$

и

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.4)$$

причем скалярный коэффициент

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ фарад на метр (ф/м)} \quad (1.5)$$

называется *электрической постоянной*, а аналогичный коэффициент

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ генри на метр (гн/м)} \quad (1.6)$$

— *магнитной постоянной*.

Вообще же взаимосвязь векторов электромагнитного поля — \mathbf{D} и \mathbf{E} , \mathbf{B} и \mathbf{H} — определяется свойствами среды, о чем будет говориться в § 4. Напряженность магнитного поля измеряется в *амперах на метр* ($a/\text{м}$), а электрическая индукция — в *кулонах на квадратный метр* ($\kappa/\text{м}^2$).

Определив векторы поля по его механическим проявлениям, мы теперь можем представить себе следующую идеальную картину. В произвольную точку $M(x, y, z)$ исследуемой области V — «точку наблюдения» — помещается весьма малый «пробный элемент» — точечный заряд или рамка с током. и в нужный момент измеряется действующая на него сила (или, соответственно, момент силы). Некоторое число таких измерений, произведенных в разных

¹ Понятия заряда q и тока проводимости I предполагаются известными читателю из общего курса физики.

§ 2. Первые два уравнения Максвелла

Изучение теории электромагнитного поля мы начинаем с его основных уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta \quad (1.7)$$

и

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

носящих название *уравнений Максвелла*. Выше они записаны в дифференциальной форме. Величина δ в правой части (1.7) есть *плотность тока проводимости*. Это вектор, указывающий направление движения зарядов и по абсолютному значению равный пределу

$$\delta = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (1.9)$$

где ΔI — ток, пересекающий площадку ΔS , перпендикулярную δ .

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Изучаемые нами законы электромагнетизма — это законы макроскопических процессов, в которых усредняется действие огромных количеств элементарных частиц материи. С точки зрения этих законов, среда представляется сплошной. Совершенный в (1.9) предельный переход имеет прямой математический смысл именно для такой идеализированной сплошной среды. Для реальных сред символ $\Delta S \rightarrow 0$ имеет условное значение: площадка уменьшается, но лишь до такой степени, при которой не будет проявляться дискретность материи, и макроскопические закономерности останутся в силе. Аналогичные предельные переходы будут встречаться и впредь.

Уравнения Максвелла — результат длительного процесса накопления и постепенного обобщения опыта в области электромагнетизма. Ближайшей задачей данной главы является выяснение основных черт их физического содержания.

Второе уравнение Максвелла (1.8) выражает скорость изменения магнитной индукции \mathbf{B} через пространственную производную (rot) напряженности электрического поля \mathbf{E} . Положим, что электрическое поле отсутствует, т. е. $\mathbf{E} = 0$, и, следовательно, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. В этом случае $\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$, а это значит, что магнитное поле может быть только *постоянным*. Однако всякое изменение магнитного поля ($\partial \mathbf{B} / \partial t \neq 0$) неизбежно вызывает поле электрическое (левая часть (1.8) отлична от нуля).

Выделим в пространстве произвольную поверхность S с контуром L (рис. 4) и найдем *поток вектора* $\operatorname{rot} \mathbf{E}$ через эту поверхность. Согласно (1.8) имеем:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} dS = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS \quad (1.10)$$

точках в течение необходимого времени, дает представление о поле в области V . В действительности описанный опыт технически осуществим лишь в немногих простейших случаях; экспериментальное исследование электромагнитного поля требует иных средств, весьма разнообразных в зависимости от конкретных условий. О некоторых из них будет говориться впоследствии.

Впрочем, сведения, полученные путем непосредственного экспериментального изучения структуры поля, занимают лишь небольшое место в огромном объеме опытных данных об электромагнитном поле, известных науке. Построенная на этой основе теория электромагнитного поля широко использует его *аналитическое описание*. Векторы поля рассматриваются как функции времени и точки наблю-

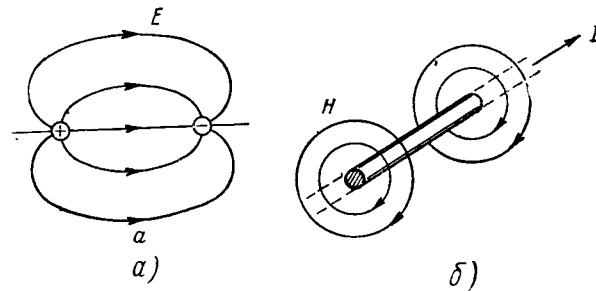


Рис. 3

дения, задаваемой пространственными координатами. Известные из опыта закономерности электромагнитных явлений получают математическую формулировку. Орудием дальнейшего исследования становятся чисто математические средства, позволяющие обобщить данные опыта и приводящие к открытию новых закономерностей. На этой основе предсказываются еще не открытые электромагнитные явления.

Роль полезного дополнения к математическому анализу играет *графическое описание* поля, дающее наглядное представление о сложных электромагнитных процессах и часто значительно облегчающее их понимание. Сущность его состоит в следующем. Каждому вектору поля в некоторой области в рассматриваемый момент времени ставится в соответствие семейство линий. Эти линии проводятся так, чтобы их касательные указывали направление вектора поля, а густота приблизительно соответствовала абсолютному значению. Обычно линии вектора \mathbf{E} называются *электрическими силовыми линиями*, а линии вектора \mathbf{H} — *магнитными силовыми*. В качестве иллюстрации напомним хорошо известные из курса физики картины электрических силовых линий поля двух зарядов и магнитных силовых линий поля прямолинейного тока (рис. 3).

(Здесь и во всей книге векторный символ dS обозначает произведение элемента поверхности dS на единичный вектор нормали к ней \mathbf{n}_0).

Оператор временной производной можно вынести за знак интеграла¹. Используя *теорему Стокса*, заменим поток вихря $\text{rot } \mathbf{E}$ циркуляцией вектора \mathbf{E} по контуру, охватывающему поток. Равенство (1.10) принимает вид:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} dS, \quad (1.8a)$$

где $d\mathbf{l}$ — произведение элемента линии $d\mathbf{l}$ на касательный к ней единичный вектор $\boldsymbol{\tau}_0$.

Уравнение (1.8a) — это второе уравнение Максвелла в интегральной форме.

Рассмотрим характерный частный случай: поверхность S опирается на проводящий контур L (например, проволочный, рис. 5).

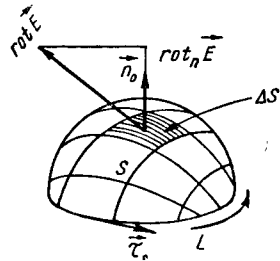


Рис. 4

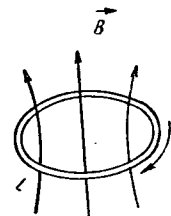


Рис. 5

Циркуляция вектора \mathbf{E} в этом случае есть не что иное, как э. д. с.

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

наводимая в контуре изменяющимся потоком вектора магнитной индукции, или, как принято говорить, *магнитным потоком*

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} dS.$$

Итак, в применении к проводящему контуру уравнение (1.8a) выражает хорошо известный *закон электромагнитной индукции*

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.11)$$

установленный еще опытами Фарадея.

¹ Для этого необходима непрерывность \mathbf{B} и $\partial\mathbf{B}/\partial t$ (см. например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, гл. III).

Второе уравнение Максвелла (1.8, 1.8a), таким образом, можно рассматривать как *обобщенный закон электромагнитной индукции*.

Вернемся к уравнению (1.7) — *первому уравнению Максвелла* в дифференциальной форме.

Если электромагнитный процесс неизменен во времени ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), то (1.7) описывает связь магнитного поля и постоянного тока:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \boldsymbol{\delta}.$$

Вместе с тем, для случая переменного поля в отсутствие тока проводимости ($\boldsymbol{\delta} = 0$) следует написать:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Как видно, вектор $\partial\mathbf{D}/\partial t$ играет во втором уравнении ту же роль, что и плотность тока проводимости $\boldsymbol{\delta}$ в первом. Эта величина называется *плотностью тока смещения*. Правая часть уравнения (1.7)

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\delta}$$

представляет собой плотность *полного тока*.

К интегральной форме первого уравнения Максвелла нетрудно перейти уже известным путем. Интегрируя обе части (1.7) по произвольной поверхности S с контуром L и применяя теорему Стокса, получаем:

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} dS + \int_S \boldsymbol{\delta} dS. \quad (1.7a)$$

Интеграл

$$I = \int_S \boldsymbol{\delta} dS$$

— поток вектора $\boldsymbol{\delta}$ через поверхность S — есть *ток проводимости*, пересекающий эту поверхность, а первый член в правой части (1.7a)

$$I^{cm} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} dS$$

— *ток смещения*. Сумма этих величин

$$I + I^{cm}$$

называется *полным током*.

Из уравнения (1.7a) видно, что в отсутствие магнитного поля ($\mathbf{H} = 0$) равен нулю и полный ток. Но появление тока ($I + I^{cm} \neq 0$)

§ 3. Расходимость векторов электрической и магнитной индукции

Следующие два уравнения Максвелла в дифференциальной форме имеют вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (1.13)$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (1.14)$$

Первое из них утверждает, что расходимость электрической индукции равна *объемной плотности заряда* ρ — величине, определяемой предельным соотношением

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.15)$$

где Δq — заряд, содержащийся в элементарном объеме ΔV (см. замечание о характере предельного перехода на стр. 11).

Интегрируя обе части (1.13) по некоторому объему V и применяя к левой части формулу Остроградского — Гаусса, получаем:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q. \quad (1.13a)$$

Здесь S — поверхность, ограничивающая объем V , а $q = \int_V \rho dV$ —

полный заряд в этом объеме.

Равенство (1.13a), представляющее собой интегральную форму уравнения Максвелла (1.13), является формулировкой *теоремы Гаусса*, согласно которой поток электрической индукции через замкнутую поверхность равен заключенному внутри нее заряду.

Можно показать (см. ниже примеры и упражнения), что поток вектора через некоторую поверхность измеряется числом пересекающих ее линий этого вектора. Поток положителен, если большая часть линий *выходит* через поверхность наружу, т. е. составляет острый угол с положительной нормалью к ней. Наоборот, когда большая часть линий *входит* внутрь (указанный угол оказывается тупым), то поток отрицателен.

Из (1.13a) видно, что если внутри замкнутой поверхности нет заряда ($q = 0$), но электрическое поле существует ($\mathbf{D} \neq 0$), то число входящих внутрь нее линий электрической индукции равно числу выходящих, так как полный поток индукции равен нулю. Линии пронизывают область V не прерываясь (рис. 6). Если зарядов нет во всей области существования поля, то линии \mathbf{D} не имеют ни начала, ни конца: это либо *замкнутые* линии, либо уходящие в бесконечность.

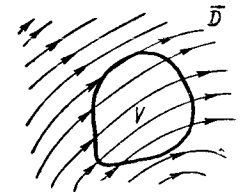


Рис. 6

неизбежно порождает магнитное поле (левая часть (1.7a) отлична от нуля, и, следовательно, $\mathbf{H} \neq 0$). Согласно (1.7a), роли величин I и $I^{см}$ в этом процессе совершенно одинаковы: магнитное поле может возбуждаться как током проводимости, так и током смещения, т. е. изменением потока электрической индукции.

Примеры и упражнения

1. Записать уравнения Максвелла (1.7, 1.8) в декартовой системе координат.

Векторы уравнения (1.8) разлагаем на составляющие, параллельные осям x , y и z :

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t} (x_0 B_x + y_0 B_y + z_0 B_z). \quad (1.12)$$

Здесь x_0 , y_0 и z_0 — единичные векторы (орты) соответствующих осей.

Запись (1.12) эквивалентна трем скалярным уравнениям:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.12a)$$

Эти же операции произвести с уравнением (1.7).

2. Дано электромагнитное поле с неизменным направлением вектора \mathbf{E} . Показать, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} взаимно перпендикулярны.

Одну из осей декартовой системы координат (например, ось z) направим параллельно вектору \mathbf{E} , тогда

$$\mathbf{E} = z_0 E_z.$$

Полагая в (1.12a) $E_x = E_y = 0$ замечаем, что $B_z = 0$, т. е.

$$\mathbf{B} = x_0 B_x + y_0 B_y,$$

и, следовательно, $\mathbf{B}\mathbf{E} = 0$, что и требовалось установить.

3. Направление вектора \mathbf{H} заданного электромагнитного поля постоянно. Показать, что вектор плотности полного тока перпендикулярен вектору \mathbf{H} .

Положим, что в некоторой части области V сосредоточен положительный заряд ($q > 0$). Поток электрической индукции, проходящий через замкнутую поверхность S в этом случае также положителен, и ему соответствуют выходящие наружу линии вектора \mathbf{D} . Будем стягивать поверхность S вокруг заряда. При умень-

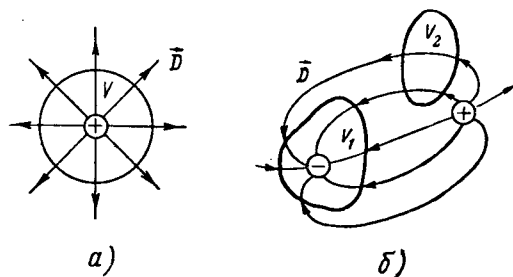


Рис. 7

шении S вплоть до вырождения ее в точку (если заряд точечный) поток индукции и число ее линий не изменяются. Отсюда мы должны заключить, что положительный заряд служит *началом* линий электрической индукции и играет роль «источника» электрического поля. Точно таким же путем легко проверить, что отрицательный заряд играет роль «стока».

Схематические рисунки (рис. 7а, б) иллюстрируют сказанное.

Перейдем к интегральной форме уравнения (1.14). Интегрируя $\text{div } \mathbf{B}$ по объему V и применяя формулу Остроградского-Гаусса, находим, что

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (1.14a)$$

Сравнивая этот результат с выражением теоремы Гаусса (1.13а).

нетрудно понять, что он свидетельствует об отсутствии в природе магнитных зарядов. Линии магнитной индукции *всегда непрерывны*, они не имеют ни начала, ни конца. Это или линии, уходящие в бесконечность, или, как обычно, *замкнутые линии* (рис. 8).

В § 2 указывалось, что магнитное поле связано с полным током. Если в некоторой области пространства существует максимум полного тока (в частности, тока проводимости или тока смещения), то замкнутые линии магнитной индукции окружают его, что в простейшем случае ясно из принципа симметрии.

Как известно (§ 1), в вакууме $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, и линии вектора \mathbf{H} можно отождествлять с линиями магнитной индукции \mathbf{B} . Вместе

с тем, из первого уравнения Максвелла (1.7) следует, что вектор $\text{rot } \mathbf{H}$ имеет то же направление, что и плотность полного тока $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta$. А это означает, что замкнутые магнитные силовые линии образуют с вектором плотности тока *правовинтовую* систему (рис. 9).

Совершенно аналогичные заключения можно сделать и в отношении замкнутых электрических силовых линий, об условии суще-

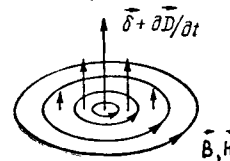


Рис. 9

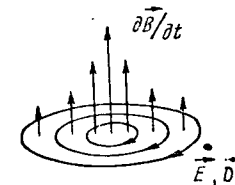


Рис. 10

ствования которых говорилось выше (здесь мы также отождествляем линии векторов \mathbf{E} и \mathbf{D}). При наличии максимума вектора $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ они окружают его, но образуют с ним при этом *левовинтовую* систему, так как $\text{rot } \mathbf{E}$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ направлены противоположно друг другу (1.8). Это схематически изображено на рис. 10.

Из уравнений Максвелла (1.7) и (1.13) следует важный вывод, на котором мы остановимся. Применяя к обеим частям операцию div , в силу известного векторного тождества

$$\text{div rot } \mathbf{H} = 0$$

имеем:

$$\text{div} \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta \right) = 0.$$

Меняя местами операторы div и $\frac{\partial}{\partial t}$ в первом члене, а также заменяя согласно (1.13) расходимость вектора \mathbf{D} через q , получаем:

$$\text{div } \delta = - \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Это важное соотношение называют «уравнением непрерывности». Его физическое содержание проще усвоить, перейдя к интегральной форме. Интегрируя по объему V обе части (1.16)

$$\int_V \text{div } \delta dV = \int_V \frac{\partial q}{\partial t} dV$$

и совершая обычные преобразования, находим:

$$\oint_S \delta dS = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV, \quad (1.16a)$$

или

$$I = - \frac{dq}{dt}, \quad (1.16b)$$

где I — ток, пересекающий замкнутую поверхность S , ограничивающую V , а q — заряд в этом объеме.

Полученная формула (1.16b) выражает закон сохранения заряда. Если ток отсутствует ($I=0$), то заряд постоянен. И наоборот: если не происходит изменения заряда в объеме V , то ток проводимости, пересекающий его границу, равен нулю. Это значит, что либо ток вообще отсутствует, либо число линий тока, входящих в объем, равно числу выходящих: они непрерывны.

В заключение используем полученные результаты с целью несколько расширить представление о токе смещения. На стр. 13 записано уравнение

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta, \quad (1.17)$$

которое выражает известную из опыта связь магнитного поля и постоянного тока. Максвелл обобщил его и применил к переменным процессам.

Можно рассуждать так. Расходимость вектора $\text{rot } \mathbf{H}$ равна нулю, поэтому

$$\text{div } \delta = 0,$$

но это противоречит уравнению непрерывности (1.16), т. е. закону сохранения заряда. Чтобы привести (1.17) в соответствие с этим законом, запишем вместо δ

$$\delta + \delta'$$

причем поправка δ' должна быть выбрана так, чтобы уравнение (1.16) оказалось удовлетворенным. Легко видеть, что поставленной цели может служить

$$\delta' = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

ибо

$$\text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Выбранная поправка приводит от уравнения (1.17) к первому уравнению Максвелла и является формальным выражением гипотезы Максвелла о токе смещения.

Примеры и упражнения

1. Покажем, что поток некоторого вектора \mathbf{a} через поверхность S измеряется числом пересекающих ее линий этого вектора.

Рассмотрим сначала элемент поверхности ΔS . Проходящий через нее элементарный поток $\Delta \Phi^a$ равен

$$\Delta \Phi^a = \mathbf{a} \Delta \mathbf{S} = a \Delta S_a,$$

где ΔS_a — проекция векторного элемента поверхности ΔS на направление вектора \mathbf{a} (рис. 11). Как видно из рисунка, эта проекция представляет собой площадку, через которую под прямым углом проходят все линии вектора \mathbf{a} , пересекающие элемент ΔS . Но, согласно условию (стр. 10), густота линий, т. е. число их ΔN , отнесенное к ΔS_a , соответствует абсолютному значению вектора \mathbf{a} :

$$a = k \frac{\Delta N}{\Delta S_a},$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, поток $\Delta \Phi^a$ измеряется числом ΔN :

$$\Delta \Phi^a = a \Delta S_a = k \Delta N.$$

Складывая потоки элементарных площадок, на которые разбита поверхность S , и переходя в пределе от суммы к интегралу, находим:

$$\Phi^a = kN, \quad (1.18)$$

где Φ^a — полный поток вектора \mathbf{a} через поверхность S , а N — число пересекающих ее линий этого вектора.

Это и требовалось показать.

2. Найти электрическую индукцию на расстоянии r от точечного заряда q .

Заряд служит началом всех линий индукции. Из соображений симметрии ясно, что это радиальные прямые, идущие с одинаковой плотностью (рис. 12). С целью определения абсолютного значения вектора \mathbf{D} поместим заряд в центр мысленной сферы радиуса r и вычислим выходящий из нее поток индукции:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi r^2 D.$$

Привлекая теорему Гаусса (1.13a), имеем:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (1.19)$$

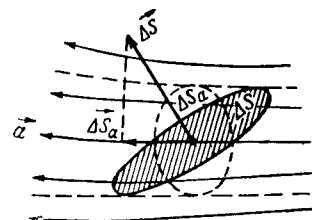


Рис. 11

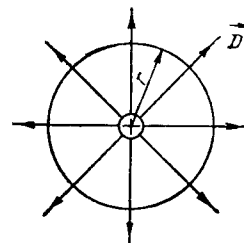


Рис. 12

3. Какова напряженность магнитного поля на расстоянии 1 м от постоянного прямолинейного тока в 1 а ?

Линии магнитной индукции имеют вид замкнутых кривых. Из соображений симметрии вытекает, что это концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к линии тока, и охватывающие ток. Если окружающая среда — вакуум, то $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, и, следовательно, такой же вид имеют и линии вектора \mathbf{H} .

Вычисляя циркуляцию \mathbf{H} по контуру L , совпадающему с одной из линий этого вектора (так, что \mathbf{H} указывает направление обхода контура), находим:

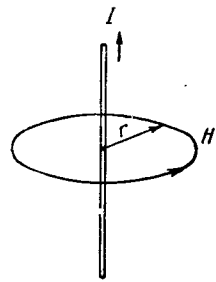


Рис. 13

$$\oint_L \mathbf{H} \, dl = 2\pi r H.$$

Но, согласно (1.7а), циркуляция равна току I ($dI/dt = 0$). Поэтому

$$H = \frac{I}{2\pi r}. \quad (1.20)$$

На расстоянии 1 м от прямолинейного постоянного тока в 1 а напряженность магнитного поля равна $1/2\pi \text{ а/м}$.

Расчет поясняется рисунком (рис. 13).

На стр. 17 указывалось, что направление магнитных линий составляет с током правовинтовую систему. Здесь это видно из того, что при вычислении циркуляции направление обхода составляет правовинтовую систему с положительной нормалью к площадке, ограниченной контуром интегрирования (ток I направлен по нормали, а линия вектора \mathbf{H} — по обходу контура).

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СРЕДЫ

§ 4. Макроскопические параметры среды. Виды сред

Электромагнитное поле в вакууме определяется уравнениями Максвелла вместе с соотношениями (1.3 и 1.4). Связь векторов поля в некоторой материальной среде обычно характеризуют уравнениями:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.22)$$

и

$$\delta = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.23)$$

где μ — магнитная проницаемость,
 ϵ — диэлектрическая проницаемость,
 σ — удельная проводимость.

Эти параметры, выражающие макроскопические электромагнитные свойства среды, устанавливаются экспериментально.

Сопоставляя (1.21 и 1.22) с соотношениями (1.3 и 1.4), замечаем, что постоянные μ_0 и ϵ_0 имеют формальное значение «проницаемостей вакуума». Часто бывает удобно характеризовать среды по сравнению с вакуумом, в связи с чем вводятся *относительные* проницаемости

$$\mu_r = \mu/\mu_0, \quad (1.24)$$

$$\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0. \quad (1.25)$$

Макроскопические параметры μ , ϵ и σ в большинстве случаев можно считать не зависящими от векторов поля. Соотношения (1.21 — 1.23) оказываются при этом линейными. Соответственно этому употребляется выражение «линейные среды». Однако существуют и часто имеют важное техническое значение среды, отличающиеся заметной зависимостью макроскопических параметров от векторов поля. Их называют «нелинейными». В электротехнике, как известно, распространены ферромагнетики — вещества, магнитная проницаемость которых значительно и сложным образом зависит от магнитного поля. Им аналогичны сегнетоэлектрики, обладающие сходной зависимостью диэлектрической проницаемости от электрического поля. Нелинейность ряда сред проявляется в сильных полях.

Таблица 1

Относительная диэлектрическая проницаемость некоторых веществ

Вещество	ϵ_r	Вещество	ϵ_r
Воздух 0°	1,0006	Стеатит	6,25
Вода дистиллир	81,1	Слода	5—6
Спирт этиловый	25,8	Парафин	2,2
Кварц плавлен.	3,8	Полистирол	2,5
Стекло (разл. виды)	3—10	Полиэтилен	2,25
Титанат бария (BaTiO ₃)	~10 ⁴	Тефлон	2,1

Сказанное нетрудно иллюстрировать аналитически. Возьмем, например, записанное в скалярной форме уравнение (1.22):

$$D = \epsilon E. \quad (*)$$

Вместе с тем, величину D как функцию от E можно разложить в ряд Тэйлора вида:

$$D(E) = D \Big|_{E=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n D}{\partial E^n} \Big|_{E=0} \cdot E^n,$$

или

$$D(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n D}{\partial E^n} \right|_{E=0} \cdot E^n, \quad (**)$$

так как согласно (1.22) $D = 0$ при $E = 0$.

Сравнивая (*) и (**), приходим к следующему выражению диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = \left. \frac{\partial D}{\partial E} \right|_{E=0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n D}{\partial E^n} \right|_{E=0} \cdot E^{n-1}.$$

При достаточно малых полях можно пренебречь всеми членами разложения кроме первого, не зависящего от E . Тогда

$$\epsilon = \left. \frac{\partial D}{\partial E} \right|_{E=0},$$

и соотношение (1.22) линейно.

Такая линейризация зависимости $D(E)$, а также аналогичная линейризация зависимостей $B(H)$ и $\delta(E)$, как уже говорилось, для большого числа сред в обычных условиях оправдана.

За исключением специальных случаев относительная диэлектрическая проницаемость всегда больше единицы (табл. 1), а относительная магнитная проницаемость чаще всего незначительно отличается от единицы. Вещество называется *парамагнетиком*, если $\mu > 1$, и *диамагнетиком* в обратном случае ($\mu < 1$). Упомянутые выше ферромагнетики, магнитная проницаемость которых весьма значительна, составляют исключение.

В зависимости от степени электропроводности вещества делят на *проводники и диэлектрики* (изоляторы).

Промежуточную область составляют *полупроводники*. Рациональную меру оценки их свойств в переменных полях мы дадим в § 7.

Во многих задачах теории электромагнитного поля реальный проводник или диэлектрик с успехом заменяют идеализированным, воображаемым. При этом используются понятия *идеального проводника* ($\sigma \rightarrow \infty$) и *идеального диэлектрика* ($\sigma = 0$).

До сих пор говорилось лишь о так называемых *изотропных* средах, свойства которых одинаковы для полей любых направлений. Согласно уравнениям (1.21 — 1.23) векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{E} , а также δ и \mathbf{E} в этих средах *параллельны*. Заменяв одно из указанных векторных соотношений, например (1.21), тремя скалярными

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu H_x, \\ B_y &= \mu H_y, \\ B_z &= \mu H_z, \end{aligned} \right\}, \quad (1.21a)$$

видим, что функционально связаны только одноименные проекции участвующих векторов (\mathbf{B} и \mathbf{H}).

Однако существуют среды, проявляющие разные свойства в зависимости от направления поля, они называются *анизотропными*. Если, например, анизотропия проявляется в магнитном поле (анизотропный магнетик), то вместо (1.21) будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z, \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z, \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.26a)$$

Каждая проекция вектора \mathbf{B} здесь, вообще говоря, зависит от трех проекций \mathbf{H} (часть коэффициентов μ_{xx} , μ_{xy} , ... μ_{zy} и μ_{zz} может обращаться в нуль). Как видно, векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} уже не *параллельны*.

Всю совокупность действий, производимых над проекциями вектора \mathbf{H} для получения вектора \mathbf{B} , условно обозначают оператором

$$\overset{\leftrightarrow}{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

в результате чего форма уравнения (1.21) сохраняется:

$$\mathbf{B} = \overset{\leftrightarrow}{\mu} \mathbf{H}. \quad (1.26b)$$

Этот оператор $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ называется *тензором магнитной проницаемости*, а коэффициенты при проекциях \mathbf{H} — его компонентами. Совершенно аналогично описывается анизотропия диэлектрических свойств и проводимости.

Некоторые анизотропные среды нашли в последние годы важное применение в радиотехнике сверхвысоких частот, об этом будет говориться в главе 6.

Отметим еще понятие *неоднородной* среды, параметры которой μ , ϵ и σ меняются от точки к точке и могут быть представлены как функции пространственных координат. Скачкообразные нарушения однородности, происходящие на границе всякого физического тела, будут рассмотрены в § 8, 9, непрерывно меняющихся сред мы касаться не будем.

Во всей книге рассматриваются лишь линейные и (за исключением §§ 46, 65, 75) изотропные среды.

§ 5. Намагниченность и поляризованность

Величину \mathbf{M} , показывающую, насколько магнитная индукция в данной среде $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ отличается от индукции в вакууме $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$

при той же напряженности магнитного поля \mathbf{H} , назовем *намагниченностью* среды¹:

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}. \quad (1.27)$$

Аналогично определим *поляризованность* среды \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (1.28)$$

В изотропной среде вектор \mathbf{M} совпадает по направлению с векторами \mathbf{H} и \mathbf{B} , а вектор \mathbf{P} — с \mathbf{D} и \mathbf{E} .

Можно обозначить

$$\mathbf{M} = \mu_0 \chi^m \mathbf{H} \quad (1.29)$$

и

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^e \mathbf{E}. \quad (1.30)$$

Коэффициент χ^m называется *магнитной восприимчивостью*, а χ^e — *электрической восприимчивостью* среды. В гл. 3, 4 мы коснемся физического содержания этих понятий.

Сравнивая формулы (1.27–1.30) с ранее записанными выражениями относительных проницаемостей (1.24, 1.25), находим, что

$$\mu_r = 1 + \chi^m \quad (1.31)$$

и

$$\epsilon_r = 1 + \chi^e. \quad (1.32)$$

В анизотропной среде векторы \mathbf{B} , \mathbf{H} и \mathbf{M} , как и векторы \mathbf{D} , \mathbf{E} и \mathbf{P} , не совпадают по направлению, однако формулы (1.29, 1.30) будут сохранены, если ввести тензоры восприимчивостей, которые непосредственно могут быть получены из тензоров проницаемостей. Запишем, например, выражение тензора магнитной восприимчивости:

$$\overset{\leftarrow}{\chi} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} \mu_{xx} - \mu_0 & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} - \mu_0 & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} - \mu_0 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

§ 6. Закон Ома. Сторонние силы

Обратимся теперь к уравнению (1.23)

$$\delta = \sigma \mathbf{E},$$

представляющему собой дифференциальную формулировку *закона Ома*. Нетрудно найти его связь с известным из электротехники

¹ Здесь мы отступаем от традиционного определения вектора намагниченности, согласно которому $\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H}$.

законом Ома. Рассмотрим с этой целью участок цилиндра (рис. 14) постоянной проводимости σ , находящегося в однородном электрическом поле \mathbf{E} , параллельном его оси. Проинтегрируем по объему участка, заключенному между сечениями S_1 и S_2 , обе части уравнения (1.23):

$$\int_V \delta dV = \sigma \int_V \mathbf{E} dV.$$

Плотность тока одинакова во всех точках объема, так как электрическое поле однородно, поэтому

$$\int_V \delta dV = \delta S l = I l_0,$$

где l — длина участка, а l_0 — единичный вектор вдоль l .

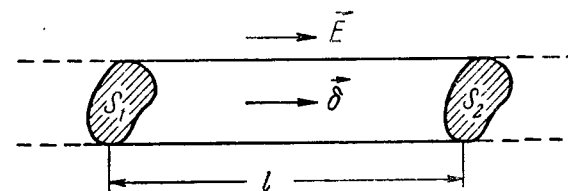


Рис. 14

В правой части получаем:

$$\sigma \int_V \mathbf{E} dV = \sigma \mathbf{E} S l = \sigma S U l_0,$$

где $U = \int_{S_1}^{S_2} \mathbf{E} dl = El$ — падение напряжения на участке l .

Приравняв последние результаты, приходим к закону Ома для участка цилиндрического проводника.

$$U = I \frac{l}{\sigma S} = IR. \quad (1.34)$$

Как известно, $R = l/\sigma S$ называется здесь *электрическим сопротивлением* и измеряется в *омах (ом)*.

Практическая единица измерения удельной проводимости σ — *сименс на метр (сим/м)*.

Введем новое важное понятие. Ток проводимости (перенос зарядов) вызывается и силами неэлектрического происхождения. Если в некоторой области действуют химические, термические или иные *сторонние* электродвижущие силы (см. подробнее § 37), закон Ома для каждой из ее точек следует формулировать в виде:

$$\delta = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^c), \quad (1.35)$$

Таблица 2

Удельные проводимости в сим/м при 20°C

Проводники		Диэлектрики	
вещества	уд. проводимости	вещества	уд. проводимости
Серебро	$6,14 \cdot 10^7$	Кварц плавлен	$2 \cdot 10^{-17}$
Медь (холоднотян.)	$5,65 \cdot 10^7$	Парафин	$10^{-14} - 10^{-16}$
Алюминий »	$3,54 \cdot 10^7$	Мрамор	$10^{-7} - 10^{-9}$
Железо	$1,0 \cdot 10^7$	Слюда	$10^{-11} - 10^{-15}$
Олово	$0,869 \cdot 10^7$	Стекло обычное	10^{-12}
Свинец	$0,48 \cdot 10^7$	Сера	10^{-15}
Ртуть	$0,104 \cdot 10^7$	Дерево парафинирован.	$10^{-8} - 10^{-11}$

где $E^{ст}$ выражает неэлектрическую причину возникновения тока, эта величина называется *напряженностью поля сторонних сил*, или, кратко, *«сторонней напряженностью»*.

§ 7. Относительность разграничения сред по признаку электропроводности

В результате резкого различия электропроводности типичных проводников и диэлектриков (табл. 2) их поведение в электромагнитных полях оказывается также глубоко различным. Этого, однако, нельзя сказать о средах, занимающих по электропроводности промежуточное положение. К их числу, например, относятся:

	σ [сим/м]
Земля { сухая	$10^{-4} - 10^{-5}$
	$10^{-2} - 10^{-3}$
Вода (дистиллиров.)	$2 \cdot 10^{-4}$
Морская вода	3—5

Перечисленные вещества (а с ними и ряд других) в одних полях ведут себя как проводники, а в других — как диэлектрики. Чтобы найти меру оценки этому явлению, надо сначала понять сущность качественного различия между проводниками и диэлектриками. Сравним идеальный диэлектрик с идеальным проводником. В первом случае ($\sigma = 0$) в среде может существовать лишь ток смещения, ибо первый член выражения плотности полного тока

$$\sigma E + \frac{\partial D}{\partial t}$$

равен нулю. Во втором ($\sigma \rightarrow \infty$), наоборот, существует только ток проводимости (второй член в сравнении с первым — величина

бесконечно мала). Очевидно, что реальная среда должна быть признана близкой к идеальному проводнику, если ток проводимости значительно преобладает над током смещения. Тогда это проводник. При обратном соотношении токов смещения и проводимости среда является диэлектриком.

Особый интерес представляют гармонически меняющиеся поля. Пусть напряженность электрического поля подчинена закону

$$E = E_m(x, y, z) \cos \omega t,$$

тогда плотности токов проводимости и смещения в произвольной точке $M(x, y, z)$ следующие:

$$\delta = \sigma E_m(x, y, z) \cos \omega t \quad \text{и} \quad \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega \epsilon E_m(x, y, z) \sin \omega t.$$

Отношение их амплитуд

$$\frac{\delta_m}{(\partial D / \partial t)_m} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (1.36)$$

есть мера оценки свойств среды на частоте $f = \omega / 2\pi$. В соответствии со сказанным выше, среда характеризуется как диэлектрик, если

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1 \\ \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1 \end{array} \right\} \quad \text{и как проводник, если} \quad (1.37)$$

Мы видим, что деление сред на проводники и диэлектрики по их электропроводности относительно, так как критерий оценки включает еще и частоту. В том огромном диапазоне частот, которым располагает современная радиотехника, свойства сред меняются весьма значительно. Можно сказать, что с ростом частоты вещества приобретают диэлектрические качества.

Поведение ряда хорошо известных сред иллюстрирует рис. 15. Как видно, медь, алюминий и другие металлы остаются хорошими проводниками во всем диапазоне частот, доступном практике, но, например сухая почва, будучи на низких частотах проводником, на сверхвысоких становится отчетливо выраженным диэлектриком. Отмеченный факт играет важную роль в распространении радиоволн над земной поверхностью.

Примеры и упражнения

1. В некоторый момент тело, характеризуемое диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 2,5\epsilon_0$ и удельной проводимостью $\sigma = 10^{-14} \text{ сим/м}$, несет электрический заряд. Определить промежуток времени, в течение которого заряд любой внутренней области уменьшится вдвое. Куда «исчезнет» заряд?

Заменяя в уравнении непрерывности (1.16) плотность тока δ через σE , согласно (1.23), и затем исключая вектор E с помощью уравнений (1.22) и (1.13), имеем:

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.38)$$

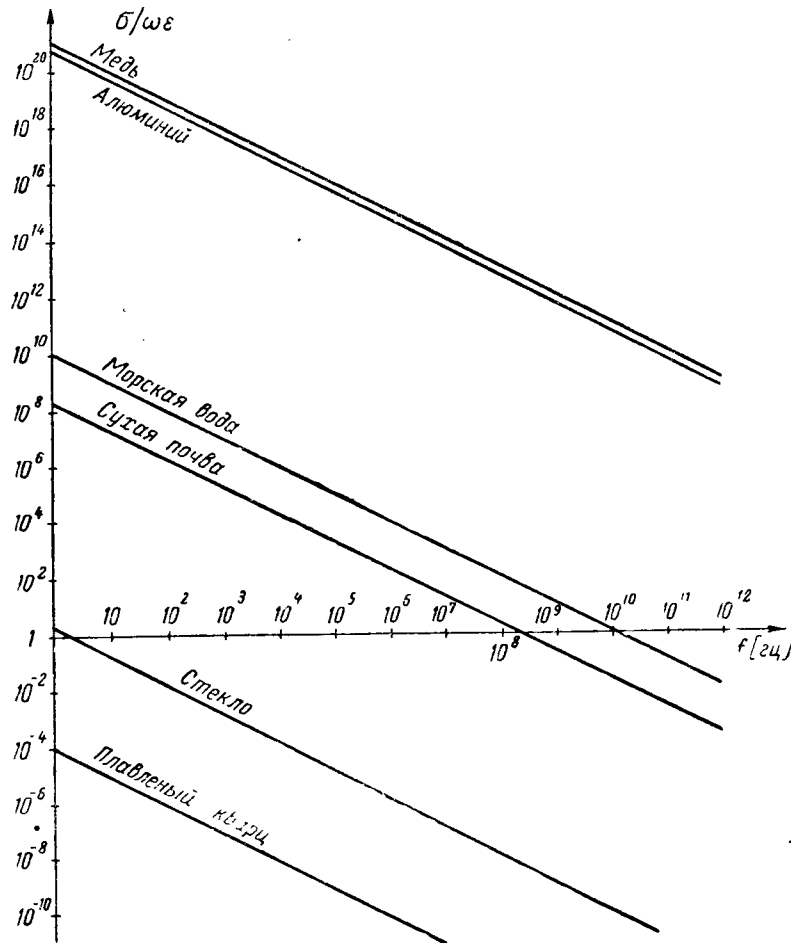


Рис. 15

Найденное уравнение описывает изменение плотности заряда в любой внутренней точке тела. Его решение есть

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}, \quad (1.39)$$

где ρ_0 — плотность заряда в начале отсчета времени ($t = 0$). Как показывает (1.39), заряд во внутренних точках убывает экспоненциально с коэффициентом затухания

$$\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (1.40)$$

Дальнейшее выполнить самостоятельно.

2. Перечислите известные вам причины возникновения тока проводимости — как электрического, так и неэлектрического происхождения.

3. При какой частоте отношение амплитуд токов смещения и проводимости в меди будет таким же, как в сухой почве при частоте $f = 1000$ гц?

4. Ток в среде распределен с плотностью δ_0 . Опыт показывает, что с приложением постоянного магнитного поля H_{\perp} возникает дополнительная составляющая плотности тока, определяемая равенством

$$\delta' = \kappa [E, H_{\perp}], \quad (1.41)$$

где κ — постоянная (обычно δ' весьма мало в сравнении с δ_0). Описанное явление носит название *эффекта Холла*.

Описать электропроводность среды, полагая, что магнитное поле H_{\perp} приложено по оси z .

Плотность тока в произвольной точке среды равна

$$\delta = \delta_0 + \delta'.$$

Заменяя первый член правой части в соответствии с (1.23), а второй на основании (1.41) и положив $H_{\perp} = z_0 H_{\perp}$, имеем:

$$\delta = \sigma E + \kappa H_{\perp} [E, z_0].$$

Это эквивалентно трем скалярным равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \delta_x &= \sigma E_x + \kappa H_{\perp} E_y \\ \delta_y &= -\kappa H_{\perp} E_x + \sigma E_y \\ \delta_z &= \sigma E_z \end{aligned} \right\}$$

Иными словами (сравнить 1.26а, 26 и 26б), удельная проводимость среды при эффекте Холла выражается тензором

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & \kappa H_{\perp} & 0 \\ -\kappa H_{\perp} & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

и дифференциальная формулировка закона Ома принимает вид:

$$\delta = \overleftrightarrow{\sigma} E. \quad (1.43)$$

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Основной задачей теории электромагнитного поля является нахождение его векторов в определенной области пространства при заданных условиях, которые отражают предварительные сведения об электромагнитном процессе. Задача имеет реальное физическое содержание, если эти сведения *правильны* и если они *достаточны*. При неправильных условиях, налагаемых на уравнения поля, можно получить решение, не соответствующее исследуемому процессу, или просто войти в противоречие с этими уравнениями. Решение, получаемое при недостаточных условиях, оказывается неопределенным.

Вопрос о том, какими сведениями надо располагать, чтобы найти поле в задаче того или иного типа, будет решаться по мере необходимости в последующих главах. Пока же отметим, что для определения поля внутри области надо иметь некоторые данные о его характере на границе.

Особый интерес представляют границы разнородных сред, присутствующие в подавляющем большинстве практически интересных задач. Последующие параграфы посвящены изучению электромагнитного поля на таких границах с помощью уравнений Максвелла. Результаты формулируются в виде так называемых *граничных условий*, которые затем будут использоваться в задачах разного типа.

§ 8. Граничные условия для векторов электрического поля

Нормальные составляющие. Начнем с граничных условий для векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} . На поверхности раздела двух сред S (рис. 16) выберем достаточно малый элемент ΔS и построим на нем цилиндр высоты Δh , находящийся в обеих средах. Говоря «достаточно малый» элемент, мы имеем в виду, что его можно считать плоским, а прилежащее поле — однородным.

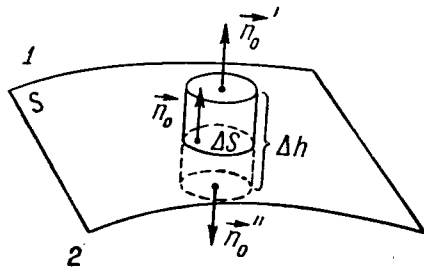


Рис. 16

В общем случае поверхность раздела может нести заряд. Фактически речь идет о заряде, который располагается вблизи нее очень тонким слоем; этот случай, как будет видно в дальнейшем, представляет большой интерес. Предположим, что заряд не занимает объема, а сосредоточен в геометриче-

ской поверхности, тогда величина

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (1.44)$$

где Δq — заряд элемента ΔS , имеет смысл *поверхностной плотности заряда*.

К цилиндрическому объему применим теорему Гаусса (1.13а). Ввиду однородности поля поток вектора \mathbf{D} через верхнее и нижнее основания цилиндра находится простым умножением скалярного произведения этого вектора и внешней единичной нормали (\mathbf{n}'_0 или, соответственно, \mathbf{n}''_0) на площадь поперечного сечения цилиндра ΔS , а заряд внутри цилиндра равен $\xi \Delta S$. Итак, согласно (1.13а),

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{n}'_0 \Delta S + \mathbf{D}_2 \mathbf{n}''_0 \Delta S + \Phi_{бок}^2 = \xi \Delta S,$$

где индексы 1 и 2 соответствуют обозначениям среды по обе стороны границы, а $\Phi_{бок}^2$ означает поток индукции \mathbf{D} через боковую поверхность цилиндра.

Будем неограниченно уменьшать высоту цилиндра Δh , так что его основания в пределе совпадут с элементом поверхности ΔS , и боковой поток $\Phi_{бок}^2$ исчезнет. Учитывая это, сделаем замену

$$\mathbf{n}'_0 = \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{n}''_0 = -\mathbf{n}_0,$$

где \mathbf{n}_0 — нормаль к поверхности раздела, направленная в первую среду. Разделив все члены уравнения на ΔS , получаем:

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \mathbf{n}_0 = \xi, \quad (1.45)$$

или

$$D_{1n} - D_{2n} = \xi. \quad (1.45a)$$

Полученное *граничное условие* означает, что нормальная к границе составляющая вектора электрической индукции при переходе через нее изменяется на величину поверхностной плотности заряда. Если граничная поверхность не заряжена, то компонента D_n непрерывна при переходе из среды 1 в среду 2. Как видно из сопоставления (1.45а) и (1.22), нормальная составляющая напряженности электрического поля \mathbf{E} изменяется при переходе через границу обратно пропорционально диэлектрической проницаемости, т. е.

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (1.46)$$

Тангенциальные составляющие. Рассечем поверхность раздела двух сред плоскостью P (рис. 17), которую можно считать перпендикулярной некоторому малому элементу этой поверхности (на рисунке он не обозначен). В плоскости P возьмем прямоугольный контур $L = (ABCD)$, пересекающий границу, не выходя за пределы указанного малого ее элемента. При этом $AB =$

$= CD = \Delta l$ и $BC = AD = \Delta h$, боковая сторона контура параллельна нормали к границе \mathbf{n}_0 . Единичный вектор, совпадающий с линией пересечения плоскости P и границы (в пределах сделанного построения), обозначим $\boldsymbol{\tau}_0$. Направление $\boldsymbol{\tau}_0$ выбрано так, чтобы выполнялось соотношение $\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0]$, где \mathbf{N}_0 — единичная нормаль к P , составляющая правинтовую систему с обходом контура L .

К контуру применим уравнение (1.8a).

$$\begin{aligned} E_1 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l - E_2 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l + C_{\text{бок}} &= \\ &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{N}_0 \Delta l \Delta h. \end{aligned}$$

Слева от знака равенства записана циркуляция вектора по контуру L , разбитая на три части: первые два члена соответ-

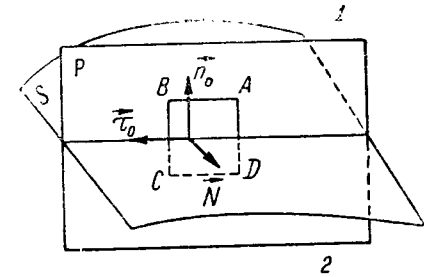


Рис. 17

ствуют сторонам контура AB и CD , а третий выражает долю боковых сторон.

При неограниченном уменьшении высоты Δh стороны AB и CD сливаются на границе, а правая часть записанного равенства и $C_{\text{бок}}$ исчезают, в результате чего оно принимает вид следующего граничного условия:

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \boldsymbol{\tau}_0 = 0, \quad (1.47)$$

или

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (1.47a)$$

Таким образом, тангенциальная составляющая вектора \mathbf{E} непрерывна на границе раздела сред.

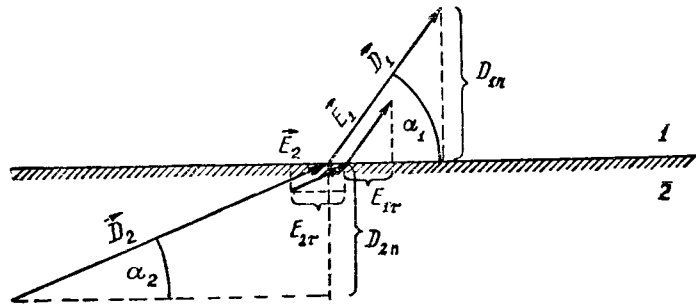


Рис. 18

Учитывая, что $\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0]$, можно написать вместо (1.47)

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) [\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0] = [\mathbf{n}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] \mathbf{N}_0 = 0.$$

Так как равенство не должно зависеть от направления вектора \mathbf{N} , указывающего ориентацию контура L на поверхности раз-

дела, то

$$[\mathbf{n}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0. \quad (1.47b)$$

Из (1.47a) и (1.22) нетрудно заключить, что тангенциальная составляющая электрической индукции на границе сред испытывает разрыв, будучи пропорциональной диэлектрической проницаемости каждой среды:

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (1.48)$$

Сопоставляя формулы (1.45a, 1.46, 1.47a и 1.48) видим, что линии векторов \mathbf{E} и \mathbf{D} на границе преломляются. При отсутствии поверхностного заряда ($\xi = 0$) справедливы соотношения (рис. 18)

$$\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad (1.49)$$

где

$$\text{tg } \alpha_{1,2} = \frac{E_{1,2n}}{E_{1,2\tau}} = \frac{D_{1,2n}}{D_{1,2\tau}}.$$

§ 9. Граничные условия для векторов магнитного поля

Нормальные составляющие. Граничные условия для векторов \mathbf{H} и \mathbf{B} находятся аналогично. Вычисляя полный поток магнитной индукции через поверхность цилиндра, изображенного на рис. 16, согласно (1.14a), имеем

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{n}'_0 \Delta S + \mathbf{B}_2 \mathbf{n}''_0 \Delta S + \Phi_{\text{бок}} = 0.$$

Переходя к пределу при $\Delta h \rightarrow 0$, получаем:

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathbf{n}_0 = 0, \quad (1.50)$$

или

$$B_{1n} = B_{2n}. \quad (1.50a)$$

Этот результат показывает, что нормальная составляющая магнитной индукции всегда непрерывна.

Привлекая формулу (1.21), находим условие для нормальных составляющих вектора \mathbf{H} :

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \quad (1.51)$$

Тангенциальные составляющие. Запишем циркуляцию вектора \mathbf{H} по контуру L , показанному на рис. 17. Из уравнения (1.7a) следует:

$$\mathbf{H}_1 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l - \mathbf{H}_2 \boldsymbol{\tau}_0 \Delta l + C_{\text{бок}} = \mathbf{N}_0 \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\delta} \right) \Delta l \Delta h,$$

откуда в результате предельного перехода при $\Delta h \rightarrow 0$ находим:

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \boldsymbol{\tau}_0 = 0, \quad (1.52)$$

или

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad (1.52a)$$

$$[\mathbf{n}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = 0 \quad (1.52b)$$

(сравнить с выводом формул 1.47, 1.47a, 1.47b).

С учетом (1.21) получаем условие для тангенциальных составляющих магнитной индукции:

$$\frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (1.53)$$

Магнитные линии преломляются на границе. Полное представление об этом дают результаты, полученные при исследовании электрических линий у незаряженной поверхности. Разумеется, в формуле (1.49) и в обозначениях на рис. 18 следует заменить \mathbf{E} на \mathbf{H} , \mathbf{D} на \mathbf{B} и ϵ на μ .

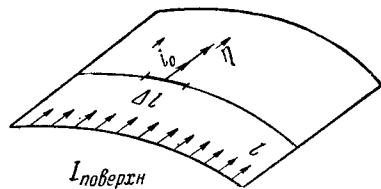


Рис. 19

Случай поверхностного тока. Положим, что по поверхности раздела, не занимая объема, течет ток (рис. 19). Тогда плотность этого *поверхностного* тока

можно записать так:

$$\eta = \mathbf{i}_0 \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta l}, \quad (1.54)$$

где \mathbf{i}_0 — единичный вектор, указывающий направление движения зарядов в данной точке, а Δl — пересекаемый током отрезок линии перпендикулярный вектору \mathbf{i}_0 .

Представление о поверхностном токе является абстракцией — реальный ток всегда занимает некоторый объем. Для дальнейшего полезно выяснить, какие изменения внесет в граничные условия наличие поверхностного тока.

Ток проводимости фигурировал лишь при выводе условия (1.52). При этом в правой части первоначального равенства в результате предельного перехода при $\Delta h \rightarrow 0$ член

$$\delta \Delta l \Delta h = \mathbf{i}_0 \Delta l$$

исчезал. В данном случае стягивание контура L к отрезку Δl на граничной поверхности не обратит записанное выражение в нуль, так как весь ток протекает именно через этот отрезок. Мы будем иметь

$$\delta \Delta l \Delta h = \mathbf{i}_0 \Delta l = \mathbf{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l} \Delta l = \eta \Delta l,$$

и, следовательно, вместо условия (1.52) и других его форм (1.52a) и (1.52b) получим:

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \boldsymbol{\tau}_0 = \eta \mathbf{N}_0, \quad (1.55)$$

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = \eta_N, \quad (1.55a)$$

$$[\mathbf{n}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \eta. \quad (1.55b)$$

Итак, при наличии поверхностного тока на границе раздела тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля испытывает разрыв, равный его плотности.

Примеры и упражнения

1. Указать, в каких случаях и насколько изменяется число линий векторов \mathbf{E} , \mathbf{D} и \mathbf{H} при переходе через границу раздела. Почему при этом никогда не изменяется число линий магнитной индукции \mathbf{B} ?

2. Среды разделены заряженной поверхностью, и в одной из них поле отсутствует. Каково электрическое поле в другой среде?

По условию задачи в одной из сред поле отсутствует, т. е.

$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{E}_2 = 0$$

Тогда из уравнения (1.45) следует, что

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{n}_0 = \xi,$$

причем нормаль \mathbf{n}_0 направлена из второй среды в первую. Как видно из (1.47a),

$$E_{1\tau} = 0.$$

Таким образом, напряженность электрического поля нормальна к границе и равна

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{n}_0 \frac{\xi}{\epsilon_1} \quad (1.56)$$

Решить эту же задачу также путем непосредственного применения теоремы Гаусса.

3. Среды разделены плоской границей, несущей поверхностный ток. Поле в одной среде отсутствует. Показать, что в другой среде магнитное поле параллельно границе и связано с плотностью поверхностного тока соотношением

$$[\mathbf{n}_0, \mathbf{H}_1] = \eta. \quad (1.57)$$

Пояснить этот результат рисунком.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

§ 10. Система уравнений Максвелла

Выписав уравнения Максвелла (1.7, 1.8, 1.13 и 1.14) и их интегральные аналоги, а также уравнения (1.21 — 1.23), получаем систему уравнений электромагнитного поля, или систему уравнений Максвелла:

Дифференциальная форма

Интегральная форма

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta,$$

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} + \int_S \delta \, d\mathbf{S},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S}. \quad (1.58a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.58)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = q.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0.$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H},$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},$$

$$\delta = \sigma \mathbf{E}.$$

Эти уравнения будут исходными при изучении теории электромагнитного поля.

Принцип суперпозиции. В дальнейшем все записанные уравнения фигурируют только как линейные, так как не будут рассматриваться среды, параметры которых зависят от векторов поля. Как известно, сумма частных решений линейного дифференциального уравнения также является его решением. Иными словами, если известен ряд полей, которые мы условно обозначим $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1; \mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2; \mathbf{E}_3, \mathbf{H}_3$ и т. д., то может существовать поле \mathbf{E}, \mathbf{H} , где $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 + \dots$. Этому положению соответствует весьма важный *принцип суперпозиции*, согласно которому поле, образованное несколькими источниками, представляет собой сумму полей каждого из источников, существующего в тех же условиях отдельно.

§ 11. Классификация электромагнитных явлений

Основным классам электромагнитных явлений соответствуют частные виды системы уравнений Максвелла. Простейшими являются неизменные во времени поля в пространстве без токов. Положив

в (1.58 и 1.58a) $\partial/\partial t = 0$, и $\delta = 0$. видим, что система уравнений электромагнитного поля распадается на две *независимых* системы:

Уравнения электростатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0,$$

$$\oint_L \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.59)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = q. \quad (1.59a)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Уравнения магнитостатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0,$$

$$\oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.60)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \, d\mathbf{S} = 0. \quad (1.60a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Таким образом, электрические и магнитные явления при указанных условиях *взаимно независимы*.

Однако уже при наличии постоянного тока ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$, $\delta \neq 0$) электрическое и магнитное поля оказываются связанными посредством соотношений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta, \quad \delta = \sigma \mathbf{E}.$$

Электромагнитное поле при постоянном токе описывается уравнениями (1.58, 1.58a), в которых положено $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

Следующим шагом является переход к явлениям *квазистационарным*, т. е. протекающим достаточно медленно. По своему строению квазистационарные поля еще близки к статическим, но в записи второго уравнения Максвелла теперь правая часть отлична от нуля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt}.$$

Интегральная форма второго уравнения Максвелла дана здесь в виде (1.11), наиболее характерном для квазистационарных полей.

В первом уравнении Максвелла при наличии тока проводимости ($\delta \neq 0$) можно пренебречь током смещения, так как для квазистационарных явлений $\frac{\partial D}{\partial t} \ll \delta$, и тогда уравнения примут вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta, \quad \oint_L \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = I.$$

Однако ток смещения необходимо учитывать, когда тока проводимости нет (емкость в цепи переменного тока), тогда

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}.$$

Весьма существенно, что понятие быстроты электромагнитного процесса относительно. Как видно из примера, рассмотренного во введении, при любой скорости процесса система будет квазистационарной, если ее размеры *достаточно малы*. Но в области, значительной по размерам, проявятся все особенности электромагнитного процесса как «быстропеременного».

Будет показано, что электромагнитному полю свойственен *волновой характер*. Это качество выступает на передний план в быстропеременных процессах, которым посвящена большая часть настоящей книги.

Примеры и упражнения

1. Записать систему уравнений Максвелла в декартовых координатах.

2. Исследовать поле двух одинаковых по абсолютной величине зарядов, одноименных и разноименных, поле точечного заряда было найдено в упр. 2 § 3.

3. Магнитное поле прямолинейного постоянного тока было определено в упр. 3 § 3. Произвести качественное исследование

поля двух параллельных, а также антипараллельных токов, одинаковых по величине.

4. Сопоставив уравнения электростатики и магнитостатики, указать сходство и различие их физического содержания.

5. Имеем колебательный контур в виде витка провода с воздушным конденсатором

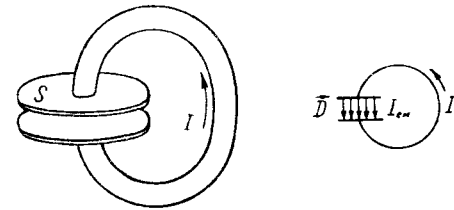


Рис. 20

из двух пластин (рис. 20). Требуется вычислить амплитуду напряженности поля в конденсаторе, если амплитуда синусоидального тока в контуре составляет $I_m = 1 \cdot 10^{-4} \text{ а}$, площадь одной пластины конденсатора равна $S = 100 \text{ см}^2$, а частота принимает значения $f = 1 \cdot 10^2$; $1 \cdot 10^4$; $1 \cdot 10^6 \text{ гц}$.

Ток смещения, замыкающий цепь и сосредоточенный между обкладками конденсатора, равен току проводимости:

$$I_{см} = I = I_m \sin \omega t.$$

С другой стороны, полагая поле конденсатора однородным, имеем:

$$I_{см} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = S \frac{dD}{dt}.$$

Сопоставляя эти равенства, получаем

$$\frac{dD}{dt} = \frac{I_m}{S} \sin \omega t,$$

и, следовательно, амплитуда напряженности электрического поля равна:

$$E_m = \frac{D_m}{\epsilon_0} = -\frac{I_m}{\omega \epsilon_0 S}.$$

В частности, при $f = 100 \text{ гц}$

$$E_m = \frac{1 \cdot 10^{-4} \cdot 36\pi}{2\pi \cdot 100 \cdot 0,01 \cdot 10^{-9}} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ в/м}.$$

Как видно, весьма значительному электрическому полю конденсатора, изменяющемуся с *малой* частотой, соответствует весьма малый ток контура, а, значит, и *малое магнитное поле*.

Измерение внутри конденсатора магнитного поля, связанного с *током смещения* первым уравнением Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S},$$

можно рассматривать как способ проверки этого уравнения.

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Подчеркивая физическую реальность электромагнитного поля, мы охарактеризовали его как носитель энергии. Непосредственное воздействие быстропеременного электромагнитного поля на органы чувств человека вызывает ощущение тепла, а при известной частоте колебаний — света. Однако основной научный интерес представляют превращения энергии поля в иные формы, доступные наблюдению и изучению. Так, рассмотрев простейшие электромеханические превращения, мы построили определения векторов поля. Полезно вспомнить в связи с этим, что именно наблюдение электромеханических явлений положило начало научному представлению об электричестве. В современной технике, как известно, широко используются также электротепловые, фотоэлектрические, электрохимические и многие другие превращения. Но предметом нашего внимания в данной главе будут не сами эти превращения, а возникающее благодаря им движение электромагнитной энергии, ее виды и характер распределения в пространстве. С этой целью будет рассмотрен баланс энергии в ограниченной области пространства. В результате анализа появятся понятия потока энергии и вектора Пойнтинга, электрической и магнитной энергии и их плотности.

§ 12. Закон Джоуля — Ленца

Запишем соотношение

$$p = \delta E, \quad (2.1)$$

где

$$p = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V}, \quad (2.2)$$

есть плотность мощности: ΔP — количество энергии электромагнитного поля, переходящее за секунду в энергию иного вида внутри элементарного объема ΔV .

В простейшем случае, когда сторонних сил нет, речь идет о преобразовании электромагнитной энергии в тепло, выделяемое током проводимости, о «тепловых потерях» энергии¹. Отмечая этот факт индексом n (потери), придадим равенству (2.1) с помощью закона Ома (1.23) другие формы:

$$p_n = \delta E = \sigma E^2 = \delta^2 / \sigma. \quad (2.3)$$

Интегрирование по объему V приводит к выражению мощности потерь в объеме

$$P_n = \int_V \delta E dV = \int_V \sigma E^2 dV = \int_V \frac{\delta^2}{\sigma} dV. \quad (2.3a)$$

Легко убедиться, что физическое содержание равенств (2.3, 2.3a) определяется известным законом Джоуля — Ленца. Действительно, применяя (2.3a) к цилиндрической области изображенной на рис. 14, имеем:

$$P_n = \int_{(S_1)}^{(S_2)} \int_{\vec{s}} E \delta dl dS = EI \cdot \delta S = UI$$

(смысл обозначений тот же, что и в § 6). Это формулировка закона Джоуля — Ленца для участка цилиндрического проводника.

Если в области действуют сторонние силы, то в каждой ее точке, согласно (1.35),

$$E = \delta / \sigma - E^{cm},$$

и равенство (2.1) принимает вид:

$$p = \delta^2 / \sigma - \delta E^{cm}, \quad (2.4)$$

или

$$p = p_n - p^{cm}. \quad (2.5)$$

Здесь плотность мощности p разделена на две части, одна из которых соответствует потерям энергии, а другая — действию сторонних сил.

Интегрируя по объему V , находим:

$$P = \int_V \frac{\delta^2}{\sigma} dV - \int_V \delta E^{cm} dV, \quad (2.4a)$$

¹ Может происходить преобразование энергии поля не в тепловую а, например, в химическую (электролит) и др.

$$P = P_n - P^{cm}, \quad (2.5a)$$

где P_n — мощность потерь, определяемая законом Джоуля — Ленца в форме (2.3a), а

$$P^{cm} = \int_V \delta \mathbf{E}^{cm} dV$$

называется *мощностью сторонних сил* в объеме V ; эта величина характеризует процесс преобразования энергии различных видов (например, химической, механической и др.) в электромагнитную.

Мощность P — величина положительная, если потери в области превышают вклад сторонних сил. Когда же мощность сторонних сил P^{cm} больше мощности потерь P_n , величина P оказывается отрицательной.

§ 13. Баланс энергии электромагнитного поля

Начнем с несложного формального преобразования. Записав уравнения Максвелла (1.8 и 1.7), все члены первого из них умножим на \mathbf{H} , а второго — на \mathbf{E} и произведем вычитание соответственных частей. Вот запись этих действий:

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \delta \mathbf{E}$$

В силу известного тождества векторного анализа

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}],$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - \delta \mathbf{E}. \quad (2.6)$$

После интегрирования по объему V и применения к левой части формулы Остроградского — Гаусса получаем:

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] d\mathbf{S} = - \int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV - \int_V \delta \mathbf{E} dV, \quad (2.7)$$

где S — замкнутая поверхность, ограничивающая V .

Смысл последнего члена в правой части равенства

$$P = \int_V \delta \mathbf{E} dV$$

ясен из предыдущего параграфа: это мощность, характеризующая всю совокупность процессов преобразования энергии в объеме V . Отсюда видно, что и все остальные члены равенства (2.7) имеют размерность мощности.

Для выяснения физического содержания интеграла

$$\int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV$$

рассмотрим особый случай. Пусть изнутри V к поверхности S примыкает другая *непроницаемая для поля* оболочка S' (рис. 21). При этом интеграл, стоящий в левой части (2.7), равен нулю, так как на поверхности S поле отсутствует. Итак, для *изолированной* области уравнение (2.7) принимает вид:

$$P = - \int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV. \quad (2.8)$$

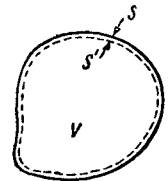


Рис. 21

Но раз область V не сообщается с внешней средой, то мощность P есть не что иное, как скорость изменения энергии W , сосредоточенной внутри области V , и справедливо равенство

$$P = - \frac{dW}{dt}, \quad (2.9)$$

знак в котором выбран из тех соображений, что при положительном P ($P_n > P^{cm}$, преобладают потери) энергия должна убывать ($\frac{dW}{dt} < 0$).

Сравнивая (2.8) и (2.9), мы видим, что исследуемый интеграл равен временной производной энергии W :

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV. \quad (2.10)$$

Теперь обратимся к исходному уравнению (2.7). Введя обозначение

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (2.11)$$

и полагая в соответствии с (2.5a)

$$P = P_n - P^{cm},$$

запишем (2.7) в следующей форме:

$$\oint_S \mathbf{\Pi} d\mathbf{S} + \frac{dW}{dt} + P_n = P^{cm}. \quad (2.12)$$

Этот результат характеризует *баланс электромагнитной энергии* в области V и известен как формулировка *теоремы Умова — Пойнтинга*. Не выясненным здесь пока осталось физическое содержание лишь одного члена — потока вектора \mathbf{P} через замкнутую границу S . Существование этого потока

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} \neq 0,$$

как видно, отличает область, сообщаящуюся с окружающим пространством, от изолированной. Поток вектора \mathbf{P} соответствует, таким образом, обмену энергией с внешней средой.

Если внутри области V нет потерь ($P_n = 0$) и электромагнитная энергия остается постоянной ($\frac{dW}{dt} = 0$), то мощность, развиваемая сторонними силами внутри этой области V , неизбежно расходуется за пределами ее, — это мощность *излучения*. Но при этом согласно (2.12)

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = P^{cm},$$

т. е. поток вектора \mathbf{P} равен по абсолютной величине мощности излучения, или, иными словами, энергии, проходящей через границу S за секунду. В то же время, судя по знаку, можно было сразу сказать, что это *выходящий* (положительный) поток.

Совершенно очевидно, что поток вектора \mathbf{P} имеет смысл *потока энергии* через границу S .

К такому же заключению можно прийти, рассматривая противоположный пример. Пусть $P^{cm} = 0$ и $\frac{dW}{dt} = 0$. Тогда потери внутри V происходят благодаря поглощению энергии окружающего пространства. Но на основании (2.12) при этом

$$\oint_S \mathbf{P} d\mathbf{S} = -P_n.$$

Следовательно, и здесь поток вектора \mathbf{P} равен по абсолютной величине энергии, проходящей через границу области за секунду, и по знаку соответствует направлению ее движения (*входящий*, отрицательный поток).

Величина \mathbf{P} называется *вектором Пойнтинга* и интерпретируется как *плотность потока энергии*.

Примеры и упражнения

1. Как вычислить мощность, излучаемую антенной, если известно ее поле?

2. Чем возмещается излучаемая энергия, если установлено, что поток вектора Пойнтинга через замкнутую границу некоторой области, внутри которой нет сторонних сил, положителен.

3. Внутри области происходит преобразование энергии сторонних сил в электромагнитную, однако поток вектора Пойнтинга через ее границу оказывается отрицательным. Описать различные варианты баланса энергии.

4. В изолированной системе нет сторонних сил ($P^{cm} = 0$), а мощность потерь пропорциональна запасу энергии. Найти закон изменения энергии во времени.

Запишем

$$P_n = \alpha W, \quad (2.13)$$

где α — коэффициент пропорциональности. Тогда, согласно (2.9)

$$\frac{dW}{dt} = -\alpha W, \quad (2.14)$$

откуда

$$W = W_0 e^{-\alpha t}, \quad (2.15)$$

причем W_0 есть энергия системы в начале отсчета времени ($t = 0$).

Итак, энергия убывает экспоненциально с коэффициентом затухания

$$\alpha = \frac{P_n}{W}. \quad (2.13a)$$

§ 14. Электрическая и магнитная энергия электромагнитного поля

В качестве одного из результатов предыдущего параграфа напомним, что скорость изменения энергии области V выражается через векторы поля в этой области формулой (2.10):

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV.$$

Привлекая (1.21 и 1.22), имеем¹:

$$\mathbf{H} \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \mu \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right).$$

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right).$$

Таким образом,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\epsilon E^2}{2} \right) dV$$

¹ Если существенна инерционность среды, то ее параметры μ и ϵ нельзя считать не зависящими от времени и выносить за знак производной $\partial/\partial t$. Анализ электромагнитной энергии при этом усложняется.

и, следовательно, электромагнитная энергия в области V равна:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\mu H^2 + \epsilon E^2) dV. \quad (2.16)$$

Интеграл состоит из двух частей, одна из которых зависит только от магнитного, а другая — только от электрического поля:

$$W = W^m + W^e, \quad (2.16a)$$

где

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV \quad \text{и} \quad W^e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV.$$

Поэтому W^m называется *магнитной энергией*, а W^e — *электрической энергией* электромагнитного поля.

На энергию электромагнитного поля не распространяется принцип суперпозиции. Пусть, например, в области V сначала существует магнитное поле \mathbf{H}_1 , обладающее энергией W_1^m , а затем поле \mathbf{H}_2 , энергия которого есть W_2^m . Если теперь оба поля существуют одновременно, то полная энергия W^m не равна сумме $W_1^m + W_2^m$. Действительно,

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu (\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2)^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mu H_1^2 dV + \frac{1}{2} \int_V \mu H_2^2 dV + \int_V \mu \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 dV, \quad (2.17)$$

или

$$W^m = W_1^m + W_2^m + W_{12}^m. \quad (2.17a)$$

Величина W_{12}^m называется *взаимной энергией* полей \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 .

Разумеется, все сказанное можно было бы повторить и в отношении электрического поля.

С чисто формальной точки зрения отмеченная закономерность есть простое следствие квадратичной зависимости энергии от векторов поля, подчиненных принципу суперпозиции. Нарушения закона сохранения энергии, конечно, не происходит: появление взаимной энергии требует дополнительной затраты энергии источников (сторонних сил), если $W_{12} > 0$, и, наоборот, сопровождается отдачей энергии, если $W_{12} < 0$.

Примеры и упражнения

1. Симметрично относительно оси прямолинейного тока I в воздухе расположен тор, магнитная проницаемость которого весьма велика ($\mu \gg \mu_0$) в сравнении с магнитной постоянной

(рис. 2.2). Вычислить магнитную энергию системы, полагая, что она сосредоточена внутри тора, ввиду его большой магнитной проницаемости.

Магнитные силовые линии имеют вид concentрических окружностей, причем согласно (1.20)

$$I = \int \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_l l, \quad (2.18)$$

где l — длина средней окружности, а H_l — напряженность магнитного поля на этой окружности.

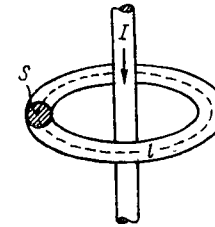


Рис. 22

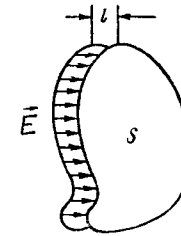


Рис. 23

Вычисляя энергию магнитного поля по формуле (2.16a), получаем:

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV \approx \frac{\mu H_l^2}{2} Sl. \quad (2.19)$$

Здесь, в соответствии с рис. 22. $Sl = V$ — объем тора. Магнитный поток внутри тора

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} \approx \mu H_l S. \quad (2.20)$$

Внося (2.18) и (2.20) в (2.19), находим:

$$W^m \approx \frac{\Phi I}{2}, \quad (2.21)$$

или

$$W^m \approx \frac{\mathcal{L} I^2}{2}, \quad (2.21a)$$

где коэффициент пропорциональности $\mathcal{L} = \Phi/I$ называется *индуктивностью*.

2. Электрическое поле плоского конденсатора (рис. 23) будем считать однородным. Его энергия

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV = \frac{\epsilon E^2}{2} Sl. \quad (2.22)$$

где $Sl = V$ — объем, занимаемый полем.

Обозначив $El = U$ и $C = \epsilon S/l$, напишем:

$$W^3 = \frac{CU^2}{2}. \quad (2.23)$$

Величина U есть разность потенциалов между пластинами конденсатора, а C называется его емкостью.

В дальнейшем формулы (2.21а и 2.23) получат более широкое значение.

§ 15. Локализация и движение энергии

Величина

$$\omega = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V} \quad (2.24)$$

называется *плотностью энергии* электромагнитного поля (ΔW — энергия, содержащаяся в элементарном объеме ΔV).

Согласно (2.16),

$$\omega = \frac{1}{2}(\mu H^2 + \epsilon E^2), \quad (2.25)$$

причем слагаемые

$$\omega^m = \frac{\mu H^2}{2} \quad \text{и} \quad \omega^e = \frac{\epsilon E^2}{2}$$

называются соответственно плотностью магнитной энергии и плотностью электрической энергии.

Формула (2.25) характеризует распределение, локализацию энергии поля в пространстве.

Вводя обозначения (2.5, 2.11 и 2.25) в уравнение (2.6), приходим к следующей дифференциальной формулировке теоремы Умова — Пойнтинга:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \frac{d\omega}{dt} + p_n = p^{cm}, \quad (2.26)$$

показывающей, что изменение плотности энергии в каждой точке пространства определяется характером ее преобразования (p_n , p^{cm}) и движения (\mathbf{P}). Вектор Пойнтинга \mathbf{P} , как уже говорилось, выражает плотность потока энергии, т. е. указывает направление ее движения и по абсолютному значению равен количеству энергии, проходящему за секунду через единичную площадку, перпендикулярную к \mathbf{P} .

Зная плотность энергии ω и плотность ее потока \mathbf{P} , можно найти скорость движения энергии v_s . Выделим в потоке энергии цилиндрический объем (рис. 24) с поперечным сечением ΔS . Количество энергии, проходящее за секунду через условную границу l_1 (рис. 24,а), есть

$$W_{(\Delta t=1)} = |\mathbf{P}| \Delta S.$$

Оно заполняет цилиндр до l_2 (рис. 24,б), причем, как это понятно, расстояние между l_1 и l_2 , обозначенное Δl , численно равно скорости движения энергии

$$\Delta l = v_s.$$

Чтобы найти эту величину, надо $W_{(\Delta t=1)}$ разделить на количество энергии, приходящееся на единицу длины цилиндра

$$W_{(\Delta l=1)} = \omega \Delta S.$$

Таким образом,

$$v_s = \frac{W_{(\Delta t=1)}}{W_{(\Delta l=1)}} = \frac{|\mathbf{P}|}{\omega},$$

или, учитывая, что вектор скорости и вектор \mathbf{P} направлены одинаково,

$$\mathbf{v}_s = \frac{\mathbf{P}}{\omega}. \quad (2.27)$$

В заключение сделаем одно замечание. Толкование вектора Пойнтинга как плотности потока электромагнитной энергии в современной электродинамике общепризнано и оправдано опытом. Однако его нельзя рассматривать как непосредственно вытекающее из теоремы Умова — Пойнтинга. Действительно, полный поток энергии через замкнутую поверхность S , фигурирующий в (2.12), не изменится, если его плотностью считать не \mathbf{P} , а $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$, где \mathbf{Q} — произвольный вектор, обладающий свойством

$$\oint_S \mathbf{Q} dS = 0.$$

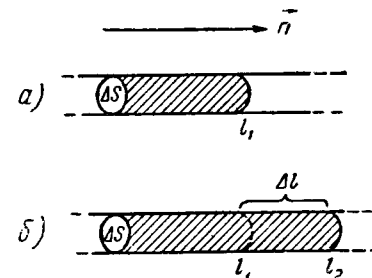


Рис. 24

Дифференциальная формулировка (2.26) тоже не определяет плотности потока энергии, так как там присутствует лишь ее расходимость.

Итак, физическое содержание вектора Пойнтинга оказывается более глубоким, чем это можно установить из анализа баланса энергии.

Примеры и упражнения

1. Выделение тепла током. Внутри уединенного проводящего цилиндра (рис. 25) течет постоянный ток I . Как известно (1.23), напряженность электрического поля в каждой точке цилиндра

$$E = \frac{\delta}{\sigma},$$

причем $\delta = I/\pi r_1^2$, где r_1 — радиус цилиндра.

Магнитные силовые линии представляют собой концентрические окружности. Напряженность магнитного поля на поверхности цилиндра находится по формуле (1.20)

$$H = \alpha_0 I / 2\pi r_1.$$

Здесь α_0 — единичный вектор, касательный к этим окружностям и согласованный с направлением тока праввинтовой системой.

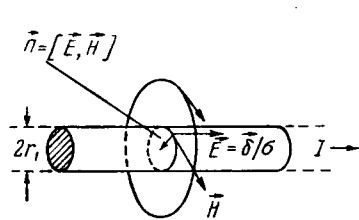


Рис. 25

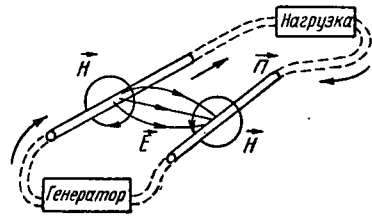


Рис. 26

Легко заметить, что из окружающего цилиндр пространства внутрь него направлен поток вектора Пойнтинга.

Этот вектор в каждой точке поверхности цилиндра

$$P = [E, H] = -r_0 I^2 / 2\pi^2 r_1^3 \sigma, \quad (2.28)$$

где $-r_0$ — единичный вектор внутренней нормали.

Согласно полученному результату, энергия внутреннего поля *втекает* в цилиндр. Вычисляя поток вектора Пойнтинга на участке цилиндра длиной l , находим энергию, отбираемую им из внешнего пространства за секунду:

$$P = 2\pi r_1 l |P| = I^2 \frac{l}{\pi r_1^2 \sigma} = I^2 R, \quad (2.29)$$

где R — сопротивление участка l .

Ввиду того, что (2.29) совпадает с выражением закона Джоуля — Ленца, становится очевидным, что выделение тепла током есть результат проникновения в проводник энергии внешнего электромагнитного поля.

2. Передача энергии в электрической цепи. На рис. 26 схематически изображена цепь, представляющая в области V отрезок двухпроводной линии. Пренебрегая потерями в проводах, не будем учитывать вызываемого ими падения напряжения: электрические силовые линии, начинающиеся на одном из проводов и кончающиеся на другом, лежат в плоскости, перпендику-

лярной к ним. В этой же плоскости лежат охватывающие провода замкнутые магнитные силовые линии. Нетрудно заметить, что от генератора к нагрузке направлен поток вектора Пойнтинга.

Задание. 1) Описать поток электромагнитной энергии в электрической цепи без пренебрежения потерями в проводах.

2) Участок линии передачи постоянного тока показан на рис. 27. Стрелками обозначены токи в проводах и напряжение между ними. Пользуясь понятием вектора Пойнтинга, указать, с какой стороны находится генератор.

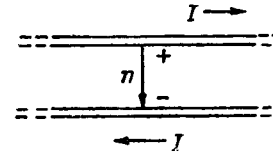


Рис. 27

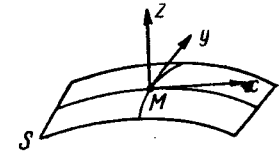


Рис. 28

3) Вектор Пойнтинга и граничные условия. Пусть на границе двух сред S не происходит каких-либо превращений энергии. Расположив в произвольной ее точке M начало декартовой системы координат с осью z вдоль нормали, запишем условие непрерывности нормальной компоненты вектора Пойнтинга при переходе из среды 1 в среду 2 (рис. 28):

$$[E_1, H_1]_z = [E_2, H_2]_z. \quad (2.30)$$

Помятно, что нарушение этого условия могло бы означать лишь то или иное превращение энергии на границе, что противоречит исходной предпосылке.

В компонентах декартовой системы условие (2.30) имеет вид:

$$E_{1y}H_{1x} - E_{1x}H_{1y} = E_{2y}H_{2x} - E_{2x}H_{2y}. \quad (2.30a)$$

Оно будет выполнено, если

$$E_{1x} = E_{2x}, \quad E_{1y} = E_{2y}, \quad H_{1x} = H_{2x}, \quad H_{1y} = H_{2y}.$$

т. е., если

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \text{и} \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \quad (2.31)$$

Мы пришли к известному из § 8, 9 требованию непрерывности тангенциальных компонент напряженностей поля на границе раздела.

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Некоторые простейшие понятия электростатики, известные из общего курса физики, уже привлекались выше для иллюстрации общих вопросов теории электромагнитного поля. Данная глава посвящается систематическому изложению электростатики на основе общих уравнений поля.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОНЯТИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

В § 11 было показано, что не изменяющееся во времени электрическое поле в пространстве без токов ($\delta = 0$) — *электростатическое поле* — не зависит от магнитного и определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{Дифференциальная форма} & \text{Интегральная форма} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; & (3.1) \quad \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0; \end{array} \quad (3.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad (3.2)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3.3) \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = q. \quad (3.2a)$$

Анализ этих уравнений приведет нас к основным понятиям *электростатики*.

§ 16. Электростатический потенциал

Начнем с первого из записанных уравнений, утверждающего, что электростатическое поле является *безвихревым* (вихрь его напряженности равен нулю), или, как чаще говорят, *потенциаль-*

ным. Происхождение второго термина связано со следующим свойством электростатического поля.

В силу известного тождества векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi \equiv 0$$

напряженность этого поля \mathbf{E} есть градиент некоторого скаляра φ , который называется *электростатическим потенциалом*. Принято писать

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (3.4)$$

или, в декартовых координатах,

$$\mathbf{E} = -\left(x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right), \quad (3.4a)$$

где x_0 , y_0 и z_0 — единичные векторы (орты) соответствующих осей.

Потенциал — неоднозначная функция поля, если положить

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} (\varphi + \varphi_0),$$

где φ_0 — некоторый скаляр, то будет удовлетворено уравнение (3.1). Легко видеть, однако, что записанное выражение будет описывать поле, тождественное полю (3.4), лишь в том случае, если φ_0 — величина *постоянная* (не зависящая от координат). Итак, для данного поля \mathbf{E} потенциал определен с точностью до постоянной.

Вьясним физическое содержание введенного понятия. Напряженность \mathbf{E} определяется как сила (§ 1), действующая на помещенный в поле единичный точечный заряд. При перемещении этого заряда вдоль элементарного отрезка

$$d\mathbf{l} = x_0 dx + y_0 dy + z_0 dz$$

(рис. 29) сила поля совершает работу

$$\Delta A = \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (3.5)$$

а работа по переносу заряда из точки M_1 в точку M_2 есть

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (3.6)$$

Переписав с помощью (3.4a) стоящее под знаком интеграла скалярное произведение в декартовых координатах

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right),$$

видим, что оно представляет собой взятый с обратным знаком полный дифференциал функции φ :

$$\mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\varphi, \quad (3.7)$$

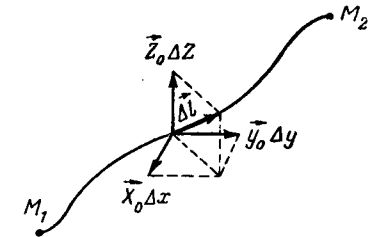


Рис. 29

поэтому из (3.6) следует, что

$$A = - \int_{M_1}^{M_2} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (3.8)$$

Итак, работа, совершаемая при перемещении единичного положительного точечного заряда в электростатическом поле, равна разности потенциалов начальной и конечной точек пути. Она не зависит от абсолютного значения потенциалов, а также от вида пути, соединяющего точки (рис. 30). В частности, работа при обходе замкнутого контура равна нулю. Этот факт выражается формулой (3.1а)

Объединяя (3.6) и (3.8), получаем связь разности потенциалов с напряженностью поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.9)$$

Значение же потенциала в любой из точек, как указывалось, известно лишь с точностью до постоянной величины. Эту постоянную при необходимости выбирают условно.

Так, иногда удобно считать, что потенциал земли или корпуса какого-либо прибора равен нулю. После этого потенциал любой точки определяется на основании (3.9), где M_2 (или M_1) лежит в области известного потенциала (на земле и т. п.).

В электростатике обычно принимают, что потенциал в бесконечно удаленных точках равен нулю. Тогда потенциал в произвольной точке M численно равен работе, совершаемой при перемещении единичного заряда из этой точки в бесконечность, т. е. в соответствии с (3.9):

$$\varphi = \int_M^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\infty}^M \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (3.10)$$

Понятие потенциала значительно упрощает задачу нахождения электростатического поля: вместо трех проекций вектора \mathbf{E} достаточно сначала найти одну лишь функцию φ , после чего поле вычисляется путем простого дифференцирования согласно (3.4).

§ 17. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности

Силовые линии электростатического поля в каждой его точке указывают направление вектора \mathbf{E} своей касательной. Таким образом, векторный дифференциал длины силовой линии

$$d\mathbf{l} = x_0 dx + y_0 dy + z_0 dz$$

параллелен вектору

$$\mathbf{E} = x_0 E_x + y_0 E_y + z_0 E_z,$$

и компоненты обоих векторов пропорциональны:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (3.11)$$

Пропорция (3.11) равносильна двум дифференциальным уравнениям:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{E_x}{E_y} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{E_z}{E_x}, \quad (3.11a)$$

описывающим силовые линии.

Выясним, каким свойством обладают поверхности, к которым силовые линии перпендикулярны (рис. 31). Если векторный элемент длины $d\mathbf{l}$ лежит на одной из таких поверхностей S_n , то он перпендикулярен вектору \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (3.12)$$

Но уже известно (3.7), что скалярное произведение $-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ представляет собой полный дифференциал функции φ , поэтому вместо (3.12) следует писать!

$$d\varphi = 0. \quad (3.12a)$$

Это означает, что на поверхности S_n потенциал не изменяется, S_n есть поверхность постоянного потенциала, или *эквипотенциальная поверхность*.

Итак, найдено, что силовые линии электростатического поля везде пересекают эквипотенциальные поверхности под прямым углом.

§ 18. Уравнения Пуассона и Лапласа

Уравнение (3.2) с учетом (3.3) принимает вид¹:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.13)$$

Заменяя вектор \mathbf{E} градиентом потенциала (3.3) получаем:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.14)$$

Это *уравнение Пуассона*, устанавливающее связь между потенциалом φ и плотностью распределения заряда ρ ; в декартовых

¹ Мы рассматриваем *однородную* среду, диэлектрическая проницаемость которой не зависит от координат.

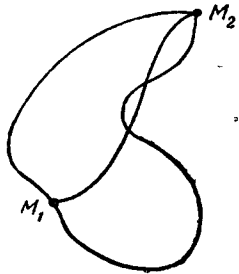


Рис. 30

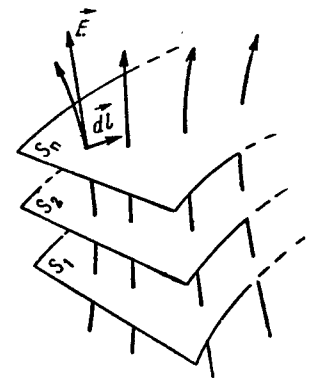


Рис. 31

координатах оно записывается так:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.14a)$$

В точках незаряженной области ($\rho = 0$) потенциал φ подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (3.15)$$

Аналогичные уравнения второго порядка можно получить и относительно вектора \mathbf{E} . Запишем известное тождество векторного анализа:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Внося сюда (3.1) и (3.2), получаем уравнение

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \text{grad } \frac{\rho}{\epsilon}. \quad (3.16)$$

В точках, где $\rho = 0$,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0. \quad (3.17)$$

2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

§ 19. Поле точечного заряда. Закон Кулона

Поле точечного заряда, как это было показано в § 3 (пример 2), легко находится путем непосредственного применения теоремы Гаусса (3.2a). Поток электрической индукции, выходящий через сферическую поверхность, в центре которой O находится заряд q_1 (рис. 32), должен во всех точках этой поверхности иметь одинаковую плотность в силу центральной симметрии системы. Отсюда вытекает (см. также § 3), что вектор \mathbf{D} к сферической поверхности нормален (т. е. направлен радиально) и во всех точках ее постоянен по величине. Из (3.2a) непосредственно следует, что

$$4\pi r^2 D = q_1,$$

где r — радиус сферы.

С учетом (1.22) находим напряженность электрического поля заряда q_1 в произвольной точке M на расстоянии $OM = r$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{q_1}{4\pi\epsilon r^2}, \quad (3.18)$$

где \mathbf{r}_0 — единичный радиальный вектор.

Напомним (§ 1), что точечный заряд в действительности представляет собой заряженное тело, размеры которого значительно меньше расстояния наблюдения (OM). На малых расстояниях от заряженного тела полученная формула (как и принцип ее вывода) теряет смысл. Понятием идеального точечного заряда — сосредоточенного в геометрической точке — мы будем пользоваться сравнительно редко, так как физическое содержание этой абстракции ограничено: как видно из (3.18), поле в «заряженной точке» ($r \rightarrow 0$) обращается в бесконечность.

Поместим теперь в точку наблюдения M другой точечный заряд q_2 (рис. 33). На него действует сила $\mathbf{F} = q_2 \mathbf{E}$ согласно (1.1), т. е. на основании (3.18)

$$\mathbf{F} = \mathbf{r}_0 \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (3.19)$$

Идентичная сила приложена к заряду q_1 , в чем нетрудно убедиться, обратив рассуждение (считая точкой наблюдения O и направляя единичный вектор \mathbf{r}_0 от M к O). Равенство (3.19) показывает, что F — сила взаимодействия двух зарядов — направлена по соединяющей их прямой, пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, а также диэлектрической проницаемости среды. Сила эта положительна, т. е. стремится увеличить расстояние между зарядами, когда их знаки одинаковы, и отрицательна при разных знаках: одноименные заряды отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Подтверждающие это эксперименты хорошо известны из элементарного курса физики.

Равенство (3.19) выражает закон Кулона, который часто используется в качестве исходного принципа при изложении электростатики. Как и все другие законы макроскопических электромагнитных явлений, он может рассматриваться как следствие уравнений электромагнитного поля — системы уравнений Максвелла. Множитель $1/4\pi$ в правой части (3.19) свойственен употребляемой в этой книге рационализованной системе единиц MKS, избавляющей от него уравнения Максвелла.

Вычислим потенциал поля точечного заряда. Внося выражение напряженности (3.18) под знак интеграла (3.10) и интегрируя по радиусу от r до ∞ , находим:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon r}. \quad (3.20)$$

Итак, потенциал произвольной точки M , находящейся на расстоянии r от точечного заряда, обратно пропорционален этому

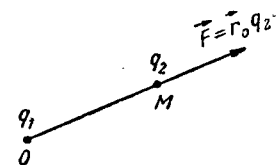


Рис. 33

Рис. 32

расстоянию. Разумеется формула (3.20) сохраняет смысл, если r значительно превышает размеры тела, принимаемого за точечный заряд.

Во всех рассуждениях подразумевалась безграничная диэлектрическая среда, свободная от каких бы то ни было тел, кроме рассматриваемых. Эта идеализация будет сохранена и в дальнейшем. Она допустима, если посторонние тела (а также границы диэлектрика) достаточно далеки.

§ 20. Система точечных зарядов. Диполь

Принцип суперпозиции позволяет применить полученные результаты в случае системы точечных зарядов. Поле системы в произвольной точке M находится геометрическим сложением полей отдельных зарядов:

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \mathbf{r}_{oi} \frac{q_i}{r_i^2}, \quad (3.21)$$

где \mathbf{E}_i напряженность поля заряда q_i (3.18), r_i — расстояние от этого заряда до точки M и \mathbf{r}_{oi} — соответствующий единичный вектор.

Потенциал в точке M равен сумме потенциалов всех зарядов:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_i}. \quad (3.22)$$

В случае непрерывного распределения заряда в области V с плотностью ρ потенциал произвольной точки создается совокупностью заряженных элементов $\rho\Delta V$ при $\Delta V \rightarrow 0$, т. е.

$$\varphi = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (3.23)$$

Этот вывод нельзя считать строгим: в его основе лежит выражение поля на большом расстоянии от заряда, в то время как под знаком интеграла (3.23) учитываются как далекие, так и сколь угодно близкие элементы ρdV . Но можно показать и совершенно безупречным путем, что формула (3.23) верна. Она является решением уравнения Пуассона (3.14).

Рассмотрим систему двух разноименных, но равных по абсолютной величине точечных зарядов, находящихся на расстоянии l . Ее *электрическим моментом* называется вектор

$$\mathbf{p} = ql, \quad (3.24)$$

где q — абсолютная величина каждого заряда, а l — вектор с абсолютным значением l и направленный к положительному заряду со стороны отрицательного.

Поле этой системы мы будем исследовать на расстояниях r значительно превышающих ее размер

$$r \gg l. \quad (3.25)$$

При соблюдении условия (3.25) система называется *диполем*. Если неограниченно уменьшать l , сохраняя момент \mathbf{p} , то в пределе получится «дипольная точка», характеризуемая вектором \mathbf{p} — *идеальный диполь*; условие (3.25) выполнено при любых r .

Согласно (3.22), потенциал диполя в произвольной точке M равен

$$\varphi = \lim_{\substack{r_1 \rightarrow r_2 \\ p = \text{const}}} \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Полагая в соответствии с рис. 34,

$$r_1 r_2 - r^2 \text{ и } r_1 - r_2 \rightarrow l \cos \vartheta,$$

находим:

$$\varphi = \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (3.26)$$

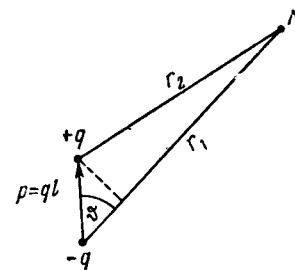


Рис. 34

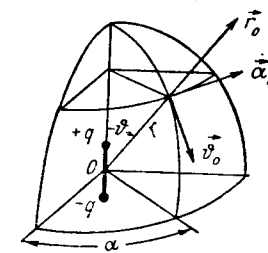


Рис. 35

Теперь по формуле (3.4) можно определить поле диполя \mathbf{E} . Это проще всего сделать, пользуясь сферической системой координат (рис. 35). Внося (3.26) в формулу¹

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = - \left(\mathbf{r}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vartheta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \alpha_0 \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \right),$$

получаем

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon r^3} (\mathbf{r}_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (3.27)$$

¹ Векторные операции в криволинейных координатах напоминаются в приложении.

Как и следовало ожидать, поле диполя симметрично относительно его оси. Силовые линии поля в меридиональной плоскости изображены на рис. 36.

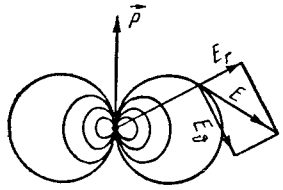


Рис. 36

Понятие диполя играет важную роль в теории электромагнетизма. Полученные выше результаты найдут применение в дальнейшем.

Примеры и упражнения

1. Как указывалось в § 16, потенциал бесконечно удаленных точек принимается в электростатике равным нулю. Допускает ли это условие существование бесконечно удаленных зарядов?

2. Объяснить причины, побуждающие писать $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ вместо $\mathbf{E} = \text{grad } \varphi$, хотя с точки зрения тождества $\text{rot grad } \varphi = 0$ оба выражения равноценны.

3. Найти поле точечного заряда дифференцированием его потенциала.

4. Определить электростатическое поле на прямой, являющейся осью симметрии равномерно заряженного кольца пренебрежимо малой толщины, если его радиус есть r_1 , а полный заряд равен q .

5. Система зарядов называется электрически нейтральной, если сумма всех зарядов равна нулю

$$\sum_i q_i = 0. \quad (3.28)$$

Пусть все заряды по абсолютной величине одинаковы. Сложив дипольные моменты парных разноименных зарядов, получим векторную сумму

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (3.29)$$

— электрический момент системы.

Объяснить, почему поле системы на большом расстоянии таково же, что и поле диполя с моментом \mathbf{P} .

6. Найти уравнение силовых линий диполя.

Вместо (3.11) будем исходить из аналогичной пропорции в сферических координатах

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta} = \frac{r \sin \vartheta da}{E_a}, \quad (3.30)$$

где dr , $r d\vartheta$ и $r \sin \vartheta da$ — элементы длины по координатам r , ϑ и a .

Ввиду того, что силовые линии лежат в меридиональных плоскостях (азимутальная составляющая E_a отсутствует), надо

найти решение одного лишь дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\vartheta} = r \frac{E_r}{E_\vartheta},$$

которое на основании (3.27) имеет вид

$$\frac{dr}{d\vartheta} = 2r \text{ctg } \vartheta. \quad (3.31)$$

Разделяя переменные

$$\frac{dr}{r} = 2 \text{ctg } \vartheta d\vartheta$$

и интегрируя, получаем

$$\ln Cr = 2 \ln \sin \vartheta, \quad (3.31)$$

откуда

$$C = \frac{\sin^2 \vartheta}{r}. \quad (3.32)$$

Полученное уравнение описывает силовые линии поля диполя. Задание. Построить несколько силовых линий, давая различные значения постоянной C .

§ 21. Поле заряженных нитей

Рассмотрим весьма тонкий цилиндр, несущий равномерно распределенный заряд — «заряженную нить». Ее поле легко найти путем непосредственного применения теоремы Гаусса (3.2а) подобно тому, как это делалось в случае точечного заряда. Из соображений симметрии следует, что электрические силовые линии — это равномерно идущие радиальные прямые. Поместив нить симметрично внутри мысленного цилиндра радиуса r и длины l , найдем поток индукции через его поверхность:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 2\pi r l D = q,$$

где q — заряд участка нити длиной l .

Отсюда

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon r}, \quad (3.33)$$

где

$$\tau = q/l \quad (3.34)$$

— линейная плотность заряда нити.

Представляет интерес случай двух параллельных нитей, заряженных с плотностью τ и $-\tau$ соответственно. На основании прин-

ципа суперпозиции поле нитей находится как сумма полей каждой из них в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon r_1} \mathbf{r}_{10} + \frac{-\tau}{2\pi\epsilon r_2} \mathbf{r}_{20}. \quad (3.35)$$

Потенциал в некоторой точке M представляет собой сумму потенциалов полей \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 :

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (3.36)$$

Пользуясь выражением (3.9), запишем

$$\varphi_1 = \int_M^{M'} \mathbf{E}_1 d\mathbf{r}_1 + \varphi'_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r'_1}{r_1} + \varphi'_1$$

и

$$\varphi_2 = \int_M^{M'} \mathbf{E}_2 d\mathbf{r}_2 + \varphi'_2 = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r'_2}{r_2} + \varphi'_2.$$

Здесь $r'_{1,2}$ означает расстояние от вспомогательной точки M' до одной из нитей, создающей в этой точке потенциал $\varphi'_{1,2}$.

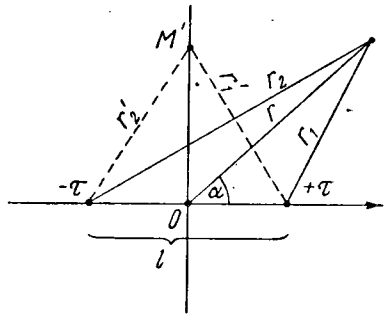


Рис. 37

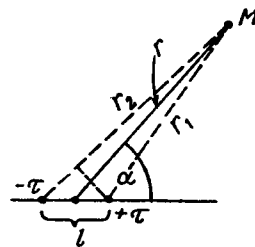


Рис. 38

Располагая точку M' на одинаковом расстоянии от нитей (рис. 37), так что $r'_1 = r'_2$, получаем

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.37)$$

(легко сообразить, что в этом случае $\varphi'_1 = -\varphi'_2$).

Поле в весьма удаленных точках

$$r \gg l \quad (3.38)$$

можно выразить в цилиндрической системе координат, расположив ее ось симметрично (рис. 38). При условии (3.38) очевидно

$$r_1 \approx r - \frac{l}{2} \cos \alpha \quad \text{и} \quad r_2 \approx r + \frac{l}{2} \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$\varphi \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2r + l \cos \alpha}{2r - l \cos \alpha}, \quad (3.39)$$

и напряженность поля, определяемая по формуле (3.4) в цилиндрических координатах

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi = -\left(r_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \alpha_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

с учетом (3.38), примет вид:

$$\mathbf{E} \approx \frac{\tau l}{2\pi\epsilon r^2} (r_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha). \quad (3.40)$$

При изучении поля заряженных нитей полезно учесть следующее обстоятельство. Как показывает выражение (3.37), эквипотенциальные поверхности определены требованием:

$$\frac{r_2}{r_1} = k \quad (3.41)$$

(k — некоторая постоянная).

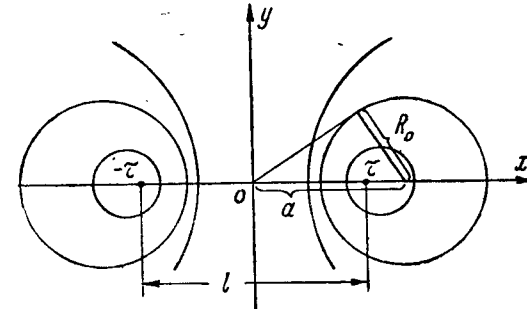


Рис. 39

Перепиывая (3.41) в декартовой системе координат, ориентация которой показана на рис. 39, получим

$$\frac{\left(x + \frac{l}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{l}{2}\right)^2 + y^2} = k^2. \quad (3.41a)$$

Это уравнение приводится к виду

$$(x - a)^2 + y^2 = R_0^2, \quad (3.42)$$

где

$$a = \frac{l}{2} \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \quad \text{и} \quad R_0^2 = a^2 - (l/2)^2. \quad (3.43)$$

Отсюда видно, что эквипотенциальные поверхности образуют при пересечении с плоскостью xOy окружности радиуса R_0 (рис. 39), которые смещены относительно начала O по x на расстояние a .

§ 22. Электростатическая модель диэлектрической среды

Отличительным свойством идеального диэлектрика является отсутствие свободно перемещающихся заряженных частиц ($\sigma = 0$). Диэлектрик может состоять как из электрически нейтральных молекул, так и из ионов, связываемых неэлектрическими силами. В обоих случаях элементы среды — молекулы или кристаллические ячейки, внутри которых оказываются *связанными* равные по абсолютной величине разноименные заряды — можно рассматривать как *диполи*. Это представление приводит к электростатической модели среды в виде системы произвольно ориентированных диполей. Описание модели остается неполным, пока не указан характер *сил связи*, удерживающих заряды внутри элементарных диполей и при всяком смещении стремящихся возвратить их в положение равновесия. Опыт показывает, что они подобны силам упругости, т. е. в достаточно широкой области *пропорциональны смещению*.

Положим, что в диэлектрической среде существует поле \mathbf{E} , обусловленное распределением заряда в области V с плотностью ρ . Действие его проявляется в смещении всех положительных связанных зарядов в направлении вектора \mathbf{E} и всех отрицательных — в противоположном направлении. Это значит, что в поле \mathbf{E} моменты всех элементарных диполей получают *параллельные* ему приращения. Эти приращения не только параллельны, но и пропорциональны вектору \mathbf{E} , так как они пропорциональны силе связи, уравновешенной в состоянии смещения силой поля $q\mathbf{E}$. Итак,

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{0i} + \chi \mathbf{E}, \quad (3.44)$$

где \mathbf{p}_i — момент произвольного диполя i в поле \mathbf{E} , \mathbf{p}_{0i} — его момент в отсутствие поля, а χ — коэффициент пропорциональности, определяемый силами связи.

Суммируя элементарные дипольные моменты в некоторой области ΔV , получаем:

$$\Delta \mathbf{P} \equiv \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_i = \sum_{\Delta V} \mathbf{p}_{0i} + N \chi \mathbf{E}, \quad (3.45)$$

где N — число элементарных диполей внутри ΔV .

Сумма начальных моментов \mathbf{p}_{0i} (первый член в правой части) равна нулю, потому что любые ориентации диполей равновероятны, пока нет внешнего поля \mathbf{E} . Относя обе части равенства (3.45)

к единице объема и обозначая

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta V} = \mathbf{P} \quad (3.46)$$

и

$$\frac{N \chi}{\epsilon_0 \Delta V} = \chi^3, \quad (3.47)$$

получаем соотношение:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^3 \mathbf{E}. \quad (3.48)$$

Вектор \mathbf{P} , имеющий смысл удельного электрического момента единицы объема диэлектрика, называется *поляризованностью* среды. Ранее (§ 5) понятие поляризованности было введено иным путем. Можно показать, что речь идет об одной и той же физической величине.

Потенциал в произвольной точке диэлектрической среды можно определить двумя путями. С одной стороны, это, согласно (3.23),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r}. \quad (3.49)$$

С другой стороны, заменяя диэлектрик его моделью, системой диполей в *пустоте*, имеем:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_d, \quad (3.50)$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (3.51)$$

есть потенциал заданного распределения зарядов, а φ_d — потенциал, создаваемый всеми диполями модели.

Каждый элемент объема среды ведет себя как диполь с моментом $\mathbf{P} dV$, поэтому в соответствии с формулой (3.26) потенциал его поля в произвольной точке на расстоянии r есть

$$d\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \mathbf{r}_0}{r^2} dV.$$

Потенциал системы диполей, эквивалентной всему диэлектрику, находится интегрированием этого выражения по полному объему

$$\varphi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P} \mathbf{r}_0}{r^2} dV. \quad (3.52)$$

Для дальнейшего этот интеграл придется преобразовать. Вектор $-\mathbf{r}_0/r^2$, как нетрудно проверить по обычной формуле в сферических координатах, есть градиент функции $1/r$. Но обычная формула (см., например, приложение) получена для случая фиксированного начала координат и переменной точки наблюдения (рис. 40). А в формуле (3.52) фиксирован конец вектора \mathbf{r} , связанный с точкой, в которой определяется потенциал. Начальная же точка

этого вектора, лежащая в элементе объема dV , является переменной в процессе интегрирования (рис. 40, б). Это значит, что направление возрастания величины r противоположно r_0 , т. е. градиент r , а следовательно, и любой функции от r по сравнению со случаем фиксированного начала координат должен переменить знак. Из сказанного вытекает

$$r_0/r^2 = \text{grad } \frac{1}{r},$$

и тогда подынтегральное выражение принимает вид

$$\frac{Pr_0}{r^2} = P \text{ grad } \frac{1}{r}.$$

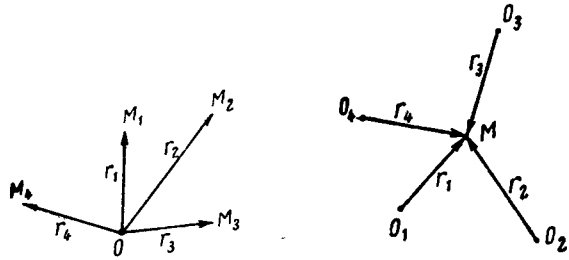


Рис. 40

Взяв, далее, известное векторное тождество

$$\text{div}(\psi \mathbf{A}) = \psi \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{ grad } \psi,$$

положим в нем

$$\psi = \frac{1}{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} = \mathbf{P},$$

тогда

$$\frac{Pr_0}{r^2} = \text{div } \frac{\mathbf{P}}{r} - \frac{1}{r} \text{div } \mathbf{P}.$$

Внося это в (3.52) и применяя формулу Остроградского-Гаусса, получаем:

$$\varphi_g = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\oint_S \frac{\mathbf{P}}{r} d\mathbf{S} - \int_V \frac{\text{div } \mathbf{P}}{r} dV \right). \quad (3.53)$$

Распространим интегрирование на безграничную диэлектрическую среду, т. е. отнесем границу S на бесконечно большое расстояние от заданного распределения заряда. Легко доказать, что поверхностный интеграл в (3.53) при этом исчезнет. Действительно, заменив вектор \mathbf{P} , согласно (3.49), через $\epsilon_0 \chi^{\text{э}} \mathbf{E}$ и рассматривая \mathbf{E} в бесконечности как поле точечного заряда, видим, что

$$\oint_{S \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}}{r} d\mathbf{S} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \epsilon_0 \chi^{\text{э}} \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} = 0$$

поверхность взята сферической).

Таким образом, потенциал, создаваемый дипольной моделью, т. е. связанными зарядами диэлектрика, есть

$$\varphi_d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div } \mathbf{P}}{r} dV, \quad (3.54)$$

а полный потенциал, на основании (3.50, 3.51), имеет вид:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q - \text{div } \mathbf{P}}{r} dV. \quad (3.55)$$

Приравняв два различных выражения потенциала (3.49) и (3.55)

$$\frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{q}{r} dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{q - \text{div } \mathbf{P}}{r} dV$$

и привлекая (3.2), находим, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (3.56)$$

а это равенство есть не что иное, как определение поляризованности, данное в § 5.

Теперь, отмечая тождественность формул (1.30) и (3.48), можно убедиться, что коэффициент пропорциональности (3.47)—это введенная в § 5 электрическая восприимчивость. Электрическая модель диэлектрика раскрывает физическое содержание этого понятия.

Наконец, как это видно из сопоставления (3.49) и (3.46), взятая с обратным знаком расходимость поляризованности играет роль плотности заряда дипольной модели, т. е. плотности связанных зарядов:

$$-\text{div } \mathbf{P} = q_{\text{св}}. \quad (3.57)$$

3. ПРОВОДЯЩИЕ И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ТЕЛА В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

§ 23. Проводники в электростатическом поле. Емкость

Согласно уравнению (1.23)

$$\delta = \sigma \mathbf{E}$$

электрическому полю в проводящей среде ($\sigma \neq 0$) сопутствует ток ($\delta \neq 0$). Поле неподвижных зарядов, электростатическое ($\delta = 0$), внутри проводника, таким образом, существовать не может. Свободно перемещающиеся заряды благодаря взаимному отталкиванию оказываются на поверхности проводника и занимают равновесное положение, при котором их поля внутри него взаимно уничтожаются. Используя понятие, введенное в § 8, можно сказать, что поверхность заряжается с какой-то плотностью ξ . Далее, совершенно очевидно, что электростатическое поле всегда нормально проводящей поверхности, ибо наличие тангенциальной составляющей вектора \mathbf{E} привело бы к возникновению тока вдоль

поверхности (рис. 41). Применяя к поверхности проводника граничное условие (1.45а) и учитывая, что внутри него поле отсутствует, получаем соотношение

$$\mathbf{D} = \mathbf{n}_0 \xi, \quad (3.58)$$

где \mathbf{n}_0 — единичная внешняя нормаль (рис. 42).

Итак, электрическая индукция у поверхности проводника равна по величине поверхностной плотности заряда.

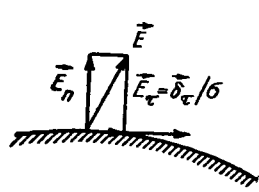


Рис. 41

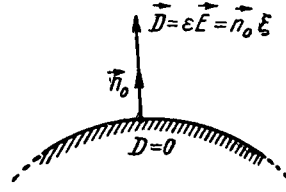


Рис. 42

В виду того, что электрические силовые линии нормальны проводящей поверхности, она (§ 17) *эквипотенциальна*. Это дает право говорить о *потенциале проводника*, подразумевая потенциал любой его точки. Различие формы и размеров уединенных проводников сказывается в том, что для получения одного и того же потенциала им приходится сообщать разные заряды. С этой точки зрения каждое уединенное проводящее тело характеризуется *емкостью C*, определяемой как заряд, при котором потенциал проводника относительно бесконечности (3.10) равен единице. Ввиду линейной зависимости потенциала и заряда емкость равна отношению

$$C = \frac{q}{\Phi}. \quad (3.59)$$

Единица измерения емкости *фарада (ф)* имеет размерность [кулон/вольт].

В системе проводящих тел наблюдается взаимное влияние — *электростатическая индукция* — заключающееся в том, что распределение заряда на каждом из проводников обусловлено всеми остальными. Заряд некоторого проводника i (рис. 43) линейно связан с потенциалами всех проводников системы

$$q_i = \alpha_{i1}\Phi_1 + \alpha_{i2}\Phi_2 + \dots + \alpha_{ii}\Phi_i + \dots + \alpha_{ik}\Phi_k + \dots + \alpha_{in}\Phi_n.$$

Это уравнение, однако, предпочитают писать в ином виде:

$$q_i = C_{i1}(\Phi_i - \Phi_1) + C_{i2}(\Phi_i - \Phi_2) + \dots + C_{ii}\Phi_i + \dots + C_{ik}(\Phi_i - \Phi_k) + \dots + C_{in}(\Phi_i - \Phi_n). \quad (3.60)$$

Коэффициент C_{ii} называется *собственной емкостью* проводника i , а коэффициенты C_{ij} — *взаимными емкостями*.

Следует подчеркнуть, что собственные емкости проводников в системе отличаются от емкостей этих проводников в уединении. Точно так же взаимные емкости отдельных пар проводников определяются не только этими, но и всеми остальными проводниками системы. Если потенциалы и полные заряды всех тел известны, собственные и взаимные емкости находятся как решения системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + \dots + C_{1k}(\Phi_1 - \Phi_k) + \dots + C_{1n}(\Phi_1 - \Phi_n), \\ q_2 &= C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2 + \dots + C_{2k}(\Phi_2 - \Phi_k) + \dots + C_{2n}(\Phi_2 - \Phi_n), \\ &\dots \dots \dots \\ q_n &= C_{n1}(\Phi_n - \Phi_1) + C_{n2}(\Phi_n - \Phi_2) + \dots + C_{nk}(\Phi_n - \Phi_k) + \dots + C_{nn}\Phi_n \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Система двух защищенных от внешнего влияния проводников

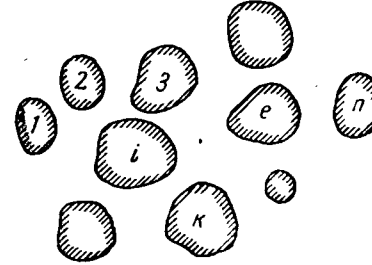


Рис. 43

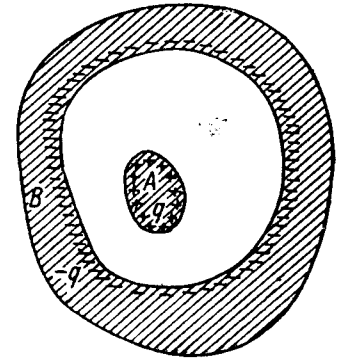


Рис. 44

называется в электростатике *конденсатором*. В идеальном конденсаторе один из проводников B (рис. 44) представляет замкнутую полость, внутри которой находится другой проводник A . Положим, что последнему сообщен заряд q . Мысленно построим внутри проводника B замкнутую оболочку S' , охватывающую A , и применим к ней теорему Гаусса (3.2а). Поток индукции через оболочку S' равен нулю, так как она проходит внутри проводника, где нет поля. Согласно теореме Гаусса, равен нулю и полный заряд внутри S' . Это значит, что заряд q внутреннего проводника A индуцирует на внутренней поверхности проводника B равный по абсолютной величине заряд противоположного знака $-q$. Абсолютную величину отношения одного из этих зарядов к разности их потенциалов называют *емкостью конденсатора*:

$$C = \left| \frac{q}{\Phi_A - \Phi_B} \right|. \quad (3.62)$$

В этой записи обычно выбирают $\varphi_A - \varphi_B > 0$ и $q > 0$, так что знак абсолютной величины опускается.

Примеры и упражнения

1. Поля простейших по форме проводников. Из соображений симметрии следует, что поле равномерно заряженной плоскости однородно и параллельно нормали:

$$E = n_0 \frac{\xi}{\epsilon}. \quad (3.63)$$

Поле равномерно заряженной сферы имеет тот же вид, что и поле точечного заряда (3.18):

$$E = r_0 \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} = r_0 \frac{\xi}{\epsilon} \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad r \geq R. \quad (3.64)$$

Поле равномерно заряженного цилиндра то же, что и поле нити (3.33):

$$E = r_0 \frac{\tau}{2\pi\epsilon r} = r_0 \frac{\xi}{\epsilon} \frac{R}{r}; \quad r \geq R. \quad (3.65)$$

В выражениях (3.64, 3.65) R означает радиус сферы и цилиндра. Справедливость записанных выражений можно проверить и интегрированием уравнения Лапласа (3.15). Так, в цилиндрических координатах (см. приложение) оно имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Так как в данном случае поле однородно по азимуту $\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} = 0\right)$ и вдоль оси цилиндрической системы $\left(\frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$, то уравнение существенно упрощается:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0. \quad (3.66)$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$r \frac{d\varphi}{dr} = A,$$

или

$$d\varphi = A \frac{dr}{r},$$

где A — произвольная постоянная.

Интегрируя, находим выражение потенциала

$$\varphi = A \ln r + B \quad (3.67)$$

(B — вторая произвольная постоянная), а отсюда по формуле (3.4), и напряженность поля

$$E = -\text{grad } \varphi = -r_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -r_0 \frac{A}{r}. \quad (3.68)$$

Согласно (3.58), электрическая индукция на поверхности цилиндра ($r = R$) равна плотности поверхностного заряда ξ :

$$-\epsilon \frac{A}{R} = \xi.$$

Откуда

$$A = -\frac{\xi}{\epsilon} R, \quad (3.69)$$

и мы пришли к ранее полученной формуле (3.65).

Задание. Интегрированием уравнения Лапласа в сферических координатах показать справедливость формулы (3.64).

1. Емкость уединенного шара. Потенциал шара находим по формуле (3.10), внося под знак интеграла (3.64) и интегрируя по радиусу:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon R}. \quad (3.70)$$

Емкость шара, согласно (3.59), есть

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\epsilon R. \quad (3.71)$$

Задание. 1. Определить емкость земного шара ($R = 6,37 \cdot 10^6$ м).

2. Найти диаметр шара, емкость которого в безграничном вакууме равна 1 ф.

3. Сферический конденсатор, изображенный на рис. 45, дает пример идеального конденсатора. Его поле также описывается формулой (3.64). Разность потенциалов внутренней и внешней сфер на основании (3.9) есть

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (3.72)$$

По формуле (3.62) находим емкость конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (3.73)$$

4. Цилиндрический конденсатор показан на рис. 46. Разность потенциалов внутреннего и внешнего цилиндров, согласно (3.9) и (3.65), находится как интеграл

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (3.74)$$

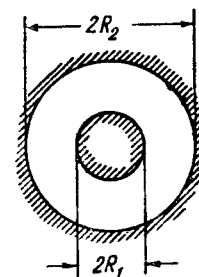


Рис. 45

Емкость, приходящаяся на единицу длины бесконечного конденсатора,

$$C' = \frac{\tau}{\Phi_A - \Phi_B} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.75)$$

Эта формула пригодна для расчета реальных конденсаторов большой длины. В случае короткого конденсатора (рис. 47) уже нельзя пренебречь искажением поля у оснований цилиндра, и формула (3.75) становится непригодной.

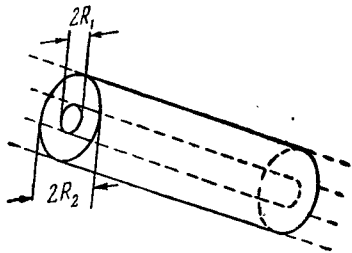


Рис. 46

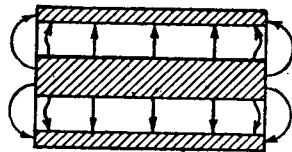


Рис. 47

5. Плоский конденсатор. Поле между параллельными проводящими плоскостями определяется формулой (3.63). На краях ограниченных пластин происходит искажение поля (рис. 48, а), однако им можно пренебречь, когда площадь пластин достаточно велика (рис. 48, б). На основании (3.9) и (3.63) разность потенциалов между ними

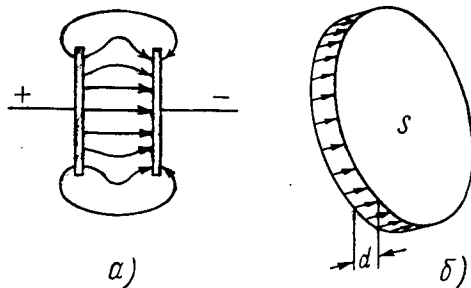


Рис. 48

$$\Phi_A - \Phi_B = Ed, \quad (3.76)$$

а заряд одной пластины

$$q = \xi S = \epsilon ES. \quad (3.77)$$

Таким образом, емкость плоского конденсатора выражается формулой:

$$C = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (3.78)$$

6. Конденсаторы с двухслойным диэлектриком. Определить емкость плоского конденсатора, показанного на рис. 49: между пластинами на расстоянии h от одной из них проходит плоская граница раздела сред, диэлектрические проницаемости которых ϵ_1 и ϵ_2 .

Ответ:

$$C = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 h + \epsilon_1 (d - h)}. \quad (3.79)$$

Решить аналогичные задачи для случаев: а) цилиндрического (рис. 50) и б) сферического (рис. 51) конденсаторов.

Ответ:

$$a) C' = \frac{2\pi\epsilon_1\epsilon_2}{\epsilon_2 \ln \frac{R}{R_1} + \epsilon_1 \ln \frac{R_2}{R}}, \quad (3.80)$$

$$б) C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R R_2}{\epsilon_2 R_2 (R - R_1) + \epsilon_1 R_1 (R_2 - R)}. \quad (3.81)$$

7. Два одинаковых плоских конденсатора (рис. 52) заполнены одним и тем же диэлектриком (относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r) и заряжены до разности потенциалов $\Phi_A - \Phi_B = U$. В первом конденсаторе (а)

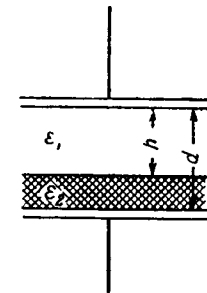


Рис. 49

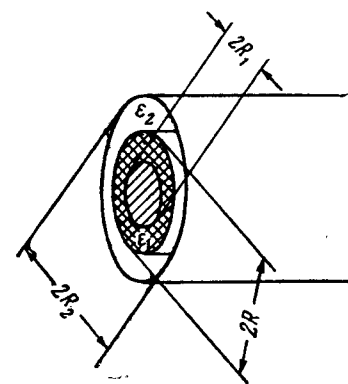


Рис. 50

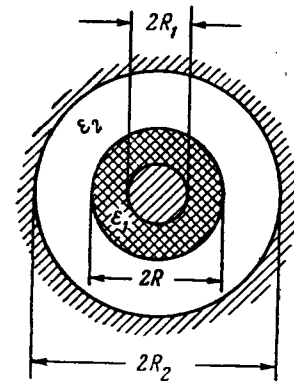


Рис. 51

диэлектрик прорезан плоской щелью шириной d , параллельной пластинам; во втором конденсаторе подобная же щель перпендикулярна им. Показать, что поле в щели второго конденсатора (б), если она весьма узка ($d \rightarrow 0$), в ϵ_r раз больше, чем в щели первого.

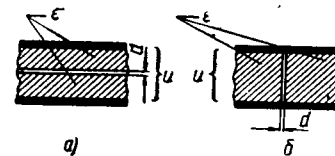


Рис. 52

§ 24. Электростатическая энергия

Из главы 2 известно, что с электрическим полем связана энергия, распределенная в пространстве с плотностью

$$w^3 = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}, \quad (3.82)$$

и в некоторой области V определяемая интегралом

$$W^p = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E} \mathbf{D} dV. \quad (3.83)$$

Из этого фундаментального результата мы будем исходить при изучении энергии электростатического поля.

Возьмем общий случай: в произвольной области V , ограниченной поверхностью S , распределен заряд с плотностью ρ . Вычисляя, заключенную в области энергию, внесем под знак интеграла (3.83) выражение напряженности (3.4)

$$W^p = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi dV$$

и преобразуем подынтегральное выражение в соответствии с известным векторным тождеством

$$\operatorname{div} \varphi \mathbf{D} \equiv \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi.$$

Тогда

$$W^p = \frac{1}{2} \int_V \varphi \operatorname{div} \mathbf{D} dV - \frac{1}{2} \int_V \operatorname{div} \varphi \mathbf{D} dV.$$

Заменяя в первом интеграле $\operatorname{div} \mathbf{D}$ на ρ , а во втором применяя формулу Остроградского — Гаусса, получаем:

$$W^p = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV - \frac{1}{2} \int_S \varphi \mathbf{D} dS. \quad (3.84)$$

В дальнейшем будем считать заряженную область V уединенной: где бы то ни было вне V нет зарядов ($\rho = 0$). Распространим интегрирование на бесконечное пространство, т. е. будем учитывать полную энергию. При этом поверхностный интеграл в (3.84) в результате удаления границы S в бесконечность исчезнет. Действительно, в сравнении с расстоянием до новой границы заряд, сосредоточенный внутри V , заведомо можно считать точечным (§§ 1,19). Вводя под знак поверхностного интеграла выражения поля (3.18) и потенциала (3.20) точечного заряда и интегрируя по поверхности сферы неограниченно возрастающего радиуса, имеем:

$$\int_{S \rightarrow \infty} \varphi \mathbf{D} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \cdot \frac{q}{4\pi \epsilon r} \cdot \frac{q}{4\pi r^2} = 0$$

(аналогичный случай рассматривался в § 22).

Итак, электростатическая энергия уединенной области есть

$$W^p = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV. \quad (3.85)$$

Система проводников. Применим полученную формулу в случае уединенной системы n проводящих тел. Вне проводников заряды отсутствуют, поэтому, согласно (3.85),

$$W^p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \rho_i \varphi_i dV,$$

где V_i — объем i -того проводника, φ_i — его потенциал и ρ_i — объемная плотность заряда.

Ввиду того, что потенциал каждого проводника постоянен, энергия системы

$$W^p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \int_{V_i} \rho_i dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i q_i, \quad (3.86)$$

где

$$q_i = \int_{V_i} \rho_i dV$$

— полный заряд i -того проводника.

Необходимо подчеркнуть, что, используя в случае проводника представление об объемном заряде, мы фактически имеем в виду заряд, расположенный тонким слоем у его поверхности (§ 23). Разумеется, этот заряд занимает некоторый объем, хотя чаще более удобно рассматривать его как поверхностный (§§ 8,23) и пользоваться вместо ρ величиной ξ .

Из (3.86), в частности, следует, что энергия *одиночного проводника* ($n=1$) равна

$$W^p = \frac{\varphi q}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (3.87)$$

Применяя формулу (3.86) к *конденсатору* ($n=2$, $q_1=q$ и $q_2=-q$), имеем:

$$W^p = \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{q^2}{2C} = \frac{C}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2. \quad (3.88)$$

Собственная и взаимная энергия. В гл. 2 было показано, что на энергию электромагнитного поля не распространяется принцип суперпозиции: при соединении элементов в систему к их *собственной* энергии добавляется энергия взаимодействия, или *взаимная* энергия. В случае системы проводников потенциал каждого из них можно представить в виде суммы

$$\varphi_i = \overset{\circ}{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i, \quad (3.89)$$

где $\overset{\circ}{\varphi}_i$ — потенциал проводника в уединенном состоянии, а $\tilde{\varphi}_i$ — потенциал, создаваемый действием всех остальных проводников.

Соответственно этому перепишем (3.86):

$$W^{\circ} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{\varphi}_i q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i q_i, \quad (3.90)$$

или

$$W^{\circ} = \overset{\circ}{W}^{\circ} + \tilde{W}^{\circ}, \quad (3.90a)$$

где первый член есть собственная энергия системы проводников, а второй — взаимная.

Говорить о собственной энергии идеального точечного заряда (или системы зарядов) не имеет смысла: вместе с полем и потенциалом она обращается в бесконечность. В этом сказывается несовершенство представления о заряде, сосредоточенном в точке. Однако понятие взаимной энергии системы идеальных точечных зарядов сохраняет смысл, так как все потенциалы $\tilde{\varphi}$ конечны.

Рассмотрим еще энергию взаимодействия точечных зарядов с заданным полем. Работа, совершаемая при удалении из электростатического поля $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ заряда q , равна $q\varphi$. Следовательно, $q\varphi$ выражает энергию взаимодействия заряда с полем \tilde{W}° .

В случае n зарядов

$$\tilde{W}^E = \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i, \quad (3.91)$$

где φ_i — потенциал поля \mathbf{E} в точке i , содержащей заряд q_i . Возьмем диполь ($n=2$, $q_1 = -q$ и $q_2 = q$). Энергия взаимодействия диполя с полем \mathbf{E} равна

$$\tilde{W}^E = q(\varphi_2 - \varphi_1) = q\Delta\varphi,$$

или

$$\tilde{W}^E = q \frac{\partial \varphi}{\partial l} l = ql \text{grad}_l \varphi = -\mathbf{pE}, \quad (3.92)$$

т. е. выражается взятым с обратным знаком скалярным произведением момента диполя на напряженность поля.

Примеры и упражнения

1. Путем непосредственного интегрирования поля найти электростатическую энергию проводящего шара в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Внося (3.64) в (3.82), записываем плотность энергии, связанной с заряженным шаром:

$$w^{\circ} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon r^4}, \quad (r \geq R). \quad (3.93)$$

Элемент объема в сферической системе координат (рис. 53) есть

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta da.$$

Интегрируя w° по всему объему, занимаемому полем (бесконечное пространство вне шара), получаем:

$$W^{\circ} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon} \int_R^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} dr d\vartheta da = \frac{q^2}{8\pi \epsilon R} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (3.94)$$

2. Таким же путем найти энергию сферического конденсатора.

3. Определить собственную и взаимную энергию двух металлических шаров, заряды которых равны q_1 и q_2 , а радиусы — R_1 и R_2 . Расстояние между центрами шаров r значительно превышает размеры каждого из них.

Собственные потенциалы шаров вычисляем по формуле (3.70):

$$\overset{\circ}{\varphi}_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{4\pi \epsilon R_{1,2}}.$$

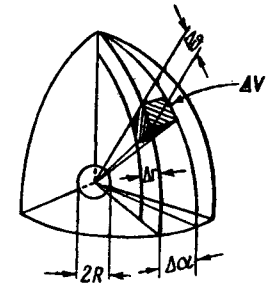


Рис. 53

Каждый шар в поле другого можно рассматривать как точечный заряд, так что на основании (3.20)

$$\tilde{\varphi}_{1,2} = \frac{q_{2,1}}{4\pi \epsilon r}.$$

По формуле (3.90) находим собственную энергию

$$\overset{\circ}{W} = \frac{1}{8\pi \epsilon} \left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2} \right) \quad (3.95)$$

и взаимную энергию шаров:

$$\tilde{W}^{\circ} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon r}. \quad (3.96)$$

Как видно, энергия взаимодействия шаров отрицательна, если они заряжены разноименно. Это соответствует тому факту, что при соединении шаров в систему (при сближении их из состояния бесконечного удаления) силы поля совершают работу, и полная энергия уменьшается. Наоборот, при сближении одноименных зарядов совершается работа против сил поля, так что полная энергия возрастает (величина \tilde{W}° положительна).

4. Вычислить изменение энергии плоского конденсатора при уменьшении расстояния между его пластинами вдвое:

- если разность потенциалов пластин остается постоянной и
- если остается постоянным заряд каждой пластины.

§ 25. Задачи электростатики и методы их решения

Прямой задачей электростатики является нахождение поля по заданному распределению заряда. Если плотность заряда в каждой точке пространства известна, то потенциал как функция положения определяется уравнением Пуассона (3.14), решение которого имеет вид (3.23)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho dV}{r} \quad (3.97)$$

(считается, что все заряды расположены в конечной области пространства). Поле находится, согласно (3.4), как градиент потенциала. Обратная задача — выявление зарядов по известному полю — сводится, согласно (3.2), к дифференцированию.

Во многих типичных задачах электростатики требуется найти поле в однородном диэлектрике, содержащем заряженные проводящие тела. Если в самом диэлектрике нет свободных зарядов, то потенциал искомого поля подчиняется уравнению Лапласа (3.15). Совокупность всех проводящих поверхностей образует *границу* области существования поля, на которой, как известно из § 23,

$$\left. \begin{aligned} E_\tau &= 0, \\ E_n &= \frac{\xi}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \text{ на } S. \quad (3.98)$$

Это равносильно следующим граничным условиям для потенциала, легко получаемым отсюда с помощью (3.4):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} &= 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n} &= -\frac{\xi}{\epsilon} \end{aligned} \right\} \text{ на } S. \quad (3.98a)$$

Итак, для определения потенциала надлежит решить уравнение Лапласа при граничных условиях (3.98a). Это достижимо лишь при достаточно простой форме проводника (проводников системы), когда могут быть подобраны подходящие криволинейные координаты. Простой пример такого рода рассмотрен в § 23.

Однако для указанной постановки задачи часто не хватает данных, так как практически бывают известны лишь полные заряды проводников либо их потенциалы, а не распределение заряда ξ . Впрочем, задание потенциалов или полных зарядов проводящих тел принципиально достаточно для нахождения электростатического поля, т. е. *единственным* образом определяет решение уравнения Лапласа.

Теорема единственности. Доказательство этого положения составляет содержание *теоремы единственности электростатики*.

Начнем с того, что запишем, формулу Остроградского — Гаусса относительно вектора $\mathbf{A} = \psi \text{ grad } \varphi$

$$\int_V \text{div} (\psi \text{ grad } \varphi) dV = \int_S \psi \text{ grad } \varphi dS.$$

Но ввиду тождества (см. приложение)

$$\text{div} (\psi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \text{ grad } \psi + \psi \text{ div } \mathbf{A},$$

можно написать

$$\text{div} (\psi \text{ grad } \varphi) = \text{grad } \psi \text{ grad } \varphi + \psi \nabla^2 \varphi.$$

Под знаком интеграла в правой части уравнения сделаем преобразование

$$\text{grad } \varphi dS = \text{grad}_n \varphi dS = \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS.$$

Подставив найденные результаты под знаком соответствующих интегралов, получаем равенство

$$\int_V (\text{grad } \psi \text{ grad } \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) dV = \int_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (3.99)$$

Это одна из формулировок *теоремы Грина*, играющая в доказательстве вспомогательную роль.

Теорема единственности состоит в следующем:

В диэлектрической среде расположена система проводников, известны их потенциалы, либо полные заряды. Требуется доказать, что заданные условия единственным образом определяют потенциал в любой точке поля.

Допустим противное, а именно, что для каждой точки диэлектрика существуют два различных решения уравнения Лапласа φ_1 и φ_2 . Разность их назовем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \delta\varphi$$

и положим в формуле (3.99)

$$\psi = \varphi = \delta\varphi.$$

Таким путем находится соотношение

$$\int_V (\text{grad } \delta\varphi)^2 dV = \int_S \delta\varphi \left(\frac{\partial}{\partial n} \delta\varphi \right) dS, \quad (3.100)$$

исходное для дальнейшего. Здесь S — совокупность всех проводящих поверхностей, а V — полное пространство между проводниками.

Первый случай. Заданы потенциалы проводников. Таким образом, на поверхностях проводников потенциалы однозначно определены условием задачи

$$\delta\varphi = 0 \text{ на } S.$$

Поэтому из (3.100) следует:

$$\int_V (\text{grad } \delta\varphi)^2 dV = 0. \quad (3.101)$$

Так как подынтегральное выражение неотрицательно, равенство (3.101) соблюдается только при условии, что $\text{grad } \delta\varphi = 0$ во всем пространстве, или $\delta\varphi = \text{const}$.

Но на поверхностях проводников $\delta\varphi = 0$, поэтому везде $\delta\varphi = 0$, т. е. везде

$$\varphi_1 = \varphi_2,$$

и теорема доказана.

Второй случай. Заданы полные заряды проводников. Ввиду того, что потенциалы φ_1 и φ_2 на поверхностях проводников могут быть только постоянными, должна быть постоянной и их разность $\delta\varphi$. Рассматривая один из проводников, запишем.

$$\int_S \delta\varphi \left(\frac{\partial}{\partial n} \delta\varphi \right) dS = \delta\varphi \int_S \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \right) dS,$$

причем, согласно (3.98а),

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = -\frac{\xi_1}{\epsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\frac{\xi_2}{\epsilon},$$

где ξ_1 и ξ_2 — плотности заряда для первого и второго решения.

Будем считать, что диэлектрическая среда однородна, т. е.

$$\epsilon = \text{const},$$

тогда исходное равенство принимает вид:

$$\int_S \delta\varphi \left(\frac{\partial}{\partial n} \delta\varphi \right) dS = \frac{\delta\varphi}{\epsilon} \int_S (\xi_2 - \xi_1) dS. \quad (3.102)$$

Правая часть обращается в нуль, так как полный заряд проводника задан, и, следовательно, q_1 и q_2 — это одна и та же величина:

$$\frac{\delta\varphi}{\epsilon} \int_S (\xi_2 - \xi_1) dS = \frac{\delta\varphi}{\epsilon} (q_2 - q_1) = 0.$$

Произведенные рассуждения применимы к каждому из проводников, а это значит, что равна нулю правая часть равенства (3.100), представляющая собой сумму интегралов вида (3.102). Отсюда снова вытекает (3.101) и его следствие

$$\delta\varphi = \text{const}.$$

Таким образом, решения φ_1 и φ_2 отличаются лишь на постоянную, что, как известно из § 16, не имеет значения. Если же принять обычное условие исчезновения потенциала на бесконечности, то эта постоянная будет исключена.

Итак, теорема и во втором случае доказана.

Теорема единственности имеет немалое практическое значение. Уже говорилось, что интегрирование уравнения Лапласа осуществимо лишь в сравнительно немногих случаях простой геометрической конфигурации проводника. Однако произведенное доказательство открывает путь различным косвенным, «искусственным» приемам нахождения поля. Действительно, независимо от того, каким путем получено решение той или иной конкретной задачи, удовлетворяющее граничным условиям, существует гарантия, что это решение, будучи единственным, выражает искомое поле.

§ 26. Примеры специальных приемов решения задач электростатики

Метод зеркальных изображений. Если система точечных зарядов находится в соседстве с проводником, то можно подобрать такие дополнительные (фиктивные) заряды, являющиеся как бы зеркальными изображениями первоначальных, что полное поле — и истинных и фиктивных зарядов, каждый из которых рассматривается без учета существования проводника, — удовлетворит граничным условиям на его поверхности.

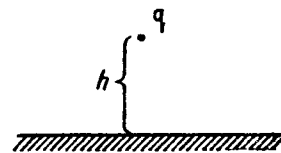


Рис. 54

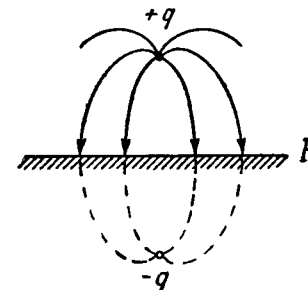


Рис. 55

Пусть, например, заряд q находится на расстоянии h от проводящей плоскости P (рис. 54). Нетрудно найти поле, которое, будучи наложено на поле заряда q , удовлетворит требованию постоянства потенциала на P . Это поле заряда q' (рис. 55), расположенного за плоскостью P на том же расстоянии h , равного ему по абсолютной величине и противоположного по знаку. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить, что плоскость симметрии двух разных и разноименных зарядов эквипотенциальна (силовые линии пересекают ее под прямым углом). Мысленно заполнив полупространство по одну ее сторону проводящей средой, мы, очевидно, не нарушаем поля в оставшемся полупространстве с зарядом.

Итак, для того, чтобы найти поле точечного заряда, расположенного над проводящей плоскостью, надо мысленно построить

по указанному способу его «зеркальное изображение» и искать поле над плоскостью как суперпозицию полей заряда и изображения. Подобным же образом — путем построения изображений отдельных зарядов — решается задача для системы зарядов над плоскостью.

Фактическую причину влияния проводника на поле зарядов следует видеть в электростатической индукции (§ 23). Так, в рассмотренном примере поле в плоскости проводника (рис. 56) равно

$$E = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} n_0 \cos \vartheta = -\frac{qh}{2\pi\epsilon r^3} n_0 \quad (3.103)$$

(произведено сложение полей двух зарядов на основании (3.21). Следовательно, плоскость несет заряд плотности (3.58)

$$\xi = -\frac{qh}{2\pi r^3} \quad (3.104)$$

Это заряд *индуцированный* расположенным над плоскостью зарядом q . Таким образом, с помощью метода зеркальных изображений учитывается действие индуцированных зарядов. Остается только подчеркнуть, что обоснование законности метода дает доказанная выше теорема единственности. В данном случае мы имеем дело с *заданными* зарядами (в частности, полный заряд проводника обычно равен нулю). По доказанному, найденное решение единственно и выражает поэтому истинное поле системы.

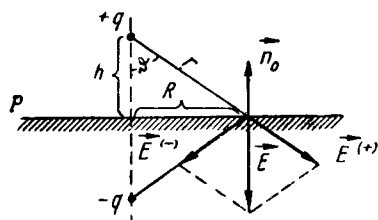


Рис. 56

Параллельные проводящие цилиндры. В § 21 были рассмотрены параллельные заряженные нити. Задача о проводящих цилиндрах конечного диаметра принципиально гораздо сложнее. В случае нитей речь идет об известном распределении зарядов в пространстве. Здесь же плотность заряда различных участков цилиндрических поверхностей заранее не известна. Она не постоянна, как это имеет место в случае уединенного цилиндра: в результате взаимного влияния разноименно заряженных проводников заряд накапливается на менее удаленных участках их поверхностей.

Однако задача решается очень просто, если учесть, что эквипотенциальные поверхности поля заряженных нитей имеют цилиндрическую форму (§ 21). На основании теоремы единственности мы имеем право утверждать, что поле в пространстве между поверхностями цилиндров (рис. 57, б) ничем не отличается от поля между аналогичными эквипотенциальными поверхностями двух

заряженных нитей (рис. 57, а). Таким образом, нахождение поля проводящих цилиндров сводится к простому выявлению «эквивалентных заряженных нитей», которыми якобы оно создается.

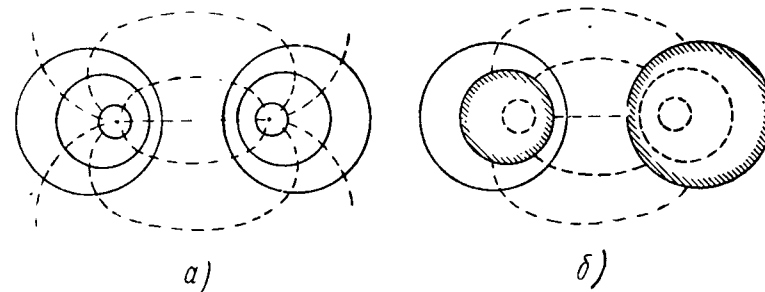


Рис. 57

Обозначив радиусы цилиндров через R_1 и R_2 , из (3.43) получим

$$R_1^2 = a_1^2 - (l/2)^2 \quad \text{и} \quad R_2^2 = a_2^2 - (l/2)^2, \quad (3.105)$$

где a_1 и a_2 — абсциссы осей цилиндров, их разность есть расстояние между осями

$$a_1 - a_2 = d. \quad (3.106)$$

Если речь идет о поле между *внешними* поверхностями двух цилиндров (рис. 58, а), то a_1 и a_2 имеют противоположные знаки

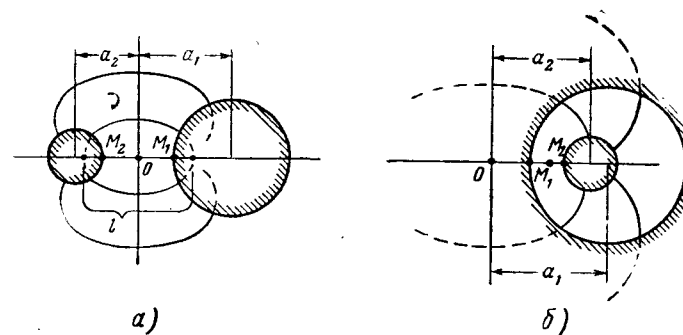


Рис. 58

и обе эти величины одного знака, когда рассматривается поле между внешней поверхностью одного цилиндра и внутренней поверхностью другого (рис. 58, а). При этом в первом случае $d > l$, а во втором $d < l$.

Из (3.105) и (3.106) легко получить:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d} \\ a_2 &= \frac{R_1^2 - R_2^2 - d^2}{2d} \end{aligned} \right\}, \quad (3.107)$$

и чем и определяется положение начала координат относительно осей цилиндров. Затем из (3.105) находится расстояние эквивалентных заряженных нитей от начала координат $l/2$, и искомое поле вычисляется как поле этих нитей.

Примеры и упражнения

1. Убедиться, что полный заряд, индуцируемый на проводящей плоскости расположенным над ней точечным зарядом q , равен $-q$.

Указание. Проинтегрировать величину ξ (3.104) по всей плоскости.

2. Найти поле заряженной нити, расположенной параллельно проводящей плоскости, а также распределение заряда, индуцированного на плоскости.

3. Решить аналогичную задачу для случая вертикального диполя над плоскостью (рис. 59).

4. Емкость параллельных цилиндров. Вычисляя по формуле (3.37) разность потенциалов двух точек M_1 и M_2 , находящихся на поверхностях разных цилиндров (рис. 58), получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} \Big|_{M_1} - \ln \frac{r_2}{r_1} \Big|_{M_2} \right] = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{k_1}{k_2}, \quad (3.108)$$

где, согласно (3.41),

$$\frac{r_2}{r_1} \Big|_{M_1} = k_1 \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{r_1} \Big|_{M_2} = k_2.$$

Таким образом, емкость цилиндров, отнесенная к единице длины, равна:

$$C' = \frac{\tau}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{k_1}{k_2}}. \quad (3.109)$$

На основании (3.43),

$$k_{1;2} = \rho_{1;2} \pm \sqrt{\rho_{1;2}^2 - 1} \quad (3.110)$$

где $\rho_{1;2} = a_{1;2}/R_{1;2}$, причем знак плюс ($r_2 > r_1$) берется в том случае, когда цилиндр расположен справа от начала координат, а знак минус — когда цилиндр лежит слева. Знаки в выражениях k_1 и k_2 будут, таким образом, одинаковыми, если один цилиндр находится внутри другого, и различными в противном случае.

На основании сказанного вывести следующие формулы:

а) один цилиндр лежит внутри другого

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - 1}}{\rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - 1}}}; \quad (3.111)$$

б) цилиндрические поверхности одна другую не охватывают

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln (\rho_1 + \sqrt{\rho_1^2 - 1})(\rho_2 + \sqrt{\rho_2^2 - 1})}. \quad (3.112)$$

В частности, когда радиусы цилиндров одинаковы

$$C' = \frac{\pi\epsilon}{\ln \left[\frac{d}{2R} + \sqrt{\left(\frac{d}{2R} \right)^2 - 1} \right]}. \quad (3.112a)$$

Для тонких цилиндров (проводов)

$$C' \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{\sqrt{R_1 R_2}}}. \quad (3.112b)$$

В случае проводов одного радиуса

$$C' \approx \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{d}{R}}; \quad (3.112b)$$

в) цилиндр над плоскостью:

$$C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left[\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R} \right)^2 - 1} \right]}. \quad (3.113)$$

(h — расстояние оси цилиндра от плоскости).

Для достаточно тонкого цилиндра (провода)

$$C' \approx \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{2h}{R}} \quad (3.113a)$$

(эту формулу получить также методом зеркальных изображений);
г) коаксиальный конденсатор (вывести из (3.109) формулу (3.75).

5. В каких пределах изменяется емкость коаксиального конденсатора с отношением внутреннего и внешнего диаметров $1:2$ при параллельном смещении внутреннего проводника?

§ 27. Цилиндрические и сферические тела в однородном поле

Если незаряженное проводящее тело поместить в электростатическое поле, то на его поверхности возникнут индуцированные заряды, и вектор \mathbf{E} станет нормальным поверхности: первоначальное поле будет искажено, деформировано. Помещаемый в поле диэлектрик также вызывает его деформацию. Вектор \mathbf{E} принимает на границе диэлектрического тела значения, удовлетворяющие условиям (1.46, 1.47). Соотношение внутреннего и внешнего полей зависит от диэлектрической проницаемости и формы тела.

Физическая сущность процессов в случаях проводника и диэлектрика различна. В первом случае имеет место электростатическая индукция, а во втором — поляризация диэлектрика. Однако определение деформированного поля и тут и там сводится к нахождению решения уравнения Лапласа при соответствующих граничных условиях. Мы рассмотрим задачи, решаемые путем непосредственного интегрирования этого уравнения в криволинейных координатах.

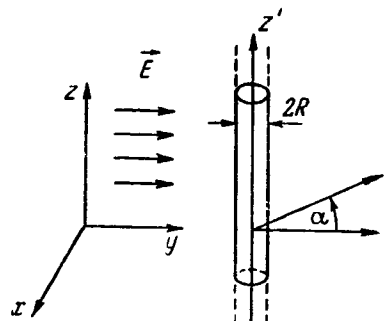


Рис. 60

Проводящий или диэлектрический цилиндр. Пусть в однородное электростатическое поле $\mathbf{E}_1 = y_0 \mathbf{E}_1$ помещается бесконечный проводящий или диэлектрический цилиндр, параллельный оси z (рис. 60). Требуется найти поле при наличии цилиндра.

Электрическое поле не симметрично относительно оси цилиндра. Поэтому в записи оператора Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

не равны нулю ни радиальная, ни азимутальная производные ($\partial/\partial r \neq 0$, $\partial/\partial \alpha \neq 0$). Однако поле однородно вдоль оси цилиндра ($\partial/\partial z = 0$). Уравнение Лапласа, таким образом, имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (3.114)$$

Будем искать его решение в виде произведения двух функций

$$\varphi = XY, \quad (3.115)$$

одна из которых X зависит только от координаты r , а другая Y — лишь от α .

Подстановка (3.115) в (3.114) дает:

$$\frac{1}{X} \left(r \frac{dX}{dr} + r^2 \frac{d^2 X}{dr^2} \right) + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} = 0.$$

Левая часть полученного уравнения, как видно, представляет сумму двух функций разных переменных: r и α . Эти функции, следовательно, никак не связаны друг с другом — взаимно независимы, поэтому можно положить

$$\frac{1}{X_1} \left(r \frac{dX}{dr} + r^2 \frac{d^2 X}{dr^2} \right) = n^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\alpha^2} = -n^2,$$

где n^2 — некоторая постоянная, или

$$\frac{d^2 Y}{d\alpha^2} = -n^2 Y \quad (3.116)$$

и

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} = n^2 \frac{X}{r^2}. \quad (3.117)$$

Произведенная операция называется *разделением переменных*, в результате ее получены обыкновенные дифференциальные уравнения. Решение первого из них (3.116) хорошо известно

$$Y = A \cos n\alpha + B \sin n\alpha. \quad (3.118)$$

Что касается второго (3.117), то нетрудно проверить, что его решением при $n \neq 0$ является функция

$$X = Cr^n + Dr^{-n}. \quad (3.119)$$

Случай же $n = 0$, как это видно из (3.118), соответствует азимутально-однородному полю ($\partial/\partial \alpha = 0$) и нас не интересует.

Итак, общее решение уравнения (3.114) есть

$$\varphi = (A \cos n\alpha + B \sin n\alpha) (Cr^n + Dr^{-n}). \quad (3.120)$$

Возвратимся к поставленной задаче. Потенциал однородного поля $\mathbf{E}_1 = y_0 \mathbf{E}_1$, согласно (3.9), равен

$$\varphi_1 = \varphi_{01} - \int_0^y E_1 y_0 dy = \varphi_{01} - E_1 y,$$

где φ_{01} — потенциал в плоскости $y = 0$. В цилиндрической системе координат (рис. 61) это записывается так:

$$\varphi_1 = \varphi_{01} - E_1 r \cos \alpha. \quad (3.121)$$

Если цилиндр *проводящий*, то его поверхность эквипотенциальна. Остается допустить, что внесение такого цилиндра

в поле E_1 вызывает появление дополнительного поля E_2 , уравнивающего потенциал на его поверхности ($r=R$). Это значит, что

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{const при } r=R. \quad (3.122)$$

где φ_2 — потенциал поля E_2 .

Отсюда нетрудно заключить, что потенциал φ_2 должен так же, как и φ_1 , косинусоидально меняться по азимуту. Он представляет собой, следовательно, частный вид решения (3.120) при $n=1$

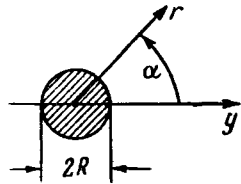


Рис. 61

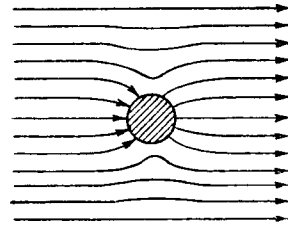


Рис. 62

и $B=0$. Кроме того, потенциал φ_2 не может неограниченно возрастать по мере удаления от цилиндра, поэтому также $C=0$. Значит,

$$\varphi_2 = Kr^{-1} \cos \alpha, \quad (3.123)$$

где $K=AD$ — подлежащая определению постоянная.

Раскрывая граничное условие (3.122)

$$\varphi_{01} - E_1 R \cos \alpha + KR^{-1} \cos \alpha = \text{const.} \quad (3.122a)$$

находим эту постоянную

$$K = E_1 R^2 \quad (3.124)$$

и записываем потенциал искомого поля $E = E_1 + E_2$:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_{01} - E_1 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \alpha \quad (3.125)$$

Само поле определяется по формуле (3.4):

$$E = -\text{grad } \varphi = r_0 E_1 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \alpha - \alpha_0 E_1 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \alpha. \quad (3.126)$$

Полагая здесь $r=R$, убеждаемся, что вектор E нормален поверхности цилиндра:

$$E|_{r=R} = r_0 2E_1 \cos \alpha. \quad (3.127)$$

На большом расстоянии от него ($r \gg R$) поле E практически не отличается от первоначального однородного поля E_1 :

$$E|_{r \gg R} = E_1 (r_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) = E_1 y_0 = E_1. \quad (3.128)$$

Строение поля в плоскости поперечного сечения цилиндра показано на рис. 62.

Возьмем теперь случай диэлектрического цилиндра. Искомое внешнее поле обозначим E_e , а внутреннее — E_i , тогда на основании (1.46, 1.47)

$$\left. \begin{aligned} E_{e\alpha} &= E_{i\alpha}, \\ \varepsilon_e E_{er} &= \varepsilon_i E_{ir} \end{aligned} \right\} r=R, \quad (3.129)$$

где ε_i и ε_e — диэлектрические проницаемости цилиндра и внешней среды соответственно.

Потенциал внешнего поля представим в виде суммы

$$\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (3.130)$$

где φ_1 — по-прежнему потенциал начального поля E_1 (3.121), а φ_2 имеет вид (3.123).

Что касается потенциала внутреннего поля φ_i , то он так же, как и φ_2 , представляется решением (3.120) при $n=1$ и $B=0$. Но вид радиальной функции X теперь иной: необходимо взять $D=0$, так как иначе φ_i обращается в бесконечность на оси цилиндра. Таким образом,

$$\varphi_i = Mr \cos \alpha. \quad (3.131)$$

Выражая поля через потенциалы, имеем:

$$E_e = -\text{grad } \varphi_e = r_0 \left(E_1 + \frac{K}{r^2} \right) \cos \alpha - \alpha_0 \left(E_1 - \frac{K}{r^2} \right) \sin \alpha$$

и

$$E_i = -\text{grad } \varphi_i = M (-r_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha).$$

Внося эти результаты в систему граничных условий (3.129), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \bullet \frac{K}{R^2} - M &= E_1 \\ \frac{K}{R^2} + \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_e} M &= -E_1 \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$K = E_1 R^2 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \text{ и } M = -2E_1 \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}. \quad (3.132)$$

Итак,

$$E_e = E_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \right) \cos \alpha - \alpha_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \right) \sin \alpha \right] \quad (3.133)$$

и

$$E_i = \frac{2E_1 \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} (r_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) = \frac{2E_1 \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}. \quad (3.134)$$

Характерно, что внутреннее поле однородно и параллельно первоначальному полю E_1 . Внешнее же представляет собой сумму

поля E_1 и поля E_2 , как бы созданного заряженными нитями (3.40) с «погонным дипольным моментом» τl , равным

$$\tau l = 2\pi R^2 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + \epsilon_e} \epsilon_e E_1. \quad (3.135)$$

Рис. 63 представляет структуру поля в поперечном сечении. Проводящий или диэлектрический шар. Подобным же образом, т. е. интегрируя уравнение Лапласа в сферических координатах, можно получить и решение задачи о шаре, помещаемом в однородное поле (рис. 64). Но задача существенно упрощается, если

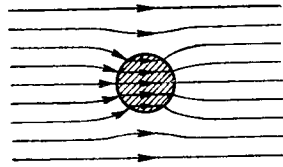


Рис. 63

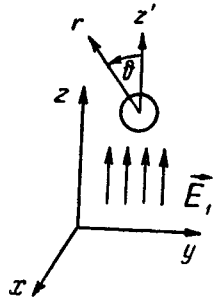


Рис. 64

вести некоторые предположения. Было установлено, что внутреннее поле диэлектрического цилиндра параллельно первоначальному полю E_1 . Допустим, что так будет и в случае диэлектрического шара:

$$E_i = AE_1, \quad (3.136)$$

т. е. что шар поляризуется однородно. Тогда внешнее поле шара E_2 , добавляемое к E_1 ,

$$E_e = E_1 + E_2, \quad (3.137)$$

должно иметь характер поля диполя (3.27)

$$E_2 = \frac{B}{r^3} (r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta) \quad (3.138)$$

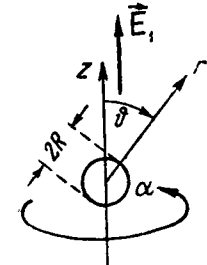


Рис. 65

(это вполне соответствует тому факту, что в случае диэлектрического цилиндра E_2 подобно полю заряженных нитей).

Поле E_1 (рис. 65) в данном случае есть

$$E_1 = z_0 E_1 = r_0 E_1 \cos \vartheta - \vartheta_0 E_1 \sin \vartheta. \quad (3.139)$$

Налагая на E_e и E_i граничные условия (1.46, 1.47)

$$\left. \begin{aligned} E_{e\vartheta} &= E_{i\vartheta}, \\ \epsilon_e E_{er} &= \epsilon_i E_{ir} \end{aligned} \right\} r = R, \quad (3.140)$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} AE_1 + \frac{B}{R^3} &= E_1, \\ AE_1 \frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} - \frac{2B}{R^3} &= E_1 \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$A = \frac{3\epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} \text{ и } B = E_1 R^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} \quad (3.141)$$

и, следовательно,

$$E_e = E_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} \right) \cos \vartheta - \vartheta_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} \right) \sin \vartheta \right] \quad (3.142)$$

и

$$E_i = \frac{3E_1 \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e}. \quad (3.143)$$

О строении поля в плоскости симметрии дает представление рис. 63.

В случае проводящего шара внутреннее поле E_i отсутствует. Из (3.143) видно, что это произойдет также при $\frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} \rightarrow \pm \infty$. Отсюда можно заключить, что формула (3.142) при том же условии дает внешнее поле проводящего шара:

$$E_e = E_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \vartheta - \vartheta_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \vartheta \right]. \quad (3.144)$$

Это так и есть, ибо, как легко убедиться, найденное поле нормально поверхности шара:

$$E_e|_{r=R} = r_0 3E_1 \cos \vartheta. \quad (3.145)$$

Его строение в плоскости симметрии можно понять из рис. 62.

Примеры и упражнения

1. В плоском конденсаторе с расстоянием между пластинами $d = 1 \text{ см}$, заряженном до разности потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 100 \text{ в}$, диэлектриком служит стекло ($\epsilon_r = 9$). Найти напряженность электрического поля E в сферическом воздушном пузырьке внутри стекла. Рассмотреть два случая: а) диаметр пузырька весьма мал в сравнении с расстоянием между пластинами конденсатора ($D \ll d$), б) пузырек не мал (например, $D = \frac{d}{2}$).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА

2. В задачах о проводящем цилиндре и шаре, вносимых в параллельное поле, предполагалось, что первоначально эти тела не были заряжены.

а) Найти плотность заряда, индуцированного на поверхности каждого из этих тел.

б) Пользуясь принципом суперпозиции, выразить потенциалы и поля в рассмотренных задачах при условии, что до внесения в однородное поле цилиндр и шар были заряжены.

3. Показать, что проводящий шар, внесенный в однородное поле, ведет себя как диполь с моментом

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon R^3 \mathbf{E}_1. \quad (3.146)$$

Указание. Сравните поле $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} - \mathbf{E}_1$, создаваемое индуцированным на поверхности шара зарядом, с полем диполя (3.27).

4. Показать, что в аналогичном случае диэлектрический шар ведет себя как диполь с моментом

$$\mathbf{p} = 4\pi R^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} \epsilon_e \mathbf{E}_1. \quad (3.147)$$

5. Взяв готовое решение задачи о диэлектрическом цилиндре в однородном поле, найти решение для цилиндра проводящего.

Для случая постоянного тока ($\delta \neq 0$, $\partial/\partial t = 0$) система уравнений электромагнитного поля (1.58, 1.58a) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} (*) \quad \left\{ \begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0; \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q; \end{aligned} \right. \quad (4.1) \quad (4.1a)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \delta; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} (**)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= I; \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Группа уравнений (*) идентична уравнениям электростатики (3.1—3.3), изученным в предыдущей главе. Первое из них, в частности, свидетельствует, что электрическое поле постоянного тока подобно электростатическому полю *потенциально*. Но в отличие от электростатического оно существует и в проводящей среде

$$\mathbf{E} = \delta/\sigma,$$

а в диэлектрике его эквипотенциальные поверхности не совпадают с проводящими границами, так как последние несут ток и имеют тангенциальную компоненту вектора \mathbf{E} (ср. § 23).

Вторая группа уравнений (**) характеризует магнитное поле постоянного тока, которое, как видно из уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \delta,$$

оказывается также потенциальным в тех областях, где ток отсутствует ($\delta = 0$).

В этом параграфе мы ограничимся наиболее простыми проявлениями магнитного поля. Будем рассматривать лишь области, не содержащие тока ($\delta = 0$). Поставим также условие, чтобы любой мыслимый контур в области не охватывал тока (рис. 66, а). Кольцевые области, подобные изображенной на рис. 66, б, охватывающие ток, пока исключаются из анализа. Тогда уравнения (4.1) группы (***) и соответствующие им интегральные соотношения (4.1а) образуют независимую (см. также § 11) систему уравнений магнитостатики:

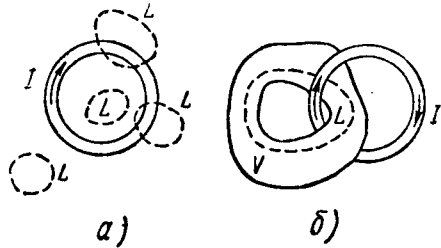


Рис. 66

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= 0; & \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0; & \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0. \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \quad (4.2a)$$

Первое из дифференциальных уравнений позволяет (§ 16) немедленно написать:

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi^m, \quad (4.3)$$

где φ^m — магнитостатический потенциал.

Из (4.2) следует, что магнитостатический потенциал подчиняется уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi^m = 0. \quad (4.4)$$

Принимая к тому же во внимание, что граничные условия для вектора \mathbf{H} (§ 9)

$$\left. \begin{aligned} H_{1\tau} &= H_{2\tau}, \\ \mu_1 H_{1n} &= \mu_2 H_{2n} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

ничем не отличаются от таких же условий для вектора \mathbf{E} , приходим к очевидному выводу:

Решения задач магнитостатики формально идентичны решениям соответствующих электростатических задач и могут быть получены из них простой заменой величин

$$\mathbf{E} \text{ на } \mathbf{H} \text{ и } \epsilon \text{ на } \mu.$$

Так, в случаях цилиндра и шара, помещаемых в однородное магнитное поле, на основе результатов (3.133, 3.134 и 3.142, 3.143) имеем:

Цилиндр

$$\mathbf{H}_e = H_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \cos \alpha - \alpha_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \sin \alpha \right]; \quad (4.6)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{2\mu_e H_1}{\mu_i + \mu_e}. \quad (4.7)$$

Шар

$$\mathbf{H}_e = H_1 \left[r_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \cos \vartheta - \vartheta_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \sin \vartheta \right] \quad (4.8)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{3\mu_e H_1}{\mu_i + 2\mu_e} \quad (4.9)$$

(обозначения здесь имеют тот же смысл, что и в главе 3).

Однако, как это понятно, отнюдь не каждой электростатической задаче можно сопоставить магнитостатическую. Круг явлений магнитостатики значительно более беден, так как в природе нет свободных магнитных зарядов (4.2а)

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0 \quad (4.10)$$

(см. § 3).

Удобным оказывается представление о связанных магнитных зарядах, аналогичных связанным электрическим зарядам (§ 22), и соответственно, о магнитных диполях (см. подробнее стр. 109, 111). Величина

$$\mathbf{m} = q^m \mathbf{l} \quad (4.11)$$

(ср. § 20) называется магнитным моментом диполя; q^m формально является магнитным зарядом, но в это понятие вкладывается какое-либо содержание лишь в рамках дипольной модели. Понятно, что при этом не нарушается равенство (4.10).

Из сказанного вытекает интерпретация намагниченности \mathbf{M} как магнитного момента среды, отнесенного к единице объема (ср. § 22).

Намагниченное тело на достаточно большом расстоянии ведет себя как магнитный диполь.

Размагничивающий фактор. Диэлектрический шар в однородном электростатическом поле (§ 27) действует подобно диполю с моментом, определяемым формулой (3.147). Следовательно, в аналогичной магнитостатической задаче магнитный момент шара есть

$$\mathbf{m} = 4\pi R^3 \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \mu_e \mathbf{H}_1. \quad (4.12)$$

и намагниченность вещества равна

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{m}}{V} = 3 \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \mu_e \mathbf{H}_1. \quad (4.13)$$

Пользуясь результатом (4.9), нетрудно вычислить разность $H_1 - H_i$, где (ср. § 27)

$$H_1 = z_0 H_i$$

— первоначальное однородное магнитное поле, в которое помещается шар. Таким образом, речь идет о величине, показывающей насколько поле внутри сферы отличается от внешнего. Эту вели-

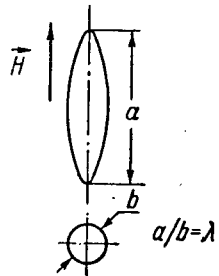


Рис. 67

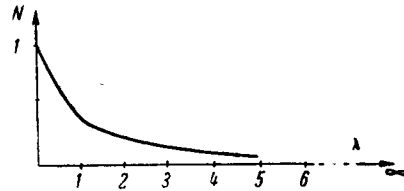


Рис. 68

чину можно назвать «размагничивающим полем» связанных магнитных зарядов шара. Соответственно этому отношение

$$N = \frac{\mu_e (H_1 - H_i)}{M} = \mu_e \left(1 - \frac{3\mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \left(3 \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \mu_e \right)^{-1} = \frac{1}{3} \quad (4.14)$$

носит наименование *размагничивающего фактора шара*.

Понятие размагничивающего фактора сохраняет смысл для тел с однородным внутренним полем и практически используется в тех многочисленных случаях, когда это поле близко к однородному. Существенно, что N не зависит от свойств среды, а определяется формой тела. В последнем убеждает исследование размагничивающего фактора эллипсоида, обладающего (как это доказывается) строго однородным внутренним полем. Для эллипсоида вращения (рис.

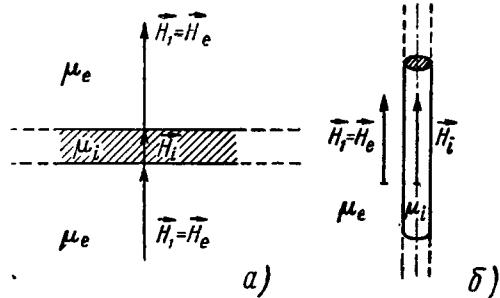


Рис. 69

67) на рис. 68 показана зависимость размагничивающего фактора от соотношения его осей λ . При изменении λ от нуля до бесконечности N монотонно убывает от единицы до нуля. Как видно из графика, при $\lambda = 1$ (шар) $N = 1/3$. Предельные значения λ соответствуют вырождению эллипсоида в бесконечный цилиндр ($\lambda \rightarrow \infty$) и бесконечную пластину ($\lambda = 0$). Легко проверить приведенные для этих случаев значения N .

Внутреннее поле нормально намагничиваемой пластины (рис. 69, а) в силу граничных условий (4.5) есть

$$H_i = \frac{\mu_e}{\mu_i} H_e$$

Учитывая, что, по определению (1.27), $M = \mu_i H_i - \mu_e H_e$, получаем

$$N = \frac{\mu_e (H_1 - H_i)}{M} = \frac{\mu_i H_i - \mu_e H_i}{\mu_i H_i - \mu_e H_i} = 1. \quad (4.15)$$

В случае цилиндра, намагничиваемого параллельно оси (рис. 69, б), внутреннее поле равно внешнему, не отличающемуся от первоначального поля H_1 . Поэтому

$$N = \frac{\mu_e (H_1 - H_i)}{M} = 0. \quad (4.16)$$

Полученные результаты согласуются с графиком (рис. 68).

В заключение остановимся на некоторых еще не отмеченных различиях между электростатическими и магнитостатическими явлениями. В магнитостатике нет сред, которые можно бы было с полным основанием сопоставить электрическим проводникам. Правда, до известной степени сходно ведут себя в магнитном поле тела с высокой магнитной проницаемостью. Используя результаты §§ 8, 9 (формулы 1.49 и замечание на стр. 34), напомним соотношение

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (4.17)$$

характеризующее наклон магнитных силовых линий на границе раздела сред (рис. 70). При $\mu_2/\mu_1 \rightarrow \infty$ угол α_1 стремится к 90° при любом ($0 < \alpha_2 < 90^\circ$) угле α_2 . Иными словами, внешнее магнитное поле оказывается нормальным поверхности тела, магнитная проницаемость которого бесконечна. Поверхность эта, следовательно, эквипотенциальна подобно проводящей поверхности в электростатике. Разумеется, эквипотенциальными будут и поверхности тел бесконечной диэлектрической проницаемости. Здесь, однако, нетрудно заметить существенное отличие от случая проводника: на его поверхности линии электрической индукции прерываются (поле в проводнике отсутствует), на границе же тела бесконечной проницаемости линии индукции непрерывны. Сред с бесконечной проницаемостью в природе не существует. Всё же магнитные силовые линии практически нормальны поверхностям ферромагнитных тел, проницаемость которых достаточно велика. Появились и диэлектрики с весьма высокой проницаемостью.

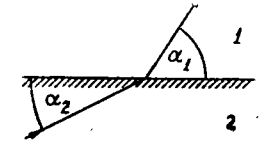


Рис. 70

Ферромагнетикам свойственно наличие не зависящей от внешнего поля (самопроизвольной) намагниченности — постоянные магниты. На достаточно большом расстоянии постоянный магнит действует как магнитный диполь.

Примеры и упражнения

1. Поясним сущность *магнитного экранирования*. Как видно из формул (4.7 и 4.9), при безграничном увеличении отношения μ_i/μ_e внутреннее поле \mathbf{H}_i в сферической области стремится к нулю. При достаточно большом значении μ_i/μ_e оно будет значительно ослаблено. Если внутри цилиндра или шара имеется полость, то следует ожидать, что и в ней поле будет ослаблено в сравнении с внешним. Внутри полости можно поместить какое-либо тело, которое желательно защитить от действия магнитного поля.

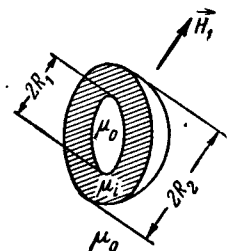


Рис. 71

Путем решения граничной задачи (подобно тому, как этого делалось в § 27) можно показать, что поле внутри полого шара (рис. 71) будет ослаблено в сравнении с внешним полем \mathbf{H}_1 в k раз,

$$k = 1 + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu_i} + \frac{\mu_i}{\mu_0} - 2 \right). \quad (4.18)$$

Рекомендуется получить этот результат самостоятельно.

2. Найдем размагничивающий фактор цилиндра при поперечном намагничивании. На основании (4.7) внутреннее поле в этом случае характеризуется напряженностью

$$\mathbf{H}_i = \frac{2\mu_e \mathbf{H}_1}{\mu_i + \mu_e},$$

а намагниченность (как дипольный момент единицы объема) нетрудно найти, воспользовавшись результатом (3.135) и перейдя в нем к магнитным величинам:

$$\mathbf{M} = \frac{\tau \cdot l}{\pi R^2} \mathbf{y}_0 = 2 \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \mu_e \mathbf{H}_1.$$

Подстановка этих выражений в формулу (4.14) дает:

$$N = \frac{1}{2}. \quad (4.19)$$

3. Магнитная проницаемость малого шара, расположенного в воздушном зазоре постоянного магнита, равна $\mu = 50\mu_0$. Считая поле пустого зазора однородным, найти наибольшее отклонение магнитных силовых линий на поверхности шара от нормали.

4. Каков размагничивающий фактор бесконечной пластины, намагничиваемой параллельно поверхности?

5. Шар, обладающий самопроизвольной намагниченностью, создает во внешнем пространстве (воздух) на расстоянии $r = 1$ м от центра магнитное поле, максимальное значение напряженности которого есть $H_0 = 1$ а/м. Найти магнитный момент шара.

§ 29. Магнитное поле и постоянный ток

Продолжим изучение магнитного поля постоянного тока, отказавшись от ограничений предыдущего параграфа. С этой целью запишем в полном виде уравнения (4.1**) и соответствующие интегральные соотношения (4.1a)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \delta; \quad (4.20) \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I; \quad (4.20a)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0; \quad (4.21)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (4.22) \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0. \quad (4.21a)$$

Сосредоточим внимание на связи магнитного поля и постоянного тока.

Неоднозначность разности скалярных потенциалов. Нетрудно заметить, что разность потенциалов магнитного поля постоянного тока $\Delta\varphi^*$ не является только лишь функцией начальной и конечной точек пути, как это имеет место в случае поля электростатического (3.9). Напомним, что в случае электростатики

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

— при обходе по замкнутому контуру работа не совершается.

Согласно (4.20a), каждый обход по замкнутому пути *вокруг тока* вызывает приращение потенциала на величину тока I . Таким образом, если разность потенциалов на пути $A\mathbf{m}\mathbf{B}$ (рис. 72) есть

$$\Delta\varphi_{AmB}^* = \varphi_B - \varphi_A,$$

то на пути $A\mathbf{n}\mathbf{B}$ это будет уже

$$\Delta\varphi_{AnB}^* = \varphi_B - \varphi_A + I,$$

а при двукратном обходе вокруг тока ($A\mathbf{p}\mathbf{B}$)

$$\Delta\varphi_{ApB}^* = \varphi_B - \varphi_A + 2I \quad \text{и т. д.}$$

Правда, от многозначности величины $\Delta\varphi^m$ можно избавиться, затащив все контуры с токами воображаемой «пленкой» (рис. 73), через которую якобы нельзя проникнуть при вычислении разности потенциалов. Однако более важно то, что с помощью скалярного потенциала нельзя решить задачу о связи магнитного поля и постоянного тока.

Векторный потенциал магнитного поля. С указанной целью вводится вспомогательная функция \mathbf{A} , определяемая через магнитную индукцию соотношением

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (4.23)$$

и называемая *векторным потенциалом* магнитного поля.

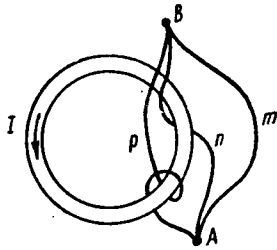


Рис. 72

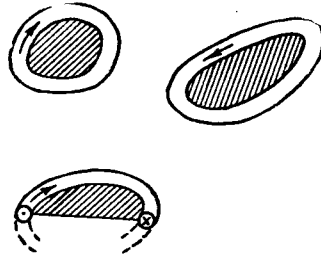


Рис. 73

Свойства векторного потенциала вытекают из необходимости удовлетворить исходным уравнениям (4.20—4.22). Второе из них (4.21) не дает каких-либо сведений о характере \mathbf{A} , ибо при любых \mathbf{A} тождественно выполняется

$$\text{div rot } \mathbf{A} \equiv 0.$$

Зато, сопоставляя (4.20, 4.22 и 4.23), получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu\delta, \quad (4.24)$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \text{grad div } \mathbf{A} = -\mu\delta. \quad (4.24a)$$

Из (4.24) следует, что в выборе \mathbf{A} допускается известный произвол. Действительно, если \mathbf{A} есть решение (4.24), то решением будет также функция

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \psi,$$

где ψ — некоторый скаляр.

Для удобства наложим на \mathbf{A} дополнительное условие

$$\text{div } \mathbf{A} = 0, \quad (4.25)$$

тогда (4.24a) принимает вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\delta. \quad (4.26)$$

Это уравнение эквивалентно трем скалярным

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu\delta_x, \\ \nabla^2 A_y &= -\mu\delta_y, \\ \nabla^2 A_z &= -\mu\delta_z \end{aligned} \right\}, \quad (4.26a)$$

не отличающимся по форме от уравнения Пуассона для электростатического потенциала (3.14). Это дает основание записать их решения в виде (3.23), т. е.

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_x}{r} dV; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_y}{r} dV; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta_z}{r} dV$$

(полагаем $\mu = \text{const}$). Отсюда следует векторная запись решения уравнения (4.26):

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta}{r} dV. \quad (4.27)$$

Полученный результат позволяет по заданному току найти векторный потенциал \mathbf{A} и затем по формуле (4.23) определить индукцию \mathbf{B} и напряженность магнитного поля \mathbf{H} .

Можно доказать *теорему единственности* (ср. § 25), утверждающую, что заданным распределением тока δ магнитное поле определяется однозначно.

Магнитное поле линейного тока. Рассмотрим теперь пути нахождения магнитного поля в наиболее важном случае *линейного тока*, когда (рис. 74)

$$\int_S \delta dS = \tau_0 \int_S \delta dS = \tau_0 I. \quad (4.28)$$

Здесь S — поперечное сечение проводника (величина, малая в сравнении с квадратом его длины) и τ_0 — единичный вектор, указывающий направление тока I .

Конкретизируем для данного случая формулу (4.27). Внося туда закон распределения δ , свойственный линейному току, получаем:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta}{r} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \int_L \frac{\delta}{r} dS dl = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{dl}{r}, \quad (4.29)$$

где L — путь линейного тока (рис. 4.9) и $dl = \tau_0 dl$ — векторный элемент его длины.

Желая, далее, определить магнитное поле, согласно (4.23 и 4.22), имеем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{I}{4\pi} \int_L \text{rot } \frac{dl}{r}.$$

При этом в силу тождества (см. приложение)

$$\operatorname{rot} \psi = \psi \operatorname{rot} \mathbf{a} + [\operatorname{grad} \psi, \mathbf{a}],$$

в котором мы полагаем

$$\psi = \frac{1}{r} \quad \text{и} \quad \mathbf{a} = d\mathbf{l},$$

подынтегральное выражение преобразуется к виду:

$$\operatorname{rot} \frac{d\mathbf{l}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{rot} d\mathbf{l} + \left[\operatorname{grad} \frac{1}{r}, d\mathbf{l} \right].$$

Ввиду того, что элемент $d\mathbf{l}$ не зависит от положения точки M (рис. 75), в которой вычисляется \mathbf{H} , первый член в правой части

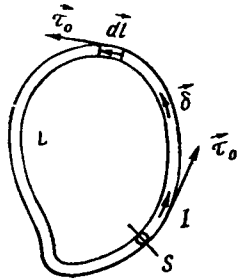


Рис. 74

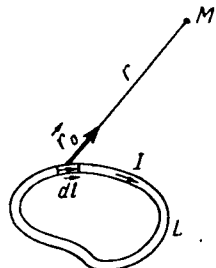


Рис. 75

равен нулю. Внося под интеграл значение второго члена

$$\left[\operatorname{grad} \frac{1}{r}, d\mathbf{l} \right] = -\frac{1}{r^2} [\mathbf{r}_0, d\mathbf{l}],$$

получаем

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{1}{r^2} [d\mathbf{l}, \mathbf{r}_0]. \quad (4.30)$$

Это интегральная формулировка так называемого закона Био и Савара, непосредственно связывающего напряженность магнитного поля с линейным распределением тока.

В дифференциальной форме этот закон имеет вид

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi r^2} [d\mathbf{l}, \mathbf{r}_0] \quad (4.30a)$$

и характеризует магнитное поле $d\mathbf{H}$, создаваемое в точке M элементом тока $I d\mathbf{l}$.

Механическое проявление магнитного поля. Как указывалось в § 1, механическое проявление магнитного поля положено в основу определения его индукции \mathbf{B} . Согласно (1.2), см. рис. 2 момент силы \mathbf{K} , испытываемый рамкой с током в однородном магнитном поле, есть

$$\mathbf{K} = IS [\mathbf{n}_0, \mathbf{B}]. \quad (*)$$

Механическое действие магнитного поля на ток удобно также описывать при помощи дифференциального соотношения

$$d\mathbf{F} = I [d\mathbf{l}, \mathbf{B}], \quad (4.31)$$

где $d\mathbf{F}$ —сила, действующая в поле \mathbf{B} на элемент тока $I d\mathbf{l}$ (рис. 76,а). Упряжнейе.

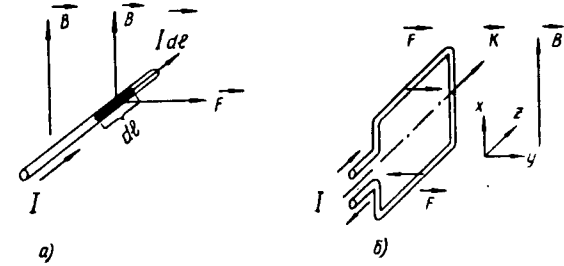


Рис. 76

На рис. 76, б изображена прямоугольная рамка с током I , расположенная в однородном магнитном поле так, что вектор \mathbf{B} параллелен поперечным сторонам рамки ($\mathbf{B} = \mathbf{x}_0 B$). Показать, что вычисление момента силы, действующего на рамку, по формулам (*) и (4.31) приводит к одному и тому же результату: $\mathbf{K} = z_0 I S \mathbf{B}$.

§ 30. Примеры магнитных полей

Используя закон Био—Савара, мы можем теперь построить магнитные поля различных линейных токов. Впрочем, иногда бывает выгодно с чисто вычислительной точки зрения сначала определить векторный потенциал с помощью (4.29), а затем найти поле, применяя к полученному результату операцию (4.23). В тех немногих, но важных случаях, когда магнитные силовые линии искомого поля заведомо являются концентрическими окружностями, оно легко находится на основании (4.20а). Таким способом в § 3 (пример 3) было определено магнитное поле прямолинейного тока:

$$\mathbf{H} = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}. \quad (*)$$

В качестве примера покажем, как этот результат вытекает из закона Био и Савара. Пусть прямолинейный ток направлен по оси z цилиндрической системы координат (рис. 77), тогда (см. рисунок) формула (4.30) принимает вид

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{1}{R^2} [dz, \mathbf{R}_0] = \alpha_0 \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \vartheta dz}{R^2}.$$

Учитывая, что

$$\sin \vartheta = \sin(\pi - \vartheta) = \frac{r}{R}$$

$$\text{и} \quad R^2 = r^2 + z^2,$$

сводим ее к следующему интегралу:

$$H = \alpha_0 \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Как видно,

$$\frac{r^2 dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right),$$

поэтому

$$H = \alpha_0 \frac{I}{4\pi r} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Цилиндр, труба, коаксиальный кабель. Поле вне цилиндра (провода), несущего ток I , дается формулой (*). С помощью (4.20а) нетрудно найти и поле внутри цилиндра. При этом необходимо учитывать, что контур интегрирования L в виде концентрической окружности, не выходящей за пределы поперечного сечения провода ($r < R$), охватывает не весь ток I , а лишь его часть

$$I' = I \left(\frac{r}{R} \right)^2.$$

В результате получается (рис. 78):

$$\left. \begin{aligned} H &= \alpha_0 \frac{I r}{2\pi R^2}, & 0 \leq r \leq R. \\ H &= \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, & r \geq R. \end{aligned} \right\} (4.32)$$

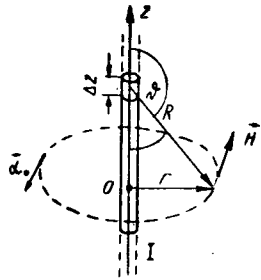


Рис. 77

Внутри провода поле растет вместе с расстоянием от оси.

По этому же принципу легко находится поле трубы с током I (рис. 79):

$$\left. \begin{aligned} H &= 0, & 0 \leq r \leq R_1, \\ H &= \alpha_0 \frac{I (r^2 - R_1^2)}{2\pi (R_2^2 - R_1^2) r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ H &= \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, & r \geq R_2, \end{aligned} \right\} (4.33)$$

и поле коаксиального кабеля (рис. 80):

$$\left. \begin{aligned} H &= \alpha_0 \frac{I r}{2\pi R_1^2}, & 0 \leq r \leq R_1, \\ H &= \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ H &= \alpha_0 \frac{I (R_3^2 - r^2)}{2\pi (R_3^2 - R_2^2) r}, & R_2 \leq r \leq R_3, \\ H &= 0, & r \geq R_3. \end{aligned} \right\} (4.34)$$

Внутри трубы нет магнитного поля (внутренние контуры интегрирования вовсе не охватывают тока). Точно так же нет магнитного поля и вне коаксиального кабеля: внешние контуры заключают в себе равные по абсолютной величине и противоположно направ-

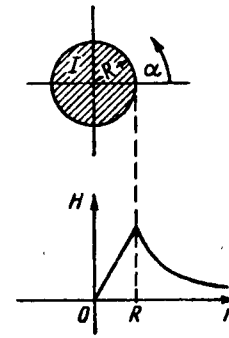


Рис. 78

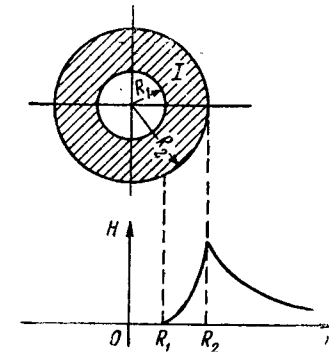


Рис. 79

ленные токи, и полный ток в правой части (4.20а) оказывается равным нулю.

Двухпроводная линия. Для выяснения свойств магнитного поля двухпроводной линии (рис. 81) обратимся к выражению векторного потенциала (4.29). Вычисляя A в точке (см. рисунок),

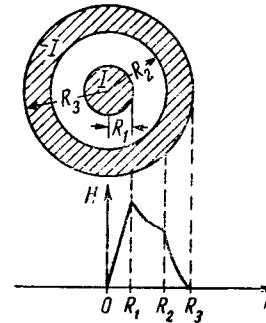


Рис. 80

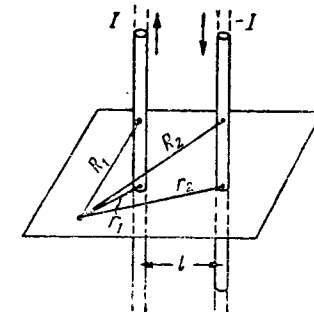


Рис. 81

находящейся на расстоянии r_1 от одного провода (ток I) и r_2 от другого (ток $-I$), имеем:

$$A = \frac{\mu I}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right].$$

Отсюда

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 \frac{\mu I}{4\pi} \ln \frac{z + \sqrt{r_1^2 + z^2}}{z + \sqrt{r_2^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \mathbf{z}_0 \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (4.35)$$

Как видно, поверхности постоянного векторного потенциала определяются условием

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const} \quad (4.36)$$

и, следовательно, имеют тот же вид, что и эквипотенциальные поверхности электростатического поля двух заряженных нитей (§ 21).

Магнитные силовые линии лежат в поперечных плоскостях и описываются дифференциальным уравнением (см. § 17)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x},$$

откуда

$$H_x dy - H_y dx = 0,$$

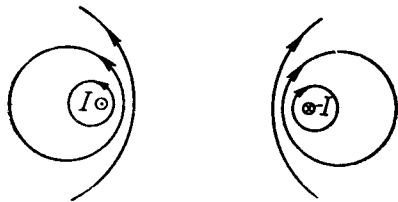


Рис. 82

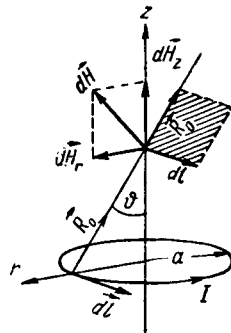


Рис. 83

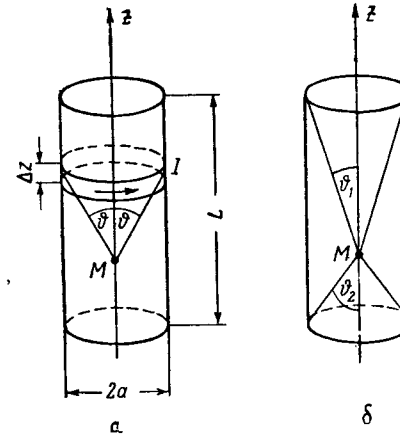


Рис. 84

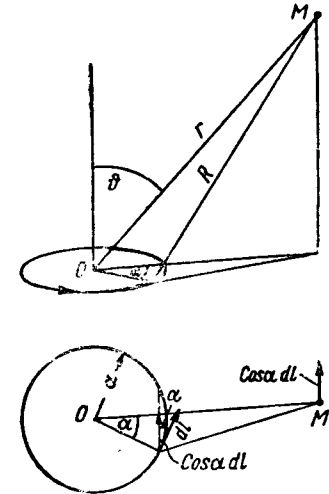


Рис. 85

Внося сюда выражения компонент H_x и H_y через \mathbf{A} , приходим к уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = 0,$$

показывающему, что магнитные силовые линии удовлетворяют условию постоянства векторного потенциала

$$dA = 0, \quad A = \text{const}.$$

Иными словами, линии \mathbf{H} совпадают с окружностями в поперечной плоскости, на которых векторный потенциал постоянен, и образуют совершенно такую же картину, как и эквипотенциальные линии заряженных нитей (рис. 82).

Весьма существенно, что распределение постоянного тока в проводе не изменяется под влиянием соседства других токонесущих проводников. Поэтому все сказанное применимо к внешнему полю цилиндров произвольного диаметра, если только их магнитная

проницаемость не отличается от магнитной проницаемости внешней среды.

Круглый виток и соленоид. Определим магнитное поле на оси круглого витка (рис. 83). Подынтегральное выражение (4.30), как это видно из рисунка, имеет радиальную и продольную компоненты

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi R^2} [d\mathbf{l}, \mathbf{R}_0] = dH_r + dH_z,$$

причем радиальная при интегрировании должна уничтожиться.

Таким образом, напряженность поля на оси есть

$$\mathbf{H} = \int_l dH_z = \mathbf{z}_0 \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \theta d\alpha}{a^2 + z^2} = \mathbf{z}_0 \frac{I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha,$$

или

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.37)$$

В случае соленоида (рис. 84) можно допустить, что ток непрерывно распределен по цилиндрической поверхности и в элементарном поясе ширины dz (рис. 84) равен

$$d\mathbf{l} = n\mathbf{l} dz,$$

где n — число витков катушки, приходящееся на единицу длины соленоида, а I — ток одного витка. Отметим, что nI называют «числом ампервитков» на единицу длины.

Поле на оси соленоида в точке M , создаваемое элементарным поясом, который виден из этой точки под углом 2ϑ , выражается формулой (4.37)

$$d\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \frac{nl}{2} \frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} dz = \mathbf{z}_0 \frac{nl}{2} d\left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = \mathbf{z}_0 \frac{nl}{2} d(\cos \vartheta).$$

Интегрируя это выражение от ϑ_1 до $\pi - \vartheta_2$ (рис. 84, б), получаем выражение напряженности поля соленоида (т. е. всех его витков) в точке M :

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 \frac{nl}{2} (\cos \vartheta_2 + \cos \vartheta_1). \quad (4.38)$$

Отсюда, в частности, нетрудно найти поле в центре соленоида ($\vartheta_1 = \vartheta_2$):

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 nl \cos \vartheta = \mathbf{z}_0 \frac{nlL}{\sqrt{4a^2+L^2}}, \quad (4.38a)$$

а также поле бесконечного соленоида ($\vartheta_1 = \vartheta_2 \rightarrow 0$):

$$\mathbf{H} = \mathbf{z}_0 nl. \quad (4.38б)$$

Магнитный диполь. Покажем, что виток на достаточно большом расстоянии действует как магнитный диполь.

Рассмотрим круглый виток, показанный на рис. 85. Обозначая расстояние от элемента тока витка до точки наблюдения M большой буквой R , имеем, согласно (4.29),

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}}{R}.$$

Учитывая симметрию системы, нетрудно сообразить, что векторный потенциал имеет одну лишь азимутальную составляющую $\mathbf{A} = \alpha_0 \mathbf{A}$. Проекция же элемента длины $d\mathbf{l}$ на азимутальное направление в точке M , как видно из рис. 85, есть $\cos \alpha dl$. Поэтому

$$\mathbf{A} = \alpha_0 \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{\cos \alpha dl}{R}.$$

Далее, видим, что

$$dl = a d\alpha \quad \text{и} \quad R^2 = r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta \cos \alpha.$$

Следовательно,

$$\mathbf{A} = \alpha_0 \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \alpha d\alpha}{(r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta \cos \alpha)^{1/2}}. \quad (4.39)$$

Полагая, что расстояние от центра витка r значительно превышает его радиус a

$$r \gg a,$$

раскрываем знаменатель подынтегрального выражения по формуле бинома Ньютона и ограничиваемся первыми членами:

$$(r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta \cos \alpha)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha + \dots \right] \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha \right).$$

Теперь нахождение векторного потенциала не представляет труда

$$\mathbf{A} \approx \alpha_0 \frac{I\mu}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha \right) \cos \alpha d\alpha = \alpha_0 \frac{I\mu a^2}{4r^2} \sin \vartheta, \quad (4.40)$$

и напряженность магнитного поля определяется по формуле (4.23) в сферических координатах:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{Ia^2}{4} \left[\frac{\mathbf{r}_0}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{r} \right) - \frac{\vartheta_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{r} \right) \right].$$

В результате получаем:

$$\mathbf{H} = \frac{Ia^2}{4r^3} (\mathbf{r}_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (4.41)$$

Как показывает сравнение с формулой (3.27), магнитное поле витка по своему строению есть поле диполя. Виток ведет себя так, как если бы вместо него в точке O находился *магнитный диполь* (§ 28), ориентированный по оси z . Перепишывая (4.41) в форме (3.27), имеем:

$$\mathbf{H} = \frac{m}{4\pi\mu r^3} (\mathbf{r}_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (4.41a)$$

Здесь величина m , подобно p в (3.27), представляет собой абсолютное значение момента диполя (4.11)

$$\mathbf{m} = m\mathbf{z}_0.$$

Сопоставляя (4.41 и 4.41a), находим \mathbf{m} , т. е. не что иное, как *магнитный момент витка*

$$\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 I \mu a^2 = \mathbf{z}_0 I \mu S, \quad (4.42)$$

где S — его площадь. В последней форме выражение может быть использовано для плоского витка некруговой конфигурации.

Полученный результат позволяет понять происхождение связанных магнитных зарядов, о которых говорилось на стр. 95. Оставаясь в рамках классических представлений, можно сказать, что роль элементарных магнитных диполей вещества, обуславливающих его намагниченность \mathbf{M} , играют микроскопические токи, образованные движением заряженных частиц материи.

Упражнения

1. Вывести формулы (4.32 — 4.34).
2. Найти выражение напряженности магнитного поля двухпроводной линии в декартовых координатах (рис. 86).

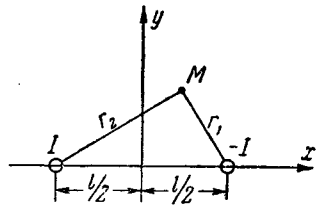


Рис. 86

Ответ:

$$H_x = \frac{Iy}{2\pi} \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right). \quad (4.43)$$

$$H_y = -\frac{I}{2\pi} \left(\frac{x+l/2}{r_2^2} - \frac{x-l/2}{r_1^2} \right).$$

3. Построить распределение поля на оси круглого витка и соленоида с отношением диаметра к длине 1:1, 1:2, 1:5, 1:10.

4. Найти магнитное поле, создаваемое током, равномерно распределенным в плоскости.

§ 31. Магнитная энергия постоянного тока. Индуктивность

Из главы 2 известно, что с магнитным полем связана энергия, распределенная в пространстве с плотностью

$$w^m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{2} \quad (4.44)$$

и в некоторой области V определяемая интегралом

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H}\mathbf{B} dV. \quad (4.45)$$

Заменяя в последнем уравнении \mathbf{B} через $\text{rot } \mathbf{A}$ и преобразуя затем подынтегральное выражение в соответствии с тождеством

$$\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} = \text{div} [\mathbf{A}, \mathbf{H}],$$

приводим (4.45) к виду

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \text{div} [\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} dV. \quad (4.46)$$

Первый член справа с помощью формулы Остроградского — Гаусса преобразуется в поверхностный интеграл

$$\frac{1}{2} \int_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] dS,$$

где S — поверхность, ограничивающая объем V . Если все точки сосредоточены в ограниченной области, то при удалении границы

в бесконечность записанный интеграл уничтожается. Доказательство этого нетрудно произвести (см. аналогичный случай в § 24), если учесть, что совокупность токов можно рассматривать на достаточно большом расстоянии как магнитный диполь.

Итак, распространяя интегрирование в (4.46) на бесконечное пространство, т. е. учитывая *полную* магнитную энергию, мы приходим к ее выражению в виде

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} dV, \quad (4.47)$$

или, что равносильно,

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{A} \delta dV. \quad (4.47a)$$

Физическое содержание этого результата легко понять. Интегралы (4.47, 4.47a) выражают магнитную энергию не путем непосредственного учета ее распределения в пространстве, как формула (4.45), а через связанный с магнитным полем ток. Эти интегралы обращаются в нуль во всех участках безграничного пространства, не содержащих тока. Если представить, что токов *нигде* нет, то, как видно, отсутствует и магнитная энергия, а следовательно, и магнитное поле. Это значит, что магнитное поле всегда существует при наличии тока. В частности, намагниченность вещества объясняется действием микроскопических токов (см. § 30).

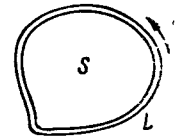


Рис. 87

Магнитная энергия линейных токов. Обращаясь к важному для техники случаю линейных токов, рассмотрим сначала уединенный контур (рис. 87). Выражение связанной с ним магнитной энергии получается из (4.47a) с учетом (4.28):

$$W^m = \frac{I}{2} \oint_L \mathbf{A} dl. \quad (4.48)$$

Фигурирующий здесь контурный интеграл преобразуется по теореме Стокса в *магнитный поток*

$$\oint_L \mathbf{A} dl = \int_S \text{rot } \mathbf{A} dS = \int_S \mathbf{B} dS = \Phi, \quad (4.49)$$

пересекающий ограниченную контуром L поверхность S . Выражение магнитной энергии принимает вид

$$W^m = \frac{I\Phi}{2}. \quad (4.50)$$

В силу линейности уравнений поля магнитный поток пропорционален току

$$\Phi = \mathcal{L}I, \quad (4.51)$$

Интегрируя это выражение, находим

$$W_i^u = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^4} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\alpha = \frac{\mu I^2}{16\pi}, \quad (4.61)$$

т. е. энергия не зависит от диаметра проводника. Величина

$$\mathcal{L}_i = \frac{\mu}{8\pi}, \quad (4.62)$$

определяемая из соотношения $W_i^u = \mathcal{L}_i I^2$, называется *внутренней индуктивностью* единицы длины цилиндра.

2. Определить магнитную энергию и индуктивность, приходящиеся на единицу длины коаксиального кабеля (рис. 80), запол-

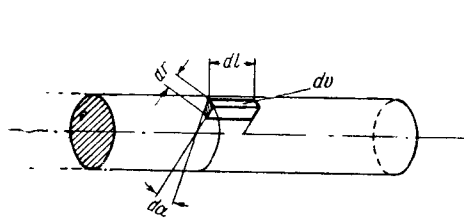


Рис. 90

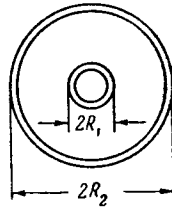


Рис. 91

ненного средой с магнитной проницаемостью μ_1 (магнитная проницаемость проводника μ_2).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \mu_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\mu_2}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \left[R_3^4 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{2} (R_3^2 - R_2^2) \right] \right\}. \quad (4.63)$$

3. На рис. 91 показаны два концентрических витка, один из которых значительно больше другого ($R_2 \gg R_1$). Найти их взаимную индуктивность.

Вычислим поток Φ_{12} , создаваемый большим контуром (2) через поверхность малого (1). Считая поле кругового витка вблизи его центра однородным, пишем

$$\Phi_{12} = S_1 B_2,$$

где $S_1 = \pi R_1^2$ — площадь, ограниченная малым витком, а B_2 — магнитная индукция большого в центре.

Согласно (4.37),

$$B_2 = \mu \frac{I_2}{2R_2}.$$

Отсюда

$$\Phi_{12} = \mu I_2 \frac{\pi R_1^2}{2R_2},$$

и взаимная индуктивность контуров равна

$$M_{12} = \mu \frac{\pi R_1^2}{2R_2}. \quad (4.64)$$

4. Как изменится взаимная индуктивность предыдущей задачи, если ось одного из витков повернуть на угол ϑ (рис. 92)?

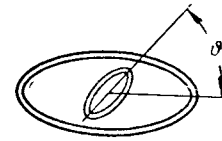


Рис. 92

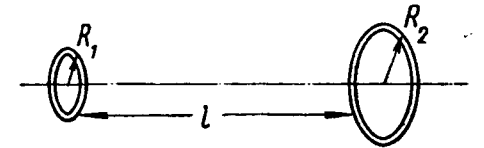


Рис. 93

5. Найти взаимную индуктивность двух коаксиальных витков, находящихся на большом расстоянии (радиусы витков — R_1 и R_2 , расстояние между ними l), рис. 93.

Ответ:

$$M_{12} = \mu \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{2l^3}. \quad (4.65)$$

6. Круглый виток лежит в плоскости, проходящей через ось цилиндрического проводника (рис. 94). Определить взаимную

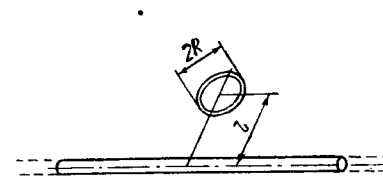


Рис. 94

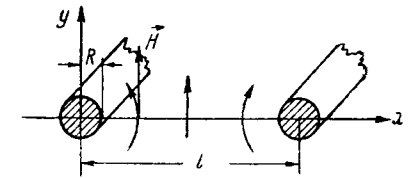


Рис. 95

индуктивность системы, считая радиус витка R малым в сравнении с расстоянием его центра до оси проводника l .

Ответ:

$$M_{12} = \mu \frac{R^2}{2l}. \quad (4.66)$$

7. Найти индуктивность, приходящуюся на единицу длины двухпроводной линии, при условии, что расстояние между проводниками значительно превышает их диаметр (рис. 95).

Указание. Использовать результат (4.43).

Ответ:

$$\mathcal{L} \approx \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{l}{R}. \quad (4.67)$$

8. Найти индуктивность тороида, изображенного на рис. 96, если его магнитная проницаемость μ значительно превышает внешнюю.

Магнитный поток при заданном условии фактически сосредоточен в тороиде. Каждая магнитная силовая линия внутри тороида представляет собой в силу симметрии окружность, охватывающую все n витков намотанного на нем провода. Поэтому на основании (4.20а)

$$2\pi r H = nI,$$

где r — расстояние от оси.

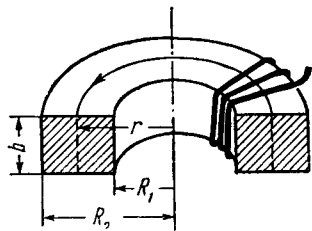


Рис. 96

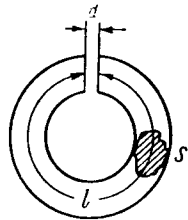


Рис. 97

Магнитный поток, проходящий через поперечное сечение тороида (т. е. через *каждый* из намотанных витков), равен

$$\Phi' = b \int_{R_1}^{R_2} B dr = \frac{\mu n I b}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu n I b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Поток же, проходящий через площадь *всех* витков, в n раз больше:

$$\Phi = n\Phi'.$$

Индуктивность тороида равна

$$\mathcal{L} = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu n^2 b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.68)$$

9. Получить выражение индуктивности тороида приближенно, полагая магнитное поле однородным в поперечном сечении.

Ответ:

$$\mathcal{L} = \frac{\mu n^2 S}{l} = \frac{2\mu n^2 b R_2 - R_1}{\pi R_2 + R_1}. \quad (4.69)$$

10. Найти взаимную индуктивность двух обмоток тороида.

Ответ:

$$M_{12} = \frac{\mu m n b}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (4.70)$$

Здесь m — число витков одной из обмоток и n — другой.

11. Как изменится индуктивность тороида, если в нем прорезать узкий зазор (рис. 97)? Магнитное поле считать однородным.

Вычисляя циркуляцию вектора \mathbf{H} вдоль одной из силовых линий, на основании (4.20а) имеем

$$lH + dH_{\text{заз}} = nI,$$

где H — напряженность поля внутри тороида, $H_{\text{заз}}$ — в зазоре.

Магнитная индукция при переходе через границу зазора не изменяется:

$$B = B_{\text{заз}}.$$

Учитывая, что

$$B = \mu H \text{ и } B_{\text{заз}} = \mu_0 H_{\text{заз}},$$

заменяем H через B в выражении циркуляции и получаем:

$$B \left(\frac{l}{\mu} + \frac{d}{\mu_0} \right) = nI.$$

Поток, проходящий через площадь *одного* витка, равен

$$\Phi' = BS = \frac{\mu n I S}{l + \frac{\mu}{\mu_0} d},$$

и, следовательно, индуктивность тороида с зазором есть

$$\mathcal{L} = \frac{n\Phi'}{I} = \frac{\mu n^2 S}{l} \frac{1}{1 + \frac{\mu}{\mu_0} \frac{d}{l}} \quad (4.71)$$

§ 32. Электрическое поле постоянного тока

В заключение главы вернемся к электрическому полю постоянного тока. На стр. 93 указывалось, что подобно полю электростатическому оно потенциально, однако, на проводящих границах потенциал уже не постоянен, и вектор \mathbf{E} не составляет с ними прямого угла. Таким образом, электрическое поле системы проводящих тел, несущих ток, отличается от электростатического поля этой же системы.

Посмотрим, насколько велико может быть на практике отмеченное различие. Пусть разность потенциалов двух параллельных токонесущих пластин из меди ($\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ сим/м}$), лежащих на расстоянии $d = 1 \text{ см}$, составляет $\Phi_B - \Phi_A = 10 \text{ в}$, а плотность тока равна $\delta = 2 \text{ а/мм}^2$.

Вычислим компоненты вектора \mathbf{E} у поверхности проводника: тангенциальную

$$E_\tau = \frac{\delta}{\sigma} \approx 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ в/м}$$

и нормальную

$$E_n = \frac{\Phi_B - \Phi_A}{d} = 10^3 \text{ в/м}.$$

Как видно, их отношение оказывается весьма малой величиной

$$E_{\tau}/E_n \approx 3.5 \cdot 10^{-5}$$

и электрическое поле практически нормально токонесящему проводнику. По виду оно пренебрежимо мало отличается от поля электростатического конденсатора, образованного взятыми пластинами. Рассмотренный пример типичен: тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} на проводящей токонесящей поверхности обычно настолько мала, что отличие электрического поля в диэлектрике от поля электростатического остается несущественным.

Иное наблюдается *внутри проводника*. Как известно (§ 23), поле электростатическое там всегда отсутствует. При наличии же постоянного тока в проводящей среде существует электрическое поле, описываемое уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \delta &= \sigma \mathbf{E}; \\ \operatorname{div} \delta &= 0. \end{aligned} \right\} (4.72) \quad \left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0; \\ \oint_S \delta d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \right\} (4.72a)$$

Последнее из уравнений (4.72) есть не что иное, как уравнение закона сохранения заряда (1.16, 1.16а), записанное для стационарного процесса ($\partial/\partial t = 0$). Оно выражает непрерывность линий постоянного тока.

Сопоставляя систему уравнений (4.72) с уравнениями электростатического поля в среде, не содержащей зарядов,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0; \end{aligned} \right\} (4.73) \quad \left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= 0; \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= 0; \end{aligned} \right\} (4.73a)$$

видим, что они совершенно одинаковы по форме. Уравнения электростатики (4.73) становятся справедливыми для электрического поля в проводящей среде, если электрическую индукцию \mathbf{D} заменить в них плотностью тока δ , а диэлектрическую проницаемость ϵ — удельной проводимостью σ . На этом основании говорят, что между обонми полями существует *формальная аналогия*.

В ряде случаев указанное обстоятельство помогает нахождению электрического поля в проводящей среде. Если в рассматриваемой задаче все граничные поверхности имеют ту же форму, что и в некоторой электростатической задаче, и вектор δ ведет себя в первом случае на границах так же, как вектор \mathbf{D} — во втором, то можно использовать готовое решение электростатической задачи, сделав в нем замену

$$\mathbf{D} \text{ на } \delta \text{ и } \epsilon \text{ на } \sigma. \quad (4.74)$$

Так, вектор δ в слабо проводящей среде нормален ограничивающей ее поверхности хорошего проводника. Действительно, как это вытекает из второго уравнения (4.72а)

$$\oint_S \delta d\mathbf{S} = 0,$$

нормальная составляющая δ на границе сред непрерывна

$$\delta_{1n} = \delta_{2n} \quad (4.75)$$

(см., например, аналогичный вывод непрерывности B_n из (1.14а) в § 9). Тангенциальная же составляющая в силу непрерывности E_{τ}

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}$$

подчинена соотношению

$$\delta_{1\tau} = \delta_{2\tau} \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (4.76)$$

т. е. в слабо проводящей среде она в σ_2/σ_1 раз меньше, чем в хорошем проводнике. При достаточном различии проводимостей σ_1 и σ_2 составляющей $\delta_{1\tau}$ можно пренебречь и считать вектор δ_1 нормальным границе.

Если же мысленно заменить слабо проводящую среду идеальным диэлектриком, то можно рассмотреть электростатическую задачу, в которой вектор \mathbf{D} будет также нормальным границе. Пусть решение электростатической задачи известно заранее. Тогда сделав в нем замену (4.74), мы получаем поле в слабо проводящей среде.

На принципе отмеченной выше аналогии базируется также *моделирование* электростатических полей в электролитической ванне. Для экспериментального исследования электростатического поля системы проводящих тел последние помещают в ванну и, создав требуемые потенциалы, измеряют плотность тока в различных участках электролита. Найденное таким путем поле тока в электролите представляет собой модель электростатического поля системы. Гарантией этому служит значительное различие удельных проводимостей электролита и элементов системы (обычно металлических), позволяющее считать, что вектор плотности тока \mathbf{k} поверхностям системы нормален.

Заканчивая главу, выясним условие существования постоянного тока с его электромагнитным полем. Будет ли, например, присутствовать ток I со своим потенциальным полем \mathbf{E} в замкнутом проводнике L (рис. 98, а) постоянного сечения S с удельной проводимостью σ ?

Взяв первое из соотношений (4.72а)

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \quad (4.77)$$

и учитывая, что

$$\mathbf{E} = \delta/\sigma \quad \text{и} \quad \delta = \tau_u I/S,$$

получаем равенство:

$$\frac{I}{\sigma S} \int_L dl = \frac{IL}{\sigma S} = IR = 0,$$

где R — сопротивление проводника — величина, отличная от нуля.

Как видно, ток в цепи отсутствует:

$$I = 0.$$

Между тем нетрудно понять, какое дополнительное условие должно быть выполнено, чтобы в цепи L появился постоянный ток I . Как известно (§ 16), электрический заряд при обходе по замкнутому контуру в потенциальном поле не совершает работы. Ток, представляющий собой движение заряженных частиц, не может, следовательно, расходовать энергию поля \mathbf{E} . Остается заключить, что для существования тока необходимо наличие источника энергии неэлектрического происхождения, вызывающего движение зарядов. На рис. 98, б он символически обозначен кружком.

Пусть напряженность поля, создаваемого этим источником, есть \mathbf{E}^{cm} (см. § 6), тогда, согласно (1.35),

$$\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cm} = \delta/\sigma,$$

и после прежних выкладок оказывается:

$$\oint_L (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{cm}) dl = IR.$$

Привлекая (4.77), пишем

$$\oint_L \mathbf{E}^{cm} dl = IR, \quad (4.78)$$

или

$$\mathcal{E}^{cm} = IR, \quad (4.78a)$$

где

$$\mathcal{E}^{cm} = \oint_L \mathbf{E}^{cm} dl$$

— действующая в цепи сторонняя э. д.

Уравнение (4.78) выражает закон Ома для цепи постоянного тока.

Итак, постоянный ток и его поле существуют лишь при наличии источника энергии неэлектрического происхождения.

Примеры и упражнения

1. Алюминиевые ($\sigma = 3,72 \cdot 10^7$ сим/м) провода двухпроводной линии имеют диаметр $2R = 0,5$ см и идут на расстоянии $d = 10$ см. Каков максимальный угол наклона силовых линий к поверхности проводов при разности потенциалов между ними $\varphi_B - \varphi_A = 200$ в и токе $I = 10$ а?

2. В среде, удельная проводимость которой равна σ_1 , расположены два проводника A и B (рис. 99), обладающие значительно более высокой проводимостью σ_2 . Если между проводниками существует разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$, то в окружающей среде присутствует ток I . Показать, что для определения величины

$$G = \frac{I}{\varphi_B - \varphi_A}, \quad (4.79)$$

называемой проводимостью среды для проводников A и B , можно использовать выражение ёмкости конденсатора, образованного этими проводниками

$$C = \frac{q}{\varphi_B - \varphi_A}.$$

заменяв в нем ϵ на σ_1 , т. е., что

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma_1}{\epsilon}. \quad (4.80)$$

3. Какова приходящаяся на единицу длины проводимость изоляции коаксиального кабеля, заполненного несовершенным диэлектриком с удельной проводимостью σ ?

4. Вычислить проводимость G и сопротивление изоляции $1/G = R$ коаксиального кабеля длиной в 1 м, заполненного парафином ($\sigma = 10^{-15}$ сим/м). Отношение R_2/R_1 (рис. 80) составляет 1,5.

5. Плоский конденсатор с площадью пластин $S = 100$ см² заполнен слюдой с удельной проводимостью $\sigma = 1,78 \cdot 10^{-13}$ сим/м. Вычислить мощность, теряемую на нагрев слюды, на обкладках конденсатора поддерживается разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_A = 1000$ в.

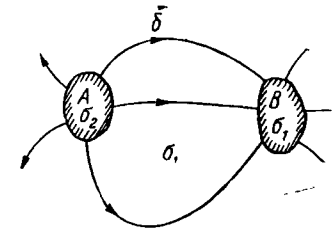


Рис. 99

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПЕРЕМЕННОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Теория переменных электромагнитных процессов базируется на системе уравнений электромагнитного поля в ее полном виде (1.58):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \delta; & \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_L \mathbf{D} d\mathbf{S} + \int_L \delta d\mathbf{S}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; & \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho; & \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= q; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 & \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1) \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H};$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E};$$

$$\delta = \sigma \mathbf{E}.$$

Для радиотехники переменное электромагнитное поле представляет основной интерес, и ему посвящается большая часть книги. Мы будем изучать установившиеся электромагнитные процессы, которым свойственны *гармонические* во времени колебания — такие, когда всякую характеризующую поле скалярную величину ψ можно записать в виде

$$\psi = \psi_m \cos(\omega t + \varphi_\psi) \quad (5.2)$$

и, соответственно, всякий вектор поля \mathbf{V} разлагается на компоненты, изменяющиеся по аналогичному закону:

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}_1 V_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + \mathbf{a}_2 V_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2) + \mathbf{a}_3 V_{3m} \cos(\omega t + \varphi_3), \quad (5.2a)$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ — орты некоторой системы координат q_1, q_2, q_3 .

Величина

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T \quad (5.3)$$

называется *круговой частотой гармонических колебаний*; ψ_m и V_{im} ($i=1, 2, 3$) принято называть амплитудами, а φ_ψ и φ_i — фазами. Если фазы компонент вектора одинаковы ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_V$), то удобно говорить о его амплитуде $V_m = \mathbf{a}_1 V_{1m} + \mathbf{a}_2 V_{2m} + \mathbf{a}_3 V_{3m}$. Тогда можно вместо (5.2a) писать

$$\mathbf{V} = V_m \cos(\omega t + \varphi_V). \quad (5.2b)$$

Как амплитуды, так и фазы в общем случае зависят от положения в пространстве, т. е. являются функциями координат q_1, q_2, q_3 .

Отметим, что гармоническое во времени электромагнитное поле называют еще *монохроматическим* («одноцветным»). Этот термин взят из оптики: в световом спектре, как известно, частоте соответствует цвет.

Среду, в которой существует электромагнитное поле, мы всегда будем считать однородной (или состоящей из однородных областей), а также — за исключением некоторых особо оговоренных случаев в гл. 6 — изотропной. Поэтому параметры вещества μ, ε и σ будут фигурировать только как постоянные величины. На границах, разделяющих однородные области, поле подчиняется условиям, изученным в § 8, 9.

Данная глава является вводной, в ней будут рассмотрены исходные средства анализа и некоторые общие свойства электромагнитного поля, гармонического во времени.

§ 33. Применение метода комплексных амплитуд

Анализ гармонических процессов, как известно, значительно упрощается введением *метода комплексных амплитуд*, называемого также «символическим методом» и знакомого читателю, изучавшему электротехнику и основы радиотехники.

Напомним, что по формуле Эйлера

$$e^{j(\omega t + \varphi)} = \cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi).$$

Отсюда видно, что скаляр ψ (5.2) и вектор \mathbf{V} (5.2a) можно определить как вещественные части величин

$$\left. \begin{aligned} \dot{\psi} &= \psi_m e^{j(\omega t + \varphi_\psi)} \\ \dot{\mathbf{V}} &= \mathbf{a}_1 V_{1m} e^{j(\omega t + \varphi_1)} + \mathbf{a}_2 V_{2m} e^{j(\omega t + \varphi_2)} + \mathbf{a}_3 V_{3m} e^{j(\omega t + \varphi_3)} \end{aligned} \right\}, \quad (5.4)$$

которые называются их комплексами. Таким образом,

$$\psi = \operatorname{Re} \dot{\psi} \quad \text{и} \quad \mathbf{V} = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{V}} \quad (5.5)$$

(Re —знак вещественной части; ниже будет употребляться также знак мнимой части Im).

Далее мы будем говорить о комплексе $\dot{\mathbf{V}}$, ибо все заключения о его компонентах справедливы и по отношению к комплексу $\dot{\psi}$. Выделим в величине $\dot{\mathbf{V}}$ (5.4) множитель

$$\dot{\mathbf{V}}_m = \mathbf{a}_1 V_{1m} e^{j\varphi_1} + \mathbf{a}_2 V_{2m} e^{j\varphi_2} + \mathbf{a}_3 V_{3m} e^{j\varphi_3}, \quad (5.6)$$

свободный от временной зависимости и характеризующий как амплитуды, так и фазы компонент вектора \mathbf{V} (5.2a). Его называют комплексной амплитудой. Таким образом, комплекс $\dot{\mathbf{V}}$ представляется в виде произведения комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{V}}_m$ на временной множитель $e^{j\omega t}$:

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{V}}_m e^{j\omega t}. \quad (5.7)$$

Если комплекс $\dot{\mathbf{V}}$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению, то это значит, что данному уравнению удовлетворяют его вещественная и мнимая части. Поэтому, когда требуется найти решение такого уравнения в виде \mathbf{V} (5.2a), можно искать его в форме комплекса $\dot{\mathbf{V}}$ (5.4), а затем уже получить нужное решение как вещественную часть комплекса.

Этому способу мы будем всегда следовать при изучении гармонических во времени процессов, ибо, как легко показать, он существенно упрощает уравнения электромагнитного поля, освобождая их от временной зависимости. Указанное упрощение вытекает как прямое следствие того, что дифференцирование комплекса по времени эквивалентно его умножению на $j\omega$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{V}} = j\omega \dot{\mathbf{V}}. \quad (5.8)$$

Так, заменяя во втором уравнении Максвелла векторы

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \cos(\omega t + \varphi_E) \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_m \cos(\omega t + \varphi_B)$$

их комплексами, получаем:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega \dot{\mathbf{B}}.$$

Множитель $e^{j\omega t}$, присутствующий в комплексах $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$, можно вынести и оставить в уравнении лишь комплексные амплитуды:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m = -j\omega \dot{\mathbf{B}}_m.$$

Итак, в задачах электродинамики удобно пользоваться уравнениями электромагнитного поля, записанными относительно комплексов или комплексных амплитуд, и находить векторы поля как вещественные части полученных комплексных решений.

Упражнение

Записать относительно комплексных амплитуд все уравнения (5.1).

§ 34. Комплексные проницаемости. Система уравнений монохроматического поля

Запишем уравнение Максвелла в комплексах, используя равенства $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$; $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta} \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu \dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

В настоящем параграфе мы будем рассматривать электромагнитное поле в области лишенной сторонних сил ($\mathbf{E}^{cm} = 0$). Исключая из первого уравнения (5.9) комплекс $\dot{\delta}$ с помощью дифференциальной формулировки закона Ома (1.23)

$$\dot{\delta} = \sigma \dot{\mathbf{E}}$$

запишем его правую часть в следующем виде:

$$j\omega \varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta} = j\omega \left(\varepsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}}.$$

Комплексная величина, заключенная в скобки, формально выполняет функцию диэлектрической проницаемости проводящей среды при монохроматическом поле. Она называется *комплексной диэлектрической проницаемостью* и обозначается символом

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'', \quad (5.10)$$

где

$$\varepsilon' = \varepsilon \quad \text{и} \quad \varepsilon'' = \sigma/\omega.$$

Величина

$$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad (5.11)$$

именуемая «тангенсом угла потерь» среды

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}, \quad (5.12)$$

есть не что иное, как известное из § 7 отношение амплитуд токов проводимости и смещения.

Итак, с введением диэлектрической проницаемости (5.10) первое уравнение Максвелла принимает вид

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}} \quad (5.13)$$

и становится симметричным второму уравнению.

Но и магнитную проницаемость в общем случае следует рассматривать как величину комплексную. Понятие о комплексной магнитной проницаемости было введено впервые В. К. Аркадьевым в 1913 году. Физическое содержание его можно понять на примере ферромагнетика. В результате гистерезиса и вязкости при намагничивании возникают потери, происходит отставание по фазе магнитной индукции \mathbf{B} от напряженности поля \mathbf{H} в ферромагнетике. При достаточно малых амплитудах поля ферромагнитную среду можно считать линейной и писать для гармонического процесса

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \cos \omega t \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_m \cos(\omega t - \Delta^m),$$

где Δ^m — указанное фазовое отставание. Тогда, как это видно, отношение комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{B}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ оказывается комплексной величиной

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{\mathbf{B}}_m}{\dot{\mathbf{H}}_m} = \frac{\mathbf{B}_m}{\mathbf{H}_m} e^{-j\Delta^m} = \mu' - j\mu'' \quad (5.14)$$

При очень высоких частотах могут стать заметными аналогичные электрические процессы, приводящие к отставанию вектора \mathbf{D} от \mathbf{E} . В общем случае вид мнимой части диэлектрической проницаемости обусловлен как проводимостью (5.12), так и этими процессами.

Возвращаясь к уравнениям Максвелла (5.9), запишем их с комплексными проницаемостями:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad 5)$$

Нетрудно убедиться в том, что эти два уравнения заменили собой теперь всю систему уравнений электромагнитного поля (5.1). Действительно, не включенными в них остались лишь третье и четвертое уравнения системы. Но они вытекают из (5.15) как простые следствия: применяя к обеим частям (5.15) оператор расходимости div и учитывая тождество вида

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{V} = 0,$$

получаем:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (5.16)$$

Это и есть уравнения

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho}, \quad (*)$$

записанные относительно комплексов $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$. Идентичность первого уравнения (5.16) и первого уравнения (*) заметна сразу. С целью сравнить вторые уравнения (5.16) и (*) привлечем дифференциальную формулировку закона сохранения заряда (1.16) в комплексной форме:

$$\operatorname{div} \dot{\delta} = -j\omega\dot{\rho}. \quad (5.17)$$

Взяв отсюда выражение плотности заряда

$$\dot{\rho} = \frac{j}{\omega} \operatorname{div} \dot{\delta} = j \frac{\sigma}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}$$

и внося его во второе уравнение (*), получаем второе из уравнений (5.16):

$$\operatorname{div} \left(\epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}} = 0; \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = 0.$$

Итак, уравнения Максвелла (5.15) составляют полную систему уравнений монохроматического электромагнитного поля.

Примеры и упражнения

1. Рассмотрим плоский конденсатор, заполненный несовершенным диэлектриком. К пластинам его приложено напряжение $U = U_m \cos \omega t$. Плотность полного тока конденсатора есть

$$\delta + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

или, в комплексном виде,

$$\dot{\delta} + \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial t} = j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}}.$$

Будем считать, что пространственное распределение поля не отличается от статического, и площадь пластин S настолько велика, что краевыми искажениями можно пренебречь, тогда

$$\dot{E}_m = \dot{U}_m/l \quad \text{и} \quad \dot{I}_m = j\omega\epsilon \dot{E}_m S$$

(I — ток конденсатора, l — расстояние между его пластинами).

Отношение

$$Z = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = \frac{l}{j\omega \dot{\epsilon} S} = -j \frac{1}{\omega \dot{C}} \quad (5.18)$$

называется комплексным сопротивлением конденсатора. Входящую в него величину

$$\dot{C} = \frac{\dot{\epsilon} S}{l} = C(1 - j \operatorname{tg} \Delta) \quad (5.19)$$

можно назвать «комплексной емкостью», а тангенс угла потерь определить как

$$\operatorname{tg} \Delta = -\frac{\operatorname{Im} \dot{C}}{\operatorname{Re} \dot{C}} \quad (5.20)$$

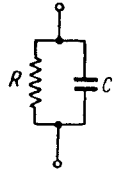


Рис. 100

Задача. Покажите, что при «параллельной схеме замещения» конденсатора (рис. 100), для которой

$$1/Z = 1/R + j\omega C,$$

справедливо выражение тангенса угла потерь

$$\operatorname{tg} \Delta = 1/\omega CR. \quad (5.20a)$$

2. Какова комплексная диэлектрическая проницаемость идеального диэлектрика и идеального проводника?

3. По данным §§ 4 и 7 оценить комплексную диэлектрическую проницаемость различных сред в диапазонах звуковых, радио- и сверхвысоких частот.

§ 35. Средний баланс энергии электромагнитного поля

Метод комплексных амплитуд, пригодный во всех случаях когда векторы поля связаны *линейной* зависимостью, непосредственно не применим к вычислению его энергии и других квадратичных величин. Действительно, принимая во внимание неравенство

$$\operatorname{Re}(ab) \neq \operatorname{Re}(a) \operatorname{Re}(b),$$

мы констатируем, что произведение векторов отличается от вещественной части произведения их комплексов

$$\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \neq \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{V}}_1 \dot{\mathbf{V}}_2)$$

и, разумеется, то же самое справедливо в отношении квадрата вектора

$$V^2 \neq \operatorname{Re}(\dot{V}^2).$$

Если же требуется в нелинейном соотношении заменить вектор поля выражением через комплекс, то используют очевидное равенство

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}}^*) \quad (5.21)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение).

Записанная с его помощью мгновенная плотность энергии монохроматического поля имеет вид

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{8} [\epsilon (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^*)^2 + \mu (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^*)^2], \quad (5.22)$$

мгновенный вектор Пойнтинга

$$\mathbf{P} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{4} [(\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^*), (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^*)] \quad (5.23)$$

и т. п.

Под словом «мгновенный» имеется в виду «существующий в данный момент t ». Не меньший интерес в теории гармонических процессов представляют квадратичные величины, *средние во времени*. При вычислении их выбирают промежутки времени τ , значительно превышающий период процесса $T = 2\pi/\omega$:

$$\tau \gg T.$$

Таким образом, понятия «средней» величины и «средней за период» совпадают.

Найдем среднее значение вектора Пойнтинга

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P} dt. \quad (5.24)$$

При этом, согласно (5.23),

$$\begin{aligned} |\mathbf{P}| &= \frac{1}{4} (\dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{E}}^*) (\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{H}}^*) \sin(\widehat{\mathbf{E}}, \mathbf{H}) = \\ &= \frac{1}{4} (\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{E}}^*\dot{\mathbf{H}} + \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}^* + \dot{\mathbf{E}}^*\dot{\mathbf{H}}^*) \sin(\widehat{\mathbf{E}}, \mathbf{H}), \end{aligned}$$

а интегрирование приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}} dt &= \frac{1}{T} E_m H_m \int_0^T e^{j(2\omega t + \varphi_E + \varphi_H)} dt = 0; \\ \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{E}}^*\dot{\mathbf{H}} dt &= \frac{1}{T} E_m H_m \int_0^T e^{-j(\varphi_E - \varphi_H)} dt = E_m H_m e^{-j(\varphi_E - \varphi_H)}; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{E} \dot{H}^* dt = \frac{1}{T} E_m H_m \int_0^T e^{j(\varphi_E - \varphi_H)} dt = E_m H_m e^{j(\varphi_E - \varphi_H)}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{E}^* \dot{H} dt = \frac{1}{T} E_m H_m \int_0^T e^{-j(2\omega t + \varphi_E + \varphi_H)} dt = 0.$$

Следовательно, на основании (5.24)

$$|\bar{\mathbf{P}}| = \frac{1}{4} E_m H_m [e^{j(\varphi_E - \varphi_H)} + e^{-j(\varphi_E - \varphi_H)}] \sin(\mathbf{E}, \mathbf{H})$$

и

$$|\bar{\mathbf{P}}| = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_m, \dot{\mathbf{H}}_m] \cos(\varphi_E - \varphi_H). \quad (5.25)$$

Переписав этот результат в виде

$$|\bar{\mathbf{P}}| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}^*, \dot{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*], \quad (5.26)$$

констатируем, что среднее значение вектора Пойнтинга можно получить как вещественную часть вектора

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*], \quad (5.27)$$

который называется *комплексным вектором Пойнтинга*.

Итак,

$$\bar{\mathbf{P}} = \operatorname{Re} \dot{\mathbf{P}}. \quad (5.28)$$

Подобным же образом, но гораздо проще (это отнесено к упражнениям) находятся выражения в комплексной форме величин $\bar{\omega}$ и \bar{p} . Средняя плотность энергии оказывается равной

$$\bar{\omega} = \frac{1}{4} (\epsilon \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^* + \mu \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^*) = \frac{1}{4} (\epsilon E_m^2 + \mu H_m^2). \quad (5.29)$$

а средняя плотность мощности —

$$\bar{p} = \operatorname{Re} \dot{p}. \quad (5.30)$$

где

$$\dot{p} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}^*$$

называется комплексной плотностью мощности. В отсутствие сторонних сил векторы \mathbf{E} и δ , как это следует из (1.23), находятся в фазе. Тогда \dot{p} — величина вещественная, и мы имеем:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}^* = \frac{1}{2} \frac{\delta_m^2}{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma E_m^2. \quad (5.30a)$$

Для установления связи между средними величинами $\bar{\omega}$, $\bar{\mathbf{P}}$ и \bar{p} воспользуемся уравнениями Максвелла в форме (5.9), первое из которых запишем относительно комплексно-сопряженных векторов:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}^* &= -j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}}^* + \dot{\delta}^*, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\}$$

Умножая все члены первого уравнения на $\dot{\mathbf{E}}$, а второго — на $\dot{\mathbf{H}}^*$ и производя простые выкладки, известные из § 13, находим:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] = -j\omega (\mu \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* - \epsilon \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^*) - \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}^*, \quad (5.31)$$

а после интегрирования по произвольной области V и применения формулы Остроградского — Гаусса получаем:

$$\oint_S [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] d\mathbf{S} = -j\omega \int_V (\mu \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* - \epsilon \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}^*) dV - \int_V \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}^* dV. \quad (5.32)$$

С учетом формул (5.27, 5.29 и 5.30) перепишем эти результаты так:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{P}} = -j2\omega (\bar{\omega}^* - \bar{\omega}^0) - \dot{p} \quad (5.31a)$$

$$\oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = -j2\omega (\bar{W}^* - \bar{W}^0) - \dot{P}, \quad (5.32a)$$

где

$$\bar{W}^* = \int_V \bar{\omega}^* dV = \frac{j1}{4} \int_V \mu H_m^2 dV \quad \text{и} \quad \bar{W}^0 = \int_V \bar{\omega}^0 dV = \frac{1}{4} \int_V \epsilon E_m^2 dV$$

выражают среднюю магнитную и среднюю электрическую энергию в области V , а

$$\dot{P} = \int_V \dot{p} dV = \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{E}} \dot{\delta}^* dV$$

— комплексную мощность.

Мы получили, таким образом, уравнения баланса энергии монохроматического электромагнитного поля в комплексной форме и должны теперь выяснить их смысл. Полагая сначала, что внутри V нет сторонних сил, и, следовательно, $\dot{P} = \bar{P}$ есть мощность, расходуемая в области (например, мощность тепловых

потерь), разделим в (5.32) вещественную и мнимую части:

$$\left. \begin{aligned} -\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} &= \bar{P}, \\ -\operatorname{Im} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} &= 2\omega (\bar{W}^a - \bar{W}^s). \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Как видно, вещественная часть потока комплексного вектора Пойнтинга, входящего в область извне, в среднем уравнивает происходящий там расход энергии, создает *активную мощность*.

Мнимая часть потока вектора $\dot{\mathbf{P}}$, по определению, создает в области *реактивную мощность*, выражаемую разностью средних величин магнитной и электрической энергии, умноженной на удвоенную круговую частоту.

Для выражения комплексной мощности при наличии источников в области V привлечем (подобно тому, как это делалось в § 12) закон Ома в форме (1.35). Внося в (5.30) вытекающее из (1.35) выражение напряженности \mathbf{P}

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\delta}}{\sigma} - \dot{\mathbf{E}}^{cm}$$

и интегрируя по V , имеем:

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \int_V \frac{\delta_m^2}{\sigma} dV - \frac{1}{2} \int_V \dot{\mathbf{E}}^{cm} \dot{\delta}^* dV, \quad (5.34)$$

или

$$\dot{P} = \bar{P}^a - \dot{P}^{cm} \quad (5.34a)$$

Первый член в правой части, обозначенный \bar{P}^a (величина вещественная), выражает среднюю мощность потерь. Что же касается второго члена (\dot{P}^{cm}), то он оказывается комплексным, если \mathbf{E}^{cm} и δ не совпадают по фазе. Вещественная часть \dot{P}^{cm}

$$\operatorname{Re} \dot{P}^{cm} = P^a$$

называется активной мощностью источника, а мнимая часть

$$\operatorname{Im} \dot{P}^{cm} = P^r$$

— его реактивной мощностью. Как видно, средняя мощность ($\bar{P} = \operatorname{Re} \dot{P}$) в общем случае есть

$$\bar{P} = \bar{P}^a - \bar{P}^r \quad (5.34b)$$

(сравните с (2.5a).

Введя в уравнение (5.32a) выражение комплексной мощности (5.34a), легко установить, что при наличии сторонних сил внутри V вместо первой строчки (5.33) будет иметь место равенство:

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\mathbf{P}} d\mathbf{S} = P^a - \bar{P}^r. \quad (5.33a)$$

Вещественная часть потока вектора $\dot{\mathbf{P}}$, которую согласно (5.28) следует интерпретировать как средний поток вектора Пойнтинга, положительна при $P^a > \bar{P}^r$ и отрицательна при $P^a < \bar{P}^r$. Иными словами, поток энергии в среднем *выходит* из области, если активная мощность источника превышает внутренний расход энергии. Если же потери преобладают, то они покрываются *входящим* потоком энергии.

Мощность потерь в среде (точнее: *электрических потерь*) можно выразить через комплексную диэлектрическую проницаемость:

$$\bar{P}^r = \frac{1}{2} \int_V \frac{\delta_m^2}{\sigma} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma E_m^2 dV = \frac{\omega}{2} \int_V \epsilon'' E_m^2 dV. \quad (5.35)$$

Это выражение, конечно, совпадает с вещественной частью интеграла

$$-j \frac{\omega}{2} \int_V \epsilon^* \dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}} dV,$$

который оказался бы в правой части (5.32a), если бы исходные уравнения Максвелла были взяты в форме (5.15):

$$\bar{P}^r = \operatorname{Re} \left[-j \frac{\omega}{2} \int_V \epsilon^* \dot{\mathbf{E}}^* \dot{\mathbf{E}} dV \right] = \frac{\omega}{2} \int_V \epsilon'' E_m^2 dV. \quad (5.35a)$$

При этом вещественная часть аналогичного интеграла

$$j \frac{\omega}{2} \int_V \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* dV$$

дала бы не учитывавшиеся до сих пор *магнитные* потери

$$\bar{P}^m = \operatorname{Re} \left[j \frac{\omega}{2} \int_V \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}^* dV \right] = \frac{\omega}{2} \int_V \mu'' H_m^2 dV, \quad (5.36)$$

т. е. мощность, расходуемую на периодическое перемагничивание среды.

Примеры и упражнения

1. Вывести формулы (5.29 и 5.30).
2. Исходя из уравнений Максвелла в форме (5.15), получить частный вид уравнения баланса энергии (5.32) для случая, когда область V не содержит сторонних сил.

3. Рассмотрим изолированную систему (§ 13). Полагая в (5.32a) $\dot{\mathbf{P}} = 0$ и внося туда (5.34a), имеем:

$$\dot{P}^{cm} = \bar{P}^n + j2\omega(\bar{W}^m - \bar{W}^s). \quad (5.37)$$

Разделяя в (5.37) вещественную и мнимую части, получаем:

$$\left. \begin{aligned} P^a &= \bar{P}^n, \\ P^r &= 2\omega(\bar{W}^m - \bar{W}^s) \end{aligned} \right\} \quad (5.37a)$$

Если при некоторой частоте ω оказывается $P^r = 0$, то говорят, что имеет место *резонанс*. Тогда

$$\bar{W}^m = \bar{W}^s.$$

Принимая во внимание очевидные равенства

$$\bar{W}^m = \frac{1}{2} W_{\max}^m \quad \text{и} \quad \bar{W}^s = \frac{1}{2} W_{\max}^s,$$

видим, что полная энергия

$$W = \bar{W}^m + \bar{W}^s$$

равна при этом максимальной магнитной или максимальной электрической:

$$W = W_{\max}^m = W_{\max}^s.$$

Отношение

$$Q = \frac{\omega W}{P^a} = \frac{\omega W_{\max}^m}{P^a} = \frac{\omega W_{\max}^s}{P^a} \quad (5.38)$$

называется *добротностью* изолированной системы.

Заменяя в полученной формуле ω через $2\pi/T$, мы отмечаем, что добротность

$$Q = 2\pi \frac{W}{P^a T} = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T} \quad (5.38a)$$

есть увеличенное в 2π раз отношение запаса энергии системы W к количеству ее ΔW_T , расходуемому за период T .

§ 36. Теорема единственности

Установим теперь условия, при которых электромагнитному монохроматическому полю в некоторой области соответствует единственное решение уравнений Максвелла. Практический смысл такого исследования очевиден. Если выражение поля, найденное каким-либо способом при решении определенной задачи, указан-

ным условиям удовлетворяет, то существует гарантия, что задача решена правильно.

Внутренняя задача. Пусть требуется найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} внутри области V , ограниченной замкнутой поверхностью S (рис. 101), т. е. как говорят, поставлена внутренняя задача электродинамики. Покажем что внутренняя задача имеет единственное решение, если на границе S заданы тангенциальные составляющие векторов: а) \mathbf{E} (E -задача), либо б) \mathbf{H} (H -задача), либо в) \mathbf{E} на одной части и \mathbf{H} на другой части границы (EH -задача), и в каждом из этих случаев происходит хотя бы очень слабое поглощение энергии внутри V .

Предположим, что существуют два решения поставленной задачи \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 . Исследуем разность этих решений.

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad \Delta \mathbf{H} = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2.$$

Ввиду того, что оба решения удовлетворяют оговоренным условиям, поле $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{H}$ обладает тем свойством, что

- в случае (а) $\Delta E_\tau = 0$ на S ,
- » » (б) $\Delta H_\tau = 0$ на S ,
- » » (в) $\Delta E_\tau = 0$ на одной части S
и $\Delta H_\tau = 0$ на другой ее части.

Итак, в каждой точке границы обязательно отсутствует тангенциальная составляющая вектора $\Delta \mathbf{E}$ или вектора $\Delta \mathbf{H}$. Но это значит, что на всей границе равна нулю нормальная компонента векторного произведения $[\Delta \mathbf{E}, \Delta \mathbf{H}^*]$, а потому, в частности, отсутствует поток комплексного вектора Пойнтинга через границу S :

$$\frac{1}{2} \oint_S [\Delta \dot{\mathbf{E}}, \Delta \dot{\mathbf{H}}^*] dS = 0.$$

Если внутри V нет сторонних сил ($\mathbf{E}^{cm} = 0$), то, согласно (5.33) вещественная часть этого интеграла равна средней мощности потерь в области, т. е.

$$\bar{P}^n = \frac{1}{2} \int_V \sigma \Delta E_m^2 dV = 0.$$

Отсюда видно, что при отличной от нуля (сколь угодно малой) удельной проводимости среды σ поле $\Delta \mathbf{E}$ (а с ним в силу уравне-

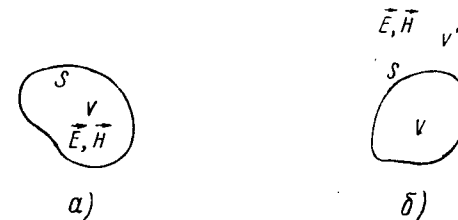


Рис. 101

ний Максвелла и $\Delta \mathbf{H}$) должно равняться нулю. Следовательно,

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \text{ и } \mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2,$$

и задача, действительно, имеет одно решение.

Но этот вывод не изменится и при наличии источников внутри V , так как сторонняя мощность поля $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{H}$ равна нулю:

$$\bar{P}^{cm} = \frac{1}{2} \int_V \Delta \dot{\mathbf{E}}^{cm} \dot{\mathbf{\delta}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\mathbf{E}}^{cm} - \dot{\mathbf{E}}^{cn}) \dot{\mathbf{\delta}}^* dV = 0$$

(оба решения соответствуют одному и тому же заданному стороннему полю \mathbf{E}^{cm}).

Легко показать, что вывод остается в силе и при замене электрических потерь магнитными.

Внешняя задача. Докажем теперь теорему единственности для случая, когда поставлена задача найти электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} вне V (рис. 101, б), в бесконечном пространстве V' , простирающемся от границы S . Потребуем, чтобы на S была известна тангенциальная составляющая вектора \mathbf{E} или \mathbf{H} (условие а, б или в), и в пространстве V' среда обладала хотя бы весьма малой способностью поглощать электромагнитную энергию. По-прежнему предположим, что существуют два решения этой задачи, и сохраним уже употреблявшиеся обозначения.

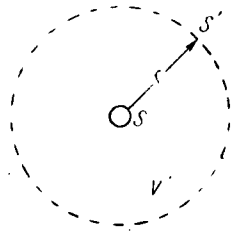


Рис. 102

Мысленно окружим область V сферической оболочкой S' бесконечно возрастающего радиуса (рис. 102), так что в пределе эту область в сравнении со сферой можно считать точечной и находящейся в ее центре, а пространство между S и S' тождественным с V' . Средняя мощность разностного поля $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{H}$ внутри V' равна вещественной части потока комплексного вектора Пойнтинга, выходящего через S и S' . При этом (по доказанному) поток через S равен нулю. Что касается потока через сферическую поверхность, то необходимо учесть, что он ей пропорционален, т. е. пропорционален квадрату радиуса сферы r^2 . В то же время поток пропорционален произведению амплитуд векторов $\Delta \mathbf{E}$ и $\Delta \mathbf{H}$. Если по мере удаления от V они убывают быстрее, чем $1/r$, то в пределе при $r \rightarrow \infty$, т. е. при охвате всего бесконечного пространства V' поток уничтожится, и мы будем иметь

$$\bar{P}^n = \frac{1}{2} \int_{V'} \sigma \Delta E_m^2 dV = 0,$$

откуда $\Delta \mathbf{E} = 0$, и решение, таким образом, однозначно.

Итак, единственность обеспечена, если при выполнении всех оговоренных условий, кроме того, имеется уверенность, что

предполагаемое разностное поле $\Delta \mathbf{E}$, $\Delta \mathbf{H}$ должно убывать быстрее, чем $1/r$. Для этого достаточно, чтобы с указанной быстротой убывало найденное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} .

§ 37. Сторонние токи. Теорема взаимности

Когда в среде с удельной проводимостью σ существует стороннее поле \mathbf{E}^{cm} (обязанное своим происхождением преобразованию какого-либо вида неэлектрической энергии), отмечают также, что в среде распределен *сторонний ток* плотности

$$\dot{\mathbf{\delta}}^{cm} = \sigma \mathbf{E}^{cm}. \quad (5.39)$$

Наличие гармонически меняющейся сторонней напряженности \mathbf{E}^{cm} (и, соответственно, стороннего тока плотности $\dot{\mathbf{\delta}}^{cm}$) является непосредственной причиной существования гармонического во времени электромагнитного поля. В этом смысле говорят об *источниках поля*, подразумевая присутствие \mathbf{E}^{cm} (и $\dot{\mathbf{\delta}}^{cm}$). В ряде случаев использовать понятие стороннего тока оказывается удобнее.

Казалось бы, наиболее естественным должно быть такое положение, когда сторонние токи локализованы в той области, где происходит превращение неэлектрической энергии в электромагнитную, т. е. там, где расположен «неэлектрический источник». На практике дело обстоит иначе. Например, переменный ток антенны, создающий поле излучения, поступает от генератора электромагнитных колебаний. При этом влиянием самого генератора и соединительных элементов (линии передачи) на поле излучения можно пренебречь. Что же касается источника неэлектрической энергии, то он расположен где-то вне генератора; эта энергия «транспортируется» к генератору, будучи преобразована в электрическую энергию «питающего устройства» (батареи, сети промышленного тока и т. п.). Таким образом, создающий поле сторонний ток, распределенный в антенне, и источник неэлектрической энергии пространственно разделены. При расчете поля исходят из заданного распределения тока, вовсе отвлекаясь от вызвавшей его причины.

Рассмотренный пример наводит на мысль, что термину «сторонний ток» удобно придавать более широкое значение, чем это было сделано сначала. Обычно в электродинамике сторонним током называют всякий заранее заданный ток, фигурирующий в качестве исходного при расчете электромагнитного поля. Предполагается, что этот ток остается неизменным, т. е. в конечном счете поддерживается преобразованием неэлектрической энергии.

Записывая с учетом (5.39) дифференциальную формулировку закона Ома (§ 6)

$$\dot{\mathbf{\delta}} = \sigma \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{\delta}}^{cm}, \quad (5.40)$$

внося это выражение в уравнения Максвелла (5.9) и используя понятие комплексных проницаемостей (§ 34), получаем систему уравнений монохроматического электромагнитного поля при наличии источников:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}^{cm}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j\omega\dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Токи, присутствующие в среде вследствие ее электропроводности ($\sigma \neq 0$), здесь, как и в уравнениях (5.15), учтены под знаком комплексной диэлектрической проницаемости. В сравнении со сторонними токами их можно назвать «вторичными». Действительно, сторонний ток, создавая электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} в проводящей среде, вызывает в ней и ток $\delta = \sigma\mathbf{E}$.

Необходимо еще сказать о сторонних токах конвекционного типа, возникающих в результате переноса свободных зарядов в непроводящей среде. Если заряд, распределенный с плотностью q , движется со скоростью \mathbf{v} , это означает существование тока, плотность которого есть

$$\delta = q\mathbf{v}.$$

Заметим, что записанное соотношение, или, точнее, его модификация

$$\mathbf{v} = \frac{\delta}{q}$$

совпадает по форме с полученным ранее выражением скорости движения энергии (2.27) и выводится совершенно аналогично. Как видно, при постоянной скорости движения заряда постоянны и ток; такой ток создает (строго говоря, в безграничном вакууме) поле, описанное в гл. 4. Переменное же электромагнитное поле в вакууме будет возбуждаться лишь зарядом, движущимся *неравномерно* (с ускорением).

Сторонние конвекционные токи задаются обычно в виде уравнений движения зарядов, которые решаются вместе с уравнениями электромагнитного поля. Конвекционными токами создаются переменные поля в электровакуумных приборах.

Лемма Лоренца. Пусть в линейной изотропной среде существует поле \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 , возбужденное сторонним током¹ δ_1^{cm} , которое, следовательно, подчинено уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_1 &= j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}}_1 + \dot{\delta}_1^{cm}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_1 &= -j\omega\dot{\mathbf{H}}_1. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

¹ Вместо «ток плотности δ » будем говорить кратко «ток δ ».

и поле \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 , обусловленное сторонним током δ_2^{cm} и подчиненное уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_2 &= j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}}_2 + \dot{\delta}_2^{cm}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_2 &= -j\omega\dot{\mathbf{H}}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

Первое из уравнений (5.42) умножим на $\dot{\mathbf{E}}_2$, а второе уравнение (5.43) — на $\dot{\mathbf{H}}_1$, произведем вычитание соответственных частей полученных уравнений и используем известное векторное тождество.

Таким образом, получим:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] = -\dot{\delta}_1^{cm}\dot{\mathbf{E}}_2 - j\omega\dot{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{H}}_2 - j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{E}}_2. \quad (5.44)$$

Аналогичные выкладки, произведенные с первым уравнением (5.43) и вторым (5.42), дают:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] = -\dot{\delta}_2^{cm}\dot{\mathbf{E}}_1 - j\omega\dot{\mathbf{H}}_1\dot{\mathbf{H}}_2 - j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}}_1\dot{\mathbf{E}}_2. \quad (5.45)$$

Вычитая (5.44) из (5.45), приходим к дифференциальной формулировке леммы Лоренца:

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1] = \dot{\delta}_1^{cm}\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_2^{cm}\dot{\mathbf{E}}_1. \quad (5.46)$$

Интегрируя (5.46) по произвольному объему и применяя формулу Остроградского — Гаусса, получаем интегральную формулировку леммы:

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_2] - [\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_1]\} dS = \int_V (\dot{\delta}_1^{cm}\dot{\mathbf{E}}_2 - \dot{\delta}_2^{cm}\dot{\mathbf{E}}_1) dV. \quad (5.47)$$

Распространяя интегрирование на бесконечное пространство и полагая, что поля \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 убывают с увеличением расстояния от источников быстрее, чем $1/r$, видим, что поверхностный интеграл в (5.47) исчезает, и это равенство принимает вид:

$$\int_V \dot{\delta}_1^{cm}\dot{\mathbf{E}}_2 dV = \int_V \dot{\delta}_2^{cm}\dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (5.48)$$

Каждую из формулировок леммы Лоренца можно истолковать как «теорему взаимности». Поясним это на следующем примере. Положим, что сторонний ток $\dot{\delta}_1^{cm}$ локализован в области V_1 , а ток $\dot{\delta}_2^{cm}$ — в непересекающейся с нею области V_2 (рис. 103). Тогда на основании (5.48) имеем:

$$\int_{V_1} \dot{\delta}_1^{cm}\dot{\mathbf{E}}_2 dV = \int_{V_2} \dot{\delta}_2^{cm}\dot{\mathbf{E}}_1 dV. \quad (5.49)$$

Пусть, далее, обе области совершенно одинаковы и имеют одинаковое распределение тока (например, две идентичные антенны). Если сторонние токи к тому же одинаковы по величине, то, как видно из (5.49), создаваемые ими поля E_1 и E_2 в обеих антеннах должны быть также идентичны. Затем, всякое изменение величины тока δ_1^{cm} должно так же действовать на поле E_1 в антенне 2,



Рис. 103

как и идентичное изменение тока δ_2^{cm} — на поле E_2 в антенне 1.

Мы заключаем, что независимо от свойств всего промежуточного пространства (лишь бы оно не содержало анизотропных и нелинейных элементов) условия передачи из области V_1 область V_2 совершенно таковы, как и в *обратном направлении*.

В последующих главах будет показано применение теоремы взаимности к некоторым задачам, а также будут рассмотрены анизотропные среды, ей не подчиненные.

§ 38. Волновой характер электромагнитного поля

Электромагнитное поле, возникающее в некоторой области пространства, не заполняет его мгновенно, а распространяется с конечной скоростью, зависящей от свойств среды. Это хорошо изученное теперь свойство электромагнитного поля было предсказано Максвеллом задолго до того времени, когда экспериментальная техника оказалась подготовленной к его открытию, сделанному Герцем. При распространении периодического процесса с конечной скоростью (см. Введение) происходит запаздывание его по фазе; следствием этого является *волновой характер* распространения. Обнаруженные Герцем *электромагнитные волны* вскоре благодаря работам А. С. Попова стали одним из важнейших объектов человеческой практики.

С целью установления волнового характера электромагнитного поля рассмотрим гармонический во времени процесс в области, не содержащей источников. В основу анализа положим уравнения Максвелла в форме (5.15), опустив в их записи точки над комплексными проницаемостями ϵ и μ :

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Применив к обеим частям первой строчки оператор rot , получаем

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \text{ rot } \dot{\mathbf{E}}$$

Отсюда легко исключить $\dot{\mathbf{E}}$ с помощью второй строчки:

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{H}} = \omega^2\epsilon\mu\dot{\mathbf{H}}. \quad (5.51)$$

Привлекая известное тождество

$$\text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \nabla^2 \mathbf{V}$$

и учитывая, что расходимость вектора \mathbf{H} равна нулю (5.16) записываем

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0, \quad (5.52)$$

где

$$k^2 = \omega^2\epsilon\mu. \quad (5.53)$$

Аналогичные выкладки приводят к такому же уравнению относительно комплекса $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (5.54)$$

Однородные уравнения типа (5.52, 5.54) называют *волновыми* и обычно связывают с именем Гельмгольца.

Исключить вектор \mathbf{E} или вектор \mathbf{H} можно и непосредственно из уравнений Максвелла (17, 1.8). Для непроводящей среды при этом получаются *волновые* уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (5.52a)$$

и

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (5.54a)$$

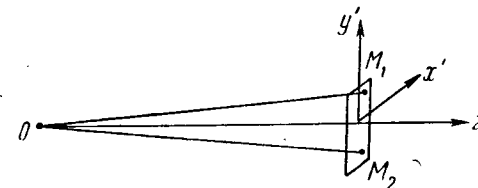


Рис. 104

из которых уравнения Гельмгольца (5.52) и (5.54) вытекают сразу же при переходе к комплексам.

Получим простейшее решение волнового уравнения и выясним его физическое содержание.

В системе координат, принятой на рис. 104, через источник O и исследуемую область V проходит ось Oz . Пусть эта область лежит так далеко от источника, что любые две ее точки, расположенные на перпендикулярной к Oz площадке, можно считать находящимися на одинаковых расстояниях от O . В пределах этого допущения отрезки OM_1 и OM_2 равны и параллельны ($OM_1 = OM_2$), т. е. точки M_1 и M_2 по отношению к источнику совершенно равноправны. А это значит, что электромагнитное поле не изменяется от M_1 к M_2 (точнее говоря, эти изменения вполне пренебрежимы), и, следовательно, во всей области V процесс не

зависит от координат x и y :

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} = 0. \quad (5.55)$$

Отсюда вытекает существенное упрощение оператора Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и волнового уравнения. Так, (5.52) принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{H}}}{\partial z^2} + k^2 \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (5.56)$$

Решение подобного дифференциального уравнения хорошо известно, и мы имеем:

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{h}_0 (A' e^{-jkz} + B' e^{jkz}). \quad (5.57)$$

Здесь A' и B' — произвольные коэффициенты, включающие множитель $e^{j\omega t}$, свойственный комплексам (§ 33), а \mathbf{h}_0 — единичный вектор, указывающий направление \mathbf{H} .

Выделяя временной множитель, пишем

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathbf{h}_0 [A e^{j(\omega t - kz)} + B e^{j(\omega t + kz)}] \quad (5.57a)$$

и, отделяя вещественную часть, получаем выражение вектора \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \mathbf{h}_0 [A \cos(\omega t - kz) + B \cos(\omega t + kz)] \quad (5.57b)$$

(коэффициенты A и B считаем вещественными).

Найденное решение исследуем в отсутствие поглощения

(ϵ и μ — вещественны). В некоторый момент t_1 магнитное поле, выражаемое первым членом (5.57b), распределено вдоль оси z косинусоидально (рис. 105a) по закону

$$A \cos(\omega t_1 - kz),$$

а по прошествии времени Δt в момент $t_2 = t_1 + \Delta t$ это распределение примет вид

$$A \cos(\omega t_1 + \omega \Delta t - kz),$$

т. е. окажется *смещенным* в положительном направлении (рис. 105, б) на расстояние Δz , которое легко определить из условия

$$\omega \Delta t - k \Delta z = 0.$$

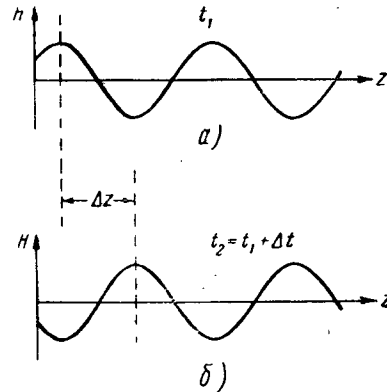


Рис. 105

Отсюда с учетом (5.53) находим *скорость* обнаруженного перемещения $\frac{\Delta z}{\Delta t}$:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (5.58)$$

Как видно, эта величина зависит лишь от свойств среды.

Итак, гармоническое распределение поля непрерывно перемещается в направлении положительной оси z с постоянной скоростью v . По определению, это *бегущая волна*, или, просто, *волна*, а v — ее *фазовая скорость*. В вакууме ($\epsilon = \epsilon_0$ и $\mu = \mu_0$) волна распространяется со скоростью

$$v \equiv c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/сек}, \quad (5.59)$$

а в среде с проницаемостями ϵ и μ медленнее в $\sqrt{\epsilon \mu / \epsilon_0 \mu_0}$ раз.

Ближайшее расстояние λ между точками поля с одинаковыми фазами, определяемое из условия

$$k(z + \lambda) - kz = 2\pi$$

называется *длиной волны*. Привлекая (5.58), находим:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}. \quad (5.60)$$

Величина k (5.53)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} \quad (5.61)$$

именуется *волновым числом*, а также *постоянной распространения* волны в неограниченной среде.

Второй член решения отличается от исследованного первого (см. 5.57b) только знаком при k , а потому, согласно (5.58), он соответствует волне, распространяющейся со скоростью $-v$, т. е. в противоположном направлении. Очевидно, что в рассматриваемом примере обратная волна должна отсутствовать ($B = 0$).

Найденная волна является *плоской* и *однородной*. Смысл первого термина состоит в том, что в любой плоскости $z = \text{const}$ в заданный момент времени фаза процесса постоянна, т. е., как говорят, колебания во всей плоскости *синфазны*. Можно отметить, что наблюдатель,двигающийся в такой плоскости, не обнаружит волнового процесса. С течением времени плоскость постоянной фазы перемещается в направлении распространения волны со скоростью v , она называется *фронтом волны*. Термин «однородная» волна отражает тот факт, что амплитуда волны не зависит от координат, она постоянна. В рамках нашей задачи, не учитывающей способа возбуждения волны и мощности источника, амплитуда A остается неизвестной. Однако соотношение магнитного и электрического векторов и их ориентация в пространстве подлежат определению.

С этой целью запишем уравнения Максвелла (5.50) в декартовых координатах при условии (5.55):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= -j\omega\epsilon \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} &= j\omega\epsilon \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= j\omega\mu \dot{H}_x, \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} &= -j\omega\mu \dot{H}_y \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

Мы видим отсюда, что ни \mathbf{E} , ни \mathbf{H} не имеют продольной состав-

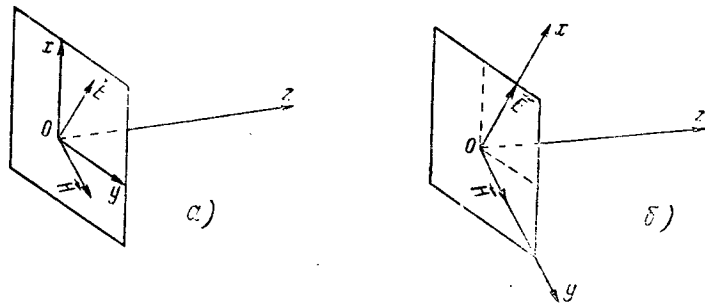


Рис. 106

ляющей; векторы поля лежат, следовательно, в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны (рис. 106):

$$\dot{\mathbf{H}} = x_0 \dot{H}_x + y_0 \dot{H}_y \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{E}} = x_0 \dot{E}_x + y_0 \dot{E}_y. \quad (5.63)$$

Легко убедиться, что они взаимно перпендикулярны, ибо скалярное произведение $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ обращается в нуль. Действительно, согласно (5.62).

$$\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} \dot{H}_x + \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} \dot{H}_y.$$

Учитывая, что дифференцирование комплексов $\dot{\mathbf{H}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ по z (см. 5.57) равносильно умножению их на $-jk$ находим:

$$\dot{\mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{H}} = \frac{k}{\omega\epsilon} \dot{H}_y \dot{H}_x - \frac{k}{\omega\epsilon} \dot{H}_x \dot{H}_y = 0.$$

Простоты ради направим ось Ox вдоль вектора \mathbf{E} (рис. 106, б), тогда

$$\dot{\mathbf{E}} = x_0 \dot{E} \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{H}} = y_0 \dot{H}. \quad (5.63a)$$

При этом

$$H = A e^{j(\omega t - kz)}, \quad (5.64)$$

и первое из уравнений (5.62) принимает вид:

$$\frac{\partial \dot{H}}{\partial z} = -j\omega\epsilon \dot{E}. \quad (5.65)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \frac{1}{-j\omega\epsilon} \frac{\partial}{\partial z} A e^{j(\omega t - kz)} = \\ &= \frac{k}{\omega\epsilon} A e^{j(\omega t - kz)} = A \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} e^{j(\omega t - kz)}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Отношение амплитуд E_m и H_m равно

$$W^0 \equiv \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (5.67)$$

и называется волновым сопротивлением неограниченной среды. Для вакуума

$$W^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ [ом]}. \quad (5.67a)$$

Учитывая взаимную ориентацию векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , запишем:

$$\dot{\mathbf{E}} = W^0 [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{z}_0]. \quad (5.68)$$

Вектор Пойнтинга направлен по движению волны. Мгновенная плотность потока энергии, переносимой ею, равна

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{z}_0 A^2 W^0 \cos^2(\omega t - kz), \quad (5.69)$$

а средняя плотность —

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \text{Re } \dot{\mathbf{\Pi}} = \mathbf{z}_0 \frac{A^2 W^0}{2}. \quad (5.70)$$

Нетрудно найти также плотности электрической и магнитной энергии волны:

$$w^m = \frac{\mu}{2} A^2 \cos^2(\omega t - kz) \quad \text{и} \quad w^e = \frac{\epsilon}{2} A^2 W^0{}^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (5.71)$$

Привлекая (5.67), замечаем, что $w^m = w^e$, так что

$$w = w^m + w^e = \mu A^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (5.71a)$$

Теперь, пользуясь формулой (2.27), можно определить скорость движения энергии волны:

$$\mathbf{v}^e = \frac{\mathbf{\Pi}}{w} = \mathbf{z}_0 \frac{W^0}{\mu} = \frac{\mathbf{z}_0}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (5.72)$$

Как видно, эта величина совпадает с ранее определенной (5.58) фазовой скоростью:

$$v^g = v. \quad (5.73)$$

В заключение сделаем следующее замечание. К представлению о плоской волне мы пришли, идеализируя поле на большом расстоянии от источника. Как это вытекает из принятых допущений, плоская волна с требуемой точностью описывает поле источника в пределах площадки, размеры которой достаточно малы в сравнении с расстоянием от него. В целом же волна источника в безграничном пространстве должна иметь сферический фронт (рис. 107) — сферическая волна. В дальнейшем сферические волны будут рассмотрены. Что касается изученной идеальной плоской волны, то значение ее как простейшего решения волнового уравнения выходит за рамки исходной задачи.

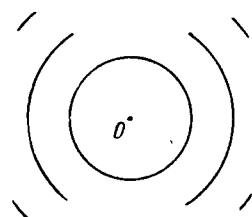


Рис. 107

Следующие главы посвящены подробному изучению электромагнитных волн, в процессе которого понятие плоской однородной волны сыграет важную роль.

Примеры и упражнения

1. Амплитуда напряженности магнитного поля волны, распространяющейся в воздухе, равна $A = 0,1$ а/м, а частота $f = 10$ Мгц.

Определить амплитуду напряженности электрического поля, длину волны λ , а также мгновенную и среднюю плотность потока переносимой ею энергии.

2. Распространенная телевизионная антенна представляет собой так называемый «полуволновой вибратор» (рис. 108),

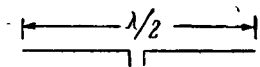


Рис. 108

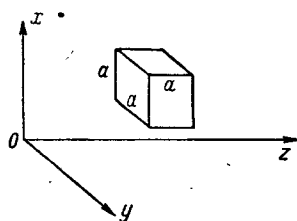


Рис. 109

длина которого l равна трем метрам при $\lambda = 6$ м. Какова должна быть длина этой антенны в дистиллированной воде?

3. На пути волны (рис. 109) выделен кубический объем со стороной $a = 1$ м. Найти заключенную в нем среднюю энергию электромагнитного поля, если амплитуда вектора E составляет 1 в/м.

4. Установить, по какому закону убывают векторы поля сферической волны при удалении от источника в отсутствие поглощения.

Указание. При решении задачи следует исходить из сохранения полного потока энергии источника, пропорционального произведению векторов поля и поверхности фронта волны.

§ 39. Электромагнитное поле и цепь переменного тока

В заключение главы рассмотрим цепь переменного тока (рис. 110) с целью найти связь между ее параметрами и электромагнитным полем. Уже подчеркивалось (см. Введение), что безоговорочное использование понятия цепи допустимо лишь в том случае, когда размеры рассматриваемой системы очень малы в сравнении с длиной волны:

$$D \ll \lambda. \quad (5.74)$$

При этом, очевидно,

$$e^{j(\omega t - kD)} \approx e^{j\omega t},$$

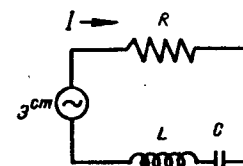


Рис. 110

т. е. запаздыванием фазы распространяющегося процесса можно пренебречь, а потому мгновенное значение тока во всей цепи практически постоянно. Этот факт выражается равенством

$$i = \int_{S_{\perp}} \delta \, dS = \text{const} \quad (5.75)$$

(плотность тока δ и площадь S_{\perp} , им пересекаемая, могут изменяться вдоль цепи).

Будем исходить из уравнения баланса энергии (5.32), применяя его к некоторой области пространства V , в которой расположена цепь. Пусть эта область сферическая, а цепь находится вблизи ее центра (рис. 5.10). Взяв сферу достаточно большого радиуса r , можно сделать поток энергии, проходящий через ее поверхность, исчезающе малым. Дело в том, что в силу условия (5.74) поля E и H близки в данном случае по своему строению к статическим, и произведение $E_m \cdot H_m$ убывает приблизительно как $1/r^4$ (см., например, (3.18) и (4.30a), в то время как сферическая поверхность возра-

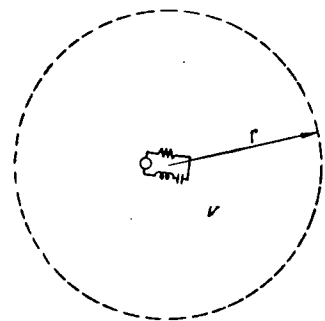


Рис. 111

стает, проходящий через ее поверхность, исчезающе малым. Дело в том, что в силу условия (5.74) поля E и H близки в данном случае по своему строению к статическим, и произведение $E_m \cdot H_m$ убывает приблизительно как $1/r^4$ (см., например, (3.18) и (4.30a), в то время как сферическая поверхность возра-

стает лишь пропорционально r^2 . Полагая, таким образом, в (5.32а)¹.

$$\oint_S \dot{\mathbf{i}} d\mathbf{S} = 0 \quad (*)$$

и учитывая (5.34а), имеем:

$$\dot{P}^{cm} = \bar{P}^n + j2\omega(\bar{W}^m - \bar{W}^s), \quad (5.76)$$

где, согласно (5.34),

$$\dot{P}^{cm} = \frac{1}{2} \int_V \dot{\delta}^* \dot{\mathbf{E}}^{cm} dV \quad \text{и} \quad \bar{P}^n = \frac{1}{2} \int_V \frac{\delta_m^2}{\sigma} dV.$$

Принимая во внимание (5.75) и ограничиваясь случаем, когда плотность тока можно считать постоянной в поперечном сечении S_{\perp} , перепишем выражения \dot{P}^{cm} и \bar{P}^n в виде:

$$\dot{P}_{cm} = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \dot{\delta}^* d\mathbf{S} \int_L \dot{\mathbf{E}}^{cm} dl = \frac{1}{2} j^* \dot{\mathcal{E}}^{cm} \quad (5.77)$$

и

$$\bar{P}^n = \frac{1}{2} \left[\int_{S_{\perp}} \delta_m d\mathbf{S} \right]^2 \int_L \frac{dl}{\sigma S} = \frac{1}{2} j^* j \int_L \frac{dl}{\sigma S}. \quad (5.78)$$

Интегрирование по длине цепи (контур L) привело здесь к выделению э. д. с. $\dot{\mathcal{E}}^{cm}$ (ср. § 32). Внося (5.77) и (5.78) в уравнение баланса энергии (5.76), придадим ему следующую форму:

$$\dot{\mathcal{E}}^{cm} = j \left[\int_L \frac{dl}{\sigma S} + j \frac{4\omega}{j j^*} (\bar{W}^m - \bar{W}^s) \right]. \quad (5.79)$$

Мы пришли, как видно, к формулировке закона Ома для цепи переменного тока, и величина, заключенная в квадратные скобки, выражает полное сопротивление цепи. Обычная запись закона Ома

$$\dot{\mathcal{E}}^{cm} = \dot{I} \left[R + j \left(\omega \mathcal{L} - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \quad (5.79a)$$

возникает, если положить:

$$R = \int_L \frac{dl}{\sigma S}, \quad (5.80)$$

$$\mathcal{L} = \frac{4\bar{W}^m}{I_m^2} \quad (5.81)$$

и

$$C = \frac{I_m^2}{4\omega^2 \bar{W}^s}. \quad (5.82)$$

¹ Как показано на стр. 168, любая цепь переменного тока теряет какую-то небольшую долю энергии в виде излучения, так что равенство (*) следует рассматривать как приближенное.

Активное сопротивление переменного тока (5.80) оказывается таким же, как и для тока постоянного (при сделанном выше допущении о постоянстве плотности тока в поперечнике!). Что же касается формул (5.81) и (5.82), то они устанавливают связь реактивного сопротивления цепи с ее электромагнитным полем. Действительно, по этим формулам:

$$\omega \mathcal{L} = \frac{\omega}{I_m^2} \int_V \mu H_m^2 dV \quad \text{и} \quad \frac{1}{\omega C} = \frac{\omega}{I_m^2} \int_V \epsilon E_m^2 dV. \quad (5.83)$$

Напомним, что область интегрирования V должна быть настолько велика, чтобы можно было пренебречь существованием потока энергии через ее границу. Однако, как можно показать (мы вернемся к этому вопросу в гл. 6), размеры V могут быть еще малы в сравнении с длиной волны: почти вся энергия электромагнитного поля цепи переменного тока сосредоточена в квазистационарной области. Можно сказать поэтому, что волновой характер поля *не проявляется* здесь как его существенное качество.

Учитывая, что

$$W_{\text{макс}}^m = 2\bar{W}^m \quad \text{и} \quad W_{\text{макс}}^s = 2\bar{W}^s,$$

из (5.81) и (5.82) находим:

$$W_{\text{макс}}^m = \frac{1}{2} \mathcal{L} I_m^2 \quad (5.84)$$

и

$$W_{\text{макс}}^s = \frac{1}{2} \frac{I_m^2}{\omega^2 C} = \frac{1}{2} \frac{q_m^2}{C}. \quad (5.85)$$

Полученные результаты фактически совпадают с формулами (3.88) и (4.52). Они позволяют сделать вывод, что емкости и индуктивности, используемые в теории цепей, не отличаются от соответствующих величин, определенных для электростатического поля и поля постоянного тока.

Сделаем, наконец, еще общее замечание о физическом содержании и значении параметров R , \mathcal{L} и C . Обращаясь к формулам (5.78), (5.80 - 82) и (5.83), видим прежде всего, что параметры цепи переменного тока это — *интегральные, энергетические характеристики ее электромагнитного поля*. Можно ли вводить подобные характеристики, если система неквазистационарна и не может быть описана как цепь? На этот вопрос следует ответить утвердительно. Хотя токи различных участков системы в этом случае не одинаковы и распределение тока, вообще говоря, может быть очень сложным, в формулах (5.78), (5.81) и (5.82) можно иметь в виду вполне определенный ток какого-то участка. Тогда некоторое электромагнитное поле окажется охарактеризованным параметрами R , \mathcal{L} и C , «отнесенными к данному току». Разумеется, по статическим формулам эти параметры уже вычислять нельзя.

В дальнейшем (§ 74) будут даны примеры введения таких «эквивалентных параметров».

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. ИЗЛУЧЕНИЕ

Возможность *излучения*, т. е. передачи электромагнитной энергии из некоторой ограниченной области, включающей источник, в окружающее пространство, непосредственно следует из уравнения баланса энергии (2.12). Однако излучение вызывается лишь *переменным* процессом. Действительно, в электростатическом поле вовсе нет движения энергии (вектор Пойнтинга равен нулю); что же касается электромагнитного поля постоянного тока, то, как легко показать, полный поток энергии через любую замкнутую поверхность, окружающую цепь тока, всегда равен нулю.

В основе теории монохроматического электромагнитного излучения лежат уравнения Максвелла в форме (5.41), включающие плотность стороннего тока. В дальнейшем мы будем писать их, опуская точки над комплексными проницаемостями ϵ и μ

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\epsilon\dot{\mathbf{E}} + \dot{\boldsymbol{\delta}}^{cm}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Имея в виду, что вектор $\dot{\boldsymbol{\delta}}^{cm}$ подчинен уравнению (1.16)

$$\operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\delta}}^{cm} = -j\omega\dot{q}^{cm}, \quad (6.2)$$

где \dot{q}^{cm} — плотность стороннего заряда, и образуя расходимость левых и правых частей (6.1), находим:

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = 0 \text{ и } \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}} = \dot{q}^{cm}/\epsilon. \quad (6.3)$$

Подобно тому, как это делалось в § 38, векторы $\dot{\mathbf{E}}$ и $\dot{\mathbf{H}}$ можно поочередно исключить из уравнений Максвелла (6.1).

При этом получаются неоднородные волновые уравнения

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + k^2 \dot{\mathbf{H}} &= -\operatorname{rot} \dot{\boldsymbol{\delta}}^{cm}, \\ \nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} &= j\omega\mu\dot{\boldsymbol{\delta}}^{cm} + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \dot{q}^{cm}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

отличающиеся от (5.52) и (5.54) присутствием в правой части функций стороннего тока.

Задача об излучении ставится следующим образом: в среде, характеризуемой параметрами ϵ и μ , распределен сторонний ток $\dot{\boldsymbol{\delta}}^{cm}$; требуется найти векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} , удовлетворяющие уравнениям Максвелла (6.1) или (что равносильно) волновым уравнениям (6.4). В более сложном случае, когда среда делится на несколько областей с различными свойствами, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} должны также удовлетворять соответствующим граничным условиям. Поведение найденного поля на бесконечности проверяется с помощью теоремы единственности (§ 36): при наличии поглощения векторы поля должны убывать с удалением от источника быстрее, чем $1/r$. Однако вместо того, чтобы искать решение задачи об излучении непосредственно в виде векторов поля, обычно вводят ради удобства вспомогательные функции. Подобными функциями — потенциалами — мы уже пользовались при изучении электростатики и поля постоянного тока.

§ 40. Электродинамические потенциалы

Используя введенный в § 29 векторный потенциал \mathbf{A} , запишем в комплексной форме равенство

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}. \quad (6.5)$$

С его помощью второе уравнение Максвелла (6.1) приводится к виду

$$\operatorname{rot} (\dot{\mathbf{E}} + j\omega\dot{\mathbf{A}}) = 0.$$

Замечая, что величину, заключенную в скобки, в силу известного тождества (см. § 16) можно приравнять градиенту некоторого скаляра — $\dot{\phi}$, находим:

$$\dot{\mathbf{E}} = -(\operatorname{grad} \dot{\phi} + j\omega\dot{\mathbf{A}}). \quad (6.6)$$

В статическом случае

$$(\omega \rightarrow 0, \dot{\mathbf{E}} \rightarrow \mathbf{E}, \dot{\phi} \rightarrow \phi)$$

полученное соотношение переходит в (3.4), где ϕ играет роль электростатического потенциала.

Теперь величины φ и \mathbf{A} , связанные с векторами электромагнитного поля формулами (6.5 и 6.6), мы будем называть *электродинамическими потенциалами*.

Найдем уравнения, которым удовлетворяют электродинамические потенциалы. Вводя (6.5) и (6.6) в первое уравнение Максвелла (6.1), получаем:

$$\text{rot rot } \dot{\mathbf{A}} - k^2 \dot{\mathbf{A}} = -j\omega\epsilon\mu \text{grad } \dot{\varphi} + \mu \dot{\delta}^{ct},$$

или

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = \text{grad} (j\omega\epsilon\mu \dot{\varphi} + \text{div } \dot{\mathbf{A}}) - \mu \dot{\delta}^{ct} \quad (6.7)$$

С целью упростить это уравнение используем неоднозначность потенциалов — наложим дополнительное *условие калибровки*

$$j\omega\epsilon\mu \dot{\varphi} + \text{div } \dot{\mathbf{A}} = 0, \quad (6.8)$$

тогда (6.7) переходит в неоднородное волновое уравнение относительно $\dot{\mathbf{A}}$:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}} = -\mu \dot{\delta}^{ct}. \quad (6.9)$$

Что касается скалярного электродинамического потенциала φ , то условие калибровки (6.8) позволяет исключить его из соотношения (6.6), которое после этого принимает вид

$$\dot{\mathbf{E}} = -\frac{j\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}), \quad (6.10)$$

так что оба вектора электромагнитного поля выражены теперь только через векторный потенциал. Однако и скалярный потенциал φ представляет для дальнейшего некоторый интерес. Из (6.3 и 6.8) легко получить неоднородное волновое уравнение

$$\nabla^2 \dot{\varphi} + k^2 \dot{\varphi} = -\rho^{cm}/\epsilon, \quad (6.11)$$

которому он удовлетворяет.

Принимая во внимание соотношение (5.61)

$$k = \omega/v,$$

отметим, что при переходе к статическому случаю

$$(\omega \rightarrow 0, \dot{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{A}, \dot{\varphi} \rightarrow \varphi)$$

волновые уравнения (6.9) и (6.11) вырождаются в изученные ранее уравнения Пуассона (3.14) и (4.26). Однако к *такому же результату* приводит и предположение о мгновенном распространении электромагнитного поля

$$v \rightarrow \infty,$$

ибо при этом волновое число k также обращается в нуль. Иными словами, игнорировать *время* распространения электромагнитных воздействий — это значит свести электродинамическую проблему к статической. Волновой характер электромагнитного поля есть признак конечной скорости его распространения.

Чтобы установить связь поля с источником излучения, надо найти решения уравнений (6.9 и 6.11). С этой целью возьмем сначала статический ($\partial/\partial t = 0$) случай. Пусть при этом в области V (рис. 112) распределен заряд ($\rho \neq 0$) и присутствует ток ($\delta \neq 0$). Тогда в некоторой точке M существует электрическое поле, потенциал которого φ есть решение уравнения (3.14) и выражается формулой (3.23), а также магнитное поле, характеризуемое векторным потенциалом \mathbf{A} (решение уравнения (4.26), выражаемое формулой (4.27):

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dV, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\delta}{r} dV.$$

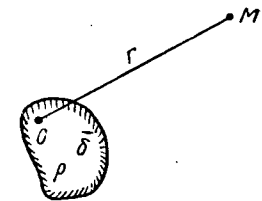


Рис. 112

Очевидно, что этими формулами можно пользоваться и в том случае, когда заряды и токи внутри V меняются медленно — настолько, что в течение времени распространения поля (от любой точки источника O до любой точки наблюдения M) их изменение пренебрежимо мало. Тогда поле (см. Введение) называется *квазистационарным*.

Если же ρ и δ изменяются быстро, то необходимо учитывать запаздывание процесса при распространении. Поле в точке M в данный момент t будет определяться не величинами $\rho(t)$ и $\delta(t)$, а более ранними значениями $\rho(t-t')$ и $\delta(t-t')$, где $t' = r/v$ есть время, в течение которого поле распространяется от данного элемента источника до M . На этом основании (мы не приводим строгого вывода) электродинамические потенциалы определяются как

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{r} \rho^{cm} \left(t - \frac{r}{v} \right) dV, \\ \mathbf{A}(t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \delta^{cm} \left(t - \frac{r}{v} \right) dV, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где индексы *cm* поставлены с тем, чтобы подчеркнуть, что речь идет об источнике. Разумеется, ρ^{cm} и δ^{cm} связаны уравнением (1.16).

Говорят, что формулы (6.12) выражают *запаздывающие потенциалы*.

Для гармонического во времени процесса вместо

$$\rho^{cm} = \rho_m^{cm} \cos(\omega t + \varphi_\rho) \quad \text{и} \quad \delta^{cm} = \delta_m^{cm} \cos(\omega t + \varphi_\delta)$$

под знаками интегралов (6.12) следует писать

$$q^{cm} = q_m^{cm} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \Phi_q \right]$$

и

$$\delta^{cm} = \delta_m^{cm} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{v} \right) + \Phi_\delta \right]$$

или, с учетом (5.61)

$$q^{cm} = q_m^{cm} \cos (\omega t - kr + \Phi_q)$$

и

$$\delta^{cm} = \delta_m^{cm} \cos (\omega t - kr + \Phi_\delta).$$

Таким образом, в комплексной форме выражения запаздывающих потенциалов принимают вид

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \dot{q}^{cm} \frac{e^{-jkr}}{r} dV \quad \text{и} \quad \dot{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \dot{\delta}^{cm} \frac{e^{-jkr}}{r} dV. \quad (6.13)$$

Это не что иное, как частные решения уравнений (6.9) и (6.11), соответствующие расходящимся от источника электромагнитным волнам.

Так например, рассмотрим поле, создаваемое одним лишь колеблющимся зарядом

$$q^{cm} = q_m \Delta V \cos \omega t = q_m^{cm} \cos \omega t,$$

расположенным в окрестности точки O' (рис. 113)¹. Согласно (6.13), комплексная амплитуда потенциала этого поля есть

$$\dot{\Phi}_m = \frac{q_m \Delta V}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} = \frac{q_m^{cm}}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (6.14)$$

а сам потенциал равен

$$\Phi = \frac{q_m^{cm}}{4\pi\epsilon r} \cos (\omega t - kr). \quad (6.14a)$$

Поле имеет характер *сферической волны*, расходящейся из точки O' : фронт ее — это шаровая поверхность (рис. 114), радиус которой возрастает со скоростью v .

Легко проверить, что (6.14) действительно является решением уравнения (6.11). Запишем это уравнение в сферических координатах, положив $\partial/\partial\theta = 0$ и $\partial/\partial\alpha = 0$, так как потенциал (6.14) от угловых координат не зависит, а также $q^{cm} = 0$, ибо поле ищется вне источника:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} \right) + k^2 \Phi_m = 0 \quad (6.15)$$

¹ Не следует забывать, что с переменным зарядом связан ток (6.2)

Подставляя сюда (6.14), убеждаемся, что уравнение удовлетворяется:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-jkr}}{r} \right) \right) + k^2 \frac{e^{-jkr}}{r} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что решением (6.15) будет также комплексная амплитуда

$$\dot{\Phi}_m' = \frac{q_m^{cm}}{4\pi\epsilon} \frac{e^{jkr}}{r}. \quad (6.16)$$

Однако (6.16) соответствует волне, сходящейся к источнику (распространяющейся из бесконечности, рис. 115); это решение в данном случае лишено физического содержания.

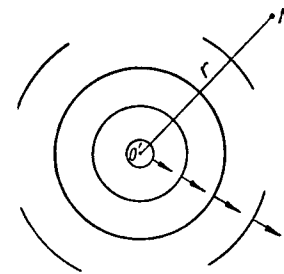


Рис. 114

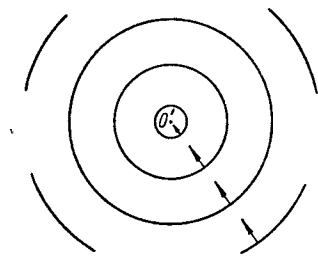


Рис. 115

Рассмотренный пример, конечно, еще не позволяет составить представление о поле излучения. Если, как это показано на рис. 113, источники распределены в области V , то для нахождения электромагнитного поля следует учесть действие всех точек этой области, т. е. произвести интегрирование в соответствии с формулами (6.13). При этом, как уже говорилось выше, достаточно вычислять только векторный потенциал, так как скалярный исключается с помощью соотношения калибровки; это значит, что для определения поля излучения достаточно знать сторонний ток. Однако исследование поля при произвольном распределении тока является весьма сложной задачей. В дальнейшем мы ограничимся изучением так называемых *элементарных источников*.

§ 41. Элементарный электрический излучатель

Рассмотрим отрезок l , вдоль которого течет ток $I^{cm} = I_m^{cm} \cos \omega t$ (рис. 116). Может возникнуть сомнение относительно реальности такого изолированного элемента переменного тока. Для выяснения сущности вопроса привлечем закон сохранения заряда в форме

(6.2). Поместив элемент тока на оси z декартовой системы координат (рис. 117, а), мы должны записать уравнение (6.2) в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_0 \cdot \dot{\delta}_m^{cm} = -j\omega \dot{q}_m^{cm},$$

или

$$\frac{d\dot{\delta}_m^{cm}}{dz} = -j\omega \dot{q}_m^{cm}. \quad (6.17)$$

Приписывая отрезку l некоторую толщину, т. е. фактически заменяя его проводящим стержнем поперечного сечения S , имеем

$$\dot{\delta}_m^{cm} S = \dot{I}_m^{cm} \quad \text{и} \quad \dot{q}_m^{cm} S \Delta z = \dot{q}_m^{cm},$$

где \dot{q}_m^{cm} — комплексная амплитуда заряда малого участка стержня Δz .

Умножив обе части (6.17) на $S \Delta z$, с учетом сделанной записи получаем:

$$\Delta \dot{I}_m^{cm} = -j\omega \dot{q}_m^{cm}, \quad (6.18)$$

т. е. амплитуда заряда каждо-

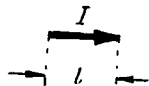


Рис. 116

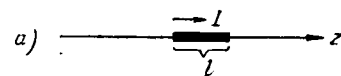
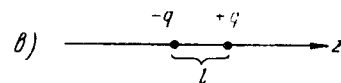


Рис. 117

го участка пропорциональна изменению на нем амплитуды тока

$$\Delta \dot{I}_m^{cm} = \frac{d\dot{I}_m^{cm}}{dz} \Delta z.$$

Но, согласно условию, амплитуда тока вдоль всего отрезка постоянна. Лишь на концах происходит ее изменение от нуля до I_m^{cm} и от I_m^{cm} до нуля, рис. 117, б. Отсюда, в соответствии с (6.18), мы заключаем, что на всем отрезке, кроме его концов, заряд отсутствует; на концах же сосредоточены равные по абсолютной величине и противоположные по знаку колеблющиеся заряды с комплексными амплитудами

$$\dot{q}_m^{cm} = \pm j I_m^{cm} / \omega. \quad (6.19)$$

Иначе говоря, мы имеем дело с *диполем* (рис. 117, в), момент которого $\mathbf{p} = \mathbf{z}_0 l q_m^{cm}$ гармонически колеблется с частотой ω и имеет комплексную амплитуду

$$\dot{\mathbf{p}}_m = j \frac{I_m^{cm} l}{\omega} \mathbf{z}_0. \quad (6.20)$$

Первый искусственный излучатель, осуществленный Герцем, представлял собой именно подобие колеблющегося диполя. Два металлических шара (рис. 118) перезаряжались с высокой частотой во время импульса индукционной катушки. Подробное описание опытов Герца (см. курс физики) не входит в нашу задачу. Отметим лишь, что антенны, сравнимые по свойствам с излучателем Герца, применяются и в настоящее время. Изображенный на рис. 116, 117 элемент тока — колеблющийся диполь — обычно рассматривается в качестве *элементарного излучателя* и называется *диполем Герца*.

Перейдем к анализу диполя Герца. На основании (6.13) комплексная амплитуда векторного потенциала элемента тока (рис. 117)

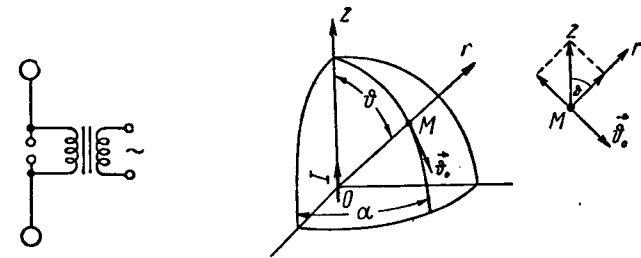


Рис. 118

Рис. 119

выражается интегралом

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \dot{\delta}_m^{cm} \frac{e^{-jkr}}{r} dV = \mathbf{z}_0 \frac{\mu I_m^{cm}}{4\pi S} \int_V \frac{e^{-jkr}}{r} dV. \quad (6.21)$$

Ограничиваясь расстояниями, значительно превышающими размер элемента (см. также § 20)

$$r \gg l, \quad (6.22)$$

мы можем поступать с множителем $1/r$ под знаком интеграла, как с постоянной величиной. Положим также, что элемент мал в сравнении с длиной волны

$$l \ll \lambda, \quad (6.23)$$

так что величину

$$kr = 2\pi \frac{r}{\lambda} \quad (6.24)$$

можно считать одинаковой для всех точек излучателя. С учетом сказанного переписем (6.21) в виде

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \mathbf{z}_0 \frac{\mu I_m^{cm}}{4\pi S} \frac{e^{-jkr}}{r} V = \mathbf{z}_0 \frac{\mu l I_m^{cm}}{4\pi r} e^{-jkr}, \quad (6.25)$$

где $V = Sl$ — объем, занимаемый током.

Располагая диполь Герца в сферической системе координат, как это показано на рис. 119, имеем:

$$\dot{A}_m = (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta) \frac{\mu I l_m^{cm}}{4\pi r} e^{-jkr}. \quad (6.26)$$

Компоненты поля, создаваемого диполем Герца в произвольной точке $M(r, \vartheta, \alpha)$, определяются по формулам § 40. Так, согласно (6.5),

$$\dot{H}_m = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \dot{A}_m = \frac{I l_m^{cm}}{4\pi} \operatorname{rot} \left[\frac{e^{-jkr}}{r} (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta) \right], \quad (6.27)$$

или (см. Приложение)

$$\dot{H}_m = \frac{I l_m^{cm}}{4\pi} \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r^2 \sin \vartheta} & \frac{\vartheta_0}{r \sin \vartheta} & \frac{\alpha_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{e^{-jkr}}{r} \cos \vartheta & -r \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.27a)$$

Как видно, вектор \dot{H} направлен азимутально. Раскрывая определитель, получаем:

$$\dot{H} = \alpha_0 \frac{I l_m^{cm}}{4\pi r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin \vartheta. \quad (6.28)$$

Величину \dot{E} теперь проще всего найти из первого уравнения Максвелла:

$$\dot{E}_m = \frac{1}{j\omega \epsilon} \operatorname{rot} \dot{H} = -j \frac{I l_m^{cm}}{4\pi \omega \epsilon} \operatorname{rot} \left[\frac{e^{-jkr}}{r} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \sin \vartheta \right], \quad (6.29)$$

т. е.

$$\dot{E}_m = -j \frac{I l_m^{cm}}{4\pi \omega \epsilon} \begin{vmatrix} \frac{r_0}{r^2 \sin \vartheta} & \frac{\vartheta_0}{r \sin \vartheta} & \frac{\alpha_0}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ 0 & 0 & e^{-jkr} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \sin^2 \vartheta \end{vmatrix}. \quad (6.29a)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \dot{E} = & -j \frac{I l_m^{cm}}{4\pi \omega \epsilon} \left[r_0 \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + jk \right) \cos \vartheta + \right. \\ & \left. + \vartheta_0 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} - k^2 \right) \sin \vartheta \right] e^{j(\omega t - kr)}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Переходя в формулах (6.28) и (6.30) от комплексов к векторам поля, записываем:

$$\begin{cases} H_\alpha = \frac{k I l_m^{cm}}{4\pi r} \left[\frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) - \sin(\omega t - kr) \right] \sin \vartheta; \\ E_r = \frac{k I l_m^{cm}}{2\pi \omega \epsilon r^2} \left[\frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr) \right] \cos \vartheta; \\ E_\vartheta = \frac{k^2 I l_m^{cm}}{4\pi \omega \epsilon r} \left[\left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \sin(\omega t - kr) + \right. \\ \left. + \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) \right] \sin \vartheta; \\ H_r = H_\vartheta = E_\alpha = 0. \end{cases} \quad (6.31)$$

Итак, поле элементарного излучателя имеет характер сферической волны сравнительно сложного строения. Впрочем, слагаемые выражений (6.31), заключенные в квадратные скобки, не равноценны для полей на разных расстояниях от диполя. Это обстоятельство упрощает дальнейшее исследование.

§ 42. Исследование поля электрического излучателя

Рассмотрим сначала поле в так называемой *ближней зоне* излучателя — на расстояниях, значительно меньших длины волны

$$r \ll \lambda. \quad (6.32)$$

При этом, разумеется, остается в силе условие $r \gg l$ (6.22).

Перепишав неравенство (6.32) на основании (6.24) в виде

$$kr \ll 1, \quad (6.32a)$$

замечаем, что формулы (6.31) можно существенно упростить. Отбросив малые слагаемые (порядка 1 и $1/kr$) и пренебрегая фазовым сдвигом, получаем:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= \frac{I l_m^{cm}}{4\pi r^2} \sin \vartheta \cos \omega t \\ E_r &= \frac{p_m}{2\pi \epsilon r^2} \cos \vartheta \sin \omega t \\ E_\vartheta &= \frac{p_m}{4\pi \epsilon r^2} \sin \vartheta \sin \omega t \end{aligned} \right\} p_m = \frac{I l_m^{cm} l}{\omega}. \quad (6.33)$$

Поле, определяемое этой записью, не имеет волнового характера. Сопоставляя (6.33) с выражениями (3.27) и (4.30a), убеждаемся, что пространственное распределение электрического поля ближней зоны свойственно статическому диполю, а распределение магнитного поля подчиняется закону Био и Савара. Видно также,

что величины \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты по фазе на 90° . Поэтому комплексный вектор Пойнтинга (5.27) оказывается здесь чисто мнимым, а следовательно, поток энергии, переносимой ближним полем, в среднем равен нулю. Это соответствует колебательному движению энергии около источника.

Становится ясным, что формулы (6.33) получены в *пренебрежении излучением*, т. е. что поле излучения в ближней зоне незначительно в сравнении с *квазистационарным* полем (6.33). Этого и следовало ожидать ввиду условия (6.32).

Возьмем теперь *дальнюю зону*, т. е. рассмотрим поле на расстояниях, значительно превышающих длину волны

$$r \gg \lambda. \quad (6.34)$$

При этом

$$kr \gg 1, \quad (6.34a)$$

так что можно пренебречь членами порядка $1/k^2r^2$ и $1/kr$, тогда и формулы (6.31) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} H_\alpha &= -\frac{klI_m^{cm}}{4\pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - kr), \\ E_r &= 0, \\ E_\vartheta &= -\frac{klW^0 I_m^{cm}}{4\pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - kr) \end{aligned} \right\} \quad (6.35)$$

Это и есть *поле излучения*. Оно представляет собой сферическую волну, причем векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , как и в плоской волне (§ 38), лежат перпендикулярно к направлению распространения, взаимно перпендикулярны и находятся в одной фазе. Комплексный вектор Пойнтинга направлен радиально и не имеет мнимой части. Таким образом, средняя плотность потока энергии, переносимой волною, равна

$$\bar{\mathbf{P}} = \text{Re } \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{r}_0 \frac{E_m H_m}{2} = \mathbf{r}_0 \frac{(I_m^{cm})^2 (kl)^2 W^0}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \vartheta. \quad (6.36)$$

Излучение максимально в экваториальной плоскости ($\vartheta = 90^\circ$) и отсутствует в осевом направлении ($\vartheta = 0$). Полное представление о характере излучения дает так называемая «диаграмма направленности», которую строят, откладывая в произвольной меридиональной плоскости ряд отрезков, пропорциональных амплитуде E_m (или H_m) в данном направлении ϑ для фиксированного расстояния r . Концы этих отрезков лежат на двух соприкасающихся окружностях (рис. 120, а). Аналогичное построение в пространстве приводит к объемной фигуре в виде *тора* (рис. 120, б).

Нетрудно вычислить полную мощность, излучаемую диполем Герца. Составляя поток комплексного вектора Пойнтинга через

окружающую его сферическую поверхность (рис. 121), на основании (6.36) пишем:

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{(I_m^{cm})^2 (kl)^2 W^0}{32 \pi^2 r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin^3 \vartheta d\vartheta d\alpha = \frac{(I_m^{cm})^2 (kl)^2 W^0}{16\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta$$

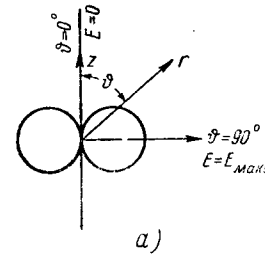


Рис. 120

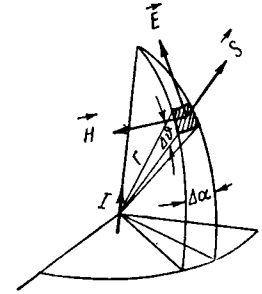


Рис. 121

и в результате интегрирования получаем следующее выражение излучаемой мощности:

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{\pi}{3} (I_m^{cm})^2 W^0 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (6.37)$$

Оно показывает, что излучение резко растет при ослаблении условия квазистационарности (6.23). Величина

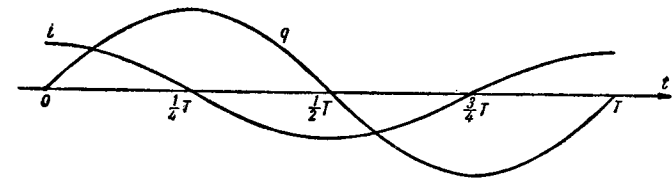
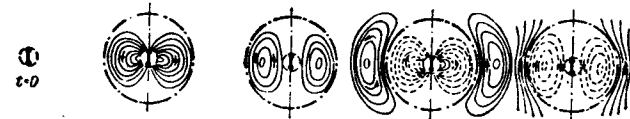


Рис. 122

$$R^\Sigma = \frac{2\pi W^0}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (6.38)$$

называется *сопротивлением излучения* диполя Герца, ибо она в соответствии с формулировкой закона Джоуля—Ленца

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{1}{2} (I_m^{cm})^2 R^\Sigma$$

характеризует мощность, рассеиваемую током I^m в виде излучения.

На основании (6.31) можно построить картину поля элементарного излучателя для разных моментов времени и таким способом проследить за его формированием в процессе излучения электромагнитной энергии. На рис. 122 схематически показано строение электрического поля излучателя, исследованное этим путем. Как видно, в момент максимального тока (заряды диполя при этом равны нулю) образуются «электрические вихри» (семейство замкнутых электрических силовых линий), распространяющиеся затем от источника.

В дальней зоне любая достаточно малая область поля элементарного излучателя несет все признаки рассмотренной в § 38

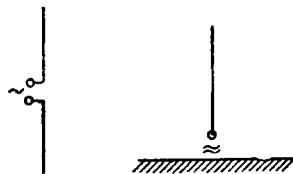


Рис. 123

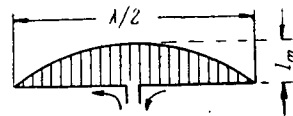


Рис. 124

плоской волны. Векторы поля (6.35) перпендикулярны к направлению ее распространения, и отношение их амплитуд равно W^0 .

В заключение отметим, что короткие в сравнении с длиной волны проволочные (стержневые) антенны (рис. 123) очень близки по характеру излучения к элементарному излучателю и обычно отождествляются с ним. Однако для повышения эффективности размеры антенн стараются увеличить, так что условие (6.23), являющееся критерием этого отождествления, нарушается. Ток антенны тогда нельзя уже считать везде одинаковым по амплитуде. Его распределение становится почти синусоидальным с периодичностью волны в свободном пространстве. В качестве примера на рис. 124 показано распределение тока симметричного полуволнового вибратора. Поле такой антенны вычисляется как суперпозиция полей, создаваемых отдельными ее элементами, принимаемыми за диполи Герца.

Эффект Черенкова. Движение заряженных частиц с постоянной скоростью в пустоте создает так называемый конвекционный (§ 37) постоянный ток, не вызывающий излучения (стр. 138). Однако излучение (в некотором спектре частот) возникает, если заряды движутся в среде со скоростью, превышающей характерную для нее фазовую скорость электромагнитной волны. Для однородной непоглощающей среды (§ 38) эта величина составляет $v = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$. Такое излучение было впервые замечено П. Черенковым и С. И. Вавиловым, оно было объяснено в 1937 г. И. Е. Таммом и И. М. Франком и известно под названием *эффекта Черенкова*.

Мы можем здесь дать лишь краткое толкование излучения Черенкова. Пусть (рис. 125, а) заряд q движется вдоль оси z со скоростью v_q , и излу-

ние возникает в направлении z' , составляющем с осью z острый угол ϕ . Как видно из рисунка (пунктиром показаны положения волнового фронта), фазовая скорость в направлении движения заряда q есть $v_z = v/\cos \phi$. Так как должно выполняться равенство

$$v_z = v_q, \quad (*)$$

то справедливо соотношение:

$$\cos \phi = \frac{v}{v_q}. \quad (**)$$

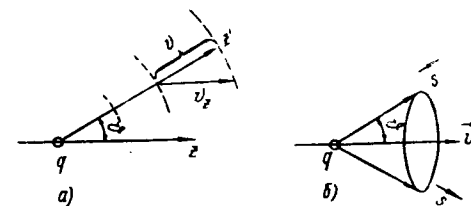


Рис. 125

Скорость движения заряда, таким образом, должна быть не меньше фазовой скорости v . При данном значении скорости заряда v_q излучение «образует конус» (рис. 125, б) около оси z с углом раствора ϕ .

Примеры и упражнения

1. Диполь Герца длиной $l = 5$ м питается током с частотой $f = 10^6$ гц и амплитудой $I_m = 1$ а. Определить амплитуду напряженности его электрического поля (в воздухе) на расстояниях $r = 0,05; 0,2; 1; 25; 100$ км.

2. В предыдущей задаче сравнить амплитуды вектора E квазистационарного поля и поля излучения на заданных расстояниях.

3. В направлении максимального излучения на расстоянии $r = 10$ км от диполя Герца амплитуда вектора H равна $H_m = 10^{-4}$ а/м. Какова мощность излучения диполя в свободное пространство ($\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$), если он в десять раз короче волны?

4. Два элементарных излучателя расположены в свободном пространстве параллельно, как это показано на рис. 126. Каждый из них в отдельности создает на расстоянии $r = 1$ км в направлении максимального излучения электрическое поле амплитуды $E_m = 0,001$ в/м. Определить амплитуду E_m поля двух излучателей на таком же расстоянии: а) в направлении оси, их соединяющей (x), и б) в перпендикулярном направлении (y). Токи излу-

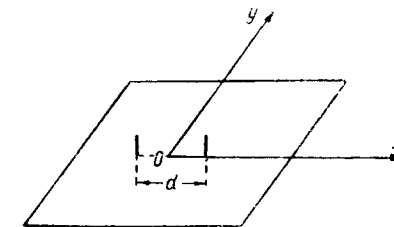


Рис. 126

телей находятся в фазе, длина волны равна $\lambda = 2m$, а расстояние d принимает значения 1,2 и 2,5 m .

5. Конкретизируем теорему взаимности (§ 37) для двух диполей Герца, рис. 127. Перепишем формулу (5.49) в виде

$$\int_{V_1} \delta_1^{cm} \dot{E}_2^{(1)} dV = \int_{V_2} \delta_2^{cm} \dot{E}_1^{(2)} dV, \quad (6.39)$$

имеем

$$S I_1 \delta_1^{cm} \dot{E}_2^{(1)} = S I_2 \delta_2^{cm} \dot{E}_1^{(2)}$$

или

$$I_1 \dot{U}_2^{(1)} = I_2 \dot{U}_1^{(2)}, \quad (6.40)$$

где $U_2^{(1)} = E_2^{(1)} I_1$ — напряжение, создаваемое на первом излучателе полем второго (соответственный смысл имеет $U_1^{(2)}$).



Рис. 127

Рис. 128

Разделив обе части полученного результата на $I_1 I_2$, находим:

$$\dot{U}_1^{(1)} / I_2 = \dot{U}_1^{(2)} / I_1.$$

Отношения

$$\dot{U}_2^{(1)} / I_2 = Z_{21} \quad \text{и} \quad \dot{U}_1^{(2)} / I_1 = Z_{12}$$

называются взаимными сопротивлениями излучателей. Как видно,

$$Z_{21} = Z_{12}, \quad (6.41)$$

т. е. взаимное сопротивление не зависит от направления передачи энергии.

6. Применение метода зеркальных изображений. Пусть диполь Герца расположен над идеально проводящей плоскостью (рис. 128). Действие плоскости можно заменить зеркальным изображением диполя, полученным как совокупность зеркальных изображений его зарядов (§ 26). Таким образом,

действительное поле находится как суперпозиция полей источника и его изображения.

На рис. 129 показаны различные ориентации диполя над плоскостью. Объяснить, как изменится характер поля излучения

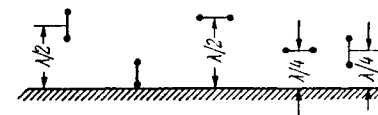


Рис. 129

при перенесении диполя из безграничного пространства в одно из этих положений. Показать направление максимального излучения и направление, в котором излучение отсутствует. Построить аналогичные примеры.

§ 43. Элементарный магнитный излучатель. Принцип двойственности

В § 30 было показано, что замкнутый виток (рис. 130, а) с постоянным током I на расстояниях, значительно превышающих его размеры, создает такое магнитное поле, как если бы на его месте находился магнитный диполь (рис. 130, б) с моментом (4.42)

$$m = z_0 I \mu S. \quad (6.42)$$

Точно так же виток с переменным током $I = I_m \cos \omega t$ до тех пор, пока его размеры малы в сравнении с длиной волны, эквивалентен переменному магнитному диполю, момент которого характеризуется комплексной амплитудой

$$\dot{m}_m = z_0 I_m \mu S. \quad (6.42a)$$

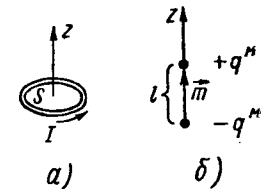


Рис. 130

Такой виток (рамку) с переменным током называют элементарным магнитным излучателем, а также магнитным диполем Герца. Его поле можно найти, определив по формуле (6.13) векторный потенциал замкнутого тока, а затем используя формулы (6.5 и 6.10). Однако задачу нетрудно упростить, опираясь на представление о магнитных зарядах, которые, разумеется, будут фигурировать не как реальные величины, а в качестве удобной абстракции.

Заменяя виток эквивалентным магнитным диполем, по аналогии с (6.2) следует написать

$$\text{div } \delta^m = -j\omega \dot{q}^m, \quad (6.43)$$

где ρ^m — «плотность магнитного заряда» и δ^m — «плотность магнитного тока», появляющегося в результате «движения магнитных зарядов».

Вместо первого уравнения (6.3) мы должны теперь взять

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = \dot{\rho}^m / \mu, \quad (6.44)$$

а второе уравнение Максвелла примет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} - \dot{\delta}^m, \quad (6.45)$$

так как только такая запись не противоречит (6.43 и 6.44), в чем легко убедиться, образовав расходимость обеих частей (6.45).

Дальнейшее исследование будет построено на сравнении поставленной задачи о магнитном диполе с уже решенной задачей о диполе электрическом. Рассмотрим такую таблицу:

	Задача I	Задача II
Источник излучения	Электрический момент \mathbf{p}	Магнитный момент \mathbf{m}
Вид уравнений Максвелла	$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}} + \dot{\delta}^{cm};$ $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}}.$ <p style="text-align: center;">(*)</p>	$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu \dot{\mathbf{H}} - \dot{\delta}^m; (**)$ $\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon \dot{\mathbf{E}}$

Как видно, первое и второе уравнения Максвелла в задачах «поменялись ролями». При этом уравнения задачи I переходят в уравнения задачи II при замене

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} \text{ на } \dot{\mathbf{H}} \text{ и } \dot{\mathbf{H}} \text{ на } \dot{\mathbf{E}} \\ \epsilon \text{ на } -\mu \text{ и } \mu \text{ на } -\epsilon. \end{aligned} \quad (6.46)$$

а также $\dot{\delta}^{cm}$ на $-\dot{\delta}^m$.

А это значит, что достаточно в решении уравнений (*) при электрическом источнике \mathbf{p} сделать замену (6.46), как будет получено решение уравнений (**) при аналогичном магнитном источнике \mathbf{m} .

Итак, для нахождения поля элементарного магнитного излучателя мы должны произвести указанную замену в формулах (6.28) и (6.30). При этом надо учесть, что величина $\dot{\delta}^{cm}$ входит в это решение только в форме электрического момента \mathbf{p} , кото-

рый прямо следует заменить магнитным моментом $-\mathbf{m}$, т. е. вместо

$$\dot{\rho}_m = jI_m l / \omega \text{ написать } -m_m = -I_m \mu S. \quad (6.46a)$$

После операций (6.46, 6.46a) формулы (6.28) и (6.30) вместо (6.31) дают следующее искомое решение:

$$\left\{ \begin{aligned} E_\alpha &= \frac{I_m k^2 S W_0}{4\pi r} \left[\frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) + \cos(\omega t - kr) \right] \sin \vartheta; \\ H_r &= \frac{I_m k S}{2\pi r^2} \left[\frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) - \sin(\omega t - kr) \right] \cos \vartheta; \\ H_\vartheta &= \frac{I_m k^2 S}{4\pi r} \left[\left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \cos(\omega t - kr) - \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) \right] \sin \vartheta; \\ E_r &= E_\vartheta = H_\alpha = 0. \end{aligned} \right. \quad (6.47)$$

Способ, использованный нами, основан на *перестановочной двойственности* уравнений Максвелла. Общий метод, базирующийся на этом свойстве уравнений Максвелла, был впервые сформулирован А. А. Пистолькорсом, а также нашел отражение в работах М. А. Леонтовича и Я. Н. Фельда. Он получил распространение под названием *принципа двойственности*. К этому вопросу мы вернемся в гл. 7 при изучении дифракции электромагнитных волн.

Из (6.47) известным путем получаем компоненты ближнего поля

$$\left. \begin{aligned} E_\alpha &= \frac{I_m \mu S \omega}{4\pi r^2} \sin \vartheta \sin \omega t, \\ H_r &= \frac{m_m}{2\pi \mu r^3} \cos \vartheta \cos \omega t, \\ H_\vartheta &= \frac{m_m}{4\pi \mu r^3} \cos \vartheta \cos \omega t \end{aligned} \right\} m_m = I_m \mu S \quad (6.48)$$

и поля излучения

$$\left. \begin{aligned} E_\alpha &= \frac{I_m k^2 S W_0}{4\pi r} \sin \vartheta \cos(\omega t - kr); \\ H_r &= 0 \\ H_\vartheta &= -\frac{I_m k^2 S}{4\pi r} \sin \vartheta \cos(\omega t - kr). \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Итак, в дальней зоне элементарный магнитный излучатель создает волновое поле, отличающееся от поля элементарного электрического излучателя только ориентацией (рис. 131). Диаграмма направленности излучения по-прежнему имеет вид, показанный на рис. 120, а сопротивление излучения выражается

формулой

$$R^{\Sigma} = \frac{8\pi^3}{3} W^0 \frac{S^2}{\lambda^4}, \quad (6.50)$$

вывод которой отнесен к упражнениям.

В сущности, любая цепь переменного тока (система квазистационарная!) теряет какую-то небольшую долю энергии на излучение. Зная ток и площадь цепи, а следовательно, и момент эквивалентного магнитного диполя, нетрудно оценить излучаемую мощность.

На основании формул (6.48) можно заключить, что электромагнитное поле цепи должно резко падать уже на расстояниях, значительно меньших длины волны. Это значит, что ее энергия сконцентрирована в квазистационарной области, а волновой характер поля несущественен, как утверждалось в § 39.

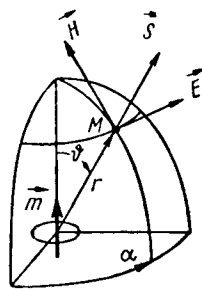


Рис. 131

Примеры и упражнения

1. Получить формулу (6.50).

2. Показать, что электрический элементарный излучатель эквивалентный магнитному по излучаемой мощности при данном токе, должен иметь длину

$$l = kS = 2\pi S/\lambda. \quad (6.51)$$

3. В круглой рамке диаметром $2R = 20$ см течет ток, амплитуда которого $I_m = 1$ а. Вычислить напряженность магнитного поля рамки в направлении максимального излучения на расстояниях $r = 2, 10, 100$ м и 1 км, если длина волны составляет $\lambda = 20$ м.

4. В цепи (рис. 132), площадь которой приблизительно составляет 3 м², течет ток с частотой $f = 50$ гц и амплитудой 10 а. Какова мощность, теряемая цепью в результате излучения?



Рис. 132

5. Как изменится излучение магнитного диполя Герца при: а) изменении магнитной проницаемости среды в 10 раз и б) таком же изменении диэлектрической проницаемости?

§ 44. Эквивалентные источники электромагнитного поля

Положим, что поставлена задача найти электромагнитное поле E, H в области V (рис. 133,а), вне которой расположены его источники. При этом никаких данных о самих источниках не имеется, зато известно поле E^S, H^S на поверхности S , ограни-

чивающей V . Подобным же образом ставится и внешняя задача: требуется найти поле E, H в пространстве V' (рис. 133,б), если его источники находятся внутри области V , отделенной границей S , на которой задано поле E^S, H^S .

Как известно (§ 36), при некоторых дополнительных условиях (которые можно считать выполненными) имеющихся данных заведомо достаточно для решения задачи. Надо лишь изыскать способ нахождения электромагнитного поля.

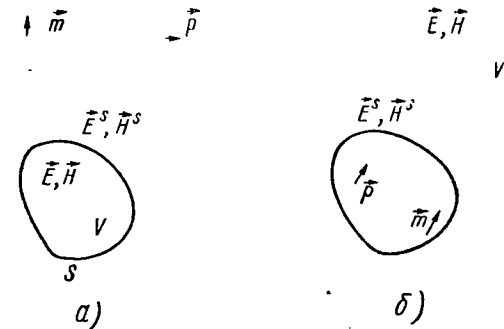


Рис. 133

Целесообразен такой прием. Представим, что при сохранении поля на границе оно *исчезло* по ту ее сторону, где лежат источники. Для того чтобы это допущение не противоречило граничным условиям, появившиеся на границе разрывы *всех* компонент векторов поля постараемся компенсировать, разместив на ней *искусственные* источники поля.

Начнем с нормальной компоненты вектора E . Согласно (1.45), разрыв ее означает распределение по граничной поверхности заряда с плотностью

$$\xi^{em} = \epsilon E_n^S. \quad (6.52)$$

Точно так же разрыв нормальной компоненты вектора H следует компенсировать фиктивным магнитным зарядом, распределенным по границе с плотностью

$$\xi^m = \mu H_n^S. \quad (6.53)$$

Разрыв тангенциальной компоненты H в соответствии с (1.55) означает существование на границе поверхностного тока плотности

$$\eta^{cm} = [n_0, H^S]. \quad (6.54)$$

Аналогично этому скачок тангенциальной компоненты вектора E компенсируется фиктивным магнитным поверхностным

$$\eta^m = -[n_0, E^S], \quad (6.55)$$

в чем легко убедиться, записав уравнение Максвелла (1,8a) в виде

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} - \int_S \delta^m d\mathbf{S}$$

(см. § 43) и применив его к исследованию границы, как это было сделано в § 9 при выводе условия (1.55).

Итак, разрыв всех компонент поля на границе теперь компенсирован непрерывно распределенными по ней источниками. При этом часть источников оказалась лишенной физического содержания (магнитные заряды и токи), что вполне понятно, ибо был задан разрыв таких составляющих поля (E_τ и B_n), которые в силу общих законов электромагнетизма всегда непрерывны. Это обстоятельство, конечно, не должно вызывать недоумения: все вводимые здесь понятия вовсе не требуют физического толкования, они лишь призваны облегчить расчет. В конечном итоге мы пришли к тому, что вместо реальных, но неизвестных источников поля имеем дело с известными *эквивалентными* источниками, распределенными по границе. Остается определить векторы поля по этим источникам.

В силу принципа суперпозиции будем рассматривать искомое поле как сумму двух полей

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{E}'' \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{H}'', \quad (6.56)$$

одно из которых $-\mathbf{E}'$, \mathbf{H}' — возбуждено электрическими источниками, а другое $-\mathbf{E}''$, \mathbf{H}'' — магнитными.

При этом первое поле, как известно из § 40, полностью выражается через векторный потенциал \mathbf{A} (6.5 и 6.10), связанный с токами второй формулой (6.13). В данном случае ток распределен по поверхности, и эта формула принимает вид

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{8\pi} \int_S \dot{\eta}^{cm} \frac{e^{-jkr}}{r} dS. \quad (6.57)$$

Чтобы установить связь поля \mathbf{E}'' , \mathbf{H}'' с магнитными источниками, запишем полученную в § 42 форму уравнений Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}'' &= -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}'' - \dot{\delta}^m, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}'' &= j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}}'' \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

и введем векторный потенциал \mathbf{A}'' :

$$\dot{\mathbf{E}}'' = -\frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}''. \quad (6.59)$$

Дальнейший ход рассуждений хорошо известен из § 39. Второе из уравнений (6.58) приводит к выражению магнитного поля (ср. 6.6)

$$\dot{\mathbf{H}}'' = -(\text{grad } \dot{\phi}'' + j\omega\dot{\mathbf{A}}'') \quad (6.60)$$

и далее при условии калибровки (ср. 6.8)

$$j\omega\varepsilon\dot{\phi}'' + \text{div } \dot{\mathbf{A}}'' = 0 \quad (6.61)$$

получается уравнение (ср. 6.9)

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}'' + k^2 \dot{\mathbf{A}}'' = -\varepsilon \dot{\delta}^m, \quad (6.62)$$

после чего магнитное поле выражается также через векторный потенциал (ср. 6.10)

$$\dot{\mathbf{H}}'' = -\frac{j\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}'' + k^2 \dot{\mathbf{A}}''). \quad (6.63)$$

Решение уравнения (6.62) имеет вид

$$\dot{\mathbf{A}}'' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_V \dot{\delta}^m \frac{e^{-jkr}}{r} dV \quad (6.64)$$

(ср. 6.13), а в данной задаче, когда магнитный ток распределен по поверхности S ,

$$\dot{\mathbf{A}}'' = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_S \dot{\eta}^m \frac{e^{-jkr}}{r} dS. \quad (6.65)$$

Итак, поля \mathbf{E}' , \mathbf{H}' и \mathbf{E}'' , \mathbf{H}'' выражены через векторные потенциалы \mathbf{A} и \mathbf{A}'' при помощи формул (6.5, 6.10, 6.59 и 6.63); так что искомое электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} , согласно (6.56), определено формулами

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -\frac{j\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}} + k^2 \dot{\mathbf{A}}) - \frac{1}{\varepsilon} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}'', \\ \dot{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \text{rot } \dot{\mathbf{A}} - \frac{j\omega}{k^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}'' + k^2 \dot{\mathbf{A}}''). \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

Векторные потенциалы, в свою очередь, определяются через электрические и магнитные поверхностные токи посредством (6.57 и 6.65), а фигурирующие в этих формулах плотности токов $\dot{\eta}^{cm}$ и $\dot{\eta}^m$ связаны с заданными значениями векторов поля на границе \mathbf{E}^S и \mathbf{H}^S соотношениями (6.54 и 6.55). Совокупность этих результатов называют иногда *теоремой эквивалентности*.

Теорема эквивалентности находит широкое применение в теории СВЧ антенн. Мы вновь обратимся к ней при изучении дифракции электромагнитных волн.

В заключение отметим, что для выражения поля магнитных источников \mathbf{E}'' , \mathbf{H}'' достаточно было применить принцип двойственности (§ 43): формулы (6.65), (6.59) и (6.63) получаются операцией (6.46) из (6.57), (6.5) и (6.10) соответственно.

Примеры и упражнения

1. Вывести формулу (6.55).
2. Вывести формулы (6.60 и 6.62).
3. Рассмотрим общую схему применения теоремы эквивалентности к расчету СВЧ антенн. На рис. 134 условно изображены

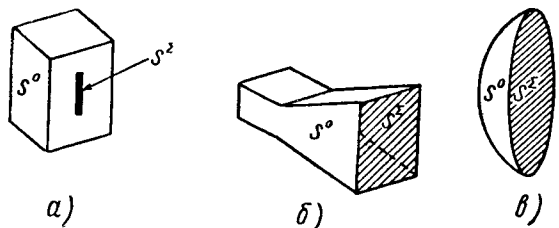


Рис. 134

три типичных антенны этого диапазона: щелевая (а), рупорная (б) и зеркальная (в). В каждой из них можно различить ограждающую электромагнитное поле оболочку из металла S^0 , открывающуюся во внешнее пространство плоской поверхностью S^2 («поверхность раскрыва»). Через раскрыв антенна излучает энергию.

Поле на S^2 обычно известно с той или иной степенью точности. Заменяв его распределением эквивалентных токов и применяя к полной поверхности (металлическая оболочка + раскрыв) формулы (6.57 и 6.65), получаем:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{S^2} \dot{\mathbf{\eta}}^{em} \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{A}}^m = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{S^2} \dot{\mathbf{\eta}}^{m^*} \frac{e^{-jkr}}{r} dS, \quad (6.67)$$

так как через металл внутреннее поле не проникает.

Задача сведена, таким образом, к расчету излучения заданного распределения эквивалентных токов на поверхности раскрыва. С хорошей точностью можно считать, что эта поверхность находится «одна» в свободном пространстве (рис. 135), т. е. не учитывать влияния на излучение внешней металлической части антенны.

4. Элемент Гюйгенса. По принципу Гюйгенса, каждая точка волнового фронта рассматривается как источник сферической волны (рис. 136).

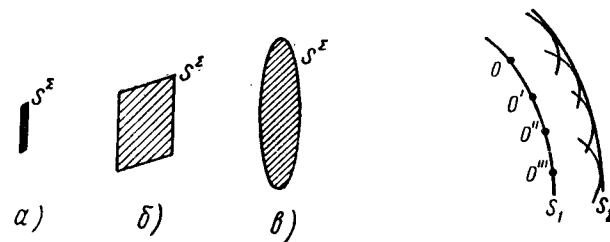


Рис. 135

Рис. 136

Суперпозиция этих сферических волн указывает положение фронта в следующий момент времени. Определим характер излучения весьма малого участка фронта плоской волны — элемента Гюйгенса...

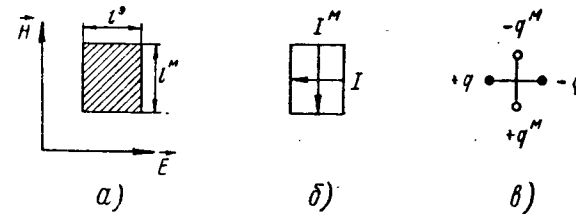


Рис. 137

Взяв этот элемент в виде прямоугольника, ориентированного, как показано на рис. 137, а, отмечаем, что его поле эквивалентно электрическому и магнитному поверхностным токам (рис. 137, б)

$$I = H^S l^m \quad \text{и} \quad l^m = E^S l^y = W^0 H^S l^y. \quad (6.68)$$

Это дает основание заменить элемент Гюйгенса совокупностью электрического и магнитного диполей Герца (рис. 137, в) с моментами

$$p_m = \frac{I_m l^y}{\omega} = \frac{H_m^S l^y l^m}{\omega} \quad \text{и} \quad m_m = \frac{I_m^m l^m}{\omega} = \frac{W^0 H_m^S l^y l^m}{\omega}. \quad (6.69)$$

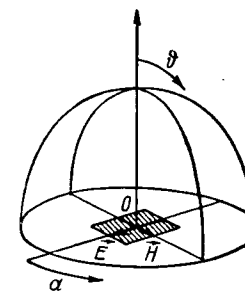


Рис. 138

Расположив элемент Гюйгенса в сферической системе координат (рис. 138), легко сообразить, что его электрическое поле в дальней зоне, обязанное своим происхождением электрическому диполью Герца (6.35), имеет компоненты

$$\left. \begin{aligned} E'_a &= E'_m \sin \alpha \sin(\omega t - kr), \\ E'_\phi &= -E'_m \cos \alpha \sin(\omega t - kr) \end{aligned} \right\} \quad (6.70)$$

где в соответствии с (6.35 и 6.69)

$$E'_m = \frac{kl^3 W^0 I_m}{4\pi r} = \frac{kl^3 l^m H_m^S W^0}{4\pi r}. \quad (6.71)$$

Точно так же из (6.49) находятся компоненты поля E'' , создаваемого действительным магнитного диполя

$$\left. \begin{aligned} E''_u &= E''_m \cos \vartheta \sin \alpha \sin(\omega t - kr), \\ E''_\varphi &= -E''_m \cos \alpha \sin(\omega t - kr) \end{aligned} \right\} \quad (6.72)$$

Здесь, согласно (6.49) и (6.69),

$$E''_m = \frac{I_m S k^2 W^0}{4\pi r} = \frac{kl^3 l^m H_m^S W^0}{4\pi r}. \quad (6.73)$$

Складывая (6.70) и (6.72), получаем электрическое поле излучения элемента Гюйгенса:

$$\left. \begin{aligned} E_\alpha &= \frac{kl^3 l^m H_m^S W^0}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta) \sin \alpha \sin(\omega t - kr); \\ E_\varphi &= -\frac{kl^3 l^m H_m^S W^0}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta) \cos \alpha \sin(\omega t - kr). \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

Задача е. а) Найти магнитное поле излучения элемента Гюйгенса. Как сделать это наиболее простым путем?

б) Построить диаграмму направленности излучения элемента Гюйгенса в плоскости, параллельной его электрическому вектору.

Задание 1. Построить диаграмму направленности излучения элемента Гюйгенса в плоскости, параллельной его электрическому вектору.

2. ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Плоские однородные электромагнитные волны уже рассматривались в предыдущей, 5-ой главе (§ 38). Данный раздел 6-ой главы посвящен более подробному их изучению.

§ 45. Волны в изотропной среде

Затухание волн. В § 38 была исследована плоская однородная волна, распространяющаяся в неограниченной *непоглощающей* среде. Отказавшись от такой идеализации, т. е. поставив целью учесть всегда существующие потери энергии, мы должны исследовать решение (5.57) при комплексном волновом числе k :

$$\dot{k} = \omega \sqrt{(\epsilon' - j\epsilon'')(\mu - j\mu'')} = k' - jk''. \quad (6.75)$$

Взяв формулу (5.57а), запишем ее, таким образом, в виде:

$$\dot{H} = h_0 [A e^{-k''z} e^{j(\omega t - k'z)} + B e^{k''z} e^{j(\omega t + k'z)}]. \quad (6.76)$$

Оба члена по-прежнему описывают плоские волны, о чем свидетельствует наличие множителей $e^{j(\omega t \pm k'z)}$. Однако амплитуды этих волн по мере распространения экспоненциально изменяются по закону $e^{\mp k''z}$. В пределе при исчезновении ϵ'' и μ'' (а с ними и k'')

$$e^{\mp k''z} \rightarrow 1,$$

и (6.76) совпадает с решением, исследованным в § 38.

Считая k' и k'' величинами положительными, отмечаем, что первый член в (6.76) соответствует волне, распространяющейся в сторону возрастания z с *затуханием* (мгновенное распределение поля показано на рис. 139). Это поле исчезает на бесконечности в результате постепенного поглощения при распространении. Волна, описываемая вторым членом, распространяется из бесконечности, где, как легко заметить, амплитуда ее неограниченно велика. Существование такой волны не оправдано физически, поэтому второй член отбрасывается.

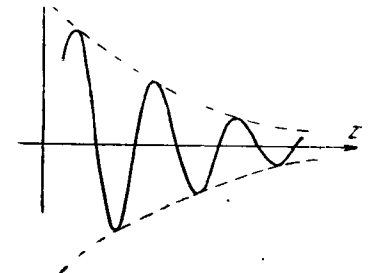


Рис. 139

Ориентируя оси координат, как это было показано на рис. 5.7. б (§ 38), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H} &= y_0 A e^{-k''z - jk'z}, \\ \dot{E} &= x_0 A W^0 e^{-k''z - jk'z}, \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

где волновое сопротивление W^0 (5.67) теперь комплексная величина:

$$W^0 = \sqrt{\frac{\mu' - j\mu''}{\epsilon' - j\epsilon''}} = |W^0| e^{j\varphi_W}. \quad (6.78)$$

что означает фазовый сдвиг напряженностей E и H на угол φ_W .

Действительно, переходя от комплексов (6.77) к векторам поля, получаем:

$$\left. \begin{aligned} H &= y_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z), \\ E &= x_0 A |W^0| e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi_W). \end{aligned} \right\} \quad (6.77a)$$

Роль волнового числа k незатухающей волны (5.61) играет в данном случае вещественная часть комплексного волнового числа (6.75)

$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (6.79)$$

Поэтому фазовая скорость и длина затухающей волны определяются соотношениями

$$v = \frac{\omega}{k'} = \frac{2\pi f}{k'} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k'}. \quad (6.80)$$

Мнимая часть величины k (6.75), характеризующая убывание амплитуды волны при распространении, называется *коэффициентом затухания*. Желая определить *затухание* волны при прохождении ею пути l , составляют отношение амплитуд на концах этого участка:

$$\frac{H_m(z)}{H_m(z+l)} = e^{k''l}.$$

Затухание в *неперах* (*неп*) определяется как натуральный логарифм этого отношения

$$L[\text{неп}] = k''l, \quad (6.81)$$

а в *децибелах* (*дб*) — как двадцать десятичных логарифмов:

$$L[\text{дб}] = 20 \lg e^{k''l} = k''l 20 \lg e. \quad (6.81a)$$

Соответственно этому коэффициент затухания имеет размерность $[\text{неп}/\text{м}]$ или $[\text{дб}/\text{м}]$.

Связь между введенными единицами такова:

$$L[\text{дб}] = 8,69L[\text{неп}]. \quad (6.82)$$

В качестве следующего шага выясним зависимость комплексного волнового числа от свойств среды. Условимся брать корень в (6.75) со знаком $+$, ибо изменение этого знака, приводящее к одновременному изменению знаков k' и k'' , лишь меняет ролями слагаемые (6.76). Ограничиваясь случаем отсутствия магнитных потерь ($\mu'' = 0$), в результате возведения в квадрат (6.75) получаем:

$$\left. \begin{aligned} k'^2 - k''^2 &= \omega^2 \mu' \epsilon', \\ 2k'k'' &= \omega^2 \mu' \epsilon'' = \omega^2 \mu' \epsilon' \lg \Delta \end{aligned} \right\} \quad (6.83)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} k' &= \omega \sqrt{\frac{\mu' \epsilon'}{2} (\sqrt{1 + \lg^2 \Delta} + 1)} \\ k'' &= \omega \sqrt{\frac{\mu' \epsilon'}{2} (\sqrt{1 + \lg^2 \Delta} - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.84)$$

Обычно $\mu' > 0$ и $\epsilon' > 0$, поэтому, желая иметь k' и k'' вещественными и положительными, следует все корни (6.84) брать только со знаком $+$.

¹ В особых случаях (например, намагниченный феррит или неонизированный газ) эквивалентные μ' и ϵ' могут быть отрицательными.

Полученный результат показывает, что и вещественная и мнимая части волнового числа (6.75) нелинейно зависят от частоты (вместе с величиной $\lg \Delta = \sigma/\omega\epsilon$). Следовательно, от частоты зависят фазовая скорость, длина волны и коэффициент затухания, определяемые формулами (6.80, 6.81). Это явление называется *дисперсией*. Говорят, что поглощающая среда является *диспергирующей*.

Рассмотрим два важных случая.

а) Волны в диэлектрике ($\lg \Delta \ll 1$).

Разлагая (6.84) в ряд по степеням $\lg^2 \Delta$, находим:

$$\left. \begin{aligned} k' &= \omega \sqrt{\mu' \epsilon'} \left(1 + \frac{1}{8} \lg^2 \Delta + \dots \right) \approx \omega \sqrt{\mu' \epsilon'}, \\ k'' &= \frac{\omega}{2} \sqrt{\mu' \epsilon'} \lg \Delta = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon'}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.85)$$

Как видно, величина k' лишь незначительно отличается от волнового числа незатухающей волны (5.61), дисперсия в этом случае пренебрежимо мала. Коэффициент затухания k'' в первом приближении не зависит от частоты. Удельная проводимость диэлектриков σ — величина весьма малая (§ 4), поэтому затухание здесь также сравнительно невелико. Во многих случаях им пренебрегают.

б) Волны в проводнике ($\lg \Delta \gg 1$).

Пренебрегая в (6.84) единицей в сравнении с $\lg \Delta$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} k' &= \omega \sqrt{\mu' \epsilon'} \sqrt{(\lg \Delta)/2} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}, \\ k'' &= \omega \sqrt{\mu' \epsilon'} \sqrt{(\lg \Delta)/2} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.86)$$

Привлекая данные таблиц §§ 4, 7, видим, что затухание волн в металлах даже при небольших частотах на много порядков превосходит затухание в диэлектриках. В пределе при $\sigma \rightarrow \infty$ (идеальный проводник) коэффициент затухания также обращается в бесконечность, что должно быть истолковано так: на любом (как угодно коротком) участке волна полностью затухает. Иными словами, переменное электромагнитное поле не может существовать в идеально проводящей среде.

Поляризация волн. Вектор напряженности электрического поля волны (6.77) лежит в плоскости xOz , которая называется ее *плоскостью поляризации*. Употребляется выражение «волна поляризована в плоскости xOz ». Условно мы будем считать эту плоскость горизонтальной, а волну называть *горизонтально поляризованной* (рис. 140, б). Если вектор E лежит параллельно yOz , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{H} &= -x_0 A e^{j(\omega t - kz)}, \\ \dot{E} &= y_0 A W^0 e^{j(\omega t - kz)}, \end{aligned} \right\} \quad (6.87)$$

то волна, по определению, *вертикально поляризована* (140,а). Всякая волна, электрический вектор которой составляет с плоскостью xOz произвольный угол (рис. 106,б), может быть разложена на составляющие вертикальной и горизонтальной поляризации.

Рассмотрим суперпозицию волн горизонтальной и вертикальной поляризации, имеющих в общем случае фазовый сдвиг α . Электрический вектор поля характеризуется при этом комплексной амплитудой

$$\vec{E} = x_0 B^{\Gamma} e^{-jkz} + y_0 B^B e^{-jkz - j\alpha}, \quad (6.88)$$

где B^{Γ} и B^B — амплитуды волн соответственно горизонтальной и вертикальной поляризаций.

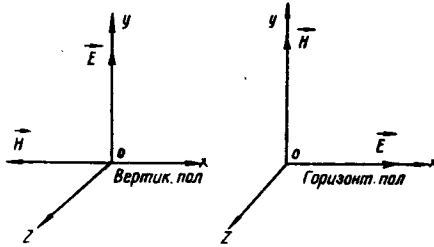


Рис. 140

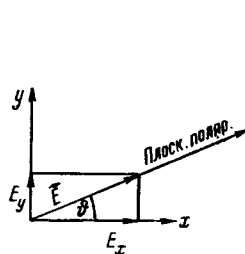


Рис. 141

При $\alpha = 0$ вектор E в любой момент времени лежит в плоскости (рис. 141), составляющей с xOz угол

$$\vartheta = \arctg \frac{E_y}{E_x} = \arctg \frac{B^B}{B^{\Gamma}}, \quad (6.89)$$

и поляризация называется *плоской (линейной)*. Горизонтальная ($E_y = 0$) и вертикальная ($E_x = 0$) поляризации представляют собой ее частные виды.

Положим теперь $B^{\Gamma} = B^B$ и $\alpha = 90^\circ$, тогда

$$E_x = B \cos(\omega t - kz), \quad E_y = B \sin(\omega t - kz),$$

и угол

$$\vartheta = \arctg \frac{E_y}{E_x} = \omega t - kz \quad (6.90)$$

изменяется во времени и в пространстве. При постоянном z вектор E вращается с угловой частотой ω около оси распространения волны Oz . Легко заметить, что абсолютное значение его остается при вращении постоянным:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = B.$$

Такая поляризация называется *круговой*. Направление вращения вектора E меняется на обратное, если вместо 90° взять $\alpha = -90^\circ$. Во втором случае вращение совершается против часовой стрелки (если смотреть вдоль направления распространения волны) — *правая круговая поляризация*, а в первом — по часовой стрелке — *левая круговая поляризация*.

Всякая линейно поляризованная волна может быть разложена на две составляющие противоположной круговой поляризации. Так, взяв горизонтально поляризованную волну, имеем:

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= x_0 B e^{-jkz} = \frac{B}{2} [(x_0 + jy_0) + (x_0 - jy_0)] e^{-jkz} \\ &= \frac{B}{2} (x_0 + y_0 e^{j\pi/2}) e^{-jkz} + \frac{B}{2} (x_0 + y_0 e^{-j\pi/2}) e^{-jkz}. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Это разложение поясняется на рис. 142.

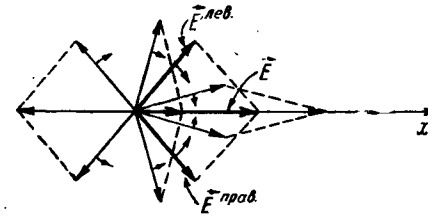


Рис. 142

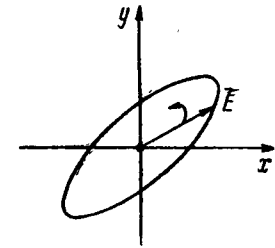


Рис. 143

В общем случае суперпозицию (6.88) можно охарактеризовать как волну *эллиптической* поляризации: вектор E вращается около оси Oz , изменяя свое абсолютное значение так, что его конец скользит по эллипсу (рис. 143), произвольно ориентированному относительно координатных осей.

Примеры и упражнения

1. Показать, что магнитный вектор волны, распространяющейся в проводнике, отстает от электрического по фазе на 45° .

Полагая в (6.78) $\mu'' = 0$ и $\epsilon'' \gg \epsilon'$, имеем:

$$W^0 = \sqrt{\frac{\mu'}{\epsilon' - j\epsilon''}} \approx \sqrt{\frac{\mu'}{-j\epsilon''}} = \sqrt{e^{j\frac{\pi}{2}} \frac{\mu'\omega}{\sigma}} = e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\mu'\omega}{\sigma}}. \quad (6.92)$$

Итак, $\varphi_W = 45^\circ$.

2. Длина волны, распространяющейся в воздухе, составляет 1 м. Какова длина волны при той же частоте в меди и свинце?

3. Построить в логарифмическом масштабе график зависимости фазовой скорости и длины волны от частоты в вакууме и серебре.

4. Фазовая скорость волны, распространяющейся в дистиллированной воде, вычисляется по формуле (5.58). Определить совершаемую при этом ошибку, если частота равна $f = 10^8$ гц ($\mu = \mu_0$).

5. Во сколько раз уменьшится амплитуда волны, распространяющейся в алюминии, на расстоянии $d = 1$ мм, если $\lambda = 100$ м; 1 м; 1 см?

6. Вычислить коэффициенты затухания в дБ/м для меди при $f = 10$ гц; 1000 гц; 10^5 гц и 10^{10} гц.

7. Найти коэффициенты затухания в дБ/м для кварца, слюды, парафина и стекла при тех же частотах.

8. Найти связь между углом потерь (при $\mu'' = 0$) и фазовым сдвигом между E и H .

9. Показать, что среднее значение вектора Пойнтинга плоской волны в неограниченной поглощающей среде выражается формулой

$$\bar{P} = z_0 \frac{A^2}{2} W^0 e^{-2k''z}. \quad (6.93)$$

10. От чего зависит соотношение амплитуд векторов E и H плоской волны в неограниченной среде?

11. Каково отношение амплитуд E_m и H_m плоской волны, распространяющейся в меди и парафине?

12. Существует ли различие между плотностями потока энергии волн одинаковой амплитуды, одна из которых поляризована линейно, а другая — по кругу?

13. Можно ли разложить волну круговой поляризации на линейно поляризованные составляющие?

§ 46. Волны в гиротропной среде

В радиотехнике сверхвысоких частот за последние годы нашли широкое применение *ферриты* — ферромагнитные полупроводники, по электропроводности резко отличающиеся (в 10^{11} — 10^{13} раз) от ферромагнитных металлов. Электромагнитные волны распространяются в ферритах со сравнительно небольшим затуханием, обнаруживая при этом ряд существенных особенностей. Вопросы физики ферритов, необходимые для понимания их поведения в электромагнитном поле, рассмотрены, например, в монографии А. Г. Гуревича [14], к которой полезно обратиться читателю. Можно показать, что феррит, намагниченный постоянным полем $H_0 = z_0 H_z$, для переменного электромагнитного поля обладает магнитной проницаемостью (§ 4) вида

$$\overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & -j\alpha & 0 \\ j\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}, \quad (6.94)$$

где μ , α и μ_z — комплексные величины, мнимые части которых характеризуют различные виды магнитных потерь (тензор $\overleftrightarrow{\mu}$ применяется к комплексным амплитудам). В отсутствие «подмагничивающего» поля $H_0 = \text{феррит}$ изотропен; тогда

$$\alpha = 0 \quad \text{и} \quad \mu = \mu_z.$$

В зависимости от H_0 вещественные (μ' , α' и μ_z') и мнимые (μ'' , α'' и μ_z'') части компонент тензора магнитной проницаемости феррита изменяются примерно так, как это показано на рис. 144. Поле H_0 , при котором магнитные потери имеют резко выраженный максимум, соответствует так называемому «ферромагнитному резонансу», наблюдаемому при частоте

$$f^0 = \gamma H_0, \quad (6.95)$$

где постоянная γ равна

$$\gamma = 0,035 \text{ Мгц/а} \cdot \text{м}^{-1}.$$

При изменении направления поля H_0 на обратное компонента α изменяет знак.

Рассмотрим характерные свойства распространяющихся в намагниченном феррите электромагнитных волн. С этой целью запишем в декартовых координатах уравнения Максвелла (5.50), принимая во внимание характер магнитной проницаемости феррита (6.94):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} &= j\omega \epsilon \dot{E}_x, \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} &= j\omega \epsilon \dot{E}_y, \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} &= j\omega \epsilon \dot{E}_z \end{aligned} \right\} \quad (6.96)$$

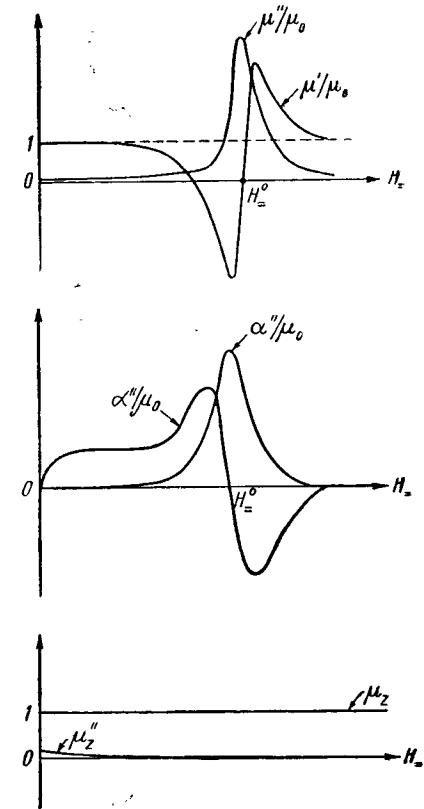


Рис. 144

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} &= -j\omega (\mu \dot{H}_x - ja \dot{H}_y); \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} &= -j\omega (ja \dot{H}_x + \mu \dot{H}_y); \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} &= -j\omega \mu_z \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} (6.97)$$

Эффект Фарадея. Пусть электромагнитная волна распространяется вдоль направления постоянного магнитного поля \mathbf{H}_z (ось z). Полагая (см. § 38) $\partial/\partial x = \partial/\partial y = 0$, из последних строчек (6.96 и 6.97) видим, что волна (как и в изотропной среде) продольных компонент не имеет. Таким образом,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= (x_0 \dot{H}_{0x} - y_0 \dot{H}_{0y}) e^{j(\omega t - \Gamma z)} \\ \dot{\mathbf{E}} &= (x_0 \dot{E}_{0x} + y_0 \dot{E}_{0y}) e^{j(\omega t - \Gamma z)}, \end{aligned} \quad (6.98)$$

где Γ — неизвестное пока комплексное волновое число.

Внося в записанные выше уравнения Максвелла (6.96 и 6.97) компоненты поля $\dot{H}_x = \dot{H}_{0x} e^{j(\omega t - \Gamma z)}$, $\dot{H}_y = \dot{H}_{0y} e^{j(\omega t - \Gamma z)}$ и т. д., определяемые из (6.98), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \dot{H}_{0y} &= \omega \varepsilon \dot{E}_{0x} \\ \Gamma \dot{H}_{0x} &= -\omega \varepsilon \dot{E}_{0y} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \Gamma \dot{E}_{0y} &= -\omega (\mu \dot{H}_{0x} - ja \dot{H}_{0y}) \\ \Gamma \dot{E}_{0x} &= \omega (ja \dot{H}_{0x} + \mu \dot{H}_{0y}) \end{aligned} \right\}, \quad (6.99)$$

последние уравнения (6.96, 6.97) обращаются в тождества ($0 \equiv 0$).

Исключая из (6.99) \dot{E}_{0x} и \dot{E}_{0y} , находим:

$$\left. \begin{aligned} (\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon \mu) \dot{H}_{0y} &= j\omega^2 \varepsilon a \dot{H}_{0x}, \\ (\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon \mu) \dot{H}_{0x} &= -j\omega^2 \varepsilon a \dot{H}_{0y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.100)$$

Отсюда вытекает равенство

$$(\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon \mu)^2 = \omega^4 \varepsilon^2 a^2, \quad (6.101)$$

из которого определяется волновое число:

$$\Gamma^2 = \omega^2 \varepsilon (\mu \pm a). \quad (6.102)$$

Оно, как видно, имеет два значения

$$\Gamma^+ = \omega \sqrt{\varepsilon (\mu + a)} \quad \text{и} \quad \Gamma^- = \omega \sqrt{\varepsilon (\mu - a)} \quad (6.102a)$$

и, следовательно, существуют два рода волн с различными фазовыми скоростями

$$v^+ = 1/\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon (\mu + a)} \quad \text{и} \quad v^- = 1/\operatorname{Re} \sqrt{\varepsilon (\mu - a)}. \quad (6.103)$$

Сопоставляя (6.102) и (5.53), можно сказать, что эквивалентная магнитная проницаемость среды для этих волн различна и принимает значения

$$\mu_0^+ = \mu + a \quad \text{и} \quad \mu_0^- = \mu - a. \quad (6.104)$$

Внося (6.102) в одно из уравнений (6.100), получаем соотношение комплексных амплитуд компонент вектора \mathbf{H} двух родов волн:

$$\dot{H}_{0y} = \pm j \dot{H}_{0x}. \quad (6.105)$$

Мы видим, что компоненты H_y и H_x равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на $\pm 90^\circ$, следовательно, волны, распространяющиеся со скоростями v^\pm , поляризованы по кругу в разных направлениях. В соответствии с (6.98) пишем:

Правая поляризация Левая поляризация

$$\dot{\mathbf{H}}^+ = H_0 (x_0 + jy_0) e^{j(\omega t - \Gamma^+ z)}; \quad \dot{\mathbf{H}}^- = H_0 (x_0 - jy_0) e^{j(\omega t - \Gamma^- z)} \quad (6.106)$$

и далее с учетом двух уравнений (6.99):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^+ &= W^+ H_0 (jx_0 - y_0) e^{j(\omega t - \Gamma^+ z)} \\ \dot{\mathbf{E}}^- &= W^- H_0 (-jx_0 - y_0) e^{j(\omega t - \Gamma^- z)}, \end{aligned} \quad (6.107)$$

где

$$W^\pm = \sqrt{(\mu \pm a)/\varepsilon} \quad (6.108)$$

— волновое сопротивление для волн двух родов.

Положим, что в среде одновременно существуют волны правой и левой круговой поляризации равной амплитуды, и для простоты пренебрежем потерями. Тогда, как это было показано в предыдущем параграфе, поляризация в каждой точке будет линейной. Действительно, складывая поля (6.106) в начале координат ($z=0$), получаем:

$$\dot{\mathbf{H}}_m(0) = \dot{\mathbf{H}}_m^+(0) + \dot{\mathbf{H}}_m^-(0) = x_0 2H_0, \quad (6.109)$$

что соответствует вертикально поляризованной волне.

Так как волны противоположной круговой поляризации распространяются с разными скоростями

$$v^+ = 1/\sqrt{\varepsilon (\mu + a)} \quad \text{и} \quad v^- = 1/\sqrt{\varepsilon (\mu - a)},$$

то векторы \mathbf{H}^+ и \mathbf{H}^- на одном и том же расстоянии от начала координат $z=l$ окажутся повернутыми на разные углы (рис. 145) и, складываясь, дадут волну линейной поляризации, плоскость которой также будет повернута относительно начального положения. Нетрудно найти угол поворота плоскости поляризации ϑ .

Поле \mathbf{H} , соответствующее при $z=0$ вертикально поляризованной волне (6.109), при $z=l$ имеет вид:

$$\dot{\mathbf{H}}_m(l) = \dot{\mathbf{H}}_m^+(l) + \dot{\mathbf{H}}_m^-(l) = H_0 [x_0 (e^{-j\Gamma^+l} + e^{-j\Gamma^-l}) + j y_0 (e^{-j\Gamma^+l} - e^{-j\Gamma^-l})],$$

или, после простых преобразований

$$\mathbf{H}_m(l) = 2H_0 e^{-j\frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2}l} \left(x_0 \cos \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l + y_0 \sin \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l \right), \quad (6.110)$$

т. е. (рис. 146) поворот вектора \mathbf{H} (и плоскости поляризации) составил

$$\vartheta = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} l [\text{рад}]. \quad (6.111)$$

Итак, линейно поляризованная волна распространяется в намагниченном феррите вдоль направления постоянного поля $\mathbf{H}_=$

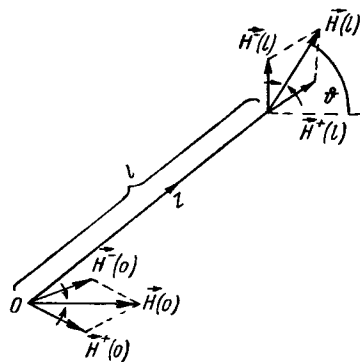


Рис. 145

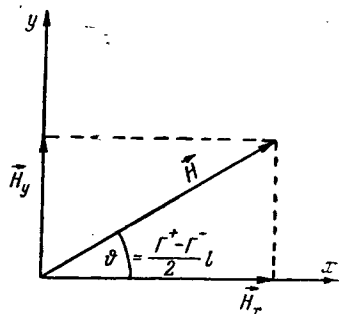


Рис. 146

с вращением плоскости поляризации. Это явление называется эффектом Фарадея.

Величина

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{2} (\sqrt{\mu + \alpha} - \sqrt{\mu - \alpha}), \quad (6.112)$$

выражающая угол поворота плоскости поляризации на единицу длины пути, — *постоянной Фарадея*, а среда, в которой проявляется эффект Фарадея, — *гиротропной* (вращающей).

Кроме намагниченного феррита, заметными гиротропными свойствами обладает, например, намагниченный ионизированный газ, однако в этом случае не магнитная, а диэлектрическая проницае-

мость среды описывается тензором вида (6.94)

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon & -j\beta & 0 \\ j\beta & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (6.113)$$

Эффект Фарадея *необратим*. Если смотреть вдоль направления распространения волны, совпадающего с направлением поля $\mathbf{H}_=$, то при $\alpha > 0$ плоскость поляризации будет вращаться по часовой стрелке (постоянная Фарадея положительна); при распространении волны *против* направления $\mathbf{H}_=$ изменится знак компоненты α и постоянной Фарадея — наблюдая уходящую волну, мы обнаружим вращение ее плоскости поляризации, совершающееся против

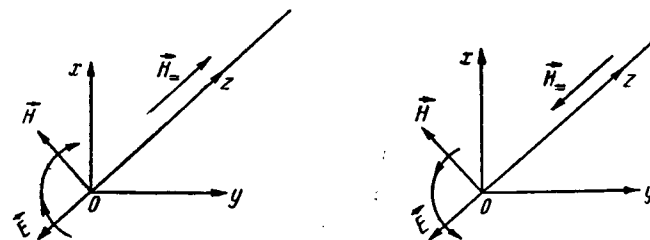


Рис. 147

часовой стрелки. Сказанное поясняется рисунком 147. Характер распространения волны в гиротропной среде зависит, таким образом, от направления — поле в среде не подчиняется теореме взаимности (§ 37).

Эффект Коттона-Мутона. Рассмотрим волну, электрический вектор которой параллелен постоянному полю $\mathbf{H}_=$ ($\mathbf{E} = z_0 \mathbf{E}_z$), распространяющуюся в перпендикулярной ему плоскости, например, вдоль оси Ox (рис 148). Полагая в уравнениях (6.96), (6.97)

$$E_x = E_y = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0, \text{ имеем}$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \dot{H}_{0y} &= -\omega \epsilon \dot{E}_{0z}; \\ \mu \dot{H}_{0x} &= j\alpha H_{0y}; \\ \Gamma \dot{E}_{0z} &= -\omega (j\alpha \dot{H}_{0x} + \mu \dot{H}_{0y}). \end{aligned} \right\} \quad (6.114)$$

Вторая строчка показывает, что исследуемая линейно поляризованная волна имеет компоненту магнитного вектора (\dot{H}_x), совпадающую с направлением распространения и сдвинутую относительно поперечной компоненты \dot{H}_y по фазе на 90° . Вектор \mathbf{H} линейно поляризованной волны, таким образом, вращается, скользая своим концом по эллипсу в плоскости xOy (рис. 149). Говорят, что магнитное поле волны эллиптически поляризовано.

Исключая из (6.114) \dot{E}_{0z} , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^2 \dot{H}_{0y} &= \omega^2 \epsilon (j\alpha \dot{H}_{0x} + \mu \dot{H}_{0y}), \\ ja \dot{H}_{0y} &= \mu \dot{H}_{0x}, \end{aligned} \right\} \quad (6.115)$$

откуда

$$\Gamma^2 = \omega^2 \epsilon (\mu^2 - \alpha^2) / \mu. \quad (6.116)$$

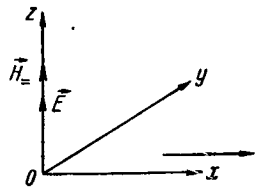


Рис. 148

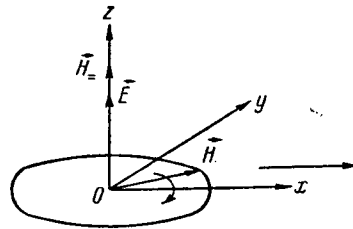


Рис. 149

Фигурирующая здесь эквивалентная магнитная проницаемость

$$\mu_{\perp} = \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu} \quad (6.117)$$

квадратична относительно компоненты тензора магнитной проницаемости α и, следовательно, не изменяется в зависимости от знака постоянного поля H_{0z} .

Пусть теперь электрический вектор волны, распространяющейся вдоль оси x , перпендикулярен к постоянному полю H_{0z} ($E = y_0 E_y$).

Тогда из (6.96, 6.97) следует:

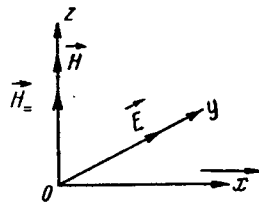


Рис. 150

$$\left. \begin{aligned} \Gamma \dot{H}_{0z} &= \omega \epsilon \dot{E}_{0y}, \\ \Gamma \dot{E}_{0y} &= \omega \mu_z \dot{H}_{0z}, \end{aligned} \right\} \quad (6.118)$$

откуда

$$\Gamma^2 = \omega^2 \epsilon \mu_z. \quad (6.119)$$

Как показывает полученный результат, мы имеем дело с обычной волной свободного пространства (рис. 150) при магнитной проницаемости μ_z .

Итак, в гиротропной среде скорость распространения линейно поляризованной волны в направлении, перпендикулярном полю H_{0z} , зависит от ее поляризации. Входящую в гиротропную среду волну произвольной линейной поляризации (рис. 151) следует рассматривать как совокупность двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяющихся со скоростями

$$v_{\perp} = 1/\text{Re} \sqrt{\epsilon \mu_{\perp}} \quad \text{и} \quad v_{\parallel} = 1/\text{Re} \sqrt{\epsilon \mu_z}. \quad (6.120)$$

При выходе из гиротропной среды эти волновые компоненты окажутся в разных фазах и образуют волну эллиптической поляризации. Это явление носит название эффекта *Коттона — Мутона*.

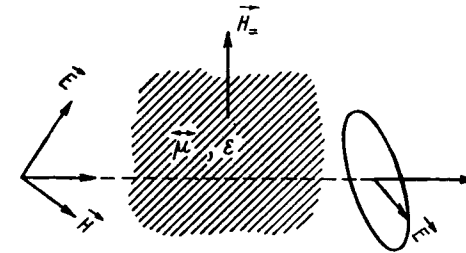


Рис. 151

Примеры и упражнения

1. Вычислить постоянную Фарадея для феррита, параметры которого имеют следующие значения: $\mu = 0,9\mu_0$, $\alpha = 0,5\mu_0$ и $\epsilon = 10\epsilon_0$.
2. Качественно описать эффект Фарадея без пренебрежения потерями. В чем сказывается действие поглощения?
3. Выразить постоянную Фарадея для среды, магнитная проницаемость которой есть μ , а диэлектрическая проницаемость — тензор вида (6.113). Можно ли здесь использовать принцип двойственности?

§ 47. Распространение электромагнитного сигнала

После изучения установившихся монохроматических волновых процессов необходимо хотя бы кратко остановиться на распространении *электромагнитных сигналов*, излучаемых, например, при радиопередаче. Сигнал, как известно, не может быть монохроматическим, он характеризуется *спектром частот* — непрерывным (рис. 152, а) или дискретным (рис. 152, б). При наличии поглощения (§ 44), а в специальных случаях (к которым мы перейдем в гл. 8) и при его отсутствии фазовая скорость электромагнитной волны зависит от частоты. Это приводит к деформации сигнала при распространении: в результате различного поведения отдель-

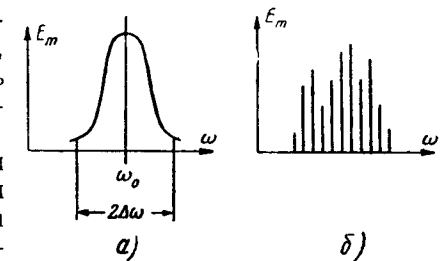


Рис. 152

ных частот компонент сигнал «расплывается» в пространстве. Как это можно понять, исходя из (2.27), скорость движения энергии при этом определяется по формуле:

$$v_g = \frac{\bar{P}}{\bar{w}}, \quad (6.121)$$

где \bar{P} — среднее значение вектора Пойнтинга и \bar{w} — средняя плотность электромагнитной энергии. Величина v_g не может превышать скорость распространения света в вакууме ($c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$).

Положим, что радиопередатчик до известного времени бездействовал. Сигнал включения, строго говоря, имеет непрерывный бесконечный спектр частот. Среди частотных компонент сигнала

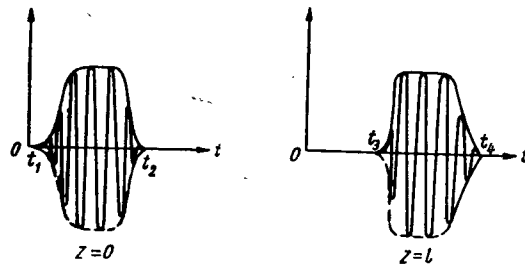


Рис. 153

находится, таким образом, и (энергетически незначительная) часть, распространяющаяся со скоростью c . Она формирует передний фронт сигнала и называется его «первым предвестником». Практически приемник не реагирует на первый предвестник сигнала — его нормальной чувствительности соответствует максимум передаваемой энергии, распространяющейся со скоростью $v^0 < c$.

Проследим за движением амплитудно-модулированного сигнала (рис. 153) на расстоянии l , еще не приводящем к его существенной деформации. Скоростью распространения сигнала в этом случае следует считать скорость движения его огибающей, а точнее — ее максимума. Будем считать, что в поставленном исследовании достаточно ограничиться основной частью частотного спектра ширины $2\Delta\omega$ (рис. 153, а). Электрический вектор сигнала E находится как предел суммы частотных компонент вида

$$E_\omega = \text{Re } \dot{E}_\omega e^{j(\omega t - \Gamma z)}$$

при безгранично сокращающемся интервале между ними, т. е. как интеграл

$$E = \text{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{E}_\omega e^{j(\omega t - \Gamma z)} d\omega, \quad (6.122)$$

где $\Gamma = \Gamma(\omega)$ — постоянные распространения этих компонент, зависящие от частоты.

Рассматриваемый интеграл называется *группой волн*.

Заменяя в (6.122) переменную интегрирования, запишем

$$E = \text{Re} \int_{\Gamma_0 - \Delta\Gamma}^{\Gamma_0 + \Delta\Gamma} \dot{E}_\Gamma e^{j(\omega t - \Gamma z)} d\Gamma, \quad (6.122a)$$

где $\Gamma_0 = \omega_0/v_0$ и v_0 — фазовая скорость, соответствующая средней частоте группы.

Разлагая ω в ряд Тэйлора по $\Gamma - \Gamma_0$ и ограничиваясь двумя членами разложения, имеем:

$$\omega = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 (\Gamma - \Gamma_0) + \dots,$$

так что интеграл (6.122a) принимает вид

$$E = \text{Re} e^{j(\omega_0 t - \Gamma_0 z)} \int_{\Gamma_0 - \Delta\Gamma}^{\Gamma_0 + \Delta\Gamma} \dot{E}_\Gamma e^{j \left[\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z \right] (\Gamma - \Gamma_0)} d\Gamma.$$

Считая, что амплитуда \dot{E}_Γ мало изменяется в зависимости от Γ , вынесем ее за знак интеграла, одновременно меняя переменную интегрирования на $\Gamma - \Gamma_0$:

$$\dot{E} = \text{Re } \dot{E}_{\Gamma_0} e^{j(\omega_0 t - \Gamma_0 z)} \int_{-\Delta\Gamma}^{+\Delta\Gamma} e^{j \left[\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z \right] (\Gamma - \Gamma_0)} d(\Gamma - \Gamma_0).$$

Интегрируя, находим:

$$E = 2 \text{Re } \dot{E}_{\Gamma_0} e^{j(\omega_0 t - \Gamma_0 z)} \frac{\sin \left[\left(\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z \right) \Delta\Gamma \right]}{\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z}.$$

Таким образом,

$$E = 2E_m \frac{\sin \left[\left(\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z \right) \Delta\Gamma \right]}{\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z} \cos(\omega t - \Gamma z). \quad (\omega \approx \omega_0) \quad (6.123)$$

Очевидно, что произведенные выкладки справедливы лишь при весьма малом $\Delta\Gamma$, т. е. при достаточно узком спектре сигнала. Вместе с тем, это же условие дает право рассматривать результат (6.123) как волну, близкую к монохроматической. При этом функция

$$\frac{\sin \left[\left(\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z \right) \Delta\Gamma \right]}{\left. \frac{d\omega}{d\Gamma} \right|_0 t - z} \quad (6.124)$$

описывает медленно изменяющуюся *огibaющую* сигнала. Ее максимум соответствует обращению в нуль аргумента

$$\frac{d\omega}{d\Gamma} t - z \quad (6.125)$$

и связан, таким образом, пространственно-временным условием. Скорость движения максимума находится дифференцированием этого выражения по t :

$$v_{gp} = \frac{dz}{dt} = \frac{d\omega}{d\Gamma}. \quad (6.126)$$

Она называется *групповой скоростью* и характеризует распространение сигнала. Доказывается, что в тех случаях, когда понятие групповой скорости сохраняет смысл, она может быть найдена как скорость движения максимума энергии по формуле (6.121).

Легко убедиться, что в отсутствие дисперсии фазовая и групповая скорости совпадают. Действительно, взяв фазовую скорость ω/Γ не зависящей от частоты

$$v = \omega/\Gamma = \text{const},$$

имеем

$$\frac{d\omega}{d\Gamma} = v,$$

т. е.

$$v = v_{gp}.$$

ОТРАЖЕНИЕ, ПРЕЛОМЛЕНИЕ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Вслед за проблемой излучения наше внимание в предыдущей главе вновь было обращено к волнам плоским, рассматриваемым как предельный случай сферических волн, возбуждаемых источниками в неограниченной среде. Именно эти простейшие волны представляют наиболее удобный объект исследования волнового характера электромагнитного поля. Однако в большинстве практических задач нельзя говорить о бесконечном однородном пространстве. Обычно существенное влияние на распространение волн оказывают *границы*, разделяющие разнородные области. Так, волны над землей следует изучать с учетом их поведения на границе земля — воздух; характер волн в линиях передачи определяется наличием границ между направляющими проводниками и промежуточным диэлектриком и т. д. Настоящая глава предшествует рассмотрению специальных задач подобного типа. В ней ставится целью дать основные представления о распространении электромагнитных волн в пространстве, состоящем из разнородных областей.

Электромагнитная волна, «падая» на плоскую границу раздела сред, частично проходит через нее, продолжая распространяться в измененном направлении — *преломляется*, частично же *отражается* от границы, которая при этом служит как бы источником обратной волны. Схематически этот процесс поясняется на рисунке 154, а.

Падение электромагнитной волны на тело ограниченных размеров представляет собой принципиально аналогичное, однако значительно более сложное явление, называемое *дифракцией*. Ни отраженная, ни преломленная волны здесь уже не могут быть плоскими (рис. 154, б).

Практически важен класс задач, в которых одной из сред является идеальный проводник. Такие идеализированные задачи

воспроизводят основные черты явлений, происходящих при наличии реальных хороших проводников — металлов. Как известно из § 45, электромагнитное поле внутри идеального проводника существовать не может; оно вовсе не проникает в идеальный проводник, поэтому на его границе отсутствует преломление, волна лишь отражается. Задачи дифракции на проводящих телах особенно

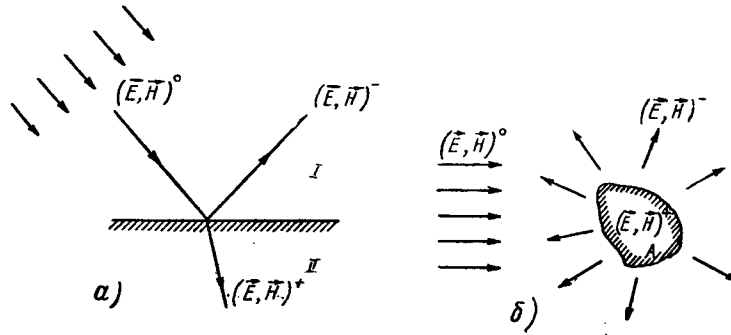


Рис. 154

интересны для теории антенн. На рис. 155 дана схема двух основных видов этих задач: дифракция на ограниченном проводнике (а) и дифракция на отверстии в экране (б).

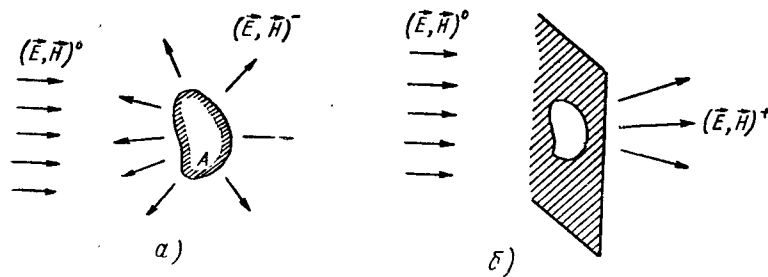


Рис. 155

Электромагнитное поле, проникая в реальный проводник, весьма быстро затухает. В глубине его поле и ток практически отсутствуют. Это явление, называемое *поверхностным эффектом* (*скин-эффектом*), также изучается в данной главе. Потери энергии при отражении от реальных проводников весьма невелики, но в ряде случаев представляют собой единственный вид потерь в системе и поэтому нуждаются в учете. Для этой цели применяется излагаемый ниже метод граничных условий Леоновича.

1. ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ НА ПЛОСКИХ ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА СРЕД

§ 48. Нормальное падение плоской волны

Пусть плоскость xOy разделяет среды, диэлектрическая и магнитная проницаемости которых соответственно равны

$$\left. \begin{array}{l} \mu_1 \text{ и } \epsilon_1 \text{ при } z < 0, \\ \mu_2 \text{ и } \epsilon_2 \text{ при } z > 0. \end{array} \right\} \quad (7.1)$$

Плоская однородная электромагнитная волна

$$\left. \begin{array}{l} \dot{H}_m^0 = y_0 A e^{-jk_1 z}, \\ \dot{E}_m^0 = x_0 A W_1^0 e^{-jk_1 z} \end{array} \right\} z < 0, \quad (7.2)$$

$$(k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}; \quad W_1^0 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}}),$$

распространяется в левом полупространстве ($z < 0$), падает на границу раздела (рис. 156).

Чтобы удовлетворить граничным условиям при $z = 0$, необходимо предположить существование *отраженной* волны

$$\left. \begin{array}{l} \dot{H}_m^- = -y_0 B e^{jk_1 z}, \\ \dot{E}_m^- = x_0 B W_1^0 e^{jk_1 z} \end{array} \right\} z \leq 0, \quad (7.3)$$

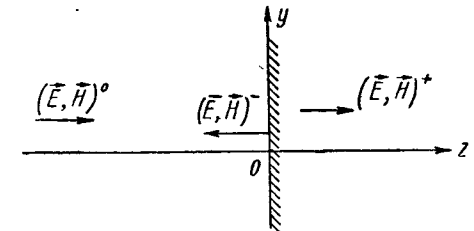


Рис. 156

распространяющейся в первой среде в обратном направлении, и волны, прошедшей во вторую среду

$$\left. \begin{array}{l} \dot{H}_m^+ = y_0 C e^{-jk_2 z}, \\ \dot{E}_m^+ = x_0 C W_2^0 e^{-jk_2 z} \end{array} \right\} z \geq 0, \quad (7.4)$$

$$(k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}; \quad W_2^0 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}).$$

Векторы поля параллельны границе xOy , поэтому они непрерывны на ней:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^- = \dot{H}_m^+, \\ \dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- = \dot{E}_m^+ \end{array} \right\} z = 0. \quad (7.5)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} A - B = C \\ (A + B) W_1^0 = C W_2^0 \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

Отношения комплексных амплитуд

$$\rho = \frac{\dot{E}_m^-(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{B}{A} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\dot{E}_m^+(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{C W_2^0}{A W_1^0} \quad (7.7)$$

называются соответственно *коэффициентом отражения* и *коэффициентом прохождения*. Внося эти обозначения в (7.6) имеем

$$\left. \begin{aligned} 1 - \rho &= \frac{W_1^0}{W_2^0} \tau, \\ 1 + \rho &= \tau \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

откуда

$$\rho = \frac{W_2^0 - W_1^0}{W_2^0 + W_1^0} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{2W_2^0}{W_2^0 + W_1^0}. \quad (7.9)$$

Итак, электромагнитное поле в первой среде представляет собой суперпозицию *падающей и отраженной волн*

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^{(1)} &= \mathbf{y}_0 A (e^{-jk_1 z} - \rho e^{jk_1 z}), \\ \dot{\mathbf{E}}_m^{(1)} &= \mathbf{x}_0 A W_1^0 (e^{-jk_1 z} + \rho e^{jk_1 z}) \end{aligned} \right\} z \leq 0, \quad (7.10)$$

а во второй — *прошедшую волну*

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^{(2)} &= \mathbf{y}_0 A \frac{W_1^0}{W_2^0} \tau e^{-jk_2 z}, \\ \dot{\mathbf{E}}_m^{(2)} &= \mathbf{x}_0 A W_1^0 \tau e^{-jk_2 z} \end{aligned} \right\} z \geq 0. \quad (7.11)$$

Легко заметить, что амплитуда поля в первой среде периодически изменяется вдоль оси z . Перепишав одну из формул (7.10) в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_m^{(1)} = \mathbf{x}_0 A W_1^0 e^{-jk_1 z} (1 + \rho e^{j2k_1 z}),$$

мы констатируем, что амплитуда $E_m^{(1)}$ пропорциональна модулю комплексного числа

$$1 + \rho e^{j2k_1 z}.$$

Считая k_1 величиной вещественной (в среде отсутствуют потери), воспользуемся векторной диаграммой, представленной на рис. 157: по мере движения волны вдоль оси z условный вектор ρ вращается около фиксированного единичного вектора. Амплитуда $E_m^{(1)}$ пропорциональна их сумме (рис. 158), периодически меняющейся с ростом координаты z . Соседние минимумы (или соседние макси-

мумы) $E_m^{(1)}$ расположены на расстоянии Δz , соответствующем полному обороту ρ :

$$2k_1 \Delta z = 2\pi,$$

т. е., как видно из этого условия, на расстоянии *половины волны*:

$$\Delta z = \frac{\pi}{k_1} = \frac{\lambda_1}{2}. \quad (7.12)$$

Когда волновые сопротивления обеих сред близки, коэффициент отражения (7.9) невелик, и «волнистость» поля в первой

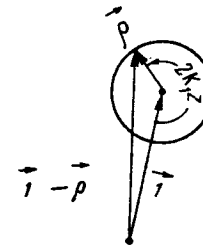


Рис. 157

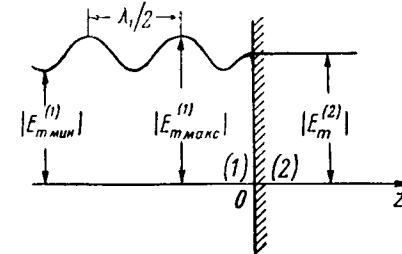


Рис. 158

среде незначительна. При резком различии волновых сопротивлений коэффициент отражения близок к единице, и амплитуда поля периодически спадает почти до нуля. Рассмотрим два предельных случая.

а) *Согласование сред.*

Если $W_1^0 = W_2^0$, что возможно лишь при соотношении проницаемостей

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad (7.13)$$

то, согласно (7.9), $\rho = 0$, т. е. отражение отсутствует, а амплитуда поля в обеих средах (если не говорить о поглощении) не изменяется.

б) *Полное отражение.*

Если волна падает на границу с идеально проводящей средой ($\sigma_2 \rightarrow \infty$), то

$$W_2^0 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2 - j\sigma_2/\omega}} \rightarrow \sqrt{\frac{j\mu_2\omega}{\sigma_2}} \rightarrow 0, \quad (7.14)$$

т. е. в соответствии с (7.9), $\tau = 0$ и $\rho = -1$. Поле не проникает во вторую среду, в первой же оно (см. 7.10) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_m^{(1)} &= \mathbf{y}_0 2A \cos k_1 z, \\ \mathbf{E}_m^{(1)} &= -\mathbf{x}_0 j 2A W_1^0 \sin k_1 z. \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

В отсутствие поглощения (вещественное k_1) электрическое и магнитное поле во всем пространстве остаются неизменными

по фазе и имеют фазовый сдвиг 90° . Таким образом, среднее значение вектора Пойнтинга в любой точке поля равно нулю, и передачи энергии нет. Магнитное поле при этом распределено косинусоидально, а электрическое — синусоидально от границы (рис. 159). Это обстоятельство отмечается как «пространственный сдвиг» полей на четверть волны. Электромагнитное поле этого вида называется *стоячей волной*.

Вычисление коэффициента отражения от металлической поверхности (см. пример 3) убеждает в том, что различие между

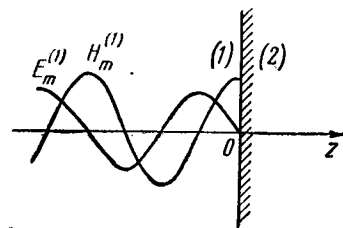


Рис. 159

реальными металлами и идеальным проводником вполне пренебрежимо, пока не ставится задача учесть потери в металле. Потери эти, возникающие в результате проникновения волны в металл, очень малы и практически заметны главным образом в системах с *многократным* отражением волн — волноводах и полых резонаторах (гл. 8, 9).

На практике возможны также случаи, когда поле, весьма близкое к стоячей волне, возникает при отражении от среды с резко отличающимся волновым сопротивлением. В этом нетрудно удостовериться, заметив, что при

$$|W_1^0| \gg |W_2^0| \text{ и } |W_1^0| \ll |W_2^0|,$$

согласно (7.9), коэффициент отражения по модулю

$$\rho \approx \pm 1.$$

Механическое действие электромагнитной волны. Электромагнитная волна, падая на какое-либо тело, производит *механическое давление*. Световое давление было обнаружено и измерено в 1901 г. П. Н. Лебедевым, и это сыграло значительную роль в обосновании теории электромагнетизма.

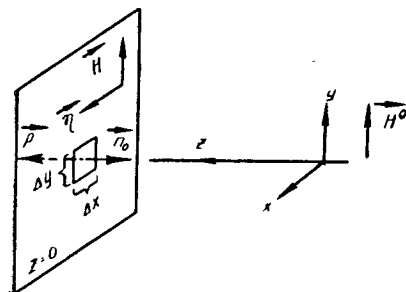


Рис. 160

Вычислим давление, производимое на идеально проводящую плоскость нормально падающей волной. Пусть ее магнитный вектор (рис. 160) есть $H_0 = y_0 A \cos(\omega t - kz)$. Взяв формулу (1.55б), легко убедиться, что в плоскости течет поверхностный ток плотности

$$\eta = [n_0, H^{(1)} - H^{(2)}] =$$

$$2A [n_0, y_0] \cos \omega t = x_0 2A \cos \omega t,$$

так как согласно (7.15) амплитуда поля в среде, примыкающей к проводнику, удваивается ($H^{(1)} = 2A$), а в самом проводнике поле отсутствует ($H^{(2)} = 0$). Выделенный на рисунке элемент идеально проводящей плоскости $\Delta S = \Delta x \Delta y$ можно рассматривать (§ 29) как векторный элемент тока $I \Delta x = x_0 2A \Delta S \cos \omega t$

в магнитном поле $H = y_0 2A \cos \omega t$. В соответствии с (4.31) на этот элемент действует сила

$$\Delta F = I [\Delta x, \mu H] = 4A^2 \mu \Delta S [x_0, y_0] \cos^2 \omega t,$$

и, следовательно, производится давление

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

направленное по движению волны и равное

$$p = z_0 4A^2 \mu \cos^2 \omega t.$$

Нетрудно также найти давление, производимое на идеальный проводник произвольным электромагнитным полем. Если напряженность магнитного поля на поверхности проводника есть H , то, как это следует из (4.31),

$$p = \mu [(n_0, H), H] = -n_0 \mu H^2.$$

Примеры и упражнения

1. Плоская однородная электромагнитная волна нормально падает на плоскость раздела сред, магнитная и диэлектрическая проницаемости которых соответственно равны: $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = 5\epsilon_0$; $\mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$. Вычислить коэффициенты отражения и прохождения.

2. Решить такую же задачу при следующих данных:

- а) $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$; $\mu_2 = 5\mu_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$;
- б) $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = 3\epsilon_0$; $\mu_2 = 1,5\mu_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$;
- в) $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = (5 - j0,2)\epsilon_0$; $\mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_2 = \epsilon_0$;
- г) $\mu_1 = \mu_0$, $\epsilon_1 = \epsilon_0$; $\mu_2 = \mu_0$, $\epsilon_2 = (5 - j0,05)\epsilon_0$.

3. Рассмотрим отражение волны металлической поверхностью. Формулы (7.9) перепишем в виде

$$\rho = -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \text{ и } \tau = \frac{2\alpha}{1+\alpha}, \quad (7.16)$$

где

$$\alpha = \frac{W_2^0}{W_1^0} \approx \sqrt{j \frac{\omega \epsilon_0}{\sigma}} = (1+j) \sqrt{\frac{1}{2 \operatorname{tg} \Delta}} \quad (7.17)$$

— весьма малая величина.

Разлагая знаменатель (7.16) в биномиальный ряд

$$(1+\alpha)^{-1} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \dots,$$

получаем с точностью до α^2 :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= -1 + \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} \Delta}} + j \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} \Delta}} \\ \tau &= \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} \Delta}} + j \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg} \Delta}} \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Для меди, например,

$$1/\operatorname{tg} \Delta \approx 1,04 \cdot 10^{-18} \text{ ф,}$$

и практически во всем диапазоне радиочастот $q = -1$.

Задание. а) Найти ошибку, совершаемую при определении коэффициента отражения q от меди по формуле для идеального проводника при частотах $f = 10^3 \text{ гц}$; 10^6 гц ; 10^8 гц и 10^{11} гц .

б) При этих же частотах найти коэффициент прохождения и долю энергии, проходящую в проводник.

в) Сделать такие же оценки для металлов с меньшей электропроводностью.

4. Показать, что при наличии потерь ($k_1 = k'_1 - jk''_1$) формулы (7.15) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^{(1)} &= y_0 2A (\cos k'_1 z \operatorname{ch} k''_1 z + j \sin k'_1 z \operatorname{sh} k''_1 z), \\ \dot{\mathbf{E}}_m^{(2)} &= -x_0 j 2A W_1^0 (\sin k'_1 z \operatorname{ch} k''_1 z - j \cos k'_1 z \operatorname{sh} k''_1 z). \end{aligned} \right\} (7.19)$$

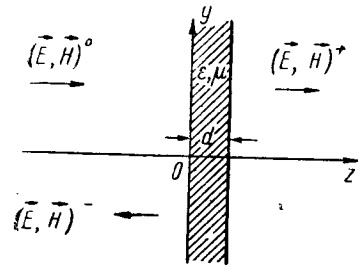


Рис. 161

5. Чему равна плотность потока энергии поля (7.19) в направлении оси z . Пояснить результат расчета.

6. Волна, распространяясь в вакууме, нормально падает на бесконечный слой толщиной d (рис. 161), параметры которого суть μ и ϵ . Показать, что комплексные амплитуды вектора \mathbf{E} отраженной и прошедшей через слой волн связаны с амплитудой падающей волны $\dot{\mathbf{E}}_m^0$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^- &= \frac{(\mu\epsilon_0 - \mu_0\epsilon)(1 - e^{-j2kd})}{(\mu\epsilon_0 + \mu_0\epsilon)(1 - e^{-j2kd}) + 2\sqrt{\mu\epsilon\mu_0\epsilon_0}(1 + e^{-j2kd})} \dot{\mathbf{E}}_m^0, \\ \dot{\mathbf{E}}_m^+ &= \frac{\sqrt{4\mu\epsilon\mu_0\epsilon_0}e^{jk_0d}}{-(\sqrt{\mu\epsilon_0} - \sqrt{\mu_0\epsilon})^2 e^{-jkd} + (\sqrt{\mu\epsilon_0} + \sqrt{\mu_0\epsilon})^2 e^{jkd}} \dot{\mathbf{E}}_m^0, \end{aligned} \right\} (7.20)$$

Указание. Рассмотреть граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на обеих границах слоя.

7. Пользуясь результатом (7.20), подсчитать, какая часть энергии волны длиной $\lambda = 300 \text{ м}$ (в вакууме), нормально падающей на бесконечный медный лист толщиной в 1 микрон, проходит через него. Найти коэффициент отражения от листа и сравнить его значение с аналогичной величиной, найденной в задаче 3,а.

§ 49. Наклонное падение плоской волны. Общий анализ

Предварительные замечания. Если плоская волна распространяется вдоль оси z' , не совпадающей ни с одной из осей декартовой системы координат (x, y, z) (рис. 162), и, следо-

вательно, волновой аргумент имеет вид

$$\omega t - kz',$$

то оказывается удобным ввести волновой вектор

$$\mathbf{k} = z'_0 k, \quad (7.21)$$

по абсолютному значению равный волновому числу k и направленный по движению волны.

Проведя из общего начала O радиус-вектор

$$\mathbf{r} = x_0 x + y_0 y + z_0 z,$$

оканчивающийся на какой-либо плоскости постоянной фазы волны $z' = \text{const}$ (рис. 162), имеем

$$kz' = kr. \quad (7.22)$$

Чтобы перейти в волновом аргументе к основным координатам (x, y, z) , достаточно учесть, что

$$\mathbf{k} = kz'_0 = k(x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta), \quad (7.23)$$

где

$$\xi = \cos(z', x), \quad \eta = \cos(z', y) \text{ и}$$

$$\zeta = \cos(z', z)$$

— направляющие косинусы оси z' , подчиненные, как известно, условию

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \quad (7.24)$$

Соотношение (7.22) принимает, таким образом, вид

$$kz' = k(\xi x + \eta y + \zeta z), \quad (7.25)$$

т. е. все комплексные амплитуды поля подчинены пространственной зависимости

$$e^{-jk(\xi x + \eta y + \zeta z)}. \quad (7.26)$$

В частном случае, когда $\xi = 0$, $\eta = 0$ и $\zeta = 1$, волна распространяется вдоль оси z .

Изучая наклонное падение волны на плоскую границу, мы рассмотрим два качественно различных случая. В первом из них электрический вектор падающей волны параллелен граничной плоскости (рис. 163, а) и, следовательно, перпендикулярен к плоскости падения P . Волна, как мы будем условно считать, поляризована при этом горизонтально. Во втором случае (рис. 163, б) волна поляризована в плоскости падения, т. е., по определению, вертикально.

Любую линейно поляризованную волну можно разложить на компоненты горизонтальной и вертикальной поляризации (§ 45) с тем, чтобы рассматривать их в отдельности.

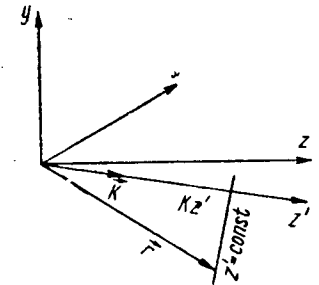


Рис. 162

В качестве границы сред возьмем плоскость xOy (рис. 164), так что

$$\left. \begin{aligned} k &= k_1 \text{ при } z < 0, \\ k &= k_2 \text{ при } z > 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Волна, распространяясь в первой среде в плоскости yOz , падает на границу под углом φ к нормали, совпадающей с отри-

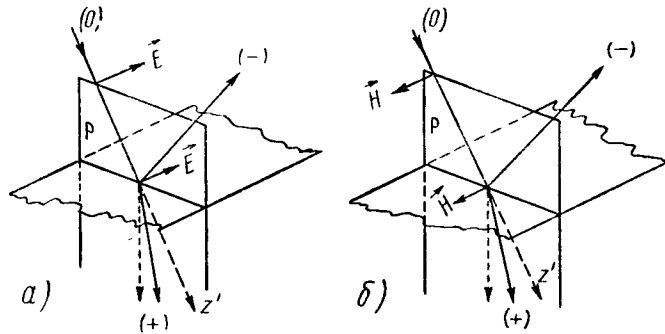


Рис. 163

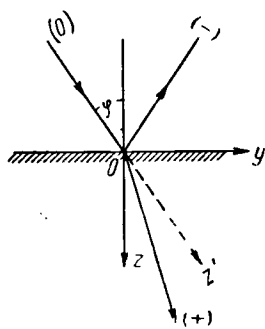


Рис. 164

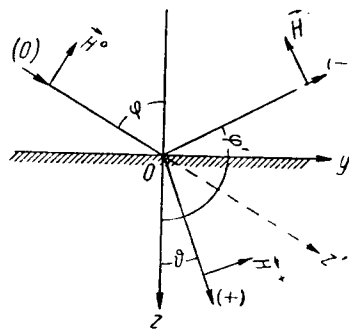


Рис. 165

цательной осью z ; при этом аргумент (7.25) имеет вид

$$k_1 z' = k_1 (y' \sin \varphi + z \cos \varphi). \quad (7.28)$$

Горизонтальная поляризация. Наиболее просто поле падающей волны (рис. 165) выражается в системе координат (x', y', z') ¹.

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^0 &= y'_0 A e^{-jk_1 z'}, \\ \dot{E}_m^0 &= x'_0 A W_1^0 e^{-jk_1 z'} \end{aligned} \right\} z \leq 0. \quad (7.29)$$

¹ Оси координат x' и y' , лежащие в плоскости, перпендикулярной z' , не показаны на рис. 165.

Переходя к основным координатам (x, y, z) (x' совпадает с x) и учитывая при этом (7.28), преобразуем эту запись:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^0 &= A (y_0 \cos \varphi - z_0 \sin \varphi) e^{-jk_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \\ \dot{E}_m^0 &= x_0 A W_1^0 e^{-jk_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \end{aligned} \right\} z \leq 0. \quad (7.30)$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям при $z=0$, необходимо допустить существование *отраженной* волны, распространяющейся от границы в первой среде, и *преломленной* волны, проникающей во вторую среду. С целью определить их направления учтем, во-первых, что, в соответствии с (7.28), амплитуда падающей волны не зависит от координаты x . Граничные условия требуют отсутствия такой зависимости и у остальных волн, т. е. равенства нулю направляющего косинуса ξ в (7.25):

$$\xi = 0; \quad (z', x) = 90^\circ. \quad (7.31)$$

А это значит, что и отраженная и преломленная волны распространяются в *плоскости падения*.

Принимая во внимание сказанное, запишем общие выражения полей отраженной волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^- &= B (y_0 \cos \varphi' - z_0 \sin \varphi') e^{-jk_1 (y \sin \varphi' + z \cos \varphi')}, \\ \dot{E}_m^- &= x_0 B W_1^0 e^{-jk_1 (y \sin \varphi' + z \cos \varphi')} \end{aligned} \right\} z \leq 0 \quad (7.32)$$

и волны преломленной

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m^+ &= C (y_0 \cos \vartheta - z_0 \sin \vartheta) e^{-jk_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, \\ \dot{E}_m^+ &= x_0 C W_2^0 e^{-jk_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)} \end{aligned} \right\} z \geq 0. \quad (7.33)$$

Углы φ' и ϑ (рис. 165) указывают направления распространения этих волн относительно оси z . Второй из них называется *углом преломления*, а вместо первого обычно употребляется дополнительный к нему угол $\pi - \varphi'$, называемый *углом отражения*.

Ввиду того, что граничные условия требуется выполнить вдоль всей оси y , все три волны — падающая, отраженная и преломленная — должны иметь одинаковую зависимость от координаты y , т. е. должны быть соблюдены равенства

$$\left. \begin{aligned} k_1 \sin \varphi &= k_1 \sin \varphi', \\ k_1 \sin \varphi &= k_2 \sin \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

Отсюда немедленно вытекают *законы Снеллиуса*:

1. Угол отражения равен углу падения¹:

$$\pi - \varphi' = \varphi \quad (7.35)$$

¹ Случай $\varphi' = \varphi$ расходится со смыслом задачи — отраженная волна распространяется во второй среде.

2. Угол падения и угол преломления связаны зависимостью

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}; \quad (7.36)$$

$n_1 = \sqrt{\epsilon_1 \mu_2}$ и $n_2 = \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ называются коэффициентами преломления сред, а величина $n_{12} = n_1/n_2$ — относительным коэффициентом преломления. Необходимо подчеркнуть, что такая формулировка второго закона имеет очевидный геометрический смысл только в отсутствие потерь (k_1 и k_2 вещественны). Тогда же коэффициенты преломления представляют собой обратные величины фазовых скоростей, и формулу (7.36) можно написать так:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{v_2}{v_1}. \quad (7.36a)$$

Налагая на поля (7.30, 7.32, 7.33) требование непрерывности тангенциальных компонент векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} при $z=0$, имеем:

$$\left. \begin{aligned} (A - B) \cos \varphi &= C \cos \vartheta, \\ (A + B) W_1^0 &= C W_2^0 \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

Назвав отношение амплитуд \dot{E}_m^- и \dot{E}_m^0 на границе ($z=0$) коэффициентом отражения, а соответствующее отношение амплитуд \dot{E}_m^+ и \dot{E}_m^0 — коэффициентом прохождения

$$\rho_{\Gamma} = \frac{\dot{E}_m^-(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{B}{A} \quad \text{и} \quad \tau_{\Gamma} = \frac{\dot{E}_m^+(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{C W_2^0}{A W_1^0}, \quad (7.38)$$

на основании (7.37) получаем:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \rho_{\Gamma}) \cos \varphi &= \tau_{\Gamma} \frac{W_1^0}{W_2^0} \cos \vartheta, \\ 1 + \rho_{\Gamma} &= \tau_{\Gamma}. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Отсюда

$$\rho_{\Gamma} = \frac{W_2^0 \cos \varphi - W_1^0 \cos \vartheta}{W_2^0 \cos \varphi + W_1^0 \cos \vartheta} \quad \text{и} \quad \tau_{\Gamma} = \frac{2W_2^0 \cos \varphi}{W_2^0 \cos \varphi + W_1^0 \cos \vartheta}. \quad (7.40)$$

Эти соотношения называются формулами Френеля. Для случая нормального падения ($\varphi = \vartheta = 0$) они совпадают с полученными ранее результатами (7.9).

Вертикальная поляризация. Записывая поле падающей волны (рис. 166) сначала в координатах (x', y', z')

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= \mathbf{x}'_0 A e^{-jk_1 z'}, \\ \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= -y'_0 A W_1^0 e^{-jk_1 z'} \end{aligned} \right\} z \leq 0, \quad (7.41)$$

а затем с учетом (7.28) в основной декартовой системе координат, имеем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= \mathbf{x}_0 A e^{-jk_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \\ \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= A W_1^0 (-y_0 \cos \varphi + z_0 \sin \varphi) e^{-jk_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \end{aligned} \right\} z \leq 0. \quad (7.42)$$

Принимая во внимание (7.31), выражаем поле отраженной волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^- &= \mathbf{x}_0 B e_0^{-jk_1 (y \sin \varphi' + z \cos \varphi')} \\ \dot{\mathbf{E}}_m^- &= B W_1^0 (-y_0 \cos \varphi' + z_0 \sin \varphi') e^{-jk_1 (y \sin \varphi' + z \cos \varphi')} \end{aligned} \right\} 0 \geq z \quad (7.43)$$

и поле волны преломленной

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_m^+ &= \mathbf{x}_0 C e^{-jk_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)} \\ \dot{\mathbf{E}}_m^+ &= C W_2^0 (-y_0 \cos \vartheta + z_0 \sin \vartheta) e^{-jk_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)} \end{aligned} \right\} z \geq 0. \quad (7.44)$$

Формулы (7.35, 7.36), вытекающие из необходимости удовлетворить граничным условиям при любых y , в данном случае, разумеется, сохраняют силу.

Приравняв тангенциальные компоненты векторов поля в разных средах при $z=0$, находим:

$$\left. \begin{aligned} A + B &= C \\ (A - B) W_1^0 \cos \varphi &= C W_2^0 \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Коэффициентом отражения и, соответственно, коэффициентом прохождения при вертикальной поляризации обычно называют следующие отношения:

$$\rho^B = \frac{\dot{H}_m^-(0)}{\dot{H}_m^0(0)} = \frac{B}{A} \quad \text{и} \quad \tau^B = \frac{\dot{H}_m^+(0)}{\dot{H}_m^0(0)} = \frac{C}{A}. \quad (7.46)$$

Внося (7.46) в систему уравнений (7.45), получаем формулы Френеля для рассматриваемого случая:

$$\rho^B = -\frac{W_2^0 \cos \vartheta - W_1^0 \cos \varphi}{W_2^0 \cos \vartheta + W_1^0 \cos \varphi} \quad \text{и} \quad \tau^B = \frac{2W_1^0 \cos \varphi}{W_2^0 \cos \vartheta + W_1^0 \cos \varphi}. \quad (7.47)$$

При нормальном падении ($\vartheta = \varphi = 0$) эти формулы приводят к известному из предыдущего параграфа результату.

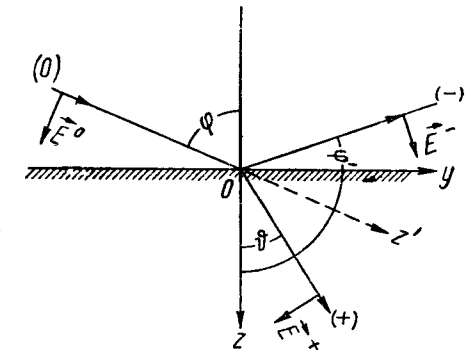


Рис. 166

§ 50. Наклонное падение при отсутствии потерь.
Направляемые волны

Угол Брюстера. Выясним сначала условия, при которых на границе не происходит отражения. Полагая в случае горизонтальной поляризации равным нулю коэффициент отражения (7.40) и учитывая (7.36), получаем:

$$\left(\frac{W_2^0}{W_1^0}\right)^2 = \frac{1 - n_{12}^2 \sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi},$$

откуда

$$\sin^2 \varphi = \frac{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \mu_2/\mu_1}{\mu_1/\mu_2 - \mu_2/\mu_1}. \quad (7.48)$$

Итак, желая достигнуть полного прохождения волны через границу при горизонтальной поляризации, следует направлять ее под углом φ , определяемым из условия (7.48). Как видно, для обычных диэлектриков ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) такого угла не существует, и, следовательно, горизонтально поляризованная волна *отражается при любых углах падения*.

Анализируя этим же путем случай вертикальной поляризации, из (7.47) находим:

$$\left(\frac{W_2^0}{W_1^0}\right)^2 = \frac{1 - \sin^2 \varphi}{1 - n_{12}^2 \sin^2 \varphi}$$

и

$$\sin^2 \varphi = \frac{\mu_2/\mu_1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 - \varepsilon_2/\varepsilon_1}. \quad (7.49)$$

Для обычного диэлектрика ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) эта формула принимает вид

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon_1/\varepsilon_2 + 1},$$

а отсюда

$$\varphi = \arctg \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}. \quad (7.50)$$

Таким образом, вертикально поляризованная волна *не отражается*, падая на границу раздела идеальных диэлектриков под углом φ , определяемым формулой (7.50). Он называется *углом Брюстера*.

Полное отражение от диэлектрической границы. Как видно из (7.36), мыслимы условия, при которых данному вещественному углу падения волны φ будет соответствовать *мнимый* угол преломления ϑ ($\sin \vartheta > 1$). Для этого достаточно выполнить неравенство

$$n_{12} \sin \varphi > 1, \quad (7.51)$$

которое, как легко проверить, обуславливает *полное отражение* от границы раздела. Действительно, в силу того, что косинус

угла преломления, согласно (7.51), оказывается чисто мнимой величиной

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - n_{12}^2 \sin^2 \varphi}, \quad (7.52)$$

• модуль коэффициента отражения (7.40) и (7.47) равен единице:

$$|R_r| = \left| \frac{W_2^0 \cos \varphi - jW_1^0 |\cos \vartheta|}{W_2^0 \cos \varphi + jW_1^0 |\cos \vartheta|} \right| = 1$$

и

$$|R_v| = \left| \frac{jW_2^0 |\cos \vartheta| - W_1^0 \cos \varphi}{jW_2^0 |\cos \vartheta| + W_1^0 \cos \varphi} \right| = 1.$$

Этот результат свидетельствует также о равенстве средних потоков энергии, связанных с падающей и отраженной волнами, так как

$$\bar{P}^0 = \bar{P}^-. \quad (7.54)$$

Разлагая вектор Пойнтинга обеих волн в первой среде на нормальную и тангенциальную составляющие (рис. 167)¹, видим, что по нормали к границе передачи энергии не происходит; энергия распространяется *вдоль границы*. Привлекая формулы (7.30, 7.32) и, соответственно, (7.42, 7.43), легко заметить, что все компоненты поля первой среды, представляющего собой суперпозицию падающей и отраженной волн, зависят от координат по закону

$$f_1(y, z) = e^{-jk_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \pm e^{-jk_1(y \sin \varphi' + z \cos \varphi')} + j\psi,$$

где ψ — фаза коэффициента отражения. Преобразуя эту запись с учетом (7.35), находим, что

$$f_1(y, z) = 2e^{-j(k_1 y \sin \varphi - \psi/2)} \cdot \begin{cases} \cos(k_1 z \cos \varphi + \psi/2) \\ -j \sin(k_1 z \cos \varphi + \psi/2) \end{cases}, \quad (7.55)$$

где два различных значения второго множителя соответствуют двойному знаку в предыдущем равенстве.

Этот результат означает, что поле имеет характер распространяющейся *вдоль границы* волны (ось y) с постоянной распространения

$$\Gamma = k_1 \sin \varphi \quad (7.56)$$

и распределением амплитуд по нормали (ось z) типа стоячей волны с волновым числом

$$\beta_1 = k_1 \cos \varphi. \quad (7.57)$$

Такого рода волна встречается впервые в этой книге — это плоская *неоднородная* волна, *направляемая* границей раздела сред.

¹ На рисунке вектор Пойнтинга обозначен через \vec{S} .

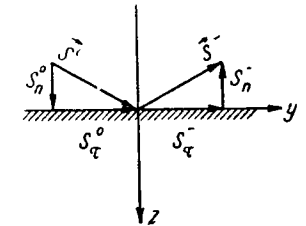


Рис. 167

Перечислим ее основные свойства:

а) обуславливающее эту волну полное отражение всегда происходит от границы *оптически менее плотной среды* ($n_2 < n_1$); это следует непосредственно из (7.51):

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{12}} < \sin \varphi < 1; \quad (7.58)$$

б) плоскости равных фаз ($y = \text{const}$) перпендикулярны к плоскостям равных амплитуд ($z = \text{const}$);

в) в отличие от однородной волны неоднородная имеет компоненты поля, *параллельные* направлению ее распространения (H -компонента при горизонтальной поляризации и E -компонента — при вертикальной);

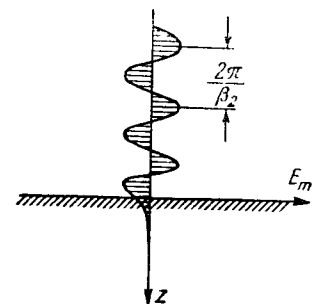


Рис. 168

г) фазовая скорость направляемой волны больше фазовой скорости волны, свободно распространяющейся в первой среде, но меньше этой же величины для второй среды. Действительно, ввиду вещественности угла падения φ из (7.56 и 7.51) вытекает неравенство

$$k_1 > \Gamma > k_2, \quad (7.59)$$

т. е.

$$v_1 < v < v_2; \quad (7.59a)$$

д) во второй среде *существует* поле, экспоненциально спадающее по нормали к границе и переносящее энергию, как и в первой среде, *лишь* вдоль границы. Чтобы убедиться в этом, внесем выражение (7.52) с единственным правильным знаком минус в формулы (7.33 и 7.44). Как видно, все компоненты поля зависят от координат по закону

$$f_2(y, z) = e^{-jk_2(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} = e^{-\beta_2 z} e^{-j\Gamma y}, \quad (7.60)$$

где

$$\beta_2 = |k_2 \sqrt{1 - n_{12}^2 \sin^2 \varphi}|. \quad (7.61)$$

Полученный результат выражает поле направляемой волны в менее плотной среде, куда, согласно (7.54), энергия в среднем не проникает в установившемся режиме. Существование этого поля надо рассматривать как результат процесса установления при падении волны на границу. В конечном счете, поле, проникшее через границу, не распространяется дальше, а как бы «прилипает» к ней: движется, образуя *поверхностную* волну — продолжение волнового поля более плотной среды, экспоненциально убывающее от границы раздела.

Рассматривая распределение амплитуды направляемой волны в произвольной плоскости постоянной фазы ($y = \text{const}$) в обеих средах, приходим на основании (7.55 и 7.60) к картине, схематически показанной на рис. 168.

Полное отражение от идеально проводящей границы. Если вторая среда обладает бесконечной проводимостью, и, следовательно, $W_2^0 = 0$ (см. 7.14), то как видно из (7.40 и 7.47),

$$\left. \begin{aligned} \rho_\Gamma = -1 \\ \tau_\Gamma = 0 \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} \rho_B = +1 \\ \tau_B = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.62)$$

при любых углах падения.

Во второй среде поле отсутствует, а в первой представляет собой направляемую границей волну (7.55)

$$f_1(y, z) = -2e^{-j\Gamma y} \begin{cases} j \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{cases} \quad (7.63)$$

($\varphi = \pi$), где величины Γ и β определяются формулами (7.56 и 7.57).

Распространение направляемых волн происходит в длинных линиях, волноводах и других устройствах, предназначенных для передачи электромагнитной энергии. Им посвящается следующая, 8-я, глава.

Прохождение волны в весьма плотную среду ($n_2 \gg n_1$). Если волна падает на границу среды, оптическая плотность которой очень велика, то, как это следует из (7.36), угол преломления всегда будет мал:

$$\sin \vartheta = \frac{n_1}{n_2} \sin \varphi.$$

При достаточной степени выполнения неравенства

$$n_2 \gg n_1$$

независимо от величины угла падения φ угол преломления как угодно близок к нулю:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta \rightarrow 0 \\ \text{при } \frac{n_2}{n_1} \rightarrow \infty \end{aligned} \right\}. \quad (7.64)$$

Иными словами, под каким бы углом ни падала волна на границу раздела сред, в весьма плотную среду она будет проходить практически в направлении *нормали* к границе.

Примеры и упражнения

1. Выразить пространственную зависимость плоской волны, распространяющейся в неограниченной среде а) в плоскости xOy ; б) под углом 45° к оси Ox ; в) под одинаковыми углами ко всем осям; г) под углами 75° к осям Ox и Oy .

2. Объяснить, как распространяется волна, характеризуемая пространственной зависимостью

$$e^{-jk(0,5x + 0,7y + 0,51z)}.$$

3. Построить график зависимости угла преломления от угла падения для волны, распространяющейся от среды 1 в среду 2 при следующих проницаемостях:

первая среда	вторая среда
а) $\mu_1 = \mu_0; \quad \epsilon_1 = \epsilon_0$	$\mu_2 = \mu_0; \quad \epsilon_2 = 10\epsilon_0$
б) $\mu_1 = 3\mu_0; \quad \epsilon_1 = \epsilon_0$	$\mu_2 = \mu_0; \quad \epsilon_2 = \epsilon_0$
в) $\mu_1 = \mu_0; \quad \epsilon_1 = 2\epsilon_0$	$\mu_2 = \mu_0; \quad \epsilon_2 = 3\epsilon_0$
г) $\mu_1 = 2\mu_0; \quad \epsilon_1 = 2\epsilon_0$	$\mu_2 = \mu_0; \quad \epsilon_2 = \epsilon_0$

4. Для этих же условий найти зависимость коэффициентов отражения и прохождения от угла падения (и изобразить ее графически) при горизонтальной и вертикальной поляризациях.

5. В каких случаях фаза волны при отражении а) не изменяется, б) изменяется на 180° , в) изменяется иным образом?

6. Волна произвольной поляризации падает на границу раздела немагнитных диэлектриков, проницаемости которых относятся, как 1:3. Каков угол падения, если отраженная волна оказывается поляризованной горизонтально?

7. Выписать компоненты электрического и магнитного векторов поля волны, претерпевшей полное отражение от границы раздела диэлектриков.

8. Найти связь угла ψ в формуле (7.55) с параметрами сред при вертикальной и горизонтальной поляризациях. Объяснить полученные формулы.

9. В каких пределах изменяется фазовая скорость волны, направляемой границей раздела диэлектриков, в зависимости от угла падения?

10. Показать, что фазовая скорость волны, направляемой идеально проводящей плоскостью, может изменяться в зависимости от угла падения в пределах от $1/\sqrt{\epsilon\mu}$ до ∞ .

11. Показать, что поле направляемой волны не изменится, если на определенном расстоянии от направляющей границы поместить параллельную ей идеально проводящую плоскость. Каково это расстояние?

12. Направляемая волна распространяется в диэлектрике ($\epsilon = 10\epsilon_0$), отделенном от вакуума плоской границей. На каком расстоянии от границы амплитуда поля в вакууме уменьшится в 1000 раз, если угол падения в диэлектрике составляет $\varphi = 45^\circ$, а частота равна $f = 10^9$ гц?

13. Вычислить угол преломления ϑ для случаев а) $k_2 = 10k_1$, б) $k_2 = 100k_1$, в) $k_2 = 1000k_1$.

14. Полагая $\vartheta = 0$, получить из (7.40) и (7.47) приближенный вид формул Френеля. Пользуясь ими, найти коэффициенты отражения и прохождения при

а) $\mu_1 = \mu_0, \quad \epsilon_1 = \epsilon_0, \quad \mu_2 = \mu_0, \quad \epsilon_2 = 100\epsilon_0; \quad \varphi = 45^\circ$, поляризация вертикальная.

б) $\mu_1 = \mu_0, \quad \epsilon_1 = \epsilon_0, \quad \mu_2 = 10\mu_0, \quad \epsilon_2 = 10\epsilon_0; \quad \varphi = 10^\circ$; поляризация горизонтальная.

Вычислить погрешности полученных результатов.

§ 51. Наклонное падение на границу поглощающей среды

Исследуем волну, прошедшую через плоскую границу из идеального диэлектрика в поглощающую среду. Ее поле, как это следует

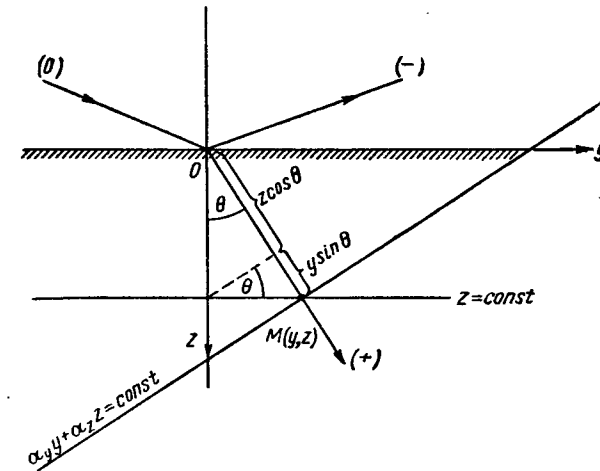


Рис. 169

из (7.33 и 7.44), зависит от координат

$$f_2(y, z) = e^{-jk_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)},$$

причем k_2 — величина комплексная

$$k_2 = k_2' - jk_2''.$$

Учитывая закон Снеллиуса (7.36)

$$\sin \vartheta = n_{12} \sin \varphi = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$$

и принимая во внимание, что по смыслу угол падения φ может принимать только вещественные значения, запишем

$$\left. \begin{aligned} jk_2 \sin \vartheta &= jk_1 \sin \varphi = j\alpha_y, \\ jk_2 \cos \vartheta &= j\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi} = j\alpha_z + \beta \end{aligned} \right\}, \quad (7.65)$$

где α_y , α_z и β — вещественные величины. Внося (7.65) в исходную формулу данного параграфа, получаем следующее выражение пространственной зависимости прошедшей волны:

$$f_2(y, z) = e^{-\beta z} e^{-j(\alpha_y y + \alpha_z z)}. \quad (7.66)$$

Отсюда видно, что независимо от угла падения прошедшая волна затухает строго в направлении нормали к границе (ось z), так что плоскости равных амплитуд

$$z = \text{const} \quad (7.67)$$

не совпадают с плоскостями равных фаз

$$\alpha_y y + \alpha_z z = \text{const}. \quad (7.68)$$

Комплексный угол θ , разумеется, не дает представления о фактическом преломлении волны. Обращаясь к рис. 169, мы видим, что уравнение плоскости постоянной фазы легко записывается через истинный угол преломления θ :

$$y \sin \theta + z \cos \theta = \text{const}. \quad (7.68a)$$

Сопоставляя (7.68) и (7.68a), находим:

$$\text{tg } \theta = \frac{\alpha_y}{\alpha_z} = \frac{k_1 \sin \varphi}{\text{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (7.69)$$

Рассмотрим два типичных случая.

а) Исчезающе малые потери ($k_2' \ll k_1''$).

При этом $\alpha_z = jk_2 \cos \theta \approx jk_2' \cos \theta$; $\alpha_y \approx jk_2' \sin \theta$ и, согласно (7.69 и 7.65),

$$\theta \approx \vartheta. \quad (7.70)$$

б) Оптическая плотность поглощающей среды очень велика ($|k_2| \gg |k_1|$).

Пренебрегая в (7.69) числителем в сравнении со знаменателем, имеем

$$\text{tg } \theta = 0; \quad \theta = 0. \quad (7.71)$$

Большое практическое значение имеет случай, когда вторая среда — проводник, для которого, согласно (6.86),

$$|k_2|^2 = \omega \mu \sigma,$$

и исходное требование (б) всегда выполняется ввиду большой удельной проводимости σ .

Результат (7.71) показывает, что при любых углах падения φ на границу весьма плотной поглощающей среды (как и в случае среды непоглощающей, § 50) преломленная волна распространяется практически в направлении нормали к границе. Плоскости равных амплитуд и фаз при этом совпадают.

1. Волна, длина которой равна 20 м, падает на водяную поверхность ($\epsilon' = 81\epsilon_0$, $\sigma = 10^{-3}$ сим/м) под углом $\varphi = 45^\circ$. Какова будет ошибка при вычислении коэффициентов отражения и прохождения, если истинный угол преломления принять равным нулю?

2. Волна падает под углом $\varphi = 5^\circ$ на поверхность алюминия. Найти истинный угол преломления при частотах $f = 1$ кГц, 1 МГц и 10^3 МГц.

2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ЭФФЕКТ

§ 52. Приближенные граничные условия Леонтовича. Проникновение поля в проводник

Полученный в предыдущем параграфе результат (7.71) приводит к мысли, что не только плоская волна, но и произвольное электромагнитное поле у границы достаточно плотной

$$|k_2| \gg |k_1| \quad (7.72)$$

среды возбуждает волны, уходящие в нее по нормали к поверхности раздела, так что формула (5.68) принимает вид

$$\dot{\mathbf{E}} = W_2^0 [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}'_0]. \quad (7.73)$$

где \mathbf{n}'_0 — внутренняя нормаль к поверхности плотной среды, а W_2^0 — ее волновое сопротивление.

Наиболее важен случай, когда рассматриваемая плотная среда — проводник, тогда ввиду (1.37) можно положить

$$\epsilon = -j\sigma/\omega, \quad (7.74)$$

и, таким образом,

$$W_2^0 = \sqrt{j \frac{\omega \mu}{\sigma}} = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}}. \quad (7.75)$$

В силу непрерывности векторов поля соотношение (7.73) справедливо и на граничной поверхности (рис. 170): векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} уходящей в проводник волны равны тангенциальным компонентам соответствующих напряженностей поля в примыкающей к нему среде. Итак, на границе проводника существует следующее соотношение:

$$\dot{\mathbf{E}}_\tau = W_2^0 [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}'_0]. \quad (7.76)$$

Введя местную систему координат с осью z , направленной по внутренней нормали ($\mathbf{z}_0 = \mathbf{n}'_0$), перепишем (7.76) в скалярной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= W_2^0 \dot{H}_y \\ \dot{E}_y &= -W_2^0 \dot{H}_x \end{aligned} \right\} \quad (7.76a)$$

Соотношения (7.76), (7.76а) известны под названием *приближенных граничных условий Леонтовича*¹. Они указывают, в частности, на тот факт, что электрическое поле на поверхности проводника (в отличие от идеального проводника, когда $\sigma \rightarrow \infty$) имеет тангенциальную компоненту. Эта компонента очень мала и может не учитываться до тех пор, пока не ставится задача вычислить потери энергии в проводнике; ясно, что в приближении $E_\tau = 0$ не принимается во внимание уходящий в проводник поток энергии.

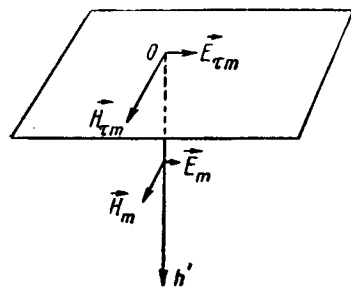


Рис. 170

Применение граничных условий Леонтовича к различным задачам непосредственно связано со степенью проникновения поля через границу. Из § 45 известно, что поглощение энергии средой вызывает экспоненциальное затухание волн. Согласно (6.81), на расстоянии Δ^0 , определяемом из условия

$$k''\Delta^0 = 1, \quad (7.77)$$

амплитуда волны уменьшается в $e = 2,718 \dots$ раз (затухание составляет 1 *неп*). Величина Δ^0 называется *глубиной проникновения* поля. Волна, входящая в проводник, приобретет затухание в 1 *неп* на глубине (6.86)

$$\Delta^0 = \frac{1}{k''} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}. \quad (7.78)$$

Для наиболее употребительных металлов приведем следующие данные:

Таблица 3

Металл	Глубина проникновения Δ^0 , мм (частота f , гц)
Серебро	$64,2 \cdot f^{-1/2}$
Медь	$66,0 \cdot f^{-1/2}$
Алюминий	$82,6 \cdot f^{-1/2}$
Латунь	$127,0 \cdot f^{-1/2}$

Таким образом, например, при частоте $f = 100$ кГц глубина проникновения для меди составляет $\Delta^0 = 0,2$ мм, а при $f = 10^4$ Мгц уже всего $6,6 \cdot 10^{-4}$ мм. На расстоянии нескольких Δ^0 поле становится весьма слабым. Так, на глубине $10\Delta^0$ амплитуда поля окажется в $e^{10} = 22\,026$ раз меньше, чем на границе. Оче-

¹ Употребляется также название «граничные условия Шукина — Рытова — Леонтовича».

видно, что существованием поля на большей глубине вполне можно пренебречь. Электромагнитная энергия в проводнике сосредоточена вблизи его поверхности; глубокие слои оказывают исчезающе малое влияние на электромагнитный процесс. Это явление называется *поверхностным эффектом*, или *скин-эффектом*.

Далее, мы должны заключить, что в сущности безразлично, ограничено ли электромагнитное поле в диэлектрике бесконечной металлической средой (рис. 171, а) или металлическим слоем толщиной в несколько Δ^0 (рис. 171, б): волна, затухающая в металле, «не достигнет» другой его границы. В технике толщина металла часто намного превышает Δ^0 . В таких случаях для нахождения поля в примыкающем диэлектрике явно нет необходимости искать решения уравнений Максвелла в обеих средах и связывать их обычными граничными условиями при разделе. Достаточно получить решение для поля в диэлектрике, удовлетворяющее на граничной металлической поверхности условиям Леонтовича.

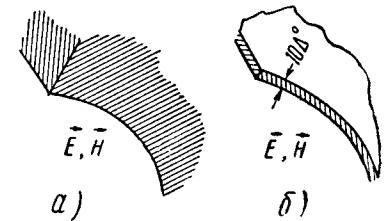


Рис. 171

При этом, однако, существенно следующее обстоятельство. К граничным условиям Леонтовича нас привел анализ преломления на *плоской* границе (§ 51). В случае произвольной кривизны поверхности эти условия применимы, если радиус ее кривизны значительно превышает величину Δ^0 ;

$$R \gg \Delta^0. \quad (7.79)$$

Разумеется, Δ^0 сохраняет смысл «глубины проникновения» также при выполнении этого условия.

Примеры и упражнения

1. Вычислить глубину проникновения для сред со следующими свойствами:

- а) $\mu = \mu_0, \quad \epsilon' = 100\epsilon_0, \quad \sigma = 2 \cdot 10^{-2}$ сим/м;
- б) $\mu = \mu_0, \quad \epsilon' = \epsilon_0, \quad \sigma = 2 \cdot 10^{-15}$ сим/м;
- в) $\mu = 100\mu_0, \quad \epsilon' = \epsilon_0, \quad \sigma = 1$ сим/м;
- г) $\mu = \mu_0, \quad \epsilon' = \epsilon_0, \quad \sigma = 10^7$ сим/м.

Частота равна $f = 10$ Мгц.

2. Полагая, что каждая из сред п. 1 отделена плоской границей от пустоты, указать, в каких случаях применимы граничные условия Леонтовича.

3. Указать кривизну границы, при которой заведомо нельзя пользоваться граничными условиями Леонтовича для сред, выбранных в п. 2.

§ 53. Потери энергии. Поверхностный ток и сопротивление проводника

Рассмотрим практически важную задачу о поглощении энергии проводником при выполнении граничных условий Леонтовича, т. е. в том случае, когда проводящее (обычно металлическое) тело имеет достаточные размеры и допустимую кривизну поверхности. Магнитное поле на поверхности будем считать известным

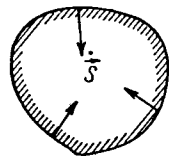


Рис. 172

$$\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}^0, \quad (7.80)$$

тогда (§ 35) на основании (7.75), (7.76) можно найти направленный внутрь проводника комплексный вектор Пойнтинга:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] = \frac{W_2^0}{2} [[\dot{\mathbf{H}}^0, \mathbf{n}'_0], \dot{\mathbf{H}}^{0*}] = \mathbf{n}'_0 \frac{W_2^0}{2} H_m^{02} \quad (7.81)$$

и, далее (7.78),

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{n}'_0 H_m^{02} \frac{1+j}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\sigma}} = \mathbf{n}'_0 H_m^{02} \frac{1+j}{2\sigma\Delta^0}. \quad (7.82)$$

Полная комплексная мощность находится интегрированием этой величины по поверхности проводящего тела (рис. 172):

$$\dot{\bar{P}} = P^a + jP^r = \frac{1+j}{2\sigma\Delta^0} \int_S H_m^{02} dS, \quad (7.83)$$

а мощность потерь — как вещественная часть $\dot{\bar{P}}$:

$$\bar{P}^n = P^a = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int_S H_m^{02} dS. \quad (7.84)$$

В пределе при $\sigma \rightarrow \infty$ (идеальный проводник) потери исчезают. Обычные металлы, как это уже отмечалось, близки по свойствам к идеальному проводнику, так что потери энергии в них часто можно не учитывать. Когда же это оказывается необходимым, исходное магнитное поле у поверхности \mathbf{H}^0 принимают таким, каким бы оно было при бесконечной проводимости:

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}^0 |_{\sigma \rightarrow \infty}. \quad (7.85)$$

Этот прием значительно упрощает решение задачи и вместе с тем обеспечивает вполне достаточную точность расчета.

До сих пор оставался в стороне вопрос о распределении тока при поверхностном эффекте. Между тем, ток убывает в глубь проводника по тому же закону, что и поле, ибо плотность тока связана с вектором \mathbf{E} соотношением

$$\dot{\delta} = \sigma \dot{\mathbf{E}}.$$

Величину Δ^0 поэтому называют также «глубиной проникновения тока».

Полный ток $I(1)$, протекающий через единичный «брусоч», мысленно выделенный в проводящем полупространстве (рис. 173), определен равенством

$$x_0 I(1) = \int_0^\infty \dot{\delta} dn'. \quad (7.86)$$

В силу поверхностного эффекта этот ток сосредоточен в относительно тонком наружном слое проводника. Это дает основание рассматривать его условно как ток «поверхностный» (§ 9), т. е. заключенный якобы в геометрической поверхности и не занимающий объема. Интеграл (7.86) выражает при этом плотность поверхностного тока:

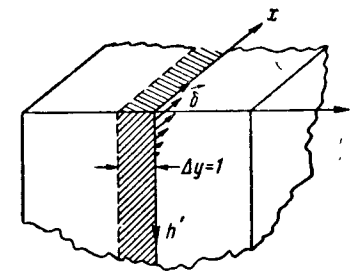


Рис. 173

$$\dot{\eta} = \int_0^\infty \dot{\delta} dn'. \quad (7.87)$$

Заменяя в формулировке закона Ома \mathbf{E} через \mathbf{H} с помощью (7.73)

$$\dot{\delta} = \sigma W_2^0 [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}'_0] \quad (7.88)$$

и внося полученный результат в (7.87) имеем:

$$\dot{\eta} = \sigma W_2^0 \int_0^\infty [\dot{\mathbf{H}}, \mathbf{n}'_0] dn' = \sigma W_2^0 \left[\int_0^\infty \dot{\mathbf{H}} dn', \mathbf{n}'_0 \right]. \quad (7.89)$$

Комплекс $\dot{\mathbf{H}}$ изменяется от границы по закону

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}^0 e^{-ikn'},$$

где (6.86, 7.78)

$$k = (1-j) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1-j}{\Delta^0}, \quad (7.90)$$

поэтому

$$\int_0^{\infty} \dot{H} dn' = \dot{H}^0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1+j}{\Delta^0} n'} dn' = \frac{\Delta^0}{1+j} \dot{H}^0.$$

Внося это в (7.89) и принимая во внимание (7.75), получаем следующее выражение плотности поверхностного тока

$$\dot{\eta} = [\dot{H}^0, \mathbf{n}'_0] = [\mathbf{n}_0, \mathbf{H}^0], \quad (7.91)$$

где $\mathbf{n}'_0 = -\mathbf{n}_0$ — внешняя нормаль к проводнику.

Интересно, что для случая идеального проводника, когда ток в строгом смысле слова является поверхностным, ибо внутри проводника он отсутствует вместе с полем, формула (7.91) получается непосредственно из граничного условия (1.55б), в котором следует положить $\mathbf{H}_2 = 0$ (см. также упражнения § 9, (1.57)).

Величина, определяемая соотношением

$$Z^S = \frac{E_{\tau}}{\dot{\eta}}, \quad (7.92)$$

называется *поверхностным сопротивлением* проводника. Привлекая (7.76, 7.91 и 7.80), убеждаемся, что

$$Z^S = W_2^0. \quad (7.93)$$

С помощью (7.75 и 7.78) легко получить также важную формулу

$$Z^S = \frac{1+j}{\sigma \Delta^0}, \quad (7.94)$$

поясняющую смысл выражения «глубина проникновения тока». Действительно, активная часть поверхностного сопротивления

$$R^S = \frac{1}{\sigma \Delta^0} \quad (7.95)$$

такова, как будто бы ток, не уменьшаясь по амплитуде, проникает в проводник на глубину Δ^0 (рис. 174).

Вычисляя комплексную мощность в проводнике как

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \int_S \eta_m^2 Z^S dS = \frac{1+j}{2\sigma \Delta^0} \int_S \eta_m^2 dS \quad (7.96)$$

и учитывая, что, согласно (7.91),

$$\eta_m^2 = H_m^{02},$$

приходим к полученному ранее выражению (7.83).

Опираясь на имеющиеся данные, можно, например, найти сопротивление единицы длины цилиндрического проводника произвольного сечения (рис. 175) при условии, что его наименьший

диаметр и радиус кривизны значительно превышают глубину проникновения. Ток такого проводника определяется как

$$I = \eta L,$$

где L — длина контура его поперечного сечения, а $\dot{\eta}$ — напряжение на единице длины проводника есть

$$\dot{U}' = \dot{E}.$$

Поэтому искомое сопротивление выражается формулой

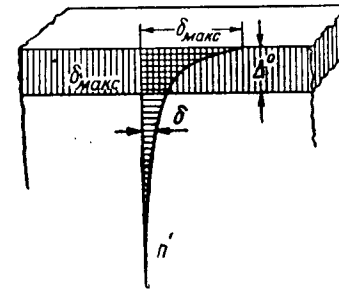


Рис. 174

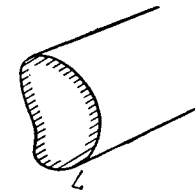


Рис. 175

$$Z' = \frac{\dot{U}'}{I} = \frac{Z^S}{L}. \quad (7.97)$$

В частности, для цилиндрического проводника радиуса R эта формула принимает вид:

$$Z' = \frac{Z^S}{2\pi R} = \frac{1+j}{2\pi R \sigma \Delta^0}. \quad (7.98)$$

Применяя ее, нельзя забывать принятого в выводе ограничения ($R \gg \Delta^0$). В следующем параграфе цилиндрический проводник будет исследован подробнее.

Примеры и упражнения

1. На плоский медный лист достаточно больших размеров нормально падает плоская однородная волна длиной $\lambda = 10$ см. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет $E_m = 1000$ в/м. Найти мощность, теряемую на нагрев 1 см² поверхности листа в средней его части.

Условия задачи, как видно, допускают пренебрежение эффектом на краях листа (дифракцией). Чтобы пользоваться для расчета формулой (7.84), необходимо знать амплитуду магнитного поля на поверхности листа. При определении ее будем считать лист идеально

проводящим (7.85). При этом, как известно из § 48, в направлении нормали к листу устанавливается стоячая волна с удвоенной амплитудой магнитного поля у его поверхности. Таким образом,

$$H_m^0 = \frac{2E_m}{W_0} = \frac{1}{6\pi} \cdot 10^2 \text{ а/м.}$$

Применяя (7.84) к площадке в 1 см^2 , получаем:

$$\bar{P}^n = \frac{10^{-4}}{2\sigma\Delta^0} \cdot \frac{10^4}{36\pi^2} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ вт.}$$

Задание. Проверить этот результат, вычислив мощность прошедшей волны на основе (7.9).

2. Выполнить расчет п. 1 при следующих видоизменениях: а) волна падает на лист под углом 45° , б) лист свинцовый, в) длина волны $\lambda = 1 \text{ мм}$.

3. Построить график зависимости активного и реактивного сопротивлений медного провода от величины R/λ в области значений этого аргумента, допускающей применение формулы (7.98). Какой характер имеет реактивное сопротивление?

4. Найти выражение сопротивления единицы длины трубы, полагая выполненными граничные условия Леонтовича.

§ 54. Внутреннее поле цилиндрического проводника

Цилиндрический проводник представляет интерес для техники и в тех случаях, когда условие (7.79) заведомо не выполняется и, следовательно, результаты предыдущего параграфа оказываются неприменимыми. Проведем исследование, свободное от прежних ограничений.

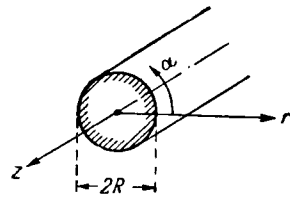


Рис. 176

Рассмотрим бесконечный цилиндрический проводник (рис. 176), по которому течет неизменный по амплитуде ток I . На поверхности проводника существует, таким образом, азимутальное магнитное поле, также имеющее везде одинаковую амплитуду. Электрическое поле при этом продольно: $\mathbf{E} = z_0 E$.

В этих условиях будем искать решение волнового уравнения (5.54), которое прямо можно записать относительно абсолютного значения комплексного вектора $\dot{\mathbf{E}}$:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0.$$

В цилиндрических координатах с учетом очевидного требования

$$\partial/\partial z = 0 \text{ и } \partial/\partial \alpha = 0 \quad (7.99)$$

оно принимает вид:

$$\frac{d^2 \dot{\mathbf{E}}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{\mathbf{E}}}{dr} + k^2 \dot{\mathbf{E}} = 0. \quad (7.100)$$

Это не что иное, как уравнение Бесселя нулевого порядка. Необходимые сведения об уравнении Бесселя и его решениях даны в Приложении 3. Как следует из сказанного там, решение уравнения (7.100) в данном случае выражается формулой (ПЗ.7)*; т. е.

$$\dot{\mathbf{E}} = A J_0(kr), \quad (7.101)$$

где $J_0(kr)$ — цилиндрическая функция нулевого порядка первого рода, а A — подлежащий определению коэффициент.

Обозначив электрическое поле на поверхности проводника индексом «0»

$$\dot{\mathbf{E}} = E^0 \text{ при } r = R, \quad (7.102)$$

определяем A

$$A = E^0 / J_0(kR) \quad (7.102a)$$

и записываем решение (7.101) в виде

$$\dot{\mathbf{E}} = E^0 \frac{J_0(kr)}{J_0(kR)}. \quad (7.103)$$

Величина k в соответствии с (6.86, 7.78) равна

$$k = (1 - j) \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \frac{1 - j}{\Delta^0}.$$

В силу закона Ома

$$\dot{\delta} = \sigma \dot{\mathbf{E}}$$

результат (7.103) характеризует распределение тока по сечению проводника; на рис. 177 показана зависимость амплитуды δ_m от радиальной координаты при различных диаметрах проводника $2R$. Как видно, поверхностный эффект выражен слабо, когда R и Δ^0 сравнимы. Не следует забывать, что величина Δ^0 фигурирует в рассматриваемой задаче не как глубина проникновения, в прежнем смысле, а лишь в качестве условного параметра.

Полный ток цилиндра находится интегрированием $\dot{\delta}$ по его поперечному сечению:

$$\dot{I} = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^R \dot{\mathbf{E}} r \, da \, dr = \frac{2\pi E^0 \sigma}{J_0(kR)} \int_0^R J_0(kr) r \, dr. \quad (7.104)$$

* См. Приложение 3, формула 7.

Согласно (ПЗ.25),

$$\int_0^R J_0(kr) r dr = \frac{R}{k} J_1(kR),$$

так как

$$r J_1(kr)|_{r=0} = 0.$$

Внося это в (7.104), получаем:

$$\dot{i} = \frac{2\pi R E^0 \sigma J_1(kR)}{k J_0(kR)}. \quad (7.105)$$

Отсюда по формуле

$$Z' = \frac{E^0}{\dot{i}}$$

сразу же находится сопротивление единицы длины проводника:

$$Z' = \frac{k}{2\pi R \sigma} \frac{J_0(kR)}{J_1(kR)}. \quad (7.106)$$

Можно проверить, что при выполнении условия (7.79) полученная формула переходит в (7.98). Действительно, это условие влечет за собой неравенство

$$|kR| \equiv \frac{R}{\Delta^0} |1-j| \gg 1,$$

позволяющее заменить цилиндрические функции в (7.106) их асимптотическим представлением (ПЗ.16)

$$J_0(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{j(kR - \pi/4)} \text{ и } J_1(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{j(kR - 3\pi/4)}$$

и, следовательно,

$$Z' = \frac{1+j}{2\pi R \sigma \Delta^0} = \frac{Z^S}{2\pi R}, \quad (7.107)$$

что совпадает с (7.98).

Если же, наоборот, поверхностный эффект проявляется слабо

$$R/\Delta^0 \ll 1 \text{ и } |kR| \ll 1,$$

то, используя лишь начальные члены разложений (ПЗ.10,11), пишем:

$$\frac{J_0(kR)}{J_1(kR)} = \frac{2}{kR} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{kR}{2} \right)^2 \dots \right],$$

так что

$$Z' = \frac{1}{\pi R^2 \sigma} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2 (1-j)^2}{4\Delta^{02}} \dots \right]. \quad (7.108)$$

И точная формула (7.106), в которой $J_0(kR)/J_1(kR)$ — величина комплексная, и ее предельные формы (7.107 и 7.108) приводят к заключению, что реактивное сопротивление проводника имеет индуктивный характер.

На рис. 178 даны кривые, характеризующие изменение полного сопротивления цилиндрического проводника (активная и реактивная части обозначены на рис. символами R и X соответственно) и его эквивалентной «внутренней» индуктивности (L_i на рис.) в зависимости от отношения радиуса проводника к величине Δ^0 (на рис. D означает диаметр). Все величины отнесены к их предельным значениям при $\omega \rightarrow 0$, т. е. при постоянном токе. Предельные значения отмечены индексом «0». Что касается внутренней индуктивности при постоянном токе (L_{i0} на рис.), то она была определена в гл. 4. В соответствии с (4.62) она равна

$$L_{i0} = \frac{\mu}{8\pi}.$$

С ростом частоты в результате вытеснения поля внутренняя индуктивность уменьшается.

В заключение сделаем следующее важное замечание. Поверхностный эффект — волновое явление, к пониманию которого мы пришли, рассматривая преломление электромагнитных волн на границе разнородных сред. Тем не менее, в силу весьма значительного различия оптических плотностей металла и окружающей его среды типичны случаи, когда поле вблизи металлического тела (и на его поверхности) квазистационарно. В задаче данного параграфа условие квазистационарности фигурировало в исходных условиях (постоянство тока на поверхности проводника).

Внутреннее поле при поверхностном эффекте, как легко убедиться, не может быть квазистационарным. Действительно, длина волны в проводнике есть

$$\lambda_2 = 2\pi/k_2',$$

в то время как глубина проникновения (7.77) равна

$$\Delta^0 = 1/k_2''.$$

Согласно (6.86),

$$k_2' = k_2'',$$

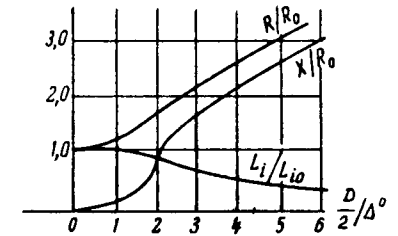


Рис. 178

так что

$$\lambda_2 = 2\pi\Delta^0, \quad (7.109)$$

т. е. длина волны в проводнике лишь в 2π раз превышает глубину проникновения.

Примеры и упражнения

1. Написать выражения внутренней индуктивности цилиндрического проводника для предельных случаев (7.107 и 7.108).

2. Определить активное сопротивление алюминиевого провода диаметром $2R = 0,05$ см при частотах 100, 10 кГц; 1 и 100 МГц.

3. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 55. Предельные случаи дифракции

Применение геометрической оптики. Рассматривая в § 49 падение плоской однородной волны на границу раздела сред, мы пришли к законам отражения и преломления, которые, как известно, формулируются в геометрической оптике для *лучей*. Это отнюдь не случайное совпадение: направление движения плоской волны (7.26)

$$e^{-jkr} = e^{-jh(\xi x + \eta y + \zeta z)} \quad (7.110)$$

определяется как нормаль к ее фронту — плоскости равных фаз

$$\xi x + \eta y + \zeta z = \text{const}, \quad (7.111)$$

т. е. как некоторая прямая, или луч. Геометрическая оптика соответствует тому случаю, когда, отвлекаясь от волнового характера поля, рассматриваются лишь направления лучей. Если волна не является плоской, но достаточно близка к ней в любой малой области (сравнимой с ее длиной), то основные представления геометрической оптики сохраняют смысл. Описывая произвольную волну с помощью выражения

$$e^{-j\psi(x, y, z)}, \quad (7.112)$$

мы видим, что условию постоянства фазы удовлетворяют поверхности

$$\psi(x, y, z) = \text{const}. \quad (7.113)$$

Лучи, характеризующие направление распространения волны, представляют собой теперь кривые линии, ортогональные этим поверхностям, т. е. везде пересекающие их под прямым углом. Величина ψ называется *эйконалом*. Разлагая ψ в ряд Тэйлора

в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\psi(x, y, z) = \psi(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial\psi}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial\psi}{\partial z}(z - z_0) + \dots$$

и обозначая

$$r = x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0),$$

имеем

$$\psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z_0) \approx (\text{grad } \psi) r. \quad (7.114)$$

Таким образом, волна (7.112) может быть принята за плоскую волну

$$e^{-j(kr + \psi_0)}$$

с волновым вектором

$$k = \text{grad } \psi \quad (7.115)$$

в достаточно малой области, допускающей использованное выше ограничение первыми членами разложения.

Как уже отмечалось, геометрическая оптика применима, если эта область в то же время *не мала* в сравнении с длиной волны. Весьма существенно, что в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ законы геометрической оптики становятся справедливыми для *любой* волновой задачи.

Дифракцию мы определили ранее (стр. 218) как процесс, вызванный падением волны на тело ограниченных размеров. Из сказанного вытекает, что всякая дифракционная задача в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ решается методами геометрической оптики. Однако надо иметь в виду, что характерные черты дифракции, заставившие выделить это явление, выступают как *отклонение* от законов геометрической оптики и, следовательно, при таком предельном переходе теряются. Применение правил геометрической оптики в качестве *приближения* при решении дифракционной задачи закономерно в тех случаях, когда размеры объекта дифракции значительно превышают длину волны.

Рассмотрим в качестве примера¹ падение плоской волны на идеально проводящий цилиндр (рис. 179). Волна, распространяющаяся перпендикулярно его оси, заменяется параллельным пучком лучей, отражающихся от поверхности идеального проводника по закону Снеллиуса (угол отражения равен углу падения). Заштри-

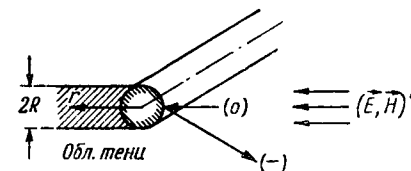


Рис. 179

¹ Этот пример рассмотрен в книге Потехина А. И. «Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн».

хованная часть рисунка соответствует так называемой области тени, куда падающие лучи не попадают. Совокупность отраженных лучей характеризует поле, *рассеянное* цилиндром. В первую очередь интерес представляет распределение интенсивности этого поля.

Сосредоточим внимание на двух лучах, идущих в падающей волне на расстоянии Δx (рис. 180). Один из них отражается в точке P_1 , которая видна из начала координат O под углом φ , и направлен, следовательно, с этого момента под углом 2φ . Второй луч отражается в точке P_2 , расположенной на расстоянии $P_1P_2 = R\Delta\varphi$

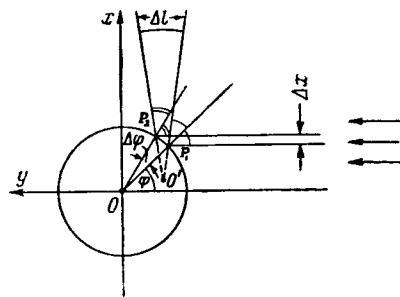


Рис. 180

от P_1 , и идет далее в направлении $2(\varphi + \Delta\varphi)$. Проследив ход этих лучей, нетрудно заметить, что ограниченный ими пучок лучей стал после отражения расходящимся. Так как связанный с ним поток энергии при этом не изменился, плотность потока Π уменьшилась обратно пропорционально ширине пучка. Так, например, в сечениях, отмеченных на рис. 180 Δx и Δl , абсолютные значения вектора

Пойнтинга в падающей (0) и отраженной (—) волнах относятся, как

$$\frac{\Pi^-}{\Pi^0} = \frac{\Delta x}{\Delta l} \quad (7.116)$$

Сделав замену

$$\Delta x = R \cos \varphi \Delta\varphi \text{ и } \Delta l = 2r_1 \Delta\varphi,$$

находим, что

$$\frac{\Pi^-}{\Pi^0} = \frac{R}{2r_1} \cos \varphi. \quad (7.117)$$

Наблюдая поле лишь на достаточно больших расстояниях $r_1 \gg R$ и заменив φ на $\alpha/2$, мы можем считать $r \approx r_1$ и α полярными координатами точки M (рис. 179), тогда

$$\frac{\Pi^-}{\Pi^0} = \frac{R}{2r} \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (7.118)$$

Построенная по этой формуле диаграмма интенсивности поля, рассеянного цилиндром, показана на рис. 181. Она имеет максимум в направлении, противоположном движению падающей волны. Угловая ширина «лепестка» тени τ находится из простых геометрических соображений. Как видно из (7.25)

$$\tau = 2R/r, \quad (7.119)$$

Эта величина неограниченно уменьшается по мере удаления точки наблюдения от цилиндра.

В силу приближенности геометрического метода полученные результаты, в частности, не дают верного представления о характере поля на границе тени. В действительности эта граница вовсе не является резкой, как на рис. 179 и 181: в ее области наблюдается сложное колеблющееся распределение интенсивности — «дифракционная картина». Для весьма коротких волн указанная область пренебрежимо мала, однако с удлинением волны она быстро увеличивается, видоизменяя в конечном счете поле во всем пространстве. Тогда диаграмма интенсивности (рис. 181) становится грубо неверной.

Квазистационарный предел. Обратимся к противоположному предельному случаю, когда длина волны значительно превышает размеры объекта дифракции. Уточняя это условие, потребуем также, чтобы оно относилось и к длине волны внутри вызвавшего дифракцию тела. Тогда можно пренебречь фазовым запаздыванием в различных точках рассматриваемой области и задача становится квазистационарной (см. Введение, §§ 39—43). Волновое уравнение вырождается при этом в уравнение Лапласа:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{E} + k^2 \dot{E} = 0 \rightarrow \nabla^2 \dot{E} = 0 \\ \text{и} \\ \nabla^2 \dot{H} + k^2 \dot{H} = 0 \rightarrow \nabla^2 \dot{H} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.120)$$

как что нахождение электрического и магнитного полей сводится к решению двух *отдельных* задач — электростатической и магнитостатической.

Возьмем в качестве примера падение плоской волны на шар с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ ; диаметр шара $2R$ значительно меньше длины волны в обеих средах:

$$R \ll \lambda, \quad R \ll \lambda \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 / \epsilon \mu}. \quad (7.121)$$

Электростатическая и магнитостатическая задачи для шара в параллельном поле решены в §§ 27, 28. Остается только воспользоваться готовыми результатами. В данном случае в качестве начального поля (E_1 и H_1 в §§ 27, 28) фигурирует поле падающей волны (рис. 182):

$$\dot{E}^0 = x_0 \dot{E}^0, \quad \dot{H}^0 = y_0 \dot{H}^0. \quad (7.122)$$

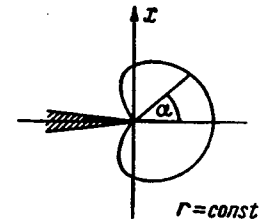


Рис. 181

Вне шара поле представляет собой суперпозицию начального (7.122) и «рассеянного» полей $\dot{\mathbf{E}}^-, \dot{\mathbf{H}}^-$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^e &= \dot{\mathbf{E}}^0 + \dot{\mathbf{E}}^-, \\ \dot{\mathbf{H}}^e &= \dot{\mathbf{H}}^0 + \dot{\mathbf{H}}^- \end{aligned} \right\} r \gg R, \quad (7.123)$$

а внутри шара появляется «преломленное» поле $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^i &= \dot{\mathbf{E}}^+, \\ \dot{\mathbf{H}}^i &= \dot{\mathbf{H}}^+ \end{aligned} \right\} r \leq R. \quad (7.124)$$

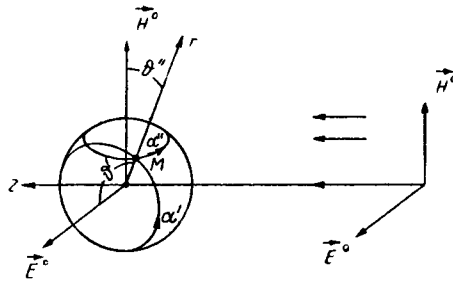


Рис. 182

Сопоставляя (7.123 и 7.124) с формулами (3.142, 3.143) и (4.8, 4.9) и сохраняя для простоты две сферических системы координат с общим началом O (рис. 7.28), находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^- &= \dot{\mathbf{E}}^0 \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \frac{R^3}{r^3} (2\gamma_0 \cos \vartheta' - \vartheta_0' \sin \vartheta'), \\ \dot{\mathbf{H}}^- &= \dot{\mathbf{H}}^0 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{R^3}{r^3} (2\gamma_0 \cos \vartheta'' - \vartheta_0'' \sin \vartheta'') \end{aligned} \right\} r \gg R. \quad (7.125)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}^+ &= \dot{\mathbf{E}}^0 \frac{3\epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}, \\ \dot{\mathbf{H}}^+ &= \dot{\mathbf{H}}^0 \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \end{aligned} \right\} r \leq R. \quad (7.126)$$

Напомним, что формулы (7.125) и (7.126) дают приближенное решение поставленной дифракционной задачи только при условии (7.121), т. е. когда диаметр сферы весьма мал в сравнении с длиной волны в обеих средах. Понятно также, что действие формул (7.126), выражающих поле рассеяния, ограничивается, в свою очередь, квазистационарной областью ($r \ll \lambda$). Пользуясь терминологией, введенной в § 42, можно сказать, что определено лишь поле в *ближней зоне* рассеяния. Эффект излучения в квазистационарном пределе не учитывается.

Примеры и упражнения

1. Дан эйконал

$$\psi = k \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Каков вид волнового фронта? Изобразить лучи.

2. Рассмотреть падение плоской волны на непрозрачную перегородку с отверстием (рис. 183), наименьший диаметр которого значительно превышает длину волны.

3. Плоская волна падает на бесконечный диэлектрический цилиндр в направлении, перпендикулярном к его оси. Диаметр цилиндра равен $2R = 1$ см, длина волны $\lambda = 2$ м, а диэлектрическая проницаемость $\epsilon = (4 - j0,05) \epsilon_0$. Вычислить мощность, поглощаемую на участке цилиндра длиной в 1 м, при двух поляризациях волны: а) вектор \mathbf{E} перпендикулярен оси цилиндра и б) вектор \mathbf{E} параллелен оси. Амплитуда падающей волны равна $E_m^0 = 100$ в/м.

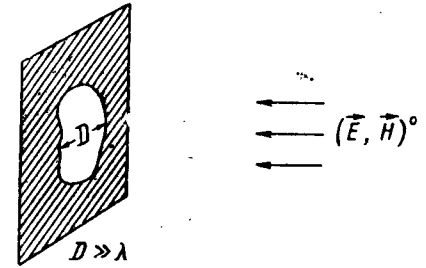


Рис. 183

Так как диаметр цилиндра значительно меньше длины волны в воздухе и диэлектрике цилиндра, внутреннее электрическое поле находится из решения статической задачи. В случае (а), согласно (3.134),

$$\dot{\mathbf{E}}^+ = \dot{\mathbf{E}}^0 \frac{2\epsilon^0}{\epsilon' + \epsilon_0}. \quad (7.127)$$

Когда же электрическое поле параллельно оси (б), с той же точностью

$$\dot{\mathbf{E}}^+ = \dot{\mathbf{E}}^0. \quad (7.128)$$

В соответствии с (5.35) запишем:

$$\bar{P}^n = \frac{\omega \epsilon''}{2} \int_V E_m^{*2} dV = \pi R^2 \omega \epsilon'' E_m^{*2}. \quad (7.129)$$

Отсюда

а) при первой поляризации:

$$\bar{P}^n = \pi R^2 \omega \epsilon'' \frac{4E_m^{02}}{(\epsilon'/\epsilon_0 + 1)^2} \approx 5,2 \cdot 10^{-5} \text{ вт};$$

б) при второй поляризации:

$$\bar{P}^n = \pi R^2 \omega \epsilon'' E_m^{02} \approx 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ вт}.$$

§ 56. Дифракция плоской волны на цилиндре

Излагаемый в этом параграфе материал дает пример строгого решения дифракционной задачи. Принципиальная постановка такой задачи проста. По существу здесь используется схема, известная из § 49. На тело A (рис. 154) падает плоская волна $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$. Внутри тела появляется поле $\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+$ и вне его поле $\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-$. По аналогии с задачей § 49 первое можно назвать «преломленным», а второе — «отраженным», а также «рассеянным». Все поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла (волновому уравнению), а на поверхности S тела A — граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} E_{\tau}^+ + E_{\tau}^- &= E_{\tau}^+ \\ H_{\tau}^+ + H_{\tau}^- &= H_{\tau}^+ \end{aligned} \right\} \text{ на } S \left\{ \begin{aligned} D_n^+ + D_n^- &= D_n^+ \\ B_n^+ + B_n^- &= B_n^+ \end{aligned} \right. \quad (7.130)$$

Кроме того (§ 36), при введении слабого поглощения во внешней среде рассеянное поле должно убывать при удалении от объекта дифракции быстрее, чем $1/r$.

Несмотря на несложность постановки задачи, нахождение ее решения возможно лишь в сравнительно редких случаях; при этом оно требует громоздкой математической процедуры. Причина здесь кроется в том, что для удовлетворения граничным условиям все поля должны быть выражены в системе координат, геометрически родственной рассматриваемому телу A . Рассматриваемая ниже задача дифракции на круговом цилиндре наиболее проста. В то же

время она хорошо иллюстрирует общие особенности задач этого типа и достаточно интересна с практической точки зрения.

Пусть на бесконечный цилиндр (рис. 184) падает в направлении перпендикулярно к его оси плоская волна

$$\dot{\mathbf{E}}^0 = z_0 E_m^0 e^{j(\omega t - k_0 x)}, \quad \dot{\mathbf{H}}^0 = -y_0 H_m^0 e^{j(\omega t - k_0 x)}, \quad (7.131)$$

электрический вектор которой параллелен оси. Характеризуя среды, запишем:

ϵ, μ и k для цилиндра ($r < R$);

$$\epsilon_0, \mu_0 \text{ и } k_0 \text{ для внешнего пространства } (r > R). \quad (7.132)$$

При переходе к цилиндрическим координатам (рис. 185) в (7.131) делается очевидная замена:

$$e^{-jk_0 x} = e^{-jk_0 r \cos \alpha}. \quad (7.133)$$

Для выполнения граничных условий на поверхности цилиндра заведомо необходимо, чтобы и рассеянное, и преломленное поля подобно полю $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$ были однородны вдоль оси z и имели параллельный ей электрический вектор:

$$\partial/\partial z = 0 \text{ и } \mathbf{E}^{\pm} = z_0 E^{\pm}. \quad (7.134)$$

При этом волновое уравнение (5.54) можно записать в скалярной форме:

$$\nabla^2 \dot{E}^{\pm} + k_0^2 \dot{E}^{\pm} = 0 \quad (7.135)$$

(число k выбирается в соответствии с (7.132)), т. е. в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{E}^{\pm}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}^{\pm}}{\partial \alpha^2} + k_0^2 \dot{E}^{\pm} = 0. \quad (7.136)$$

Применяя метод разделения переменных (§ 27), положим

$$\dot{E}^{\pm} = X(r) Y(\alpha). \quad (7.137)$$

Уравнение (7.136) после этой подстановки принимает вид

$$\frac{r^2}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{r}{X} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} + k_0^2 r^2 = 0$$

и распадается на два следующих (ср. § 27):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} + \left(k_0^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) X &= 0, \\ \frac{\partial^2 Y}{\partial \alpha^2} + n^2 Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.138)$$

где n^2 — постоянная разделения.

Второе из этих уравнений совпадает с хорошо известным уравнением (3.116), имеющим решение (3.118), которое в данном случае удобнее выразить¹ через экспоненциальные функции:

$$Y = A e^{ina} + B e^{-ina}. \quad (7.139)$$

Первое же есть уравнение Бесселя n -го порядка, описанное в Приложении 3. Его решения — цилиндрические функции.

¹ Конечно, коэффициенты A и B в (7.139) не совпадают с подобными коэффициентами в (3.118).

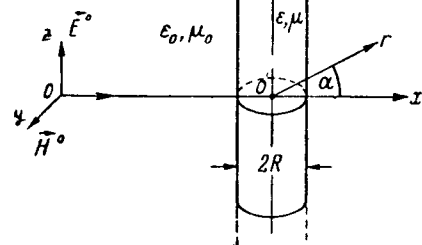


Рис. 184

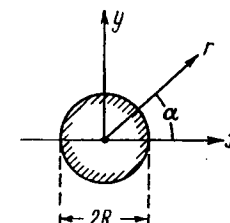


Рис. 185

Полученный результат означает, что как преломленное, так и рассеянное поле можно представить в виде суперпозиции полей вида

$$Z_n(k_{(0)}, r) (Ae^{ina} + Be^{-ina}),$$

где Z_n — решения уравнения Бесселя. В Приложении 3 разъяснено, что для преломленного поля в качестве Z_n следует брать функции Бесселя $J_n(kr)$, а для поля рассеянного — функции Ханкеля второго рода $H_n^{(2)}(k_0 r)$.

Вернемся теперь к полю падающей волны. С учетом (7.133) на основании данной в Приложении 3 формулы (ПЗ.29) запишем \dot{E}^0 в виде ряда

$$\dot{E}^0 = z_0 E_m^0 e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(k_0 r) e^{jn(\alpha - \pi/2)}. \quad (7.140)$$

Для удовлетворения граничным условиям рационально выразить поля \dot{E}^+ и \dot{E}^- в виде аналогичных рядов

$$\dot{E}^+ = z_0 E_m^0 e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n(kr) e^{jn(\alpha - \pi/2)}, \quad r \leq R \quad (7.141)$$

и

$$\dot{E}^- = z_0 E_m^0 e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{jn(\alpha - \pi/2)}, \quad r \geq R, \quad (7.142)$$

члены которых представляют решения (7.137) нужного вида, причем постоянные коэффициенты a_n и b_n подлежат определению.

Взяв первые два из равенств (7.130), запишем их применительно к данной задаче так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}^0 + \dot{E}^- &= \dot{E}^+, \\ \dot{H}_a^0 + \dot{H}_a^- &= \mu \dot{H}_a^+ \end{aligned} \right\} r = R. \quad (7.143)$$

Внося (7.140—7.142) в первую строчку граничных условий (7.143) и приравнявая их почленно, получаем:

$$a_n H_n^{(2)}(k_0 R) - b_n J_n(kR) = -J_n(k_0 R). \quad (7.144)$$

Далее, учитывая (7.134), из уравнения Максвелла

$$\dot{H} = \frac{j}{\omega \mu} \text{rot } \dot{E} \quad (7.145)$$

в цилиндрических координатах находим, что

$$\dot{H}_a = -\frac{j}{\omega \mu} \frac{\partial \dot{E}}{\partial r}. \quad (7.146)$$

Поэтому вторая строчка (7.143) принимает вид:

$$a_n H_n^{(2)'}(k_0 R) - \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{\mu \varepsilon_0}} b_n J_n'(kR) = -J_n'(k_0 R). \quad (7.147)$$

Из системы уравнений (7.144), (7.147) определяем коэффициенты a_n и b_n :

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{W_0^0 J_n(k_0 R) J_n'(kR) - W_0^0 J_n'(k_0 R) J_n(kR)}{-W_0^0 H_n^{(2)}(k_0 R) J_n'(kR) + W_0^0 H_n^{(2)'}(k_0 R) J_n(kR)}, \\ b_n &= \frac{-W_0^0 [H_n^{(2)}(k_0 R) J_n'(k_0 R) - H_n^{(2)'}(k_0 R) J_n(k_0 R)]}{-W_0^0 H_n^{(2)}(k_0 R) J_n'(kR) + W_0^0 H_n^{(2)'}(k_0 R) J_n(kR)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.148)$$

где

$$W_0^0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad W_0^0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}.$$

Формально задача решена. Остается только с помощью (7.145) выписать рассеянное и преломленное магнитные поля:

$$\dot{H}^+ = j E_m^0 \frac{1}{W_0^0} e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left[r_0 \frac{jn}{kr} J_n(kr) - \alpha_0 J_n'(kr) \right] e^{jn(\alpha - \pi/2)} \quad (7.149)$$

и

$$\dot{H}^- = j E_m^0 \frac{1}{W_0^0} e^{j\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left[r_0 \frac{jn}{k_0 r} H_n^{(2)}(k_0 r) - \alpha_0 H_n^{(2)'}(k_0 r) \right] e^{jn(\alpha - \pi/2)}. \quad (7.150)$$

Если цилиндр является идеально проводящим, то преломленное поле отсутствует. Полагая для этого случая в (7.148) $\varepsilon \rightarrow -j\infty$ и, соответственно, $W_0^0 \rightarrow 0$, имеем

$$a_n = -\frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)}(k_0 R)} \quad \text{и} \quad b_n = 0. \quad (7.151)$$

Этот случай подробно рассмотрен в книге А. И. Потехина «Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн». На рис. 186 показана заимствованная отсюда диаграмма относительной интенсивности рассеянного поля для различных отношений R/λ (в данном случае построены величины, пропорциональные корню из плотности потока энергии). Пунктирная кривая соответствует предельной ($\lambda \rightarrow 0$) задаче, рассмотренной в § 55. Как видно из диа-

граммы, дифракция приводит к появлению весьма резкого максимума интенсивности в области «тени». Отметим, что построение такой диаграммы по формулам (7.142, 7.150) требует большой вычислительной работы.

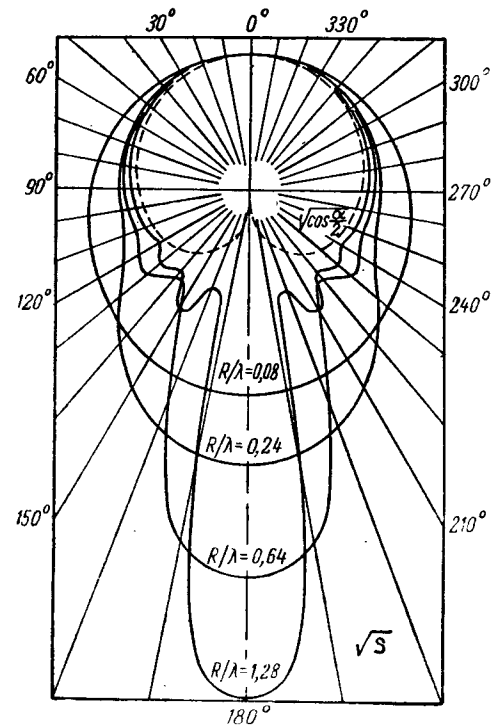


Рис. 186

Несложная проверка показывает, что в пределе при $R/\lambda \rightarrow 0$ соотношения (7.141, 7.142, 7.149, 7.150) совпадают с получаемыми из электростатической и магнитостатической задач. При этом, например,

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}^+ &= \dot{E}^0, \\ \dot{H}^+ &= \dot{H}^0 \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \end{aligned} \right\} r \leq R \quad (7.152)$$

(ср. § 28).

Примеры и упражнения

1. Воспользовавшись выражениями цилиндрических функций малого аргумента (П3.12), получить формулы (7.152) из (7.141 и 7.149).

2. Если в формулах (7.141, 7.142, 7.149, 7.150)

сделать замену (6.46), то в силу принципа двойственности их новый вид будет выражать решение задачи дифракции волны, магнитный вектор которой (а не электрический, как это было) параллелен оси цилиндра. Найти это решение.

3. Показать, что в пределе при $R/\lambda \rightarrow 0$ из результатов предыдущего, в частности, вытекает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}^+ &= \dot{H}^0, \\ \dot{E}^+ &= \dot{E}^0 \frac{2\epsilon_0}{\epsilon + \epsilon_0} \end{aligned} \right\} r \leq R. \quad (7.153)$$

§ 57. Дифракция плоской волны на отверстии

Пусть на непроницаемый бесконечный экран с отверстием (рис. 187) нормально падает плоская однородная электромагнитная

волна. Происходящий при этом процесс, сопровождаемый излучением из отверстия в полупространство за экраном, называется *дифракцией на отверстии*. Анализ этого излучения представляет интерес для теории антенн. В соответствии с § 44 можно считать, что поле излучения порождается якобы существующими в плоскости отверстия «эквивалентными источниками» — электрическим и магнитным поверхностными токами, связанными с полем в отверстии соотношениями (6.54), (6.55). Точные значения величин E^S и H^S неизвестны, и, таким образом, уже сама постановка задачи является приближенной.

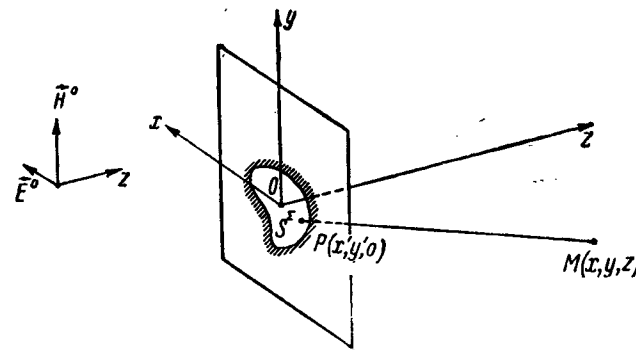


Рис. 187

Будем приближенно считать, что отверстие «вырезает» участок фронта падающей волны, которая задана, например, в виде

$$\dot{E} = x_0 E_m e^{j(\omega t - kz)} \quad \text{и} \quad \dot{H} = y_0 H_m e^{j(\omega t - kz)}. \quad (7.154)$$

тогда в системе координат рис. 187 поле в отверстии есть

$$\dot{E}_m^S = x_0 E_m \quad \text{и} \quad \dot{H}_m^S = y_0 H_m, \quad (7.155)$$

и, согласно (6.54), (6.55), плотности эквивалентных токов имеют вид:

$$\dot{\eta}^{cm} = -x_0 H_m \quad \text{и} \quad \dot{\eta}^{cm} = -y_0 E_m = -y_0 W^0 H_m. \quad (7.156)$$

Внося это в формулы (6.57 и 6.65) и распространяя интегрирование на внешнюю поверхность экрана, получаем выражения векторных потенциалов A и A^M , определяющих поле излучения:

$$\dot{A}_m = -x_0 \frac{\mu}{4\pi} H_m \int_{S^S} \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad \text{и} \quad \dot{A}_m^M = -y_0 \frac{\epsilon W^0}{4\pi} H_m \int_{S^S} \frac{e^{-jkr}}{r} dS \quad (7.157)$$

(поле E^S , H^S отлично от нуля только на отверстии S^S).

Здесь r — расстояние от точки наблюдения $M(x, y, z)$ до лежащей в плоскости отверстия точки $P(x', y', 0)$:

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = \sqrt{R^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2}, \quad (7.158)$$

причем

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Будем рассматривать поле лишь на очень большом расстоянии от отверстия, так что

$$x' \ll R \text{ и } y' \ll R. \quad (7.159)$$

При этом условии под знаком интеграла

$$\Phi = \int_{S^2} \frac{e^{-jkr}}{r} dS, \quad (7.160)$$

фигурирующего в (7.157), можно положить в знаменателе $r = R$ и вынести эту величину как постоянную. Однако в отношении функции e^{-jkr} подобная операция недопустима (ср. § 41), поскольку размеры отверстия не малы в сравнении с длиной волны. С целью дальнейшего упрощения разложим (7.158) в биномиальный ряд и ограничимся первыми степенями x' и y' . Тогда

$$r = R - \frac{1}{R}(xx' + yy'), \quad (7.161)$$

и (7.160) принимает вид

$$\Phi = \frac{e^{-jkR}}{R} \int_{S^2} e^{jk \frac{xx'+yy'}{R}} dS. \quad (7.162)$$

В дальнейшем займемся отверстием прямоугольной формы (рис. 188), так что

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e^{-jkR}}{R} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-jk \frac{xx'+yy'}{R}} dx' dy' = \\ &= \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \frac{R}{jkx} e^{\frac{jhx}{R} x'} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cdot \frac{R}{jky} e^{\frac{jhy}{R} y'} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \end{aligned} \quad (7.163)$$

и, с учетом формулы Эйлера,

$$\Phi = ab \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \frac{\sin \frac{ka}{2R} x}{\frac{ka}{2R} x} \cdot \frac{\sin \frac{kb}{2R} y}{\frac{kb}{2R} y}. \quad (7.164)$$

С помощью преобразования

$$\left. \begin{aligned} x &= R \sin \vartheta \cos \alpha \\ y &= R \sin \vartheta \sin \alpha \end{aligned} \right\}$$

(см. рис. 189) этот результат нетрудно переписать в сферических координатах:

$$\Phi = ab \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \frac{\sin \left(\frac{ka}{2} \sin \vartheta \cos \alpha \right)}{\frac{ka}{2} \sin \vartheta \cos \alpha} \cdot \frac{\sin \left(\frac{kb}{2} \sin \vartheta \sin \alpha \right)}{\frac{kb}{2} \sin \vartheta \sin \alpha}. \quad (7.164a)$$

Функция Φ в поставленной задаче представляет значительный интерес и, как ниже будет показано, позволяет судить о направ-

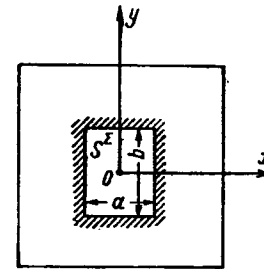


Рис. 188

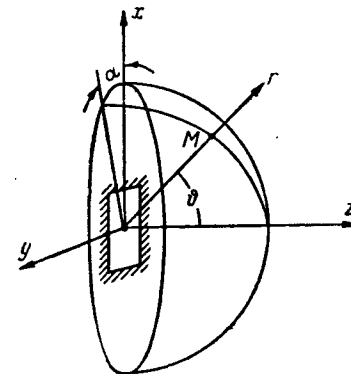


Рис. 189

ленности излучения прямоугольного отверстия. Однако полное представление об исследуемом электромагнитном процессе можно получить, лишь определив векторы поля излучения \mathbf{E} и \mathbf{H} . С этой целью выражения векторных потенциалов (7.157) перепишем в виде:

$$\dot{\mathbf{A}}_m = -\frac{\mu H_m}{4\pi} \Phi^\circ \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{A}}^m = -\frac{\epsilon W^0 H_m}{4\pi} \Phi^m, \quad (7.157a)$$

где

$$\Phi^\circ = x_0 \Phi \quad \text{и} \quad \Phi^m = y_0 \Phi. \quad (7.165)$$

В сферических координатах, как легко проверить,

$$\left. \begin{aligned} \Phi^\circ &= \Phi (r_0 \sin \vartheta \cos \alpha + \vartheta_0 \cos \vartheta \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha), \\ \Phi^m &= \Phi (r_0 \sin \vartheta \sin \alpha + \vartheta_0 \cos \vartheta \sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (7.165a)$$

Принимая во внимание, что векторы Φ° , Φ^m зависят от радиальной координаты по закону сферической волны $e^{-jkR/R}$ (7.164a),

можно показать, что в пределе при $R \rightarrow \infty$ справедливы равенства

$$\left. \begin{aligned} \text{grad div } \Phi^{0, \mu} &= -r_0 k^2 \Phi_r^{0, \mu} \\ \text{rot } \Phi^{0, \mu} &= jk (\vartheta_0 \Phi_a^{0, \mu} - \alpha_0 \Phi_\vartheta^{0, \mu}) \end{aligned} \right\} \quad (7.166)$$

Внося с учетом (7.166) выражения векторных потенциалов (7.157а) в формулы (6.66), находим поле излучения

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= jkW^0 \frac{H_m}{4\pi} \Phi (1 + \cos \vartheta) (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \\ \dot{H}_m &= jk \frac{H_m}{4\pi} \Phi (1 + \cos \vartheta) (\vartheta_0 \sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (7.167)$$

Легко видеть, что для отверстия, размеры которого значительно превышают длину волны (см. 7.164а), функция Φ , изменяющаяся гораздо быстрее, чем $\cos \vartheta$, удовлетворительно характеризует направленность излучения. Опустив в (7.164а) множитель abe^{-jkR}/R , получим формулу, описывающую направленность излучения в плоскости, параллельной вектору E ($\alpha = 0$) и называемой « E -плоскостью».

$$F_E(\vartheta) = \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \vartheta\right)}{\frac{ka}{2} \sin \vartheta}, \quad (7.168)$$

а также аналогичную формулу для перпендикулярной ей ($\alpha = 90^\circ$) « H -плоскости»

$$F_H(\vartheta) = \frac{\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \vartheta\right)}{\frac{kb}{2} \sin \vartheta}. \quad (7.169)$$

На рис. 190 представлена построенная по одной из этих формул диаграмма направленности прямоугольного отверстия в декартовых

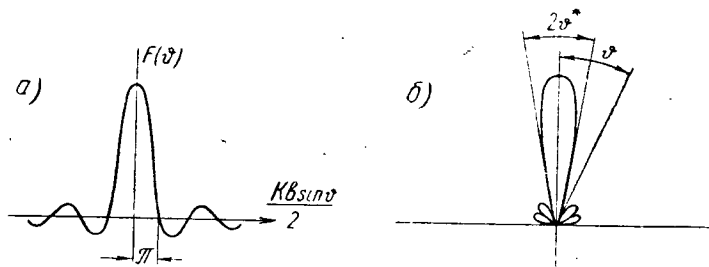


Рис. 190

(а) и полярных (б) координатах. Она, как говорят, имеет «многолепестковую» форму. Угловая ширина основного лепестка ($2\vartheta^*$ на рис. 190, б) уменьшается при увеличении размеров отверстия

в сравнении с длиной волны. Действительно, взяв, например, формулу (7.169), имеем:

$$\sin\left(\frac{kb}{2} \sin \vartheta^*\right) = 0,$$

причем речь идет о низшем корне (рис. 190, а)

$$\frac{kb}{2} \sin \vartheta^* = \pi,$$

а отсюда

$$2\vartheta^* \approx 2 \sin \vartheta^* = \frac{2\lambda}{b}. \quad (7.170)$$

В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ угловая ширина максимума излучения становится бесконечно малой, что соответствует излучению «только вперед» — результат, вытекающий из правил геометрической оптики. Здесь уместно вспомнить, что электромагнитное поле было определено нами в бесконечно удаленной области ($R \rightarrow \infty$), иными словами, окончательные результаты справедливы лишь для так называемой «дальней зоны» излучения (ср. § 42). Естественно, что абсолютные размеры излучателя при этом безразличны: угол, под которым

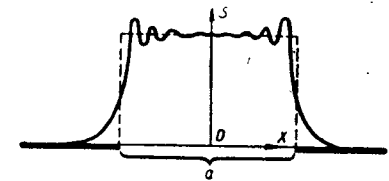


Рис. 191

которым поперечник отверстия «виден» из точки наблюдения, пренебрежимо мал. Поле в «ближней зоне» обычно менее интересно с чисто практической точки зрения. Однако о нем полезно иметь хотя бы качественное представление, чтобы лучше понимать сущность дифракции как отклонения от законов геометрической оптики. Диаграмма излучения в ближней зоне для широкого отверстия (поперечник значительно превышает длину волны) представлена на рис. 191 в декартовых координатах. Приближение геометрической оптики соответствует результату, показанному пунктиром: излучение ограничено краями отверстия (резкая граница тени), причем его интенсивность¹ везде одинакова, так что диаграмма имеет вид прямоугольника; отметим, что для дальней зоны такая прямоугольная диаграмма означает бесконечно узкий луч. Действительная картина характеризуется непрерывной кривой. Как видно, в результате дифракции граница тени оказывается «размытой»: интенсивность спадает к нулю уже за краями отверстия. В области же самого отверстия интенсивность колеблется, причем колебания возрастают по мере приближения к краям.

Решив задачу дифракции на отверстии, мы вплотную подошли к анализу поверхностных антенн, намеченному в общих чертах в § 44 (пример 3). Отверстие можно рассматривать как некую

¹ Имеется в виду плотность потока энергии Π .

идеальную поверхностную антенну с однородным синфазным полем в раскрыве. У реальных антенн (например, рупорной, параболической и т. п.) поле в раскрыве не синфазно и не однородно по амплитуде, что, в частности, приводит к расширению главного лепестка в сравнении с исследованным идеальным случаем. Формула (7.170) дает оценку предельной направленности поверхностной антенны.

Отметим еще, что по мере уменьшения отверстия все больше сказывается «эффект краев» — искажение поля падающей волны у краев отверстия, не учтенное в нашем изложении. По этой причине полученные результаты, например, нельзя применять к отверстиям, малым в сравнении с длиной волны.

Примеры и упражнения

1. Убедиться в справедливости выражений (7.165а).
2. Пользуясь формулами Приложения 2, вывести предельные соотношения (7.166).
3. Выписать выражения векторов поля излучения в E -плоскости и H -плоскости.
4. Размеры прямоугольного отверстия в экране $a = 10$ см и $b = 24$ см, длина волны, нормально падающей на экран, $\lambda = 2$ см. Найти угловую ширину главного максимума излучения в H - и E -плоскости.
5. В условиях п. 4 определить направления ближайших побочных максимумов излучения в E -плоскости.
6. Показать, что формулы (7.167) приводят к известному из § 44 выражению поля элемента Гюйгенса.

§ 58. Применение принципа двойственности

Принцип двойственности (§ 43) оказывается весьма плодотворным в области явлений дифракции, где он и был впервые применен А. А. Пистолькорсом.

Положим, что неограниченное пространство делится плоскостью S на две части. В области S_1 на этой плоскости задано тангенциальное поле E_τ , в остальной же части оно равно нулю $E_\tau = 0$ (рис. 192, а). Пусть известно существующее при этих условиях в одном из полупространств поле E, H .

Задача 1.

Условия на плоскости	Уравнения Максвелла	Решение в I полупростран- стве
$E_\tau = E^s$ на S_1 ,	$\text{rot } E = -j\omega\mu H$,	} $E_1, H_1.$ (7.171)
$E_\tau = 0$ вне S_1 .	$\text{rot } H = j\omega\epsilon E$	

Граничные условия задачи 1 соответствуют тому случаю, когда плоскость S за исключением области S_1 является идеально проводящей. При этом S_1 можно рассматривать как отверстие в непрозрачном экране (рис. 193, а).

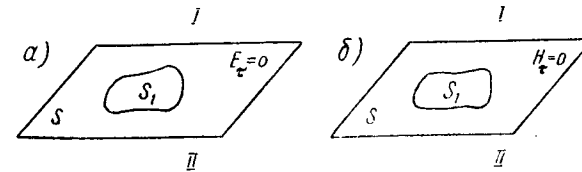


Рис. 192

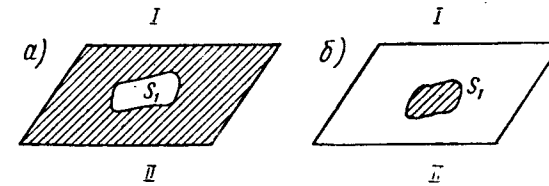


Рис. 193

Возьмем теперь следующий случай (рис. 192, б)
Задача 2.

Условия на плоскости	Уравнения Максвелла	Решение в I полупростран- стве
$H_\tau = H^s$ на S_1 ,	$\text{rot } H = j\omega\epsilon E$,	} $E_2, H_2.$ (7.172)
$H_\tau = 0$ вне S_1 .	$\text{rot } E = -j\omega\mu H$	

Легко сообразить, что условия задачи 2 соответствуют идеально проводящей области S_1 (рис. 193, б). Действительно, токи в бесконечно тонкой пластинке S_1 могут вызвать лишь нормальное магнитное поле в остальной части плоскости S (рис. 194).

Итак, в описанных задачах речь идет об идеально проводящем экране с отверстием и о дополнительной пластинке. Установим существующую между ними связь. Пусть тангенциальные поля распределены в обеих задачах идентично, т. е.

$$E_\tau = AH_\tau, \quad (7.173)$$

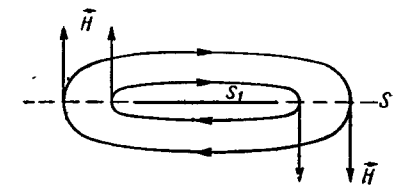
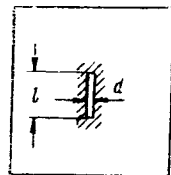


Рис. 194

причем для простоты постоянный коэффициент A будем считать равным единице ($A=1$). Заменяя в уравнениях Максвелла (7.172) ϵ на $-\mu$ и обратно, мы убеждаемся, что задача 2 теперь отличается от задачи 1 только тем, что векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в них поменялись ролями. А это значит, что решение второй задачи \mathbf{H}_2 совпадает с решением первой задачи \mathbf{E}_1 и точно так же \mathbf{E}_2 совпадает с \mathbf{H}_1 . Вывод, следующий отсюда, очевиден: нет необходимости решать отдельно обе задачи, ибо решение одной из них получается путем



а)



б)



Рис. 195



указанного простого преобразования из готового решения другой.

В качестве важного применения полученного результата исследуем простейшую щелевую антенну, т. е. узкую щель в идеально проводящем экране, размеры которой в данном случае весьма малы в сравнении с длиной волны

$$l \ll \lambda, d \ll l \quad (7.174)$$

(рис. 195,а). В смысле принципа двойственности рассматриваемая система аналогична дополнительной к экрану идеально проводящей полоске (рис. 195,б), т. е. диполью Герца. Таким образом, для

нахождения поля элементарной щелевой антенны следует воспользоваться готовым решением задачи о диполе Герца (§ 41, 42). Интересуясь полем на большом расстоянии от излучателя (это ограничение, конечно, не обязательно), возьмем формулы (6.35)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= -\alpha_0 \frac{klI_m}{4\pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - kr), \\ \mathbf{E}_2 &= -\vartheta_0 \frac{kIW^0 I_m}{4\pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - kr) \end{aligned} \right\} \quad (7.175)$$

с целью произвести в них необходимую замену.

Здесь надо учесть, что ток диполя в виде полоски связан с магнитным полем на ее поверхности соотношением

$$I_m = 2dH_m^S, \quad (7.176)$$

непосредственно следующим из закона полного тока (рис. 196):

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \oint_S \mathbf{H}_m \, dl = 2H_m^S d.$$

Заменяя в (7.175) ϵ на $-\mu$ (и обратно), \mathbf{H} на \mathbf{E} (и обратно), мы, в частности, пишем \mathbf{E}_m^S вместо \mathbf{H}_m^S и учитываем, что

$$E_m^S d = U_m \quad (7.177)$$

есть не что иное, как напряжение между краями щели.

Принимая во внимание сказанное, получаем следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\alpha_0 \frac{klU_m}{2\pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - kr), \\ \mathbf{H}_1 &= \pm \vartheta_0 \frac{kIU_m}{2W^0 \pi r} \sin \vartheta \sin(\omega t - kr) \end{aligned} \right\} \quad (7.178)$$

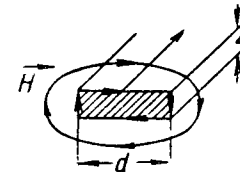


Рис. 196

выражающие поле элементарной щелевой антенны в дальней зоне. Она действует, как элементарный магнитный излучатель (§ 43).

Примеры и упражнения

1. Дан диполь Герца и щелевая антенна одинаковых размеров. При каком значении напряжения между краями щели эта антенна создает в направлении максимального излучения такой же поток энергии, как и диполь Герца с током I ?

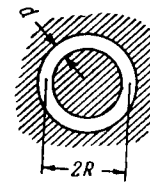


Рис. 197

2. Найти сопротивление излучения щелевого диполя Герца (т. е. щелевой антенны, подчиненной требованию (7.174)), удовлетворяющее формулировке закона Джоуля—Ленца в виде

$$P^{\Sigma} = \frac{U_m^2}{2R^{\Sigma}},$$

где U — направление между краями щели.

3. Сравнив щелевую кольцевую антенну (рис. 197) с магнитной рамочной антенной (§ 43), найти на основании принципа двойственности ее поле в дальней зоне и сопротивление излучения.

4. Для кольцевой щелевой и рамочной антенн (п. 3) решить задачу, аналогичную п. 1.

НАПРАВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. ОБЩИЕ СВОЙСТВА НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

§ 59. Понятие о направляющей системе

В § 50 было установлено, что полностью отражающая граница раздела сред обладает способностью направлять движение электромагнитной энергии. С этим фактом в той или иной форме встречаются в различных областях радиотехники. Устройства, основан-

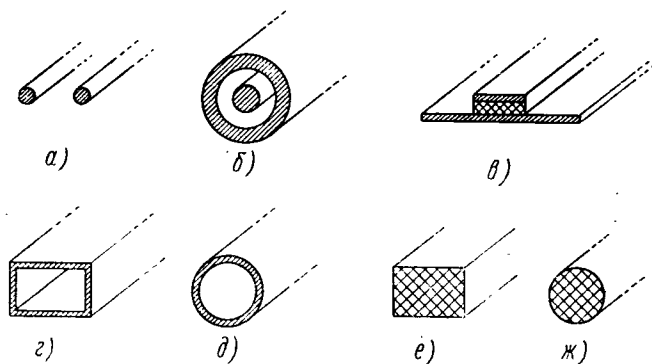


Рис. 198

ные на указанном явлении, обычно называют *направляющими системами*. К их числу, в первую очередь, относятся всевозможные *линии передачи*, важнейшие из которых показаны на рис. 198. Широко известна двухпроводная линия (а). Коаксиальная линия (б) применяется, главным образом, на сверхвысоких частотах. Исключительно радиотехнике сверхвысоких частот свойственны *волноводы* — полые (г, д) и реже встречающиеся диэлектрические (е, ж), а также системы типа «полосковой линии» (в) и многие другие.

Геометрически простейшим среди изображенных направляющих систем является волновод круглого поперечного сечения (д, ж). Легко представить постепенный переход от плоской границы раздела сред к такому волноводу (рис. 199). Естественно допустить, что при показанной на рисунке деформации граница сохраняет способность направлять волну вдоль образующей сгиба (ось z), пока радиус кривизны еще достаточно велик. Не имея доказатель-

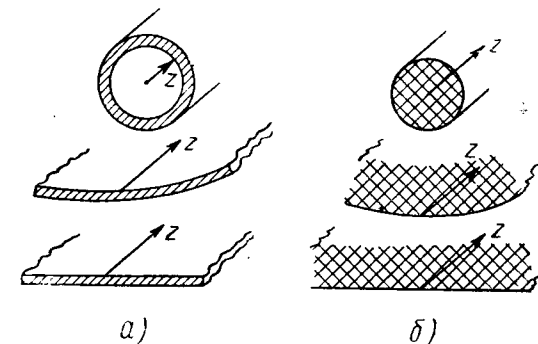


Рис. 199

ной силы, такое рассуждение все же наводит на мысль о возможности распространения электромагнитной волны в металлической трубе и диэлектрическом стержне и побуждает к исследованию подобных систем строгими методами. Задачей настоящей главы как раз и является изложение общей теории направляемых волн и базирующееся на ней описание важнейших направляющих систем. Однако перед этим мы по возможности осветим вопрос, не выходя за рамки уже изученных закономерностей.

Параллельные плоскости. Вернемся, например, к отражению наклонно падающей волны идеально проводящей плоскостью (§ 50). Компоненты поля, представляющего собой суперпозицию падающей и отраженной волн, подчинены в этом случае закону (7.63). Остановившись на горизонтальной поляризации, на основании (7.30 и 7.32) с учетом (7.35 и 7.62) находим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= -jx_0 2AW_1^0 \sin \beta z e^{-i\Gamma y}, \\ \dot{H}_m &= 2A (y_0 \cos \varphi \cos \beta z + jz_0 \sin \varphi \sin \beta z) e^{-i\Gamma y} \end{aligned} \right\}, \quad (8.1)$$

где

$$\beta = k_1 \cos \varphi \quad \text{и} \quad \Gamma = k_1 \sin \varphi. \quad (8.2)$$

Построим мысленно ряд плоскостей (рис. 200, а), параллельных отражающей плоскости и находящихся от нее на расстояниях

$$d_n = n\pi/\beta. \quad (8.3)$$

Как видно из (8.1), в каждой из таких плоскостей

$$E = 0 \text{ и } H_z = 0,$$

а это значит, что, не нарушив электромагнитного поля, любую из этих плоскостей можно заменить границей идеального проводника (рис. 200, б). Таким путем мы переходим к *направляющей системе*, образованной двумя параллельными идеально проводящими плоскостями. Выясним ее свойства.

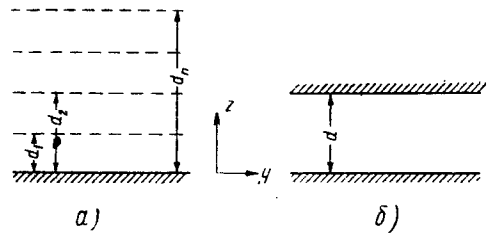


Рис. 200

Между плоскостями в направлении y распространяется неоднородная волна (8.1) с продольной магнитной компонентой (H_y). В поперечном направлении (z) поле имеет характер стоячей волны. Обозначив расстояние между плоскостями d и подставив его в (8.1), получим

$$\beta = n\pi/d, \quad (8.3a)$$

откуда легко убедиться, что амплитуды компонент поля образуют n поперечных «полуволновых» вариаций, если называть «поперечной длиной волны» величину

$$\lambda_{\perp} = 2\pi/\beta. \quad (8.4)$$

На рис. 201 показано распределение компонент и построены линии векторов поля при $t = \text{const}$ для различных значений n .

Из (8.2) вытекает весьма важное выражение постоянной распространения волны, направляемой плоскостями:

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \beta^2}. \quad (8.5)$$

Здесь и в дальнейшем величина

$$k = \frac{\omega}{v} = 2\pi f \sqrt{\epsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

— волновое число для неограниченной среды с теми же свойствами, что и среда между плоскостями — употребляется без индекса «1».

Вынося k из-под корня (8.5) и отмечая, что отношение β/k равно

$$\frac{\beta}{k} = \frac{n\lambda}{2d} = \frac{n}{2fd \sqrt{\epsilon\mu}},$$

приходим к следующей формуле:

$$\Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2d}\right)^2} = k \sqrt{1 - \frac{n^2}{4d^2 f^2 \epsilon\mu}}. \quad (8.6)$$

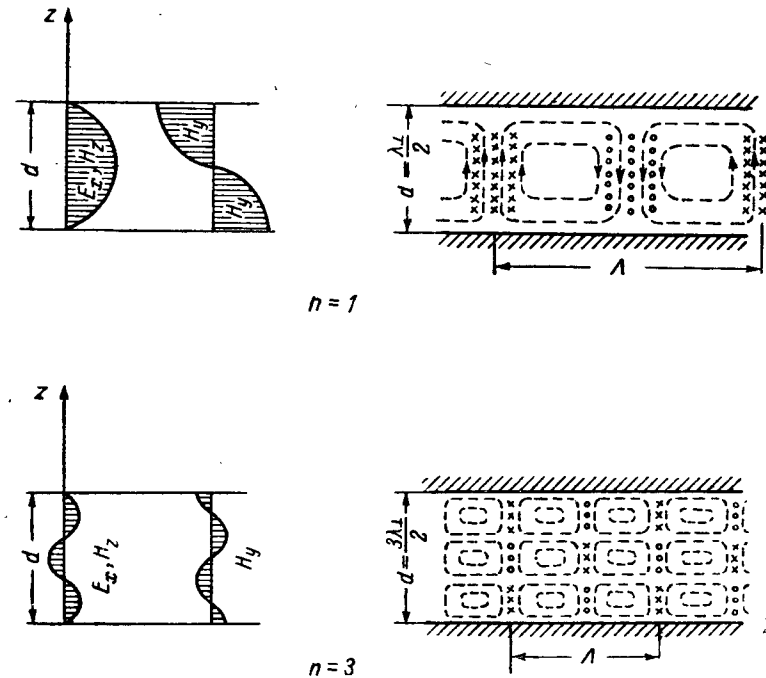


Рис. 201

Отсюда находятся фазовая скорость v_{ϕ} и длина Λ направляемой волны. Исходя из определения постоянной распространения

$$\Gamma = \frac{\omega}{v_{\phi}} = \frac{2\pi}{\Lambda} \quad (8.7)$$

(ср. 5.61), имеем:

$$v_{\phi} = v / \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2d}\right)^2} = v / \sqrt{1 - \frac{n^2}{4d^2 f^2 \epsilon\mu}}; \quad (8.8)$$

$$\Lambda = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda}{2d}\right)^2} = \lambda / \sqrt{1 - \frac{n^2}{4d^2 f^2 \epsilon\mu}}. \quad (8.9)$$

Эти величины зависят от частоты, и, следовательно, распространение изучаемой волны сопровождается дисперсией (§ 45). Как видно, фазовая скорость v_ϕ и длина волны Λ всегда больше соответствующих величин для неограниченной среды

$$v_\phi > v \text{ и } \Lambda > \lambda. \quad (8.10)$$

При частоте

$$f_{кр} = \frac{n}{2d\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (8.11)$$

называемой *критической*, v_ϕ и Λ обращаются в бесконечность, а это значит, что поле между плоскостями теряет характер распространяющейся волны, становясь везде *синфазным*. Направляемая волна существует лишь при частотах, более высоких, чем критическая. Если же $f < f_{кр}$, то постоянная распространения Γ оказывается мнимой величиной

$$\Gamma = \pm j \sqrt{(f_{кр}/f)^2 - 1} = \pm ja, \quad (8.12)$$

и поле (8.1), сохраняя постоянную фазу, убывает в направлении y по экспоненциальному закону

$$e^{-j\Gamma y} = e^{-ay}, \quad (\Gamma = -ja). \quad (8.12a)$$

При данной частоте f между плоскостями может распространяться несколько различных волн, каждая из которых имеет свое число поперечных вариаций n и свою скорость. Количество этих волн всегда остается ограниченным, так как при любом размере d найдется такое n , для которого будет выполнено «условие отсечки» (8.12). Оно заведомо выполнится и для всех высших n , так что, например, если частота оказалась ниже критической для $n=4$, то будут существовать лишь три волны ($n=1, 2$ и 3).

При ближайшем рассмотрении выясняется весьма характерная связь условий распространения направляемой плоскостями волны и угла падения φ . Сопоставляя (8.3а и 8.2), получаем соотношения

$$\cos \varphi = \frac{n}{2df\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad (8.13)$$

из которого видно, что для данной волны (то или иное n) косинус угла падения с уменьшением частоты приближается к единице и становится равным ей при

$$f = \frac{n}{2dV\sqrt{\epsilon\mu}},$$

т. е., согласно (8.11), при *критической* частоте. Итак, распространение направляемой волны прекращается, когда угол φ равен нулю, т. е. в том случае, когда исходная плоская волна $\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0$

(§ 50) падает на идеально проводящую границу *нормально*. Из (8.4 и 8.2) вытекает, что при этом

$$\lambda_\perp = \lambda,$$

а поперечная компонента H_z , согласно (8.1), исчезает: между плоскостями устанавливается обыкновенная стоячая волна (§ 48). Описанный процесс иллюстрируется рис. 202.

Мы исследовали случай горизонтальной поляризации падающей волны. При вертикальной поляризации, как видно из § 50, картина получается аналогичной. Между плоскостями распространя-

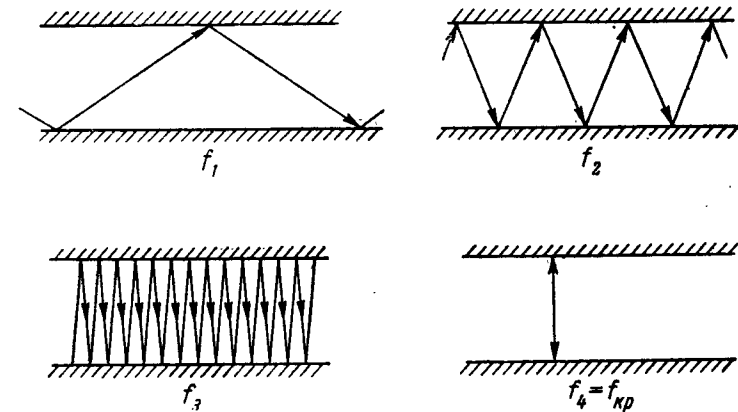


Рис. 202

ются направляемые волны с продольной E -компонентой, имеющие поперечные вариации поля. Формулы (8.6, 8.8, 8.9) и следующие из них при этом остаются в силе.

Особое место занимает оставшийся до сих пор в стороне простейший случай, когда направляемая волна оказывается *однородной*. Такая возможность видна из того, что плоская однородная волна свободного пространства

$$\dot{\mathbf{E}}_m = z_0 A e^{-jk_y y}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = x_0 \frac{A}{W_0} e^{-jk_y y}$$

не испытывает каких-либо изменений, если внести идеально проводящие плоскости

$$z = \text{const} \text{ и } z = d + \text{const},$$

так как граничные условия будут удовлетворены. Этот случай лишен всех установленных выше особенностей: волна распространяется между плоскостями так же, как и в свободном пространстве.

Итак, системе параллельных плоскостей свойственны волны, имеющие продольную H -компоненту, и волны с продольной E -ком-

понентой, а так же волна, не имеющая вовсе продольных компонент (последний случай). Волны первого и второго рода существуют лишь при достаточно высоких частотах и образуют множество типов, отличающихся строением поля и скоростью распространения.

Из дальнейшего будет видно, что эти заключения отражают особенности направляемых волн весьма общего характера.

Примеры и упражнения

1. Рассмотреть направляемые волны в системе параллельных плоскостей, соответствующие вертикальной поляризации исходной падающей волны: а) найти векторы поля и выяснить его строение

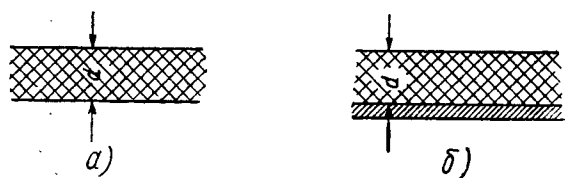


Рис. 203

б) определить фазовую скорость и длину волны при различных типах строения поля и в) выяснить условия распространения волн.

2. Пользуясь формулой (6.126), найти выражение групповой скорости волн, направляемых плоскостями.

3. Построить график зависимости фазовой и групповой скорости направляемой волны данного типа от частоты.

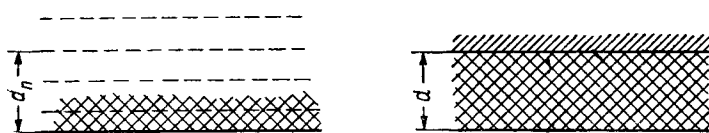


Рис. 204

4. Построить график зависимости этих же величин от угла падения.

5. Как это следует из § 50, направляющей системой может служить также диэлектрический слой в свободном пространстве (рис. 203, а) или на идеально проводящей плоскости (рис. 203, б). В обоих случаях должно быть выполнено условие полного отражения от границы диэлектрика.

Толщина диэлектрического слоя на проводнике выбирается из следующих соображений. В диэлектрическом полупространстве

ве (рис. 204) при полном отражении поле изменяется по закону (7.55). При этом существует ряд параллельных границе плоскостей, в которых

$$E_{\tau} = 0 \quad \text{и} \quad H_n = 0$$

(ср. стр. 244), так что любую из них можно заменить идеально проводящей границей. В результате получается система, показанная на рис. 203, причем толщина диэлектрика d (расстояние между идеально проводящей плоскостью и границей диэлектрик—пустота) удовлетворяет равенству, следующему из (7.55),

$$k_1 d \cos \varphi + \psi/2 = n\pi. \quad (8.14)$$

Здесь ψ — фаза коэффициента отражения.

Направляемая волна перестает распространяться при нарушении условия (7.51), т. е. при

$$n_{12} \sin \varphi = 1. \quad (8.15)$$

Внося это соотношение в формулу (7.40), видим, что при «отсечке» волны фаза ψ оказывается равной нулю. Учитывая это, из (8.14) находим выражение критической частоты:

$$f_{кр} = \frac{n}{2d \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 \cos \varphi}}. \quad (8.16)$$

С помощью (8.15) эта формула приводится к виду

$$f_{кр} = \frac{n}{2d \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}. \quad (8.17)$$

§ 60. Классификация направляемых волн

Возьмем теперь произвольную однородную вдоль оси z направляющую систему (рис. 205), например, какой-нибудь волновод (а) или систему стержней (б), поверхностей (в) и т. п. Поставим целью выяснить, какого рода плоские волны могут распространяться в системе, и установить их общие признаки, а также постараемся найти связь между этими признаками и свойствами системы. В результате должна быть получена обоснованная классификация плоских направляемых волн. Потерями энергии в системе вначале имеет смысл пренебречь.

Будем пользоваться так называемой обобщенно-цилиндрической системой координат (рис. 205). Ее криволинейные координаты q_1 и q_2 лежат в плоскости, перпендикулярной оси z , или, как будет говориться в дальнейшем, в поперечной плоскости. Они выбираются так, чтобы контур поперечного сечения направляющей системы совпадал с координатной линией.

Векторы поля распространяющейся в системе волны характеризуются комплексами

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}_m(q_1, q_2) e^{j(\omega t - \Gamma z)} \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_m(q_1, q_2) e^{j(\omega t - \Gamma z)}. \quad (8.18)$$

Запись эта отражает тот факт, что фазы векторов зависят от одной продольной координаты z (плоская волна), а их амплитуды зависят от поперечных координат (q_1, q_2) , т. е. ожидается, что направляемая волна будет неоднородной. В дальнейшем круглые скобки (q_1, q_2) мы будем опускать. Дифференцирование комплексов по времени, как обычно (§ 33), приводит к умножению их на $j\omega$, а дифференцирование по z — к умножению на $-j\Gamma$. Так, например, выражение вихря комплекса $\dot{\mathbf{E}}$ (см. Приложение 2) имеет вид

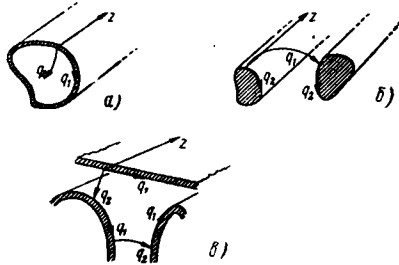


Рис. 205

$$\text{rot } \dot{\mathbf{E}} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1/h_2 & \mathbf{a}_2/h_1 & \mathbf{z}_0/h_1h_2 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & -j\Gamma \\ h_1\dot{E}_1 & h_2\dot{E}_2 & \dot{E}_z \end{vmatrix}$$

$$(q_3 = z, h_3 = 1 \text{ и } \mathbf{a}_3 = \mathbf{z}_0).$$

Внося (8.18) в уравнения Максвелла (5.15) и разлагая векторы по ортам обобщенно-цилиндрической системы координат $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и \mathbf{z}_0 , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_2} + j\Gamma h_2 \dot{E}_2 &= -j\omega\mu h_2 \dot{H}_1, \\ j\Gamma h_1 \dot{E}_1 + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_1} &= j\omega\mu h_1 \dot{H}_2, \\ \frac{\partial h_2 \dot{E}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 \dot{E}_1}{\partial q_2} &= -j\omega\mu h_1 h_2 \dot{H}_z. \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_2} + j\Gamma h_2 \dot{H}_2 &= j\omega\epsilon h_2 \dot{E}_1, \\ j\Gamma h_1 \dot{H}_1 + \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_1} &= -j\omega\epsilon h_1 \dot{E}_2, \\ \frac{\partial h_2 \dot{H}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 \dot{H}_1}{\partial q_2} &= j\omega\epsilon h_1 h_2 \dot{E}_z. \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

Исходя из этих шести уравнений, нетрудно выразить поперечные компоненты $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dot{H}_1$ и \dot{H}_2 через продольные \dot{E}_z и \dot{H}_z .

Так, например, исключая \dot{H}_2 из второй строчки (8.19) и первой строчки (8.20), находим:

$$\dot{E}_1 = -\frac{j\Gamma}{k^2 - \Gamma^2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\omega\mu}{\Gamma} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_2} \right)$$

и т. д. В результате получается следующая запись:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_1 &= -\frac{j\Gamma}{\chi^2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_1} + W^H \frac{1}{h_2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_2} \right), \\ \dot{E}_2 &= \frac{j\Gamma}{\chi^2} \left(-\frac{1}{h_2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_2} + W^H \frac{1}{h_1} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_1} \right), \\ \dot{H}_1 &= \frac{j\Gamma}{\chi^2} \left(\frac{1}{W^E} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_2} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_1} \right), \\ \dot{H}_2 &= -\frac{j\Gamma}{\chi^2} \left(\frac{1}{W^E} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8.21)$$

где введены обозначения:

$$\chi^2 = k^2 - \Gamma^2 \quad (8.22)$$

и

$$W^H = \frac{\omega\mu}{\Gamma}; \quad W^E = \frac{\Gamma}{\omega\epsilon}. \quad (8.23)$$

Множитель j в правых частях (8.21) означает, что все поперечные компоненты сдвинуты по фазе относительно продольных на 90° . Поэтому равна нулю вещественная часть поперечной составляющей комплексного вектора Пойнтинга, и передача энергии в поперечном направлении отсутствует.

Магнитные и электрические волны. Как видно из (8.21), все поперечные компоненты поля могут существовать при $\dot{E}_z = 0$ или при $\dot{H}_z = 0$. В первом случае плоская волна называется «магнитной» (H -волной), а также «поперечно-электрической» (TE -волной). Во втором случае — «электрической» (E -волной) или и поперечно-магнитной» (TM -волной).

Уравнения Максвелла (8.19, 8.20) образуют в этих двух случаях независимые системы уравнений:

H-волны

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_2 &= -\frac{\omega\mu}{\Gamma} \dot{H}_1 \\ \dot{E}_1 &= \frac{\omega\mu}{\Gamma} \dot{H}_2 \\ \frac{\partial h_2 \dot{E}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 \dot{E}_1}{\partial q_2} &= -j\omega\mu h_1 h_2 \dot{H}_z \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_2} + j\Gamma h_2 \dot{H}_2 &= j\omega h_2 \dot{E}_1, \\ j\Gamma h_1 \dot{H}_1 + \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial q_1} &= -j\omega h_1 \dot{E}_2, \\ \frac{\partial h_2 \dot{H}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 \dot{H}_1}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (8.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_2} + j\Gamma h_2 \dot{E}_2 &= -j\omega\mu h_2 \dot{H}_1 \\ j\Gamma h_1 \dot{E}_1 + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial q_1} &= j\omega\mu h_1 \dot{H}_2 \\ \frac{\partial h_2 \dot{E}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 \dot{E}_1}{\partial q_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{cases} \dot{H}_2 = \frac{\omega\varepsilon}{\Gamma} \dot{E}_1 \\ \dot{H}_1 = -\frac{\omega\varepsilon}{\Gamma} \dot{E}_2 \\ \frac{\partial h_2 \dot{H}_2}{\partial q_1} - \frac{\partial h_1 \dot{H}_1}{\partial q_2} = \\ = j\omega\varepsilon h_1 h_2 \dot{E}_z \end{cases} \quad (8.25)$$

Из уравнений (8.24 и 8.25) с учетом обозначений (8.23) находим соотношения:

$$\frac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp} = \frac{\omega\mu}{\Gamma} = W^H \quad \text{для } H\text{-волн} \quad (8.26)$$

и

$$\frac{\dot{E}_\perp}{\dot{H}_\perp} = \frac{\Gamma}{\omega\varepsilon} = W^E \quad \text{для } E\text{-волн}, \quad (8.27)$$

где

$$\dot{E}_\perp = |a_1 \dot{E}_1 + a_2 \dot{E}_2| = \sqrt{\dot{E}_1^2 + \dot{E}_2^2}$$

и

$$\dot{H}_\perp = |a_1 \dot{H}_1 + a_2 \dot{H}_2| = \sqrt{\dot{H}_1^2 + \dot{H}_2^2}$$

— абсолютные значения поперечных компонент векторов поля.

Величины W^H и W^E называются *волновыми сопротивлениями* направляющей системы.

Легко проверить, что поперечные компоненты векторов **E** и **H** взаимно перпендикулярны:

$$\dot{E}_\perp \dot{H}_\perp = (a_1 \dot{E}_1 + a_2 \dot{E}_2) \left(-a_1 \frac{\dot{E}_2}{W} + a_2 \frac{\dot{E}_1}{W} \right) \equiv 0. \quad (8.28)$$

Поперечно-электромагнитные волны. Взяв в основу классификации плоских волн наличие продольной компоненты одного из векторов поля, мы теперь обратимся к случаю, когда обе эти компоненты отсутствуют:

$$E_z = 0 \quad \text{и} \quad H_z = 0. \quad (*)$$

Такие волны называются «поперечно-электромагнитными», или волнами *ТЕМ*. Простейший пример волн этого рода дает

основательно изученная в предыдущих главах электромагнитная волна в свободном пространстве.

Желая выяснить свойства *ТЕМ*-волн, положим в (8.21) $E_z = H_z = 0$.

Дальнейший анализ весьма несложен. Видно, что при $\chi \neq 0$ все компоненты поля обращаются в нуль: *ТЕМ*-волны существовать не могут. Зато при

$$\chi = 0 \quad (8.29)$$

во всех строчках (8.21) получаются неопределенности вида 0/0, и таким образом вопрос о существовании поперечно-электромагнитных волн остается открытым. Это значит, что (8.29) следует расценивать как *необходимое* условие существования *ТЕМ*-волн. Если же известно, что электромагнитное поле существует, то равенство (8.29) является *достаточным* признаком его поперечного (*ТЕМ*) характера. Действительно, невыполнение (*) означало бы в этом случае обращение всех поперечных компонент поля в бесконечность.

Ввиду (8.22 и 8.7) условие (8.29) равносильно следующему:

$$\Gamma = k, \quad v_\Phi = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \quad \text{и} \quad \Lambda = \lambda, \quad (8.29a)$$

т. е. *ТЕМ*-волны всегда распространяются с фазовой скоростью v , свойственной волнам в неограниченной среде.

Из (8.29) вытекает еще одно важное следствие. Взяв волновое уравнение (5.54) и применяя для простоты декартовы координаты, запишем:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \dot{E} + (k^2 - \Gamma^2) \dot{E} = 0,$$

т. е. с учетом (8.29a)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \dot{E} = 0,$$

или

$$\nabla_\perp^2 \dot{E} = 0, \quad (8.30)$$

где индекс \perp означает, что операция производится только в поперечных координатах.

Получив из (5.52) таким же путем

$$\nabla_\perp^2 \dot{H} = 0, \quad (8.31)$$

констатируем, что как электрическое, так и магнитное поля *ТЕМ*-волны в поперечной плоскости подчинены уравнению Лапласа. В то же время хорошо известно (гл. 3 и 4), что уравнение Лапласа описывает поля статические. Отсюда следует, что

а) поперечная структура электрического и магнитного полей *ТЕМ*-волны в конкретной направляющей системе не отличается от структуры соответствующих статических полей этой же системы;

б) *ТЕМ*-волны не могут распространяться в системах, не допускающих существование статических полей.

Так, задачи о цилиндрическом конденсаторе (§ 23, пример 4) и о коаксиальном кабеле постоянного тока (§ 30) дают полное представление о поперечном строении *ТЕМ*-волны коаксиальной линии. Далее, мы должны заключить, что в полом волноводе (металлической трубе) *ТЕМ*-волна не существует.

Из (8.19 или 8.20), а также прямо из (8.26 или 8.27) с учетом (8.29) вытекает, что волновое сопротивление направляющей системы для *ТЕМ*-волны равно

$$W^0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad (8.32)$$

т. е. не отличается от величины, установленной ранее (§ 38) для волны в неограниченной среде.

Примеры и упражнения

1. Рассмотреть результаты § 59 с точки зрения установленной выше классификации волн. Указать, при какой поляризации падающей волны у плоской границы возникают направляемые *H*-волны и при какой *E*-волны. Проверить, обладает ли *ТЕМ*-волна между параллельными плоскостями отмеченными выше свойствами.

2. В каких системах из показанных на рис. 198 и 205 могут распространяться *ТЕМ*-волны?

3. Взяв в основу решения статических задач, выписать все компоненты поля коаксиальной линии.

§ 61. Дисперсия направляемых волн

Направляемым *H*- и *E*-волнам в отличие от волн *ТЕМ* свойственна дисперсия, как это было, в частности, видно, на примере параллельных плоскостей. Изучение закона дисперсии позволит нам установить ряд общих особенностей этих волн.

Совершая уже известное преобразование (см. § 60, волны *ТЕМ*) и используя соотношение (8.22), приведем волновые уравнения (5.52 и 5.54) к виду:

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}} + \chi^2 \dot{\mathbf{E}} = 0 \quad (8.33)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{H}} + \chi^2 \dot{\mathbf{H}} = 0. \quad (8.34)$$

Перепишывая (8.22) в виде:

$$\Gamma^2 = k^2 - \chi^2, \quad (8.35)$$

отметим теперь, что это равенство выражает зависимость постоянной распространения Γ от частоты и свойств среды, так как здесь фигурирует величина

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu.$$

Мы вправе предположить также, что через неизвестный параметр χ постоянная распространения зависит от индивидуальных свойств конкретной направляющей системы. Равенство (8.35) называют «дисперсионным уравнением», а χ — «поперечным волновым числом» (в отличие от «продольного волнового числа» — постоянной распространения Γ). Чтобы судить о дисперсии направляемых волн, необходимо составить представление о характере поперечного волнового числа χ . Рассмотрим отдельно случаи *E*-и *H*-волн.

E-волны

Проектируя векторы уравнения (8.33) на ось z , имеем:

$$\nabla_{\perp}^2 E_{mz} = -\chi^2 E_{mz}. \quad (8.36)$$

Умножим обе части равенства на E_{mz} и проинтегрируем по поперечному сечению направляющей системы S_{\perp} :

$$\int_{S_{\perp}} E_{mz} \nabla_{\perp}^2 E_{mz} dS = -\chi^2 \int_{S_{\perp}} E_{mz}^2 dS. \quad (8.37)$$

Для дальнейших преобразований используем двумерный аналог теоремы Грина (3.99)

$$\int_S (\nabla_{\perp} \varphi \nabla_{\perp} \psi + \varphi \nabla_{\perp}^2 \psi) dS = \int_L \varphi \frac{d\psi}{dn} dl, \quad (8.38)$$

где все операции производятся в поперечных координатах, вместо объема V фигурирует площадь S и, соответственно, вместо поверхности, ограничивающей V , — контур L площади S .

Положив в (8.38)

$$S = S_{\perp}, L = L_{\perp} \text{ и } \varphi = \psi = E_{mz},$$

получаем:

$$\int_{S_{\perp}} (\nabla_{\perp} E_{mz})^2 dS + \int_{S_{\perp}} E_{mz} \nabla_{\perp}^2 E_{mz} dS = \int_{L_{\perp}} E_{mz} \frac{\partial E_{mz}}{\partial n} dl. \quad (8.39)$$

В ряде важнейших случаев (волновод, коаксиальная линия и др.) направляющая система ограничена замкнутой металлической

поверхностью. Считая проводник идеальным, имеем:

$$E_z = 0 \text{ на } L_{\perp}, \quad (8.40)$$

и правая часть равенства (8.39) обращается в нуль. Отсюда с помощью (8.37) находится следующее интегральное выражение поперечного волнового числа для E -волн:

$$\chi^2 = \frac{\int_{S_{\perp}} (\nabla_{\perp} E_{mz})^2 dS}{\int_{S_{\perp}} E_{mz}^2 dS}. \quad (8.41)$$

H -волны

Так же, как это было в случае E -волн, последовательно получаем формулы:

$$\nabla_{\perp}^2 H_{mz} = -\chi^2 H_{mz}; \quad (8.42)$$

$$\int_{S_{\perp}} H_{mz} \nabla_{\perp}^2 H_{mz} dS = -\chi^2 \int_{S_{\perp}} H_{mz}^2 dS \quad (8.43)$$

и

$$\int_{S_{\perp}} (\nabla_{\perp} H_{mz})^2 dS + \int_{S_{\perp}} H_{mz} \nabla_{\perp}^2 H_{mz} dS = \int_{L_{\perp}} H_{mz} \frac{\partial H_{mz}}{\partial n} dl. \quad (8.44)$$

Взяв идеально проводящий контур L_{\perp} , выберем такие поперечные координаты (рис. 206)

$$q_1 = \tau \text{ и } q_2 = n,$$

что одна из них совпадает с L_{\perp} , а другая везде пересекает его под прямым углом. В соответствии с принятыми обозначениями перепишем первую строчку (8.20) так:

$$\frac{\partial H_{mz}}{\partial n} + j\Gamma h_n H_{mn} = j\omega \epsilon h_n E_{m\tau}. \quad (8.45)$$

Но на идеально проводящей поверхности

$$E_{\tau} = 0 \text{ и } H_n = 0,$$

поэтому, как видно из (8.45), выполняется также граничное условие

$$\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \text{ на } L_{\perp}, \quad (8.46)$$

которым мы часто будем пользоваться в дальнейшем.

Граничное условие (8.46) обращает в нуль правую часть равенства (8.44), и, таким образом, поперечное волновое число для

H -волн выражается в виде:

$$\chi^2 = \frac{\int_{S_{\perp}} (\nabla_{\perp} H_{mz})^2 dS}{\int_{S_{\perp}} H_{mz}^2 dS}. \quad (8.47)$$

Закон дисперсии. Результаты произведенного исследования (8.41) и (8.47) показывают, что число χ действительно определяется видом поперечного сечения направляющей системы S_{\perp} . При этом как для E -, так и для H -волн выполняется неравенство¹

$$\chi^2 > 0, \quad (8.48)$$

согласно которому χ — величина вещественная.

Этот вывод дает возможность установить закон дисперсии. Введем величины

$$\lambda_{cp} = \frac{2\pi}{\chi} \text{ и } f_{kp} = \frac{\chi v}{2\pi}, \quad (8.49)$$

называемые, соответственно, критической длиной волны и критической частотой.

На основании (8.35) постоянная распространения

$$\Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k}\right)^2}, \quad (8.50)$$

а с учетом обозначений (8.49) эта формула принимает вид:

$$\Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{kp}}{f}\right)^2}, \quad (8.51)$$

где λ — длина волны в неограниченной среде с теми же параметрами ϵ и μ , которые характеризуют среду направляющей системы.

Пользуясь формой записи (8.7), получаем выражения фазовой скорости и длины волны направляющей системы:

$$v_{\phi} = v / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2} = v / \sqrt{1 - \left(\frac{f_{kp}}{f}\right)^2} \quad (8.52)$$

и

$$\Lambda = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{kp}}\right)^2} = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{f_{kp}}{f}\right)^2}. \quad (8.53)$$

Если частота значительно превышает критическую

$$f \gg f_{kp}$$

и, следовательно, «рабочая длина волны» λ значительно короче критической

$$\lambda \ll \lambda_{kp},$$

¹ Мы ограничились системами с замкнутой идеально проводящей оболочкой и однородным диэлектриком.

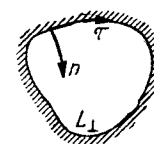


Рис. 206

то постоянная распространения Γ мало отличается от волнового числа для неограниченной среды k ; поэтому также

$$v_{\phi} \approx v \text{ и } \Lambda \approx \lambda.$$

По мере уменьшения частоты (роста λ) величины v_{ϕ} и Λ неограниченно растут, пока не обращаются в бесконечность при $f = f_{кр}$. Начиная с этого момента, постоянная распространения становится мнимой величиной

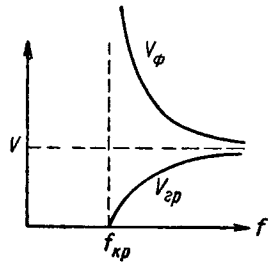


Рис. 207

$$\Gamma = \pm jk \sqrt{(f_{кр}/f)^2 - 1} = \pm j\alpha \quad \left. \begin{array}{l} \text{при } f < f_{кр}. \end{array} \right\} \quad (8.54)$$

Поле направляющей системы теряет волновой характер и убывает вдоль ее оси:

$$e^{-j\Gamma z} = e^{-\alpha z} \quad (8.54a)$$

(в (8.54) выбран знак минус).

Зависимость фазовой скорости от частоты показана на рис. 207.

Групповая скорость и передача энергии. С помощью (6.126) из (8.52) находится групповая скорость направляемой E - или H -волны:

$$v_{гр} = \frac{d\omega}{d\Gamma} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}. \quad (8.55)$$

Как видно, выполняется соотношение

$$v_{\phi} v_{гр} = v^2. \quad (8.56)$$

При критических условиях групповая скорость обращается в нуль. Ее зависимость от частоты представлена на рис. 207.

Полезно проверить, что групповая скорость направляемой волны совпадает со средней скоростью передачи энергии. Перейдя в формуле (2.27) к средним значениям и проинтегрировав ее числитель и знаменатель по поперечному сечению направляющей системы S_{\perp} , получаем соотношение

$$v_g = \frac{\int_{S_{\perp}} \bar{P} dS}{\int_{S_{\perp}} \bar{w} dS} = \frac{\bar{P}}{\int_{S_{\perp}} \bar{w} dS}, \quad (8.57)$$

где

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} E_{m\perp} H_{m\perp} dS = \frac{W}{2} \int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \frac{1}{2W} \int_{S_{\perp}} E_{m\perp}^2 dS \quad (8.58)$$

— средняя мощность волны, равная среднему потоку вектора Пойнтинга через S_{\perp} (в выводе учтено, что \mathbf{E}_{\perp} и \mathbf{H}_{\perp} взаимно перпендикулярны и лежат в фазе).

Возьмем для определенности волну электрическую ($H_z = 0$) и перепишем (8.57) в виде:

$$v_g = \frac{\int_{S_{\perp}} E_{m\perp}^2 dS}{2W^E} \bigg/ \left[\frac{\epsilon}{4} \int_{S_{\perp}} (E_{m\perp}^2 + E_{mz}^2) dS + \frac{\mu}{4} \int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS \right],$$

или, после простых преобразований,

$$v_g = 2 \bigg/ \left[\epsilon W^E \left(1 + \frac{\int_{S_{\perp}} E_{mz}^2 dS}{\int_{S_{\perp}} E_{m\perp}^2 dS} \right) + \frac{\mu}{W^E} \right]. \quad (8.59)$$

Как видно из (8.21),

$$E_{m\perp}^2 = \frac{\Gamma^2}{\chi^4} (\nabla_{\perp} E_{mz})^2. \quad (8.60)$$

Привлекая, далее, (8.41), находим, что

$$\frac{\int_{S_{\perp}} E_{mz}^2 dS}{\int_{S_{\perp}} E_{m\perp}^2 dS} = \frac{\chi^2}{\Gamma^2} \quad (8.61)$$

и, следовательно (8.22, 8.23),

$$v_g = 2 \bigg/ \left(\epsilon W^E \frac{k^2}{\Gamma^2} + \frac{\mu}{W^E} \right) = \frac{\Gamma}{\omega \mu \epsilon} = v \frac{\Gamma}{k}. \quad (8.62)$$

Этот результат совпадает с (8.55):

$$v \frac{\Gamma}{k} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

чем и доказывается равенство

$$v_{gp} = v_g. \quad (8.63)$$

Точно так же производится проверка для случая H -волн.

Можно показать, что интегральные выражения (8.41) и (8.47), если их рассматривать как функционалы (т. е. функции от различных функций E_z и H_z), обладают экстремальными свойствами. Это значит, что внося под соответствующие интегралы в качестве E_z и H_z различные функции, подчиненные требуемым граничным условиям, мы получим экстремальное (именно, минимальное) значение χ^2 в том случае, когда E_z и H_z удовлетворяют уравнениям (8.36) и (8.42), соответственно. Поперечное волновое число, таким образом, можно найти, используя экстремальность функционала. Это относится к задачам вариационного исчисления. Нижняя граница функционала (8.47) соответствует наименьшему поперечному волновому числу данной направляющей системы, т. е. ее основной волне (см. ниже §§ 62, 63).

Примеры и упражнения

1. В выводе уравнения Лапласа (8.30, 8.31) и уравнений (8.33, 8.34) декартовы координаты были применены лишь для облегчения действий. Чтобы проверить справедливость этих выражений в обобщенно-цилиндрической системе координат, надо доказать, что в применении к произвольному вектору поля плоской

волны

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_m(q_1, q_2) e^{j(\omega t - \Gamma z)}$$

($\mathbf{A} = \mathbf{E}$ или $\mathbf{A} = \mathbf{H}$) оператор Лапласа имеет вид

$$\nabla^2 = \nabla_{\perp}^2 - \Gamma^2, \quad (8.64)$$

где индекс \perp означает, что операция производится лишь в поперечных координатах q_1, q_2 (при $\partial/\partial z = 0$).

Для этого следует, исходя из тождества типа (П1.23) с учетом (5.16)

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}} = -\text{rot rot } \dot{\mathbf{A}},$$

дважды применить к $\dot{\mathbf{A}}$ оператор rot и упростить полученный результат с помощью (П2.11)

$$\text{div } \dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial h_2 \dot{A}_1}{\partial q_1} + \frac{\partial h_1 \dot{A}_2}{\partial q_2} - j \Gamma h_1 h_2 A_z \right) = 0.$$

Рекомендуется читателю самостоятельно произвести указанные действия.

Попутно при этом вытекает еще одно важное соотношение:

$$(\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{A}})_z = \nabla_{\perp}^2 \dot{A}_z \quad (8.65)$$

— в обобщенно-цилиндрических координатах продольная компонента вектора $\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{A}}$ находится применением оператора Лапласа ∇_{\perp}^2 к продольной проекции исходного вектора $\dot{\mathbf{A}}$.

2. Проверим формулу (8.47) на примере параллельных плоскостей. На основании (8.1) продольная компонента вектора \mathbf{H} с точностью до постоянного множителя равна

$$H_{my} = \cos \frac{n\pi}{d} z$$

и, следовательно,

$$\nabla_{\perp} H_{m\perp} = -z_0 \frac{n\pi}{d} \sin \frac{n\pi}{d} z.$$

Внося это в (8.47) и интегрируя по поперечному сечению, имеем:

$$\chi^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^d \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi}{d} z dx dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^d \cos^2 \frac{n\pi}{d} z dx dz} =$$

$$= \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{C \int_0^d \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi}{d} z dz}{C \int_0^d \cos^2 \frac{n\pi}{d} z dz} = \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2.$$

Найденная величина, как и следовало ожидать, совпадает с (8.3а).

3. Сделать аналогичный вывод для E -волн.

4. Для системы параллельных плоскостей проверить формулы (8.52, 8.53 и 8.55).

5. Показать, что при критической частоте исчезает поперечная электрическая компонента E -волны и поперечная магнитная компонента H -волны, а при $f \rightarrow \infty$ — продольные компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} .

6. Показать, что при увеличении расстояния между параллельными плоскостями любая направляемая ими волна приближается к TEM -волне свободного пространства.

7. Показать, что при $f \leq f_{кр}$ поток энергии вдоль оси направляющей системы в среднем равен нулю.

8. Вычислить затухание поля направляющей системы при частотах $f = 0,9f_{кр}$; $f = 0,5f_{кр}$; $f = 0,3f_{кр}$ и $f = 0,1f_{кр}$.

9. Проверить равенство (8.63) для случая H -волн.

2. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

Различные направляющие системы, не существовавшие или почти не известные два десятилетия назад, получили широкое распространение благодаря интенсивному развитию радиотехники сверхвысоких частот. Особое место занимают здесь полые волноводы; пионерами в области их инженерной теории в СССР являются А. Л. Драбкин и Е. М. Студенков. Важные теоретические исследования по волноводам принадлежат советским ученым Л. И. Мандельштаму, Г. В. Кисунько, А. А. Самарскому и А. Н. Тихонову и др.

Полый волновод прямоугольного или круглого сечения представляет собой основной вид линии передачи в диапазоне сантиметровых волн. Однако, кроме обычных волноводов и коаксиальных линий, в технике сверхвысоких частот применяется много разнообразных систем, преследующих специальные цели. Некоторое представление об этом дает § 65.

Ниже на основании общей теории, изложенной в §§ 59 — 61, будут рассмотрены важнейшие направляющие системы без учета потерь энергии. Этому последнему вопросу отводится 3-й раздел данной главы.

§ 62. Прямоугольный волновод

Полый волновод прямоугольного поперечного сечения называется обычно «прямоугольным волноводом». На рис. 208 он изображен в наиболее подходящей здесь декартовой системе координат, оси которой Ox и Oy параллельны сторонам поперечного контура a и b .

E-волны

Будем искать решение уравнения (8.36), имеющего в декартовых координатах вид

$$\frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial y^2} = -\chi^2 E_{mz}, \quad (8.66)$$

методом разделения переменных (§ 27). Положим

$$E_{mz} = X(x) Y(y), \quad (8.67)$$

где X и Y — не известные пока функции переменных x и y .

Подстановка (8.67) в (8.66) приводит к дифференциальному уравнению

$$X''Y + XY'' = -\chi^2 XY,$$

которое после деления всех членов на XY принимает форму

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\chi^2. \quad (8.68)$$

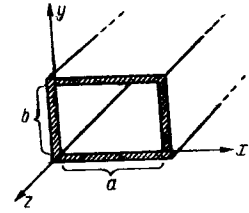


Рис. 208

Учитывая взаимную независимость слагаемых левой части (8.68), приравниваем каждое из них постоянной величине

$$\frac{X''}{X} = -\chi_x^2 \text{ и } \frac{Y''}{Y} = -\chi_y^2 \quad (8.69)$$

с соблюдением равенства

$$\chi_x^2 + \chi_y^2 = \chi^2. \quad (8.70)$$

Легко догадаться, что

$$\chi_x^2 > 0 \text{ и } \chi_y^2 > 0, \quad (8.71)$$

так как (§ 61) $\chi^2 > 0$, а физические условия вдоль осей OX и OY внутри волновода идентичны.

Записывая хорошо известные решения уравнений (8.69)

$$\left. \begin{aligned} X &= A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x, \\ Y &= C \cos \chi_y y + D \sin \chi_y y \end{aligned} \right\} \quad (8.72)$$

имеем:

$$E_{mz} = (A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x) (C \cos \chi_y y + D \sin \chi_y y). \quad (8.73)$$

Полученное общее решение, содержащее шесть неизвестных постоянных A, B, C, D, χ_x и χ_y , не дает еще представления об исследуемом поле. Это и понятно, ибо в произведенных действиях пока не нашли отражения конкретные физические условия задачи — граничные условия на оболочке волновода. Потребовав (8.40), чтобы продольная компонента электрического поля уничтожалась

на всех стенках волновода, напишем, во-первых:

$$\left. \begin{aligned} E_{mz} &= 0 \\ \text{при } x=0 \text{ и } y=0 \end{aligned} \right\} \quad (8.74)$$

Из (8.73) видно, что это возможно лишь, если

$$A = C = 0,$$

и, следовательно,

$$E_{mz} = E_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y, \quad (8.75)$$

где произведение BD заменено одним неизвестным коэффициентом E_0 .

Во-вторых, в силу того же условия (8.40)

$$\left. \begin{aligned} E_{mz} &= 0 \\ \text{при } x=a \text{ и } y=b \end{aligned} \right\} \quad (8.74a)$$

(две другие стенки). Налагая условие (8.74a) на решение (8.75), находим, что

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a} \text{ и } \chi_y = \frac{n\pi}{b}, \quad (8.76)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ — любые целые числа. Значения $m = 0$ и $n = 0$ исключены, потому что они не соответствуют существованию поля ($E_{mz} = 0$). С учетом этого результата (8.70) принимает вид:

$$\chi^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (8.77)$$

Итак, различным решениям E_{mz} соответствуют определенные значения поперечного волнового числа χ . Задав какие-либо числа m и n , мы однозначно определяем тип поля волновода. Все компоненты поля данного типа нетрудно найти, подставив в общие формулы (8.21)

$$\left. \begin{aligned} H_z &= 0; \quad E_z = E_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y e^{j(\omega t - \Gamma z)}, \\ h_1 &= h_2 = 1; \quad q_1 = x, \quad q_2 = y. \end{aligned} \right\}$$

В результате получается:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{E}_{mx} &= -j\Gamma \frac{\chi_x}{\chi^2} E_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{E}_{my} &= -j\Gamma \frac{\chi_y}{\chi^2} E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{H}_{mx} &= j \frac{\Gamma}{W^* E} \frac{\chi_y}{\chi^2} E_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{H}_{my} &= -j \frac{\Gamma}{W^* E} \frac{\chi_x}{\chi^2} E_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \quad (8.78)$$

В соответствии с принятой терминологией говорят, что формулы (8.78) выражают «поле E_{mn} » (или TM_{mn}) прямоугольного волновода. Это поле имеет характер распространяющейся волны при вещественных значениях волнового числа (§ 61)

$$\Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2},$$

где, согласно (8.49 и 8.77),

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (8.79)$$

В дальнейшем мы чаще будем пользоваться понятием критической длины волны $\lambda_{кр}$, проще связанной с размерами системы, чем $f_{кр}$. Необходимо помнить (§ 61), что сравниваемая с ней величина λ — это длина волны в свободном пространстве с теми же свойствами (параметры ϵ , μ), что и среда, заполняющая волновод.

Как видно из (8.79), с увеличением m и n критическая длина волны $\lambda_{кр}$ уменьшается. Направляемая волна данного типа распространяется до тех пор, пока $\lambda < \lambda_{кр}$. Волны высших типов существуют, таким образом, при меньших значениях λ , т. е. при более высоких частотах. Для низшей электрической волны E_{11} , согласно (8.79), критическая длина волны

$$\lambda_{кр} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (8.80)$$

Одновременно в волноводе распространяется лишь ограниченное число волн различного типа. Действительно, при любых размерах поперечного сечения можно найти такие числа m и n , что рабочая длина волны окажется ниже критической.

На рис. 209 показано строение различных E -полей волновода в некоторый момент времени — «остановленная волна». Ввиду отсутствия продольной составляющей вектора \mathbf{H} магнитные силовые линии лежат в поперечной плоскости. Поле E_{11} соответствует одному семейству замкнутых магнитных линий и является простейшим. В центре этого семейства лежит максимум продольной составляющей вектора \mathbf{E} . По рис. 209 легко найти соответствие между строением поля и значениями индексов m и n . Это числа полуволновых вариаций поля вдоль осей x и y . Величины

$$\lambda_x = 2\pi/\chi_x \text{ и } \lambda_y = 2\pi/\chi_y \quad (8.81)$$

играют роль поперечных длин волн.

H-волны

Взяв теперь уравнение (8.42)

$$\frac{\partial^2 H_{mz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{mz}}{\partial y^2} = -\chi^2 H_{mz}, \quad (8.82)$$

уже известным путем находим общий вид его решения:

$$H_{mz} = (A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x) (C \cos \chi_y y + D \sin \chi_y y). \quad (8.83)$$

Налагая граничное условие (8.46)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} = 0 \\ \text{при } x=0 \text{ и } x=a \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} = 0 \\ \text{при } y=0 \text{ и } y=b \end{aligned} \right\}, \quad (8.84)$$

сначала получаем:

$$\frac{\partial H_{mz}}{\partial y} \Big|_{y=0} = (A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x) (-\chi_y D) = 0.$$

Отсюда $D=0$, так как только при этом равенство будет выполнено для всех x .

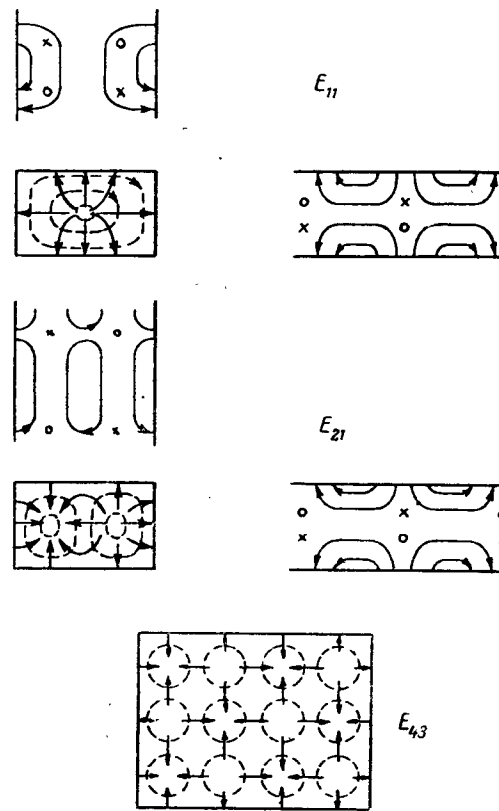


Рис. 209

Точно так же доказывается, что $B=0$. В результате

$$H_{mz} = H_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y. \quad (8.85)$$

Далее из граничных условий при $x=a$ и $y=b$ следует, что

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a} \text{ и } \chi_y = \frac{n\pi}{b}.$$

и. таким образом, подобно (8.77)

$$\chi^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \quad (8.77a)$$

Внося (8.85) в общие формулы (8.21), получаем выражения всех компонент поля типа H_{mn} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{H}_{mx} &= j\Gamma \frac{\chi_x}{\chi^2} H_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{H}_{my} &= j\Gamma \frac{\chi_y}{\chi^2} H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{E}_{mx} &= j\Gamma W^H \frac{\chi_x}{\chi^2} H_0 \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \\ \dot{E}_{my} &= -j\Gamma W^H \frac{\chi_y}{\chi^2} H_0 \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y. \end{aligned} \right\} \quad (8.86)$$

Так как общий вид поперечного волнового числа χ для H -волн не отличается от полученного ранее для E -волн, критическая длина волны по-прежнему определяется формулой (8.79):

$$\lambda_{кр} = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (8.79a)$$

Однако, как видно из (8.86), H -поле существует и в том случае, когда одно из чисел m и n есть нуль. При этом критическая длина волны равна

$$\lambda_{кр}^{10} = 2a \text{ или } \lambda_{кр}^{01} = 2b. \quad (8.87)$$

Одна из этих величин оказывается *наибольшей* среди критических длин волн всех возможных E - и H -полей прямоугольного волновода. Полагая в дальнейшем

$$a > b,$$

мы констатируем, что наибольшей будет величина $\lambda_{кр}^{10}$. Это значит, что при достаточно малых размерах поперечного сечения волновода лишь одно поле H_{10} будет существовать в виде распространяющейся волны, которая называется *основной*. На практике применяется именно основная волна, распространяющаяся «без примеси» волн высших типов.

Взяв в формулах (8.86) $m = 1$ и $n = 0$, выпишем компоненты поля H_{10} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a}; \\ \dot{E}_{mx} = 0; \dot{H}_{mx} &= j \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} H_0 \sin \frac{\pi x}{a}; \\ \dot{E}_{my} = -j \frac{2a}{\lambda} W^0 H_0 \sin \frac{\pi x}{a}; \dot{H}_{my} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.88)$$

Основные характеристики волны типа H_{10} , согласно (8.26, 8.52, 8.53, 8.55), имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W^H &= W^0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \quad \Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \\ v_\phi &= v / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \quad \Lambda = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}; \\ v_{zp} &= v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.89)$$

На рис. 210 показано строение различных H -полей. Магнитные силовые линии поля H_{10} образуют лежащие в плоскости XOY замкнутые контуры, а электрические силовые линии параллельны оси OY . Максимум электрического поля сдвинут по оси OZ относительно центра семейства магнитных линий на $\Lambda/4$. Однако, как легко проверить в соответствии с требованием § 3, в этом центре лежит максимум тока смещения.

Равенство нулю одного из индексов m или n означает, что поле в соответствующем направлении однородно: не имеет вариаций. Поперечная длина волны λ_x или λ_y (8.81) при этом обращается в бесконечность.

Сопоставляя формулы (8.88, 8.89) и рис. 210 с результатами § 59, мы отмечаем, что между параллельными плоскостями при горизонтальной поляризации распространяются волны H_{m0} , свойственные прямоугольному волноводу. Переход от этой более простой направляющей системы к волноводу можно представить как «рассечение» ее двумя новыми идеально проводящими плоскостями, параллельными плоскости падения. В силу соблюдения граничных условий такие плоскости не нарушают первоначального поля и могут быть расположены на любом расстоянии. Условия распространения волны H_{m0} в волноводе определяются поэтому (ср. 8.87) одним лишь размером a . Сравнение с системой параллельных плоскостей показывает, что поле волновода можно рассматривать как результат многократного отражения плоской однородной волны от его стенок (концепция Бриллюэна).

На основании (8.58) нетрудно найти передаваемую волноводом мощность. Для волны основного типа, согласно (8.88),

$$E_{m\perp} = E_0 \sin \frac{\pi x}{a}, \quad \left(E_0 = \frac{2a}{\lambda} W^0 H_0 \right),$$

и в результате:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P} &= \frac{E_0^2}{2W^H} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \frac{abE_0^2}{4W^H} = \\ &= \frac{abE_0^2}{4W^0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.90)$$

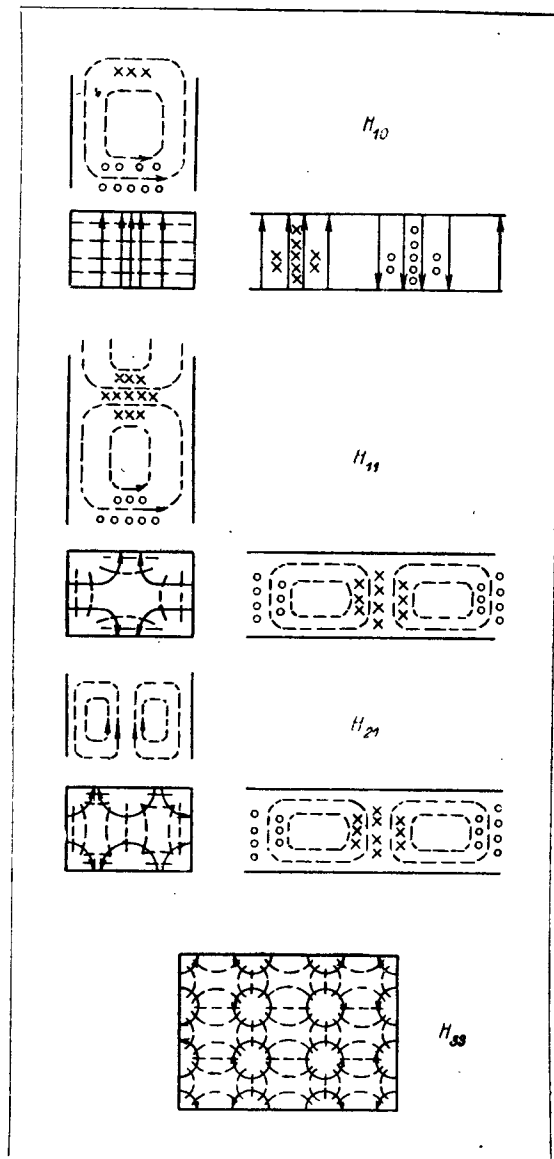


Рис. 210

В оболочке волновода течет поверхностный ток, плотность которого определяется по формуле (7.91)

$$\dot{\eta} = [n_0, \dot{H}].$$

Отсюда, например, видно, что в случае E -волн существует лишь продольный ток. Распределение тока для волн E_{11} и H_{10} показано на рис. 211.

Подчеркнем в заключение некоторые особенности волновода, выявленные произведенным исследованием. Направляемые E - и H -волны образуют бесконечный ряд типов, отличающихся строением поля и скоростью распространения. Однако одновременно существует лишь ограниченное число волн. При этом размеры сечения прямоугольного волновода выбираются обычно с расчетом,

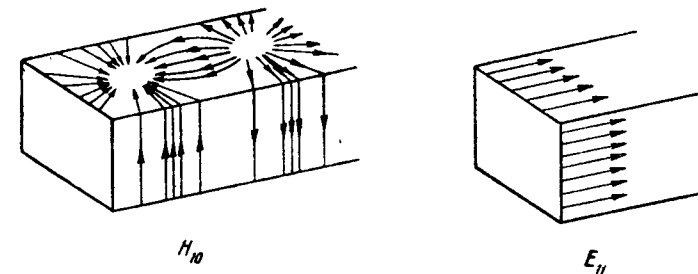


Рис. 211

чтобы распространялась только волна основного типа H_{10} . При достаточно малых размерах

$$a < \lambda/2$$

не может существовать и основная волна, и передачи энергии не происходит. Применение волновода оказывается, таким образом, практически допустимым на очень коротких волнах, обычно сантиметровых и миллиметровых.

Примеры и упражнения

1. Найти критические длины волн первых десяти типов поля прямоугольного волновода, заполненного воздухом, при размерах $a = 10$ см и $b = 5$ см. Обратить внимание на постепенное сближение результатов.

Построить график зависимостей v_{ϕ} и v_{gr} от a для волны основного типа пустого волновода.

3. Как изменятся результаты пп. 1 и 2 при заполнении волновода диэлектриком с $\epsilon = 9\epsilon_0$?

4. Построить магнитные силовые линии в поперечном сечении прямоугольного волновода для волны E_{11} и в плоскости широкой стенки для волны H_{10} .

5. Проверить формулы (8.41 и 8.47) для прямоугольного волновода.

6. Найти постоянную затухания для поля H_{10} пустого прямоугольного волновода с размером $a = 1$ см при $\lambda = 3$ см.

7. В волноводе п. 1 напряженность электрического поля в пучности волны основного типа равна $E_m = 10^3$ в/м. Найти амплитуды поперечного и продольного магнитного поля, а также передаваемую мощность при $\lambda = 15$ см.

8. Построить линии тока в стенках прямоугольного волновода для волны основного типа.

9. Показать, что в волне основного типа прямоугольного волновода центр семейства магнитных линий совпадает с максимумом тока смещения.

10. Ввиду того, что поперечные и продольные компоненты поля направляемой волны сдвинуты по фазе на 90° (§ 60), в прямоугольном волноводе, передающем волну основного типа, существуют точки, в которых вектор \mathbf{H} поляризован по кругу. Найти геометрическое место этих точек.

§ 63. Круглый волновод

Волновод круглого поперечного сечения показан на рис. 212 в цилиндрической системе координат. Буквой R обозначен радиус волновода. Его изучение мы поведем по уже известному плану.

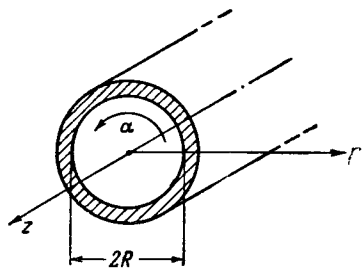


Рис. 212

E-волны

Запишем уравнение (8.36) в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{mz}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial \alpha^2} = -\chi^2 E_{mz} \quad (8.91)$$

и будем искать решение методом разделения переменных (§ 27), положив

$$E_{mz} = X(r) Y(\alpha). \quad (8.92)$$

Подстановка (8.92) после простого преобразования дает:

$$r^2 \frac{X''}{X} + r \frac{X'}{X} + \frac{Y''}{Y} = -r^2 \chi^2. \quad (8.93)$$

Ввиду независимости функций X и Y это уравнение распадается на два следующих:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y''}{Y} &= -n^2 \\ \text{и} \\ X'' + \frac{X'}{r} + X \left(\chi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.94)$$

где n^2 — постоянная разделения.

Решение первого из этих уравнений (3.118)

$$Y = A \cos n\alpha + B \sin n\alpha$$

обычно обозначают так:

$$Y = \frac{\cos}{\sin} n\alpha. \quad (8.95)$$

Вторая строчка (8.94) представляет собой уравнение Бесселя, решение которого для цилиндрической области, подобно изображенной на рис. 212 (см. Приложение 3), есть

$$X = C J_n(\chi r), \quad (8.96)$$

где C — постоянная.

На основании (8.95 и 8.96) запишем:

$$E_{mz} = E_0 J_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha. \quad (8.97)$$

Здесь E_0 — неизвестная амплитуда, а в (8.95) положено $A = 1$.

По смыслу этого решения мы должны потребовать его азимутальной периодичности

$$E_{mz}(\alpha) = E_{mz}(\alpha + 2\pi)$$

— поворот на 360° возвращает точку в прежнее положение. Отсюда следует, что n — произвольное целое число или нуль:

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.98)$$

С целью найти поперечное волновое число χ , наложим на (8.97) граничное условие (8.40)

$$\left. \begin{aligned} E_{mz} &= 0 \\ \text{при} \\ r &= R, \end{aligned} \right\} \quad (8.99)$$

Как видно, оно влечет за собой уравнение

$$J_n(\chi R) = 0, \quad (8.100)$$

одним из корней которого должно быть произведение χR . Корней этих (см. Приложение 3) бесчисленное множество. Обозначая их символом B_{nm} , где

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.101)$$

номер корня в порядке возрастания аргумента, получаем выражение поперечного волнового числа:

$$\chi = \frac{B_{nm}}{R} \quad (8.102)$$

и, далее (8.49), выражение критической длины волны:

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi} = \frac{2\pi R}{B_{nm}} \quad (8.103)$$

Сочетание nm определяет тип E -поля волновода круглого поперечного сечения, которое имеет характер распространяющейся волны при $\lambda < \lambda_{кр}$.

По данным Приложения 3 составлена следующая таблица значений величины $\lambda_{кр}/R$ для низших E -полей:

Таблица 4

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	2,612	1,138	0,7260	0,5328
1	1,640	0,8955	0,6176	0,4716
2	1,223	0,7464	0,5407	0,4246
3	0,9847	0,6436	0,4827	0,3873

Подставляя в (8.21)

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_z = 0; \quad \dot{E}_z = E_0 J_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na e^{j(\omega t - \Gamma z)}, \\ q_1 = r, \quad q_2 = a \text{ и } h_1 = 1, \quad h_2 = r \end{aligned} \right\}$$

находим все компоненты поля типа E_{nm} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= E_0 J_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na, \\ \dot{E}_{mr} &= -j \frac{\Gamma}{\chi} E_0 J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na, \\ \dot{E}_{ma} &= -j \frac{n\Gamma}{\chi^2 W^{E_r}} E_0 J_n(\chi r) \frac{-\sin}{\cos} na, \\ \dot{H}_{mr} &= j \frac{n\Gamma}{\chi^2 W^{E_r}} E_0 J_n(\chi r) \frac{-\sin}{\cos} na, \\ \dot{H}_{ma} &= -j \frac{\Gamma}{\chi W^E} E_0 J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na. \end{aligned} \right\} \quad (8.104)$$

Строение различных E -полей круглого волновода показано на рис. 213. Привлекая для сравнения рис. 209, изображающий E -поля волновода прямоугольного, сразу же находим черты сходства. Так, полю E_{11} прямоугольного волновода аналогично поле E_{01} круглого, полю E_{21} прямоугольного — E_{11} круглого и т. д.

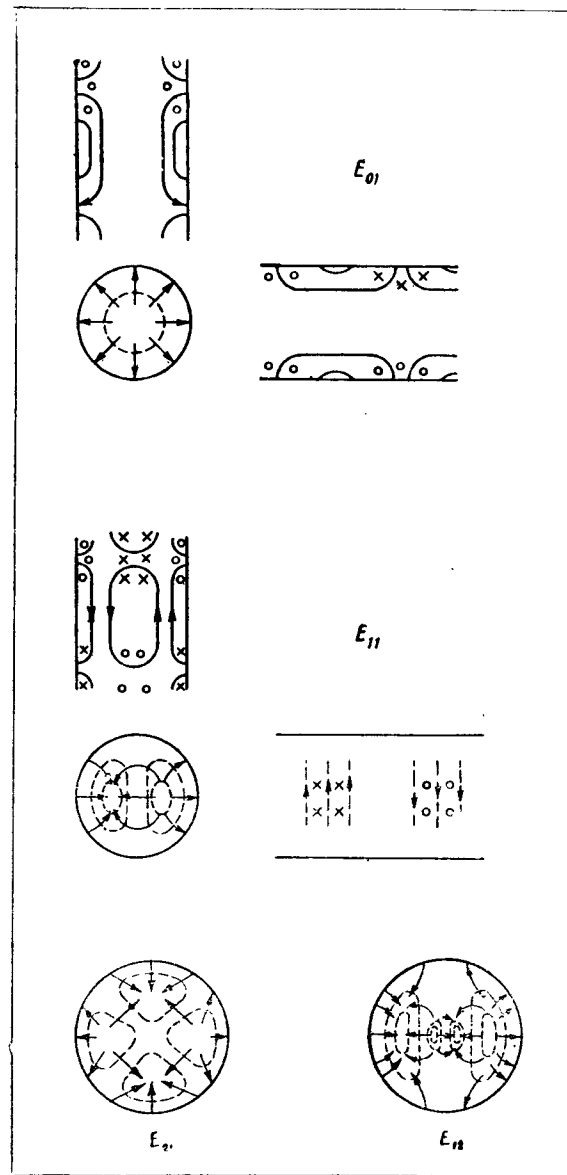


Рис. 213

Если $n = 0$, то поле круглого волновода однородно (лишено вариаций) по азимуту.

При построении полей, представленных на рис. 207, в линейной комбинации (8.95)

$$A \cos na + B \sin na = \frac{\cos}{\sin} na$$

положено $B = 0$. Легко проверить, что при $B \neq 0$ (A и B вещественны) строение поля остается прежним, а изменяется только его ориентация относительно начала отсчета азимута α . Действительно,

$$A \cos na + B \sin na = D \cos (na - \psi),$$

где

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{и} \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A},$$

т. е. поле повернуто относительно начала на угол ψ .

Если же

$$B = \pm jA,$$

то

$$A \cos na + B \sin na = A e^{\pm jna},$$

и в волноводе существует суперпозиция двух полей прежнего вида с относительным сдвигом на 90° по фазе и таким же смещением по азимуту. Результирующее поле вращается около оси z — «бежит по азимуту», его называют еще «полем круговой поляризации волновода».

Н-волны

Записывая решение уравнения (8.42) в виде

$$H_{mz} = H_0 J_n(\chi r), \quad (8.105)$$

налагаем граничное условие (8.46)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{mz}}{\partial r} = 0 \\ r = R \end{aligned} \right\} \quad (8.106)$$

В результате приходим к уравнению

$$J'_n(\chi R) = 0, \quad (8.107)$$

корни которого (см. Приложение 3) обозначены символом A_{nm} . Сочетание чисел

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{индекс функции Бесселя})$$

и

$$m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{номер корня})$$

определяет тип поля H_{nm} круглого волновода. При этом поперечное волновое число χ равно

$$\chi = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}} = \frac{A_{nm}}{R}. \quad (8.108)$$

Значения величины $\lambda_{кр}/R$ приведены в следующей таблице:

Таблица 5

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	1,640	0,8955	0,6176	0,4716
1	3,413	1,178	0,7360	0,5367
2	2,057	0,9369	0,6302	0,4770
3	1,495	0,7839	0,5538	

Первая строчка данной таблицы совпадает со второй строчкой табл. 4, и, следовательно, волны H_{0m} и E_{1m} по характеру распространения неразличимы. Они называются по этому признаку *вырожденными*. Так, например, вместе распространяются и терпят отсечку волны H_{01} и E_{11} . Обращаясь к предыдущему параграфу, мы должны отметить, что в случае прямоугольного волновода невырожденными оказываются только магнитные волны H_{m0} и H_{0n} , которым нет соответствия в семействе электрических волн; любая же волна H_{mn} при $m \neq 0$ и $n \neq 0$ распространяется точно так же, как и волна E_{mn} . Зато в круглом волноводе условия распространения любой волны не изменяются в зависимости от азимутальной ориентации ее поля. Возможно бесчисленное множество различных азимутальных ориентаций, но в каждом случае поле разлагается на два ортогонально (под прямым углом) ориентированных типа. Таким образом, здесь имеет место двукратное вырождение.

Как видно из табл. 4 и 5, основной в круглом волноводе является волна H_{11} , по сочетанию индексов *не низшая*, как это было в случае волновода прямоугольного. В порядке убывания критической волны типы волн круглого волновода располагаются в ряд:

$$H_{11}, E_{01}, H_{21}, (H_{01} \text{ и } E_{11}), H_{31}, E_{21}, H_{12}, E_{02} \dots$$

в то время как в случае прямоугольного волновода уменьшению критической длины волны обязательно соответствует возрастание индекса m или n типа волны.

На основании (8.105 и 8.21) записываем компоненты поля круглого волновода типа H_{nm} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 J_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na; \\ \dot{H}_{mr} &= -j \frac{\Gamma}{\chi} H_0 J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -j \frac{n\Gamma}{\chi^2 r} H_0 J_n(\chi r) \frac{-\sin}{\cos} na; \\ \dot{E}_{mr} &= -j \frac{n\Gamma W^H}{\chi^2 r} H_0 J_n(\chi r) \frac{-\sin}{\cos} na; \\ \dot{E}_{m\alpha} &= j \frac{\Gamma W^H}{\chi} H_0 J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} na. \end{aligned} \right\} \quad (8.109)$$

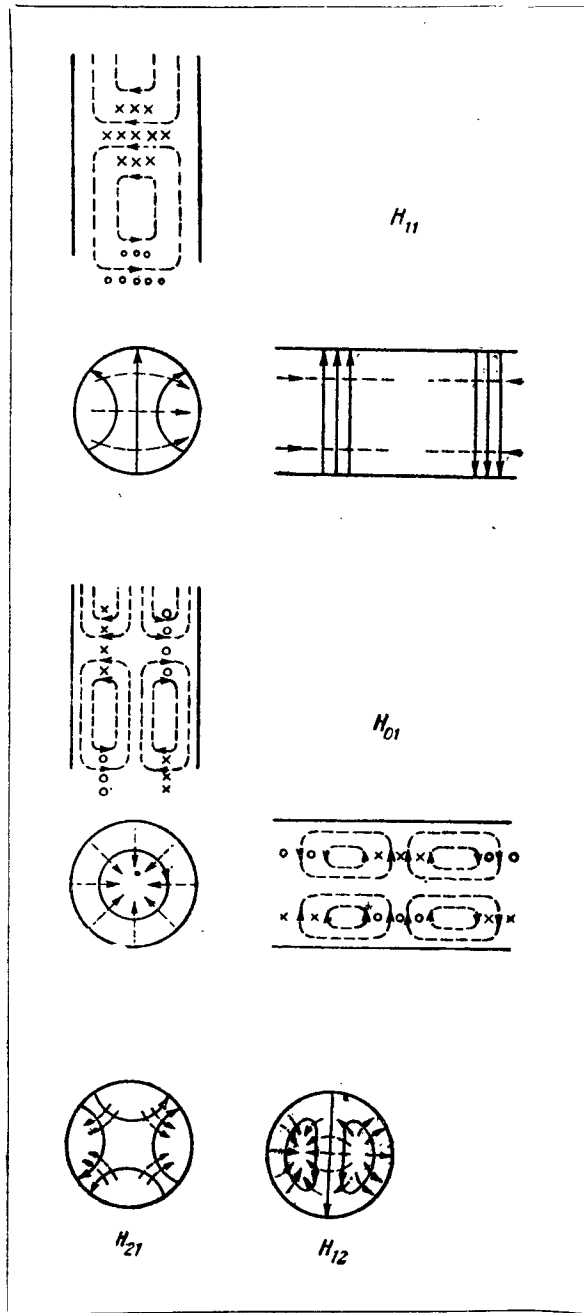


Рис. 214

Сопоставляя рис. 214, изображающий строение H -полей круглого волновода, с рис. 210 легко подметить сходство между некоторыми полями в прямоугольном и круглом волноводах. Такая аналогия существует, в частности, между основными полями.

Полагая в (8.109) $m = n = 1$, находим компоненты основного поля H_{11} :

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 J_1(\chi r) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \dot{E}_{mr} &= j \frac{\Gamma W^H}{\chi^2 r} H_0 J_1(\chi r) \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha}; \\ \dot{E}_{mz} &= j \frac{\Gamma W^H}{\chi} H_0 J_1'(\chi r) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \dot{H}_{mr} &= -j \frac{\Gamma}{\chi} H_0 J_1'(\chi r) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \dot{H}_{m\alpha} &= j \frac{\Gamma}{\chi^2 r} H_0 J_1(\chi r) \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (8.110)$$

Важнейшие характеристики основной волны (8.26, 8.52, 8.53, 8.55) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} W^H &= W^0 / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R}\right)^2}; \quad \Gamma = k \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R}\right)^2}; \\ v_\varphi &= v / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R}\right)^2}; \quad \Lambda = \lambda / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R}\right)^2}; \\ v_{gp} &= v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.111)$$

На рис. 215 схематически показано распределение тока в оболочке волновода для волны H_{11} .

Найдем связь между мощностью, передаваемой основной волной, и ее полем. На основании (8.58)

$$\bar{P} = \frac{W^H}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (H_{mr}^2 + H_{m\alpha}^2) r \, d\alpha \, dr, \quad (8.112)$$

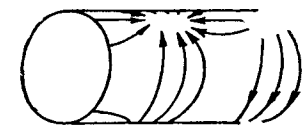


Рис. 215

и, далее, согласно (8.110),

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{W^H}{2} H_0^2 \left(\frac{\Gamma}{\chi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[J_1'^2(\chi r) \cos^2 \alpha + \frac{J_1^2(\chi r)}{\chi^2 r^2} \sin^2 \alpha \right] r \, d\alpha \, dr = \\ &= W^H H_0^2 \frac{\pi \Gamma^2}{2\chi^4} \int_0^{A_{11}} \left[J_1'^2(x) + \frac{J_1^2(x)}{x^2} \right] x \, dx. \end{aligned}$$

Привлекая данную в приложении формулу (ПЗ.28), находим:

$$\bar{P} = H_0^2 \frac{\pi W^H \Gamma^2}{4\chi^4} (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11}), \quad (8.113)$$

или

$$\bar{P} = E_0^2 \frac{\pi R^2}{W^H} \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^2} J_1^2(A_{11}) \approx 0,75 E_0^2 \frac{R^2}{W^H}, \quad (8.113a)$$

где

$$E_0 = \frac{\Gamma W^H}{2\chi} H_0 \quad (8.114)$$

— амплитуда электрического поля на оси волновода.

Примеры и упражнения

1. По табл. 4 и 5 найти критические длины волн первых десяти типов поля круглого волновода диаметром $2R = 3$ см.

2. Проверить формулы (8.41 и 8.47) для круглого волновода, взяв поле основного типа.

3. Волна H_{11} распространяется в пустом круглом волноводе диаметром $2R = 1$ см. Найти фазовую и групповую скорости, а также длину волны в волноводе при $\lambda = 1,5$ см.

4. Построить электрические и магнитные силовые линии поля основного типа круглого волновода в его поперечном сечении.

5. Найти напряженность электрического поля волны H_{11} круглого волновода в пучности, если продольное магнитное поле имеет амплитуду $H_m = 100$ а/м, радиус волновода равен $R = 3$ см, а длина волны $\lambda = 7$ см.

6. Вывести формулу (8.114).

7. Мощность, передаваемая волной основного типа, равна $P = 1$ вт. Найти амплитуду вектора E в пучности $2R = 1,5$ см и $\lambda = 1,8$ см.

8. В круглом волноводе распространяется волна основного типа, бегущая по азимуту, т. е. с азимутальной зависимостью вида

$$\frac{\cos}{\sin} \alpha = e^{\pm j\alpha}.$$

а) Показать, что поперечное поле этой волны поляризовано по кругу на оси волновода, линейно на металлической оболочке и эллиптически во всем остальном пространстве.

б) Показать, что с этой волной связан азимутальный поток энергии.

9. В прямоугольном волноводе построить аналогичное поле с круговой поляризацией в центре поперечного сечения как комбинацию полей H_{01} и H_{10} , сдвинутых по фазе на 90° . Выписать компоненты этого поля и показать, что в поперечном сечении существует замкнутый, «кольцевой», поток энергии.

§ 64. Двухсвязные системы

ТЕМ-волны в произвольной двухсвязной системе. В отличие от рассмотренных односвязных волноводов двухсвязная система (рис. 216) способна направлять *ТЕМ*-волну, распространяющуюся (§ 60) без дисперсии. Электрическому и магнитному полям *ТЕМ*-волн свойственна поперечная структура полей статических, и это обстоятельство, как мы покажем, приводит к тому, что их можно рассматривать как волны напряжения и тока в линии с распределенными параметрами.

Рассмотрим *ТЕМ*-поле системы, показанной на рис. 216, не задаваясь заранее определенным видом временной зависи-

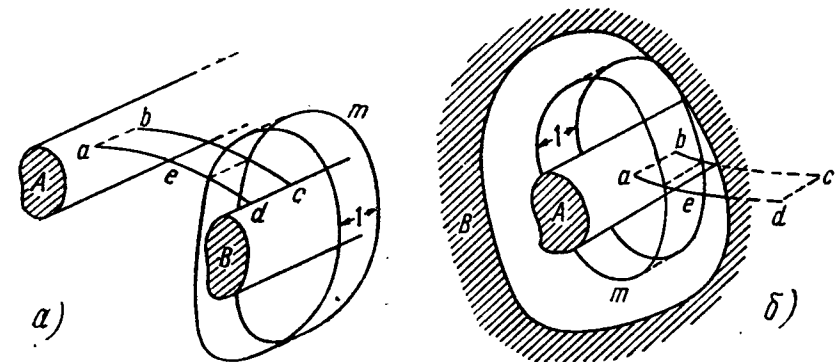


Рис. 216

мости процесса. Так как поле в поперечном сечении потенциально, можно ввести понятие разности потенциалов, или напряжения между проводниками

$$U = \int_A^B E dl \quad (8.115)$$

в данной поперечной плоскости (точки A и B лежат на разных проводниках при $z = \text{const}$). В силу независимости разности потенциалов от пути интегрирования величина U есть функция одной лишь координаты z . Для простоты выберем путь интегрирования, совпадающий с электрической силовой линией (e на рис. 216), принимаемой за координатную линию q_1 , так что $E = E_1$. При этом линии криволинейной ортогональной координаты q_2 будут везде совпадать с магнитными силовыми линиями (m на рис. 216), так как векторы E и H в каждой точке взаимно перпендикулярны и, следовательно, $H = H_2$. Учитывая это и проектируя уравнение Максвелла $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ на направление a_2 , получаем:

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (8.116)$$

Принимая во внимание, что $\mathbf{E} d\mathbf{l} = E dq_1$, продифференцируем обе части равенства (8.115) по z и учтем (8.116), тогда оказывается:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B B dq_1. \quad (8.117)$$

При этом (рис. 216) $\int_A^B B dq_1 = 1 \cdot \int_A^B B dq_1$ есть не что иное, как поток магнитной индукции Φ через «ленту» $abcd$ единичной ширины ($\Delta z = 1$). Полагая (§ 31) $\Phi = \tilde{\mathcal{L}}I$, из (8.117) получаем известное «телеграфное уравнение»

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\tilde{\mathcal{L}} \frac{\partial I}{\partial t}. \quad (8.118)$$

Введенный параметр $\tilde{\mathcal{L}}$ имеет смысл индуктивности направляющей системы, отнесенной к единице длины.

Аналогичные операции приводят к другому телеграфному уравнению. Взяв циркуляцию вектора \mathbf{H} вдоль одной из магнитных линий L и применив первое уравнение Максвелла в интегральной форме, имеем:

$$I = \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}, \quad (8.119)$$

причем I есть функция одной лишь координаты z .

Дифференцируя по z полученный результат

$$\frac{\partial I}{\partial z} = \oint_L \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} dq_2 \quad (8.120)$$

и используя проекцию уравнения Максвелла $\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ на направление \mathbf{a}_1

$$-\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (8.121)$$

имеем:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_L D dq_2. \quad (8.122)$$

По теореме Гаусса, величина $1 \cdot \int_L D dq_2 = Q$ есть заряд направляющей системы, отнесенный к единице ее длины.

Обозначая $Q = \tilde{C}U$, приходим ко второму телеграфному уравнению:

$$\frac{\partial I}{\partial z} = -\tilde{C} \frac{\partial U}{\partial t}. \quad (8.123)$$

Параметр C имеет значение емкости единицы длины системы. Зная, что постоянная распространения TEM -волны — это волновое число свободного пространства k , запишем выражения волн напряжения и тока при гармоническом во времени процессе так:

$$\dot{U} = U_m e^{j(\omega t - kz)}, \quad \dot{I} = I_m e^{j(\omega t - kz)}. \quad (8.124)$$

Подстановка (8.124) в телеграфные уравнения (8.118 и 8.123) дает:

$$\left. \begin{aligned} kU_m &= \omega \tilde{\mathcal{L}} I_m, \\ kI_m &= \omega \tilde{C} U_m \end{aligned} \right\} \quad (8.125)$$

откуда

$$k^2 = \omega^2 \tilde{\mathcal{L}} \tilde{C}, \quad (8.126)$$

и, следовательно, скорость распространения TEM -волны

$$v = 1/\sqrt{\epsilon \mu} = \omega/k$$

выражается через параметры $\tilde{\mathcal{L}}$ и \tilde{C} следующим образом:

$$v = 1/\sqrt{\tilde{\mathcal{L}} \tilde{C}}. \quad (8.127)$$

В теории длинных линий в качестве волнового сопротивления фигурирует величина

$$W_\lambda = \frac{U_m}{I_m}. \quad (8.128)$$

Из (8.115 и 8.119) следует, что

$$W_\lambda = \frac{\int_A^B \mathbf{E} d\mathbf{l}}{\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l}}, \quad (8.129)$$

и, таким образом, в отличие от волнового сопротивления W^0 , всегда равного (§ 60) корню квадратному из отношения проницаемостей среды $W^0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, величина W_λ зависит от геометрических особенностей направляющей системы. В то же время из (8.125) вытекает, что

$$W_\lambda = \sqrt{\frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\tilde{C}}}. \quad (8.130)$$

Сопоставляя этот результат с формулой (8.127), получаем соотношения:

$$\tilde{\mathcal{L}} = W_\lambda/v \quad \text{и} \quad \tilde{C} = 1/vW_\lambda. \quad (8.131)$$

Таким образом, зная поле направляющей системы E, H , а по нему (8.129) величину W_λ , можно определить параметры \tilde{Z} и \tilde{C} .

Коаксиальная линия. В коаксиальной линии могут распространяться волны H и E и TEM . Ввиду того, что условия существования TEM -волны не зависят от частоты, тогда как E - и H -волны при достаточно низких частотах отсутствуют, именно TEM -волна является основной. Она и используется для передачи энергии. Линии конструируются так, чтобы условия существования волн высших типов (H и E) оставались невыполненными.

Коаксиальная линия показана на рис. 217; радиусы внутреннего и внешнего проводников обозначены R_1 и R_2 .

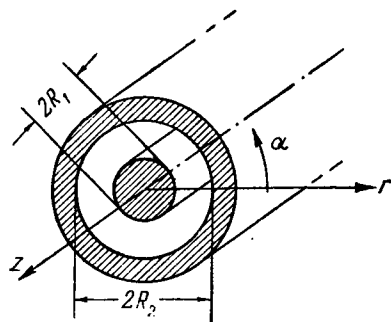


Рис. 217

TEM-волны

Магнитное поле TEM -волны коаксиальной линии известно на основании результата главы 4:

$$H_m = \alpha_0 \frac{I_m}{2\pi r} \quad (8.132)$$

После этого, учитывая (8.32), пишем:

$$E_m = r_0 \frac{I_m}{2\pi r} W^0 \quad (8.133)$$

Вычислив напряжение между проводниками как интеграл

$$U_m = \int_{R_1}^{R_2} E_m dr = \frac{I_m W^0}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{I_m W^0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (8.134)$$

приведем формулу (8.133) к виду

$$E_m = r_0 \frac{U_m}{r \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (8.135)$$

что совпадает с выражением поля коаксиального конденсатора (гл. 3), заряженного до разности потенциалов U_m .

Не следует, конечно, забывать, что электрическое и магнитное поля TEM -волны отличаются от статических продольной волновой зависимостью, характеризуемой множителем $e^{j(\omega t - kz)}$, который дописывается к амплитудам (8.132, 8.133) при переходе к комплексам.

Как видно из (8.134), величина W_λ для коаксиальной линии равна

$$W_\lambda = \frac{U_m}{I_m} = \frac{W^0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (8.136)$$

Для линии с воздушной средой ($\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$) $W^0 = 120\pi$ и

$$W_\lambda = 60 \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (8.137)$$

E-волны

Будем исходить из общего решения уравнения (8.36) в цилиндрических координатах для области типа рис. 217 (см. Приложение 3).

$$E_{mz} = [AJ_n(\chi r) + BN_n(\chi r)] \frac{\cos}{\sin} na \quad (8.138)$$

Налагая на (8.138) граничное условие (8.40)

$$\left. \begin{aligned} E_{mz} &= 0 \\ \text{при} \quad r &= R_1 \\ \text{и} \quad r &= R_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.139)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} AJ_n(\chi R_1) + BN_n(\chi R_1) &= 0, \\ AJ_n(\chi R_2) + BN_n(\chi R_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Отсюда вытекает следующее трансцендентное уравнение относительно поперечного волнового числа χ :

$$\frac{J_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_1)} = \frac{J_n(\chi R_2)}{N_n(\chi R_2)} \quad (8.140)$$

Корни его хорошо изучены и приводятся в справочниках. Они соответствуют различным типам E -поля коаксиальной линии. Зная χ , нетрудно по формулам (8.21) вычислить все компоненты поля, а также все необходимые характеристики волны. На рис. 218 показано строение некоторых E -полей.

Низшая E -волна имеет поле с одной радиальной вариацией и однородное по азимуту ($n=0$); она испытывает отсечку, когда радиальный размер $R_2 = R_1$ оказывается приблизительно равным половине длины волны λ , т. е.

$$\lambda_{кр} \approx 2(R_2 - R_1) \quad (8.141)$$

Взяв уравнение (8.42), запишем его решение в виде

$$H_{mz} = [AJ_n(\chi r) + BN_n(\chi r)] \frac{\cos}{\sin} na \quad (8.142)$$

и наложим граничное условие (8.46)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_{mz}}{\partial r} &= 0 \\ \text{при} \quad r &= R_1 \\ \text{и} \quad r &= R_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.143)$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} AJ'_n(\chi R_1) + BN'_n(\chi R_1) &= 0, \\ AJ'_n(\chi R_2) + BN'_n(\chi R_2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

так что поперечное волновое число χ подчинено уравнению

$$\frac{J'_n(\chi R_1)}{N'_n(\chi R_1)} = \frac{J'_n(\chi R_2)}{N'_n(\chi R_2)} \quad (8.144)$$

корни которого можно, например, найти в справочнике [16]. Строение некоторых полей показано на рис. 218.

Низшая H -волна соответствует одной азимутальной вариации поля при отсутствии вариаций в радиальном направлении: поэтому ее распространение прекращается, когда длина средней окружности становится близкой к длине

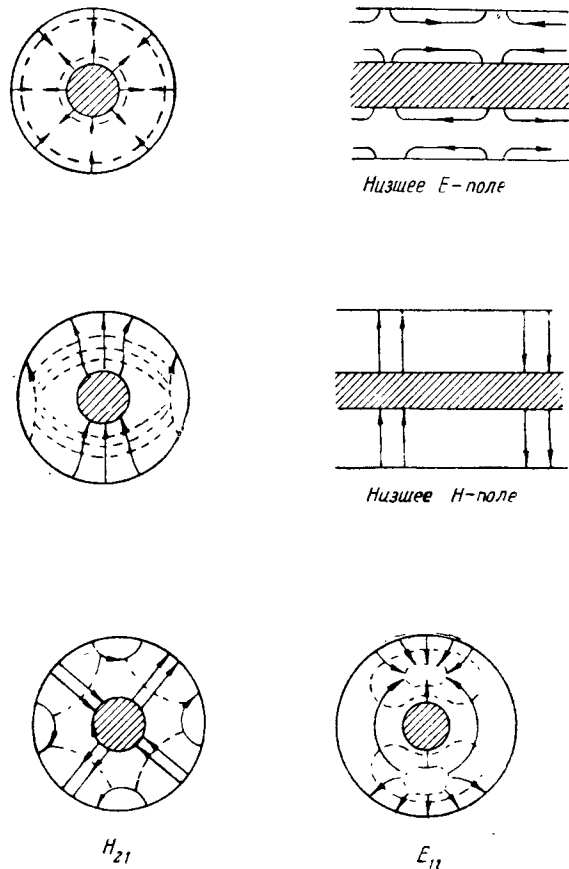


Рис. 218

волны. Из этих соображений находим:

$$\lambda_{кр} \approx \pi (R_1 + R_2). \quad (8.145)$$

Сравнение формул (8.141) и (8.145) показывает, что в коаксиальной линии при повышении частоты низшая H -волна возникает раньше. С помощью (8.145) можно, таким образом, выбрать размеры линии для передачи одной основной TEM -волны без примеси высших типов.

Примеры и упражнения

1. По формулам (8.131) найти параметры \tilde{L} и \tilde{C} коаксиальной линии и убедиться, что полученные результаты совпадают с данными, известными из гл. 3 и 4.

2. С помощью результатов гл. 3 и 4 определить волновое сопротивление W_λ двухпроводной линии.

3. Непосредственной проверкой показать, что средний поток энергии, передаваемой волной основного типа коаксиальной линии, равен $\bar{P} = \frac{1}{2} U_m I_m$.

4. Волновое сопротивление коаксиальной линии W_λ равно 60 ом. Найти параметры \tilde{L} и \tilde{C} .

5. Коаксиальная линия п. 4 передает мощность $P = 10$ вт. Найти амплитуды E_m и H_m поля линии.

6. Для коаксиальной линии с размерами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см вычислить частоту, до которой волны высших типов не возбуждаются.

§ 65. Другие направляющие системы

Кроме обычных волноводов и коаксиальной линии, практическое применение находят весьма разнообразные направляющие системы. Некоторые из них отличаются особыми преимуществами в качестве линий передачи, другие выполняют специальные функции. Данный параграф поможет составить общее представление о них.

Системы с малой дисперсией. Стремление понизить дисперсию волновода ценой небольших конструктивных усложнений привело к ряду направляющих систем, из которых мы отметим сначала так называемые P - и H -образные волноводы (рис. 219). Электрическое поле основной волны этих волноводов *вогнутого* профиля поперечно и преимущественно сосредоточено в узком зазоре (d). Магнитное поле в широком диапазоне частот имеет лишь слабую продольную компоненту. Такая волна близка к поперечно-электромагнитной (TEM), ее критическая частота в сравнении со случаем прямоугольного волновода поперечного сечения $2(b+c)h$ очень низка*. В то же время от коаксиальной линии P - и H -образные волноводы выгодно отличаются в конструктивном отношении отсутствием внутреннего проводника.

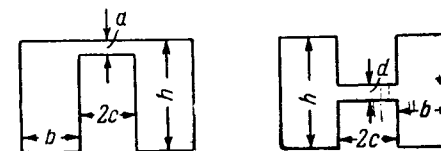


Рис. 219

* См. гл. 9, § 71, примеры.

В последние годы нашли применение и такие системы, как «полосковые линии» (рис. 220), а также подобные им. Наличие диэлектрика между направляющими проводниками *A* и *B* приводит к тому, что основная волна этих двухсвязных систем не является поперечно-электромагнитной, хотя и очень близка к ней. Отмеченное обстоятельство становится очевидным, если принять во внимание, что в неоднородной среде (диэлектрик — воздух)

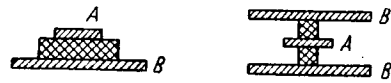


Рис. 220

не может быть выполнено условие (8.29, 8.29а). Дисперсия полосковой линии очень слаба и практически обычно не учитывается. В сравнении с коаксиальной линией полосковая имеет неоспоримые конструктивные преимуще-

ства (например, может изготавливаться методом печатного монтажа).

Замедляющие системы. Электромагнитные волны с малой фазовой скоростью используются в СВЧ-электронике для осуществления эффективного взаимодействия с электронными потоками; они применяются также в антенной технике и в специальных физических исследованиях.

Как это было видно (7.59а), волна, направляемая границей диэлектрик — воздух, распространяется с фазовой скоростью

$$v_{\phi} < c,$$

так что замедляющей системой может служить, например, диэлектрическая пластина на металлическом листе (§ 59, пример 5) и т. п.

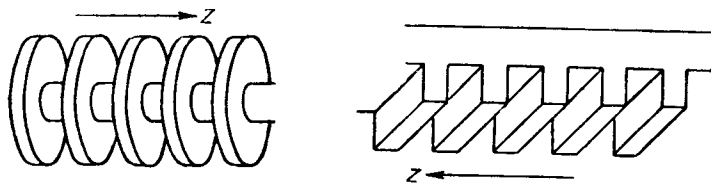


Рис. 221

Важное значение имеют *периодические* замедляющие системы — «гребенчатые» и «ребристые» (рис. 221). К ним, по существу, примыкает и *спиральный волновод* (рис. 222), действие которого весьма упрощенно можно представить, исходя из движения *ТЕМ*-волны по винтовой линии проводника. Тогда фазовая скорость вдоль оси системы выражается формулой

$$v_{\phi} = c \frac{d}{2\pi R}. \quad (8.146)$$

В действительности, как показывает анализ, спиральный волновод обладает дисперсией; однако при достаточно высоких частотах простая формула (8.146) дает хорошее приближение.

Рассмотрим границу произвольной направляющей системы (рис. 223), положив для простоты ее плоской, и постараемся установить общий характер электромагнитного поля в примыкающей среде. Ввиду того, что

$$v_{\phi} < c$$

(рассматриваемая «медленная» волна распространяется в воздухе со скоростью v_{ϕ} , меньшей фазовой скорости, свойственной плоской однородной волне) и, следовательно,

$$\Gamma > k, \quad (8.147)$$

поперечное волновое число χ оказывается в данном случае (8.22) *мнимой* величиной:

$$\chi^2 < 0; \quad \chi = \pm j\beta. \quad (8.148)$$

Взяв волновое уравнение в форме (8.36) и считая поле вдоль оси *x* однородным

$$\partial/\partial x = 0,$$

с учетом (8.148) запишем:

$$\frac{\partial^2 E_m}{\partial y^2} = \beta^2 E_m. \quad (8.149)$$

Общее решение этого уравнения

$$E_m = Ae^{-\beta y} + Be^{\beta y} \quad (8.150)$$

свидетельствует об экспоненциальном характере поперечного распределения поля. Если рассматриваемая граница является внешней

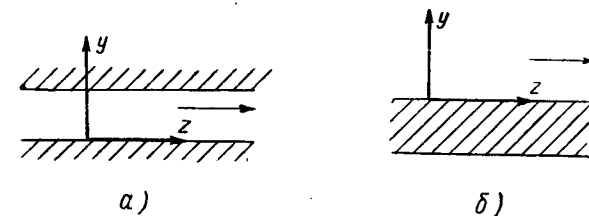


Рис. 223

(рис. 223, б), то имеет смысл лишь первый член (8.150): поле медленной волны экспоненциально убывает по мере удаления от системы, волна оказывается *поверхностной*.

Диэлектрические волноводы. К замедляющим можно отнести и диэлектрические волноводы, на основе которых, в частности, строят «стержневые диэлектрические антенны» (рис. 224).

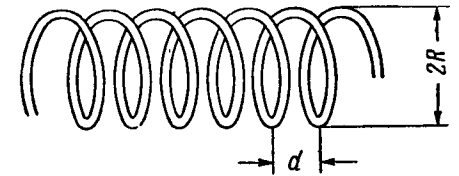


Рис. 222

Для уяснения принципиальных особенностей систем этого типа рассмотрим простейшую волну диэлектрического волновода круглого поперечного сечения, азимутально-однородную волну типа E .

В соответствии с (8.97) продольная компонента вектора E внутри стержня при ($n=0$) характеризуется амплитудой

$$E_{1z} = E_{10} \cdot J_0(\chi_1 r), \quad (8.151)$$

где

$$\chi_1^2 = k_1^2 - \Gamma^2, \quad (8.152)$$

причем k_1 — волновое число, соответствующее диэлектрику стержня:

$$k_1^2 = \omega^2 \epsilon_1 \mu_1.$$

Для описания внешнего поля необходимо выбрать такую цилиндрическую функцию, которая могла бы выражать радиальное убывание поля, т. е. (см. Приложение 3) функцию Ханкеля второго рода.

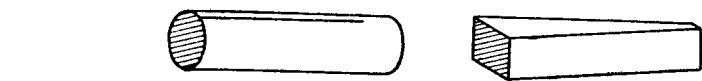


Рис. 224

Таким образом, решение уравнения (8.91) для внешней среды имеет вид:

$$E_{2z} = E_{20} H_0^{(2)}(\chi_2 r), \quad (8.153)$$

где

$$\chi_2^2 = k_2^2 - \Gamma^2 \quad (8.154)$$

и k_2 — волновое число, соответствующее внешней среде:

$$k_2^2 = \omega^2 \epsilon_2 \mu_2.$$

Тангенциальные компоненты для диэлектрического волновода должны быть непрерывны на его поверхности:

$$\left. \begin{aligned} E_{1z} = E_{2z} \text{ и } H_{1\alpha} = H_{2\alpha} \\ \text{при } r = R. \end{aligned} \right\} \quad (8.155)$$

Пользуясь формулами (8.21), записываем внутреннее и внешнее поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{1z} = E_{10} J_0(\chi_1 r), \\ \dot{E}_{1r} = \frac{j\Gamma}{\chi_1} E_{10} J_1(\chi_1 r), \\ \dot{H}_{1\alpha} = j \frac{\omega \epsilon_1}{\chi_1} E_{10} J_1(\chi_1 r) \end{aligned} \right\} r \leq R \quad \left. \begin{aligned} \dot{E}_{2z} = E_{20} H_0^{(2)}(\chi_2 r), \\ \dot{E}_{2r} = \frac{j\Gamma}{\chi_2} E_{20} H_1^{(2)}(\chi_2 r), \\ \dot{H}_{2\alpha} = j \frac{\omega \epsilon_2}{\chi_2} E_{20} H_1^{(2)}(\chi_2 r) \end{aligned} \right\} r \geq R \quad (8.156)$$

и, внося найденные компоненты в (8.155), приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$\frac{J_0(\chi_1 R)}{J_1(\chi_1 R)} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\chi_2}{\chi_1} \frac{H_0^{(2)}(\chi_2 R)}{H_1^{(2)}(\chi_2 R)}. \quad (8.157)$$

Положим, что это уравнение удовлетворяется при

$$\chi_1 R = C_{0m}, \quad (8.158)$$

тогда, согласно (8.152), постоянная распространения равна:

$$\Gamma = \sqrt{k_1^2 - \left(\frac{C_{0m}}{R}\right)^2}. \quad (8.159)$$

Имея в виду определить критическую частоту, примем во внимание следующее. Пока диэлектрический стержень, концентрируя в себе электромагнитную энергию, играет роль волновода, его внешнее поле представляет собой поверхностную волну, т. е. убывает в радиальном направлении. При этом аргумент функции Ханкеля (см. Приложение 3) — мнимая величина, т. е. $\chi_2^2 < 0$. Отсечка происходит при нарушении этого неравенства:

$$\left. \begin{aligned} \chi_2 = 0, \\ f = f_{кр} \end{aligned} \right\}, \quad (8.160)$$

при этом в соответствии с (8.154 и 8.157)

$$\left. \begin{aligned} \Gamma = k_2, \\ J_0(\chi_1 R) = 0 \end{aligned} \right\} f = f_{кр}. \quad (8.161)$$

Из (8.152) и первой строчки (8.161) находим поперечное волновое число для стержня:

$$\chi_1 = \sqrt{k_1^2 - k_2^2}. \quad (8.162)$$

С другой стороны, обозначая корень второй строчки (8.161), как это было принято в § 63, имеем:

$$\chi_1 R = B_{0m}. \quad (8.163)$$

Сопоставляя эти результаты, получаем выражение критической частоты

$$f_{кр} = \frac{B_{0m}}{2\pi R \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}}. \quad (8.164)$$

Весьма существенно, что при критических условиях фазовая скорость направляемой волны не обращается в бесконечность, как в случае полого волновода, а стремится к величине

$$\left. \begin{aligned} v_{\phi} \\ f \rightarrow f_{кр} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}},$$

равной скорости плоской однородной волны во внешней среде.

Объясняется это тем, что в противоположность металлической оболочке полого волновода поверхность диэлектрического стержня не всегда является полностью отражающей. Разлагая направляемую волну на плоские однородные волны в полом волноводе (рис. 225, а) и диэлектрическом (рис. 225, б), замечаем следующую разницу. В первом случае отсечка происходит, когда угол отражения φ становится равным нулю, а во втором — значительно «раньше»: при появлении во внешней среде преломлен-

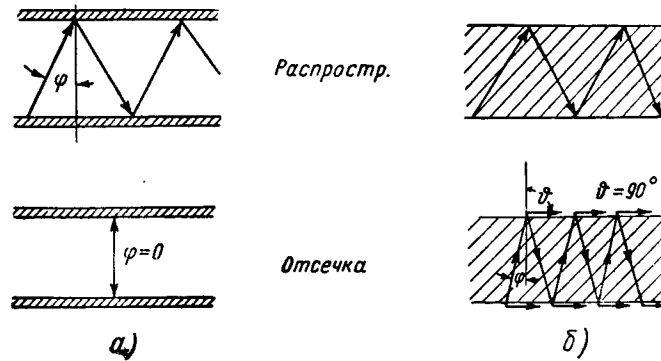


Рис. 225

ной волны. Так как начальный угол преломления ϑ равен 90° , то эта волна, распространяющаяся со скоростью $v_\varphi = 1/\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$, движется вдоль стержня. В силу граничных условий такова же и фазовая скорость внутренней волны. Однако поле во внешней среде теперь не убывает от границы диэлектрика, и, следовательно, стержень уже не концентрирует энергии: он не играет более роли диэлектрического волновода. Структура поля, свойственная направляемой волне, при переходе критической частоты исчезает. Но еще до наступления отсечки по мере приближения к критической частоте радиальное затухание уменьшается, и постепенно большая часть энергии перемещается во внешнее пространство.

Неоднородные по азимуту ($n \neq 0$) E - и H -волны диэлектрического цилиндра существуют лишь совместно. Его основная волна представляет простейшую комбинацию такого рода и обозначается символом EH_{11} . В отличие от основной волны полого волновода она распространяется без отсечки при любых частотах ($f_{кр} = 0$). В квазистационарном случае

$$R \ll \lambda$$

внутреннее поле стержня находится простым приемом, известным из § 55. Представим, что бесконечный диэлектрический цилиндр помещается в свободное пространство параллельно направлению

распространения плоской однородной волны E^0, H^0 . Тогда внутреннее поле в соответствии с известными решениями (§ 27, 28) электростатической и магнитостатической задач имеет вид:

$$E^+ = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} E^0, \quad H^+ = \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} H^0. \quad (8.165)$$

Можно утверждать, что формулы (8.165) выражают поле основной волны диэлектрического волновода в квазистационарном пределе, ибо известно, что при $\frac{R}{\lambda} \rightarrow 0$ внешнее поле EH_{11} стремится к E^0, H^0 . Полученный результат показывает также, что основное поле весьма тонкого диэлектрического стержня фактически утрачивает продольные компоненты. Волновое сопротивление его, как видно из (8.165), равно

$$W = \frac{E_m^+}{H_m^+} = \frac{\epsilon_2}{\mu_2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{E_m^0}{H_m^0} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}. \quad (8.166)$$

Отметим, что волна EH_{11} играет главную роль в работе диэлектрической стержневой антенны.

Невзаимные системы. Гиротропные свойства ферритов (§ 46) позволяют осуществить направляющие системы, не подчиненные теореме взаимности, т. е. меняющие свои характеристики в зависимости от направления распространения волны.

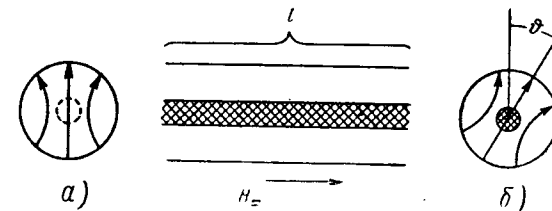


Рис. 226

Сначала было найдено применение эффекту Фарадея в круглом волноводе. Эффект заключался в том, что при заполнении волновода намагниченным ферритом поперечная структура распространяющейся волны меняет азимутальную ориентацию — вращается точно так же, как плоскость поляризации волны при эффекте Фарадея в свободном пространстве (§ 46). Чтобы выяснить сущность этого явления, разложим основную волну круглого волновода H_{11} (рис. 226, а) на две волны, бегущие по азимуту (§ 63) на основании равенства

$$H_0 J_1(\chi r) \cos \alpha = \frac{1}{2} H_0 J_1(\chi r) e^{i\alpha} + \frac{1}{2} H_0 J_1(\chi r) e^{-i\alpha}.$$

Легко проверить, что поперечное поле на оси волновода при этом распадается на компоненты, противоположно поляризованные

по кругу:

$$\dot{H}_{\perp} = \frac{1}{2} H_{\perp} (x_0 + jy_0) + \frac{1}{2} H_{\perp} (x_0 - jy_0). \quad (*)$$

Поместим внутрь волновода коаксиальный продольно намагниченный ферритовый цилиндр. Несмотря на то, что поле H_{11} будет в результате этого несколько деформировано, произведенное выше разложение сохраняет смысл. На основании § 46 мы должны заключить, что воздействие феррита на компоненты (*) будет раз-

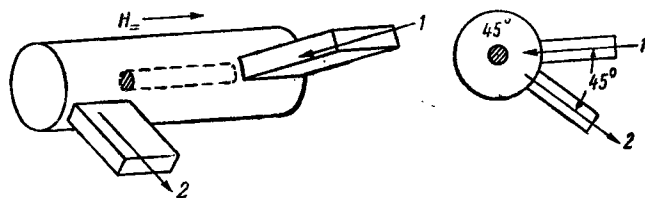


Рис. 227

личным, ибо его эквивалентная магнитная проницаемость (6.104 для правополяризованного поля равна $(\mu + \alpha)$, а для левополяризованного $(\mu - \alpha)$). По этой причине окажутся различными фазовые скорости двух бегущих по азимуту волн, которые вместе составляют теперь волну, близкую к H_{11} . При прохождении расстояния l (рис. 228) фазы этих волн изменятся в разной степени и результирующее поле будет повернуто по азимуту (рис. 226, б). Это и есть волноводный эффект Фарадея, широко используемый на практике.

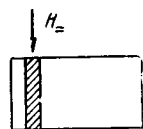


Рис. 228

На рис. 227 схематически показано основанное на нем простейшее невзаимное устройство. Отрезок круглого волновода содержит намагниченный феррит, вызывающий вращение его поля на угол 45° . Присоединенные к круглому прямоугольные волноводы 1 и 2 развернуты также на 45° . Основная волна H_{10} волновода 1 переходит в круглый в виде его основной волны H_{11} и, испытывая поворот поля под влиянием феррита, входит в волновод 2. Напротив, волна, распространяющаяся со стороны волновода 2, в волновод 1 не пройдет, так как ее поле в конечном счете окажется повернутым на 90° и в прямоугольном волноводе волны не возбудит.

Рассмотрим другую невзаимную систему. В прямоугольный волновод (рис. 228) помещена поперечно намагниченная ферритовая пластинка. Известно (§ 62, пример 10), что в пустом волноводе на расстоянии

$$x = \frac{a}{\pi} \operatorname{arcc} \operatorname{ctg} \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

от краев широкой стенки (основной тип поля) лежат плоскости круговой поляризации вектора H , причем род поляризации — правая или левая — зависит от направления распространения волны. В несимметрично расположенной ферритовой пластинке также в зависимости от направления движения волны волновода будет преобладать правая или левая круговая поляризация магнитного поля. Поэтому эквивалентная магнитная проницаемость феррита для противоположно движущихся волн будет иметь различные значения. Различными, следовательно, будут и скорости этих волн, а также коэффициенты затухания.

§ 66. Нерегулярность направляющих систем. Связь и возбуждение

Все количественные выводы этой главы относились до сих пор к так называемым *регулярным* направляющим системам, поперечная структура которых остается неизменной, а длина бесконечна. Решая однородное (без правой части) волновое уравнение, мы находили *возможные* поля таких систем. В этой постановке задачи, оставляющей в стороне причину возникновения полей, вопрос об их амплитудах беспредметен. Действительно, векторы поля всегда находились с точностью до постоянного коэффициента. Однако, зная характер источника поля, можно решить задачу о *возбуждении* направляющей системы; амплитуды распространяющихся волн определяются при этом мощностью источника. Ниже в качестве примера будет описано возбуждение прямоугольного волновода диполем Герца. Не меньший интерес представляет и обратная задача — о возбуждении антенны набегающей волной системы. Если прямая задача решена, ответ на обратную легко находится с помощью принципа взаимности (§ 37).

Реальные направляющие системы, разумеется, *нерегулярны*. Всякая система соединяется с генератором и приемником — «нагрузкой», которому отдается энергия (часто с помощью специальных элементов связи). Между генератором и приемником могут также включаться различные устройства, предназначенные для регулирования и контроля передачи. Все многообразие относящихся сюда вопросов не входит в курс теории поля. В данном параграфе мы остановимся все же на некоторых особенностях реальных направляющих систем, главное внимание уделив вопросам связи и возбуждения.

Действие *нерегулярности*. Поле регулярной направляющей системы может иметь характер волны, распространяющейся в одном из двух возможных направлений. Закономерно и одновременно существование прямой и обратной волн. В системе, содержащей даже простейшую нерегулярность (рис. 229), например, «открытый конец» (а), «закорачивающую плоскость» (б), диаф-

рагму (в) и др., поле должно включать прямую и обратную волны. Ибо, как легко убедиться, иначе не будут выполнены граничные условия на нерегулярности. При этом обратная волна рассматривается как отраженная нерегулярностью. Обычно на практике в системе может распространяться лишь волна основного типа. Однако нерегулярности возбуждают поля высших типов, которые в полых волноводах быстро затухают («ближние поля»), а в откры-

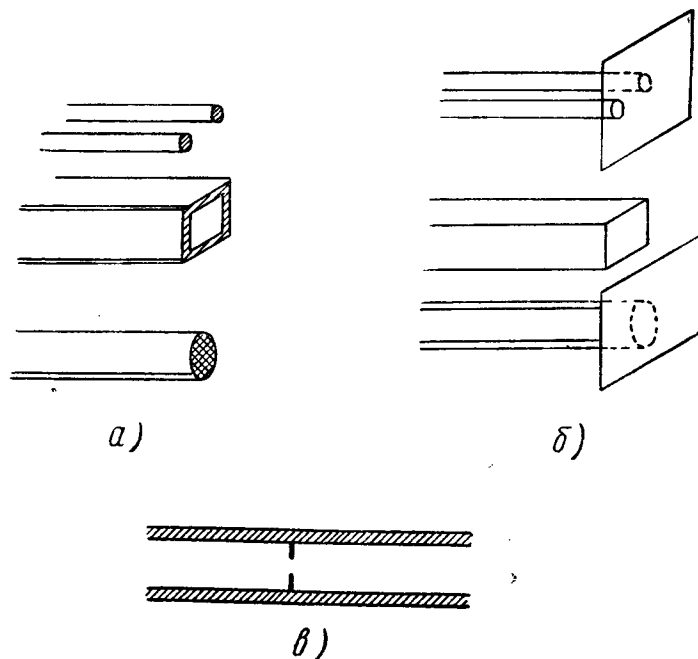


Рис. 229

тых системах вызывают излучение во внешнее пространство. Когда поперечные размеры системы малы в сравнении с длиной волны, излучение это незначительно, и достаточно учитывать только прямую и обратную волны основного типа. Точно так же можно поступать и в случае полого волновода, если исключить из рассмотрения те его участки (вблизи нерегулярностей), на которых поля высших типов заметно велики.

Существенно, что при сделанных оговорках любая направляющая система может быть условно заменена некоторой эквивалентной двухпроводной линией, трактуемой с обычных позиций теории цепей. Действительно, величинам

$$E_{\perp} = E_{m\perp} \cos(\omega t - \Gamma z), \quad H_{\perp} = H_{m\perp} \cos(\omega t - \Gamma z) \quad \text{и} \quad W = \frac{E_{\perp}}{H_{\perp}}, \quad (8.167)$$

характеризующим основную волну произвольной направляющей системы, с математической точки зрения вполне соответствуют напряжению, ток и волновое сопротивление линии:

$$U = U_m \cos(\omega t - kz), \quad I = I_m \cos(\omega t - kz) \quad \text{и} \quad W_{\lambda} = \frac{U}{I}. \quad (8.168)$$

Как видно, E_{\perp} и H_{\perp} можно рассматривать в качестве «напряжения» и «тока» эквивалентной линии с волновым сопротивлением W и волновым числом Γ . Это значит, что действие нерегулярности на основную волну описывается при помощи сопротивления или комбинации сопротивлений, включаемых в эквивалентную линию.

Так, сопротивление участка двухпроводной линии, нагруженной сопротивлением Z (рис. 230, а), есть

$$Z(l) = \frac{U_m^+ e^{j\Gamma l} + U_m^- e^{-j\Gamma l}}{I_m^+ e^{j\Gamma l} + I_m^- e^{-j\Gamma l}}, \quad (8.169)$$

где в числителе и знаменателе фигурируют прямая (+) и обратная (-) волны напряжения и тока. Записав аналогичное соотно-

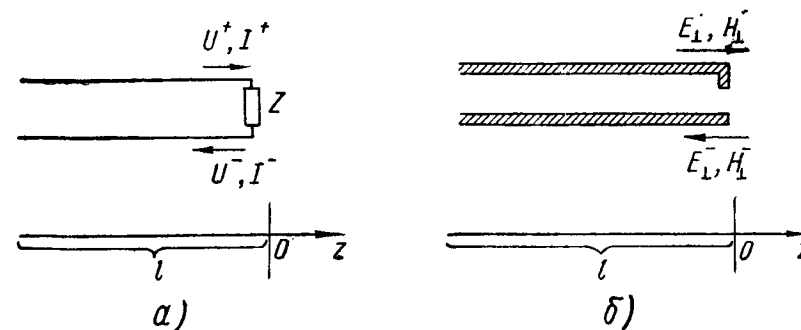


Рис. 230

шение для основной волны исследуемой направляющей системы с нерегулярностью на конце (рис. 230, б)

$$Z^{\circ}(l) = \frac{E_{\perp}^+ e^{j\Gamma l} + E_{\perp}^- e^{-j\Gamma l}}{H_{\perp}^+ e^{j\Gamma l} + H_{\perp}^- e^{-j\Gamma l}}, \quad (8.170)$$

видим, что оно выражает сопротивление участка эквивалентной линии. Следовательно, величина

$$\lim_{l \rightarrow 0} Z^{\circ}(l) = Z^{\circ} \quad (8.171)$$

есть не что иное, как сопротивление, эквивалентное этой нерегулярности.

В радиотехнической практике эквивалентные параметры нерегулярностей чаще всего измеряются с помощью специальной аппаратуры. Расчет же этих величин требует в каждом случае решения сложной электродинамической задачи, учитывающей поля высших типов.

Элементы связи. Чтобы возбудить в направляющей системе волну, обычно пользуются элементарным излучателем того или иного вида (рис. 231): электрическим (а) или магнит-

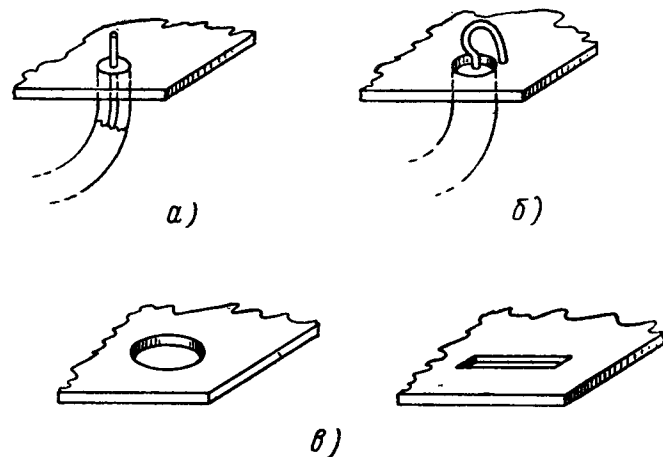


Рис. 231

ным (б) диполем Герца, а так же квазистационарной дифракционной антенной — отверстием или щелью (в). Излучатель располагается так, чтобы создаваемое им поле имело компоненты подлежащей возбуждению волны. Электрический диполь (штырь) должен быть параллелен электрическим силовым линиям волны желательного типа, магнитный диполь (петля) помещается в плоскости, перпендикулярной ее магнитным силовым линиям. Отверстие соединяет возбуждающее устройство с направляющей системой в той области, где их поля имеют аналогичное строение. Сказанное иллюстрируется рис. 232, показывающим способы возбуждения различных волн.

Разумеется (§ 37), такими же путями можно осуществить и связь приемного устройства с направляющей системой.

Сделаем замечание о щелях в металлической оболочке направляющих систем, которые, как уже говорилось, используются в качестве элементов связи, а также, добавим, часто необходимы по конструктивным и иным соображениям. Если требуется, чтобы щель практически не излучала, она прорезается параллельно направлению тока (ортогонально магнитным силовым линиям на оболочке) и при этом почти не искажает электромагнитного поля.

Наоборот, щель, пересекающая путь тока под прямым углом (идущая по магнитной силовой линии), наиболее интенсивно излучает. Легко проверить, что это правило находится в согласии с описанием поля щелевой антенны в § 58.

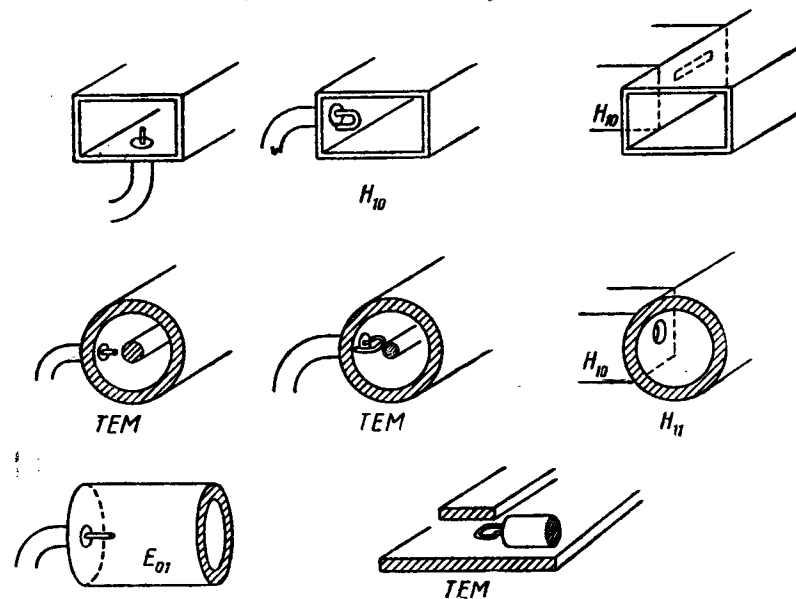


Рис. 232

Из сказанного, например, следует, что волна H_{01} круглого волновода допускает его поперечное рассечение, а прямоугольный волновод с волной основного типа «безболезненно» разрезается по середине широкой стенки.

Возбуждение прямоугольного волновода. В качестве примера задачи о возбуждении рассмотрим случай прямо-

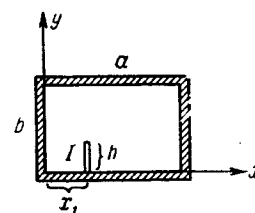


Рис. 233

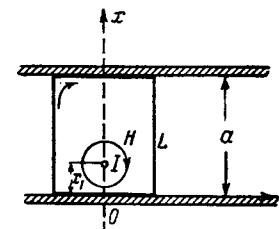


Рис. 234

угольного волновода с электрическим диполем Герца — элементом тока — расположенным, как это показано на рис. 233.

Охватив элемент тока прямоугольным контуром L (рис. 234) и сжимая этот контур к току (так что в пределе его стороны совместятся на оси Ox), получим

$$I_m = \oint_L \mathbf{H}_m d\mathbf{l} = 2 \int_0^a H_{mx} dx,$$

причем, как нетрудно заметить, компонента H_x отлична от нуля только в точке $x = x_1$. Перепишем этот результат так:

$$\int_0^a H_{mx} dx = \frac{I_m}{2}. \quad (8.172)$$

Поле в волноводе есть суперпозиция полей всех возможных типов, определенных формулами (8.78 и 8.86). На этом основании

$$H_{mx} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty*} H_{mx}^{Hmn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mx}^{Emn} \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y, \quad (8.173)$$

где H_{mx}^{Hmn} — амплитуда компоненты H_x поля H_{mn} ,
 H_{mx}^{Emn} — » » H_x » E_{mn} и
 звездочка в первой сумме означает, что исключается совпадение индексов $m=0$ и $n=0$.
 Вычислим интеграл

$$Q = \int_0^a \int_0^b H_{mx} \sin \frac{\pi x}{a} dx dy. \quad (8.174)$$

С одной стороны, из (8.172) вытекает, что

$$Q = \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_0^a \int_0^b H_{mx} dx dy = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x_1}{a} \int_0^b I_m dy = \frac{I_m h}{2} \sin \frac{\pi x_1}{a}. \quad (8.175)$$

С другой стороны, внося в (8.174) выражение поля (8.173) и интегрируя, получим нуль во всех членах, кроме единственного

$$H_{mx}^{H10} \sin \frac{\pi}{a} x,$$

который соответствует полю основного типа H_{10} , и в результате окажется:

$$Q = H_{mx}^{H10} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \frac{ab}{2} H_{mx}^{H10}. \quad (8.176)$$

Приравнявая (8.175 и 8.176), находим выражение амплитуды поперечной компоненты вектора \mathbf{H} поля основного типа через возбуждающий ток:

$$H_{mx}^{H10} = \frac{I_m h}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a}. \quad (8.177)$$

Амплитуды всех остальных компонент вычисляются на основании (8.88). Фигурирующая там постоянная H_0 определяется равенством:

$$\frac{I_m h}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} = j \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} H_0.$$

Итак,

$$H_0 = -j \frac{\lambda}{2a} \frac{I_m h}{ab} \frac{\sin \frac{\pi x_1}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} = -j \frac{\omega \lambda}{\Gamma} \frac{\rho_m}{S_{\perp}} \sin \frac{\pi x_1}{a}. \quad (8.178)$$

Полученный результат показывает, что амплитуда возбуждаемой волны пропорциональна моменту диполя

$$\rho_m = I_m h / \omega$$

и зависит от его расположения, а также от длины волны λ .

Возбуждение отсутствует, когда излучатель находится у стенки ($x_1 = 0$ или $x_1 = a$), оно максимально при $x_1 = a/2$.

Амплитуда обращается в бесконечность при

$$\lambda \rightarrow 2a,$$

когда ширина горизонтальной стенки волновода становится равной половине длины волны λ , и наступает «поперечный резонанс»¹. Не следует забывать, что этот вывод относится к идеальной системе без потерь. При наличии потерь формула (8.178) в том виде, как она записана, неприменима вблизи $f = f_{кр}$.

Примеры и упражнения

1. Указать и пояснить возможные способы возбуждения следующих направляемых волн: а) H_{11} и H_{01} в круглом волноводе, б) E_{11} и H_{02} в прямоугольном, в) основной волны в системе параллельных плоскостей и г) волны низшего H -типа в коаксиальной линии.

2. Найти амплитуду вектора \mathbf{E} основной волны прямоугольного волновода, возбуждаемого вертикальным штырем с равномерным распределением тока при следующих данных: размеры

¹ О резонансе см. § 74

поперечного сечения $a = 2 \text{ см}$ и $b = 1 \text{ см}$; высота штыря $h = 0,1 \text{ см}$, его расстояние от стенки $x_1 = 0,75 \text{ см}$; амплитуда тока $I_m = 0,1 \text{ а}$; частота $f = 12000 \text{ Мгц}$.

3. В условиях предыдущей задачи в волноводе будет, в частности, возбуждаться ближнее поле H_{20} . Для нахождения его амплитуды вместо (8.174) следует рассматривать интеграл

$$Q = \int_0^a \int_0^b H_{mx} \sin \frac{2\pi x}{a} dx dy. \quad (8.179)$$

При этом соотношения, аналогичные (8.175 и 8.176), будут иметь вид

$$Q = \frac{I_m h}{2} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \quad (8.180)$$

и

$$Q = \frac{ab}{2} H_{mx}^{H_{20}}, \quad (8.181)$$

в результате чего

$$H_{mx}^{H_{20}} = \frac{I_m h}{ab} \sin \frac{2\pi x_1}{a}. \quad (8.182)$$

Согласно (8.54, 8.54а), поле H_{20} будет затухать по закону

$$e^{-\alpha z}, \quad \alpha = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 - 1}.$$

На каком расстоянии от возбуждающего штыря амплитуда электрического вектора поля H_{20} составит 1% от амплитуды E_m волны основного типа?

4. Определим сопротивление излучения (ср. § 42) диполя Герца в прямоугольном волноводе. Мощность его излучения P^Σ определяется создаваемым в обе стороны потоком энергии, т. е. равна удвоенной величине (8.90)

$$P^\Sigma = \frac{ab E_0^2}{2W^H}. \quad (8.183)$$

Внося сюда

$$E_0 = \frac{2a}{\lambda} W^0 H_0 = \frac{I_m h W^H}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a}, \quad (8.184)$$

имеем:

$$P^\Sigma = \frac{I_m^2 h^2 W^H}{2ab} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}. \quad (8.185)$$

Таким образом, сопротивление излучения равно

$$P^\Sigma = \frac{2P^\Sigma}{I_m^2} = \frac{h^2 W^H}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}, \quad f > f_{np}. \quad (8.186)$$

При частоте ниже критической мощность излучения и сопротивление излучения имеют реактивный характер:

$$jX^\Sigma = \frac{h^2 W^H}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}, \quad f < f_{кр}. \quad (8.187)$$

Задание. Найти сопротивление излучения диполя Герца в условиях задачи 2.

5. Для случаев, указанных в задаче 1, в оболочках направляющих систем расположить щели: а) максимально излучающие, б) практически не излучающие.

3. ЗАТУХАНИЕ НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

§ 67. Учет потерь энергии в направляющих системах

До сих пор мы рассматривали направляемые волны, распространяющиеся без потерь энергии. В действительности как направляющие проводники, так и заполняющая система среда поглощают энергию волны; по этой причине реальные направляемые волны всегда являются *затухающими*. Потери энергии обычно малы, и можно считать (позднее будут сделаны некоторые оговорки), что они не вызывают изменения поперечной структуры поля, так что полученные ранее выражения компонент поля конкретных систем остаются в силе. Но постоянная распространения становится комплексной величиной

$$\hat{\Gamma} = \Gamma' - j\Gamma'' \quad (8.188)$$

(это отмечено точкой), и продольная зависимость поля описывается множителем

$$e^{-j\hat{\Gamma}z} = e^{-j\Gamma'z} \cdot e^{-\Gamma''z}. \quad (8.188a)$$

Подробно тому, как это принято для волн в безграничной среде, Γ'' называется коэффициентом затухания. Общий вид этой величины может быть найден из энергетических соображений. Средняя мощность волны пропорциональна вещественной части комплексного вектора Пойнтинга и, следовательно, изменяется по закону

$$e^{-j\hat{\Gamma}z} (e^{-j\hat{\Gamma}z})^* = e^{-2\Gamma''z},$$

т. е.

$$\bar{P} = \bar{P}_0 e^{-2\Gamma''z}. \quad (8.189)$$

В силу закона сохранения энергии для любого участка направляющей системы Δz справедливо равенство

$$\Delta \bar{P} + \Delta \bar{P}_n = 0, \quad (8.190)$$

где $\Delta \bar{P}$ — изменение мощности волны, а $\Delta \bar{P}_n$ — теряемая мощность. Рассматривая бесконечно малый участок ($\Delta z \rightarrow 0$), запишем

$$\Delta \bar{P} = \frac{d\bar{P}}{dz} \Delta z.$$

Отсюда с учетом (8.189)

$$\Delta \bar{P} = -2\Gamma'' \bar{P} \Delta z. \quad (8.191)$$

Точно так же

$$\Delta \bar{P}_n = \frac{d\bar{P}_n}{dz} \Delta z = \bar{p}_n \Delta z, \quad (8.192)$$

где

$$\bar{p}_n = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_n}{\Delta z}$$

— мощность потерь, отнесенная к единице длины системы.

Внося (8.191 и 8.192) в уравнение баланса энергии на участке (8.190), получаем следующее выражение коэффициента затухания:

$$\Gamma'' = \frac{\bar{p}_n}{2\bar{P}}. \quad (8.193)$$

Как уже говорилось, практически наблюдаемые потери обычно еще не приводят к заметному изменению поперечной структуры поля, поэтому величина \bar{P} вычисляется по формуле (8.58)

$$\bar{P} = \frac{W}{2} \int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \frac{1}{2W} \int_{S_{\perp}} E_{m\perp}^2 dS, \quad (8.194)$$

где фигурируют амплитуды, определенные без учета потерь.

Мощность потерь \bar{p}_n складывается из двух частей

$$\bar{p}_n = \bar{p}_n^{\partial} + \bar{p}_n^{np}, \quad (8.195)$$

одна из которых связана с процессом в диэлектрике (\bar{p}_n^{∂}), а другая — в проводнике (\bar{p}_n^{np}).

Соответственно этому на две части распадается и коэффициент затухания (8.193):

$$\Gamma'' = \Gamma_{\partial}'' + \Gamma_{np}'', \quad (8.196)$$

где

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{\bar{p}_n^{\partial}}{2\bar{P}} \quad \text{и} \quad \Gamma_{np}'' = \frac{\bar{p}_n^{np}}{2\bar{P}}. \quad (8.196a)$$

До тех пор, пока справедливы предположения, приводящие к формуле (8.194), частичные коэффициенты затухания Γ_{∂}'' и Γ_{np}'' выступают как независимые величины и вычисляются раздельно.

Затухание, обусловленное потерями в диэлектрической среде. Потери в диэлектрике, отнесенные к единице длины системы, найдем на основании (5.35a)

$$\bar{p}_n^{\partial} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\varepsilon'' \omega}{2} \int_{\Delta V} E_m^2 dV \right] = \frac{1}{\Delta z} \left[\Delta z \frac{\varepsilon'' \omega}{2} \int_{S_{\perp}} E_m^2 dV \right]$$

и, далее,

$$\bar{p}_n^{\partial} = \frac{\varepsilon'' \omega}{2} \int_{S_{\perp}} E_m^2 dS = \frac{\varepsilon'' \omega}{2} \int_{S_{\perp}} (E_{m\perp}^2 + E_{mz}^2) dS. \quad (8.197)$$

Объединяя этот результат с (8.193 и 8.194), получаем:

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{\varepsilon'' \omega W}{2} \left[1 + \frac{\int_{S_{\perp}} E_{mz}^2 dS}{\int_{S_{\perp}} E_{m\perp}^2 dS} \right]. \quad (8.198)$$

Если направляемая волна не имеет продольной компоненты электрического поля ($E_z = 0$), то

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{\varepsilon'' \omega W}{2}. \quad (8.199)$$

Используя формулы (8.26 и 8.32), конкретизируем эту формулу сначала для H -волн:

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{\varepsilon'' \omega^2 \mu}{2\Gamma} = \frac{k^2 \operatorname{tg} \Delta}{2\Gamma}, \quad (8.200)$$

а затем для волн TEM :

$$|\Gamma_{\partial}''| = \frac{\varepsilon'' \omega}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}. \quad (8.201)$$

Последний результат совпадает с (6.85).

Переходя к случаю E -волн, вспомним формулу (8.61). С учетом ее (8.198) принимает вид:

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{\varepsilon'' \omega W}{2} \left(\frac{k}{\Gamma} \right)^2. \quad (8.202)$$

Внося сюда выражение волнового сопротивления для E -волн из (8.27), получаем формулу, совпадающую с (8.200),

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{k^2 \operatorname{tg} \Delta}{2\Gamma}. \quad (8.200a)$$

Затухание, обусловленное потерями в проводнике. С помощью соотношения (7.84) вычислим потери в направляющем проводнике системы, отнесенные к единице ее длины:

$$\bar{p}_n^{np} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{1}{2\sigma \Delta z} \int_{\Delta S} H_m^2 dS \right].$$

Здесь ΔS — полоска проводящей поверхности шириной Δz (рис. 235), а поле H_m^0 , согласно (7.85), идентично ранее найденному полю системы без потерь

$$H_m^0 = H_m \text{ на } S \text{ при } \sigma \rightarrow \infty.$$

Далее.

$$\bar{p}_n^{uv} = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\Delta z}{2\sigma\Delta^0} \oint_{L_\perp} H_m^2 dl \right] = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \oint_{L_\perp} H_m^2 dl. \quad (8.203)$$

где L_\perp — контур поперечного сечения; для многосвязной системы L_\perp — совокупность всех контуров.

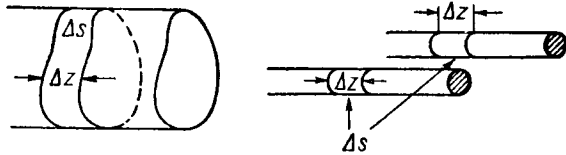


Рис. 235

Подставляя (8.203) и (8.194) в (8.193) и используя обозначения (7.95), получаем:

$$\Gamma_{np}^n = \frac{R_s \oint_{L_\perp} H_m^2 dl}{2W \int_{S_\perp} H_{m\perp}^2 dS} \quad (8.204)$$

При получении этого результата подразумевалось, что поверхность направляющего проводника является идеально гладкой. На самом деле, в результате естественной шероховатости стенок волноводов измеряемые затухания оказываются обычно больше вычисляемых по формуле (8.204). При этом затухание существенно зависит от качества обработки поверхности. В расчете это можно учесть, введя эквивалентное поверхностное сопротивление вместо R_s , стоящего в числителе (8.204). Эквивалентные сопротивления (или эквивалентные проводимости металлов) при разной обработке приводятся в справочниках.

Количественные выводы данного параграфа имеют приближенный характер. Необходимо иметь в виду, что формулы (8.200) и (8.204) становятся весьма неточными вблизи критической частоты. Это понятно, так как наличие потерь существенно изменяет известную нам идеальную картину поля при критической частоте. В направляющей системе без потерь поток энергии при $f = f_{кр}$ отсутствует, и одна из поперечных компонент поля (E_\perp или H_\perp) равна нулю. При наличии потерь передача энергии полностью не прекращается; обе компоненты всегда существуют

и имеют фазовый сдвиг, отличающийся от 90° . Ввиду того, что поток энергии, фигурирующий в знаменателе исходной формулы (8.193), в дальнейшем вычислялся без учета потерь; полученные выражения коэффициентов затухания при $f \rightarrow f_{кр}$ дают ошибочный результат $\Gamma^n \rightarrow \infty$. Фактически же по мере приближения к критической частоте затухание лишь резко возрастает, оставаясь ограниченным.

Отметим, что отличие направляемых волн в реальных системах с потерями от идеальных H -, E - и $ТЕМ$ -волн носит принципиальный характер, хотя, как указывалось, количественные изменения поперечной структуры поля обычно незначительны. Так, например, легко сообразить, что продольный ток в проводнике, направляющем $ТЕМ$ - или H -волну, вследствие конечной проводимости неизбежно вызывает E_z -компоненту.

В тех случаях, когда идеальной направляющей системе свойственны волны различного строения, распространяющиеся с одинаковыми скоростями (вырожденные волны, § 63), наличие потерь часто приводит к особой связи между ними, так что независимое существование этих волн становится невозможным. Поле реальной направляющей системы с потерями в этом случае может сильно отличаться от полей каждой из волн в отдельности, независимых лишь в идеализированной системе.

§ 68. Расчет затухания важнейших направляющих систем

Покажем применение полученных выше формул на конкретных примерах, представляющих практический интерес.

Основная волна прямоугольного волновода. Для волны H_{10} прямоугольного волновода формула (8.200) принимает вид

$$\Gamma_{\theta}^n = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \Delta / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}. \quad (8.205)$$

Напомним, что под λ везде имеется в виду длина волны в безграничной среде с теми же свойствами (параметры ϵ и μ), что и вещество, заполняющее волновод.

С целью найти затухание, обусловленное потерями в оболочке волновода, вычислим сначала интеграл, стоящий в числителе формулы (8.204):

$$\oint_{L_\perp} H_m^2 dl = 2 \left[\int_0^a H_m^2 |_{y=0} dy + \int_0^b (H_{mz}^2 + H_{mx}^2)_{y=0} dx \right].$$

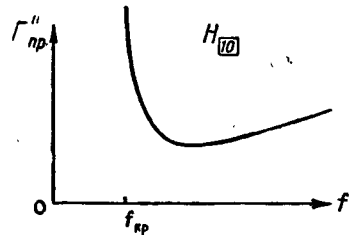
Внося сюда выражения компонент H_{mz} и H_{mx} из (8.88), находим:

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = 2H_0^2 \left\{ b + \int_0^a \left[\cos^2 \frac{\pi x}{a} + \left(1 - \frac{4a^2}{\lambda^2}\right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \right] dx \right\} = 2H_0^2 \left(b + \frac{2a^2}{\lambda^2} \right).$$

Преобразуя интеграл в знаменателе (8.204), получаем:

$$\int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \int_0^a \int_0^b H_{mx}^2 dx dy = H_0^2 \left(1 - \frac{4a^2}{\lambda^2}\right) \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = 2H_0^2 \frac{a^3 b}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda^2}{4a^2}\right).$$

Подстановка этих результатов в исходное соотношение приводит к следующей расчетной формуле:



$$\Gamma''_{np} = \frac{R^S \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{W^0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}}. \quad (8.206)$$

Рис. 236

На рис. 236 показана зависимость затухания волны H_{10} пустого прямоугольного волновода от частоты.

Вслед за резким падением затухания при удалении от критической частоты снова начинается его монотонное возрастание, вызванное уменьшением глубины проникновения с ростом частоты. Такая зависимость наиболее характерна для волноводов.

Основная волна круглого волновода. Подобным же образом для волны H_{11} круглого волновода получаем:

$$\Gamma''_{\theta} = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \Delta / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R} \right)^2}. \quad (8.207)$$

Интеграл в числителе формулы (8.204) согласно (8.110) переписываем в виде:

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \oint_{L_{\perp}} (H_{ma}^2 + H_{mz}^2)_{r=R} dl.$$

С помощью (8.110) вычисляем:

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = H_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{r}{\chi^2 R} \right)^2 J_1^2(\chi R) \sin^2 \alpha + J_1^2(\chi R) \cos^2 \alpha \right] R da = H_0^2 \pi J_1^2(A_{11}) \left[1 + \left(\frac{r}{\chi^2 R} \right)^2 \right] R.$$

Интеграл в знаменателе

$$\int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \int_{S_{\perp}} (H_{ma}^2 + H_{mr}^2) dS$$

после подстановки компонент (8.110) находим с помощью формулы (П3.28), данной в Приложении 3:

$$\int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 ds = H_0^2 \left(\frac{r}{\chi} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left[J_1'^2(\chi r) \cos^2 \alpha + \frac{1}{\chi^2 r^2} J_1^2(\chi r) \sin^2 \alpha \right] r dr da = \frac{\pi H_0^2 \Gamma^2}{\chi^4} \int_0^{A_{11}} \left[J_1'^2 + \frac{J_1^2(x)}{x^2} \right] x dx = \frac{\pi H_0^2 \Gamma^2}{2\chi^4} (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11}).$$

Внося полученные результаты в (8.204), записываем расчетную формулу:

$$\Gamma''_{np} = \frac{R^S \left[\frac{1}{A_{11}^2 - 1} + \left(\frac{\lambda A_{11}}{2\pi R} \right)^2 \right]}{W^0 R \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda A_{11}}{2\pi R} \right)^2}} = \frac{R^S \left[0,418 + \left(\frac{\lambda}{3,413R} \right)^2 \right]}{W^0 R \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R} \right)^2}}. \quad (8.208)$$

На рис. 237 представлена зависимость затухания основной волны в медном волноводе от параметра λ/R на частоте $f = 3000 \text{ Мгц}$.

Волна E_{01} круглого волновода. В данном случае

$$\Gamma''_{\theta} = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \Delta / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda B_{01}}{2\pi R} \right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \Delta / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2,612R} \right)^2}. \quad (8.209)$$

Далее, согласно (8.104),

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \oint_{L_{\perp}} H_{ma}^2 |_{r=R} dl.$$

Используя (8.104), находим:

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \frac{2\pi\omega^2 \varepsilon^2}{\chi^2} E_0^2 R J_1^2(B_{01}).$$

Произведя интегрирование в знаменателе (8.204), получаем с помощью (ПЗ.27)

$$\int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \int_{S_{\perp}} H_{m\alpha}^2 dS = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{\chi^2} E_0^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1^2(\chi r) r dr d\alpha =$$

$$= \frac{\pi \omega^2 \varepsilon^2}{\chi^4} E_0^2 B_{01}^2 J_1^2(B_{01}).$$

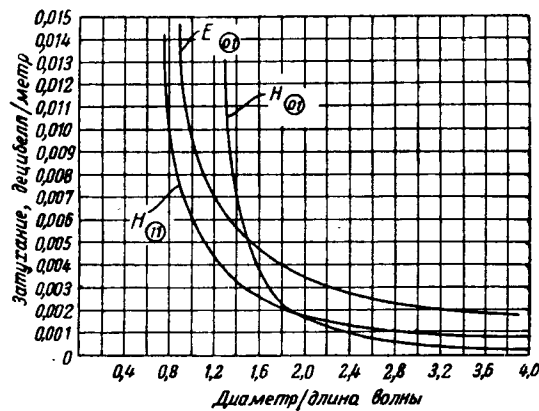


Рис. 237

В результате

$$\Gamma_{np}'' = \frac{R^S}{W^0 R \sqrt{1 - \left(\frac{B_{01} \lambda}{2\pi R}\right)^2}} = \frac{R^S}{W^0 R \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2,612R}\right)^2}}. \quad (8.210)$$

Зависимость затухания этой волны от параметра λ/R дана на рис. 237 (материал — медь, частота — 3000 МГц).

Волна H_{01} круглого волновода. На основании (8.200)

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{tg} \Delta / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda A_{01}}{2\pi R}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\pi \varepsilon_1}{\lambda} \operatorname{tg} \Delta / \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{1,640R}\right)^2}. \quad (8.211)$$

Переходя к вычислению Γ_{np}'' с помощью (8.109), находим:

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \oint_{L_{\perp}} H_{mz}^2 dl = 2\pi H_0^2 J_0^2(A_{01}) R.$$

В знаменателе (8.204) с помощью (ПЗ.27) получаем:

$$\int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \int_{S_{\perp}} H_{mr}^2 dS = H_0^2 \left(\frac{r}{\chi}\right)^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} J_0^2(\chi r) r dr d\alpha =$$

$$= 2\pi H_0^2 \left(\frac{r}{\chi^2}\right)^2 \int_0^{A_{01}} J_0^2(x) x dx = \pi H_0^2 \frac{A_{01}^2 \Gamma^2}{\chi^4} J_0^2(A_{01}).$$

В результате получаем следующую формулу:

$$\Gamma_{np}'' = \frac{R^S \left(\frac{\lambda A_{01}}{2\pi R}\right)^2}{W^0 R \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda A_{01}}{2\pi R}\right)^2}} = \frac{R^S \left(\frac{\lambda}{1,640R}\right)^2}{W^0 R \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{1,640R}\right)^2}}. \quad (8.212)$$

На этот раз зависимость затухания от частоты оказывается существенно иной. Как видно из (8.212), оно неограниченно уменьшается с ростом частоты. Эта весьма полезная аномалия объясняется тем, что магнитное поле волны H_{01} на оболочке волновода не имеет поперечной компоненты, продольная же, как это известно (§ 61, пример 5), при увеличении частоты монотонно падает. В пределе при $f \rightarrow \infty$ компонента H_z , а с ней и ток в оболочке исчезают.

Волна круглого волновода H_{01} представляет значительный технический интерес в связи с проблемой дальней волноводной передачи. Однако освобождение ее от примеси волн низших типов, а особенно от распространяющейся с той же скоростью волны E_{11} встречает немалые трудности.

На рис. 237 дана зависимость затухания волны H_{01} в сравнении с другими волнами от параметра λ/R .

Основная волна коаксиальной линии. Затухание в результате потерь диэлектрика, согласно (8.201), не зависит от размеров линии:

$$\Gamma_{\partial}'' = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (8.213)$$

Вычисляя затухание, обусловленное потерями в проводнике, имеем

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \int_0^{2\pi} (H_m^2|_{r=R_1} R_1 + H_m^2|_{r=R_2} R_2) d\alpha = \frac{I^2}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Затем

$$\int_{S_{\perp}} H_{m\perp}^2 dS = \frac{I^2}{4\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} dr d\alpha = \frac{I^2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Подставляя эти результаты в (8.204), находим:

$$\Gamma_{np}'' = \frac{R^S (R_1 + R_2)}{2W^0 R_1 R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (8.214)$$

ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

С увеличением частоты затухание TEM -волны коаксиальной линии монотонно возрастает; это показано на рис. 238 ($R_1 = 1,5 \text{ см}$; $R_2 = 3 \text{ см}$; материал — медь).

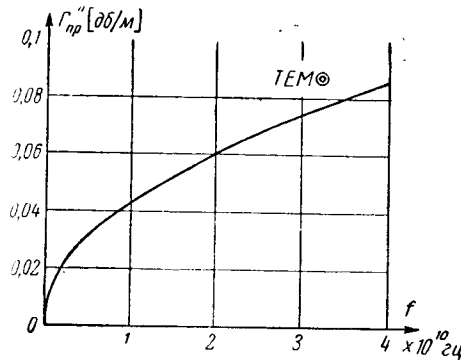


Рис. 238

Примеры и упражнения

1. Получить формулу (8.200, 8.200а), разлагая выражение

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \sqrt{k^2 - \chi^2} = \\ &= \sqrt{(k' - jk'')^2 - \chi^2} = \\ &\text{в ряд по малому параметру} \\ &\frac{2k'k''}{k'^2 - \chi^2} \end{aligned}$$

и определяя мнимую часть.

2. Вычислить затухание основной волны прямоугольного волновода с воздушным заполнением при следующих данных:

	1	2	3	4	5
a см	2	5	10	2	1
b см	1	2,5	5	1	0,5
f МГц	10^4	$5 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	10^4	$2 \cdot 10^4$
Материал	Медь	Медь	Медь	Алюминий	Медь

3. Вычислить затухание основной волны прямоугольного волновода с размерами поперечного сечения $a = 4,5 \text{ см}$ и $b = 2 \text{ см}$, заполненного полистиролом ($\epsilon = (2,6 - j5 \cdot 10^{-4}) \epsilon_0$) при частоте $f = 3 \cdot 10^3 \text{ МГц}$. Волновод изготовлен из меди.

4. Круглый волновод диаметром $2R = 2,4 \text{ см}$ сделан из алюминия. Найти затухание его основной волны при частоте $f = 10^4 \text{ МГц}$.

5. Сравнить затухание двух медных волноводов, в одном из которых распространяется основная волна, а в другом — волна H_{01} , если $\lambda = 10 \text{ см}$, а отношение $\lambda/\lambda_{кр}$ в обоих случаях составляет 0,7.

6. Найти затухание основной волны коаксиальной линии, изготовленной из меди, при $\lambda = 3 \text{ см}$. Размеры линии выбрать так, чтобы высшие волны не распространялись. Для сравнения привлечь результат расчета п. 2 (1).

Квазистационарные колебательные системы, представляющие собой соединение емкостного и индуктивного элементов, не удастся осуществить в диапазоне сверхвысоких частот. С укорочением волны размеры колебательного контура неизбежно приближаются к ее длине. В конечном счете из-за резко возрастающего излучения такая система становится неспособной к накоплению электромагнитной энергии и теряет резонансные свойства.

Между тем можно осуществить и неквазистационарные системы, энергия которых остается в пределах ограниченного объема. Для этого необходимо, чтобы движение энергии (рис. 239) носило циклический (а) или колебательный (б) характер. Оба

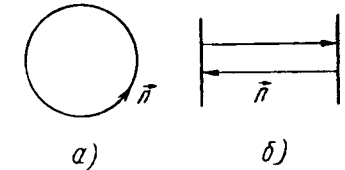


Рис. 239

вида движения легко реализовать, например, на основе направляющей системы, которая образует замкнутое кольцо (а) или ограничена двумя полностью отражающими плоскостями (б). Именно по этому принципу и строят *объемные резонаторы*. На рис. 240 схематически показано несколько таких устройств (типа б); в качестве направляющей системы фигурирует двухпроводная линия, коаксиальная линия и волновод. Анализ показывает, что свойствами электромагнитного резонатора обладает всякая область пространства, ограниченная полностью отражающей оболочкой. Кроме резонаторов, построенных на основе полых волноводов, находят применение полые системы специальной формы — особенно в СВЧ-электронике. Два типа таких резонаторов изображены на рис. 241. Резонатором может служить также диэлектрическое тело в менее плотной среде (например, воздухе), если выполнены условия полного отражения от его границы. Подобные резонаторы представляют значительный интерес в технике молекулярных генераторов.

В теорию и технику объемных резонаторов внесен значительный вклад советскими специалистами. Фундаментальные исследования в этой области принадлежит М. С. Нейману. Развитие теории полых систем в более поздний период связано с именем Г. В. Кисунько.

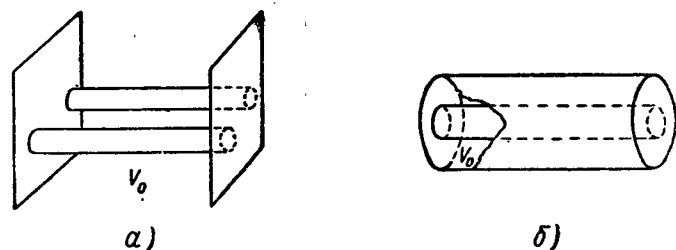


Рис. 240

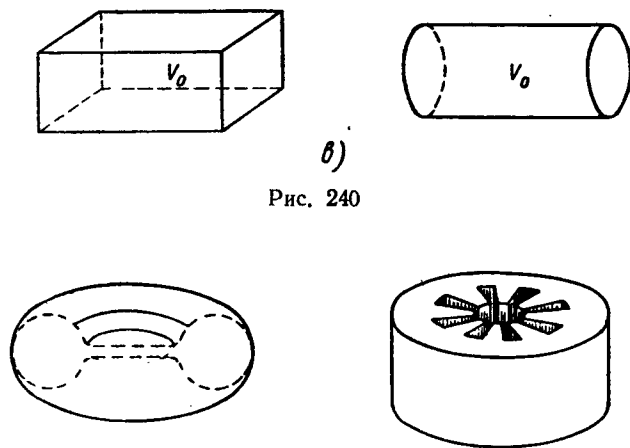


Рис. 241

§ 69. Общие свойства объемного резонатора

Данную главу мы начинаем анализом ограниченной направляющей системы. Пересечем двумя поперечными идеально проводящими плоскостями $z=0$ и $z=l$ произвольную направляющую систему, символически изображенную на рис. 242 в виде двух пунктирных линий (рис. 240). Легко видеть, что в образовавшемся объеме V (рис. 242 и 240) не может существовать прежняя направляемая волна. Действительно, поперечная компонента ее электрического поля

$$\dot{E}_{\perp} = E_{m\perp}(q_1, q_2) e^{j(\omega t - \Gamma z)} \quad (9.1)$$

не удовлетворяет на введенных плоскостях граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{\perp} &= 0 \\ \text{при } z=0 \text{ и } z=L \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Рассмотрим суперпозицию двух направляемых волн, распространяющихся в различные стороны. Записав поперечную электрическую компоненту такого поля

$$\dot{E}_{\perp}^0 = E_{m\perp}(q_1, q_2) e^{j(\omega t - \Gamma z)} + E'_{m\perp}(q_1, q_2) e^{j(\omega t + \Gamma z)}, \quad (9.3)$$

попробуем подчинить ее граничным условиям (9.2). Это приводит к двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} E_{m\perp} + E'_{m\perp} &= 0, \\ E_{m\perp} e^{-\Gamma L} + E'_{m\perp} e^{\Gamma L} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

(круглые скобки (q_1, q_2) здесь и в дальнейшем опущены).

Первая строчка (9.4) позволяет привести выражение (9.3) к виду

$$\dot{E}_{\perp}^0 = -j2E_{m\perp} \sin \Gamma z e^{j\omega t}. \quad (9.5)$$

Переписав в тригонометрической форме вторую строчку (9.4), приходим к требованию:

$$\sin \Gamma L = 0, \quad (9.4a)$$

из которого вытекает, что

$$\Gamma = \frac{p\pi}{L}, \quad (9.6)$$

где $p = 0, 1, 2, 3, \dots$

При $p=0$, как это видно из (9.5), поперечная компонента электрического поля исчезает, и этот случай будет обсужден отдельно. Вообще же полученные результаты приводят к заключению, что в отсеченном объеме V_0 может существовать суперпозиция двух противоположно движущихся волн одинаковых амплитуд, но только при вполне определенной постоянной распространения, принимающей ряд значений (9.6). Фаза результирующего поля (9.5) не изменяется в пространстве. Такое поле (ср. § 48) называется *стоячей волной* направляющей системы.

Из (9.6) непосредственно следует, что продольный размер отсеченного участка направляющей системы L должен быть кратным половине длины волны, ей свойственной:

$$L = p \frac{\lambda}{2}. \quad (9.7)$$

Возведя обе части (9.6) в квадрат, с помощью (8.22) находим:

$$k_0^2 = \chi^2 + \chi_z^2, \quad (9.8)$$

где введено обозначение

$$\chi_z = \frac{p\pi}{L}, \quad (9.9)$$

и волновому числу k присвоен индекс «0».

Как видно, число k_0 не может выбираться произвольно. Оно принимает ряд значений, каждое из которых соответствует определенному виду поперечной структуры поля (то или иное поперечное волновое число χ) и определенному числу продольных полуволин (продольное волновое число χ_z).

Из сказанного ясно, что поле в объеме V_0 существует лишь при вполне определенных частотах

$$\omega_0 = \frac{k_0}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\chi^2 + \chi_z^2}, \quad (9.10)$$

которым соответствуют длины волн

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0} = 2\pi / \sqrt{\chi^2 + \chi_z^2} \quad (9.11)$$

(измеренные в безграничной среде с теми же параметрами ϵ и μ , что и вещество, заполняющее V_0). Иными словами, объем V_0 обладает резонансными свойствами; это *объемный резонатор*, и мы нашли условия его *свободных колебаний*. Величины k_0 , ω_0 и λ_0 , образующие бесконечные числовые последовательности, называются соответственно *собственным волновым числом, собственной круговой частотой и собственной длиной волны резонатора*.



Рис. 243

Что касается случая $p=0$, то применительно к *ТЕМ*- и *H*-волнам он лишен физического содержания, так как поперечная компонента E_{\perp} здесь обратиться в нуль не может. Однако он приобретает очевидный смысл для *E*-волн, которые лишаются компоненты E_{\perp} при *критических условиях*. И, действительно, индекс p обращается в нуль именно при критических условиях: при равной нулю постоянной распространения Γ (9.6). Длина резонатора при этом становится неопределенной

$$L = \frac{p\pi}{\Gamma} = \frac{p\pi}{\chi_z} = \frac{0}{0},$$

т. е. может принимать любые значения. Это и не удивительно, ибо при критических условиях поле направляющей системы продольно однородно (рис. 243). Согласно (9.8), собственное волновое число резонатора при $p=0$ равно

$$k_0 = \chi, \quad (9.12)$$

и формулы (9.10, 9.11) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \chi / \sqrt{\epsilon\mu}, \\ \lambda_0 &= 2\pi / \chi \end{aligned} \right\} \quad (9.13)$$

Отметим следующее важное обстоятельство. Ввиду того, что поле стоячей волны не изменяется в пространстве по фазе, уравнения Максвелла свидетельствуют о постоянном фазовом сдвиге во времени электрического и магнитного полей на 90° :

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{j}{\omega\mu} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}$$

и

$$\Phi_{\mathbf{H}} = \Phi_{\mathbf{E}} + \frac{\pi}{2}. \quad (9.14)$$

Это значит, что в некоторые моменты в резонаторе существует только электрическое поле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \quad \text{и} \quad \mathbf{H} = 0,$$

и есть такие моменты, когда, наоборот, существует только поле магнитное

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m \quad \text{и} \quad \mathbf{E} = 0.$$

Условие (9.14) означает также, что в любой области резонатора в среднем передача энергии отсутствует

$$\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{H}}^*] = 0. \quad (9.15)$$

В резонаторах с циклическим потоком энергии (рис. 239) существует *бегущая волна*, и равенства (9.14) и (9.15) не соблюдаются. Эта возможность будет рассмотрена в следующем параграфе на конкретных примерах.

Обратимся теперь к случаю произвольного полого резонатора с идеально проводящей оболочкой (рис. 244). Поле собственных колебаний резонатора следует искать как решение волнового уравнения (5.52 или 5.54) при граничных условиях, свойственных проводнику. Однако такая задача может быть решена только в нескольких случаях простейшей геометрической формы полости, например, для прямоугольного параллелепипеда, кругового цилиндра и шара. В первых же двух случаях, как уже известно, поле может быть найдено и в виде стоячей волны волновода.

С целью выяснить общие свойства собственного волнового числа резонатора k_0 , запишем уравнение (5.54) в виде

$$\nabla^2 \mathbf{E}_m + k_0^2 \mathbf{E}_m = 0 \quad (9.16)$$

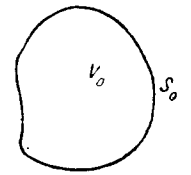


Рис. 244

и граничное условие для вектора \mathbf{E}

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}_0] = 0 \text{ на } S_0. \quad (9.17)$$

Применив к левой части (9.16) векторное тождество (П1.23) и умножив результат на \mathbf{E}_m , получаем:

$$\mathbf{E}_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = k_0^2 \mathbf{E}_m^2. \quad (*)$$

Далее, на основании (П1.20)

$$\mathbf{E}_m \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_m] + (\operatorname{rot} \mathbf{E}_m)^2,$$

поэтому уравнение (*) после интегрирования по объему резонатора V_0 можно записать так:

$$\int_{V_0} \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_m] dV + \int_{V_0} (\operatorname{rot} \mathbf{E}_m)^2 dV = k_0^2 \int_{V_0} E_m^2 dV.$$

Первый интеграл, по теореме Остроградского — Гаусса, сводится к поверхностному и в силу граничного условия (9.17) обращается в нуль:

$$\int_{V_0} \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_m] dV = \oint_{S_0} [\operatorname{rot} \mathbf{E}_m, \mathbf{E}_m] dS = 0.$$

Окончательный результат представляет собой следующее интегральное выражение собственного волнового числа:

$$k_0^2 = \frac{\int_{V_0} (\operatorname{rot} \mathbf{E}_m)^2 dV}{\int_{V_0} E_m^2 dV}. \quad (9.18)$$

Правая часть равенства положительна, и поэтому k_0 — величина вещественная. Как видно, собственное волновое число k_0 определяется формой, размерами и типом поля резонатора. Может случиться так, что одному значению k_0 соответствует несколько различных типов поля, т. е., что колебания разного вида имеют одинаковые собственные частоты. Такие колебания называются *вырожденными*.

Отметим, что выражение (9.18), рассматриваемое как функционал (см. стр. 259, петит), обладает экстремальными свойствами. Нижняя граница функционала (9.18) на функциях допустимого класса соответствует низшей (основной) собственной частоте резонатора.

§ 70. Важнейшие резонаторы простой формы

На основании материала предыдущего параграфа нетрудно исследовать конкретные резонаторы, построенные с помощью изученных ранее направляющих систем.

Прямоугольный резонатор. Так, компоненты поля прямоугольного резонатора (рис. 245) находим, складывая соответствующие компоненты двух противоположно направленных волн

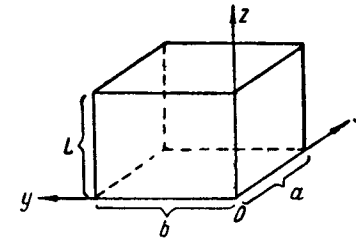


Рис. 245

прямоугольного волновода и удовлетворяя граничным условиям при $z=0$ и $z=L$; при этом получаем:

E-поле

$$\left. \begin{aligned} E_{mz} &= E_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y \cos \chi_z z, \\ \dot{E}_{mx} &= -E_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi^2} \cos \chi_x x \sin \chi_y y \sin \chi_z z, \\ \dot{E}_{my} &= -E_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi^2} \sin \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z, \\ \dot{H}_{mx} &= jE_0 \frac{\chi_y \omega_0 \epsilon}{\chi^2} \sin \chi_x x \cos \chi_y y \cos \chi_z z, \\ \dot{H}_{my} &= -jE_0 \frac{\chi_x \omega_0 \epsilon}{\chi^2} \cos \chi_x x \sin \chi_y y \cos \chi_z z \end{aligned} \right\} \quad (9.19)$$

($p = 0, 1, 2, 3, \dots$)

H-поле

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z, \\ \dot{H}_{mx} &= -H_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi^2} \sin \chi_x x \cos \chi_y y \cos \chi_z z, \\ \dot{H}_{my} &= -H_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi^2} \cos \chi_x x \sin \chi_y y \cos \chi_z z, \\ \dot{E}_{mx} &= jH_0 \frac{\chi_y \omega_0 \mu}{\chi^2} \cos \chi_x x \sin \chi_y y \sin \chi_z z, \\ \dot{E}_{my} &= -jH_0 \frac{\chi_x \omega_0 \mu}{\chi^2} \sin \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

($p = 1, 2, 3, \dots$)

Конкретизируя для рассматриваемого случая формулы (9.10) и 9.11), имеем:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2} \quad (9.21)$$

и

$$\lambda_0 = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}. \quad (9.22)$$

Любая комбинация чисел m , n и p , из которых ни одно не равно нулю, определяет одновременно собственную частоту H_{mnp} и E_{mnp} полей резонатора. Эти колебания, таким образом, вырождены не менее, чем двукратно. Вообще же один из индексов

m или n при поле H
и p » » E

может быть равен нулю. Следует подчеркнуть, что выбор «продольной» оси z для прямоугольного резонатора в отличие от волновода произволен. Поэтому, употребляя то или иное обозначение поля, нельзя забывать, о какой именно системе координат идет речь. Так, в кубическом резонаторе могут существовать три идентичных по строению, но различно ориентированных поля.

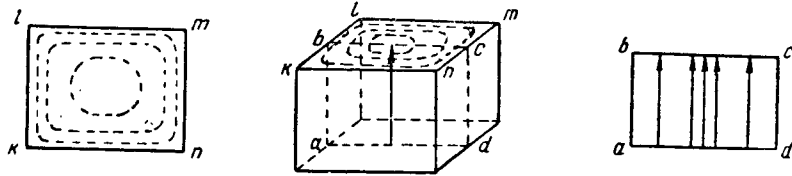


Рис. 246

Если L — самое короткое ребро резонатора, то его наименьшая собственная частота определяется формулой

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (9.23)$$

Соответствующее этой частоте основное поле резонатора (рис. 246) в принятой ранее системе координат получает обозначение E_{110} , а его компоненты имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \\ \dot{H}_{mx} &= jE_0 \frac{\pi}{b} \frac{1}{\omega_0 \mu} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}, \\ \dot{H}_{my} &= -jE_0 \frac{\pi}{a} \frac{1}{\omega_0 \mu} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (9.24)$$

Легко сообразить, что при изменении ориентации системы координат это же поле может быть названо H_{101} или H_{011} . В кубическом резонаторе основное колебание трехкратно вырождено.

Представление о некоторых высших типах поля прямоугольного резонатора дает рис. 247. Полезно провести сопоставление рис. 246, 247, с одной стороны, и рис. 203, 204, изображающих «остановленную» волну волновода, — с другой. В сравнении со случаем волновода электрическое и магнитное поля резонатора сдвинуты между собой по оси z на $\lambda/4$, что обусловлено колебательным движением энергии.

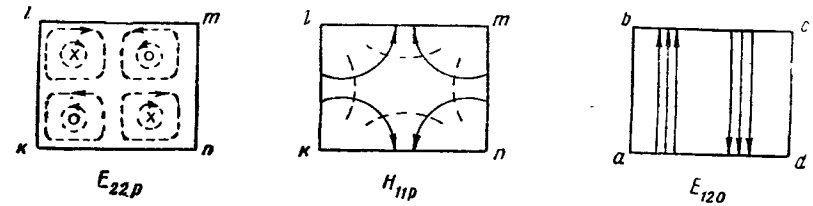


Рис. 247

Легко убедиться, что суперпозиция полей E_{mnp} и E_{nmp} или H_{mnp} и H_{nmp} , сдвинутых по фазе на 90° , создает в резонаторе циклический поток энергии. Возьмем для примера основное колебание. Составляя суперпозицию, символически обозначаемую

$$H_{101} \pm jH_{011},$$

с помощью (9.20) находим выражение средней плотности потока энергии:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} = \pm \frac{1}{2} \frac{\omega_0 \mu}{\chi^2} H_{01}^2 \sin^2 \chi_z z & (-x_0 \chi_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y + \\ & + y_0 \chi_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Как видно, средний вектор Пойнтинга лежит в поперечной плоскости. Направление потока энергии в точках, находящихся на диагоналях поперечного сечения резонатора, показано на рис. 248.

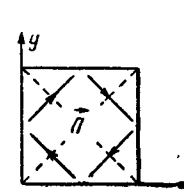


Рис. 248

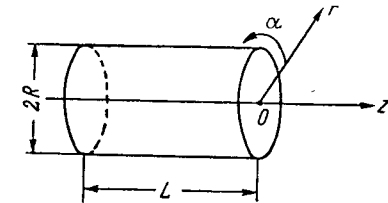


Рис. 249

Цилиндрический резонатор. Используя формулы (8.104, 8.109), напишем компоненты поля, показанного на рис. 249 цилиндрического резонатора:

E-поле

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= E_0 J_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha \cos \chi_z z, \\ \dot{E}_{mr} &= -E_0 \frac{\chi_z}{\chi} J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha \sin \chi_z z, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -E_0 \frac{n\chi_z J_n(\chi r)}{\chi^2 r} \frac{-\sin}{\cos} n\alpha \sin \chi_z z, \\ \dot{H}_{mr} &= jE_0 \frac{n\omega_0 \varepsilon J_n(\chi r)}{\chi^2 r} \frac{-\sin}{\cos} n\alpha \cos \chi_z z, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -jE_0 \frac{\omega_0 \varepsilon}{\chi} J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha \cos \chi_z z \end{aligned} \right\} \quad (9.26)$$

($p = 0, 1, 2, 3, \dots$)

H-поле

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= H_0 J_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha \sin \chi_z z, \\ \dot{H}_{mr} &= H_0 \frac{\chi_z}{\chi} J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha \cos \chi_z z, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= H_0 \frac{n\chi_z J_n(\chi r)}{\chi^2 r} \frac{-\sin}{\cos} n\alpha \cos \chi_z z, \\ \dot{E}_{mr} &= -jH_0 \frac{n\omega_0 \mu J_n(\chi r)}{\chi^2 r} \frac{-\sin}{\cos} n\alpha \sin \chi_z z, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= jH_0 \frac{\omega_0 \mu}{\chi} J'_n(\chi r) \frac{\cos}{\sin} n\alpha \sin \chi_z z \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

($p = 1, 2, 3, \dots$)

В соответствии с (9.10, 9.11) и (8.102, 8.108) собственные частоты и длины волн цилиндрического резонатора выражаются формулами:

E-поле

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad \text{и} \quad \lambda_0 = 2\pi / \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad (9.28)$$

H-поле

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad \text{и} \quad \lambda_0 = 2\pi / \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2} \quad (9.29)$$

(значения A_{nm} и B_{nm} можно взять из Приложения 3 или определить по табл. 4 и 5).

В отличие от прямоугольного резонатора здесь собственные частоты колебаний H_{nmp} и E_{nmp} не совпадают. Ориентация полей определена аксиальной симметрией системы, и вырождение наблюдается, главным образом, в тех случаях, которые были отмечены при изучении круглого волновода.

Полям H_{111} и E_{010} соответствуют наименьшие собственные частоты, которые совпадают (см. 9.28 и 9.29) при условии

$$\left(\frac{B_{01}}{R}\right)^2 = \left(\frac{A_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad (9.30)$$

т. е. в том случае, когда отношение длины цилиндра к его радиусу составляет

$$\frac{L}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{B_{01}^2 - A_{11}^2}} = 2,03. \quad (9.30a)$$

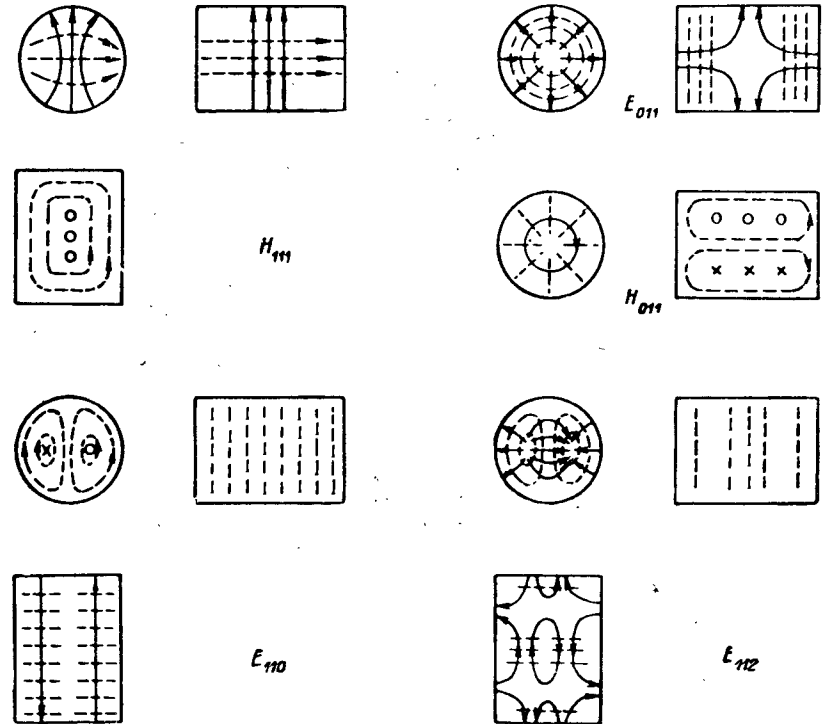


Рис. 250

Отсюда следует, что для вытянутого цилиндра ($L/R > 2,03$) основным является колебание H_{111} с собственной частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{A_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}, \quad (9.31)$$

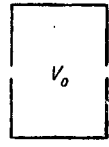
а для плоского ($L/R < 2,03$) — колебание E_{010} , собственная частота которого равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \frac{B_{01}}{R}. \quad (9.32)$$

Некоторые поля цилиндрического резонатора показаны на рис. 250. Особый интерес представляет поле H_{01p} , которому соответствует та же собственная частота

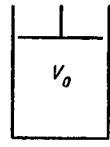
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{A_{01}}{R}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2}, \quad (9.33)$$

что и полю E_{11p} (ибо $A_{01} = B_{11}$). Практически ценно, что поле H_{01p} допускает полный поперечный разрез резонатора (рис. 251, а) или применение так называемого «бесконтактного поршня» (рис. 251, в) для плавного изменения его объема, ибо образующая щель для



а)

Рис. 251



б)

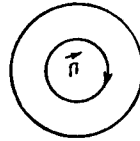


Рис. 252

этого поля является неизлучающей (см. стр. 296, 297). Напротив, на одновременно существующее поле E_{11p} такая щель оказывает разрушающее действие.

Легко проверить, что всякому полю цилиндрического резонатора с азимутальной зависимостью

$$\frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha} = e^{\pm jn\alpha}$$

(волна, бегущая по азимуту) свойственен циклический поток энергии в поперечном сечении цилиндра, имеющий лишь азимутальную компоненту (рис. 252). Так, взяв в качестве примера основное колебание H_{111} , запишем на основании (9.27) его продольную магнитную и радиальную электрическую компоненты;

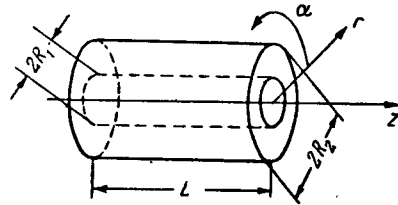


Рис. 253

$$\begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= \pm H_0 J_1(\chi r) e^{\pm ja} \sin \chi_2 z, \\ \dot{E}_{mr} &= H_0 \frac{\omega_0 \mu}{\chi^2} \frac{J_1(\chi r)}{r} e^{\pm ja} \sin \chi_2 z. \end{aligned}$$

Как видно, они находятся в фазе и образуют азимутальный поток энергии, средняя плотность которого равна

$$\bar{\Pi} = \pm \alpha_0 \frac{H_0^2}{2} \frac{\omega_0 \mu}{\chi^2} \frac{J_1^2(\chi r)}{r} \sin^2 \chi_2 z. \quad (9.34)$$

Коаксиальный резонатор. На основании (8.132, 8.133) запишем компоненты ТЕМ-поля коаксиального резонатора (рис. 253):

$$\dot{H}_{m\alpha} = j \frac{I}{2\pi r} \cos \frac{p\pi}{L} z, \quad \dot{E}_{mz} = \frac{IW_0}{2\pi r} \sin \frac{p\pi}{L} z. \quad (9.35)$$

Положив в формулах (9.10, 9.11) $\chi = 0$, находим собственные волны и частоты:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \frac{p\pi}{L} \quad \text{и} \quad \lambda_0 = \frac{2L}{p}.$$

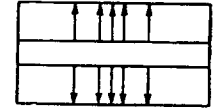
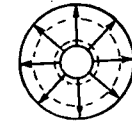


Рис. 254

Примеры и упражнения

1. Проверить формулу (9.18) для основного поля прямоугольного резонатора.

2. Вычислить первые пять собственных частот кубического резонатора, если ребро куба $a = 1$ см и внутренняя среда — вакуум.

3. Резонатор предыдущей задачи заполнен: а) полистиролом, б) дистиллированной водой и в) диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = 400\epsilon_0$. Повторить вычисления.

4. Найти первые пять собственных частот пустого цилиндрического резонатора с размерами:

$R, \text{ см}$	1	2	2	3	5	5	10
$L, \text{ см}$	0,5	1	2	2	2	50	2

5. Вычислить собственные частоты коаксиального резонатора длиной $L = 10$ см.

6. Рассмотрим в качестве примера нахождение поля прямоугольного резонатора путем решения волнового уравнения. Остановимся на случае H -поля и возьмем уравнение

$$\nabla^2 H_m + k_0^2 H_m = 0.$$

Спроектировав его векторы на ось z

$$\nabla^2 H_{mz} + k_0^2 H_{mz} = 0,$$

будем искать решение методом разделения переменных, положив

$$H_{mz} = XYZ, \quad (9.37)$$

где X , Y и Z — функции декартовых координат x , y и z соответственно. Внося (9.37) в исходное уравнение, получаем

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -k_0^2. \quad (9.38)$$

Запишем это уравнение в виде двух

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\chi^2 \quad \text{и} \quad \frac{Z''}{Z} = -\chi_2^2, \quad (9.38a)$$

причем

$$\chi^2 + \chi_z^2 = k_0^2 \quad (9.39)$$

Первое из уравнений (9.38a) согласно § 62 дает

$$XY = H'_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y \quad (9.40)$$

и

$$\chi^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (9.41)$$

Решением второго уравнения при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} H_z &= 0 \\ \text{при } z &= 0 \text{ и } z = L \end{aligned} \right\},$$

как нетрудно видеть, является функция

$$Z = H''_0 \sin \chi_z z, \quad (9.42)$$

где

$$\chi_z = \frac{p\pi}{L}. \quad (9.43)$$

Мы пришли, таким образом, к известному результату (9.20)

$$H_{mz} = H_0 \cos \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z. \quad (9.44)$$

Остальные компоненты находятся из уравнений Максвелла.

§ 71. Объемные резонаторы, близкие к квазистационарным

В СВЧ-электронике применяются резонаторы, электрическое поле которых в основном сосредоточено в узком зазоре. Таковы

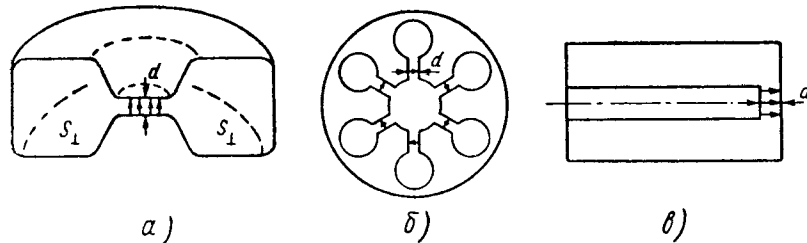


Рис. 255

колебательные системы клистрона (а), магнетрона (б) и триодного генератора (в), схематически изображенные на рис. 255. В зазоре осуществляется взаимодействие электромагнитных колебаний системы с электронным потоком. Время пролета электронов в зазоре (или вблизи него) должно быть по возможности малым в сравнении с периодом колебаний, с этим связано требование квазистационарности для ширины зазора

$$d \ll \lambda.$$

Таким образом, зазор с той или иной степенью точности может рассматриваться как плоский конденсатор, а примыкающий к нему объем играет роль индуктивности. Существенно, что для основного колебания все размеры резонаторов (рис. 255) оказываются значительно меньше длины волны. Ниже излагаются простые соображения, приводящие к приближенным расчетным формулам для их собственных частот, часто используемым на практике.

Тороидальный резонатор. Полагая, что электрическое поле резонатора (рис. 255, а) существует лишь в зазоре и однородно, а магнитное сосредоточено в тороидальной области, будем исходить из формулы для квазистационарной системы

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}, \quad (9.45)$$

где

$$C = \frac{\epsilon S}{d} = \frac{\epsilon \pi R_1^2}{d} \quad (9.46)$$

— емкость зазора (S — его площадь, а d — ширина) и

$$\mathcal{L} = \Phi / I \quad (9.47)$$

— индуктивность тороида (Φ — проходящий через его поперечное сечение магнитный поток, I — охватываемый им ток в стенках).

Учитывая, что магнитные силовые линии имеют вид концентрических окружностей, напряженность магнитного поля на расстоянии r от оси системы вычисляем по формуле:

$$H = I / 2\pi r,$$

так что магнитный поток Φ находится как интеграл

$$\Phi = \mu \int_{S_{\perp}} H dS = \frac{\mu I}{2\pi} \int_{S_{\perp}} \frac{dS}{r}, \quad (9.48)$$

где S_{\perp} — площадь поперечного сечения тороида (половина меридиального сечения).

Таким образом, основная собственная частота резонатора равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi d}{\epsilon \mu S \int_{S_{\perp}} \frac{dS}{r}}}. \quad (9.49)$$

В случае прямоугольного тороида (рис. 256)

$$\int_{S_{\perp}} \frac{dS}{r} = h \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = h \ln \frac{R_2}{R_1}$$

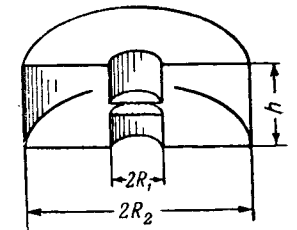


Рис. 256

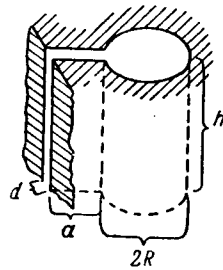
и, следовательно,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2d}{\epsilon\mu h R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}} \quad (9.50)$$

Магнетронный резонатор. Совершенно так же вычисляется основная собственная частота ячейки магнетронного резонатора (рис. 257). Емкость ее равна

$$C = \frac{\epsilon a h}{d}, \quad (9.51)$$

а при расчете индуктивности принимается, что магнитное поле в цилиндре близко к полю бесконечного соленоида (4.386)



$$H = \frac{I}{h} \quad (9.52)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{L} = \frac{\mu\pi R^2}{h}. \quad (9.53)$$

Собственная частота ячейки:

$$\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{d}{\epsilon\mu\pi a}}. \quad (9.54)$$

Рис. 257

Коаксиальный резонатор с зазором. В соответствии с эквивалентной схемой (рис. 258, б) запишем условие резонанса

$$jW_n \operatorname{tg} k_0 l = -\frac{1}{j\omega_0 C} \quad (9.55)$$

рассматриваемой системы (рис. 258, а). Фигурирующее в левой

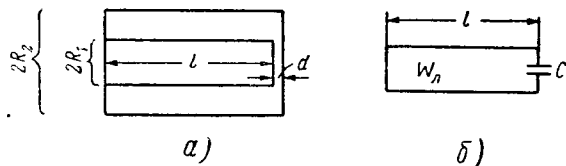


Рис. 258

части сопротивление короткозамкнутого участка линии с учетом формулы (8.136) принимает вид

$$Z_n = j \frac{W_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} k_0 l. \quad (9.56)$$

Выражая емкость как

$$C = \frac{\epsilon\pi R_1^2}{d}, \quad (9.57)$$

получаем следующее трансцендентное уравнение для собственной частоты:

$$\operatorname{ctg} \omega_0 \sqrt{\epsilon\mu} l = \omega_0 \sqrt{\epsilon\mu} \frac{R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}{2d} \quad (9.58)$$

решения которого легко находятся графически.

При условии $l \ll \lambda$ из (9.58) вытекает формула (9.50).

Примеры и упражнения

1. Получить выражение основной собственной частоты тороидального резонатора круглого сечения (рис. 259).

Ответ:

$$\omega_0 = \frac{1}{R_1 R_\perp} \sqrt{\frac{d}{\epsilon\mu\pi} [R_1 + R_\perp + \sqrt{R_1 (R_1 + 2R_\perp)}]}. \quad (9.59)$$

2. Вычислить собственную частоту прямоугольного тороидального резонатора с размерами:

	1	2	3	4
$R_1, \text{ см}$	1	2	2	5
$R_2, \text{ см}$	1,2	2,5	2,5	6
$h, \text{ см}$	1	1	1	2
$d, \text{ см}$	0,1	0,1	0,2	0,2

3. Выбрать размеры магнетронных ячеек для следующих длин волн:

$$\lambda_0 = 1 \text{ см}; 3,5 \text{ см}; 5 \text{ см}; 10 \text{ см}; 25 \text{ см}.$$

4. Критическую частоту Π -образного или H -образного волновода (§ 65) можно рассматривать как основную собственную частоту соответствующего квазистационарного резонатора, представляющего собой как бы «сдвоенную магнетронную ячейку». Показать, что это приводит к формуле

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{d}{\epsilon\mu b c h}}, \quad (9.60)$$

справедливой при достаточно малом d .

Взяв численные примеры, сравнить критические частоты прямоугольного и Π -образного волноводов.

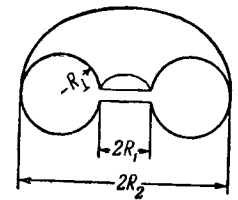


Рис. 259

5. Путем графического решения трансцендентного уравнения (9.58) найти первые три собственные частоты коаксиального резонатора с зазором при следующих размерах:

$$l = 5 \text{ см}; R_1 = 0,5 \text{ см}; R_2 = 1,5 \text{ см}; d = 0,1 \text{ см}.$$

§ 72. Потери энергии объемного резонатора

Подобно тому, как это происходит в направляющих системах, токи проводимости в металлических элементах и диэлектрической среде объемного резонатора вызывают потери энергии. Кроме того, в реальных приборах энергия резонатора частично извлекается во внешнюю полезную нагрузку. Этой цели служат описанные в § 66 элементы связи (отверстия, петли, штырьки), создающие излучение во внешнее пространство. Аналогичные элементы, применяемые для возбуждения поля самого резонатора, также вызывают дополнительное излучение. Соответственно сказанному различают три вида потерь, и мощность потерь P^n делят на следующие части:

$$P^n = P^{np} + P^{\delta} + P^{\Sigma}, \quad (9.61)$$

где индекс np соответствует проводнику, δ — диэлектрику и Σ — действию элементов связи.

Идеальный электромагнитный резонатор, испытывающий свободные колебания, является изолированной системой (§§ 13, 35). Реальный резонатор в режиме *вынужденных колебаний* — связанный с питающим генератором и нагрузкой — также удобно рассматривать как систему изолированную, обладающую запасом энергии (§ 35)

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mu H_m^2 dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} \epsilon E_m^2 dV \quad (9.62)$$

и потерями P_n , и характеризовать *добротностью*

$$Q = \frac{\omega_0 W_0}{P_n}. \quad (9.63)$$

При этом, как следует из (9.61), справедлива запись

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{np}} + \frac{1}{Q_{\delta}} + \frac{1}{Q_{\Sigma}}, \quad (9.64)$$

где

$$Q_{np} = \frac{\omega_0 W_0}{P_{np}}, \quad Q_{\delta} = \frac{\omega_0 W_0}{P_{\delta}}, \quad Q_{\Sigma} = \frac{\omega_0 W_0}{P_{\Sigma}} \quad (9.65)$$

— частичные добротности.

Вообще говоря, потери всех видов, изменяя распределение поля резонатора, находятся во взаимной связи. Обычно, однако,

потери малы, так что распределение поля близко к идеальному¹. Поэтому запас энергии в формулах (9.65) вычисляют, исходя из распределения поля в отсутствие потерь, и величины Q_{np} , Q_{δ} и Q_{Σ} находятся независимо друг от друга.

Свободные колебания резонатора при наличии потерь являются, как известно, *затухающими*. Собственная частота ω_0 (в рамках используемого нами метода комплексных амплитуд) оказывается при этом величиной комплексной. Это можно, например, показать следующим образом. Выражая в формуле (9.63) среднюю мощность потерь \bar{P}^n как скорость убывания запаса энергии собственных колебаний

$$\bar{P}^n = -\frac{dW_0}{dt}, \quad (9.66)$$

приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{dW_0}{dt} + \frac{\omega_0}{Q} W_0 = 0. \quad (9.67)$$

Его решение

$$W_0 = W_0|_{t=0} e^{-\frac{\omega_0}{Q} t}, \quad (9.68)$$

как и следовало ожидать, свидетельствует об экспоненциальном характере убывания запаса энергии. Напряженности поля, с которыми энергия связана квадратичной зависимостью, имеют коэффициент затухания вдвое меньший:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}. \quad (9.69)$$

Записывая комплексы поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{E} &= \dot{E}_m e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}, \\ \dot{H} &= \dot{H}_m e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \end{aligned} \right\} \quad (9.70)$$

видим, что временную зависимость нетрудно представить в форме, свойственной резонатору без потерь, положив

$$e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} = e^{j\dot{\omega}_0 t}. \quad (9.71)$$

Величина, определяемая равенством

$$\dot{\omega}_0 = \omega_0 \left(1 + j \frac{1}{2Q} \right), \quad (9.72)$$

¹ Сделаем оговорку, касающуюся вырожденных колебаний. Если действие потерь на поля разных типов различно, то вырождение «снимается»: собственные частоты перестают совпадать. Поле резонатора может при этом существенно отличаться от идеального (в отсутствие потерь).

называется *собственной комплексной частотой* резонатора с потерями.

Перейдем к анализу частичных добротностей.

Потери в диэлектрике. Выражая во второй формуле (9.65) запас энергии через электрический вектор (9.62), а мощность потерь согласно (5.35), получаем:

$$Q_{\partial} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\operatorname{tg} \Delta}. \quad (9.73)$$

Потери в металлических элементах. Если полная поверхность металла есть S , то в соответствии с (7.84),

$$\bar{P}_{np} = \frac{1}{2\sigma\Delta^{\circ}} \int_S H_m^2 dS = \frac{R^S}{2} \int_S H_m^2 dS. \quad (9.74)$$

Используя на этот раз выражение запаса энергии через магнитный вектор (9.62), находим:

$$Q_{np} = \frac{\omega_0 \mu \int_V H_m^2 dV}{R^S \int_S H_m^2 dS}, \quad (9.75)$$

или

$$Q_{np} = \frac{2}{\Delta^{\circ}} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{\int_V H_m^2 dV}{\int_S H_m^2 dS}, \quad (9.75a)$$

где μ — магнитная проницаемость внутренней среды (диэлектрика) и μ_{np} — магнитная проницаемость металла.

В случае полого резонатора S — поверхность его оболочки. Интересно отметить, что при увеличении размеров полого резонатора его добротность Q_{np} для данного типа колебаний растет пропорционально квадратному корню резонансной длины волны. Это происходит потому, что отношение интегралов

$$\frac{\int_V H_m^2 dV}{\int_S H_m^2 dS} \quad (*)$$

пропорционально λ_0 , в то время как глубина проникновения Δ° пропорциональна лишь $\sqrt{\lambda_0}$.

Если же в резонаторе неизменных размеров возбуждать высшие типы колебаний, то добротность Q_{np} вследствие уменьшения глубины проникновения будет расти как $\sqrt{\omega_0}$, ибо отношение (*) остается здесь приблизительно постоянным

Потери на излучение. Введенная выше величина

$$Q_{\Sigma} = \frac{\omega_0 W_0}{P_{\Sigma}}$$

(9.65) называется обычно «внешней» добротностью и по смыслу является добротностью идеализированного резонатора, потери энергии которого обусловлены одним лишь излучением во внешнее пространство (через элементы связи). Формулу (9.64) часто пишут в виде:

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\Sigma}}, \quad (9.76)$$

где

$$Q_0 = \left(\frac{1}{Q_{np}} + \frac{1}{Q_{\partial}} \right)^{-1} \quad (9.77)$$

— «собственная» добротность резонатора. Величину Q называют «нагруженной» добротностью.

Вычисление излучаемой резонатором энергии требует в каждом конкретном случае решения сравнительно сложной электродинамической задачи. В примерах мы рассмотрим случай излучения через отверстие на основании задачи, решенной Л. И. Мандельштамом [13, 14]. В технике СВЧ существуют простые способы измерения нагруженной добротности.

§ 73. Расчет собственной добротности важнейших резонаторов

Для определения собственной добротности резонатора фактически достаточно вычислить величину Q_{np} , ибо знание свойств диэлектрической среды сразу же дает значение $Q_{\partial} = 1/\operatorname{tg} \Delta$. Ниже произведено несколько расчетов такого рода на примере важнейших резонаторов.

Поле E_{110} прямоугольного резонатора. Фигурирующий в формуле (9.75a) объемный интеграл в данном случае имеет вид:

$$\int_V H_m^2 dV = \int_0^a \int_0^b \int_0^L (H_{mx}^2 + H_{my}^2) dx dy dz.$$

Внося сюда компоненты поля из (9.24), имеем:

$$\int_V H_m^2 dV = \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega_0^2 \mu^2} \int_0^a \int_0^b \int_0^L \left(\frac{1}{b^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} + \frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} \right) dx dy dz = \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega_0^2 \mu^2} \frac{abL}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Вычисляя поверхностный интеграл в числителе (9.75а), получаем:

$$\int_S H_m^2 dS = 2 \int_0^a \int_0^b (H_{mx}^2 + H_{my}^2)_{z=0} dx dy +$$

$$+ 2 \int_0^b \int_0^L H_{my}^2|_{x=0} dy dz + 2 \int_0^L \int_0^a H_{mx}^2|_{y=0} dz dx$$

и далее с учетом (9.24):

$$\int_S H_m^2 dS = 2 \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega_0^2 \mu^2} \left[\int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{b^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} \right) dx dy + \right.$$

$$\left. + L \int_0^b \frac{1}{a^2} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dy + L \int_0^a \frac{1}{b^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx \right] =$$

$$= \frac{E_0^2 \pi^2}{\omega_0^2 \mu^2} \left[\frac{ab}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + L \left(\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \right) \right].$$

Полученные результаты приводят исходную формулу (9.75а) к виду:

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{abL(a^2 + b^2)}{ab(a^2 + b^2) + 2L(a^3 + b^3)}. \quad (9.78)$$

В частном случае кубического объема ($a = b = L$)

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{a}{3}. \quad (9.79)$$

Легко показать, что с уменьшением размера L (не влияющего на собственную частоту идеального резонатора), добротность быстро падает. Действительно, при $L \ll a$ и $L \ll b$ (9.78) переходит в соотношение:

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} L. \quad (9.80)$$

Поле H_{11p} цилиндрического резонатора. Стремясь к упрощению, будем вычислять объемный интеграл через электрический вектор:

$$\int_{V_0} H_m^2 dV = \frac{\epsilon}{\mu} \int_{V_0} E_m^2 dV = \frac{\epsilon}{\mu} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L (E_{mr}^2 + E_{ma}^2) r dr d\alpha dz$$

— это сокращает число подынтегральных членов. Подставляя сюда (9.27) при $n = 1$, имеем:

$$\int_{V_0} H_m^2 dV = H_0^2 \frac{\omega_0^2 \epsilon \mu}{\chi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[\frac{J_1^2(\chi r)}{\chi^2 r^2} \sin^2 \alpha + \right.$$

$$\left. + J_1'^2(\chi r) \cos^2 \alpha \right] \sin^2 \chi_z z \cdot r dr d\alpha dz = H_0^2 \frac{\omega_0^2 \epsilon \mu}{\chi^4} \frac{\pi L}{2} \int_0^{A_{11}} \left[\frac{J_1^2(x)}{x^2} + \right.$$

$$\left. + J_1'^2(x) \right] x dx = H_0^2 \frac{k_0^2}{4\chi^4} \pi L (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11})$$

(см. Приложение 3, формула (П3.28)).

Переходя к поверхностному интегралу

$$\int_S H_m^2 dS = 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} (H_{mr}^2 + H_{ma}^2)_{z=0} r dr d\alpha +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^L (H_{mr}^2 + H_{ma}^2)_{r=R} R d\alpha dz,$$

получаем:

$$\int_S H_m^2 dS = 2H_0^2 \left(\frac{\chi_z}{\chi} \right)^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[J_1'^2(\chi r) \cos^2 \alpha + \frac{J_1^2(\chi r)}{\chi^2 r^2} \sin^2 \alpha \right] r dr d\alpha +$$

$$+ H_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L \left[J_1^2(A_{11}) \cos^2 \alpha \sin^2 \chi_z z + \right.$$

$$\left. + \frac{\chi_z^2}{\chi^4 R^2} J_1^2(A_{11}) \sin^2 \alpha \cos^2 \chi_z z \right] R d\alpha dz =$$

$$= 2\pi H_0^2 \frac{\chi_z^2}{\chi^4} \int_0^{A_{11}} \left[J_1'^2(x) + \frac{J_1^2(x)}{x^2} \right] x dx +$$

$$+ \frac{\pi H_0^2 L}{2} J_1^2(A_{11}) R \left(1 + \frac{\chi_z^2}{\chi^4 R^2} \right)$$

и, следовательно,

$$\int_S H_m^2 dS = \pi H_0^2 \left[\frac{\chi_z^2}{\chi^4} (A_{11}^2 - 1) + \frac{LR}{2} \left(1 + \frac{\chi_z^2}{\chi^4 R^2} \right) \right] J_1^2(A_{11}).$$

На основании найденных результатов записываем:

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{L \left(\frac{k_0}{\chi} \right)^2 (A_{11}^2 - 1)}{2 \left(\frac{\chi_z}{\chi} \right)^2 (A_{11}^2 - 1) + LR \left[\chi^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\chi_z}{\chi} \right)^2 \right]}. \quad (9.81)$$

Привлекая соотношения (9.8, 9.9), приводим (9.81) к виду:

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{RL}{(2R-L) \left(\frac{\rho\lambda_0}{2L}\right)^2 + L \frac{A_{11}^2}{A_{11}^2 - 1}}. \quad (9.81a)$$

Поле H_{01p} цилиндрического резонатора. В числителе (9.75a) имеем

$$\int_{V_0} H_m^2 dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L (H_{mz}^2 + H_{mr}^2) r dr d\alpha dz.$$

Интегрируя это выражение, находим:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} H_m^2 dV &= 2\pi H_0^2 \int_0^R \int_0^L \left[J_0^2(\chi r) \sin^2 \chi_z z + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\chi_z}{\chi}\right)^2 J_1^2(\chi r) \cos^2 \chi_z z \right] r dr dz = \\ &= \frac{H_0^2 \pi L}{\chi^2} \int_0^{A_{11}} \left[J_0^2(x) + \left(\frac{\chi_z}{\chi}\right)^2 J_1^2(x) \right] x dx = \\ &= \frac{H_0^2 \pi L}{2\chi^2} A_{11}^2 J_0^2(A_{01}) \left(1 + \frac{\chi_z^2}{\chi^2}\right) = \frac{H_0^2 \pi L A_{01}^2 k_0^2}{2\chi^4} J_0^2(A_{01}). \end{aligned}$$

В знаменателе (9.75a)

$$\begin{aligned} \int_S H_m^2 dS &= 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} H_{mr}^2|_{z=0} r dr d\alpha + \int_0^R \int_0^{2\pi} H_{mz}^2|_{r=R} R d\alpha dz = \\ &= 2H_0^2 \left(\frac{\chi_z}{\chi}\right)^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1^2(\chi r) r dr d\alpha + \\ &\quad + H_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L J_0^2(A_{01}) \sin^2 \chi_z z \cdot R d\alpha dz = \\ &= 4\pi H_0^2 \frac{\chi_z^2}{\chi^4} \int_0^{A_{01}} J_1^2(x) x dx + \pi H_0^2 R L J_0^2(A_{01}) = \\ &= \pi H_0^2 \left(2A_{01}^2 \frac{\chi_z^2}{\chi^4} + RL\right) J_0^2(A_{01}). \end{aligned}$$

Добротность резонатора, таким образом, равна:

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{LA_{01}^2 \left(\frac{k_0}{\chi}\right)^2}{2A_{01}^2 \left(\frac{\chi_z}{\chi}\right)^2 + \chi^2 RL}, \quad (9.82)$$

или

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{RL}{(2R-L) \left(\frac{\rho\lambda_0}{2L}\right)^2 + L}. \quad (9.82a)$$

Поле E_{010} цилиндрического резонатора. Находим:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} H_m^2 dV &= L \int_0^{2\pi} \int_0^R H_{m\alpha}^2 r dr d\alpha = \\ &= \frac{2\pi L}{W^2} E_0^2 \int_0^R J_1^2(\chi r) r dr = \frac{\pi LR^2 E_0^2 J_1^2(B_{01})}{W^2}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_S H_m^2 dS &= 2\pi RL H_{m\alpha}^2|_{r=R} + 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} H_{m\alpha}^2 r dr d\alpha = \\ &= \frac{2\pi R E_0^2 J_1^2(B_{01})}{W^2} (L + R). \end{aligned}$$

Следовательно, добротность равна:

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{LR}{L+R}. \quad (9.83)$$

Коаксиальный резонатор. Для ТЕМ-поля коаксиального резонатора

$$\int_{V_0} H_m^2 dV = \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\cos^2 \chi_z z}{r} dr d\alpha dz = \pi L \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

и

$$\begin{aligned} \int_S H_m^2 dS &= 2 \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\alpha}{r} + \\ &\quad + \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cos^2 \chi_z z \cdot d\alpha dz = \\ &= \pi \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \left[4 \ln \frac{R_2}{R_1} + L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Следовательно, в соответствии с (9.75a), имеем

$$Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{2L \ln \frac{R_2}{R_1}}{4 \ln \frac{R_2}{R_1} + L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}. \quad (9.84)$$

Примеры и упражнения

1. Л. И. Мандельштам [13] показал (см. также [14]), что круглое отверстие в оболочке полого резонатора, диаметр которого мал в сравнении с длиной волны, будучи расположено в пучности электрического поля (рис. 260, а), излучает как электрический диполь Герца с моментом

$$p_m = \frac{4}{3} \epsilon R_0^3 E_m^0, \quad (9.85)$$

а в пучности магнитного поля (рис. 260, б) — как магнитный диполь с моментом

$$m_m = \frac{8}{3} \mu R_0^3 H_m^0. \quad (9.86)$$

Здесь R_0 — радиус отверстия, а E_m^0 и H_m^0 — амплитуды поля на оболочке резонатора до прорезания отверстия.

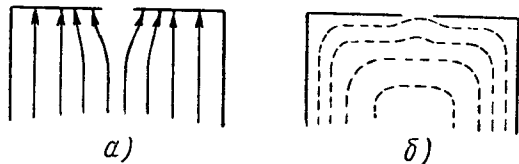


Рис. 260

Переписывая формулу (6.37) с помощью (6.20) в виде

$$\bar{P}^{\Sigma a} = \frac{p_m^2 \omega^4}{12\pi} \mu^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}, \quad (9.87)$$

вычислим излучаемую отверстием мощность. Для этого надо внести сюда (9.85) и учесть, что отверстие излучает в полупространство (дополнительный коэффициент 1/2). В результате получается:

$$\bar{P}_{отв}^{\Sigma a} = \frac{2E_m^0{}^2 \omega^4 R^6}{27\pi} \epsilon^2 \mu^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}. \quad (9.88)$$

Совершенно таким же путем для случая, изображенного на рис. 260, б из формулы

$$\bar{P}^{\Sigma m} = \frac{m_m^2 \omega^4}{12\pi} \epsilon^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad (9.89)$$

получаем:

$$\bar{P}_{отв}^{\Sigma m} = \frac{8H_m^0{}^2 \omega^4 R^6}{27\pi} \epsilon^2 \mu^2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (9.90)$$

Задание

1) В кубическом резонаторе существует поле основного типа. Получить выражение его внешней добротности при одном круг-

лом отверстию: а) в пучности электрического поля и б) в пучности магнитного поля. Вычислить внешнюю добротность в пределах изменения величины R_0/a от 10^{-3} до $7 \cdot 10^{-2}$ и построить график найденной зависимости.

Вычислить собственную добротность резонатора (материал — медь, заполнение воздушное) и построить график зависимости нагруженной добротности от R_0/a .

2) Решить такую же задачу для колебаний H_{111} , H_{011} и E_{111} цилиндрического резонатора, взяв вместо R_0/a и величину $R_0/2R$. Во всех случаях положить $L/R = 3$.

2. Добротность тороидального резонатора вычисляется по формуле

$$Q_{np} = \frac{2}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{h \ln \frac{R_2}{R_1}}{2 \ln \frac{R_2}{R_1} + h \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (9.91)$$

Сравнить ее с (9.84) и объяснить различие.

3. Получить выражение добротности Q_{np} магнетронной ячейки (рис. 257) и резонатора в виде двух параллельных пластин (рис. 261) для полей основного типа

$$a) Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} R.$$

$$б) Q_{np} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu}{\mu_{np}} \frac{bL}{2b+L}. \quad (9.92)$$

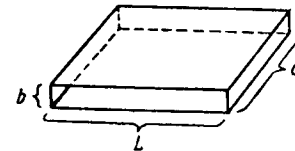


Рис. 261

4. Вычислить собственную частоту и собственную добротность прямоугольного резонатора для основного типа колебаний. Материал — серебро, заполнение воздушное, размеры:

		2	3	4	5
a, см	1	2	2	2	5
b, см	1	1	1	5	10
L, см	1	1	2	5	20

5. Произвести расчет п. 4, полагая, что резонатор заполнен диэлектриком с проницаемостью $\epsilon = (4 - j0,001) \epsilon_0$.

6. Полюс медный цилиндр должен резонировать на частоте $f_0 = 3 \cdot 10^3$ МГц. Выбрать его размеры, взяв поочередно колебания H_{111} , E_{010} и H_{011} , и вычислить добротность резонатора Q_{np} .

7. Резонатор изготовлен из латуни. Как изменится его добротность Q_{np} после серебрения внутренней поверхности? (Считать, что гладкость поверхности не изменилась).

8. Вычислить добротность Q_0 коаксиального резонатора с размерами $R_1 = 2$ см, $R_2 = 5$ см и $L = 12$ см для основного типа колебаний. Резонатор изготовлен из алюминия и заполнен полистиролом.

§ 74. Вынужденные колебания полого электромагнитного резонатора

В подавляющем большинстве случаев на практике используются вынужденные колебания электромагнитных резонаторов. Резонатор присоединяется к направляющей системе в качестве оконечной нагрузки (рис. 262, а) или как промежуточное звено (рис. 262, б), а также параллельно (рис. 262, в). Элементы связи, служащие для возбуждения колебаний и вывода энергии, ничем не отличаются от рассмотренных в § 66 и располагаются по тому же принципу. Несколько примеров связи с различными колебаниями дает рис. 263. Отметим также, что полые резонаторы электронных приборов возбуждаются электронным потоком (рис. 263, е).

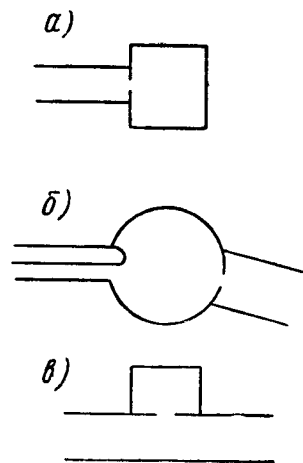


Рис. 262

Переходя к анализу вынужденных колебаний, рассмотрим сначала одно из важных свойств идеального полого резонатора, известное под названием *ортогональности его собственных функций*. В качестве «собственных (векторных) функций» резонатора фигурируют его поля, соответствующие различным соб-

ственным колебаниям. Указанное свойство ортогональности выражается следующими интегральными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}_j \dot{\mathbf{E}}_i^* dV = 0 \\ \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}_j \dot{\mathbf{H}}_i^* dV = 0 \end{aligned} \right\} j \neq i, \quad (9.93)$$

где V_0 — объем резонатора, а индексы j и i обозначают величины, принадлежащие собственным колебаниям j и i (каждый из этих индексов надо понимать как совокупность трех чисел, характеризующих тот или иной тип поля). Согласно (9.93), скалярное

произведение $\dot{\mathbf{E}}_j \dot{\mathbf{E}}_i^*$ и $\dot{\mathbf{H}}_j \dot{\mathbf{H}}_i^*$, образованное *разными* полями, при интегрировании по объему резонатора уничтожается. Это нетрудно показать.

Для собственных колебаний j и i запишем следующие уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_j &= -j\omega_{0j} \mu \dot{\mathbf{H}}_j \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_i^* &= -j\omega_{0i} \epsilon \dot{\mathbf{E}}_i^* \end{aligned} \right\} \quad (9.94)$$

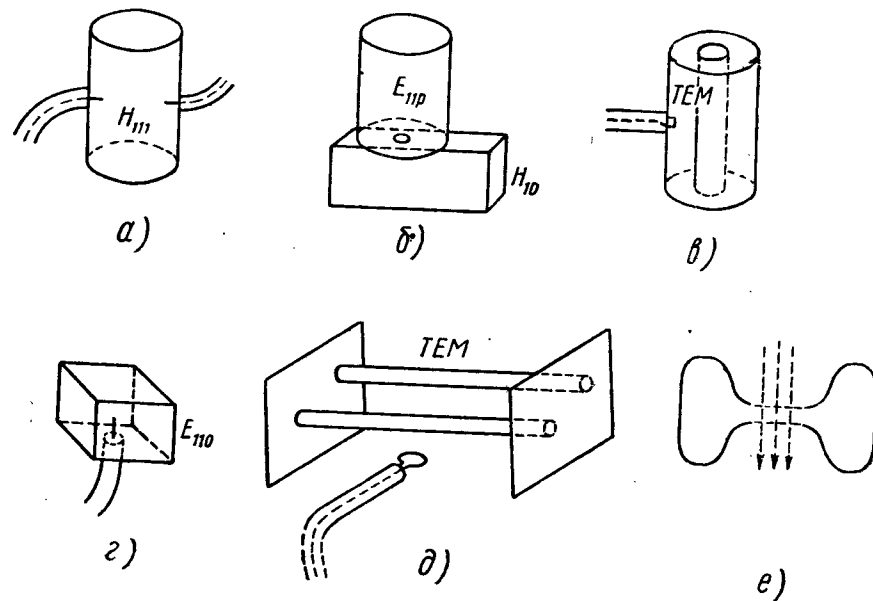


Рис. 263

Умножив первую строчку на $\dot{\mathbf{H}}_i^*$, а вторую — на $\dot{\mathbf{E}}_j$ и производя операции, хорошо известные из § 13 и 35, получаем:

$$\omega_{0j} \mu \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}_j \dot{\mathbf{H}}_i^* dV - \omega_{0i} \epsilon \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}_j \dot{\mathbf{E}}_i^* dV = 0. \quad (9.95)$$

Точно так же из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_i^* &= i\omega_{0i} \mu \dot{\mathbf{H}}_i^* \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_j &= j\omega_{0j} \epsilon \dot{\mathbf{E}}_j \end{aligned} \right\} \quad (9.96)$$

следует

$$\omega_0 \varepsilon \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}_j \dot{\mathbf{E}}_i^* dV - \omega_{0i} \mu \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}_j \dot{\mathbf{H}}_i^* dV = 0. \quad (9.97)$$

Будем рассматривать лишь невырожденные колебания, так что

$$\omega_{0j} \neq \omega_{0i} \quad \text{при} \quad j \neq i. \quad (9.98)$$

Объединяя (9.95) и (9.97), имеем:

$$(\omega_{0j}^2 - \omega_{0i}^2) \mu \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}_j \dot{\mathbf{H}}_i^* dV = 0; \quad (\omega_{0j}^2 - \omega_{0i}^2) \varepsilon \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}_j \dot{\mathbf{E}}_i^* dV = 0. \quad (9.99)$$

При $j \neq i$ первые множители (9.99) отличны от нуля, а это значит, что равны нулю интегралы. Ортогональность собственных функций (9.93), таким образом, доказана при условии (9.98).

Установим еще одно важное соотношение. Положив в (9.95) или (9.97) $j = i$, находим

$$\mu \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}_i \dot{\mathbf{H}}_i^* dV = \varepsilon \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}_i \dot{\mathbf{E}}_i^* dV. \quad (9.100)$$

При том или ином выборе постоянных коэффициентов в выражениях полей интеграл (9.100) дает вполне определенное число. Часто заранее задаются этим числом, приравнявая (9.100), например, единице и предопределяя, таким образом, выбор постоянных коэффициентов. Это называется «нормировкой».

Задачу о возбуждении поставим так. В некоторой части полости V_0 , которая будет названа V_Σ (рис. 264), распределен сторонний ток δ^{cm} , гармонически меняющийся с частотой ω . Требуется найти поле резонатора \mathbf{E} , \mathbf{H} .

Возбуждаемое поле \mathbf{E} , \mathbf{H} подчиняется уравнениям Максвелла (6.1). Поставив второе из этих уравнений на место первой строчки (9.94), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_i^* &= -j\omega_{0i}\varepsilon\dot{\mathbf{E}}_i^* \end{aligned} \right\} \quad (9.101)$$

Заменив точно таким же образом вторую строчку (9.96) первым из уравнений (6.1), записываем другую систему:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_i^* &= j\omega_{0i}\mu\dot{\mathbf{H}}_i^*, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} + \delta^{cm} \end{aligned} \right\} \quad (9.102)$$

Интегральные следствия из (9.101 и 9.102), аналогичные уравнениям (9.95 и 9.97), выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} \omega\mu \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_i^* dV - \omega_{0i} \varepsilon \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_i^* dV &= 0, \\ \omega\varepsilon \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_i^* dV - \omega_{0i} \mu \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}} \dot{\mathbf{H}}_i^* dV &= j \int_{V_\Sigma} \delta^{cm} \dot{\mathbf{E}}_i^* dV \end{aligned} \right\} \quad (9.103)$$

(в правой части интегрирование ограничено областью V_Σ , так как вне ее $\delta^{cm} = 0$).

Полагая, что в объеме V_0 возбуждаются все возможные поля резонатора, представим \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде их суперпозиции

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{k=2}^{\infty} A_k \dot{\mathbf{H}}_k, \quad \dot{\mathbf{E}} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \dot{\mathbf{E}}_k. \quad (9.104)$$

где A_k и B_k — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

Уравнения (9.103) вместе с представлением (9.104) образуют основу анализа вынужденных колебаний резонатора. Следует, однако, отметить, что во втором равенстве (9.104) допущена некоторая неточность, равносильная пренебрежению сторонним зарядом, плотность которого, согласно (6.2), равна

$$\dot{\mathbf{q}}^{cm} = \frac{j}{\omega} \text{div } \delta^{cm}. \quad (9.105)$$

Действительно, образуя расходимость вектора $\dot{\mathbf{E}}$, получаем в правой части (9.104, второе равенство) нуль, ибо $\dot{\mathbf{E}}_k$ — поля незакрытой полости, и $\text{div } \dot{\mathbf{E}}_k = 0$. Левая же часть рассматриваемого равенства в соответствии с (6.3) должна давать

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{q}}^{cm} / \varepsilon. \quad (9.106)$$

Можно ликвидировать выявленное несоответствие, дописав справа так называемый «квазистатический член» $\dot{\mathbf{E}}'$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \dot{\mathbf{E}}_k + \dot{\mathbf{E}}', \\ \text{div } \dot{\mathbf{E}}' &= \dot{\mathbf{q}}^{cm} / \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (9.107)$$

Но поле $\dot{\mathbf{E}}'$ не представляет интереса, так как оно не обладает резонансными свойствами и быстро убывает по мере удаления от возбуждающего источника. В дальнейшем оно не принимается во внимание.

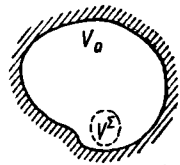


Рис. 264

Внося (9.104) в уравнения (9.105), учитывая ортогональность собственных функций (9.93) и используя равенство (9.100), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \omega A_i - \omega_{0i} B_i &= 0, \\ \omega B_i - \omega_{0i} A_i &= jF \end{aligned} \right\} \quad (9.108)$$

где применено обозначение

$$F = \frac{\int_{V_\Sigma} \delta^{cm} \dot{E}_i^* dV}{\varepsilon \int_{V_0} \dot{E}_i \dot{E}_i^* dV} = \frac{\int_{V_\Sigma} \delta^{cm} \dot{E}_i^* dV}{\mu \int_{V_0} \dot{H}_i \dot{H}_i^* dV} \quad (9.109)$$

Из (9.108) без труда определяются коэффициенты рядов (9.104):

$$A_i = \frac{jF\omega}{\omega^2 - \omega_{0i}^2}; \quad B_i = \frac{jF\omega_{0i}}{\omega^2 - \omega_{0i}^2} \quad (9.110)$$

Полученный результат со всей очевидностью свидетельствует о резонансном характере возбуждения: когда частота источника ω

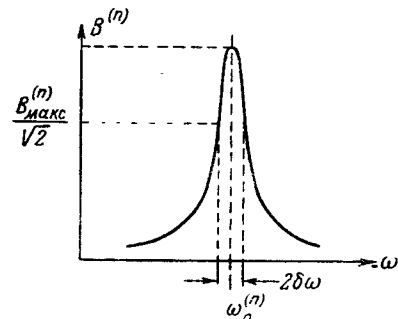


Рис. 265

совпадает с одной из собственных частот системы ω_{0i} , амплитуды соответствующих колебаний (A_i и B_i) бесконечно возрастают. От обыкновенного колебательного контура без потерь рассматриваемый резонатор отличается тем, что собственных частот у него бесконечное множество.

Чтобы учесть потери, заменим в (9.110) ω_{0i} комплексной частотой (9.72). Добротность полного резонатора, как известно, весьма велика (см. § 73) в срав-

нении с единицей, поэтому с большой точностью справедливо равенство

$$\dot{\omega}_{0i}^2 = \omega_{0i}^2 - j \frac{\omega_{0i}^2}{Q},$$

и формулы (9.110) принимают вид:

$$A_i = \frac{jF\omega}{\omega^2 - \omega_{0i}^2 - j \frac{\omega_{0i}^2}{Q}} \quad \text{и} \quad B_i = \frac{jF\omega_{0i}}{\omega^2 - \omega_{0i}^2 - j \frac{\omega_{0i}^2}{Q}} \quad (9.111)$$

Модули коэффициентов A_i и B_i вблизи собственных частот ω_i изменяются по хорошо известному резонансному закону (рис. 265).

Записывая (9.111) при $\omega \approx \omega_{0i}$, имеем:

$$A_i \approx \frac{jI}{2(\omega - \omega_{0i}) - j \frac{\omega_{0i}}{Q}} \quad \text{и} \quad B_i \approx \frac{jI}{2(\omega - \omega_{0i}) - j \frac{\omega_{0i}}{Q}} \quad (9.112)$$

При резонансе ($\omega = \omega_{0i}$)

$$A_i^0 = B_i^0 = -\frac{FQ}{\omega_{0i}}, \quad (9.112a)$$

а на краях полосы пропускания (рис. 9.27), по определению,

$$\left. \begin{aligned} |A_i| = |B_i| &= B_i^0 / \sqrt{2} \\ \omega &= \omega_{0i} \pm \delta\omega \end{aligned} \right\} \quad (9.112b)$$

Внося (9.112b) в (9.112) и сравнивая с (9.112a), получаем следующее выражение добротности:

$$Q = \frac{\omega_{0i}}{2\delta\omega}, \quad (9.113)$$

справедливое, как известно, и для обыкновенного колебательного контура.

Вблизи собственной частоты ω_{0i} в формулах (9.104) достаточно учитывать только колебания типа i , так что

$$\dot{H} = A_i \dot{H}_i \quad \text{и} \quad \dot{E} = B_i \dot{E}_i; \quad (9.114)$$

отброшенные члены пренебрежимо малы.

В этой области, далекой от собственных частот $\omega_{0(i-1)}$ и $\omega_{0(i+1)}$, полый резонатор можно охарактеризовать эквивалентными параметрами \mathcal{L} , C и \mathcal{R} , в выборе которых, однако, существует неопределенность. Дело в том, что в энергетических соотношениях

$$W^* = \frac{\mathcal{L}I^2}{2} \quad \text{и} \quad W^0 = \frac{CU^2}{2} \quad (*)$$

фигурируют величины I и U , устанавливаемые в данном случае условно. Взяв, например, в качестве I ток, пересекающий некоторую часть оболочки резонатора, можно найти с помощью (*) параметр \mathcal{L} и затем C из соотношения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}.$$

Эквивалентное сопротивление \mathcal{R} вычисляется после этого по известной добротности на основании соотношений

$$Q = \frac{\omega \mathcal{L}}{\mathcal{R}} \quad \text{или} \quad Q = \frac{1}{\omega C \mathcal{R}}.$$

Примеры и упражнения

1. Перечислить способы, с помощью которых можно возбудить следующие колебания полых резонаторов: а) H_{112} , E_{011} , E_{110} и H_{012} цилиндрического резонатора, б) H_{111} , E_{121} и H_{102} прямоугольного

резонатора, в) основное колебание коаксиального резонатора и г) основное колебание тороидального резонатора.

2. Вычислим в качестве примера эквивалентные параметры цилиндрического резонатора для колебания E_{010} . В этом случае в силу (9.26)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= z_0 E_0 J_0(\chi r), \\ \dot{H}_m &= \alpha_0 \frac{jE_0}{W_0} J_1(\chi r) \end{aligned} \right\} \chi = \frac{B_{01}}{R} = \frac{2,405}{R}. \quad (9.115)$$

Желая определить эквивалентную емкость, будем исходить из выражения электрической энергии

$$W_m^* = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}. \quad (*)$$

Зная поле резонатора (9.115), с помощью (ПЗ.27) находим:

$$W_m^* = \frac{\epsilon}{2} \int_{V_0} E_m^2 dV = \pi L \epsilon E_0^2 \int_0^R J_0^2(\chi r) r dr = \frac{\pi R^2 L \epsilon E_0^2}{2} J_1^2(B_{01}). \quad (9.116)$$

Электрическое поле нормально основаниям цилиндра, которые, следовательно, несут заряд, распределенный с плотностью $\xi = \epsilon E$. Взяв в выражении энергии (*) в качестве q_m полный заряд одного из оснований, имеем:

$$q_m = \int_S \xi_m dS = 2\pi \epsilon E_0 \int_0^R J_0(\chi r) r dr = \frac{2\pi R^2 \epsilon E_0}{B_{01}} J_1(B_{01}). \quad (9.117)$$

(см. Приложение 3, формула (ПЗ.25)).

Внося в (*) результаты (9.116 и 9.117), записываем выражение эквивалентной емкости:

$$C = \frac{4\pi R^2 \epsilon}{LB_{01}^2}. \quad (9.118)$$

Далее, привлекая (9.28)

$$\omega_0^2 = B_{01}^2 R \sqrt{\epsilon \mu},$$

находим эквивалентную индуктивность:

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{\mu L}{4\pi}. \quad (9.119)$$

Эквивалентное активное сопротивление вычисляется с помощью (9.83):

$$R = \frac{\omega L}{Q} = \frac{\omega_0 \mu_{np} \Delta^0}{4\pi} \left(1 + \frac{L}{R}\right) \quad (9.120)$$

(предполагается, что среда, заполняющая резонатор, не поглощает энергии).

Задание. 1) Найти эквивалентные параметры прямоугольного резонатора для основного колебания. 2) Решить такую же задачу для коаксиального резонатора.

§ 75. Возмущения полых систем

В радиотехнике СВЧ нередко задаются вопросом, как изменится собственная частота полого резонатора при определенной деформации его оболочки или в результате помещения в полость металлического, диэлектрического, а также, например, гиротропного тела и т. п. Не меньший интерес представляет аналогичная задача для волновода. Поле системы до появления указанных изменений обычно известно и называется «начальным», или «невозмущенным», а исследуемый эффект рассматривается как «возмуще-

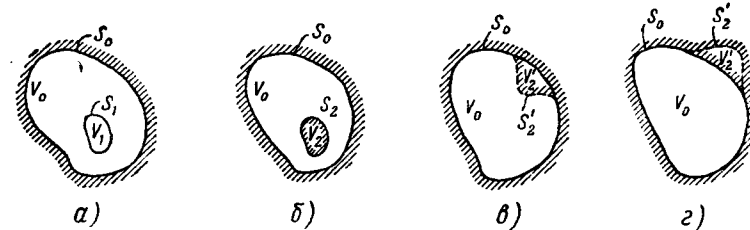


Рис. 266

ние». К задачам такого типа возможен общий подход, который особенно легко приводит к количественным результатам, когда возмущение мало.

Возмущение полого резонатора. Пусть в резонансную полость V_0 (рис. 266, а) вносится тело V_1 с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ или идеально проводящее тело V_2 (рис. 266, б). В частном случае речь может идти о деформации идеально проводящей оболочки полости, выделившей область V_2' (рис. 266, в, г).

Обозначив поле и собственную частоту невозмущенных колебаний в виде E_0 , H_0 и ω_0 , запишем для них уравнения Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{E}_0 &= -j\omega_0 \mu_0 \dot{H}_0, \\ \text{rot } \dot{H}_0 &= j\omega_0 \epsilon_0 \dot{E}_0 \end{aligned} \right\} \quad (9.121)$$

Возмущенное поле и собственная частота в дальнейшей записи не имеют индексов: E , H и ω .

Рассмотрим сначала случай диэлектрического тела V_1 . После того, как оно помещено в полость, диэлектрическую и магнитную проницаемости следует понимать как функции точки наблюдения M , причем

$$\left. \begin{aligned} \epsilon(M) &= \epsilon \\ \mu(M) &= \mu \end{aligned} \right\} \text{ в области } V_1 \text{ и } \left. \begin{aligned} \epsilon(M) &= \epsilon_0 \\ \mu(M) &= \mu_0 \end{aligned} \right\} \text{ в области } V_0 - V_1. \quad (9.122)$$

Уравнения Максвелла для поля резонатора, измененного внесением тела V_1 , т. е. возмущенного поля, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega\mu(M)\dot{\mathbf{H}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega\varepsilon(M)\dot{\mathbf{E}} \end{aligned} \right\} \quad (9.123)$$

Возьмем первое из уравнений (9.121), переписанное относительно комплексно-сопряженных величин $\dot{\mathbf{E}}_0^*$, $\dot{\mathbf{H}}_0^*$, и второе уравнение (9.123). Все члены первого помножим на $\dot{\mathbf{H}}$, а второго — на $\dot{\mathbf{E}}_0^*$. После вычитания соответственных частей получаем:

$$\dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_0^* - \dot{\mathbf{E}}_0^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} = j\omega_0\mu_0\dot{\mathbf{H}}_0^*\dot{\mathbf{H}} - j\omega\varepsilon(M)\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^*. \quad (9.124)$$

Точно так же из оставшихся строчек (9.121 и 9.123) находим:

$$\dot{\mathbf{H}}_0^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0^* = -j\omega\mu(M)\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* + j\omega_0\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^*. \quad (9.125)$$

Проинтегрируем все члены уравнений (9.124 и 9.125) по области V_0 . Нетрудно убедиться, что левые их части при этом обратятся в нуль. Так, например,

$$\int_{V_0} (\dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_0^* - \dot{\mathbf{E}}_0^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}) dV = \int_S [\dot{\mathbf{E}}_0^*, \dot{\mathbf{H}}] d\mathbf{S} = 0$$

(S — поверхность резонатора).

Преобразуя, далее, правые части с помощью (9.122), приводим эти уравнения к виду:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0\mu_0 \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* dV - \omega(\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^* dV - \omega\varepsilon_0 \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^* dV = 0, \\ -\omega(\mu - \mu_0) \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* dV - \omega\mu_0 \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* dV + \\ + \omega_0\varepsilon_0 \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^* dV = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.126)$$

Отсюда непосредственно вытекает следующая важная формула:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{V_1} \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^* dV + (\mu - \mu_0) \int_{V_1} \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* dV}{\varepsilon_0 \int_{V_0} \dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^* dV + \mu_0 \int_{V_0} \dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* dV}. \quad (9.127)$$

выражающая приращение собственной частоты резонатора в результате действия тела V_1 . Не останавливаясь пока на ее применении, перейдем к другому случаю.

В резонатор помещается идеально проводящее тело V_2 . Рассуждая прежним способом, нетрудно придти к уравнениям (9.124) и (9.125). Проинтегрируем их члены по области $V_0 - V_2$. В силу перпендикулярности вектора \mathbf{E} к поверхностям S_0 и S_2 в левой части (9.125) будет по-прежнему нуль. Этого, однако, не может быть в уравнении (9.124)

$$\int_{V_0 - V_2} (\dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_0^* - \dot{\mathbf{E}}_0^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}) dV = \int_{S_2} [\dot{\mathbf{E}}_0^*, \dot{\mathbf{H}}] d\mathbf{S} \neq 0, \quad (9.128)$$

так как начальное поле E_0 ориентировано произвольно относительно поверхности S_2 .

Если возмущение мало, то в среднем возмущенное поле мало отличается от начального, поэтому

$$\begin{aligned} \int_{V_0 - V_2} (\dot{\mathbf{H}} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_0^* - \dot{\mathbf{E}}_0^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}) dV &\approx \int_{V_0 - V_2} (\dot{\mathbf{H}}_0 \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_0^* - \dot{\mathbf{E}}_0^* \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_0) dV = \\ &= j\omega_0 \int_{V_0 - V_2} (\mu_0\dot{\mathbf{H}}\dot{\mathbf{H}}_0^* - \varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{E}}_0^*) dV = j2\omega_0 (W_{\max}^M - W_{\max}^E)_{V_0 - V_2}, \end{aligned} \quad (9.129)$$

где W_{\max}^E и W_{\max}^M — максимальная электрическая и, соответственно, максимальная магнитная энергия невозмущенного поля.

Учитывая, что в полной области V_0

$$W_{\max}^E = W_{\max}^M, \quad (V_0)$$

(резонанс), имеем следующее равенство:

$$(W_{\max}^M - W_{\max}^E)_{V_0 - V_2} = -(W_{\max}^M - W_{\max}^E)_{V_2}. \quad (9.130)$$

Таким образом, складывая интегралы левых частей (9.124) и (9.125), взятые по области $V_0 - V_2$, получаем:

$$-j\omega_0 \int_{V_2} (\mu_0\dot{\mathbf{H}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^* - \varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{E}}_0^*) dV. \quad (9.131)$$

Принимая во внимание, что в области $V_0 - V_2$

$$\varepsilon(M) = \varepsilon_0 \text{ и } \mu(M) = \mu_0,$$

легко находим сумму интегралов правых частей этих уравнений:

$$-j(\omega - \omega_0) \int_{V_0 - V_2} (\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{E}}_0^* + \mu_0\dot{\mathbf{H}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*) dV,$$

или, так как V_2 мало в сравнении с V_0 ,

$$-j(\omega - \omega_0) \int_{V_0} (\varepsilon_0\dot{\mathbf{E}}_0\dot{\mathbf{E}}_0^* + \mu_0\dot{\mathbf{H}}_0\dot{\mathbf{H}}_0^*) dV. \quad (9.132)$$

Приравнявая (9.131 и 9.132), приходим к следующему выражению приращения собственной частоты резонатора:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{-\varepsilon_0 \int_{V_2} \dot{E}_0 \dot{E}_0^* dV + \mu_0 \int_{V_2} \dot{H}_0 \dot{H}_0^* dV}{\varepsilon_0 \int_{V_0} \dot{E}_0 \dot{E}_0^* dV + \mu_0 \int_{V_0} \dot{H}_0 \dot{H}_0^* dV} \quad (9.133)$$

Разумеется, эта формула справедлива и для случая деформации оболочки полости. В ней достаточно заменить лишь V_2 на V_2' (рис. 266).

Некоторые применения полученных результатов. Сделаем, во-первых, важные качественные заключения. Как показывает формула (9.127), внесение в резонансную полость обычного диэлектрика

$$\varepsilon > \varepsilon_0, \quad \mu = \mu_0$$

вызывает *уменьшение* собственной частоты. Однако, если последний обладает диамагнитными свойствами ($\mu < \mu_0$) и помещается в пучность магнитного поля ($E_0 \approx 0$), то собственная частота *увеличится*.

Обращаясь к выражению (9.133), видим, что идеально проводящее тело, вносимое в полость, влияет двояко: вытесняя электрическое поле, оно *уменьшает* собственную частоту резонатора, а вытесняя магнитное — *увеличивает*. Можно получить тот или иной результат, помещая тело в область концентрации электрического или магнитного поля. Точно так же действует и прогиб *внутрь* оболочки полости, рис. 266, в. Выгиб *наружу* (рис. 266, г) вызывает обратную реакцию.

Перейдем к вычислительным примерам. Ограничиваясь малыми возмущениями, будем считать, что поле \mathbf{E} , \mathbf{H} в среднем (т. е. в большей части полости) мало отличается¹ от начального поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 \int_{V_0} \dot{E}_0 \dot{E}_0^* dV &\approx \varepsilon_0 \int_{V_0} E_{m0}^2 dV = 2W_{\max}^e, \\ \mu_0 \int_{V_0} \dot{H}_0 \dot{H}_0^* dV &\approx \mu_0 \int_{V_0} H_{m0}^2 dV = 2W_{\max}^m \end{aligned} \right\}$$

где $W_{\max}^e = W_{\max}^m = W_0$ — запас энергии невозмущенного поля резонатора.

¹ Последующие выводы останутся в силе и при более широком допущении, а именно, что возмущенное поле лишь по распределению близко к начальному (в среднем), а по амплитуде векторы \mathbf{E} и \mathbf{E}_0 (\mathbf{H} и \mathbf{H}_0) в каждой точке как угодно различаются.

Обозначая $\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \approx \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, записываем формулы (9.127 и 9.133) в виде:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{1}{4W_0} \left[(\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{V_1} \dot{E} \dot{E}^* dV + (\mu - \mu_0) \int_{V_1} \dot{H} \dot{H}^* dV \right] \quad (9.127a)$$

и

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{4W_0} \left[-\varepsilon_0 \int_{V_2} E_{m0}^2 dV + \mu_0 \int_{V_2} H_{m0}^2 dV \right] \quad (9.133a)$$

Пример 1. Возмущение H -поля цилиндрического резонатора диэлектрическим диском.

Пусть в пучность электрического поля цилиндрического резонатора при произвольных колебаниях H_{nmp} помещается тонкий ($d \ll \lambda \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon}$) диэлектрический диск (рис. 267). Вектор \mathbf{E} непрерывен на поверхности диска, и поле внутри него практически

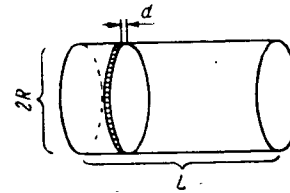


Рис. 267

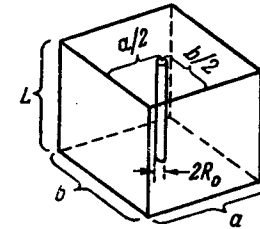


Рис. 268

однородно по оси z . Поэтому числитель формулы (9.127a) принимает вид

$$-(\varepsilon - \varepsilon_0) \int_{V_1} \dot{E} \dot{E}^* dV = -d \int_{S_{\perp}} E_{m0}^2 |_{\max} dS \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0).$$

Далее,

$$4W_0 = 2\varepsilon_0 \int_{S_{\perp}} \int_0^L E_{m0}^2 |_{\max} \sin^2 \frac{p\pi z}{L} dz dS = \varepsilon_0 L \int_{S_{\perp}} E_{m0}^2 |_{\max} dS.$$

Внося полученные результаты в (9.127a), находим соотношение, связывающее приращение собственной частоты резонатора с параметрами возмущающего фактора (толщина диска и его диэлектрическая проницаемость):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{d}{L} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right). \quad (9.134)$$

Этот окончательный результат весьма прост по форме, что характерно для анализа малых возмущений.

Если диэлектрик обладает потерями ($\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$), приращение собственной частоты резонатора оказывается комплексным. При-

влекая понятие собственной комплексной частоты (9.72, 9.113):

$$\dot{\omega} = \omega + j \frac{\omega}{2Q} = \omega + j\delta\omega, \quad (9.135)$$

где Q — добротность, а $2\delta\omega$ — полоса пропускания, запишем:

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} (\omega + j\delta\omega - \omega_0 - j\delta\omega_0) = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} + j \frac{\Delta\delta\omega}{\omega_0} \quad (9.136)$$

($2\Delta\delta\omega$ — приращение полосы пропускания).

Формула (9.134) на этом основании преобразуется так:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + j \frac{\Delta\delta\omega}{\omega_0} = -\frac{d}{L} \left(\frac{\varepsilon' - j\varepsilon''}{\varepsilon_0} - 1 \right), \quad (9.134a)$$

или

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{d}{L} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0} - 1 \right) \quad \text{и} \quad \frac{\Delta\delta\omega}{\omega_0} = \frac{d}{L} \frac{\varepsilon''}{\varepsilon_0}. \quad (9.134b)$$

Не представляет труда построить численные примеры и оценить фактическое изменение резонансной частоты и полосы пропускания (добротности) в конкретных случаях.

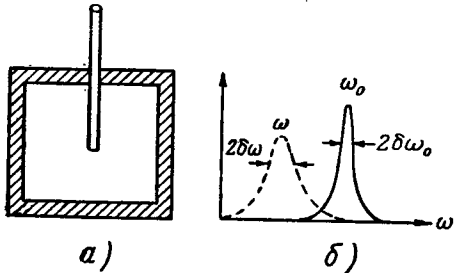


Рис. 269

Пример 2. Возмущение основного поля прямоугольного резонатора диэлектрическим цилиндром.

Этот случай иллюстрируется рис. 268. Цилиндр достаточно тонок ($R_0 \ll \lambda \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon}$) и располагается в пучности электрического поля колебания

E_{110} , так что вектор \mathbf{E} параллелен его оси. Поэтому

$$\int_{V_1} \dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{E}}_0^* dV = \pi R_0^2 L E_{m0}^2 |_{\max}$$

и

$$4W_0 = 2\varepsilon_0 \int_0^a \int_0^b \int_0^L E_{m0}^2 |_{\max} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy dz = \varepsilon_0 \frac{abL}{2} E_{m0}^2 |_{\max}.$$

В результате формула (9.127a) дает:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{2\pi R_0^2}{ab} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right), \quad (9.137)$$

где, разумеется, ω и ε можно рассматривать и как комплексные величины (см. пример 1).

Диэлектрический образец в виде тонкого цилиндра можно использовать для измерения комплексной диэлектрической проницаемости по сдвигу резонансной частоты и расширению резонансной кривой полого резонатора, в который он помещается через малое отверстие (рис. 269).

Аналогичным путем измеряются и компоненты тензора магнитной проницаемости феррита (§ 46). В связи с этим обратимся к следующему примеру.

Пример 3. Возмущение основного поля цилиндрического резонатора намагниченным ферритовым диском.

Малый диск ($R_0 \ll \lambda$, $d \ll \lambda$) лежит симметрично на дне цилиндрического резонатора (рис. 270) и намагничен вдоль оси z . Он расположен, таким образом, в пучности магнитного поля, тангенциального его поверхности. Известно (§ 46), что эквивалентная магнитная проницаемость феррита при данной взаимной ориентации постоянного \mathbf{H}_0 и переменного \mathbf{H} магнитных полей будет иметь вид

$$\mu_0^+ = \mu + \alpha,$$

если поле \mathbf{H} поляризовано по кругу вправо, и

$$\mu_0^- = \mu - \alpha$$

в случае левой круговой поляризации.

Невозмущенное поле резонатора можно разложить на две волны, бегущие по азимуту (§ 70), в соответствии с равенством

$$J_1(\chi r) \cos \alpha = \frac{1}{2} J_1(\chi r) e^{j\alpha} + \frac{1}{2} J_1(\chi r) e^{-j\alpha}.$$

В центре резонатора магнитные поля этих компонент *противоположно поляризованы по кругу*.

До помещения феррита бегущие по азимуту компоненты вырождены (резонируют на одной частоте), однако феррит, по разному действуя на их магнитные поля, снимает вырождение. Формулу (9.127a) для этого случая следует записать так:

$$\frac{\Delta\omega^\pm}{\omega_0} = -\frac{1}{4W_0} (\mu \pm \alpha - \mu_0) \int_{V_1} H_{m0}^2 |_{\max} dV, \quad (9.138)$$

где двойной знак соответствует двум направлениям круговой поляризации. После несложных действий (аналогичные вычисления произведены в § 73) находим:

$$\frac{\Delta\omega^\pm}{\omega_0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\chi_z}{k_0} \right)^2 \frac{d}{L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{A_{11}^2}{(A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11})} \left(\frac{\mu \pm \alpha}{\mu_0} - 1 \right). \quad (9.139)$$

Действие феррита вызывает, следовательно, «расщепление» собственной частоты резонатора. Резонансная кривая (рис. 271) при его помещении раздваивается.

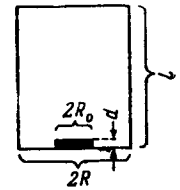


Рис. 270

Возмущение волновода. Сопоставим бесконечный волновод и волноводный резонатор, полученный рассеением волновода идеально проводящими плоскостями, перпендикулярными его оси.

Пусть в результате продольно-однородного возмущения (рис. 272), например, при помещении продольного диэлектрического стержня и т. п. собственная частота резонатора изменилась на величину $\Delta\omega$. Представляя поле резонатора как суперпозицию распространяющихся навстречу волн, вычислим изменение критической частоты этих волн в результате возмущения.

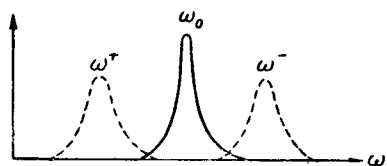


Рис. 271

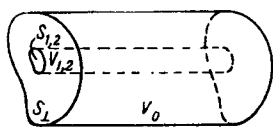


Рис. 272

Продольное волновое число Γ , заданное длиной резонатора, остается неизменным:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2} = \text{const.} \quad (9.140)$$

Составляя и приравнявая нулю дифференциал этой величины

$$d\Gamma = \frac{d\omega}{v} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2} + \frac{\omega}{v} \frac{-\omega_{кр} d\omega_{кр}/\omega^2 + \omega_{кр}^2 d\omega/\omega^3}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}} = 0.$$

находим:

$$\omega_{кр} d\omega_{кр} = \omega d\omega. \quad (9.141)$$

Теперь рассмотрим волновод. При *таком же* возмущении изменится его постоянная распространения Γ , неизменной же останется частота ω , определяемая питающим генератором:

$$\omega = v \sqrt{\Gamma^2 + \left(\frac{\omega_{кр}}{v}\right)^2} = \text{const.} \quad (9.142)$$

Отсюда

$$\Gamma d\Gamma = -\frac{\omega_{кр} d\omega_{кр}}{v^2}. \quad (9.143)$$

Сопоставляя (9.141) и (9.143), замечаем, что изменение постоянной распространения волновода при продольном возмущении можно найти по изменению собственной частоты соответствующего волноводного резонатора, возмущаемого тем же способом. Для этой цели пригодны формулы (9.127а и 9.133а), в которых, как

видно, следует сделать замену

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = -\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_0} \cdot \left(\frac{\Gamma_0}{k}\right)^2. \quad (9.144)$$

Кроме того, в результате продольной однородности всей системы объемные интегралы перейдут в поверхностные, взятые по поперечному сечению волновода S_1 . Так, получаем для диэлектрического возмущения:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{1}{4W'_0} \left(\frac{k}{\Gamma_0}\right)^2 \int_{S_1} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}\mathbf{E}_0^* + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}\mathbf{H}_0^*] dS \quad (9.145)$$

и для возмущения идеальным проводником:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{1}{4W'_0} \left(\frac{k}{\Gamma_0}\right)^2 \int_{S_2} (\varepsilon_0 E_{m0}^2 + \mu_0 H_{m0}^2) dS. \quad (9.146)$$

Здесь S_1 — поперечное сечение возмущающего диэлектрического стержня и S_2 — поперечное сечение области, выделенной идеальным проводником (рис. 272), а

$$W'_0 = \frac{1}{4} \int_{S_{\perp}} (\varepsilon_0 E_{m0}^2 - \mu_0 H_{m0}^2) dS.$$

В качестве примера возьмем прямоугольный волновод с волной основного типа, возмущаемый диэлектрической пластиной, параллельной узкой стенке (рис. 273). На основании (9.145)

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0) b d E_{0y}^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}}{2 \left(\frac{\Gamma_0}{k}\right)^2 E_{0y}^2 \varepsilon_0 \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy},$$

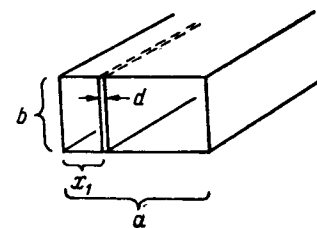


Рис. 273

и после простых преобразований получаем:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Gamma_0} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) \frac{d}{a} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} \left[1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2\right]. \quad (9.147)$$

Таким же путем можно, например, исследовать и круглый волновод с коаксиальным ферритовым продольно намагниченным цилиндром, рассмотренный в § 65, если диаметр цилиндра достаточно мал в сравнении с длиной волны. В результате для постоянной Фарадея получается такое выражение:

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = 2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \frac{A_{11}^2 \Gamma_0}{(A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11})} \cdot \frac{\mu_0 \alpha}{(\mu + \mu_0)^2 - \alpha^2}. \quad (9.148)$$

При выводе его необходимо учитывать, что векторы основной волны имеют на оси волновода лишь поперечные компоненты,

изменяющиеся при переходе через поверхность ферритового стержня. Внутреннее возмущенное поле определяют «в квазистатическом приближении» (§ 55), пользуясь готовыми решениями задач о цилиндре в параллельном электростатическом (§ 27) и магнитостатическом (§ 28) поле. Так, согласно (4.7) и (6.104)

$$\dot{H} = \frac{2\mu_0}{\mu_0 + \mu_s} \dot{H}_0 = \frac{2\mu_0}{\mu \pm \alpha + \mu_0} \dot{H}_0.$$

ФОРМУЛЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

1. Определения операций.

а) Градиент скаляра φ

$$\text{grad } \varphi = \mathbf{n}_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad (\text{П1.1})$$

\mathbf{n}_0 — единичный вектор нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$.

б) Поток вектора \mathbf{v} через поверхность S

$$\Phi = \int_S \mathbf{v} dS. \quad (\text{П1.2})$$

в) Расходимость (дивергенция) вектора \mathbf{v}

$$\text{div } \mathbf{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{v} dS}{\Delta V}. \quad (\text{П1.3})$$

г) Вихрь (ротация, ротор) вектора \mathbf{v}

$$\text{rot}_n \mathbf{v} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \mathbf{v} dl}{\Delta S}. \quad (\text{П1.4})$$

Формула (П1.4) определяет проекцию вектора $\text{rot } \mathbf{v}$ на нормаль к элементарной площадке ΔS .

2. Операции в декартовых координатах.

а) Градиент φ

$$\text{grad } \varphi = x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (\text{П1.5})$$

б) Расходимость \mathbf{v}

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{П1.6})$$

в) Вихрь \mathbf{v}

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (\text{П1.7})$$

3. Оператор Гамильтона ∇

$$\nabla = x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y} + z_0 \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{П1.8})$$

(∇ читается «набла»).

а) Представление основных операций.

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi, \quad (\text{П1.9})$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = (\nabla, \mathbf{v}). \quad (\text{П1.10})$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = [\nabla, \mathbf{v}]. \quad (\text{П1.11})$$

б) Оператор Лапласа ∇^2 в декартовых координатах.

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.12})$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.13})$$

4. Основные теоремы.

а) Теорема Остроградского — Гаусса

$$\int_V \text{div } \mathbf{v} dV = \oint_S \mathbf{v} dS. \quad (\text{П1.14})$$

б) Теорема Стокса

$$\int_S \text{rot } \mathbf{v} dS = \oint_L \mathbf{v} dl. \quad (\text{П1.15})$$

в) Теорема Грина

$$\int_V (\nabla \psi \nabla \varphi + \psi \nabla^2 \varphi) dV = \int_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (\text{П1.16})$$

$$\int_V (\psi \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS. \quad (\text{П1.17})$$

5. Некоторые тождества.

$$\text{grad } \varphi \psi = \varphi \text{grad } \psi + \psi \text{grad } \varphi. \quad (\text{П1.18})$$

$$\text{div } \varphi \mathbf{v} = \mathbf{v} \text{grad } \varphi + \varphi \text{div } \mathbf{v} \quad (\text{П1.19})$$

$$\text{div } [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}. \quad (\text{П1.20})$$

$$\text{div rot } \mathbf{v} = 0. \quad (\text{П1.21})$$

$$\text{rot grad } \varphi = 0. \quad (\text{П1.22})$$

$$\text{rot rot } \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (\text{П1.23})$$

$$\text{rot } \varphi \mathbf{v} = [\text{grad } \varphi, \mathbf{v}] + \varphi \text{rot } \mathbf{v}. \quad (\text{П1.24})$$

ОПЕРАЦИИ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА
В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

В декартовой системе координат положение точки $M(x_1, y_1, z_1)$ в пространстве определяется пересечением трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостей (рис. 274)

$$x = x_1, \quad y = y_1 \quad \text{и} \quad z = z_1.$$

Через точку M проходят три прямые, каждая из которых принадлежит двум координатным плоскостям. Это координатные прямые. Положение точки на любой из них зависит только от одной координаты: x , y или z . Произвольно перемещая точку M в пространстве, можно построить сколько угодно координатных плоскостей и прямых указанных видов. При движении точки будет изменяться направленный отрезок $OM = \mathbf{R}$, соединяющий ее с началом координат O и называемый радиус-вектором.

Понятно, что точка в пространстве может быть с тем же успехом определена как пересечение трех произвольных одно-

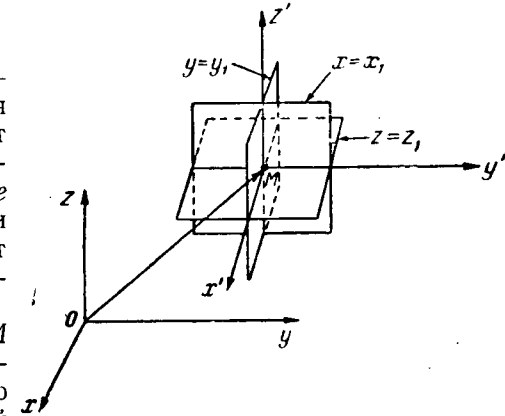


Рис. 274

значно заданных поверхностей. Так, в цилиндрической системе координат фиксируется пересечение поверхности кругового цилиндра

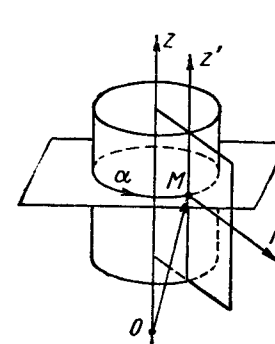


Рис. 275

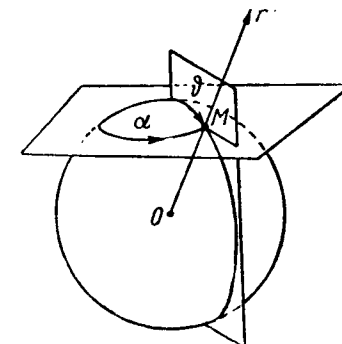


Рис. 276

значно заданных поверхностей. Так, в цилиндрической системе координат фиксируется пересечение поверхности кругового цилиндра

дра и двух плоскостей, одна из которых проходит через его ось, а другая ей перпендикулярна (рис. 275). В сферической системе пересекаются две плоскости и поверхность сферы (рис. 276). Эти координатные поверхности в общем случае можно описать уравнениями

$$q_1(x, y, z) = \text{const}, \quad q_2(x, y, z) = \text{const}, \quad q_3(x, y, z) = \text{const}, \quad (\text{П2.1})$$

где $q_1(x, y, z)$, $q_2(x, y, z)$ и $q_3(x, y, z)$ — некоторые однозначные функции декартовых координат.

На линии пересечения двух координатных поверхностей (рис. 277) справедливы одновременно два равенства из (П2.1), и, следовательно, ее точки определяются только одной из функций q_1 , q_2 и q_3 . Поэтому рассмотренная линия называется координатной, а эти функции — криволинейными координатами. Для произвольной точки M в системе криволинейных координат мы должны установить обозначение $M(q_1, q_2, q_3)$.

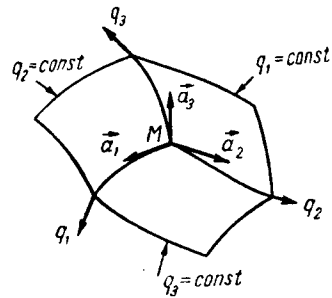


Рис. 277

Единичные векторы, касательные координатным линиям и направленные в сторону возрастания соответствующих координат, называются

координатными ортами и обозначаются \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 .

Мы будем рассматривать только ортогональные системы координат, т. е. такие, орты которых в любой точке взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 = 0. \quad (\text{П2.2})$$

Перемещение точки M (рис. 278) выражается приращением ее радиуса-вектора. Разлагая дифференциал dR по ортам \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 и \mathbf{a}_3 , имеем:

$$dR = \mathbf{a}_1 dl_1 + \mathbf{a}_2 dl_2 + \mathbf{a}_3 dl_3, \quad (\text{П2.3})$$

где dl_1 , dl_2 и dl_3 — дифференциалы длины по соответствующим криволинейным координатам.

С другой стороны,

$$dR = \frac{\partial R}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial R}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial R}{\partial q_3} dq_3, \quad (\text{П2.4})$$

причем, как это видно из рис. 279, частные производные радиуса-вектора по координатам — это векторы, параллельные их ортам:

$$\frac{\partial R}{\partial q_1} = h_1 \mathbf{a}_1, \quad \frac{\partial R}{\partial q_2} = h_2 \mathbf{a}_2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial R}{\partial q_3} = h_3 \mathbf{a}_3. \quad (\text{П2.5})$$

Сопоставляя равенства (П2.3 и П2.4) с учетом (П2.5), видим, что дифференциалы длины криволинейных координат отличаются от дифференциалов самих координат множителями h_1 , h_2 и h_3 :

$$dl_1 = h_1 dq_1, \quad dl_2 = h_2 dq_2 \quad \text{и} \quad dl_3 = h_3 dq_3. \quad (\text{П2.6})$$

Множители эти называются метрическими коэффициентами, или коэффициентами Ламэ.

Вообще метрические коэффициенты являются функциями криволинейных координат. В тех случаях, когда приращения

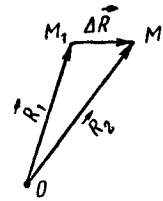


Рис. 278

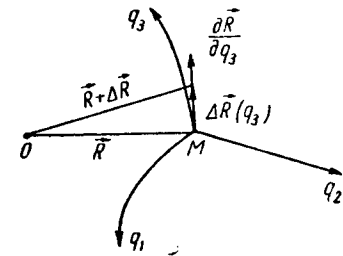


Рис. 279

длины и приращения соответствующих координат идентичны, метрические коэффициенты равны единице. В цилиндрической и сферической системах координат эти коэффициенты легко определяются из геометрических соображений (рис. 280, 281). Основные данные указанных систем сведены в таблицу:

Таблица П.1

№ координаты i	Системы координат							
	Цилиндрическая				Сферическая			
	a_i	q_i	h_i	dl_i	a_i	q_i	h_i	dl_i
1	r_0	r	1	dr	r_0	r	1	dr
2	α_0	α	r	$r d\alpha$	ϑ_0	ϑ	r	$d\vartheta$
3	z_0	z	1	dz	α_0	α	$r \sin \vartheta$	$r \sin \vartheta d\alpha$

Выразим в криволинейных координатах дифференциальные операции векторного анализа.

Градиент φ . На основании определения градиента (П1.1)

$$\text{grad}_1 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l_1}, \quad \text{grad}_2 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l_2}, \quad \text{grad}_3 \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial l_3},$$

или с учетом (П2.6)

$$\text{grad}_1 \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \quad \text{grad}_2 \varphi = \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2}, \quad \text{grad}_3 \varphi = \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}.$$

Итак

$$\text{grad } \varphi = \frac{a_1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{a_2}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{a_3}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \quad (\text{П2.7})$$

В соответствии с таблицей П.1
в цилиндрических координатах

$$\text{grad } \varphi = r_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\alpha_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad (\text{П2.8})$$

в сферических координатах

$$\text{grad } \varphi = r_0 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\vartheta_0}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\alpha_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \quad (\text{П2.9})$$

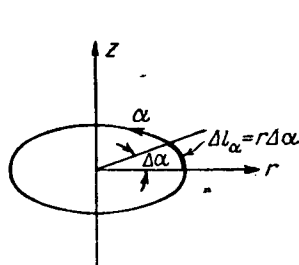


Рис. 280

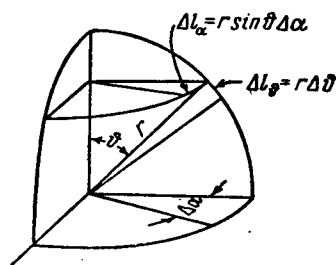


Рис. 281

Расходимость \mathbf{v} . Применяя общее определение (П1.3) к бесконечно малому параллелепипеду, образованному дифференциалами длины криволинейных координат (рис. 282), имеем:

$$\Delta V = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{П2.10})$$

Поток вектора \mathbf{v} через две параллельные грани I и II равен

$$-v_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1|_{q_2} + v_2 h_3 h_1 dq_3 dq_1|_{q_2+dq_2} = \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 h_3 h_1) dq_3 dq_1 dq_2,$$

причем знак минус перед первым членом появился потому, что внешняя нормаль к грани I не совпадает с направлением координаты q_2 . Подобным же образом определяется поток \mathbf{v} через грани III и IV:

$$\frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 h_1 h_2) dq_1 dq_2 dq_3$$

и через грани V и VI:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) dq_2 dq_3 dq_1.$$

Сумма полученных результатов, деленная на ΔV , дает в соответствии с (П1.3):

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 h_1 h_2) \right]. \quad (\text{П2.11})$$

В частности (см. табл. П.1),
в цилиндрических координатах

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_z}{\partial z}; \quad (\text{П2.12})$$

в сферических координатах

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (v_r r^2) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial v_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (\text{П2.13})$$

Оператор Лапласа. Формулы (П2.7 и 11) позволяют записать в криволинейных координатах оператор Лапласа, действующий на скаляр; $\nabla^2 \varphi = \text{div grad } \varphi$:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{П2.14})$$

Снова обращаясь к таблице П.1, пишем:

в цилиндрических координатах

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \quad (\text{П2.15})$$

в сферических координатах

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}. \quad (\text{П2.16})$$

Вихрь \mathbf{v} . Вычислим циркуляцию в числителе (П1.4), взяв в качестве контура L периметр боковой грани I параллелепипеда, изображенного на рис. 282:

$$\oint_L \mathbf{v} dl = -v_3 h_3 dq_3|_{q_1+dq_1} + v_3 h_3 dq_3|_{q_1} - v_1 h_1 dq_1|_{q_3} + v_1 h_1 dq_1|_{q_3+dq_3} = -\frac{\partial}{\partial q_1} (v_3 h_3) dq_3 dq_1 + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_1 h_1) dq_1 dq_3.$$

Здесь взяты попарно противоположные ребра грани I; минусы перед двумя членами промежуточного результата появились в тех случаях, когда направление обхода при интегрировании было противоположно одному из ортов.

Разделив найденную циркуляцию на $\Delta s = h_1 h_3 dq_1 dq_3$, получим:

$$\text{rot}_2 \mathbf{v} = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (v_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (v_3 h_3) \right]. \quad (\text{П2.17})$$

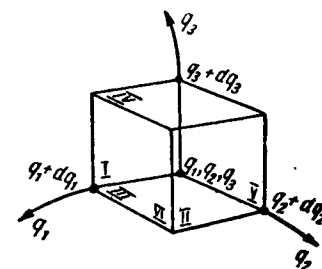


Рис. 282

На рис. 284 показаны поперечные сечения цилиндрических областей различного вида: а) область, ограниченная внешней цилиндрической поверхностью, б) пространство между двумя цилиндрическими поверхностями и в) неограниченное пространство вне цилиндра.

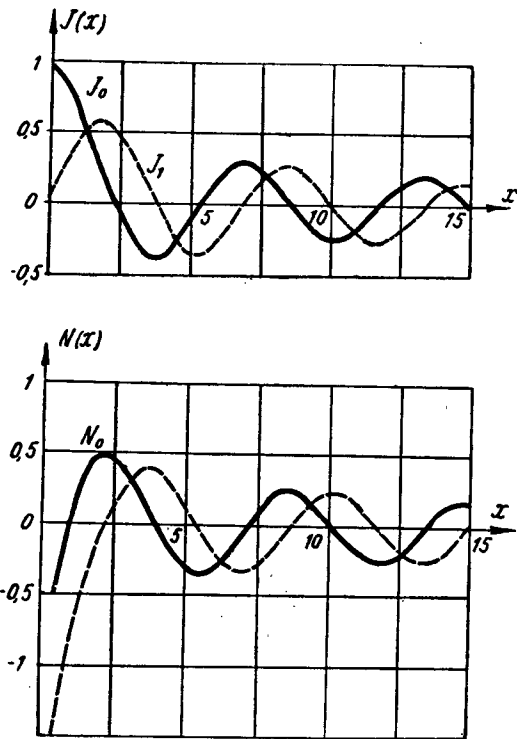


Рис. 283

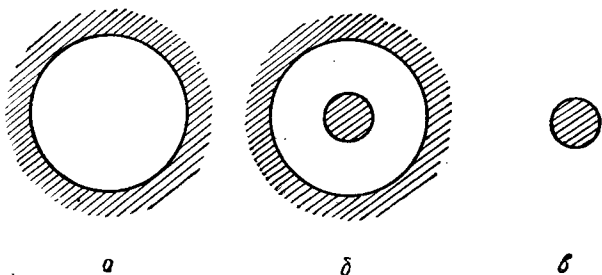


Рис. 284

В случае (б) предпочтителен выбор общего решения в виде (ПЗ.5). Ось цилиндрической системы координат ($x=0$) исклю-

чена из рассмотрения, и поэтому участвующая в решении функция Неймана нигде не обращается в бесконечность. Пример области вида (б) дает коаксиальный кабель (§ 64).

В области вида (а) присутствуют точки $x=0$. По этой причине в решении (ПЗ.5) функция Неймана в данном случае отбрасывается:

$$y = AJ_n(x). \quad (\text{ПЗ.7})$$

Решение (ПЗ.7) используется в анализе внутреннего поля цилиндрического проводника и диэлектрика (§§ 54, 56 и 65) и в случае полого волновода (§ 63).

Область вида (в) характерна тем, что определяемое в ней электромагнитное поле должно убывать при удалении от цилиндра. Потери во внешней среде должны также вызывать затухание. В аналогичной плоской задаче поле описывается экспоненциальной функцией

$$y = Be^{-jx}, \quad (**)$$

выражающей затухание при мнимом аргументе $x = -ja$.

В данном случае экспоненциальной функции (**) соответствует функция Ханкеля второго рода $H_n^{(2)}(x)$ (ПЗ.2а), она и представляет решение:

$$y = BH_n^{(2)}(x). \quad (\text{ПЗ.8})$$

Решение вида (ПЗ.8) фигурирует в описании внешнего поля диэлектрического волновода (§ 65) и в задаче дифракции на цилиндре (§ 56).

3. Некоторые степенные ряды.

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{0!n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1!(n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2!(n+2)!} - \dots \quad (\text{ПЗ.9})$$

В частности,

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{1 \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 - \dots \quad (\text{ПЗ.11})$$

4. Представления цилиндрических функций малого аргумента.

Из (ПЗ.9—11) непосредственно следует, что при $x \ll 1$

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{n!2^n}; \quad J_0(x) \approx 1; \quad J_1(x) \approx \frac{x}{2}. \quad (\text{ПЗ.12})$$

Функции Неймана при $x \ll 1$ представляются в виде:

$$N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^n; \quad N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\sqrt{x}} \quad (\text{ПЗ.13})$$

($\gamma = 1,781 \dots$).

5. Асимптотические представления.

При бесконечно возрастающем аргументе функции $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ переходят в экспоненциальные, а $J_n(x)$ и $N_n(x)$ — в тригонометрические:

$$H_n^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}, \quad (\text{ПЗ.14})$$

$$H_n^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]}, \quad (\text{ПЗ.15})$$

$$J_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right], \quad (\text{ПЗ.16})$$

$$N_n(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left[x - \frac{\pi}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]. \quad (\text{ПЗ.17})$$

Записанные формулы употребляются как приближенные при достаточно больших $x \gg 1$.

На основании (ПЗ.14, 15) нетрудно проверить обоснованность выбора функции Ханкеля второго рода для описания поля на бесконечности.

6. Некоторые формулы.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x); \quad N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x). \quad (\text{ПЗ.18})$$

В частности,

$$J_{-1}(x) = -J_1(x); \quad N_{-1}(x) = -N_1(x). \quad (\text{ПЗ.19})$$

В дальнейшем $Z_n(x)$ — произвольная цилиндрическая функция

$$Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x). \quad (\text{ПЗ.20})$$

7. Производные.

$$\frac{dZ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} Z_n(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x); \quad (\text{ПЗ.21})$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} Z_n(kx)] = -kx^{-n} Z_{n+1}(kx); \quad (\text{ПЗ.22})$$

$$\frac{d}{dx} [x^n Z_n(kx)] = kx^n Z_{n-1}(x). \quad (\text{ПЗ.23})$$

В частности,

$$Z'_0(x) = -Z_1(x) \text{ и } Z'_1(x) = Z_0(x) - \frac{Z_1(x)}{x}. \quad (\text{ПЗ.24})$$

8. Неопределенные интегралы.

$$\int x^{n+1} Z_n(x) dx = x^{n+1} Z_{n+1}(x); \quad (\text{ПЗ.25})$$

$$\int x^{-n+1} Z_n(x) dx = -x^{-n+1} Z_{n-1}(x); \quad (\text{ПЗ.26})$$

$$\int x Z_n^2(kx) dx = \frac{x^2}{2} [Z_n^2(kx) - Z_{n-1}(kx) Z_{n+1}(kx)]; \quad (\text{ПЗ.27})$$

$$\int \left[\frac{n^2 Z_n^2(x)}{x^2} + Z_n'^2(x) \right] x dx = \frac{x^2}{2} \left[Z_n^2(x) \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) + \frac{2}{x} Z_n(x) Z_n'(x) + Z_n'^2(x) \right] \quad (\text{ПЗ.28})$$

9. Нули

Таблица П.2

B_{nm} — корни уравнения $J_n(x)=0$

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,323
2	5,136	8,417	11,620	14,372
3	6,380	9,761	13,015	

Таблица П.3

A_{mn} — корни уравнения $J'_n(x)=0$

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	3,832	7,016	10,173	13,324
1	1,841	5,331	8,536	11,706
2	3,054	6,706	9,969	13,170
3	4,201	8,015	11,346	

10. Разложение плоской волны по цилиндрическим гармоникам.

Путем разложения экспоненциальной функции в ряд Фурье находится следующее важное соотношение:

$$e^{-jkr \cos \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) e^{jn\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (\text{ПЗ.29})$$

с помощью которого плоская волна

$$e^{-jhx} = e^{-jkr \cos \alpha}$$

представляется в виде суперпозиции бесконечного числа цилиндрических гармоник.

ЛИТЕРАТУРА

А. Курсы теории электромагнитного поля

1. И. Е. Тамм. Основы теории электричества, ГИТТЛ, 1956.
2. Дж. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
3. П. Л. Калантаров и Л. Р. Нейман. Теоретические основы электротехники, ч. III, Госэнергоиздат, 1954.
4. С. Рамо и Дж. Уиннери. Поля и волны в современной радиотехнике, ГИТТЛ, 1950.
5. А. В. Нетушил и К. М. Поливанов. Основы электротехники, ч. III, Госэнергоиздат, 1956.
6. Л. Д. Гольдштейн и Н. В. Зернов. Электромагнитные поля и волны, Советское радио, 1956.
7. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, ГИТТЛ, 1957.
8. А. Зоммерфельд. Электродинамика, ИЛ, 1958.

Б. Книги по общим вопросам электродинамики СВЧ

9. Б. А. Введенский и А. Г. Аренберг. Раднволноводы, ч. 1, Гостехиздат, 1946.
10. Г. В. Кнсуныко. Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, Ленинград, 1949.
11. Л. А. Вайнштейн. Электромагнитные волны, Советское радио, 1958.
12. А. Г. Гуревич. Полые резонаторы и волноводы, Советское радио, 1952.

В. Книги по специальным вопросам электродинамики

13. Л. И. Мандельштам. Полное собрание трудов, т. II, Изд. АН СССР, 1950.
14. А. Г. Гуревич. Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, 1960.
15. А. И. Потехин. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, Советское радио, 1948.
16. Справочник по волноводам, Советское радио, 1952.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	5
Глава 1	
Основные уравнения электромагнитного поля	
1. Уравнения Максвелла	8
§ 1. Векторы электромагнитного поля	8
§ 2. Первые два уравнения Максвелла	11
§ 3. Расходимость векторов электрической и магнитной индукции	15
2. Электромагнитные свойства среды	20
§ 4. Макроскопические параметры среды. Виды сред	20
§ 5. Намагниченность и поляризованность	23
§ 6. Закон Ома. Сторонние силы	24
§ 7. Относительность разграничения сред по признаку электропроводности	26
3. Граничные условия	30
§ 8. Граничные условия для векторов электрического поля	30
§ 9. Граничные условия для векторов магнитного поля	33
4. Система уравнений электромагнитного поля	36
§ 10. Система уравнений Максвелла	36
§ 11. Классификация электромагнитных явлений	36
Глава 2	
Энергия электромагнитного поля	
§ 12. Закон Джоуля—Ленца	40
§ 13. Баланс энергии электромагнитного поля	42
§ 14. Электрическая и магнитная энергия электромагнитного поля	45
§ 15. Локализация и движение энергии	48
Глава 3	
Электростатическое поле	
1. Основные уравнения и понятия электростатики	52
§ 16. Электростатический потенциал	52
§ 17. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности	54
§ 18. Уравнения Пуассона и Лапласа	55
2. Электрические заряды в неограниченном диэлектрике	56
§ 19. Поле точечного заряда. Закон Кулона	56
§ 20. Система точечных зарядов. Диполь	58
§ 21. Поле заряженных нитей	61
§ 22. Электростатическая модель диэлектрической среды	64

3. Проводящие и диэлектрические тела в электростатическом поле	67
§ 23. Проводники в электростатическом поле. Емкость	67
§ 24. Электростатическая энергия	73
§ 25. Задачи электростатики и методы их решения	78
§ 26. Примеры специальных приемов решения задач электростатики	81
§ 27. Цилиндрические и сферические тела в однородном поле	86

Глава 4

Электромагнитное поле постоянного тока

§ 28. Магнитостатика	94
§ 29. Магнитное поле и постоянный ток	99
§ 30. Примеры магнитных полей	103
§ 31. Магнитная энергия постоянного тока. Индуктивность	110
§ 32. Электрическое поле постоянного тока	117

Глава 5

Общие свойства переменного электромагнитного поля

§ 33. Применение метода комплексных амплитуд	123
§ 34. Комплексные проницаемости. Система уравнений монохроматического поля	125
§ 35. Средний баланс энергии электромагнитного поля	128
§ 36. Теорема единственности	134
§ 37. Сторонние токи. Теорема взаимности	137
§ 38. Волновой характер электромагнитного поля	140
§ 39. Электромагнитное поле и цепь переменного тока	147

Глава 6

Электромагнитные волны

1. Излучение	150
§ 40. Электродинамические потенциалы	151
§ 41. Элементарный электрический излучатель	155
§ 42. Исследование поля электрического излучателя	159
§ 43. Элементарный магнитный излучатель. Принцип двойственности	165
§ 44. Эквивалентные источники электромагнитного поля	168
2. Плоские электромагнитные волны в неограниченной среде	174
§ 45. Волны в изотропной среде	174
§ 46. Волны в гиротропной среде	180
§ 47. Распространение электромагнитного сигнала	187

Глава 7

Отражение, преломление и дифракция электромагнитных волн

1. Волновые явления на плоских границах раздела сред	193
§ 48. Нормальное падение плоской волны	193
§ 49. Наклонное падение плоской волны. Общий анализ	198
§ 50. Наклонное падение при отсутствии потерь. Направляемые волны	204
§ 51. Наклонное падение на границу поглощающей среды	209
2. Поверхностный эффект	211
§ 52. Приближенные граничные условия Леонтовича. Проникновение поля в проводник	211

§ 53. Потери энергии. Поверхностный ток и сопротивление проводника	214
§ 54. Внутреннее поле цилиндрического проводника	218
3. Дифракция электромагнитных волн	222
§ 55. Предельные случаи дифракции	222
§ 56. Дифракция плоской волны на цилиндре	228
§ 57. Дифракция плоской волны на отверстии	232
§ 58. Применение принципа двойственности	238

Глава 8

Направляемые электромагнитные волны

1. Общие свойства направляемых волн	242
§ 59. Понятие о направляющей системе	242
§ 60. Классификация направляемых волн	249
§ 61. Дисперсия направляемых волн	254
2. Направляющие системы	261
§ 62. Прямоугольный волновод	261
§ 63. Круглый волновод	270
§ 64. Двухсвязные системы	279
§ 65. Другие направляющие системы	285
§ 66. Нерегулярность направляющих систем. Связь и возбуждение	293
3. Затухание направляемых волн	301
§ 67. Учет потерь энергии в направляющих системах	301
§ 68. Расчет затухания важнейших направляющих систем	305

Глава 9

Объемные резонаторы

§ 69. Общие свойства объемного резонатора	312
§ 70. Важнейшие резонаторы простой формы	316
§ 71. Объемные резонаторы, близкие к квазистационарным	324
§ 72. Потери энергии объемного резонатора	328
§ 73. Расчет собственной добротности важнейших резонаторов	331
§ 74. Вынужденные колебания полого электромагнитного резонатора	338
§ 75. Возмущения полых систем	345
Приложение 1. Формулы векторного анализа	355
Приложение 2. Операции векторного анализа в криволинейных координатах	357
Приложение 3. Краткие сведения о цилиндрических функциях	362
Литература	368

Вячеслав Владимирович Никольский

ТЕОРИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Редактор *В. Б. Брагинский*
Редактор издательства *Г. Е. Перковская*
Художественный редактор *И. Ф. Муликсва*
Технический редактор *Т. Д. Гарина*
Корректор *Н. В. Гераскина*

Сдано в набор 30/VI-61 г. Подписано к печати 11/XI-61 г.
Бумага 60 × 90¹/₁₆ 23,25 печ. л. 19,05 уч.-изд. л. Тираж 18.000. Т-11465.
Изд. № ФМХ/36 Цена 67 коп.

Государственное издательство «Высшая школа».
Москва, Б-62, Подсосенский пер., 20

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.
Зак. 1144