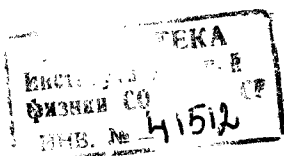


Электродинамика и распространение радиоволн.
В. В. Никольский. Учебное пособие. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1973.

Систематически излагается теория электромагнетизма с акцентом на радиотехническую электродинамику. Построение дедуктивное: после обсуждения исходных понятий и уравнений рассматриваются подчиненные выводы (с анализом) и приложения к частным проблемам. Статическим и стационарным полям уделяется сравнительно мало внимания. Основным предметом изучения являются электромагнитные волны. На базе общих положений электродинамики описываются простейшие волновые процессы, а затем процессы излучения и дифракции. Далее подробно рассматриваются направляемые волны и особенности сред. После общего знакомства с простейшими волновыми процессами поднимаются вопросы распространения радиоволн в природных условиях; по мере углубления теоретической подготовки этот материал постепенно развивается в последующих главах. Значительное внимание уделено различным объектам радиотехники. Подробно излагается теория волноводов и различных линий передачи, волноводных устройств и резонаторов; рассмотрены квазиоптические системы. В разделе об анизотропных средах описаны искусственные диэлектрики и устройства с намагниченными ферритами. Затронуты вопросы нелинейной оптики и активных сред. Дается представление о современных методах расчетов электродинамических объектов.

Книга предназначена служить учебным пособием по программе курса «Электродинамика и распространение радиоволн» радиотехнической специальности вузов (0701).



© Издательство «Наука», 1973

11 0232—1768 89-72
042(02)-73

Казачков

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9

ГЛАВА I

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

I. Основные понятия и уравнения электромагнетизма	14
§ 1. Явления электромагнетизма и электромагнитное поле	15
§ 2. Основные уравнения Максвелла	19
§ 3. Расхождения электрической и магнитной индукции	26
§ 4. Дальнейшее обсуждение уравнений Максвелла	28
II. Электромагнитные свойства сред	32
§ 5. Поляризация и намагничивание	32
§ 6. Электропроводность	38
§ 7. Поля на границах раздела сред. Граничные условия	43
§ 8. Примеры применения граничных условий	49
III. Энергия электромагнитного поля	54
§ 9. Поглощение энергии и действие источников	54
§ 10. Уравнение баланса энергии	57
§ 11. Энергия электромагнитного поля, ее локализация и движение	60
§ 12. Применение полученных результатов	63
IV. Заключение	66
§ 13. Система уравнений Максвелла и виды электромагнитных явлений	66

ГЛАВА 2

СТАТИЧЕСКИЕ, СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

I. Электростатика и магнитостатика	71
§ 14. Основные уравнения электростатики. Потенциал	72
§ 15. Точечные заряды. Диполь	75
§ 16. Примеры электростатических полей	80
§ 17. Проводники в электростатическом поле. Емкость	87
§ 18. Системы диполей и поляризация диэлектрика	95
§ 19. Энергия электростатического поля	100
§ 20. Деформация однородного поля проводниками и диэлектриками простой формы	103
§ 21. Магнитостатика	109

II. Стационарное электромагнитное поле	116
§ 22. Уравнения стационарного магнитного поля. Векторный потенциал	116
§ 23. Линейные токи. Магнитный диполь	120
§ 24. Примеры магнитных полей	126
§ 25. Энергия стационарного магнитного поля. Индуктивность	132
§ 26. Стационарное электрическое поле и общие свойства стационарного электромагнитного поля	139
III. Заключение	145
§ 27. Квазистационарное электромагнитное поле и цепь переменного тока	146

Г Л А В А 3

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

I. Общие положения электродинамики	149
§ 28. Основные уравнения электродинамики	149
§ 29. Комплексные проницаемости и уравнения электродинамики в комплексной форме	153
§ 30. Баланс энергии при гармонических колебаниях	157
§ 31. О единственности решений задач электродинамики	161
II. Плоские однородные волны	164
§ 32. Одномерный электромагнитный процесс. Волны в непоглощающих средах	164
§ 33. Волны в поглощающих средах	168
§ 34. Ориентация, поляризация и сложение волн	172
§ 35. Распространение электромагнитных сигналов	178
III. Волны при наличии плоской границы раздела сред	182
§ 36. Нормальное падение	183
§ 37. Наклонное падение. Законы Снеллиуса	192
§ 38. Формулы Френеля и строение поля	197
§ 39. Полное отражение и полное прохождение при наклонном падении	202
§ 40. Поверхностный эффект и поглощение в проводниках	213
IV. Радиоволны в природных условиях	221
§ 41. Элементарные сведения о радиолинии	222
§ 42. Диапазоны радиоволн	227

Г Л А В А 4

4 ИЗЛУЧЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РЕФРАКЦИЯ

I. Излучение	234
§ 43. Основная задача об излучении	235
§ 44. Элементарный электрический излучатель и линейный вибратор	241
§ 45. Элементарный магнитный излучатель	251
§ 46. Магнитные токи. Обобщенная задача об излучении	255
§ 47. Эквивалентные поверхностные источники. Принцип Гюйгенса	260
§ 48. Принцип взаимности	267
§ 49. Системы излучателей	271
II. Дифракция	280
§ 50. Явления и задачи дифракции. Предельные случаи	280
§ 51. Дифракция на цилиндре; пример строгого решения задачи	290

§ 52. Дифракция на сфере	297
§ 53. Метод Гюйгенса — Кирхгофа. Дифракция Фраунгофера на отверстиях	302
§ 54. Дифракция Френеля	308
§ 55. Экраны и принцип двойственности; узкие щели	315
III. Рефракция	320
§ 56. Локально плоские волны в неоднородных средах	320
§ 57. Лучи в неоднородных средах	326
IV. Земные и тропосферные радиоволны	331
§ 58. Физические факторы и приближения теории	332
§ 59. Земные радиоволны	340
§ 60. Влияние тропосферы	350

Г Л А В А 5

НАПРАВЛЯЕМЫЕ ВОЛНЫ И ПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЪЕМАХ

I. Общая теория направляемых волн	356
§ 61. Строение полей и виды плоских неоднородных волн	356
§ 62. Основные особенности направляемых волн	360
§ 63. Передача энергии и волны при поглощении	369
II. Свободные волны в направляющих системах	377
§ 64. Прямоугольный волновод	377
§ 65. Круглый волновод	386
§ 66. Различные системы с однородным диэлектриком	397
§ 67. Системы с неоднородной средой	406
§ 68. Действие реального проводника	417
III. Свободные колебания объемных резонаторов	422
§ 69. Общие свойства объемных резонаторов	422
§ 70. Важнейшие объемные резонаторы	431
IV. Вынужденные поля. Нерегулярные системы	443
§ 71. Вынужденные колебания резонатора	444
§ 72. Вынужденные волны волновода	455
§ 73. Волноводные системы	461
§ 74. Свойства волноводных трансформаторов	469
§ 75. Теория возмущений	476
§ 76. Общие алгоритмы для нерегулярных систем	485
V. Периодические и квазиоптические системы	490
§ 77. Периодические системы и импедансные поверхности	491
§ 78. Квазиоптические системы	499

Г Л А В А 6

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

I. Поля и заряженные частицы	507
§ 79. Частицы в стационарных полях	507
§ 80. Частицы в переменных полях и модели сред	514
§ 81. Радиоволны в ионосфере	521

II. Анизотропные среды	525
§ 82. Природа и проявления анизотропии	526
§ 83. Поля и волны в гиротропных средах	533
§ 84. Гиротропия в радиотехнике	542
III. Активные среды	552
§ 85. Поля и волны в активных средах	552
IV. Нелинейные среды	557
§ 86. Природа и проявления нелинейности	558
§ 87. Волновые процессы в нелинейных средах	565
V. Радиолинии	572
§ 88. Радиолинии разных диапазонов	572

ПРИЛОЖЕНИЯ

<i>Приложение 1.</i> Векторы	578
<i>Приложение 2.</i> Дельта-функция Дирака	581
<i>Приложение 3.</i> Метод комплексных амплитуд	583
<i>Приложение 4.</i> Вращение декартовой системы координат	584
<i>Приложение 5.</i> Об уравнениях математической физики	585
<i>Приложение 6.</i> Специальные функции	589
<i>Приложение 7.</i> Метод разделения переменных	594
<i>Приложение 8.</i> Ряды Фурье и ортогональные системы	599
<i>Приложение 9.</i> Сведения о матрицах	602
Литература	605

ПРЕДИСЛОВИЕ

По своему назначению эта книга является курсом теории электромагнетизма для радиотехнических специальностей втузов. Автор руководствовался духом соответствующей программы для специальности 0701 в последнем варианте, однако позволил себе не придерживаться ее буквально. Известно, что за последние годы указанная программа существенно изменилась: в нее были включены вопросы распространения радиоволн в природных условиях, ранее составлявшие содержание отдельного предмета. Как лучше всего расположить их в новой складывающейся дисциплине?

По мнению автора, простое соединение (в виде независимых частей) двух разных учебных предметов, один из которых дает студенту широкую теоретическую базу, а второй является специальным и во многом эмпирическим, — путь, быть может, простейший, но не лучший. Правильнее сохранить единство учебной дисциплины, основанное на подчинении частного общему. Расширение задач курса в сущности означает усиление внимания к электромагнитным процессам в различных средах; при этом нельзя не учитывать, что важны не только природные среды, но и многие иные (гиротропия в технике СВЧ, квантовая радиотехника, нелинейная оптика и др.).

Стремясь удовлетворить новым требованиям, автор не смог ограничиться простой переработкой более ранней своей книги по теории электромагнетизма [В.3] (см. литературу в конце книги). Предлагаемая книга написана заново. Она отличается не только структурой и тематическим содержанием, но также и методологически; так, в частности, продемонстрированы преимущества отказа от векторных потенциалов в теории излучения. Однако в общем построении автор по-прежнему придерживался дедуктивного принципа: «от уравнений Максвелла — к частным вопросам»; авторский опыт применения этого подхода в учебной литературе [В.3], несомненно, оправдал себя.

Содержание важнейших понятий при изучении теории электромагнетизма раскрывается постепенно. Чтобы помочь читателю в установлении связей и усвоении сущности предмета, многие вопросы намеренно рассматриваются в книге с разных позиций. В этом смысле, как и по тематическому содержанию, книга шире обычного лекционного курса. Последний можно строить на основании книги по-разному, отдавая предпочтение тем или иным аспектам и темам. Поэтому автор надеется, что она окажется полезной при существующих различиях традиций преподавания в разных вузах. Что касается изложения вопросов распространения радиоволн в природе, то этот материал вводится по мере формирования необходимых теоретических представлений. Не исключается, конечно, выделение указанного материала в лекциях; тогда соответствующие параграфы книги, взятые в прежнем порядке из разных глав, могут использоваться как единое целое.

Книга снабжена приложениями математического содержания (девять приложений в конце текста). В них наряду с данными справочного характера в краткой форме излагаются некоторые специальные вопросы. Подробнее математический аппарат электродинамики изложен в вышедшей недавно книге автора [К.5].

Декабрь 1972 г.

В. Никольский

ВВЕДЕНИЕ

Хотя проявления электромагнетизма в природе наблюдались людьми всегда, научные понятия в этой области появились всего около двухсот лет назад; для сравнения напомним, что некоторые понятия механики складывались еще в древнем мире. Вряд ли это удивительно: ведь механические явления наполняют повседневный опыт человека, и здесь оказалась полезной интуиция, выработанная многими поколениями. Воспроизводимые же электромагнитные явления (такие, как действие магнита или натертого янтаря) были слишком примитивны, чтобы положить начало технике, которая, несомненно, обострила бы внимание к электромагнетизму. Примечательно другое — медленное развитие механики, достигшей относительной зрелости только во времена Галилея и Ньютона, и весьма быстрое завершение классической теории электромагнетизма в последующий период. Однако даже теперь, когда использование сложнейших электромагнитных процессов получило самое широкое распространение, основные понятия электромагнетизма порой кажутся изучающим слишком отвлеченными: они далеки от нашего непосредственного опыта.

К началу XIX века уже существовали довольно ясные представления о макроскопических зарядах, токах и их взаимодействии. В это время возникла электротехника, еще десятилетия спустя не имевшая большого практического значения. Гораздо более глубокое понимание сущности электромагнетизма понадобилось для создания радиотехники, основная функция которой связана с непосредственным использованием *электромагнитного поля*, переносящего энергию в пространстве.

Что же такое электромагнитное поле? Термин «поле» во многих случаях имеет только формальный смысл. Его употребляют, когда в каждой точке области пространства надо указать какую-либо физическую характеристику как функцию координат; это может быть плотность вещества, температура, давление и пр. Можно, таким образом, говорить о «поле температур» воздуха в комнате или «поле скоростей» частиц воды в реке, понимая под этим, что задана функция $t(x, y, z)$ или $v(x, y, z)$ соответственно. Тогда для любой точки рассматриваемого пространства, например $M(x_0, y_0, z_0)$, можно записать значение $t(x_0, y_0, z_0)$ в первом случае и $v(x_0, y_0, z_0)$ во втором. Подобно этому об электрическом поле формально говорят как

о «поле сил», имея в виду силу, которая будет действовать на заряд (точнее, единичный положительный заряд), если его поместить в пространстве, где существует поле. Понятие поля выступает в этих примерах как некоторое условное средство описания физического процесса, возможно очень удобное, но не имеющее самостоятельного физического содержания. Отказавшись от такого средства, мы не должны потерять никакой физической информации.

Однако, привлекая известные факты, нетрудно убедиться, что понятие электромагнитного поля, помимо своего формального значения, также еще физически содержательно, и от него нельзя отказаться, не исказив этим представления о природе. Рассмотрим, например, такой вполне реализуемый эксперимент. В вакууме расположены две антенны: передающая и приемная (рис. В.1). Передача

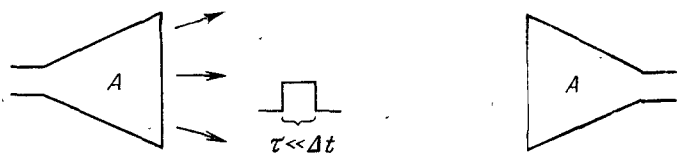


Рис. В.1.

электромагнитной энергии производится в течение короткого интервала времени τ , а остальное время передатчик бездействует. Пусть время Δt , в течение которого электромагнитная энергия распространяется, чтобы достигнуть приемной антенны, превышает τ (возможно, что даже $\Delta t \gg \tau$). В таком случае легко указать время, когда энергия *уже излучена* передающей антенной, но *еще не поступила* в приемную. Что же является носителем этой энергии в вакууме, где отсутствует привычная материальная среда? Ответ заключается в том, что носитель энергии — электромагнитное поле, которое, следовательно, физически реально. В философском смысле электромагнитное поле следует рассматривать в качестве одной из форм существования материи.

Понятие электромагнитного поля лежит в основе современной теории электромагнетизма. Посмотрим, как оно исторически появилось. В 1784—1789 гг. были опубликованы работы Шарля Кулона об электрических и магнитных взаимодействиях. Известный закон Кулона о взаимодействии электрических зарядов, изучаемый сейчас уже в средней школе, поразительно похож на закон тяготения. Легко представить впечатление, произведенное этим фактом на современников открытия, когда наиболее разработанная часть физики сводилась к механике Ньютона. Открытые позднее законы различных электромагнитных взаимодействий (например, закон Ампера о токах) при всех своих особенностях идейно близки закону Кулона: действие одного объекта на другой, как полагали исследователи, происходит мгновенно без всякого участия промежуточной среды. Это так называемый «принцип дальнего действия» (действия

на расстоянии), вошедший в науку вместе с механикой Ньютона¹⁾.

Согласно современным физическим воззрениям мгновенных взаимодействий не бывает; роль промежуточной среды никак нельзя игнорировать, ибо она вмещает энергию. Участие среды (в частности, вакуума) в передаче электромагнитных взаимодействий находит выражение в «принципе близкодействия». В силу последнего взаимодействие должно осуществляться только через посредство среды, являющейся «вместилищем» электромагнитного процесса. Этот принцип связан с именем Майкла Фарадея (1791—1867 гг.), впервые высказавшего (если судить с современных позиций) идею физической реальности электромагнитного поля, долго затем не встречавшую признания. Приведем одну цитату²⁾: «Фарадей своим мысленным взором видел линии сил, проходящие через все пространство там, где математики видели центры сил, притягивающиеся на расстоянии. Фарадей видел среду там, где они не видели ничего, кроме расстояния. Фарадей искал источник явлений в реальных процессах, происходящих в среде. Они же были удовлетворены тем, что нашли его в действующей на расстоянии силе, приложенной к электрическим флюидам». Эти слова принадлежат Джемсу Клерку Максвеллу (1831—1879 гг.), которому было суждено внести исключительный вклад в теорию электромагнетизма. В современной науке *уравнения Максвелла* являются фундаментальными законами этой теории. В дальнейшем мы подробно рассмотрим уравнения Максвелла; они лежат в основе всего материала этой книги. Пока же отметим, что сила идей Максвелла выявилась лишь постепенно по мере накопления опыта и развития техники. Его вывод о существовании электромагнитных волн (как результат математического завершения принципа близкодействия) и гипотеза об электромагнитной природе света были холодно встречены современниками; по существу все это опережало экспериментальные возможности своего времени. Возбуждение электромагнитных волн в лаборатории и их экспериментальное исследование было осуществлено позднее Генрихом Герцем (1857—1894 гг.), который внес также значительный вклад в теорию электромагнетизма. Герц предвосхитил многое из того, что мы относим теперь к радиотехнической электродинамике. В частности, в своих опытах он использовал параболические зеркала, в которых можно видеть прообраз современных зеркальных антенн. Тем не менее им никогда не ставился вопрос о техническом применении электромагнитных волн. Историческая заслуга изобретения беспроводной связи, радио, принадлежит нашему соотечественнику А. С. Попову (1859—1906 гг.). Отметим еще, что для подтверждения электромагнитной природы света решающими оказались опыты другого русского

¹⁾ Сам Ньютон (утверждавший: «гипотез я не измышляю») не высказывал принципа дальнего действия; такая интерпретация закона тяготения принадлежит его последователям.

²⁾ Из введения к книге J. M a x w e l l, A treatise on electricity and magnetism (цитируется по [3.1]).

ученого П. Н. Лебедева (1866—1911 гг.), измерившего световое давление.

Можно без преувеличения сказать, что радиотехника явилась широчайшей опытной базой теории электромагнетизма, основывающейся на уравнениях Максвелла, а также стимулятором ее дальнейшего развития. Вместе с радиотехникой появилось понятие *радиоволны*, т. е. электромагнитные волны в радиотехнических системах. Важным научным направлением стало исследование распространения радиоволн в природных условиях (над Землей). Проблема изучения и приема электромагнитной энергии, переносимой радиоволнами, привела к образованию теории антенн, в настоящее время весьма разработанной.

В первых опытах длина радиоволн измерялась метрами. В начале нынешнего века радиосвязь достигла заметного размаха; при этом господствовали длинные волны (порядка километров). Но, начиная с двадцатых годов, в радиотехнической практике осваиваются волны все более короткие. Возникшая в военное время радиолокация дала этому процессу мощный толчок — в технику вошли волны дециметровые, сантиметровые и миллиметровые, которые имеют теперь многочисленные применения в разных областях. Столь короткие волны изменили многое как в самой радиотехнике, так и в ее теоретических основах. Дело в том, что ранее размеры элементов радиоаппаратуры оставались намного меньше длины волны. Благодаря этому основные представления электротехники и используемая ею теория цепей были пригодны как аппарат расчетов, а радиотехническая аппаратура во многом напоминала электротехническую. Но такое положение не могло сохраниться, когда понадобилось создавать радиотехнические элементы, сравнимые по размерам с длиной волны.

Отмеченное обстоятельство требует пояснения. Предположим, что электромагнитная энергия распространяется вдоль проводника, который мы хотим считать участком цепи, причем в двух находящихся на расстоянии L сечениях проходят токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ соответственно. В теории цепей считают, что эти токи одинаковы, т. е. $I_1(t) = I_2(t)$, но так ли это? Пусть $I_1(t) = I_m \cos \omega t$. Какова при этом фаза тока I_2 в удаленном сечении? Поскольку для распространения электромагнитного процесса на расстояние L нужно время $\Delta t = L/v$, где v — скорость, то фазу ωt ток I_2 будет иметь только по истечении времени Δt , а в данный момент t его фаза есть $\omega(t - \Delta t)$. Токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$, как мы видим, не равны, поскольку имеется фазовое различие $\Delta\varphi = \omega\Delta t$; может оказаться, например, что $I_2 = 0$, когда $I_1 = I_m$. Учитывая известную связь скорости, длины волны и частоты ($v = f\lambda$, $\omega = 2\pi f$), имеем: $\Delta\varphi = 2\pi L/\lambda$. Таким образом, фазовое запаздывание пренебрежимо мало, когда

$$L \ll \lambda. \quad (B.1)$$

Принцип постоянства мгновенного тока во всех сечениях проводника, следовательно, можно считать соблюденным лишь при доста-

точно сильном выполнении записанного неравенства, в котором L надо понимать как максимальный размер объекта. Неравенство (В.1) известно под названием *условия квазистационарности*. В соответствии с этим условием различают квазистационарные или неквазистационарные объекты. Из рассмотрения следует, что теория цепей переменного тока пригодна, вообще говоря, для квазистационарных объектов. В дальнейшем читатель убедится, что по мере ослабления условия квазистационарности все большая часть энергии «обыкновенной цепи» излучается в пространство. Антенные устройства с позиций теории цепей уже рассматривать нельзя. Часто антенны в высокой степени неквазистационарны. Таковы же обычно и элементы аппаратуры, применяемой в случаях дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волн. Не только методы анализа, но и сами принципы построения радиотехнических устройств здесь весьма далеки от старых электротехнических образцов. Примечательно, например, широкое использование так называемых *полых систем* — волноводов для передачи энергии, различных полых резонаторов в качестве «колебательных контуров», а также родственных элементов. Для описания этих и других неквазистационарных объектов необходима общая теория электромагнетизма; исследованию подлежат их электромагнитное поле.

Эта книга предназначена для изучения теории электромагнетизма студентами радиотехнических специальностей. Поэтому главным предметом ее являются радиоволны. Собственно говоря, радиоволнами в настоящее время могут быть электромагнитные волны длиной по меньшей мере от десятков километров (сверхдлинные) до тысяч ангстрем (оптические). Условия их распространения над Землей в этом огромном диапазоне весьма разнообразны, однако локально по своей структуре они могут быть близки к простейшей плоской волне, которая распространялась бы в безграничном пространстве. Структурно более сложны радиоволны в волноводах и иных направляющих системах. В анизотропных средах волны распространяются по-разному в зависимости от направления и ориентации; в активных средах может происходить усиление и генерация волн. Особенности различных сред, применяемых в радиотехнике, весьма разнообразны.

Для понимания свойств радиоволн в природных условиях и радиоаппаратуре надо изучить всевозможные электромагнитные волновые процессы — и сравнительно простые, как, например, отражение, преломление, образование стоячих волн, и гораздо более сложные, как дифракция и излучение. При этом применяются методы математической физики.

Выше уже говорилось о роли уравнений Максвелла в теории электромагнетизма. Ими и начинается изложение.

ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ
И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Как раздел физики теория электромагнетизма охватывает определенный круг явлений — *электромагнитные явления*. При изучении облеченной в математическую форму физической теории надо, разумеется, располагать предварительными сведениями о самих явлениях. Студент, приступающий к данному предмету, уже получил такие сведения из курсов общей физики и электротехники. Поэтому, в частности, будет предполагаться, что читатель знаком в достаточном объеме с теми опытными данными, которые приводят к понятию *электрического заряда*. Это фундаментальное физическое понятие не подлежит далее формальному определению.

Электромагнетизму отведена важная роль в современных воззрениях на строение материи. Согласно известным представлениям материя построена из элементарных частиц, но следует иметь в виду, что слова «элементарная частица» это просто термин, а наглядное представление о частице (малом теле, корпускуле) вообще очень поверхностно. Тем не менее в простейших случаях оно остается полезным, и, например, носитель элементарного отрицательного заряда электрон или иную отрицательную частицу иногда рассматривают подобно непосредственно наблюдаемым телам, имеющим траектории движения. Теория строения материи относится, как известно, к компетенции квантовой физики. Прямо с ней связанные или соприкасающиеся вопросы электромагнетизма составляют так называемую *микроскопическую* электродинамику.

Теория электромагнетизма, изложение которой начинается в этой главе, является *макроскопической*. Ее материальные объекты таковы, что происходит действие огромных — «практически бесконечных» — количеств элементарных частиц. Структуру материи при этом игнорируют, среду представляют себе сплошной. Так, в частности, отвлекаясь от строения материи, мы будем говорить о непрерывном распределении заряда в объеме. При нахождении его плотности в данной точке, т. е. заряда, отнесенного к единице объема, приходится последний устремлять к нулю. Однако нельзя забывать, что в действительности имеет смысл лишь «практически бесконечно малый» элемент объема: достаточно малый при рассматриваемом предельном переходе, но в то же время и на столько большой, что дискретность материи еще не проявляется.

§ 1. Явления электромагнетизма и электромагнитное поле

1. Векторы электромагнитного поля. Что составляет общую основу явлений электромагнетизма? Во Введении было дано начальное представление об *электромагнитном поле* как носителе электромагнитной энергии, особой форме материи. Электромагнитное поле лишь в некоторых особых случаях заметно воздействует на органы чувств человека (один из примеров этого — видимый свет). Однако весьма разнообразные превращения энергии поля доступны наблюдению. Последние и лежат в основе электромагнитных явлений, из которых черпается информация о поле.

Электромагнитное поле можно охарактеризовать (описать) при помощи нескольких векторных функций пространственных координат и времени. Начнем с функций $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$, называя их соответственно *напряженностью электрического поля* и *магнитной индукцией*.

Простейшие электромагнитные явления, приводящие к непосредственному представлению о векторах поля \mathbf{E} и \mathbf{B} , связаны с тем, что на заряд в электромагнитном поле действует *сила*. То или иное электромагнитное явление происходит, когда эта сила совершает работу, отбирая, таким образом, от поля некоторую энергию. «Наблюдать» электромагнитное явление — значит заметить (индексировать) или измерить производимую работу. Очевидно, если нужно составить суждение о поле, которое было бы в отсутствие заряда, указанное извлечение энергии поля должно быть пренебрежимо малым.

Пусть имеется точечный заряд величиной q (q измеряется в *кулонах* [к]); говоря «точечный заряд», имеют в виду заряженное тело, весьма малое по своим размерам в сравнении с тем расстоянием, с которого оно рассматривается. Но в данном случае еще важно, чтобы оно было мало в сравнении с областью пространства, внутри которой уже заметны изменения поля. Идеальным точечным зарядом является, очевидно, заряд, сосредоточенный в исчезающе малом («нулевом») объеме; это безусловно некая абстракция. В электромагнитном поле на точечный заряд будет действовать сила

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad (1.1)$$

где \mathbf{v} — скорость движения заряда.

Если заряд неподвижен ($\mathbf{v} = 0$), то сила зависит только от напряженности электрического поля:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (1.2)$$

Таким образом, располагая какой-то реализацией точечного заряда, а также средством измерения действующей на него силы, можно найти напряженность электрического поля \mathbf{E} в заданной точке пространства $M(x, y, z)$ в некоторый момент времени t . Не входя в подробности такого рода измерений, отметим все же два обстоятельства: во-первых, измерения должны быть достаточно малоинерционными,

т. е. совершаться намного быстрее изменений поля, и, во-вторых, величина заряда должна быть настолько мала, чтобы неизбежное извлечение энергии почти не изменяло исследуемого поля. Равенство (1.2) обычно рассматривают как определение векторной функции E . Единицей измерения напряженности электрического поля E (точнее, абсолютного значения E вектора E) служит *вольт на метр* [в/м].

На движущийся точечный заряд, как видно из (1.1), действует, кроме того, сила

$$F = q[v, B], \quad (1.3)$$

называемая *лоренцевой силой*. С проявлением этой силы можно связывать определение вектора магнитной индукции B ; B измеряется в *веберах на квадратный метр* [вб/м²].

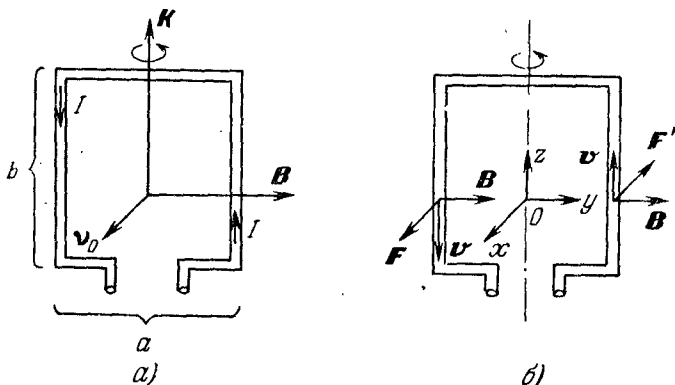


Рис. 1.1.

Рассмотрим весьма малый виток с током (контур тока). Вследствие лоренцевой силы на этот контур действует *момент силы* K (см. рис. 1.1, а, на котором виток имеет форму прямоугольной рамки):

$$K = IS[v_0, B]. \quad (1.4)$$

В этой формуле S — площадь контура, I — величина тока и v_0 — единичный вектор нормали к плоскости контура; при этом направление тока и нормали составляют правинтовую систему. Заметим, что малость контура требуется постольку, поскольку магнитная индукция B должна быть практически одной и той же во всех точках ограничиваемой им площадки S .

Нетрудно убедиться, что описываемое формулой (1.4) воздействие поля на контур тока действительно обусловлено лоренцевой силой. Обращаясь к рис. 1.1, б, видим, что в соответствии с формулой (1.3) на боковые стороны контура должны действовать силы F и F' соответственно, образующие момент силы, направленный вдоль вертикальной оси (z на рис. 1.1, б); он равен

$$K = [-y_0 a, F] = z_0 a F,$$

Кизаков

причем, согласно (1.3), $\mathbf{F} = q [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, где \mathbf{v} — скорость зарядов в левой стороне контура, а q — содержащийся там полный движущийся (условно положительный) заряд; можно считать, что положительные заряды в контуре уравновешены отрицательными, так что сила $q\mathbf{E}$ на виток не действует. Обозначая через t время, в течение которого заряд проходит по боковой части контура (расстояние b), имеем

$$q\mathbf{v} = -z_0 b \frac{q}{t} = -z_0 b I.$$

С учетом этого результата вносим выражение силы в предыдущую формулу момента силы и получаем

$$\mathbf{K} = Iab [\mathbf{y}_0, [z_0, \mathbf{B}]] = z_0 Iab \mathbf{B}.$$

Поскольку $ab = S$ и $z_0 \mathbf{B} = [x_0, \mathbf{B}] = [\mathbf{v}_0, \mathbf{B}]$, это совпадает с (1.4).

Векторные функции \mathbf{E} и \mathbf{B} вполне определяют электромагнитное поле в вакууме. Но в случае произвольной среды этих двух функций недостаточно, так что вообще необходимы четыре вектора поля. В дополнение к \mathbf{E} и \mathbf{B} введем векторные функции $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ и $\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, y, z, t)$, называя их *напряженностью магнитного поля* и *электрической индукцией*. При этом \mathbf{H} измеряется в *амперах на метр* [а/м], а \mathbf{D} — в *кулонах на квадратный метр* [к/м²].

Для поля в вакууме

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.5)$$

где ϵ_0 и μ_0 — постоянные коэффициенты, выбор которых определен используемой системой единиц. Они называются *электрической постоянной* и *магнитной постоянной* соответственно. При этом

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ фарад на метр } [\text{ф/м}]$$

и
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ генри на метр } [\text{гн/м}].$$

Говорят, что электромагнитное поле предстает как совокупность электрического поля (векторы \mathbf{E} , \mathbf{D}) и магнитного поля (векторы \mathbf{B} и \mathbf{H}). Физическое содержание векторных функций \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{B} и \mathbf{D} определяется основными уравнениями электромагнетизма, к рассмотрению которых мы вскоре перейдем.

Подчеркнем, что все сведения об единицах измерения (в книге используется международная система единиц СИ) приводятся пока исключительно для справок. Их смысл, а также связи с более распространенными единицами (такими, как вольт, ампер, кулон и т. д.) будут еще обсуждаться при подходящих обстоятельствах.

2. Об исследовании и описании электромагнитного поля. Механические проявления электромагнитного поля, положенные в основу определения векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} , в принципе могут служить источником информации о полях, например, в воздушной среде. Иными словами, заряженное тело в рамка с током (конечно, достаточно малые) могут применяться для экспериментального исследования электро-

магнитного поля. Помещая эти «пробные элементы» в различные точки заданной области пространства в определенные моменты времени, можно — при ряде предосторожностей — получать сведения о поле. В действительности возможности такого подхода весьма ограничены, но современная экспериментальная техника располагает более эффективными средствами исследования полей, пригодными для разных конкретных случаев. Вообще же данные о строении полей, полученные при помощи различных пробных элементов, составляют лишь небольшую часть огромного объема опытных данных об электромагнитном поле, известных науке.

Теория электромагнитного поля сложилась в результате накопления и обобщения экспериментальных фактов. В ее основе лежит *аналитическое описание*: к векторным функциям координат и времени E , H , B и D применяются операции векторного анализа; основные законы электромагнетизма формулируются в виде уравнений

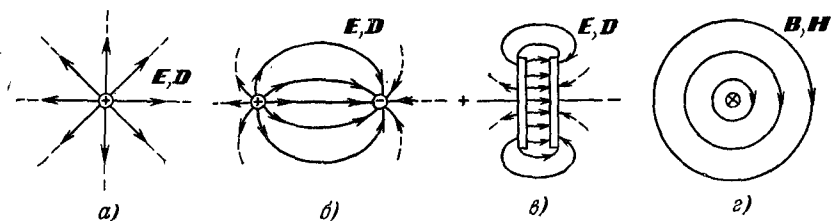


Рис. 1.2.

с частными производными. Благодаря этому решение задач об электромагнитном поле сводится к применению чисто математических средств. Исследование математических решений приводит к пониманию сложных физических процессов или даже к открытию ранее неизвестных закономерностей и явлений.

В теории электромагнетизма широко используется также *графическое описание* электромагнитного поля, облегчающее понимание сложных процессов благодаря своей наглядности. Векторные функции поля изображаются в виде картин силовых линий. Обычно линии вектора E называются *электрическими*, и линии вектора B — *магнитными* силовыми линиями. На рис. 1.2 в качестве примера представлено несколько картин силовых линий, хорошо знакомых читателю по курсу физики. Это силовые линии следующих полей в однородной среде: электрического поля одиночного положительного точечного заряда (а), двух зарядов, знаки которых противоположны (б), плоского конденсатора (в); магнитного поля провода с током (г).

В заключение параграфа введем два понятия, употребляемых наряду с векторами E , H , D и B в общих формулировках законов электромагнетизма. Это *плотность заряда* ρ и *плотность тока* j .

Плотность заряда определяется как предельное соотношение

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}, \quad (1.6)$$

где Δq — заряд, содержащийся в элементарном объеме ΔV . Подобно этому плотность тока выражается следующим образом:

$$\mathbf{j} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \mathbf{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta S}, \quad (1.7)$$

причем ΔI — ток, пересекающий площадку ΔS , а \mathbf{i}_0 — единичный вектор, направленный вдоль движения зарядов в некоторой точке ΔS . Плотность заряда измеряется в кулонах на кубический метр [$\kappa/\text{м}^3$], а плотность тока — в амперах на квадратный метр [$\text{а}/\text{м}^2$].

О физическом содержании предельного перехода в подобных соотношениях было сказано перед началом параграфа. Очевидно, плотности ρ и \mathbf{j} имеют смысл производных, если подразумевать идеализированную сплошную среду. В сущности же для реальных сред символы $\Delta V \rightarrow 0$ и $\Delta S \rightarrow 0$ сохраняют лишь условное значение: элемент объема (площади) уменьшается, однако только до такой степени, что еще не проявляется дискретность материи, т. е. макроскопические закономерности остаются в силе.

§ 2. Основные уравнения Максвелла

1. Исходная формулировка. Теперь мы можем приступить к рассмотрению фундаментальных законов электромагнетизма, которые формулируются в виде *уравнений Максвелла*. Вот два основных уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \quad (2.1)$$

и

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Как видно, это дифференциальные уравнения с частными производными относительно векторных функций координат и времени \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} , а также \mathbf{j} . Каждое из этих векторных уравнений есть краткая запись трех скалярных уравнений, которые немедленно получаются, как только выбрана определенная система координат и входящие в (2.1) или (2.2) векторы спроектированы на соответствующие орты в произвольной точке пространства M . Тогда возникают, как принято говорить, «уравнения Максвелла в координатной форме». Самым простым и распространенным является использование декартовых координат. Обращаясь при этом к формулам (П1.20), находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= \frac{\partial D_x}{\partial t} + j_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial D_y}{\partial t} + j_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= \frac{\partial D_z}{\partial t} + j_z, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= - \frac{\partial B_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= - \frac{\partial B_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= - \frac{\partial B_z}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

Читателю рекомендуется для упражнения записать также уравнения

Максвелла (2.1) и (2.2) в цилиндрических и сферических координатах, используя формулы приложения.

Бросается в глаза, что число неизвестных в (2.1) и (2.2) больше числа уравнений и, следовательно, необходимы еще иные связи между входящими функциями; к их рассмотрению мы вскоре перейдем.

Известно, что уравнения с частными производными не имеют сами по себе определенных решений, пока к ним не присоединены некоторые дополнительные условия (в частности, граничные условия). В данном случае это вполне естественно: именно благодаря такой неопределенности уравнения Максвелла способны выражать общие принципы электромагнетизма.

Было бы интересно проследить, как именно развитие физических воззрений привело, наконец, к уравнениям Максвелла, но это отнюдь не легкий труд, и он отнял бы много времени ¹⁾; позднее (§ 4) этот вопрос мы затронем лишь частично. Подчеркнем следующее. Значение уравнений Максвелла, т. е. уравнений (2.1), (2.2) и нескольких других (рассматриваемых ниже) состоит в том, что они в компактной форме заключают в себе *все основания* теории электромагнетизма. Последняя выводится из уравнений Максвелла чисто дедуктивным путем, т. е. получается как система следствий. Уравнения Максвелла, таким образом, играют роль основных постулатов теории электромагнетизма и, следовательно, не подлежат выводу (доказательству). Их оправдание — во всей совокупности опытных данных об электромагнетизме, которыми располагает современная физика.

Тот факт, что мы принимаем основные уравнения теории без детального анализа их происхождения, не должен вызывать подозрений. Подобным же образом, например, в классической механике вводятся уравнения Ньютона. Изложение теории электромагнетизма, начинающееся с уравнений Максвелла, оказывается гораздо яснее и короче, чем то, при котором сначала изучают частные электромагнитные процессы, и только под конец уравнения Максвелла дают в виде заключительного обобщения. К тому же радиоинженер должен уметь работать с уравнениями Максвелла, т. е. применять их при решении своих задач, а для этого надо к ним «привыкнуть». Что же касается физического содержания уравнений Максвелла, то охватить его можно, только изучив теорию электромагнетизма, т. е. ознакомившись со всеми главными следствиями из них. Это не означает, конечно, что сначала уравнения Максвелла должны быть совершенно непонятными. Напротив, общие черты их физического содержания нетрудно воспринять уже при самом беглом анализе.

2. Второе уравнение Максвелла. Возьмем второе уравнение Максвелла (2.2). Стоящая справа производная выражает скорость изменения *во времени* магнитной индукции \mathbf{B} , а в левой части под знаком дифференциального оператора rot содержатся только *прост-*

¹⁾ Читателю, интересующемуся данным вопросом, рекомендуется книга [3.2].

ранственные производные компонент напряженности электрического поля E . Пространственные изменения электрического поля и временные изменения поля магнитного, таким образом, взаимно связаны. Положим, что электрическое поле отсутствует, т. е. $E = 0$, и потому $\text{rot } E = 0$. В таком случае $\partial B / \partial t = 0$, а это значит, что магнитное поле может быть в отсутствие электрического только *постоянным*. Но всякое изменение магнитного поля ($\partial B / \partial t \neq 0$) неизбежно вызывает электрическое поле: левая часть (2.2) отлична от нуля.

Прежде чем делать какие-либо дальнейшие выводы, подчеркнем, что дифференциальное уравнение (2.2) дает *локальную* характеристику электромагнитного процесса: ему удовлетворяют функции E и B в некоторой *точке* пространства $M(x, y, z)$ в какой-то *момент* времени t . Однако закон электромагнетизма, лежащий в основе второго уравнения Максвелла (2.2), можно выразить и в интегральной форме,

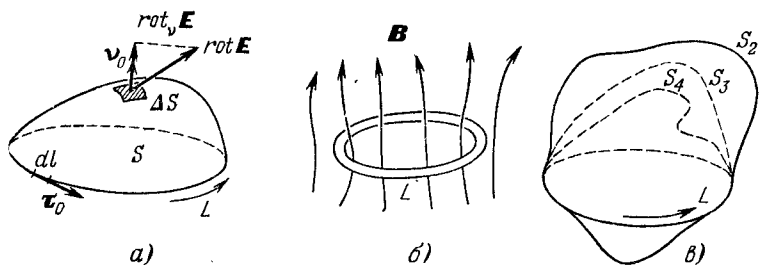


Рис. 2.1.

если в качестве непосредственного объекта взять уже не точку, а произвольную *поверхность* S (рис. 2.1, а) с контуром L . Вычисляя поток вектора через S в левой и правой частях уравнения (2.2), имеем

$$\int_S \text{rot } E \, ds = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \, ds$$

и, применяя далее слева теорему Стокса (П1.25), получаем

$$\oint_L E \, dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \, ds. \quad (2.3)$$

Интересно, что при фиксированном контуре L правая часть (2.3) никак не изменяется при любых изменениях «натянутой на него» поверхности S (рис. 2.1, в).

Оператор временного дифференцирования $\partial / \partial t$ справа в (2.3) можно вынести за знак интеграла (контур считаем неизменным). Поскольку сам интеграл зависит только от времени, то символ частной производной $\partial / \partial t$ заменяется тут же на d / dt . В результате приходим к уравнению

$$\oint_L E \, dl = - \frac{d}{dt} \int_S B \, ds, \quad (2.4)$$

известному как *второе уравнение Максвелла в интегральной форме*. Согласно (2.4) циркуляция напряженности электрического поля \mathbf{E} по произвольному контуру L равна взятой с обратным знаком производной по времени потока магнитной индукции \mathbf{B} через любую поверхность S , опирающуюся на этот контур.

Заметим, что поток вектора \mathbf{B} через S называется *магнитным потоком* и обозначается

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \, ds. \quad (2.5)$$

Он измеряется в *веберах* [вб] (теперь понятно, почему \mathbf{B} измеряется в [$\text{вб}/\text{м}^2$], как указывалось в § 1). Далее нетрудно заметить, что циркуляция вектора \mathbf{E} по L , для которой мы установим здесь обозначение

$$\mathcal{E} = \oint_L \mathbf{E} \, dl, \quad (2.6)$$

измеряется в *вольтах* [в], поскольку (см. § 1) \mathbf{E} имеет единицу измерения [$\text{в}/\text{м}$]. Переписывая второе уравнение Максвелла (2.4) в форме

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.7)$$

замечаем, что внешне оно совпадает с *законом электромагнитной индукции Фарадея*.

Совпадение это, конечно, не случайно: для тех условий, в которых может быть применен закон Фарадея, второе уравнение Максвелла (2.4) действительно в него переходит. Если взять, скажем, проводочный (рис. 2.1, б) контур в качестве L и вычислить скорость изменения магнитного потока, проходящего через какую-либо поверхность S , ограниченную этим контуром, то найденная величина, взятая с обратным знаком, по закону Фарадея должна быть равна э. д. с., наводимой в контуре. Эта э. д. с. и равна \mathcal{E} в (2.7). Понятно, что в случае произвольного (мысленно очерченного в пространстве) контура L закон Фарадея не может быть применен хотя бы потому, что столь общая ситуация далеко выходит за область опытных фактов, на основе которых он был установлен. Закон электромагнетизма, выражаемый вторым уравнением Максвелла, гораздо шире: пространственный объект здесь совершенно произволен. Однако этот закон мы все же вправе охарактеризовать как *обобщенный закон электромагнитной индукции*.

3. Первое уравнение Максвелла. Перейдем теперь к *первому уравнению Максвелла* (2.1). Смысл членов его в правой части легче понять, рассматривая их проявление отдельно. Если электромагнитный процесс неизменен во времени ($\partial/\partial t = 0$), или, как говорят, *стационарен*, то уравнение (2.1) принимает вид

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j},$$

где \mathbf{j} в данном случае — плотность *постоянного* тока. Первое уравнение Максвелла характеризует при этом связь магнитного поля и постоянного тока. Нельзя представить себе постоянный ток без

магнитного поля, поскольку $\mathbf{j} \neq 0$ обязательно при $\operatorname{rot} \mathbf{H} \neq 0$, а следовательно, при $\mathbf{H} \neq 0$.

Если же поле изменяется во времени ($\partial/\partial t \neq 0$), но ток проводимости отсутствует ($\mathbf{j} = 0$), то, согласно (2.1),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Сравнивая это уравнение с предыдущим, видим, что векторная функция $\partial \mathbf{D}/\partial t$, выражающая скорость изменения электрической индукции, играет во втором случае ту же роль, что плотность тока проводимости \mathbf{j} в первом, т. е. существование изменений во времени индукции \mathbf{D} ($\partial \mathbf{D}/\partial t \neq 0$) влечет за собой наличие магнитного поля ($\mathbf{H} \neq 0$). Величина $\partial \mathbf{D}/\partial t$ называется *плотностью тока смещения*.

Подобно тому как это делалось при рассмотрении второго уравнения Максвелла, получим *первое уравнение Максвелла в интегральной форме*. Повторяя уже знакомые действия, из (2.1) находим в конечном счете

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds + \int_S \mathbf{j} ds. \quad (2.8)$$

Интеграл

$$I = \int_S \mathbf{j} ds \quad (2.9)$$

формально есть поток вектора \mathbf{j} через поверхность S и, следовательно, выражает *ток проводимости*, пересекающий эту поверхность. Так как ток измеряется в *амперах* [а], становится ясным происхождение единицы измерения [а/м] (см. § 1) для \mathbf{H} . Аналогично

$$I^{\text{см}} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds \quad (2.10)$$

выражает *ток смещения*. *Полным током* и соответственно *плотностью полного тока* мы будем называть величины

$$I + I^{\text{см}} \quad \text{и} \quad \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

Итак, согласно первому уравнению Максвелла, в интегральной форме (2.8) циркуляция напряженности магнитного поля \mathbf{H} по произвольному контуру L равна полному току через любую поверхность S , опирающуюся на этот контур.

Из уравнения (2.8) видно, что в отсутствии магнитного поля равен нулю и полный ток ($I + I^{\text{см}} = 0$). Но появление тока ($I + I^{\text{см}} \neq 0$) обязательно порождает магнитное поле: $\mathbf{H} \neq 0$, поскольку должна быть отлична от нуля и левая часть (2.8). Согласно (2.8) роли I и $I^{\text{см}}$ при этом совершенно одинаковы: магнитное поле может возбуждаться как током проводимости, так и током смещения, т. е. изменением потока электрической индукции.

Ток смещения — одна из характеристик *переменного* электромагнитного поля. О нем мы еще будем говорить не раз и, в частности,

в § 4. Пока же рассмотрим одно из свойств полного тока, подчеркивающее роль тока смещения в ряде важных случаев.

4. Свойство полного тока. Применяя операцию div к левой и правой частям уравнения (2.1), слева в соответствии с (П1.32) имеем нуль, так что

$$\text{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.11)$$

т. е. расходимость вектора плотности полного тока равна нулю, а это, как известно, значит, что линии этого вектора *непрерывны*. Плотность тока проводимости таким свойством не обладает, и линии этого вектора могут обрываться, но тогда тут же начинаются линии вектора плотности тока смещения.

Возьмем некоторую замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V . Произведя в (2.11) интегрирование по V и применив теорему Остроградского — Гаусса (П1.24), получаем

$$\oint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{s} = 0, \quad (2.12)$$

или

$$I_0 + I_0^{\text{см}} = 0, \quad (2.12a)$$

где индекс «0» означает, что речь идет о токах, пересекающих замкнутую поверхность (положительен ток, выходящий из S). Как видно, полный ток через какую-либо замкнутую поверхность S обязательно равен нулю: выходящий ток равен входящему.

Поясним полученный результат на примере конденсатора в цепи переменного тока (рис. 2.2). Замкнутая поверхность S (она показана пунктиром) проведена так, что, проходя между пластинами конденсатора, она зазем пересекает провод. Очевидно, только в этом месте через S проходит ток проводимости I . Согласно (2.12a) он уравновешивается входящим внутрь S током смещения $I^{\text{см}}$, который практически сосредоточен внутри конденсатора. Считая, что электрическое поле внутри конденсатора однородно (вектор \mathbf{D} везде имеет одну и ту же величину), а следовательно, неизменна в пространстве и плотность тока смещения $\partial \mathbf{D} / \partial t$, имеем

$$I^{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t} S_{\text{к}} = I,$$

где $S_{\text{к}}$ — площадь пластины конденсатора. Если $I = I_m \cos \omega t$ (закон гармонических колебаний), то

$$D = \frac{I_m}{\omega S_{\text{к}}} \sin \omega t.$$

В случае воздушной среды с высокой степенью точности справед-

ливы соотношения (1.5), поэтому абсолютное значение напряженности электрического поля внутри конденсатора равно

$$E = \frac{I_m}{\omega \epsilon_0 S_{\kappa}} \sin \omega t.$$

5. Магнитное поле прямолинейного тока. Наконец, рассмотрим простой пример расчета магнитного поля на основании уравнения (2.8). Известно, что магнитные силовые линии поля в пространстве вокруг прямолинейной нити постоянного тока — это концентрические окружности (см. рис. 1.2, *з*). Как найти напряженность магнитного поля на расстоянии r от оси тока? Поскольку процесс неизменен во времени, уравнение (2.8) принимает вид

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I. \quad (2.13)$$

Выберем силовую линию, радиус которой есть r (рис. 2.3, *а*), и совместим с ней контур интегрирования L в (2.8), т. е. (2.13), а обходить

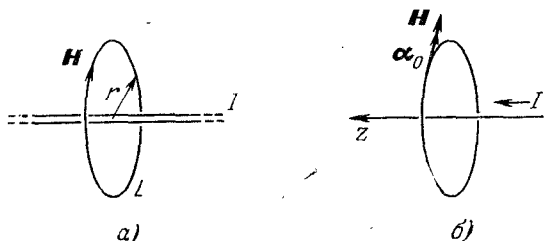


Рис. 2.3.

будем его по направлению вектора \mathbf{H} . Тогда под интегралом будет $\mathbf{H} d\mathbf{l} = H dl$, причем H имеет одно и то же значение во всех точках контура, ибо все радиальные направления физически равноправны. Поэтому

$$\int_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \int_L dl = 2\pi r H, \quad H = \frac{I}{2\pi r}.$$

Таким образом, из (2.13) сразу же получается абсолютное значение напряженности магнитного поля как функция расстояния от оси тока. Остается выяснить взаимную ориентацию тока и поля. Поскольку, согласно (2.13), при положительной циркуляции вектора \mathbf{H} положителен и ток I , то при обходе контура вдоль \mathbf{H} ток оказывается направленным по нормали к плоскости контура, связанной с направлением обхода правовинтовой системой. Отсюда следует вывод, что направления вектора \mathbf{H} и тока I также образуют правовинтовую систему. Направив в цилиндрической системе координат ток I вдоль оси z (рис. 2.3, *б*), получаем

$$\mathbf{H} = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad (2.14)$$

где α_0 — единичный вектор касательной к координатной окружности $r = \text{const}$, соответствующий угловой координате α .

§ 3. Расхождения электрической и магнитной индукции

1. Третье и четвертое уравнения Максвелла. Следующие два уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (3.1)$$

и

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.2)$$

также входят в систему уравнений Максвелла.

Согласно (3.1) расхождение электрической индукции равно плотности заряда ρ . По смыслу понятия расхождения это означает, что электрические силовые линии могут начинаться или кончаться только в точках пространства, где $\rho \neq 0$ (мы подразумеваем здесь линии вектора \mathbf{D}). Если же во всех точках некоторой области V

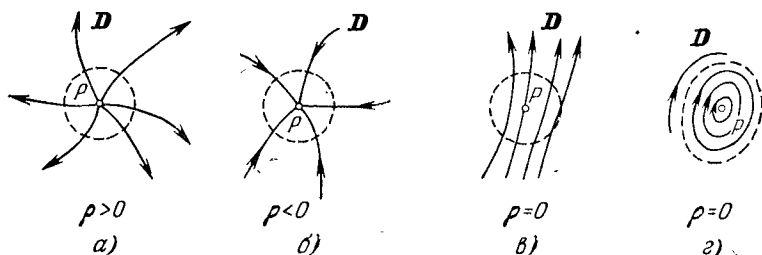


Рис. 3.1.

оказывается $\rho = 0$, то силовые линии либо пронизывают её насквозь, либо являются замкнутыми. Это показано на рис. 3.1. Поскольку при $\rho > 0$ расхождение \mathbf{D} положительно, а при $\rho < 0$ отрицательно, то «источниками» служат положительные заряды, а «стоками» — отрицательные. Это иллюстрируют также рис. 1.2, а, б.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (3.1) по некоторому объему V :

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dv = \int_V \rho dv.$$

Интеграл справа выражает полный заряд внутри V :

$$q = \int_V \rho dv. \quad (3.3)$$

Слева применим теорему Остроградского — Гаусса (П1.24), т. е. заменим объемный интеграл расхождения $\operatorname{div} \mathbf{D}$ потоком \mathbf{D} через замкнутую поверхность S , являющуюся границей V . В результате получаем интегральную формулировку закона электромагнетизма, соответствующего уравнению (3.1):

$$\oint_S \mathbf{D} ds = q. \quad (3.4)$$

Это так называемая *теорема Гаусса*, согласно которой поток электрической индукции через любую замкнутую поверхность q равен находящемуся внутри нее полному заряду q . При этом не имеет значения, как распределен заряд (возможно, внутри V имеется несколько заряженных областей). Если полный заряд внутри V равен нулю (т. е. либо заряд отсутствует, либо положительный заряд уравновешен отрицательным), то поток вектора \mathbf{D} через S равен нулю: число силовых линий, входящих в V , равно числу выходящих; в частности, быть может, вообще нет входящих и выходящих линий, как на рис. 3.1, z .

Относительно теоремы Гаусса (3.4) сделаем еще следующее замечание. В § 1 было указано, что электрическая индукция измеряется в кулонах на квадратный метр. Зная, что в кулонах измеряется заряд, и пользуясь равенством (3.4), подтверждаем эту размерность.

Обратимся далее к уравнению (3.2). Равенство нулю расхождения магнитной индукции \mathbf{B} означает, что магнитные силовые линии — линии вектора \mathbf{B} — нигде не начинаются и не кончаются: они или замкнуты (как на рис. 3.1, e), или уходят в бесконечность. Интегральная форма, соответствующая (3.2), получается так же, как и теорема Гаусса из (3.1). Это уравнение имеет вид

$$\oint_S \mathbf{B} ds = 0. \quad (3.5)$$

Поток магнитной индукции через любую замкнутую поверхность S , таким образом, всегда равен нулю.

Непрерывность магнитных силовых линий соответствует *отсутствию в природе магнитных зарядов*. Уравнения (3.2) и (3.5) в сравнении с (3.1) и соответственно (3.4) позволяют записать чисто формально для магнитного заряда:

$$\rho^m = 0 \quad \text{и} \quad q^m = 0. \quad (3.6)$$

2. Поле точечного заряда. Рассмотрим пример применения теоремы Гаусса для расчета поля. Пусть имеется точечный заряд в пустоте (или, например, в воздухе). Силовые линии поля представляют собой радиальные прямые, идущие равномерно (через одинаковые угловые расстояния), поскольку все направления физически равноправны. Желая найти электрическую индукцию на расстоянии r от заряда, опишем вокруг него сферу радиуса r (рис. 3.2). Радиальные направления образуют нормали к сферической поверхности, поэтому под интегралом (3.4) $\mathbf{D} ds = D ds$. Учитывая, что величина D на поверхности сферы неизменна, имеем

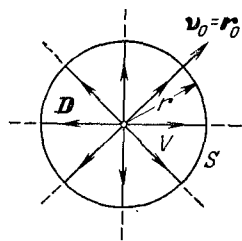


Рис. 3.2.

$$\oint_S \mathbf{D} ds = D \oint_S ds = 4\pi r^2 D, \quad D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Перепишем этот результат в векторной форме, заменив также вектор \mathbf{D} через \mathbf{E} при помощи одного из соотношений (1.5):

$$\mathbf{E} = \mathbf{r}_0 \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.7)$$

§ 4. Дальнейшее обсуждение уравнений Максвелла

1. О строении электромагнитного поля. Познакомившись со свойствами электромагнитного поля, которые отражают уравнения (3.1) и (3.2), мы сможем теперь расширить круг представлений, связанных с основными уравнениями Максвелла (2.1) и (2.2). В этом параграфе будут рассмотрены также взаимосвязи всех четырех уравнений.

Сделаем сначала некоторые заключения о строении электромагнитных полей. Возвращаясь к примеру с прямолинейным постоянным током из § 2 (п. 5), напомним, что структура рассчитываемого

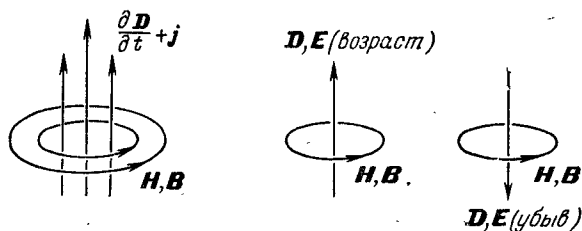


Рис. 4.1.

магнитного поля, изображаемая семейством концентрических силовых линий, считалась там заранее известной. Однако на основании выводов § 3 ее нетрудно было бы предугадать. Действительно, замкнутые силовые линии вектора \mathbf{B} , отвечающие осевой симметрии системы, могут быть только концентрическими окружностями; и то же самое ввиду (1.5) можно сказать о линиях вектора \mathbf{H} .

Не выходя за пределы применимости соотношений (1.5), пойдём дальше¹⁾. Поскольку магнитное поле может в равной степени возбуждаться как током проводимости, так и током смещения, то очевидно, что магнитные силовые линии в виде концентрических окружностей свойственны не только осевому току проводимости, но и вообще любому осесимметричному распределению полного тока. Если имеется такой «сгусток» полного тока (а в частности, только тока проводимости или только тока смещения), то его окружает магнитное поле, описываемое концентрическими силовыми линиями, причем полный ток и поле образуют *правовинтовую* систему (рис. 4.1). Положим, что $\mathbf{j} = 0$, но есть изменяющееся во времени электриче-

¹⁾ Будет использован тот факт, что векторы \mathbf{B} и \mathbf{H} , а также \mathbf{D} и \mathbf{E} в случае вакуума в соответствии с (1.5) параллельны. Однако позднее (§ 5) мы увидим, что коллинеарность имеет место для всех *изотропных* сред.

ское поле. Тогда при наличии осевой симметрии мы должны обнаружить магнитное поле данного вида; направления векторов \mathbf{D} (или \mathbf{E}) и \mathbf{H} (или \mathbf{B}) связаны правовинтовой системой, если \mathbf{D} возрастает, и левовинтовой системой, если \mathbf{D} убывает: в первом случае векторы \mathbf{D} и $\partial\mathbf{D}/\partial t$ направлены одинаково, а во втором — противоположно.

Пусть в некоторой области вектор \mathbf{H} имеет неизменное направление. Введем декартову систему координат так, чтобы оно совпадало с ее осью z ; тогда $\mathbf{H} = z_0 \hat{H}$. На основании (П1.20) $\text{rot } \mathbf{H} = = x_0 \partial H/\partial y - y_0 \partial H/\partial x$, и следовательно, векторы \mathbf{H} и $\text{rot } \mathbf{H}$ в данном случае перпендикулярны, а потому взаимно перпендикулярны векторы напряженности магнитного поля \mathbf{H} и плотности полного тока $\partial\mathbf{D}/\partial t + \mathbf{j}$.

Далее вместо электрического тока будем рассматривать магнитный поток. При осевой симметрии изменяющегося во времени маг-

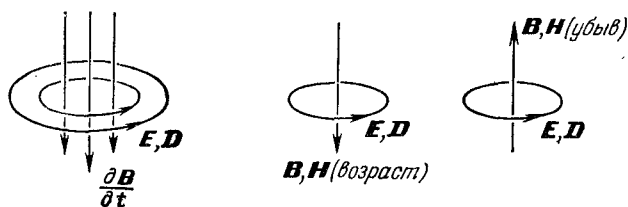


Рис. 4.2.

нитного потока должна возникнуть ситуация, аналогичная предыдущему: создаваемое им электрическое поле будет описываться семейством concentрических силовых линий. Это видно прямо из формальной аналогии уравнений (2.4) и (2.8), заключающейся в том, что они переходят друг в друга при замене $\mathbf{H} \rightleftharpoons \mathbf{E}$ и $\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds + \int_S \mathbf{j} ds \rightleftharpoons -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds$. Итак можно построить картину поля (рис. 4.2), подобную уже известной (рис. 4.1); однако электрическое поле и магнитный поток образуют левовинтовую систему (знак минус перед выражением потока означает, что его направление надо обернуть). Отметим, что направления векторов \mathbf{B} (или \mathbf{H}) и \mathbf{E} (или \mathbf{D}) при возрастании \mathbf{B} связаны левовинтовой системой, а при убывании — правовинтовой.

Выбрав область, в которой вектор \mathbf{E} не меняет направления, легко проверить, что векторы \mathbf{E} и $\partial\mathbf{B}/\partial t$ взаимно перпендикулярны.

2. Сохранение заряда и ток смещения. Отметим еще один момент, касающийся роли тока смещения и исторического происхождения этого понятия. Существует закон сохранения заряда, согласно которому заряд q не уничтожается и не создается «из ничего». Поэтому убывание заряда в некоторой области можно объяснить только его вытеканием наружу, а возрастание — притоком извне. Пусть I^0 — ток проводимости через полную (замкнутую) границу S области V ,

полный заряд которой есть q . Тогда математическая формулировка закона сохранения заряда будет иметь вид

$$I_0 = -\frac{dq}{dt}, \quad (4.1)$$

или — с привлечением интегральных представлений тока и заряда—

$$\oint_S \mathbf{j} ds = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv \quad (4.1a)$$

(ср. формулы (2.9) и (3.3)).

Получим дифференциальную формулировку закона сохранения заряда. Для этого преобразуем (4.1a) слева при помощи теоремы Остроградского — Гаусса (П1.24), а справа перенесем дифференцирование под знак интеграла; объединяя затем оба члена под одним знаком объемного интеграла, получаем

$$\int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0,$$

причем область V произвольна. Отсюда следует дифференциальная формулировка закона сохранения заряда

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (4.2)$$

известная также под названием «уравнения непрерывности».

Теперь можно перейти к выяснению роли тока смещения в первом уравнении Максвелла. В случае постоянного тока его дифференциальная форма есть

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (4.3)$$

а интегральная имеет вид (2.13). Записанное уравнение выражает связь магнитного поля и постоянного тока, изученную еще до того, как Максвелл сформулировал свои уравнения ¹⁾. Заслужено является, в частности, установление того факта, что уравнение (4.3) не выражает универсального закона электромагнетизма, поскольку оно в общем случае (для переменных процессов) противоречит закону сохранения заряда. Действительно, образуя в (4.3) расходимость векторов и учитывая тождество (П1.32), имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

тогда как на основании (4.2) справа должно быть $-\partial \rho / \partial t$.

Заметив это, Максвелл ввел поправку в (4.3) в виде $\partial \mathbf{D} / \partial t$, чтобы привести уравнение в соответствие с (4.2). Так возникло первое уравнение Максвелла, включающее плотность тока смещения.

¹⁾ Мы имеем в виду сущность вопроса, а не математическую форму выражения. В частности, векторная запись уравнений электромагнетизма не использовалась и самим Максвеллом, а была введена более поздними исследователями. Уравнения Максвелла первоначально писались в координатной форме.

Нетрудно проверить, что с законом сохранения заряда оно действительно согласуется. Образуя расходимости в (2.1), получаем уравнение (2.11). Если теперь поменять местами операции дифференцирования div и $\partial/\partial t$, а затем заменить $\text{div } \mathbf{D}$ через ρ согласно (3.1), то от (2.11) приходим к (4.2). Можно еще отметить, что само название «уравнение непрерывности» для (4.2) указывает на его связь с равенством (2.11), выражающим непрерывность линий полного тока.

3. Соотношение первой и второй пар уравнений Максвелла. В заключение обсудим вопрос о связи уравнений (3.1) и (3.2) с основными уравнениями Максвелла (2.1) и (2.2). Дело в том, что уравнения (3.1) и (3.2) не являются вполне независимыми. Действительно, применяя операцию div к (2.2), получаем после перестановки местами операций div и $\partial/\partial t$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4.4)$$

Но это означает, что функция $\text{div } \mathbf{B}$ не зависит от времени:

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{const } (t). \quad (4.5)$$

Можно сказать ¹⁾: «Если поле в прошлом отсутствовало, то эта постоянная должна быть равна нулю, и так как разумно предположить, что первоначальное возникновение поля произошло не бесконечно давно, то мы заключаем, что $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ». Приведенное рассуждение, таким образом, на самом деле, позволяет перейти от второго уравнения Максвелла (2.2) к уравнению (3.2). Однако когда уравнение (3.2) пишется как самостоятельное, то это означает лишь то, что физическое содержание приведенного рассуждения заключено в математической формулировке (3.2). Как и в иных случаях, математическое выражение лаконичнее словесного; к тому же оно незаменимо при решении задач теории электромагнетизма, когда все исходные положения должны быть выражены математически (формализованы). По этой причине мы будем включать уравнение (3.2) в систему уравнений электромагнетизма.

Если же образовать расходимости в (2.1), то получим подобно предыдущему

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} + \text{div } \mathbf{j} = 0. \quad (4.6)$$

Используя далее закон сохранения заряда в дифференциальной форме (4.2), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \mathbf{D} - \rho) = 0, \quad (4.7)$$

т. е.

$$\text{div } \mathbf{D} - \rho = \text{const } (t), \quad (4.8)$$

а отсюда при помощи прежнего рассуждения можно прийти к уравнению (3.1).

¹⁾ Цитируется весьма авторитетная монография [А.2].

Итак, уравнение (3.1) получается из первого уравнения Максвелла (2.1) не только при помощи рассуждения о поведении поля во времени, но и с привлечением закона сохранения заряда. Если же уравнения (2.1) и (3.1) рассматривать как независимые, то закон сохранения заряда возникает как их следствие.

II. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СРЕД

Связь между векторами напряженностей E , H и векторами индукций D , B в вакууме характеризуется соотношениями (1.5). Различие физического содержания E и D , B и H при этом относительно: оно определяется выбором системы единиц. В используемой нами системе единиц СИ фигурируют имеющие определенную размерность постоянные ϵ_0 и μ_0 , служащие коэффициентами пропорциональности между индукциями и напряженностями. Но, например, в гауссовой системе $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$, так что для вакуума $D = E$ и $B = H$.

Однако существенные различия индукций и напряженностей (никак, по существу, не связанные с выбором единиц измерения) характерны для различных материальных сред¹⁾. В зависимости от вида среды имеется определенная связь между векторными функциями D и E , B и H , а также j и E . В некоторых особых случаях надо учитывать и более сложные связи, например, D с E и H . В дополнение к уравнениям (2.1), (2.2), (3.1) и (3.2) появляются, таким образом, уравнения, характеризующие свойства среды, в которой происходит электромагнитный процесс.

Очевидно, что указанные связи определяются взаимодействием элементов материи и поля. К задачам микроскопической электродинамики относится изучение совокупности физических факторов, определяющих зависимости $D(E)$, $B(H)$, $j(E)$ или более сложные. Однако для реальных сред такие зависимости пока не могут быть вычислены теоретически. Поэтому при их установлении в микроскопической электродинамике полагаются на экспериментальные исследования.

В следующих параграфах мы рассмотрим типичные соотношения между индукциями и напряженностями, а также между током и полем. Затем будут получены важные соотношения, характеризующие поля на границах раздела сред.

§ 5. Поляризация и намагничивание

1. Об электромагнитных процессах в материальных средах. Внутренние электромагнитные процессы в веществе обычно настолько в среднем уравновешены, что сами по себе не создают макроскопически наблюдаемого поля. Лишь некоторые среды составляют

¹⁾ Термин «материальная среда» (в отличие от «пустоты», вакуума) имеет, конечно, узкий смысл, а не философский.

исключение, и среди них, например, ферромагнетики: всем известно действие постоянных магнитов, поля которых обусловлены именно внутренними самопроизвольными процессами. Однако под действием внешнего (постороннего) поля уравновешенность внутренних полей вещества в той или иной степени нарушается: последние связаны с элементарными частицами, которые в свою очередь подвержены действию внешнего поля. Так, например, во внешнем электрическом поле происходит некоторая деформация, а также переориентация атомов и молекул, заряды которых продолжают оставаться, как говорят, «связанными» (т. е. испытывают лишь некоторые отклонения); в результате этого появляется такое внутреннее поле, которое заметно изменяет первоначальное внешнее, налагаясь на него. Это называется *поляризацией* среды. Аналогичный процесс во внешнем магнитном поле называется *намагничиванием*. В дальнейшем еще представится возможность рассмотреть некоторые черты подобных процессов более внимательно¹⁾. Пока же важно выяснить, каким образом поляризация и намагничивание находят отражение в общих уравнениях теории электромагнетизма.

Пусть напряженность электрического поля есть \mathbf{E} , тогда электрическая индукция в вакууме будет $\epsilon_0 \mathbf{E}$, и мы здесь обозначим ее \mathbf{D}_0 . Однако в материальной среде при напряженности \mathbf{E} будет уже наблюдаться индукция \mathbf{D} . Разность

$$\mathbf{P} = \mathbf{D} - \mathbf{D}_0 \quad (\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0) \quad (5.1)$$

называют *поляризованностью* (электрической поляризацией) среды. Поляризованность, следовательно, имеет такую же размерность, как и электрическая индукция. Подобным же образом введем понятие *намагниченности* (магнитной поляризации) \mathbf{M} . А именно, если при напряженности магнитного поля \mathbf{H} индукция в вакууме есть $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$, а в данной материальной среде \mathbf{B} , то намагниченностью назовем²⁾ разность

$$\mathbf{M} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 \quad (\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}). \quad (5.2)$$

Определенная таким способом намагниченность имеет размерность магнитной индукции. Процессы поляризации и намагничивания среды обычно выступают как независимые, т. е. первый не зависит от магнитного поля, а второй — от электрического. Поэтому можно выделить следующие функциональные зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\mathbf{E}), & \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E}), \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}(\mathbf{H}), & \mathbf{B} &= \mathbf{B}(\mathbf{H}). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

¹⁾ В §§ 18 и 80, п. 4 будет рассмотрена простая модель процесса поляризации. Вообще же физические процессы поляризации и намагничивания в разных средах сложны и многообразны; они описываются в курсах электродинамики сплошных сред; см., например, [Д.1—3].

²⁾ Ради единообразия мы отступаем здесь от традиционного определения вектора намагниченности, согласно которому $\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H}$.

Простейшее понимание этой записи состоит в том, что для данных x, y, z, t поляризация $\mathbf{P}(x, y, z, t)$ вполне определяется напряженностью $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ и т. д., иными словами, процессы поляризации и намагничивания *локальны и безынерционны*: в каждой точке среды $M(x, y, z)$ они не зависят от состояния окружающей среды, а также от «предыстории» состояния. Пока мы будем держаться такой точки зрения, полагая также, что $\mathbf{P} = 0$ при $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{M} = 0$ при $\mathbf{H} = 0$, т. е. отсутствуют самопроизвольные поляризация и намагничивание ¹⁾.

2. Восприимчивости и проницаемости сред. В большинстве случаев векторы \mathbf{P}, \mathbf{E} и \mathbf{D} , как и \mathbf{M}, \mathbf{H} и \mathbf{B} , коллинеарны, и удобно писать:

$$\mathbf{P} = \chi^e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{M} = \chi^m \mu_0 \mathbf{H}, \quad (5.5)$$

где безразмерные коэффициенты χ^e и χ^m называются *электрической восприимчивостью* и *магнитной восприимчивостью* среды соответственно. Они выражают «меру активности» среды по отношению к электромагнитному процессу. Далее, как видно, можно записать следующие соотношения между индукциями и напряженностями:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.7)$$

где в соответствии с (5.1), (5.4) и (5.2), (5.5)

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi^e) \quad \text{и} \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi^m). \quad (5.8)$$

Коэффициент ϵ называется *диэлектрической проницаемостью*, а μ — *магнитной проницаемостью* среды. Наконец, для того чтобы охарактеризовать среду в сравнении с вакуумом, вводят безразмерные *относительные* проницаемости

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi^e \quad \text{и} \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi^m \quad (5.9)$$

(электрическая постоянная ϵ_0 и магнитная постоянная μ_0 формально являются проницаемостями вакуума).

Подчеркнем теперь, что в систему основных уравнений электромагнетизма мы включим в дальнейшем уравнения (5.6) и (5.7), поскольку они в простой форме выражают связи индукций и напряженностей. Эти уравнения в высокой степени универсальны, т. е. пригодны для правильного описания свойств широкого класса сред, и пока не имеет смысла сосредоточивать внимание на ограничениях их применимости. Проницаемости ϵ и μ при этом играют в уравнениях электродинамики роль характеристик сред, которые в конкретных случаях определяются в результате *измерений*; мы впоследствии обсудим некоторые возможности таких измерений.

¹⁾ О самопроизвольных поляризации и намагничивании см. § 21, п. 4.

3. Виды сред. Характер проницаемостей ϵ и μ , которые мы пока понимаем как скалярные коэффициенты в соотношениях (5.6) и (5.7), соответствует виду среды. Очевидно, в случае среды *однородной*, т. е. обладающей одинаковыми свойствами во всех точках пространства, ϵ и μ — величины, не зависящие от координат, а для *неоднородной* среды — функции координат x, y, z (или иных). Если ϵ и μ не зависят от поля, то соотношения между индукциями и напряженностями (5.6) и (5.7) являются линейными; при этом говорят, что среда *линейна* (в смысле процессов поляризации).

Разумеется, не может быть идеально линейных сред, но практически нелинейности проявляются в большинстве случаев лишь при огромных напряженностях полей. Так, например, с электрической нелинейностью сред встречаются в случае электромагнитных полей, создаваемых мощными лазерами. Однако при довольно слабых полях нелинейность свойственна ферромагнетикам, а также сегнетоэлектрикам (магнитная и электрическая нелинейность соответственно).

Вообще уравнения (5.6) и (5.7) при не зависящих от поля ϵ и μ надо рассматривать как «линеаризованные» зависимости (5.3), т. е. полученные путем отбрасывания весьма малых нелинейных членов в соответствующих разложениях. Действительно, записав в скалярной форме одну из зависимостей (5.3), например $D = D(E)$, представим ее в виде ряда Тэйлора по степеням E :

$$D(E) = D(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i D(0)}{\partial E^i} E^i, \quad (5.10)$$

причем, поскольку отсутствует самопроизвольная поляризация, то $D(0) = 0$, и мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} D(E) &= \epsilon(E) E, \\ \epsilon(E) &= \epsilon_n + \epsilon_1 E + \epsilon_2 E^2 + \dots + \epsilon_i E^i + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

где

$$\epsilon_n = \frac{\partial D(0)}{\partial E}, \quad \epsilon_{i-1} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i D(0)}{\partial E^i}, \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (5.12)$$

Диэлектрическая проницаемость $\epsilon(E)$ может считаться не зависящей от E и равной линеаризованной проницаемости ϵ_n , если пренебрежимо мала бесконечная сумма во второй строчке (5.11), начинающаяся с $\epsilon_1 E$.

Отметим, еще одно обстоятельство. Уже говорилось, что векторы P , E и D , а также M , H и B обычно коллинеарны, и в соответствии с этим было проведено все рассмотрение (можно добавить, что — за особыми исключениями — ϵ и μ положительны, так что имеет место не только коллинеарность, но и параллельность указанных векторов). По своему смыслу соотношения (5.6) и (5.7) верны, как бы ни были направлены векторы E и H ; иными словами, свойства описываемых сред не зависят от ориентации полей (от выбранного направления). Такие среды называются *изотропными*.

4. Описание анизотропии. Однако встречаются и *анизотропные* среды, т. е. такие, свойства которых зависят от выбранного направления. Анизотропию не следует путать с неоднородностью; анизотропная среда, как и изотропная, может быть неоднородна и одномерна; в последнем случае ее свойства зависят от направления во всех точках одинаково. Анизотропны кристаллы. В радиотехнике широко используются намагниченные ферриты, анизотропные в сверхвысокочастотном электромагнитном поле. Имеются и другие практически важные случаи анизотропии сред. При анизотропии (в смысле электрической или магнитной поляризации) вместо соотношений (5.6) и (5.7) пишут такие, которые соответствуют *неколлинеарности* векторов индукций и напряженностей.

Итак, например, в случае линейной электрически анизотропной среды вместо (5.6) мы должны написать три скалярные равенства:

$$D_x = \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z,$$

$$D_y = \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z,$$

$$D_z = \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z,$$

где $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \dots, \epsilon_{zy}, \epsilon_{zz}$ — некоторые величины, не зависящие от \mathbf{E} . Нетрудно убедиться, что характеризуемая таким способом среда действительно анизотропна; ее свойства, вообще говоря, различны для направлений x, y и z . Меняя только ориентацию вектора \mathbf{E} (направляя его поочередно вдоль осей x, y и z), мы можем получать разные \mathbf{D} .

В дальнейшем для описания линейных анизотропных сред мы будем пользоваться краткой формой записи и соотношения (5.6) и (5.7) заменим следующими:

$$\mathbf{D} = \overleftrightarrow{\epsilon} \mathbf{E}, \quad (5.13)$$

$$\mathbf{B} = \overleftrightarrow{\mu} \mathbf{H}, \quad (5.14)$$

где

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \overleftrightarrow{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}$$

*тензор диэлектрической проницаемости и тензор магнитной проницаемости*¹⁾. Заметим, что (5.6) и (5.7) — это частные формы равенств (5.13) и (5.14), возникающие при $\overleftrightarrow{\epsilon} = I\epsilon$ и $\overleftrightarrow{\mu} = I\mu$ (I — единичный тензор).

Подобно (5.6) и (5.7) обобщаются при анизотропии и соотношения (5.4), (5.5): вместо χ° и χ^m появляются тензоры восприимчивостей

¹⁾ Не затрагивая понятие тензора в широком смысле, отметим, что в данном случае имеется в виду умножение матрицы на вектор. Так, в (5.13) вектор-столбец (D_x, D_y, D_z) получается путем умножения матрицы $\overleftrightarrow{\epsilon}$ на вектор-столбец (E_x, E_y, E_z) , см. Приложение 9.

$\vec{\chi}^e$ и $\vec{\chi}^m$. Легко проверить, что тензоры относительных проницаемостей $\vec{\epsilon}_r = \epsilon_0^{-1} \vec{\epsilon}$ и $\vec{\mu}_r = \mu_0^{-1} \vec{\mu}$ связаны с тензорами восприимчивости соотношениями, подобными (5.9):

$$\vec{\epsilon}_r = I + \vec{\chi}^e \quad \text{и} \quad \vec{\mu}_r = I + \vec{\chi}^m. \quad (5.15)$$

5. Некоторые справочные данные. В заключение параграфа приведем некоторые справочные данные о свойствах распространенных веществ [Л.2].

Данные в обеих таблицах указаны для температуры $t = 20^\circ \text{C}$ и нормального давления (последнее существенно для газов). В табл. 5.1 содержатся результаты измерения ϵ_r в различных переменных полях, а также в статическом поле («частота 0»). Табл. 5.2 дана

Таблица 5.1

Относительная диэлектрическая проницаемость

Вещество	Частота (гц)	ϵ_r	Вещество	Частота (гц)	ϵ_r
Воздух	$0-3 \cdot 10^{10}$	1,000536	Стекло свинцовое Стеатит Мрамор Стирол Полиэтилен Слюда Титанат бария	10^3-10^6 10^6-10^9 10^6 10^6-10^9 10^6-10^9 10^3-10^8 10^6	6,9 6 8 2,55 2,30 7 1200
Вода	0	81,10			
»	10^6	80			
»	10^9	80			
»	$3 \cdot 10^9$	78			
»	10^{10}	64			
»	$1,9 \cdot 10^{10}$	44			
»	$2,4 \cdot 10^{10}$	35			
Парафин	10^6-10^9	2,2			
Кварц плавленый	10^3-10^8	3,8			

главным образом для иллюстрации того факта, что относительная магнитная проницаемость большинства веществ близка к единице.

Таблица 5.2

Относительная магнитная проницаемость

Вещество	μ_r	Вещество	μ_r
Водород	0,99999999776	Медь	0,99999044
Кислород	1,00000191	Серебро	0,9999736
Вода	0,99999095	Алюминий	1,0000222

Приведены данные для некоторых парамагнетиков ($\mu_r > 1$) и диамагнетиков ($\mu_r < 1$). У ферромагнетиков (в частности, железа) относительная магнитная проницаемость намного больше единицы для постоянного и сравнительно медленно меняющегося поля; при

этом она связана с полем сложной зависимостью. Отметим, что титанат бария (см. табл. 5.1) относится к *сегнетоэлектрикам*, электрические свойства которых аналогичны магнитным свойствам ферромагнетиков (в таблице дана линеаризованная проницаемость). Титанат бария и мрамор изотропны, будучи поликристаллическими. Плавленый кварц — аморфное изотропное вещество; кристаллы кварца относятся к так называемым «одноосным», монокристалл кварца — анизотропная среда (§ 82, п.1), характеризующаяся тензором относительной диэлектрической проницаемости

$$\vec{\epsilon}_r = \begin{pmatrix} 4,55 & 0 & 0 \\ 0 & 4,55 & 0 \\ 0 & 0 & 4,49 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Электропроводность

1. Движение зарядов. При наличии свободных электрических зарядов в электромагнитном поле, как известно, существует ток проводимости, характеризуемый в каждой точке пространства вектором плотности \vec{j} . Начнем с того, что получим простое соотношение, связывающее плотность тока \vec{j} , плотность заряда ρ одного знака и скорость движения заряда \vec{v} . Как это показано на рис. 6.1, *а*, выделим в пространстве элементарный цилиндр, ось которого параллельна вектору \vec{j} (т. е. направлению движения заряда). Ток I , проходящий через основание цилиндра S , равен

$$I = \vec{j} \cdot \vec{v}_0 S = jS. \quad (6.1)$$

С другой стороны,

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (6.1a)$$

где Δq — заряд, проходящий через S за время Δt .

Пусть в некоторый момент времени t в объеме $V = Sl$ цилиндра, показанного на рис. 6.1, *а*, содержится заряд q . По

прошествии времени Δt он займет область, заштрихованную на рис. 6.1, *б*. При этом, как видно, заряд Δq , прошедший через основание цилиндра, располагается в объеме $\Delta V = S\Delta l$ (рис. 6.1, *б*). Учитывая, что при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta q}{\Delta V} \rightarrow \rho \quad \text{и} \quad \frac{\Delta l}{\Delta t} \rightarrow v,$$

приведем выражение (6.1a) к виду:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} S \frac{\Delta l}{\Delta t} = S\rho v. \quad (6.2)$$

Сравнивая (6.1) и (6.2), видим, что $j = \rho v$, а поскольку векторы \mathbf{j} и \mathbf{v} направлены одинаково, то

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}. \quad (6.3)$$

Отметим еще один побочный результат. По аналогии с (1.6) и (1.7) на основании (1.3) можно выразить плотность лоренцевой силы:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta V} = \frac{dq}{dV} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \rho [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$$

(ΔV — движущийся со скоростью \mathbf{v} объем, содержащий заряд Δq). Привлекая равенство (6.3), имеем

$$\mathbf{f} = \rho [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = [\mathbf{j}, \mathbf{B}]. \quad (6.4)$$

2. Ток и поле. Закон Ома. Полученный выше результат сам по себе очень прост (к аналогичному соотношению приводит анализ движения жидкости), однако к уже имеющимся векторным функциям прибавилась еще одна — скорость движения заряда \mathbf{v} . Это требует добавления к уравнениям Максвелла дополнительных уравнений, связывающих \mathbf{v} с векторами электромагнитного поля. Так в действительности и делают, например, при рассмотрении электронных потоков в вакууме, используя *уравнения движения* заряженных материальных частиц в поле.

Однако в огромном большинстве проблем макроскопической электродинамики просто полагают, что \mathbf{j} есть некоторая функция напряженности электрического поля \mathbf{E} :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{E}). \quad (6.5)$$

Если среда изотропна в смысле электропроводности, то можно ввести скалярный коэффициент σ , называемый *удельной проводимостью*, и писать

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) вместе с (5.6) и (5.7) причисляют к основным уравнениям электромагнетизма, называя их «материальными уравнениями», а также «уравнениями состояния». С формальной точки зрения удельная проводимость σ есть характеристика среды, подобная диэлектрической проницаемости ϵ или магнитной проницаемости μ . Среда называется *линейной* (в смысле электропроводности), если соотношение (6.6) линейно, т. е. σ не зависит от \mathbf{E} . Для линейной анизотропной среды, подобно тому как делалось в § 5, вместо (6.6) пишем

$$\mathbf{j} = \overset{\leftrightarrow}{\sigma} \mathbf{E}, \quad (6.7)$$

где

$$\overset{\leftrightarrow}{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

— тензор удельной проводимости.

Покажем, что уравнение (6.6), понимаемое как линейное, есть не что иное, как форма записи закона Ома, приспособленная для локального описания процесса (иногда говорят: «дифференциальная форма закона Ома»). Возьмем, как и ранее, цилиндрический объем с параллельным оси равномерно распределенным током (рис. 6.1, а). Согласно (6.6) параллельно оси цилиндра направлен и вектор E . Проинтегрируем по V обе части равенства (6.6):

$$\int_V \mathbf{j} dv = \int_V \sigma E dv.$$

Ввиду постоянства вектора \mathbf{j} внутри цилиндра

$$\int_V \mathbf{j} dv = \mathbf{j} S l = i_0 l l,$$

где i_0 — единичный вектор вдоль направления оси. Аналогично

$$\int_V \sigma E dv = \sigma E S l = i_0 \sigma S E l = i_0 \sigma S U,$$

где $U = lE$ есть не что иное, как падение напряжения на участке l . Сопоставляя полученные выражения, приходим к равенству

$$U = I \mathcal{R} \quad \left(\mathcal{R} = \frac{l}{\sigma S} \right). \quad (6.8)$$

Это хорошо известный закон Ома для участка цепи; величина $\mathcal{R} = l/\sigma S$ есть *электрическое сопротивление* выделенного цилиндра (это мог бы быть кусок проволоки). Поскольку сопротивление измеряется в *омах* [ом], то удельная проводимость имеет размерность [1/ом·м]; соответствующая единица измерения называется *сименс на метр* [сим/м].

3. Проводники и диэлектрики. Ниже в табл. 6.1 приведены значения удельной проводимости для некоторых распространенных веществ [А.2].

Таблица 6.1

Удельная проводимость

Вещество	σ (сим/м)	Вещество	σ (сим/м)
Серебро	$6,139 \cdot 10^7$	Кварц плав- ленный Парафин Слюда	$2 \cdot 10^{-17}$
Медь отожженная	$5,8005 \cdot 10^7$		$10^{-14} - 10^{-16}$
Алюминий промыш- ленный	$3,54 \cdot 10^7$		$10^{-11} - 10^{-15}$
Железо	$1,0 \cdot 10^7$	Стекло обычное Бакелит Мрамор	10^{-12}
Олово	$0,869 \cdot 10^7$		$10^{-8} - 10^{-10}$
Свинец	$0,48 \cdot 10^7$		$10^{-2} - 10^{-9}$
Ртуть	$0,1044 \cdot 10^7$		

Примечание. Все данные указаны для $t = 20^\circ \text{C}$.

В зависимости от степени электропроводности вещества делят на *проводники* и *диэлектрики* (изоляторы). Удельные проводимости типичных проводников и диэлектриков различаются на много порядков, как об этом свидетельствует табл. 6.1. Поэтому их поведение в электромагнитных полях глубоко различно. В ряде случаев реальный проводник или диэлектрик при решении электродинамической задачи с успехом заменяют идеализированными: используются понятия *идеального проводника* с неограниченной проводимостью ($\sigma \rightarrow \infty$) и *идеального диэлектрика*, лишенного проводимости ($\sigma = 0$).

Имеются, однако, среды, занимающие по электропроводности промежуточное положение (см. табл. 6.2).

Таблица 6.2

Промежуточные среды ¹⁾

Среда	ϵ_r	σ (си.м/м)
Земля сухая	3—6	$1,1 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-3}$
» влажная	10—30	$3 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-2}$
Вода дистиллированная	(см. табл. 12.1)	$2 \cdot 10^{-4}$
» пресная природная	80	$10^{-3} - 2,4 \cdot 10^{-2}$
» морская	80	1 — 4,3

¹⁾ Данные взяты из [Е.1].

Такие вещества в переменных электромагнитных полях проявляют в зависимости от условий свойства диэлектриков или проводников. Чтобы найти меру оценки свойств промежуточных сред, надо сначала выяснить сущность качественного различия между проводниками и диэлектриками.

Сравним идеальный диэлектрик с идеальным проводником. В первой среде ($\sigma = 0$) может существовать лишь ток смещения, так как первый член в выражении плотности полного тока

$$j + \frac{\partial D}{\partial t} = \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

равен нулю. Во второй среде ($\sigma \rightarrow \infty$), наоборот, существует только ток проводимости: второй член в сравнении с первым — величина бесконечно малая. Поэтому реальная среда должна быть признана близкой к идеальному диэлектрику, если в ней ток смещения значительно преобладает над током проводимости, и близкой к идеальному проводнику при значительном преобладании тока проводимости. По этому признаку и различают в электродинамике реальные проводники и диэлектрики. Но, как видно, соотношение токов проводимости и смещения зависит не только от характеристик среды σ и ϵ , а также и от скорости изменения поля.

В радиотехнике особый интерес представляют поля, гармонически колеблющиеся во времени; для них нетрудно получить простой кри-

терий принадлежности среды к группе проводников или диэлектриков. Итак, пусть напряженность электрического поля есть функция

$$E = E_m(x, y, z) \cos[\omega t + \varphi(x, y, z)],$$

что соответствует гармоническим колебаниям с круговой частотой ω . Вычисляя в произвольной точке $M(x, y, z)$ плотности токов проводимости и смещения ($j = \sigma E = \sigma E_m \cos(\omega t + \varphi)$ и $\partial D / \partial t = -\omega \epsilon E_m \sin(\omega t + \varphi)$), составим отношение их амплитуд:

$$\frac{j_m}{(\partial D / \partial t)_m} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}. \quad (6.9)$$

Это и есть мера оценки свойств среды при данной частоте. Очевидно, среда характеризуется как проводник или как диэлектрик соответственно при

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1 \text{ и } \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1. \quad (6.10)$$

Таким образом, с точки зрения электродинамики, деление сред на проводники и диэлектрики относительно, поскольку вопрос о принадлежности одному из этих классов решается в зависимости от свойств поля (в данном случае — его частоты). В том огромном диапазоне частот, которым располагает современная радиотехника, свойства сред меняются весьма значительно. Вообще говоря, нельзя считать не зависящими от частоты и характеристики сред ϵ и σ . Однако вплоть до очень высоких частот, пока колебания частиц матери

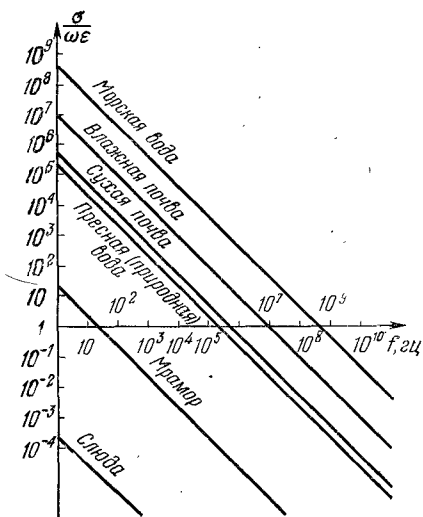


Рис. 6.2.

и еще далеки от своих резонансов, ϵ и σ могут быть практически частотно-независимыми. Тогда они выступают в оценке (6.10) как постоянные.

Поведение ряда известных сред иллюстрирует рис. 6.2. Как видно, например, сухая почва, будучи на низких частотах проводником, на сверхвысоких становится отчетливо выраженным диэлектриком. Отмеченный факт играет важную роль в процессе распространения радиоволн над земной поверхностью, на чем мы специально остановимся позднее.

4. Сторонние силы. Остается еще один вопрос, который необходимо здесь рассмотреть в связи с электропроводностью сред. До сих пор мы имели в виду ток проводимости как процесс движения заряженных частиц материи в электромагнитном поле. На положительный точечный заряд q действует сила qE (см. § 1); при движении на

пути Δl она совершает работу $qE\Delta l$, отнимая энергию поля. Если представить себе, что поле, появляясь в некоторый момент, вызывает движение зарядов, то ток проводимости предстает как процесс «вторичный», требующий затраты энергии поля. Однако регулярное (нехаотическое) движение заряженных частиц может происходить и в результате действия сил, не имеющих отношения к электромагнитному полю, так называемых *сторонних* электродвижущих сил. Если под действием сторонней силы заряд движется против поля E , то работа на пути Δl оказывается отрицательной: $-qE\Delta l < 0$, т. е. сторонние силы увеличивают энергию электромагнитного поля. Очевидно, наличие сторонних сил того или иного происхождения необходимо при преобразовании какой-либо энергии в энергию электромагнитного поля. Об энергии будет говориться подробнее уже в этой главе (§§ 9—12), а позднее (§ 28) вопрос о сторонних силах будет поставлен в несколько иной плоскости ¹⁾. Пока подчеркнем, что физическое содержание сторонних сил ничем не ограничивается. В качестве простого примера можно рассмотреть движение заряженных частиц (обладающих массой) под действием гравитационного поля; действием сторонних сил объясняются процессы в гальванических элементах, термоэлементах и т. д.

Описание сторонних сил сводится к изменению вида уравнения (6.6). При этом используется одна из двух формализаций:

$$j = \sigma (E + E^{ст}), \quad (6.11)$$

$$j = \sigma E + j^{ст}. \quad (6.11a)$$

В первом случае введена функция $E^{ст}$, называемая *напряженностью сторонних сил* (или кратко «сторонней напряженностью»), а во втором — *плотность стороннего тока* $j^{ст}$. Если подразумевается, что $j^{ст} = \sigma E^{ст}$, то обе записи эквивалентны. Однако условия их применения, как будет позднее показано, различны.

§ 7. Поля на границах раздела сред. Граничные условия

1. **Предварительные замечания.** Поверхности физических тел являются границами, разделяющими среды с разными свойствами. Наша задача будет состоять в изучении полей непосредственно вблизи таких поверхностей, при переходе через которые параметры сред ϵ , μ и σ , возможно, испытывают скачок. Проще всего считать этот скачок идеальным, т. е. рассматривать ϵ , μ и σ как разрывные функции нормали к границе. Можно было бы, конечно, допустить, что граница не является резкой, а имеется весьма тонкий переходный слой, внутри которого свойства среды изменяются плавно. Но попытка изучать такого рода слои в рамках макроскопической электродинамики была бы непоследовательной (стр. 14).

¹⁾ В § 28 будут обсуждаться условия, при которых в уравнения электродинамики входят заранее заданные токи и поля; последние прямо или косвенно отражают действие сторонних сил.

Дифференциальные уравнения Максвелла (2.1), (2.2), (3.1) и (3.2) применять в точках границы затруднительно ¹⁾. Зато их интегральные аналоги (2.4), (2.8), (3.4) и (3.5) по своему математическому характеру таковы, что они могут быть применены к областям (S и V), содержащим внутри себя границы, на которых векторы поля терпят разрыв. Эти уравнения мы и будем использовать для изучения полей на границах раздела сред.

2. Нормальные компоненты векторов поля. Исследуем сначала поведение компонент векторов поля, нормальных границе раздела сред. Пусть поверхность S (рис. 7.1) разделяет среды 1 и 2 (все величины, относящиеся к ним, будем снабжать индексами 1 и 2). На S выберем достаточно малый элемент ΔS и построим на нем элементарный цилиндр высотой Δh , находящийся в обеих средах. Под словами «достаточно малый элемент» подразумевается, что ΔS можно считать элементом плоскости, а прилежащее поле — однородным (не изменяющимся) вдоль границы в обеих средах.

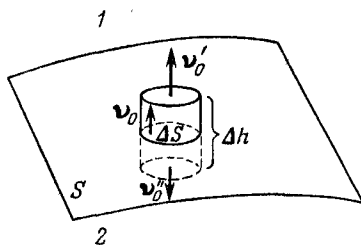


Рис. 7.1.

В общем случае поверхность раздела сред S может нести заряд. Фактически речь идет о заряде, который располагается на ней очень тонким слоем (этот случай, как будет видно в дальнейшем, представляет значительный интерес). Однако в соответствии с общей концепцией об идеализированной границе раздела сред,

т. е. об отсутствии переходного слоя, предположим, что заряд не занимает объема, а сосредоточен в самой поверхности S ; тогда величина

$$\xi = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}, \quad (7.1)$$

где Δq — заряд элемента поверхности ΔS , имеет смысл *плотности поверхностного заряда*. Заметим, что во всех точках, где имеется поверхностный заряд ($\xi \neq 0$), на основании (1.6) $\rho \rightarrow \infty$; но плотность ρ может быть представлена при помощи дельта-функции согласно (П2.7).

Чтобы изучить поведение на границе S электрической индукции D , применим к построенному цилиндрическому объему теорему Гаусса (3.4). Ввиду однородности поля поток вектора D через верхнее и нижнее основания цилиндра находится простым умножением скалярного произведения этого вектора и внешней единичной нормали (v'_0 или соответственно v_0) на площадь поперечного сечения цилиндра ΔS , а заряд внутри цилиндра в общем случае

¹⁾ Можно ввести такие обобщения дифференциальных операций rot и div , что в рассмотрение будут входить векторные функции с разрывами некоторых компонент.

равен сумме заряда в его объеме q и заряда на границе раздела сред $\xi \Delta S$. Поэтому, согласно (3.4), получаем

$$D_1 v_0' \Delta S + D_2 v_0'' \Delta S + \Phi_{\text{бок}}^{\circ} = q + \xi \Delta S,$$

где через $\Phi_{\text{бок}}^{\circ}$ обозначен поток индукции D через боковую поверхность цилиндра.

Будем неограниченно уменьшать высоту цилиндра Δh так, чтобы в пределе при $\Delta h \rightarrow 0$ его основания совпали с элементом граничной поверхности ΔS ; поскольку вместе с Δh стремятся к нулю боковая поверхность и объем цилиндра, то в предыдущем равенстве исчезнут $\Phi_{\text{бок}}^{\circ}$ и q . Сделаем замену

$$v_0' = v_0, \quad v_0'' = -v_0,$$

где v_0 — единичный вектор нормали к поверхности раздела, направленный в первую среду. Разделив далее все члены равенства на ΔS , получаем

$$(D_1 - D_2) v_0 = \xi, \quad (7.2)$$

или

$$D_{v_1} - D_{v_2} = \xi. \quad (7.2a)$$

Это и есть окончательный результат произведенных действий, показывающий, что нормальная компонента D_v вектора электрической индукции на границе раздела сред терпит разрыв, и величина скачка равна плотности поверхностного заряда ξ . Если же поверхность не заряжена, то нормальная компонента индукции непрерывна:

$$D_{v_1} = D_{v_2} \quad (\xi = 0). \quad (7.3)$$

Формулы (7.2), (7.2a) и (7.3) нетрудно переписать относительно напряженности электрического поля E , заменив при помощи (5.6) D_1 на $\epsilon_1 E_1$ и D_2 на $\epsilon_2 E_2$. При анизотропии вместо (5.6), как известно, надо пользоваться соотношением (5.13).

Перейдем к вектору магнитной индукции B . Возвращаясь к выполненному построению (рис. 7.1), используем теперь не теорему Гаусса (3.4), а подобное ей уравнение (3.5). Так как формально левые части обоих этих равенств одинаковы, все ранее произведенные действия просто повторяются, и мы имеем

$$B_1 v_0' \Delta S + B_2 v_0'' \Delta S + \Phi_{\text{бок}}^m = 0,$$

где $\Phi_{\text{бок}}^m$ означает поток магнитной индукции B через боковую поверхность цилиндра. Затем при $\Delta h \rightarrow 0$ получаем результат, подобный (7.2):

$$(B_1 - B_2) v_0 = 0, \quad (7.4)$$

или

$$B_{v_1} = B_{v_2}. \quad (7.4a)$$

Итак, нормальная компонента B_v вектора магнитной индукции на границе раздела сред непрерывна. Формулы (7.4) и (7.4a) при

помощи соотношения (5.7) (а если требуется, (5.14)) легко переписать относительно \mathbf{H} .

Наконец, отметим следующий факт. Вектор плотности полного тока $\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ подчинен соотношению (2.12) — совершенно такому же, как только что примененное равенство (3.5), содержащее вектор \mathbf{B} . Это значит, что все выполненные выкладки верны и для вектора плотности полного тока. Поэтому можно прямо записать следующее равенство:

$$\left(\mathbf{j}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}\right) \mathbf{v}_0 - \left(\mathbf{j}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t}\right) \mathbf{v}_0 = 0, \quad (7.5)$$

подобное (7.4). Оно свидетельствует, что нормальная компонента плотности полного тока на границе раздела сред непрерывна. В частности, для процесса, неизменного во времени ($\partial/\partial t = 0$), непрерывна нормальная компонента плотности тока проводимости:

$$j_{v1} = j_{v2}. \quad (7.6)$$

3. Тангенциальные компоненты векторов поля. Чтобы исследовать поведение тангенциальных границ раздела сред компонент векторов поля, произведем другое построение. Рассечем поверхность раздела сред S плоскостью P (рис. 7.2, а), которую можно

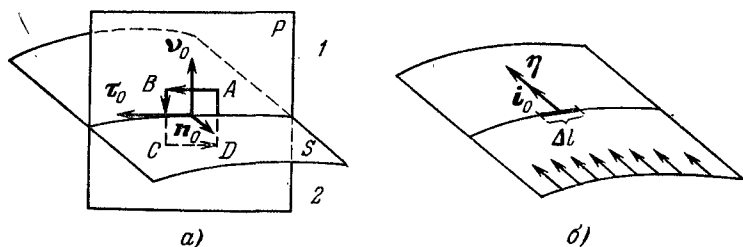


Рис. 7.2.

считать перпендикулярной к выделенному элементу границы S (этот элемент ΔS на рисунке не обозначен). В плоскости P возьмем прямоугольный контур $L = ABCD$, пересекающий границу, не выходя за пределы указанного малого элемента ее ΔS . При этом $AB = CD = \Delta l$ и $BC = AD = \Delta h$; боковая сторона контура параллельна нормали к границе \mathbf{v}_0 . Единичный вектор, совпадающий с линией пересечения плоскости P и границы S (в пределах сделанного построения) обозначим $\boldsymbol{\tau}_0$. Направление $\boldsymbol{\tau}_0$ выбрано так, чтобы выполнялось соотношение $\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0]$, где \mathbf{n}_0 — единичный вектор нормали к P , составляющий правовинтовую систему с направлением обхода контура L .

Желая исследовать поведение вектора напряженности электрического поля \mathbf{E} , применим к контуру уравнение (2.4). Ввиду малости

рассматриваемой области пространства получаем простой по форме результат

$$E_1 \tau_0 \Delta l - E_2 \tau_0 \Delta l + C_{\text{бок}}^3 = - \frac{\partial B}{\partial t} n_0 \Delta l \Delta h,$$

где (слева от знака равенства) циркуляция вектора \mathbf{E} по контуру L разбита на три части: первые два члена соответствуют сторонам контура AB и CD , а третий выражает долю боковых сторон.

Будем неограниченно уменьшать высоту контура Δh так, чтобы его стороны AB и CD совпали на границе. При этом правая часть записанного равенства и $C_{\text{бок}}^3$ исчезают, в результате чего находим

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \tau_0 = 0, \quad (7.7)$$

или

$$E_{\tau_1} = E_{\tau_2}. \quad (7.7a)$$

Заметим, что ориентация выбранного тангенциального направления (вектор τ_0) на границе раздела относительно рассматриваемого поля произвольна. Поэтому в формулах (7.7) и (7.7a) правомерно считать, что E_{τ} есть проекция вектора \mathbf{E} на S . Эта тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля на границе сред непрерывна, как о том свидетельствует полученный результат.

Конечно исключено, что проекции \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 на S не совпадают по направлению (тогда сделанный вывод был бы неверен): действительно, равенство (7.7) не выполнялось бы в этом случае при любом τ_0 . Впрочем, к вопросу можно подойти и чисто формально. Учитывая, что $\tau_0 = [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0]$, напомним вместо (7.7)

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) [\mathbf{n}_0, \mathbf{v}_0] = [\mathbf{v}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] \mathbf{n}_0 = 0,$$

а так как это равенство не должно зависеть от направления вектора \mathbf{n}_0 , указывающего ориентацию контура L на поверхности S , то получаем следующую форму записи ранее найденного условия:

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] = 0. \quad (7.7b)$$

Ее удобство в том, что в отличие от τ_0 направление вектора \mathbf{v}_0 на поверхности S во всех обычных точках является вполне определенным (исключение составляют, например, точки, принадлежащие линиям излома поверхности).

Перейдем к рассмотрению напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Применяя уравнение (2.8), для прежнего контура L (рис. 7.2, а) запишем равенство, аналогичное полученному выше при исследовании вектора \mathbf{E} :

$$H_1 \tau_0 \Delta l - H_2 \tau_0 \Delta l + C_{\text{бок}}^M = \left(\frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{j} \right) \mathbf{n}_0 \Delta l \Delta h.$$

Полагая, что плотность полного тока $\partial D / \partial t + \mathbf{j}$ является величиной ограниченной (не бесконечной), в результате предельного перехода при $\Delta h \rightarrow 0$ находим

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \tau_0 = 0 \quad (7.8)$$

или

$$H_{\tau_1} = H_{\tau_2}, \quad (7.8a)$$

а также

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = 0 \quad (7.8b)$$

(мы не приводим промежуточных выкладок, поскольку они формально не отличаются от предыдущих). Итак, при ограниченной плотности тока тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля, как и E_{τ} , непрерывна на границе раздела сред.

4. Случай поверхностного тока. Существует, однако, особый случай, на который полученный выше вывод о непрерывности тангенциальной компоненты вектора \mathbf{H} не распространяется. Предположим, что на границе раздела сред имеется *поверхностный ток*, т. е. ток, проходящий по поверхности S , не занимающей объема. Плотностью поверхностного тока является величина

$$\boldsymbol{\eta} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \mathbf{i}_0 \frac{\Delta I}{\Delta l}, \quad (7.9)$$

где (рис. 7.2, б) \mathbf{i}_0 — единичный вектор, указывающий направление движения зарядов, а Δl — пересекаемый током ΔI элемент линии, перпендикулярный вектору \mathbf{i}_0 . Представление о поверхностном токе является полезной абстракцией, которой широко пользуются в теории электромагнетизма.

Вернемся к изучению поведения вектора \mathbf{H} на границе раздела сред. Так как в точках границы $\boldsymbol{\eta} \neq 0$, то там $\mathbf{j} \rightarrow \infty$ (ср. формулы (7.9) и (1.7)), а потому в действия, произведенные в п. 3, надо внести изменения¹⁾. В правой части равенства, предшествующего формуле (7.8), теперь имеем член

$$\int_{\Delta l \Delta h} \mathbf{j} ds = \mathbf{n}_0 \Delta l \int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} \mathbf{j} dh \quad (h=0 \text{ на } S),$$

который при $\Delta h \rightarrow 0$ не исчезает. При стягивании контура L к отрезку Δl на граничной поверхности S (рис. 7.2, а) записанное выражение не обратится в нуль потому, что через этот отрезок протекает поверхностный ток. При этом

$$\mathbf{n}_0 \Delta l \int_{-\Delta h/2}^{\Delta h/2} \mathbf{j} dh = \boldsymbol{\eta} \mathbf{n}_0 \Delta l,$$

и, следовательно, вместо прежнего результата (7.8) получим

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)_{\tau_0} = \boldsymbol{\eta} \mathbf{n}_0 \quad (7.10)$$

или

$$H_{\tau_1} - H_{\tau_2} = \eta_{n_0} \quad (7.10a)$$

и далее

$$[\mathbf{v}_0, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] = \boldsymbol{\eta}. \quad (7.10b)$$

¹⁾ Плотность \mathbf{j} может быть выражена при помощи δ -функции согласно (П2.8).

Если контур L ориентирован так, что τ_0 совпадает с направлением проекции вектора $H_1 - H_2$ на ΔS , то левая часть (7.10) принимает свое максимальное значение, а вместе с ней и правая: $\eta n_0 = \eta$; отсюда нетрудно заключить, что векторы $H_1 - H_2$ и η взаимно перпендикулярны. Из (7.10б) это следует формально.

Итак, согласно полученному результату, тангенциальная компонента напряженности магнитного поля при наличии поверхностного тока на границе раздела разрывна.

5. Граничные условия. Подведем некоторые итоги. Применение уравнений Максвелла в интегральной форме позволило установить ряд соотношений, которым подчинены нормальные и тангенциальные компоненты векторов поля на границах раздела сред. Следуя традиции, мы будем называть эти соотношения *граничными условиями*. Очевидно, их совокупность сводится к системе равенств:

$$\left. \begin{aligned} (D_1 - D_2) v_0 &= \xi, \\ (B_1 - B_2) v_0 &= 0, \\ [v_0, (E_1 - E_2)] &= 0, \\ [v_0, (H_1 - H_2)] &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

(например, (7.8б) есть частная форма (7.10б) при $\eta = 0$).

Важно, что благодаря граничным условиям мы располагаем некоторой информацией о характере поля на той или иной границе раздела сред, *еще не зная* самого поля в обеих средах. Такая информация необходима для нахождения решений дифференциальных уравнений Максвелла, описывающих это поле. Иными словами, когда ставится какая-либо задача теории электромагнетизма, граничные условия на заданной поверхности рассматриваемого тела, отражающие его свойства, дают те конкретные сведения о задаче, которые требуются для получения определенного решения общих уравнений теории электромагнетизма. Следует, однако, иметь в виду, что, кроме изученных граничных условий, вытекавших из уравнений Максвелла, должны использоваться и граничные условия независимые. Оставляя пока этот вопрос в стороне, заметим лишь, что независимые граничные условия могут выражать причину существования поля.

Начиная со второй главы, мы рассмотрим немало задач с заданными граничными условиями на определенных поверхностях. Но уже сейчас можно дать несколько иллюстраций, которые покажут, какие сведения о полях заключают в себе граничные условия.

§ 8. Примеры применения граничных условий

1. Экранирующая граница. Предположим, что поверхность S , разделяющая среды 1 и 2, обладает свойством «экранирования» поля, т. е. поле может существовать в одной из них (скажем, в среде 1), не проникая в другую (среда 2). Поскольку при этом $E_2 = 0$, и поэтому $E_{\tau_2} = 0$, из условия (7.7а) непосредственно

следует:

$$E_{\tau 1} = 0, \quad (8.1)$$

т. е. поле в среде 1 лишено тангенциальной компоненты: оно, таким образом, нормально границе раздела сред (рис. 8.1, а). Обратимся сразу же к граничному условию для нормальных компонент (7.2а). Ввиду отсутствия поля в среде 2 должно быть: $D_{\nu 2} = 0$. Отсюда

$$D_1 = D_{\nu 1} = \xi, \quad (8.2)$$

а если первая среда изотропна, то $D_{\nu 1}$ можно заменить на $\epsilon_1 E_{\nu 1}$, т. е.

$$E_1 = E_{\nu 1} = \frac{\xi}{\epsilon_1}. \quad (8.3)$$

Итак, на экранирующей границе обязательно сосредоточен поверхностный заряд, плотность которого и определяет существующее

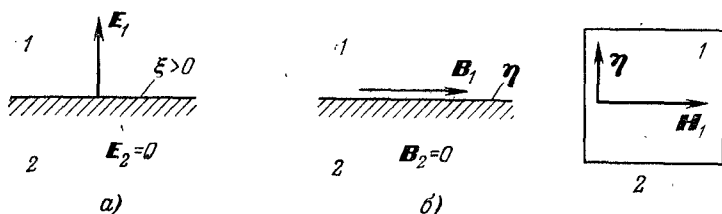


Рис. 8.1.

поле. Если бы этого заряда не было ($\xi = 0$), то, как следует из (8.2), в среде 1 отсутствовала бы нормальная компонента $D_{\nu 1}$; вместе с условием (8.1) это означает отсутствие поля на границе вообще.

Продолжая исследование экранирующей границы, возьмем условие (7.4а). Ввиду отсутствия поля в среде 2 в правой части должен быть нуль, а поэтому

$$B_{\nu 1} = 0, \quad (8.4)$$

т. е. поле в среде 1 оказывается *тангенциальным* границе (рис. 8.1, б). Отсюда и $H_{\nu 1} = 0$ (в случае изотропной среды). Предположим, что на экранирующей границе нет поверхностного тока ($\eta = 0$). Тогда из факта отсутствия поля во второй среде ($H_{\tau 2} = 0$) следует, что $H_{\tau 1} = 0$, и остается прийти к выводу, что магнитного поля на границе вообще нет. Но поле будет существовать при наличии поверхностного тока. Действительно, учитывая отсутствие поля во второй среде, из формул (7.10а) и (7.10б) получаем

$$H_1 = H_{\tau 1} = \eta \quad (8.5а)$$

и

$$[\mathbf{v}_0, \mathbf{H}_1] = \eta \quad (8.5б)$$

(в (8.5а) полагаем, что $H_{\tau 1}$ есть проекция \mathbf{H}_1 на ΔS); векторы \mathbf{H}_1

и η взаимно перпендикулярны. Для изотропной среды можно записать также

$$B_1 = B_{\tau_1} = \mu_1 \eta \quad (8.6a)$$

и

$$[v_0, B_1] = \mu_1 \eta. \quad (8.6b)$$

Итак, если при наличии экранирующей границы существует электромагнитное поле в одной из разделенных сред, то вектор D нормален границе, а вектор H тангенциален, а их граничные значения определяются поверхностным зарядом и поверхностным током.

2. Преломление электрических и магнитных силовых линий. Рассмотрим поле на границе двух изотропных диэлектриков при отсутствии поверхностного заряда, а также заряда в объеме. При

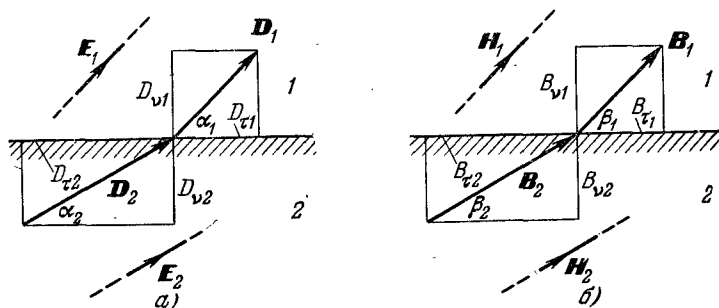


Рис. 8.2.

этом линии вектора D непрерывны (§ 3), и если они проведены вплоть до границы в одной из сред, то легко указать направление, в котором продолжается каждая линия в другой среде. Действительно, согласно (7.3) нормальные компоненты вектора D по обе стороны границы равны, а из (7.7a) получается отношение тангенциальных:

$$\frac{D_{\tau_1}}{D_{\tau_2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}. \quad (8.7)$$

Отношение нормальной компоненты к тангенциальной есть тангенс угла наклона линии вектора к границе:

$$\frac{D_{v1}}{D_{\tau_1}} = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{и} \quad \frac{D_{v2}}{D_{\tau_2}} = \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (8.8)$$

На основании (8.9) и, учитывая (7.3) и (8.7), находим

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}, \quad (8.9)$$

т. е. на границе раздела сред происходит «преломление» линий вектора D , лежащих в плоскости, которая проходит через нормаль к границе. Это показано на рис. 8.2, а, где для определенности выбрано $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ($D_{v1} = D_{v2}$, $D_{\tau_1} < D_{\tau_2}$).

Поскольку среда изотропна, то при $\epsilon > 0$ векторы E и D параллельны; таким образом, линии вектора E преломляются точно так же, как и линии вектора D (это отражено на рис. 8.2, а). К формуле (8.9) можно было прийти, рассматривая вектор E и отправляясь соответственно от формул (7.7а) и (7.3).

Линии вектора B (магнитные силовые линии) всегда непрерывны, и прежние рассуждения, очевидно, остаются справедливыми. Используя в дополнение к (7.4а) соотношение

$$\frac{B_{r1}}{B_{r2}} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}, \quad (8.10)$$

следующее из (7.8а) (при отсутствии поверхностного тока), можно построить картину преломления линий на границе раздела сред, подобную рассмотренной (рис. 8.2, б). Обозначая, как и ранее,

$$\frac{B_{v1}}{B_{r1}} = \operatorname{tg} \beta_1 \quad \text{и} \quad \frac{B_{v2}}{B_{r2}} = \operatorname{tg} \beta_2, \quad (8.11)$$

имеем формулу

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}, \quad (8.12)$$

сходную с (8.9).

При изотропии линии вектора H параллельны линиям вектора B (магнитная проницаемость положительна). Поэтому формула (8.12) характеризует также преломление линий вектора H . Ее можно было бы получить, исходя из (7.8а) и следующего из (7.4а) соотношения, содержащего напряженности.

При $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ($\mu_2 > \mu_1$) картина преломления линий индукции выглядит так, как это показано на рис. 8.3, а, а при $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ($\mu_2 < \mu_1$) — как на рис. 8.3, б. В первом случае $D_2 > D_1$ ($B_2 > B_1$)

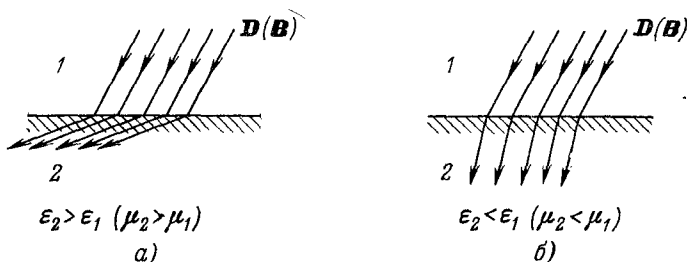


Рис. 8.3.

и линии во второй среде сгущаются, а во втором случае $D_2 < D_1$ ($B_2 < B_1$) и линии разрежаются.

Для напряженностей поля E и H построенные картины силовых линий уже несправедливы: хотя углы преломления и остаются прежними, число линий при переходе через границу раздела в данном случае не сохраняется. Действительно, перепишем, например, уравнение (3.2) относительно H :

$$\operatorname{div} \mu H = 0$$

и предположим сначала, что μ остается на границе гладкой функцией, переходя от μ_1 к μ_2 в очень тонком слое. Применяя тождество (Пл.30), получим

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu} \mathbf{H} \operatorname{grad} \mu.$$

Магнитная проницаемость постоянна и $\operatorname{grad} \mu = 0$ везде, за исключением переходного слоя, внутри которого, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{H} \neq 0$, т. е. лежат источники (стоки) линий вектора \mathbf{H} . При переходе к скачкообразному изменению μ на границе $\operatorname{grad} \mu \rightarrow \infty$ на S , что соответствует поверхностному распределению источников (стоков) линий \mathbf{H} (ср. соотношение ξ и ρ § 7, П.2).

3. Узкие щели. Наконец, рассмотрим следующий пример. В диэлектрической среде существует поле, характеризуемое вектором \mathbf{E} . Если прорезать узкую щель перпендикулярно к \mathbf{E} (рис. 8.4, а),

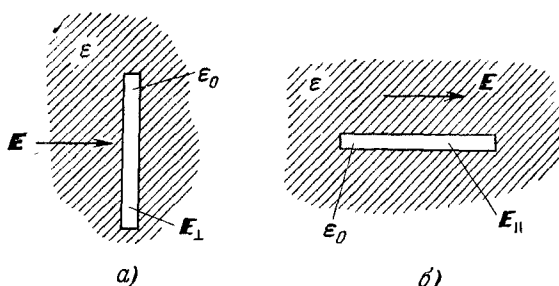


Рис. 8.4.

то напряженность электрического поля внутри нее, согласно (7.3) будет равна

$$E_{\perp} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E.$$

Если же прорезать щель параллельно \mathbf{E} , то в силу непрерывности тангенциальной компоненты напряженность внутри щели останется прежней:

$$E_{\parallel} = E.$$

Как видно,

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}}, \quad (8.13)$$

т. е. относительная диэлектрическая проницаемость среды может быть найдена на основании двух измерений E внутри щелей в среде. Разумеется, приведенные рассуждения остаются вполне строгими только для однородных полей, а следовательно, для бесконечно вытянутых щелей. Реальные щелевые полости — при ряде предосторожностей — могут быть выполнены так, что соотношение (8.13) соблюдается с высокой точностью.

В случае определения магнитной проницаемости среды вместо (8.13) имеем

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{B_{\perp}}{B_{\parallel}}. \quad (8.14)$$

III. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Говоря о физической реальности электромагнитного поля, подразумевают, что с полем связана энергия. Изменяясь, поле может отдавать свою энергию какому-либо неэлектромагнитному процессу, а также и отбирать энергию. Электромагнитные поля способны переносить энергию в пространстве.

Выделим некоторую область V ; пусть в момент t заключенная в ней энергия электромагнитного поля есть $W = W(t)$. При этом может оказаться, что

$$\frac{dW}{dt} < 0 \quad \text{или} \quad \frac{dW}{dt} > 0.$$

Первое означает, что энергия поля в V уменьшается. Убывание W может явиться результатом поглощения в среде или отдачи в полезную нагрузку, причем в обоих случаях энергия поля превращается в иные формы (например, необратимо переходит в тепло); причиной может быть и излучение в окружающее пространство. В свою очередь возрастание энергии в V ($dW/dt > 0$) может быть связано с действием источников (генерацией), регенеративными процессами в среде, либо с притоком энергии извне.

Напомним еще раз, что хотя электромагнитное поле в ряде случаев и производит непосредственное действие на органы чувств человека (свет и тепло), основную научную информацию о нем получают, изучая превращение энергии поля в иные формы. Можно считать, что начало такого рода исследований было положено наблюдением электромеханических превращений; на определенной стадии это привело к представлению о векторных функциях \mathbf{E} и \mathbf{B} .

Специфические особенности различных превращений энергии (например, электрохимических, фотоэлектрических, электромеханических и многих других, используемых в технике); конечно, не рассматриваются в курсе теории электромагнетизма. Предметом данного раздела является общее описание баланса энергии поля, ее распределения и движения. При этом мы должны будем установить связь между векторными функциями \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} и \mathbf{B} и энергетическими характеристиками электромагнитных процессов.

§ 9. Поглощение энергии и действие источников

1. Закон Джоуля—Ленца. Поскольку на точечный заряд q действует сила (см. (1.1))

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]),$$

то для векторного дифференциала пути dl дифференциал работы имеет вид

$$dA = \mathbf{F} dl = qE dl$$

(dl и \mathbf{v} параллельны, так что $[\mathbf{v}, \mathbf{B}] dl \equiv 0$: лоренцева сила работы не производит). Таким образом, мощность, определяемая как работа, отнесенная к единице времени, есть

$$P = \frac{dA}{dt} = qE \frac{dl}{dt} = qE\mathbf{v}. \quad (9.1)$$

В качестве q можно взять весьма малую область объемного распределения заряда ΔV ; при этом $q = \rho \Delta V$, и для мощности ΔP в объеме ΔV с учетом (6.3) из (9.1) получаем

$$\Delta P = \mathbf{jE} \Delta V. \quad (9.2)$$

Поэтому величина

$$\rho = \mathbf{jE} \quad (9.3)$$

выражает не что иное, как *плотность мощности* в объеме:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (9.4)$$

(ср. определение плотности заряда в § 1, п. 2). Плотность мощности ρ измеряется в *ваттах на кубический метр* [вт/м³].

В отсутствие сторонних сил происходит затрата энергии поля, в частности так называемые «тепловые потери». Отмечая этот факт, введем индекс «п» и придадим равенству (9.3) при помощи соотношения (6.6) следующие формы:

$$\rho_n = \mathbf{jE} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}. \quad (9.5)$$

Чтобы найти *мощность потерь* P_n в некотором объеме V , достаточно произвести интегрирование плотности ρ_n (9.5) по V :

$$P_n = \int_V \mathbf{jE} dv = \int_V \sigma E^2 dV = \int_V \frac{j^2}{\sigma} dv. \quad (9.6)$$

Нетрудно убедиться, что физическое содержание равенств (9.5), (9.6) согласуется с известным *законом Джоуля — Ленца*. Действительно, применяя (9.6) к цилиндрической области, изображенной на рис. 6.1, a , имеем

$$P_n = \int_V \int_S \mathbf{jE} dl ds = El \cdot jS = UI \quad (9.7)$$

(использованы обозначения из § 6, п. 2). Это формулировка закона Джоуля — Ленца для участка проводника.

2. Сторонние силы. Если в области V действуют сторонние силы, то плотность тока \mathbf{j} в произвольной ее точке можно выразить, исходя из равенств (6.11) или (6.11а). Пусть

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ct}), \quad \text{или} \quad \mathbf{j} = \begin{cases} \sigma \mathbf{E} & \text{в } V - V_{\Sigma}, \\ \mathbf{j}^{ct} & \text{в } V_{\Sigma}. \end{cases}$$

В первом случае в V задано стороннее поле (напряженность E^{ct}), а во втором — внутри V имеется «область источника» V_{Σ} , в которой задан сторонний ток (плотность тока j^{ct}). Соответственно этому равенство (9.3) представим в виде

$$p = \frac{j^2}{\sigma} - jE^{ct}, \quad \text{или} \quad p = \sigma E^2 + j^{ct}E. \quad (9.8)$$

Первое соотношение получено при подстановке в (9.3) выражения $E = \frac{j}{\sigma} - E^{ct}$, следующего из (6.11), второе же — при подстановке в (9.3) представления плотности тока j вида (6.11а). В обоих случаях имеем

$$p = p_n + p^{ct}. \quad (9.8a)$$

Здесь плотность мощности p разделена на две части, одна из которых соответствует потерям энергии, а другая — действию сторонних сил. Поскольку $\sigma > 0$, то и $p_n > 0$; впрочем, в специальных случаях рассматриваются среды с отрицательной проводимостью ($\sigma < 0$), но тогда отрицательная величина p_n характеризует не потери, а генерацию (регенерацию) энергии в среде. Величина p^{ct} отрицательна, если, как обычно, сторонние силы совершают работу «против сил поля» и происходит преобразование энергии возбуждающего их процесса в энергию электромагнитного поля.

Интегрируя (9.8) по V , находим полную мощность в рассматриваемом объеме при наличии сторонних сил:

$$\left. \begin{aligned} P &= \int_V \frac{j^2}{\sigma} dv - \int_V jE^{ct} dv, \\ \text{или} \quad P &= \int_{V-V_{\Sigma}} \sigma E^2 dv + \int_{V_{\Sigma}} j^{ct} E dv, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

т. е.

$$P = P_n + P^{ct}, \quad (9.9a)$$

где P_n — мощность потерь, определяемая законом Джоуля — Ленца в форме (9.6), и

$$P^{ct} = - \int_V jE^{ct} dv, \quad \text{или} \quad P^{ct} = \int_{V_{\Sigma}} j^{ct} E dv = \int_V j^{ct} E dv. \quad (9.10)$$

Последняя величина называется *мощностью сторонних сил* в объеме V .

Если мощность P положительна, то это значит, что область V в целом поглощает энергию электромагнитного поля. Если же в результате действия сторонних сил прирост энергии поля превышает ее расход за то же время, то мощность P отрицательна, и область V в целом действует как *источник энергии*.

§ 10. Уравнение баланса энергии

1. **Вывод уравнения баланса энергии.** Взяв первое уравнение Максвелла (2.1), умножим все его члены на \mathbf{E} и запишем:

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{jE}. \quad (10.1)$$

Поскольку \mathbf{jE} есть плотность мощности, следует ожидать, что и остальные слагаемые (величины той же размерности) имеют какой-то энергетический смысл. Необходимо, однако, привлечь второе уравнение Максвелла (2.2); после умножения его членов на \mathbf{H} имеем

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (10.2)$$

Стремясь к формальному упрощению, объединим оба равенства так, чтобы можно было применить тождество векторного анализа (Пл.31). Очевидно, для этого нужно произвести вычитание правых и левых частей (10.2) и (10.1), что окончательно дает:

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{jE}. \quad (10.3)$$

Полученное уравнение, как будет видно в дальнейшем, выражает локальную характеристику баланса энергии электромагнитного поля.

Впрочем, более наглядна интегральная форма полученного результата, возникающая после интегрирования всех слагаемых в (10.3) по некоторому объему V и применения к левой части теоремы Остроградского — Гаусса (Пл.24). Интегральная форма имеет вид

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] ds = - \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dv - \int_V \mathbf{jE} dv, \quad (10.4)$$

S есть замкнутая поверхность, ограничивающая рассматриваемую объемную область V . Нашей ближайшей целью будет истолкование смысла отдельных членов этого равенства.

Если предположить, что поляризация и намагничивание среды (§ 5) происходят без затрат или выделения энергии, то очевидно, что последний член справа в (10.4) выражает *полную мощность* P в V :

$$P = \int_V \mathbf{jE} dv, \quad (10.5)$$

и характеризует все процессы преобразования энергии внутри этой области в совокупности. В сущности мы считаем, что эти процессы обязательно связаны с током проводимости: при его отсутствии ($\mathbf{j} = 0$) никаких превращений энергии не происходит ($P = 0$). Такая физическая картина, конечно, является упрощенной, но она во многих случаях весьма близка к действительности. В то же время сделанное предположение позволяет нам легко проанализировать уравнение (10.4).

Для выяснения физического содержания интеграла

$$\int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right) dv$$

рассмотрим особый случай. Пусть внутри V к поверхности S при-
мыкает непроницаемая для поля (экранирующая) оболочка S'
(рис. 10.1). При этом интеграл, стоящий в левой части (10.4),
равен нулю, так как на поверхности S поле отсутствует. Итак,
для энергетически изолированной области V уравнение (10.4) при-
нимает следующий вид:

$$P = - \int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right) dv. \quad (10.6)$$

Но раз область V не сообщается с внешней средой, то мощность P
должна быть связана с энергией W внутри V
соотношением

$$P = - \frac{dW}{dt}, \quad (10.7)$$

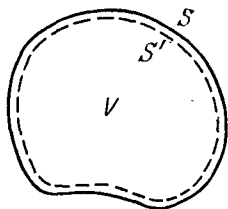


Рис. 10.1.

которое описывает действие закона сохранения
энергии: при $P > 0$ (поглощение) вну-
тренний запас энергии W в требуемой мере
расходуется, а при $P < 0$ (генерация) —
возрастает. Сравнивая (10.6) и (10.7), мы
убеждаемся, что исследуемый интеграл равен

временной производной энергии W :

$$\int_V \left(\mathbf{E} \frac{\partial D}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial B}{\partial t} \right) dv = \frac{dW}{dt}. \quad (10.8)$$

Вернемся к общему случаю (отсутствие энергетической изоля-
ции) и рассмотрим уравнение (10.4) в целом. Придавая выводу
(10.8) универсальное значение, запишем (10.4) с учетом последнего
равенства и (10.5) в следующем виде:

$$\oint_S \mathbf{\Pi} \, ds + \frac{dW}{dt} + P = 0, \quad (10.9)$$

где обозначено

$$\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (10.10)$$

Введенная величина $\mathbf{\Pi}$ известна под названием *вектора Пойн-
тинга*.

2. Поток вектора Пойнтинга и баланс энергии. Теперь нетрудно
выяснить смысл поверхностного интеграла в (10.4), перешедшего
в (10.9) в виде потока вектора Пойнтинга через граничную поверх-
ность S , и убедиться, что записанное уравнение выражает *баланс
энергии* в ограничиваемой области V .

$$\oint_S \mathbf{\Pi} ds \neq 0,$$

как видно, отличает область, сообщающуюся с окружающим пространством, от энергетически изолированной; сам этот интеграл, имеющий подобно другим членам уравнения (10.9) размерность мощности, характеризует обмен энергией между областью V и внешней средой. Если, в частности, поток вектора Пойнтинга положителен, то сумма оставшихся двух членов (10.9) отрицательна:

$$\oint_S \mathbf{\Pi} ds > 0, \quad \frac{dW}{dt} + P < 0. \quad (10.11)$$

Смысл записанных неравенств ясен. Убывание запаса энергии ($dW/dt < 0$) и процессы генерации ($P < 0$) внутри V обуславливают переход энергии через границу S во внешнюю среду, причем ввиду (10.9) поток вектора Пойнтинга равен энергии, уходящей из V за единицу времени. Разумеется, при выполнении неравенств (10.11) может действовать один из указанных факторов, который должен быть тогда преобладающим (например, $dW/dt < 0$ при $P > 0$). В простейшем варианте запас энергии внутри V остается постоянным ($dW/dt = 0$), а поглощение отсутствует ($P_{\text{п}} = 0$); при этом, согласно (10.9) и (9.9a),

$$\oint_S \mathbf{\Pi} ds = -P^{\text{сг}} \quad (P^{\text{сг}} < 0),$$

т. е. поток вектора Пойнтинга создается только сторонними силами и равен мощности расположенных внутри V источников. Можно сказать, что неравенства (10.11) соответствуют «режиму отдачи» области V . Простой пример — излучающая антенна, которая сама по себе или вместе с частью окружающего пространства может рассматриваться как область V в режиме отдачи.

Если же поток вектора Пойнтинга отрицателен, то сумма двух оставшихся в (10.9) членов положительна:

$$\oint_S \mathbf{\Pi} ds < 0, \quad \frac{dW}{dt} + P > 0. \quad (10.12)$$

Возрастание запаса энергии ($dW/dt > 0$) и процессы поглощения ($P > 0$) внутри V связаны с притоком энергии через границу S извне, а поток вектора Пойнтинга ввиду (10.9) по абсолютной величине равен энергии, приходящей за единицу времени. При выполнении неравенств (10.12) будем говорить о «режиме поглощения» области V . Пусть, в частности, запас энергии остается постоянным ($dW/dt = 0$) и сторонние силы отсутствуют ($P^{\text{сг}} = 0$), тогда, согласно (10.9) и (9.9a),

$$\oint_S \mathbf{\Pi} ds = -P_{\text{п}} \quad (P_{\text{п}} > 0),$$

и, следовательно, поток вектора Пойнтинга равен по абсолютной величине поглощаемой внутри V мощности внешних источников. Заметим, что отрицательность потока вектора Пойнтинга в (10.12) удобно истолковывать как выражение следующего факта: внешнее пространство по отношению к V играет роль «генератора».

Итак, поток вектора Пойнтинга через рассматриваемую замкнутую поверхность S всегда по абсолютной величине равен энергии,

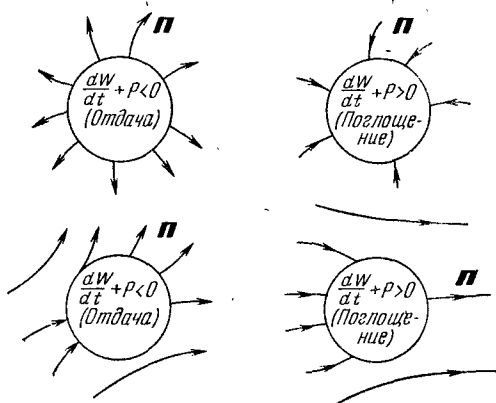


Рис. 10.2.

проходящей через нее в том или ином направлении за единицу времени, т. е. «скорости прохождения» энергии через S ; эта величина, имеющая размерность мощности, получила название *потока энергии*. Поток энергии положителен, если энергия выходит во внешнюю среду, и отрицателен, если она входит в рассматриваемую область.

Остается отметить формальное, на первый взгляд, обстоятельство: поток энергии выражается *потоком вектора*. Напомним, что в случае положительного потока вектора его линии (преимущественно или все полностью) являются *выходящими* наружу, а в случае потока отрицательного — *входящими* внутрь. Таким образом, выходящие линии вектора Пойнтинга Π свидетельствуют об отдаче энергии, а входящие — о поглощении; это поясняется на рис. 10.2. Подробнее о физическом содержании вектора Пойнтинга будем говорить ниже.

§ 11. Энергия электромагнитного поля, ее локализация и движение

1. Электрическая энергия и магнитная энергия. На основании предыдущего можно найти выражение энергии электромагнитного поля через его векторные функции. В качестве промежуточного результата уже найдена скорость изменения энергии поля внутри рассматриваемой области пространства; будем исходить теперь из полученной при этом формулы (10.8).

Напомним, что мы уже использовали некоторое предположение о поведении материальной среды, а именно, что процессы поляризации и намагничивания происходят без преобразования энергии. Позднее, при изучении периодически меняющихся во времени электромагнитных полей, это ограничение будет снято. Пока же будем еще считать (не останавливаясь здесь на связи с предыдущим), что

поляризация и намагничивание безынерционны, так что проницаемости ϵ и μ не зависят от времени. Привлекая соотношения (5.6) и (5.7), произведем под знаком интеграла (10.8) следующие простые преобразования:

$$\begin{aligned} E \frac{\partial D}{\partial t} &= E \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon E^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{ED}{2} \right), \\ H \frac{\partial B}{\partial t} &= H \mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{HB}{2} \right), \end{aligned} \quad (11.1)$$

(аналогичные действия можно произвести и при анизотропии). Таким образом, равенство (10.8) принимает вид

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dv, \quad (11.2)$$

что в свою очередь дает основание для следующего выражения энергии электромагнитного поля в области V :

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon E^2 + \mu H^2) dv = \frac{1}{2} \int_V (ED + HB) dv. \quad (11.3)$$

Возникает представление, что эта энергия распределена в пространстве с плотностью

$$\omega = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta V}, \quad (11.4)$$

равной

$$\omega = \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + \mu H^2) = \frac{1}{2} (ED + HB). \quad (11.5)$$

Интеграл (11.3) распадается на два слагаемых, одно из которых зависит только от электрического поля, а другое — только от магнитного:

$$W = W^{\text{э}} + W^{\text{м}}, \quad (11.6)$$

где

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \int_V ED dv \quad \text{и} \quad W^{\text{м}} = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dv = \frac{1}{2} \int_V HB dv.$$

Поэтому различают *электрическую энергию* $W^{\text{э}}$ и *магнитную энергию* $W^{\text{м}}$ электромагнитного поля. Соответственно этому интерпретируется и плотность энергии ω :

$$\omega = \omega^{\text{э}} + \omega^{\text{м}}, \quad (11.7)$$

где

$$\omega^{\text{э}} = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} \quad \text{и} \quad \omega^{\text{м}} = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{HB}{2}.$$

2. Локальный баланс энергии и интерпретация вектора Пойнтинга. Теперь мы можем вернуться к уравнению (10.3), чтобы выяснить его смысл. Привлекая формулы (9.3), (10.10), (11.1) и (11.5), имеем

$$\operatorname{div} \Pi + \frac{\partial \omega}{\partial t} + p = 0, \quad (11.8)$$

т. е. расходимость вектора Пойнтинга в каждой точке поля уравновешивается скоростью изменения плотности энергии и плотностью мощности. Если в исчезающе малой окрестности рассматриваемой точки имеет место «режим отдачи», то в этой точке $\frac{\partial w}{\partial t} + p < 0$ и согласно (11.8) $\operatorname{div} \mathbf{\Pi} > 0$, а в «режиме поглощения» $\frac{\partial w}{\partial t} + p > 0$, и, следовательно, $\operatorname{div} \mathbf{\Pi} < 0$. Наконец, при отсутствии количественного изменения или преобразования энергии либо при их взаимном уравновешивании $\frac{\partial w}{\partial t} + p = 0$, так что $\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = 0$. Итак, в зависимости от того, является ли данная точка «источником» или «стоком» линий вектора Пойнтинга либо не является ни тем, ни другим, можно судить о локальном (местном) характере баланса энергии.

Каков непосредственный смысл вектора $\mathbf{\Pi}$? Чтобы ответить на этот вопрос, сделаем допущение, что поток $\mathbf{\Pi}$ через *любую* (а не только замкнутую, как в § 10) поверхность S выражает поток энергии через эту поверхность, т. е. равен проходящей за единицу времени энергии. Тогда очевидно, что $\mathbf{\Pi}$ есть *плотность потока энергии*:

$$\mathbf{\Pi} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \pi_0 \frac{\Delta W}{\Delta S}. \quad (11.9)$$

Здесь ΔW — количество энергии, проходящей через элемент поверхности ΔS , отнесенное к единице времени, а π_0 — единичный вектор, указывающий направление движения энергии. Как видно, поток энергии $\int_S \mathbf{\Pi} ds$ и его плотность $\mathbf{\Pi}$ находятся в таком же соотношении, как ток проводимости $I = \int_S \mathbf{j} ds$ и плотность тока \mathbf{j} .

Эту формальную аналогию нетрудно продолжить. Так, при $p = 0$ уравнение (11.8) переходит в следующее:

$$\operatorname{div} \mathbf{\Pi} = -\frac{\partial w}{\partial t} \quad (p = 0), \quad (11.10)$$

т. е. получен аналог «уравнения непрерывности» (4.2), выражающего в дифференциальной форме закон сохранения заряда. В данном случае речь идет о сохранении энергии электромагнитного поля при отсутствии процессов преобразования.

При рассмотрении движения энергии без преобразования можно также использовать рассуждения, приведенные в § 6, п. 1, заменив \mathbf{j} на $\mathbf{\Pi}$ и ρ на w . Это, разумеется, приводит к следующему аналогу формулы (6.3):

$$\mathbf{\Pi} = w\mathbf{v}, \quad (11.11)$$

где теперь \mathbf{v} — *скорость движения энергии* электромагнитного поля. Мы видим, что знание вектора Пойнтинга и плотности энергии электромагнитного поля как функций координат позволяет найти скорость ее движения в любой точке пространства.

В заключение, однако, следует сказать, что данная общепринятая интерпретация вектора Пойнтинга не является необходимым следствием уравнений электромагнетизма и уравнения баланса энергии. Иными словами, понятие вектора Пойнтинга как плотности потока энергии электромагнитного поля содержит в себе независимую физическую концепцию. Действительно, как в дифференциальной форме (11.8), так и в интегральной (10.9) уравнение баланса энергии не определяет плотности потока энергии однозначно. Вместо $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ можно было бы внести в (11.8), как и в (10.9) функцию $\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Sigma}$, где $\mathbf{\Sigma}$ — любая векторная соленоидальная функция ($\text{div } \mathbf{\Sigma} = 0$); очевидно, в силу теоремы Остроградского — Гаусса (П1.24) $\oint_S \mathbf{\Sigma} ds = 0$. Неопределенность плотности потока энергии следует из того, что замена $\mathbf{\Pi}$ на $\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Sigma}$ не изменяет расходимости вектора и его потока через замкнутую поверхность.

§ 12. Применение полученных результатов

1. Энергетически изолированная система. Понятия электрической и магнитной энергии электромагнитного поля и их плотности, потока энергии и вектора Пойнтинга в дальнейшем будут неоднократно использоваться при описании электромагнитных процессов. Здесь мы рассмотрим только несколько простых примеров, которые помогут лучше усвоить содержание этих понятий.

Пусть имеется энергетически изолированная система, причем мощность P пропорциональна запасу ее энергии:

$$P = \alpha W. \quad (12.1)$$

Коэффициент пропорциональности α положителен при преобладании поглощения и отрицателен при достаточно эффективной генерации. Внося выражение мощности (12.1) в уравнение баланса энергии (10.9) и полагая $\mathbf{\Pi} = 0$, находим следующее дифференциальное уравнение относительно запаса энергии системы:

$$\frac{dW}{dt} + \alpha W = 0. \quad (12.2)$$

Его решение

$$W(t) = W(0) \exp(-\alpha t) = W(0) \exp\left(-\frac{P(t)}{W(t)} t\right) \quad (12.3)$$

показывает, что запас энергии является экспоненциальной функцией от времени, убывающей или возрастающей в зависимости от направления преобразования энергии.

При $\alpha = 0$ запас энергии неизменен:

$$W(t) = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon E^2 + \mu H^2) dv = \text{const} \quad (\alpha = 0). \quad (12.4)$$

Однако отсюда вовсе не следует, что не изменяются электрическая

и магнитная энергии системы. Например, важен случай гармонических колебаний, при которых абсолютные значения векторов E и H записываются как функции координат и времени:

$$E = A(x, y, z) \sin \omega t \quad \text{и} \quad H = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} B(x, y, z) \cos \omega t,$$

причем

$$\int_V A^2(x, y, z) dv = \int_V B^2(x, y, z) dv.$$

Легко убедиться, что хотя запас энергии здесь и остается постоянным, соотношение электрической и магнитной энергии непрерывно меняется. Существуют моменты, когда энергия системы является чисто электрической ($H = 0$), а также моменты, когда она оказывается чисто магнитной ($E = 0$).

2. Пример вычисления магнитной энергии. Рассмотрим тороид из магнетика, прямоугольный в радиальном сечении (рис. 12.1), внутри которого проходит бесконечный цилиндрический провод с постоянным током I .

Ввиду аксиальной симметрии системы магнитные силовые линии являются концентрическими окружностями, как и в примере из п. 5 § 2, и напряженность магнитного поля вне провода выражается формулой (2.14). Положим, что маг-

нитную проницаемость можно считать величиной постоянной, и вычислим плотность магнитной энергии:

$$\omega^M = \frac{\mu H}{2} = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \quad (12.5)$$

(как видно, это функция радиальной координаты). Сосредоточенная внутри тороида магнитная энергия теперь определяется путем интегрирования ω^M по его объему (рис. 12.1):

$$W^M = \frac{\mu I^2}{8\pi^2} h \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\alpha}{r} = \frac{\mu I^2 h}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (12.6)$$

Отметим, что полученная величина пропорциональна магнитному потоку Φ через радиальное сечение тороида

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} ds = \frac{\mu I}{2\pi} h \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (12.7)$$

который линейно связан с током I :

$$\Phi = \mathcal{L} I, \quad \mathcal{L} = \frac{\mu h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (12.8)$$

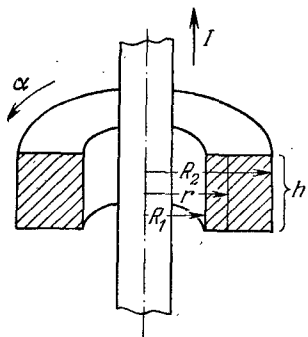


Рис. 12.1.

Поэтому можно написать:

$$W^m = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\mathcal{L} I^2}{2}. \quad (12.9)$$

Коэффициент \mathcal{L} называется *индуктивностью*, и рассмотренный пример показывает, что магнитная энергия, связанная с постоянным током, может быть выражена через индуктивность и ток по формуле (12.9). Этот вопрос будет рассмотрен во всей полноте в § 22.

3. Пример вычисления электрической энергии. Возьмем плоский конденсатор. Полагая, что постоянное во времени электрическое поле полностью заключено внутри него и однородно (рис. 12.2), вычислим электрическую энергию:

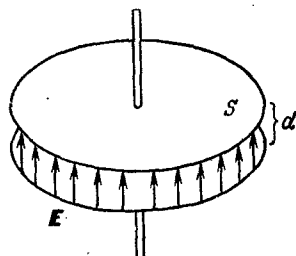


Рис. 12.2.

$$W^e = \frac{1}{2} \int \epsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S d. \quad (12.10)$$

Выделяя «напряжение» между пластинами конденсатора $U = El$ (позднее будет подобран более подходящий термин), запишем:

$$W^e = \frac{CU^2}{2}, \quad (12.11)$$

где

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (12.12)$$

называется *емкостью* конденсатора (подробнее см. далее § 17).

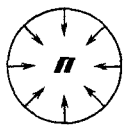
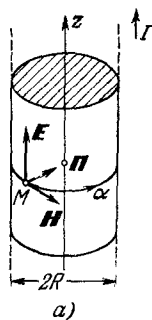


Рис. 12.3.

б)

4. Поток энергии в случае провода с постоянным током. Будем рассматривать проводник с током I как единственный проводящий цилиндр (влияние каких бы то ни было предметов и, в частности, далеких участков цепи считается пренебрежимо малым). Пользуясь формулами (6.6) и (2.14), найдем напряженности электрического и магнитного полей в какой-либо точке на поверхности проводника ($r = R$):

$$E = \frac{j}{\sigma} = z_0 \frac{I}{\pi R^2 \sigma}, \quad H = \alpha_0 \frac{I}{2\pi R}. \quad (12.13)$$

Вектор E направлен в сторону тока (z_0), а вектор H — так, что магнитные силовые линии составляют с током правовинтовую систему (α_0); учтено, что плотность тока по абсолютному значению равна $j = I/\pi R^2$.

Составляя векторное произведение E и H , найдем вектор Пойнтинга в произвольной точке на поверхности проводника:

$$\Pi = [E, H] = -r_0 \frac{I^2}{2\pi^2 R^3 \sigma}. \quad (12.14)$$

Мы видим, что вектор $\mathbf{\Pi}$ везде направлен радиально внутрь проводника (рис. 12.3, а, б). Таким образом, энергия внешнего поля «втекает» в проводник.

Поток энергии на участке проводника длиной l имеет следующее значение:

$$\int_S \mathbf{\Pi} \, ds = \frac{I^2}{2\pi^2 R^3 \sigma} \cdot 2\pi R l = I^2 \frac{l}{\pi R^2 \sigma} = I^2 \mathcal{R}, \quad (12.15)$$

где \mathcal{R} (см. также § 6, п. 2) есть сопротивление участка проводника. Это не что иное, как *мощность тепловых потерь* в проводнике P_{Π} (§ 9, п. 1): входящая в него энергия поглощается. На основании уравнения баланса энергии можно утверждать, что энергия внешнего поля проникает в проводник именно постольку, поскольку она им поглощается. При переходе к идеальному проводнику ($\sigma \rightarrow \infty$, $\mathcal{R} \rightarrow 0$) исчезает поглощение, а вместе с ним, как это видно из полученного результата, и поток энергии в проводник.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной главе были сформулированы основные исходные положения теории электромагнетизма, а также выведены наиболее простые и общие их следствия. Там, где можно было опереться на широко известные элементарные факты, приводились поясняющие примеры. Однако последовательное применение общей теории с целью изучения важнейших электромагнитных процессов является задачей дальнейших глав. Перед этим будет полезно составить и обсудить полную систему уравнений теории электромагнетизма, *систему уравнений Максвелла*. Это даст представление о различных классах электромагнитных явлений, а вместе с этим и о последующем содержании курса.

§ 13. Система уравнений Максвелла и виды электромагнитных явлений

1. Система уравнений Максвелла. Сведем уравнения (2.1), (2.2), (3.1), (3.2), а также уравнения (5.6), (5.7) и (6.6) в следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.1a)$$

и

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (13.16)$$

причем в случае действия сторонних сил вместо последнего из этих уравнений записывается (6.11) или (6.11a), т. е.

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}})$$

или

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{j}^{\text{ст}}. \quad (13.2)$$

Это система уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Входящие сюда материальные уравнения (13.16), как отмечалось в §§ 5, 6, не являются наиболее общими, но охватывают весьма значительный круг явлений. При необходимости эти уравнения могут быть заменены другими (почему и выделены здесь в особую группу). Условимся, что при анизотропии среды ϵ , μ и σ мы будем понимать как тензоры; в соответствии с (5.13), (5.14) и (6.7) при этом можно использовать обозначения ϵ , μ и σ .

Границы раздела сред будем всегда считать идеальными (со скачкообразным изменением свойств). Поэтому необходимым дополнением к системе уравнений Максвелла (13.1а), (13.16) являются граничные условия (7.11).

Система уравнений Максвелла (13.1а), (13.16) — с учетом сделанных замечаний — считается *полной* системой уравнений теории электромагнетизма. Она выражает общие принципы теории, *достаточные* для описания различных частных электромагнитных процессов. Сама по себе система уравнений Максвелла не имеет определенных решений. Определенное решение, т. е. совокупность E , H , B , D , j и ρ как конкретных функций координат и времени, существует только при наложении некоторых дополнительных условий, характеризующих ту или иную рассматриваемую задачу. Иными словами, после того как задача об исследуемом электромагнитном процессе правильно сформулирована, она становится математической задачей, включающей систему уравнений Максвелла и дополнительные условия, при которых существует решение, описывающее данный процесс.

Заменяя уравнения (13.1а) их интегральными аналогами

$$\left. \begin{aligned} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} ds + I, & \oint_S \mathbf{D} ds &= q, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds, & \oint_S \mathbf{B} ds &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.3)$$

получим систему уравнений Максвелла в интегральной форме, рассматриваемую вместе с материальными уравнениями (13.16).

2. Виды электромагнитных явлений. Поскольку система уравнений Максвелла описывает любые электромагнитные явления, то для рассмотрения какого-либо их класса надо лишь сформулировать соответствующие общие ограничения.

Самыми простыми являются неизменные во времени поля при отсутствии токов, т. е. при ограничительном условии $\partial/\partial t = 0$, $j = 0$ (обращение в нуль временных производных выражено символически). Система уравнений (13.1а), (13.16), как видно, распадается при этом на две независимые системы:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned} \right\} \quad (13.4)$$

Это так называемые *уравнения электростатики* (левый столбец) и *уравнения магнитостатики* (правый столбец). Запишем также, согласно (13.3), отвечающие им уравнения в интегральной форме:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L E dl = 0, \\ \oint_S D ds = q, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \oint_L H dl = 0, \\ \oint_S B ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Электростатическим называется, таким образом, электрическое поле при наличии неподвижных зарядов, а *магнитостатическим* — магнитное поле постоянного тока в областях, где ток отсутствует ¹⁾, а также поле постоянного магнита; следует, однако, иметь в виду, что в последнем случае (как и вообще для ферромагнетиков) материальное уравнение $B = \mu H$ должно быть заменено выражением более сложной зависимости $B = B(H)$.

Если оставить лишь требование *стационарности* поля $\partial/\partial t = 0$, то из системы уравнений Максвелла (13.1а), (13.1б) возникает следующая частная *система уравнений стационарного электромагнитного поля*:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} E = 0, \quad \operatorname{rot} H = j, \\ \operatorname{div} D = \rho, \quad \operatorname{div} B = 0, \\ D = \epsilon E, \quad B = \mu H, \\ j = \sigma E, \\ [j = \sigma(E + E^{ct})], \end{aligned} \right\} \quad (13.6)$$

а из (13.3) — уравнения

$$\left. \begin{aligned} \oint_L E dl = 0, \quad \oint_L H dl = I, \\ \oint_S D ds = q, \quad \oint_S B ds = 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Дифференциальные уравнения, описывающие электрическое поле (левый столбец), не отличаются от уравнений электростатики, но теперь они не являются независимыми. Действительно, с напряженностью E связан вектор плотности тока j , который также входит в первое уравнение из второго столбца в (13.6). Записанные уравнения характеризуют электрическое и магнитное поля при наличии постоянного тока в общем случае.

Итак, некоторым классам электромагнитных явлений соответствуют частные формы системы уравнений Максвелла. Позднее мы убедимся в этом и на других примерах. Среди переменных во времени электромагнитных процессов относительно просты *квазистационарные* — близкие к стационарным, т. е. протекающие довольно медленно. Во Введении уже отмечалось, что именно для квазистационарных процессов сохраняет справедливость теория

¹⁾ Необходимые уточнения будут сделаны в §§ 21, 22.

цепей. В § 27 мы рассмотрим те упрощающие предположения, при которых уравнения теории цепей переменного тока следуют из системы уравнений Максвелла. Особое значение имеют процессы, изменяющиеся во времени по закону гармонических колебаний. В гл. 3 будет показано, что система уравнений Максвелла в этом случае значительно упрощается благодаря применению метода комплексных амплитуд.

3. Принцип суперпозиции. Остановимся на одном важном свойстве системы уравнений Максвелла. Если среда линейна (§§ 5, 6), то эта система в целом обладает свойством линейности (стр. 583). Это значит, что для электромагнитных процессов в данном случае справедлив *принцип суперпозиции*. Он проявляется в том, что если имеется несколько решений системы (13.1а), (13.1б): $(E_1, H_1, D_1, B_1, j_1, \rho_1)$, $(E_2, H_2, D_2, B_2, j_2, \rho_2)$, $(E_3, H_3, D_3, B_3, j_3, \rho_3)$, ..., то решением является и их линейная комбинация, т. е. $(a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3 + \dots, a_1 H_1 + a_2 H_2 + a_3 H_3 + \dots, a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + \dots, a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + \dots, a_1 j_1 + a_2 j_2 + a_3 j_3 + \dots, a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2 + a_3 \rho_3 + \dots)$, где a_1, a_2, a_3, \dots — произвольные постоянные коэффициенты (в частности, равные единице). Это легко проверить путем простой подстановки.

Если решение 1 (т. е. E_1, H_1 и т. д.) имеет место при наличии сторонних сил, заданных в виде $j_1^{\text{ст}}$ или $E_1^{\text{ст}}$, иными словами, если поле 1 возбуждается известными источниками и точно так же поле 2 возбуждается своими источниками, поле 3 — своими и т. д.; то указанная выше комбинация решений выражает поле, возбуждаемое аналогичной линейной комбинацией источников (сторонние силы заданы в виде $a_1 j_1^{\text{ст}} + a_2 j_2^{\text{ст}} + a_3 j_3^{\text{ст}} + \dots$ или $a_1 E_1^{\text{ст}} + a_2 E_2^{\text{ст}} + a_3 E_3^{\text{ст}} + \dots$). Поэтому принцип суперпозиции часто приводится в следующей форме: поле, образованное несколькими источниками, можно рассматривать как сумму полей всех источников, действующих раздельно.

Подчеркнем, что принцип суперпозиции не распространяется на энергию. Если, например, электрическое поле 1 (напряженность E_1) обладает энергией $W_1^{\text{э}}$, а поле 2 — энергией $W_2^{\text{э}}$, то при одновременном существовании обоих полей энергия равна

$$W^{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon (E_1 + E_2)^2 dv = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E_1^2 dv + \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E_2^2 dv + \int_V \varepsilon E_1 E_2 dv,$$

т. е.

$$W^{\text{э}} = W_1^{\text{э}} + W_2^{\text{э}} + W_{12}^{\text{э}},$$

где дополнительный член $W_{12}^{\text{э}} = \int_V \varepsilon E_1 E_2 dv$ называется *взаимной энергией* обоих полей.

С формальной точки зрения мы имеем здесь простое следствие того факта, что энергия — *нелинейная* функция напряженности поля. Фактически же уменьшение или увеличение полной энергии поля (в зависимости от того, меньше или больше нуля W_{12}) может

быть связано лишь с соответственным изменением энергии источников.

4. Замечания. Дальнейшее содержание книги строится по законам дедукции: имея в распоряжении систему уравнений Максвелла, мы рассмотрим различные классы электромагнитных явлений, переходя от общего к частному. При этом сначала изучаются наиболее простые явления, и далее при постепенном усложнении содержания внимание переносится на процессы, непосредственно важные для радиотехники.

При такой направленности некоторые разделы теории электромагнетизма, не имеющие непосредственного отношения к радиотехнике, останутся в стороне. Мы почти не затронем микроскопической электродинамики и электродинамики движущихся сред. О последней необходимо сказать несколько слов.

Согласно принятому современной физикой *принципу относительности* все законы природы одинаковы для всех так называемых *инерциальных систем* (эти системы движутся друг относительно друга прямолинейно и равномерно). Переходя от одной инерциальной системы к другой, совершают определенные преобразования координат и времени, называемые *преобразованиями Лоренца*; на этой основе строится *специальная теория относительности Эйнштейна*. В рамках этой теории законы природы должны иметь вид уравнений, инвариантных относительно преобразований Лоренца, т. е. сохраняющих при этом свое содержание. Этим свойством, например, не обладают законы Ньютона, но оно присуще уравнениям Максвелла.

Указанное свойство уравнений Максвелла, однако, не означает, что электромагнитное поле выглядит одним и тем же в разных инерциальных системах. Подробное рассмотрение этого вопроса невозможно без привлечения специальной теории относительности, но сущность вещей нетрудно понять при помощи очень простых рассуждений. Пусть в некоторой системе существует статическое магнитное поле, и магнитная индукция равна \mathbf{B} , а электрическое поле отсутствует ($\mathbf{E} = 0$). Но наблюдатель, движущийся относительно данной системы со скоростью \mathbf{v} , обнаружит электрическое поле, поскольку на используемый им пробный заряд q будет действовать сила $\mathbf{F} = q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ (§ 1, п. 1). Действительно, так как в системе наблюдателя заряд неподвижен, сила \mathbf{F} будет приписана действию электрического поля с напряженностью $\mathbf{E}' = \mathbf{F}/q$.

В электродинамике движущихся объектов векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{B} имеют лишь относительный смысл.

СТАТИЧЕСКИЕ, СТАЦИОНАРНЫЕ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА И МАГНИТОСТАТИКА

По традиции явлениям электростатики уделяют значительное внимание в курсах физики. В основу изложения при этом часто кладется закон Кулона. Для нас, однако, электростатика представляет интерес не только сама по себе, но больше как область проявления общих законов электромагнетизма. Поэтому мы будем исходить из системы уравнений Максвелла, приводящей к *уравнениям электростатики* в качестве частной их формы (см. § 13, п. 2). Что касается закона Кулона, то он будет получен как следствие этих уравнений.

Электростатику можно рассматривать как своего рода «подготовительный раздел» теории электромагнетизма, при изучении которого осваиваются операции векторного анализа и простейшие понятия. Впоследствии этот материал найдет применение при формировании более сложных понятий. Так, например, существует преемственность между представлениями об электростатическом диполе (§ 15) и диполе Герца, элементарном излучателе (гл. 4). Электростатика дает возможность построить несложную модель, поясняющую явление поляризации среды, о котором ранее (§ 5) говорилось лишь в общих чертах. Наконец, в электростатике мы находим источники некоторых понятий, широко употребляемых в технике (потенциал, емкость и др.).

Строго говоря, настоящим явлениям электростатики нет места в природе. Все реальные среды обладают некоторой электропроводностью, и условие $\mathbf{j} = 0$ является идеализированным; так, например, заряженный предмет, находящийся в воздухе, постепенно теряет свой заряд вследствие «утечки». Далее, когда два заряженных тела притягиваются или отталкиваются, их движение есть не что иное, как ток, которому обязательно сопутствует магнитное поле (см. § 2, п. 3). Вообще в эксперименте о реальных «электростатических» полях судят по динамическим процессам, чуждым идеальной электростатике. Идеальное электростатическое поле не обменивается энергией с чем бы то ни было и вообще не могло бы быть замечено, так как в любой его точке вектор Пойнтинга (см. §§ 10, 11) равен нулю. Все сказанное, правда, не мешает электростатике быть полезной абстракцией. Но важно помнить, что когда в электростатике говорят о движении зарядов, то подразуме-

мевают столь медленное движение, что при этом можно пренебречь магнитным полем.

В сферу действия *уравнений магнитостатики* (см. § 13, п. 2) входят неизменные во времени магнитные поля при отсутствии токов. Позднее (§§ 21, 22) мы обсудим отвечающую им область явлений.

§ 14. Основные уравнения электростатики. Потенциал

1. Уравнения Максвелла и понятие потенциала. Итак, в качестве наиболее общих уравнений электростатики мы возьмем следующую частную форму уравнений Максвелла (см. § 13, п. 2):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (14.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (14.1б)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (14.1в)$$

Запишем также соответствующие двум первым уравнениям интегральные соотношения:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad (14.2a)$$

$$\oint_S \mathbf{D} ds = q. \quad (14.2б)$$

Согласно (14.1a) электростатическое поле является *потенциальным*. Действительно, достаточно сопоставить (14.1a) с тождеством векторного анализа (П1.33), чтобы написать

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (14.3)$$

Позднее будет сказано, почему в правой части выбран знак минус (т. е. в (П1.33) взято $\psi = -\varphi$). Скалярная функция φ называется *электростатическим потенциалом*. Тот факт, что в случае электростатики решение уравнений Максвелла \mathbf{E} выражается в виде градиента некоторого скаляра $-\varphi$, говорит об известной простоте поля. Действительно, все три (в общем случае) компоненты вектора \mathbf{E} вполне определяются одной скалярной функцией φ .

2. Свойства электростатического потенциала. Выясним сначала физическое содержание понятия электростатического потенциала φ . С этой целью представим себе, что в электростатическом поле перемещается заряд q (выше говорилось о том, в какой мере такое представление условно). Известно, что на заряд будет действовать сила $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ (§ 1, п. 1), а следовательно, работа, совершаемая при его перемещении по некоторому пути l от точки M_1 до точки M_2 , выражается следующим интегралом по данному пути:

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{F} d\mathbf{l} = q \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -q \int_{M_1}^{M_2} \operatorname{grad} \varphi d\mathbf{l}. \quad (14.4)$$

Полученный интеграл хорошо известен в векторном анализе; представляя подынтегральное выражение в декартовых координатах ($dl = x_0 dx + y_0 dy + z_0 dz$ и $\text{grad } \varphi = x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z}$), имеем

$$\int_{M_1}^{M_2} \text{grad } \varphi dl = \int_{M_1}^{M_2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) = \int_{M_1}^{M_2} d\varphi,$$

так как раскрытое скалярное произведение оказалось полным дифференциалом функции φ . Поэтому

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (14.5)$$

где φ_1 и φ_2 — электростатические потенциалы (значения φ) в точках M_1 и M_2 . Как видно, если взять единичный положительный заряд ($q = +1$), то работа будет равна просто разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Работа положительна, т. е. энергия поля расходуется при перемещении положительного заряда от большего потенциала к меньшему ($\varphi_1 > \varphi_2$). Это толкование и придает смысл сделанному ранее выбору знака в правой части равенства (14.3).

Сопоставляя (14.4) и (14.5), получаем весьма важное в электростатике соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{M_1}^{M_2} E dl, \quad (14.6)$$

обратное по отношению к (14.3). В частности, когда путь замкнут (точки M_1 и M_2 совпадают), (14.6) должно перейти в (14.2а), а это произойдет, только если окажется, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Иными словами, функция φ в указанном смысле *однозначна*¹⁾. Согласно (14.5) работа, совершаемая при перемещении заряда, определяется значениями φ в начальной и конечной точках пути. Ввиду однозначности φ отсюда следует, что она не зависит от вида пути и будет одной и той же для путей $M_1 m M_2$ и $M_1 n M_2$ на рис. 14.1. К такому выводу можно прийти, рассматривая один лишь контурный интеграл (14.2а); поскольку он равен нулю, работа при прохождении замкнутого пути и, в частности, пути $M_1 m M_2 n M_1$, не совершается.

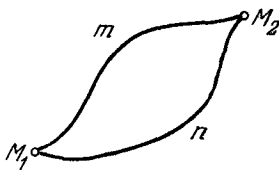


Рис. 14.1.

Электростатический потенциал φ , как и вообще потенциал в векторном анализе, определен с точностью до постоянного слагаемого: формулы (14.3) и (14.6) сохраняют справедливость при замене φ на $\varphi + C$. В электростатике обычно принимают, что

¹⁾ Таким свойством не обладает, например, азимутальная координата α , изменяющая свое значение на 2π , когда текущая точка возвращается в исходное положение после обхода начала координат по замкнутому контуру.

потенциал бесконечно удаленной точки равен нулю. Тогда на основании (14.6) потенциал φ в некоторой точке M есть

$$\varphi = \int_M^{\infty} E dl, \quad (14.7)$$

т. е. оказывается равным работе, совершаемой при удалении единичного положительного точечного заряда из этой точки в бесконечность. Впрочем, в некоторых случаях — особенно в технике — бывает удобно полагать равным нулю потенциал Земли или какого-либо проводящего экрана (впоследствии мы убедимся, что потенциал постоянен во всех точках проводника).

3. Уравнения потенциала. В силу потенциальности электростатического поля для нахождения его напряженности E (как уже отмечалось в п. 1) вполне достаточно знать одну скалярную функцию φ ; после определения потенциала напряженность E вычисляется по формуле (14.3). Какому же уравнению удовлетворяет φ ?

Заменяя D через εE в (14.16) и далее выражая E через потенциал при помощи (14.3), получаем

$$\operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = -\rho. \quad (14.8)$$

Это и есть требуемое уравнение.

Чаще используется частная форма уравнения (14.8), справедливая при постоянной (не зависящей от координат) диэлектрической проницаемости, т. е. для однородных сред:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (14.9)$$

Общий вид решения этого уравнения Пуассона для неограниченной области мы можем записать сразу же на основании (П5.1), (П5.5):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \quad (14.10)$$

Для тех областей, в которых заряд отсутствует ($\rho = 0$), (14.9) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (14.11)$$

Задачи электростатики для однородных сред, а также сред, состоящих из однородных областей (подразумевается также изотропия), всегда можно рассматривать как задачи для уравнения Пуассона (14.9) и уравнения Лапласа (14.11).

В связи со сказанным надо знать поведение электростатического потенциала на границах разнородных сред. Взяв граничные условия (7.7а) для тангенциальных компонент вектора E и (7.2а) для нормальных компонент вектора D , ввиду (14.3) получим

$$(\operatorname{grad} \varphi)_{\tau_1} = (\operatorname{grad} \varphi)_{\tau_2}, \quad -\varepsilon_1 (\operatorname{grad} \varphi)_{\nu_1} + \varepsilon_2 (\operatorname{grad} \varphi)_{\nu_2} = \xi.$$

Согласно (П1.6)

$$(\text{grad } \varphi)_\tau = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \quad \text{и} \quad (\text{grad } \varphi)_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu},$$

где τ и ν — тангенциальная и нормальная оси местной декартовой системы координат на границе, выбранные так, что $\mathbf{E} = \tau_0 \mathbf{E}_\tau + \nu_0 \mathbf{E}_\nu$. Первая строчка граничных условий означает, таким образом, непрерывность тангенциальной производной потенциала, что имеет место при непрерывности *самого потенциала*. Окончательно имеем следующие граничные условия для φ :

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} + \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} = \xi. \quad (14.12)$$

Отметим, что требование непрерывности $\partial \varphi / \partial \tau$ было бы выполнено и при граничном условии $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const}$; однако при этом нормальная компонента поля на границе обращалась бы в бесконечность.

4. Векторные уравнения второго порядка. Можно получить также векторные уравнения Пуассона и Лапласа относительно напряженности электростатического поля \mathbf{E} . Ввиду (14.1a)

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = 0,$$

а поэтому на основании (П1.34)

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0. \quad (14.13)$$

При $\varepsilon = \text{const}$, учитывая (14.1б), (14.1в) получаем

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \text{grad } \rho. \quad (14.14)$$

Это векторное уравнение Пуассона при $\rho = 0$ переходит в векторное уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \mathbf{E} = 0. \quad (14.15)$$

§ 15. Точечные заряды. Диполь

1. Точечный заряд. Простейшим объектом электростатики является точечный заряд и его поле. В § 1, п. 1 уже говорилось, что практически под точечным зарядом понимают любое заряженное тело в тех случаях, когда расстояние, на котором производится наблюдение, значительно превышает размеры заряженного тела. Таким образом, всякое электростатическое поле на достаточно больших расстояниях от ограниченной в пространстве заряженной области может рассматриваться как поле точечного заряда. Чем больше расстояние, тем в большей степени поле оказывается таким, как если бы весь заряд действительно был сосредоточен в точке.

Поле точечного заряда мы определили в § 3, п. 2, используя теорему Гаусса, т. е. формулу (14.2б). Напомним основную мысль вывода. Заряд, локализованный в некоторой точке O , служит началом электрических силовых линий; все направления из O физи-

чески равноправны, так что линии должны идти радиально и с одинаковой плотностью, а следовательно, на поверхности сферы радиуса r с центром в O вектор \mathbf{D} постоянен и направлен по нормали. Это значит, что интеграл в (14.26) дает $4\pi r^2 D$, откуда и следует формула (3.7). Перепишем этот результат в более общей форме, заменив вакуум произвольной однородной изотропной средой ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ вместо $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$) и обозначив точку локализации заряда $P(\mathbf{r}')$, а точку наблюдения $M(\mathbf{r})$ (рис. 15.1):

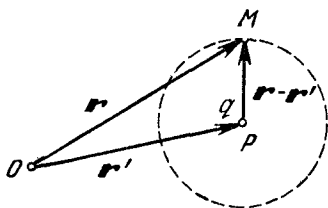


Рис. 15.1.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = r_{0q} \frac{q}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (15.1)$$

Здесь r_{0q} — единичный вектор для направления PM , т. е.

$$r_{0q} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Располагая выражением напряженности поля точечного заряда, мы можем по формуле (14.7) определить соответствующий электростатический потенциал φ в любой точке пространства. Поскольку путь интегрирования безразличен, возьмем его вдоль проходящей через точку наблюдения силовой линии (т. е. в направлении $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$). Тогда \mathbf{E} и $d\mathbf{l}$ совпадают по направлению: $r_{0q} d\mathbf{l} = d\mathbf{l}$. Внося (15.1) в (14.7) и обозначая переменную интегрирования (путь) символом x , получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (15.2)$$

Попробуем также вывести этот результат, используя математический аппарат из Приложения. На основании (П2.6) плотность точечного заряда q , расположенного в $P(\mathbf{r}')$, есть

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (15.3)$$

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ — это решение уравнения Пуассона (14.9), которое для неограниченного пространства выражается формулой (14.10). Подставив в (14.10) функцию плотности (15.3) и учитывая свойство δ -функции (П2.4), находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} dv'' = \frac{q}{4\pi\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (15.4)$$

(чтобы избежать путаницы с \mathbf{r}' в (15.3), переменная интегрирования в (14.10) обозначена двумя штрихами). Как видно, результаты (15.4) и (15.2) совпадают.

Возвращаясь к выражению напряженности поля точечного заряда (15.1), подчеркнем, что его нетрудно получить из выражения потенциала (15.4) по формуле (14.3); это рекомендуется выполнить

читателю, расположив заряд в начале сферической системы координат и взяв формулу (П1.9).

В заключение представим себе идеальный точечный заряд, действительно не занимающий объема (а не просто весьма малое заряженное тело). Для такого объекта все рассмотренные выражения будут правомерны при *любом конечном* расстоянии $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, в чем и заключается преимущество данной идеализации. Мы видим, однако, что формулы (15.1) и (15.2) теряют смысл — приводят к бесконечностям — для самой «заряженной точки» ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$); в этом проявляется несовершенство абстракции идеального точечного заряда.

2. Закон Кулона. На основании (15.1) можно выразить силу взаимодействия двух точечных зарядов. Действительно, если в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_1 расположен заряд q_1 , то сила, действующая на единичный положительный заряд в точке с радиус-вектором \mathbf{r}_2 , определяется как \mathbf{E} по формуле (15.1) при замене q на q_1 , \mathbf{r}' на \mathbf{r}_1 и \mathbf{r} на \mathbf{r}_2 . Пусть теперь вместо единичного взят заряд q_2 , тогда сила будет $q_2\mathbf{E}$, т. е. (рис. 15.2)

$$\mathbf{F} = r_{0q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2}. \quad (15.5)$$

Это не что иное, как *закон Кулона*, который оказался выведенным в конечном счете из уравнений Максвелла.

Соотношение (15.5) непосредственно выражает силу, действующую на заряд q_2 ; когда по знаку он совпадает с q_1 , сила эта направлена по $\mathbf{r}_{0q} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$, т. е. заряд q_2 отталкивается от q_1 ; если же знаки q_2 и q_1 противоположны, то сила направлена по $-\mathbf{r}_{0q}$, а это значит, что заряд q_2 притягивается к q_1 . Разумеется, совершенно аналогично можно рассуждать о силе, действующей на заряд q_1 , но при этом под единичным вектором \mathbf{r}_{0q} следует понимать не $\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$, а $\frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$, т. е. требуется переменить знак.

3. Система зарядов. Перейдем к рассмотрению системы точечных зарядов. На основании принципа суперпозиции поле может быть найдено путем суммирования полей отдельных зарядов, т. е.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i r_{0i} \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2}, \quad (15.6)$$

где \mathbf{E}_i — напряженность поля заряда q_i , расположенного в точке $M_i(\mathbf{r}_i)$, а $r_{0i} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$. Пример графического определения нескольких точечных зарядов представлен на рис. 15.3; расстояния $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ обозначены x_i .

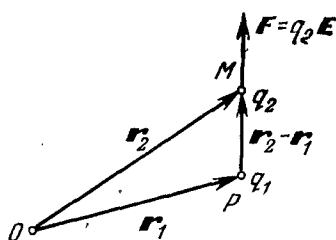


Рис. 15.2.

Аналогично определяется и потенциал:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{q_i}{|r-r_i|} \quad (15.7)$$

Интересно, что из (15.7) можно путем элементарных действий (хотя и не вполне безупречно) получить общее решение уравнения Пуассона (14.9) для неограниченного пространства, выражаемое формулой (14.10). Рассмотрим произвольное непрерывное распределение заряда с плотностью ρ в V . Разбивая V на достаточно малые элементы ΔV_i , внутри каждого из которых $\rho \approx \rho_i$, можно построить

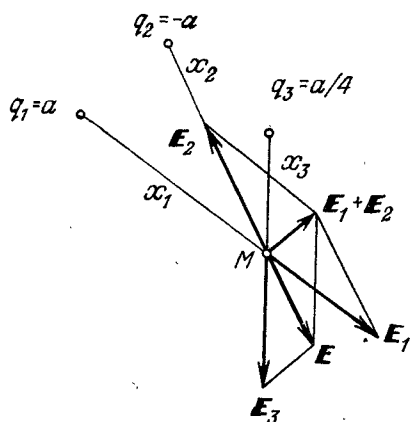


Рис. 15.3.

«эквивалентную» систему точечных зарядов $q_i = \rho_i \Delta V_i$, полагая, что эти заряды расположены где-то в своих ячейках ΔV_i . Далее производится бесконечное измельчение элементов ΔV_i . Применяя формулу (15.7), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{\rho_i \Delta V_i}{|r-r_i|} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(r')}{|r-r'|} dv', \quad (15.8) \end{aligned}$$

а это совпадает с (14.10).

4. Диполь. В качестве весьма важного и притом простого случая системы точечных зарядов рассмотрим так называемый диполь.

Возьмем два разноименных, но равных по абсолютной величине точечных заряда q и $-q$, расположенных на расстоянии l . Полагая $q > 0$, электрическим моментом этой системы назовем вектор

$$p = ql, \quad (15.9)$$

где l — вектор с абсолютным значением l , направленный от отрицательного заряда к положительному. Если расстояние r , на котором наблюдается эта система (т. е. исследуется ее поле), весьма велико в сравнении с размером l , то ее называют *диполем*. Будем мысленно уменьшать l , сохраняя ql постоянным, т. е. сближать разноименные заряды, изменяя требуемым образом их величину. Тогда в пределе при $l \rightarrow 0$ получится «дипольная точка», характеризующаяся моментом p . Это *идеальный диполь*, т. е. система зарядов, которую можно считать диполем на любом конечном расстоянии.

На основании (15.7) нетрудно записать выражение потенциала системы двух зарядов $q_1 = -q$ и $q_2 = q$:

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{|r-r_2|} - \frac{1}{|r-r_1|} \right). \quad (15.10)$$

Сама система вместе с точкой наблюдения представлена на рис. 15.4 в двух вариантах расположения начала системы координат O . Во втором случае точка O лежит на середине отрезка l , так что $r_1 = -l/2$ и $r_2 = l/2$.

Желая определить потенциал диполя, воспользуемся формулой (15.10); при этом надо устремить l к нулю, оставляя ql постоянным, т. е. вычислить предел:

$$\varphi(r) = \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ ql = \text{const}}} \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{|r-r_1| - |r-r_2|}{|r-r_2||r-r_1|}. \quad (15.11)$$

В случае рис. 15.4, б при этом

$$r-r_2 \rightarrow r-r_1 \rightarrow r,$$

$$q|r-r_1| - q|r-r_2| \rightarrow ql \cos \vartheta,$$

так что

$$\varphi(r) = \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{pr_0}{4\pi\epsilon r^2}. \quad (15.12)$$

По сравнению с этим в более общем случае рис. 15.4, а разница состоит только в том, что $r-r_2$ и $r-r_1$ стремятся к $r-r'$, где r' — радиус-вектор средней точки отрезка l , и мы имеем

$$\varphi(r) = \frac{ql \cos \vartheta}{4\pi\epsilon |r-r'|^2} = \frac{pr_{0q}}{4\pi\epsilon |r-r'|^2}. \quad (15.12a)$$

Единичный вектор $r_{0q} = \frac{r-r'}{|r-r'|}$, как и r_0 в (15.12), направлен из середины отрезка l на точку наблюдения M .

Напряженность поля E диполя нетрудно найти как градиент потенциала по формуле (14.3), используя сферические координаты (рис. 15.5, а). На основании (П1.9) из (15.12) получаем

$$E(r) = \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} (r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (15.13)$$

Поле симметрично относительно оси диполя, поэтому φ и E не зависят от азимутальной координаты α ; оно убывает с расстоянием быстрее, чем поле одного точечного заряда: $E = O(1/r^3)$ вместо $E = O(1/r^2)$.

Найдем уравнение силовых линий рассматриваемого поля. Согласно (П1.37) и табл. 6.1

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta},$$

и компоненты вектора E известны из (15.13). Внося их сюда, записываем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dr}{r} = 2 \operatorname{ctg} \vartheta d\vartheta, \quad (15.14)$$

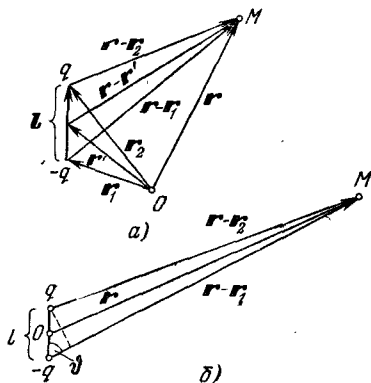


Рис. 15.4.

описывающее силовые линии в произвольной плоскости. Его трудно проинтегрировать. Это дает

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{r} = C. \quad (15.15)$$

Чтобы построить отдельную силовую линию, надо задать какое-либо значение постоянной C .

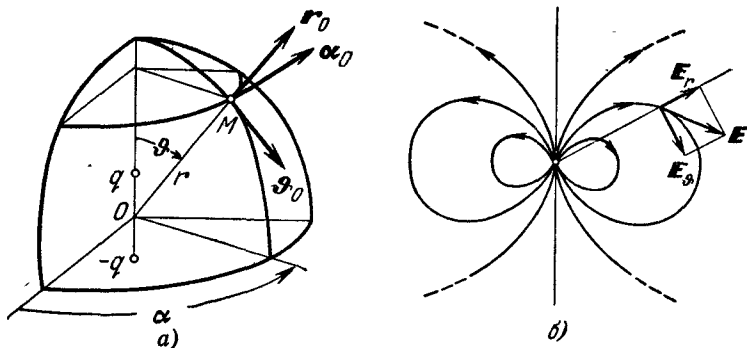


Рис. 15.5.

Картина силовых линий поля диполя показана на рис. 15.5, б.

§ 16. Примеры электростатических полей

1. Поля с центральной симметрией. Ниже мы рассмотрим несколько простых электростатических полей, при нахождении которых используются соображения симметрии. При этом результат получается очень быстро из теоремы Гаусса.

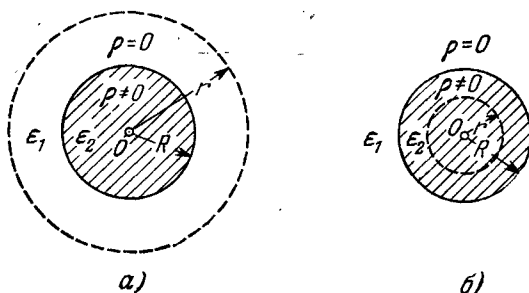


Рис. 16.1.

Начнем с замечания, что формула (15.1) в сущности пригодна для описания не только поля точечного заряда, но и любых электростатических полей с той же центральной симметрией. Возьмем, например, равномерно заряженный ($\rho = \text{const}$) шар радиуса R в однородной изотропной среде; полный заряд его равен $q = 4\pi R^3 \rho/3$;

диэлектрическая проницаемость шара и внешней среды ϵ_1 и ϵ_2 соответственно.

Описав концентрическую шаровую поверхность радиуса $|r - r'| > R$ (на рис. 16.1, а $r' = 0$), как и в случае точечного заряда, при вычислении интеграла теоремы Гаусса получаем $4\pi |r - r'|^2 D = q$, откуда и следует (15.1). В данном случае начало координат удобно будет расположить в центре шара (рис. 16.1, а), так что

$$E = r_0 \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r^2} = r_0 \frac{\rho R^3}{3\epsilon_1 r^2}, \quad r > R. \quad (16.1)$$

Аналогично находится поле и внутри шара ($r < R$), но в соответствии со смыслом теоремы Гаусса в этом случае вместо полного заряда q надо брать заряд q' , содержащийся внутри сферы радиуса r (рис. 16.1, б) и равный $q' = 4\pi r^3 \rho / 3$. Поскольку $q'/q = (r/R)^3$, то нужная формула получается из (16.1) заменой q на qr^3/R^3 и ϵ_1 на ϵ_2 :

$$E = r_0 \frac{qr}{4\pi\epsilon_2 R^3} = r_0 \frac{\rho r}{3\epsilon_2}, \quad r < R. \quad (16.2)$$

Мы видим, что внутри равномерно заряженного шара поле линейно возрастает с расстоянием от центра, а вне его оказывается

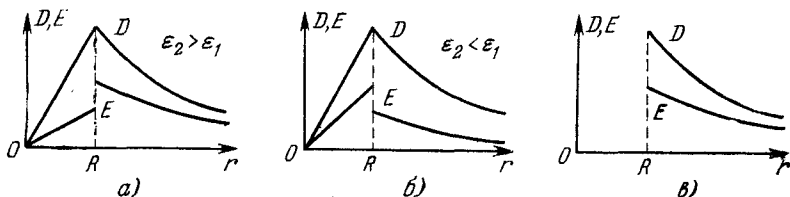


Рис. 16.2.

таким, как если бы заряд был сосредоточен в центре шара. На рис. 16.2, а, б изображены функции $D(r)$ и $E(r)$ при $\epsilon_1 > \epsilon_2$, а также при $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

Если же заряд шара равномерно распределен по его поверхности ($q = 4\pi R^2 \xi$), то вне его поле по-прежнему выражается формулой (15.1), т. е. при начале координат в центре

$$E = r_0 \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} = r_0 \frac{\xi}{\epsilon} \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad r > R, \quad (16.3)$$

а внутри ($r < R$) оно отсутствует: $E = 0$. Действительно, в силу симметрии поле могло бы быть только радиальным и равномерным, а при этом для внутренних ($r < R$) сфер $4\pi r^2 D = 0$. На рис. 16.2, в распределение поля изображено графически.

2. Поля с осевой симметрией. Теорема Гаусса с таким же успехом используется для нахождения осесимметричных полей, подобных полю равномерно заряженной бесконечной прямой нити. В случае нити из соображений симметрии следует, что электриче-

ские силовые линии радиальны и распределены с постоянной плотностью. Построив на отрезке нити коаксиальный цилиндр (рис. 16.3, а, б), видим, что силовые линии выходят только через его боковую поверхность ($S = 2\pi r l$), и теорема Гаусса дает: $2\pi r l D = q$. Заряд q/l , приходящийся на единицу длины нити, обозначим τ и запишем:

$$E = r_0 \frac{\tau}{2\pi \epsilon r} \quad (16.4)$$

Читателю предоставляется проверить, что напряженность поля равномерно заряженного ($\rho = \text{const}$) бесконечного цилиндра

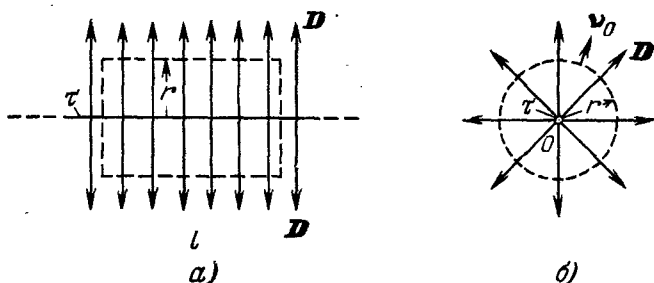


Рис. 16.3.

радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 при внешней ($r > R$) диэлектрической проницаемости ϵ_1 есть

$$E = \begin{cases} r_0 \frac{\tau r}{2\pi \epsilon_2 R^2} = r_0 \frac{\rho r}{2\epsilon_2}, & r < R, \\ r_0 \frac{\tau}{2\pi \epsilon_1 r} = r_0 \frac{\rho R^2}{2\epsilon_1 r}, & r > R, \end{cases} \quad (16.5)$$

а напряженность поля цилиндра с поверхностным зарядом

$$E = r_0 \frac{\tau}{2\pi \epsilon r} = r_0 \frac{\xi}{\epsilon} \frac{R}{r}, \quad r > R \quad (16.6)$$

($E=0$ при $r < R$).

3. Поля слоистых систем. Рассмотрим далее плоский бесконечный слой толщиной $2d$, равномерно заряженный по объему. В данном случае симметрия такова, что силовые линии должны быть распределены с постоянной плотностью нормально поверхности слоя. Чтобы применить теорему Гаусса, построим цилиндрическую поверхность, охватывающую участок слоя с площадью S (рис. 16.4, а); основания цилиндра параллельны поверхности слоя и располагаются на одинаковых расстояниях от его средней плоскости zOx . По теореме Гаусса $2SD = q = 2Sd\rho$ (S является также площадью основания цилиндра, а поток через его боковую поверх-

ность равен нулю). Если же, уменьшая высоту цилиндра, сблизить его основания настолько, что они окажутся внутри заряженного слоя, то построенная замкнутая поверхность будет содержать лишь

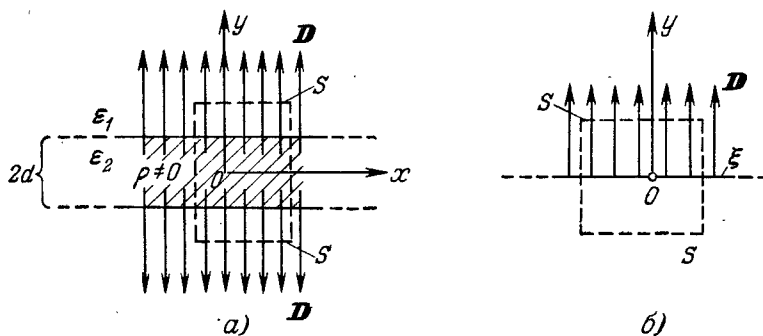


Рис. 16.4.

часть заряда, и соответственно этому $2SD = q' = 2S |y| \rho$. Таким образом,

$$E = \begin{cases} \pm y_0 \frac{\xi}{2\epsilon_1} = \pm y_0 \frac{\rho d}{\epsilon_1} & \begin{cases} y > d, \\ y < -d, \end{cases} \\ y_0 \frac{\xi y}{2\epsilon_2 d} = y_0 \frac{\rho y}{\epsilon_2} & \begin{cases} 0 \leq y < d, \\ 0 \geq y > -d, \end{cases} \end{cases} \quad (16.7)$$

где $\xi = q/S$ — заряд, приходящийся на единицу поверхности слоя, а ϵ_2 и ϵ_1 — диэлектрические проницаемости слоя и внешней среды.

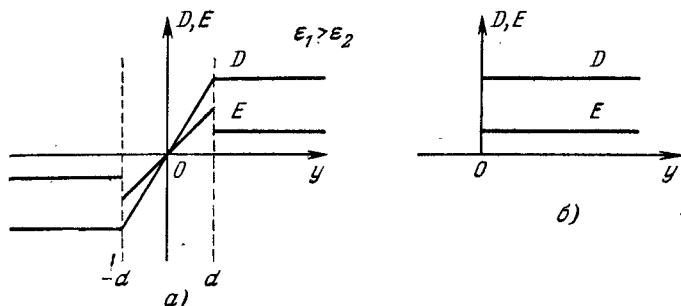


Рис. 16.5.

На рис. 16.5, а приведен график, поясняющий найденную зависимость.

Предположим теперь, что плоскость $y = 0$, заряженная с поверхностной плотностью ξ , создает поле только в верхнем полупространстве ($y > 0$). В этом случае аналогичное применение теоремы Гаусса приводит к результату

$$E = y_0 \frac{\xi}{\epsilon}, \quad (16.8)$$

вытекающему также непосредственно из граничного условия для D_v (ср. § 8, п. 1); см. рис. 16.4, б и 16.5, б.

4. Применение уравнений Пуассона и Лапласа. Подчеркнем, что все полученные выше результаты могли бы быть найдены путем интегрирования уравнений Пуассона и Лапласа с последующим определением вектора E по формуле (14.3). Этот несколько более сложный подход нецелесообразен, если можно прямо воспользоваться теоремой Гаусса. Из методических соображений мы приведем все же два примера, демонстрирующих содержание уравнений электростатики.

Для задачи о равномерно заряженном слое уравнение Пуассона (14.9) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad (16.9)$$

причем $\rho = \text{const} \neq 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_2$ при $-d < y < d$; $\rho = 0$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$ при $y > d$, $y < -d$ (рис. 16.4, а); вне слоя (16.9) переходит в уравнение Лапласа.

Интегрируя (16.9), пишем

$$d\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} dy$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_2} y + A, \\ \varphi &= -\frac{\rho}{2\varepsilon_2} y^2 + Ay + B \end{aligned} \right\} -d < y < d,$$

где A и B — неизвестные пока константы. Точно так же

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= A', \\ \varphi &= A'y + B' \end{aligned} \right\} y > d; \quad \left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dy} &= A'', \\ \varphi &= A''y + B'' \end{aligned} \right\} y < -d.$$

Поскольку в силу симметрии системы $E(-y) = -E(y)$, т. е.

$$\frac{d\varphi(-y)}{dy} = -\frac{d\varphi(y)}{dy},$$

то $A = 0$ и $A' = -A''$. Таким образом,

$$E = -y_0 \frac{d\varphi}{dy} = y_0 \frac{\rho}{\varepsilon_2} y, \quad -d < y < d. \quad (16.10a)$$

Применяя затем второе граничное условие из (14.12) при $y = d$ ($\xi = 0$, так как поверхностный заряд отсутствует), получаем

$$-\varepsilon_1 A' - \varepsilon_2 \frac{\rho}{\varepsilon_2} d = 0,$$

что дает A' . Отсюда

$$E = y_0 \frac{\rho d}{\varepsilon_1}, \quad y > d \quad \text{и} \quad E = -y_0 \frac{\rho d}{\varepsilon}, \quad y < -d. \quad (16.10б)$$

Полученные результаты (16.10а), (16.10б) совпадают с (16.7).

В качестве второго примера рассмотрим цилиндр, несущий поверхностный заряд. Уравнение Лапласа (14.11) в цилиндрических координатах, согласно (Пл.18), принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad (16.11)$$

($\partial/\partial\alpha = 0$ и $\partial/\partial z = 0$); внутри цилиндра ($r < R$) поле отсутствует.

Интегрируя уравнение (16.11), имеем

$$r \frac{d\varphi}{dr} = A \quad (A = \text{const})$$

и далее

$$d\varphi = A \frac{dr}{r},$$

откуда

$$\varphi = A \ln r + B \quad (B = \text{const}).$$

Вторая строчка граничных условий (14.12) в данном случае принимает вид

$$-e \frac{d\varphi}{dr} = \xi \quad \text{при } r = R,$$

так что $A = -\xi R/e$. В результате получаем

$$E = -r_0 \frac{d\varphi}{dr} = r_0 \frac{\xi}{e} \frac{R}{r}, \quad (16.12)$$

что совпадает с (16.6).

5. Поле двух заряженных нитей. Полученный в п. 2 результат (16.4) можно, используя принцип суперпозиции (ср. § 15, п.3), применить для нахождения поля нескольких заряженных нитей.

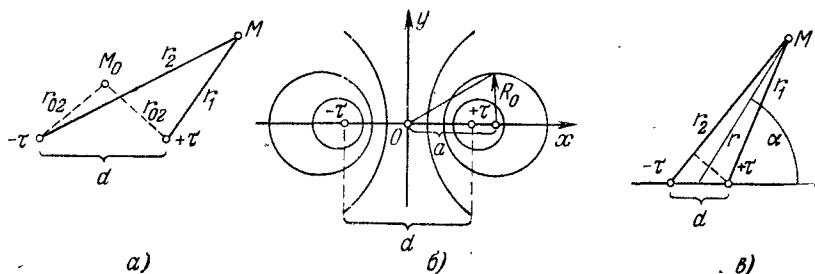


Рис. 16.6.

Взяв две идущие на расстоянии d параллельные нити с зарядами на единицу длины τ и $-\tau$ соответственно, для некоторой точки наблюдения M (рис. 16.6, а) получим

$$E = E_1 + E_2 = r_{01} \frac{\tau}{2\pi\epsilon r_1} + r_{02} \frac{-\tau}{2\pi\epsilon r_2} \quad (16.13)$$

и

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (16.14)$$

На основании (14.6)

$$\varphi_1 - \varphi_{01} = \int_M^{M_0} E_1 dr_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{01}}{r_1}$$

и

$$\varphi_2 - \varphi_{02} = \int_M^{M_0} E_2 dr_2 = \frac{-\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_{02}}{r_2},$$

где φ_{01} и φ_{02} — потенциалы полей E_1 и E_2 в точке M_0 . Пусть точка эта находится на одинаковых расстояниях от обеих нитей ($r_{01} = r_{02}$), тогда в силу осевой симметрии полей E_1 и E_2 при данной их величине $\varphi_{02} = -\varphi_{01}$. Складывая оба потенциала, получаем

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (16.15)$$

Итак, потенциал постоянен на поверхностях, описываемых уравнением

$$\frac{r_2}{r_1} = k \quad (k = \text{const}). \quad (16.16)$$

Нетрудно убедиться, что это поверхности цилиндров, параллельных, но не коаксиальных нитям. Переписывая (16.16) в декартовой системе координат (рис. 16.6, б), имеем

$$\frac{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2} = k^2, \quad (16.16a)$$

или

$$\left. \begin{aligned} (x-a)^2 + y^2 &= R_0^2, \\ a &= \frac{d}{2} \frac{k^2+1}{k^2-1} \text{ и } R_0^2 = a^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (16.17)$$

Это уравнение *окружностей*, которые являются поперечными сечениями эквипотенциальных цилиндров. Их центры лежат на оси x вне отрезка $-\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2}$, а радиусы по мере удаления от начала координат неограниченно возрастают.

Если точка наблюдения M лежит очень далеко ($r \gg d$), то

$$r_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos \alpha \text{ и } r_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos \alpha$$

(рис. 16.6, в), и формула (16.15) принимает вид

$$\varphi \approx \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{2r + d \cos \alpha}{2r - d \cos \alpha}. \quad (16.18)$$

Вычисляя напряженность поля E как $-\nabla\varphi$ при помощи (III.8), в пределе при $d/r \rightarrow 0$ и $\tau d = \text{const}$ имеем

$$E = \frac{\tau d}{2\pi\epsilon r^2} (r_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha). \quad (16.19)$$

Это поле «дипольной нити» (каждая точка прямой — поперечно ориентированный диполь); τd есть абсолютное значение дипольного момента, отнесенное к единице длины нити.

§ 17. Проводники в электростатическом поле. Емкость

1. Поля и потенциалы при наличии проводников. В проводниках заряды под действием электрического поля должны приходить в движение. Это значит, что в электростатике, рассматривающей исключительно неподвижные заряды, поля внутри проводников всегда отсутствуют. Данный вывод формально следует из уравнения (6.6)

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (17.1)$$

согласно которому в проводящей среде ($\sigma \neq 0$) при наличии электрического поля ($\mathbf{E} \neq 0$) существует ток ($\mathbf{j} \neq 0$). Поскольку же нет тока ($\mathbf{j} = 0$), то при $\sigma \neq 0$ (проводник!) не должно быть и поля: $\mathbf{E} = 0$.

В электростатике свободные заряды проводящего тела оказываются на его поверхности, где и занимают такое равновесное положение, при котором их поля внутри тела взаимно компенсируются. При этом также отсутствует тангенциальная компонента вектора \mathbf{E} на поверхности проводника

$$E_{\tau} = 0 \quad \text{на } S. \quad (17.2)$$

Действительно, при $E_{\tau} \neq 0$ существовал бы тангенциальный ток с плотностью $\mathbf{j}_{\tau} = \sigma \mathbf{E}_{\tau}$. Напомним, впрочем, что вывод (17.2) следует уже из отсутствия поля в одной из граничащих сред (§ 8, п. 1). Мы можем теперь сказать, что именно применительно к проводникам оказывается полезным представление о *поверхностном заряде*, характеризуемом плотностью ξ . Итак, электростатическое поле существует вне проводящих тел и нормально их поверхностям, а поэтому для поля на поверхности проводника справедливо соотношение (8.2)

$$\mathbf{D} = \nu_0 \xi \quad \text{на } S. \quad (17.3)$$

Наконец, ортогональность силовых линий проводящим поверхностям, выражаемая этой формулой, означает, что поверхности эти в электростатике *эквипотенциальны*. Действительно, ввиду (17.2) $\mathbf{E} = -\tau_0 \nabla_{\tau} \varphi = -\tau_0 \partial \varphi / \partial \tau = 0$ для любого касательного направления τ , а следовательно,

$$\varphi = \text{const} \quad \text{на } S. \quad (17.4)$$

Во всех внутренних точках проводника потенциал имеет то же значение, что и на поверхности, поскольку при $\mathbf{E} = 0$ он постоянен и, согласно первой строчке (14.12), непрерывен на границе тела с внешней средой. Поэтому говорят «потенциал проводника», подразумевая значение функции φ , которое она принимает во всех его точках.

2. Электростатическая индукция. Обращаясь к материалу предыдущего параграфа, мы можем констатировать, что формулы (16.3),

(16.6) и (16.8) относятся к равномерно заряженным проводящим телам ($\xi = \text{const}$). Проводники более сложной формы заряжаются, вообще говоря, неравномерно ($\xi \neq \text{const}$); на рис. 17.1 приведены для сравнения некоторые картины полей.

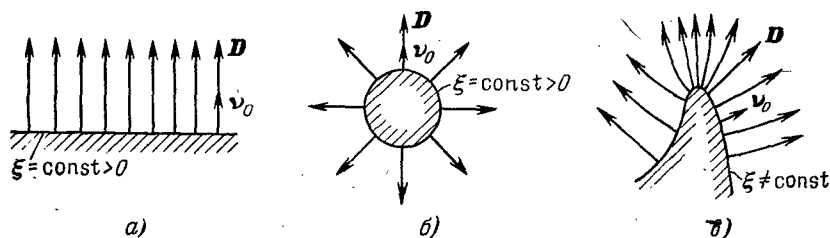


Рис. 17.1.

Предположим теперь, что в заданное электростатическое поле (например, однородное, рис. 17.2, а) помещается *незаряженный* проводник A . Возьмем сначала идеализированный случай, когда A — бесконечный плоский проводящий слой, перпендикулярный полю. Согласно (17.3) на обеих его поверхностях появляется заряд, распределенный с постоянной плотностью ξ и $-\xi$ соответственно (рис. 17.2, б); полный заряд слоя ($q = 0$) и первоначальное строение поля не меняются. В иных случаях при внесении проводника A поле должно деформироваться таким образом, чтобы силовые линии стали ортогональны проводящей поверхности (рис. 17.2, в). Появляется поверхностный заряд, плотность которого, согласно (17.3), равна значению D на S , причем *полный* заряд тела, разумеется, по-прежнему будет равен нулю. Возникший заряд называют

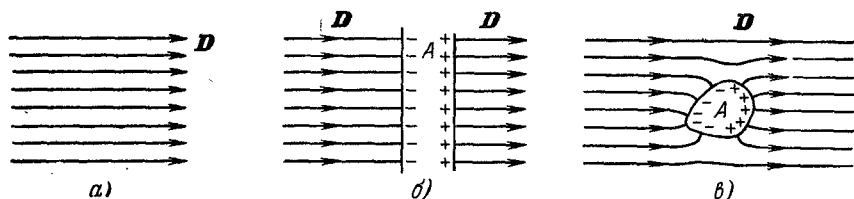


Рис. 17.2.

«наведенным» или «индуцированным», а само явление — *электростатической индукцией*.

При сближении нескольких заряженных проводников поле на поверхности каждого претерпевает изменения, и происходит перераспределение заряда; электростатическая индукция предстает как взаимное влияние тел.

3. Постановка граничной задачи. Ясно, что в системе проводников распределение заряда на каждом из них заранее неизвестно, и задача электростатики не сводится к определению поля заданных

зарядов; неизвестно распределение заряда и на поверхности уединенного проводника, за исключением простейших случаев, рассмотренных в § 16, и аналогичных.

Пусть одно или несколько проводящих тел расположено в однородной изотропной среде. Потенциал φ во всем пространстве между телами подчинен уравнению Лапласа (14.11), а на их поверхностях принимает, согласно (17.4), постоянные значения. Поэтому φ есть решение граничной задачи:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= 0, \\ \varphi &= \Phi_i \text{ на } S_i \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \right\} \quad (17.5)$$

(S_i — поверхности тел, число которых N). Это задача Дирихле (П5.9), которая, как известно, имеет единственное решение. Таким образом, если найдена функция φ , удовлетворяющая уравнению Лапласа и принимающая требуемое значение Φ_i на поверхностях рассматриваемых проводников, то это наверняка электростатический потенциал φ их поля.

Задача Дирихле (17.5) не может быть поставлена, если потенциалы проводников Φ_i заранее неизвестны. Однако вместо потенциалов достаточно знать полные заряды всех проводников. Действительно, в приложении 5 указано (стр. 587), что граничная задача для уравнения Лапласа имеет единственное решение при задании интегралов $\int \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$. А так как

$$-e \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds = q,$$

согласно (14.12) или (17.3), есть не что иное, как полный заряд проводника с поверхностью S , то отсюда следует единственность решения электростатической задачи в виде уравнения Лапласа (14.11) для системы проводников при задании их полных зарядов.

Итак, сформулировано два положения, составляющих так называемую *теорему единственности электростатики*. Практическое значение этой теоремы заключается в том, что она открывает путь самым различным приемам решения электростатических задач о проводниках в однородной среде, ибо гарантирует истинность результатов при соблюдении некоторых условий. Ведь каким бы путем ни было найдено решение φ , всегда можно проверить, удовлетворяет ли оно условиям единственности (т. е. реализует ли оно заданные потенциалы или полные заряды проводников) и является ли, следовательно, электростатическим потенциалом исследуемого поля.

4. **Зеркальные изображения.** В качестве примера электростатической индукции рассмотрим влияние проводящей плоскости на поле точечного заряда. Интересно, что для решения этой задачи достаточно ввести в рассмотрение дополнительный (фиктивный) заряд, являющийся как бы «зеркальным изображением» заданного заряда с противоположным знаком. Таким образом, для нахождения поля

заряда q , расположенного на расстоянии h над проводящей плоскостью P (рис. 17.3, а), возьмем систему двух зарядов, одинаковых по абсолютной величине $|q|$ и противоположных по знаку, отстоящих на расстоянии $2h$. Исследуем их поле. Легко видеть, что плоскость симметрии Q (рис. 17.3, б), к которой силовые линии подходят под прямым углом, является, таким образом, эквипотенциальной. Между тем в поставленной задаче нам и нужно найти поле заряда над эквипотенциальной плоскостью P . Поле это, как легко

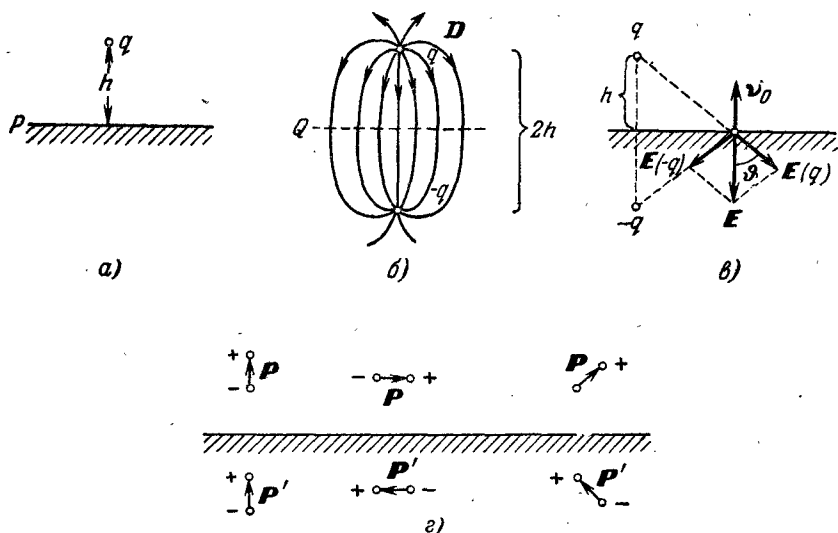


Рис. 17.3.

догадаться, не отличается от поля в верхнем полупространстве над Q . Это значит, что его можно найти, как поле двух зарядов по формуле (15.6), что поясняется на рис. 17.3, в. В точках плоскости P поле, как видно, имеет напряженность

$$E = -v_0 2 \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \cos \vartheta = -v_0 \frac{qh}{2\pi\epsilon r^3}. \quad (17.6)$$

Следовательно, в соответствии с (17.3) на плоскости распределен заряд с плотностью

$$\xi = -\frac{qh}{2\pi r^3}. \quad (17.7)$$

Полный индуцированный заряд на P равен $-q$, что устанавливается путем применения теоремы Гаусса или интегрированием ξ по всей плоскости (это рекомендуется проделать читателю). Заметим, что систему «заряд — плоскость» можно рассматривать как два проводящих тела, одно из которых точечное, с зарядами q и $-q$. Решение электростатической задачи при этом единственно, и не может

возникнуть сомнения в правильности использованного приема, называемого *методом зеркальных изображений*.

Метод зеркальных изображений пригоден для определения поля любой заданной системы зарядов над проводящей плоскостью; изображения строятся отдельно для каждого из них, и затем применяется принцип суперпозиции. Читателю предоставляется проверить, что поле заряженной нити (§ 16, п. 2), расположенной над плоскостью на расстоянии h , индуцирует на ней заряд с плотностью

$$\xi = -\frac{\tau h}{\pi r^2}, \quad (17.8)$$

где r — расстояние до нити. Составляя отражения отдельных зарядов, можно также получить правила построения отражений дипольных моментов (рис. 17.3, з). Как видно, диполь, параллельный плоскости, порождает антипараллельное изображение, а перпендикулярный диполь — параллельное. В случае произвольно ориентированного диполя его момент разлагается на параллельную и перпендикулярную плоскости компоненты.

5. Емкость. Остановимся далее на весьма употребительном понятии *емкости* проводника. Как говорилось, все точки проводника обязательно имеют один и тот же потенциал. При этом различным по форме и размерам уединенным проводникам для получения некоторого заданного потенциала надо сообщать разные заряды. С этой точки зрения каждое проводящее тело характеризуется емкостью C , определяемой по величине заряда, при котором потенциал проводника относительно бесконечности (14.7) равен единице. Ввиду линейности уравнений электростатики (когда среда линейна) потенциал и заряд связаны зависимостью $q = C\phi$, т. е.

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (17.9)$$

Единица измерения емкости — *фарада* [ϕ].

Определим в качестве примера емкость сферического проводника радиуса R . Поскольку поле вне шара не отличается от поля точечного заряда (§ 16, п.1), его потенциал находим, применяя формулу (15.2). Полагая в (15.2) $|r - r'| = R$ (поверхность проводника), имеем

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon R}. \quad (17.10)$$

Поэтому на основании (17.9) емкость шара есть

$$C = 4\pi\epsilon R. \quad (17.11)$$

В системе проводящих тел заряд любого из них линейно связан с потенциалами всех тел:

$$q_i = a_{i1}\phi_1 + a_{i2}\phi_2 + \dots + a_{ii}\phi_i + \dots + a_{ik}\phi_k + \dots$$

Удобнее писать это в несколько ином виде:

$$q_i = C_{i1}(\varphi_i - \varphi_1) + C_{i2}(\varphi_i - \varphi_2) + \dots + C_{ii}\varphi_i + \dots + C_{iN}(\varphi_i - \varphi_N),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N), \quad (17.12)$$

где имеется в виду система N тел. Коэффициент C_{ii} называется *собственной емкостью* проводника i , а C_{ik} — *взаимными емкостями* проводников i и k . Собственные емкости проводников в системе, конечно, отличаются от емкостей таких же уединенных проводников. Точно так же взаимные емкости отдельных пар проводников определяются не только данными двумя, но и всеми остальными проводниками; можно показать, что $C_{ik} = C_{ki}$. Запись (17.12) есть система N линейных алгебраических уравнений относительно потенциалов (разностей потенциалов) при заданных зарядах проводников и емкостных коэффициентах C_{ik} .

Систему двух защищенных от внешнего влияния проводников называют *конденсатором*. Попутно отметим, что полная защита от внешних электростатических полей достигается помещением объекта внутрь замкнутой проводящей оболочки — *электростатического экрана*. Любые внешние поля индуцируют заряд на наружной поверхности экрана, внутри же него поле внешних зарядов равно нулю, как в сплошном проводнике (если в проводнике, где поле всегда отсутствует, сделать полость, то ничего не должно измениться). Простейшим идеальным конденсатором является система двух тел, одно из которых находится внутри другого (рис. 17.4, а). В полости существует лишь поле, создаваемое зарядом внутреннего тела q , которое наводит на внутренней поверхности экрана заряд $-q$, в чем можно убедиться, применяя теорему Гаусса к какой-либо замкнутой поверхности, лежащей внутри экрана и охватывающей полость. Поток вектора \mathbf{D} через такую поверхность, обозначенную на рис. 17.4, а пунктиром, равен нулю, поскольку поле в проводнике отсутствует. Поэтому полный заряд внутри нее также равен нулю, откуда и следует, что заряд q внутреннего проводника компенсируется зарядом $-q$, наведенным на внутренней поверхности экрана.

Емкостью конденсатора называют отношение

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi}, \quad (17.13)$$

где q — заряд одного проводника, а $\Delta\varphi$ — разность потенциалов проводников, причем обе величины должны быть одного знака.

6. Вычисление емкости конденсатора. Пример идеального конденсатора дает система двух проводящих концентрических сферических поверхностей (рис. 17.4, б). Разность потенциалов обоих проводников на основании (14.6) и (16.3) определяется как

$$\Delta\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (17.14)$$

Отсюда по формуле (17.13)

$$C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (17.15)$$

Аналогично для коаксиальных бесконечных цилиндрических поверхностей (рис. 17.4, в слева), согласно (14.6) и (16.4),

$$\Delta\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (17.16)$$

и емкость, приходящаяся на единицу длины, равна

$$C' = \frac{\tau}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (17.17)$$

К реальным цилиндрическим конденсаторам конечной длины

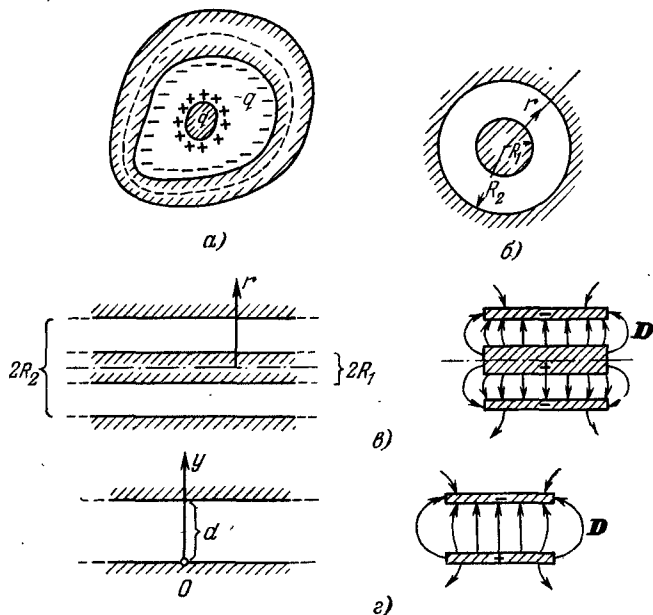


Рис. 17.4.

(рис. 17.4, в справа) полученный результат применим лишь приближенно, поскольку поле на краях заметно отличается от радиального продольно однородного.

Между параллельными проводящими плоскостями поле однородно и описывается выражением (16.8), рис. 17.4, г слева. Разность потенциалов между плоскостями равна

$$\Delta\varphi = \frac{\sigma r}{\epsilon} \int_0^d dy = \frac{\sigma}{\epsilon} d. \quad (17.18)$$

Следовательно, емкость, приходящаяся на единицу площади системы параллельных плоскостей, есть

$$C'' = \frac{\xi}{\Delta\varphi} = \frac{\varepsilon}{d}. \quad (17.19)$$

К реальным плоским конденсаторам (рис. 17.4, з справа) эта формула, подобно ранее выведенной формуле (17.17), применима только как приближенная из-за деформации поля на краях.

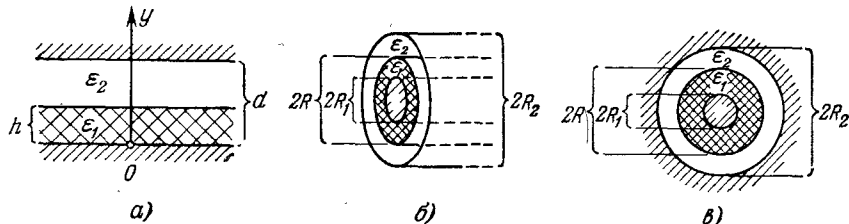


Рис. 17.5.

В заключение приведем выражения емкости для двухслойных систем:

плоской (рис. 17.5, а)

$$C'' = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 h + \varepsilon_1 (d - h)}, \quad (17.20)$$

цилиндрической (рис. 17.5, б)

$$C' = \frac{2\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 \ln \frac{R}{R_1} + \varepsilon_1 \ln \frac{R_2}{R}}, \quad (17.21)$$

сферической (рис. 17.5, в)

$$C = \frac{4\pi \varepsilon_1 \varepsilon_2 R_1 R R_2}{\varepsilon_2 R_2 (R - R_1) + \varepsilon_1 R_1 (R_2 - R)}. \quad (17.22)$$

Во всех этих случаях электрические силовые линии направлены по нормали к границе раздела сред, а поэтому вектор \mathbf{D} не испытывает скачка. В случае плоской системы $\mathbf{D} = y_0 \xi$, так что

$$\mathbf{E} = \begin{cases} y_0 \frac{\xi}{\varepsilon_1}, & 0 < y < h, \\ y_0 \frac{\xi}{\varepsilon_2}, & h < y < d \end{cases}$$

и вместо (17.18)

$$\Delta\varphi = \frac{\xi}{\varepsilon_1} \int_0^h dy + \frac{\xi}{\varepsilon_2} \int_h^d dy = \xi \left(\frac{h}{\varepsilon_1} + \frac{d-h}{\varepsilon_2} \right),$$

откуда и получается формула (17.20). Вывод формул (17.21) и (17.22) предоставляется читателю.

§ 18. Системы диполей и поляризация диэлектрика

1. **Нейтральная система зарядов.** Вернемся к вопросам, рассматривавшимся в § 15, пп. 3, 4. Пусть имеется система одинаковых по абсолютной величине зарядов q_i , в целом *нейтральная*, т. е.

$$\sum_i q_i = 0. \quad (18.1)$$

Ее *электрическим моментом* назовем вектор

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i, \quad (18.2)$$

где \mathbf{r}_i — радиус-векторы зарядов q_i (точечных!), отнесенные к любому началу координат; легко убедиться, что от его расположения величина \mathbf{p} не зависит.

В частности, когда зарядов два ($q_1 = -q$ и $q_2 = q$), мы приходим к определению электрического момента из § 15, п.4. Действительно (рис. 18.1),

$$\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = q\mathbf{l},$$

где \mathbf{l} — вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и равный по абсолютному значению расстоянию между ними.

Потенциал нейтральной системы определим по формуле (15.7). Если расстояние от любого заряда системы до точки наблюдения значительно превосходит все расстояния между зарядами, то начало координат можно выбрать так, чтобы для всех i было $r \gg r_i$. При этом члены суммы (15.7) удобно преобразовать следующим образом:

$$\frac{q_i}{|r - r_i|} = \frac{q_i}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}_i + r_i^2}} = \frac{q_i}{r} \left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_i}{r^2} + \dots \right),$$

где отброшены члены высшего порядка малости. В силу (18.1) суммирование таких слагаемых приводит формулу (15.7) к виду

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon r^3} \mathbf{r} \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}_0}{4\pi\epsilon r^3}, \quad (18.3)$$

где использовано определение (18.2). В пределе при $\frac{r_i}{r} \rightarrow 0$ и $\rho = \text{const}$ формула становится точной. Сопоставляя (18.3) и (15.12), мы видим, что нейтральная система зарядов с моментом \mathbf{p} ведет себя как диполь с тем же моментом.

Естественно, что нейтральная система точечных зарядов может рассматриваться как *система диполей*, и при вычислении момента по формуле (18.2) можно объединять заряды разных знаков попарно, находя предварительно моменты пар \mathbf{p}_i . Тогда

$$\mathbf{p} = \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (18.4)$$

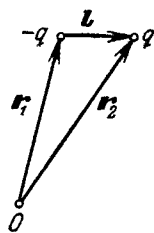


Рис. 18.1.

Пусть, наконец, исследуется нейтральная система очень большого числа зарядов; будем считать, что даже в каждом относительно малом объемном элементе ΔV число зарядов весьма велико. Если $p_{\Delta V}$ — момент системы зарядов, сосредоточенных внутри ΔV , то, составив дробь $p_{\Delta V}/\Delta V$, мы получаем момент, отнесенный к единице объема. Далее введем величину

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{p_{\Delta V}}{\Delta V}, \quad (18.5)$$

где символ $\Delta V \rightarrow 0$ имеет тот же условный смысл, что и при получении формул (1.6), (1.7) и т. п. (стремление ΔV к нулю возможно для некоторой идеализированной сплошной среды, заменяющей данную систему зарядов, в которой измельчение объема должно оставаться конечным). Величина P есть *плотность электрического момента* условной среды, заменяющей систему зарядов.

Понятие плотности P пригодно во многих случаях. Например, ценой некоторого обобщения можно снова вернуться к системе существенно дискретной и даже описать среду, содержащую всего лишь один диполь. В последнем случае достаточно положить

$$P(r) = p\delta(r - r'), \quad (18.6)$$

где p — момент этого диполя, расположенного при $r = r'$, а $\delta(r - r')$ — δ -функция (приложение 2).

2. Поляризация диэлектрика. При помещении диэлектрического тела в электростатическое поле последнее, как и в случае тела проводящего, деформируется: иначе, вообще говоря, не были бы

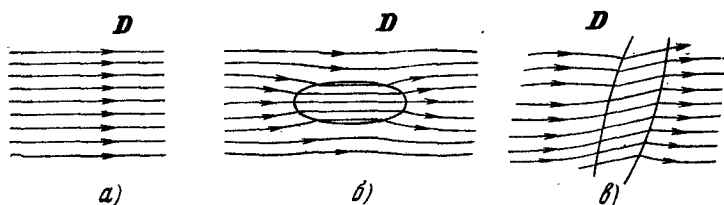


Рис. 18.2.

удовлетворены граничные условия. Так, если поле сначала однородно (рис. 18.2, а), а тело имеет форму эллипсоида, то поле при наличии диэлектрика оказывается таким, как изображено на рис. 18.2, б, в: внутри тела оно параллельно и однородно (то же в случаях шара, бесконечного цилиндра и плоского слоя, которые являются частными формами эллипсоида). Чтобы найти поле, надо решить граничную задачу, и в § 20 будет показано, как это делается. Пока же сосредоточим внимание на внутренних процессах в диэлектрике.

Под поляризацией среды (§ 5, п.1) понимается совокупность процессов, совершающихся в ней под действием электрического поля и оказывающих на него обратное влияние: возникающее при дефор-

мации частиц материи «внутреннее» поле налагается на первоначальное «внешнее». Согласно (5.1) электрическая индукция в диэлектрике D отличается от индукции $D_0 = \epsilon_0 E$ в вакууме при той же напряженности поля E на величину P , называемую поляризованностью:

$$D = D_0 + P. \quad (18.7)$$

Основанное на этом макроскопическое описание поляризации в электростатике вполне определяется соотношением между индукцией D и напряженностью поля E в виде уравнения (14.1в).

Однако такое чисто феноменологическое описание мы можем теперь дополнить внутренней картиной поляризации, хотя и схематической, но полезной для уяснения сущности явлений.

Заряды внутри атомов (ионов) и молекул, которые не могут перемещаться на макроскопически заметные расстояния, называются *связанными*; это выражение употреблялось в § 5. В электростатике

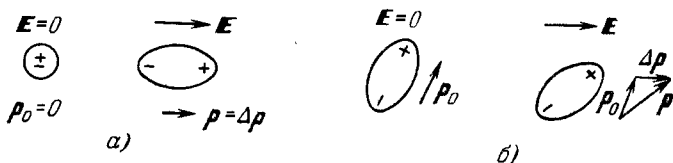


Рис. 18.3.

мы должны рассматривать лишь идеальные, т. е. лишенные проводимости, диэлектрики. В сущности это среды, построенные из связанных и взаимно уравновешенных зарядов. При этом в силу симметрии распределения заряда каждая молекула может не обладать дипольным моментом, но под влиянием поля молекула в целом приобретает некоторый момент p (рис. 18.3, а). Если же молекула с самого начала обладает электрическим моментом p_0 , то гораздо легче, чем деформация, происходит ее ориентация в электрическом поле (рис. 18.3, б), которую можно расценить как приращение электрического момента p_0 на параллельную полю величину Δp :

$$p = p_0 + \Delta p, \quad \Delta p \parallel E.$$

Вообще в практически широких пределах дополнительный дипольный момент пропорционален вектору поля E :

$$p = p_0 + \alpha E. \quad (18.8)$$

В том случае, когда в отсутствие внешнего поля микрочастица лишена момента, здесь надо положить $p_0 = 0$; ввиду пропорциональности p и E при этом можно сказать, что деформирующая сила поля уравновешивается как бы силой упругости.

Возьмем какую-либо макроскопическую область ΔV , содержащую $N_{\Delta V}$ частиц, и, рассматривая ее как систему диполей (т. е.

описанную выше в п.1 нейтральную систему зарядов), вычислим полный электрический момент $\mathbf{p}_{\Delta V}$. Согласно (18.4)

$$\mathbf{p}_{\Delta V} = \sum_i^{(\Delta V)} \mathbf{p}_i = \sum_i^{(\Delta V)} \mathbf{p}_{oi} + N_{\Delta V} \alpha \mathbf{E} = N_{\Delta V} \alpha \mathbf{E}, \quad (18.9)$$

так как при $\mathbf{p}_{oi} \neq 0$ сумма $\sum \mathbf{p}_{oi}$ обращается в нуль ввиду хаотичности начальной ориентации электрических моментов отдельных частиц. Относя момент $\mathbf{p}_{\Delta V}$ к объему ΔV и переходя к пределу, как в (18.5), получаем плотность электрического момента поляризованного диэлектрика в некоторой точке:

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}_{\Delta V}}{\Delta V} = \alpha N' \mathbf{E} \quad \left(N' = \frac{dN}{dV} \right). \quad (18.10)$$

Полученный результат запишем в форме

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi^3 \mathbf{E} \quad \left(\chi^3 = \frac{1}{\epsilon_0} \alpha N' \right). \quad (18.11)$$

Теперь остается лишь убедиться в том, что вектор плотности электрического момента \mathbf{P} , являющийся для макроскопически идеализированной сплошной среды функцией координат, как \mathbf{E} и \mathbf{D} , есть не что иное, как *поляризованность* \mathbf{P} , входящая в (18.7), а χ^3 — *электрическая восприимчивость* (§ 5, пп. 1, 2).

3. Поляризованность и связанные заряды. Итак, покажем, что в соотношении (18.7) участвует величина \mathbf{P} , определяемая именно формулой (18.11).

Пусть в среду с постоянной диэлектрической проницаемостью ϵ внесено распределение заряда, характеризуемое плотностью ρ . В некоторой точке $M(\mathbf{r})$ электростатический потенциал ϕ находится на основании (15.4), т. е.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (18.12)$$

Если же воспользоваться введенным выше в п.2 представлением о диэлектрике как о системе связанных зарядов в вакууме, то

$$\phi = \phi_0 + \phi_d, \quad (18.13)$$

где, согласно (15.4),

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (18.14)$$

есть потенциал, который создается заданным распределением зарядов в вакууме ($\epsilon = \epsilon_0$), а ϕ_d — потенциал, обусловленный всеми диполями взятой модели среды.

Чтобы вычислить ϕ_d , учтем сначала, что достаточно малый элемент диэлектрика действует как диполь с моментом $\mathbf{p}_{\Delta V}$, создавая потенциал, который мы обозначим $\Delta\phi_d$. Последний определяется прямо по формуле (15.12a):

$$\Delta\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \Delta V',$$

а потенциал системы диполей, эквивалентной всему диэлектрику, находится интегрированием этой величины по полному объему:

$$\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dv'. \quad (18.15)$$

Согласно (П1.11), (П1.36)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{P}(\mathbf{r}') \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

и далее с учетом (П1.30)

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}') \text{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \text{div}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

На этом основании преобразуем подынтегральное выражение (18.15), используя также теорему Остроградского — Гаусса (П1.24). Это дает

$$\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \oint_S \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' - \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' \right\}. \quad (18.16)$$

Пусть рассматриваемая диэлектрическая среда занимает все пространство. Объем V возьмем в виде сферы бесконечно возрастающего радиуса с центром в точке наблюдения $M(\mathbf{r})$ и убедимся, что поверхностный интеграл в (18.16) исчезает. Действительно, создаваемое заданным распределением заряда поле \mathbf{E} с увеличением расстояния приближается к полю точечного заряда $q = \int_V \rho dv$, расположенного в центре сферы. Это значит, что, выражая \mathbf{P} через \mathbf{E} при помощи (18.11), будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} \oint_{S=4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} ds' &= \\ &= \lim_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty} 4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \epsilon_0 \chi^{\text{э}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} = 0. \end{aligned}$$

В результате потенциал, создаваемый дипольной моделью диэлектрика (всеми связанными зарядами), есть

$$\varphi_{\text{д}}(\mathbf{r}) = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv', \quad (18.17)$$

что дает возможность выразить полный потенциал φ в виде суммы (18.13) так:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') - \text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \quad (18.18)$$

Теперь, наконец, можно сделать выводы из того факта, что формулы (18.12) и (18.18) по-разному представляют одну и ту же функцию $\varphi(\mathbf{r})$, а следовательно,

$$\frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\rho - \text{div}' \mathbf{P}}{\epsilon_0}.$$

При помощи уравнений (14.1б), (14.1в) отсюда получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} (\mathbf{D}_0 + \mathbf{P}) \quad (\mathbf{D}_0 = \varepsilon_0 \mathbf{E}), \quad (18.19)$$

что согласуется с (18.7).

Вернемся к выражению (18.17). Поскольку потенциал φ_d создается системой связанных зарядов модели диэлектрика, расположенных в вакууме, то, согласно (15.4), следует написать

$$\varphi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho_{св}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (18.20)$$

Сопоставляя (18.17) и (18.20), получаем соотношение, устанавливающее связь между поляризованностью \mathbf{P} и плотностью связанных зарядов $\rho_{св}$:

$$\rho_{св} = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (18.21)$$

В заключение параграфа отметим, что пока мы игнорировали явление самопроизвольной поляризации; об этом скажем в § 21, п. 4 в связи с самопроизвольной намагниченностью.

§ 19. Энергия электростатического поля

1. Энергия и заряд. В пространстве, где существует электрическое поле, как известно (§ 11 п.1), распределена энергия $W^э$ с плотностью

$$w^э = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} = \frac{\varepsilon \mathbf{E}^2}{2}. \quad (19.1)$$

Таким образом, вычисляя энергию электростатического поля, содержащуюся в некоторой области V , с учетом (14.3) имеем

$$W^э = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}\mathbf{D} dv = -\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \operatorname{grad} \varphi dv. \quad (19.2)$$

Подынтегральное выражение преобразуем при помощи формулы (П1.30) и, применяя теорему Остроградского — Гаусса (П1.24), а также заменяя $\operatorname{div} \mathbf{D}$ через ρ , получим

$$W^э = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv - \frac{1}{2} \oint_S \varphi \mathbf{D} ds. \quad (19.3)$$

Чтобы определить полную энергию поля, надо распространить интегрирование на все пространство. Подобно тому как это уже делалось в § 18, п. 3, возьмем объем V в виде сферы бесконечно возрастающего радиуса с центром в области распределения заряда или на конечном расстоянии от нее (эта область, разумеется, ограничена). Тогда поверхностный интеграл в (19.3) исчезает, поскольку на достаточно больших расстояниях взятое распределение проявляет

себя как точечный заряд $q = \int_V \rho_- dv$, расположенный в центре сферы $M(r')$. Действительно,

$$\begin{aligned} \lim_{|r-r'| \rightarrow \infty} \oint_{S=4\pi|r-r'|^2} \varphi(r) D(r) ds &= \\ &= \lim_{|r-r'| \rightarrow \infty} 4\pi |r-r'|^2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |r-r'|} \frac{q}{4\pi |r-r'|^2} = 0 \end{aligned}$$

(вне некоторой ограниченной области во всем пространстве $\epsilon = \epsilon_0$). Поэтому энергия электростатического поля, создаваемого ограниченным в пространстве распределением заряда, равна

$$W^* = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dv. \quad (19.4)$$

При этом, как видно, интегрирование распространяется фактически только на область (возможно, состоящую на разъединенных частях), которая содержит заряд ($\rho \neq 0$). Энергия электростатического поля выражена, таким образом, не путем непосредственного учета ее содержания во всем — бесконечном — пространстве, как это делается при интегрировании w^3 (19.1), а через источники поля, заряды.

2. Случай проводников. Если рассматривается заряженное проводящее тело в пространстве, не содержащем иных зарядов, то в (19.4) $\varphi = \text{const}$, а интеграл $\int_V \rho dv$ сохраняет смысл полного заряда

тела q , поскольку при желании мы можем считать заряд, расположенный тонким слоем у поверхности проводника, объемным. Впрочем, и для идеального поверхностного заряда ввиду (П2.7)

$$\int_V \rho dv = \oint_S \int_{v'-a}^{v'+a} \xi \delta(v-v') ds dv = \oint_S \xi ds = q,$$

где v — координата нормали к поверхности проводника (на последней $v = 0$). Следовательно, выражение (19.4) дает

$$W^* = \frac{1}{2} q\varphi = \frac{1}{2} C\varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{q}{C} \quad (19.5)$$

(здесь использовано также соотношение (17.9)).

Покажем на простом примере, что вычисление энергии по формуле (19.5), действительно, дает тот же результат, что и интегрирование плотности w^3 (19.1) по всему пространству, занимаемому полем. Для проводящего шара с зарядом q на основании (16.3) $w^3 = 0$ при $0 \leq r < R$ и $w^3 = q^2/32\pi^2\epsilon r^4$ при $r \geq R$. Интегрируя эту функцию в сферической системе координат, находим

$$W^* = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon} \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta}{r^2} dr d\vartheta d\alpha = \frac{q^2}{8\pi\epsilon R} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}.$$

Результат (19.5) подтвержден.

В случае системы N проводящих тел с потенциалами φ_i и полными зарядами q_i , исходя из (19.4), получаем

$$W^3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i \int_V \rho_i dv = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varphi_i q_i. \quad (19.6)$$

Применяя эту формулу к конденсатору ($N = 2$, $q_1 = q$ и $q_2 = -q$), имеем

$$W^3 = \frac{q}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{C}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (19.7)$$

с учетом (17.13).

3. Собственная и взаимная энергия. Ранее отмечалось (§ 13, п. 3), что на энергию электромагнитного поля не распространяется принцип суперпозиции: при соединении элементов в систему к их *собственной* энергии добавляется энергия взаимодействия, или *взаимная* энергия. В случае системы проводников потенциал каждого из них можно представить в виде суммы

$$\varphi_i = \dot{\varphi}_i + \tilde{\varphi}_i, \quad (19.8)$$

где $\dot{\varphi}_i$ — потенциал i -го проводника в отсутствие всех остальных, а $\tilde{\varphi}_i$ — потенциал, создаваемый действием последних. Соответственно этому выражение энергии (19.6) перепишем в форме

$$W^3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\varphi}_i q_i, \quad (19.9)$$

где

$$\dot{W}^3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{\varphi}_i q_i \quad \text{и} \quad \tilde{W}^3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \tilde{\varphi}_i q_i$$

— собственная и взаимная энергия системы проводников.

Определим собственную и взаимную энергию двух проводящих шаров (радиусы R_1 и R_2 , заряды q_1 и q_2), причем расстояние между центрами шаров r значительно превышает R_1 и R_2 . Используя (19.10), имеем

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{4\pi\epsilon R_{1,2}} \quad \text{и} \quad \dot{W}^3 = \frac{1}{8\pi\epsilon} \left(\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{q_2^2}{R_2} \right), \quad (19.10)$$

а поскольку каждый шар в поле другого можно считать точечным зарядом, то, согласно (15.2),

$$\tilde{\varphi}_{1,2} = \frac{q_{2,1}}{4\pi\epsilon r} \quad \text{и} \quad \tilde{W}^3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r}. \quad (19.11)$$

Говорить об энергии идеального точечного заряда не имеет смысла: величина W^3 (19.5) в данном случае обращается в бесконечность вместе с φ . В этом сказывается несовершенство представления о заряде, сосредоточенном в точке. Однако, привлекая выражение (19.10), мы можем утверждать, что для системы точечных заря-

дов сохраняет физическое содержание понятие взаимной энергии \tilde{W}^a , поскольку все потенциалы $\tilde{\varphi}_i$ конечны.

Можно рассматривать также энергию взаимодействия точечных зарядов с заданным полем. Работа, совершаемая при удалении из электростатического поля с напряженностью $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$ заряда q , равна $q\varphi$. Следовательно, $q\varphi$ выражает энергию взаимодействия заряда с полем, которую обозначим \tilde{W}^E . Для системы N зарядов

$$\tilde{W}^E = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i, \quad (19.12)$$

где φ_i — потенциал поля \mathbf{E} в точке, содержащей заряд q_i .

В частности, для диполя ($N = 2$, $q_1 = -q$ и $q_2 = q$)

$$\tilde{W}^E = q(\varphi_2 - \varphi_1) = q\Delta\varphi. \quad (19.13)$$

Поэтому в случае идеального диполя

$$\tilde{W}^E = q \frac{\partial \varphi}{\partial l} l = ql \text{ grad}_l \varphi = -\mathbf{pE}, \quad (19.14)$$

т. е. энергия взаимодействия с полем \mathbf{E} определяется его моментом \mathbf{p} . В той мере, в какой формулу (19.14) можно употреблять вместо (19.13), она, как можно показать, оказывается справедливой и для произвольной нейтральной системы зарядов, характеризуемой своим электрическим моментом (18.2).

§ 20. Деформация однородного поля проводниками и диэлектриками простой формы

1. Общие замечания. Проводящий цилиндр. При внесении в электростатическое поле проводящего тела на его поверхности появляются наведенные заряды (§ 17, п.2), а в случае тела диэлектрического происходит поляризация среды (§ 18, п. 2). И тут и там в результате возникновения дополнительного поля первоначальное, вообще говоря, деформируется. При этом, несмотря на физическое различие процессов электростатической индукции и поляризации диэлектрика, задачи о проводниках и диэлектриках, помещаемых в заданные поля, рассматриваются единообразно. Действительно, результирующее поле и его потенциал в любой среде должны удовлетворять исходным уравнениям электростатики (§ 14), а на поверхности тела, будь то проводник или диэлектрик, — известным граничным условиям.

Пусть, например, в однородное электростатическое поле, параллельное оси x ,

$$\mathbf{E}_1 = x_0 \mathbf{E}_1, \quad (20.1)$$

вносится проводящий или диэлектрический цилиндр с осью,

перпендикулярной направлению этого поля (рис. 20.1, а). Согласно (14.6) потенциал поля E_1 равен

$$\varphi_1 = \varphi_{01} - \int_0^x E_1 x_0 dx = \varphi_{01} - E_1 x,$$

где φ_{01} — потенциал в плоскости $x = 0$, или в цилиндрической системе координат (рис. 20.1, б)

$$\varphi_1 = \varphi_{01} - E_1 r \cos \alpha. \quad (20.2)$$

Сначала рассмотрим цилиндр проводящий, поверхность которого ($r = R$) должна быть эквипотенциальна (§ 17, п. 1). Поскольку потенциал первоначального поля E_1 при $r = R$ непостоянен, заключаем, что внесение проводящего цилиндра в поле E_1 вызывает появление дополнительного поля E_2 , уравнивающего потенциал

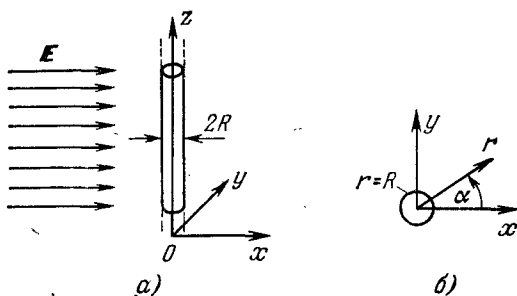


Рис. 20.1.

на его поверхности. Обозначая потенциал результирующего поля E символом φ , имеем условие

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{const} \quad \text{при } r = R, \quad (20.3)$$

где φ_2 — потенциал поля E_2 . Оно может быть выполнено лишь в том случае, если φ_2 изменяется при $r = R$ так же, как и φ_1 , т. е. является косинусоидальной функцией угла α .

Потенциал φ_2 должен удовлетворять уравнению Лапласа. Общее решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах получено в приложении 7; φ_2 надо рассматривать как произведение функций $\mathcal{R}(r)$ и $\mathcal{A}(\alpha)$, общий вид которых дается формулами (П7.4) и (П7.5). Поскольку, как следует из (20.3) и (20.2), азимутальная зависимость имеет вид $\cos \alpha$, следует в общем решении

$$\varphi_2 = (A \cos n\alpha + B \sin n\alpha) (Cr^n + Dr^{-n}) \quad (20.4)$$

взять $n = 1$ и $B = 0$, а так как потенциал φ_2 не может неограниченно возрастать по мере удаления от цилиндра, то также $C = 0$. Следовательно,

$$\varphi_2 = Kr^{-1} \cos \alpha, \quad (20.5)$$

где $K = AD$ — пока неизвестная постоянная.

Внося выражения (20.2) и (20.5) в граничное условие (20.3), видим, что оно выполняется при

$$K = E_1 R^2, \quad (20.6)$$

потому что при этом значении K азимутальная зависимость потенциала на поверхности цилиндра

$$\varphi(R) = \varphi_{0i} - E_1 R \cos \alpha + KR^{-1} \cos \alpha$$

компенсируется, и он оказывается постоянным. В сущности, определив K в (20.5), мы завершили решение внешней задачи Дирихле (П5.9) для цилиндра при граничном условии (20.3).

Зная φ_1 и φ_2 , потенциал φ результирующего поля E получим как их сумму. Используя (20.2), (20.5) и (20.6), находим

$$\varphi = \varphi_{0i} - E_1 \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \alpha. \quad (20.7)$$

Для определения напряженности поля E возьмем формулу (14.3) и представление градиента в цилиндрических координатах (П1.8). Это дает

$$E = r_0 E_1 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \alpha - \alpha_0 E_1 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \alpha. \quad (20.8)$$

Поставленная задача решена. Полагая в (20.8) $r = R$, убеждаемся, что вектор E нормален поверхности цилиндра:

$$E(R) = r_0 2E_1 \cos \alpha, \quad (20.9)$$

а по мере удаления от него E приближается к напряженности первоначального («невозмущенного») поля E_1 :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E = E_1 (r_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) = x_0 E_1 = E_1. \quad (20.10)$$

Строение результирующего («возмущенного») поля $E(D)$ схематически представлено на рис. 20.2, а. Интересно, что дополнительное («возмущающее») поле

$$E_2 = E_1 \frac{R^2}{r^2} (r_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha), \quad (20.11)$$

налагающееся на первоначальное однородное поле E_1 , таково, как если бы оно было создано параллельными заряженными нитями с моментом на единицу длины (§ 16, п. 5)

$$\tau d = 2\pi R^2 \epsilon E_1, \quad (20.12)$$

что следует из сравнения (20.11) и (16.19).

2. Диэлектрический цилиндр. Возьмем теперь вместо проводящего цилиндра диэлектрический. Искомое результирующее поле в данном случае должно существовать как вне, так и внутри цилиндра; введем обозначения:

$$E = \begin{cases} E_e, & r > R, \\ E_i, & r < R. \end{cases} \quad (20.13)$$

Радиальная и азимутальная компоненты внешнего и внутреннего полей подчинены на поверхности цилиндра граничным условиям, следующим из (7.7а) и (7.3):

$$\left. \begin{aligned} E_{e\alpha} &= E_{i\alpha}, \\ \epsilon_e E_{er} &= \epsilon_i E_{ir} \end{aligned} \right\} r=R, \quad (20.14)$$

где ϵ_i и ϵ_e — диэлектрические проницаемости цилиндра и внешней среды соответственно.

Потенциал внешнего поля представим в виде суммы

$$\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (20.15)$$

где φ_1 — по-прежнему потенциал первоначального поля E_1 (20.2), а φ_2 имеет вид (20.5), причем коэффициент K еще не известен.

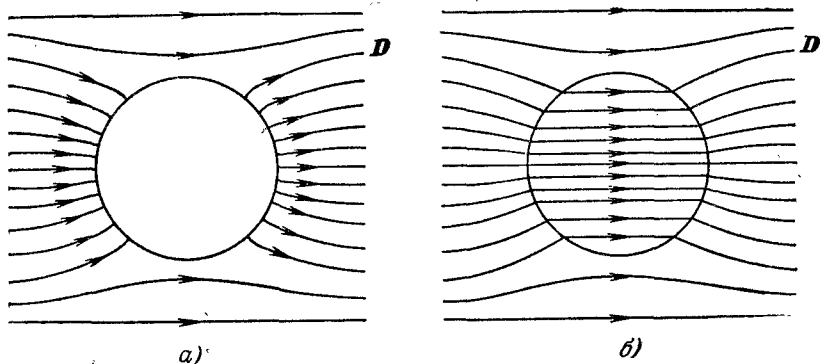


Рис. 20.2.

Что касается потенциала внутреннего поля φ_i , то он, так же как и φ_2 , представляется решением уравнения Лапласа типа (20.4) при $n = 1$ и $B = 0$. Но вид радиальной функции $\mathcal{R}(r)$ теперь иной: необходимо взять $D = 0$, так как иначе φ_i обращается в бесконечность на оси цилиндра. Таким образом,

$$\varphi_i = Mr \cos \alpha. \quad (20.16)$$

Выражая поле через потенциалы по формуле (14.3), имеем:

$$\left. \begin{aligned} E_e &= r_0 \left(E_1 + \frac{K}{r^2} \right) \cos \alpha - \alpha_0 \left(E_1 - \frac{K}{r^2} \right) \sin \alpha, \\ E_i &= M \left(-r_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha \right) \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

и, взяв отсюда выражения их компонент для подстановки в граничные условия (20.14), превращаем последние в систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов K и M :

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{R^2} - M &= E_1, \\ \frac{K}{R^2} + \frac{\epsilon_i}{\epsilon_e} M &= -E_1. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом:

$$K = E_1 R^2 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \quad \text{и} \quad M = -2E_1 \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}, \quad (20.18)$$

и из (20.17) находится следующее решение поставленной задачи о диэлектрическом цилиндре:

$$\left. \begin{aligned} E_e &= E_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \right) \cos \alpha - \alpha_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \right) \sin \alpha \right], \\ E_i &= \frac{2E_1 \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} (r_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) = \frac{2E_1 \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e}. \end{aligned} \right\} \quad (20.19)$$

Характерно, что внутреннее поле однородно и параллельно первоначальному («невозмущенному») полю E_1 . Внешнее же представляет собой сумму поля E_1 и поля

$$E_2 = E_1 \frac{R^2}{r^2} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} (r_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha), \quad (20.20)$$

как бы созданного параллельными заряженными нитями с моментом на единицу длины

$$\tau d = 2\pi R^2 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + \varepsilon_e} \varepsilon_e E_1. \quad (20.21)$$

Представление о структуре поля дает рис. 20.2, б.

В заключение отметим, что при решении задач вместо граничных условий (20.14) можно было бы воспользоваться эквивалентными граничными условиями для потенциалов, следующими из (14.12). Читателю предлагается проверить это.

3. Сферические тела. Поляризованность. Совершенно аналогично можно получить решение задачи о помещении в однородное электростатическое поле проводящего или диэлектрического шара. Для этого сначала методом разделения переменных (Приложение 7)

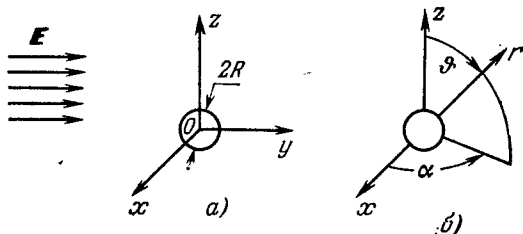


Рис. 20.3.

находится общее решение уравнения Лапласа в сферических координатах. Однако действия существенно сокращаются, если догадаться, что диэлектрический шар подобно цилиндру поляризуется однородно.

Таким образом, будем с самого начала учитывать, что внутреннее поле шара E_i параллельно первоначальному полю E_1 :

$$E_i = A E_1. \quad (20.22)$$

Ориентация используемой в дальнейшем сферической системы координат относительно первоначального поля показана на рис. 20.3, а, б.

При этом создаваемое шаром дополнительное поле E_2 , при наложении на E_1 дающее внешнее результирующее поле

$$E_e = E_1 + E_2, \quad (20.23)$$

должно иметь характер поля диполя, расположенного в центре шара:

$$E_2 = \frac{B}{r^3} (r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (20.24)$$

Что касается первоначального поля, то в используемой системе координат оно имеет вид

$$E_1 = z_0 E_1 = E_1 (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (20.25)$$

Налагая на E_e и E_i граничные условия (7.7а) и (7.3), имеем

$$\left. \begin{aligned} E_{e\vartheta} &= E_{i\vartheta}, \\ \varepsilon_e E_{er} &= \varepsilon_i E_{ir}, \end{aligned} \right\} r = R, \quad (20.26)$$

что приводит к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов A и B :

$$\left. \begin{aligned} AE_1 + \frac{B}{R^3} &= E_1, \\ AE_1 \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_e} - \frac{2B}{R^3} &= E_1, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$A = \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \quad \text{и} \quad B = E_1 R^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}. \quad (20.27)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} E_e &= E_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \right) \cos \vartheta - \vartheta_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \right) \sin \vartheta \right], \\ E_i &= \frac{3E_1 \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e}. \end{aligned} \right\} \quad (20.28)$$

Это поле в плоскости симметрии шара похоже на аналогичное поле в случае цилиндра (рис. 20.2, б).

Сравнивая формулы (20.24) и (15.13), находим эквивалентный электрический момент диэлектрического шара в поле E_1 :

$$p = 4\pi R^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \varepsilon_e E_1. \quad (20.29)$$

Пусть шар находится в вакууме ($\varepsilon_e = \varepsilon_0$, $\varepsilon_i = \varepsilon$). Ввиду однородности внутреннего поля поляризованность диэлектрика P (§ 18, п.2) на основании (18.10) есть

$$P = \frac{p}{V} = 3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 E_1, \quad (20.30а)$$

и в то же время, согласно (18.7) из (20.28),

$$P = D_i - \varepsilon_0 E_i = (\varepsilon - \varepsilon_0) E_i = 3 \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \varepsilon_0 E_1. \quad (20.30б)$$

Подобную же проверку читателю рекомендуется выполнить и для случая цилиндра (п. 2).

В случае проводящего шара внутреннее поле E_i отсутствует. Поскольку в (20.28) $E_i \rightarrow \infty$ при $\epsilon_i/\epsilon_e \rightarrow \infty$, то можно предположить, что при этом же предельном переходе в первом из соотношений (20.28) будет получено внешнее (результатирующее) поле для проводящего пара. Найденное выражение

$$E = E_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \vartheta - \vartheta_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \vartheta \right] \quad (20.31)$$

действительно даёт решение задачи о проводящем шаре. Легко убедиться, что вектор E (20.31) на поверхности шара направлен по нормали

$$E(R) = r_0 3E_1 \cos \vartheta, \quad (20.32)$$

а при $r \rightarrow \infty$ поле E стремится к E_1 ; в плоскости симметрии шара оно похоже на аналогичное поле цилиндра (рис. 20.2, а). Эквивалентный электрический момент проводящего шара есть

$$p = 4\pi\epsilon_e R^3 E_1. \quad (20.33)$$

Заканчивая параграф, напомним замечание, сделанное в начале § 18, п. 2. Как можно показать, решая задачу методом разделения переменных (см. например, [А.2]), однородным оказывается внутреннее поле любого эллипсоидального диэлектрического тела, помещенного в заданное однородное поле (рис. 18.2). Шар, цилиндр, а также плоский слой — это частные формы эллипсоида.

§ 21. Магнитостатика

1. Основные уравнения. Начнем с записи системы уравнений (§ 13, п. 2), характеризующих неизменное во времени магнитное поле в пространстве без токов:

$$\operatorname{rot} H = 0, \quad (21.1a)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (21.1б)$$

$$B = \mu H. \quad (21.1в)$$

Эти уравнения магнитостатики аналогичны уравнениям электростатики (14.1), однако существенное различие заключается в том, что в правой части (21.1б) мы имеем нуль, тогда как в подобном электростатическом уравнении (14.1б) стоит плотность заряда ρ : свободные магнитные заряды в природе отсутствуют. Интегральные соотношения, отвечающие двум уравнениям (21.1), имеют вид

$$\oint_L H dl = 0, \quad (21.2a)$$

$$\oint_S B ds = 0. \quad (21.2б)$$

Напомним также, что граничные условия для векторов поля, входящих в уравнения магнитостатики, (7.4a) и (7.8a) формально

идентичны используемым в электростатике граничным условиям (7.3) и (7.7а), первое из которых справедливо в отсутствие поверхностного заряда.

Как и в электростатике, мы можем выразить напряженность поля в виде градиента потенциала:

$$\mathbf{H} = -\text{grad } \varphi^M. \quad (21.3)$$

Из (21.1б), (21.1в) получаем относительно φ^M уравнение

$$\text{div } \mu \text{ grad } \varphi^M = 0, \quad (21.4)$$

подобное (25.8), которое в случае однородной среды ($\mu = \text{const}$) переходит в уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \varphi^M = 0. \quad (21.5)$$

Нетрудно также на основе (7.4а) и (7.8а) и (21.3) получить граничные условия для магнитоэстатического потенциала φ^M , аналогичные условиям (14.12):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^M &= \varphi_2^M, \\ \mu_1 \frac{\partial \varphi_1^M}{\partial \nu} &= \mu_2 \frac{\partial \varphi_2^M}{\partial \nu}. \end{aligned} \right\} \quad (21.6)$$

Наконец, подобно тому, как это было сделано в § 14, п.4, для случая однородной среды можно получить векторное уравнение Лапласа

$$\nabla^2 \mathbf{H} = 0. \quad (21.7)$$

2. Магнитоэстатика и электростатика. Из всего сказанного следует, что магнитоэстатическим объектам можно сопоставить электростатические без свободных зарядов, причем нет надобности заново решать магнитоэстатическую задачу, если уже решена соответствующая ей электростатическая. Действительно, ввиду соответствия уравнений (21.1) и (14.1), а также указанных граничных условий векторные функции \mathbf{H} и \mathbf{B} должны прямо получаться из \mathbf{E} и \mathbf{D} при замене ϵ на μ . Так, например, на основании результатов § 20 мы можем теперь прямо выписать решения задач о внесении в однородное магнитоэстатическое поле \mathbf{H}_1 цилиндра и шара из магнетика. В силу (20.19) для цилиндра имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_e &= H_1 \left[r_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \cos \alpha - \alpha_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \sin \alpha \right], \\ \mathbf{H}_i &= \frac{2\mu_e H_1}{\mu_i + \mu_e}, \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

где μ_i и μ_e — магнитные проницаемости цилиндра и внешнего пространства соответственно. Аналогично из (20.28) получаем следующие формулы для шара:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_e &= H_1 \left[r_0 \left(1 + 2 \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \cos \vartheta - \vartheta_0 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\mu_i - \mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} \right) \sin \vartheta \right], \\ \mathbf{H}_i &= \frac{3\mu_e H_1}{\mu_i + 2\mu_e}. \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

3. Магнитные диполи и намагниченность. Сделаем дальнейшие сопоставления. В § 18 было выяснено, что поляризованность P есть электрический момент среды, отнесенный к единице объема: диэлектрик ведет себя, как система диполей. Подобно этому магнетик можно рассматривать как систему *магнитных диполей*. Таким образом, хотя *свободные* магнитные заряды отсутствуют, представление о *связанных* магнитных зарядах имеет под собой реальную почву (см. позднее § 23). Условно можно говорить о системе двух неразделимых магнитных зарядов, равных по абсолютной величине и противоположных по знаку, которая обладает *магнитным моментом* m и действует как магнитный диполь. Намагниченность M , определяемая формулой (5.2),

$$M = B - \mu_0 H \quad (21.10)$$

есть, следовательно, магнитный момент среды, отнесенный к единице объема (ср. § 18, п. 2).

В магнитостатической задаче о шаре, решение которой выражается формулами (21.9), последний ведет себя как магнитный диполь. Полагая, что шар с магнитной проницаемостью μ находится в вакууме ($\mu_i = \mu$, $\mu_e = \mu_0$), запишем выражение его магнитного момента на основании (20.29):

$$m = 4\pi R^3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 H_1. \quad (21.11)$$

Намагниченность шара есть

$$M = \frac{m}{V} = 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 H_1 \quad (21.12a)$$

(ср. (20.30a)), и в то же время в силу (21.10) из (21.9):

$$M = B_i - \mu_0 H_i = (\mu - \mu_0) H_i = 3 \frac{\mu - \mu_0}{\mu + 2\mu_0} \mu_0 H_1 \quad (21.12b)$$

(ср. (20.30б)).

Далее вычислим разность между первоначальным полем $H_1 = z_0 H_1$, в которое помещается шар, и его внутренним полем H_i . Эта величина

$$H_{\text{разм}} = H_1 - H_i = \frac{\mu - \mu_0}{\mu - 2\mu_0} H_1 \quad (21.13)$$

является «размагничивающим полем» связанных зарядов. Соответственно этому отношение

$$\frac{B_{\text{разм}}}{M} = \frac{\mu_0 H_{\text{разм}}}{M} = \frac{1}{3}, \quad (21.14)$$

легко получаемое из (21.12) и (21.13), называется *размагничивающим фактором* шара.

Понятие размагничивающего фактора используется не только в случае шара. Оно сохраняет строгий смысл для всех тел, которые

в однородном поле намагничиваются параллельно ему и однородно¹⁾. Таким свойством обладает эллипсоид (ср. § 18, п. 2 и § 20, п. 3), намагничиваемый вдоль одной из осей симметрии, а также (кроме шара) бесконечно плоский слой и цилиндр, которые можно рассматривать как вырожденные формы эллипсоида. Читателю предлагается путем непосредственного вычисления размагничивающего фактора

$$N = \frac{\mu_0 H_{\text{разм}}}{M} \quad (21.15)$$

проверить следующую таблицу.

Таблица 21.1

Размагничивающий фактор

Форма тела	Ориентация поля	Размагничивающий фактор N
Шар		1/3
Цилиндр (бесконечный)	поперечная	1/2
То же	продольная	0
Слой (бесконечный)	поперечная	1
То же	продольная	0

Следует иметь в виду, что в технике понятие размагничивающего фактора имеет хождение и в тех случаях, когда внутреннее поле не

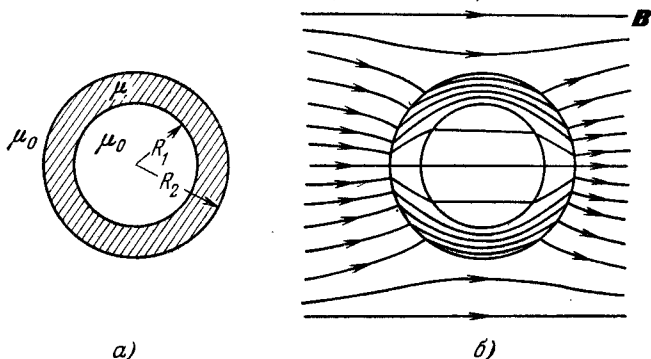


Рис. 21.1.

является однородным, но может считаться достаточно близким к однородному.

¹⁾ Если внутреннее поле однородно, но не параллельно первоначальному, то может быть введен тензорный (ср. § 5, п. 4) размагничивающий фактор (так делается, например, при произвольной ориентации изотропного или анизотропного эллипсоида).

Тело из магнетика с высокой проницаемостью, содержащее полость, может быть использовано для *магнитного экранирования*, т. е. для защиты какого-либо предмета (помещаемого в эту полость) от действия внешних магнитных полей. Возьмем, например, полый шар (рис. 21.1, а). Помещая его в однородное магнитное поле H_1 , обнаруживают, что поле в полости существенно слабее, а именно

$$H = \left[1 + \frac{2}{9} \left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3} \right) \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\mu}{\mu_0} - 2 \right) \right]^{-1} H_1. \quad (21.16)$$

Этот результат можно получить, решая граничную задачу, подобно тому как это делалось в § 20. Строение поля показано на рис. 21.1, б. Из (21.16) видно, что при бесконечном возрастании магнитной проницаемости шара μ внутреннее поле H исчезает, а при заданной проницаемости степень экранирования зависит от толщины оболочки.

4. Самопроизвольная намагниченность. Заключительные замечания. В § 5, п. 1 очень кратко были упомянуты самопроизвольные процессы в веществе, которым соответствует макроскопически наблюдаемое поле. В ряде случаев среда оказывается электрически или магнитно поляризованной без воздействия внешнего поля. Можно, например, поместив в электрическое поле диэлектрик типа расплавленной смолы, поляризовать его и сохранить поляризацию (т. е. некоторую преимущественную ориентацию молекулярных диполей) после застывания уже в отсутствие внешнего поля. Такие среды, называемые иногда *электретами*, не могут долго сохранять самопроизвольную поляризацию вследствие естественной проводимости. Некоторые вещества — *сегнетозлектрики* — могут обладать самопроизвольной электрической поляризацией в силу асимметрии кристаллической структуры. Но гораздо более распространенным и устойчивым оказывается явление самопроизвольной магнитной поляризации. Намагниченные ферромагнетики — *постоянные магниты* — сохраняют свою намагниченность потому, что не существует свободных магнитных зарядов, а следовательно, и соответствующих токов. Формально среды с самопроизвольной электрической поляризацией и с самопроизвольной намагниченностью анализируют одинаково. Остановимся на последнем случае.

Будем исходить из основных уравнений магнитостатики (21.1), однако последнее из них (21.1в) нуждается теперь в некотором изменении. К (21.1в), т. е. (5.7), мы пришли, заменяя в (5.2) M через $\chi^m \mu_0 H$ в соответствии с (5.5). Вместо (5.5) напомним:

$$M = \chi^m \mu_0 H + M^0, \quad (21.17)$$

где M^0 — самопроизвольная намагниченность (не зависящая от H). Тогда

$$B = \mu H + M^0, \quad (21.18)$$

причем по-прежнему μ определяется соотношением из (5.8).

Поскольку уравнение (21.16) никак не затрагивается, граничное условие (7.4а) остается в силе, но в соответствии с (21.18) из

него следует новое условие для нормальных компонент вектора \mathbf{H} , включающее \mathbf{M}^0 :

$$\mu_1 H_{v1} + M_{v1}^0 = \mu_2 H_{v2} + M_{v2}^0. \quad (21.19)$$

Далее, раз не затрагивается уравнение (21.1а), то сохраняет свой смысл представление (21.3) и граничное условие (7.8а). Что же касается уравнения (21.4), то вместо него получаем

$$\operatorname{div} \mu \operatorname{grad} \varphi^M = \operatorname{div} \mathbf{M}^0, \quad (21.20)$$

и соответственно вместо уравнения Лапласа (21.5)

$$\nabla^2 \varphi^M = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{M}^0. \quad (21.21)$$

Для случая неограниченной среды с постоянной проницаемостью μ мы сразу можем выписать общее решение этого уравнения Пуассона на основании (П5.6) и (П5.7):

$$\varphi^M(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi\mu} \int_V \frac{\operatorname{div} \mathbf{M}^0(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad (21.22)$$

(предполагается, что $\operatorname{div} \mathbf{M}^0 \neq 0$ в ограниченной области). По форме это выражение повторяет (18.17), очевидно, $-\operatorname{div} \mathbf{M}^0$ есть плотность связанных магнитных зарядов (ср. (18.21)).

Не занимаясь реализацией решения (21.22), рассмотрим однородно намагниченный шар с проницаемостью μ_i в ненамагниченной среде с другими свойствами ($\mu = \mu_e$). Итак, пусть внутри шара

$$\mathbf{M}^0 = z_0 \mathbf{M}^0 = M^0 (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta), \quad r < R \quad (21.23)$$

(используются те же координаты, что и в § 20, п. 3). При этом внутреннее магнитное поле также однородно:

$$\mathbf{H}_i = z_0 \mathbf{A} = A (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta), \quad r < R, \quad (21.24)$$

а внешнее имеет характер поля диполя:

$$\mathbf{H}_e = \frac{B}{r^3} (r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta), \quad r > R \quad (21.25)$$

(ср. § 20, п. 3). Задача состоит в определении коэффициентов A и B .

Налагая при $r = R$ граничные условия (7.8а) и (21.19), записываем:

$$\left. \begin{aligned} -A &= \frac{B}{R^3}, \\ \mu_i A + M^0 &= 2\mu_e \frac{B}{R^3}, \end{aligned} \right\} \quad (21.26)$$

откуда сразу находятся эти коэффициенты. Поле найдено:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_i &= -\frac{M^0}{\mu_i + 2\mu_e} (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta) = \frac{-M^0}{\mu_i + 2\mu_e}, \\ \mathbf{H}_e &= \frac{M^0}{\mu_i + 2\mu_e} \frac{R^3}{r^3} (r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (21.27)$$

Рассмотренный шаровой магнит действует как магнитный диполь с моментом

$$m = 4\pi R^3 \frac{\mu_e}{\mu_i + 2\mu_e} M^0. \quad (21.28)$$

Если среда в целом однородна ($\mu_i = \mu_e$), то

$$m = \frac{4\pi R^3}{3} M^0 = M^0 V, \quad (21.28a)$$

где V — объем магнита. На рис. 21.2 представлена картина линий вектора \mathbf{B} , соответствующая полю (21.27).

В заключение сделаем некоторые замечания. Круг явлений магнитостатики в сравнении с явлениями электростатики более беден в том смысле, что нет ни свободных магнитных зарядов, ни сред, аналогичных проводникам. Однако изучение некоторых важных для магнитостатики сред, и

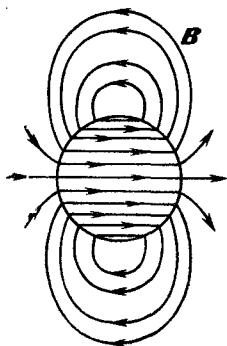


Рис. 21.2.

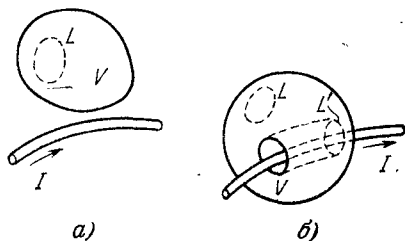


Рис. 21.3.

особенно ферромагнетиков, составляет обширную и сложную область физики, которой мы пока не касаемся (см. § 86, п. 2).

Поскольку магнитное поле связано с током (§ 2, п. 3), уравнения (21.1) и (21.2) имеют ограниченную область применения: они применимы лишь в тех точках и частях пространства, где нет тока. При этом магнитостатический потенциал ϕ^m вполне аналогичен электростатическому потенциалу ϕ . Следует, впрочем, уточнить, что же можно считать областью пространства без тока. Сравним рис. 21.3, а и 21.3, б. На первом из них область V такова, что любой содержащийся в ней замкнутый контур не охватывает тока I , и уравнение (21.2a) остается справедливым. Этим свойством, как видно, не обладает область V , показанная на рис. 21.3, б: контуры, охватывающие ток, в данном случае существуют, и для каждого из них вместо (21.2a) надо писать соотношение, содержащее справа I . Мы должны заключить, что, хотя во всех точках данной области $\mathbf{j} = 0$, она все же не может рассматриваться с позиций магнитостатики.

Обсуждение поставленного вопроса будет продолжено в следующем параграфе.

II. СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Стационарное электромагнитное поле существует при наличии неизменного во времени тока проводимости ($\mathbf{j} \neq 0$, $\partial/\partial t = 0$) и описывается системой уравнений (13.6), к которой сводятся при этом уравнения Максвелла. Впоследствии (§ 26) будет установлено, что такое поле в реальных условиях должно поддерживаться сторонними силами, расходующими энергию неэлектромагнитного происхождения, что отражается в записи последнего из уравнений (13.6) в форме (6.11).

Заметим, что в системе уравнений (13.6) можно выделить относительно независимые группы уравнений (левый и правый столбец). Одна из этих групп (левый столбец) совпадает с системой уравнений электростатики (14.1), причем первое из указанных уравнений, как и в электростатике, свидетельствует о потенциальном характере электрического поля. Но отличие электрического поля постоянного тока от поля электростатического заметить нетрудно. Внутри проводящих тел теперь $\mathbf{E} \neq 0$, что является прямым следствием существования тока ($\mathbf{j} \neq 0$). А поскольку токи проходят и вдоль границ проводников с диэлектрической средой, то эти поверхности уже не эквипотенциальны.

Вторая группа уравнений (13.6) — правый столбец — содержит магнитные величины и отличается от уравнений магнитостатики (21.1) наличием плотности тока проводимости. Самостоятельность этих уравнений проявляется в том, что они вполне определяют магнитное поле заданного постоянного тока. Часто круг характерных ими явлений также называют «магнитостатикой».

В идеальном электростатическом поле (см. § 14 и ранее) нет движения энергии: так как $\mathbf{H} = 0$, то в каждой точке пространства обращается в нуль вектор Пойнтинга. По аналогичным причинам нет движения энергии в идеальном магнитостатическом поле (§ 21), где $\mathbf{E} = 0$. Чтобы подчеркнуть характерное отличие стационарного электромагнитного поля, заметим, что движение энергии в нем существует, хотя и носит ограниченный характер. Именно, если построить замкнутую поверхность, охватывающую все токи и сторонние силы, то окажется (§ 26), что полный поток энергии через нее равен нулю.

§ 22. Уравнения стационарного магнитного поля. Векторный потенциал

1. Основные уравнения и свойства магнитостатического потенциала. В соответствии со сказанным магнитное поле заданного постоянного тока описывается системой уравнений (§ 13, п. 2)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (22.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (22.1б)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (22.1в)$$

и соответствующими интегральными соотношениями

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I, \quad (22.2a)$$

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0. \quad (22.2б)$$

Согласно (22.1a) магнитное поле уже не потенциально, как в случае чистой магнитостатики (§ 21), поскольку $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$. Впрочем, рассматривая только области без тока ($\mathbf{j} = 0$), можно, как и ранее, ввести потенциал Φ^M (21.3). В связи с этим вернемся к вопросу, затронутому в конце п. 4 в § 21.

Пусть во всех точках, где определяется напряженность магнитного поля \mathbf{H} , ток отсутствует, и мы вправе выразить \mathbf{H} как $-\text{grad } \Phi^M$. Тогда можно произвести выкладки, формально не отличающиеся от тех, которые привели к выражению (14.6), и получить аналогичное равенство

$$\Phi_1^M - \Phi_2^M = \int_{M_1}^{M_2} \mathbf{H} d\mathbf{l}, \quad (22.3)$$

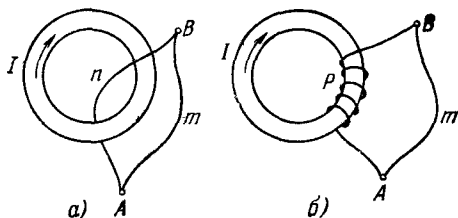


Рис. 22.1.

но смысл его оказывается значительно сложнее. Рассмотрим применение этой формулы в случае, показанном на рис. 22.1, а. Используя путь интегрирования Amb , запишем:

$$\Delta\Phi_{Amb}^M = \int_{(Amb)} \mathbf{H} d\mathbf{l}. \quad (22.3a)$$

Теперь учтем, что, согласно (22.2a),

$$\oint_{(AmbnA)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

и в то же время

$$\oint_{(AmbnA)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(Amb)} \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_{(BnA)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{(Amb)} \mathbf{H} d\mathbf{l} - \int_{(AnB)} \mathbf{H} d\mathbf{l}.$$

Поэтому, интегрируя вдоль пути AnB , получаем

$$\Delta\Phi_{AnB}^M = \int_{(AnB)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \Delta\Phi_{Amb}^M - I. \quad (22.3б)$$

Этот результат означает, что разность потенциалов $\Phi_1^M - \Phi_2^M$ изменилась на величину I при однократном обходе тока. Точно так же можно убедиться, что при k -кратном обходе тока (рис. 22.1, б)

$$\Delta\Phi_{ApB}^M = \Delta\Phi_{Amb}^M - kI, \quad (22.3в)$$

причем величина k положительна, если обход $AmbpA$ связан с

направлением тока правовинтовой системой, а при противоположном направлении обхода (левовинтовая система) — отрицательна.

Итак, потенциал φ^M в общем случае — неоднозначная функция. Он однозначен и подобен электростатическому потенциалу только для односвязных областей без тока.

С целью сделать φ^M однозначной функцией можно наложить запрет на обход тока, затянув все контуры тока воображаемой пленкой, через которую не могут проходить пути интегрирования

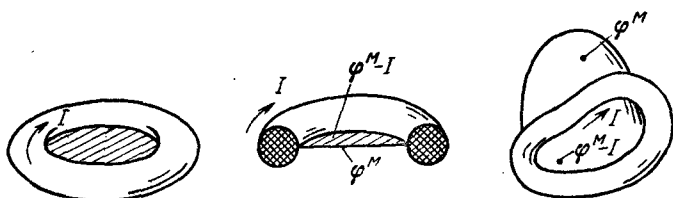


Рис. 22.2.

(рис. 22.2). Форма каждой такой опирающейся на контур поверхности безразлична; согласно предыдущему это поверхность *разрыва* потенциала φ^M на величину I .

2. Уравнение напряженности магнитного поля. Заданное распределение постоянного тока вполне определяет магнитное поле. Применяя операцию rot в уравнении (22.1а), получаем следующее векторное уравнение второго порядка:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{j}. \quad (22.4)$$

Операции rot может подвергаться не всякая, а только достаточно гладкая функция распределения тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. Во всяком случае должна быть непрерывна тангенциальная компонента функции \mathbf{j} , а это значит, что на границе области тока она должна обращаться в нуль. Физических ограничений это требование не налагает: всегда можно считать, что спад j_τ до нуля происходит в весьма тонком слое.

Левую часть (22.4) можно преобразовать при помощи тождества (П1.34). Если среда однородна ($\mu = \text{const}$), то ввиду (22.1б) $\text{div } \mathbf{H} = 0$; тогда (22.4) принимает следующую форму:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\text{rot } \mathbf{j}. \quad (22.5)$$

Это известное уже векторное уравнение Пуассона (П1.6), и мы сразу можем записать его решение для бесконечной области при ограниченном в пространстве распределении тока на основании (П1.7):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (22.6)$$

Непосредственное применение формулы (22.6) может быть затруднительным из-за необходимости дифференцировать функцию распределения тока \mathbf{j} , но (22.6) легко преобразовать к удобному

для интегрирования в виду. Заметив, что подынтегральное выражение имеет форму $\psi \operatorname{rot} \mathbf{F}$, используем тождество (П1.35), в силу которого

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' - \int_V \left[\operatorname{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] dv' \right\}. \quad (22.6a)$$

Первый интеграл ввиду (П1.28) сводится к поверхностному:

$$\int_V \operatorname{rot}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' = - \oint_S \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), d\mathbf{s}']}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

после чего становится ясным, что он равен нулю: ведь, как подчеркивалось выше, $j_\tau = 0$ на S . Что касается второго интеграла в (22.6a), то здесь подынтегральное выражение преобразуется при помощи формул (П1.11) и (П1.36). В результате получаем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dv, \quad (22.7)$$

где, как и ранее (например, в § 15, п.1), $\mathbf{r}_{0q} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

3. Векторный потенциал. По широко распространенной традиции при определении магнитного поля по заданному току вводят промежуточную векторную функцию \mathbf{A} , называемую *векторным потенциалом*. По определению

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (22.8)$$

Отсюда видно, что в выборе \mathbf{A} допускаются известный произвол, а именно вместо \mathbf{A} всегда можно взять другую функцию

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi, \quad (22.8a)$$

где ψ — любая (достаточно гладкая) скалярная функция. Действительно, поскольку

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

то, согласно (22.8), оба векторных потенциала соответствуют одной и той же функции \mathbf{B} . Векторный потенциал определен, таким образом, с точностью до потенциального слагаемого.

Свойства векторного потенциала вытекают из необходимости удовлетворить исходным уравнениям (22.1). Второе из них не дает никаких сведений о характере \mathbf{A} , так как удовлетворяется тождественно (при любых \mathbf{A}):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0.$$

Заменяя в (22.8) \mathbf{B} через \mathbf{H} и используя уравнение (22.1a), получаем

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{j}. \quad (22.9)$$

Это и есть уравнение, которому подчинен векторный потенциал при заданном токе.

Для однородной среды ($\mu = \text{const}$) найденное уравнение принимает вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}. \quad (22.10)$$

Ввиду отмеченной выше неопределенности \mathbf{A} мы имеем право наложить дополнительное условие

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (22.11)$$

(оно имеет следствием, что ψ в (22.8а) теперь не произвольная, а гармоническая функция, стр. 586). Применяя в (22.10) векторное тождество (П1.34), с учетом (22.11), получаем следующее векторное уравнение Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}. \quad (22.12)$$

Его решение для бесконечной области при ограниченном в пространстве токе на основании (П5.7) есть

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (22.13)$$

Эта формула позволяет по заданному распределению тока в однородной среде вычислять векторный потенциал \mathbf{A} и затем определять магнитное поле, пользуясь соотношением (22.8).

В заключение получим одно важное интегральное выражение, содержащее векторный потенциал. Ранее (§ 2, п. 2) мы определили величину Φ , называемую *магнитным потоком*. Заменяя в (2.5) \mathbf{B} через $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ и используя теорему Стокса, запишем

$$\Phi = \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l}. \quad (22.14)$$

Магнитный поток через некоторую поверхность S представлен здесь в виде циркуляции векторного потенциала \mathbf{A} по контуру L , на который она опирается.

§ 23. Линейные токи. Магнитный диполь

1. Линейные токи. Закон Био — Савара. Представим себе ток I , проходящий вдоль некоторой линии L (не занимающий объема). Это идеальный линейный ток; условно его можно описать как ток в объеме (Приложение 2), введя плотность

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \tau_0 I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (23.1)$$

где τ_0 — единичный вектор касательной к L , указывающий направление тока, а δ -функция двумерная.

Практически можно считать линейным ток проводника постоянного поперечного сечения при условии, что длина проводника и расстояние до точки наблюдения значительно превышают его поперечные размеры (диаметр поперечного сечения).

В случае линейного тока формула (22.7) очевидным образом упрощается (ср. вывод (15.4)). Предварительно в (22.7) при обозначении переменной интегрирования заменим один штрих на два, чтобы избежать совпадения символов разных величин: в (23.1) \mathbf{r}'

есть радиус-вектор точки на L . Внося в (22.7), согласно (23.1), $\mathbf{j}(r'') = \tau_0 I \delta(r'' - r')$, пишем:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(r) &= \frac{I}{4\pi} \int_V \frac{[\tau_0, r_{0q}] \delta(r'' - r')}{|r - r''|^2} dv'' = \\ &= \frac{I}{4\pi} \int_S \int_L \frac{[\tau_0, r_{0q}] \delta(r'' - r')}{|r - r''|^2} ds'' dl' = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[\tau_0, r_{0q}]}{|r - r'|^2} dl', \end{aligned}$$

где L — путь тока, а S — пересекаемая им поверхность (например, перпендикулярная τ_0 плоскость, как на рис. П2.2, а). Разумеется, можно было бы обойтись и без аппарата δ -функции: достаточно взять область тока V в виде провода, в поперечном сечении которого он распределен равномерно, и рассматривать лишь расстояния, в сравнении с которыми диаметр провода пренебрежимо мал.

Найденный результат фиксируем в форме

$$\mathbf{H}(r) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[dl', r_{0q}]}{|r - r'|^2} \quad (23.2)$$

($dl' = \tau_0 dl'$); на рис. 23.1 сделано построение, поясняющее смысл обозначений в (23.2).

Мы получили интегральную формулировку закона Био — Савара; под его дифференциальной формулировкой понимают утверждение, что каждый элемент тока создает поле с напряженностью

$$d\mathbf{H}(r) = \frac{I}{4\pi} \frac{[dl', r_{0q}]}{|r - r'|^2}. \quad (23.2a)$$

Закон Био — Савара позволяет находить магнитное поле линейного тока непосредственно по заданному его распределению. Примеры применения закона Био — Савара будут приведены ниже в § 24.

2. Векторный потенциал линейного тока и другой вывод закона Био — Савара. Подобно тому как выше формула (23.2) была получена из (22.7), найдем выражение векторного потенциала линейного тока, исходя из (22.13). При подстановке в (22.13) плотности линейного тока в виде (23.1), используя прежнее обозначение, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r) &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_V \frac{\tau_0 \delta(r'' - r')}{|r - r''|} dv'' = \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \int_S \int_L \frac{\tau_0 \delta(r'' - r')}{|r - r''|} ds'' dl' = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{\tau_0 dl'}{|r - r'|}. \end{aligned}$$

Запишем это в форме

$$\mathbf{A}(r) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{dl'}{|r - r'|}. \quad (23.3)$$

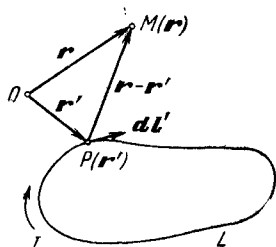


Рис. 23.1.

Формула (23.3) часто применяется при вычислениях; иногда более просто сначала определить векторный потенциал линейного тока, а затем уже напряженность поля по формуле (22.8) с учетом (22.1в).

Покажем теперь традиционный способ получения формулировки закона Био — Савара, опирающийся на выражение для потенциала (23.3). Желая найти общее выражение напряженности магнитного поля, мы должны вычислить $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$; при этом производится дифференцирование по координатам точки наблюдения $M(\mathbf{r})$, остающейся в процессе интегрирования (23.3) неизменной. Поэтому

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \text{rot} \int_L \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{I}{4\pi} \int_L \text{rot} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (23.4)$$

причем данный интеграл можно преобразовать таким образом, чтобы устранить операцию дифференцирования. Возьмем для этого векторное тождество (П1.35), согласно которому

$$\text{rot} \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \text{rot } d\mathbf{l}' + \left[\text{grad} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, d\mathbf{l}' \right].$$

Но $\text{rot } d\mathbf{l}' \equiv 0$, так как векторный элемент линии тока $d\mathbf{l}'$ не зависит от координат точки наблюдения $M(\mathbf{r})$, и первое слагаемое равно нулю. Вычисляя градиент во втором слагаемом при помощи формулы (П1.10), (П1.36), приводим интеграл (23.4) к виду

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[d\mathbf{l}', \mathbf{r}_{0Q}]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \quad (23.5)$$

что совпадает с (23.2), т. е. дает формулировку закона Био — Савара.

3. Круглый контур тока как магнитный диполь. В качестве простейшего примера замкнутого линейного тока рассмотрим его

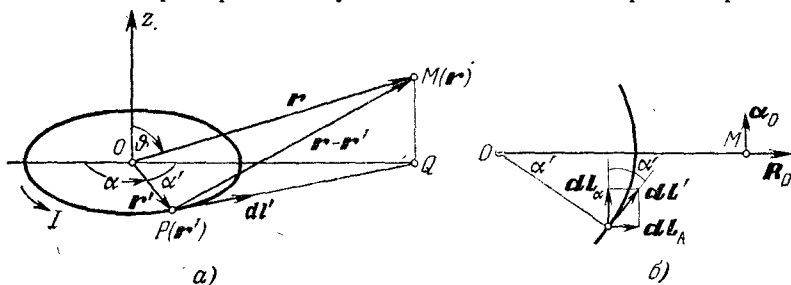


Рис. 23.2.

круглый контур. Расположив начало сферической системы координат в центре круга (рис. 23.2, а), расстояние $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ от точки на контуре $P(\mathbf{r}')$ до точки наблюдения $M(\mathbf{r})$ определим из прямоугольного треугольника PMQ :

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = MQ^2 + PQ^2.$$

Как видно из рис. 23.2, а, здесь $MQ^2 = r^2 \cos^2 \theta$, а PQ^2 находится

из треугольника OPQ , лежащего в плоскости контура тока: $PQ^2 = r^2 \sin^2 \vartheta + (r')^2 - 2rr' \sin \vartheta \cos \alpha'$. Таким образом,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 = r^2 + a^2 + 2ra \sin \vartheta \cos \alpha,$$

где $a = r'$ есть радиус контура и $\alpha = \pi - \alpha'$.

Далее (рис. 23.2, б) векторный элемент длины $d\mathbf{l}'$ разложим на две компоненты:

$$d\mathbf{l}' = \alpha_0 d\mathbf{l}'_\alpha + \mathbf{R}_0 d\mathbf{l}'_R = (-\alpha_0 \cos \alpha + \mathbf{R}_0 \sin \alpha) a d\alpha,$$

где α_0 указывает азимутальное направление в точке M , а \mathbf{R}_0 — радиальное направление в плоскости контура для этой же точки (очевидно, что $\mathbf{R}_0 = r_0 \sin \vartheta + \vartheta_0 \cos \vartheta$).

Полученное пространственное соотношение проще всего использовать для вычисления векторного потенциала по формуле (23.3). При этом имеем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(-\alpha_0 \cos \alpha + \mathbf{R}_0 \sin \alpha) a d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \sin \vartheta \cos \alpha}},$$

а поскольку

$$\int_0^\pi \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \sin \vartheta \cos \alpha}} = - \int_\pi^{2\pi} \frac{\sin \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \sin \vartheta \cos \alpha}},$$

в чем легко убедиться, сопоставляя $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ в каждом из квадрантов, то окончательно:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha_0 \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \sin \vartheta \cos \alpha}}. \quad (23.6)$$

Векторный потенциал магнитного поля круглого контура тока направлен азимутально, как и ток: его линии образуют концентрические окружности в плоскостях $z = \text{const}$. К этому выводу можно было бы прийти и просто из соображений симметрии.

Интеграл (23.6) следует рассматривать как окончательный результат при определении векторного потенциала, поскольку он не выражается через элементарные функции¹⁾. Нас, однако, будет интересовать случай весьма далекой точки наблюдения ($r \gg a$), когда интеграл (23.6) легко упрощается.

Возьмем контур, относительный радиус которого стремится к нулю ($a/r \rightarrow 0$), но таким образом, что произведение его тока на квадрат радиуса остается постоянным ($Ia^2 = \text{const}$). Разлагая зна-

¹⁾ Его можно выразить через так называемые *полные эллиптические интегралы* K и E (табулированные в математических справочниках, например [Л.1]). При этом

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \alpha_0 \frac{\mu I}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{(2 - \xi^2) K(\xi) - 2E(\xi)}{\xi \sqrt{\sin \vartheta}}, \quad \xi^2 = \frac{4ar \sin \vartheta}{r^2 + a^2 + 2ar \sin \vartheta}.$$

менатель подынтегрального выражения по формуле бинома Ньютона, имеем

$$(r^2 + a^2 + 2ra \sin \vartheta \cos \alpha)^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 - \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right]$$

и, переходя к пределу, находим

$$\mathbf{A}(r) = \lim_{\substack{a/r \rightarrow 0 \\ Ia^2 = \text{const}}} \alpha_0 \frac{\mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{-a}{r} \left[1 - \frac{a}{r} \sin \vartheta \cos \alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right] \cos \alpha \, d\alpha,$$

т. е.

$$\mathbf{A}(r) = \alpha_0 \frac{\mu Ia^2}{4r^2} \sin \vartheta. \quad (23.7)$$

Теперь по формуле (22.8), используя выражение вихря вектора в сферических координатах, определяем напряженность магнитного поля:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{Ia^2}{4} \left[\frac{\mathbf{r}_0}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{r} \right) - \frac{\vartheta_0}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{r} \right) \right],$$

что дает

$$\mathbf{H}(r) = \frac{Ia^2}{4r^3} (\mathbf{r}_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (23.8)$$

Полученный результат заслуживает самого пристального внимания. Как видно из прямого сравнения с формулой (15.13), он описывает поле диполя. Рассмотренный контур ведет себя таким образом, как если бы вместо него в точке O находился *идеальный магнитный диполь* с моментом $\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 m$; последний сразу же определяется, как только (23.8) переписано в форме, аналогичной (15.13):

$$\mathbf{H}(r) = \frac{m}{4\pi\mu r^3} (\mathbf{r}_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta). \quad (23.8a)$$

Сопоставляя (23.8) и (23.8a), получаем:

$$\mathbf{m} = \mu I \pi a^2 \mathbf{z}_0. \quad (23.9)$$

Итак, исчезающе малый контур с током, сохраняющий постоянство произведения тока на площадь, в сущности является идеальным магнитным диполем с постоянным моментом \mathbf{m} , а соответственно контур конечных размеров можно считать магнитным диполем на достаточно больших расстояниях.

4. Дальнейшие обобщения. Формулу (23.9), полученную для круглого контура, можно рассматривать как частную форму выражения момента плоского контура с площадью S

$$\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 \mu I S \quad (23.10)$$

(в (23.9) $\pi a^2 = S$). В свою очередь (23.10) — частная форма выражения момента

$$\mathbf{m} = \frac{\mu I}{2} \oint_L [\mathbf{r}, d\mathbf{l}] \quad (23.11)$$

произвольного (неплоского) линейного замкнутого тока, а (23.11) получается из общего выражения момента замкнутого тока, распределенного в объеме

$$m = \frac{\mu}{2} \int_V [r, j(r)] dv \quad (23.12)$$

при подстановке плотности j вида (23.1).

Любой замкнутый ток на достаточно большом расстоянии проявляет себя как магнитный диполь с моментом m .

Чтобы прийти к пониманию этого факта, используем представление о *двойном магнитном слое*. Пусть имеется система связанных магнитных зарядов такого рода, что она выглядит как аналог плоского конденсатора (рис. 23.3, а): две параллельные плоскости либо близкие эквидистантные поверхности несут противоположные по

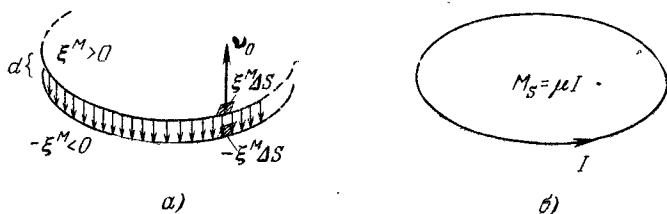


Рис. 23.3.

знаку магнитные заряды; припишем им плотности ξ^M и $-\xi^M$. По аналогии с (17.18)

$$\Delta\varphi^M = \frac{\xi^M d}{\mu}.$$

Если неограниченно сближать поверхности ($d \rightarrow 0$), оставляя постоянной величину $\xi^M d$, то в пределе будет получена поверхность, пересечение которой сопровождается скачком магнитостатического потенциала на величину $\Delta\varphi^M$. Это и есть двойной магнитный слой. Его мощностью M_s называют постоянную величину $\xi^M d$.

Реализацией двойного магнитного слоя является любая поверхность, опирающаяся на контур линейного тока (рис. 23.3, б), поскольку, как было показано в § 22, п.1, на такой поверхности как раз происходит скачок магнитостатического потенциала на величину $\Delta\varphi^M = I$. Следовательно, его мощность есть

$$M_s = \mu I. \quad (23.13)$$

Каждый элемент двойного слоя Δs ведет себя как магнитный диполь (рис. 23.3, а) с моментом

$$\Delta m = v_0 q^M d = v_0 d \xi^M \cdot \Delta s = v_0 M_s \Delta s. \quad (23.14)$$

Таким образом, для двойного слоя, соответствующего контуру тока, ввиду (23.13) имеем

$$\Delta m = v_0 \mu I \Delta s. \quad (23.15)$$

Отсюда путем суммирования всех элементарных моментов (точнее, интегрирования dm по поверхности слоя) получаем момент рассматриваемого тока. В случае плоского контура из (23.15) сразу следует формула (23.10).

В заключение напомним, что представление о магнитных диполях было введено в § 21, п.3 при интерпретации намагниченности среды. Там было, в частности, показано, что как магнитный диполь ведет себя однородно намагниченный шар. Теперь на основании анализа замкнутых токов может быть высказана принятая гипотеза о происхождении связанных магнитных зарядов. Оставаясь в рамках классических представлений, можно утверждать, что роль магнитных диполей вещества, обуславливающих его намагниченность M , играют микроскопические токи, образуемые циклическим движением заряженных частиц материи.

§ 24. Примеры магнитных полей

1. Поля с осевой симметрией. Слоистые системы. При исследовании некоторых простейших магнитных полей постоянного тока удастся использовать соображения симметрии. Подобно тому, как в электростатике применялась теорема Гаусса (§ 16, пп. 1—3), здесь исходят из интегрального соотношения (21.2а).

Еще в § 2, п. 5 таким путем было определено поле бесконечного прямолинейного тока. Ясно, что полученная при этом формула

$$H(r) = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r} \quad (24.1)$$

выражает напряженность магнитного поля любого распределения постоянного тока при той же симметрии, т. е. когда линии вектора H являются окружностями с центрами на некоторой прямой; при этом r есть (по происхождению) радиус окружности контура интегрирования в (21.2а), охватывающей ток I и совпадающей с одной из силовых линий. Рассмотрим несколько типичных примеров применения формулы (24.1).

В случае бесконечного цилиндрического проводника радиуса R с током I полный ток охватывают лишь внешние силовые линии (контур интегрирования), внутренние же — лишь часть полного тока

$$I' = I \left(\frac{r}{R} \right)^2, \quad r \leq R,$$

так что при определении поля внутри проводника в формуле (24.1) следует заменить I на I' . Поэтому оказывается, что

$$H = \begin{cases} \alpha_0 \frac{Ir}{2\pi R^2}, & 0 \leq r \leq R, \\ \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, & r \geq R, \end{cases} \quad (24.2)$$

т. е. внутри проводника поле растет с расстоянием от оси, а вне его

не отличается от поля нити тока (рис. 24.1, а). Интересно, что по распределению интенсивности (абсолютное значение напряженности как функция координат) оно повторяет электрическое поле заряженного цилиндра (16.5).

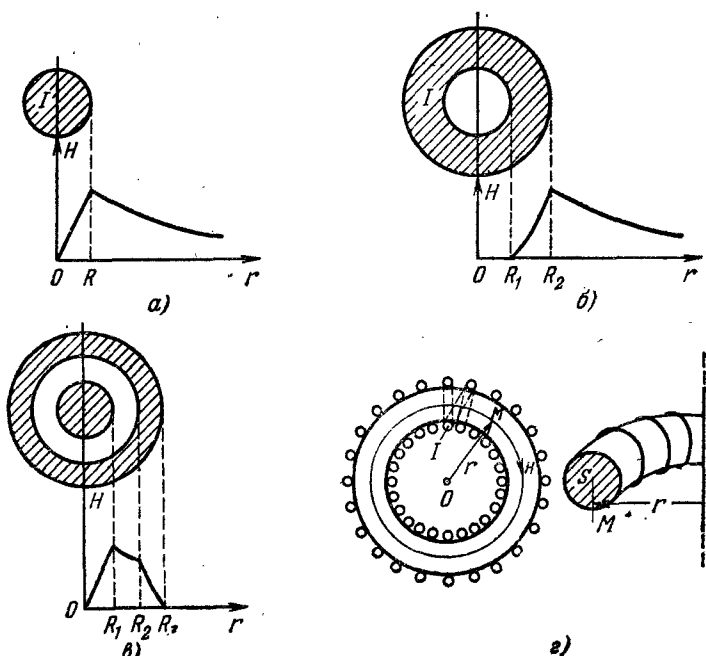


Рис. 24.1.

Аналогично находят поле трубы с током I , но тут уже надо различать три разных области, в первой из которых контуры интегрирования совсем не охватывают тока. Применение формулы (24.1) дает (рис. 24.1, б)

$$H = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_1, \\ \alpha_0 \frac{I (r^2 - R_1^2)}{2\pi (R_2^2 - R_1^2) r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, & r \geq R_2. \end{cases} \quad (24.3)$$

При нахождении поля коаксиального кабеля, по обоим проводникам которого проходят одинаковые, но противоположно направленные токи (I и $-I$), рассматриваются четыре разных области; когда контур интегрирования лежит в наибольшей из них ($r > R_2$ на рис. 24.1, в), то полный охватываемый ток равен нулю ($I - I =$

$= 0$). Напряженность поля выражается следующими формулами (рис. 24.1, в):

$$H = \begin{cases} \alpha_0 \frac{I r}{2\pi R_1^2}, & 0 \leq r \leq R_1, \\ \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \alpha_0 \frac{I (R_2^2 - r^2)}{2\pi (R_2^2 - R_1^2) r}, & R_2 \leq r \leq R_3, \\ 0, & r \geq R_3. \end{cases} \quad (24.4)$$

Несколько иной пример применения прежнего принципа мы имеем в случае тороида с равномерной обмоткой (рис. 24.1, з), по которой проходит ток I . Очевидно, что в силу симметрии магнитные силовые линии можно считать окружностями и для определения поля применять формулу (24.1). При этом, если круговой контур интегрирования лежит вне тороида с обмоткой ($M(r)$ вне S на рис. 24.1, з), то в (24.1) числитель равен нулю, так как контур не охватывает тока либо охватывает взаимно уничтожающиеся токи. Если же контур проходит внутри тороида ($M(r)$ в S на рис. 24.1, з), то в числителе (24.1) надо взять nI , где n — число витков обмотки, поскольку это и есть охватываемый ток. Таким образом,

$$H = \begin{cases} 0, & M(r) \text{ вне } S, \\ \alpha_0 \frac{nI}{2\pi r}, & M(r) \text{ в } S \end{cases} \quad (24.5)$$

(r — расстояние от оси тороида до M). Разумеется, вывод будет вполне строгим, если вместо обмотки взять сплошную проводящую оболочку с током; тогда легко решить вопрос и о поле внутри проводника. Это предоставляется читателю как упражнение.

Путем применения формулы (24.1) нетрудно также находить поля некоторых слоистых систем, например показанного на рис. 24.2

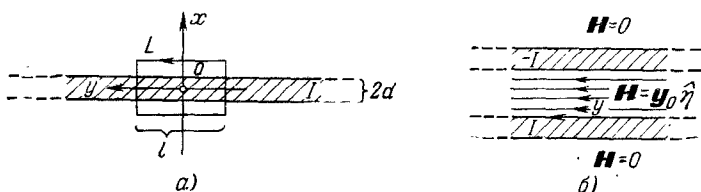


Рис. 24.2.

плоского слоя с равномерно распределенным током, направленным по оси z . Читателю предлагается показать, что в этом случае

$$H = \begin{cases} \pm y_0 \frac{\hat{\eta}}{2} = \pm y_0 dj & \begin{cases} x \geq d, \\ x \leq -d, \end{cases} \\ y_0 \frac{\hat{\eta} x}{2d} = y_0 x j & \begin{cases} 0 \leq x \leq d, \\ 0 \geq x \geq -d, \end{cases} \end{cases} \quad (24.6)$$

где $\hat{\eta} = I/l$ — ток, проходящий через единицу длины слоя (ср. формулы (24.6) и (16.7)). Поле двух одинаковых параллельных слоев с антипараллельными токами, получаемое наложением полей обоих слоев, оказывается между слоями удвоенным ($\mathbf{H} = y_0 \hat{\eta}$), а вне системы отсутствует ($\mathbf{H} = 0$), рис. 24.2, б.

2. Магнитные цепи. Вернемся к предпоследнему примеру. Полагая магнитное поле тороида (рис. 24.1, з) однородным по радиальному («поперечному») сечению, выразим проходящий через него магнитный поток $\Phi \approx BS = \mu HS$. На основании (24.5)

$$\Phi \approx \frac{nI}{\frac{L}{\mu S}}, \quad L = 2\pi R_{\text{ср}}. \quad (24.7)$$

Магнитный поток Φ аналогичен току, величина nI — э. д. с., а $L/\mu S$ — сопротивлению электрической цепи из однородного провода длиной L с поперечным сечением S ; при этом магнитная проницаемость аналогична удельной проводимости. В этом смысле

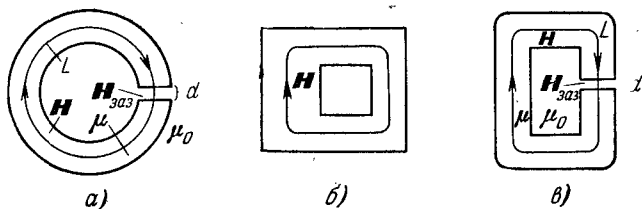


Рис. 24.3

говорят о «магнитной цепи», а nI называют «магнитодвижущей силой» (м. д. с.).

Понятие магнитной цепи оправдано в тех случаях, когда магнитный поток можно считать сосредоточенным в замкнутом сердечнике электромагнита независимо от его формы и размещения обмотки, т. е. системы, показанные на рис. 24.3, приближенно рассматриваются как магнитные цепи.

Возьмем сердечник практически постоянного поперечного сечения с зазором (рис. 24.3, а, в). Производя интегрирование в (24.1) по некоторой «средней» магнитной силовой линии, имеем

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} \approx H(L - d) + H_{\text{заяз}}d.$$

Этот интеграл равен м. д. с. nI , а напряженность в тороиде (сердечнике) и его зазоре нетрудно выразить через магнитный поток, который считается везде одинаковым:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S}, \quad H_{\text{заяз}} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\Phi}{\mu_0 S}.$$

Отсюда

$$\Phi = \frac{nl}{\frac{L-d}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S}}. \quad (24.8)$$

Сам сердечник из магнетика и его зазор предстают как последовательно включенные «магнитные сопротивления».

3. **Примеры применения закона Био — Савара.** Следующие примеры демонстрируют применение закона Био — Савара. Покажем сначала, что этим путем можно получить выражение напряженности магнитного поля нити тока в виде формулы (24.1).

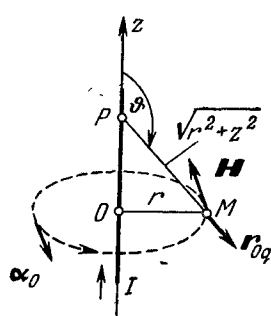


Рис. 24.4.

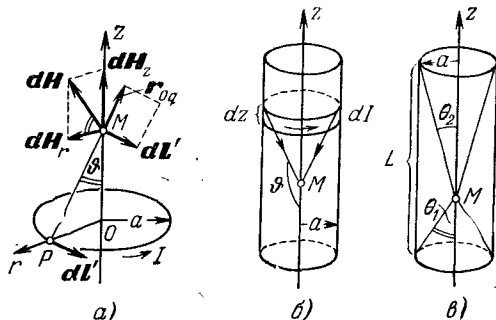


Рис. 24.5.

Используя цилиндрическую систему координат (рис. 24.4), запишем для данного случая формулу (23.2) в виде

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{[dz, \mathbf{r}_{0q}]}{r^2 + z^2} = \alpha_0 \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \varphi dz}{r^2 + z^2} = \alpha_0 \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

а поскольку

$$\frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right),$$

то

$$\mathbf{H} = \alpha_0 \frac{I}{4\pi r} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \alpha_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad (24.9)$$

что совпадает с (24.1).

Определим далее поле на оси круглого витка с током I (рис. 24.5, а). Подынтегральное выражение в (23.2), как видно из рисунка, имеет радиальную и продольную компоненты

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi (a^2 + z^2)} [dl', \mathbf{r}_{0q}] = d\mathbf{H}_r + d\mathbf{H}_z,$$

причем радиальная при интегрировании должна уничтожиться. Таким образом, на оси z

$$\mathbf{H} = \int_L d\mathbf{H}_z = z_0 \frac{I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \sin \varphi d\alpha}{a^2 + z^2} = z_0 \frac{I}{4\pi} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\alpha,$$

$$H = z_0 \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (24.10)$$

Этот результат используем для определения поля на оси соленоида. Можно допустить, что в этом случае ток непрерывно распределен по цилиндрической поверхности и в элементарном поясе шириной dz (рис. 24.5, б) равен $dI = nI dz$, где n — число витков обмотки, приходящееся на единицу длины соленоида, а I — ток одного витка. Поле на оси соленоида в точке M (рис. 24.5, б), создаваемое элементарным поясом, находим на основании (24.10). Полагая $z = 0$ в M , имеем

$$dH = z_0 \frac{nI}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} dz = z_0 \frac{nI}{2} d \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right) = - z_0 \frac{nI}{2} d(\cos \theta).$$

Интегрируя это выражение от θ_1 до $\pi - \theta_2$ (рис. 24.5, в), получаем выражение напряженности поля соленоида в точке M

$$H = z_0 \frac{nI}{2} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2). \quad (24.11)$$

Отсюда, в частности, нетрудно найти напряженность поля в средней точке соленоида ($\theta_2 = \theta_1 = \theta$):

$$H = z_0 nI \cos \theta = z_0 \frac{nIL}{\sqrt{4a^2 + L^2}} \quad (24.11a)$$

и напряженность поля бесконечного соленоида

$$H = z_0 nI. \quad (24.11б)$$

4. Поле двухпроводной линии. В качестве последнего примера возьмем двухпроводную линию и определим сначала векторный потенциал ее магнитного поля, пользуясь системой координат,

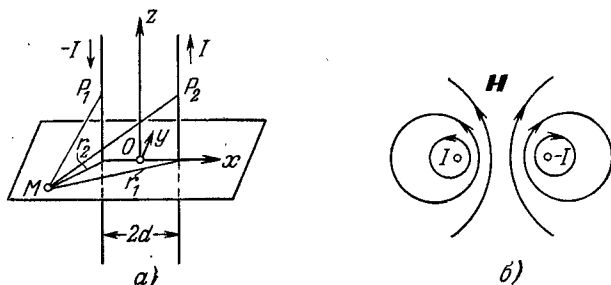


Рис. 24.6.

показанной на рис. 24.6, а. Полагая, что ток первого провода направлен по оси z (I), а ток второго — противоположно ($-I$), на основании (23.3) запишем:

$$A = \frac{\mu I}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{r_2^2 + z^2}} \right].$$

Отсюда

$$A = z_0 \frac{\mu I}{4\pi} \ln \left. \frac{z + \sqrt{r_1^2 + z^2}}{z + \sqrt{r_2^2 + z^2}} \right|_{-\infty}^{\infty}$$

и, следовательно,

$$A = z_0 \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (24.12)$$

Как видно, поверхности постоянного векторного потенциала определяются тем же условием

$$r_2/r_1 = \text{const}, \quad (24.13)$$

что и эквипотенциальные поверхности электростатического поля двух противоположно заряженных нитей (§ 16, п. 5).

Отметим тот факт, что магнитные силовые линии лежат в поперечных плоскостях $z = \text{const}$ и потому, согласно (П1.38), описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{H_y}{H_x}.$$

Поскольку векторный потенциал A направлен по оси z , то на основании (22.8)

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{и} \quad H_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x}.$$

Внося это в данное дифференциальное уравнение, после несложных преобразований находим

$$\frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy \equiv dA = 0,$$

т. е. магнитные силовые линии удовлетворяют условию

$$A = \text{const}.$$

Иными словами, линии вектора H совпадают с окружностями в поперечных плоскостях, на которых постоянен векторный потенциал, и образуют совершенно такую же картину, как эквипотенциальные поверхности заряженных нитей, рис. 24. 6, б (ср. с рис. 16.8).

Наконец, вычислив производные $\partial A/\partial x$ и $\partial A/\partial y$, получаем выражение напряженности поля вне областей тока

$$H = \frac{I}{2\pi} \left[x_0 y \left(\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2} \right) - y_0 \left(\frac{x+d}{r_2^2} - \frac{x-d}{r_1^2} \right) \right]. \quad (24.14)$$

§ 25. Энергия стационарного магнитного поля.

Индуктивность

1. Энергия и ток. Если в пространстве существует магнитное поле, то в нем распределена связанная с этим полем энергия, плотность которой (§ 11, п.1) есть

$$w^m = \frac{HB}{2} = \frac{\mu H^2}{2}. \quad (25.1)$$

Вычисляя энергию стационарного магнитного поля, содержащуюся в некоторой области V , и пользуясь при этом понятием векторного потенциала (22.8), имеем

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \mathbf{B} \, dv = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} \, dv. \quad (25.2)$$

Подынтегральное выражение преобразуем при помощи формулы (П1.31) и появившуюся функцию $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ заменим, согласно (22.1а), через \mathbf{j} , а также применим теорему Остроградского — Гаусса (П1.24). В результате получим

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \mathbf{A} \, dv + \frac{1}{2} \oint_S [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \, ds. \quad (25.3)$$

Чтобы определить полную энергию стационарного магнитного поля, надо распространить интегрирование на все пространство, т. е. отнести границу S области V в бесконечность. Поверхностный интеграл в (25.3) тогда исчезает. Действительно, возьмем объем V в виде сферы неограниченно возрастающего радиуса, содержащей все токи. Поскольку любое распределение стационарного тока ведет себя на достаточно большом расстоянии как диполь, то, выбрав надлежащим образом начало сферической системы координат, выразим \mathbf{H} и \mathbf{A} при помощи формул (23.8) и (23.7), используя в их записи соотношение (23.9). Вычисляя предельное значение поверхностного интеграла в (25.3), пишем

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S=4\pi r^2} [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \, ds = \\ = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m^2}{16\pi^2 \mu r^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\alpha_0 \sin \vartheta, r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta]_r \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\alpha \end{aligned}$$

и далее

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{S=4\pi r^2} [\mathbf{A}, \mathbf{H}] \, ds = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{-m^2}{8\pi \mu r^3} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = 0.$$

Полная энергия стационарного магнитного поля, таким образом, оказывается равной

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \mathbf{A} \, dv, \quad (25.4)$$

где V хотя и означает бесконечное пространство, но фактически представляет собой область тока, поскольку подынтегральное выражение обращается в нуль вместе с плотностью тока \mathbf{j} .

Итак, энергия стационарного магнитного поля может быть вычислена не только путем непосредственного учета ее распределения во всем пространстве, как это делается при интегрировании w^m (25.1), но и через источники поля. Тот факт, что магнитное поле существует лишь при наличии тока, непосредственно вытекает из

(25.4): если во всем пространстве нет токов, то функция координат \mathbf{j} равна нулю, а следовательно, обращается в нуль магнитная энергия (25.4); но тогда и $\mathbf{H} = 0$ согласно (25.2). Напомним в связи с этим, что действием микроскопических токов объясняется намагниченность вещества.

Возьмем линейный ток I , проходящий по замкнутому контуру L (рис. 25.1, а). Поскольку при этом плотность тока \mathbf{j} есть функция вида (23.1), то из (25.4) получаем

$$W^m = \frac{1}{2} I \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \quad (25.5)$$

или с учетом (22.14)

$$W^m = \frac{1}{2} I \Phi = \frac{1}{2} I \int_S \mathbf{B} ds. \quad (25.6)$$

Здесь надо указать на принципиальную трудность, связанную с представлением об идеальном линейном токе. Так как на линии

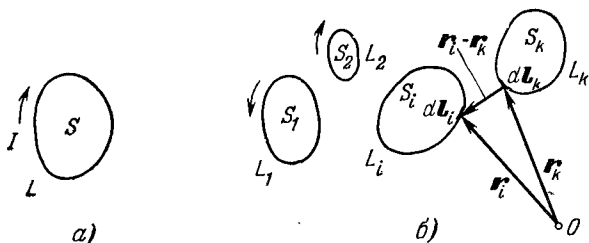


Рис. 25.1.

тока, как видно из (23.2) и (23.3), векторные функции \mathbf{A} и \mathbf{H} обращаются в бесконечность, то теряют смысл и интегралы (25.5), (25.6). Подобно этому (§ 19, п.3) не имеет физического содержания собственная энергия точечного заряда. В действительности идеальных линейных токов нет, а записанные формулы можно рассматривать как приближенные соотношения для реальных токов, которые близки к линейным (токи тонких проводов и т. п.). При этом в качестве контура L допустимо брать, например, линию на поверхности проводника.

2. Индуктивность. Поскольку векторный потенциал \mathbf{A} выражается через плотность тока согласно (22.13), то из формулы (25.4) вытекает следующая:

$$W^m = \frac{\mu}{8\pi} \int_V \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv', \quad (25.7)$$

где интегрирование по V производится дважды. Если данное распределение тока имеет вид единственной цепи с полным током I , то часто пишут:

$$W^m = \frac{1}{2} \mathcal{L} I^2, \quad (25.8)$$

где \

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{4\pi I^2} \int_V \int_V \frac{j(r) j(r')}{|r-r'|} dv dv' \quad (25.9)$$

есть коэффициент, не зависящий от величины тока и называемый *индуктивностью*. Эта величина измеряется в *генри* [гн].

Для линейного тока к выражению (25.8) проще всего прийти от (25.6), определив индуктивность \mathcal{L} как коэффициент пропорциональности между магнитным потоком и током:

$$\mathcal{L} = \frac{\Phi}{I} \quad (25.10)$$

(разумеется, пропорциональность имеет место, когда среда линейна).

Рассмотрим далее систему N контуров L_i с токами I_i (рис. 25.1, б). При этом подобно (23.1)

$$j(r) = \tau_{0i} I_i \delta(r - r_i), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

в областях, прилежащих к контурам L_i , и вместо (25.5) из (25.4) получаем

$$W^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \oint_{L_i} A dl. \quad (25.11)$$

Отсюда

$$W^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \int_{S_i} B ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \Phi_i, \quad (25.12)$$

где Φ_i — магнитный поток, пересекающий поверхность S_i , ограниченную контуром L_i .

Так как каждый поток Φ_i линейно связан с токами всех контуров, то напомним

$$\Phi_i = \mathcal{M}_{i1} I_1 + \mathcal{M}_{i2} I_2 + \dots + \mathcal{M}_{ii} I_i + \dots + \mathcal{M}_{iN} I_N, \quad (25.13)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Коэффициенты \mathcal{M}_{ii} и \mathcal{M}_{ik} называются *собственными* и соответственно *взаимными* индуктивностями; вместо \mathcal{M}_{ii} используется также обозначение \mathcal{L}_i . Внося (25.13) в (25.12), приходим к следующему выражению энергии стационарного магнитного поля в случае системы контуров:

$$W^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{M}_{ik} I_i I_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ (i \neq k)}}^N \mathcal{M}_{ik} I_i I_k, \quad (25.14)$$

причем, как будет показано ниже,

$$\mathcal{M}_{ik} = \mathcal{M}_{ki}. \quad (25.15)$$

Первый член в (25.14) выражает *собственную*, а второй — *взаимную* энергию системы контуров. Легко убедиться, что последняя сохраняет смысл и для идеальных линейных токов (ср. § 19, п. 3).

В частном случае двух контуров ($N = 2$)

$$W^m = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_1 I_1^2 + \mathcal{L}_2 I_2^2) + \mathcal{M}_{12} I_1 I_2. \quad (25.16)$$

Возвращаясь к системе N контуров, сосредоточим внимание на каких-либо двух из них, например L_i и L_k (рис. 25.1, б). Пусть Φ_{ik} есть магнитный поток, вызванный током I_k контура L_k и проходящий через контур L_i (точнее, через поверхность S_i , опирающуюся на этот контур), так что

$$\Phi_{ik} = \mathcal{M}_{ik} I_k. \quad (25.17)$$

При этом, согласно (22.14),

$$\Phi_{ik} = \oint_{L_i} \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{l}_i,$$

а на основании (23.3)

$$\mathbf{A}_k = \frac{\mu I_k}{4\pi} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}.$$

Учитывая это, из (25.17) получаем следующее выражение для взаимной индуктивности:

$$\mathcal{M}_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{L_i} \oint_{L_k} \frac{d\mathbf{l}_i \cdot d\mathbf{l}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|}. \quad (25.18)$$

Поскольку формула симметрична относительно индексов i и k , то она верна и для взаимной индуктивности \mathcal{M}_{ki} , определяемой равенством

$$\Phi_{ki} = \mathcal{M}_{ki} I_i,$$

где Φ_{ki} — магнитный поток, обусловленный током I_i контура L_i и проходящий через поверхность S_k , ограниченную контуром L_k (в этом также легко убедиться, повторив вывод). Таким образом, действительно справедливо равенство (25.15).

Формула (25.18) позволяет вычислять взаимную индуктивность двух контуров только по их конфигурации (форме и взаимной ориентации). Она является частной формой общего выражения взаимной индуктивности двух распределений тока

$$\mathcal{M}_{ik} = \frac{\mu}{4\pi I_i I_k} \int_{V_i} \int_{V_k} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} dv_i dv_k \quad (25.19)$$

(ср. (25.9)) и получается при подстановке в (25.19) функций $\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}_k)$ вида (23.1).

3. Примеры вычисления индуктивности. На рис. 25.2, а показана система двух concentрических витков, лежащих в одной плоскости. Поток Φ_{12} , создаваемый большим контуром L_2 через поверхность S_1 меньшего контура L_1 , при условии $a_1 \ll a_2$ можно приближенно вычислить как

$$\Phi_{12} \approx S_1 B_2 = \pi a_1^2 \mu H_2,$$

где H_2 — абсолютное значение напряженности магнитного поля большого витка в центре. Так как из (24.10)

$$H_2 = \frac{I_2}{2a_2},$$

то

$$\Phi_{12} = \mu I_2 \frac{\pi a_1^2}{2a_2},$$

и взаимная индуктивность контуров $\mathcal{M}_{12} = \Phi_{12}/I_2$ есть

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{\pi a_1^2}{2a_2}. \quad (25.20)$$

Совершенно аналогично находятся взаимные индуктивности систем, показанных на рис. 25.2, б, в, г. Если по-прежнему $a_1 \ll a_2$, то для витков с общим центром, лежащих в разных плоскостях (рис. 25.2, б) имеем

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{\pi a_1^2}{2a_2} \cos \vartheta, \quad (25.21)$$

а для витков, расположенных в параллельных плоскостях коаксиально на расстоянии d (рис. 25.2, в)

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{\pi a_1^2 a_2^2}{2(a_2^2 + d^2)^{3/2}}. \quad (25.22)$$

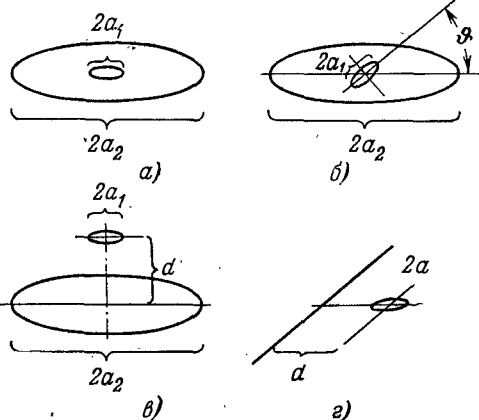


Рис. 25.2.

Для прямолинейного провода и витка, лежащего в его плоскости на достаточно большом расстоянии ($d \gg a$),

$$\mathcal{M}_{12} \approx \mu \frac{a^2}{2d} \quad (25.23)$$

(рис. 25.2, г). Вывод формул (25.21) — (25.23) предоставляется читателю.

Рассмотрим теперь провод круглого поперечного сечения. Используя цилиндрическую систему координат, запишем на основании (24.2) и (25.1) выражение энергии, содержащейся в элементарном объеме $dv = r dr d\alpha dz$:

$$dW^M = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu I^2 r^3}{8\pi^2 R^4} dr d\alpha dz.$$

Интегрируя dW^M по объему на единице длины провода, находим

$$(W_i^M)' = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 R^4} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\alpha = \frac{\mu I^2}{16\pi}. \quad (25.24)$$

Это внутренняя энергия провода, приходящаяся на единицу длины; мы видим, что она имеет одно и то же значение для проводов любого диаметра при данном токе. Внутренней индуктивностью единицы длины провода называется величина

$$\mathcal{L}'_i = \frac{\mu}{8\pi}, \quad (25.25)$$

определяемая из соотношения $(W_i^M)' = \mathcal{L}'_i I^2 / 2$ типа (25.8).

Совершенно так же находится отнесенная к единице длины индуктивность коаксиального кабеля (см. рис. 24.1, в); при этом используются формулы (24.4). Читателю рекомендуется проверить получаемый при этом результат:

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\mu_1}{(R_3^2 - R_2^2)^2} \left[R_3^4 \ln \frac{R_3}{R_2} - \frac{R_3^2}{2} (R_3^2 - R_2^2) \right] + \mu_2 \ln \frac{R_2}{R_1} \right\} \quad (25.26)$$

(μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости металла и внутренней среды соответственно).

Далее определим отнесенную к единице длины индуктивность двухпроводной нити, полагая, что расстояние между проводами значительно превышает их диаметр $2R$ (рис. 24.6, а). Приходящийся на единицу длины магнитный поток Φ' приближенно вычислим как

$$\Phi' \approx -\mu \int_{-d+R}^{d-R} H_y dx,$$

где интегрирование производится по области, ограниченной поверхностью проводов. Так как при $y = 0$, согласно (24.14),

$$H_y = \frac{I}{\pi} \frac{d}{x^2 - d^2},$$

то

$$\Phi' \approx -\frac{\mu I d}{\pi} \int_{-d+R}^{d-R} \frac{dx}{x^2 - d^2} = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{d+x}{d-x} \Big|_{-d+R}^{d-R} \approx \frac{\mu I}{\pi} \ln \frac{2d}{R} \quad (d \gg R),$$

и отнесенная к единице длины индуктивность линии $\mathcal{L}' = \Phi' / I$ оказывается равной

$$\mathcal{L}' \approx \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{2d}{R}. \quad (25.27)$$

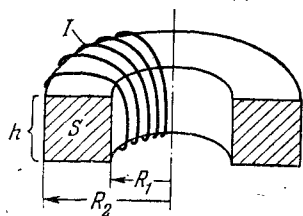


Рис. 25.3.

Наконец, рассмотрим системы с замкнутыми магнитными потоками. Пусть на тороид прямоугольного радиального сечения (рис. 25.3) равномерно намотано n витков провода. При этом через *каждый* из витков проходит магнитный поток

$$\Phi = \mu h \int_{R_1}^{R_2} H dr = \frac{\mu n I h}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu n I h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

(мы использовали выражение напряженности поля (24.5)). Поток, проходящий через «поверхность всех витков», в n раз больше:

$$\Phi = n\hat{\Phi},$$

и индуктивность системы $\mathcal{L} = \Phi/I$ равна

$$\mathcal{L} = \frac{\mu n^2 h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (25.28)$$

Напомним, что в § 12, п.2 аналогичная формула была получена из иных соображений.

В предположении, что поле в радиальном сечении тороида однородно и H определяется средним расстоянием от оси, найдем

$$\mathcal{L} \approx \frac{\mu n^2 S}{L} = \frac{\mu n^2 h}{\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}. \quad (25.29)$$

Читателю рекомендуется проверить, что в случае двух равномерно распределенных на тороиде обмоток с числами витков m и n их взаимная индуктивность будет

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\mu mn h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (25.30)$$

В заключение отметим, что совершенно так же вычисляется индуктивность «магнитных цепей» (§ 24, п. 2). Для замкнутого сердечника (внутри которого в силу большой магнитной проницаемости практически сосредоточен весь магнитный поток) со средней длиной контура L , зазором d и поперечным сечением S при обмотке из n витков с током I магнитный поток $\hat{\Phi}$, проходящий через каждый из витков, находится по формуле (24.8). Поэтому индуктивность $\mathcal{L} = \Phi/I = n\hat{\Phi}/I$ оказывается следующей:

$$\mathcal{L} = \frac{n^2}{\frac{L-d}{\mu S} + \frac{d}{\mu_0 S}}. \quad (25.31)$$

При отсутствии зазора ($d = 0$) это дает выражение (25.29).

§ 26. Стационарное электрическое поле и общие свойства стационарного электромагнитного поля

1. Основные уравнения стационарного электрического поля. Левый столбец системы уравнений (13.10) дает нам уравнения стационарного электрического поля

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (26.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (26.1б)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (26.1в)$$

Эти уравнения и соответствующие интегральные соотношения

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0, \quad (26.2a)$$

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = q \quad (26.2b)$$

совпадают с аналогичными соотношениями электростатики (§ 14). Поэтому, в частности, как и в электростатике, ввиду (26.1a) можно написать

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (26.3)$$

причем потенциал φ также удовлетворяет уравнениям, полученным в § 14.

Однако, как было отмечено на стр. 116, все сказанное еще не означает, что стационарные электрические поля¹⁾ неотличимы от полей статических. При наличии постоянного тока электрическое поле существует внутри проводников, и поверхности последних теперь уже не являются эквипотенциальными (ср. § 28, п. 1). Действительно, в силу уравнения

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (26.4a)$$

(в (13.1) оно записано в нижней строчке) при $\mathbf{j} \neq 0$ и $\sigma \neq 0$ обязательно $\mathbf{E} \neq 0$ (случай идеального проводника, когда $\sigma \rightarrow \infty$, мы сейчас исключаем). И если ток проходит вдоль поверхности проводящего тела S , то имеется тангенциальная электрическая компонента $E_\tau = -\partial\varphi/\partial\tau$; потенциал φ на S не изменяется. Ниже будет показано, что существование стационарного электромагнитного поля связано с действием сторонних сил; напишем важное для дальнейшего выражение плотности тока в области их проявления:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^{\text{ст}}). \quad (26.4b)$$

2. Пример стационарного электрического поля. В качестве примера рассмотрим поле между двумя бесконечными параллельными проводящими слоями (рис. 26.1, а, б). Пусть сначала тока нет, и потенциалы слоев равны соответственно

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \frac{U}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \varphi_0 + \frac{U}{2}.$$

Как известно, при этом (рис. 26.1, а)

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 - \frac{U}{2d} y, \quad \mathbf{E} = \mathbf{y}_0 \frac{U}{2d} \quad \text{при } d > y > -d, \\ \varphi = \text{const}, \quad \mathbf{E} = 0 \quad \text{в проводниках} \left\{ \begin{array}{l} d \leq y \leq d+h, \\ -d-h \leq y \leq -d. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

¹⁾ Мы употребляем этот термин в узком смысле, подразумевая поля при наличии постоянного тока. В широком смысле «стационарное поле» означает поле при отсутствии временной зависимости. Поэтому можно сказать, что электростатическое поле — частный случай стационарного электрического.

Если же, как это показано на рис. 26.1, б, в проводниках проходят противоположно направленные токи (I и $-I$), то внутри них появляется продольное поле:

$$E = \pm x_0 \frac{j}{\sigma} \begin{cases} d \leq y \leq d+h, \\ -d-h \leq y \leq -d. \end{cases} \quad (26.5)$$

А так как тангенциальная компонента вектора E остается непрерывной на границах раздела сред, то продольная составляющая поля имеется и в пространстве между слоями ($d > y > -d$), где, следовательно, электрические силовые линии искривляются (рис. 26.1, б).

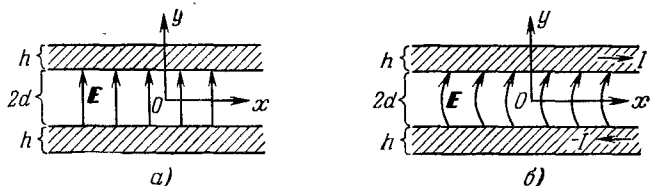


Рис. 26.1.

Чтобы найти поле между слоями, удобно предварительно определить его потенциал как решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (26.6a)$$

(зависимость от координаты z отсутствует), подчиненное требуемым граничным условиям. В отличие от электростатики потенциалы слоев теперь не постоянны, и мы положим, что их разность равна U только в плоскости $x = 0$, и учтем (26.5):

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{U}{2} & \text{при } x=0, y=d, \\ \varphi_0 + \frac{U}{2} & \text{при } x=0, y=-d, \end{cases} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{j}{\sigma} & \text{при } y=d, \\ \frac{j}{\sigma} & \text{при } y=-d. \end{cases} \quad (26.6b)$$

Решение граничной задачи (26.6a) и (26.6b) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{U}{2d} y \left(1 + \frac{2j}{\sigma U} x \right) \quad (26.7)$$

(формулу нетрудно найти методом разделения переменных или подтвердить проверкой). Поэтому между слоями

$$E = x_0 \frac{j}{\sigma} \frac{y}{d} + y_0 \frac{U}{2d} \left(1 + \frac{2j}{\sigma U} x \right). \quad (26.8)$$

Заметим, что на практике электрическое поле постоянного тока в прилежащем к проводнику диэлектрике мало отличается от поля электростатического. Так, в рассмотренном примере при $d = 0,5$ см, $U = 10$ в, $j = 2$ а/м² и $\sigma = 5,8 \cdot 10^7$ см/м (медь) для $x = 0$ и $y = d$.

$$\frac{E_{\tau}}{E_{\nu}} = \frac{E_x}{-E_y} = -\frac{2jd}{\sigma U} \approx -3,4 \cdot 10^{-5},$$

т. е. искривление электрических силовых линий должно быть незначительным: вектор \mathbf{E} практически нормален поверхности проводника, как в электростатике.

Читателю предлагается проанализировать изменение величины $\varphi(x, -d) - \varphi(x, d) = U \left(1 + \frac{2j}{\sigma U} x \right)$, рассматривая двухслойную систему как линию передачи постоянного тока.

3. Аналогия проводимости и емкости. Рассмотрим систему уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad (26.9a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (26.9b)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (26.9b')$$

где вторая строчка представляет собой частную форму равенства (2.11) для стационарного процесса ($\partial/\partial t = 0$). Учтем также граничное условие (7.6)

$$j_{v1} = j_{v2}. \quad (26.10)$$

Записанные соотношения характеризуют стационарное электрическое поле и ток *внутри проводника*.

Вместе с тем уравнения (26.9) по форме повторяют уравнения электростатики (14.1) для среды, не содержащей зарядов ($\rho = 0$). Достаточно в (14.1) при $\rho = 0$ сделать замену

$$\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{j}, \quad \epsilon \rightarrow \sigma, \quad (26.11)$$

как возникает система уравнений (26.9). Кроме того, вектор плотности тока \mathbf{j} , играющий в (25.9) ту же роль, что и вектор электрической индукции \mathbf{D} в (24.1) при $\rho = 0$, согласно (26.10), имеет на границах раздела сред непрерывную нормальную компоненту, как и вектор \mathbf{D} при отсутствии поверхностного заряда.

Отмеченная формальная аналогия между уравнениями, описывающими стационарное электрическое поле в проводящей среде, и уравнениями электростатики в диэлектрике без зарядов бывает полезной на практике. Если, например, в рассматриваемой задаче о стационарном электрическом поле все граничные поверхности имеют такую же конфигурацию, как и в некоторой электростатической задаче, и на границах вектор \mathbf{j} в первом случае ведет себя так же, как вектор \mathbf{D} во втором, то можно использовать готовое решение электростатической задачи, сделав в нем замену (26.11).

Требуемое соответствие граничных условий будет иметь место, когда рассматривается слабо проводящая среда, ограниченная хорошо проводящей поверхностью, и для сопоставления берется электростатическая задача, в которой точно такой же поверхностью ограничен идеальный диэлектрик. Действительно, ввиду непрерывности тангенциальной компоненты вектора \mathbf{E} на границе раздела проводящих сред

$$\frac{j_{\tau 1}}{\sigma_1} = \frac{j_{\tau 2}}{\sigma_2}, \quad (26.12)$$

откуда следует, что в слабо проводящей среде I тангенциальная компонента плотности тока оказывается в σ_2/σ_1 раз меньше, чем в граничащем с ней хорошим проводнике 2. Поэтому при достаточно сильном различии удельных проводимостей σ_1 и σ_2 можно пренебречь тангенциальной компонентой $\mathbf{j}_{\tau 1}$ и считать вектор \mathbf{j} в слабо проводящей среде нормальным внешней границе, а это и свойственно вектору \mathbf{D} в сравниваемой электростатической задаче.

Пусть в слабо проводящей среде расположены два хорошо проводящих тела A и B (рис. 26.2, а), потенциалы которых φ_1 и φ_2 . Проводимостью среды в этой системе называется величина

$$G = \frac{I}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad (26.13)$$

где числитель и знаменатель выбираются так, чтобы дробь была положительна; I есть ток, выходящий из одного тела или входящий в другое (обе величины должны быть одинаковы). Очевидно,

$$C = \oint_S \mathbf{j} \, ds \left/ \int_{(A)}^{(B)} E \, dl, \right. \quad (26.13a)$$

где S — поверхность одного из проводников.

Сделав здесь замену (26.11), убеждаемся, что проводимость переходит в сравниваемой электростатической задаче в емкость:

$$G \rightarrow \oint_S \mathbf{D} \, ds \left/ \int_{(A)}^{(B)} E \, dl = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = C. \quad (26.14)$$

Пусть, например, требуется определить «проводимость утечки», приходящуюся на единицу длины коаксиального кабеля постоянного тока. Из § 17, п. 6 известно выражение отнесенной к единице длины емкости коаксиального конденсатора. Заменяя в соответствующей формуле (17.17) в соответствии с (26.11) ϵ на σ , получаем (рис. 26.2, б)

$$G' = \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (26.15)$$

На принципе отмеченной выше аналогии базируется также *моделирование* электростатических полей в электролитической ванне. Для экспериментального исследования электростатического поля системы проводящих тел последние помещают в ванну и, создав требуемые потенциалы, измеряют плотность тока в различных участках электролита. Найденное таким путем поле тока в электролите представляет собой модель электростатического поля исследуемой системы. Гарантией этому служит весьма значительное различие удельных проводимостей электролита и элементов системы (обычно

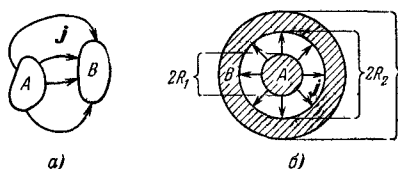


Рис. 26.2.

металлических), позволяющее считать, что вектор плотности тока нормален к поверхностям системы.

4. Общие свойства стационарного электромагнитного поля. В заключение рассмотрим некоторые общие свойства стационарного электромагнитного поля. Пусть постоянный ток сосредоточен в ограниченной области пространства. Выбрав какую-либо поверхность S , отделяющую область V , вне которой нет тока, из (10.4) получим

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] ds = - \int_V \mathbf{jE} dv. \quad (26.16)$$

Будем неограниченно увеличивать объем V , относя поверхность S в бесконечность. На достаточно больших расстояниях электрическое поле подобно полю точечного заряда, а магнитное — полю магнитного диполя; таким образом, поверхностный интеграл в пределе должен исчезнуть (ср. § 19, п. 1 и § 25, п. 1), и мы имеем

$$\int_V \mathbf{jE} dv = 0. \quad (26.17)$$

Прежде чем делать какие-либо выводы из равенства (26.17), заметим, что величина интеграла в нем не может зависеть от V , если только внутри V локализован *весь ток* (а именно это и предполагалось заранее). Поэтому в правой части (26.16) всегда нуль, а отсюда

$$\oint_S [\mathbf{E}, \mathbf{H}] ds = 0 \quad (26.18)$$

при условии, что поверхность S охватывает весь ток. Полученное равенство выражает важное свойство стационарных электромагнитных полей: поток энергии через поверхность, содержащую внутри себя весь ток, обязательно равен нулю. Можно сказать, что постоянный ток *не излучает* энергии.

Обращаясь к равенству (26.17), заменим в нем плотность тока через напряженность электрического поля при помощи соотношения (26.4а), т. е. в предположении, что сторонние силы отсутствуют во всем объеме. При этом получается

$$\int_V \frac{j^2}{\sigma} dv = 0,$$

откуда следует, что $\mathbf{j} = 0$. Но при отсутствии тока нет и стационарного электромагнитного поля.

Если же вместо (26.4а) взять соотношение (26.4б), то возникает равенство

$$\int_V \frac{j^2}{\sigma} dv = \int_V \mathbf{jE}^{ст} dv, \quad (26.19)$$

показывающее, что постоянный ток (вместе со своим полем) существует лишь при наличии сторонних сил, т. е. источника энергии неэлектромагнитного происхождения.

Для иллюстрации этого факта возьмем цепь постоянного тока I в виде замкнутого провода и, приняв ее за контур L , вычислим циркуляцию вектора \mathbf{E} , которая, согласно (26.2а), должна быть равна нулю. Заменяя \mathbf{E} через \mathbf{j} и $\mathbf{E}^{\text{ст}}$ при помощи (26.4б), находим

$$\int_L \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = \int_L \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{l}.$$

Здесь

$$\int_L \frac{\mathbf{j}}{\sigma} d\mathbf{l} = \frac{I}{\sigma S} \oint_L d\mathbf{l} = \frac{IL}{\sigma S} = I\mathcal{R}$$

(S — поперечное сечение провода, а \mathcal{R} — его сопротивление). Таким образом,

$$\oint_L \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l} = I\mathcal{R} \quad (26.20)$$

и, как видно, ток I равен нулю, если в цепи не действуют сторонние силы ($\mathbf{E}^{\text{ст}} = 0$).

Интеграл в (26.20), который мы обозначим

$$\mathcal{E}^{\text{ст}} = \oint_L \mathbf{E}^{\text{ст}} d\mathbf{l}, \quad (26.21)$$

называют *электродвижущей силой* (э. д. с.), а соотношение (26.20) выражает закон Ома для цепи постоянного тока.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Статические и стационарные поля, рассмотренные выше в этой главе, являются относительно простыми. Исторически они были исследованы значительно раньше, чем поля, изменяющиеся во времени. Последние стали представлять практический интерес вместе с появлением электротехники переменного тока, а затем радиотехники. Естественно, что при изучении изменяющихся во времени электромагнитных явлений старались использовать уже имевшийся опыт и сложившиеся представления. Так возникла теория явлений *квазистационарных*, т. е. «как бы неизменяющихся»; к ней по существу относится и теория цепей переменного тока. Во Введении отмечалось, что понятие цепи переменного тока сохраняет смысл до тех пор, пока можно пренебрегать запаздыванием электромагнитного процесса, распространяющегося в пространстве. К этой точке зрения мы вернемся, когда будем рассматривать излучение электромагнитной энергии (гл. 4). Пока же примем во внимание следующее обстоятельство.

Предположим, что изучено некоторое стационарное электромагнитное поле, т. е. при заданном постоянном токе и прочих условиях найдены векторные функции координат $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. Очевидно, можно представить себе настолько медленное изменение тока, что электромагнитное поле будет изменяться вместе с ним практически лишь *по величине*, сохраняя свое *распределение в пространстве*,

т. е. $E(\mathbf{r}, t) \approx f(t) E(\mathbf{r})$ и $H(\mathbf{r}, t) \approx f(t) H(\mathbf{r})$, где $E(\mathbf{r})$ и $H(\mathbf{r})$ это прежние векторные функции, а $f(t)$ выражает закон изменения тока. Это простое соображение и кладется в основу теории квазистационарных явлений, которая, следовательно, сохраняет достоверность для достаточно медленных процессов.

§ 27. Квазистационарное электромагнитное поле и цепь переменного тока

1. Индуктивность и емкость при квазистационарных процессах. Итак, пусть переменный во времени электромагнитный процесс протекает достаточно медленно (в частности, если речь идет о гармонических колебаниях, то низка их частота), и можно считать, что распределение поля в каждый момент таково, как если бы оно было стационарным, не зависящим от времени. Покажем, что применение этого «принципа квазистационарности» к основным уравнениям поля и энергетическим соотношениям порождает некоторые понятия, широко используемые в инженерной практике.

В § 2, п. 2 было отмечено, что второе уравнение Максвелла можно рассматривать как обобщенный закон электромагнитной индукции Фарадея. Если L есть контур с током $I(t)$, то запись этого уравнения в форме (2.7)

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt}, \quad (27.1)$$

где

$$\mathcal{E} = \int_L \mathbf{E} d\mathbf{l}, \quad (27.2)$$

выражает закон электромагнитной индукции, обычно применяемый к квазистационарным системам. При этом \mathcal{E} есть не что иное, как электродвижущая сила (ср. § 26, п. 4), наводимая в контуре изменяющимся во времени магнитным потоком. Пусть рассматривается уединенный недеформируемый контур. Магнитный поток Φ создается при этом собственным током контура I , а поскольку поле *квазистационарно*, то он связан с током контура I тем же соотношением, что и в случае постоянного тока:

$$\Phi = \mathcal{L}I, \quad (27.3)$$

и закон электромагнитной индукции (27.1) принимает вид

$$\mathcal{E} = - \mathcal{L} \frac{dI}{dt}. \quad (27.4)$$

Это соотношение имеет смысл только для квазистационарного процесса, поскольку само понятие индуктивности происходит из теории стационарного магнитного поля (§ 25). Аналогично в случае двух контуров с токами I_1 и I_2

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= - \mathcal{L}_1 \frac{dI_1}{dt} - \mathcal{M} \frac{dI_2}{dt}, \\ \mathcal{E}_2 &= - \mathcal{M} \frac{dI_1}{dt} - \mathcal{L}_2 \frac{dI_2}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (27.5)$$

где $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{12} = \mathcal{M}_{21}$.

Поскольку для квазистационарного поля $E \approx -\text{grad } \varphi$, то сохраняют значение понятия потенциала и емкости; последняя определяется, как в электростатике:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}. \quad (27.6)$$

2. Энергия квазистационарного поля и цепь переменного тока. Рассмотрим теперь какую-либо систему, которую допустимо описывать как цепь переменного тока, составленную из последовательно соединенных сопротивления \mathcal{R} , индуктивности \mathcal{L} и емкости C , а также источника э. д. с. $\mathcal{E}^{ст}$ (рис. 27.1).

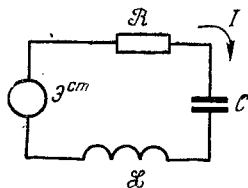


Рис. 27.1.

Что значит «допустимо»? Во-первых, система должна быть действительно квазистационарна (достаточно медленные временные изменения). А во-вторых, требуется, чтобы можно было пренебречь магнитным полем всех элементов, кроме индуктивного, и электрическим полем всех элементов, кроме емкостного, поглощение же энергии приписать одному резистивному элементу.

Тогда магнитную и электрическую энергию системы можно выразить при помощи формул (25.8) и (19.8a):

$$W^m = \frac{1}{2} \int_V \mu H^2 dv = \frac{1}{2} \mathcal{L} I^2 \quad (27.7)$$

и

$$W^e = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon E^2 dv = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (27.8)$$

(V , вообще говоря, бесконечное пространство), а мощность потерь в виде

$$P_{II} = \int_V \frac{J^2}{\sigma} dv = I^2 \mathcal{R}. \quad (27.9)$$

Что касается мощности источника, то будем пользоваться первым выражением $P^{ст}$ из (9.10):

$$-P^{ст} = \int_V \mathbf{j} E^{ст} dv = I \mathcal{E}^{ст}. \quad (27.10)$$

Заметим, что следующее отсюда выражение э. д. с.

$$\mathcal{E}^{ст} = \frac{1}{I} \int_V \mathbf{j} E^{ст} dv$$

имеет совершенно тот же смысл, что и в § 26: для линейного контура L оно переходит в (26.21):

$$\mathcal{E}^{ст} = \oint E^{ст} dl.$$

Чтобы извлечь пользу из всех найденных соотношений, возьмем уравнение баланса энергии, например, в форме (10.9) и применим его к бесконечной области V , включающей рассматриваемую цепь, которая считается уединенной. Так как, по предположению, распределение поля в пространстве не отличается от стационарного, то поток вектора Пойнтинга через отнесенную в бесконечность границу равен нулю ввиду достаточно быстрого убывания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} (§ 26, п.4). Таким образом, внося в (10.9) $W = W^3 + W^m$ и $P = P_n + P^{ct}$ на основании (27.7) — (27.10) имеем следующее уравнение:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathcal{L}I^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) + I^2 \mathcal{R} = I \mathcal{E}^{ct}. \quad (27.11)$$

Учитывая, что $I = dq/dt$, после дифференцирования и деления на I получаем

$$\mathcal{L} \frac{dI}{dt} + I \mathcal{R} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}^{ct} \quad (27.12)$$

и далее при вторичном дифференцировании

$$\mathcal{L} \frac{d^2 I}{dt^2} + \mathcal{R} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d\mathcal{E}^{ct}}{dt}. \quad (27.13)$$

Мы получили известное уравнение для цепи переменного тока.

Круг явлений, описываемых теорией цепей, должен быть хорошо знаком читателю, изучавшему электротехнику и основы радиотехники. Повторение этого материала не входит в нашу задачу. Мы имели в виду лишь объяснить характер упрощений, используемых в этой теории.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Желая рассмотреть основания электродинамики, мы должны теперь обратиться к системе уравнений Максвелла в ее полном виде. Однако особое внимание будет уделено процессам, протекающим по закону гармонических колебаний, а в этом случае *применение метода комплексных амплитуд* приводит систему уравнений Максвелла к весьма сжатой форме. Существенно, что этот метод также порождает в электродинамике новые содержательные понятия, значение которых не исчерпывается их ролью в формальном аппарате.

Материал данного раздела составляет основу всего последующего содержания книги. При первом чтении можно пропустить только § 31.

§ 28. Основные уравнения электродинамики

1. Система уравнений Максвелла. Источники поля. Уравнения электродинамики — это полная система уравнений Максвелла (§ 13, п.1); характеризуя поле в некоторой точке пространства, имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= \frac{\partial D}{\partial t} + j, & \operatorname{div} D &= \rho, & D &= \varepsilon E, \\ \operatorname{rot} E &= - \frac{\partial B}{\partial t}, & \operatorname{div} B &= 0, & B &= \mu H, \\ & & & & j &= \sigma H + j^{\text{ср}}; \end{aligned} \right\} \quad (28.1)$$

последнее из уравнений взято в форме второй строчки (13.2); при отсутствии сторонних сил $j^{\text{ср}} = 0$. Выпишем также соответствующие интегральные соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \oint_L H dl &= \frac{d}{dt} \int_S D ds + I, & \oint_S D ds &= q, \\ \oint_L E dl &= - \frac{d}{dt} \int_S B ds, & \oint_S B ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

Напомним, что входящие в систему (28.1) материальные уравнения не вполне универсальны (см. § 5), однако такая их форма является распространенной ввиду простоты и широкой применимости.

Как известно, уравнения (28.1) выражают общие законы электромагнетизма; эти уравнения электродинамики описывают общие свойства полей и не могут иметь определенных решений в виде векторных функций \mathbf{E} , \mathbf{H} и т. д., пока к ним не присоединены условия, характеризующие ту или иную конкретную задачу.

Остановимся на одном общем вопросе. Предположим, что во всем пространстве либо в какой-то рассматриваемой нами энергетически изолированной области V не действуют сторонние силы. Если при этом найдено физически осмысленное решение системы уравнений электродинамики (28.1), то оно выражает *свободное* электромагнитное поле, т. е. поле, не обязанное своим существованием процессу преобразования неэлектромагнитной энергии в электромагнитную, «не имеющее причины вне себя». Позднее в этой главе (§ 32 и далее) будут рассмотрены простейшие свободные поля — плоские однородные волны.

При действии сторонних сил происходит *возбуждение* определенного электромагнитного поля. Употребляется также выражение «вынуждающая сила», а чаще *источник* поля. Электромагнитные поля, вызванные действием сторонних сил, источников, мы будем называть *вынужденными*. Передача энергии вынужденным полем обычно характеризуется как *излучение* источника.

Источники могут быть заданы разными способами, например через граничные условия, но, пожалуй, чаще всего в задачах о вынужденных полях задается функция $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ (или $\eta^{\text{ст}}$, ср. § 7, п. 4), отличная от нуля лишь в некоторой области, называемой *областью источника*. Заметим, что процесс преобразования энергии некоторого рода в энергию электромагнитного поля вовсе не должен обязательно происходить в области источника. Возьмем, например, излучающую металлическую антенну. Поле излучения можно найти, зная распределенный на антенне ток, и если он известен, то рассматривается как сторонний. Что же касается расходуемой неэлектромагнитной энергии, которая в конечном счете поддерживает данный ток, то это, быть может, химическая энергия батареи или тепловая энергия на электростанции, питающей передатчик, подключенный к антенне. Понятно, что указанные первичные факторы должны оставаться за пределами электродинамической задачи.

2. Уравнения второго порядка. Из уравнений электродинамики (28.1) можно исключить все неизвестные величины, кроме напряженности электрического поля \mathbf{E} или напряженности магнитного поля \mathbf{H} , и получить дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка относительно этих функций. Заменяя в первых двух уравнениях Максвелла индукции напряженностями при помощи материальных уравнений, после очевидных действий, включающих применение операции rot , получим

$$\begin{aligned} \text{rot } \varepsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{E} + \text{rot } \varepsilon^{-1} \mathbf{j}, \\ \text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} &= - \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} \end{aligned}$$

(ϵ^{-1} и μ^{-1} не вынесены за знак rot, так как проницаемости предполагаются зависящими от координат). Теперь rot \mathbf{E} и rot \mathbf{H} в правых частях исключаем, используя первоначальные уравнения Максвелла, что дает

$$\text{rot } \epsilon^{-1} \text{rot } \mathbf{H} + \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \text{rot } \epsilon^{-1} \mathbf{j} \quad (28.3)$$

и

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (28.4)$$

Второе из этих равенств становится уравнением относительно \mathbf{E} при замене \mathbf{j} через \mathbf{E} и $\mathbf{j}^{\text{сг}}$ (последняя функция задается):

$$\text{rot } \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathbf{j}^{\text{сг}}}{\partial t}. \quad (28.5)$$

Если среда однородна, ϵ^{-1} и μ^{-1} выносятся из под знака rot, функции же rot rot \mathbf{E} и rot rot \mathbf{H} преобразуются с привлечением тождества (Пл.34); при этом учитывается, что ввиду однородности среды $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Равенства (28.3) и (28.4) принимают вид

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = - \text{rot } \mathbf{j} \quad (28.6)$$

и

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \epsilon^{-1} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (28.7)$$

Если правые части заданы (например, при $\sigma = 0$ в (28.6) справа имеем $-\text{rot } \mathbf{j}^{\text{сг}}$), то это векторные уравнения Даламбера. При отсутствии токов и зарядов ($\mathbf{j} = 0$, $\rho = 0$) они переходят в однородные векторные волновые уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (28.8)$$

и

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (28.9)$$

Для полей, не изменяющихся во времени, записанные уравнения вырождаются в более простые и уже встречавшиеся при изучении статических и стационарных полей. Так (28.6) и (28.7) становятся векторными уравнениями Пуассона (22.5) и (14.14) соответственно, а (28.8) и (28.9) — векторными уравнениями Лапласа.

Отмеченное обстоятельство дает повод подчеркнуть роль тока смещения в электродинамических процессах. В пренебрежении им, т. е. полагая $\partial \mathbf{D} / \partial t = 0$, мы получили бы при выводе вместо (28.6) и (28.7) уравнения Пуассона.

3. Электродинамические потенциалы. Следуя традиции, введем в рассмотрение вспомогательные функции, подобно тому как это делалось ранее, в гл. 2. Используя понятие векторного потенциала (§ 22, п. 3), выразим напряженность магнитного поля в виде

$$\mathbf{H} = \mu^{-1} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (28.10)$$

Подстановка этого выражения во второе уравнение Максвелла дает

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Замечая, что функцию в круглых скобках в силу тождества (П1.33) можно приравнять градиенту скаляра, который обозначим $-\varphi$, находим

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (28.11)$$

(ср. § 14, п.1). Таким образом, векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} представлены через вспомогательные функции \mathbf{A} и φ ; эти последние мы и будем называть *электродинамическими потенциалами*.

Найдем уравнения, которым удовлетворяют \mathbf{A} и φ . Внося (28.10) и (28.11) в первое уравнение Максвелла, получаем

$$\operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \left(\operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \mathbf{j}.$$

Полагая, что среда однородна, и привлекая тождество (П1.34), приводим это к виду

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \left(\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} \right) - \mu \mathbf{j}. \quad (28.12)$$

Поскольку в определении потенциалов допускается известный произвол (как и в § 14, функция φ определена с точностью до аддитивной константы, а \mathbf{A} — с точностью до градиента некоторого скаляра, как в § 22), уравнение (28.12) можно упростить, наложив на φ и \mathbf{A} дополнительное условие ¹⁾

$$\varepsilon \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (28.13)$$

Тогда (28.12) переходит в следующее уравнение:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}; \quad (28.14)$$

а из (28.13) и (28.11) нетрудно получить

$$\nabla^2 \varphi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (28.15)$$

При заданных \mathbf{j} и ρ это уравнения Даламбера относительно \mathbf{A} и φ .

Если найдены эти потенциалы, то векторы поля \mathbf{E} и \mathbf{H} определяются по формулам (28.10) и (28.11). Впрочем, φ можно заранее исключить: согласно (28.11) и (28.13)

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (28.16)$$

¹⁾ В физике это часто называют «лоренцевской калибровкой», а ранее использовавшееся условие (22.11) — «кулоновской калибровкой».

Заметим, что при отсутствии временной зависимости равенства (28.11), (28.13), (28.14) и (28.15) превращаются в (14.3), (22.11), (22.12) и (14.9) соответственно.

§ 29. Комплексные проницаемости и уравнения электродинамики в комплексной форме

1. **Переход к комплексной форме уравнений электродинамики.** Комплексная диэлектрическая проницаемость. В начале главы отмечалось значение гармонически колеблющихся полей. В этом случае все векторные функции, входящие в уравнения (28.1), т. е. \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{B} и \mathbf{j} , имеют вид (ПЗ.1), соответственный вид имеет и скалярная функция ρ . Применяя метод комплексных амплитуд, заменим в (28.1) все перечисленные функции их комплексными представлениями:

$$\mathbf{E} \rightarrow \dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} \rightarrow \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t} \quad \text{и т. д.}$$

В первом уравнении Максвелла (28.1а), например, при этом получим

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t} = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\mathbf{D}}_m e^{i\omega t} + \dot{\mathbf{j}}_m e^{i\omega t}.$$

Поскольку по отношению к операции rot множитель $e^{i\omega t}$, не зависящий от координат, выступает как постоянный коэффициент, а при дифференцировании по времени постоянной оказывается комплексная амплитуда, то

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega \dot{\mathbf{D}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m. \quad (29.1)$$

Таким образом, получено уравнение относительно комплексных амплитуд, утратившее временную зависимость.

Мы видим, что уравнения электродинамики без труда приводятся к комплексной форме при выполнении действий, обсуждавшихся в приложении 3. В данном случае достаточно заменить в уравнениях функции поля их комплексными амплитудами, а дифференцирование по времени — умножением на $i\omega$.

Но прежде, чем выписывать в комплексной форме всю систему уравнений электродинамики (28.1), вернемся к уравнению (29.1), чтобы сделать некоторые преобразования. На основании (28.1) напомним вместо $\dot{\mathbf{D}}_m$ и $\dot{\mathbf{j}}_m$ функции $\epsilon \dot{\mathbf{E}}_m$ и $\sigma \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}$ соответственно

$$\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega \epsilon \dot{\mathbf{E}}_m + \sigma \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}$$

и справа вынесем в первых двух слагаемых общий множитель $\dot{\mathbf{E}}_m$, что дает возможность представить их в виде

$$i\omega \epsilon \dot{\mathbf{E}}_m + \sigma \dot{\mathbf{E}}_m = i\omega \left(\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \right) \dot{\mathbf{E}}_m = i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m,$$

где параметр

$$\dot{\epsilon} = \epsilon - i \frac{\sigma}{\omega} \quad (29.2)$$

называется *комплексной диэлектрической проницаемостью*. Используя это новое понятие, можно придать первому уравнению Максвелла (29.1) следующую форму:

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega \dot{\epsilon} \dot{E}_m + \dot{j}_m^{\text{ст}}, \quad (29.3)$$

так что, в частности, при отсутствии сторонних сил уравнение вовсе не содержит в явной форме тока проводимости:

$$\operatorname{rot} \dot{H}_m = i\omega \dot{\epsilon} \dot{E}_m. \quad (29.3a)$$

Если в одном случае среда обладает некоторой электропроводностью ($\sigma \neq 0$), а в другом — нет ($\sigma = 0$), то различие проявится лишь в характере параметра $\dot{\epsilon}$ (см. (29,2)), который в первом случае будет комплексной величиной, а во втором — вещественной.

2. Инерционность процессов поляризации и намагничивания. Комплексные проницаемости. Введенная выше комплексная проницаемость $\dot{\epsilon}$ является полезным символом, улучшающим форму записи первого уравнения Максвелла. Но можно пойти дальше и так обобщить понятие комплексной диэлектрической проницаемости, что оно позволит учесть особенности процессов в диэлектрике, ранее не принимавшиеся во внимание.

Напомним, что материальные уравнения в (28.1) не отражают инерционности процессов поляризации: если при гармонических колебаниях $E = E_m \cos \omega t$, то, согласно (28.1), $D = \epsilon E_m \cos \omega t$. Но в действительности, поскольку процессы поляризации вещества не следуют мгновенно за изменениями поля, электрическая индукция как функция времени несколько «запаздывает», т. е. колебания происходят с отставанием по фазе на некоторую величину α , и надо писать $D = \epsilon E_m \cos(\omega t - \alpha)$; фазовый сдвиг α может быть практически замечен лишь при очень высоких частотах ω . Взяв комплексные амплитуды векторов E и D , равные $\dot{E}_m = E_m$ и $\dot{D}_m = \epsilon E_m e^{-i\alpha}$ соответственно, видим, что они различаются на комплексный множитель $e^{-i\alpha} = \epsilon \cos \alpha - i\epsilon \sin \alpha$. Это значит, что, желая учесть инерционность поляризации, комплексную форму уравнения $D = \epsilon E$ надо писать в виде

$$\dot{D}_m = \epsilon e^{-i\alpha} \dot{E}_m. \quad (29.4)$$

Соответственно этому в предыдущих выкладках следует заменить ϵ на $\epsilon e^{-i\alpha}$. Сделав это в (29.2), получаем более полное выражение комплексной диэлектрической проницаемости:

$$\dot{\epsilon} = \epsilon' - i\epsilon'',$$

причем

$$\epsilon' = \epsilon \cos \alpha, \quad \epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} + \epsilon \sin \alpha. \quad (29.5)$$

Заметим теперь, что комплексная диэлектрическая проницаемость $\dot{\epsilon}$ есть коэффициент пропорциональности между величинами $\dot{D}_m = \dot{\epsilon} \dot{E}_m$ и \dot{E}_m . Первая из них \dot{D}_m не является комплексной

амплитудой электрической индукции \hat{D}_m , определяемой по формуле (29.4). Напишем:

$$\frac{\hat{D}_m}{\hat{E}} = \hat{\epsilon} = |\hat{\epsilon}| e^{-i\Delta}, \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}, \quad (29.6)$$

где $\epsilon' = |\hat{\epsilon}| \cos \Delta$ и $\epsilon'' = |\hat{\epsilon}| \sin \Delta$ определяются из (29.5). Угол Δ , выражающий фазовое отставание \hat{D} от E , называется «углом электрических потерь», а отношение ϵ''/ϵ' , как видно, оказывается равным тангенсу угла потерь. Если можно пренебречь инерционностью процессов поляризации, положив в (29.5) $\alpha = 0$, то тангенс угла потерь есть следующая величина:

$$\operatorname{tg} \Delta = \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \quad (\alpha = 0), \quad (29.7)$$

уже рассматривавшаяся в § 6, п. 3 и равная отношению амплитуд плотности тока проводимости и плотности тока смещения. На основании (6.10) запишем теперь критерий оценки свойств сред в виде

$$\operatorname{tg} \Delta \begin{cases} \leq 1 & \text{— диэлектрик,} \\ \geq 1 & \text{— проводник.} \end{cases} \quad (\alpha = 0) \quad (29.8)$$

Обратимся, наконец, к процессам намагничивания. Учитывая их инерционность, вместо соотношения $\hat{B}_m = \mu \hat{H}_m$, напишем

$$\hat{B}_m = \mu e^{-i\beta} \hat{H}_m, \quad (29.9)$$

где β — соответствующее фазовое отставание, «угол магнитных потерь». Магнитная проницаемость, следовательно, так же, как и диэлектрическая, в уравнениях для комплексных амплитуд вообще должна рассматриваться как величина комплексная:

$$\hat{\mu} = \mu' - i\mu'', \quad \begin{cases} \mu' = \mu \cos \beta, \\ \mu'' = \mu \sin \beta. \end{cases} \quad (29.10)$$

3. Уравнения Максвелла в комплексной форме. На основании предыдущего можно записать полную систему уравнений электродинамики в комплексной форме. Легко убедиться, что это следующие два уравнения:

$$\operatorname{rot} \hat{H}_m = i\omega \hat{\epsilon} \hat{E}_m + \hat{j}_m^{\text{ct}}, \quad (29.11a)$$

$$\operatorname{rot} \hat{E}_m = -i\omega \hat{\mu} \hat{H}_m, \quad (29.11b)$$

первое из которых было получено выше в п. 2, а второе вытекает из (29.1) при введении комплексной магнитной проницаемости. Действительно, материальные уравнения, связывающие индукции и плотность тока проводимости с напряженностями поля, в уравнениях (29.11) учтены. Что касается уравнений Максвелла с расходимостями, то они непосредственно следуют из (29.11). Покажем это.

Применив операцию div к (29.11b), ввиду (П1.32) сразу имеем

$$\operatorname{div} \hat{B}_m = 0, \quad (29.12)$$

что является комплексной формой уравнения $\operatorname{div} B = 0$.

Подобным же путем из (29.11а) находим сначала

$$\operatorname{div} (i\omega \dot{\mathbf{D}}_m + \sigma \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}) = 0,$$

где использованы соотношения (29.4) и (29.5). Принимая во внимание уравнение непрерывности (4.2), которое в комплексной форме имеет вид

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m = -i\omega \dot{\rho}_m, \quad (29.13)$$

причем, согласно (28.1), $\dot{\mathbf{j}}_m = \sigma \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}$, получаем

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{D}}_m = \dot{\rho}_m, \quad (29.14)$$

что является комплексной формой уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$.

Разумеется, вывод остается справедливым и при $\alpha = 0$, $\beta = 0$, когда инерционность поляризации и намагничивания не учитывается.

Итак, метод комплексных амплитуд приводит к довольно краткой форме записи системы уравнений электродинамики (29.11), которая к тому же более полно, чем система уравнений (28.1), учитывает особенности процессов поляризации и намагничивания. В принципе этот подход, непосредственно применимый при гармонических колебаниях, легко обобщается на любые временные зависимости. Как следует из Приложения 8, п. 1, при представлении векторов поля в виде рядов или интегралов Фурье будут иметь место уравнения вида (23.11) относительно коэффициентов Фурье, или соответственно функций спектральной плотности \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Осталось отметить лишь одно обстоятельство, связанное с записью уравнений электродинамики в комплексной форме. В ряде случаев плотность тока проводимости $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \dot{\mathbf{j}}^{\text{CT}}$ оказывается удобнее выделить (обычно в некоторой частичной области V). Тогда уравнение (29.11а) имеет вид

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m = i\omega \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m, \quad (29.15)$$

где $\dot{\mathbf{e}} = \epsilon e^{-i\alpha}$ в области выделения тока.

4. Уравнения второго порядка в комплексной форме. Уравнения электродинамики второго порядка (28.3) — (28.9), а также уравнения относительно потенциалов (28.14), (28.15) можно сразу же привести к комплексной форме, заменив векторы их комплексными амплитудами, а двукратное дифференцирование по времени $\partial^2/\partial t^2$ — умножением на $(i\omega)^2 = -\omega^2$. Но если в качестве исходного момента взять уравнения электродинамики (29.11), то получается результат более общего физического содержания.

Поступая с уравнениями (29.11) совершенно так же, как ранее в § 28, п. 2 с уравнениями из (28.1), вместо (28.3) и (28.4) находим следующие уравнения второго порядка:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{e}}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m - \omega^2 \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m = \operatorname{rot} \dot{\mathbf{e}}^{-1} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}} \quad (29.16)$$

и

$$\operatorname{rot} \dot{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m - \omega^2 \dot{\mathbf{e}} \dot{\mathbf{E}}_m = -i\omega \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}. \quad (29.17)$$

Переходя к случаю однородной среды ($\dot{\epsilon} = \text{const}$, $\dot{\mu} = \text{const}$), учтем, что, согласно (29.11a) при этом $i\omega\dot{\epsilon} \operatorname{div} \dot{\mathbf{E}}_m = -\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}$, а из (29.12) следует, что $\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}}_m = 0$. Поэтому тем же путем, который в § 28, п. 2 приводил к уравнениям Даламбера (28.6) и (28.7), получаем следующие неоднородные уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m = -\operatorname{rot} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}, \quad (29.18)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\mathbf{E}}_m = \frac{i\dot{\epsilon}^{-1}}{\omega} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}} + i\omega \dot{\mu} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}. \quad (29.19)$$

При отсутствии стороннего тока ($\dot{\mathbf{j}}^{\text{ср}} = 0$) они превращаются в однородные уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m = 0, \quad (29.20)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\mathbf{E}}_m = 0. \quad (29.21)$$

Рассмотрим далее употребление электродинамических потенциалов. Комплексную амплитуду векторного потенциала \mathbf{A} определим равенством

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mu}^{-1} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_m. \quad (29.22)$$

Тогда

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\operatorname{grad} \dot{\phi}_m - i\omega \dot{\mathbf{A}}_m \quad (29.23)$$

(ср. получение (28.11)). Вместо уравнений Даламбера (28.14) и (28.15) при условии

$$i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\phi}_m + \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_m = 0, \quad (29.24)$$

соответствующем (28.13), получаем неоднородные уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\mathbf{A}}_m = -\dot{\mu} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}, \quad (29.25)$$

$$\nabla^2 \dot{\phi}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\phi}_m = -\frac{i\dot{\epsilon}^{-1}}{\omega} \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}. \quad (29.26)$$

Наконец, из (29.23) и (29.24) имеем

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\frac{i}{\omega \dot{\epsilon} \dot{\mu}} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_m + \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \dot{\mathbf{A}}_m). \quad (29.27)$$

§ 30. Баланс энергии при гармонических колебаниях

1. Средние энергетические характеристики. Хотя энергетические характеристики электромагнитного поля уже рассматривались в гл. 1, и, в частности, в § 10 было составлено уравнение баланса энергии, мы должны вернуться к этой теме, чтобы выяснить некоторые свойства гармонически колеблющихся полей. В данном случае интерес представляют не только мгновенные значения энергии, мощности, вектора Пойнтинга и аналогичных функций векторов поля, но и их *средние во времени* значения; последним и будет уделено основное внимание. При этом мы используем преимущества,

которые дает введение комплексных проницаемостей, а также получим их энергетическую интерпретацию.

Начнем с того, что выразим средние значения уже известных энергетических величин. Полагая, что процессы в веществе безинерционны, мы пришли в § 11, п. 1 к выражению плотности энергии поля ω . Чтобы найти среднее значение $\bar{\omega}$ величины ω при гармонических колебаниях, надо заменить E^2 и H^2 соответствующими средними \bar{E}^2 и \bar{H}^2 . Поэтому в соответствии с (11.5) и (П3.13)

$$\bar{\omega} = \frac{1}{4} (\epsilon \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu \dot{H}_m \dot{H}_m^*), \quad (30.1)$$

а также

$$\bar{\omega}^{\circ} = \frac{1}{4} \epsilon \dot{E}_m \dot{E}_m^* \quad \text{и} \quad \bar{\omega}^{\text{м}} = \frac{1}{4} \mu \dot{H}_m \dot{H}_m^*. \quad (30.1a)$$

Интеграл от $\bar{\omega}$ по некоторой области V дает среднюю энергию \bar{W} гармонически колеблющегося поля при справедливости сделанных в § 11, п. 1 предположениях о свойствах среды. Интегралы по V от $\bar{\omega}^{\circ}$ и $\bar{\omega}^{\text{м}}$, т. е. среднюю электрическую и среднюю магнитную энергии, будем обозначать \bar{W}° и $\bar{W}^{\text{м}}$.

Далее для плотности мощности $p = \mathbf{jE}$ (9.3), согласно (П3.14), среднее значение есть

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \text{Re } \dot{\mathbf{j}}_m \dot{E}_m = \frac{1}{2} \text{Re } \dot{\mathbf{j}}_m \dot{E}_m^*. \quad (30.2)$$

Обычно величину

$$\dot{p} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{j}}_m^* \dot{E}_m \quad (30.3)$$

называют плотностью *комплексной мощности*, причем

$$\bar{p} = \text{Re } \dot{p}. \quad (30.4)$$

Комплексная мощность \dot{P} в V есть интеграл по V от \dot{p} , а средняя мощность — его вещественная часть $\bar{P} = \text{Re } \dot{P}$.

Подобно этому среднее значение вектора Пойнтинга $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ (11.10) определяется на основании (П3.15):

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} \text{Re } [\dot{E}_m^*, \dot{H}_m] = \frac{1}{2} \text{Re } [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]. \quad (30.5)$$

Введем так называемый *комплексный вектор Пойнтинга*

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] \quad (30.6)$$

и запишем

$$\bar{\mathbf{\Pi}} = \text{Re } \dot{\mathbf{\Pi}}. \quad (30.7)$$

2. Средний баланс энергии. Теперь займемся выводом новых энергетических соотношений, следующих из уравнений электродинамики (29.11). Во втором из этих уравнений произведем умножение на \dot{H}_m^* , а первое возьмем в комплексно сопряженной форме

$$\text{rot } \dot{H}_m^* = -i\omega \epsilon^* \dot{E}_m^* + (\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{еr}})^*$$

и умножим на \dot{E}_m . Вычитая левые и отдельно правые части полученных равенств, найдем (ср. § 11, п. 1)

$$\dot{H}_m^* \operatorname{rot} \dot{E}_m - \dot{E}_m \operatorname{rot} \dot{H}_m^* = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^* + i\omega \dot{\epsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - (\dot{j}_m^{\text{ct}})^* \dot{E}_m,$$

или с учетом (П1.31)

$$\operatorname{div} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = i\omega (\dot{\epsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*) - (\dot{j}_m^{\text{ct}})^* \dot{E}_m. \quad (30.8)$$

Это комплексный аналог уравнения локального баланса энергии (11.3). Перепишем (30.8), используя введенные выше символы (30.3) и (30.6):

$$\operatorname{div} \dot{\Pi} = i \frac{\omega}{2} (\dot{\epsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*) - \dot{p}^{\text{ct}}. \quad (30.8a)$$

Здесь \dot{p}^{ct} есть плотность комплексной мощности источника.

Производя интегрирование по некоторому объему V с границей S и применяя слева теорему Остроградского—Гаусса, придадим этому равенству вид, аналогичный (11.4):

$$\oint_S \dot{\Pi} ds = i \frac{\omega}{2} \int_V (\dot{\epsilon}^* \dot{E}_m^* \dot{E}_m - \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_m^*) dv - \dot{P}^{\text{ct}}, \quad (30.9)$$

где введено обозначение для комплексной мощности источника

$$\dot{P}^{\text{ct}} = \int_V \dot{p}^{\text{ct}} dv = \frac{1}{2} \int_V (\dot{j}_m^{\text{ct}})^* \dot{E}_m dv \quad (30.10)$$

(ср. (9.10)).

Каков смысл уравнения (30.9)? Чтобы ответить на этот вопрос, разделим в (30.9) вещественную и мнимую части, учитывая при этом, что $\dot{\epsilon}^* = \epsilon' + i\epsilon''$ и $\dot{\mu} = \mu' - i\mu''$. Это дает

$$\operatorname{Re} \oint_S \dot{\Pi} ds = -\frac{\omega}{2} \int_V (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) dv - \operatorname{Re} \dot{P}^{\text{ct}}, \quad (30.11a)$$

$$\operatorname{Im} \oint_S \dot{\Pi} ds = \frac{\omega}{2} \int_V (\epsilon' \dot{E}_m \dot{E}_m^* - \mu' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) dv - \operatorname{Im} \dot{P}^{\text{ct}}. \quad (30.11б)$$

Истолкование первого из этих равенств не представляет труда. Согласно (30.7) слева в (30.11a) мы имеем среднее значение потока энергии через ограничивающую объем V замкнутую поверхность S , а последний член в соответствии с (30.4) выражает среднюю мощность источника; таким образом,

$$\oint_S \bar{\Pi} ds = -\frac{\omega}{2} \int_V (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) dv - \bar{P}^{\text{ct}}. \quad (30.12)$$

Поскольку источник, расходуя неэлектромагнитную энергию, создает энергию электромагнитного поля, то $\bar{p}^{\text{ct}} < 0$. Что касается взятого без знака минус первого члена правой части (30.12), то при

$$\epsilon'' > 0 \quad \text{и} \quad \mu'' > 0 \quad (30.13)$$

он наверняка положителен и, следовательно, характеризует поглощение; по смыслу это средняя мощность поглощения в среде. Действительно, если область V энергетически изолирована ($\Pi = 0$ на S), то интеграл

$$\bar{P}_\pi = \frac{\omega}{2} \int_V (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) dv \quad (30.14)$$

будет равен мощности $-\bar{P}^{ст}$, в среднем отдаваемой источником (поглощение будет иметь место, если отлична от нуля одна из неотрицательных величин ϵ'' и μ''). В частности, при $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ в (29.5) и (29.10), когда

$$\begin{aligned} \mu'' &= 0, & \epsilon'' &= \frac{\sigma}{\omega}, \\ \mu' &= \mu, & \epsilon' &= \epsilon, \end{aligned} \quad (30.15)$$

имеем

$$\bar{P}_\pi = \frac{\omega}{2} \int_V \epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma \dot{E}_m \dot{E}_m^* dv. \quad (30.16)$$

Это средняя мощность тепловых потерь в среде.

Итак, равенство (30.12) есть не что иное, как *уравнение среднего баланса энергии* при гармонических колебаниях, и ему можно придать вид

$$\oint_S \bar{\Pi} ds + \bar{P} = 0 \quad (\bar{P} = \bar{P}_\pi + \bar{P}^{ст}) \quad (30.17)$$

для сравнения с уже известным уравнением мгновенного баланса энергии (11.9). Не случайно в (30.17) отсутствует средняя скорость изменения энергии $\overline{dW/dt}$; эта величина равна нулю, так как производная dW/dt сама является гармонически колеблющейся (с частотой 2ω , поскольку энергия W квадратична). Заметим, что среднюю полную мощность \bar{P} в (30.17) называют иногда «активной» мощностью: $\bar{P} = P_a$.

Наконец, можно поставить вопрос, всегда ли ϵ'' и μ'' неотрицательны. При $\epsilon'' < 0$ или (и) $\mu'' < 0$ вместо поглощения должна происходить *регенерация* (восстановление) или *генерация* энергии поля в результате каких-то процессов в среде, связанных с преобразованием неэлектромагнитной энергии. Такие *регенеративные* среды действительно приходится рассматривать, например, в теории параметрических или квантовых усилителей и генераторов (§ 85). Разумеется, в (30.14), в этом случае мы будем иметь уже не мощность поглощения, а мощность регенерации (генерации).

Перейдем к уравнению (30.11б). В частном случае, соответствующем условию (30.15), первый интеграл справа, согласно (30.1а) выражается через среднюю электрическую и среднюю магнитную энергию в V , так что имеем

$$\text{Im} \oint_S \bar{\Pi} ds = 2\omega (\bar{W}^э - \bar{W}^м) - \text{Im} P^{ст}. \quad (30.18)$$

Как говорят, интеграл слева в (30.18) характеризует «реактивный» поток энергии, а величина $\text{Im } \dot{P}^{\text{ст}}$ — «реактивную» мощность источника: $\text{Im } \dot{P}^{\text{ст}} = P_r$.

Как видно отсюда, для энергетически изолированной системы

$$P_r = 2\omega (\bar{W}^{\text{э}} - \bar{W}^{\text{м}}) \quad (\Pi = 0 \text{ на } S), \quad (30.19)$$

т. е. реактивная мощность равна умноженной на 2ω разности средних значений электрической и магнитной энергии. Она обращается в нуль, когда эти значения равны.

При невыполнении условия (30.15) энергетическое истолкование равенства (30.11б) становится затруднительным, поскольку теряют силу выражения (30.1), (30.1а)¹⁾.

§ 31. О единственности решений задач электродинамики

1. Внутренняя задача электродинамики. Свободное электромагнитное поле является обычно одним из *возможных* полей (при тех или иных условиях); уравнения электродинамики могут иметь при этом множество решений, описывающих различные поля. Вынужденное же поле вызывается с *необходимостью* действием источников определенного рода. Поскольку в этом случае физически реально лишь какое-то одно поле, уравнения электродинамики должны иметь *единственное* решение. Вопрос заключается в том, какой предварительной информацией об электромагнитном процессе надо располагать, чтобы в конкретном случае можно было найти вынужденное поле, или, иными словами, как сформулировать дополнительные условия к уравнениям электродинамики, чтобы они имели единственное решение.

В так называемой *внутренней задаче электродинамики* требуется определить электромагнитное поле \mathbf{E} , \mathbf{H} внутри области V , ограниченной поверхностью S (рис. 31.1, а). Вынужденное поле возбуждается источником внутри V ($\mathbf{j}^{\text{ст}} \neq 0$ в V) или (а быть может, одновременно) потоком энергии из внешнего пространства через границу S ; при этом $E_{\tau} \neq 0$ и $H_{\tau} \neq 0$ на S . Выясним, при каких условиях внутренняя задача электродинамики имеет единственное решение.

Предположим (рассуждая от противного), что уравнения электродинамики (29.11) имеют в случае внутренней задачи два решения: $\dot{\mathbf{E}}_{m1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m1}$ и $\dot{\mathbf{E}}_{m2}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m2}$. Внося их в (29.11), запишем эти уравнения

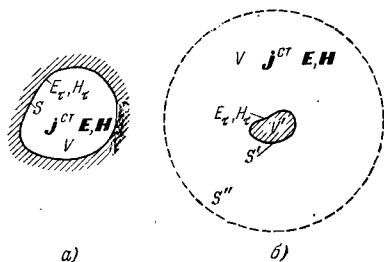


Рис. 31.1.

1) Вопрос о выражении энергии электромагнитного поля при более общих предположениях рассмотрен, например, в [В.2, Д.2].

в двух вариантах, а затем, произведя вычитание, получим новые уравнения относительно разностей $e = \dot{E}_{m1} - \dot{E}_{m2}$ и $h = \dot{H}_{m1} - \dot{H}_{m2}$,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} h &= i\omega \varepsilon e, \\ \operatorname{rot} e &= -i\omega \mu h. \end{aligned} \right\} \quad (31.1)$$

Далее, поступая, как при выводе энергетических соотношений в § 30, возьмем эти уравнения в качестве исходных вместо уравнений (29.11). Тогда вместо (30.11а) получим

$$\operatorname{Re} \oint_S [e, h^*] ds = -\frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon'' e e^* + \mu'' h h^*) dv. \quad (31.2)$$

Поскольку в конечном счете мы стремимся к нахождению условий, при которых решение e, h исчезает, а при этом равна нулю правая часть (31.2), ясно, что искомые условия должны обеспечивать уничтожение поверхностного интеграла слева, для чего достаточно, чтобы обращалась в нуль проекция векторного произведения $[e, h^*]$ на S . Это будет иметь место, если при постановке задачи дано:

$$\left. \begin{aligned} \text{а) } E_\tau &\text{ на } S \\ \text{или б) } H_\tau &\text{ на } S, \\ \text{или в) } E_\tau &\text{ на } S_1 \text{ и } H_\tau \text{ на } S_2 \text{ при } S_1 + S_2 = S. \end{aligned} \right\} \quad (31.3)$$

Действительно, в этих случаях равенство $[e, h^*]_S = 0$ выполняется из-за обращения в нуль e_τ или h_τ .

Считая одно из требований (31.3) удовлетворенным, из (31.2) получаем

$$\int_V (\varepsilon'' e e^* + \mu'' h h^*) dv = 0. \quad (31.4)$$

Потребуем также, чтобы среда внутри V была поглощающей или регенеративной: пусть $\varepsilon'' \neq 0$ или $\mu'' \neq 0$ либо $\varepsilon'' > 0$ и $\mu'' > 0$ одновременно (или $\varepsilon'' < 0$ и $\mu'' < 0$). Если, например, $\varepsilon'' \neq 0$ и $\mu'' = 0$, то из (31.4) и (31.2) непосредственно следует, что $e = 0$, а из второй строчки (31.1) находим, что и $h = 0$. К такому же выводу приходим и в остальных вариантах.

Итак, $\dot{E}_{m1} = \dot{E}_{m2}$ и $\dot{H}_{m1} = \dot{H}_{m2}$, т. е. решение рассмотренной задачи *единственно* при выполнении введенных условий.

При более внимательном анализе обнаруживается, что сделанный вывод условий единственности решения относится только к вынужденным полям. Если нет источников в V ($j^{\text{ext}} = 0$ в V) и отсутствует приток энергии извне (например, при $E_\tau = 0$ на S), то гармонические колебания возможны лишь при отсутствии поглощения (регенерации), но тогда условия единственности решения не выполнены. В противном же случае — при поглощении или регенерации —

не будет гармонических колебаний, так как поле должно затухать или возрастать ¹⁾).

В итоге видим, что внутренняя задача электродинамики имеет единственное решение при задании источника в V ($\mathbf{j}^{\text{ext}} \neq 0$) или (и) при потоке энергии через границу S (тогда хотя бы на какой-то ее части $E_{\tau} \neq 0$, $H_{\tau} \neq 0$ одновременно); при этом существенно, чтобы среда была поглощающей или регенеративной — в принципе в как угодно слабой степени.

2. Внешняя задача электродинамики. Рассмотрим далее *внешнюю задачу электродинамики*, когда требуется найти электромагнитное поле вне области V' , ограниченной поверхностью S' , в бесконечном пространстве (рис. 31.1, б). Источники представлены заданным током вне V' ($\mathbf{j}^{\text{ext}} \neq 0$) и (или) имеется поток энергии через S' .

Исследуя внешнюю задачу, используем полученное выше энергетическое соотношение (31.2). При этом областью V будет бесконечное пространство вне V' , а ее границей S — совокупность поверхности S' и сферической поверхности S'' бесконечно возрастающего радиуса с центром внутри V' (она показана на рис. 31.1, б пунктиром).

На ближней границе S' потребуем выполнения прежних условий, т. е. условий (31.3). Что касается дальней границы S'' , то договоримся, что в рассмотрение входят только поля, которые при наличии поглощения убывают быстрее, чем $1/r$. Тогда выполняется равенство

$$\oint_S [\mathbf{e}, \mathbf{h}^*] ds = \int_{S'} [\mathbf{e}, \mathbf{h}^*] ds + \int_{S''} [\mathbf{e}, \mathbf{h}^*] ds = 0.$$

Действительно, первый интеграл уничтожается точно так же, как в случае внутренней задачи, а второй — потому, что $[\mathbf{e}, \mathbf{h}^*]$ убывает быстрее, чем $1/r^2$, в то время как S'' возрастает лишь, как r^2 , при отнесении этой границы в бесконечность.

Мы видим, что при поставленных условиях опять имеет место равенство (31.4). Следующие рассуждения, как и в п. 1, приводят к выводу о равенстве нулю \mathbf{e} и \mathbf{h} , т. е. об единственности решения внешней задачи электродинамики. Однако это единственность «в классе достаточно быстро убывающих полей». Отрицать наличие дополнительных решений вне данного класса нет оснований. Условия единственности — при сделанной оговорке — остаются в сущности теми же, которые были поставлены для внутренней задачи, но регенеративные среды, в которых достаточно быстро убывающие поля невозможны, исключаются сами собой. Впрочем, задача о бесконечной регенеративной среде была бы лишена физического содержания.

¹⁾ Позднее (§ 69) мы увидим, что свободное поле при этом можно рассматривать как гармонически колеблющееся с комплексной частотой $\dot{\omega} = \omega' + i\omega''$. Выполнив прежние выкладки, в (31.2) вместо $\omega\mu''$ и $\omega\epsilon''$ будем иметь $\omega'\mu'' - \omega''\mu'$ и $\omega'\epsilon'' - \omega''\epsilon'$; прежний вывод окажется невозможным из-за неопределенности **знаков** слагаемых подинтегрального выражения, которые оба отличны от нуля.

II. ПЛОСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ВОЛНЫ

Представление о волнах читатель имеет из общего курса физики. Поэтому мы кратко напомним лишь некоторые факты.

По современным воззрениям, волновой характер электромагнитного поля есть проявление весьма общей закономерности, заключающейся в том, что не существует мгновенной передачи взаимодействий. Изменение поля в точке A по закону $f(t)$ в простейшем случае будет отмечено в точке B на расстоянии z в виде $f\left(t - \frac{z}{v}\right)$, где v — скорость распространения; налицо запаздывание на время $\tau = z/v$, которое отсутствовало бы при $v \rightarrow \infty$. Если изменение во времени происходит по закону гармонических колебаний, т. е. $f(t) = A \cos \omega t$, то процесс в целом будет описываться функцией $f\left(t - \frac{z}{v}\right) = A \cos \omega\left(t - \frac{z}{v}\right) = A \cos(\omega t - kz)$, где $k = \omega/v$ называется *волновым числом*. Полагая, что речь идет об описании, справедливом для всего пространства, назовем процесс *плоской однородной гармонической волной*: поверхности постоянной фазы — это плоскости $z = \text{const}$ и в каждой такой плоскости, называемой *фронтом* волны, амплитуда постоянна. В некоторый момент времени (при $t = \text{const}$) мы имеем косинусоидальное распределение поля вдоль оси z . Эта косинусоида представляет собой как бы «мгновенный снимок» процесса (см. ниже рис. 32.1); ее период $\lambda = 2\pi/k$ называется *длиной волны*. С течением времени косинусоидальное распределение смещается в направлении z со скоростью v , называемой *фазовой скоростью*, причем $v = \omega/k$.

Подчеркнем теперь, что центральным моментом предлагаемого раздела является изучение простейшего решения уравнений электродинамики, которое имеет характер плоской однородной волны: свободное поле такого рода мыслимо лишь в безграничном однородном пространстве, и потому есть некоторая идеализация. Однако понятие плоской однородной электромагнитной волны — одно из весьма полезных и широко употребительных.

§ 32. Одномерный электромагнитный процесс. Волны в непоглощающих средах

1. Одномерный электромагнитный процесс. Будем рассматривать свободное гармонически колеблющееся поле, которое изменяется в пространстве лишь вдоль одного прямолинейного направления; пусть это будет ось z выбранной декартовой системы координат. Мы можем взять уравнения Максвелла (29.11) или одно из векторных уравнений Гельмгольца (29.20) — (29.21), отбросив производные по координатам x и y в соответствии с принятым условием. Остановившись на уравнении (29.21), запишем:

$$-\frac{d^2 \dot{E}_m}{dz^2} + \omega^2 \epsilon \dot{E}_m = 0. \quad (32.1)$$

Пусть вектор напряженности электрического поля не изменяет своего направления в пространстве, т. е. в выражении комплексной амплитуды $\dot{E}_m = e_0 \dot{E}_m$ единичный вектор e_0 , указывающий это направление, постоянен. Тогда (32.1) по существу не отличается от хорошо известного скалярного уравнения, и мы можем сразу записать его решение в виде

$$\dot{E}_m = e_0 (\dot{A} e^{-i\omega V \sqrt{\epsilon \mu} z} + \dot{B} e^{i\omega V \sqrt{\epsilon \mu} z}), \quad (32.2)$$

где $\dot{A} = A e^{i\varphi}$ и $\dot{B} = B e^{i\psi}$ — произвольные комплексные постоянные. Итак, найдено выражение комплексной амплитуды \dot{E}_m напряженности электрического поля E для рассматриваемого одномерного процесса.

2. Плоские однородные гармонические волны при отсутствии поглощения. Далее ограничимся пока случаем непоглощающей среды, т. е. положим: $\dot{\epsilon} = \epsilon$ и $\dot{\mu} = \mu$. Обозначая

$$k = \omega V \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (32.3)$$

придадим решению (32.2) вид

$$\dot{E}_m = e_0 (\dot{A} e^{-ikz} + \dot{B} e^{ikz}). \quad (32.4)$$

Взяв $Re \dot{E}_m e^{i\omega t}$, находим отсюда выражение напряженности электрического поля

$$E = e_0 [A \cos(\omega t - kz + \varphi) + B \cos(\omega t + kz + \psi)]. \quad (32.5)$$

Эта формула описывает не что иное, как суперпозицию двух плоских однородных гармонических волн с амплитудами A и B , движущихся в противоположных направлениях z и $-z$, а k есть волновое число, связанное с фазовой скоростью v и длиной волны λ соотношениями

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (32.6)$$

Из сопоставления равенств (32.3) и (32.6) следует формула фазовой скорости электромагнитной волны:

$$v = 1/V \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (32.7)$$

В частности, в вакууме (§ 1, п. 1)

$$v = v_0 = 1/V \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 2,998 \cdot 10^8 \text{ [м/сек]}. \quad (32.8)$$

В среде с относительными проницаемостями $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ и $\mu_r = \mu/\mu_0$ фазовая скорость оказывается в $V \epsilon_r \mu_r$ раз меньше.

Напомним, что исторически величина v_0 сначала была известна как *скорость света* — в воздушной среде или космическом пространстве (ее обычно обозначают c), а получение близкого численного значения v_0 из теории Максвелла стало аргументом в пользу электромагнитной природы света.

3. **Строение волнового поля.** Полученное решение (32.4) уравнения Гельмгольца (32.1) еще не дает возможности описать строение электромагнитного поля: ни ориентация вектора \mathbf{E} , ни характер магнитного поля пока неизвестны.

Привлечем теперь уравнения Максвелла (29.11). Положив в них $\mathbf{j}_m^{\text{ср}} = 0$ (свободное поле), спроектируем векторы на оси декартовой системы координат и отбросим производные по x и y в соответствии с первоначальным условием (п. 1). Это дает

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{H}_{my}}{dz} &= -i\omega\dot{\epsilon}\dot{E}_{mx}, & \frac{d\dot{E}_{my}}{dz} &= i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{mx}, \\ \frac{d\dot{H}_{mx}}{dz} &= i\omega\dot{\epsilon}\dot{E}_{my}, & \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my}, \\ \dot{H}_{mz} &= 0, & \dot{E}_{mz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32.9)$$

Мы видим, таким образом, что при одномерном процессе поле не имеет продольных компонент E_z и H_z . Поскольку же направление вектора \mathbf{E} в пространстве неизменно, можно так выбрать ориентацию поперечных осей x и y , чтобы он был направлен по оси x ; для этого достаточно положить в (32.2) $\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0$. Тогда $\dot{E}_{my} = 0$, $\dot{E}_{mx} = \dot{E}_m$. Поэтому также $d\dot{E}_{my}/dz = 0$, и из (32.9) далее следует: $\dot{H}_{mx} = 0$, $\dot{H}_{my} = \dot{H}_m$, т. е. $\dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0\dot{H}_m$. Векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , таким образом, взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения волны: они лежат в плоскости фронта волны. Уравнения (32.9) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\dot{H}_{my}}{dz} &= -i\omega\dot{\epsilon}\dot{E}_{mx}, & \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{H}_{my}, \\ \dot{E}_{my} &= \dot{E}_{mz} = \dot{H}_{mx} = \dot{H}_{mz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (32.10)$$

Исследуем подробнее волну, распространяющуюся в направлении z . Согласно (32.4), где теперь надо положить $B = 0$, при выбранной ориентации ($\mathbf{e}_0 = \mathbf{x}_0$)

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}. \quad (32.11)$$

Внося во второе из уравнений (32.10) при $\dot{\epsilon} = \epsilon$, $\dot{\mu} = \mu$ величину $\dot{E}_{mx} = \dot{A} e^{-ikz}$, получаем

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{\dot{E}_{mx}}{\dot{H}_{my}} = \frac{k}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = W. \quad (32.12)$$

Эта величина называется *волновым сопротивлением*. Волновое сопротивление вещественно, а следовательно, электрическое и магнитное поля колеблются в фазе. Для вакуума

$$W = W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \text{ [ом]}. \quad (32.13)$$

Теперь мы располагаем всеми данными, чтобы записать решение

уравнений (29.11), выражающее плоскую однородную волну в непоглощающей среде:

$$\dot{E}_m = x_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{H}_m = y_0 \frac{\dot{A}}{W} e^{-ikz}, \quad (32.14)$$

и определить векторы поля:

$$E = x_0 A \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad H = y_0 \frac{A}{W} \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (32.15)$$

Амплитуда A и начальная фаза φ остаются неопределенными, поскольку речь идет о свободном поле (не возбуждаемом какими-то источниками, которые обуславливали бы его интенсивность и требовали синхронности). На рис. 32.1, а представлен «мгновенный снимок» распределения $E(z)$ и $H(z)$; такое поле движется вдоль оси z со скоростью v (32.7). Взаимная ориентация векторов E и H ,

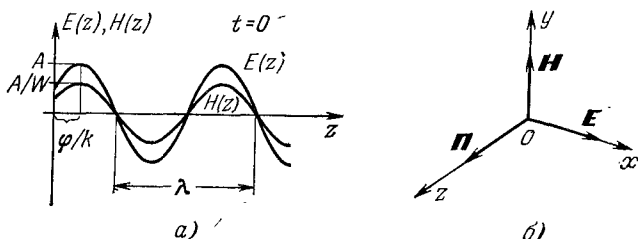


Рис. 32.1.

а также направления распространения показаны на рис. 32.1, б. Очевидно,

$$E = W [H, z_0], \quad H = \frac{1}{W} [z_0, E] \quad (32.16)$$

и по оси z направлен вектор Пойнтинга $\Pi = [E, H]$.

4. Локальные энергетические характеристики. Для волны в непоглощающей среде определим мгновенную и среднюю плотность потока энергии:

$$\Pi = [E, H] = z_0 \frac{A^2}{W} \cos^2(\omega t - kz + \varphi) \quad (32.17)$$

и (§ 30, п. 1)

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = z_0 \frac{A^2}{2W} = \frac{1}{2} \Pi_{\max}. \quad (32.18)$$

Поскольку $\cos^2(\omega t - kz + \varphi) = \frac{1}{2} [1 + \cos 2(\omega t - kz + \varphi)]$, мгновенное значение Π колеблется около среднего с удвоенной частотой.

Вычислим также мгновенные значения плотности электрической и магнитной энергии распространяющейся волны:

$$\omega^e = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{\varepsilon A^2}{2} \cos^2(\omega t - kz + \varphi)$$

и

$$\omega^m = \frac{\mu H^2}{2} = \frac{\mu A^2}{2W^2} \cos^2(\omega t - kz + \varphi) = \frac{\varepsilon A^2}{2} \cos^2(\omega t - kz + \varphi).$$

Эти величины, как видно, одинаковы:

$$\omega^{\circ} = \omega^{\text{м}} = \frac{\omega}{2} = \frac{\varepsilon A^2}{2} \cos^2(\omega t - kz + \varphi). \quad (32.19)$$

Плотность энергии подчинена тому же пространственно-временному закону, что и плотность ее потока; очевидно,

$$\bar{\omega} = \frac{\varepsilon A^2}{2} = \frac{1}{2} \omega_{\text{max}}. \quad (32.20)$$

По формуле (11.11) можно найти скорость движения энергии волны; она оказывается равной

$$v_{\text{э}} = \frac{\Pi}{\omega} = z_0 \frac{1}{\varepsilon W} = z_0 \frac{1}{V \varepsilon \mu}. \quad (32.21)$$

Величина $v_{\text{э}}$ постоянна и совпадает с ранее определенной фазовой скоростью v (32.7):

$$v_{\text{э}} = v. \quad (32.22)$$

Поскольку по обычным представлениям скорость $v_{\text{э}}$ весьма велика, можно поставить вопрос, что означает пренебрежение временем распространения электромагнитной энергии. Полагая для рассмотренного одномерного процесса $v_{\text{э}} \rightarrow \infty$, мы имеем $k = 0$ в (32.3) и соответственно этому уничтожение второго члена в уравнениях Гельмгольца (29.20) и (29.21), которые становятся уравнениями Лапласа. Электродинамическая проблема упрощается этим до стационарной.

§ 33. Волны в поглощающих средах

1. Комплексное волновое число. Вернемся к решению (32.2) уравнения (32.1), чтобы рассмотреть теперь одномерный электромагнитный процесс в поглощающей среде.

Обозначив

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}, \quad (33.1)$$

назовем этот параметр *комплексным волновым числом*. Можно внести в (33.1) выражения комплексных проницаемостей $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ и $\mu = \mu' - i\mu''$ и, разделив вещественную и мнимую части, получить формулу

$$\dot{k} = k' - ik'', \quad (33.2)$$

где k' и k'' — вещественные функции от ε' , ε'' , μ' и μ'' .

Для поглощающих сред ε'' и μ'' неотрицательны ($\varepsilon'' \geq 0$, $\mu'' \geq 0$), причем хотя бы одна из этих величин отлична от нуля. Вещественные же части комплексных проницаемостей, за исключением особых случаев, положительны ($\varepsilon' > 0$, $\mu' > 0$). Поскольку из (29.6) и

(29.10) следует, что при этом углы потерь Δ и β лежат в пределах $0 \div 90^\circ$, и в то же время

$$k' - ik'' = \pm \omega \sqrt{|\dot{\epsilon}| |\dot{\mu}|} e^{-i \frac{\Delta + \beta}{2}} = \\ = \pm \omega \sqrt{|\dot{\epsilon}| |\dot{\mu}|} \left(\cos \frac{\Delta + \beta}{2} - i \sin \frac{\Delta + \beta}{2} \right),$$

то в силу положительности входящих сюда тригонометрических функций выполняется условие

$$\text{или} \quad \left. \begin{array}{l} k' > 0, \quad k'' > 0, \\ k' < 0, \quad k'' < 0. \end{array} \right\} \quad (33.3)$$

Решению (32.2) при помощи введенных символов (33.1), (33.2) придадим форму

$$\dot{E}_m = e_0 (\dot{A}e^{-k''z}e^{-ik'z} + \dot{B}e^{k''z}e^{ik'z}). \quad (33.4)$$

Характер \dot{E}_m не изменится от того, используем ли мы первую либо вторую строчку (33.3): слагаемые только поменяются ролями; в дальнейшем остановимся на положительных k' и k'' .

2. Плоские однородные гармонические волны при поглощении. Переходя от комплексной амплитуды \dot{E}_m к напряженности электрического поля $E = \text{Re } \dot{E}_m e^{i\omega t}$, получаем

$$E = e_0 [Ae^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi) + Be^{k''z} \cos(\omega t + k'z + \psi)]. \quad (33.5)$$

Первое слагаемое (частное решение при $B = 0$), следует интерпретировать как *затухающую* волну, распространяющуюся вдоль оси z . Второе же (частное решение при $A = 0$) описывает затухающую волну, движущуюся в противоположном направлении. При исчезновении поглощения ($\epsilon'' \rightarrow 0$, $\mu'' \rightarrow 0$) найденное решение (33.5) переходит в (32.5), так как при этом $k' \rightarrow k$ и $k'' \rightarrow 0$. Заметим, что на всей оси z решение (33.5) при $A \neq 0$ и $B \neq 0$ не рассматривается ввиду неограниченного возрастания одного из слагаемых с $|z|$.

Полученный результат показывает, какой смысл имеют вещественная и мнимая части комплексного волнового числа \dot{k} (33.1). Величина k' играет в сущности ту же роль, что и вещественное волновое число k в случае волны в непоглощающей среде. Подобно (32.6) запишем:

$$k' = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (33.6)$$

где v и λ — фазовая скорость и длина волны соответственно. Разумеется, длина волны λ по-прежнему представляет собой расстояние, на котором (в фиксированный момент времени) происходит изменение фазы на 360° , но «пространственным периодом» поля уже не является. Фазовая скорость, в отличие от предыдущего, равна

$$v = 1/\text{Re } \sqrt{\dot{\epsilon}\dot{\mu}}. \quad (33.7)$$

Величина k'' есть коэффициент затухания. Отношение

$$E_m(z)/E_m(z+l) = e^{k''l} \quad (33.8)$$

показывает, во сколько раз уменьшилась амплитуда волны на расстоянии l . Под *затуханием* L понимают величину, определяемую как натуральный логарифм или двадцать десятичных логарифмов этого отношения; в первом случае она измеряется в *неперах* [неп], а во втором — в *децибелах* [дб]:

$$L = k''l \text{ неп}, \quad L = 20 \lg e^{k''l} = k''l 20 \lg e \text{ дб}. \quad (33.9)$$

Число $20 \lg e \approx 8,69$ дает соотношение между обеими единицами измерения.

Рассмотрим подробнее электромагнитное поле в виде плоской однородной затухающей волны. Ориентировав ось x декартовой

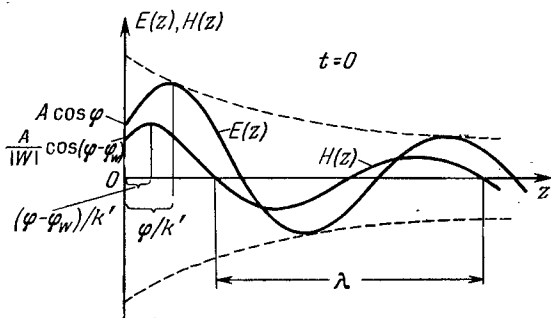


Рис. 33.1.

системы координат так, чтобы вдоль нее был направлен вектор \mathbf{E} , мы можем прямо исходить из уравнений (32.10). Для волны, распространяющейся вдоль оси z , из (32.2) или (33.4) при $B = 0$ имеем

$$\dot{\mathbf{E}}_m = x_0 \dot{A} e^{-ikz} \quad (33.10)$$

и уравнения (32.10) дают

$$\dot{\mathbf{E}}_m = x_0 \dot{A} e^{-ikz}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = y_0 \frac{A}{\dot{W}} e^{-ikz}, \quad (33.11)$$

где \dot{W} — комплексное волновое сопротивление. Являющееся, как и в § 32, отношением комплексных амплитуд $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{E}_{mx}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{H}_{my}$, комплексное волновое сопротивление равно

$$\dot{W} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{|\dot{\mu}|}{|\dot{\epsilon}|}} e^{i\varphi_W}, \quad (33.12)$$

причем $\varphi_W = (\beta - \Delta)/2$, как это получается при использовании выражений (29.6) и (29.10).

Из (33.11) находим выражения векторов поля E и H

$$\left. \begin{aligned} E &= x_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi), \\ H &= y_0 \frac{A}{|\dot{W}|} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_w). \end{aligned} \right\} \quad (33.13)$$

В отличие от незатухающей волны, здесь векторы E и H , как видно, сдвинуты по фазе на угол φ_w . «Мгновенный снимок» распределения $E(z)$ и $H(z)$ показан на рис. 33.1.

Наконец, вычислим средний вектор Пойнтинга для рассматриваемой затухающей волны:

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = z_0 \frac{A^2}{2|\dot{W}|} e^{-2k''z} \cos \varphi_w. \quad (33.14)$$

Что касается энергии электромагнитного поля, то на основании предыдущего (§§ 11 и 30) мы не могли бы в общем случае найти ω и $\bar{\omega}$, поскольку соответствующие выражения были получены для безынерционной среды. Это можно сделать, однако, при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ (см. ниже § 35).

3. Волны в диэлектриках и проводниках. Обсудим отдельно пространственный случай среды, свободной от магнитных потерь ($\beta = 0$, $\dot{\mu} = \mu$). Возведя в квадрат комплексное волновое число \dot{k} , после разделения вещественной и мнимой частей при этом получаем

$$\left. \begin{aligned} (k')^2 - (k'')^2 &= \omega^2 \varepsilon' \mu, \\ 2k'k'' &= \omega^2 \varepsilon' \mu \operatorname{tg} \Delta. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} k' &= \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{\frac{1}{2} [1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}]}, \\ k'' &= \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{\frac{1}{2} [-1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \Delta}]}. \end{aligned} \right\} \quad (33.15)$$

В частности, при $\alpha = 0$ здесь $\operatorname{tg} \Delta = \sigma/\omega\varepsilon$ и $\omega\sqrt{\varepsilon'\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = k$ (волновое число для непоглощающей среды). Ниже будем считать это условие выполненным. Напомним, что диэлектриком называют среду при условии $\operatorname{tg} \Delta \ll 1$, а проводником — при условии $\operatorname{tg} \Delta \gg 1$ (§ 29, п. 2). Выясним особенности распространения волн в этих двух случаях.

При $\operatorname{tg} \Delta \ll 1$ удобнее всего комплексное волновое число \dot{k} разложить в биномиальный ряд:

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} (1 - i \operatorname{tg} \Delta) = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \left(1 - i \frac{\operatorname{tg} \Delta}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \Delta}{8} + i \frac{\operatorname{tg}^3 \Delta}{16} + \dots \right), \quad (33.16)$$

т. е. с высокой степенью точности

$$k' \approx k \quad \text{и} \quad k'' \approx k \frac{\operatorname{tg} \Delta}{2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (33.16a)$$

Если же $\operatorname{tg} \Delta \gg 1$, то

$$\dot{k} = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu (1 - i \operatorname{tg} \Delta)} \approx \omega \sqrt{\varepsilon' \mu} \sqrt{-i \operatorname{tg} \Delta} = \omega \sqrt{\varepsilon' \mu \frac{\operatorname{tg} \Delta}{2}} (1 - i), \quad (33.17)$$

т. е.

$$k' \approx k'' \approx k \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}. \quad (33.17a)$$

Напишем также:

$$\dot{W} \approx W \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \Delta \ll 1 \quad (33.18)$$

и

$$\dot{W} \approx \sqrt{\frac{\mu}{-i \sigma / \omega}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma}} (1 + i) \quad \text{при} \quad \operatorname{tg} \Delta \gg 1. \quad (33.19)$$

Формулы (33.16), (33.16a) показывают, что вещественная часть комплексного волнового числа волны, распространяющейся в несовершенном диэлектрике, лишь незначительно отличается от волнового числа незатухающей волны в диэлектрике идеальном. То же можно сказать о фазовой скорости и длине волны, которые определяются соотношениями (33.6). Эти величины практически не зависят от частоты, как и коэффициент затухания k'' , пропорциональный тангенсу угла потерь; затухание является слабым ввиду малости последнего.

В проводниках, особенно в металлах, как видно из формул (33.17), (33.17a), затухание волн весьма велико из-за большой величины удельной проводимости σ (из табл. 6.1 следует, что для металлов σ на много порядков больше, чем для типичных диэлектриков). Поскольку вместе с коэффициентом k'' растет и вещественная часть k' волнового числа \dot{k} , то становится весьма короткой длина волны λ , определяемая на основании (33.6). Как видно из (33.17a), k' и k'' для проводника нелинейно зависят от частоты; согласно (33.6) от частоты существенно зависит и фазовая скорость волны.

При переходе к идеальному проводнику ($\sigma \rightarrow \infty$) коэффициент затухания неограниченно возрастает. Поскольку в предельном случае полное поглощение должно происходить на любом конечном пути, следует сделать вывод, что электромагнитное поле не может существовать в подобной среде.

§ 34. Ориентация, поляризация и сложение волн

1. Произвольно ориентированные волны. Мы рассматривали до сих пор плоские однородные электромагнитные волны, пользуясь специально выбранной декартовой системой координат, одна из осей которой (z) была параллельна направлению распространения волны, а другие (x и y) — векторам поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Поскольку описание поля оказывается при этом наиболее простым, такую систему координат будем называть «естественной» для волны.

В ряде случаев, однако, система координат (x, y, z) является заранее заданной, а направление распространения волны не совпа-

дает ни с одной из координатных осей. Тогда предварительно вводится естественная для данной волны система координат (ξ, η, ζ) , в которой справедливо выражение поля в виде формул (33.11)

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \xi_0 \dot{A} e^{-i\mathbf{k}\zeta}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \eta_0 \frac{\dot{A}}{W} e^{-i\mathbf{k}\zeta}. \quad (34.1)$$

Далее, зная ориентацию волны в основной системе (x, y, z) , а следовательно, и ориентацию естественной системы (ξ, η, ζ) относительно основной, следует применить формулы преобразования ортов (П4.1а) и преобразования координат (П4.2а). Таким образом, формулы (34.1) примут вид

$$\dot{\mathbf{E}}_m = (x_0 \cos \alpha_1 + y_0 \cos \alpha_2 + z_0 \cos \alpha_3) \dot{A} e^{-i\mathbf{k}(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)}, \quad (34.2)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_m = (x_0 \cos \beta_1 + y_0 \cos \beta_2 + z_0 \cos \beta_3) \frac{\dot{A}}{W} e^{-i\mathbf{k}(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)}.$$

Очевидно, здесь $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ — углы, указывающие направления векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} соответственно, а $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — углы ориентации направления распространения волны (рис. 34.1, а).

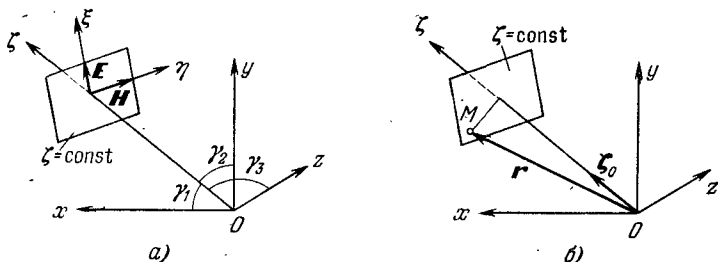


Рис. 34.1.

Рассмотрим внимательнее множитель

$$e^{-i\mathbf{k}\zeta} = e^{-i\mathbf{k}(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)},$$

степенной показатель которого определяет зависящую от координат фазу поля. Полагая его постоянным:

$$x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3 = \text{const}, \quad (34.3)$$

мы получаем не что иное, как уравнение плоскости фронта волны в основной системе координат. Введем так называемый *волновой вектор*

$$\dot{\mathbf{k}} = \dot{k}\zeta_0 = \dot{k}(x_0 \cos \gamma_1 + y_0 \cos \gamma_2 + z_0 \cos \gamma_3). \quad (34.4)$$

Теперь степенной показатель в (34.2) можно записать в краткой форме, используя скалярное произведение волнового вектора на радиус-вектор $\mathbf{r} = x_0x + y_0y + z_0z$ (рис. 34.1, б). Действительно,

$$\dot{k}(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3) = \dot{\mathbf{k}}\mathbf{r},$$

и, следовательно,

$$e^{-i\mathbf{k}\zeta} = e^{-i\dot{\mathbf{k}}(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)} = e^{-i\dot{\mathbf{k}}\mathbf{r}}. \quad (34.5)$$

Из рис. 34.1, б видно, что проекция радиус-вектора \mathbf{r} на направление распространения волны ξ равна расстоянию фронта волны, на котором лежит точка $M(\mathbf{r})$, от начала координат O .

2. Волны линейной поляризации. Далее перейдем к вопросу об ориентации поля волны при заданном направлении распространения, или, как принято говорить, о ее *поляризации*. В волне, описываемой уравнениями (34.1), вектор \mathbf{E} лежит в плоскости, проходящей через ось ξ и направление распространения ξ . Этот факт выражается словами «волна поляризована в плоскости $\xi O \xi$ ». Возьмем две волны, распространяющиеся в одном направлении ξ , но поляризованные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях $\xi O \xi$ и $\eta O \xi$; пусть они также различаются амплитудами и начальными фазами. Соответствующие комплексные амплитуды равны

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= \xi_0 \dot{A} e^{-ik\xi}, & \dot{E}_{m2} &= \eta_0 \dot{B} e^{-ik\xi}, \\ \dot{H}_{m1} &= \eta_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}} e^{-ik\xi}, & \dot{H}_{m2} &= -\xi_0 \frac{\dot{B}}{\dot{W}} e^{-ik\xi} \end{aligned} \quad (34.6)$$

(см. рис. 34.2, а, б; плоскости поляризации заштрихованы).

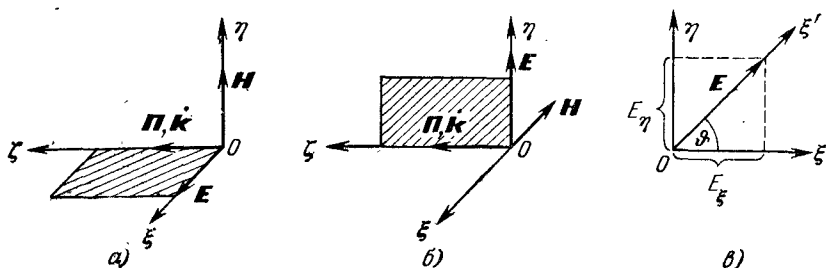


Рис. 34.2.

При наложении (т. е. одновременном существовании) обеих волн будем иметь поле с комплексными амплитудами $\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}$ и $\dot{H}_m = \dot{H}_{m1} + \dot{H}_{m2}$, так что

$$\dot{E}_m = (\xi_0 \dot{A} + \eta_0 \dot{B}) e^{-ik\xi}. \quad (34.7)$$

В частном случае, когда фазы волн совпадают ($\dot{A} = A e^{i\varphi}$, $\dot{B} = B e^{i\varphi}$), переходя от E_m к \mathbf{E} , имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= (\xi_0 A + \eta_0 B) e^{-k'\xi} \cos(\omega t - k'\xi + \varphi) = \\ &= \xi_0' C e^{-k'\xi} \cos(\omega t - k'\xi + \varphi), \\ C &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \xi_0' = \xi_0 \cos \vartheta + \eta_0 \sin \vartheta, \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{B}{A}, \end{aligned} \right\} \quad (34.8)$$

т. е. наложение двух волн, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях, дает волну, поляризованную в плоскости, составляющей угол ϑ с $\xi O \xi$ (рис. 34.2, в). Задавая различные A и B ,

можно получать волны, поляризованные во всевозможных плоскостях, проходящих через ось ζ , и имеющие любые амплитуды. Это — по определению — волны *плоской*, или *линейной*, поляризации.

3. Волны *круговой* и *эллиптической* поляризации. Но наложение двух рассматриваемых волн может привести и к волновому процессу, который уже нельзя охарактеризовать как волну линейной поляризации. Пусть, например, $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ и $\dot{B} = Ae^{i(\varphi - 90^\circ)}$,

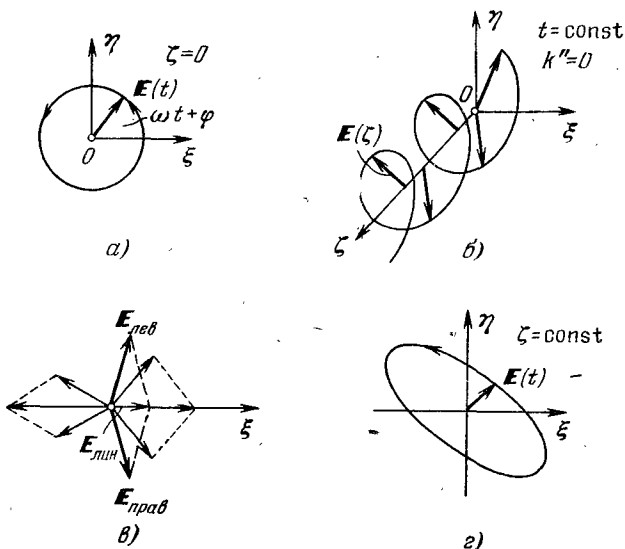


Рис. 34.3.

т. е. амплитуды волн одинаковы, а фазы отличаются на 90° . При этом из (34.7) вместо (34.8) получается:

$$\mathbf{E} = Ae^{-k'\zeta} [\xi_0 \cos(\omega t - k'\zeta + \varphi) + \eta_0 \sin(\omega t - k'\zeta + \varphi)]. \quad (34.9)$$

Соотношение компонент E_ξ и E_η в этом случае не остается постоянным во времени и пространстве. Действительно,

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{E_\eta}{E_\xi} = \operatorname{tg}(\omega t - k'\zeta + \varphi),$$

т. е. угол наклона вектора \mathbf{E} к оси ξ (рис. 34.2, в) равен

$$\vartheta = \omega t - k'\zeta + \varphi. \quad (34.10)$$

Поэтому, взяв какую-либо плоскость $\zeta = \text{const}$, мы обнаружим вращение вектора \mathbf{E} относительно направления распространения ζ с угловой скоростью ω ; смотря навстречу волне (рис. 34.3, а), увидим вращение против часовой стрелки. Если же зафиксировать момент времени $t = \text{const}$, то окажется, что вектор \mathbf{E} составляет с осью ξ угол, монотонно изменяющийся как $-k'\zeta$; поле распределено таким образом, что конец вектора \mathbf{E} как бы скользит по винтовой линии (рис. 34.3, б). Это волна *круговой* поляризации, точнее,

левой круговой поляризации. Правая круговая поляризация соответствует случаю $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ и $\dot{B} = Ae^{i(\varphi+90^\circ)}$, что означает вращение вектора \mathbf{E} в противоположном направлении.

Легко убедиться, что всякая линейно поляризованная волна может быть разложена на две волны противоположной круговой поляризации. Например, для волны, поляризованной в плоскости $\xi O \zeta$, имеем разложение

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= \xi_0 \dot{A} e^{-ikz} = A (\xi_0 + i\eta_0) e^{-ikz} + \dot{A} (\xi_0 - i\eta_0) e^{-ikz} = \\ &= \dot{A} \left(\xi_0 + e^{i\frac{\pi}{2}} \eta_0 \right) e^{-ikz} + \dot{A} \left(\xi_0 + e^{-i\frac{\pi}{2}} \eta_0 \right) e^{-ikz}. \end{aligned} \quad (34.11)$$

Это поясняется на рис. 34.3, в: два вращающихся в противоположных направлениях вектора порождают вектор колеблющийся.

Наконец, если в (34.7) $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ и $\dot{B} = Be^{i\psi}$ — произвольные комплексные числа (т. е. налагаемые волны имеют любые амплитуды и фазы), то поляризация результирующей волны будет, вообще говоря, *эллиптической*. Это значит, что вектор \mathbf{E} при $z = \text{const}$, вращаясь около направления распространения волны, изменяет свою длину, скользя концом по эллипсу, произвольно ориентированному в этой плоскости (рис. 34.3, г).

4. Сложение бегущих навстречу волн. Вместо двух волн, поляризованных в разных плоскостях и распространяющихся в одном направлении, возьмем теперь две волны одной и той же линейной поляризации, движущиеся в противоположных направлениях. Пусть, таким образом, вместо (34.6)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= \xi_0 \dot{A} e^{-ikz}, & \dot{E}_{m2} &= \xi_0 \dot{B} e^{ikz}, \\ \dot{H}_{m1} &= \eta_0 \frac{A}{\tilde{W}} e^{-ikz}, & \dot{H}_{m2} &= -\eta_0 \frac{B}{\tilde{W}} e^{ikz}, \end{aligned} \right\} \quad (34.12)$$

В этой записи изменению направления распространения волны соответствует перемена знака перед k и η_0 (можно было бы взять

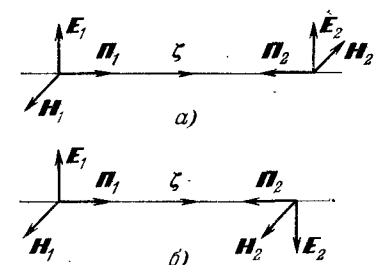


Рис. 34.4.

с измененным знаком не \dot{H}_{m2} , а \dot{E}_{m2} , это одно и то же ввиду произвольности \dot{B}). Напомним, что векторы \mathbf{E} , \mathbf{H} и $\mathbf{\Pi}$ распространяющейся волны должны образовывать правовинтовую систему, и вектор Пойнтинга в первом случае направлен по ζ , а во втором — по $-\zeta$; это поясняет рис. 34.4, а, б.

Если волны имеют одинаковые амплитуды, но, возможно, различные фазы, т. е. $\dot{A} = Ae^{i\varphi}$ и $\dot{B} = Ae^{i\psi}$, то, составляя комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} результирующего поля

$$\dot{E}_m = \xi_0 (\dot{A} e^{-ikz} + \dot{B} e^{ikz}) \quad \text{и} \quad \dot{H}_m = \eta_0 \frac{1}{\tilde{W}} (\dot{A} e^{-ikz} - \dot{B} e^{ikz}),$$

находим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \xi_0 2A e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right), \\ \dot{H}_m &= \eta_0 \frac{-i2A}{\dot{W}} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} \sin\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (34.13)$$

Отсюда в случае непоглощающей среды ($\dot{k} = k$, $\dot{W} = W$):

$$\left. \begin{aligned} E &= \xi_0 2A \cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}\right), \\ H &= \eta_0 \frac{2A}{W} \sin\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (34.14)$$

Рассмотрим это поле. Пространственная зависимость фазы, свойственная бегущим волнам (ср. (32.15)), здесь отсутствует. Фаза напряженности E равна $\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}$

или $\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2} - 180^\circ$ в зависимости от того, положительна или отрицательна величина $2A \cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)$, абсолютное значение которой $\left|2A \cos\left(k\zeta - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right|$ есть амплитуда гармонически колеблющейся функции $E(t)$. Амплитуда, как видно, зависит от ζ ; распределение $E(\zeta)$ в каждый фиксированный момент времени есть косинусоида, нули которой («узлы» поля) расположены в одних и тех же местах. Это распределение не смещается по ζ , как в случае бегущей волны; кривая $E(\zeta)$ лишь синфазно меняет вертикальный размах (рис. 34.5). Поле называют *стоячей волной*.

Как видно из (34.14), стоячие волны электрического и магнитного поля сдвинуты в пространстве на $\lambda/4$ и во времени на $T/4$, т. е. на 90° по фазе (рис. 34.5). Электромагнитное поле чисто реактивно, т. е. в среднем не переносит энергии. Формально данный вывод следует из того, что в результате фазового сдвига E и H на 90° комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{P}}$ (30.6) оказывается чисто мнимой величиной, и согласно (30.7) $\bar{\mathbf{P}} = \text{Re } \dot{\mathbf{P}} = 0$.

Рассматривая в непоглощающей среде наложение полей (34.12) с произвольными амплитудами и фазами, мы можем второе из них

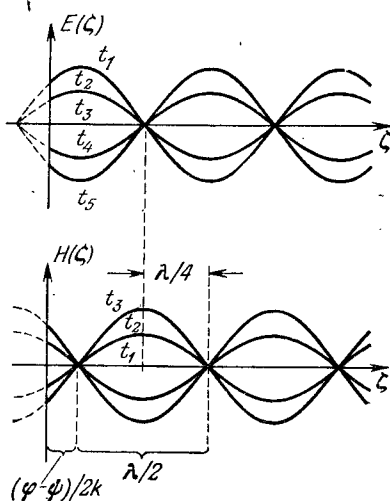


Рис. 34.5.

предварительно разложить на два, представляя коэффициент B как сумму \dot{A} и $\dot{B} - \dot{A}$. Легко видеть, что в конечном счете будет получена стоячая волна с амплитудой $2A$ и бегущая в направлении $-\zeta$ волна с амплитудой $|\dot{B} - \dot{A}|$.

§ 35. Распространение электромагнитных сигналов

1. Дисперсия. Рассмотренная в § 32 плоская однородная электромагнитная волна в непоглощающей среде имеет фазовую скорость $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ и, как было установлено, такова же скорость движения переносимой ею энергии. Согласно современным физическим представлениям величина $v_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 2,998 \cdot 10^8$ м/сек, которая равна этой скорости в случае вакуума, называемая обычно скоростью света в пустоте (c), является верхним пределом скорости распространения любых физических взаимодействий, а следовательно, и передачи сигналов. Ниже мы остановимся на некоторых особенностях распространения электромагнитных сигналов.

Можно ли отождествлять с сигналом плоскую однородную волну? На этот вопрос нетрудно сразу же ответить отрицательно, поскольку речь идет о процессе, не изменяющем своего характера в пространстве и во времени. Формулы (32.15) описывают электромагнитное поле, имеющее такой вид «всегда» (любое t), тогда как сигнал должен иметь начало и конец. Впрочем, реальный электромагнитный процесс, строго говоря, никогда не сводится к гармоническим колебаниям одной частоты уже потому, что генератор работает ограниченное время. В действительности всегда имеют дело с импульсами той или иной формы и длительности, характеризующимися спектром частот. Радиопередающие станции излучают, как известно, *модулированные* сигналы: изменение поля во времени служит средством передачи информации.

Таким образом, мы должны сосредоточить внимание на электромагнитных процессах более сложных чем гармонические колебания и волны. Представляя произвольную (непериодическую) временную зависимость в виде интеграла Фурье, мы имеем право говорить в этом смысле о суперпозиции бесконечного числа гармонических колебаний, образующих сплошной спектр. Поэтому при заданной форме (временном законе) сигнала одномерный электромагнитный процесс (§ 32) можно представить как подобную же суперпозицию плоских однородных гармонических волн, «спектральных волновых компонент». Если ϵ и μ не зависят от частоты, то определяемая по формуле (32.7) фазовая скорость любой из спектральных компонент, равная также скорости движения энергии, имеет одно и то же значение; так, в вакууме она равна скорости света. Поскольку все волновые компоненты распространяются без относительного смещения, сигнал при передаче сохраняет свою форму: временной закон при разных z различается лишь сдвигом на время запаздывания.

Гораздо сложнее обстоит дело, если нельзя не учитывать, что фазовая скорость гармонической волны зависит от ее частоты. В таких случаях говорят о наличии *дисперсии*, а среда, в которой дисперсия проявляется, называется *диспергирующей*. При распространении сигнала в диспергирующей среде его спектральные волновые компоненты, имеющие разные фазовые скорости, как бы «разбегаются». Не сохраняется форма сигнала, поскольку сложение компонент, получающих неодинаковые фазовые запаздывания, происходит при разных z с изменяющимися фазовыми соотношениями и дает нечто неповторяющееся. При передаче сигнал деформируется. Впрочем, при определенных обстоятельствах (например, если дисперсия слаба) эта деформация может быть незначительной.

2. Группа волн и групповая скорость. Чтобы сделать некоторые количественные оценки, рассмотрим распространение сигнала в непоглощающей диспергирующей среде, используя представление поля в виде интеграла Фурье. Напряженность электрического поля выразим в виде

$$E = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{E}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega, \quad (35.1)$$

где подынтегральное выражение описывает спектральную волновую компоненту с частотой ω . Эта формула может быть получена из (П8.3) при подстановке спектральной плотности в виде комплексной амплитуды волны $\dot{u}(\omega) = \frac{1}{2} \dot{E}(\omega) e^{-ik(\omega)z}$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{u}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \dot{E}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega,$$

поскольку, согласно (П8.3), $\dot{u}(-\omega) = \dot{u}^*(\omega)$.

Если спектр допустимо считать заключенным в полосе частот от $\omega_0 - \Delta\omega$ до $\omega_0 + \Delta\omega$, то (35.1) принимает вид

$$E = \operatorname{Re} \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} \dot{E}(\omega) e^{i[\omega t - k(\omega)z]} d\omega. \quad (35.2)$$

Этот интеграл перепишем в форме

$$E = \operatorname{Re} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{E}(k) e^{i[\omega(k)t - kz]} dk, \quad (35.3)$$

где частота ω заменена новой переменной k и введено обозначение k_0 для волнового числа $k(\omega_0)$.

В дальнейшем полюсу частот возьмем узкой: $\Delta\omega \ll \omega_0$, причем также $\Delta k \ll k_0$. При этом условии рассматриваемый волновой процесс называется *группой волн*. Так как при интегрировании (35.3) $|k - k_0| \ll |\Delta k|$, то имеет смысл разложить частоту $\omega(k)$ в ряд Тэйлора по степеням малой величины $k - k_0$

$$\omega = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0) + \dots \quad (35.4)$$

и ограничиться выписанной линейной частью разложения (35.4). Тогда интеграл (35.3) принимает вид

$$E \approx \operatorname{Re} e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \dot{E}(k) e^{i \left[\frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t - z \right] (k - k_0)} dk. \quad (35.5)$$

Простым примером группы волн может служить электромагнитный сигнал с прямоугольной спектральной функцией (рис. 35.1, а);

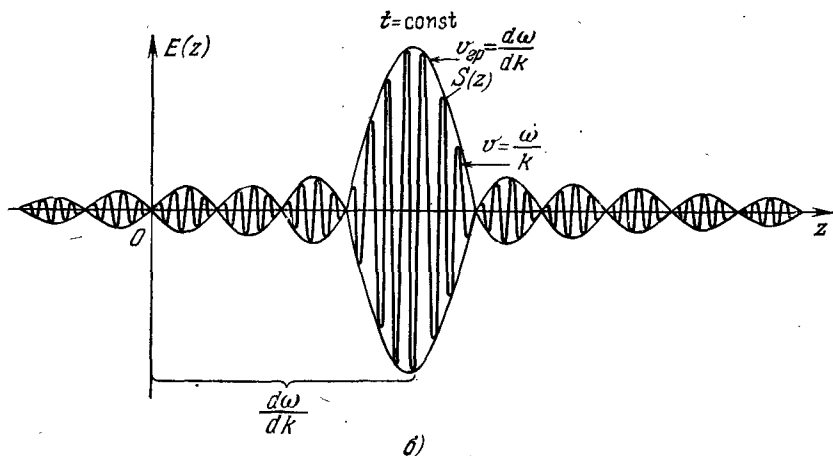
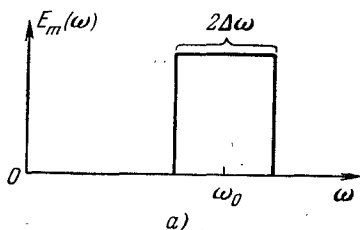


Рис. 35.1.

величина $\dot{E}(k) = \dot{E}(\omega)$ в этом частном случае является константой $\dot{E}(k_0) = E_m$. После вынесения ее за знак интеграла (35.5) имеем

$$E \approx \operatorname{Re} \dot{E}(k_0) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\Delta k}^{\Delta k} e^{i \left[\frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t - z \right] (k - k_0)} d(k - k_0)$$

и в результате интегрирования находим

$$E \approx 2 \operatorname{Re} \dot{E}(k_0) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} \Big|_0 t - z}.$$

Этому выражению напряженности электрического поля придадим следующую окончательную форму:

$$E \approx 2E_m \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z} \cos (\omega t - kz) \quad (\omega = \omega_0). \quad (35.6)$$

Остается обсудить полученный результат. Как видно, поле группы волн имеет характер *модулированной* гармонической волны с *огibaющей*, которая описывается функцией (рис. 35.1, б)

$$S(z, t) = \frac{\sin \left[\left(\frac{d\omega}{dk} t - z \right) \Delta k \right]}{\frac{d\omega}{dk} t - z}. \quad (35.7)$$

Фазовая скорость $v = \omega/k$, определяемая волновым числом k в аргументе косинуса формулы (35.6), показывает нам, с какой быстротой смещается вдоль оси z «несущая косинусоида» внутри огибающей. Ясно, что это не скорость распространения сигнала: последний характеризуется огибающей, и надо исследовать ее движение.

Максимум огибающей (согласно (35.7) $S_{\max} = \Delta k$) имеет место при

$$\frac{d\omega}{dk} t - z = 0. \quad (35.8)$$

Он действительно движется, ибо условие (35.8) выполняется при разных координатах z в различные моменты времени t . Скорость движения огибающей мы получим, вычислив из (35.8) производную dz/dt . Это так называемая *групповая скорость* $v_{\text{гр}}$, которая, следовательно, равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (35.9)$$

Групповая скорость и является в данном случае скоростью распространения сигнала.

3. Замечания о групповой скорости. Понятие групповой скорости в большинстве случаев оказывается полезным до тех пор, пока дисперсия еще не приводит к существенному искажению сигнала. Обычно групповая скорость имеет смысл скорости движения энергии.

Каково соотношение между фазовой скоростью $v = \omega/k$ и групповой скоростью $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$? Согласно (35.9)

$$v_{\text{гр}} = \frac{d}{dk} (vk) = v + k \frac{dv}{dk}, \quad (35.10)$$

или

$$v_{\text{гр}} = v + k \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \quad (35.10a)$$

и, таким образом, в зависимости от знака производной dv/dk либо $dv/d\lambda$ групповая скорость может быть как меньше, так и больше

фазовой. Формулы (35.10), (35.10а) показывают, в частности, что при отсутствии дисперсии, т. е. при независимости фазовой скорости v от частоты ω (а следовательно, от k и λ), она равна групповой скорости: $v = v_{\text{гр}}$ при $dv/d\omega = 0$. Для среды с поглощением по аналогии с (35.9) определим величину

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk'} \quad (35.11)$$

и на примере убедимся, что она может иметь определенное физическое содержание.

Исследуем случай проводника ($\text{tg } \Delta = \sigma/\omega\varepsilon \gg 1$), среды сильно диспергирующей. На основании (33.17а)

$$v = \frac{\omega}{k'} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad \text{и} \quad v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk'} \approx 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \quad (35.12)$$

Как видно, здесь $v_{\text{гр}} = 2v$, причем

$$\sqrt{\frac{\omega}{\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\text{tg } \Delta}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \ll \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

и поэтому $v_{\text{гр}}$ заведомо меньше, чем v_0 .

Воспользовавшись формулой (11.11), в которую внесем средние значения вектора Пойнтинга и плотности энергии, запишем выражение скорости движения энергии в виде

$$v_3 = \frac{\bar{\Pi}}{\bar{w}} \quad (35.13)$$

и вычислим v_3 , взяв соотношения (30.1), (30.6) и выражения напряженностей (33.11). Таким образом,

$$v_3 = \frac{\frac{1}{2} \text{Re} \left[x_0 \dot{A} e^{-ik'z}, y_0 \frac{\dot{A}^*}{\dot{W}^*} e^{ik'^*z} \right]}{\frac{1}{4} \varepsilon A^2 e^{-2k''z} + \frac{1}{4} \mu \frac{1}{|\dot{W}|^2} A^2 e^{-2k''z}} = z_0 \frac{2 \text{Re} (\dot{W}^*)^{-1}}{\varepsilon + \frac{\mu}{|\dot{W}|^2}}$$

С учетом (33.19) отсюда получаем

$$v_3 \approx \frac{2\sqrt{2\sigma/\omega\mu}}{\varepsilon + \frac{\sigma}{\omega}} \approx 2\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}} \approx v_{\text{гр}} \quad (35.14)$$

(пренебрежение первым членом знаменателя соответствует условию $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$ в этом же приближении определялись k' , \dot{W} , v и $v_{\text{гр}}$). Итак, скорость движения энергии оказалась совпадающей с групповой скоростью, определенной по формуле (35.11).

III. ВОЛНЫ ПРИ НАЛИЧИИ ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА СРЕД

Уже отмечалось, что плоскую однородную электромагнитную волну в неограниченной среде нельзя рассматривать как реальный объект; в сущности это лишь звено в изучении электромагнитных волновых явлений. Абстракция бесконечного пространства с неизменными физическими свойствами имеет определенную ценность,

но не позволяет еще выявить многие черты этих явлений. В действительности обычно встречаются границы раздела различных сред, существование которых следует учитывать. Так, например, при распространении радиоволн в природных условиях существенную границу раздела сред образует земная поверхность.

Ниже предметом изучения будут свободные электромагнитные поля в пространстве, разделенном плоскостью на два полупространства с различными свойствами. Следует ожидать, что поле в виде плоской однородной волны не явится решением задачи, так как последнее должно удовлетворять уравнениям Максвелла в каждом из полупространств и граничным условиям на плоскости раздела. Однако понятие плоской однородной электромагнитной волны продолжает оставаться полезным. Дело в том, что типичный электромагнитный процесс в рассматриваемых условиях сводится к существованию трех таких волн. Позднее — на рис. 37.1 — будет представлена схема распространения этих характерных волн, она дает основание для следующей интерпретации. Движущаяся в среде 1 к границе раздела волна «0», или, как говорят, *падающая* на границу волна в измененном направлении проходит в среде 2 в виде так называемой *преломленной* волны «+»; в первой же среде порождается движущаяся от границы раздела волна «—», называемая *отраженной*.

Мы приходим таким путем к понятиям *отражения* и *преломления* электромагнитных волн, а точнее, их волновых нормалей (линий, перпендикулярных фронту), или *лучей*.

В § 34 уже были рассмотрены некоторые случаи сложения плоских однородных волн. Наложение падающей и отраженной волн в разных условиях приводит, вообще говоря, к более сложным волновым процессам; изучение их — одна из главных задач предлагаемого раздела.

§ 36. Нормальное падение

1. Постановка задачи. Согласование сред. В простейшем случае плоскость раздела параллельна фронту волнового процесса. Расположим декартову систему координат таким образом, чтобы среды с разными свойствами разделяла плоскость xOy (рис. 36.1): среда 1 (левое полупространство, $z < 0$) характеризуется проницаемостями ϵ_1 и μ_1 , а среда 2 (правое полупространство, $z > 0$) — проницаемостями ϵ_2 и μ_2 .

Пусть в левом полупространстве распространяется плоская однородная электромагнитная волна

$$\dot{E}_m^0 = x_0 \dot{A} e^{-i k_1 z}, \quad \dot{H}_m^0 = y_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-i k_1 z} \quad (36.1)$$

($z < 0$, $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$, $\dot{W}_1 = \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$). Назовем ее *нормально падающей* на границу раздела сред. Очевидно, что поле с комплексными

амплитудами (36.1) не является решением уравнений Максвелла для правого полупространства. В нем от границы должна была бы распространяться волна, для которой

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^+ &= x_0 \dot{B} e^{-ik_2 z}, & \dot{H}_m^+ &= y_0 \frac{B}{\dot{W}_2} e^{-ik_2 z} \\ (z > 0, & k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_2 \mu_2}, & \dot{W}_2 &= \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}). \end{aligned} \quad (36.2)$$

Сначала поставим следующий вопрос: могут ли выражения (36.1) и (36.2) в совокупности представлять решение поставленной электродинамической задачи? Чтобы ответить на него, надо рассмотреть предполагаемое поле на границе раздела сред, где, как это

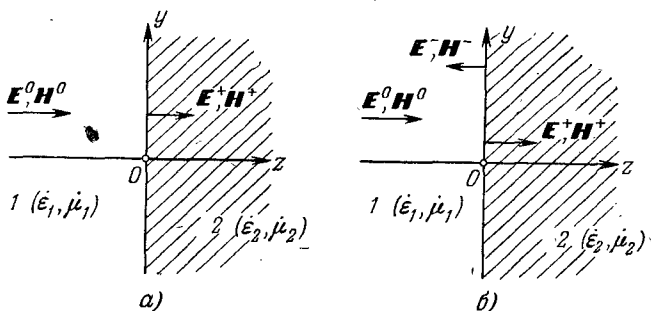


Рис. 36.1.

следует из § 7, должны быть выполнены определенные условия — в данном случае условия непрерывности тангенциальных компонент векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} принимающие вид

$$\dot{E}_m^0 = \dot{E}_m^+ \quad \text{и} \quad \dot{H}_m^0 = \dot{H}_m^+ \quad \text{при} \quad z = 0, \quad (36.3)$$

так как векторы параллельны границе. Внося сюда выражения (36.1) и (36.2), имеем

$$\dot{A} = \dot{B} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} = \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2}$$

и получаем равенство

$$\dot{W}_1 = \dot{W}_2, \quad (36.4)$$

которое, таким образом, является условием существования предполагаемого решения задачи.

Итак, если волновые сопротивления для обеих сред одинаковы, то волна, нормально падающая из первой среды на границу со второй, порождает там свою волну, распространяющуюся в прежнем направлении, чем и исчерпывается электромагнитный процесс (рис. 36.1, а).

Равенство (36.4) называют *условием согласования сред*; придадим ему вид

$$\dot{\mu}_1/\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\mu}_2/\dot{\varepsilon}_2. \quad (36.4a)$$

2. **Получение общего решения.** Случай согласования сред является довольно искусственным; нас же интересует решение задачи без специальных ограничений, налагаемых на проницаемости сред. Предположим, что такое решение будет отличаться от полученного в п. 1 наличием *отраженной* волны, распространяющейся в среде 1 от ее границы:

$$\dot{E}_m^- = x_0 \dot{C} e^{i k_1 z}, \quad \dot{H}_m^- = -y_0 \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} e^{i k_1 z} \quad (36.5)$$

($z < 0$), т. е. решение имеет вид

$$\dot{E}_m = \begin{cases} \dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^-, & z < 0, \\ \dot{E}_m^+, & z > 0, \end{cases} \quad \dot{H}_m = \begin{cases} \dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^-, & z < 0, \\ \dot{H}_m^+, & z > 0. \end{cases} \quad (36.6)$$

Тогда на границе раздела вместо (36.3) должны выполняться условия

$$\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- = \dot{E}_m^+ \quad \text{и} \quad \dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^- = \dot{H}_m^+ \quad (36.7)$$

($z = 0$), которые при подстановке (36.1), (36.2) и (36.5) дают

$$\dot{A} + \dot{C} = \dot{B} \quad \text{и} \quad \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} - \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} = \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2}.$$

Мы получили два уравнения относительно коэффициентов \dot{A} , \dot{B} и \dot{C} . Поскольку система уравнений всегда разрешима, граничные условия (36.7) будут удовлетворены, и решение рассматриваемой электродинамической задачи действительно имеет вид (36.6). Естественно, что решение этой линейной задачи определено с точностью до постоянного коэффициента: амплитуда падающей волны остается произвольной. Вводя новые величины в виде относительных амплитуд

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{C}}{\dot{A}} \quad \text{и} \quad \dot{\tau} = \frac{\dot{B}}{\dot{A}}, \quad (36.8)$$

имеем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \dot{\rho} &= \dot{\tau}, \\ \dot{W}_2 (1 - \dot{\rho}) &= \dot{W}_1 \dot{\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (36.9)$$

из которой находим

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{W}_2 - \dot{W}_1}{\dot{W}_2 + \dot{W}_1} \quad \text{и} \quad \dot{\tau} = \frac{2\dot{W}_2}{\dot{W}_2 + \dot{W}_1}. \quad (36.10)$$

Фактически решение найдено. Внося в (36.6) выражения (36.1), (36.2) и (36.5), с учетом (36.8) получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= \begin{cases} x_0 \dot{A} (e^{-i\dot{k}_1 z} + \dot{\rho} e^{i\dot{k}_1 z}), & z \leq 0, \\ x_0 \dot{A} \dot{\tau} e^{-i\dot{k}_2 z}, & z \geq 0, \end{cases} \\ \dot{H}_m &= \begin{cases} y_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} (e^{-i\dot{k}_1 z} - \dot{\rho} e^{i\dot{k}_1 z}), & z \leq 0, \\ y_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_2} \dot{\tau} e^{-i\dot{k}_2 z}, & z \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (36.11)$$

Здесь коэффициенты $\dot{\rho}$ и $\dot{\tau}$ определены формулами (36.10).

3. Исследование поля при нормальном падении. Остается истолковать полученный результат. Сначала отметим, что величины $\dot{\rho}$ и $\dot{\tau}$ на основании предыдущего легко представить через отношения комплексных амплитуд составляющих волн на границе раздела ($z = 0$):

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{E}_m^-(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = -\frac{\dot{H}_m^-(0)}{\dot{H}_m^0(0)} \quad \text{и} \quad \dot{\tau} = \frac{\dot{E}_m^+(0)}{\dot{E}_m^0(0)} = \frac{\dot{W}_1 \dot{H}_m^+(0)}{\dot{W}_2 \dot{H}_m^0(0)}. \quad (36.12)$$

Обычно $\dot{\rho}$ называют *коэффициентом отражения*, а $\dot{\tau}$ — *коэффициентом передачи*: первая из этих величин дает относительное значение электрической комплексной амплитуды отраженной волны на границе раздела сред, а вторая — аналогичное значение для прошедшей волны.

Если в обеих средах отсутствует поглощение, то волновые сопротивления \dot{W}_1 и \dot{W}_2 вещественны (при этом будем писать W_1 и W_2), а с ними, согласно (36.10), вещественны также $\dot{\rho} = \rho$ и $\dot{\tau} = \tau$. В этом случае при прохождении волны через границу фаза

не меняется, при отражении же фаза либо остается прежней ($\rho > 0$ при $W_2 > W_1$), либо изменяется на 180° ($\rho < 0$ при $W_2 < W_1$). Что касается абсолютных величин вещественных ρ и τ , то первая не превышает единицы, а вторая — двух; читателю предоставляется проверить, что

$$[\dot{E}_m^0(0) + \dot{E}_m^-(0), \dot{H}_m^0(0)^* + \dot{H}_m^-(0)^*] = [\dot{E}_m^+(0), \dot{H}_m^+(0)^*],$$

т. е. при переходе границы поток энергии, переносимый полным полем, сохраняется. На рис. 36.2 графически показано, как ρ и τ зависят от отношения W_2/W_1 .

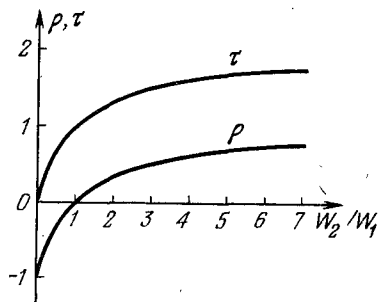


Рис. 36.2.

Желая исследовать поле в первой среде, произведем простое преобразование в соответствующих выражениях из (36.11):

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= x_0 \dot{A} e^{-ik_1 z} (1 + \rho e^{i2k_1 z}), \\ \dot{H}_m &= y_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-ik_1 z} (1 - \rho e^{i2k_1 z}) \quad (z \leq 0). \end{aligned} \quad (36.13)$$

Отсюда видно, что амплитуды векторов поля (E_m и H_m) пропорциональны модулям комплексных чисел $1 + \rho e^{i2k_1 z}$ и $1 - \rho e^{i2k_1 z}$ соответственно. Изменение последних в зависимости от z легко понять

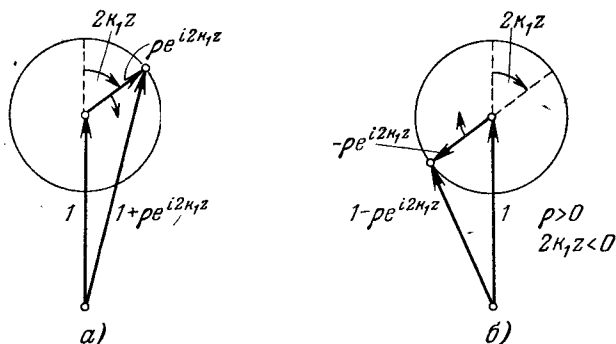


Рис. 36.3.

направленный отрезок, около которого при изменении z вращается при помощи диаграмм, используемых для изображения комплексных величин. Пусть по-прежнему отсутствуют потери ($k_1 = k_1$, $\dot{W}_1 = W_1$). При этом на диаграммах (рис. 36,3, а, б) фиксируется единичный

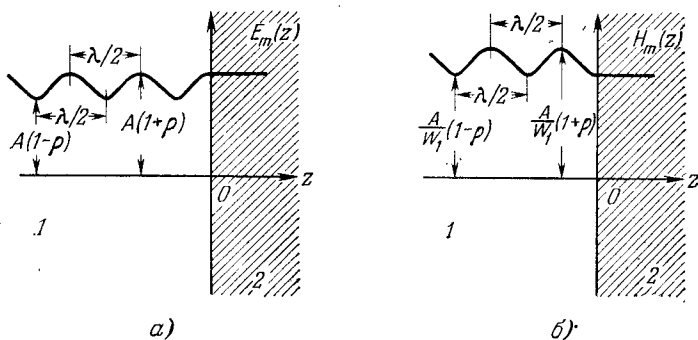


Рис. 36.4.

направленный отрезок $\rho e^{i2k_1 z}$ или $-\rho e^{i2k_1 z}$ длиной $|\rho|$ (вместе с z растет фаза $2k_1 z$). Величины E_m и H_m пропорциональны, таким образом, отрезкам, получаемым на диаграммах векторным сложением неподвижного и вращающегося «векторов». Как видно, $E_m(z)$ и $H_m(z)$ колеблются (рис. 36.4, а, б), причем расстояния между

соседними максимумами или соседними минимумами соответствуют полному обороту вращающегося вектора диаграмм; обозначая такое расстояние Δz , имеем: $2k_1 \Delta z = 2\pi$, откуда

$$\Delta z = \frac{\lambda_1}{2} \quad \left(k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \right), \quad (36.14)$$

т. е. максимумы, как и минимумы, расположены на расстояниях полуволны. Максимальные значения $E_m(z)$ и $H_m(z)$ пропорциональны $1 + |\rho|$, а минимальные $1 - |\rho|$; поэтому при малых отражениях колебания амплитуд также невелики, а при полном отражении ($|\rho| = 1$) амплитуды спадают до нуля. Согласно (36.10) отражение велико, когда одно из волновых сопротивлений намного превосходит другое по модулю ($|\dot{W}_1| \gg |\dot{W}_2|$ или $|\dot{W}_2| \gg |\dot{W}_1|$).

4. Отражение от идеального проводника. Пусть среда, на границу с которой падает волна, есть проводник. Тогда, согласно (33.19),

$$\dot{W}_2 \approx \sqrt{i \frac{\omega \mu_2}{\sigma_2}}. \quad (36.15)$$

При переходе к идеальному проводнику ($\sigma \rightarrow \infty$) выражение (36.15) становится точным: $\dot{W}_2 = 0$. Тогда на основании (36.10):

$$\dot{\rho} = -1 \quad \text{и} \quad \dot{\tau} = 0. \quad (36.16)$$

При этом в силу (36.11) поле во второй среде отсутствует; в первой же среде комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} имеют вид

$$\dot{E}_m = -ix_0 2\dot{A} \sin k_1 z, \quad \dot{H}_m = y_0 2 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} \cos k_1 z, \quad z \leq 0, \quad (36.17)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= -x_0 2\dot{A} (i \sin k_1 z \operatorname{ch} k_1'' z + \cos k_1 z \operatorname{sh} k_1'' z), \\ \dot{H}_m &= y_0 2 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} (\cos k_1 z \operatorname{ch} k_1'' z + i \sin k_1 z \operatorname{sh} k_1'' z), \end{aligned} \right\} \quad z \leq 0. \quad (36.17a)$$

Подчеркнем, что определяемое этими формулами магнитное поле уже не удовлетворяет исходному условию непрерывности на границе раздела $H_1(0) = H_2(0)$. Согласно (8.56) на плоскости раздела распределен поверхностный ток, комплексная амплитуда плотности которого есть

$$\dot{\eta}_m = [-z_0, \dot{H}_m(0)] = x_0 2 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} = x_0 2 \dot{H}_m^0. \quad (36.18)$$

В случае непоглощающей среды ($k_1 = k_1$ и $\dot{W}_1 = W_1$ вещественны), как следует из (36.17), напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты по фазе на 90° . Средний вектор Пойнтинга $\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]$ оказывается равным нулю: поле в среднем не переносит энергии. В то

же время E и H имеют фазы, не изменяющиеся в пространстве при постоянстве знака E_m и H_m соответственно. Действительно, определяя в данном случае из (36.17)

$$E = \operatorname{Re} \dot{E}_m e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad H = \operatorname{Re} \dot{H}_m e^{i\omega t}, \quad \text{имеем}$$

$$E = x_0 2A \sin k_1 z \sin(\omega t + \varphi), \quad H = y_0 2 \frac{A}{W_1} \cos k_1 z \cos(\omega t + \varphi). \quad (36.19)$$

Мы видим, что фазы электрического и магнитного полей зависят только от времени при $\sin k_1 z > 0$ или $\sin k_1 z < 0$ и соответственно

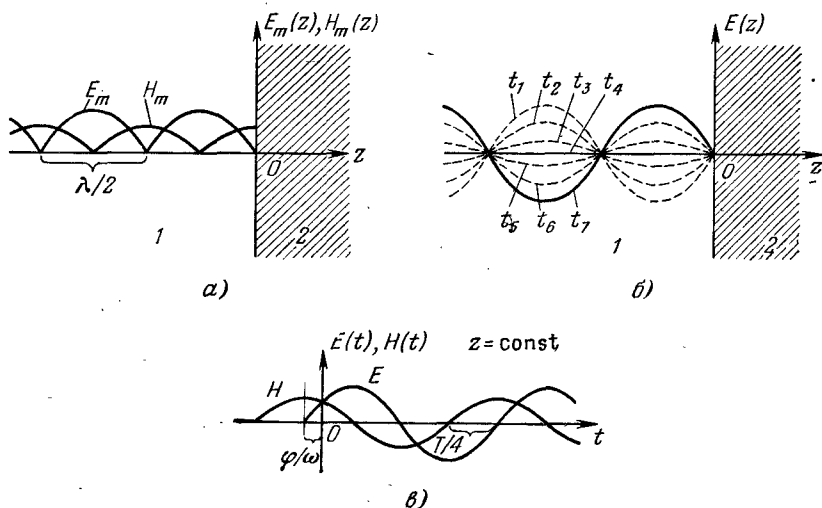


Рис. 36.5.

при $\cos k_1 z > 0$ или $\cos k_1 z < 0$, в пространстве же изменяются их амплитуды.

Итак, в рассмотренном случае образуется *стоячая волна*, в более общем виде описанная в § 34, п. 4, поскольку при $|\rho| = 1$ здесь налицо наложение двух противоположно распространяющихся волн с одинаковыми амплитудами. Ряд эпюр функции $E(z)$ для последовательности моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ показывает, что максимумы («пучности») и нули («узлы») распределения фиксированы в пространстве (рис. 36.5, б); это следствие пространственной синфазности колебаний поля. Распределения $E_m(z)$ и $H_m(z)$ сдвинуты вдоль оси z на $\lambda/4$ (рис. 36.5, а), а в результате фазового сдвига на 90° , т. е. сдвига во времени на $T/4$ (рис. 36.5, в) имеются моменты $(t = \frac{m\pi - \varphi}{\omega}, m = 0, 1, 2, \dots)$, когда поле чисто магнитное, и другие моменты $(\frac{n\pi - 2\varphi}{\omega} = 2t, n = 1, 2, \dots)$, когда оно чисто электрическое.

На любой плоскости, отстоящей от идеально проводящей границы на целое число полуволн, поле удовлетворяет тем же условиям, что и на этой границе; следовательно, каждую такую плоскость можно заменить второй идеально проводящей границей, насколько не нарушив предпосылок существования поля. На рис. 36.6, а две идеально проводящие границы расположены на расстоянии $3\lambda/2$; между ними существует поле типа стоячей волны, описываемое выражениями (36.19).

Далее зафиксируем расстояние между плоскостями, назвав его d . Ясно, что между этими плоскими идеально проводящими

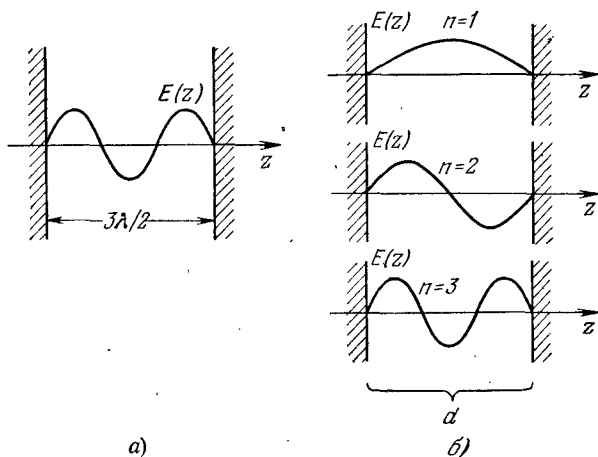


Рис. 36.6.

границами возможны различные поля типа стоячей волны, причем условием их существования является требование:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2d}{n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (36.20a)$$

На рис. 36.6, б представлены три распределения поля, соответствующие низшим значениям n . Каждой «разрешенной» длине волны λ_n соответствует частота

$$\omega_n = \frac{2\pi}{\lambda_n} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} = \frac{n\pi}{d} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (36.20б)$$

которую называют *собственной частотой* системы идеально проводящих плоскостей. Последняя есть не что иное, как простейший электромагнитный резонатор, ибо она будет «откликаться» на возбуждение с частотой ω , равной одной из собственных частот ω_n . Всевозможные свободные поля резонатора называются его *собственными колебаниями*. Очевидно, что их бесконечное множество.

Электромагнитные резонаторы будут систематически рассматриваться в гл. 5.

5. Отражение от реального проводника. В заключение исследуем падение волны, распространяющейся в идеальном диэлектрике ($k_1 = k_1, \dot{W}_1 = W_1$), на границу с реальным проводником. Используя формулу (36.15), введем отношение

$$\alpha = \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} \approx \sqrt{i \frac{\omega \mu_2}{\sigma_2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} = (1+i) \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_1}{2\sigma_2}}, \quad (36.21)$$

являющееся малым комплексным параметром (положено, что $\dot{\mu}_2 = \mu_1 = \mu_0$, как это и бывает в большинстве случаев). Формулы (36.10) удобно представить в виде разложений по α :

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = -1 + 2\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3 - \dots, \\ \dot{\tau} &= \frac{2\alpha}{1+\alpha} = 2\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3 - \dots \end{aligned} \quad (36.22)$$

Таким образом, с точностью до α^2

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &\approx -1 + 2\alpha = -1 + (1+i) \sqrt{\frac{2\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}}, \\ \dot{\tau} &\approx 2\alpha = (1+i) \sqrt{\frac{2\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}}. \end{aligned} \quad (36.23)$$

Насколько этот результат близок к соотношениям (36.16), полученным для идеального проводника, видно из того, что, например, при медной отражающей плоскости ($\sigma_2 = 5,8 \cdot 10^7 \text{ сим/м}$) в воздухе ($\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ ф/м}$)

$$\sqrt{\frac{\omega \varepsilon_1}{\sigma_2}} = \sqrt{\frac{2\pi f \varepsilon_0}{\sigma_2}} \approx 10^{-9} \sqrt{f},$$

где частота f в *гц*.

Тем не менее разницу необходимо учитывать, если ставится задача вычислить *поглощение* энергии при отражении от проводящей (металлической) поверхности. Согласно (36.11) и (36.23) среднее значение вектора Пойнтинга $\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]$, направленного внутрь металла, есть

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} z_0 \text{Re} \frac{A^2 |\dot{\tau}|^2}{\dot{W}_2^*} = z_0 A^2 \varepsilon_1 \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma_2 \mu_0}}, \quad z=0. \quad (36.24)$$

Абсолютное значение этого вектора — это мощность, теряемая на единице поверхности металла. Чтобы придать результату более удобную форму, учтем, что на проводящей поверхности, как видно из (36.11),

$$H_m(0) = \frac{A}{W_1} |1 - \dot{\rho}| \approx \frac{2A}{W_1} = 2H_m^0.$$

Поэтому

$$\bar{\Pi} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}} H_m^2(0) = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma_2}} (H_m^0)^2. \quad (36.25)$$

Мощность поглощения на площади S находится путем умножения этой величины на S .

§ 37. Наклонное падение. Законы Снеллиуса

1. Основные черты постановки задачи. Пусть на границу раздела сред 1 и 2 наклонно падает волна E^0, H^0 . Как и при нормальном падении, полное поле представляет собой совокупность трех волн: в первой среде кроме падающей существует отраженная волна E^-, H^- , а во второй — преломленная волна E^+, H^+ ; схема волнового процесса представлена на рис. 37.1.

В отличие от § 36 начнем исследование не с нахождения решения электродинамической задачи, а с выяснения некоторых предпосылок его существования, которые сами по себе приведут к формулировке законов отражения и преломления.

На рис. 37.1 изображены три луча, указывающих направления распространения исследуемых волн. Луч падающей волны (o) лежит в плоскости zOy , называемой плоскостью падения, и составляет с осью z угол φ (угол падения). Согласно (34.2) все компоненты поля падающей волны зависят от координат как

$$e^{-ik_1(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)},$$

где в соответствии с рис. 37.1 и рис. 34.1, а $\gamma_1 = 90^\circ$, $\gamma_2 = 90^\circ - \varphi$ и $\gamma_3 = \varphi$. Таким образом, функция

$$f^0(y, z) = e^{-ik_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)} \quad (37.1)$$

характеризует (с точностью до постоянного множителя) зависимость от координат любой из компонент падающей волны E^0, H^0 ; заметим, что поле не зависит от координаты x (перпендикулярной к плоскости чертежа).

Лучи отраженной и преломленной волн также лежат в плоскости падения yOz , поскольку в противном случае соответствующие поля имели бы зависимость от координаты x , а тогда граничные условия на плоскости раздела не могли бы быть удовлетворены. В соответствии с рис. 37.1 компоненты отраженной и преломленной волн описываются функциями, подобными $f^0(y, z)$ (37.1): надо лишь вместо φ в одном случае взять угол ψ , а в другом ϑ , заменив также k_1 на k_2 . Речь идет, следовательно, о функциях

$$f^-(y, z) = e^{-ik_1(y \sin \psi + z \cos \psi)} \quad (37.2)$$

и

$$f^+(y, z) = e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)} \quad (37.3)$$

соответственно.

Очевидно, что граничным условиям можно будет удовлетворить только при требовании, чтобы на плоскости раздела сред ($z = 0$) компоненты полей $E^0, H^0; E^-, H^-$ и E^+, H^+ с точностью до постоянных

множителей являлись идентичными функциями координаты y , что формулируется в виде двойного равенства

$$f^0(y, 0) = f^-(y, 0) = f^+(y, 0). \quad (37.4)$$

2. Законы Снеллиуса. Внося в (37.4) выражения функций (37.1) — (37.3), видим, что должно быть

$$\dot{k}_1 \sin \varphi = \dot{k}_1 \sin \psi = \dot{k}_2 \sin \vartheta. \quad (37.5)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\sin \varphi = \sin \psi,$$

а поскольку, согласно рис. 37.1, $\varphi \leq 90^\circ$ и $\psi \geq 90^\circ$, то угол φ равен смежному с ψ углу $180^\circ - \psi$, обозначенному φ' и называемому *углом отражения*:

$$\varphi = \varphi'. \quad (37.6)$$

Итак, угол падения равен углу отражения. Этот факт составляет содержание *первого закона Снеллиуса*.

Далее из (37.5) следует:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{\dot{k}_1}{\dot{k}_2}. \quad (37.7)$$

При отсутствии поглощения в обеих средах

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1}, \quad (37.7a)$$

где v_1 и v_2 — фазовые скорости волн в средах 1 и 2. Угол ϑ называется *углом преломления*, а полученное соотношение выражает *второй закон Снеллиуса*: синусы углов падения и преломления относятся как фазовые скорости в соответствующих (непоглощающих) средах.

Введя *показатели преломления* $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{1r}\mu_{1r}}$ и $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{2r}\mu_{2r}}$, а также *относительный показатель преломления* $n_{12} = n_1/n_2$, запишем еще одну формулировку второго закона Снеллиуса:

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{n_1}{n_2} = n_{12}. \quad (37.7b)$$

Равенство (37.7) можно рассматривать как выражение обобщенного закона Снеллиуса.

Законы Снеллиуса известны из геометрической оптики, в которой вообще отсутствует понятие волны, а изучаются *лучи*. Понимая луч как направление распространения волны (нормаль к ее фронту), мы получили эти законы в качестве следствия из общих законов электромагнетизма.

Обратимся теперь к законам Снеллиуса, чтобы сделать некоторые важные выводы.

Если $k_1 > k_2$ (т. е. $n_1 > n_2$ или $n_{12} > 1$), то говорят, что первая среда является «оптически более плотной», чем вторая. Из (37.7a)

или (37.76) получается, что при этом угол преломления ϑ больше угла падения φ (рис. 37.2, а). Поэтому при некотором остром угле $\varphi = \varphi^*$ окажется, что угол ϑ *прямой* и луч во второй среде

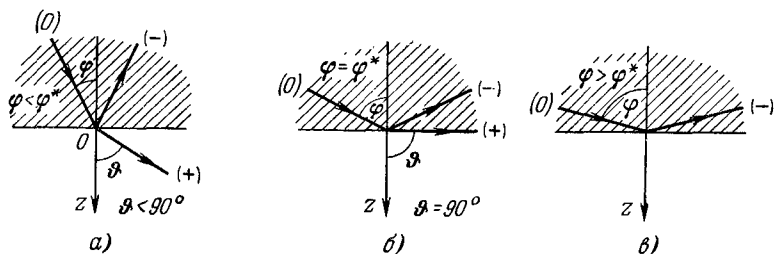


Рис. 37.2.

направлен вдоль границы раздела (рис. 37.2, б). Согласно (37.76) условием этого будет равенство

$$n_{12} \sin \varphi^* = 1 \quad (37.8)$$

($\sin \vartheta = 1$ и $\vartheta = 90^\circ$). Если теперь увеличить угол φ

$$\varphi > \varphi^*, n_{12} \sin \varphi > 1, \quad (37.8a)$$

то уже не найдется вещественного угла ϑ , поскольку $\sin \vartheta > 1$. Это значит, что преломленной волны не будет; падающая волна порождает только волну отраженную (рис. 37.2, в), происходит *полное отражение* от непоглощающей («прозрачной») среды при наклонном падении.

Возьмем иной случай. Пусть вторая среда значительно оптически плотнее, чем первая, т. е. $k_2 \gg k_1$ ($n_2 \gg n_1$, или $n_{12} \ll 1$). Из (37.76) следует, что независимо от величины φ

$$\vartheta \rightarrow 0 \text{ при } n_{12} \rightarrow 0, \quad (37.9)$$

т. е., каков бы ни был угол падения φ , при достаточно высокой оптической плотности второй среды луч входит в нее практически *по нормали* (рис. 37.3).

3. Преломление при поглощении. Далее рассмотрим случай, когда вторая среда является поглощающей ($\hat{k}_1 = k_1$; $\hat{k}_2 = k_2' - ik_2''$). Выражая на основании (37.7) угол преломления ϑ , имеем

$$\sin \vartheta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi.$$

По смыслу угол падения φ обязательно лежит в пределах $0 \div 90^\circ$; $0 \leq \sin \varphi \leq 1$, и правая часть равенства ввиду множителя k_1/k_2 комплексна. Поэтому комплексным будет $\sin \vartheta$, и предстоит выяснить, какой это имеет смысл.

Исследуем характер функции $f^+(y, z)$ (37.3), выражающей зависимость поля во второй среде от координат. В результате вещественности $k_1 \sin \varphi$, согласно (37.7), вещественна также величина $k_2 \sin \vartheta$; обозначим ее

$$k_2 \sin \vartheta = \alpha_y. \quad (37.10)$$

Вместе с тем

$$k_2 \cos \vartheta = k_2 \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi},$$

как видно, величина комплексная; напишем:

$$k_2 \cos \vartheta = \alpha_z - i\beta, \quad (37.11)$$

где α_z и β вещественны; очевидно,

$$\alpha_z - i\beta = \sqrt{(k_2^2)^2 - (k_2')^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi - i2k_2 k_2'}. \quad (37.11a)$$

С учетом (37.10) и (37.11) функцию $f^+(y, z)$ (37.3) представим в виде

$$f^+(y, z) = e^{-\beta z} e^{-i(\alpha_y y + \alpha_z z)}. \quad (37.12)$$

Величина β , разумеется, должна быть положительна (ниже это будет проверено), а следовательно, речь идет о поле, *затухающем*

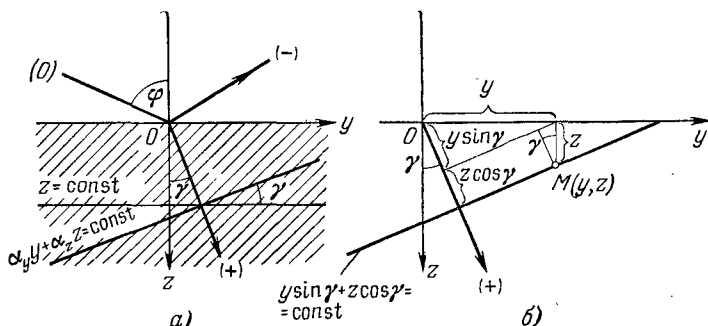


Рис. 37.4.

по нормали, направленной внутрь поглощающей среды (ось z). Соответственно этому

$$z = \text{const}$$

есть уравнение плоскости постоянной амплитуды поля. Что же касается фронта волны, т. е. поверхности постоянной фазы, то из (37.12) вытекает, что это плоскость, описываемая уравнением

$$\alpha_y y + \alpha_z z = \text{const}. \quad (37.13)$$

Плоскости постоянных амплитуд, таким образом, *не совпадают* с плоскостями постоянных фаз (рис. 37.4, а), или, иными словами, амплитуда фронта волны не постоянна; говорят, что волна, будучи плоской, *неоднородна*.

Нормаль к фронту волны, или луч, указывается углом γ , который будет называться *истинным углом преломления*, в отличие от комплексного угла преломления ϑ . Записав уравнение плоскости фронта в форме (рис. 37.4, б; ср. также § 34, п. 1)

$$y \sin \gamma + z \cos \gamma = \text{const}, \quad (37.14)$$

при сопоставлении с (37.13) имеем

$$\text{tg } \gamma = \frac{\alpha_y}{\alpha_z} = \frac{k_1 \sin \varphi}{\text{Re} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (37.15)$$

Отсюда и находится истинный угол преломления; заметим, что он является также углом между фронтом и плоскостью постоянной амплитуды (рис. 37.4, а). Поскольку на основании (37.10) и (37.11)

$$\text{tg } \vartheta = \frac{\alpha_y}{\alpha_z - i\beta} = \frac{k_1 \sin \varphi}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}, \quad (37.16)$$

то

$$\text{ctg } \gamma = \text{Re ctg } \vartheta. \quad (37.17)$$

Вернемся к формуле (37.11а). Пусть

$$\begin{aligned} (k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi &> 0, \\ 2k_2'k_2'' &\ll (k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (37.18)$$

что имеет место, когда вторая среда слабопоглощающая, но в достаточной степени оптически более плотная, чем первая ($|k_2| > k_1$). Разлагая в (37.11а) правую часть в степенной ряд и ограничиваясь линейной частью, находим

$$\alpha_z \approx \sqrt{(k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}, \quad (37.19a)$$

$$\beta \approx \frac{k_2'k_2''}{\sqrt{(k_2')^2 - (k_2'')^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (37.19б)$$

Ввиду $k_2'' \ll k_2'$ при этом $\beta \ll \alpha_z$, так что

$$\text{tg } \gamma \approx |\text{tg } \vartheta|. \quad (37.20)$$

Если же вторая среда оптически значительно плотнее первой ($|k_2| \gg k_1$), в частности, из-за сильного поглощения, то, как следует из (37.15), истинный угол преломления γ весьма мал, и фронт волны в поглощающей среде почти параллелен плоскости раздела сред. Справедливо предельное соотношение

$$\gamma \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k_1/|k_2| \rightarrow 0. \quad (37.21)$$

При отражении от металла в соответствии с (33.17а) $k_2' \approx k_2'' \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}$ и $|k_2| \approx \sqrt{\omega\mu_2\sigma_2}$. Условие $|k_2| \gg k_1$ при этом заведомо

выполняется ввиду большой удельной проводимости σ_2 , и луч в металле, можно сказать, совпадает с внутренней нормалью. Согласно (37.11a) в этом случае $\alpha_z - i\beta \approx \sqrt{-i2k_2'k_2''}$, т. е.

$$\alpha_z \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}, \quad (37.22)$$

а это значит, что изменение фазы и амплитуды вдоль нормали происходит — с большой степенью точности — по тому же закону, что и при распространении плоской однородной волны (§ 33, п. 3). Не следует, однако, думать, что преломленная волна на самом деле является плоской и однородной. Как бы ни был мал угол между плоскостями постоянных амплитуд и фаз, их несовпадение существенно. Действительно, плоскостью постоянной амплитуды является граница раздела сред, фаза же на ней изменяется по закону $yk_1 \sin \varphi$.

§ 38. Формулы Френеля и строение поля

1. Вводные замечания. Перпендикулярная поляризация. Законы Снеллиуса, как видно из предыдущего, дают ряд ценных сведений о волновых процессах при наличии плоской границы раздела сред. Однако мы не имеем полной картины, пока не найдены выражения напряженностей поля в обеих средах. Теперь надо вернуться к исходной постановке электродинамической задачи и получить ее решение.

Сама постановка задачи о наклонном падении волны (§ 37, п. 1) нуждается в некотором уточнении, поскольку ничего не говорилось о *поляризации* волны. Очевидно, падающую волну любой поляризации можно разложить на две волны, поляризация которых показана на рис. 38.1, *а* и рис. 38.1, *б*. Вектор E первой волны (*а*) перпендикулярен плоскости падения (и параллелен плоскости раздела сред); вектор E второй волны (*б*) лежит в плоскости падения, т. е. параллелен ей, а вектор H при этом параллелен плоскости раздела сред. Будем называть поляризацию первого рода *перпендикулярной*, а второго рода — *параллельной*. Случаи перпендикулярной и параллельной поляризации относительно просты, и мы рассмотрим каждый из них. При произвольной же поляризации поле можно будет находить как суперпозицию двух известных полей.

Начнем со случая перпендикулярной поляризации (рис. 38.1, *а*). Чтобы записать поле падающей волны в заданной декартовой системе координат, нужно лишь перейти от формул типа (34.1) к формулам типа (34.2). Согласно рис. 38.1, *а*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 90^\circ, & \alpha_3 &= 90^\circ, \\ \beta_1 &= 90^\circ, & \beta_2 &= \varphi, & \beta_3 &= 90^\circ + \varphi, \\ \gamma_1 &= 90^\circ, & \gamma_2 &= 90^\circ - \varphi, & \gamma_3 &= \varphi \end{aligned}$$

(вектор E^0 направлен по оси x , так что $\xi_0 = x_0$, а вектор H^0 составляет угол φ с осью y). Таким образом, для падающей волны

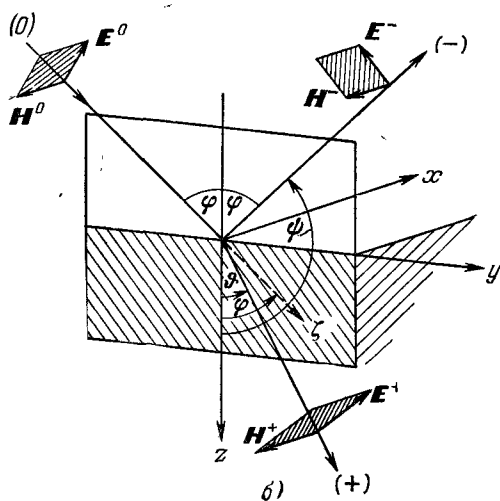
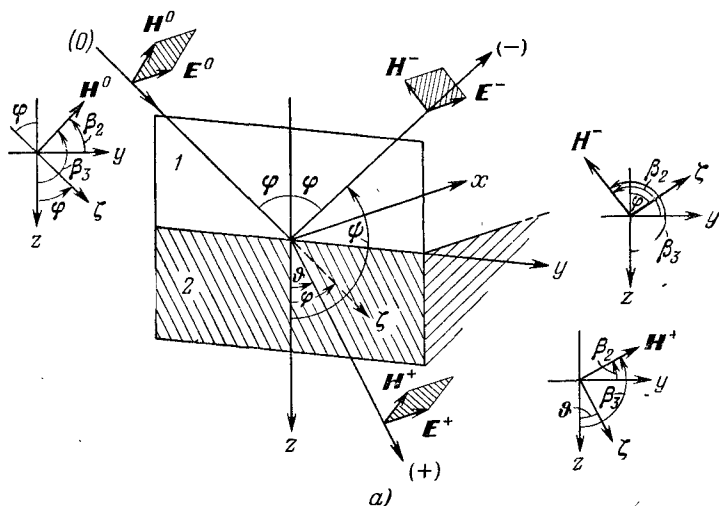


Рис. 38.1.

получаем следующие выражения комплексных амплитуд:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= x_0 \dot{A} e^{-ik_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \\ \dot{H}_m^0 &= \frac{\dot{A}}{W_1} (y_0 \cos \varphi - z_0 \sin \varphi) e^{-ik_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \end{aligned} \right\} z < 0. \quad (38.1)$$

Аналогично для преломленной волны

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 90^\circ, & \alpha_3 &= 90^\circ, \\ \beta_1 &= 90^\circ, & \beta_2 &= \vartheta, & \beta_3 &= 90^\circ + \vartheta, \\ \gamma_1 &= 90^\circ, & \gamma_2 &= 90^\circ - \vartheta, & \gamma_3 &= \vartheta \end{aligned}$$

(вектор E^+ коллинеарен E^0 , а вектор H^+ составляет с осью y угол ϑ). Запишем комплексные амплитуды поля:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^+ &= x_0 \dot{B} e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, \\ \dot{H}_m^+ &= \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2} (y_0 \cos \vartheta - z_0 \sin \vartheta) e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}. \end{aligned} \right\} z > 0. \quad (38.2)$$

Для отраженной волны электрический вектор коллинеарен (на рис. 38.1, a параллелен) прежнему направлению, а магнитный составляет при этом с осью y угол $\psi = 180^\circ - \varphi$, поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 90^\circ, & \alpha_3 &= 90^\circ, \\ \beta_1 &= 90^\circ, & \beta_2 &= 180^\circ - \varphi, & \beta_3 &= -90^\circ + \varphi, \\ \gamma_1 &= 90^\circ, & \gamma_2 &= -90^\circ + \varphi, & \gamma_3 &= 180^\circ - \varphi \end{aligned}$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^- &= x_0 \dot{C} e^{-ik_1(y \sin \varphi - z \cos \varphi)}, \\ \dot{H}_m^- &= \frac{-\dot{C}}{\dot{W}_1} (y_0 \cos \varphi + z_0 \sin \varphi) e^{-ik_1(y \sin \varphi - z \cos \varphi)}, \end{aligned} \right\} (z < 0). \quad (38.3)$$

Налагая на поля требование непрерывности тангенциальных компонент векторов E и H на границе раздела сред ($z = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^0(y, 0) + \dot{E}_m^-(y, 0) &= \dot{E}_m^+(y, 0), \\ \dot{H}_m^0(y, 0) + \dot{H}_m^-(y, 0) &= \dot{H}_m^+(y, 0), \end{aligned} \quad (38.4)$$

имеем

$$\dot{A} + \dot{C} = \dot{B}, \quad \dot{W}_2(\dot{A} - \dot{C}) = \dot{W}_1 \dot{B} \cos \vartheta. \quad (38.5)$$

Подобно тому как это делалось в § 36 при рассмотрении нормального падения, введем коэффициент отражения и коэффициент передачи для случая наклонного падения при перпендикулярной поляризации; это величины

$$\dot{\rho}_\perp = \frac{\dot{C}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^-(y, 0)}{\dot{E}_m^0(y, 0)} = \frac{\dot{H}_m^-(y, 0)}{\dot{H}_m^0(y, 0)}, \quad \dot{\tau}_\perp = \frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^+(y, 0)}{\dot{E}_m^0(y, 0)} = \frac{\dot{W}_1 \dot{H}_m^+(y, 0)}{\dot{W}_2 \dot{H}_m^0(y, 0)} \quad (38.6)$$

(условное положительное направление векторов \dot{E}_m^0 , \dot{E}_m^- и \dot{E}_m^+ указывается при этом ортом x_0 , а векторов \dot{H}_m^0 , \dot{H}_m^- и \dot{H}_m^+ — единичными векторами $h_0^0 = y_0 \cos \varphi - z_0 \sin \varphi$, $h_0^- = -y_0 \cos \varphi - z_0 \sin \varphi$ и $h_0^+ = y_0 \cos \vartheta - z_0 \sin \vartheta$ соответственно, рис. 38.2, a). Уравнения (38.5) принимают вид

$$1 + \dot{\rho}_\perp = \dot{\tau}_\perp, \quad \dot{W}_2(1 - \dot{\rho}_\perp) \cos \varphi = \dot{W}_1 \dot{\tau}_\perp \cos \vartheta. \quad (38.7)$$

Отсюда

$$\dot{\rho}_{\perp} = \frac{\dot{W}_2 \cos \varphi - \dot{W}_1 \cos \vartheta}{\dot{W}_2 \cos \varphi + \dot{W}_1 \cos \vartheta} \quad \text{и} \quad \dot{\tau}_{\perp} = \frac{2\dot{W}_2 \cos \varphi}{\dot{W}_2 \cos \varphi + \dot{W}_1 \cos \vartheta}. \quad (38.8)$$

Эти выражения коэффициентов отражения и передачи называются *формулами Френеля*.

Заметим, что при $\varphi = \vartheta = 0$ (нормальное падение) формулы Френеля (38.8) переходят в ранее полученные соотношения (36.10), поскольку, согласно определениям (38.12) и (38.6)

$$\dot{\rho}_{\perp} = \dot{\rho}, \quad \dot{\tau}_{\perp} = \dot{\tau}. \quad (38.9)$$

Найдя $\dot{\rho}_{\perp}$ и $\dot{\tau}_{\perp}$, мы можем теперь использовать эти коэффициенты при записи полей в обеих средах; в выражениях комплексных амплитуд останется лишь один неопределенный коэффициент \dot{A} . Итак,

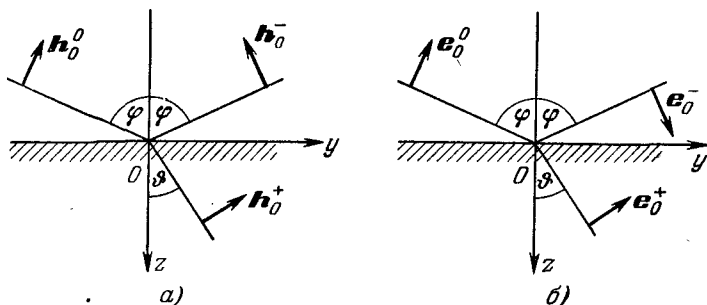


Рис. 38.2.

составляя суммы $\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^-$ и $\dot{H}_m^0 + \dot{H}_m^-$, характеризующие поле в первой среде, и дописывая \dot{E}_m^+ , \dot{H}_m^+ для второй среды, при помощи соотношений (38.6) получаем

$$\dot{E}_m = \begin{cases} x_0 A e^{-ik_1 y \sin \varphi} (e^{-ik_1 z \cos \varphi} + \dot{\rho}_{\perp} e^{ik_1 z \cos \varphi}), & z < 0, \\ x_0 A \dot{\tau}_{\perp} e^{-ik_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0 \end{cases} \quad (38.10a)$$

и

$$\dot{H}_m = \begin{cases} \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-ik_1 y \sin \varphi} [y_0 (e^{-ik_1 z \cos \varphi} - \dot{\rho}_{\perp} e^{ik_1 z \cos \varphi}) \cos \varphi - \\ - z_0 (e^{-ik_1 z \cos \varphi} + \dot{\rho}_{\perp} e^{ik_1 z \cos \varphi}) \sin \varphi], & z < 0, \\ \frac{\dot{A}}{\dot{W}_2} \dot{\tau}_{\perp} (y_0 \cos \vartheta - z_0 \sin \vartheta) e^{-ik_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0. \end{cases} \quad (38.10б)$$

2. Параллельная поляризация. Не делая пока каких-либо выводов из полученных результатов, обратимся к случаю параллельной поляризации (рис. 38.1, б). Теперь магнитный вектор направлен против оси x , а электрический, ориентирован точно так же, как магнитный вектор при перпендикулярной поляризации. Поэтому

все выражения полей можно написать сразу же по аналогии с формулами (38.1) — (38.3). Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= A (\mathbf{y}_0 \cos \varphi - \mathbf{z}_0 \sin \varphi) e^{-ik_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \\ \dot{H}_m^0 &= -x_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-ik_1 (y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \end{aligned} \right\} z < 0 \quad (38.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^+ &= \dot{B} (\mathbf{y}_0 \cos \vartheta - \mathbf{z}_0 \sin \vartheta) e^{-ik_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, \\ \dot{H}_m^+ &= -x_0 \frac{\dot{B}}{\dot{W}_2} e^{-ik_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)} \end{aligned} \right\} z > 0 \quad (38.12)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^- &= -\dot{C} (\mathbf{y}_0 \cos \varphi + \mathbf{z}_0 \sin \varphi) e^{-ik_1 (y \sin \varphi - z \cos \varphi)}, \\ \dot{H}_m^- &= -x_0 \frac{\dot{C}}{\dot{W}_1} e^{-ik_1 (y \sin \varphi - z \cos \varphi)}. \end{aligned} \right\} z < 0 \quad (38.13)$$

Приравнивая тангенциальные компоненты векторов поля в обеих средах при $z = 0$, имеем

$$(\dot{A} - \dot{C}) \cos \varphi = \dot{B} \cos \vartheta, \quad \dot{W}_2 (\dot{A} + \dot{C}) = \dot{W}_1 \dot{B}. \quad (38.14)$$

Коэффициентом отражения и коэффициентом передачи для случая наклонного падения при параллельной поляризации назовем величины

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_{\parallel} &= -\frac{\dot{C}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^-(y, 0)}{\dot{E}_m^0(y, 0)} = -\frac{\dot{H}_m^-(y, 0)}{\dot{H}_m^0(y, 0)}, \\ \dot{\tau}_{\parallel} &= \frac{\dot{B}}{\dot{A}} = \frac{\dot{E}_m^+(y, 0)}{\dot{E}_m^0(y, 0)} = \frac{\dot{W}_1 \dot{H}_m^+(y, 0)}{\dot{W}_2 \dot{H}_m^0(y, 0)} \end{aligned} \right\} \quad (38.15)$$

(единичные векторы $\mathbf{e}_0^0 = \mathbf{y}_0 \cos \varphi - \mathbf{z}_0 \sin \varphi$, $\mathbf{e}_0^- = \mathbf{y}_0 \cos \varphi + \mathbf{z}_0 \sin \varphi$ и $\mathbf{e}_0^+ = \mathbf{y}_0 \cos \vartheta - \mathbf{z}_0 \sin \vartheta$ указывают условное положительное направление векторов \dot{E}_m^0 , \dot{E}_m^- и \dot{E}_m^+ (рис. 38.2, б), а $-x_0$ — векторов \dot{H}_m^0 , \dot{H}_m^- и \dot{H}_m^+). Из (38.14)

$$(1 + \dot{\rho}_{\parallel}) \cos \varphi = \dot{\tau}_{\parallel} \cos \vartheta, \quad \dot{W}_2 (1 - \dot{\rho}_{\parallel}) = \dot{W}_1 \dot{\tau}_{\parallel}. \quad (38.16)$$

Отсюда получаем формулы Френеля для рассматриваемой поляризации

$$\dot{\rho}_{\parallel} = \frac{\dot{W}_2 \cos \vartheta - \dot{W}_1 \cos \varphi}{\dot{W}_2 \cos \vartheta + \dot{W}_1 \cos \varphi} \quad \text{и} \quad \dot{\tau}_{\parallel} = \frac{2 \dot{W}_2 \cos \varphi}{\dot{W}_2 \cos \vartheta + \dot{W}_1 \cos \varphi}. \quad (38.17)$$

Сопоставляя (38.15) и (36.12), замечаем, что при $\varphi = \vartheta = 0$

$$\dot{\rho}_{\parallel} = \dot{\rho}, \quad \dot{\tau}_{\parallel} = \dot{\tau}, \quad (38.18)$$

и действительно формулы (36.10) можно получить при $\varphi = \vartheta = 0$ из (38.17), как и из (38.8).

Подобно тому как это делалось в случае перпендикулярной поляризации, выпишем для обеих сред комплексные амплитуды векторов поля, выраженные через $\dot{\rho}_{\parallel}$ и $\dot{\tau}_{\parallel}$:

$$\dot{E}_m = \begin{cases} \dot{A}e^{-i\dot{k}_1 y \sin \varphi} [\dot{y}_0 (e^{-i\dot{k}_1 z \cos \varphi} + \dot{\rho}_{\parallel} e^{i\dot{k}_1 z \cos \varphi}) \cos \varphi - \\ - \dot{z}_0 (e^{-i\dot{k}_1 z \cos \varphi} - \dot{\rho}_{\parallel} e^{i\dot{k}_1 z \cos \varphi}) \sin \varphi], & z < 0; \\ \dot{A}\dot{\tau}_{\parallel} (\dot{y}_0 \cos \vartheta - \dot{z}_0 \sin \vartheta) e^{-i\dot{k}_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0 \end{cases} \quad (38.19a)$$

и

$$\dot{H}_m = \begin{cases} -\dot{x}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1} e^{-i\dot{k}_1 y \sin \varphi} (e^{-i\dot{k}_1 z \cos \varphi} - \dot{\rho}_{\parallel} e^{i\dot{k}_1 z \cos \varphi}), & z \leq 0, \\ -\dot{x}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_2} \dot{\tau}_{\parallel} e^{-i\dot{k}_2 (y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0. \end{cases} \quad (38.19b)$$

§ 39. Полное отражение и полное прохождение при наклонном падении

1. Полное отражение от идеального проводника. Направляемые волны. Полученные выше формулы Френеля и выражения полей позволяют сделать ряд интересных выводов о волновых процессах при наличии плоской границы раздела сред. Рассмотрим некоторые важные случаи.

Как видно из формул Френеля (38.8) и (38.17), отражение тем значительнее, чем более различаются волновые сопротивления обеих сред. Как и при нормальном падении (§ 36), коэффициент отражения по модулю близок к единице, если $|\dot{W}_1| \gg |\dot{W}_2|$ или $|\dot{W}_2| \gg |\dot{W}_1|$. Пусть вторая среда — идеальный проводник, т. е. $\sigma_2 \rightarrow \infty$ и $|\dot{W}_2| = 0$. Из (38.8) и (38.17) имеем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\perp} &= -1, & \dot{\rho}_{\parallel} &= -1, \\ \dot{\tau}_{\perp} &= 0, & \dot{\tau}_{\parallel} &= 0. \end{aligned} \quad (39.1)$$

Естественно, для случая нормального падения отсюда получаются равенства (36.16): надо лишь учесть соотношения (38.9) и (38.18).

Внося в (38.10a), (38.10б) $\dot{\rho}_{\perp} = -1$ и $\dot{\tau}_{\perp} = 0$, получим выражения комплексных амплитуд поля при полном отражении перпендикулярно поляризованной волны от идеально проводящей плоскости

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= \dot{x}_0 \dot{E}_0 \sin(\dot{k}_1 z \cos \varphi) e^{-i\dot{k}_1 y \sin \varphi}, \\ \dot{H}_m &= \frac{\dot{E}_0}{\dot{W}_1} [\dot{y}_0 i \cos \varphi \cos(\dot{k}_1 z \cos \varphi) - \\ - \dot{z}_0 \sin \varphi \sin(\dot{k}_1 z \cos \varphi)] e^{-i\dot{k}_1 y \sin \varphi}, & z < 0 \end{aligned} \quad (39.2)$$

($\dot{E}_0 = -i2\dot{A}$). Как видно, в результате наложения падающей и отраженной волн возникает весьма характерное поле, имеющее свойства бегущей волны для направления y (распространение вдоль

границы раздела сред) и стоячей волны для направления z (образование узлов и пучностей вдоль нормали к границе раздела). Роль комплексных волновых чисел при этом играют величины

$$\dot{\Gamma} = \dot{k}_1 \sin \varphi, \quad \dot{\chi} = \dot{k}_1 \cos \varphi. \quad (39.3)$$

Первая из них $\dot{\Gamma}$ характеризует поле как бегущую волну и будет называться *продольным волновым числом*, а также *постоянной распространения*, вторая же величина $\dot{\chi}$ будет называться *поперечным волновым числом*. В целом поле является *плоской неоднородной волной*: в плоскостях фронта $y = \text{const}$ амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} не остаются постоянными, а изменяются по закону стоячей волны. В отличие от известной плоской однородной волны данная волна имеет не только поперечные компоненты поля (E_x и H_z в выбранной системе координат), но и продольную компоненту (H_y).

Причина образования рассмотренного поля объясняется векторной диаграммой средней плотности потока энергии (рис. 39.1). Отметим сначала, что чистая стоячая волна в направлении z и незатухающая бегущая волна по y (вдоль границы) имеют место при отсутствии поглощения ($\dot{k}_1 = = k_1$). В силу полного отражения средние значения вектора Пойнтинга для падающей и отраженной волн равны по абсолютной величине: $\bar{\mathbf{P}}^- = \bar{\mathbf{P}}^0$. Но, как видно из диаграммы, это означает, что их нормальные компоненты взаимно уничтожаются, а тангенциальные — складываются. Поле не переносит энергии по нормали z (действительно, энергия не должна проникать во вторую среду), а потому приобретает характер стоячей волны по z . Энергия, таким образом, переносится вдоль границы тангенциально распространяющейся неоднородной волной. Последняя как бы направляется границей раздела, поэтому будет употребляться название *направляемая волна*.

В случае отражения от идеально проводящей плоскости параллельно поляризованной волны выражения комплексных амплитуд поля получаются путем подстановки $\dot{r}_{||} = -1$ и $\dot{r}_{\perp} = 0$ в (38.19а), (38.19б). Это дает

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \dot{E}_0 [y_0 \cos \varphi \sin(\dot{k}_1 z \cos \varphi) - \\ &\quad - z_0 i \sin \varphi \cos(\dot{k}_1 z \cos \varphi)] e^{-i \dot{k}_1 y \sin \varphi}, \\ \dot{H}_m &= -x_0 \frac{i \dot{E}_0}{\dot{W}_1} \cos(\dot{k}_1 z \cos \varphi) e^{-i \dot{k}_1 y \sin \varphi}, \\ z &< 0 \end{aligned} \right\} (39.4)$$

($\dot{E}_0 = -i2\dot{A}$). Подобно (39.2) полученный результат описывает плоскую неоднородную волну, направляемую границей раздела

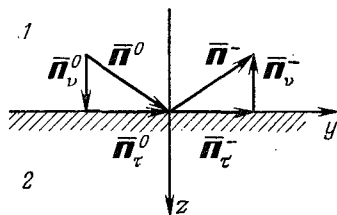


Рис. 39.1.

сред. Как и ранее, в плоскости фронта $y = \text{const}$ амплитуды поля распределены по закону стоячей волны (чистая стоячая волна — при отсутствии поглощения). Поперечное и продольное волновые числа те же, что и при перпендикулярной поляризации (39.3). Поле имеет продольную компоненту, но уже не магнитную, а электрическую (E_y).

2. Простейший полый волновод. При отсутствии поглощения ($k_1 = k_1$) мгновенные значения компонент поля измеряются по нормали z , как это показано на рис. 39.2, а, б. Нетрудно заметить,

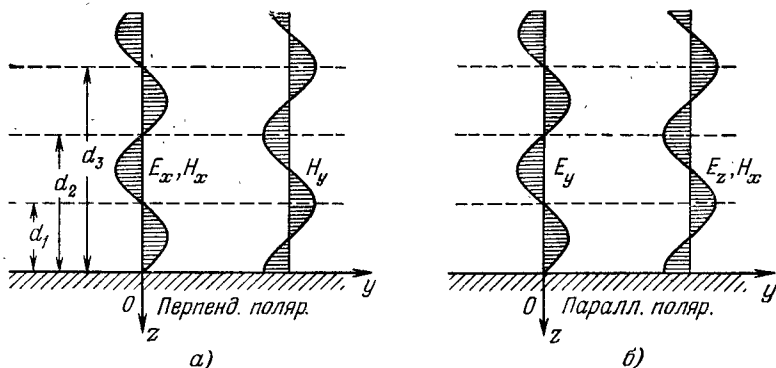


Рис. 39.2.

что в плоскостях (см. пунктир), удаленных от границы раздела сред на расстояния d_n ($n = 1, 2, 3, \dots$), определяемые условием

$$\chi d_n = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (39.5)$$

удовлетворяются те же граничные условия, что и на самой идеально проводящей плоскости раздела сред ($E_x = 0, H_z = 0$ при перпендикулярной поляризации и $E_y = 0$ при параллельной). Более того, строение поля периодически повторяется. Следовательно, если одну (или несколько) из отмеченных пунктиром плоскостей наделить свойствами идеального проводника, это никак не повлияет на поле. Последнее может существовать *между* двумя идеально проводящими плоскостями, которые играют роль системы, *направляющей* волну, или *волновода*. На рис. 39.3, а, б представлено строение простейших полей в такой системе. При перпендикулярной поляризации можно еще ввести идеально проводящие плоскости, параллельные zOy , которые могут быть расположены на любых расстояниях, так как везде вектор \mathbf{E} не будет иметь на них тангенциальной компоненты, а \mathbf{H} — нормальной. В результате оказывается, что волна способна распространяться и в идеально проводящей «трубе» прямоугольного поперечного сечения (рис. 39.4). Это так называемый *прямоугольный волновод*.

Волноводы будут подробно рассматриваться в гл. 5, поэтому мы ограничимся пока лишь несколькими замечаниями. Пусть расстояние d между двумя идеально проводящими плоскостями

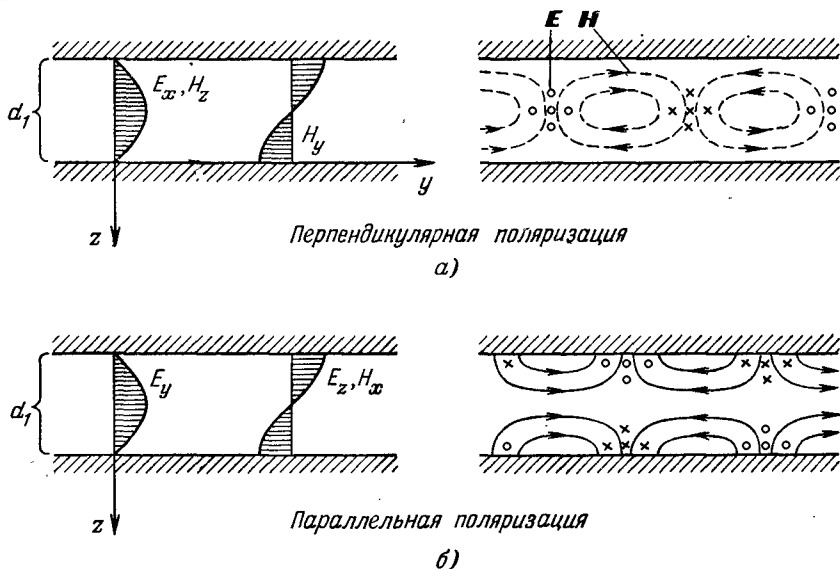


Рис. 39.3.

фиксировано. Тогда, согласно (39.5), между ними смогут распространяться волны, поперечные волновые числа которых $\dot{\chi} = \chi_n$ подчинены условию

$$\chi_n = \frac{n\pi}{d} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (39.6)$$

Иными словами, возможен бесконечный ряд свободных полей (39.2) и (39.4) при указанных значениях $\dot{\chi}$. В соответствии с (39.3)

$$\dot{k}_1^2 = \dot{\chi}^2 + \Gamma^2 \quad (39.7)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= \dot{\Gamma}_n = \sqrt{\dot{k}_1^2 - \chi_n^2} = \\ &= \sqrt{\omega^2 \epsilon_1 \mu_1 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}, \end{aligned} \quad (39.8)$$

т. е. каждому из решений соответствует своя постоянная распространения $\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_n$. Соответствующее поле представляет собой, таким образом, самостоятельную неоднородную волну, распространяющуюся со своей фазовой скоростью.

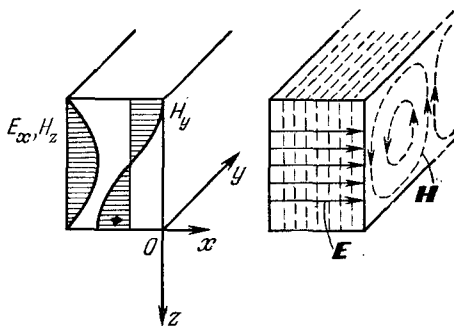


Рис. 39.4.

Впрочем, при каждом n о бегущей волне можно говорить лишь до тех пор, пока частота ω достаточно велика, так что подкоренное выражение в (39.8) положительно. В противном случае постоянная распространения становится мнимой величиной $\Gamma = \mp i\beta$ и поле, по существу, утрачивает волновой характер, так как

$$\operatorname{Re} e^{-i\Gamma y} e^{i\omega t} = e^{-\beta y} \cos \omega t.$$

Оно оказывается синфазным и затухающим по амплитуде в направлении y или $-y$. Частота, при которой постоянная распространения обращается в нуль, называется критической ($\omega_{\text{кр}}$). Очевидно,

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{n\pi}{d} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (39.9)$$

Далее с понижением частоты ($\omega < \omega_{\text{кр}}$) Γ_n переходит в мнимую область. *Основной* называется волна, распространяющаяся при

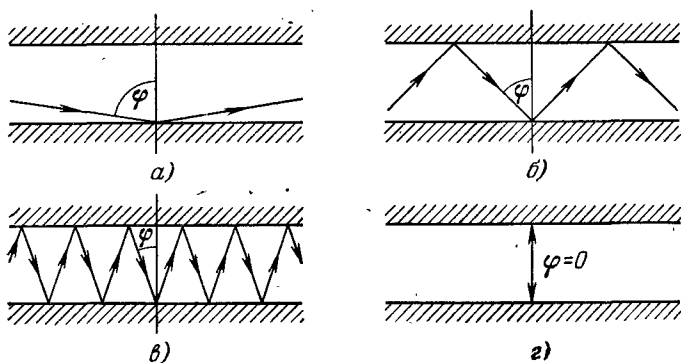


Рис. 39.5.

наиболее низких частотах; ее поперечное волновое число $\chi_1 = \pi/d$ является наименьшим.

При сопоставлении (39.6) и (39.3) получаем

$$\cos \varphi = \frac{n\pi}{k_1 d} = \frac{1}{\omega} \frac{n\pi}{d} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} = \frac{\omega_{\text{кр}}}{\omega}. \quad (39.10)$$

Мы видим, что при данной частоте ω каждая неоднородная направляемая волна (фиксированное n) образуется при падении однородной волны под определенным углом φ . Возьмем какую-либо из волн, например основную ($n = 1$), и проследим, как изменяется угол φ в зависимости от частоты. Чем больше ω , тем $\cos \varphi$ ближе к нулю, а φ к 90° . Для относительно высокой частоты схема лучей представлена на рис. 39.5, а. С понижением частоты $\cos \varphi$ увеличивается, а угол φ уменьшается (рис. 39.5, б, в), пока при критической частоте не станет равным нулю (рис. 39.5, г). Распространение неоднородной волны между плоскостями эквивалентно многократному отражению волны однородной; по мере приближения

к случаю нормального падения ($\varphi = 0$, $\omega = \omega_{кр}$) перенос энергии вдоль плоскостей замедляется и, наконец, прекращается с образованием обычной стоячей волны при критической частоте (см. § 36, п. 4, электромагнитный резонатор). Частотам ниже критической соответствуют мнимые углы падения φ ($\cos \varphi > 1$), так что концепция полного отражения сохраняет лишь формальный смысл.

В соответствии с содержанием понятия волнового числа (стр. 164, § 32, п. 2, § 35, п. 2) запишем для области вещественного $\Gamma = \Gamma$:

$$v_\phi = \frac{\omega}{\Gamma}, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{\Gamma}, \quad v_{гр} = \frac{d\omega}{d\Gamma}, \quad (39.11)$$

где v_ϕ — фазовая скорость неоднородной волны, Λ — соответствующая длина волны (пространственный период вдоль направления распространения), а $v_{гр}$ — групповая скорость. Из (39.8) получаем

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\chi}{k_1}\right)^2}} = \frac{v_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}},$$

$$v_{гр} = v_1 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{кр}}{\omega}\right)^2}, \quad \omega \geq \omega_{кр}. \quad (39.12)$$

При $\omega \rightarrow \omega_{кр}$ фазовая скорость и длина волны неограниченно возрастают, а групповая скорость стремится к нулю.

Поскольку

$$v_\phi > v_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad (39.13)$$

т. е. фазовая скорость рассмотренных неоднородных волн превышает фазовую скорость однородной электромагнитной волны в той же среде, их называют *быстрыми*.

В заключение отметим, что свойство идеально проводящей поверхности направлять электромагнитную волну должно сохраняться и при определенной кривизне. Легко представить себе постепенный переход от плоской границы раздела к цилиндрической (рис. 39.6); можно ожидать поэтому, что роль волновода будет выполнять и круглая или иной формы труба. Позднее (гл. 5) читатель убедится в этом.

3. Полное отражение от диэлектрика. Поверхностные направляемые волны. Перейдем к рассмотрению полного отражения, происходящего при наклонном падении волны на границу с оптически менее плотной средой, уже кратко обсуждавшегося в § 37, п. 2. Оно имеет место, когда угол падения φ превышает критическую величину φ^* , определяемую формулой (37.8), т. е.

$$\frac{k_1}{k_2} \sin \varphi > 1 \quad (39.14)$$

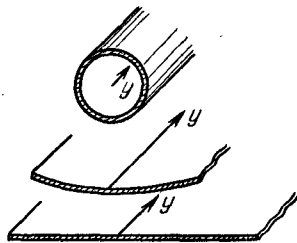


Рис. 39.6.

(обе среды непоглощающие). При этом косинус угла преломления ϑ оказывается мнимым: согласно (37.7) $\sin \vartheta = \frac{k_1}{k_2} \sin \varphi$, так что

$$\cos \vartheta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \varphi\right)^2} = \pm i \left| \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \varphi\right)^2} \right|, \quad (39.15)$$

поскольку подкоренное выражение ввиду (39.14) отрицательно. Не обсуждая пока вопроса о выборе знака в (39.15), убедимся, что полное отражение действительно происходит, и с этой целью внесем в выражения коэффициентов отражения $\dot{\rho}_\perp$ (38.8) и $\dot{\rho}_\parallel$ (38.17) мнимое значение косинуса угла преломления $\cos \vartheta = \pm i |\cos \vartheta|$. Модули обеих величин, как видно, равны единице:

$$|\dot{\rho}_\perp| = \frac{|W_2 \cos \varphi \mp i W_1 |\cos \vartheta||}{|W_2 \cos \varphi \pm i W_1 |\cos \vartheta||} = 1, \quad (39.16a)$$

$$|\dot{\rho}_\parallel| = \frac{|-W_1 \cos \varphi \pm i W_2 |\cos \vartheta||}{|W_1 \cos \varphi \pm i W_2 |\cos \vartheta||} = 1. \quad (39.16b)$$

Это и свидетельствует о полном отражении.

Введем обозначения для фаз коэффициентов $\dot{\rho}_\perp$ и $\dot{\rho}_\parallel$ при полном отражении, так что

$$\dot{\rho}_\perp = e^{i\psi_\perp} \text{ и } \dot{\rho}_\parallel = e^{i\psi_\parallel} \text{ при } \varphi > \varphi^*. \quad (39.17)$$

Далее рассмотрим поля. Внося $\dot{\rho}_\perp = e^{i\psi_\perp}$ в (38.10), получаем при перпендикулярной поляризации

$$\dot{E}_m = \begin{cases} x_0 \dot{E}_0 \cos(k_1 z \cos \varphi + \psi_\perp/2) e^{-i(k_1 y \sin \varphi - \psi_\perp/2)}, & z < 0, \\ x_0 \frac{\dot{E}_0}{2} \dot{\tau}_\perp e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0, \end{cases} \quad (39.18a)$$

$$\dot{H}_m = \begin{cases} -\frac{\dot{E}_0}{W_1} [y_0 i \cos \varphi \sin(k_1 z \cos \varphi + \psi_\perp/2) + \\ + z_0 \sin \varphi \cos(k_1 z \cos \varphi + \\ + \psi_\perp/2)] e^{-i(k_1 y \sin \varphi - \psi_\perp/2)}, & z < 0, \\ \frac{\dot{E}_0}{2W_2} \dot{\tau}_\perp (y_0 \cos \vartheta - z_0 \sin \vartheta) e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0 \end{cases} \quad (39.18b)$$

($2A = \dot{E}_0$).

При параллельной поляризации из (38.19) при (39.17)

$$\dot{E}_m = \begin{cases} \dot{E}_0 [y_0 \cos \varphi \cos(k_1 z \cos \varphi + \psi_\parallel/2) + \\ + z_0 i \sin \varphi \sin(k_1 z \cos \varphi + \\ + \psi_\parallel/2)] e^{-i(k_1 y \sin \varphi - \psi_\parallel/2)}, & z < 0, \\ \frac{\dot{E}_0}{2} \dot{\tau}_\parallel (y_0 \cos \vartheta - z_0 \sin \vartheta) e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0, \end{cases} \quad (39.19a)$$

$$\dot{H}_m = \begin{cases} x_0 i \frac{\dot{E}_0}{W_1} \sin(k_1 z \cos \varphi + \psi_\parallel/2) e^{-i(k_1 y - \psi_\parallel/2)}, & z < 0, \\ -x_0 \frac{\dot{E}_0}{2W_2} \dot{\tau}_\parallel e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}, & z > 0 \end{cases} \quad (39.19b)$$

($\dot{E}_0 = 2A$).

Как показывают выведенные формулы, поле в первой среде представляет собой плоскую неоднородную волну, которая очень похожа на волну, направляемую идеально проводящей плоскостью. Это тоже бегущая вдоль границы волна (ось y), поле которой в поперечном направлении (ось z) распределено по закону стоячей волны и имеет продольную электрическую или магнитную компоненту; соответствующие волновые числа равны

$$\Gamma = k_1 \sin \varphi, \quad \chi_1 = k_1 \cos \varphi \quad (39.20)$$

(ср. 39.3). К данному случаю, разумеется, применима и векторная диаграмма на рис. 39.1. Различие в сравнении с предыдущим заключается в том, что стоячая волна несколько сдвинута по оси z и имеется также фазовый сдвиг; и то, и другое определяется фазой коэффициента отражения.

Удивительным может показаться тот факт, что, несмотря на полное отражение, поле существует и во второй среде, как это видно из (39.18) и (39.19). Однако не нужно забывать, что мы имеем дело с установившимся процессом, и вопрос «как проникло поле во вторую среду» неправилен (это вопрос об установлении поля); в силу граничных условий существование поля во второй среде необходимо. Рассмотрим это поле внимательнее. Из формул (39.18) и (39.19) следует, что и при перпендикулярной и при параллельной поляризации все его компоненты изменяются в пространстве по закону $f^+(y, z) = e^{-ik_2(y \sin \vartheta + z \cos \vartheta)}$. При этом множитель $e^{-ik_2 z \cos \vartheta}$ в силу мнимости $\cos \vartheta$ есть убывающая или возрастающая экспонента. По физическим соображениям следует остановиться на первой возможности, что соответствует выбору знака минус в формуле (39.15). Учитывая также, что $k_2 \sin \vartheta = k_1 \sin \varphi = \Gamma$, и обозначая

$$\dot{\chi}_2 = k_2 \cos \vartheta = -ik_2 |\cos \vartheta| = -i \sqrt{k_1^2 \sin^2 \varphi - k_2^2} = -i\beta, \quad (39.21)$$

$$\text{имеем} \quad f^+(y, z) = e^{-\beta z} e^{-i\Gamma y}, \quad \beta > 0. \quad (39.22)$$

Попутно — для сравнения с равенствами (39.20) — запишем:

$$\Gamma = k_2 \sin \vartheta, \quad \dot{\chi}_2 = k_2 \cos \vartheta. \quad (39.23)$$

Итак, во второй среде (оптически менее плотной) поле экспоненциально убывает по нормали от границы, не изменяя в этом направлении своей фазы. Поэтому плоская неоднородная волна здесь называется *поверхностной*. Чем больше β , тем в большей мере поле во второй среде сосредоточено вблизи границы раздела сред. При полном отражении от границы с менее плотной средой в последней не появляется преломленной волны, уносящей энергию от границы, а поле как бы «прилипает» к ней.

Поскольку $\Gamma = k_1 \sin \varphi$, то $\Gamma \leq k_1$ ($0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ и $\sin \varphi \leq 1$); в то же время на основании (39.14) $\Gamma \geq k_2$. Таким образом,

$$k_1 \geq \Gamma \geq k_2. \quad (39.24)$$

Это означает, что фазовая скорость неоднородной волны $v_\phi = \omega/\Gamma$ обязательно лежит в пределах, определяемых неравенством

$$v_1 \leq v_\phi \leq v_2, \quad (39.25)$$

где $v_1 = 1/\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$ и $v_2 = 1/\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ — фазовые скорости однородных волн в обеих средах. Можно сказать, что по отношению к более

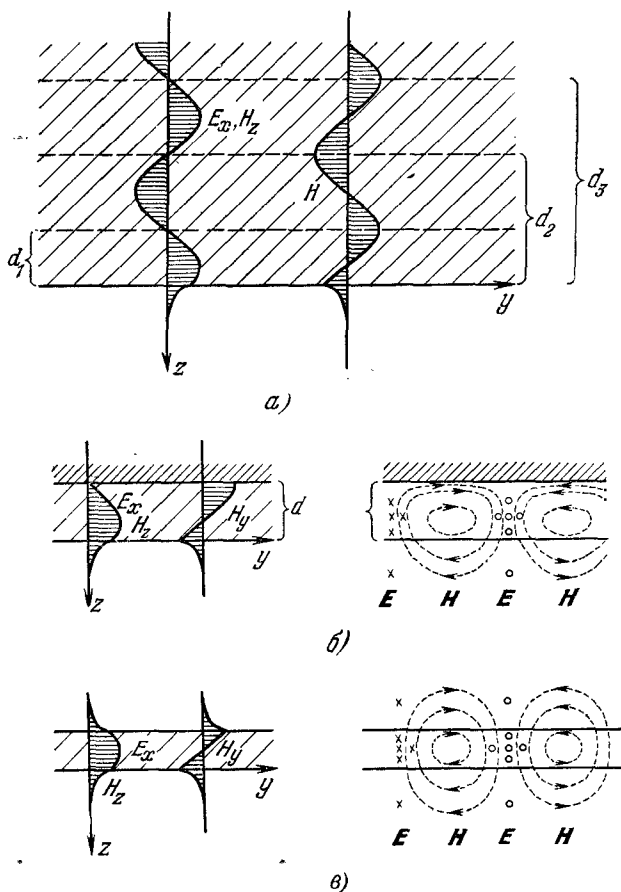


Рис. 39.7.

плотной среде неоднородная волна оказывается *быстрой*, а по отношению к менее плотной — *медленной*. В большинстве практически интересных случаев менее плотной средой является воздух или вакуум. Не интересуясь полем в прилегающем диэлектрике, обычно говорят о *медленной поверхностной волне*.

4. **Простейший диэлектрический волновод.** На рис. 39.7, а показано распределение поля в направлении нормали к полностью

отражающей границе диэлектриков при перпендикулярной поляризации. Пунктиром обозначены следы плоскостей, на которых поле удовлетворяет граничным условиям, свойственным идеальному проводнику. Из (39.18) и (39.19) следует, что такие плоскости вообще расположены от границы раздела сред на расстояниях d_n , подчиненных условию

$$\chi_1 d_n + \frac{\psi}{2} = n \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (39.26)$$

где $\chi_1 = k_1 \cos \varphi$ и $\psi = \psi_{\perp}$ или $\psi = \psi_{\parallel}$ берется в пределах от $-\pi$ до π .

Изолировав идеально проводящей плоскостью $z = -d_n$ слой диэлектрика (см. рис. 39.7, б, где взято $z = -d_1$), можно рассматривать его отдельно в качестве системы, направляющей неоднородную волну. Можно и так выбрать толщину слоя, что он будет способен направлять волну без ограничивающей идеально проводящей плоскости, а только в результате полного отражения от обеих границ с менее плотным диэлектриком (рис. 39.7, в). Это прообраз используемого в технике *диэлектрического волновода*, представляющего собой стержень из диэлектрика. На рис. 39.7, б, в даны и картины силовых линий для простейших волн диэлектрического слоя при перпендикулярной поляризации; читателю рекомендуется построить аналогичные схемы для случая параллельной поляризации.

Распространению энергии в диэлектрическом слое, как и между идеально проводящими плоскостями (ср. рис. 39.5), отвечает картина многократно отражаемых лучей (рис. 39.8, а, б). Однако теперь

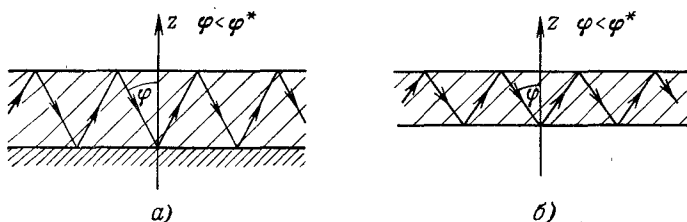


Рис. 39.8.

угол падения φ может меняться не от нуля до прямого, а лишь в пределах $0 \leq \varphi \leq \varphi^*$. При $\varphi > \varphi^*$ условие полного отражения от границы раздела диэлектриков уже не выполняются и слой перестает концентрировать в себе поле. Действительно, при $\varphi = \varphi^*$ имеет место процесс, показанный на рис. 39.9, а, б, в. Во внешней среде появляется преломленная волна, распространяющаяся вдоль границы ($\frac{k_1}{k_2} \sin \varphi = 1$, $\vartheta = 90^\circ$); поле вне диэлектрического слоя не убывает по нормали (в (39.22) $\beta = 0$, $\Gamma = k_2$); это обычная однородная волна; ее энергия равномерно распределена в бесконечном пространстве; в слое же остается исчезающе малая часть энергии.

Для слоя фиксированной толщины d условие $\varphi = \varphi^*$ выполняется при вполне определенном значении частоты ω , называемом *критической частотой* ($\omega_{кр}$); разумеется, для каждой возможной структуры поля $\omega_{кр}$ имеет свою величину. Желая вычислить $\omega_{кр}$ в случае слоя на идеально проводящей плоскости, отметим сначала, что на основании (39.20) и (39.23)

$$k_1^2 = \chi_1^2 + \Gamma^2 \text{ и } k_2^2 = \dot{\chi}_2^2 + \Gamma^2. \quad (39.27)$$

Отсюда

$$\chi_1^2 - \dot{\chi}_2^2 = k_1^2 - k_2^2, \quad (39.28)$$

так что при $\varphi = \varphi^*$ ($\vartheta = 90^\circ$, $\dot{\chi}_2 = k_2 \cos \vartheta = 0$)

$$\chi_1^2 = k_1^2 - k_2^2 \quad (\omega = \omega_{кр}). \quad (39.29)$$

Для случая перпендикулярной поляризации, положив в (38.8)

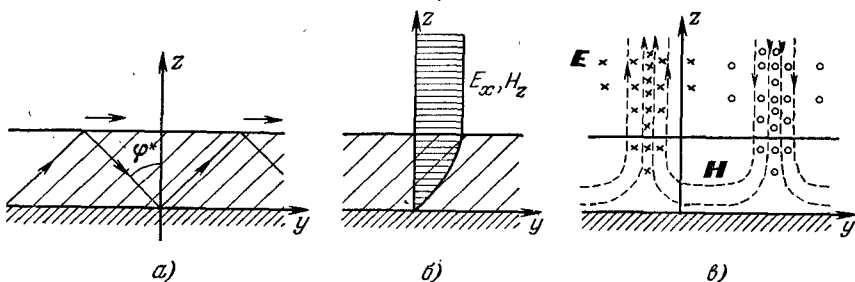


Рис. 39.9.

$\vartheta = 90^\circ$, находим, что при $\omega = \omega_{кр}$ коэффициент отражения $\dot{\rho}_\perp$ равен единице, т. е. $\psi_\perp = 0$. Поэтому на основании (39.26)

$$\chi_1 d = n \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots; \omega = \omega_{кр}). \quad (39.40)$$

Внося получающееся отсюда значение $\chi_1 = \chi_{1n}$ в (39.29), имеем

$$\left(n \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{d} \right)^2 = \omega_{кр}^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2)$$

(напомним, что толщина слоя d фиксирована); разные значения n соответствуют различным типам поля в слое. Таким образом,

$$\omega_{кр} = \frac{n\pi}{2d} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (39.31)$$

Наконец, сделаем замечание того же рода, что и в конце п. 2. Свойство границы раздела диэлектриков направлять электромагнитную энергию должно сохраниться и при ее цилиндрическом искривлении (рис. 39.10). Уже упоминавшийся выше волновод в виде диэлектрического стержня будет рассматриваться в гл. 5.

5. Полное прохождение при наклонном падении. Наконец, перейдем к выяснению условий, при которых наклонно падающая

волна не испытывает отражения на границе раздела сред (полное прохождение). Исключая при отсутствии поглощения из (38.8) $\cos \vartheta$ при помощи второго закона Снеллиуса (37.7) и приравнявая ρ_{\perp} нулю, имеем

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}{k_2^2 (1 - \sin^2 \varphi)},$$

откуда находим следующее условие полного прохождения при перпендикулярной поляризации:

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}. \quad (39.32)$$

Волна, падающая под углом φ , определяемым этой формулой, не отражается. Однако, как видно, не всегда такой угол существует; он отсутствует, например, в случае обычных немагнитных диэлектриков ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

При параллельной поляризации прежним способом из (38.17) находим

$$\left(\frac{W_2}{W_1}\right)^2 = \frac{k_2^2 (1 - \sin^2 \varphi)}{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \varphi}$$

и далее

$$\sin^2 \varphi = \frac{\frac{\mu_2}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}. \quad (39.33)$$

Для обычных диэлектриков ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{\epsilon_1/\epsilon_2 + 1} \quad (39.34)$$

и

$$\varphi = \arctg \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}. \quad (39.35)$$

Найденный угол φ называется *углом Брюстера*. Волна параллельной поляризации, падающая под углом Брюстера на границу раздела непоглощающих диэлектрических сред, проходит без отражения.

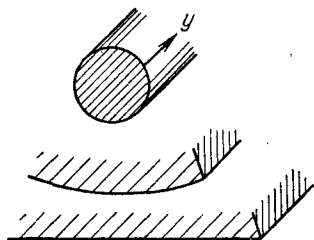


Рис. 39.10.

§ 40. Поверхностный эффект и поглощение в проводниках

1. Сущность поверхностного эффекта. В § 37, п. 2, 3 было установлено, что при падении волны на границу с существенно более плотной средой преломления волна — независимо от угла падения — распространяется почти в направлении внутренней нормали к границе раздела сред. Произвольная суперпозиция падающих под различными углами волн, таким образом, вызовет в достаточно плот-

ной граничащей среде поле, являющееся совокупностью таких преломленных волн. Учитывая это обстоятельство, нетрудно прийти к довольно общему выводу о характере электромагнитных полей на границах с весьма плотными средами. Дело в том, что поле можно рассматривать как суперпозицию различных падающих и соответствующих им отраженных волн (на строгом обосновании этого утверждения здесь мы не будем останавливаться). Поэтому в примыкающей весьма плотной среде поле представляется как суперпозиция преломленных волн E_i , H_i , для которых с высокой точностью справедливо соотношение:

$$\dot{E}_{mi} = \dot{W}_2 [H_{mi}, z_0], \quad (40.1)$$

где z_0 — единичный вектор внутренней нормали (ср. (32.16)). С таким же основанием можно записать это соотношение и для полного поля в плотной среде E , H

$$\dot{E}_m = \dot{W}_2 [H_m, z_0], \quad (40.1a)$$

поскольку $\dot{E}_m = \sum_i \dot{E}_{mi}$ и $H_m = \sum_i H_{mi}$.

Особый интерес представляет случай, когда вторая (оптически плотная) среда является поглощающей. Все преломленные волны, а следовательно, и их суперпозиция E , H затухают (рис. 40.1, а),

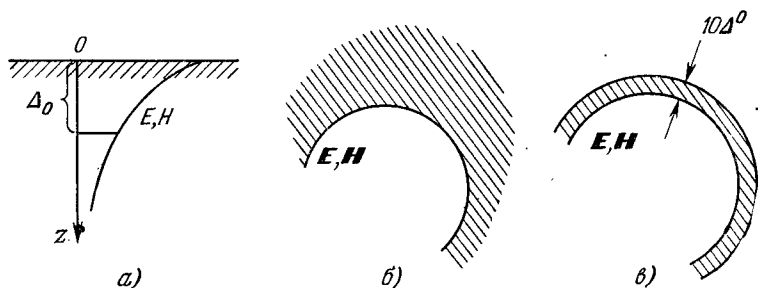


Рис. 40.1.

так что на некоторой глубине поле оказывается исчезающе малым. Расстояние от границы раздела сред, на котором поле ослабляется в $e = 2,718\dots$ раз, условно называется *глубиной проникновения*; мы обозначим его Δ^0 . Поскольку закон затухания (см. §§ 33 и 37, п. 3) имеет вид функции $e^{-k_2''z}$, то глубина проникновения, определяемая из условия

$$e^{-k_2'' \Delta^0} = e^{-1},$$

равна обратной величине коэффициента затухания k_2''

$$\Delta^0 = 1/k_2''. \quad (40.2)$$

В проводящей среде затухание весьма значительно. На основании (33.17а) и (37.22) для проводника

$$\Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu\sigma} \quad (\mu = \mu_2, \sigma = \sigma_2). \quad (40.3)$$

Так, для некоторых распространенных металлов имеем данные, приведенные в табл. 40.1.

Например, для меди при частоте $f = 100$ кГц глубина проникновения составляет $\Delta^0 \approx 0,2$ мм, а при $f = 10^4$ МГц — уже всего лишь $6,6 \cdot 10^{-4}$ мм, т. е. меньше микрона. Практически поле становится пренебрежимо слабым на расстояниях нескольких Δ^0 : на глубине $10 \Delta^0$ оно ослабляется уже в $e^{10} \approx 22\,026$ раз. Если размеры проводящего тела значительно превосходят Δ^0 , то обычно можно считать, что поле в нем сосредоточено вблизи поверхности. Это и называется *поверхностным эффектом*, а также *скин-эффектом*.

2. Граничные условия Леонтовича и поглощение в проводнике. При поверхностном эффекте глубокие слои проводника в сущности не оказывают влияния на электромагнитный процесс у его границы. Уходящая вглубь волна настолько

Таблица 40.1

Глубина проникновения

Металл	Глубина проникновения Δ^0 в мм (частота f в гц)
Серебро	$64,2/\sqrt{f}$
Медь	$66,0/\sqrt{f}$
Алюминий	$82,6/\sqrt{f}$
Латунь	$127,0/\sqrt{f}$

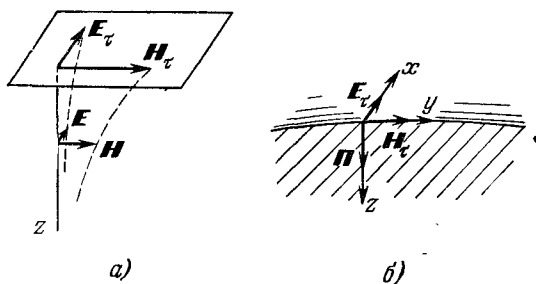


Рис. 40.2.

быстро затухает, что не успевает дойти до противоположной границы тела, где она претерпела бы отражение. Поэтому безразлично, ограничено ли электромагнитное поле в диэлектрике бесконечной металлической средой (рис. 40.1, б) или слоем толщиной $10 \div 20 \Delta^0$ (рис. 40.1, в).

Направивается вывод, что при нахождении поля в ограниченной проводником диэлектрической среде процесс в проводнике можно учесть при помощи граничного условия, вытекающего из соотношения (40.1а). Ведь векторы поля E и H внутри проводника, будучи параллельными плоской границе раздела сред, непрерывно

переходят в тангенциальные составляющие E_τ и H_τ на самой границе (рис. 40.2, а). Полагая в (40.1а) при $z=0$

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m\tau} \quad \text{и} \quad \dot{H}_m = \dot{H}_{m\tau},$$

получаем соотношение, связывающее тангенциальные компоненты на границе:

$$\dot{E}_{m\tau} = \dot{W}_2 [\dot{H}_{m\tau}, z_0] = \dot{W}_2 [\mathbf{v}_0, \dot{H}_{m\tau}] \quad (40.4)$$

(\mathbf{v}_0 — орт внешней нормали), или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mx} &= \dot{W}_2 \dot{H}_{my}, \\ \dot{E}_{my} &= -\dot{W}_2 \dot{H}_{mx}. \end{aligned} \right\} \quad (40.4a)$$

Здесь, согласно (33.19) и (40.3),

$$\dot{W}_2 = (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma\Delta^0} \quad (\mu = \mu_2, \sigma = \sigma_2). \quad (40.5)$$

Равенства (40.4), (40.4а) известны под названием *граничных условий Леонтовича*. Поскольку их происхождение связано с анализом преломления на плоской границе раздела сред, то для произвольных поверхностей они могут применяться только в тех случаях, когда кривизна относительно мала; условием этого является равенство

$$R \gg \Delta^0, \quad (40.6)$$

где R — радиус кривизны. Естественно, что при невыполнении данного равенства величина Δ^0 , вычисляемая по формуле (40.3), в свою очередь теряет смысл глубины проникновения.

Для идеального проводника ($\sigma \rightarrow \infty$) граничное условие Леонтовича (40.4) переходит в известное граничное условие

$$E_\tau = 0. \quad (40.7)$$

Поскольку электропроводность металлов очень велика, то тангенциальная электрическая компонента оказывается чрезвычайно малой, и ею часто пренебрегают, используя идеализированное граничное условие (40.7). Однако этого нельзя делать, если требуется учесть поглощение энергии металлом. Хотя последнее и мало, оно в ряде случаев является единственной причиной потерь энергии, а потому непренебрежимо. Если же положить $E_\tau = 0$, то направленная внутрь проводника компонента вектора Пойнтинга исчезает.

Применяя формулы (30.6) и (40.4), выразим величину $\dot{\Pi}_z$ на поверхности проводника через $\dot{H}_{m\tau}$. Располагая местную систему координат так, чтобы вектор E_τ был направлен по оси x , а H_τ — по оси y (рис. 40.2, б), имеем

$$\dot{\Pi}_z = \frac{1}{2} \left[\mathbf{x}_0 (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \dot{H}_{m\tau}, \mathbf{y}_0 \dot{H}_{m\tau} \right]_z.$$

Таким образом, направленная внутрь проводника компонента комплексного вектора Пойнтинга равна

$$\dot{P}_z = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} H_{m\tau}^2 = \frac{1+i}{2\sigma\Delta^0} H_{m\tau}^2. \quad (40.8)$$

Интегрирование этой величины по полной поверхности проводящего тела S , т. е. вычисление потока комплексного вектора Пойнтинга внутрь проводника дает комплексную мощность

$$\dot{P} = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \int_S H_{m\tau}^2 ds = \frac{1+i}{2\sigma\Delta^0} \int_S H_{m\tau}^2 ds. \quad (40.9)$$

Вещественные части от (40.8) и (40.9) — это среднее значение P_z и соответственно средняя мощность потерь. Последняя выражается формулой

$$\bar{P}_n = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \int_S H_{m\tau}^2 ds = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int_S H_{m\tau}^2 ds. \quad (40.10)$$

Видно, что в случае идеального проводника ($\sigma \rightarrow \infty$) потери отсутствуют.

Заметим, что обычно $H_{m\tau}$ практически не отличается от $H_{m\tau}|_{\sigma \rightarrow \infty}$ — амплитуды H_m на поверхности проводника, найденной при $\sigma \rightarrow \infty$, т. е. при граничном условии (40.7). Это позволяет при вычислении мощности потерь исходить из решения идеализированной задачи.

Пусть, например, на металлическую пластину нормально падает плоская однородная волна (пластина достаточно велика, и мы пренебрегаем особенностями процесса на ее краях). Согласно (36.17) и (36.1) на поверхности металла $H_{m\tau}|_{\sigma \rightarrow \infty} = 2H_m^0$. Вычисляя по формуле (40.8) $\bar{P} = \text{Re } \dot{P}_z$, находим

$$\bar{P} = 2 \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (H_m^0)^2 = \frac{2}{\sigma\Delta^0} (H_m^0)^2. \quad (40.11)$$

Этот же результат из других соображений был получен в § 36, п. 5, где было показано, что его точность весьма велика.

3. Ток и поверхностное сопротивление. Далее рассмотрим ток в проводнике. В силу закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

функция $\mathbf{j}(z)$ имеет тот же вид, что и $\mathbf{E}(z)$, т. е. ток убывает в глубь проводника по закону $e^{-k''z}$, как и поле. Поэтому Δ^0 называют также глубиной проникновения тока.

Поскольку ток сосредоточен вблизи поверхности проводника, его можно условно считать поверхностным (§ 7, п. 4); при этом плотность поверхностного тока $\hat{\eta}$ вычисляется путем интегрирования величины \mathbf{j} по внутренней нормали \mathbf{z} . Таким образом,

$$\hat{\eta}_m = \int_0^{\infty} \mathbf{j}_m dz. \quad (40.12)$$

Очевидно, $\hat{\eta}$ в сущности есть ток, проходящий через бесконечный в глубину слой единичной толщины (рис. 40.3, а). При $\sigma \rightarrow \infty$ величина $\hat{\eta}$ становится плотностью настоящего поверхностного тока.

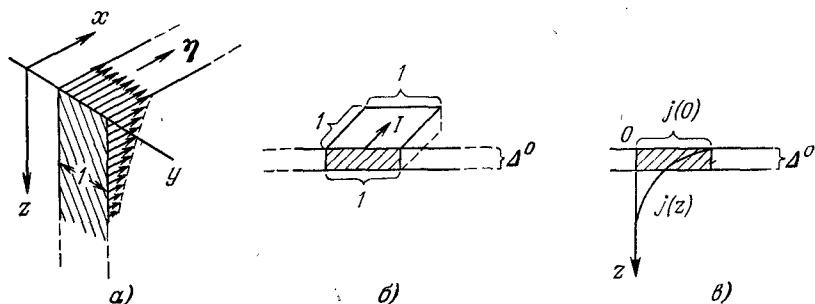


Рис. 40.3.

Используя закон Ома и соотношение (40.1а), запишем:

$$\hat{\eta}_m = \sigma \dot{W}_2 \int_0^{\infty} [\dot{H}_m, z_0] dz = \frac{1+i}{\Delta^0} \int_0^{\infty} [\dot{H}_m, z_0] dz, \quad (40.13)$$

а поскольку в соответствии с (33.17) и (40.3)

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{m\tau} e^{-ikz} = \dot{H}_{m\tau} e^{-(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z} = \dot{H}_{m\tau} e^{-\frac{1+i}{\Delta^0}z},$$

то

$$\int_0^{\infty} \dot{H}_m dz = \dot{H}_{m\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1+i}{\Delta^0}z} dz = \frac{\Delta^0}{1+i} \dot{H}_{m\tau}.$$

Внося это в (40.13), находим

$$\hat{\eta}_m = [\dot{H}_{m\tau}, z_0] = [v_0, \dot{H}_m] |_S, \quad (40.14)$$

где $v_0 = -z_0$. Интересно, что этот результат по форме совпадает с уже известным соотношением (8.5б), справедливым для идеального проводника: введенная плотность «условно поверхностного» тока связана с магнитным полем на границе так же, как и плотность настоящего поверхностного тока η .

Проводник при скин-эффекте можно охарактеризовать так называемым *поверхностным сопротивлением* $\dot{Z}_S = \mathcal{R}_S + i\mathcal{X}_S$, определяемым как отношение комплексных амплитуд напряженности электрического поля на поверхности и плотности поверхностного тока:

$$\dot{Z}_S = \dot{E}_{m\tau} / \hat{\eta}_m, \quad (40.15)$$

причем из (40.4) и (40.14) с учетом (40.5) следует, что

$$\dot{Z}_S = \dot{W}_2 = (1+i) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = \frac{1+i}{\sigma\Delta^0}, \quad (40.16)$$

т. е.

$$\mathcal{R}_S = \frac{1}{\sigma\Delta^0} \quad \text{и} \quad \mathcal{X}_S = \frac{1}{\sigma\Delta^0}. \quad (40.16a)$$

Активная часть поверхностного сопротивления \mathcal{R}_S оказывается равной сопротивлению параллелепипеда, показанного на рис. 40.3, б. Это значит, что активное сопротивление проводника таково, как будто бы ток, не уменьшаясь по амплитуде, проникает на глубину Δ^0 (рис. 40.3, в). Это и объясняет смысл выражения «глубина проникновения тока».

Возьмем цилиндрический проводник произвольного поперечного сечения (рис. 40.4, а, б), для которого выполняется условие

$$R_{\min} \gg \Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}, \quad (40.17)$$

где R_{\min} — наименьший радиус кривизны контура поперечного сечения. Можно ожидать, что в этом случае граница проводника достаточно близка к плоской, и будет наблюдаться скин-эффект. Полный ток вдоль цилиндра \hat{i}_m находится тогда через плотность $\hat{\eta}$ (ср. (40.12)), как интеграл

$$\hat{i}_m = \oint_L \hat{\eta}_m dl. \quad (40.18)$$

При $\hat{\eta}_m = \text{const}$ это дает: $\hat{i}_m = \hat{\eta}_m L$. Если уместно трактовать $E_{m\tau}$ как отнесенное к единице длины напряжение ($\hat{E}_{m\tau} = \hat{U}'_m$), то можно говорить и о сопротивлении единичного отрезка проводника $\mathcal{Z}' = \hat{U}'_m / \hat{i}_m$, причем, согласно предыдущему, $\mathcal{Z}' = \hat{E}_{m\tau} / \hat{\eta}_m L$. Теперь воспользуемся соотношениями (40.15) и (40.16), которые тем более справедливы в данном случае как приближенные равенства, чем в более сильной степени удовлетворяется неравенство (40.17). Выражая \mathcal{Z}' в виде \mathcal{Z}'_S / L , получаем

$$\mathcal{Z}' \approx \frac{1+i}{\sigma\Delta^0 L} \quad (40.19)$$

и, в частности, для провода круглого сечения радиуса R

$$\mathcal{Z}' \approx \frac{1+i}{2\pi R\sigma\Delta^0}. \quad (40.20)$$

Эти формулы заведомо неверны, когда неравенство (40.17), которое можно назвать «условием сильного скин-эффекта», не соблюдается. Позднее (§ 68, п. 1) скин-эффект в проводе будет рассмотрен без ограничений.

4. Поверхностный эффект в проводящем слое. Решим строго задачу о поверхностном эффекте в плоском слое (рис. 40.5, а), по обеим сторонам которого плотность тока имеет одно и то же значение, не изменяющееся в плоскости xOy .

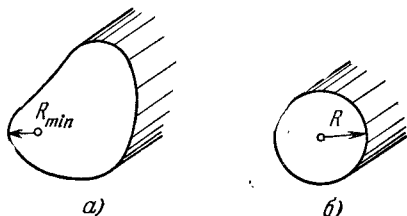


Рис. 40.4.

На основании (32.2) представим комплексную амплитуду напряженности электрического поля в слое выражением

$$\dot{E}_m = x_0 (\dot{A} e^{-ikz} + \dot{B} e^{ikz}) \quad (40.21)$$

(поле является одномерным), причем в силу исходного условия

$$\dot{E}_m(d) = \dot{E}_m(-d) = \dot{E}_{m\tau} \quad (40.22)$$

Отсюда

$$\dot{A} e^{-ikd} + \dot{B} e^{ikd} = \dot{A} e^{ikd} + \dot{B} e^{-ikd},$$

т. е.

$$\dot{A} = \dot{B}, \quad \dot{E}_m = \dot{A} (e^{-ikz} + e^{ikz}) = 2\dot{A} \cos kz,$$

$$2\dot{A} \cos kd = \dot{E}_{m\tau}$$

и окончательно

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m\tau} \frac{e^{-ikz} + e^{ikz}}{2 \cos kd} = \dot{E}_{m\tau} \frac{\cos kz}{\cos kd} \quad (40.23)$$

Поскольку при этом по закону Ома

$$\dot{j}_m = \sigma \dot{E}_m \frac{e^{-ikz} + e^{ikz}}{2 \cos kd} = \sigma \dot{E}_{m\tau} \frac{\cos kz}{\cos kd}, \quad (40.24)$$

то

$$\hat{\eta}_m = \int_{-d}^d \dot{j}_m dz = \frac{2\sigma \dot{E}_{m\tau}}{k} \operatorname{tg} kd \quad (40.25)$$

и сопротивление слоя, отнесенное к единице поверхности, равно

$$\hat{z}'' = \frac{\dot{E}_{m\tau}}{\hat{\eta}_m} = \frac{k}{2\sigma} \operatorname{ctg} kd \quad \left(k = \frac{1-i}{\Delta^0} \right). \quad (40.26)$$

На рис. 40.5, б, в, г показаны распределения тока в слое при различных степенях проявления скин-эффекта, получаемые на основании (40.24); пунктиром обозначены кривые, соответствующие слагаемым в виде распространяющихся навстречу затухающих волн. При $|kd| \gg 1$ наблюдается сильный скин-эффект (рис. 40.5, б); движущиеся от краев волны быстро затухают, и в средней части слоя поле и ток пренебрежимо малы. Поскольку при этом $\operatorname{ctg} kd \approx i$, то выражение (40.26) принимает вид

$$\hat{z}'' \approx \frac{1+i}{2\sigma\Delta^0}, \quad |kd| \gg 1; \quad (40.26a)$$

этот результат был бы получен по формуле (40.19). Если $|kd| \ll 1$, то скин-эффект слаб (рис. 40.52): в средней части слоя имеется лишь небольшой спад поля и тока. Полагая в этом случае $\operatorname{tg} kd \approx kd$, имеем

$$\frac{\dot{z}''}{z''} \approx \frac{1}{2\sigma d}, \quad |kd| \ll 1; \quad (40.266)$$

это сопротивление для постоянного тока.

5. Давление на проводник. Согласно (6.4) в толще проводника действует сила, которая, будучи, отнесенной к единице его поверхности, при сильном скин-эффекте равна

$$\mathbf{p} = \int_0^{\infty} \mathbf{f} dz = \int_0^{\infty} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] dz \quad (40.27)$$

(ср. определение $\hat{\eta}$ через \mathbf{j} согласно (40.12)). В сущности это оказываемое на проводник *давление*. В случае гармонически колеблющегося поля на основании (П3.15) можно выразить среднее давление:

$$\bar{p} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} [\dot{\mathbf{j}}_m, \dot{\mathbf{B}}_m^*] dz = \frac{\sigma\mu}{2} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*] dz. \quad (40.27a)$$

Пользуясь соотношениями (40.1a) и (40.16), находим

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\sigma\mu}{2} \operatorname{Re} \dot{W} \int_0^{\infty} [[\dot{\mathbf{H}}_m, \mathbf{z}_0], \dot{\mathbf{H}}_m^*] dz = \mathbf{z}_0 \frac{\sigma\mu e^{\mathcal{R}_s}}{2} \int_0^{\infty} H_m^2 dz = \\ &= \mathbf{z}_0 \frac{\mu}{2\Delta^0} \int_0^{\infty} H_{m\tau}^2 e^{-\frac{2}{\Delta^0} z} dz = \mathbf{z}_0 \mu \frac{H_{m\tau}^2}{4}. \end{aligned} \quad (40.28)$$

Пусть на проводящую плоскость нормально падает волна. Полагая в этом случае $H_{m\tau} = 2H_m^0$ (§ 36, п. 5), имеем

$$\bar{p} = \mathbf{z}_0 \mu H_m^{0^2} = \mathbf{z}_0 2\bar{w}, \quad (40.29)$$

где \bar{w} — средняя плотность энергии падающей волны (§ 32, п. 4).

Как известно, П. Н. Лебедевым в 1901 г. было впервые экспериментально доказано существование светового давления, и это сыграло важную роль в обосновании теории электромагнетизма.

IV. РАДИОВОЛНЫ В ПРИРОДНЫХ УСЛОВИЯХ

Под *радиоволнами* мы имеем в виду электромагнитные волны, используемые в радиотехнике; к ним относятся, в частности, волны в различной радиотехнической аппаратуре, например распространяющиеся по специальным волноводам. Такого рода электромагнитные волны будут подробно рассматриваться позднее (гл. 5). Но независимо от характера применяемой аппаратуры сущность радиотехники связана с распространением электромагнитных волн

в природных условиях. На основании того, что уже было сказано об электромагнитных волновых процессах, можно теперь обсудить некоторые общие особенности этих радиоволн.

Радиоволны возбуждаются передающими антеннами и распространяются в относительной близости Земли; исключение составляет дальняя космическая радиосвязь. Таким образом, обычно существенным фактором является наличие сферической границы двух сред: Земля — околоземное пространство. Иногда эту границу можно рассматривать как плоскость; при этом используются сведения о волновых процессах при наличии плоских границ, отражении и преломлении. Весьма существенно, что околоземное пространство, в свою очередь, неоднородно. Простирающиеся на высоте сотен километров над земной поверхностью слои повышенной ионизации атмосферы — *ионосфера* — способны поглощать и «отражать» радиоволны (точнее, изменять направление их распространения). Заметно может сказываться и неоднородность нижних воздушных слоев. Наконец, при изучении распространения радиоволн в природных условиях нередко нельзя отвлечься от вопросов их излучения и приема, т. е. от действия антенн.

Из сказанного уже нетрудно заключить, что проблема распространения радиоволн в природных условиях в целом весьма сложна. Но выше была обрисована еще далеко не полная картина явлений. Нерегулярность и изменчивость природных факторов, наличие многих одновременных электромагнитных процессов, влияние магнитного поля Земли и солнечной активности, а также многое другое создают особые трудности для анализа радиоволн, разрешение которых немислимо без широких экспериментальных исследований и наблюдений над природой. Благодаря настоятельным потребностям практики экспериментальное и теоретическое изучение распространения радиоволн в околоземном пространстве ведется уже десятки лет. Можно сказать, что общая картина процессов в настоящее время ясна; при этом некоторые важные черты явлений поддаются элементарному описанию. На них в первую очередь мы и остановимся.

§ 41. Элементарные сведения о радиолинии

1. Действие антенн и идеальная радиолиния. *Радиолиния*, или *радиотракт*, — это пространство, в котором расположены передатчик и приемник со своими антеннами; через радиолинию передается электромагнитная энергия, а с ней и требуемая информация. Конечно, существенную роль играет при этом лишь определенная область пространства.

Теория электромагнитного излучения будет рассматриваться в следующей, четвертой, главе; что же касается антенн, то им посвящен отдельный курс, изучаемый после теории электромагнетизма. Тем не менее простейшие вопросы действия антенн, относящиеся к радиолиниям, целесообразно обсудить уже сейчас.

Пусть в однородной изотропной непоглощающей среде из точки A происходит электромагнитное излучение; среда безгранична. Если бы плотность потока энергии была во всех направлениях одинакова, то, взяв сферическую поверхность $S = 4\pi r^2$ с центром в A , можно было бы следующим образом выразить среднюю мощность излучения $\bar{P} = \bar{P}_A^0$:

$$\bar{P}_A^0 = \oint_S \bar{\Pi}^0 ds = 4\pi r^2 \bar{\Pi}^0(r). \quad (41.1)$$

Обычно гипотетическую равномерно излучающую антенну называют *изотропным излучателем*.

В действительности антенны излучают в разных направлениях неравномерно. Если мощность некоторой антенны есть $\bar{P} = \bar{P}_A$ и в точке $M(r, \vartheta, \alpha)$ она создает поток энергии с плотностью, в $D_A(\vartheta, \alpha)$ не раз превышающей плотность потока энергии изотропного излучателя при той же мощности, т. е.

$$\bar{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = D_A(\vartheta, \alpha) \bar{\Pi}^0(r) \quad \text{при} \quad \bar{P}_A = \bar{P}_A^0,$$

то на основании (41.1) получаем

$$\bar{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = \frac{D_A(\vartheta, \alpha) \bar{P}_A}{4\pi r^2}. \quad (41.2)$$

Это выражение плотности потока энергии на расстоянии r в направлении (ϑ, α) . Множитель $D_A(\vartheta, \alpha)$ называется *коэффициентом направленности действия* данной антенны.

Полагая, что локально поле излучения можно рассматривать как плоскую однородную волну, воспользуемся формулой (32.18), т. е. положим

$$\bar{\Pi}(r, \vartheta, \alpha) = \frac{E_m^2(r, \vartheta, \alpha)}{2W}, \quad (41.3)$$

где $E_m(r, \vartheta, \alpha)$ — амплитуда напряженности электрического поля на расстоянии r в направлении (ϑ, α) . Тогда из (41.2) и (41.3)

$$E_m(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{D_A(\vartheta, \alpha) \bar{P}_A W}{2\pi}}. \quad (41.4)$$

Величину E_m (или $\sqrt{\bar{\Pi}}$) как функцию угловых координат рассматривают в качестве *характеристики направленности* антенны. Нормированной характеристикой направленности является функция

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{E_m(r, \vartheta, \alpha)}{E_m(r, \vartheta, \alpha)_{\max}}, \quad r = \text{const}. \quad (41.5)$$

Ее график в той или иной плоскости (например, при $\alpha = \text{const}$ или $\vartheta = \text{const}$) — это так называемая *диаграмма направленности*. Диаграмма направленности изотропного излучателя (рис. 41.1,а) — окружность (рис. 41.1,б). Можно представить себе антенну, все излучение которой сосредоточено в пределах телесного угла Ω

(рис. 41.1, а), и в любой меридиональной плоскости диаграмма направленности имеет вид, показанный на рис. 41.1, б. Направление z соответствует максимальное значение коэффициента D .

Пусть далее в точке B расположена приемная антенна (мы говорим «в точке», потому что размеры антенны пренебрежимо малы в сравнении с рассматриваемыми расстояниями). Из потока энергии, падающего в направлении (ϑ, α) с плотностью \bar{P} (ϑ, α) , антенна отбирает мощность

$$\bar{P}_B = \bar{P}(\vartheta, \alpha) S_B(\vartheta, \alpha). \quad (41.6)$$

Коэффициент $S_B(\vartheta, \alpha)$ называют *эффективной поверхностью* антенны для данного направления. Доказывается ¹⁾, что коэффициент

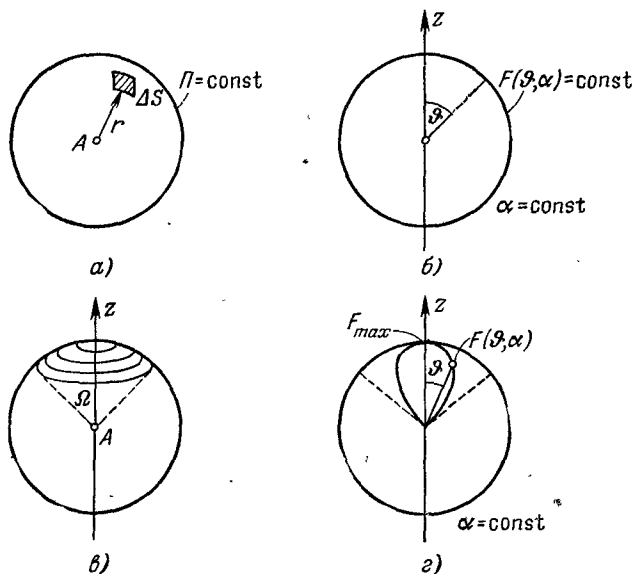


Рис. 41.1.

направленности действия антенны связан с ее эффективной поверхностью соотношением

$$D_B(\vartheta, \alpha) = \frac{4\pi S_B(\vartheta, \alpha)}{\lambda^2}. \quad (41.7)$$

Если ранее рассмотренная передающая антенна A и приемная антенна B составляют радиолинию, то $\bar{P}(\vartheta, \alpha)$ в (41.6) следует выразить в виде (41.2). Используя также формулу (41.7), получаем

$$\bar{P}_B \frac{D_A(\vartheta, \alpha) D_B(\vartheta, \alpha) \lambda^2}{(4\pi r)^2} \bar{P}_A. \quad (41.8)$$

¹⁾ См., например, стр. 39 и предыдущие в [В.5]. В этой книге вывод не приводится, так как это потребовало бы углубления в теорию антенн, однако в § 53, п.4 дается пояснительный пример.

Это соотношение характеризует «идеальную радиолинию», когда антенны расположены в однородном изотропном пространстве.

При расчетах реальных радиолиний часто употребляют аналогичную формулу

$$\bar{P}_B = F^2(r) \frac{D_A(\vartheta, \alpha) D_B(\vartheta, \alpha) \lambda^2}{(4\pi r)^2} \bar{P}_A, \quad (41.9)$$

где $F(r)$ — так называемый коэффициент ослабления, который показывает, во сколько раз напряженность поля в реальной линии оказывается меньше, чем в идеальной.

2. О реальных радиолиниях. При проектировании радиолинии основной является проблема определения мощности передатчика, обеспечивающей достаточно высокую мощность приема (или напряженность поля в точке приема). Если радиолиния близка к идеальной, что может быть, например, при связи в космосе, то необходимые расчеты легко могут быть произведены по формуле (41.8). Что же

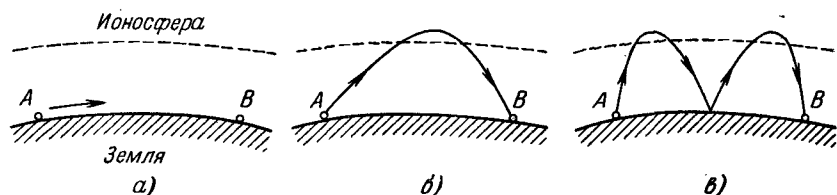


Рис. 41.2.

касается реальных радиолиний более сложного типа, то ввиду разнообразия условий нельзя указать простой и общий способ их проектирования. Кажущаяся простота формулы (41.9), пожалуй, маскирует действительные трудности.

Перейдем к рассмотрению наиболее важных факторов, определяющих распространение радиоволн над Землей. В отличие от безграничной однородной среды, разные направления излучения в данном случае заведомо неравноправны. Если радиолиния должна быть установлена между расположенными вблизи Земли точками A и B (рис. 41.2, a), то на первый взгляд интерес представляет лишь направление излучения, касательное земной поверхности. Говорят, что в этом направлении распространяется «земная волна». Действительно, излучение в какой-то мере направляется земной поверхностью; при этом Земля вызывает значительное поглощение, так что E_m убывает гораздо быстрее, чем $1/r$. Но, оказывается, радиолиния между пунктами A и B может быть создана и без использования земной волны. Над Землей, как уже отмечалось, расположена *ионосфера*; так называют ионизированные слои атмосферы (нижней границей ионосферы принято считать высоту порядка 60 км). По причинам, которые мы ниже обсудим кратко, а в гл. 6 более подробно, в ионосфере происходит нечто вроде отражения радиоволн многих диапазонов. В результате излучение из точки A под неко-

торым углом к горизонту может прийти в точку B , как это показано на рис. 41.2, б; возможны и многократные отражения с участием поверхности Земли (рис. 41.2, в). Именно «ионосферные волны» разрешают проблему радиопередачи на больших расстояниях (главным образом свыше 2000 км).

Чтобы понять характер ионосферной волны, надо прежде всего учесть, что волну, пришедшую в ионосферу, можно рассматривать как локально плоскую. Ионизация сначала постепенно нарастает с высотой, причем оптическая плотность среды *уменьшается* (§ 81, п. 1). Заменим реальную среду системой плоских слоев (рис. 41.3, а) и обсудим свойства этой модели. По условию $k_0 > k_1 > k_2 > \dots > k_n > \dots$, поэтому в силу закона Снеллиуса (37.7) мы имеем

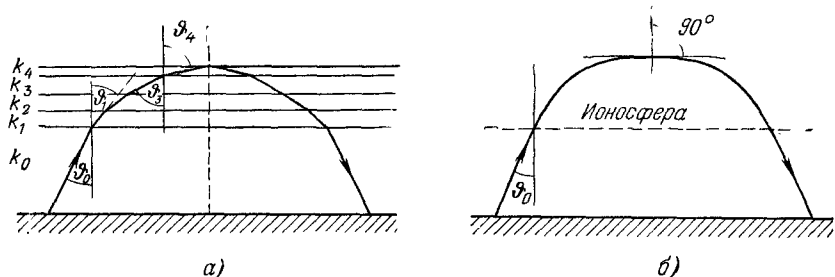


Рис. 41.3.

картину преломленных лучей, все более приближающихся по направлению к горизонту. Действительно, из равенства

$$k_0 \sin \vartheta_0 = k_1 \sin \vartheta_1 = k_2 \sin \vartheta_2 = \dots = k_n \sin \vartheta_n = \dots, \quad (41.10)$$

учитывая соотношение волновых чисел, получаем: $\sin \vartheta_n > \sin \vartheta_0$. Если соседние слои близки по оптической плотности, то отражения очень малы, когда луч проходит через границу. Однако при выполнении условия $\sin \vartheta_n = \frac{k_{n-1}}{k_n} \sin \vartheta_{n-1} > 1$ произойдет полное отражение от n -го слоя, и луч «повернет назад». Легко убедиться, что вторая (нисходящая) половина его пути будет симметрична первой (восходящей к точке B) относительно вертикали.

В действительности k меняется не скачкообразно от слоя к слою, а плавно с высотой, и поэтому траектория луча не имеет изломов (рис. 41.3, б); по этой же причине полное отражение происходит при $\vartheta = 90^\circ$, так как в (37.7б) надо положить $n_{12} = 1$. Пусть полное отражение имеет место при $k = \check{k}$, тогда, согласно (41.10),

$$\sin \vartheta_0 = \frac{\check{k}}{k_0} = \sqrt{\frac{\check{\epsilon}}{\epsilon_0}}. \quad (41.11)$$

На этом выводе условия поворота луча мы пока и остановимся, сделав несколько замечаний. Во-первых, существенно, что отно-

сительная диэлектрическая проницаемость ионизированного газа ($\epsilon/\epsilon_0 < 1$) есть функция частоты; это определяет особенности распространения радиоволн разных диапазонов. Самые короткие волны, для которых условие поворота может быть выполнено, имеют длину порядка 10 м; еще более короткие волны уходят от Земли через ионосферу. Во-вторых, заметим, что выше в рассуждениях

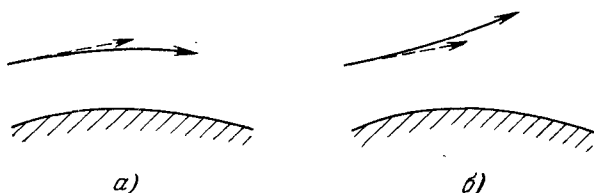


Рис. 41.4.

ради простоты не учитывалось поглощение; в действительности этот фактор важен. И, наконец, само представление об искривленном луче требует обоснования (см. ниже § 56, п. 5 и § 81).

В заключение параграфа отметим еще, что некоторое искривление лучей при определенных условиях наблюдается и в нижних слоях атмосферы, называемых *тропосферой*. Оно обусловлено изменением плотности воздуха с высотой под влиянием различных факторов. Это называют «атмосферной рефракцией». В зависимости от того, уменьшается или увеличивается с высотой плотность воздуха, имеет место «положительная рефракция» (рис. 41.4, а) или «отрицательная рефракция» (рис. 41.4, б).

§ 42. Диапазоны радиоволн

1. Классификация волн по диапазонам. Частоты электромагнитных колебаний, применяемых во всем многообразии современных радиоустройств, занимают столь обширную область, что природные условия распространения соответствующих радиоволн сильно различаются. Это главная причина деления радиоволн на ряд диапазонов по частотам (длинам волн). Оно производится так, что внутри каждого диапазона природные условия остаются относительно однообразными, и можно указать главные особенности распространения радиоволн соответственно преобладающим физическим факторам.

В настоящее время выделяют следующие пять главных диапазонов радиоволн:

1. Ультракороткие волны $10^{-3} - 10$ м ($3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^8$ МГц); поддиапазоны:
 - миллиметровые волны 1—10 мм ($3 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^5$ МГц),
 - сантиметровые волны 1 — 10 см ($3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$ МГц),
 - дециметровые волны 10 см — 1 м ($3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^3$ МГц),
 - метровые волны 1 — 10 м ($3 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2$ МГц).

2. Короткие волны 10—100 м ($3 - 3 \cdot 10$ МГц).
3. Средние волны 100 м — 1 км ($3 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10^3$ кгц).
4. Длинные волны 1—10 км ($3 \cdot 10 - 3 \cdot 10^2$ кгц).
5. Сверхдлинные волны 10—100 км ($3 - 3 \cdot 10$ кгц).

Разумеется, мыслимы как более длинные, так и более короткие радиоволны. Освоение ультракоротких волн происходило по мере развития методов генерации все более высокочастотных электромагнитных колебаний. Наконец, в последнее десятилетие произошло событие принципиальной важности: в результате изобретения лазеров стали доступны когерентные электромагнитные колебания, соответствующие оптическому спектру. Поэтому можно сказать, что техника располагает радиоволнами оптического диапазона; в последнем различают следующие поддиапазоны:

1. Ультрафиолетовая область $10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4}$ мм ($7,5 \cdot 10^8 - 3 \cdot 10^9$ МГц).
2. Видимый свет $4 \cdot 10^{-4} - 7,5 \cdot 10^{-4}$ мм ($4 \cdot 10^8 - 7,5 \cdot 10^8$ МГц).
3. Инфракрасная область $7,5 \cdot 10^{-4} - 1$ мм ($3 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^8$ МГц).

2. Краткие сведения об околоземном пространстве. Каковы же наиболее характерные особенности распространения радиоволн разных диапазонов? Более полный и аргументированный ответ на данный вопрос читатель получит к концу книги. Ближайшая же задача — обсудить основные черты явлений в пределах уже известных сведений из теории электромагнетизма.

Но сначала необходимо принять во внимание некоторые данные об атмосфере Земли. Нижние — плотные — ее слои, как уже

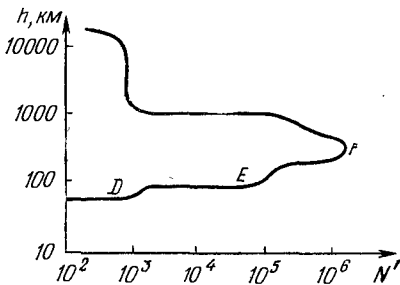


Рис. 42.1.

сообщалось, называют тропосферой; тропосфера простирается до высоты около 15 км. Тропосфера нагревается поверхностью Земли; ее температура в среднем постепенно падает с высотой.

На высоте 60—80 км начинается ионосфера. Процессы ионизации, происходящие главным образом под влиянием Солнца, таковы, что на расстоянии 250—400 км от земной поверхности

лежит область наибольшей концентрации свободных электронов, называемая слоем *F*. На рис. 42.1¹⁾ представлен построенный на основании экспериментальных данных график функции $N'(h)$, выражающей число свободных электронов в 1 см^3 на высоте h . В так называемой «внутренней ионосфере», т. е. ниже слоя *F*, различают еще слои *D* и *E* (см. рисунок), где концентрация электронов N' достигает значений порядка 10^3 и 10^5 соответственно, быстро возрастаая на условных границах.

¹⁾ Рисунок заимствован из [Е.2].

Показанная картина изменчива. Слой D днем образует нижнюю границу ионосферы, а ночью исчезает, и эта граница поднимается до слоя E . На высоте слоя D плотность газа, падающая с высотой, еще относительно велика, так что колеблющиеся под действием поля свободные электроны должны испытывать сравнительно частые соударения с тяжелыми частицами, отдавая им свою энергию; это основной механизм поглощения энергии электромагнитного поля в ионосфере (§ 80, п. 3). Величина ν , выражающая среднее число соударений электрона с тяжелыми частицами в секунду, достигает в слое D порядка 10^7 .

Слой E начинается на высоте около 100 км, причем этот уровень устойчив; здесь $\nu \approx 10^5$. К ночи электронная плотность N' постепенно понижается до нескольких тысяч и остается до наступления дня почти постоянной.

Вся ионосфера подвержена почти периодическим суточным, сезонным, а также и более медленным изменениям, которые, налагаясь, могут создавать сложную картину. Сложен режим слоя F . Например, зимой в дневное время величина N' достигает $2 \cdot 10^6$, а ночью становится на порядок ниже. При этом высота слоя днем около 200, а ночью — 300 км. Летом же в дневное время слой F распадается на два слоя: F_1 (высота около 200 км) и F_2 (высота 300—400 км). Во всех случаях слой F довольно неустойчив. Число ν для него лежит в пределах 10^3 — 10^4 .

Выше слоя F в так называемой «внешней ионосфере» электронная концентрация, падая с высотой, имеет значение порядка 10^2 на расстоянии 20 000 км от Земли. Этот уровень считают границей ионосферы.

3. Диапазонные особенности распространения радиоволн. Теперь можно перейти к обзору особенностей распространения радиоволн разных диапазонов.

Начнем с длинных волн. Для электромагнитных полей соответствующих частот (30—300 кГц) различные виды почв большей частью выступают как проводники; тем более все водные поверхности ведут себя как проводящие. Например, взяв из табл. 6.2 для сухой почвы $\sigma = 10^{-3}$ сим/м при $\epsilon/\epsilon_0 = 4$, а частоту — равной 10^5 гц, находим: $\operatorname{tg} \Delta \approx 45$ (см. § 29, п. 2). Волновое сопротивление среды относительно мало по модулю; магнитное поле вблизи земной поверхности преимущественно тангенциально, а электрическое имеет лишь небольшую тангенциальную компоненту; относительно невелико и поглощение (§ 40, п. 2). Поэтому, а также ввиду дифракционных явлений, о которых будет говориться в следующей главе, в диапазоне длинных волн так называемая земная волна может приниматься на весьма значительных расстояниях (скажем, около 3000 км).

Поскольку приемная и передающая антенны в данном диапазоне находятся как бы на самой границе раздела сред (высота над Землей всегда очень мала в сравнении с длиной волны), то в силу свойственных проводнику граничных условий естественной

оказывается параллельная (§ 38, п. 2) поляризация — вектор E в вертикальной плоскости.

Распространение ионосферных волн происходит тоже при довольно слабом поглощении: проникновение поля в ионосферу невелико. Полагают, что в данном диапазоне ионосферная волна отражается от слоя D (днем) и E (ночью), как от резкой границы разнородных сред: изменение оптической плотности среды на границе ионосферы является быстрым (в масштабе длины волны). Ионосферные волны могут приниматься во всех точках земного шара.

Полезной моделью при изучении распространения длинных волн является «сферический волновод», т. е. система двух концентрических полностью отражающих сферических поверхностей, в пространстве между которыми распространяется волновой процесс;

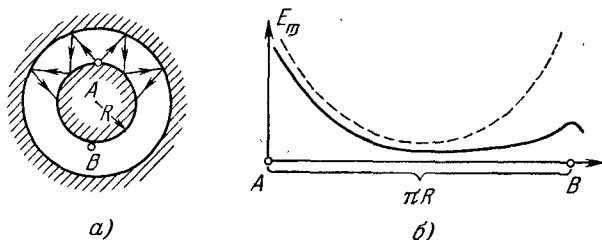


Рис. 42.2.

участок такого волновода мало отличается от участка волновода в виде двух параллельных плоскостей (§ 39, п. 2). Если поле в сферическом волноводе возбуждается источником в точке A (рис. 42.2, a), равномерно излучающим во все стороны, то можно сказать, что лучи соберутся в точке антипода B . Напряженность поля в зависимости от расстояния должна изменяться при этом, как показано пунктиром на рис. 42.2, b . В действительности земная поверхность и нижняя граница ионосферы образуют лишь некоторое подобие такого сферического волновода; отличие заключается, главным образом в поглощении при отражении от обеих границ. Однако все же имеет место так называемый «эффект антипода» — возрастание напряженности поля на расстоянии земной полуокружности от антенны; изменение напряженности поля в реальных условиях показано на рис. 42.2, b сплошной кривой.

По мере увеличения частоты условия распространения радиоволн изменяются настолько, что для диапазона средних волн характерными являются уже иные особенности. Из-за большего поглощения в почве радиолинии, использующие земную волну, имеют протяженность лишь порядка 1000 км. Что касается ионосферной волны, то она способна отразиться лишь при электронной концентрации, свойственной слою E . Поэтому днем, когда существует

более низкий слой D , волна проходит через него и практически полностью поглощается. Ночью же поглощение соответственно гораздо меньше, и радиолиния может работать на ионосферной волне; ее протяженность при этом весьма значительно возрастает. Существенно, что ночью в точку приема B могут прийти одновременно земная и ионосферная волны (рис. 42.3, a) или две ионосферные

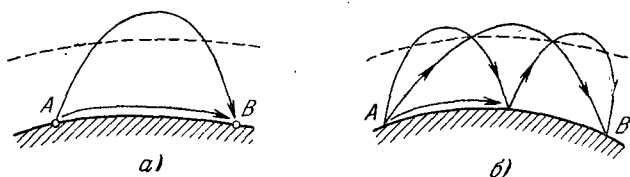


Рис. 42.3.

волны (рис. 42.3, b), а также более двух. Поскольку состояние ионосферы не остается постоянным, фаза проходящей через нее волны изменяется со временем. По этой причине в обоих указанных случаях (рис. 42.3) интерференция волн приводит то к усилению, то к ослаблению поля. Это называется «замираниями» или «федингом». С федингом борются, стараясь уменьшить изучение под большими углами к горизонту.

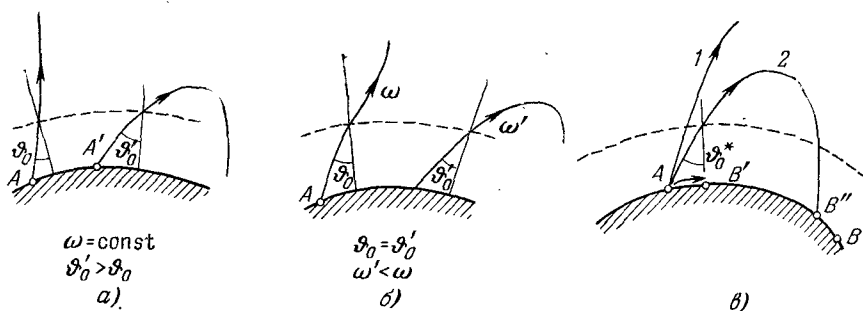


Рис. 42.4.

При дальнейшем повышении частоты волны проникают глубоко как в почву, являющуюся уже несовершенным диэлектриком, так и в ионосферу. Для диапазона коротких волн характерно столь значительное поглощение земной волны, что радиопередача при ее помощи оказывается возможной лишь на десятки километров. Основной практический интерес здесь представляют ионосферные волны. Последние, проходя слои D и E , могут испытывать отражение только при электронной концентрации N' , близкой к максимальной (слой F). Чем выше частота, тем большая концентрация N' требуется для реализации полного отражения при данном угле падения ϑ_0 и тем больший угол падения уже не приведет к полному отражению при данной концентрации; рис. 42.4, $a, б$ показывает,

как может нарушаться условие отражения. Если отражения в ионосфере не происходит, то это значит, что волна уходит за пределы слоя F и к Земле не возвращается. Что касается поглощения ионосферных волн, то оно в данном диапазоне возрастает с уменьшением частоты. Таким образом, частоты выгодно повышать, но возможно это лишь до определенных пределов, зависящих от изменяющихся условий. Днем электронная концентрация N' выше, и используются волны 10—25 м — «дневные волны». Диапазон «ночных волн» 35—100 м. На состояние ионосферы оказывают влияние процессы, происходящие на Солнце. Слой F разрушается в результате так называемых «магнитных бурь»; на освещенной стороне земного шара может возникать внезапное (практически полное) поглощение коротких волн вследствие дополнительной ионизации слоя D под влиянием вспышек на Солнце.

Особенностью радиолинии на коротких волнах является существование «зоны молчания» — области, до которой, можно сказать, не доходит земная волна (точнее, где напряженность ее поля пренебрежимо мала) и куда не может

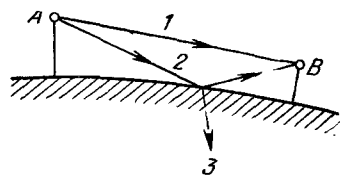


Рис. 42.5.

прийти ионосферная волна, поскольку для этого отражение в ионосфере должно было бы произойти при весьма малом угле падения φ_0 . Это поясняется на рис. 42.4, в. Пусть прием земной волны невозможен уже в точке B' на расстоянии AB' от антенны A , и при углах падения φ_0 , которые меньше φ_0^* , отражения в ионосфере не происходит (как, например, для луча 1); тогда зона молчания простирается от B' до B'' . Другим характерным эффектом, иногда наблюдаемым на коротких волнах, является «кругосветное эхо» — наложение на принимаемый сигнал другого, который создается волной, обошедшей земной шар (в прямом или обратном направлении), и соответственно запаздывает во времени.

Ультракороткие волны отличаются, прежде всего, тем, что они не отражаются от ионосферы, а уходят через нее (исключение составляют случаи отражения наиболее длинных метровых волн в периоды повышенной солнечной активности). Почва во всем диапазоне ультракоротких волн обладает свойствами поглощающего диэлектрика.

Типичная радиолиния в данном диапазоне существует лишь в пределах прямой видимости: излучение приемной антенны A (рис. 42.5) достигает точки приема B прямым (1) и отраженным от Земли (2) лучами. Протяженность радиолинии увеличивается с высотой поднятия антенн над Землей.

Имеется, однако, ряд физических факторов, проявление которых способствует удлинению радиолиний на ультракоротких волнах. К ним относятся, например, атмосферная рефракция (§ 41, рис. 41.5, а), а также рассеяние волн на случайных неоднородностях в атмосфере;

существуют радиолинии, использующие рассеяние волн на метеорных следах.

Итак, был сделан краткий обзор основных особенностей распространения радиоволн разных диапазонов; мы не коснулись лишь диапазона сверхдлинных волн и оптического. В последующих главах вопросы распространения радиоволн в природных условиях вновь будут затронуты.

В §§ 58—60 рассматриваются земные и тропосферные радиоволны. При этом использованы некоторые сведения о дифракционных явлениях (§§ 50, 54) и рефракции (§§ 56, 57). В § 80 вводится электродинамическая модель плазмы, чтобы вернуться к вопросам распространения радиоволн в ионосфере (§ 81). Позднее (§ 84) учитывается влияние на ионосферные процессы магнитного поля Земли. Наконец, в § 88 обсуждаются особенности различных радиолиний.

ИЗЛУЧЕНИЕ, ДИФРАКЦИЯ И РЕФРАКЦИЯ

I. ИЗЛУЧЕНИЕ

Проблема *электромагнитного излучения* неоднократно затрагивалась в предыдущих главах, и теперь накоплен материал, позволяющий рассмотреть ее систематически. Напомним некоторые моменты, исходные для дальнейшего.

Под излучением понимается движение энергии в пространстве от источника; впрочем, здесь нужен ряд уточнений. Заметим сначала, что само слово «источник» употребляется в разных смыслах. Говорят, например, что источниками электростатического поля являются заряды, а источниками стационарного магнитного поля — постоянные токи. В электростатическом поле нет движения энергии — ввиду отсутствия магнитного поля вектор Пойнтинга равен нулю. Что же касается постоянного тока, то вспомним вывод, сделанный в § 28, п. 4. В этом случае существуют как электрическое, так и магнитное поля, образующие в совокупности электромагнитное поле, и происходит передача энергии, поступающей в результате действия сторонних сил (т. е. процессов преобразования энергии неэлектромагнитной в электромагнитную). Однако, поместив любое распределение постоянного тока внутри мысленной замкнутой поверхности S , мы обнаружим, что поток вектора Пойнтинга через S равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{P} \, ds = 0.$$

Например, существует движение электромагнитной энергии от химического источника постоянного тока в направлении к подключенной нагрузке, но равен нулю поток энергии через любую поверхность, охватывающую всю цепь. Здесь налицо движение энергии в пространстве от источника, однако она не покидает при этом некоторой ограниченной области пространства. Такую передачу энергии не принято называть излучением.

Излучение свойственно переменным электромагнитным процессам. Создаваемое действием сторонних сил переменное электромагнитное поле имеет волновой характер и, если только нет внешних препятствий, переносит энергию как угодно далеко от источника. В §§ 32—39 уже довольно подробно рассматривались волновые электромагнитные поля, но это были поля *свободные*, существующие

без источников. Проблема излучения заключается в исследовании волновых полей, возбуждаемых источниками, иными словами, полей *вынужденных*.

Что может являться источником электромагнитного волнового процесса? Начало ответа на этот вопрос содержится в § 28, п. 1. Если вследствие преобразования неэлектромагнитной энергии в электромагнитную имеется заранее известное распределение переменного электрического тока, то ток этот называют *сторонним*, рассматривая его при решении уравнений электродинамики как заданный. При этом задача об излучении сводится к требованию найти электромагнитное поле в результате решения уравнений Максвелла (или производных из них) при данном стороннем токе, выражающем действие источника.

Первое, что теперь предстоит сделать, — это найти решения наиболее простых и вместе с тем характерных задач такого рода. Осмысливая действие *элементарных излучателей*, мы выясним важные общие закономерности электромагнитного излучения.

Далее будет сформулирована более общая точка зрения, согласно которой в качестве источников излучения уместно рассматривать не только заданные токи проводимости, но и, например, заданные поля. Это находит отражение в *принципе Гюйгенса*.

В предлагаемом разделе излагается целый ряд вопросов теории электромагнитного излучения. К ним относятся также представления о *масштабных токах*, *принцип двойственности* и *принцип взаимности*. Весь этот круг вопросов будет иметь особенное значение при изучении теории антенн.

§ 43. Основная задача об излучении

1. Сторонний ток и поле излучения. Рассмотрим одну из постановок задачи об излучении, обладающую значительной общностью.

Пусть в некоторой области пространства распределен сторонний ток, причем, за исключением этой *области источника* V , токи проводимости отсутствуют, так что

$$\mathbf{j} = \begin{cases} \mathbf{j}^{\text{ст}} & \text{в } V, \\ 0 & \text{вне } V. \end{cases} \quad (43.1)$$

Пусть среда однородна (проницаемости ϵ и μ постоянны). Записывая при поставленных условиях векторное уравнение Даламбера (28.6), имеем ¹⁾

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = - \text{rot } \mathbf{j}^{\text{ст}}. \quad (43.2)$$

На основании (П5.25) можно было бы сразу выписать решение уравнения (43.2). Сейчас, однако, в первую очередь представляет интерес физическое содержание процесса излучения, и мы подойдем к вопросу с другой стороны.

¹⁾ О применении операции rot к заданной функции распределения тока $\mathbf{j}^{\text{ст}}(\mathbf{r})$ см. начало п.2 в § 22.

Обратимся к рис. 43.1, а, на котором схематически изображена область источника V с выделенной в ней точкой $P(\mathbf{r}')$ и лежащей на каком-то расстоянии (пусть вне V , что несущественно) точкой наблюдения $M(\mathbf{r})$. Предположим сначала, что временные изменения являются весьма медленными. Пусть они настолько медленны, что напряженность магнитного поля \mathbf{H} в точке $M(\mathbf{r})$ в произвольный момент времени t не отличается в пределах любой наперед заданной

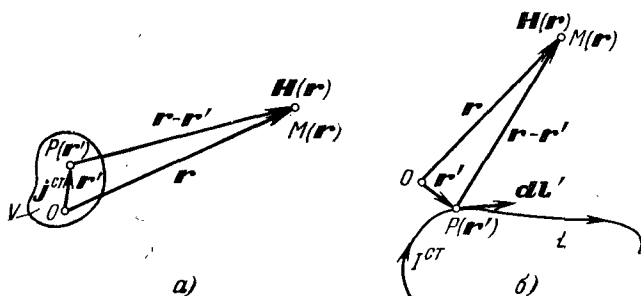


Рис. 43.1.

точности от напряженности стационарного магнитного поля при $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{ct}(t)$. Тогда \mathbf{H} определяется по формуле (22.6), выражающей решение уравнения (22.5), т. е.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' \mathbf{j}^{ct}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (43.3)$$

Очевидно, поле при этом следует назвать *квазистационарным* (§ 27).

Но чем выше скорость изменения стороннего тока, тем менее достоверным будет результат определения магнитного поля в фиксированной точке $M(\mathbf{r})$ по этой формуле. Это понятно: излучаемая в точке $P(\mathbf{r}')$ электромагнитная энергия не может мгновенно преодолеть расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, отделяющее $M(\mathbf{r})$ от $P(\mathbf{r}')$, и можно ожидать, что изменения в $M(\mathbf{r})$ будут запаздывать на время $\Delta t = = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$, потребное для распространения процесса (v — скорость распространения).

Допустим, что учет указанного обстоятельства сделает формулу (43.3) пригодной для определения \mathbf{H} в $M(\mathbf{r})$ при любых изменениях стороннего тока \mathbf{j}^{ct} в $P(\mathbf{r}')$. Точнее, будем считать, что для вычисления $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ надо лишь вместо $\text{rot}' \mathbf{j}^{ct}(\mathbf{r}', t)$ брать значение функции $\text{rot}' \mathbf{j}^{ct}$ в предшествующий момент времени $t - \Delta t$. Тогда достаточно ввести в (43.3) соответствующую поправку. Зная, что $t - \Delta t = = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$, напомним

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{rot}' \mathbf{j}^{ct}(\mathbf{r}') \Big|_{t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (43.4)$$

причем под v , согласно предыдущему (гл. 3), естественно понимать $1/\sqrt{\epsilon\mu}$.

Удивительно, что найденный путем столь простых рассуждений результат (43.4) дает, оказывается, строгое решение задачи. Чтобы убедиться в этом, возьмем формулу (П5.25). Сопоставляя (43.2) и (П5.21), видим, что (П5.25) является решением (43.2), если в качестве $f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)$ взять $-\text{rot } \mathbf{j}^{\text{CT}}$ как функцию от \mathbf{r}' и $t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}$. Что касается формы записи, то мы воздерживаемся от символа $\text{rot } \mathbf{j}^{\text{CT}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)$, потому что его можно истолковать как вихрь от $\mathbf{j}^{\text{CT}}\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)$, что не одно и то же¹⁾.

Если ток гармонически колеблется, т. е. $\mathbf{j}^{\text{CT}}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') \times \cos[\omega t + \varphi(\mathbf{r}')]]$, то удобно перейти к комплексному представлению $\mathbf{j}^{\text{CT}}(\mathbf{r}', t) = \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') e^{i\omega t}$, где $\mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') = \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') e^{i\varphi(\mathbf{r}')} -$ комплексная амплитуда. Далее

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{j}^{\text{CT}}(\mathbf{r}') \Big|_{t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}} &= [\text{rot } \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')] e^{i\omega\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)} = \\ &= e^{i(\omega t - k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)} \text{rot } \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$. Поэтому

$$\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{i(\omega t - k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)} \text{rot } \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'.$$

Выделяя и опуская множитель $e^{i\omega t}$, запишем выражение комплексной амплитуды напряженности магнитного поля:

$$\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \text{rot } \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \quad (43.5)$$

Это решение уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m + k^2 \dot{\mathbf{H}}_m = -\text{rot } \mathbf{j}_m^{\text{CT}}, \quad (43.6)$$

получаемого из (43.2) при использовании метода комплексных амплитуд. Разумеется, выражение (43.5) сразу же находится по формуле (П5.23) при замене $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')$ на $-\text{rot } \mathbf{j}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')$.

2. Разные виды решений. Все предыдущее рассмотрение преследовало единственную цель — осмыслить решения уравнений Даламбера и Гельмгольца для задачи об электромагнитном излучении; при этом была выбрана одна из возможных ее формулировок. Между тем при задании стороннего тока (43.1) вовсе не обязательно исходить из уравнения (43.2). В § 28 были выведены различные

¹⁾ Поскольку время запаздывания $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/v$ есть функция \mathbf{r}' , то оно различно для находящихся под знаком интеграла функций $\mathbf{j}^{\text{CT}}(\mathbf{r}')$ и $\text{rot } \mathbf{j}^{\text{CT}}(\mathbf{r}')$.

уравнения Даламбера (28.6), (28.7), (28.14) и (28.15), и их решения могут быть прямо выписаны на основании общих выражений (П5.25) и (П5.20). Так, при условии (43.1) решения уравнений Даламбера для потенциалов (28.14) и (28.15) имеют вид

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{j^{\text{CT}}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (43.7)$$

и

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho^{\text{CT}}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (43.8)$$

причем ρ^{CT} — плотность заряда, присутствующего только в области источника; ввиду (4.2) $\partial \rho^{\text{CT}} / \partial t = -\text{div } j^{\text{CT}}$. Говорят, что формулы (43.7) и (43.8) выражают «запаздывающие» потенциалы. Действительно, они могут быть прямо получены из (22.13) и (14.10) при введении времени запаздывания.

Обратимся теперь к уравнениям Гельмгольца из § 29, п. 4, которые были найдены при введении комплексных проницаемостей. При их помощи мы можем поставить задачу об излучении в поглощающей среде. Используя общую форму решения (П5.23), запишем решения уравнений (29.18) и (29.19):

$$\dot{H}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot}' j_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (43.9)$$

и

$$\dot{E}_m(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \int \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\text{grad div}' j_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') + k^2 j_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad (43.10)$$

а также уравнения для потенциалов (29.25) и (29.26):

$$\dot{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int \frac{j_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (43.11)$$

и

$$\dot{\Phi}_m(\mathbf{r}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \int \frac{e^{-ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div}' j_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (43.12)$$

Формула (43.9) дает обобщение решения (43.5), распространяющееся на поглощающие среды. Этот тип решения представляет особый интерес, так как он допускает преобразование, ведущее к простому выражению вектора \mathbf{H} поля излучения; ниже оно будет выполнено.

3. Преобразование решения и характер электромагнитного излучения. Поступим так же, как это делалось в § 22 при получении формулы (22.7) из (22.6). Изменяя вид подынтегрального выражения

(43.9) при помощи векторного тождества (П1.35), пишем

$$\dot{H}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_V \text{rot}' \frac{j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' - \int_V \left[\text{grad}' \frac{e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}') \right] dv' \right\}. \quad (43.13)$$

Первый интеграл на основании (П1.28) приводится к поверхностному:

$$\int_V \text{rot}' \frac{j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv' = - \oint_S \frac{e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}'), ds'].$$

Этот интеграл равен нулю, как и аналогичный поверхностный интеграл в § 22, п. 2. Во втором интеграле (43.13) ввиду (П1.11) и (П1.36)

$$\text{grad}' \frac{e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \mathbf{r}_{0q} \left(\frac{e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + i\mathbf{k} \frac{e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right),$$

где $\mathbf{r}_{0q} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. В результате из (43.13) находим

$$\dot{H}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{i\mathbf{k}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) [j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}] e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \quad (43.14)$$

Полученная форма решения дает сравнительно простой способ определения поля излучения при заданных источниках: выражая непосредственно комплексную амплитуду вектора \mathbf{H} , она не содержит операций дифференцирования под интегралом. Применение формулы (43.14) позднее будет продемонстрировано. Пока же для нас важно, что эта формула сама по себе дает некоторое представление о характере поля излучения.

Интеграл распадается на два слагаемых, и можно сказать, что поле состоит из двух определяемых ими компонент, которые с удалением от источника убывают по-разному. Перепишем (43.14) в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_m &= \dot{H}_m^{\text{б}} + \dot{H}_m^{\text{д}}, \\ \dot{H}_m^{\text{б}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}] e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} dv', \\ \dot{H}_m^{\text{д}} &= \frac{i\mathbf{k}}{4\pi} \int_V \frac{[j_m^{\text{ct}}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}] e^{-i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \end{aligned} \right\} \quad (43.14a)$$

Более быстро убывающая компонента $\dot{H}_m^{\text{б}}$ характеризует так называемое «ближнее» поле. Привлекая для сравнения формулу (22.7), видим, что ближнее поле по своему строению может быть похоже на поле стационарное. Для этого нужно, чтобы присутствующий под

интегралом множитель $e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ мало отличался от единицы. Пусть, в частности, поглощение отсутствует ($\dot{k} = k$). Тогда $e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx 1$ при $k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll 1$, т. е. при $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll \lambda$: расстояние от точки наблюдения $M(\mathbf{r})$ до любой точки источника $P(\mathbf{r}')$ должно быть мало в сравнении с длиной волны. Ясно, что такое же ограничение автоматически налагается и на размеры источника. Тогда ближнее поле *квазистационарно*.

Медленнее убывающая компонента $\dot{H}_m^{\text{д}}$ характеризует поле, называемое «дальним». При $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ (см. рис. 43.1, а) $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \rightarrow r$, поэтому при отсутствии поглощения ближнее поле асимптотически убывает, как $1/r^2$, а дальнее, как $1/r$:

$$\dot{H}_m^{\text{б}} = 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \text{ и } \dot{H}_m^{\text{д}} = 0\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } \dot{k} = k. \quad (43.15)$$

Ввиду (43.15)

$$\dot{H}_m \rightarrow \dot{H}_m^{\text{д}} \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (43.16)$$

Таким образом, поле излучения убывает с расстоянием от источника существенно *медленнее*, чем поле стационарное.

Очевидно, что по мере удаления от источника поле все более приближается к расходящейся сферической волне с радиальной зависимостью e^{-ikr}/r , и решение (43.9), (43.14) удовлетворяет условию излучения (П5.24), которое в данном случае имеет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial \dot{H}_m(r)}{\partial r} + ik \dot{H}_m(r) \right] = 0. \quad (43.17)$$

Поскольку при поглощении поле убывает быстрее, чем $1/r$, то решение удовлетворяет также условию единственности, сформулированному в § 31, п. 2.

4. Излучение линейных токов. Если сторонний ток есть идеальный линейный ток (§ 23, п. 1), т. е.

$$\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}(\mathbf{r}) = \tau_0 \dot{I}_m^{\text{ст}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (43.18)$$

(рис. 43.1, б), то некоторые из формул, полученных выше в пп. 2, 3, можно легко упростить. Так, вместо (43.14) имеем

$$\dot{H}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_L \dot{I}_m^{\text{ст}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{ik}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [d\mathbf{l}', \mathbf{r}_{0q}], \quad (43.19)$$

а вместо (43.11)

$$\dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_L \dot{I}_m^{\text{ст}} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{l}'. \quad (43.20)$$

Вывод этих выражений ничем не отличается от вывода формул (23.2) и (23.3). Величина $\dot{I}_m^{\text{ст}}$ не вынесена за знак интеграла, так как, в отличие от постоянного тока (§ 23), $\dot{I}_m^{\text{ст}}$ может изменяться вдоль L .

§ 44. Элементарный электрический излучатель и линейный вибратор

1. **Элемент тока и диполь Герца.** Полученные выше формулы позволяют находить поле излучения при любых заданных распределениях стороннего тока. Начнем с рассмотрения простейшего случая, представляющего, однако, большой принципиальный интерес — возьмем малый элемент линейного тока.

«Открытый» элемент постоянного тока, конечно, немислим, но мы рассматриваем ток переменный, который, как легко убедиться, может поддерживаться колеблющимися зарядами на концах отрезка (рис. 44.1, а). Если в некоторый момент оба заряда — противоположные по знаку — равны по абсолютной величине, то такое равенство сохранится и в дальнейшем. Пусть, например, условный

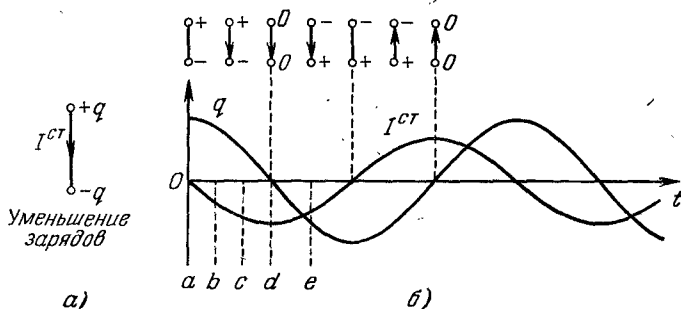


Рис. 44.1.

положительный заряд перетекает на отрицательно заряженный конец. Уменьшение заряда по абсолютной величине происходит при этом на обоих концах и в одинаковой мере: на одном из-за потери заряда, а на другом — в результате нейтрализации. Наконец, ток разрядит оба конца, а затем (не изменяя направления) перезарядит их противоположно. Когда же все движущиеся заряды «израсходованы», и абсолютные значения зарядов на концах достигли максимума, ток, снизившись до нуля, меняет направление и т. д. Этот циклический процесс поясняется графиком на рис. 44.1, б. Отрезку переменного тока, таким образом, соответствует *колеблющийся диполь*.

В справедливости сделанного описания можно убедиться при помощи закона сохранения заряда в форме (29.13). Поместив элемент тока на оси z декартовой системы координат рис. 44.2, а, мы должны записать уравнение (29.13) в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{z}_0 \dot{j}_m^{\text{ct}} = -i\omega \dot{\rho}_m^{\text{ct}}, \quad (44.1)$$

или

$$\frac{d \dot{j}_m^{\text{ct}}}{dz} = -i\omega \dot{\rho}_m^{\text{ct}}. \quad (44.1a)$$

Приписывая отрезку l некоторую толщину, т. е. фактически заменяя его проводящим стержнем поперечного сечения S , как угодно тонким, имеем

$$j_m^{\text{ст}} S = I_m^{\text{ст}} \quad \text{и} \quad \rho_m^{\text{ст}} S \Delta z = \dot{q}_m^{\text{ст}},$$

где $I_m^{\text{ст}}$ — комплексная амплитуда стороннего тока, проходящего вдоль оси z , а $\dot{q}_m^{\text{ст}}$ — комплексная амплитуда соответствующего ему заряда на малом элементе Δz . Умножая левую и правую части (44.1а) на $S \Delta z$, таким образом, получаем

$$\Delta I_m^{\text{ст}} = -i\omega \dot{q}_m^{\text{ст}}, \quad (44.2)$$

понимая под $\Delta I_m^{\text{ст}}$ изменение величины $I_m^{\text{ст}}$ на элементарном участке Δz . Если амплитуда $I_m^{\text{ст}}$ постоянна на всем отрезке l , как это показано на рис. 44.2, б, то изменения ее имеют место лишь на концах

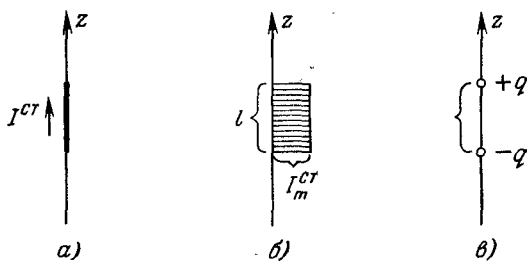


Рис. 44.2.

его, причем $\Delta I_m^{\text{ст}} = \pm I_m^{\text{ст}}$ от нуля до $I_m^{\text{ст}}$ и от $I_m^{\text{ст}}$ до нуля. При этом, как следует из (44.2), $\dot{q}_m^{\text{ст}} = 0$ на всем отрезке l , за исключением концов, на которых сосредоточены равные по абсолютной величине и противоположные по знаку колеблющиеся заряды с комплексными амплитудами

$$\dot{q}_m^{\text{ст}} = \mp i \frac{I_m^{\text{ст}}}{\omega}. \quad (44.3)$$

Эти заряды и образуют диполь (рис. 44.2, в), соответствующий элементу переменного тока. Отметим, что, согласно (44.3), заряды и ток сдвинуты по фазе на 90° , как это показано на рис. 44.1, б. Введем в рассмотрение момент диполя $\mathbf{p} = \mathbf{z} q l$ (§ 15, п. 4), который, как и заряды, колеблется с круговой частотой ω ; его комплексная амплитуда равна

$$\dot{\mathbf{p}}_m = -i \frac{I_m^{\text{ст}} l}{\omega} \mathbf{z}_0. \quad (44.4)$$

Итак, элемент переменного тока, амплитуда которого неизменна, существует при наличии колеблющегося диполя, называемого обычно *диполем Герца*, а также *элементарным электрическим излучателем*.

2. Решение задачи об элементарном излучателе. Найдем электромагнитное поле, источником которого является диполь Герца. Прямолинейный отрезок l с током расположим в сферической системе координат (рис. 44.3, а). При этом на основании формулы (43.19), где в данном случае $d\mathbf{l}' = z_0 dz$, имеем

$$\dot{\mathbf{H}}_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I_m^{ct} \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{ik}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [z_0, \mathbf{r}_{0q}] dz. \quad (44.5)$$

Ввиду малости элемента тока вычисление $\dot{\mathbf{H}}_m$ сводится к очень простым действиям: чем меньше l в сравнении с расстоянием наблюдения и длиной волны, тем с большим основанием подынтегральное выражение можно считать постоянным. Действительно, при

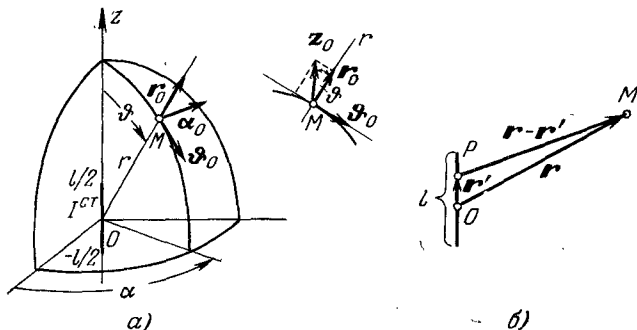


Рис. 44.3.

$l \ll r$ имеем: $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$ и $[z_0, \mathbf{r}_{0q}] \approx [z_0, \mathbf{r}_0] = \alpha_0 \sin \vartheta$, а при $l \ll \lambda$: $e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{-ikr}$. Последнее нуждается в некотором пояснении. Как видно из рис. 44.3, б), $|\mathbf{r} - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|| < l/2$, так что при отсутствии поглощения ($\dot{k} = k = 2\pi/\lambda$) $|\dot{k}r - \dot{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|| < \pi \frac{l}{\lambda}$. Отсюда и вытекает аппроксимация; она сохраняет силу и при поглощении, когда $\lambda = 2\pi/k'$.

С учетом этих замечаний из (44.5) получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_m \approx \alpha_0 \frac{j_m^{ct} l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \sin \vartheta. \quad (44.6)$$

Результат найден. Однако, прежде чем использовать его для полного определения поля излучения, введем в рассмотрение объект, для которого формула (44.6) является точной при любых r . Это *идеальный диполь Герца*, «дипольная точка» (ср. § 15, п. 4), получаемая при $l \rightarrow 0$ с сохранением момента \mathbf{p} , что, согласно (44.4), означает постоянство произведения $I_m^{ct} l$. Привлекая (44.4), из (44.6) находим

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \alpha_0 \frac{\dot{\mathbf{p}}_m \omega}{4\pi} \left(\frac{i}{r^2} - \frac{\dot{k}}{r} \right) e^{-ikr} \sin \vartheta \quad (l \rightarrow 0, \dot{\mathbf{p}}_m = \text{const}). \quad (44.7)$$

Желая, далее, найти комплексную амплитуду напряженности электрического поля идеального диполя Герца, будем исходить из первого уравнения Максвелла. Согласно (29.11а) везде вне дипольной точки $\mathbf{E}_m = \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m$. Внося сюда $\dot{\mathbf{H}}_m$ из (44.7), при помощи формулы (П1.23) вычисляем

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{\dot{p}_m}{4\pi\epsilon} \left[r_0 \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + ik \right) \cos \vartheta + \vartheta_0 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} - k^2 \right) \sin \vartheta \right] e^{-ikr}. \quad (44.8)$$

Равенства (44.7) и (44.8) полностью описывают поле излучения в виде комплексных амплитуд векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} ; ниже в п. 3 оно будет исследоваться. Пока же отметим, что вместо прямого определения из (43.19) можно было сначала воспользоваться формулой (43.20)

$$\dot{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r}) = \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \dot{j}_m^{\text{ст}} \frac{e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} \mathbf{z}_0 dz. \quad (44.9)$$

Отсюда для идеального диполя Герца ($l \rightarrow 0$, $\dot{p}_m = \frac{-ij_m^{\text{ст}} l}{\omega} = \text{const}$)

$$\dot{\mathbf{A}}_m = \mathbf{z}_0 \frac{i\omega\dot{p}_m}{4\pi r} e^{-ikr} = (r_0 \cos \vartheta - \vartheta_0 \sin \vartheta) \frac{i\omega\dot{p}_m}{4\pi r} e^{-ikr} \quad (44.10)$$

(рис. 44.3, а), и выражение (44.7) находится в результате применения формулы $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mu}^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_m$ (29.22).

3. Свойства поля излучения. Начнем с того, что выпишем следующие из (44.7) и (44.8) выражения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} взяв среду поглощающей ($\dot{k} = k$) и положив $\dot{p}_m = p_m e^{i\varphi}$. В результате

$$\mathbf{E} = \frac{p_m k^2}{4\pi\epsilon r} \left\{ r_0 2 \left[\frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr + \varphi) - \sin(\omega t - kr + \varphi) \right] \frac{1}{kr} \cos \vartheta + \right. \\ \left. + \vartheta_0 \left[\left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \cos(\omega t - kr + \varphi) - \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr + \varphi) \right] \sin \vartheta \right\} \quad (44.11a)$$

и

$$\mathbf{H} = -\alpha_0 \frac{p_m \omega}{4\pi} \frac{k}{r} \left[\frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr + \varphi) + \cos(\omega t - kr + \varphi) \right] \sin \vartheta. \quad (44.11b)$$

В этой записи слагаемые в скобках сделаны безразмерными.

Как видно, поле элементарного электрического излучателя имеет характер *неоднородной сферической волны*. Действительно, на поверхности любой координатной сферы $r = \text{const}$ фаза каждой из компонент векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} постоянна, а амплитуда изменяется в зависимости от угла ϑ . От α поле не зависит, оно азимутально однородно, как и должно быть при данной симметрии источника. Магнитные силовые линии образуют концентрические окружности в плоскостях, перпендикулярных току ($z = \text{const}$), а электрические силовые линии лежат в меридиональных плоскостях ($\alpha = \text{const}$). Обозначив $k = 2\pi/\lambda$ мы не можем, однако, рассматривать λ в качестве длины волны. Этот параметр не только не является «пространственным периодом» в силу ослабления поля с расстоянием, но и не

соответствует изменению фазы на 360° . При переходе от точки $M(r, \vartheta, \alpha)$ к удаленной на λ точке $M'(r + \lambda, \vartheta, \alpha)$ приращение фазы зависит от r и различно для разных компонент поля. Итак, поле излучения сравнительно сложно. Но отдельные слагаемые в формулах (44.11a), (44.11б) не равноценны для полей на разных расстояниях от излучателя. Это значительно облегчает дальнейшее исследование.

Рассмотрим сначала поле в так называемой «ближней зоне» излучателя, т. е. на расстояниях $r \ll \lambda^1$. Поскольку при этом $kr \ll \ll 1$, то формулы (44.11a), (44.11б) можно заменить простыми приближенными соотношениями, отбросив в квадратных скобках малые члены; пренебрегая также фазовым сдвигом kr , получаем при $r \ll \lambda$

$$\mathbf{E} \approx \frac{p}{4\pi\epsilon r^3} (r_0^2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta), \quad \mathbf{H} \approx \alpha_0 \frac{I_m^{\text{ст}} l}{4\pi r^2} \sin \vartheta, \quad (44.12)$$

где $p = p_m \cos(\omega t + \varphi)$ и $I_m^{\text{ст}} = -I_m^{\text{ст}} \sin(\omega t + \varphi)$ ($p_m = I_m^{\text{ст}} l / \omega$).

Поле, определяемое этой записью, не имеет волнового характера. Сопоставляя (44.12) с (15.13) и (23.2a), видим, что распределение в пространстве электрического поля в любой момент t оказывается таким же, как в случае электростатического диполя, а распределение магнитного поля подчиняется закону Био — Савара, справедливому для стационарного магнитного поля. Таким образом, как и следовало ожидать, в ближней зоне преобладает *квазистационарное* электромагнитное поле (ср. § 43, п. 3). Из (44.12) следует, что в ближней зоне векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты по фазе почти на 90° . Приняв формулы (44.12) за точные, мы пришли бы к выводу, что излучение отсутствует, так как равен нулю средний вектор Пойнтинга $\bar{\mathbf{P}}$ (30.7): комплексный вектор Пойнтинга $\dot{\mathbf{P}}$ — величина чисто мнимая. Это соответствует колебательному движению энергии около источника. В действительности такое движение в ближней зоне преобладает.

Возьмем теперь «дальнюю зону», т. е. будем рассматривать поле на расстояниях $r \gg \lambda$; при этом $kr \gg 1$. Отбросив в (44.11a), (44.11б) пренебрежимо малые члены, находим при $r \gg \lambda$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\approx -\vartheta_0 \frac{p_m k^2}{4\pi\epsilon} \frac{\sin \vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi), \\ \mathbf{H} &\approx -\alpha_0 \frac{p_m k^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{W} \frac{\sin \vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi) \end{aligned} \quad (44.13)$$

($W = \sqrt{\mu/\epsilon}$). Это «дальнее поле» (§ 43, п. 3) представляет собой довольно простую сферическую неоднородную волну, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} которой, как и в случае плоской однородной волны (§ 32), перпендикулярны направлению распространения, взаимно перпендикулярны и находятся в одной фазе. Для дальнего поля $\lambda = 2\pi/k$ является

¹⁾ Если рассматривается не идеальный диполь Герца, а конечный элемент тока, то, применяя формулы (44.11), надо следить также за выполнением условия $r \gg l$.

длиной волны, поскольку по r на этом расстоянии фаза изменяется на 360° . Отношение амплитуд E_m и H_m , как и для плоской однородной волны, равно $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Все сказанное означает, что сферическая волна диполя Герца локально превращается в известную плоскую (§ 32).

4. Характеристики излучения. Комплексный вектор Пойнтинга в дальней зоне направлен радиально и не имеет мнимой части; согласно (44.13) средняя плотность потока энергии, переносимой при излучении, равна

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = r_0 \frac{\rho_m^2 k^4}{32\pi^2 \epsilon^2 W} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \quad (44.14)$$

(рис. 44.4, а). Выражение является точным, в чем легко убедиться, взяв \dot{E}_m и \dot{H}_m в виде (44.7), (44.8) (при $\dot{k} = k$). Что касается мнимой

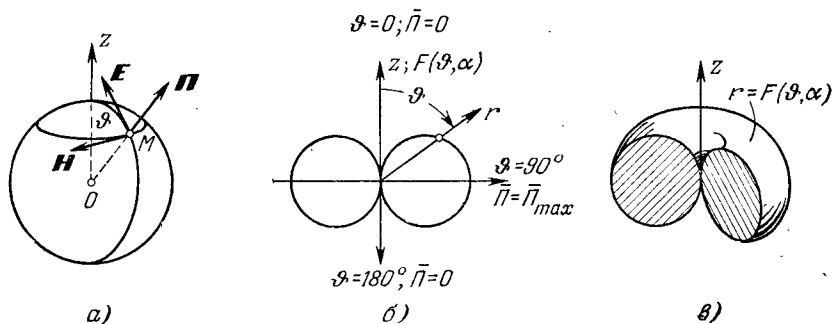


Рис. 44.4.

компоненты $\dot{\Pi}$, то она вообще имеет не только радиальную, но и поперечную составляющую ($\dot{\Pi}_\vartheta$); колебательное движение энергии происходит в меридиональных плоскостях.

Как следует из (44.14), излучение максимально в экваториальной плоскости ($\vartheta = 90^\circ$) и отсутствует в осевых направлениях ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = 180^\circ$). Функция

$$F(\vartheta, \alpha) = \sqrt{\bar{\Pi}(\vartheta)} / \sqrt{\bar{\Pi}(90^\circ)} = |\sin \vartheta| \quad (44.15)$$

дает представление о распределении излучения в пространстве; это не что иное, как нормированная характеристика направленности (41.5). График $F(\vartheta, \alpha)$ — диаграмма направленности — для любой меридиональной плоскости имеет вид двух соприкасающихся окружностей (рис. 44.4, б). Еще нагляднее объемная диаграмма направленности, т. е. поверхность $r = F(\vartheta, \alpha)$; это поверхность тора (рис. 44.4, в).

Вычислим полную среднюю мощность излучения P^Σ . Составляя поток усредненного по времени вектора Пойнтинга через какую-

либо координатную сферическую поверхность, охватывающую элементарный электрический излучатель, имеем

$$\bar{P}_{\Sigma} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\Pi} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\alpha. \quad (44.16)$$

Внося сюда $\bar{\Pi}$ (44.14), имеем

$$\bar{P}_{\Sigma} = \frac{p_m^2 k^4}{16\pi\epsilon^2 W} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta,$$

и, принимая во внимание, что $\int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}$, находим

$$\bar{P}_{\Sigma} = \frac{4\pi^3}{3} p_m^2 \frac{W}{\epsilon\mu} \frac{1}{\lambda^4}, \quad (44.17)$$

или

$$\bar{P}_{\Sigma} = \frac{\pi}{3} (I_m^{ct})^2 W \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \quad (44.17a)$$

Таким образом, излучение малого элемента тока ($I_m^{ct} = \text{const}$) резко возрастает при ослаблении условия квазистационарности $l \ll \lambda$. Часто выражение излучаемой мощности переписывают в форме закона Джоуля — Ленца

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} (I_m^{ct})^2 \mathcal{R}_{\Sigma}, \quad \mathcal{R}_{\Sigma} = \frac{2\pi W}{3} \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2, \quad (44.18)$$

называя \mathcal{R}_{Σ} — сопротивлением излучения.

Из (44.14) и (44.17) следует, что

$$\bar{\Pi}_{\max} = \bar{\Pi}(90^\circ) = \frac{3\bar{P}_{\Sigma}}{8\pi r^2}. \quad (44.19)$$

Гипотетический изотропный излучатель (§ 41, п. 1) при той же мощности создает поток энергии с плотностью $\bar{\Pi}^0 = \bar{P}_{\Sigma}/4\pi r^2$, т. е. в полтора раза меньше. Поэтому максимальный коэффициент направленности действия элементарного электрического излучателя равен 3/2:

$$D_{\max} = D(90^\circ) = \frac{\bar{\Pi}(90^\circ)}{\bar{\Pi}^0} = \frac{3}{2}. \quad (44.20)$$

5. Заключение. Линейный вибратор. Созданный Генрихом Герцем первый искусственный излучатель электромагнитных волн фактически был реализацией элементарного электрического излучателя. На рис. 44.5, а показано его изображение, а на рис. 44.5, б — схема включения: шаровые емкости на концах проводников перезаряжались быстропеременным током, возбуждавшимся во вторичной

цепи индукционной катушки; промежуток между малыми шарами замыкался при этом искровым разрядом. Герцем была построена и теория излучения, использующая представление о колеблющемся

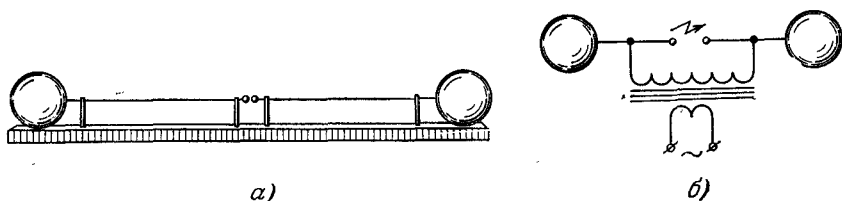


Рис. 44.5.

диполе. Он получил картину электрических силовых линий развивающегося электромагнитного поля элементарного излучателя, которая ниже приведена на рис. 44.6, a^1).

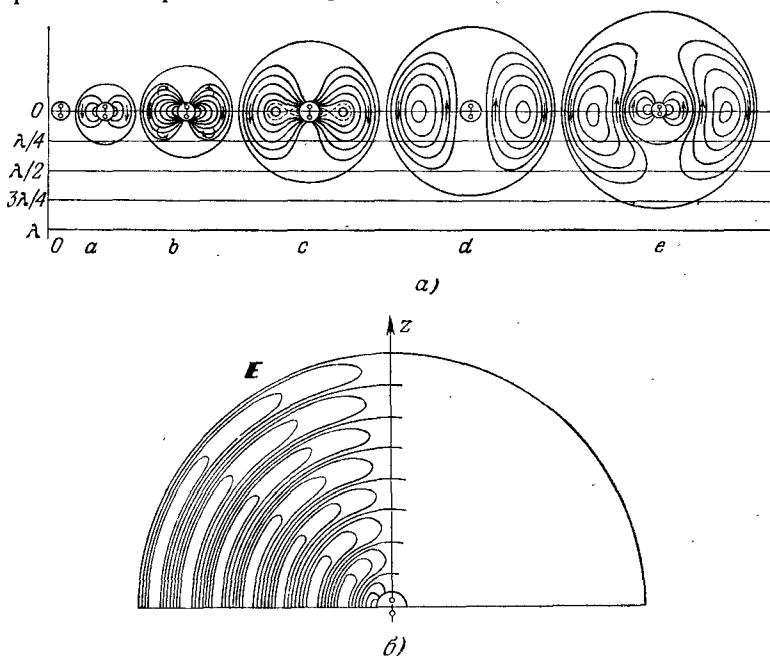


Рис. 44.6.

Рассматривая рис. 44.6, a , надо иметь в виду, что в сущности речь идет об установившемся процессе при гармонических колебаниях заряда и тока, показанных на рис. 44.1, b . При этом поле, описываемое формулами (44.11а), (44.11б), существует во всем про-

¹⁾ Читателю рекомендуется посвященное Герцу историческое исследование [3.2], откуда заимствованы рис. 44.5, a и 44.6, a .

странстве, и построенная картина иллюстрирует лишь процесс в относительной близости от излучателя. В некоторый момент a (см. также рис. 44.1, б, где буквами отмечены фазы колебаний) электрическое поле вблизи излучателя в радиусе порядка $\lambda/4$ весьма похоже на поле электростатического диполя. Электрические силовые линии раздвигаются вширь (моменты b и c) и деформируются таким образом, что в некоторый момент происходит их отрыв от источников и замыкание на себя. Замкнутые электрические силовые линии мы наблюдаем в момент d . Не удивительно: при этом колеблющиеся заряды проходят через нулевое значение и линии не могут иметь начало и конец. Момент e вполне аналогичен моменту a , произошла «переполюсовка» зарядов. Но на рисунке теперь показано и поле на расстояниях $r > \lambda/4$ — результат описанного процесса. Так формируется сферическая волна элементарного излучателя. Электрическое поле в более обширной области пространства изображено на рис. 44.6, б. Магнитное поле, не обозначенное силовыми линиями на рис. 44.6, а и рис. 44.6, б, является более простым. Начиная с некоторого расстояния, сгущения магнитных силовых линий, представляющих собой концентрические окружности в плоскостях, перпендикулярных оси диполя, совпадают со сгущениями электрических силовых линий, перемещаясь в радиальных направлениях.

В дальнейшей зоне устанавливается распределение поля по углу ϑ . Чтобы оценить точность выражений (44.13), составим отношение H_m^A/H_m^G (§ 43, п. 3). Как следует из (44.11б)

$$\frac{H_m^A}{H_m^G} = kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}, \quad (44.21)$$

т. е., например, на расстоянии r около 16λ это отношение равно 100. На таком удалении от источника фактически уже сложилась сферическая волна, комплексные амплитуды которой зависят от координат, как $e^{-ikr} \sin \vartheta/r$.

Малые в сравнении с длиной волны антенны, напоминающие элементарный электрический излучатель, применяются и в настоящее время.

Антенна, называемая симметричным линейным вибратором, состоит из двух питаемых посередине проводящих стержней, на которых устанавливается стоячая волна тока (рис. 44.7, а)

$$i_m^{\text{ст}} = \begin{cases} \hat{I}_m \sin k \left(\frac{l}{2} + z \right), & z < 0, \\ \hat{I}_m \sin k \left(\frac{l}{2} - z \right), & z > 0. \end{cases} \quad (44.22)$$

Точнее говоря, действительное распределение тока обычно бывает близким к описываемому этой формулой. В зависимости от длины вибратора l распределение тока принимает различные формы,

показанные на рис. 44.7, б. Правда, в большинстве случаев применяются не малые в сравнении с длиной волны вибраторы, например полуволновые ($l = \lambda/2$).

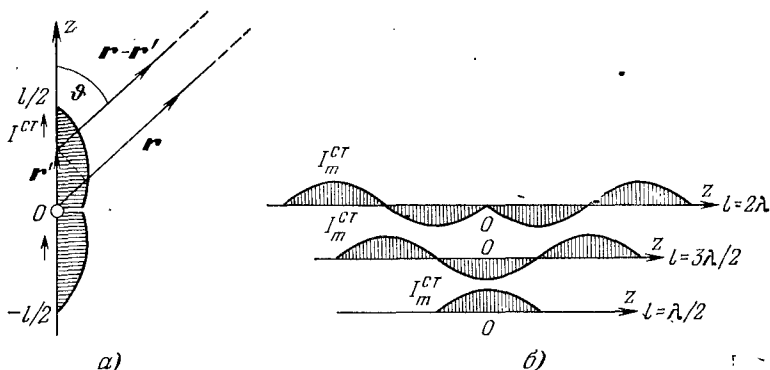


Рис. 44.7.

Найдем далее поле линейного вибратора в непоглощающей среде, используя выражение (44.5), на основании которого

$$\dot{H}_m^A = \frac{ik}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I_m^{CT} \frac{[z_0, r_{0q}] e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} dz. \quad (44.23)$$

Внося сюда функцию распределения тока (44.2) и полагая $\frac{1}{|r-r'|} = \frac{1}{r}$, а также (см. рис. 44.7, а)

$$e^{-ik|r-r'|} = e^{-ik(r-z \cos \theta)},$$

имеем

$$\dot{H}_m^A \approx \alpha_0 \frac{ik \dot{I}_m \sin \theta}{4\pi r} e^{-ikr} \left[\int_{-l/2}^0 \sin k \left(\frac{l}{2} + z \right) e^{ikz \cos \theta} dz + \int_0^{l/2} \sin k \left(\frac{l}{2} - z \right) e^{ikz \cos \theta} dz \right] \quad (44.24)$$

(строгое равенство получается при $r \rightarrow \infty$). В результате интегрирования находим

$$\dot{H}_m^A \approx \alpha_0 \frac{i \dot{I}_m}{2\pi r} e^{-ikr} \frac{\cos \left(\frac{kl}{2} \cos \theta \right) - \cos \frac{kl}{2}}{\sin \theta}. \quad (44.25)$$

Дальнее поле представляет собой сферическую неоднородную волну с такой же радиальной зависимостью, как и в случае элемен-

тарного излучателя. Поэтому $\dot{E}_m^{\text{д}} = \Phi_0 W \dot{H}_m^{\text{д}}$, в чем легко убедиться, взяв первое уравнение Максвелла. Что касается углового распределения излучения, то с ростом длины вибратора l оно становится

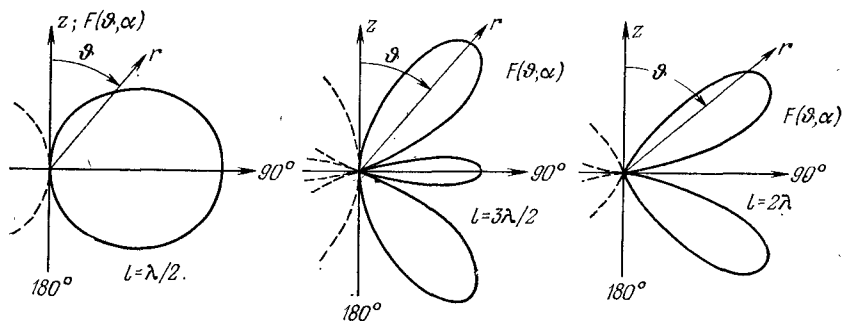


Рис. 44.8.

все более сложным. Это показывает приведенные на рис. 44.8 диаграммы направленности для разных l .

§ 45. Элементарный магнитный излучатель

1. Постановка задачи и определение векторного потенциала.

В качестве другого примера распределения стороннего тока рассмотрим круглый замкнутый контур радиуса a ; на рис. 45.1, a он изображен в сферической системе координат. Подобный контур постоянного тока исследовался в § 23, п. 3, где было установлено,

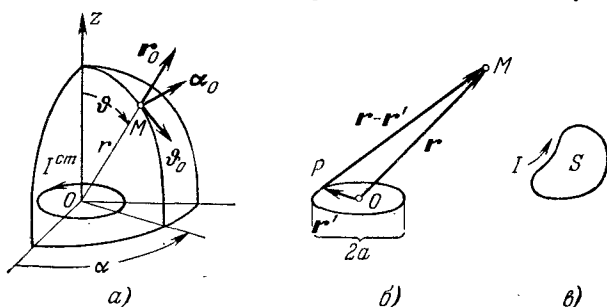


Рис. 45.1.

что в пределе при $a/r \rightarrow 0$ ($a^2 I = \text{const}$) он превращается в идеальный магнитный диполь с моментом $m = z_0 \mu I S$ ($S = \pi a^2$, z_0 — орт положительной нормали к площадке витка). Поэтому есть основание полагать, что при гармонических колебаниях тока такой контур будет подобен колеблющемуся магнитному диполю, и мы получим *элементарный магнитный излучатель*.

Вместо непосредственного определения поля найдем сначала векторный потенциал, применяя формулу (43.20), которая ввиду

постоянства $I_m^{\text{сг}}$ принимает вид

$$\dot{A}_m(\mathbf{r}) = \frac{\dot{\mu} I_m^{\text{сг}}}{4\pi} \int_L \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dl'. \quad (45.1)$$

Выражения величин dl и $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ в сферической системе координат для данной конфигурации (см. рис. 45.1) известны из § 23, п. 3 (рис. 23.2): $dl' = (-\alpha_0 \cos \alpha + R_0 \sin \alpha) a d\alpha$, $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 = r^2 + a^2 + 2ra \sin \vartheta \cos \alpha$. При интегрировании лишь азимутальная компонента $\alpha_0 a \cos \alpha d\alpha$ дифференциала $d\mathbf{l}'$ даст отличный от нуля вклад (см. вывод формулы (23.6)). Поэтому

$$\dot{A}_m(\mathbf{r}) = -\alpha_0 \frac{\dot{\mu} I_m^{\text{сг}}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \cos \alpha e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\alpha. \quad (45.2)$$

Отмечая, что $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - r = (r^2 + a^2 + 2ra \sin \vartheta \cos \alpha)^{1/2} - r = a \sin \vartheta \cos \alpha + O(a^2)$, запишем:

$$a \cos \alpha \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = a \cos \alpha \left[\frac{e^{-ikr}}{r} + \frac{d}{dr} \frac{e^{-ikr}}{r} a \sin \vartheta \cos \alpha + O(a^2) \right] = \\ = \frac{e^{-ikr}}{r} \cos \alpha \left[a - \left(\frac{1}{r} + ik \right) a^2 \sin \vartheta \cos \alpha + O(a^3) \right].$$

Будем рассматривать исчезающе малый контур ($a \rightarrow 0$) при $I_m^{\text{сг}} a^2 = \text{const}$, т. е. — с учётом выполненных преобразований — будем искать \dot{A}_m как предел

$$\dot{A}_m(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ I_m^{\text{сг}} a^2 = \text{const}}} \alpha_0 \frac{-\dot{\mu} I_m^{\text{сг}}}{4\pi r} e^{-ikr} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \left[a - \left(\frac{1}{r} + ik \right) a^2 \sin \vartheta \cos \alpha + O(a^3) \right] \cos \alpha d\alpha.$$

Это дает

$$\dot{A}_m(\mathbf{r}) = \alpha_0 \frac{\dot{\mu} I_m^{\text{сг}} a^2}{4} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \sin \vartheta. \quad (45.3)$$

При $k \rightarrow 0$ (т. е. $\omega \rightarrow 0$) формула (45.3) приводит к результату (23.7), полученному ранее в случае постоянного тока.

Придадим, наконец, выражению \dot{A}_m (45.3) следующую форму:

$$\dot{A}_m(\mathbf{r}) = \alpha_0 \frac{\dot{m}_m}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r} \right) e^{-ikr} \sin \vartheta, \quad (45.4)$$

где $\dot{m}_m = \dot{\mu} I_m^{\text{сг}} \pi a^2$. Действительно, величину

$$\dot{m}_m = z_0 \dot{\mu} I_m^{\text{сг}} S \quad (S = \pi a^2) \quad (45.5)$$

естественно считать комплексной амплитудой магнитного момента контура $\mathbf{m} = \mathbf{m}_m \cos(\omega t + \varphi)$, испытывающего гармонические колебания вместе с током $I^{\text{сг}}$.

Поставим вопрос, при каких условиях выражение векторного потенциала (45.3), являющееся точным в пределе, можно использовать как приближенное. Во-первых, расстояние до точки наблюдения должно быть большим в сравнении с размерами контура a ($r \gg a$). Но этого еще недостаточно, так как при разложении $e^{-i\dot{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ в ряд Тэйлора существенна близость $e^{-i\dot{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ к $e^{-i\dot{k}r}$. При $\dot{k} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ имеем: $|\dot{k}r - k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|| < 2\pi a/\lambda$ (рис. 45.1, б).

Таким образом, требуется еще условие квазистационарности контура $a \ll \lambda$. Нетрудно увидеть здесь полное сходство с требованиями, сформулированными в § 44 для элементарного электрического излучателя.

2. Определение поля излучения. Зная $\dot{\mathbf{A}}_m$, найдем теперь на основании (29.22) комплексную амплитуду напряженности магнитного поля. Используя формулу (П1.23), получаем

$$\dot{\mathbf{H}}_m = \frac{\dot{m}_m}{4\pi\mu} \left[r_0 \frac{2}{r^2} \left(\frac{1}{r} + i\dot{k} \right) \cos \vartheta + \vartheta_0 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\dot{k}}{r} - k^2 \right) \sin \vartheta \right] e^{-i\dot{k}r}. \quad (45.6)$$

Как и в случае элементарного электрического излучателя, примем во внимание, что вне источника $\dot{\mathbf{E}}_m = \frac{1}{i\omega\epsilon} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m$. Отсюда при помощи (П1.23) вычисляем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\alpha_0 \frac{\dot{m}_m \omega}{4\pi} \left(\frac{i}{r^2} - \frac{\dot{k}}{r} \right) e^{-i\dot{k}r} \sin \vartheta. \quad (45.7)$$

Как и в § 44, выпишем теперь выражение напряженностей поля $\mathbf{E} = \text{Re } \dot{\mathbf{E}}_m e^{i\omega t}$ и $\mathbf{H} = \text{Re } \dot{\mathbf{H}}_m e^{i\omega t}$ при отсутствии поглощения ($\dot{k} = k$)

$$\mathbf{E} = \alpha_0 \frac{m_m \omega}{4\pi} \frac{k}{r} \left[\frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr + \varphi) + \cos(\omega t - kr + \varphi) \right] \sin \vartheta, \quad (45.8a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{m_m}{4\pi\mu} \frac{k^2}{r} \left\{ r_0 2 \left[\frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr + \varphi) - \sin(\omega t - kr + \varphi) \right] \frac{1}{kr} \cos \vartheta + \right. \\ & \left. + \vartheta_0 \left[\left(\frac{1}{k^2 r^2} - 1 \right) \cos(\omega t - kr + \varphi) - \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr + \varphi) \right] \sin \vartheta \right\} \quad (45.8b) \\ & (\dot{m}_m = m_m e^{i\varphi}). \end{aligned}$$

3. Свойства элементарного магнитного излучателя. Сопоставление полученных выше результатов с соответствующими формулами из § 44 показывает, что строение электромагнитного поля в определенном смысле повторяет уже известную картину, но электрическое и магнитное поле как бы меняются ролями. Так, в частности, в ближней зоне ($r \ll \lambda$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} & \approx \alpha_0 \frac{m_m \omega}{4\pi r^2} \sin \vartheta \sin(\omega t + \varphi), \\ \mathbf{H} & \approx \frac{m_m}{4\pi\mu r^3} (r_0 2 \cos \vartheta + \vartheta_0 \sin \vartheta) \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (45.9)$$

В дальней зоне ($r \gg \lambda$)

$$\mathbf{E} \approx \alpha_0 \frac{m_m k^2}{4\pi\mu} W \frac{\sin \vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi), \quad (45.10)$$

$$\mathbf{H} \approx -\vartheta_0 \frac{m_m k^2}{4\pi\mu} \frac{\sin \vartheta}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi).$$

Как и в случае элементарного электрического излучателя, в ближней зоне преобладает квазистационарное электромагнитное поле, в среднем не переносящее энергии (векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты на 90° по фазе). При этом строение магнитного поля таково, как если бы оно создавалось магнитостатическим диполем с моментом \mathbf{m} . Что касается поля электрического, то его характер будет вполне понятен после введения концепции магнитного тока в § 46.

Относительно электромагнитного поля в дальней зоне можно повторить почти все из того, что говорилось о поле элементарного электрического излучателя. Однако сферическая волна дальней зоны, локально рассматриваемая как плоская, будет иметь иную поляризацию по отношению к оси диполя.

Вычисляя среднюю плотность потока энергии, имеем

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m \cdot \dot{\mathbf{H}}_m^*] = r_0 \frac{m_m^2 k^4 W \sin^2 \vartheta}{32\pi^2 \mu^2 r^2} \quad (45.11)$$

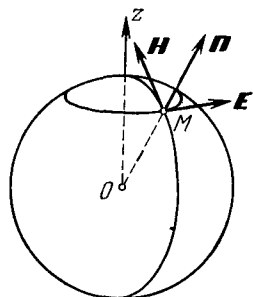


Рис. 45.2.

(рис. 45.2), ср. (47.14). Излучение распределено в пространстве совершенно так же, как и в случае элементарного электрического излучателя.

Формула (44.15) для характеристики направленности и диаграммы направленности на рис. 44.4, б, в сохраняют силу. По-прежнему также $D_{\max} = D(90^\circ) = 3/2$.

Полная средняя мощность излучения \bar{P}_Σ , вычисляемая как поток вектора $\bar{\Pi}$ (45.11) через координатную сферическую поверхность, равна

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{4\pi^3}{3} m_m^2 \frac{1}{\epsilon\mu} \frac{1}{W \lambda^4}, \quad (45.12)$$

ср. (44.18), или с учетом (45.5)

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{4\pi^3}{3} (I_m^{\text{ср}})^2 W \frac{S^2}{\lambda^4}. \quad (45.12a)$$

Переписывая (45.12a) в форме закона Джоуля — Ленца, получаем

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{1}{2} (I_m^{\text{ср}})^2 \mathcal{R}_\Sigma, \quad \mathcal{R}_\Sigma = \frac{8\pi^3}{3} W \frac{S^2}{\lambda^4}. \quad (45.13)$$

Вернемся теперь к рис. 44.6, а, б. Ввиду полного сходства электрического поля диполя Герца и магнитного поля рассмотренного выше элементарного магнитного излучателя (ср. формулы (44.11a) и (45.86)) эти рисунки дают картину магнитных силовых линий пос-

ледного в ее развитии. Электрические силовые линии являются концентрическими окружностями в плоскостях, лежащих перпендикулярно оси магнитного диполя (параллельно плоскости контура тока).

Наконец, вспомним, что любое распределение постоянного тока на больших расстояниях проявляет себя как магнитный диполь (§ 23, п. 4), причем всякий плоский контур с площадью S обладает моментом $m = z_0 \mu I S$. Можно догадаться, что полученные выше результаты пригодны для всякого замкнутого распределения переменного тока I^{ct} , размеры которого значительно меньше длины волны, а формула (45.5) может использоваться при этом в случае плоского контура произвольной формы с площадью S .

В частности, нетрудно оценить, каковы потери энергии вследствие излучения для цепи переменного тока с заданной площадью (рис. 45.1, в). Пусть $S = 0,01 \lambda^2$ (поперечный размер порядка $0,1 \lambda$). При $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$ ($W = 120\pi$) сопротивление излучения цепи \mathcal{R}^Σ оказывается около 3 ом . Вполне может оказаться, что эта величина не мала в сравнении с обычным активным сопротивлением цепи \mathcal{R} или даже $\mathcal{R}^\Sigma > \mathcal{R}$. Тогда мощность излучения \bar{P}^Σ находится в таком же соотношении с мощностью тепловых потерь \bar{P}_n ; ее следует учитывать.

Излучение как вредный эффект — одна из главных причин отказа от применения открытых контуров тока в диапазоне сверхвысоких частот (дециметровые, сантиметровые и более короткие волны).

§ 46. Магнитные токи. Обобщенная задача об излучении

1. Представление о магнитных токах и симметричные уравнения электродинамики. Напомним, что в природе нет магнитных зарядов, о чем свидетельствует уравнение (3.2): $\text{div } \mathbf{B} = 0$; магнитные силовые линии не имеют начала и конца. Тем не менее представление о связанных магнитных зарядах и соответственно о магнитных диполях полезно, поскольку в ряде случаев оно упрощает описание магнитных полей. Так в § 23, пп. 3, 4 говорилось об эквивалентности постоянных токов системам магнитных диполей, а теперь в § 45 понятие магнитного диполя было использовано и в случае тока переменного. Оказалось, что достаточно малый контур тока I^{ct} действует подобно колеблющемуся магнитному диполю, который аналогичен диполю Герца. Но поскольку последнему отвечает элемент переменного тока проводимости (§ 44, п. 1), то колеблющемуся магнитному диполю естественно сопоставить элемент переменного магнитного тока. После этого, разумеется, можно рассматривать и различные распределения магнитного тока, характеризующиеся функцией \mathbf{j}^m .

Введенная таким образом функция *плотности магнитного тока* остается формальным вспомогательным понятием, и было бы излишним приписывать ей какое-то физическое содержание. Однако,

как будет видно, это понятие является удобным; поэтому мы продолжим аналогию магнитного тока и тока проводимости, написав уравнение

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^M = -i\omega \dot{\rho}_m^M. \quad (46.1)$$

Скалярная функция ρ^M — плотность магнитного заряда — величина в такой же мере фиктивная, как и \mathbf{j}^M . Уравнение (46.1), являясь аналогом (29.13), устанавливает связь $\dot{\rho}_m^M$ и $\dot{\mathbf{j}}_m^M$, наглядным прообразом которой должно быть движение сохраняющихся магнитных зарядов при гармонических колебаниях.

Последовательное применение нового понятия приводит далее к такой записи уравнений Максвелла (29.11), что они становятся симметричными:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m &= i\omega \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{ct}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= - (i\omega \mu \dot{\mathbf{H}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^M). \end{aligned} \right\} \quad (46.2)$$

Применяя во втором из них операцию div , ввиду (П1.32) получаем: $0 = -i\omega \operatorname{div} \mu \dot{\mathbf{H}}_m - \operatorname{div} \dot{\mathbf{j}}_m^M$, откуда, с учетом (46.1),

$$\operatorname{div} \mu \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\rho}_m^M, \quad (46.3)$$

т. е. в рамках рассматриваемой концепции магнитные силовые линии (линии вектора $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$) не являются замкнутыми: они начинаются и кончаются на магнитных зарядах.

Указанное обстоятельство, конечно, не следует считать нарушением законов электромагнетизма. Благодаря ему лишь приобретает некоторая гибкость в описании обычных магнитных полей.

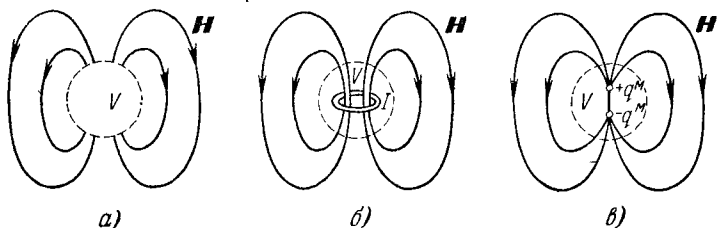


Рис. 46.1.

Поясним это на примерах. На рис. 46.1, а схематически представлено магнитное поле в ближней зоне элементарного магнитного излучателя, причем кружком выделена малая область V , в которой поле не рассматривается. Можно считать, что данное поле создано круговым электрическим током, и продолжить картину силовых линий, как это показано на рис. 46.1, б. При использовании же концепции магнитного диполя получается картина, представленная на рис. 46.1, в; в этом случае силовые линии не непрерывны. Но при переходе к исчезающе малому источнику (одновременно можно

сжимать выделенную область: $V \rightarrow 0$) поля, соответствующие рис. 46.1, б и рис. 46.1, в совпадают везде, за исключением единственной точки. Это фактически полное совпадение, поскольку особенную точку источника, в которой поле неограниченно возрастает, вообще нельзя рассматривать. Другой пример — произвольное магнитное поле, изучаемое в какой-то ограниченной области, скажем, в одном полупространстве (рис. 46.2, а). Оно, конечно, продолжается в другом полупространстве так, что магнитные силовые линии непрерывны (рис. 46.2, б). Однако если нам действительно безразлично, что происходит ниже пунктирной черты, можно предположить, что там поля нет, но зато на граничной плоскости распределен поверхностный магнитный заряд, и на ней начинаются магнитные силовые линии (рис. 46.2, в).

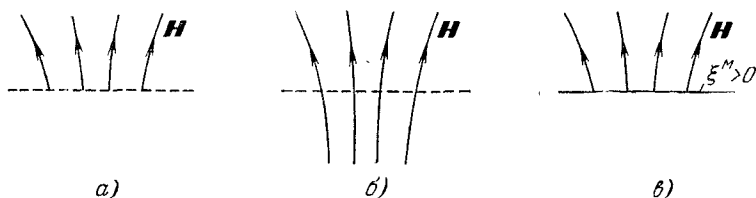


Рис. 46.2.

В связи с последним примером встает вопрос о пересмотре полученных в § 7 граничных условий, с тем чтобы они пришли в соответствие с представлением о магнитных зарядах и токах. Аналогично величинам ξ (7.1) и η (7.9) введем плотность поверхностного магнитного заряда ξ^M и плотность поверхностного магнитного тока η^M . Тогда, как легко показать, вместо (7.4а) должно получиться соотношение типа (7.2а), т. е. в комплексных амплитудах

$$\mu_1 \dot{H}_{mv1} - \mu_2 \dot{H}_{mv2} = \dot{\xi}_m^M. \quad (46.4)$$

Точно так же вместо (7.7б) будет иметь место соотношение, подобное (7.10б); в связи с этим запишем:

$$[\mathbf{v}_0, (\dot{\mathbf{E}}_{m1} - \dot{\mathbf{E}}_{m2})] = -\dot{\eta}_m^M. \quad (46.5)$$

Равенства (46.4) и (46.5) выводятся непосредственно из интегральных форм уравнений (46.3) и (46.2) (имеется в виду второе уравнение Максвелла) при помощи методики, изложенной в § 7. Это предоставляется читателю как упражнение.

2. Обобщенная задача об излучении. В § 43 была рассмотрена основная постановка задачи об излучении, вытекающая из задания функции $\mathbf{j}^{\text{ст}}$ в области источника. Различные уравнения Гельмгольца, решения которых были выписаны в § 43, пп. 2—4, имеют основой уравнения Максвелла (29.11). Но так как источники могут описываться и при помощи магнитных токов, то более общей (по крайней мере с формальной точки зрения) следует признать поста-

новку задачи, опирающуюся на уравнения Максвелла (46.2) при заданных $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}$ и $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{M}}$, т. е., как говорят, при одновременном действии электрических и магнитных источников. Эту задачу можно расчленить на две. Действительно, при линейности уравнений Максвелла (46.2) (линейная среда!) ее решение $\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m$ представимо в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m &= \dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{E}}_{m2}, \\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \dot{\mathbf{H}}_{m1} + \dot{\mathbf{H}}_{m2}, \end{aligned} \right\} \quad (46.6)$$

где складываются решения двух задач об излучении, основанных на уравнениях Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{m1} &= i\omega\dot{\epsilon}\dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{m1} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}_{m1}, \end{aligned} \right\} (1) \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{m2} &= i\omega\dot{\epsilon}\dot{\mathbf{E}}_{m2}, \\ \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{m2} &= -i\omega\dot{\mu}\dot{\mathbf{H}}_{m2} - \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{M}}, \end{aligned} \right\} (2) \quad (46.7)$$

Можно, следовательно, отдельно решить «электрическую» задачу (1) и «магнитную» задачу (2), и из их решений составить решение общей задачи на основании (46.6).

Решение задачи (1) при постоянных $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ уже подробно рассматривалось в § 43, пп. 2—4. Запишем здесь ее решение в двух следующих формах:

$$\dot{\mathbf{H}}_{m1} = \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \frac{i\dot{k}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) [\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}'), \mathbf{r}_{0q}] e^{-i\dot{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{v}', \quad (46.8a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{m1} = -\frac{i}{\omega\dot{\epsilon}} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{m1} \quad \text{вне } V$$

($\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}} \neq 0$ в V); (46.8a) вытекает из (43.14) и

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_m &= \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int_V \frac{\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}}(\mathbf{r}') e^{-i\dot{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{v}', \\ \dot{\mathbf{H}}_{m1} &= \frac{1}{\dot{\mu}} \text{rot } \dot{\mathbf{A}}_m, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m1} &= -\frac{i\omega}{\dot{k}^2} (\text{grad div } \dot{\mathbf{A}}_m + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{A}}_m), \end{aligned} \quad (46.8б)$$

что следует из (43.11), (29.22) и (29.27).

3. Магнитная задача об излучении и принцип двойственности. Сравнивая системы уравнений Максвелла (1) и (2) (46.7), отметим, что первое из уравнений (1) и второе из уравнений (2) идентичны по форме, и то же самое надо сказать о втором из уравнений (1) и первом из уравнений (2). Более того, при замене

$$\dot{\epsilon} \rightleftarrows -\dot{\mu}, \quad \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{CT}} \rightleftarrows -\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{M}} \quad (46.9a)$$

указанные уравнения просто поменяются ролями. Действительно, поменяв также местами \dot{E}_{m1} , \dot{H}_{m1} и \dot{E}_{m2} , \dot{H}_{m2} по схеме

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m1} &\rightleftharpoons \dot{H}_{m2}, \\ \dot{H}_{m1} &\rightleftharpoons \dot{E}_{m2}, \end{aligned} \right\} \quad (46.96)$$

Мы переведем пару уравнений (1) в пару уравнений (2) и обратно.

Проведенное рассуждение показывает, что электрическая задача (1) и магнитная задача (2) *формально эквивалентны*, причем, поскольку решение (46.8а) или (46.8б) первой задачи вполне определяются заданием стороннего тока в виде функции $\dot{j}_m^{\text{ст}}$, то существует *формально аналогичное* решение второй задачи, вполне определяемое заданием $\dot{j}_m^{\text{м}}$.

Как получить решение магнитной задачи? Для этого надо лишь сделать замену (46.9а), (46.9б) в формулах (46.8а) или (46.8б); во избежание путаницы во втором случае вместо \dot{A}_m будем писать \dot{F}_m . Таким образом, решение магнитной задачи (2) имеет следующий вид:

$$\dot{E}_{m2} = \frac{-1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) [\dot{j}_m^{\text{м}}(r'), r_{0q}] e^{-ik|r-r'|} dv', \quad (46.10a)$$

$$\dot{H}_{m2} = \frac{i}{\omega\mu} \text{rot } \dot{E}_{m2} \quad \text{вне } V$$

($\dot{j}_m^{\text{м}} \neq 0$ в V) или

$$\left. \begin{aligned} \dot{F}_m &= \frac{\dot{\varepsilon}}{4\pi} \int \frac{\dot{j}_m^{\text{м}}(r') e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} dv', \\ \dot{E}_{m2} &= -\frac{1}{\dot{\varepsilon}} \text{rot } \dot{F}_m, \\ \dot{H}_{m2} &= -\frac{i\omega}{\dot{k}^2} (\text{grad div } \dot{F}_m + \dot{k}^2 \dot{F}_m). \end{aligned} \right\} \quad (46.10б)$$

Рассмотренное взаимное соответствие электрической и магнитной задач основывается, как принято говорить, на *принципе перестановочной двойственности* уравнений Максвелла.

Весьма существенно, что принцип двойственности позволяет не только получить общее решение магнитной задачи из имеющегося общего решения задачи электрической (как это выше было сделано), но и в любом конкретном случае при заданном распределении $\dot{j}_m^{\text{м}}$ определить \dot{E}_{m2} , \dot{H}_{m2} , если уже решена задача о поле \dot{E}_{m1} , \dot{H}_{m1} , возбужденном *таким же* распределением $\dot{j}_m^{\text{ст}}$ ($\dot{j}_m^{\text{м}}$ и $\dot{j}_m^{\text{ст}}$ — одинаковые функции координат). Для получения \dot{E}_{m2} , \dot{H}_{m2} надо в имеющемся готовом решении произвести замену (46.9а), (46.9б). Совершенно так же в любом конкретном случае находится решение \dot{E}_{m1} , \dot{H}_{m1} при известном \dot{E}_{m2} , \dot{H}_{m2} .

Так все формулы, характеризующие поле элементарного магнитного излучателя (§ 45), можно было бы получить на основании принципа двойственности из соответствующих выражений для элементарного электрического излучателя (§ 44). Сначала отметим, что, поскольку для последнего имеется формула (44.4), то комплексная амплитуда момента магнитного излучателя совершенно так же выражается через магнитный ток I^m и длину l диполя

$$\dot{m}_m = -i \frac{j_m l}{\omega} z_0. \quad (46.11)$$

Применяя принцип двойственности, в соответствии со второй строчкой, (46.9a) следует в выражениях поля электрического излучателя заменить $I_m^{ст}$ на $-I_m^m$. При сравнении (44.4) и (46.11) мы видим, что это равносильно замене

$$\dot{p}_m \rightarrow -\dot{m}_m. \quad (46.12)$$

Взяв формулу (44.7), выражающую комплексную амплитуду $\dot{H}_m = \dot{H}_{m1}$ поля электрического излучателя, при замене $\dot{e} \rightleftharpoons -\dot{\mu}$ и $\dot{p}_m \rightarrow -\dot{m}_m$ получаем комплексную амплитуду $\dot{E}_m = \dot{E}_{m2}$ поля магнитного излучателя в виде формулы (45.7); заметим, что при этом волновое число k переходит само в себя. Точно так же из формулы (44.8) для $\dot{E}_m = \dot{E}_{m1}$ получаем формулу (45.6) для $\dot{H}_m = \dot{H}_{m2}$.

§ 47. Эквивалентные поверхностные источники.

Принцип Гюйгенса

1. Принцип эквивалентности. Рассмотренные выше магнитные токи дают пример так называемых *эквивалентных источников*. То

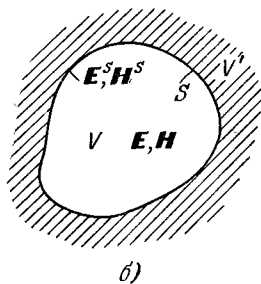
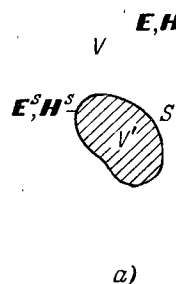


Рис. 47.1.

или иное распределение магнитного тока всегда строится с целью более просто отобразить реальные условия возбуждения электромагнитного поля; при этом неважно, что понятие магнитного тока само по себе лишено физического содержания.

Перейдем к довольно общему и часто используемому способу построения эквивалентных источников.

Пусть действительные источники излучения находятся внутри ограниченной области V' (на рис. 47.1, a она заштрихована), и требуется найти поле в ее бесконечной внешности V . Одновременно с этой внешней задачей электродинамики будем также рассматри-

вать внутреннюю: источники расположены в бесконечной внешности V' (заштрихованной на рис. 47.1, б), а поле требуется найти в ограниченной области V . В обоих случаях не будем пользоваться прямой информацией об источниках. Функции $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}}$ и $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{м}}$ могут оставаться неизвестными, но предполагается известным поле на ограничивающей V' поверхности S :

$$\vec{E} = \vec{E}^S, \quad \vec{H} = \vec{H}^S. \quad (47.1)$$

Имеющихся данных (при некоторых оговорках, см. § 31) заведомо достаточно для определения электромагнитного поля в V . Тем самым мы располагаем сведениями для построения эквивалентных источников, и надо лишь найти способ решения задачи.

Заметим, что ввиду сказанного нас может не интересовать, что происходит в V' на самом деле. Вместо реальной картины процесса в V' можно выбрать любую фиктивную, облегчая анализ. Проще всего положить, что в этой области поле *отсутствует*, т. е. на S оно как бы обрывается:

$$\begin{aligned} E = E^S, \quad H = H^S & \text{ со стороны } V, \\ E = 0, \quad H = 0 & \text{ со стороны } V'. \end{aligned} \quad (47.2)$$

Разумеется, искусственно введенные разрывы *всех* компонент поля потребуют теперь специального исследования. Для этого используем известные из § 7 и дополнительно найденные в § 46, п. 1 граничные условия. Ввиду (47.2) формулы (7.2а), (7.10б), (46.4) и (46.5) дают ¹⁾

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_m &= \varepsilon \dot{E}_{mv}^S, & \dot{\eta}_m &= [\mathbf{v}_0, \dot{H}_m^S], \\ \dot{\xi}_m^{\text{м}} &= \mu \dot{H}_{mv}^S, & \dot{\eta}_m^{\text{м}} &= -[\mathbf{v}_0, \dot{E}_m^S] \end{aligned} \quad (47.3)$$

(\mathbf{v}_0 — внешняя нормаль по отношению к V'). Согласно этим соотношениям разрывам векторов поля на S сопутствуют поверхностные токи и заряды, как электрические, так и магнитные, плотности которых определяются исходным условием (47.1).

Смысл полученного результата очевиден. Рассматривая вместо действительных («первичных») источников, расположенных в V' , поля на ограничивающей V' поверхности S , мы пришли к представлению о распределенных на S эквивалентных («вторичных») токах и зарядах.

2. Определение поля излучения. Принцип Гюйгенса. Итак, на основании предыдущего, зная электромагнитное поле на некоторой поверхности S , охватывающей действительные источники (область V'), мы вправе рассматривать поле вне ее (область V) как созданное некоторыми эквивалентными источниками на S .

Сама идея введения эквивалентных поверхностных источников родственна известному *принципу Гюйгенса*. Напомним (см. общий

¹⁾ В первую строчку входит вещественная диэлектрическая проницаемость (см. § 29, п.3), если $\alpha = 0$ (§ 29, п.2); при $\alpha \neq 0$ делается замена $\varepsilon \rightarrow \varepsilon e^{-i\alpha}$.

курс физики), что согласно этому принципу каждая точка волнового фронта принимается за источник сферической волны, и положение фронта в следующий момент времени находится при составлении суперпозиции всех элементарных сферических волн. В этой простейшей и наглядной формулировке принципа Гюйгенса неточен. В частности, при сложении элементарных волн, кроме нужного фронта, должен появиться еще фронт «позади» первоначального, что приходится чисто искусственно игнорировать. Ниже (п. 3) мы еще вернемся к принципу Гюйгенса.

Сосредоточим внимание на электромагнитном поле, возбуждаемом эквивалентными источниками. Легко видеть, что внешняя электромагнитная задача (см. рис. 47.1, *a*) после введения этих источников имеет вид обобщенной задачи об излучении (§ 46, п. 2). Поле излучения, таким образом, представляется по формулам (46.6) как наложение двух полей $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ и $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$, первое из которых определяется электрическими, а второе — магнитными источниками. Каждое из этих полей находится по источникам на основании формул (46.8а), (46.10а) или (46.8б), (46.10б).

Чтобы воспользоваться указанными формулами, нам нужны функции $\dot{\mathbf{j}}_m^{CT}$ и $\dot{\mathbf{j}}_m^M$. Их роль будут играть величины $\dot{\eta}_m$ и $\dot{\eta}_m^M$ из (47.3); областью же источника является поверхность S . Ввиду (П2.8) $\dot{\eta}_m$ и $\dot{\eta}_m^M$ можно выразить как функции, заданные в объеме, что дает возможность прямо внести их в интегралы из (46.8а), (46.8б) и 46.(10а), (46.10б). Последние переходят при этом в поверхностные:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) [\dot{\eta}_m(r'), r_{0q}] e^{-ik|r-r'|} ds' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) e^{-ik|r-r'|} [[ds', \dot{H}_m^S], r_{0q}], \end{aligned} \quad (47.4)$$

$$\dot{A}_m = \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int_S \frac{\dot{\eta}_m(r') e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} ds' = \frac{\dot{\mu}}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ik|r-r'|} [ds', \dot{H}_m^S]}{|r-r'|}, \quad (47.5)$$

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m2} &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) [\dot{\eta}_m^M(r'), r_{0q}] e^{-ik|r-r'|} ds' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|r-r'|^2} + \frac{ik}{|r-r'|} \right) e^{-ik|r-r'|} [[ds', \mathbf{E}_m^S], r_{0q}], \end{aligned} \quad (47.6)$$

$$\dot{F}_m = \frac{\dot{\epsilon}}{4\pi} \int_S \frac{\dot{\eta}_m^M(r') e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} ds' = \frac{\dot{\epsilon}}{4\pi} \int_S \frac{e^{-ik|r-r'|} [\dot{E}_m^S, ds']}{|r-r'|}. \quad (47.7)$$

Все необходимые формулы для нахождения поля излучения при помощи эквивалентных поверхностных источников получены.

Эквивалентные поверхностные заряды, плотности которых задаются формулами (47.3), здесь не понадобились. Можно было бы,

однако, прибегнуть и к такому способу выражения поля излучения, чтобы ввести в расчет эти величины, определяемые нормальными компонентами поля на S . Так, например, используя для вычисления \dot{E}_m вместо третьей строчки (46.86) формулу (29.23), мы должны были бы выразить $\dot{\phi}_m$ в виде интеграла, содержащего $\dot{E}_{m\gamma}^S$.

Заметим еще, что, поскольку \dot{E}_m^S, \dot{H}_m^S — решения уравнений Максвелла (29.11) при $\dot{j}_m^{ct}=0$ на S (на этой поверхности нет источников), то в формулах (47.4)—(47.7) можно исключить функцию \dot{E}_m^S , заменив ее через $\frac{i}{\omega\epsilon} \text{rot } \dot{H}_m^S$, либо подобным же образом исключить \dot{H}_m^S .

3. Элемент Гюйгенса. Вернемся к принципу Гюйгенса, поставив теперь целью установить, что же следует понимать под элемен-

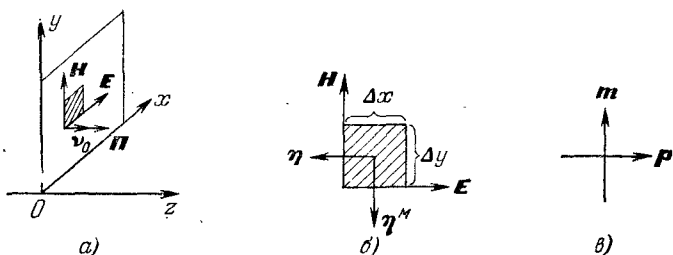


Рис. 47.2.

тарным источником на поверхности фронта электромагнитной волны.

Выделим в плоскости xOy , являющейся фронтом плоской однородной волны, элемент $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (рис. 47.2, а). Мысленно обратив в нуль поле позади фронта, согласно предыдущему приходим к выводу, что поле в переднем полупространстве можно считать созданным распределенными на xOy поверхностными токами I^{ct} и I^m , плотности которых находятся на основании формул (47.3):

$$\dot{\eta}_m = [z_0, \dot{H}_m^S] = -x_0 \dot{H}_m^S, \quad \dot{\eta}_m^m = [\dot{E}_m^S, z_0] = -y_0 \dot{E}_m^S. \quad (47.8)$$

Через элемент ΔS проходят токи с комплексными амплитудами

$$I_m^{ct} = \dot{\eta}_m \Delta y = -\dot{H}_m^S \Delta y, \quad I_m^m = \dot{\eta}_m^m \Delta x = -\dot{E}_m^S \Delta x. \quad (47.9)$$

Легко видеть, что рассматриваемый малый элемент фронта волны (для которого во всяком случае $\Delta x \ll \lambda$ и $\Delta y \ll \lambda$) должен проявлять себя как совокупность ортогонально ориентированных электрического и магнитного элементарных излучателей (рис. 47.2, б, в). Комплексные амплитуды моментов диполей определяются по формулам (44.4) и (46.11) путем подстановки выражений токов

(47.9) и длин (Δx в (44.4) и Δy в (46.11)), а также замены z_0 на x_0 в (44.4) и на y_0 в (46.11):

$$\dot{p}_m = i \frac{\dot{H}_m^S \Delta S}{\omega} x_0 \quad \text{и} \quad \dot{m}_m = i \frac{\dot{E}_m^S \Delta S}{\omega} y_0 \quad (47.10)$$

($\Delta S = \Delta x \Delta y$). Чтобы найти поле излучения элемента фронта волны, который мы будем называть *элементом Гюйгенса*, можно сложить поля, создаваемые двумя элементарными излучателями с известными теперь моментами. Однако, желая использовать результаты, полученные в §§ 44, 45, мы должны были бы выразить поля в единой системе координат, что сопряжено с громоздкими преобразованиями. Более короткий путь — непосредственное применение формул (47.4) и (47.6).

Фактически интерес представляет лишь дальнейшее поле (§ 43, п. 3) элемента Гюйгенса. На основании (47.4) ввиду (43.14а) комплексная амплитуда вектора \mathbf{H} дальнего поля, создаваемого электрическим током элемента Гюйгенса, равна

$$\dot{H}_{m1}^{\mathbf{H}} = \frac{ik}{4\pi} \int_{\Delta S} \frac{[\dot{\eta}_m(r'), r_{0q}] e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} ds'. \quad (47.11)$$

Аналогично § 44, п. 2 $\frac{1}{|r-r'|} \approx \frac{1}{r}$, $r_{0q} \approx r_0$ при $r \gg \Delta x$, $r \gg \Delta y$, и $e^{-ik|r-r'|} \approx e^{-ikr}$ при $\Delta x \ll \lambda$, $\Delta y \ll \lambda$. Поэтому

$$\dot{H}_{m1}^{\mathbf{H}} \approx \frac{ik}{4\pi} [\dot{\eta}_m, r_0] \frac{e^{-ikr}}{r} \Delta S. \quad (47.12)$$

Как видно из рис. 47.3, $\dot{\eta}_m = -x_0 \dot{H}_m^S = -R_0 \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha = -(r_0 \sin \vartheta + \vartheta_0 \cos \vartheta) \cos \alpha + \alpha_0 \sin \alpha$. Внося это в (47.12), получаем

$$\dot{H}_{m1}^{\mathbf{H}} \approx \frac{ik \dot{H}_m^S \Delta S}{4\pi} (\vartheta_0 \sin \alpha + \alpha_0 \cos \vartheta \cos \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (47.13)$$

Соответствующую амплитуду вектора \mathbf{E} находим теперь из первого уравнения Максвелла, как это диктуется второй строчкой (46.8а). Применяя формулу (П1.23), отбросим в получаемом результате слагаемые, убывающие быстрее, чем $1/r$ (ищется дальнее поле). Имеем

$$\dot{E}_{m1}^{\mathbf{E}} \approx \frac{ik \dot{H}_m^S \dot{W} \Delta S}{4\pi} (\vartheta_0 \cos \vartheta \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (47.14)$$

Найдем теперь дальнее поле, создаваемое магнитным током элемента Гюйгенса. На основании (47.6)

$$\dot{E}_{m2}^{\mathbf{E}} = -\frac{ik}{4\pi} \int_{\Delta S} \frac{[\dot{\eta}_m^M(r'), r_{0q}] e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} ds' \quad (47.15)$$

и ввиду малости элемента ΔS (см. выше)

$$\dot{E}_{m2}^{\Delta} \approx -\frac{ik}{4\pi} [\dot{\eta}_m^M, \mathbf{r}_0] \frac{e^{-ikr}}{r} \Delta S. \quad (47.16)$$

Из рис. 47.3 видно, что $\dot{\eta}_m^M = -y_0 \dot{E}_m^S = -R_0 \sin \alpha - \alpha_0 \cos \alpha =$

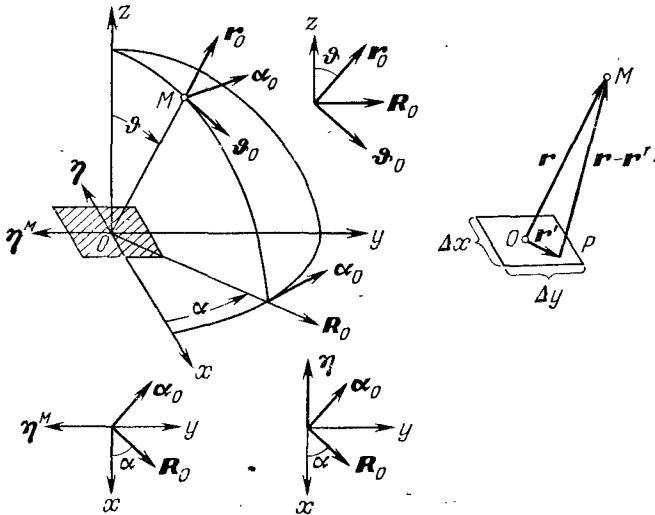


Рис. 47.3.

$= -(\mathbf{r}_0 \sin \vartheta + \vartheta_0 \cos \vartheta) \sin \alpha - \alpha_0 \cos \alpha$, так что выражение (47.15) дает

$$\dot{E}_{m2}^{\Delta} \approx \frac{ik \dot{E}_m^S \Delta S}{4\pi} (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \cos \vartheta \sin \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (47.17)$$

Имея \dot{E}_{m2}^{Δ} , найдем \dot{H}_{m2}^{Δ} из второго уравнения Максвелла (см. вторую строчку (46.10a)). Пренебрегая убывающей, как $1/r^2$, радиальной компонентой, находим

$$\dot{H}_{m2}^{\Delta} \approx \frac{ik \dot{E}_m^S \Delta S}{4\pi \dot{W}} (\vartheta_0 \cos \vartheta \sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (47.18)$$

Формулы (43.13), (47.14), (47.17) и (47.18) содержат все данные для определения полного дальнего поля излучения элемента Гюйгенса на основании (46.6). Учитывая, что в плоской однородной волне $\dot{E}_m = \dot{W} \dot{H}_m$ и, следовательно,

$$\dot{E}_m^S = \dot{W} \dot{H}_m^S, \quad (47.19)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^A &\approx \frac{ik\dot{E}_m^S \Delta S}{4\pi} (1 + \cos \vartheta) (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{H}_m^A &\approx \frac{ik\dot{E}_m^S \Delta S}{4\pi \dot{W}} (1 + \cos \vartheta) (\vartheta_0 \sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \right\} (47.20)$$

Из (47.20) следует, что

$$E_m^A = H_m^A | \dot{W} | = \frac{|k| E_m^S \Delta S}{4\pi r} e^{-k''r} (1 + \cos \vartheta),$$

и при отсутствии поглощения

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = r_0 \frac{k^2 (E_m^S)^2 \Delta S^2 (1 + \cos \vartheta)^2}{32\pi^2 \dot{W} r^2}, \quad (47.21)$$

а потому характеристика направленности элемента Гюйгенса есть

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{\sqrt{\bar{\Pi}(\vartheta)}}{\sqrt{\bar{\Pi}(0)}} = \frac{1 + \cos \vartheta}{2}. \quad (47.22)$$

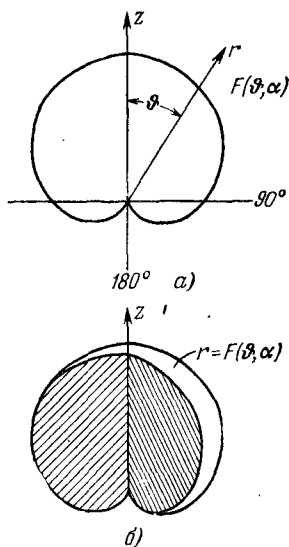


Рис. 47.4.

Излучение не изменяется в зависимости от угла α и отсутствует в обратном направлении ($\vartheta = 180^\circ$). Диаграмма направленности в любой меридиональной плоскости есть *кардиоиды* (рис. 47.4, а); соответствующая объемная диаграмма изображена на рис. 47.4, б.

В заключение отметим, что при использовании представления об эквивалентных токах особенно в теории антенн часто вводится понятие «обобщенного элемента Гюйгенса». Пусть на некоторой поверхности

$$\dot{E}_m^S = \dot{Z} [\dot{H}_m^S, \mathbf{v}_0]. \quad (47.23)$$

Введя локальную систему координат так, что $\mathbf{v}_0 = \mathbf{z}_0$, рассмотрим малый элемент поверхности ΔS точно таким же способом, как выше рассматривался элемент плоскости фронта плоской однородной волны. При этом будут опять получены формулы (47.13), (47.14), (47.17) и (47.18), но вместо (47.19) ввиду (47.23) будет: $\dot{E}_m^S = \dot{Z} H_m^S$.

Таким образом, на основании (46.6) вместо (47.20) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^a &\approx \frac{ik\dot{E}^S\Delta S}{4\pi} \left[\vartheta_0 \left(\frac{\dot{W}}{Z} \cos \vartheta + 1 \right) \cos \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_0 \left(\frac{\dot{W}}{Z} + \cos \vartheta \right) \sin \alpha \right] \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{H}_m^a &\approx \frac{ik\dot{E}^S\Delta S}{4\pi Z} \left[\vartheta_0 \left(1 + \frac{Z}{\dot{W}} \cos \vartheta \right) \sin \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \alpha_0 \left(\cos \vartheta + \frac{Z}{\dot{W}} \right) \cos \alpha \right] \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \right\} (47.24)$$

Так выражается дальнейшее поле излучения обобщенного элемента Гюйгенса.

§ 48. Принцип взаимности

1. Лемма Лоренца. Получим сначала важное соотношение, возникающее при исследовании полей двух источников.

Пусть в некоторой заданной среде источник, характеризуемый функцией плотности стороннего тока \mathbf{j}_1^{CT} , возбуждает поле \dot{E}_1, \dot{H}_1 . При этом, согласно (29.11),

$$\text{rot } \dot{H}_{m1} = i\omega \dot{\epsilon} \dot{E}_{m1} + \dot{\mathbf{j}}_{m1}^{\text{CT}}, \quad \text{rot } \dot{E}_{m1} = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{m1}. \quad (48.1)$$

Для этой же среды при другом источнике (плотность стороннего тока $\dot{\mathbf{j}}_2^{\text{CT}}$) имеем

$$\text{rot } \dot{H}_{m2} = i\omega \dot{\epsilon} \dot{E}_{m2} + \dot{\mathbf{j}}_2^{\text{CT}}, \quad \text{rot } \dot{E}_{m2} = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{m2}. \quad (48.2)$$

Не задумываясь пока над физическим содержанием выполняемых действий, произведем в первом равенстве (48.1) умножение на \dot{E}_{m2} , а во втором — на \dot{H}_{m2} и аналогично в первом равенстве (48.2) на \dot{E}_{m1} и во втором на \dot{H}_{m1} . Рассматривая попарно первое и четвертое, второе и третье уравнения, после вычитания соответственных частей и применения формулы (П1.31), получим

$$\text{div} [\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1} - i\omega \dot{\epsilon} \dot{E}_{m1} \dot{E}_{m2} - \dot{\mathbf{j}}_{m1}^{\text{CT}} \dot{E}_{m2} \quad (48.3)$$

и

$$\text{div} [\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}] = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2} - i\omega \dot{\epsilon} \dot{E}_{m2} \dot{E}_{m1} - \dot{\mathbf{j}}_{m2}^{\text{CT}} \dot{E}_{m1}. \quad (48.4)$$

Как и ранее в этой главе, будем иметь в виду лишь изотропные и линейные среды; поскольку при этом $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ — скалярные коэффициенты, не зависящие от поля, то нет разницы между $\dot{\mu} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1}$ и $\dot{\mu} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}$, $\dot{\epsilon} \dot{E}_{m2} \dot{E}_{m1}$ и $\dot{\epsilon} \dot{E}_{m1} \dot{E}_{m2}$. Поэтому из (48.3) и (48.4) следует:

$$\text{div} \{ [\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] - [\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}] \} = \dot{\mathbf{j}}_{m2}^{\text{CT}} \dot{E}_{m1} - \dot{\mathbf{j}}_{m1}^{\text{CT}} \dot{E}_{m2}. \quad (48.5)$$

Это дифференциальная формулировка так называемой *леммы Лоренца*. Интегрируя результат по некоторому объему V , охватываю-

щему источники ($\mathbf{j}_1^{\text{ct}} = 0$ и $\mathbf{j}_2^{\text{ct}} = 0$ вне V), и применяя теорему Остроградского — Гаусса, получаем интегральную формулировку леммы Лоренца

$$\oint_S \{[\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] - [\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}]\} ds = \int_V (\mathbf{j}_{m2}^{\text{ct}} \dot{E}_{m1} - \mathbf{j}_{m1}^{\text{ct}} \dot{E}_{m2}) dv. \quad (48.6)$$

До сих пор не уточнялся характер пространственной области, в которой расположены источники и существуют поля, описываемые уравнениями (48.1) и (48.2); в частности, речь может идти об энергетически изолированной области. Если же рассматривается безграничное пространство, то в (48.6) можно перейти к пределу при $V \rightarrow \infty$, относя соответственно в бесконечность границу S . Поверхностный интеграл при этом исчезает. Действительно, это сразу видно, если имеется поглощение, и поля убывают быстрее, чем $1/r$ (§ 31). Но и при отсутствии поглощения интеграл обращается в нуль для полей, удовлетворяющих условию излучения (Приложение 5, п. 3, § 43, п. 3). В этом случае при $r \rightarrow \infty$ поля имеют характер расходящихся сферических волн

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m1} &= A_1 \frac{e^{-ikr}}{r}, & \dot{E}_{m1} &= W [A_1, \mathbf{r}_0] \frac{e^{-ikr}}{r}, \\ \dot{H}_{m2} &= A_2 \frac{e^{-ikr}}{r}, & \dot{E}_{m2} &= W [A_2, \mathbf{r}_0] \frac{e^{-ikr}}{r}, \end{aligned}$$

где A_1 и A_2 не зависят от r и ортогональны \mathbf{r}_0 . Подынтегральное выражение, принимающее вид

$$\{[A_2, \mathbf{r}_0], A_1\} - \{[A_1, \mathbf{r}_0], A_2\} \frac{e^{-i2kr}}{r^2} ds,$$

равно нулю, как легко проверить при помощи формулы (П1.5).

Таким образом, в случае неограниченного пространства оказывается равным нулю объемный интеграл в (48.6), и, следовательно,

$$\int_V \mathbf{j}_{m2}^{\text{ct}} \dot{E}_{m1} dv = \int_V \mathbf{j}_{m1}^{\text{ct}} \dot{E}_{m2} dv, \quad (48.7)$$

причем интегрирование фактически распространяется на области источников. Далее, поскольку объемный интеграл в (48.6) неизменен для любой области, охватывающей источники, будучи равным нулю, то и поверхностный интеграл при тех же условиях равен нулю; отсюда

$$\oint_S [\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] ds = \oint_S [\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}] ds \quad (48.8)$$

для любой поверхности S , охватывающей расположенные в безграничном пространстве источники.

Наконец, отметим, что вместо исходных уравнений (48.1) и (48.2) можно было бы взять обобщенные уравнения Максвелла (46.2), содержащие магнитные токи. Как легко проверить (это

рекомендуется читателю), соответствующая обобщенная форма леммы Лоренца (48.5) имеет вид

$$\operatorname{div} \{[\dot{\mathbf{E}}_{m_2}, \dot{\mathbf{H}}_{m_1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{m_1}, \dot{\mathbf{H}}_{m_2}]\} = \mathbf{j}_{m_2}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_1} - \mathbf{j}_{m_1}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_2} - \mathbf{j}_{m_2}^{\text{M}} \dot{\mathbf{H}}_{m_1} + \mathbf{j}_{m_1}^{\text{M}} \dot{\mathbf{H}}_{m_2}. \quad (48.9)$$

При интегрировании по некоторой области V имеем

$$\oint_S \{[\dot{\mathbf{E}}_{m_2}, \dot{\mathbf{H}}_{m_1}] - [\dot{\mathbf{E}}_{m_1}, \dot{\mathbf{H}}_{m_2}]\} d\mathbf{s} = \int_V (\mathbf{j}_{m_2}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_1} - \mathbf{j}_{m_1}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_2} - \mathbf{j}_{m_2}^{\text{M}} \dot{\mathbf{H}}_{m_1} + \mathbf{j}_{m_1}^{\text{M}} \dot{\mathbf{H}}_{m_2}) dv. \quad (48.10)$$

В случае неограниченного пространства

$$\int_V (\mathbf{j}_{m_2}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_1} - \mathbf{j}_{m_1}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_2} - \mathbf{j}_{m_2}^{\text{M}} \dot{\mathbf{H}}_{m_1} + \mathbf{j}_{m_1}^{\text{M}} \dot{\mathbf{H}}_{m_2}) dv = 0, \quad (48.11)$$

что не требует специального вывода, так как поверхностный интеграл в (48.10) тот же, что и в (48.6), и его обращение в нуль установлено.

2. Принцип взаимности.

Смысл различных формулировок леммы Лоренца сводится к *принципу взаимности*, играющему важную роль в прикладной электродинамике и главным образом в теории антенн.

Общей особенностью полученных выше соотношений (48.5)—(48.8) является *симметричность* относительно величин $\dot{\mathbf{E}}_{m_1}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m_1}$ и $\mathbf{j}_{m_1}^{\text{CT}}$, с одной стороны, и величин $\dot{\mathbf{E}}_{m_2}$, $\dot{\mathbf{H}}_{m_2}$ и $\mathbf{j}_{m_2}^{\text{CT}}$ с другой. Заметим, что формулы (48.5)—(48.11) верны независимо от того, рассматриваются ли поля \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 и \mathbf{E}_2 , \mathbf{H}_2 в двух не имеющих связи задачах или как существующие одновременно, так что полное поле есть $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$.

Пусть области распределения источников пространственно разделены, так что $\mathbf{j}_1^{\text{CT}} \neq 0$ в V_1 и $\mathbf{j}_2^{\text{CT}} \neq 0$ в V_2 (рис. 48.1, а). Равенство (48.7) при этом принимает вид

$$\int_{V_1} \mathbf{j}_{m_1}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_2} dv = \int_{V_2} \mathbf{j}_{m_2}^{\text{CT}} \dot{\mathbf{E}}_{m_1} dv. \quad (48.12)$$

Интеграл слева можно рассматривать как некоторую характеристику взаимодействия поля первого источника со вторым источни-

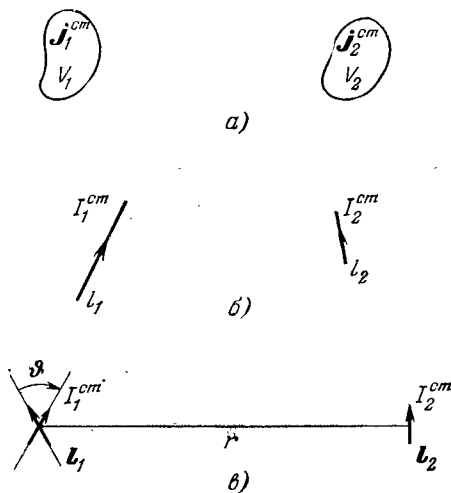


Рис. 48.1.

ком, а интеграл справа — как того же рода характеристику взаимодействия поля второго источника с первым. Как видно, для любых двух источников такие характеристики равны.

Возьмем источники в виде прямолинейных токов (рис. 48.1, б), плотности которых имеют вид (П2.9)

$$\mathbf{j}_{m1}^{\text{ст}} = \tau_{01} \dot{I}_{m1}^{\text{ст}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad \mathbf{j}_{m2}^{\text{ст}} = \tau_{02} \dot{I}_{m2}^{\text{ст}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2), \quad (48.13)$$

где дельта-функции двумерные. Равенство (48.12) при этом дает

$$\int_{l_1} \dot{I}_{m1}^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_{m2} d\mathbf{l} = \int_{l_2} \dot{I}_{m2}^{\text{ст}} \dot{\mathbf{E}}_{m1} d\mathbf{l}. \quad (48.14)$$

Если токи вдоль отрезков l_1 и l_2 не изменяются (по амплитуде и фазе), как это имеет место в случае элементарных излучателей, то

$$\dot{I}_{m1}^{\text{ст}} \int_{l_1} \dot{\mathbf{E}}_{m2} d\mathbf{l} = \dot{I}_{m2}^{\text{ст}} \int_{l_2} \dot{\mathbf{E}}_{m1} d\mathbf{l}, \quad (48.15)$$

или

$$I_{m1}^{\text{ст}} \dot{U}_{m2}^{(1)} = I_{m2}^{\text{ст}} \dot{U}_{m1}^{(2)}, \quad (48.15a)$$

где величины $\dot{U}_{m2}^{(1)}$ и $\dot{U}_{m1}^{(2)}$, выражаемые интегралами в (48.15), можно рассматривать как комплексные амплитуды напряжений. Так, $U_2^{(1)}$ есть напряжение на отрезке l_1 , создаваемое полем тока $I_2^{\text{ст}}$, $U_1^{(2)}$ имеет соответственный смысл. В случае элементарных излучателей ($l_1 \ll \lambda$, $l_2 \ll \lambda$)

$$\dot{U}_{m2}^{(1)} = \dot{\mathbf{E}}_{m2} l_1 \quad \text{и} \quad \dot{U}_{m1}^{(2)} = \dot{\mathbf{E}}_{m1} l_2. \quad (48.16)$$

Употребленный термин «напряжение» является несколько условным, но его содержание нетрудно понять. Надо иметь в виду, что напряжение на отрезке l_1 , названное $U_2^{(1)}$, обусловлено полем второго излучателя \mathbf{E}_2 без всякой связи с тем, что же в действительности находится на отрезке l_1 . Вопросом, каково будет полное поле на l_1 при наличии обоих излучателей, мы не задаемся. Тем не менее, если в поле \mathbf{E}_2 на место l_1 поместить пассивный проводящий элемент, «приемную антенну», то в нем появится пропорциональный $U_2^{(1)}$ ток. Какие выводы позволяет сделать принцип взаимности? Во-первых, разделив обе части (48.15a) на $I_{m1} I_{m2}$, имеем

$$\frac{\dot{U}_{m2}^{(1)}}{I_{m2}^{\text{ст}}} = \frac{\dot{U}_{m1}^{(2)}}{I_{m1}^{\text{ст}}}. \quad (48.17)$$

Можно истолковать эти отношения как *взаимные сопротивления* излучателей и написать:

$$\dot{Z}_{21} = \dot{Z}_{12}. \quad (48.17a)$$

Из (48.15a) или (48.17) следует, что при одинаковых токах излучатели наводят — один на другом — одинаковые напряжения.

Пусть далее два элементарных излучателя, ориентированные, как показано на рис. 48.1, в, находятся на расстоянии $r \gg \lambda$. Вращая первый излучатель, констатируем, что создаваемое им напря-

жение $U_1^{(2)}$ изменяется пропорционально его характеристике направленности $F(\vartheta) = |\sin \vartheta|$. Но, согласно (48.15a), $U_{m2}^{(1)} = \frac{j_{ct}^{m2}}{j_{ct}^{m1}} U_{m1}^{(2)}$, т. е. наводимое на первом элементе как на приемной антенне напряжение $U_{m2}^{(1)}$ пропорционально $U_1^{(2)}$, а следовательно, функции $F(\vartheta) = |\sin \vartheta|$. В теории антенн это положение распространяется на антенны любого вида; говорят, что характеристика направленности в режимах передачи и приема остается неизменной.

В сущности для обобщения принципа взаимности в форме (48.15a) на любые антенны надо лишь переформулировать равенство (48.12), введя тем или иным способом представление об эквивалентных токах и напряжениях.

Очень важно, что формы леммы Лоренца (48.5) — (48.12) справедливы для любых изотропных линейных сред. Принцип взаимности, таким образом, сохраняет силу, когда среда, будучи изотропной и линейной, *неоднородна*. Можно, например, рассматривать излучатели в свободном пространстве в присутствии различных посторонних тел, действие которых оказывается учтенным косвенно. Об этом будет говориться позднее в связи с явлениями дифракции.

§ 49. Системы излучателей

1. Постановка задачи. Дискретные системы. Если имеется система излучателей, каждый из которых в отдельности изучен, то ее исследование сводится к применению принципа суперпозиции (§ 13, п. 3).

На рис. 49.1, а объединенные в систему излучателя схематически изображены точками; можно сначала предположить, что это

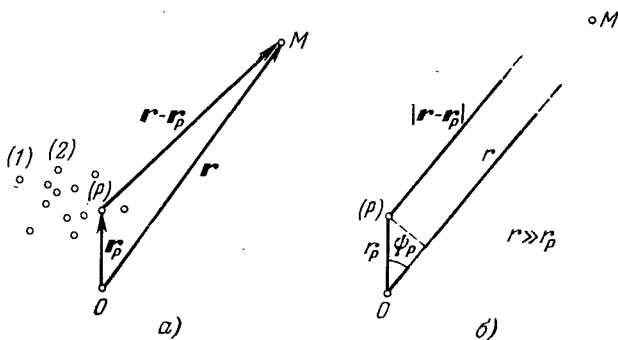


Рис. 49.1.

элементарные излучатели, вообще различные. Точка наблюдения $M(\mathbf{r})$, в которой определяется поле, полагается отнесенной на очень большое расстояние ($r \gg r_p$), так что направление на $M(\mathbf{r})$,

характеризуемое угловыми сферическими координатами ϑ и α , практически одно и то же для всех излучателей (выбор начала O произволен).

Каждый излучатель создает сферическую волну, так что поле его в точке $M(\mathbf{r})$ можно охарактеризовать комплексной амплитудой

$$\dot{E}_{mp}(\mathbf{r}) = \dot{A}_{mp} \dot{F}_p(\vartheta, \alpha) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}, \quad (49.1)$$

где $\dot{A}_{mp} = A_{mp} e^{i\varphi_p}$ — постоянный скалярный множитель, определяющий амплитуду и фазу колебаний данного (p -го) излучателя, а функция $\dot{F}_p(\vartheta, \alpha)$ не только указывает направление \mathbf{E} , но и дает нормированную характеристику направленности (§ 41, п. 1) $F_p(\vartheta, \alpha) = |\dot{F}_p(\vartheta, \alpha)|$. Среду будем считать непоглощающей.

Для нахождения поля системы излучателей, сложим все \mathbf{E}_{mp}

$$\dot{E}_m = \sum_{p=1}^N \dot{A}_{mp} \dot{F}_p(\vartheta, \alpha) \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|}. \quad (49.2)$$

В простейшем случае — он является распространенным — излучатели идентичны и одинаково ориентированы, так что $\dot{F}_p(\vartheta, \alpha) = \dot{F}(\vartheta, \alpha)$ для всех p . Учитывая также, что $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p|} \approx \frac{1}{r}$ и $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_p| \approx r - r_p \cos \psi_p$, где ψ_p — угол между \mathbf{r} и \mathbf{r}_p (рис. 49.1, б), в этом случае получаем

$$\dot{E}_m \approx \dot{F}(\vartheta, \alpha) \dot{f}(\vartheta, \alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (49.3)$$

где

$$\dot{f}(\vartheta, \alpha) = \sum_{p=1}^N \dot{A}_{mp} e^{-ikr_p \cos \psi_p}, \quad \psi_p = \psi_p(\vartheta, \alpha). \quad (49.4)$$

Функция $\dot{f}(\vartheta, \alpha)$ имеет весьма простой смысл: если бы излучатели были изотропными ($\dot{F}(\vartheta, \alpha) = \text{const}$), она полностью описывала бы зависимость \dot{E}_m и Π от угловых координат; тогда функция $\frac{|\dot{f}(\vartheta, \alpha)|}{|\dot{f}(\vartheta, \alpha)|_{\max}} = \frac{f(\vartheta, \alpha)}{f(\vartheta, \alpha)_{\max}}$ была бы нормированной характеристикой направленности системы излучателей. Функцию $\dot{f}(\vartheta, \alpha)$ называют *множителем системы*. Нормированная характеристика направленности системы есть

$$\Phi(\vartheta, \alpha) = F(\vartheta, \alpha) \frac{f(\vartheta, \alpha)}{f(\vartheta, \alpha)_{\max}}. \quad (49.5)$$

2. Система двух элементарных излучателей. Рассмотрим систему двух элементарных электрических излучателей, расположив

их, как показано на рис 49.2, а. Согласно (44.13) в этом случае формула (49.3) дает

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2} = -\dot{\Phi}_0 \frac{k}{4\pi\epsilon} \sin \vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} (\dot{p}_{m1} e^{ikr_1 \cos \psi_1} + \dot{p}_{m2} e^{ikr_2 \cos \psi_2}). \quad (49.6)$$

Здесь $\dot{F}(\vartheta, \alpha) = \dot{\Phi}_0 \sin \vartheta$; $\dot{A}_{mp} = -\frac{k^2 \dot{p}_{mp}}{4\pi\epsilon} (p = 1, 2)$; $r_1 = r_2 = \frac{a}{2}$.

Пусть излучатели синфазны и имеют одинаковые амплитуды ($\dot{p}_{m1} = \dot{p}_{m2} = \dot{p}_m$). В общем случае расположения точки $M(\mathbf{r})$, как

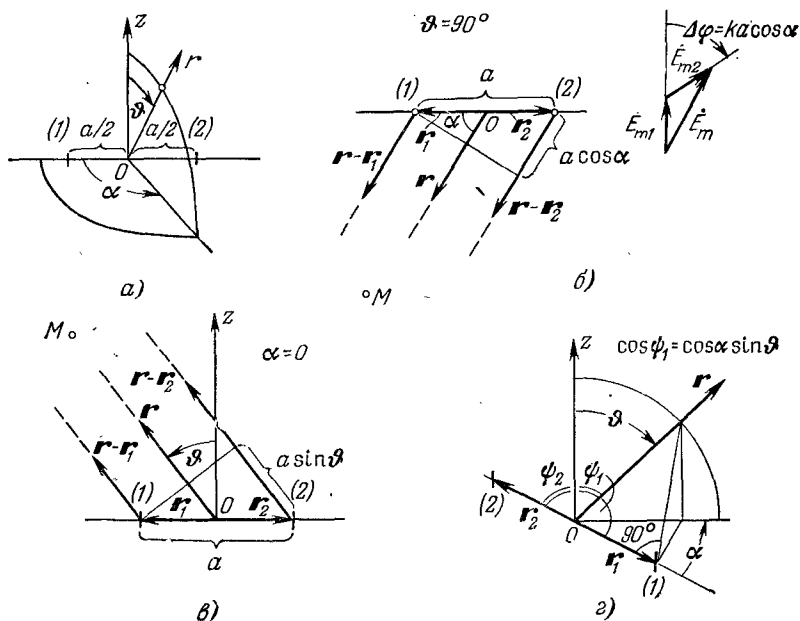


Рис. 49.2.

видно из построения на рис. 49.2, г, $\cos \psi_1 = \sin \vartheta \cos \alpha$ и $\psi_2 = 180^\circ - \psi_1$. Внося эти данные в (49.6), получаем

$$\dot{E}_m = -\dot{\Phi}_0 \frac{\dot{p}_m k^2}{2\pi\epsilon} \sin \vartheta \cos \left(\frac{ka}{2} \sin \vartheta \cos \alpha \right) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad (49.7)$$

так что $\Phi(\vartheta, \alpha) = \left| \sin \vartheta \cos \left(\frac{ka}{2} \sin \vartheta \cos \alpha \right) \right|$. В частности, когда точка наблюдения $M(\mathbf{r})$ лежит в горизонтальной плоскости, $\vartheta = 90^\circ$ (рис. 49.2, б) и $\Phi(\vartheta, \alpha) = \Phi(90^\circ, \alpha) = \left| \cos \left(\frac{ka}{2} \cos \alpha \right) \right|$.

Диаграммы направленности, являющиеся графиками этой функции представлены на рис. 49.3. Каждый излучатель в данной плоскости действует как изотропный ($F(\vartheta, \alpha) = |\sin 90^\circ| = 1$), но поле есть результат интерференции двух волн, имеющих в точке $M(\mathbf{r})$ в за-

висимости от угла α тот или иной фазовый сдвиг $\Delta\varphi$. Разность фаз $\Delta\varphi$ напряженностей $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ и $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ пропорциональна разности расстояний излучателей до $M(\mathbf{r})$, которая равна $a \cos \alpha$ (рис. 49.2, б), а именно $\Delta\varphi = ka \cos \alpha = 2\pi \frac{a}{\lambda} \cos \alpha$. Сложение комплексных амплитуд поясняется векторной диаграммой на рис. 49.2, б. Когда $\alpha = 90^\circ$, то $\Delta\varphi = 0$; таким образом, в направлении, лежащем перпендикулярно линии излучателей, напряженность поля \mathbf{E} удваивается. При отклонении от него \mathbf{E} падает тем быстрее, чем больше расстояние a между излучателями. Если $a \geq \lambda/2$, спад происходит до нуля, а затем с изменением α поле опять возрастает. Чем

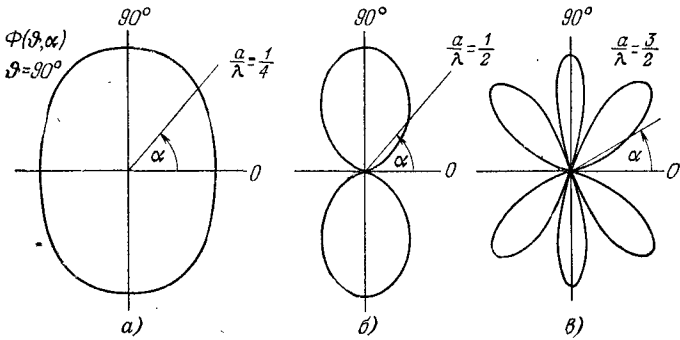


Рис. 49.3.

больше a , тем больше направлений, в которых излучение отсутствует ($\frac{a}{\lambda} \cos \alpha = \frac{n}{2}$, $n = \pm 1, \pm 3, \dots$), и соответственно направлений максимального излучения ($\frac{a}{\lambda} \cos \alpha = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Если точка наблюдения лежит в плоскости $\alpha = 0$ (рис. 49.2, в), то $\Phi(\vartheta, \alpha) = \Phi(\vartheta, 90^\circ) = \left| \sin \vartheta \cos \left(\frac{ka}{2} \sin \vartheta \right) \right|$. В этом случае проявляется направленность действия каждого излучателя.

Положим далее, что излучатели противофазны, т. е. $\dot{p}_{m1} = \dot{p}_m$ и $\dot{p}_{m2} = -\dot{p}_m$. Тогда вместо (49.7) находим

$$\dot{\mathbf{E}}_m = -\vartheta_0 \frac{i\dot{p}_m k^2}{2\pi\epsilon} \sin \vartheta \sin \left(\frac{ka}{2} \sin \vartheta \cos \alpha \right) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (49.8)$$

От синфазной рассматриваемая противофазная система отличается, в частности, тем, что в любом направлении, лежащем перпендикулярно линии излучателей, излучение отсутствует.

Наконец, электрические элементарные излучатели заменим магнитными. Из (49.3), используя (45.10), находим

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{E}}_{m2} = \alpha_0 \frac{k^2 W}{4\pi\mu} \sin \vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \left(\dot{m}_{m1} e^{ikr_1 \cos \vartheta_1} + \dot{m}_{m2} e^{ikr_2 \cos \vartheta_2} \right), \quad (49.9)$$

что аналогично выражению (49.6). Отсюда можно получить того же рода частные результаты.

3. Пример многоэлементной системы. Рассмотрим систему элементарных электрических излучателей, размещенных эквидистантно, т. е. на равных расстояниях, вдоль прямой; расположение системы координат показано на рис. 49.4, а. Согласно (44.13) и (49.3)

$$\dot{E}_m = \sum_{p=1}^N \dot{E}_{mp} = -\dot{\Phi}_0 \frac{k^2}{4\pi\epsilon} \sin\vartheta \frac{e^{-ikr}}{r} \sum_{p=1}^N \dot{p}_{mp} e^{ikr_p \cos\psi_p}. \quad (49.10)$$

В данном случае $r_p = (p-1)d$ ($p = 1, 2, \dots, N$), а угол ψ_p — один и тот же для всех p , так как радиус-векторы \mathbf{r}_p параллельны. Очевидно, что ψ_p — это то же, что ψ_1 на рис. 49.2, з; поэтому $\cos\psi_p = \sin\vartheta \cos\alpha$.

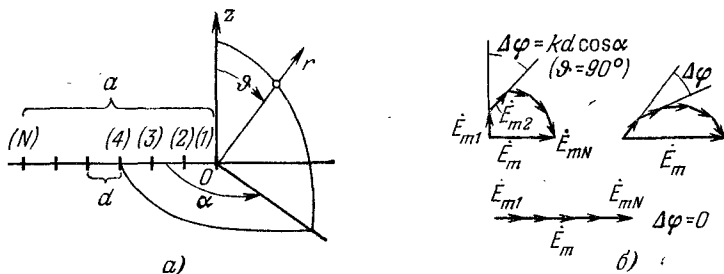


Рис. 49.4.

Пусть амплитуды и фазы всех излучателей одинаковы ($\dot{p}_{mp} = \dot{p}_m$ для всех p). При этом в (49.10) суммируется геометрическая прогрессия

$$\sum_{p=1}^N e^{ikr_p \cos\psi_p} = \frac{e^{iNkd \sin\vartheta \cos\alpha} - 1}{e^{ikd \sin\vartheta \cos\alpha} - 1}.$$

После очевидного преобразования получаем

$$\dot{E}_m = -\dot{\Phi}_0 \frac{\dot{p}_m}{4\pi\epsilon} k^2 e^{-ik\left(r - \frac{N-1}{2} d \sin\vartheta \cos\alpha\right)} \frac{\sin\left(\frac{N}{2} k d \sin\vartheta \cos\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} k d \sin\vartheta \cos\alpha\right)}. \quad (49.11)$$

Остановимся на случае, когда точка наблюдения $M(\mathbf{r})$ лежит в плоскости $\vartheta = 90^\circ$ (в (49.11) $\sin\vartheta = 1$); при этом $\Phi(\vartheta, \alpha) = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin\left(\frac{N}{2} k d \cos\alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2} k d \cos\alpha\right)} \right|$. В направлении нормали к линии излучателей ($\alpha = 90^\circ$) их поля складываются в фазе: $\Delta\varphi = 0$ (см. диаграмму на рис. 49.4, б). Отношение синусов в (49.11) при этом становится неопределенностью типа $0/0$, которая раскрывается как N : амплитуда поля возрастает в N раз в сравнении со случаем одиночного излучателя. Типичная диаграмма направленности системы при $Nd \gg \lambda$ и $d < \lambda$ представлена на рис. 49.5, а, а также на

рис. 49.5, б в виде прямоугольного графика. За основным максимумом излучения, повторяющимся через 180° , следует ряд «бс-ковых лепестков» диаграммы.

Определим ширину главного максимума излучения, т. е. угловое расстояние $2\Delta\alpha_0$ (рис. 49.5, б) между ближайшими к нему направлениями, в которых излучение отсутствует. Очевидно,

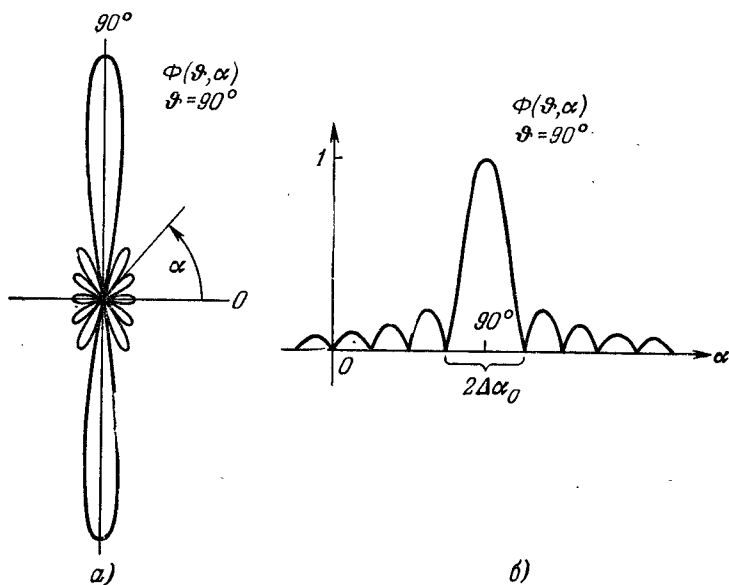


Рис. 49.5.

$\sin \left[\frac{N}{2} k d \cos (90^\circ \pm \Delta\alpha_0) \right] = 0$, причем имеется в виду низший корень синуса, так что

$$\frac{N}{2} k d \sin \Delta\alpha_0 = \pi. \quad (49.12)$$

При $N d \gg \lambda$ величина $\sin \Delta\alpha_0$, будучи малой, может быть заменена через $\Delta\alpha_0$. Таким образом,

$$2\Delta\alpha_0 \approx 2 \frac{\lambda}{N d}. \quad (49.13)$$

Существенно, что ширина главного максимума $2\Delta\alpha_0$ зависит не от числа излучателей синфазной системы, а от ее «приведенной длины» $N d$. Чем больше число излучателей, тем ближе $N d$ к действительной длине системы $a = (N-1) d$.

Если $d \geq \lambda$, то, кроме $\alpha = 90^\circ$ и $\alpha = 270^\circ$, имеются также и другие направления, для которых волны всех излучателей синфазны и, налагаясь, порождают главные максимумы излучения ($\vec{E}_m = N \vec{E}_{m0}$). Вообще условием главного максимума является превра-

щение \dot{E}_m (49.11) в неопределенность типа $0/0$, а это будет, когда аргумент синуса в знаменателе принимает значения $n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

4. Заключительные замечания. Понятие системы излучателей широко используется в теории антенн. Наряду с дискретными рассматриваются и непрерывные системы. Пусть, например, надо определить поле излучения, создаваемое током $I^{CT}(l)$ в проводе l произвольной формы (рис. 49.6, а). Каждый элемент провода примем

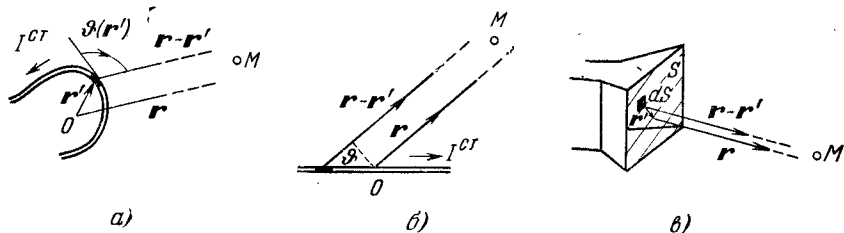


Рис. 49.6.

за элементарный электрический излучатель, комплексная амплитуда момента которого определяется на основании (44.4): $d\dot{p}_m = -i \frac{j_m^{CT}(l)}{\omega} dl$. Внося $d\dot{p}_m$ в (44.13), находим комплексную амплитуду $d\dot{E}_m$ его поля в дальней зоне. Провод предстает как непрерывная система таких излучателей, и его поле — как наложение всех элементарных полей $d\dot{E}_m$, т. е. как интеграл: $\dot{E}_m = \int d\dot{E}_m dl$. Этим

путем можно получить, в частности, выражение поля излучения прямолинейного провода (рис. 49.6, б) (ср. § 44, п. 5). Анализ ряда антенн, например так называемой рупорной (рис. 49.6, в), сводится к тому, что, выделяя некоторую «поверхность раскрыва» S , принимают ее за непрерывную систему излучателей типа обобщенного элемента Гюйгенса (§ 47, п. 3, окончание). Такой подход будет применен позднее (§ 53) к некоторым задачам дифракции.

Наконец, рассмотрим действие излучателей в полупространстве, ограниченном идеально проводящей плоскостью. Как будет, например, вести себя перпендикулярный границе элементарный электрический излучатель (рис. 49.7, а)? Легко убедиться, что поле излучения оказывается при этом таким, как если бы имелась система двух одинаковых излучателей — рассматриваемого и фиктивного, расположенного по другую сторону границы, как показано на рис. 49.7, б. Это видно из приведенной картины силовых линий: суммарное электрическое поле лишено тангенциальной компоненты на поверхности проводника и, таким образом, удовлетворяет обязательному граничному условию. Заметим, что фиктивный диполь Герца можно было бы построить как «зеркальное изображение» (ср. § 17, п. 4) действительного, рис. 49.7, в. Пользуясь формулами (49.3) и (44.13), найдем комплексную амплитуду вектора поля

излучения диполя Герца, расположенного над плоскостью на высоте h перпендикулярно:

$$\dot{E}_m = -\vartheta_0 \frac{\dot{p}_m k^2}{2\pi\epsilon} \sin\vartheta \cos(kh \cos\vartheta) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (49.14)$$

Если элементарный электрический излучатель ориентирован параллельно идеально проводящей границе, то дополнительный

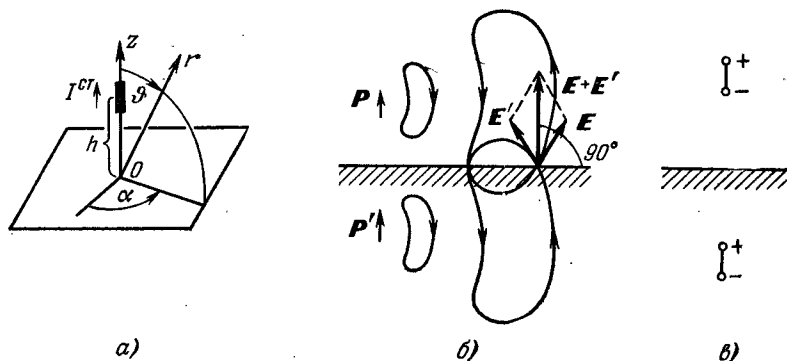


Рис. 49.7.

фиктивный излучатель должен быть направлен противоположно (рис. 49.8, а, б, в), т. е. является противофазным. Определяя поле

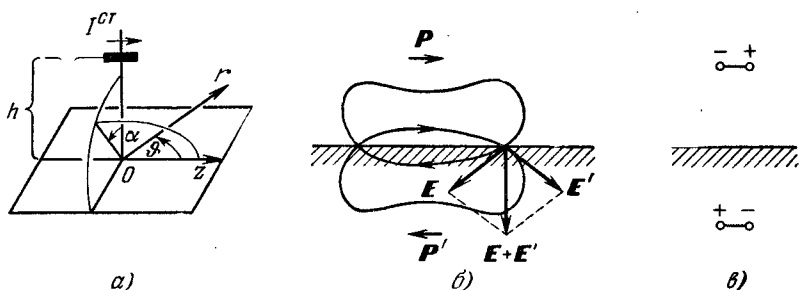


Рис. 49.8.

излучения как результат действия системы двух элементов, находим согласно (49.8)

$$\dot{E}_m = -\vartheta_0 \frac{i\dot{p}_m}{2\pi\epsilon} k_2 \sin\vartheta \sin(kh \sin\vartheta \cos\alpha) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (49.15)$$

Аналогично исследуется влияние идеально проводящей плоскости на элементарный магнитный излучатель. Фиктивный диполь подбирается здесь так, чтобы на проводящей поверхности уничтожалась нормальная магнитная компонента. Поэтому для перпендикулярного плоскости излучателя (рис. 49.9, а) дополнительный

оказывается противофазным (рис. 49.9, б, в), а для параллельного (рис. 49.10, а) — синфазным (рис. 49.10, б, в). Соответствующее правило построения зеркального изображения в сравнении со случаем

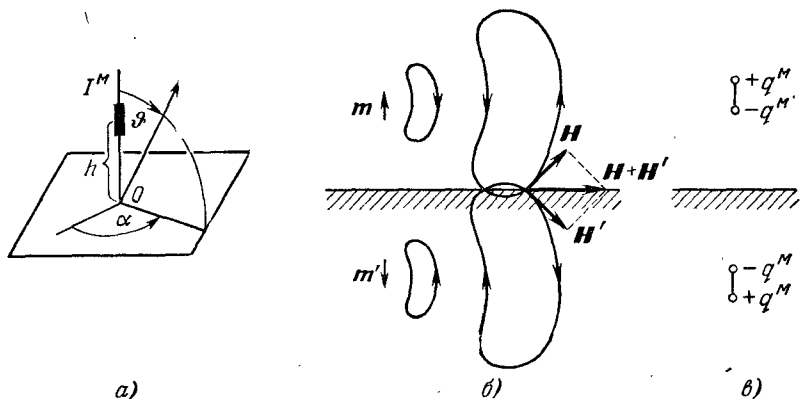


Рис. 49.9.

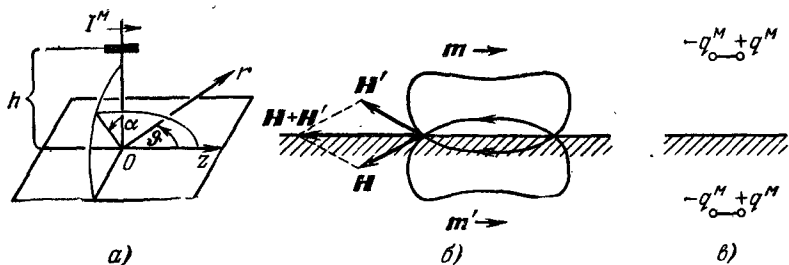


Рис. 49.10.

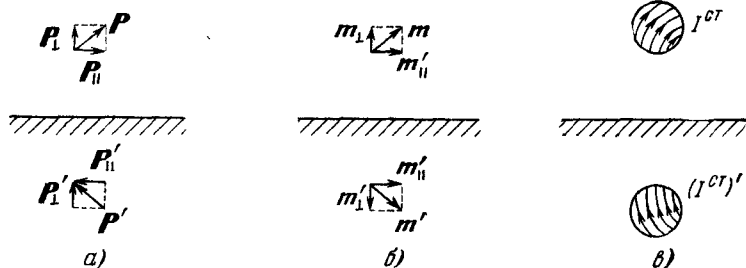


Рис. 49.11.

электрических излучателей изменяется (рис. 49.9, в и рис. 49.10, в). Выражения комплексных амплитуд векторов поля излучения читателю предлагается получить самостоятельно.

Действие идеально проводящей плоскости при произвольной ориентации элементарных излучателей сводится к рассмотренным

случаям, поскольку моменты p и m можно разложить на перпендикулярные и параллельные плоскости составляющие (рис. 49.11, а, б). Нетрудно распространить полученные результаты и на произвольные распределения токов, так как в качестве элементарных излучателей можно рассматривать их элементы (рис. 49.11, в).

II. ДИФРАКЦИЯ

Происхождение термина *дифракция* связано с волновой оптикой, возникшей задолго до электромагнитной теории света и современной электродинамики. При изучении света к дифракционным относят те явления, в которых заметны отклонения от правил, предписываемых геометрической оптикой.

Подчеркнем, что в большей или меньшей степени такие отклонения должны иметь место всегда, поскольку концепции геометрической оптики являются приближенными. Действительно, представление о лучах, подчиненных законам Снеллиуса (§ 37, п. 2), строго говоря, справедливо лишь для единственного идеализированного случая падения плоской однородной волны на плоскую бесконечную границу, разделяющую два разнородных полупространства. В геометрической же оптике законы Снеллиуса применяются при рассмотрении реальных тел ограниченных размеров. При этом, в частности, получается, что непрозрачное тело, «препятствие», на которое падает свет, должно отбрасывать резкую тень (так что на границе тени интенсивность света, т. е. напряженность поля, скачкообразно спадает до нуля). В действительности резких теней не бывает; свет в той или иной степени «огibtает препятствие» и проникает за предсказываемую границу тени, вблизи которой наблюдаются пространственные колебания интенсивности. Это *дифракционное явление* имеет тем большее значение для процесса распространения света в целом, чем сильнее нарушается характерное для геометрической оптики условие, что все размеры рассматриваемых объектов намного превосходят длину волны ($d \gg \lambda$).

В радиотехнической практике относительные размеры объектов d/λ обычно гораздо меньше, чем в оптике; поэтому концепции геометрической оптики часто вообще неприменимы, и говорить о дифракции как об отклонении от нормы уже нелогично. Тем не менее термин *дифракция* остается весьма употребительным. Ниже будет объяснено, что понимается при этом под явлениями и задачами дифракции.

§ 50. Явления и задачи дифракции. Предельные случаи

1. Содержание задач дифракции. Прежде всего надо выделить класс электромагнитных процессов, подлежащих рассмотрению. Напомним, что в §§ 36—39 были описаны простейшие волновые процессы, происходящие при наличии разнородных сред. Общая картина их укладывается в схему, представленную на рис. 50.1, а.

Плоская однородная волна E^0, H^0 , падающая на плоскую границу раздела сред 1 и 2, частично проходит через нее, продолжая распространяться в виде волны E^+, H^+ в измененном направлении, — преломляется, частично же *отражается* в виде волны E^-, H^- ; граница служит при этом как бы источником обратной волны. С точки зрения геометрической оптики процесс вполне характеризуется показанными на рис. 50.1, а тремя лучами; стрелки указывают также направления вектора Пойнтинга для трех отмеченных плоских волн.

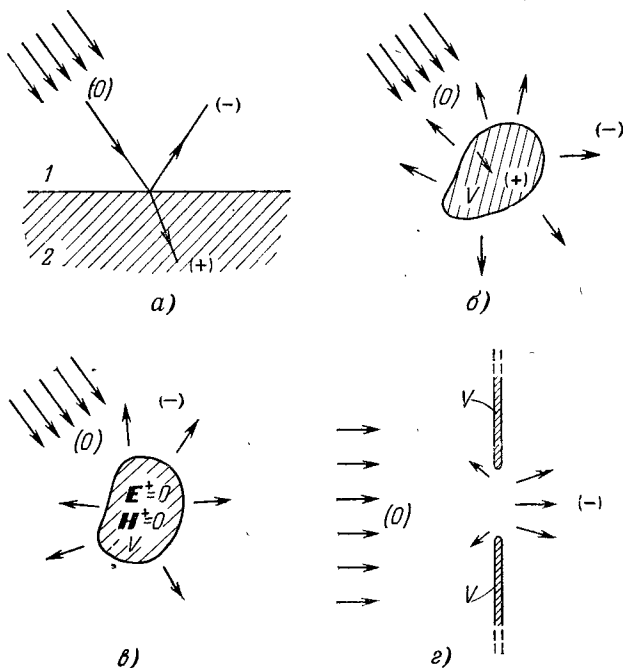


Рис. 50.1.

Возьмем теперь вместо полупространства, заполненного средой 2, ограниченное тело V (рис. 50.1, б). Падающая волна E^0, H^0 , которая может быть, как и ранее, плоской и однородной, возбуждает внутри тела V поле E^+, H^+ , а вне его появится дополнительно поле E^-, H^- . Схема волнового процесса, как будто бы осталась прежней: энергия падающей волны частично проникает в среду 2, а в среде 1 возникает движение энергии от границы раздела. Однако поля E^+, H^+ и E^-, H^- уже не являются плоскими волнами; поэтому электродинамическая задача стала существенно сложнее. Это задача дифракции. Мы будем называть E^+, H^+ внутренним полем дифракции и E^-, H^- — внешним полем дифракции, а также полем рассеяния. Разумеется, преломленную и отраженную волны в случае плоской границы раздела сред можно рассматривать как простейшие формы этих полей.

Рис. 50.1, б даёт весьма общий образ задачи дифракции; заметим, что среда в V может быть и неоднородной. Правда, более общими являются условия, когда не существует локализованного в пространстве тела V , являющегося объектом дифракции, а вся среда неоднородна. Но при этом обычно уже невозможно или нецелесообразно расчленять электромагнитное поле на компоненты $E^0, H^0; E^+, H^+$ и E^-, H^- , так что не употребляется и понятие дифракции.

Поскольку реальные объекты дифракции часто бывают металлическими, особый интерес представляет частный класс дифракционных задач, в которых тело V берется идеально проводящим. При этом внутреннее поле отсутствует (идеальный скин-эффект, § 40) и определению подлежит только поле рассеяния, возникающее при действии той или иной падающей волны (рис. 50.1, в). Тело V , в частности, может иметь вид бесконечного идеально проводящего экрана с отверстием; в этом случае говорят о *дифракции на отверстии* (рис. 50.1, г).

Сущность волнового процесса в задаче дифракции (как, впрочем, и при падении волны на плоскую границу раздела сред) можно видеть в том, что объект V , возбуждаясь под действием падающей волны, ведет себя как излучатель дополнительного волнового поля, т. е., как еще говорят, «переизлучатель» (по отношению к первичной падающей волне). Тут же отметим, что разница между задачами дифракции и задачами об излучении («антенными») в ряде случаев чисто условна. Антенна, например, может состоять из некоторого первичного источника и облучаемого им пассивного тела, объекта дифракции.

Итак, задача дифракции заключается в нахождении внешнего и внутреннего полей дифракции при заданной падающей волне для того или иного объекта V . «Явлением дифракции», очевидно, следовало бы называть сам происходящий электромагнитный процесс, но не нужно забывать, что традиционный смысл этого термина значительно уже (см. стр. 280).

Задачи дифракции — при всей простоте общей схемы — обычно являются трудными математически и в большинстве случаев рассматриваются при различных упрощающих предположениях.

2. Предел геометрической оптики. При неограниченном возрастании частоты ($\omega \rightarrow \infty, \lambda \rightarrow 0$) для всякой границы раздела сред

$$R_{\min}/\lambda \rightarrow \infty, \quad (50.1)$$

где R_{\min} — наименьший радиус кривизны (разумеется, при этом заведомо $d/\lambda \rightarrow \infty$, где d — любой из размеров тела). Граница является, можно сказать, локально плоской, и в каждой ее точке применимы законы Снеллиуса, т. е. можно, построив касательную плоскость, рассматривать картину падающего, отраженного и преломленного лучей (рис. 50.2, а). Соотношение (50.1) определяет, таким образом, предельный класс задач дифракции; мы будем употреблять выражение *предел геометрической оптики*.

Положим, что объект дифракции V есть однородное тело с гладкой поверхностью, причем для любой ее точки

$$R_{\min}/\lambda_{\max} \gg 1, \quad (50.2)$$

где λ_{\max} — длина волны для той из сред (тело V или его внешность), где она больше. Чем выше степень выполнения этого неравенства, тем ближе мы к пределу геометрической оптики. Пусть на рассматриваемое тело падает плоская однородная волна, которая теперь описывается как параллельный пучок лучей. На основании законов Снеллиуса, в принципе, можно проследить ход каждого луча. Правда, учет многократных отражений в случае прозрачного или вогнутого непрозрачного тела (рис. 50.2, б) может быть довольно сложным. Но часто построения можно довести до конца.

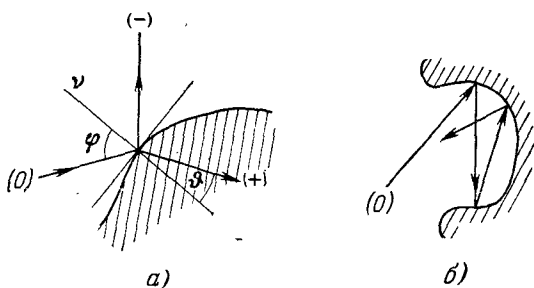


Рис. 50.2.

В качестве примера ¹⁾ падения плоской волны на непрозрачное выпуклое тело возьмем случай идеально проводящего цилиндра; волна распространяется перпендикулярно его оси (рис. 50.3, а). Сосредоточим внимание на двух лучах, соответствующих падающей волне и идущих на расстоянии Δy . Один из них отражается в точке P_1 , которая видна из начала координат O под углом φ (по отношению к направлению $-x$), и направлен, следовательно, с этого момента под углом 2φ . Второй луч отражается в точке P_2 . Поскольку $\angle P_1OP_2 = \Delta\varphi$, то этот луч идет далее под углом $2(\varphi + \Delta\varphi)$. Проследив ход лучей, нетрудно заметить, что ограниченный ими пучок стал после отражения расходящимся. Но так как связанный с ним поток энергии не изменился, то плотность последнего Π уменьшилась. Можно считать, что в сечении пучка с поперечными размерами Δy и Δl (ввиду малости $\Delta\varphi$ дугу Δl считаем элементом прямой) абсолютные значения среднего вектора Пойнтинга $\bar{\Pi}|_{\Delta l} = \bar{\Pi}^-(2\varphi)$ и $\bar{\Pi}|_{\Delta y} = \bar{\Pi}^0$ относятся, как Δy и Δl , причем $\Delta y \approx R \Delta\varphi \cos \varphi$ и $\Delta l \approx r' 2\Delta\varphi$ (r' — расстояние от O' до сечения Δl), так что

$$\frac{\bar{\Pi}^-(2\varphi)}{\bar{\Pi}^0} \approx \frac{R}{2r'} \cos \varphi. \quad (50.3)$$

¹⁾ Заимствовано из [Г. 4].

Указывающий направление отраженного луча угол 2φ заменим координатным углом α , отсчитываемым от положительной оси ($\alpha = 180^\circ - 2\varphi$), и учтем, что для больших расстояний $r' \approx r$. Таким образом, при $r \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{\Pi}^-(\alpha)}{\bar{\Pi}^0} = \frac{R}{2r} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (50.4)$$

Поскольку $\bar{\Pi}^-(180^\circ) = \bar{\Pi}^-_{\max}$, то функция $F(\alpha) = \sqrt{\bar{\Pi}^-(\alpha)} / \sqrt{\bar{\Pi}^-(180^\circ)} = \sqrt{\sin \frac{\alpha}{2}}$ может рассматриваться как нормированная характеристика направленности для поля рассеяния. Она представлена на рис. 50.3, б в виде соответствующей диаграммы направленности.

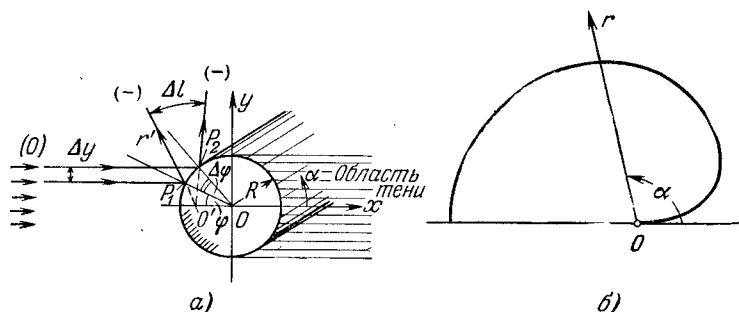


Рис. 50.3.

Угловая ширина области тени есть $\tau = \text{arctg } 2R/r \approx 2R/r$. Это угол, под которым с расстояния r виден диаметр цилиндра. По мере удаления точки наблюдения τ неограниченно уменьшается, так что из (50.4) имеем $\tau = 0$.

3. Зеркала и линзы. Плоский проводящий лист, размеры которого значительно превышают длину волны, будучи объектом дифракции, ведет себя, как зеркало. Схема отражения от него плоской волны представлена на рис. 50.7, б. Согласно первому закону Снеллиуса отраженный пучок лучей идет симметрично падающему; область тени находится из простейших геометрических соображений. Следует, однако, иметь в виду, что условие применимости правил геометрической оптики $R \gg \lambda$ не выполняется на краях листа. Представленная картина оказывается, таким образом, верной с точностью до краевого дифракционного эффекта.

В антенной технике нередко применяются фокусирующие зеркала. Можно представить себе зеркало такой формы, что параллельный пучок лучей после отражения сходится в одну точку, т. е. падающая плоская волна превращается (в ограниченной области) в волну сферическую (рис. 50.4, а). Если в эту точку, называемую *фокусом*, поместить источник сферической волны, то при отражении от зеркала она преобразуется в плоскую (рис. 50.4, б). Как определить требуемую форму зеркала? Чтобы излучаемая в точке O

(рис. 50.4, в) сферическая волна после отражения превращалась в плоскую, надо выполнить условие постоянства фазы в предполагаемой плоскости ее фронта; последняя же пересекает под прямым углом отраженный параллельный пучок лучей. Это значит, что изменение фазы вдоль пути $OP(x, y)$ M должно быть таким же, как и вдоль $OP(-f, 0)$ O : $k(r + d) = 2kf$, или $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 2f$. Отсюда в результате простых преобразований получаем

$$y^2 = 2p(x - x_0), \quad (50.5)$$

где $p = 2f$ и $x_0 = -f$. Это уравнение *параболы*; величина f называется ее фокусным расстоянием. Зеркало, следовательно, должно иметь параболический профиль. Оно — параболоид вращения.

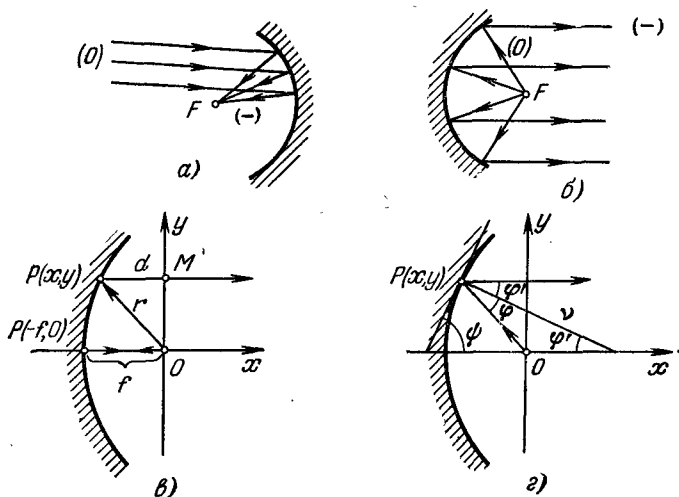


Рис. 50.4.

Остается проверить, что отражение лучей происходит в соответствии с первым законом Снеллиуса. В точке отражения $P(x, y)$ (рис. 50.4, г) проведем нормаль v и покажем, что угол падения φ и угол отражения φ' действительно равны. Согласно (50.5) для данной параболы $y' = 2f/y$. Поскольку $y' = \operatorname{tg} \psi = \operatorname{ctg} \psi'$, то $\operatorname{tg} \psi' = y/2f$. Достаточно установить, что $\varphi + \psi' = 2\psi'$. Очевидно, $\operatorname{tg}(\varphi + \psi') = -y/x$. Но $\operatorname{tg} 2\psi' = 2\operatorname{tg} \psi' / (1 - \operatorname{tg}^2 \psi') = (y/f) / [1 - (y/2f)^2]$. Внося в знаменатель выражение y^2 из (50.5), убеждаемся, что $\operatorname{tg} 2\psi' = -y/x$.

Линза — диэлектрическое тело — падающую на нее плоскую волну преобразует (в некоторой области) в прошедшую сферическую, которая сходится в фокусе, а падающую сферическую — в плоскую, рис. 50.5, а, б.

Пусть линза ограничена плоскостью и выпуклой поверхностью; определим форму последней. Чтобы излучаемая в точке O сфериче-

ская волна (рис. 50.5, в) превращалась в плоскую, плоскость, след которой показан пунктиром, должна быть синфазной. Потребуем поэтому, чтобы изменение фазы вдоль путей r и $f + d$ было одинаковым, т. е. $k_1 r = k_2 f + k_2 d$, где k_1 и k_2 — волновые числа для

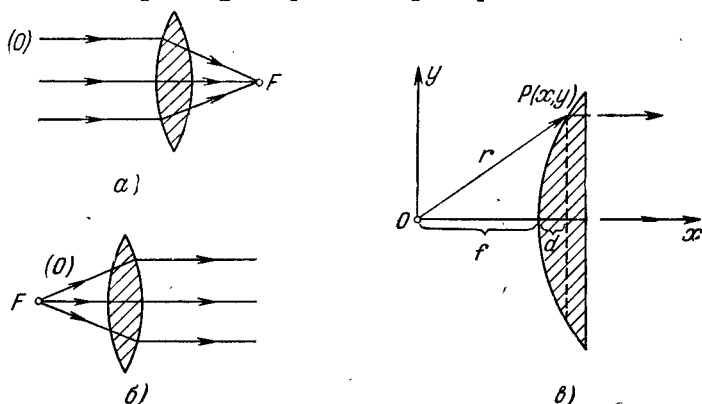


Рис. 50.5.

внешней среды и диэлектрика линзы. Введем относительный показатель преломления $k_2/k_1 = n_{21} = n$; теперь $\sqrt{x^2 + y^2} = f + n(x-f)$. Отсюда получаем уравнение гиперболы

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (50.6)$$

где $x_0 = \frac{nf}{n+1}$, $a^2 = \frac{f^2}{(n+1)^2}$ и $b^2 = f^2 \frac{n-1}{n+1}$. Итак, линза ограничена гиперболоидом вращения.

Как и в случае зеркала, можно проверить, что правила геометрической оптики выполняются; в данном случае речь идет о втором законе Снеллиуса. При выводе уравнений (50.5) и (50.6) принимались во внимание лишь изменения фазы вдоль предполагаемых лучей. Почему этого оказывается достаточным? На данный вопрос мы ответим несколько позднее (стр. 000).

Подчеркнем еще раз, что зеркала и линзы производят желательное действие лишь на участок фронта падающей волны; впрочем, последняя может быть настолько неоднородна, что вне области действия зеркала или линзы поле практически отсутствует (пучок лучей ограничен). Надо также иметь в виду, что краевые эффекты с помощью представления о лучах не могут быть исследованы: здесь нарушается условие $R \gg \lambda$. Наконец, говоря о линзе, мы не рассматривали отражение.

4. Квазистационарный предел. В пределе при $\omega \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$, $\dot{k} \rightarrow 0$) электромагнитное поле становится стационарным; однородные уравнения Гельмгольца (29.20) и (29.21) переходят при этом в уравнения Лапласа (14.15) и (21.7).

Пусть тело V , являющееся объектом дифракции, мало в сравнении с длиной волны, т. е.

$$D_{\max}/\lambda_{\min} \ll 1, \quad (50.7)$$

где D_{\max} — наибольший размер тела, а λ_{\min} — длина волны в той из сред (тело V или его внешность), где она меньше. В таком случае можно пренебречь различием фаз в разных точках объекта дифракции ($e^{-ikD} \approx 1$) и он выступает как квазистационарный. Поэтому оправдана приближенная постановка задачи, состоящая в том, что вместо уравнений Гельмгольца (29.20) и (29.21) при нахождении поля в V используются получаемые из них при $\omega = 0$ уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_m = 0 \quad (50.8)$$

и

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m = 0. \quad (50.9)$$

Это квазистационарный предел в задаче дифракции.

Рассмотрим в квазистационарном приближении дифракцию плоской однородной волны на малой сфере V (рис. 50.6, а) с проницаемостями ε_i и μ_i (проницаемости внешней среды μ_e и ε_e). Взяв

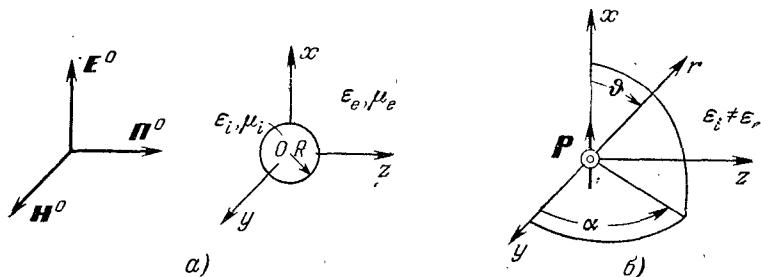


Рис. 50.6.

декартову систему координат с началом в центре сферы, запишем комплексные амплитуды векторов \mathbf{E}^0 и \mathbf{H}^0 падающей волны:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ik_e z}, & \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= \mathbf{y}_0 \frac{\dot{A}}{W_e} e^{-ik_e z}, \\ k_e &= \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}, & W_e &= \sqrt{\mu_e / \varepsilon_e}. \end{aligned} \right\} \quad (50.10)$$

Желая найти внутреннее дифрагированное поле \mathbf{E}^+ , \mathbf{H}^+ , мы должны решить две независимые граничные задачи для уравнений Лапласа (50.8) и (50.9). При этом можно воспользоваться уже известными решениями соответствующих задач электростатики и магнитостатики (§ 20, п. 3 и § 21, п. 2). Если, в частности, $\mu_i = \mu_e$, то в соответствии с (20.28) и (21.9)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^+ &= \frac{3\varepsilon_e}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_e} \dot{\mathbf{E}}_m^0, \\ \dot{\mathbf{H}}_m^+ &= \dot{\mathbf{H}}_m^0, \end{aligned} \right\} \quad z \approx 0 \quad (50.11)$$

(в данном приближении вектор \mathbf{H}^0 падающей волны внутри тела не испытывает изменений).

В однородном электростатическом поле диэлектрическая сфера ведет себя, как диполь с моментом, определяемым формулой (20.29). Таким образом, под воздействием падающей волны сфера приобретает колеблющийся электрический момент, комплексная амплитуда которого есть

$$\dot{\mathbf{p}}_m = 4\pi R^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} \epsilon_e \dot{\mathbf{E}}_m^0 \Big|_{z=0}. \quad (50.12)$$

Это значит, что она становится элементарным электрическим излучателем, и поле рассеяния \mathbf{E}^- , \mathbf{H}^- можно найти по формулам из § 44, внося в них выражение $\dot{\mathbf{p}}_m$ (50.12). Интересуясь дальнейшей зоной, на основании (44.13) получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^- &= -\alpha_0 R^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} k_e^2 A \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-ik_e r}, \\ \dot{\mathbf{H}}_m^- &= -\alpha_0 R^3 \frac{\epsilon_i - \epsilon_e}{\epsilon_i + 2\epsilon_e} k_e^2 \frac{A}{W_e} \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-ik_e r} \end{aligned} \right\} \quad (50.13)$$

(ориентация сферической системы координат показана на рис. 50.6, б).

Малая сфера, у которой $\epsilon_i = \epsilon_e$ и $\mu_i \neq \mu_e$, как объект дифракции подобна элементарному магнитному излучателю. Если же $\epsilon_i \neq \epsilon_e$ и $\mu_i \neq \mu_e$, то рассеяние аналогично излучению элемента Гюйгенса (§ 47, п. 3). Эти случаи читателю рекомендуется рассмотреть самостоятельно в качестве упражнения.

5. Заключительные замечания. Существует много практически интересных задач, которые можно отнести к рассмотренным предельным случаям дифракции. Особенное значение имеет предел геометрической оптики; позднее (§§ 56, 57) мы еще вернемся к методам геометрической оптики. Однако идеальные предельные процессы лишены характерных черт дифракционных явлений. В действительности к ним можно лишь в той или иной степени приблизиться, и всегда будут наблюдаться некоторые отклонения; последние могут представлять интерес, даже когда они малы.

В качестве характеристики объекта дифракции часто используется понятие *поперечного сечения рассеяния*. Это отношение полного потока энергии рассеяния, т. е. потока вектора $\bar{\mathbf{P}}^-$ через какую-либо поверхность Σ , охватывающую объект дифракции (рис. 50.7, а), к абсолютному значению вектора $\bar{\mathbf{P}}^0$ падающей волны:

$$S_{\perp} = \frac{\bar{P}^-}{\bar{P}^0} = \frac{1}{\bar{P}^0} \oint_{\Sigma} \bar{\mathbf{P}}^- \cdot d\mathbf{s}. \quad (50.14)$$

Возьмем простейший случай, когда на пути электромагнитной волны находится металлическая пластина больших размеров с площадью S . Полагая ее идеально проводящей, вычислим поток энергии отраженной волны в приближении геометрической оптики (рис. 50.7, а):

$$\bar{P}_{\text{отр}} = \bar{\mathbf{P}}^- S \cos \varphi = \bar{\mathbf{P}}^0 S \cos \varphi. \quad (50.15)$$

Однако это еще не полный поток энергии рассеяния: существование области тени следует рассматривать как результат наложения на падающую волну E^0 , H^0 поля рассеяния $-E^0$, $-H^0$; последнее

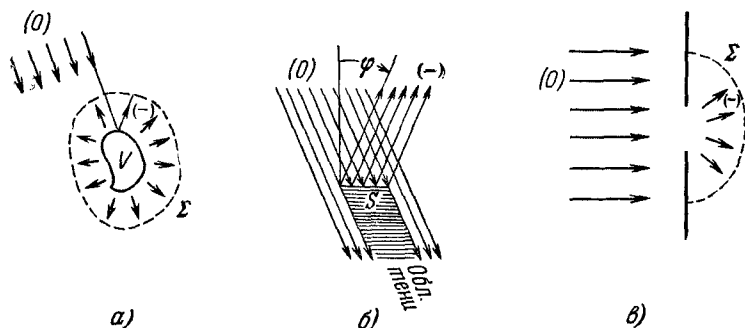


Рис. 50.7.

создает такой же поток энергии, как и отраженная волна. Полный поток энергии рассеяния поэтому вдвое больше, чем $\bar{P}_{отр}$:

$$\bar{P}^- = 2\bar{P}_{отр},$$

и поперечное сечение рассеяния равно

$$S_{\perp} = \frac{\bar{P}^-}{\Pi^0} = 2S \cos \varphi. \quad (50.16)$$

При нормальном падении оно вдвое превышает площадь отражающей пластины.

В случае дифракции на отверстии (рис. 50.7, в) вводят понятие *поперечного сечения прохождения*

$$T_{\perp} = \frac{\bar{P}^-}{\Pi^0} = \frac{1}{\Pi^0} \int_{\Sigma'} \bar{\Pi}^0 ds. \quad (50.17)$$

Смысл величины T_{\perp} очень прост: это площадь отверстия в экране, которое в условиях применимости геометрической оптики пропускает такой же поток энергии, как и рассматриваемое отверстие в заданных условиях.

Сделаем еще замечание о применении принципа взаимности (§ 48, п. 2). Предположим, что решена задача о дифракции волны отдаленного элементарного излучателя A на теле V (рис. 50.8).

Это, в частности, означает, что его полное поле E_A , H_A вблизи V известно, и, поместив там другой элементарный излучатель B , мы

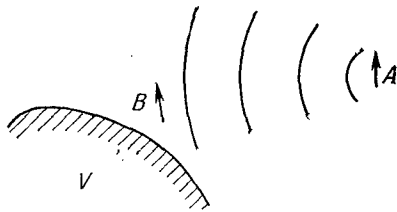


Рис. 50.8.

можем вычислить величину $I_{mB}^{ст} \dot{E}_{mA} I_B$. Однако ввиду принципа взаимности в форме (48.15а), (48.16)

$$i_{mB}^{ст} \dot{E}_{mA} I_B = i_{mA}^{ст} \dot{E}_{mB} I_A. \quad (50.18)$$

Отсюда можно найти напряженность поля E_B излучателя B в точке локализации излучателя A ; точнее говоря, вычисляется одна проекция вектора \dot{E}_{mB} , но тем же путем определяются и оставшиеся две проекции. Итак, зная решение задачи дифракции на теле V , получаем возможность учитывать его влияние на действие близко расположенного излучателя. Это способ, позволяющий, например, исследовать антенны, находящиеся в непосредственной близости Земли, на летательных аппаратах и в иных условиях.

§ 51. Дифракция на цилиндре: пример строгого решения задачи

1. О строгих решениях задач дифракции. Вернемся к общей схеме дифракционной задачи, представленной на рис. 50.1, б. При постановке той или иной конкретной задачи дифракции задаются геометрические и электродинамические характеристики тела V и падающая волна E^0, H^0 ; внешняя среда обычно — вакуум. Требуется же найти решение уравнений Максвелла E, H такое, что $E = E^+, H = H^+$ в V и $E = E^0 + E^-, H = H^0 + H^-$ вне V . При этом на границе S тела V должны соблюдаться известные из § 7 условия. Непрерывность тангенциальных компонент векторов E, H и нормальных компонент векторов B, D означает в данном случае выполнение равенств: $E_t^0 + E_t^- = E_t^+, H_t^0 + H_t^- = H_t^+, D_v^0 + D_v^- = D_v^+, B_v^0 + B_v^- = B_v^+$. В случае, когда тело V является идеальным проводником, граничные условия имеют вид

$$E_t^0 + E_t^- = 0, \quad [v_0, H^0 + H] = \eta, \quad D_v^0 + D_v^- = \xi, \quad B_v^0 + B_v^- = 0.$$

Внешнее поле дифракции E^-, H^- должно также удовлетворять требованиям, которые предъявляются к решениям внешних задач электродинамики (§ 31, п. 2, (П5.24), § 43, п. 3).

Таким образом, нахождение поля дифракции E^\pm, H^\pm требует решения *краевой задачи* для уравнений электродинамики. Получаемые при этом выражения поля E^\pm, H^\pm называют «строгим решением» задачи дифракции.

Строгие решения задач дифракции, как правило, не удается получить в замкнутой аналитической форме. Для некоторых геометрически простых случаев они выражаются в виде функциональных рядов¹⁾. Характерным примером является рассматриваемая ниже задача дифракции плоской волны на цилиндре.

¹⁾ Интенсивно разрабатываются математические методы решения задач дифракции для тел произвольной формы, приводящие к алгоритмам, реализуемым на быстродействующих вычислительных машинах.

2. Дифракция на цилиндре; получение решения. Итак, в качестве объекта дифракции возьмем бесконечный круговой цилиндр в пустоте (рис. 51.1). Проницаемости среды можно, таким образом, представить как кусочно-постоянные функции радиальной координаты: $\dot{\epsilon}(\mathbf{r}) = \dot{\epsilon}$, $\dot{\mu}(\mathbf{r}) = \dot{\mu}$ при $r < R$ (внутри цилиндра); $\dot{\epsilon}(\mathbf{r}) = \epsilon_0$, $\dot{\mu}(\mathbf{r}) = \mu_0$ при $r > R$ (вне цилиндра). Пусть плоская однородная волна падает на цилиндр перпендикулярно его оси z и

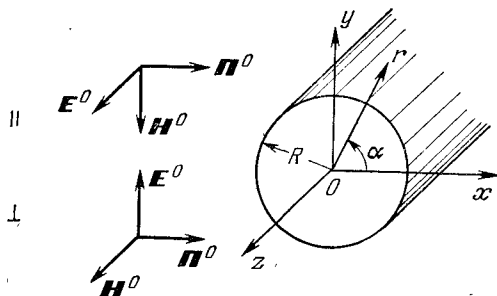


Рис. 51.1.

поляризована параллельно последней: $\mathbf{E}^0 = z_0 E^0$ (символ \parallel на рис. 51.1). Запишем:

$$\dot{E}_m^0 = z_0 \dot{A} e^{-ik_0 x}, \quad \dot{H}_m^0 = -y_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 x}, \quad (51.1)$$

где $k_0 = \omega / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$, $W_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Выражая \dot{E}_m^0 в цилиндрических координатах, имеем $\dot{E}_m^0 = z_0 \dot{A} e^{-ik_0 r \cos \alpha}$. Воспользовавшись формулой (Пб.24), представим \dot{E}_m^0 в виде следующего разложения:

$$\dot{E}_m^0 = z_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(k_0 r) e^{in\alpha}, \quad r > R. \quad (51.2)$$

Поскольку поле \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 не изменяется по координате z и вектор \mathbf{E}^0 параллелен оси цилиндра, то этими же свойствами должно обладать и дифрагированное поле: $\partial/\partial z = 0$, $\mathbf{E}^\pm = z_0 \dot{E}^\pm$, т. е. задача двумерна. Из (29.21) следует скалярное уравнение Гельмгольца, которому удовлетворяют функции \dot{E}_m^+ , \dot{E}_m^+ и \dot{E}_m^- :

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_m + k_{(0)}^2 \dot{E}_m = 0, \quad (51.3)$$

где $k_{(0)}^2 = k^2 = \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu}$ при $r < R$ и $k_{(0)}^2 = k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ при $r > R$. Решения этого уравнения в цилиндрических координатах были получены в Приложении 7, п. 3. Мы выразим \dot{E}_m^+ и \dot{E}_m^- в виде линейных комбинаций решений типа $\mathcal{N}\mathcal{A}$ (П7.17). При выборе \mathcal{R} учтем, что ограниченные решения для области $r < R$, согласно (Пб.4), выражаются функциями Бесселя ($B = 0$ в (П.7.17)), а решения для области $r > R$, имеющие характер расходящихся волн, — функциями Ханкеля второго рода согласно (Пб.9) ($P = 0$ в (П7.17)); азиму-

тальные зависимости ($e^{\mathcal{L}}$) выберем те же, что и в представлении (51.2). Таким образом, можем записать следующие ряды с неизвестными коэффициентами:

$$\dot{E}_m^+ = z_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n J_n(\dot{k}r) e^{in\alpha}, \quad r < R, \quad (51.4)$$

и

$$\dot{E}_m^- = z_0 \dot{A} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{in\alpha}, \quad r > R. \quad (51.5)$$

Далее выпишем такие же разложения для магнитного поля. Поскольку на основании второго уравнения Максвелла

$$\dot{H}_m = \frac{i}{\omega \mu} \operatorname{rot} \dot{E}_m = \frac{i}{\omega \mu} \left(r_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial \alpha} - \alpha_0 \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial r} \right) \quad \text{при} \quad \dot{E}_m = z_0 \dot{E}_m,$$

то рядам (51.2), (51.4) и (51.5) соответствуют следующие:

$$\dot{H}_m^+ = \frac{i \dot{A}}{\omega \mu} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n \left[r_0 \frac{in}{r} J_n(\dot{k}r) - \alpha_0 \dot{k} J_n(\dot{k}r) \right] e^{in\alpha}, \quad r < R, \quad (51.6)$$

$$\dot{H}_m^- = \frac{i \dot{A}}{\omega \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n \left[r_0 \frac{in}{r} H_n^{(2)}(k_0 r) - \alpha_0 k_0 H_n^{(2)'}(k_0 r) \right] e^{in\alpha}, \quad r > R, \quad (51.7)$$

и

$$\dot{H}_m^0 = \frac{i \dot{A}}{\omega \mu_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n \left[r_0 \frac{in}{r} J_n(k_0 r) - \alpha_0 k_0 J_n'(k_0 r) \right] e^{in\alpha}, \quad r > R. \quad (51.8)$$

После записи всех этих представлений решение задачи сводится к нахождению коэффициентов b_n и c_n путем наложения требуемых граничных условий. Требование непрерывности тангенциальных компонент векторов E и H принимает форму

$$\dot{E}_m^0 + \dot{E}_m^- = \dot{E}_m^+, \quad \dot{H}_{m\alpha}^0 + \dot{H}_{m\alpha}^- = \dot{H}_{m\alpha}^+, \quad r = R. \quad (51.9)$$

При почленном сопоставлении рядов (51.2), (51.4) и (51.5) первое из записанных условий дает

$$-b_n J_n(kR) + c_n H_n^{(2)}(k_0 R) = -J_n(k_0 R). \quad (51.10)$$

Точно так же на основании разложений (51.6)—(51.8) из второго условия находим

$$b_n \frac{\dot{k}}{\mu} J_n'(\dot{k}R) - c_n \frac{k_0}{\mu_0} H_n^{(2)'}(k_0 R) = \frac{k_0}{\mu_0} J_n'(k_0 R). \quad (51.11)$$

Теперь b_n и c_n определяются как решения системы уравнений (51.10) и (51.11)

$$b_n = \frac{J_n(k_0 R) H_n^{(2)'}(k_0 R) - J_n'(k_0 R) H_n^{(2)}(k_0 R)}{J_n(\dot{k} R) H_n^{(2)'}(k_0 R) - \frac{W_0}{\dot{W}} J_n'(\dot{k} R) H_n^{(2)}(k_0 R)}, \quad (51.12)$$

$$c_n = \frac{-J_n(\dot{k} R) J_n'(k_0 R) + \frac{W_0}{\dot{W}} J_n(\dot{k} R) J_n(k_0 R)}{J_n(\dot{k} R) H_n^{(2)'}(k_0 R) - \frac{W_0}{\dot{W}} J_n'(\dot{k} R) H_n^{(2)}(k_0 R)}, \quad \dot{W} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}.$$

Итак, коэффициенты разложений (51.4)—(51.7) найдены, и поле дифракции определено.

Следует подчеркнуть, что полученные ряды сходятся достаточно быстро лишь для цилиндров не очень больших диаметров.

3. Обсуждение результатов. Идеально проводящий цилиндр. Перейдем к обсуждению полученных результатов, взяв сначала идеально проводящий цилиндр. Данный случай будем рассматривать как предельный при $\epsilon \rightarrow -i\infty$. Поскольку одновременно $\dot{W} \rightarrow 0$, то предельные выражения коэффициентов b_n и c_n (51.12) вид имеют

$$b_n = 0, \quad c_n = -\frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)'}(k_0 R)}. \quad (51.13)$$

Как и следовало ожидать, внутреннее поле E^+ , H^+ теперь отсутствует. Конечно, граничное условие (51.9) для H_α на поверхности идеально проводящего цилиндра не удовлетворяется. Его заменяет соответствующее граничное условие из (п. 1).

$$[r_0, \dot{H}_m^+ + \dot{H}_m^-] = \dot{\eta}_m \quad \text{при } r = R, \quad (51.14)$$

дающее возможность найти плотность поверхностного тока, наводимого падающей волной. На основании (51.14)

$$\dot{\eta}_m = z_0 (\dot{H}_{m\alpha}^+ + \dot{H}_{m\alpha}^-) |_{r=R}. \quad (51.15)$$

Желая найти внешнее дифрагированное поле E^- , H^- в дальней зоне, воспользуемся асимптотическим представлением функций Ханкеля (П6.8), согласно которому

$$H_n^{(2)}(k_0 r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-i \left[k_0 r - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]} \quad \text{и} \quad H_n^{(2)'}(k_0 r) \approx -i H_n^{(2)}(k_0 r). \quad (51.16)$$

С учетом (51.13) из (51.5) и (51.7) получаем для дальнего поля рассеяния следующие ряды:

$$\dot{E}_m^- = -z_0 \dot{A} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-i \left(k_0 r - \frac{\pi}{4} \right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)'}(k_0 R)} e^{in\alpha} \quad (51.17)$$

$$\dot{H}_m^- = \alpha_0 \frac{A}{W_0} \sqrt{\frac{2}{\pi k_0 r}} e^{-i(k_0 r - \frac{\pi}{4})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(k_0 R)}{H_n^{(2)}(k_0 R)} e^{in\alpha} \quad (51.18)$$

(радиальная компонента вектора \mathbf{H} ввиду дополнительного множителя $1/r$ пренебрежима в дальней зоне в сравнении с азимутальной). Формулы (51.17), (51.18) выражают цилиндрическую волну, которая локально может рассматриваться как обычная плоская однородная волна (§ 32) с волновым сопротивлением W_0 .

Суммирование рядов (51.17), (51.18) практически затруднительно при $k_0 R > 10$, т. е. когда радиус цилиндра превышает величину порядка $3\lambda/2$. По данным суммирования находится плотность потока энергии рассеяния Π^- ; о поперечном сечении рассеяния S_{\perp} (§ 50, п. 5) ввиду двумерности задачи можно говорить как о величине, отнесенной к единице длины цилиндра. Характеристика направленности рассеяния — это величина

$$F(\alpha) = \frac{\sqrt{\Pi^-(\alpha)}}{\sqrt{\Pi_{\max}^-}} = \frac{E_m^-(\alpha)}{E_{m\max}^-} = \frac{H_m^-(\alpha)}{H_{m\max}^-}, \quad (51.19)$$

где подразумеваются амплитуды векторов поля, определяемые из соотношений (51.17), (51.18). На рис. 51.2 в условном масштабе

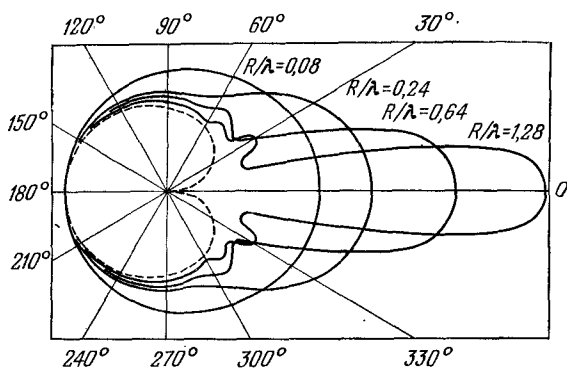


Рис. 51.2.

представлены графики функции $\sqrt{\Pi^-(\alpha)}$ для цилиндров разных диаметров [Г.4]; там же пунктиром нанесена кривая для предельного случая $R/\lambda \rightarrow \infty$, полученная по правилам геометрической оптики (§ 50, п. 2). Мы видим, что в «области тени» в действительности имеется максимум рассеянного излучения, который по мере относительного укорочения волны обостряется. При рассмотренных значениях параметра R/λ еще очень далека область относительных размеров цилиндра, для которых можно ожидать удовлетворительного результата от приближения геометрической оптики. Однако с рос-

том R/λ кривые на рис. 51.2 все ближе подходят к предельной пунктирной кривой вне «области тени».

Решение \dot{E}_m^-, \dot{H}_m^- (51.17), (51.18) удовлетворяет требованиям, гарантирующим его единственность. Следует иметь в виду, что здесь нельзя непосредственно применить критерий из § 31, п. 2, потому что задача двумерна (и в этом смысле искуственна). Чтобы распространить рассуждения из § 31, п. 2 на двумерные задачи, надо рассмотреть построение на рис. 31.1, б, как поперечное сечение бесконечного цилиндра. При отнесении поверхности S'' в бесконечность она будет возрастать не как r^2 , что было в трехмерном случае, а как r . Поэтому в окончательном выводе о допустимом законе убывания полей вместо $1/r$ надо ввести функцию $1/\sqrt{r}$. Иными словами, единственность решения двумерной электродинамической задачи (в соответствующем классе) гарантирована, если при введении поглощения векторы поля убывают быстрее, чем $1/\sqrt{r}$. А из (51.17), (51.18) видно, что \dot{E}_m^- и \dot{H}_m^- как раз и убывают быстрее, чем $1/\sqrt{r}$ при замене k_0 комплексным волновым числом.

Совершенно того же характера изменение вносится и в условие излучения (П5.24). Функции \dot{E}_m^-, \dot{H}_m^- (51.17), (51.18) удовлетворяют условию излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial \dot{F}_m^-}{\partial r} + ik_0 \dot{F}_m^- \right] = 0 \quad (51.20)$$

(ср. (П5.24)).

4. Применение принципа двойственности. Рассмотрим далее дифракцию на цилиндре волны иной поляризации (рис. 51.1, символ \perp), так что

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= y_0 \dot{A} W_0 e^{-ik_0 x}, \\ \dot{H}_m^0 &= z_0 \dot{A} e^{-ik_0 x}. \end{aligned} \right\} \quad (51.21)$$

Если ранее (п. 2) исходным моментом служило разложение (51.2) комплексной амплитуды \dot{E}_m^0 , то теперь роль \dot{E}_m^0 играет параллельный оси цилиндра вектор \dot{H}_m^0 . Чтобы найти решение, надо выполнить аналогичные предыдущему действия, взяв \dot{H}_m^0 вместо \dot{E}_m^0 ; это должно потребовать такого же объема выкладок. Но решение можно получить быстрее, применив принцип двойственности (§ 46, п. 3). Из сделанного выше сопоставления следует, что должны поменяться ролями и дифрагированные поля. Именно, выражения \dot{E}_m^+ (51.4) и \dot{H}_m^+ (51.6) дадут \dot{H}_m^+ и \dot{E}_m^+ соответственно при замене (включая, разумеется, формулу для b_n) \dot{e} на $-\dot{m}$ и обратно, как это должно быть в соответствии с (46.9а), (46.9б). Итак, теперь

$$\dot{E}_m^+ = -\frac{i\dot{A}}{\omega\dot{e}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n \left[r_0 \frac{in}{r} J_n(kr) - \alpha_0 k J_n(kr) \right] e^{in\alpha}, \quad r < R \quad (51.22)$$

И

$$\dot{H}_m^+ = z_0 A \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n b_n J_n(kr) e^{in\alpha}, \quad r < R. \quad (51.23)$$

Точно так же выражения \dot{E}_m^- (51.5) и \dot{H}_m^- (51.7) при замене ϵ_0 на $-\mu_0$ и обратно (включая формулу для c_n) переходят соответственно в \dot{H}_m^- и \dot{E}_m^- :

$$\dot{E}_m^- = -\frac{i\dot{A}}{\omega\epsilon} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n \left[r_0 \frac{in}{r} H_n^{(2)}(k_0 r) - \alpha_0 k_0 H_n^{(2)'}(k_0 r) \right] e^{in\alpha}, \quad r > R, \quad (51.24)$$

И

$$\dot{H}_m^- = z_0 A \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n c_n H_n^{(2)}(k_0 r) e^{in\alpha}, \quad r > R. \quad (51.25)$$

В (51.22)–(51.25)

$$b_n = \frac{J_n(k_0 R) H_n^{(2)'}(k_0 R) - J_n'(k_0 R) H_n^{(2)}(k_0 R)}{J_n(kR) H_n^{(2)'}(k_0 R) - \frac{\dot{W}}{\dot{W}_0} J_n'(kR) H_n^{(2)}(k_0 R)}, \quad (51.26)$$

$$c_n = \frac{-J_n(kR) J_n'(k_0 R) + \frac{\dot{W}}{\dot{W}_0} J_n'(kR) J_n(k_0 R)}{J_n(kR) H_n^{(2)'}(k_0 R) - \frac{\dot{W}}{\dot{W}_0} J_n'(kR) H_n^{(2)}(k_0 R)},$$

что следует из (51.12).

Решение новой дифракционной задачи получено, таким образом, на основе известного решения путем простых преобразований.

Задача об идеально проводящем цилиндре при данной поляризации падающей волны, строго говоря, должна решаться отдельно. Но при $\epsilon \rightarrow -i\infty$ из (51.26) получаются правильные значения c_n , а следовательно, формулы (51.24), (51.25) остаются применимыми. Внутреннее же дифрагированное поле исчезает.

5. Квазистационарный предел. Вернемся к формулам (51.4), (51.6) и (51.12) и, полагая цилиндр по диаметру весьма малым в сравнении с длиной волны, найдем выражение внутреннего дифрагированного поля.

Воспользовавшись формулами (П6.11)–(П6.12), из (51.12) находим, что при $R/\lambda \rightarrow 0$

$$b_0 = 1 \quad \text{и} \quad b_1 = b_{-1} = \frac{2}{k/k_0 + W_0/\dot{W}}. \quad (51.27)$$

В (51.4) при $R/\lambda \rightarrow 0$ сохраняется только один член с $n = 0$, в котором $J_0(kr) \rightarrow 1$. В результате $\dot{E}_m^+ = z_0 \dot{A}$, т. е.

$$\dot{E}_m^+ = \dot{E}_m^0 \quad (x=0). \quad (51.28)$$

Поэтому можно считать, что внутреннее электрическое поле дифракции в случае весьма тонкого цилиндра при рассматриваемой поля-

ризации падающей волны не отличается от ее поля. Ввиду непрерывности тангенциальной компоненты вектора \mathbf{E} этот вывод представляется вполне естественным.

Для определения \dot{H}_m^+ достаточно взять в (51.6) лишь члены с $n = 1$ и $n = -1$, поскольку все остальные члены (в том числе и нулевой) при $R/\lambda \rightarrow 0$ исчезают. При этом имеем

$$\begin{aligned} \dot{H}_m^+ &= \frac{\dot{A}}{\dot{W}} \frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}} \left[\left(r_0 \frac{i}{2} - \alpha_0 \frac{1}{2} \right) e^{i\alpha} - \left(r_0 \frac{i}{2} + \alpha_0 \frac{1}{2} \right) e^{-i\alpha} \right] = \\ &= - \frac{\dot{A}}{\dot{W}} \frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}} (r_0 \sin \alpha + \alpha_0 \cos \alpha) = - y_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}} \frac{2}{\dot{k}/k_0 + W_0/\dot{W}}. \end{aligned}$$

Согласно (51.1) $\dot{H}_m^0 = -y_0 A/W_0$ при $x = 0$, поэтому

$$\dot{H}_m^+ = \frac{2\mu_0}{\mu + \mu_0} \dot{H}_m^0 \quad (x = 0). \quad (51.29)$$

Для другой поляризации падающей волны (п. 4) при $R/\lambda \rightarrow 0$ из (51.26) получаем

$$b_0 = 1 \quad \text{и} \quad b_1 = b_{-1} = \frac{2}{\dot{k}/k_0 + \dot{W}/W_0} \quad (51.30)$$

и далее из (51.22), (51.23) находим

$$\dot{E}_m^+ = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \dot{E}_m^0 \quad (x = 0) \quad (51.31)$$

и

$$\dot{H}_m^+ = \dot{H}_m^0 \quad (x = 0) \quad (51.32)$$

(все действия аналогичны).

Формулы квазистационарного предела (51.28), (51.29) и (51.30), (51.31) могут применяться при выполнении условия (50.7).

Заметим, наконец, что полученные результаты совпадают, по существу, с соответствующими решениями задач электростатики и магнитостатики: ср (51.29) с (21.8) и (51.31) с (20.19).

§ 52. Дифракция на сфере

1. Решение задачи. Пусть плоская однородная волна, векторы которой имеют комплексные амплитуды

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^0 &= x_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \\ \dot{H}_m^0 &= y_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 z} \end{aligned} \right\} \quad (52.1)$$

(проницаемости среды ε_0 и μ_0), падает на сферическое тело (рис. 52.1) с проницаемостями ε и μ .

Решение задачи можно получить таким же способом, как в случае дифракции на цилиндре, т. е. разлагая падающую волну по подходящим функциям и составляя аналогичные разложения с неопределенными коэффициентами для поля дифракции; последние

находятся при наложении граничных условий. Однако реализация этого подхода оказывается более сложной. Вместо «цилиндрических гармоник» AR (П7.17) теперь надо использовать «сферические гармоники» $R\Theta A$ (П7.35), причем не непосредственно, а путем

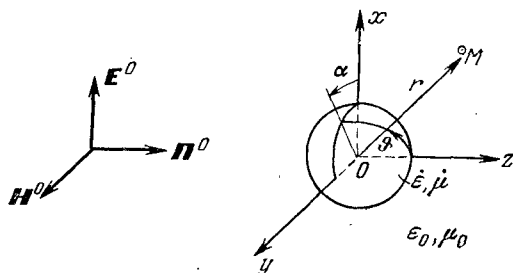


Рис. 52.1.

построения из них векторных функций. Отсылая читателя, интересующегося подробностями, к соответствующей литературе (напр., [А. 2], стр. 493), ограничимся записью готового решения.

Внутреннее поле дифракции:

$$\dot{E}_m^+ = \dot{A} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^M M_{on}^+ + i b_n^N N_{en}^+), \quad r < R, \quad (52.2)$$

$$\dot{H}_m^+ = -\frac{\dot{A}}{\dot{W}} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (b_n^N M_{en}^+ - i b_n^M N_{on}^+), \quad r < R, \quad (52.3)$$

где

$$M_{en}^+ = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \times \\ \times \left[\pm \vartheta_0 \frac{1}{\sin \vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta)_{\sin}^{\cos} \alpha - \alpha_0 \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta)_{\cos}^{\sin} \alpha \right] \quad (52.4a)$$

и

$$N_{en}^+ = \frac{1}{kr} \left\{ r_0 n(n+1) \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^{(1)}(\cos \vartheta)_{\cos}^{\sin} \alpha + \right. \\ \left. + \vartheta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]' \frac{d}{d\vartheta} P_n^{(1)}(\cos \vartheta)_{\cos}^{\sin} \alpha \pm \right. \\ \left. \pm \alpha_0 \frac{1}{\sin \vartheta} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{kr} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right]' P_n^{(1)}(\cos \vartheta)_{\sin}^{\cos} \alpha \right\}, \quad (52.4b)$$

причем индекс o (e) означает выбор верхнего (нижнего) варианта двойного знака и тригонометрической функции; формулы для коэффициентов b_n^M и b_n^N будут приведены ниже.

Внешнее поле дифракции:

$$\dot{E}_m^- = \dot{A} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n^M M_{on}^- + ic_n^N N_{en}^-), \quad r > R, \quad (52.5)$$

$$\dot{H}_m^- = -\frac{\dot{A}}{W_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} (c_n^N M_{en}^- - ic_n^M N_{on}^-), \quad r > R. \quad (52.6)$$

Входящие сюда функции M_{en}^- и N_{en}^- получаются из M_{en}^+ и N_{en}^+ (52.4) путем замены k на k_0 и $J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}r)$ на $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R)$.

В (52.5), (52.6) и (52.2), (52.3)

$$\begin{aligned} c_n^M = & \left\{ -\frac{\dot{\mu}}{\mu_0} \sqrt{\frac{k_0}{\dot{k}}} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \left[\sqrt{k_0R} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \right]' + \right. \\ & \left. + J_{n+\frac{1}{2}}(k_0R) \left[\sqrt{\dot{k}R} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \right]' \right\} \left\{ \frac{\dot{\mu}}{\mu_0} \sqrt{\frac{k_0}{\dot{k}}} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \times \right. \\ & \left. \times \left[\sqrt{k_0R} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R) \right]' - H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R) \left[\sqrt{\dot{k}R} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \right]' \right\}^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n^N = & \left\{ -J_{n+\frac{1}{2}}(k_0R) \left[\sqrt{\dot{k}R} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \right]' + \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{k_0}{\dot{k}}} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \times \right. \\ & \left. \times \left[\sqrt{k_0R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_0R) \right]' \right\} \left\{ H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R) \left[\sqrt{\dot{k}R} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \right]' - \right. \\ & \left. - \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{k_0}{\dot{k}}} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R) \left[\sqrt{k_0R} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R) \right]' \right\}^{-1} \quad (52.7a) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} b_n^M = & \sqrt{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_0R) + c_n^M H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R)}{\frac{\dot{k}}{k_0} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)}}, \\ b_n^N = & \frac{\dot{\mu}}{\mu_0} \sqrt{\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(k_0R) + c_n^N H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(k_0R)}{\frac{\dot{k}}{k_0} J_{n+\frac{1}{2}}(\dot{k}R)}}. \end{aligned} \quad (52.7b)$$

2. Некоторые выводы. Напомним, что в § 50, п. 4 уже рассматривалась задача дифракции на прозрачной сфере в квазистационарном приближении. Было установлено, что рассеяние достаточно

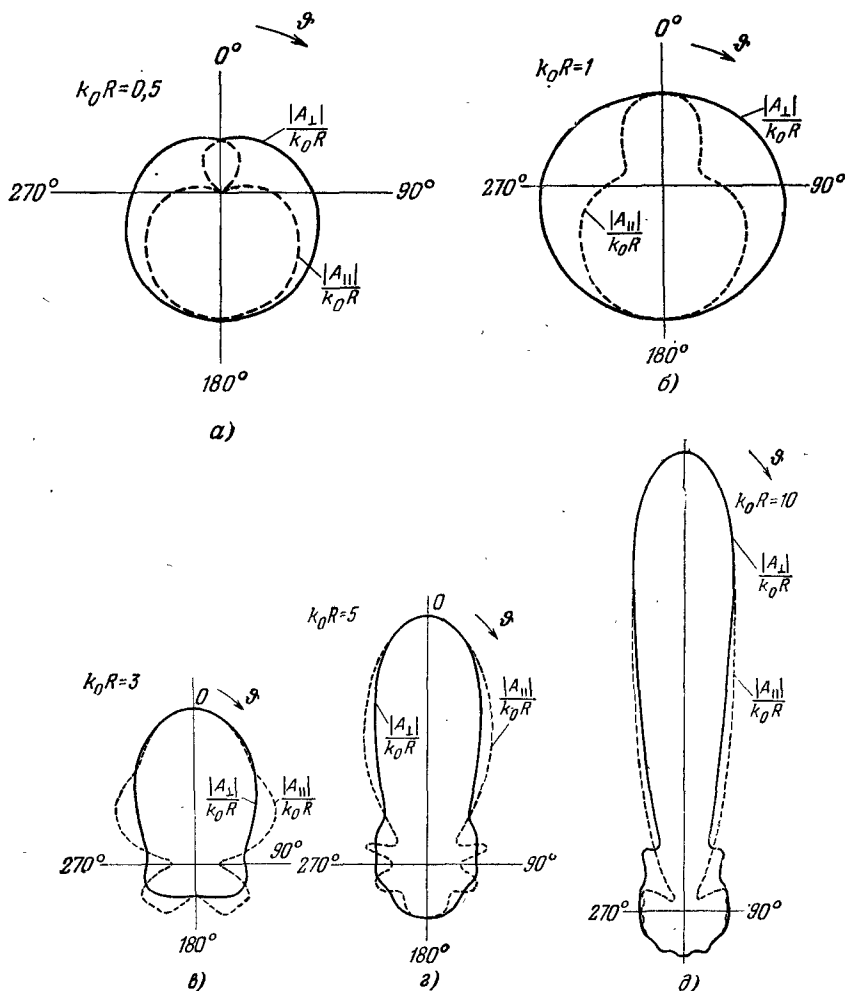


Рис. 52.2.

малой диэлектрической сферы подобно излучению диполя Герца, а в более общем случае сфера ведет себя как совокупность электрического и магнитного электрических излучателей. Аналогичный вывод справедлив и в отношении идеально проводящей сферы. Заметим, что формулы (50.11), (50.13) можно получить в пределе при $R/\lambda \rightarrow 0$ из записанного выше решения (используя также

преобразование координат); подобный предельный переход был выполнен в случае цилиндра в § 51, п. 5.

По мере увеличения k_0R рассеянное излучение становится более сложным. Рассмотрим некоторые данные [Г. 5], полученные для идеально проводящей сферы в пределах $k_0R = 0,5 \div 10$ путем суммирования рядов. Результаты представлены графически на рис. 52.2; функции $\dot{A}_{\parallel}(\vartheta)$ и $\dot{A}_{\perp}(\vartheta)$ имеют смысл коэффициентов в выражениях компонент векторов \dot{E}_m^- и \dot{H}_m^- в дальней зоне. Именно, эти векторы имеют вид

$$\dot{E}_m^- = -i\dot{A} \frac{e^{-ik_0r}}{k_0r} [\vartheta_0 \dot{A}_{\parallel}(\vartheta) \cos \alpha - \alpha_0 \dot{A}_{\perp}(\vartheta) \sin \alpha], \quad (52.8)$$

$$\dot{H}_m^- = -i \frac{\dot{A}}{W_0} \frac{e^{-ik_0r}}{k_0r} [\vartheta_0 \dot{A}_{\perp}(\vartheta) \sin \alpha + \alpha_0 \dot{A}_{\parallel}(\vartheta) \cos \alpha], \quad (52.9)$$

так что

$$\bar{\Pi}^- = \frac{r_0 A^2}{2W_0 k_0^2 r} [|\dot{A}_{\parallel}(\vartheta)|^2 \cos^2 \alpha + |\dot{A}_{\perp}(\vartheta)|^2 \sin^2 \alpha]. \quad (52.10)$$

Рис. 52.2 демонстрирует картину, напоминающую ранее рассмотренный процесс рассеяния на идеально проводящем цилиндре (§ 51, п. 3). С ростом параметра k_0R все более обостряется максимум рассеянного излучения в «области тени».

Можно показать, что поперечное сечение рассеяния шара выражается через коэффициенты c_n^M и c_n^N (52.7а) следующим образом:

$$S_{\perp} = \frac{2\pi}{k_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|c_n^M|^2 + |c_n^N|^2). \quad (52.11)$$

Область весьма больших значений параметра k_0R представляет интерес в связи с вопросами распространения радиоволн над поверхностью земного шара (см. также замечание в § 50, п. 5). Однако мы не можем останавливаться на способах преобразования решения, используемых для оценок в этой области, ввиду их математической специфики.

В приближении геометрической оптики для идеально проводящего шара нетрудно получить формулу

$$\frac{\bar{\Pi}^-}{\bar{\Pi}^0} = \frac{R^2}{4r^2}, \quad (52.12)$$

характеризующую рассеяние в дальней зоне освещенной области (угловой размер области тени при $r \rightarrow \infty$ пренебрежим): читателю рекомендуется вывести ее самостоятельно тем же способом, которым была найдена формула (50.4). Подчеркнем, что описываемое рассеяние *изотропно*: $\bar{\Pi}^-$ не зависит от угловых координат. Вычисляя поток вектора $\bar{\Pi}^-$ через поверхность, охватывающую объект дифракции (пусть это будет сфера радиуса r), имеем

$$\bar{P}_{\text{отр}} = 4\pi r^2 \bar{\Pi}^- = \pi R^2 \bar{\Pi}^0. \quad (52.13)$$

Таков же был бы отраженный поток энергии при замене сферического объекта нормально ориентированным диском того же диаметра (§ 50, п. 5). Полный поток энергии рассеяния — с учетом области тени — вдвое больше (§ 50, п. 5): $\bar{P}^- = 2P_{\text{отр}}$ и поперечное сечение рассеяния идеально проводящего шара в приближении геометрической оптики оказывается следующим:

$$S_{\perp} = \frac{\bar{P}^-}{\Pi^0} = 2\pi R^2. \quad (52.14)$$

§ 53. Метод Гюйгенса — Кирхгофа. Дифракция Фраунгофера на отверстии

1. Метод Гюйгенса—Кирхгофа и постановка задачи. На рис. 53.1 схематически показано несколько случаев дифракции сферической (a, ϑ) и плоской (b, ε) волн на непрозрачных — например, идеально проводящих — телах; в частности, тело может иметь вид экрана с отверстием (ϑ, ε).

С точки зрения геометрической оптики непрозрачное тело просто заслоняет источник, оставляя за собой область тени. Можно построить поверхность, состоящую из частей Q и S , по одну сторону которой остается источник падающей волны (след $Q + S$ на рис. 53.1 показан пунктиром), причем Q лежит целиком в области воображаемой тени и соединяется с S на ее границе. Поставим целью найти поле вне поверхности $Q + S$. Согласно § 47 его можно приписать излучению эквивалентных источников — электрического и магнитного поверхностных токов, плотности которых на основании (47.3) вполне определяются тангенциальными компонентами \mathbf{E}^S и \mathbf{H}^S векторов поля на $Q + S$. В сущности это применение *принципа Гюйгенса*.

Точные значения \mathbf{E}^S и \mathbf{H}^S при постановке задачи, однако, не могут быть известны; поэтому довольствуются приближенными представлениями этих функций. Еще Кирхгофом (для скалярной задачи волновой оптики) был предложен способ, который и сейчас широко используется при решении различных дифракционных задач и в теории антенн. *Приближение Кирхгофа* в электродинамике определяется наложением условий

$$\mathbf{E}^S = \begin{cases} \mathbf{E}^0 & \text{на } S, \\ 0 & \text{на } Q; \end{cases} \quad \mathbf{H}^S = \begin{cases} \mathbf{H}^0 & \text{на } S, \\ 0 & \text{на } Q. \end{cases} \quad (53.1)$$

Таким образом, предполагается, что на теневой стороне непрозрачного тела напряженности поля обращаются в нуль, а вне тела падающая волна не деформируется.

Пусть рассматривается задача дифракции на отверстии рис. (53.1, $\vartheta, \varepsilon, \delta$). При этом создаваемое распределенными на $S + Q$ эквивалентными источниками поле есть не что иное, как внешнее поле

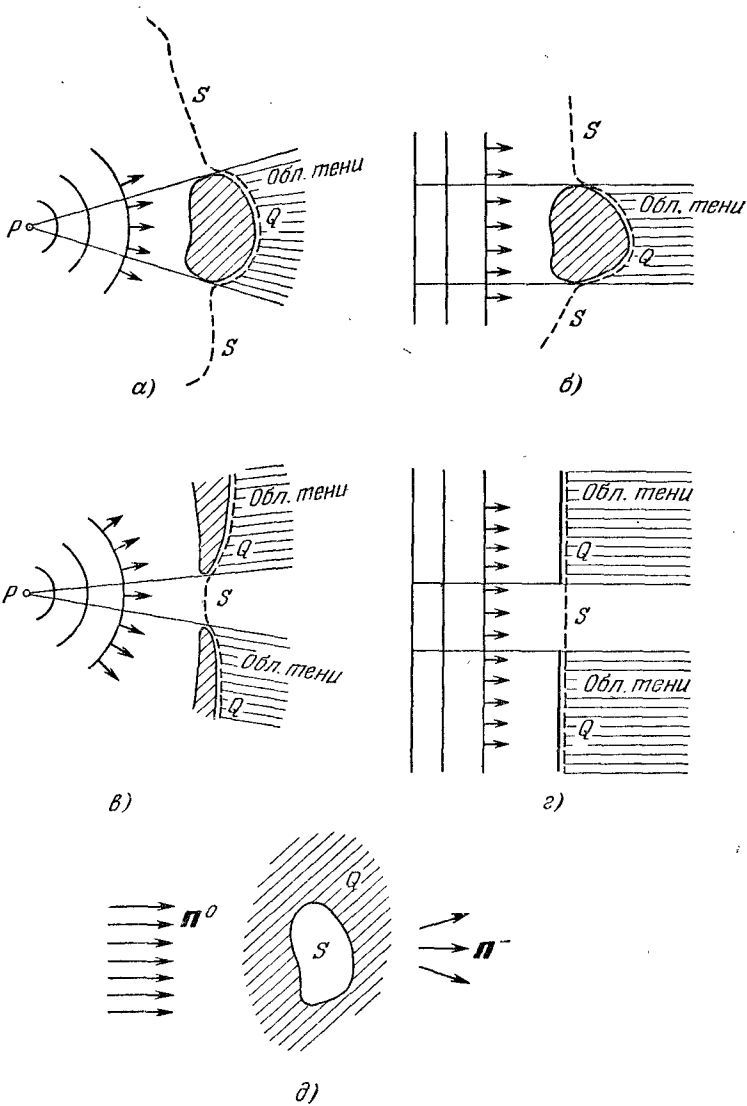


Рис. 53.1.

дифракции. Определяя его по принципу Гюйгенса (§ 47, п. 2), на основании (46.6) напишем:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- = \dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{E}}_{m2}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^- = \dot{\mathbf{H}}_{m1} + \dot{\mathbf{H}}_{m2}, \quad (53.2)$$

где слагаемые находятся в приближении Кирхгофа (53.1) по формулам (47.4), (47.6) с учетом равенств $\dot{\mathbf{E}}_{m1} = -\frac{i}{\omega\epsilon} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_{m1}$ и $\dot{\mathbf{H}}_{m2} = \frac{i}{\omega\mu} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_{m2}$ из (46.8), (46.10) либо через векторные потенциалы.

При этом в (47.4)—(47.7) $\dot{\eta}_m = [\mathbf{v}_0, \dot{\mathbf{H}}_m^0]$ и $\dot{\eta}_m^M = [\dot{\mathbf{E}}_m^0, \mathbf{v}_0]$ согласно (53.1).

Если решается задача дифракции типа рис. 53.1, а, б, то полное поле излучения эквивалентных источников включает также падающую волну; формулы (53.2) в этом случае заменяются следующими:

$$\dot{\mathbf{E}}_m^- + \dot{\mathbf{E}}_m^0 = \dot{\mathbf{E}}_{m1} + \dot{\mathbf{E}}_{m2}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m^- + \dot{\mathbf{H}}_m^0 = \dot{\mathbf{H}}_{m1} + \dot{\mathbf{H}}_{m2}. \quad (53.2a)$$

Слагаемые в правых частях находятся так же, как и ранее.

Отметим, наконец, что при пользовании формулами (47.4), (47.6) в большинстве случаев имеет смысл отбрасывать в круглых скобках слагаемое $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-2}$ (ближнее поле), как это делалось в § 47, п. 3.

Описанный подход называют *методом Гюйгенса—Кирхгофа*.

2. Определение поля дифракции в дальней зоне. Сосредоточим внимание на задаче о нормальном падении волны в пустоте \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 на идеально проводящий экран с отверстием (рис. 53.1, г, д); при этом

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^0 &= \mathbf{x}_0 A e^{-ik_0 z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_m^0 &= \mathbf{y}_0 \frac{A}{W_0} e^{-ik_0 z}. \end{aligned} \right\} \quad (53.3)$$

Отверстие S , можно сказать, «вырезает» участок фронта падающей волны, и каждый элемент S в приближении Кирхгофа есть обычный элемент Гюйгенса. Фактически часть работы, связанной с нахождением поля дифракции указанным выше способом (п. 1), уже произведена в § 47, п. 3 при получении выражений (47.20). Зная поле излучения элемента Гюйгенса, мы можем рассматривать отверстие как систему непрерывно распределенных излучателей этого типа, создающих поле дифракции \mathbf{E}^- , \mathbf{H}^- (см. также § 49, п. 4).

Выразим поле дифракции в точке $M(\mathbf{r})$ (т. е. $M(\mathbf{r}, \theta, \alpha)$ или $M(x, y, z)$), создаваемое произвольным элементом Гюйгенса, расположенным в окрестности точки $P(\mathbf{r}')$ (экран лежит в плоскости $z = 0$, так что это точка $P(x', y', 0)$). Согласно первой строчке (47.20) комплексная амплитуда вектора \mathbf{E}^- равна

$$d\dot{\mathbf{E}}_m^- = \frac{ik_0 \dot{\mathbf{E}}_m^0(0)}{4\pi} (1 + \cos \theta_q) (\theta_{0q} \cos \alpha_q - \alpha_{0q} \sin \alpha_q) \frac{e^{-ik_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dx' dy' \quad (53.4)$$

и на основании второй строчки (47.20) аналогично выписывается $d\dot{H}_m$. Здесь индексом q снабжены угловые координаты и их орты для направления $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$.

Полное поле дифракции определяется путем интегрирования функций $d\dot{E}_m$ и $d\dot{H}_m$ по координатам отверстия. Учитывая, что расстояние до точки наблюдения во много раз превосходит размеры

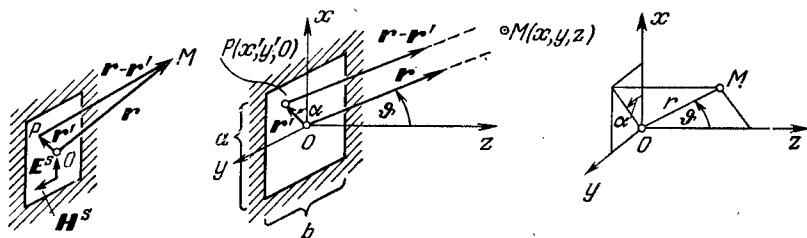


Рис. 53.2.

отверстия, положим: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1} = r^{-1}$, $\vartheta_q = \vartheta$ и $\alpha_q = \alpha$, т. е. амплитуды всех элементарных полей в точке $M(\mathbf{r})$ и направления всех излучателей на $M(\mathbf{r})$ будем считать одинаковыми. Тогда

$$\dot{E}_m = \frac{ik_0 \dot{E}_m^0(0)}{4\pi r} (1 + \cos \vartheta) (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \int_S e^{-ik_0 |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx' dy'. \quad (53.5)$$

Пусть отверстие имеет прямоугольную форму (рис. 53.2). Так как

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} = \sqrt{r^2 - 2(xx' + yy') + x'^2 + y'^2},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, причем x' и y' весьма малы в сравнении с r , то посредством разложения $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ в биномиальный ряд с точностью до малых второго порядка имеем: $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = r - \frac{1}{r}(xx' + yy') + \dots$ Равенство (53.5) принимает вид

$$\dot{E}_m = \frac{ik_0 A}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} (1 + \cos \vartheta) (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0 \frac{xx' + yy'}{r}} dx' dy' \quad (53.6)$$

(согласно (53.3) $\dot{E}_m^0(0) = A$), и интегрирование дает

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0 \frac{xx' + yy'}{r}} dx' dy' = ab \frac{\sin\left(\frac{k_0 a}{2r} x\right)}{\frac{k_0 a}{2r} x} \frac{\sin\left(\frac{k_0 b}{2r} y\right)}{\frac{k_0 b}{2r} y}.$$

Переходя здесь к сферическим координатам в соответствии с соот-

ношениями $x = r \cos \alpha \sin \vartheta$ и $y = r \sin \alpha \sin \vartheta$ (рис. 53.2), из (53.6) окончательно получаем

$$\dot{E}_m^- = \frac{ik_0 \dot{A} ab}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \times \\ \times \frac{\sin\left(\frac{k_0 a}{2} \cos \alpha \sin \vartheta\right) \sin\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \alpha \sin \vartheta\right)}{\frac{k_0 a}{2} \cos \alpha \sin \vartheta \frac{k_0 b}{2} \sin \alpha \sin \vartheta} (1 + \cos \vartheta). \quad (53.7)$$

Точно так же, отпрываясь от выражения $d\dot{H}_m^-$, можно найти \dot{H}_m^- . При этом оказывается, что

$$\dot{H}_m^- = \frac{1}{W_0} [\mathbf{r}_0, \dot{E}_m^-]. \quad (53.8)$$

3. Исследование поля дифракции. Запишем следующее из (53.7), (53.8) выражение характеристики направленности излучения отверстия:

$$F(\vartheta, \alpha) = \frac{\sqrt{\Pi^-(\vartheta, \alpha)}}{\sqrt{\Pi^-(0, \alpha)}} = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left| \frac{\sin u}{u} \frac{\sin v}{v} \right|, \quad (53.9)$$

где $u = \frac{k_0 a}{2} \cos \alpha \sin \vartheta$ и $v = \frac{k_0 b}{2} \sin \alpha \sin \vartheta$. Полученный результат является весьма важным. С точки зрения теории антенн (читатель познакомится с таким аспектом в соответствующем курсе) это характеристика направленности «идеальной поверхностной антенны», которая служит моделью, частично воспроизводящей свойства многих реальных антенн. По традициям оптики дифракцию плоской волны на отверстии, наблюдаемую в дальней зоне, называют *дифракцией Фраунгофера*.

Рассмотрим подробнее формулу (53.9). Как видно, функция $F(\vartheta, \alpha)$ есть произведение трех множителей, один из которых не что иное, как характеристика направленности элемента Гюйгенса (47.22), а два другие — *интерференционные множители*, отражающие совместное действие всех элементов (ср. понятие множителя системы в § 49, п. 1).

Если точка наблюдения лежит в плоскости xOz ($\alpha = 0$), называемой E -плоскостью (ей параллелен вектор \mathbf{E} в отверстии), то $v = 0$ и множитель $\sin v/v$ превращается в единицу. При $\alpha = 90^\circ$ точка наблюдения находится в H -плоскости (yOz); при этом $u = 0$ и $\sin u/u = 1$. Обозначая в этих двух случаях характеристику направленности $F^E(\vartheta)$ и $F^H(\vartheta)$, имеем

$$F^{E, H}(\vartheta) = \frac{1 + \cos \vartheta}{2} \left| \frac{\sin \xi^{E, H}}{\xi^{E, H}} \right|, \quad (53.10)$$

где $\xi^E = \frac{k_0 a}{2} \sin \vartheta$ и $\xi^H = \frac{k_0 b}{2} \sin \vartheta$. Функция $|\sin \xi/\xi|$ представлена графически на рис. 53.3, а. При $a \gg \lambda$ ($b \gg \lambda$) интерференционный множитель в (53.10) изменяется в зависимости от ϑ гораздо быстрее,

чем $1 + \cos \theta$, и в основном определяет характер излучения в области малых углов, где наблюдается главный максимум ($\theta = 0$). Угловую ширину главного максимума $2\Delta\theta_0^{E, H}$, т. е. угол между ближайшими к нему направлениями, в которых излучение отсутствует, определяем из условия

$$\sin\left(\frac{ka}{2} \sin \Delta\theta_0^E\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{kb}{2} \sin \Delta\theta_0^H\right) = 0, \quad (53.11)$$

где имеется в виду низший корень π (рис. 53.3, а): $\frac{ka}{2} \sin \Delta\theta_0^E = \pi$ и $\frac{kb}{2} \sin \Delta\theta_0^H = \pi$, т. е.

$$\sin \Delta\theta_0^E = \frac{\lambda}{a} \quad \text{и} \quad \sin \Delta\theta_0^H = \frac{\lambda}{b} \quad (53.12)$$

или ввиду малости углов (ср. § 49, п. 3)

$$2\Delta\theta_0^E \approx 2 \frac{\lambda}{a} \quad \text{и} \quad 2\Delta\theta_0^H \approx 2 \frac{\lambda}{b}. \quad (53.12a)$$

Типичная характеристика направленности $F^{E, H}(\theta)$ изображена в виде диаграммы на рис. 53.3, б.

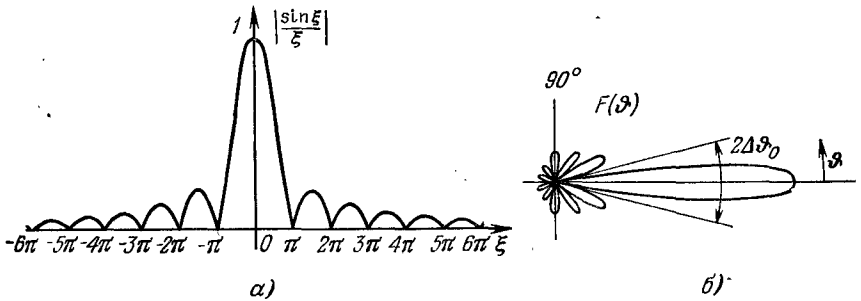


Рис. 53.3.

4. Заключение. Сделаем некоторые замечания. Во-первых, надо иметь в виду, что общий характер полученных результатов не зависит от формы отверстия. Можно было бы, например, взять круглое отверстие диаметром $2R$ и получить подобные найденным выражения векторов E и H излучаемой отверстием волны, аналогичную характеристику направленности и выражение ширины главного максимума излучения в виде

$$2\Delta\theta_0 \approx 2,44 \frac{\lambda}{2R}. \quad (53.13)$$

Во-вторых, подчеркнем, что использованное приближение Кирхгофа дает решение задачи, которое нельзя назвать строгим. Следует ожидать (и это подтверждается теоретическими сравнениями [В.2]), что результаты являются удовлетворительными для больших отверстий; тогда крайняя зона, для которой заведомо неприменимо представление (53.1), невелика.

С увеличением относительных размеров отверстия ширина главного максимума излучения стремится к нулю, т. е. соответствующий ему пространственный канал становится нерасширяющимся. Таким свойством и должен обладать проходящий через отверстие пучок лучей: мы пришли к пределу геометрической оптики.

Следует иметь в виду, что в дальней зоне само отверстие S видно под исчезающе малым углом, а диаметр «главного луча» $r \cdot 2\Delta\vartheta_0$ намного больше размеров отверстия.

Наконец, замечание о трактовке отверстия как антенны. В приближении Кирхгофа полная мощность излучения из отверстия равна потоку энергии падающей на него волны, т. е., согласно (53.3), $\bar{P}_A = \bar{\Pi}^0 S = abA^2/2W_0$. Вычисляя плотность потока энергии в направлении максимального излучения ($\vartheta = 0$), на основании (53.7) и (53.8) получаем: $\bar{\Pi}_{\max}(r, \vartheta, \alpha) = \bar{\Pi}(r, 0, \alpha) = k_0^2 A^2 a^2 b^2 / 8\pi^2 r^2 W_0$. Эти данные позволяют воспользоваться формулой (41.2) и вычислить максимальный коэффициент направленности действия отверстия, принимаемого за идеальную поверхностную антенну. Простая подстановка дает

$$D_{\max}(\vartheta, \alpha) = D(0, \alpha) = \frac{4\pi S}{\lambda^2} \quad (S = ab). \quad (53.14)$$

Как видно, при фиксированной площади S величина D_{\max} с укорочением волны возрастает как $1/\lambda^2$. Полезно сопоставить равенства (53.14) и (41.7). Сделанный вывод подтверждает последнее на простом примере, когда S есть просто площадь антенны.

Вообще поверхностными называют те антенны, действие которых в режиме передачи удобно представлять как излучение источников, распределенных на некоторой «поверхности раскрыва» S , обычно плоской; к ним относятся, например, рупорные и зеркальные антенны (ср. § 49, п. 4). Это излучение анализируют методом Гюйгенса—Кирхгофа, подобно тому как выше исследовалась дифракция на отверстии. Поскольку поле в раскрыве существенно неоднородно, вместо (53.4) берутся формулы, построенные на основе (47.24), в которых ориентация, амплитуды и фазы векторов поля E^S и H^S вообще зависят от координат.

§ 54. Дифракция Френеля

1. Постановка и решение задачи. Вернемся к условиям, при которых выше, в § 53, п. 2, было получено решение задачи дифракции на отверстии. Рассматривая поле в дальней зоне (дифракция Фраунгофера), мы справедливо предполагали, что расстояние до точки наблюдения значительно превосходит не только длину волны ($r \gg \lambda$), но и размеры отверстия ($r \gg a$, $r \gg b$). При ослаблении последних неравенств, когда угол, под которым видно отверстие, уже нельзя считать пренебрежимо малым, явления дифракции имеют существенно иной характер и требуют отдельного исследования.

В этом случае употребляется пришедший из волновой оптики термин *дифракция Френеля*.

Продолжая изучать прямоугольное отверстие, выберем некоторую плоскость $z = \text{const}$ (рис. 54.1, а), на которой все время будет находиться точка наблюдения $M(r)$. При этом $|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} = z + \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z} + \dots$ Будем считать, что удержанный здесь квадратичный член разложения все же настолько мал, что им можно пренебречь при вычислении амплитуд векторов $d\vec{E}_m^-$ и $d\vec{H}_m^-$ (см. § 53, п. 2), так что он должен быть

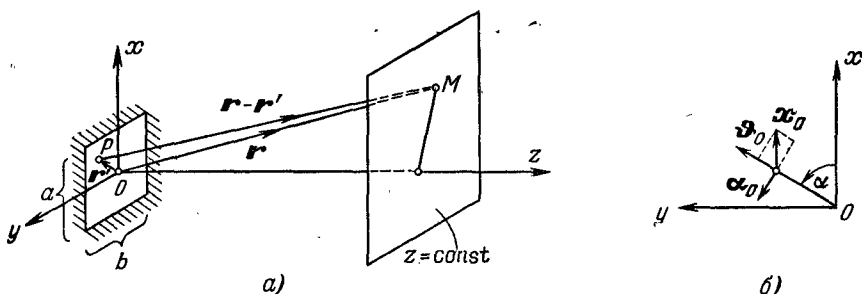


Рис. 54.1.

учтен лишь при вычислении фаз. Мы ограничимся, таким образом, областью малых углов ϑ , для которой $|r - r'|^{-1} \approx z^{-1}$ и $(1 + \cos \vartheta) \times (\vartheta_0 \cos \alpha - \alpha_0 \sin \alpha) \approx 2x_0$ (рис. 54.1, б). Поэтому, интегрируя $d\vec{E}_m^-$ по прямоугольному отверстию, вместо (53.6) будем иметь

$$\vec{E}_m^- = x_0 \frac{ik_0 \dot{A}}{2\pi} \frac{e^{-ik_0 z}}{z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z}} dx' dy'. \quad (54.1)$$

Двойной интеграл, подобно тому как было в (53.6) есть произведение сходных однократных интегралов. Взяв один из них, получим

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2}{2z}} dx' = -\sqrt{\frac{2z}{k_0}} \frac{\sqrt{\frac{k_0}{2z} \left(x - \frac{a}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{k_0}{2z} \left(x + \frac{a}{2}\right)}} \int e^{-it^2} dt,$$

где произведена простая замена переменной. Аналогично преобразуется интеграл по y' . Обычно употребляют обозначение

$$\int_0^u e^{-it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [C(u) - iS(u)], \quad (54.2a)$$

где

$$C(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \cos t^2 dt \quad \text{и} \quad S(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u \sin t^2 dt \quad (54.26)$$

— так называемые *интегралы Френеля*, которые не берутся в элементарных функциях. Они табулированы (напр., [Л. 1]) и ниже (рис. 54.2) представлены графически; очевидно $C(-u) = -C(u)$ и $S(-u) = -S(u)$.

Итак, выражение комплексной амплитуды вектора \mathbf{E} поля дифракции (54.1) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^- = & \frac{i}{2} \dot{E}_m^0(z) [C(u) - \\ & - iS(u)] \Big|_{u_1}^{u_2} [C(v) - iS(v)] \Big|_{v_1}^{v_2}, \end{aligned} \quad (54.3)$$

где

$$u_{1,2} = \sqrt{\frac{k_0}{2z}} \left(x \pm \frac{a}{2} \right)$$

и

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{k_0}{2z}} \left(y \pm \frac{b}{2} \right).$$

$$(54.3a)$$

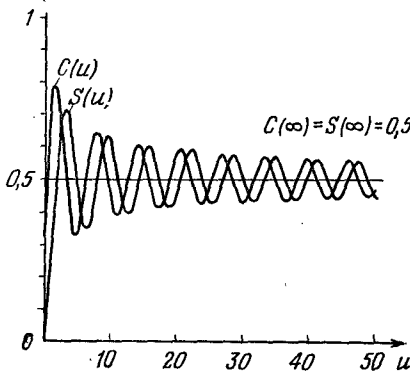


Рис. 54.2.

Совершенно таким же путем, интегрируя $d\dot{H}_m^-$, нетрудно убедиться в выполнении равенства

$$\dot{H}_m^- = \frac{i}{2} \dot{H}_m^0(z) [C(u) - iS(u)] \Big|_{u_1}^{u_2} [C(v) - iS(v)] \Big|_{v_1}^{v_2}. \quad (54.4)$$

Возвращаясь к постановке задачи, еще раз отметим, что при дифракции Френеля, в отличие от дифракции Фраунгофера (§ 53), нельзя пренебречь квадратичными членами в разложении $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ при вычислении фазы. Поэтому, например, при определении поля в точке $M(0, 0, z)$ в подынтегральном выражении (54.1) имеем фазу $\Delta\varphi(x', y') = k_0 \frac{x'^2 + y'^2}{2z}$, а в (53.6) при тех же условиях фаза равна нулю. Очевидно, следует говорить о дифракции Фраунгофера, если величина $\max \Delta\varphi(x', y')$ пренебрежимо мала. Взяв $x' = a$ и $y' = b$ и полагая, что фаза достаточно мала, если она значительно меньше 180° , имеем неравенство

$$\frac{a^2 + b^2}{\lambda z} \ll 1. \quad (54.5)$$

Это условие дифракции Фраунгофера.

2. Исследование поля дифракции. В первую очередь представляет интерес распределение интенсивности поля дифракции в рас-

считываемой плоскости $z = \text{const}$. Для нахождения амплитуд E_m^- и H_m^- , а также среднего вектора Пойнтинга

$$\bar{\Pi}^- = \frac{1}{4} \bar{\Pi}^0 | [C(u) - iS(u)] \frac{u_2}{u_1} [C(v) - iS(v)] \frac{v_2}{v_1} |^2 \quad (54.6)$$

приходится, как это видно из формул (54.3)—(54.6), вычислять модуль комплексного числа $C(\omega_2) - iS(\omega_2) - [C(\omega_1) - iS(\omega_1)]$, где ω это u или v . При этом удобно пользоваться специальной диаграммой, позволяющей быстро понять общий характер изменения

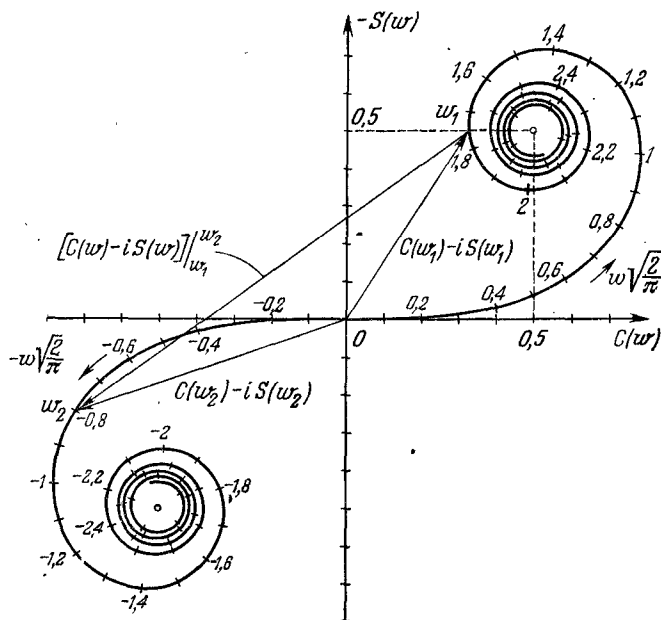


Рис. 54.3.

такой величины в зависимости от ее аргументов, а следовательно, выяснить и закономерности дифракции.

В декартовых координатах $\xi = C(w)$ и $\eta = -S(w)$ построим кривую, каждая точка которой соответствует значениям функций $C(w)$ и $-S(w)$ одного аргумента w ; это так называемая спираль Корню (рис. 54.3). Поскольку направленные отрезки, идущие из начала координат O к точкам спирали Корню, которые отвечают аргументам w_1 и w_2 , изображают комплексные числа $C(w_2) - iS(w_2)$ и $C(w_1) - iS(w_1)$ соответственно, то разность этих комплексных чисел изображается отрезком, соединяющим обе точки спирали.

Очевидно, зависимость амплитуд векторов поля (и $\sqrt{\bar{\Pi}^-}$) от координаты x выражается функцией

$$\Phi(x) = | C(u_2) - iS(u_2) - [C(u_1) - iS(u_1)] |,$$

а зависимость от y — функцией

$$\Psi(y) = |C(v_2) - iS(v_2) - [C(v_1) - iS(v_1)]|.$$

При $x = 0$ и $y = 0$ промежуточные аргументы $u_{1,2}$ и $v_{1,2}$ (54.3а) равны

$$u(0)_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \quad \text{и} \quad v(0)_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{b}{\sqrt{\lambda z}}. \quad (54.7)$$

Величины

$$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \quad \text{и} \quad \tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{\lambda z}} \quad (54.8)$$

являются важными параметрами рассматриваемого дифракционного процесса; будем называть их «волновыми размерами» отверстия.

Пусть волновые размеры весьма велики ($\tilde{a} \gg 1$, $\tilde{b} \gg 1$); поскольку формулы (54.3), (54.5) справедливы при малых $\frac{a}{z}$ и $\frac{b}{z}$ ($r \approx z$), то неравенства $a \gg \lambda$, $b \gg \lambda$ должны при этом выполняться в существенно более сильной степени. Возьмем среднюю точку в плоскости наблюдения ($x = 0$, $y = 0$). Согласно (54.7) аргументы всех интегралов Френеля в (54.3), (54.5) и (54.6), т. е. функций $C(u_{1,2})$, $S(u_{1,2})$, $C(v_{1,2})$ и $S(v_{1,2})$ для нее очень велики по абсолютному значению. Можно поэтому положить все перечисленные интегралы равными своим предельным значениям $\pm 1/2$ (рис. 54.2 и рис. 54.3). В результате получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^-(0, 0, z) &= \dot{E}_m^0(z) = x_0 \dot{A} e^{-ik_0 z}, \\ \dot{H}_m^-(0, 0, z) &= \dot{H}_m^0(z) = y_0 \frac{\dot{A}}{W_0} e^{-ik_0 z}, \\ \ddot{\Pi}^-(0, 0, z) &= \ddot{\Pi}^0(z) = z_0 \frac{A^2}{2W_0}, \end{aligned} \quad (54.9)$$

т. е. в рассматриваемой точке $M(0, 0, z)$ поле дифракции воспринимается как не деформированная отверстием падающая волна.

Иследуем далее распределение поля дифракции в E -плоскости, пользуясь диаграммой рис. 54.3; отдельные положения для наглядности изображены, кроме того, на рис. 54.4. Точке $M(0, 0, z)$ на диаграмме соответствует отрезок, соединяющий предельные точки спирали Корню (рис. 54.4, а); его длину мы можем принять за величину $\sqrt{\ddot{\Pi}^-(0, 0, z)}$ (54.9), выбрав условный масштаб, и начать построение графика функции $\sqrt{\ddot{\Pi}^-(x, 0, z)}$ (рис. 54.5, точка а). Будем двигаться в плоскости $z = \text{const}$ от средней точки к краю отверстия в сторону возрастания x . При этом $u_1 = \sqrt{\frac{k_0}{2z}} \left(x + \frac{a}{2}\right)$ увеличивается так что еще больше оснований считать соответствующую точку спирали Корню предельной. Другой же предел $u_2 = \sqrt{\frac{k_0}{2z}} \left(x - \frac{a}{2}\right)$ уменьшается по абсолютной величине, а следовательно

но, соответствующий ему конец направленного отрезка будет скользить по спирали Корню, удаляясь от своей предельной точки (рис. 54.4, б, в, г, д). Длина этого отрезка, представляющая

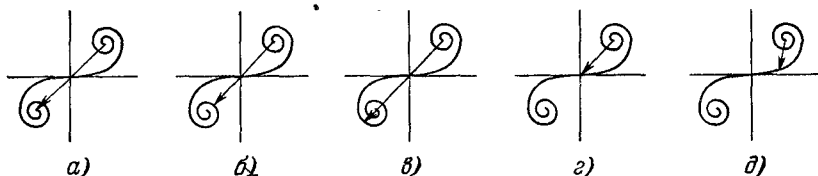


Рис. 54.4.

$\sqrt{\Pi^-}(x, 0, z)$, колеблется, причем наибольшее значение $\sqrt{\Pi^-}(x, 0, z)|_{\max} \approx 1,17 \sqrt{\Pi^-}(0, 0, z)$ наблюдается вблизи края (рис. 54.4, в). Затем поле спадает. В точности против края

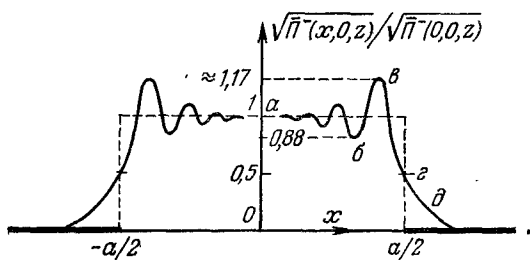


Рис. 54.5.

($\sqrt{\Pi^-}(x, 0, z) = \sqrt{\Pi^-}(a/2, 0, z)$, (рис. 54.4, г)) оно вдвое меньше, чем в средней точке: движущийся конец направленного отрезка переместился по спирали Корню в начало координат (рис. 54.4, г). С точки зрения геометрической оптики, здесь проходит граница тени (вертикальная пунктирная линия на рис. 54.5). Мы видим, что

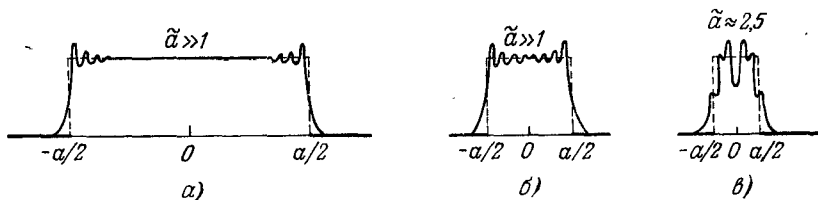


Рис. 54.6.

$\sqrt{\Pi^-}(x, 0, z)$ не обращается сразу в нуль за этой границей, а спадает постепенно (рис. 54.4, д). Вообще интенсивность колеблется около постоянного значения, предсказываемого геометрической оптикой (пунктир на рис. 54.5). При движении от средней точки в сторону другого края отверстия картина повторяется.

Чем больше волновой размер отверстия, тем меньшую область освещенной части захватывают сильные осцилляции (рис. 54.6, а) и тем ближе к реальности приближение геометрической оптики. При значительном же уменьшении волнового размера «съедается» внутренняя часть эпюры (рис. 54.6, б). При волновых размерах порядка единицы возможен даже резкий спад интенсивности в средней точке наблюдения (рис. 54.6, в). При малых волновых размерах, согласно (54.5), имеет место дифракция Фраунгофера.

3. Простейшая интерпретация дифракции Френеля. Выше было показано, как построенная на основе спирали Корню (рис. 54.3 и 54.4) позволяют выяснить общий характер дифракции Френеля на отверстии. Нетрудно составить также очень простое представление о происхождении самой спирали Корню.

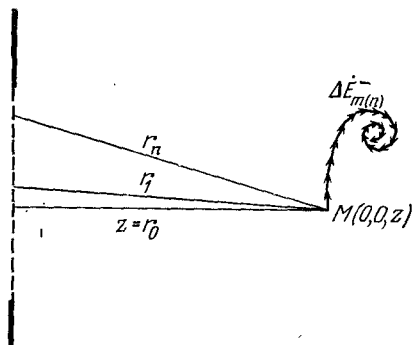


Рис. 54.7.

Разобьем мысленно рассматриваемое отверстие на весьма малые элементы (обязательно малые в сравнении с длиной волны) (рис. 54.7). Приближенно отверстие выглядит как дискретная система таких элементарных излучателей. Интересуясь, например, дифрагированным полем в точке $M(0, 0, z)$, мы должны сложить ряд комплексных чисел $\Delta \vec{E}_{m(i)}^-$, выражающих абсолютные значения векто-

ров $\Delta \vec{E}_{m(i)}^-$, которые являются комплексными амплитудами полей отдельных излучателей в этой точке (векторы $\Delta \vec{E}_{m(i)}^-$ практически параллельны). Модули чисел $\Delta \vec{E}_{m(i)}^-$, можно сказать, одинаковы; фазы же их различны и изменяются тем быстрее, чем дальше от средней части отверстия расположены элементы, поскольку при этом быстрее возрастают соответствующие пути r_i до M . Используя при сложении чисел $\Delta \vec{E}_{m(i)}^-$ «векторную» диаграмму (ср. § 49, пп. 2, 3), мы должны откладывать отрезки, отображающие $\Delta \vec{E}_{m(i)}^-$, с возрастающим отклонением (описывая увеличивающиеся фазовые сдвиги). Мы видим, что диаграмма начинает походить на спираль Корню. Она действительно станет спиралью Корню в пределе при бесконечном измельчении элементов, т. е. представлении отверстия в виде непрерывной системы излучателей, как это и было фактически сделано в п. 1.

Следующий полезный момент — построение так называемых *зон Френеля*. Выделим в плоскости отверстия область, обладающую тем свойством, что расстояния от ее точек до точки наблюдения $M(0, 0, z)$ не различаются более чем на полволны; это круг радиуса (рис. 54.8)

$$r_1 = \sqrt{(z + \lambda/2)^2 - z^2} \approx \sqrt{\lambda z}, \quad (54.10)$$

он называется первой зоной Френеля. Вторая и следующая зоны Френеля — это обладающие подобными же свойствами кольцевые области. Вторая зона лежит между границей первой зоны и окружностью радиуса

$$r_2 = \sqrt{(z + \lambda)^2 - z^2} \approx \sqrt{2\lambda z},$$

т. е. для нее

$$\sqrt{2\lambda z} > r > \sqrt{\lambda z}. \quad (54.11)$$

Вообще для n -й зоны Френеля

$$\sqrt{n\lambda z} > r > \sqrt{(n-1)\lambda z}. \quad (54.12)$$

Далекие зоны Френеля имеют (будучи смежными) почти равные площади и создают в точке M противофазные сигналы, можно сказать, одинаковые по амплитуде, а потому компенсирующиеся. Поэтому, если внутри отверстия (любой формы) уместается много зон

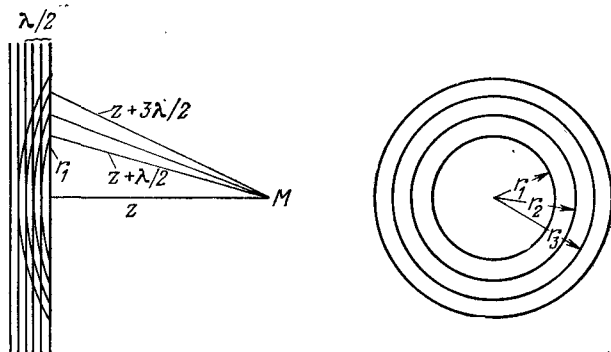


Рис. 54.8.

Френеля, то экранируемая часть фронта волны уже несущественна: поле в точке M будет таким, как если бы экрана не было. Но «много зон Френеля», иными словами, означает выполнение неравенства

$$d \gg \sqrt{\lambda z}, \quad (54.13)$$

где d — любой из поперечных размеров отверстия. В случае отверстия прямоугольного мы опять приходим к условию

$$\tilde{a} = \frac{a}{\sqrt{\lambda z}} \gg 1, \quad \tilde{b} = \frac{b}{\sqrt{\lambda z}} \gg 1, \quad (54.13a)$$

использованному при выводе выражений (54.9).

§ 55. Экраны и принцип двойственности; узкие щели

1. Принцип двойственности и дифракция на плоских объектах. Как известно (§ 46, п. 3), вследствие «перестановочной двойственности» уравнений Максвелла из решения некоторой задачи об излучении источников электрического типа в неограниченной среде

преобразование (46.9, а), (46.9, б) позволяет немедленно получить решение задачи для такого же распределения магнитных источников; обратно: решение второй задачи посредством (46.9, а), (46.9, б) преобразуется в решение первой.

Рассмотрим теперь принцип двойственности в такой форме, чтобы его можно было легко применить к некоторым задачам дифракции. Сравниваемые задачи будут различаться характером граничных условий.

Возьмем две электродинамические задачи, в одной из которых фигурирует бесконечный идеально проводящий плоский экран Q

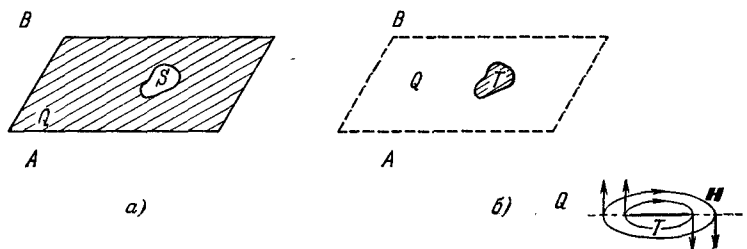


Рис. 55.1.

с отверстием S (рис. 55. 1, а), а в другой — плоский идеально проводящий элемент T , геометрически идентичный отверстию в первой задаче (рис. 55. 1, б). Сформулируем эти задачи.

Задача 1.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_{m1} &= -i\omega \dot{\mathbf{H}}_{m1}, & \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_{m1} &= i\omega \dot{\mathbf{E}}_{m1}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m\tau} &= \dot{\mathbf{E}}_m^S \text{ на } S, & \dot{\mathbf{E}}_{m\tau} &= 0 \text{ на } Q. \end{aligned} \right\} \quad (55.1)$$

Из § 31, п. 2 известно, что решение такой задачи (при некоторых оговорках) единственно. Если в данной форме поставлена задача дифракции на отверстии в экране волны, падающей из полупространства A , то в полупространстве B поле $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ есть поле рассеяния $\mathbf{E}_1^-, \mathbf{H}_1^-$.

Задача 2.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_{m2} &= i\omega \dot{\mathbf{E}}_{m2}, & \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_{m2} &= -i\omega \dot{\mathbf{H}}_{m2}; \\ \dot{\mathbf{H}}_{m\tau} &= \dot{\mathbf{H}}_m^S \text{ на } T, & \dot{\mathbf{H}}_{m\tau} &= 0 \text{ на } Q. \end{aligned} \right\} \quad (55.2)$$

В смысле выполнения условий единственности решения задача 2 не отличается от задачи 1 (§ 31, п. 2). Следует, однако, учесть, что поле $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ не может быть полным полем задачи дифракции на идеально проводящем элементе T : полное поле, конечно, не удовлетворяет условию $\dot{\mathbf{H}}_{m\tau} = 0$ на Q (Q — плоскость, в которой лежит T , за вычетом T). Но $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ может быть полем дифракции. Действительно, последнее связано с токами проводимости в T , а такие токи создают магнитное поле без тангенциальной компоненты на Q (рис. 55.1, б).

Проявление принципа двойственности состоит в том, что формулировка (55.2) задачи 2 переходит в формулировку (55.1) задачи 1 (причем $\dot{E}_{m2} \rightarrow \dot{H}_{m2}$ и $\dot{H}_{m2} \rightarrow \dot{E}_{m2}$) при замене $\dot{\epsilon} \rightarrow -\dot{\mu}$ и $\dot{\mu} \rightarrow -\dot{\epsilon}$ (и обратно: (52.1) при аналогичной замене преобразуется в (52.2)). Если к тому же

$$\dot{E}_m^S = \dot{H}_m^S, \quad (55.3)$$

то решения двух задач идентичны.

Задачи 1 и 2 являются в указанном смысле *дополнительными* друг к другу, что было отмечено А. А. Пистолькорсом и использовано им для построения теории щелевых излучателей (см. ниже п. 2). В волновой оптике аналогичное свойство дополнительности известно под названием «принципа Бабинне».

Впрочем, обычная формулировка принципа Бабинне существенно связана с принципом Гюйгенса в приближении Кирхгофа. Пусть

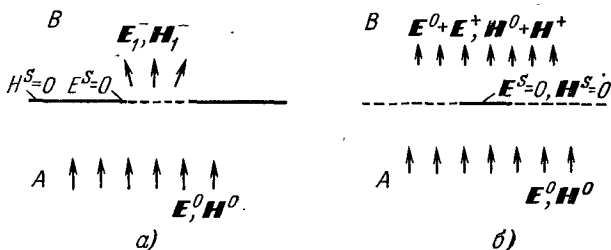


Рис. 55.2.

одна и та же волна E^0, H^0 в одном случае падает на экран с отверстием (рис. 55.2, а), возбуждая в полупространстве B поле дифракции E_1^-, H_1^- , а в другом — на дополнительный (в форме отверстия) экран (рис. 55.2, б); в полупространстве B полное поле есть при этом наложение волны E^0, H^0 и поля дифракции E_2^+, H_2^+ . Согласно приближению Кирхгофа поле E^S, H^S в плоскости раздела полупространств A и B не отличается от падающей волны E^0, H^0 , где нет экрана; на теневой же стороне экрана (в обоих случаях!) оно отсутствует: $E^S = 0, H^S = 0$. Складывая полные поля в полупространстве B , получаем

$$\left. \begin{aligned} E_1^- + (E_0 + E_2^+) &= E, \\ H_1^- + (H_0 + H_2^+) &= H. \end{aligned} \right\}$$

Но в силу принципа суперпозиции E, H есть поле, возникающее при условии, что на *всей* плоскости раздела $E^S = E^0$ и $H^S = H^0$, а потому

$$E = E^0, \quad H = H^0.$$

Таким образом,

$$E_2^- = -E_1^-, \quad H_2^- = -H_1^- \quad (55.4)$$

и, следовательно,

$$\bar{\Pi}_2^- = \bar{\Pi}_1^-. \quad (55.4a)$$

Это формулировка принципа Бабиня, согласно которому взаимно дополнительные объекты (рис. 55.2, а, б) возбуждают в переднем полупространстве одинаковые по интенсивности поля дифракции.

Результаты решения задач дифракции на отверстиях (§§ 53, 54) сразу переносятся на случай дополнительных к ним экранов.

2. Узкие щели. Дифракцию на узких щелях уже нельзя исследовать в приближении Гюйгенса (§ 53, п. 4); мы рассмотрим действие щелевого излучателя, как это было сделано А. А. Пистолькорсом.

В смысле принципа двойственности узкая щель (рис. 55.3, а), аналогична дополнительной к экрану полоске (рис. 55.3, б), а

последняя может излучать как прямолинейный ток (§ 44); малый в сравнении с длиной волны элемент полоски есть в сущности элементарный электрический излучатель.

Интересуясь полем в дальней зоне, запишем для элемента полоски Δl на основании (44.13) следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m2} &= \alpha_0 \frac{ikl_m^{\text{CT}} \Delta l \sin \vartheta}{4\pi r} e^{-ikr}, \\ \dot{E}_{m2} &= \vartheta_0 \frac{i\omega \mu l_m^{\text{CT}} \Delta l \sin \vartheta}{4\pi r} e^{-ikr} \end{aligned} \right\} (55.5)$$

(здесь использовано соотношение (44.4) и введены нижние индексы, указывающие, что рассматривается задача 2 (55.2)).

Надо учесть, что ток полоски связан с магнитным полем на ее поверхности соотношением

$$I_m^{\text{CT}} = 2d\dot{H}_m^S, \quad (55.6)$$

непосредственно следующим из (2.8), поскольку (рис. 55.3, б)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = 2d\dot{H}$$

(ср. также § 7, п. 4).

На основании принципа двойственности получим теперь из (55.5) решение дополнительной задачи 1 (55.1) при тангенциальном электрическом поле E^S того же вида, какой имело в задаче 2 поле H^S . Это и даст поле излучения элемента щели Δl ; вектор E^S (рис. 55.3, а), как видно, направлен в щели поперечно.

Делая в (55.5) замену $e \rightleftharpoons -\mu$, $\dot{E}_m \rightleftharpoons \dot{H}_m$, возьмем, в частности, \dot{E}_m^S вместо \dot{H}_m^S и величину

$$U = dE^S \quad (55.7)$$

будем рассматривать как напряжение между краями щели. В результате находим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m1} &= \alpha_0 \frac{ik\dot{U}_m \Delta l \sin \vartheta}{2\pi r} e^{-ikr}, \\ \dot{H} &= -\vartheta_0 \frac{i\omega e \dot{U}_m \Delta l \sin \vartheta}{2\pi r} e^{-ikr}. \end{aligned} \right\} \quad (55.8)$$

Элемент щели, создающий такое поле в дальней зоне, подобен элементарному магнитному излучателю, как показывает прямое сравнение формул (55.8) и (45.10). Впрочем, об этом можно было догадаться и раньше, поскольку поперечное поле E^S эквивалентно ввиду (47.3) продольному магнитному току. Из сопоставления (55.8) и (45.10) следует, что элемент щели обладает магнитным моментом с комплексной амплитудой

$$\dot{m}_m = \frac{i2\dot{U}_m \Delta l}{\omega}, \quad (55.9)$$

т. е. излучает в полупространство B , как расположенный в свободном пространстве элемент магнитного тока

$$I^M = -2dE^S = -2U. \quad (55.10)$$

Разумеется, последнее соотношение можно было бы получить непосредственно из интегральной формы второго уравнения Максвелла (46.2), т. е. тем же способом, что и (55.6).

Отметим, что вдоль щели длиной в полволны устанавливается почти синусоидальное распределение напряжения. Такой щелевой излучатель аналогичен в смысле принципа двойственности полуволновому вибратору (§ 44, п. 5). Взяв в (44.25) $l = \lambda/2$, имеем

$$\dot{H}_{m2} = \alpha_0 \frac{i\hat{I}_m}{2\pi r} e^{-ikr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta} \quad (55.11)$$

и по принципу двойственности получаем для щелевого излучателя

$$\dot{E}_{m1} = \alpha_0 \frac{i\dot{U}_m}{\pi r} e^{-ikr} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \vartheta\right)}{\sin \vartheta}. \quad (55.12)$$

Остается выяснить, при каких обстоятельствах возбуждается щелевой излучатель. Пусть на идеально проводящем листе магнитное поле и ток проводимости распределены, как показано на рис. 55.4, а; это будет, например, при падении по нормали плоской однородной волны. Если в листе прорезаны две узкие щели — параллельная и перпендикулярная вектору H (рис. 55.4, б), то первая будет излучать, а вторая фактически нет. Дело в том, что первая щель прервет ток проводимости, в результате чего в ней появится

ток смещения, т. е. поперечное электрическое поле, строение которого показано на рис. 55.4, в. Вторая же щель почти не затрагивает

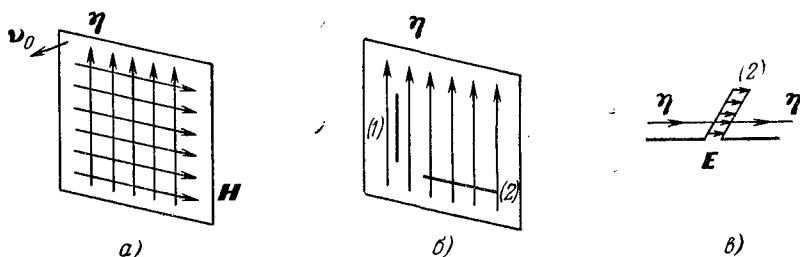


Рис. 55.4.

тока, и первоначально неизлучающее поле, можно сказать, остается невозмущенным.

III. РЕФРАКЦИЯ

Под рефракцией понимают явления при распространении волн в неоднородных средах, которые можно трактовать как искривление лучей. Таким образом, по самому определению, понятие рефракции относится к области действия геометрической оптики. Простейший вид рефракции — это преломление лучей на плоской границе раздела сред, рассмотренное в §§ 37—39; в § 50, п. 2 говорилось об условиях применимости понятия преломления при рассмотрении реальных тел. Особого же внимания требует плавное искривление лучей, происходящее в средах, проницаемости которых — непрерывные функции координат; необходимо подчеркнуть, что само понятие лучей является при этом правомерным лишь в случаях достаточно медленного изменения свойств среды.

Явления рефракции просты в сравнении с рассматривавшимися в этой главе ранее. Однако с точки зрения изучаемого предмета они представляют двоякий интерес. Во-первых, при ознакомлении с рефракцией предоставляется возможность совершить переход от уравнений Максвелла к довольно общим уравнениям геометрической оптики, которые влекут за собой ряд следствий, включающих уже известные частные положения геометрической оптики. Во-вторых, изучение рефракции нужно для понимания ряда особенностей распространения радиоволн в естественных условиях.

§ 56. Локально плоские волны в неоднородных средах

1. Эйконал. Для всякого электромагнитного поля формально можно записать представление

$$\dot{E}_m = \mathcal{E} e^{-i\varphi}, \quad \dot{H}_m = \mathcal{H} e^{-i\varphi}, \quad (56.1)$$

где $\mathcal{E} = \mathcal{E}(r)$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$ — некоторые вообще комплек-

сные функции координат. Действительно, достаточно лишь взять какую-то функцию φ и положить $\mathcal{E} = \dot{E}_m e^{i\varphi}$, $\mathcal{H} = \dot{H}_m e^{i\varphi}$. Но существуют особые случаи, когда такое представление естественно и полезно.

Пусть, например, \mathcal{E} , \mathcal{H} и φ вещественны. При этом формулы (56.1) описывают волну, фронт которой характеризуется уравнением

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{const} \quad (56.2)$$

(ср. стр. 164). Волна эта однородна, если \mathcal{E} и \mathcal{H} постоянны на поверхности фронта. Функция φ называется здесь *эйконалом*. В частности, для плоской волны эйконал — линейная функция координат: $\varphi(\mathbf{r}) = Ax + By + Cz$ или (§ 34, п. 1): $\varphi(\mathbf{r}) = k(x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3)$, а для волны сферической $\varphi(\mathbf{r}) = Cr = kr$.

Теперь мы видим, что если в комплексных амплитудах поля \dot{E}_m и \dot{H}_m можно выделить множитель $e^{-i\varphi}$ (функция φ пусть будет вещественна) так, что коэффициенты \mathcal{E} и \mathcal{H} оказываются слабо зависящими от координат, то поле близко к однородной электромагнитной волне с фронтом $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$. При этом в окрестности любой точки можно указать достаточно малую область, в которой векторы \mathcal{E} и \mathcal{H} практически постоянны, а участок фронта является почти плоским. Мы вправе, таким образом, рассматривать данное электромагнитное поле локально как плоскую волну; будем употреблять в подобных случаях выражение *локально плоские волны*.

2. Основные уравнения локально плоских волн. Поставим целью получить уравнения, описывающие локально плоские волны. Согласно (П1.35) при (56.1) $\text{rot } \dot{E}_m = e^{-i\varphi} \text{rot } \mathcal{E} + [\nabla e^{-i\varphi}, \mathcal{E}]$, причем $\nabla e^{-i\varphi} = -ie^{-i\varphi} \nabla \varphi$, и подобным же образом выражается $\text{rot } \dot{H}_m$. Поэтому, внося представления (56.1) в однородные уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (т. е. в (29.11) при $\mathbf{j}_m^{\text{ст}} = 0$), имеем

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathcal{H} + i[\mathcal{H}, \nabla \varphi] &= i\omega \varepsilon \mathcal{E}, \\ \text{rot } \mathcal{E} - i[\nabla \varphi, \mathcal{E}] &= -i\omega \dot{\mu} \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (56.3)$$

Рассматривая вообще неоднородные среды, будем считать проницаемости функциями координат: $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ и $\dot{\mu} = \dot{\mu}(\mathbf{r})$.

Отличительным свойством локально плоской волны является слабая зависимость от координат функций $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{H}(\mathbf{r})$ в сравнении с $\varphi(\mathbf{r})$. Поэтому ограничим класс рассматриваемых процессов, потребовав выполнения следующих неравенств:

$$\frac{|\text{rot } \mathcal{E}|}{|[\nabla \varphi, \mathcal{E}]|} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{|\text{rot } \mathcal{H}|}{|[\mathcal{H}, \nabla \varphi]|} \ll 1 \quad (56.4a)$$

или равносильных неравенств:

$$\frac{|\text{rot } \mathcal{E}|}{\omega |\dot{\mu} \mathcal{H}|} \ll 1 \quad \text{и} \quad \frac{|\text{rot } \mathcal{H}|}{\omega |\varepsilon \mathcal{E}|} \ll 1 \quad (56.4b)$$

(позднее в п. 5 мы обсудим эти ограничения). Чем сильнее выпол-

няются неравенства (56.4а) или (56.4б), тем с бóльшим основанием можно заменить уравнения Максвелла (56.3) следующими:

$$[\mathcal{H}, \nabla\varphi] = \omega\dot{\epsilon}\mathcal{E}, \quad [\nabla\varphi, \mathcal{E}] = \omega\dot{\mu}\mathcal{H}. \quad (56.5)$$

Отсюда видно, что векторы \mathcal{E} , \mathcal{H} и $\nabla\varphi$ взаимно перпендикулярны.

Пусть $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ вещественны ($\dot{\epsilon} = \epsilon$, $\dot{\mu} = \mu$). Исключая из (56.5) \mathcal{H} или \mathcal{E} соответственно, получаем уравнения

$$[[\nabla\varphi, \mathcal{E}], \nabla\varphi] = \omega^2\epsilon\mu\mathcal{E} \quad (56.6)$$

и

$$[\nabla\varphi, [\mathcal{H}, \nabla\varphi]] = \omega^2\epsilon\mu\mathcal{H}. \quad (56.7)$$

Из (56.6) либо из (56.7) при помощи формулы (П1.5) находим

$$(\nabla\varphi)^2 = k^2, \quad (56.8)$$

где $k^2 = \omega^2\epsilon\mu$. Это так называемое *уравнение эйконала*. В частности, в декартовых координатах оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = k^2. \quad (56.8a)$$

Эйконал φ , как и требуется, — вещественная функция.

О чем говорят полученные результаты? Взаимно перпендикулярные векторы \mathcal{E} , \mathcal{H} и $\nabla\varphi$ образуют, как видно из (56.5), правую тройку, так что градиент эйконала $\nabla\varphi$ параллелен вектору Пойнтинга $[\mathcal{E}, \mathcal{H}]$. При этом вектор $\nabla\varphi$ направлен по нормали к поверхности $\varphi = \text{const}$, являющейся фронтом волны (рис. 56.1). Отношение $\nabla\varphi/|\nabla\varphi|$ есть, следовательно, единичный вектор волновой нормали

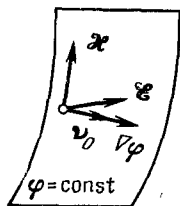


Рис. 56.1.

$$\mathbf{v}_0 = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}. \quad (56.9)$$

Введя волновой вектор \mathbf{k} (§ 34, п. 1), поэтому, с учетом (56.8), имеем

$$\mathbf{k} = \mathbf{v}_0 k = \nabla\varphi. \quad (56.10)$$

Наконец, внесем последнее представление в (56.5) и получим

$$[\mathcal{H}, \mathbf{v}_0] = \frac{1}{W}\mathcal{E}, \quad [\mathbf{v}_0, \mathcal{E}] = W\mathcal{H}, \quad (56.11)$$

где $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$, и

$$\frac{\dot{E}_m}{\dot{H}_m} = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{H}} = W. \quad (56.12)$$

Итак, мы действительно имеем поле, локально неотличимое от обычной однородной волны (§ 32).

3. Геометрическая оптика неоднородной среды. Вернемся к тому факту, что вектор $\nabla\varphi$ как градиент скаляра φ всегда направлен по нормали к эквифазной поверхности $\varphi = \text{const}$, т. е. к фронту волны, и выражает наибольшую (в сравнении с иными направлениями) скорость возрастания фазы φ . Линии вектора $\nabla\varphi$ — это и

есть *лучи*, рассматриваемые в геометрической оптике. Для некоторого семейства поверхностей $\varphi = \text{const}$ лучи находятся как ортогональные им линии (рис. 56.2, а). При этом, поскольку вектор Пойнтинга направлен везде параллельно $\nabla\varphi$, лучи можно определить как линии, вдоль которых происходит движение энергии.

Сосредоточим внимание на двух эквифазных поверхностях и луче, соединяющем расположенные на них точки A и B (рис. 56.2, б); очевидно, каждая из таких поверхностей определяет мгновенное

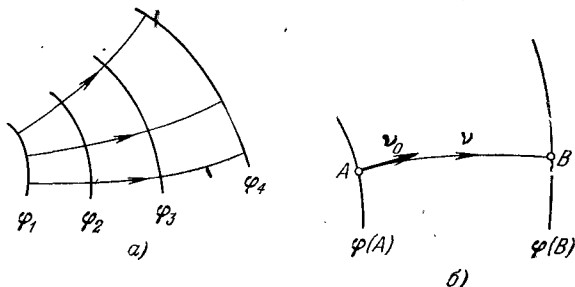


Рис. 56.2.

положение фронта распространяющейся волны. Обозначим линию луча v и на основании определения градиента запишем:

$$\nabla\varphi = v_0 \frac{\partial\varphi}{\partial v}. \quad (56.13)$$

Привлекая также формулу (56.10), получаем отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v} = k = k_0 n, \quad (56.14)$$

где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ и $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ — показатель преломления среды (§ 37, п. 2). Интегрируя (56.14) по v от A до B , имеем

$$\varphi(B) - \varphi(A) = \int_A^B k \, dv = k_0 \int_A^B n \, dv. \quad (56.15)$$

Это выражение разности фаз на пути рассматриваемого луча, или, как говорят, его *оптической длины* через коэффициент преломления среды.

Сделаем некоторые выводы из соотношений (56.13) — (56.15). Взяв случай однородной среды ($n = \text{const}$), получаем

$$\varphi(B) - \varphi(A) = kd = k_0 nd, \quad (56.16)$$

где d — длина пути вдоль луча. Пусть в однородной среде зафиксирован плоский (рис. 56.3, а) или сферический (рис. 56.3, б) фронт волн $\varphi = \Phi_0$. Поскольку во всех точках $\partial\varphi/\partial v$ имеет одно и то же значение, то построение $\nabla\varphi$ (символически изображенное стрелками) показывает, что следующее положение фронта $\varphi = \Phi$ будет также

плоскостью (а) или, соответственно, сферой (б). Лучи при этом — прямые линии.

Пусть далее среда неоднородна; рассматривая такие же фронты (рис. 56.4, а, б), мы придем к выводу, что они, вообще говоря,

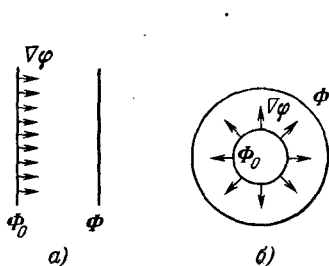


Рис. 56.3.

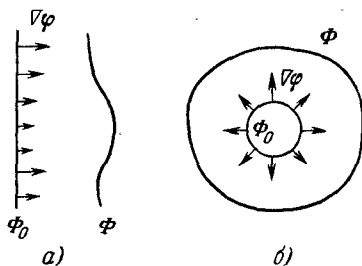


Рис. 56.4.

деформируются, а лучи криволинейны. Действительно, это прямо следует из построения $\nabla\varphi$ на поверхностях $\varphi = \Phi_0$: согласно (56.14) величина $\partial\varphi/\partial v$ в разных точках фронта будет иметь разные значения при непостоянстве n . Исключение составляет случай неоднородной среды, для которой n меняется только вдоль v .

4. Принцип Ферма. Существует еще важное общее положение, позволяющее находить линии лучей в неоднородной среде и известное под названием *принципа Ферма*. Согласно ему луч — это та линия, вдоль которой оптическая длина минимальна, т. е.

$$\int_A^B n \, dv = \min \int_A^B n \, dl; \quad (56.17)$$

слева путь интегрирования совпадает с линией луча, а справа подразумевается перебор всех возможных путей от A до B .

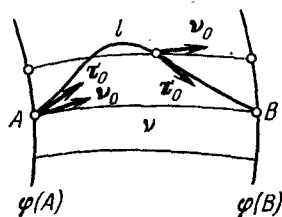


Рис. 56.5.

Для доказательства принципа Ферма отметим сначала, что в силу потенциальности поля лучей для любого пути

$$\int_A^B \nabla\varphi \, dl = \varphi(B) - \varphi(A), \quad (56.18)$$

т. е. записанный интеграл не зависит от линии интегрирования, а определяется только значениями эйконала (фазы) в начальной и конечной точках пути (ср. свойства электростатического потенциала, § 14, п. 2).

Выберем путь, не совпадающий с линией луча (рис. 56.5), и заменим в (56.18) $\nabla\varphi$, согласно (56.10), через $\mathbf{k} = v_0 \mathbf{k} = v_0 k_0 n$

$$\int_A^B \nabla\varphi \, dl = \int_A^B \mathbf{k} \, dl = k_0 \int_A^B n \cos \alpha \, dl,$$

где $\cos \alpha = (\mathbf{v}_0, \boldsymbol{\tau}_0)$ — косинус угла между направлениями луча (\mathbf{v}_0) и пути интегрирования ($\boldsymbol{\tau}_0$). Взяв, в частности, путь интегрирования вдоль луча ($l = \mathbf{v}$), мы должны положить $\cos \alpha = 1$. Но в силу независимости интеграла (56.18) от пути

$$\int_A^B n \cos \alpha \, dl = \int_A^B n \, dv,$$

а поэтому

$$\int_A^B n \, dl \geq \int_A^B n \, dv,$$

так как умножение положительного n на $\cos \alpha \leq 1$ может только уменьшить величину интеграла. Отсюда и вытекает принцип Ферма (56.17).

Теперь нетрудно обосновать изложенную в § 50, п. 3 методику расчета зеркал и линз. В обоих случаях речь идет о нахождении условий, при которых все оптические пути из точки (фокуса) до некоторой плоскости (фронта волны) *одинаковы*. Положим, такие пути построены, как и было сделано при выводе уравнений (50.5) и (50.6). Почему эти пути должны в действительности реализоваться, т. е. именно вдоль них пойдут лучи? На этот вопрос позволяет ответить принцип Ферма: потому что, будучи равными, все найденные пути оказываются *наименьшими*.

5. О применимости геометрической оптики. Обратимся к неравенствам (56.46), выполнение которых оправдывает применение концепций геометрической оптики к электромагнитным полям. Отметим сначала, что они должны быть справедливыми при достаточно высоких частотах, и в пределе при $\omega \rightarrow \infty$ геометрическая оптика закономерна (ср. § 50, п. 2). Взяв далее вещественные проницаемости, приведем (56.46) к виду

$$\left| \frac{\operatorname{rot} \mathcal{E}}{W |\mathcal{H}|} \right| \ll k \quad \text{и} \quad \left| \frac{\operatorname{rot} \mathcal{H}}{W |\mathcal{E}|} \right| \ll k, \quad (56.19)$$

где введены параметры $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ и $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$, являющиеся функциями координат вместе с проницаемостями ϵ и μ . Функцией координат будет и величина $\lambda = 2\pi/k$, которую условно можно назвать «мгновенной» (отнесенной к точке) длиной волны; на самом деле, λ может рассматриваться как длина волны лишь в том случае, если исследуемое поле есть локально плоская волна. Переписав (56.19) в форме

$$\lambda \left| \frac{\operatorname{rot} \mathcal{E}}{W |\mathcal{H}|} \right| \ll 2\pi \quad \text{и} \quad \lambda \frac{|\operatorname{rot} \mathcal{H}| W}{|\mathcal{E}|} \ll 2\pi, \quad (56.19a)$$

отметим, что компоненты вихря вектора составлены из первых производных самого вектора, а поэтому записанные неравенства будут заведомо выполнены, если $\frac{\lambda}{W |h|} \left| \frac{\partial e}{\partial \xi} \right| \ll 2\pi$ и $\frac{\lambda W}{|e|} \left| \frac{\partial h}{\partial \xi} \right| \ll 2\pi$, где e и h компоненты векторов \mathcal{E} и \mathcal{H} соответственно, а ξ —

произвольная декартова координата. Но, в частности, $\frac{\partial e}{\partial \xi} \lambda \approx \Delta_{\lambda} e$ есть приращение e на длине λ в направлении ξ . Таким образом, для всех компонент \mathcal{E} , \mathcal{H} и всех ξ потребуем

$$\frac{|\Delta_{\lambda} e|}{W|h|} \ll 2\pi \quad \text{и} \quad \frac{W|\Delta_{\lambda} h|}{|e|} \ll 2\pi. \quad (56.20)$$

Достаточным условием применимости представлений геометрической оптики является, как мы видим, относительная малость изменения амплитуд поля на расстояниях порядка λ . Это мыслимо, если на таких же расстояниях мало изменяются ϵ и μ (а с ними и λ). Но, разумеется, даже в однородной среде ($\epsilon = \text{const}$, $\mu = \text{const}$) могут существовать поля, для которых требования (56.20) не выполняются; весьма быстро изменяются поля, например, вблизи границ «тени» (§ 54).

В заключение запишем вытекающие из (56.3) точные равенства вида

$$[[\nabla\varphi, \mathcal{E}], \nabla\varphi] = \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \mathcal{E} + i\omega \dot{\mu} \text{rot } \mathcal{H} - i[\text{rot } \mathcal{E}, \nabla\varphi] \quad (56.21)$$

и

$$[\nabla\varphi, [\mathcal{H}, \nabla\varphi]] = \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} \mathcal{H} - i\omega \dot{\epsilon} \text{rot } \mathcal{E} + i[\nabla\varphi, \text{rot } \mathcal{H}] \quad (56.22)$$

(ср. (56.6) и (56.7)). Из них, в свою очередь, следует:

$$(\nabla\varphi)^2 = \dot{k}^2 + \frac{1}{\epsilon^2} \{i\omega \dot{\mu} \mathcal{E} \text{rot } \mathcal{H} - i[\mathcal{E}, \text{rot } \mathcal{E}] \nabla\varphi + (\mathcal{E} \nabla\varphi)^2\} \quad (56.23)$$

и

$$(\nabla\varphi)^2 = \dot{k}^2 - \frac{1}{\mu^2} \{i\omega \dot{\epsilon} \mathcal{H} \text{rot } \mathcal{E} - i[\text{rot } \mathcal{H}, \mathcal{H}] \nabla\varphi - (\mathcal{H} \nabla\varphi)^2\}. \quad (56.24)$$

Сопоставление (56.23) и (56.24) с (56.8) приводит к следующим критериям применимости уравнения эйконала:

$$\left| \frac{1}{\epsilon^2} \{i\omega \dot{\mu} \mathcal{E} \text{rot } \mathcal{H} - i[\mathcal{E}, \text{rot } \mathcal{E}] \nabla\varphi + (\mathcal{E} \nabla\varphi)^2\} \right| \ll |\dot{k}^2| \quad (56.25)$$

или

$$\left| \frac{1}{\mu^2} \{i\omega \dot{\epsilon} \mathcal{H} \text{rot } \mathcal{E} - i[\text{rot } \mathcal{H}, \mathcal{H}] \nabla\varphi - (\mathcal{H} \nabla\varphi)^2\} \right| \ll |\dot{k}^2|. \quad (56.26)$$

Если для некоторого поля E , H построено представление (56.1), формулы (56.25), (56.26) покажут, имеются ли основания для геооптической трактовки.

§ 57. Лучи в неоднородных средах

1. Кривизна луча. Вывод основного уравнения. На рис. 57.1 изображен луч в виде плоской кривой v . Рассматривая две близкие точки M и M' , при $\alpha \rightarrow 0$ имеем: $\Delta v \rightarrow \alpha R$ и $\alpha \rightarrow \frac{\Delta v_0}{v_0} = \Delta v_0$, где $\Delta v = MM'$ — длина дуги, R — радиус кривизны в точке M ,

а Δv_0 — абсолютное значение приращения Δv_0 единичного вектора v_0 касательной к лучу. Таким образом, для радиуса кривизны получаем следующее дифференциальное выражение:

$$R = dv/dv_0. \quad (57.1)$$

Будем использовать в дальнейшем следующую векторную характеристику кривизны луча (вообще неплоского):

$$K = \frac{R_0}{R} = \frac{dv_0}{dv}, \quad (57.2)$$

где R_0 — единичный вектор, указывающий направление dv_0 , т. е. обращенный в сторону уклонения луча, а $1/R$, как известно, называется кривизной. Один из способов вывода основного уравнения, характеризующего оптический луч, состоит в следующем [Г. 2].

В декартовых координатах

$$\frac{dv_0}{dv} = \frac{\partial v_0}{\partial x} \frac{dx}{dv} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{dy}{dv} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{dz}{dv},$$

причем входящие сюда производные координат x, y, z по длине v — это направляющие косинусы,

а следовательно, проекции единичного вектора v_0 на координатные оси. Поэтому

$$\frac{dv_0}{dv} = \frac{\partial v_0}{\partial x} v_{0x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_{0y} + \frac{\partial v_0}{\partial z} v_{0z}. \quad (57.3)$$

Учтем далее, что $\nabla v_0^2 = 0$, так как $v_0^2 = 1$; раскрывая $\nabla v_0^2 = \nabla (v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2)$, имеем отсюда равенство

$$v_{0x} \nabla v_{0x} + v_{0y} \nabla v_{0y} + v_{0z} \nabla v_{0z} = 0. \quad (57.4)$$

Из (57.3) и (57.4), в частности, следует:

$$\frac{dv_0}{dv} = v_{0x} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \nabla v_{0x} \right) + v_{0y} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - \nabla v_{0y} \right) + v_{0z} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} - \nabla v_{0z} \right), \quad (57.5)$$

что можно переписать в иной, лаконичной форме. Действительно, проектируя (57.5), например, на ось x , имеем

$$\frac{dv_{0x}}{dv} = v_{0y} \left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial y} - \frac{\partial v_{0y}}{\partial x} \right) + v_{0z} \left(\frac{\partial v_{0x}}{\partial z} - \frac{\partial v_{0z}}{\partial x} \right) = - [v_0, \text{rot } v_0]_x,$$

а так как подобный же вид имеют и остальные проекции, то равенство (57.5) приобретает форму

$$\frac{dv_0}{dv} = - [v_0, \text{rot } v_0]. \quad (57.6)$$

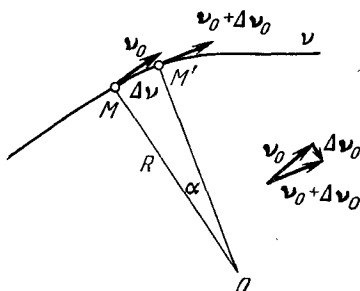


Рис. 57.1.

Чтобы получить уравнение оптического луча, учтем, что, согласно (П1.33) и (56.10), $\text{rot } \mathbf{k} = 0$, а так как $\mathbf{k} = v_0 n \mathbf{k}_0$ (§ 56, п. 3)

$$\text{rot } v_0 n = 0 \quad (57.7)$$

и на основании (П1.35)

$$\text{rot } v_0 = -\frac{1}{n} [\nabla n, v_0]. \quad (57.7a)$$

Внося это в (57.6), получаем уравнение луча

$$\frac{dv_0}{dv} = \frac{1}{n} [v_0, [\nabla n, v_0]] \quad (57.8)$$

или после преобразования при помощи (П1.5)

$$\frac{dv_0}{dv} = \frac{1}{n} \{ \nabla n - v_0 (v_0 \nabla n) \}. \quad (57.8a)$$

Заметим еще что

$$\frac{d}{dv} (v_0 n) = n \frac{dv_0}{dv} + v_0 (v_0 \nabla n),$$

так что уравнению луча можно придать форму

$$d/dv (v_0 n) = \nabla n. \quad (57.8б)$$

2. Свойства лучей. Слоистые среды. Начнем с замечания, что из (57.8) с учетом (57.2) следует: в однородной среде ($n = \text{const}$, $\nabla n = 0$) лучи — прямые линии ($\mathbf{K} = 0$, $R \rightarrow \infty$).

Представим себе далее, что луч везде направлен в сторону наибольшего изменения свойств среды — векторы v_0 и ∇n параллельны. Из (57.8) видно, что при этом также $\mathbf{K} = 0$, т. е. луч прямой. Это возможно, если поверхности $n = \text{const}$ неоднородной среды одновременно являются поверхностями фронта распространяющейся волны. Возьмем, например, случай *плоско-слоистой* среды, когда поверхности $n = \text{const}$ — параллельные плоскости (рис. 57.2, а); здесь мыслима плоская волна, лучи которой — параллельные прямые. В случае *сферически-слоистой* среды (поверхности $n = \text{const}$ — концентрические шаровые) речь может идти о сферической волне: лучи — радиальные прямые, рис. 57.2, б.

Пусть теперь в некоторой точке слоистой среды луч направлен перпендикулярно ∇n (вдоль поверхности $n = \text{const}$). При этом из (57.8a) имеем

$$\frac{dv_0}{dv} = \frac{\nabla n}{n}, \quad (57.9)$$

т. е. луч уклоняется в сторону наибольшего возрастания показателя преломления среды. Это иллюстрируют рис. 57.2, в, г.

Рассмотрим более общее положение, когда в слоистой среде направление луча составляет с ∇n произвольный угол θ_0 . Качественно искривление луча можно охарактеризовать по-прежнему: он уклоняется в сторону ∇n ; это видно из векторных диаграмм сложения $\nabla n/n$ и $-v_0 (v_0 \nabla n)/n$, приведенных на рис. 57.2, д, е. Координата z указывает здесь направление, которое будем называть

вертикальным. Вектор ∇n либо совпадает с вертикальным направлением (рис. 57.2, д), либо противоположен ему (рис. 57.2, е). В первом случае луч искривляется к вертикали, и кривизна будет считаться отрицательной, а во втором — от вертикали (положительная кривизна).

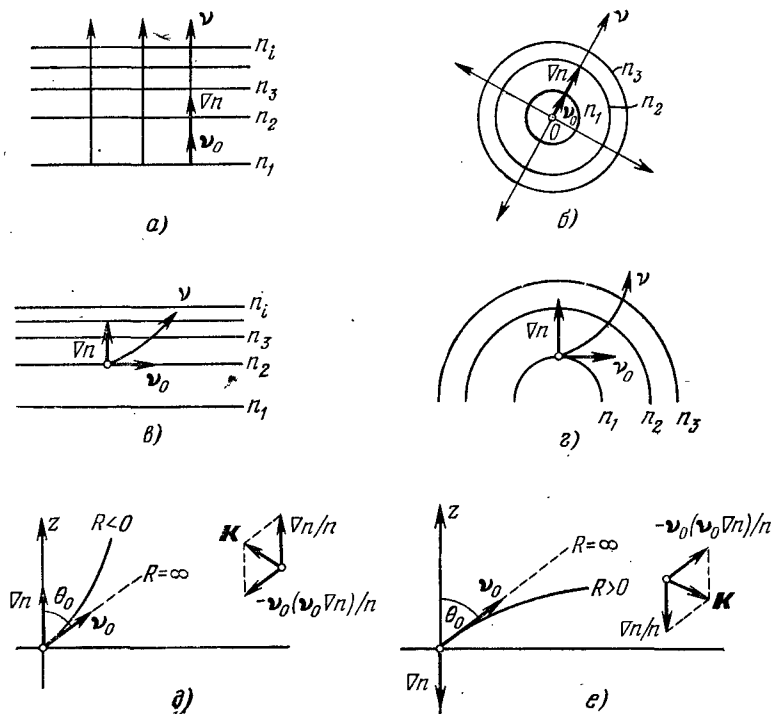


Рис. 57.2.

Желая определить радиус кривизны R , будем отправляться от формул (57.2) и (57.8а). Поскольку теперь $\nabla n = z_0 \frac{dn}{dz}$ ($dn/dz > 0$ (рис. 57.2, д) или $dn/dz < 0$ (рис. 57.2, е)), то

$$\frac{R_0}{R} = \frac{1}{n} \left\{ z_0 \frac{dn}{dz} - v_0 (v_0 z_0) \frac{dn}{dz} \right\}.$$

Учитывая, что $v_0 z_0 = \cos \theta_0$, при возведении в квадрат получаем отсюда

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{n^2} \left(\frac{dn}{dz} \right)^2 (1 - \cos^2 \theta_0) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{dn}{dz} \right)^2 \sin^2 \theta_0,$$

и, наконец,

$$R = - \frac{n}{\frac{dn}{dz} \cos \theta_0}. \quad (57.10)$$

где знак минус (при извлечении корня из предыдущего выражения) выбран в соответствии с условием о знаке кривизны, указанным выше; $R > 0$ при убывании оптической плотности среды по вертикали. Взяв $\theta_0 = 90^\circ$, получаем из (57.10) формулу для случая луча, идущего параллельно плоскости $n = \text{const}$

$$R = -\frac{n}{dn/dz}. \quad (57.11)$$

Читателю рекомендуется вывести ее также прямо из (57.9).

Приведем еще один очень простой вывод формулы (57.11). Пусть в результате изменения коэффициента преломления с высотой первоначально вертикальный фронт волны оказался несколько наклоненным (рис. 57.3). При этом Δl и $\Delta l'$ — приращения лучей при z и $z + \Delta z$ соответственно. Очевидно,

$$\Delta l = \frac{v_0 \tau}{n} \quad \text{и} \quad \Delta l' = \frac{v_0 \tau}{n + \frac{dn}{dz} \Delta z + \dots},$$

где $v_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ и τ — интервал времени. Если R — радиус кривизны луча, то $\frac{\Delta l'}{R} \approx \frac{\Delta l' - \Delta l}{\Delta z}$, т. е.

$$R \approx \frac{\Delta z}{1 - \frac{\Delta l'}{\Delta l}}.$$

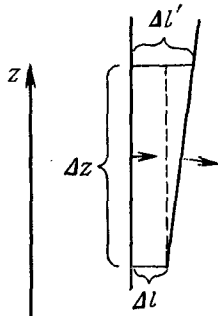


Рис. 57.3.

Внося сюда выражения Δl и $\Delta l'$, приходим к (57.11).

Наконец, обратимся к уравнению луча в форме (57.86), чтобы найти для плоско-слоистой среды подобие второго закона Снеллиуса. Умножая обе части равенства (57.86) векторно на \mathbf{z}_0 , справа будем иметь тождественный нуль ввиду параллельности векторов \mathbf{z}_0 и $\nabla n = \mathbf{z}_0 dn/dz$. Поэтому

$$[d(\mathbf{v}_0 n)/d\mathbf{v}, \mathbf{z}_0] = 0. \quad (57.12)$$

Очевидно, что

$$[d(\mathbf{v}_0 n)/d\mathbf{v}, \mathbf{z}_0] = d[\mathbf{v}_0 n, \mathbf{z}_0]/d\mathbf{v},$$

поскольку $d\mathbf{z}_0/d\mathbf{v} = 0$ ($\mathbf{z}_0 = \text{const}$). Таким образом, из (57.12) следует:

$$n[\mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0] = \text{const} \quad (57.13)$$

или

$$n \sin \vartheta = \text{const}. \quad (57.13a)$$

Подчеркнем, что речь идет о величине, постоянной по длине луча во всех его точках. Можно ввести в рассмотрение начало луча: $n = n_0$ и $\vartheta = \theta_0$ (рис. 57.4, а). Тогда выведенное соотношение принимает такую форму:

$$n \sin \vartheta = n_0 \sin \theta_0, \quad (57.13b)$$

в которой оно сходно со вторым законом Снеллиуса.

Напомним, что ранее (§ 41, п. 2) рассматривалась система слоев постоянной оптической плотности, на границах которых n изменяется скачкообразно. Полученный теперь результат (57.136) есть в сущности предельная форма соотношения (41.10).

Возьмем систему двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 , разделенных плоской границей, на которой изменение свойств

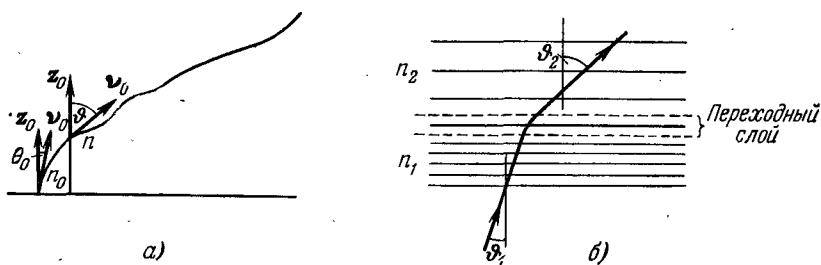


Рис. 57.4.

происходит постепенно в некотором слое. Сомнений относительно применимости формулы (57.136) при выполнении некоторых требований (§ 56, п. 5) не возникает, и мы находим (рис. 57.4, б)

$$n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2. \quad (57.14)$$

По форме это второй закон Снеллиуса (§ 37, п. 2). Очевидно, что с этих позиций мы имеем право выступать, пока толщина промежуточного слоя не слишком мала (§ 56, п. 5); переход же к случаю скачкообразного изменения n , формально допустимый, не обоснован.

IV. ЗЕМНЫЕ И ТРОПОСФЕРНЫЕ РАДИОВОЛНЫ

В этом разделе мы возвращаемся к вопросам распространения радиоволн в природных условиях, первоначально затронутым в §§ 41, 42. Предшествующий материал данной главы послужит при этом необходимой теоретической базой.

Уже отмечалось, что совокупность физических факторов, определяющих свойства радиолиний, весьма сложна; пожалуй, наиболее сложным является влияние верхних ионизированных слоев атмосферы — ионосферы.

Однако для широкого круга процессов распространения радиоволн это влияние вполне пренебрежимо, а существенно только наличие земной поверхности. Радиоволны в таких случаях называются *земными* (§ 41, п. 2).

Часто нижние слои атмосферы, в которых практически распространяются земные радиоволны, можно рассматривать как однородную среду, которая по своим электродинамическим характеристикам близка к вакууму. В других случаях неоднородность приле-

жащих к Земле слоев атмосферы, тропосферы, заметна или даже играет определяющую роль. Радиоволны, особенности распространения которых обусловлены этого рода факторами, называются *тропосферными*.

Ниже будут рассмотрены земные и тропосферные радиоволны.

§ 58. Физические факторы и приближения теории

1. Природные условия и их моделирование. Земля с атмосферой, вообще говоря, есть сложная неоднородная среда. Различны свойства почв, и около 70% земной поверхности покрыто водой. Горы, леса, строения и т. д., казалось бы, запрещают говорить о Земле как о физическом теле с простой поверхностью и везде известными электродинамическими характеристиками. Понятно, что строгая постановка задачи о распространении радиоволн в природных

условиях оказывается невозможной из-за многообразия факторов, и неизбежно *моделирование*, т. е. замена реальных условий некоторыми упрощенными, которые, однако, должны воспроизводить существенное с удовлетворительной достоверностью.

Каково влияние рельефа земной поверхности и расположенных на ней предметов, зависит от соотношения размеров неровностей и длины волны. Пусть плоская волна падает на поверх-

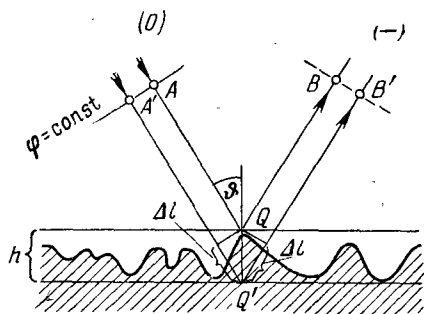


Рис. 58.1.

ность раздела сред сложной формы, отклоняющуюся от плоскости не более чем на высоту h (рис. 58.1). Это объект дифракции, и вопрос состоит в том, насколько поле рассеяния отличается от волны, которая бы отражалась плоской границей, т. е., в частности, каково непостоянство фазы поля рассеяния в гипотетической плоскости фронта такой волны (пунктир на рис. 58.1). Отдельные элементы поверхности раздела подобны элементарным излучателям, фазы которых вынуждаются падающей волной, и можно попытаться оценить фазовые различия в интересующей нас плоскости, сравнивая их поля. Два близких, но максимально отстоящих по высоте элемента неровной поверхности подобны излучателям (или отражающим площадкам), расположенным на расстоянии h по вертикали. Соответствующая разность фаз равна различию оптических путей $A'Q'B'$ и AQB , т. е.

$$\Delta\varphi = 2k\Delta l = \frac{4\pi h}{\lambda} \cos \theta. \quad (58.1)$$

Если $h \ll \lambda$, то $\Delta\varphi \approx 0$. Тогда, пренебрегая фазовыми отклонениями, можно заключить, что неровности границы не проявляются. Фор-

мула (58.1) показывает, что влияние неровностей уменьшается не только с их высотой, но и по мере приближения направления распространения волны к горизонтальному. Считается, что пренебрежение неровностями границы в какой-то мере оправдано вплоть до фазовых отклонений $\Delta\varphi$ порядка $\pi/2$. Согласно (58.1) этому соответствует высота неровностей

$$h < \lambda/8 \cos \varphi. \quad (58.2)$$

В диапазонах средних и длинных волн лесистую местность или даже город можно считать ровной поверхностью, характеризующей некоторыми эквивалентными электродинамическими параметрами, например коэффициентом отражения для волны той или иной поляризации и направления. Зато для сантиметровых волн отдельный камень или куст должен рассматриваться как объект дифракции.

В ряде случаев, анализируя распространение радиоволн, поверхность Земли принимают за плоскую («плоская модель»), иногда идеально проводящую. Что касается атмосферы, то надо иметь в виду следующее. Около 80% массы воздуха сосредоточено в слое вблизи Земли, имеющем в среднем толщину около 11 км. Это и есть тропосфера, уже кратко упоминавшаяся. Показатель преломления газа, заполняющего тропосферу (а он состоит из воздуха с примесью водяных паров), весьма близок к единице, однако, несмотря на это, пространственные вариации оптической плотности тропосферы в ряде случаев необходимо учитывать при объяснении особенностей распространения радиоволн.

При нормальном устойчивом состоянии тропосферы ее температура и плотность убывают с высотой, причем верхней границей тропосферы как раз считают уровень, на котором падение температуры прекращается; среднегодовая температура здесь может достигать -80°C . В следующих за тропосферой сильно разреженных слоях температура опять повышается, но это обстоятельство с точки зрения электродинамики уже не имеет большого значения: основным фактором является падение оптической плотности вместе с плотностью газа. При количественных оценках в данном случае удобно пользоваться не коэффициентом преломления n , отличающимся от единицы на десятитысячные доли, а так называемым «индексом преломления» N , который определяется формулой

$$N = (n - 1) \cdot 10^6. \quad (58.3)$$

Идеализированный закон изменения N с высотой представлен графически на рис. 58.2 [E.1]; на линейном участке (до высот около 7 км) $dN/dh \approx -4 \cdot 10^{-2}$ 1/м. Важно, что наблюдаются существенные отклонения от приведенного нормального закона, как более или менее стационарные, так и случайные.

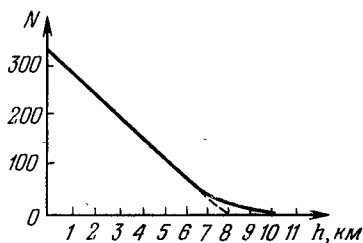


Рис. 58.2.

Медленные изменения плотности тропосферы вызывают при распространении радиоволн явления, описываемые как рефракция. Локальные флуктуации плотности надо рассматривать как объекты рассеяния.

2. Доминантная область радиолинии. Ввиду разнообразия физических факторов в разных местах земного шара особенно важен вопрос, в какой степени их надо одновременно учитывать при анализе радиолиний. И вообще необходимо ли в принципе рассматривать при этом электромагнитное поле во всем пространстве?

Сначала предельно упростим задачу. Пусть в неограниченной однородной среде распространяется плоская волна, и в некоторой

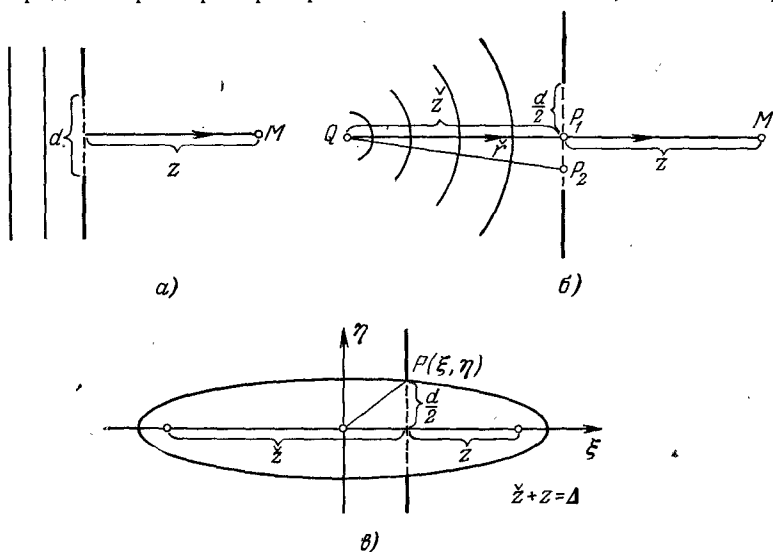


Рис. 58.3.

точке наблюдения M поле характеризуется напряженностями E, H . Желая выяснить, насколько эти величины зависят от электромагнитного процесса в отдаленных областях пространства, представим, что на пути волны расположен экран с отверстием (рис. 58.3, а); последнее может быть прямоугольным. Теперь в точке M мы имеем поле дифракции, рассматривавшееся в § 54. Из § 54, п. 2 известно, что в случае отверстия достаточно больших размеров поле против его средней точки практически не отличается от падающей волны. Подчеркнем, что оценке подлежат «волновые размеры», определяемые соотношениями (54.8), т. е. если поперечный размер отверстия есть d , то велик должен быть соответствующий волновой размер

$$\tilde{d}_\lambda = d/\sqrt{\lambda z} \quad (58.4)$$

(ср. (54.13)), где z в данном случае есть расстояние до точки наблюдения (рис. 58.3, а). Предположим, что поле в M при наличии экрана

не отличается (с заданной степенью точности) от поля без экрана, когда $\tilde{d} = C$; это значит, что при

$$d = C \sqrt{\lambda z} \quad (58.5)$$

экранируется «несущественная часть» поля. Чем меньше λ , тем уже допустимое отверстие; при $\lambda \rightarrow 0$ оно становится исчезающе малым и, можно сказать, выделяет луч. Естественно сделать вывод, что в формировании поля плоской волны в точке M активно участвует лишь часть полного поля, сосредоточенная в области в виде канала. Эту область будем называть «доминантной» (определяющей).

В условиях радиолинии волну следует считать сферической. Рассмотрим сферическую волну, излучаемую в точке Q (передающая антенна) и наблюдаемую в точке M (приемная антенна). Чтобы выяснить в этом случае характер доминантной области, введем, как и ранее, экран с отверстием (рис. 58.3, б) и исследуем поле дифракции.

Если точка Q далека от экрана, то амплитуду сферической волны в плоскости отверстия можно считать неизменной, что же касается фазы, то различием расстояний QP_1 и QP_2 уже нельзя пренебрегать. Обозначая QP_2 символом \check{r} , имеем

$$\check{r} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + \check{z}^2},$$

где $\check{z} = QP_1$ — кратчайшее расстояние, а x' , y' — координаты в плоскости экрана. Очевидно (ср. § 54, п. 1),

$$\check{r} = \check{z} + \frac{(x')^2 + (y')^2}{2\check{z}} + \dots$$

Заметим теперь, что для нахождения поля дифракции сферической волны нужно внести лишь очень небольшие изменения в формулы из § 54. Именно, под интегралом (54.1) должен фигурировать дополнительный фазовый множитель

$$e^{-ik_0\check{r}} = e^{-ik_0\check{z}} e^{-ik_0 \frac{(x')^2 + (y')^2}{2\check{z}}},$$

так что

$$\begin{aligned} \check{E}_m^- = x_0 \frac{ik_0 A}{2\pi} \frac{e^{-ik_0(z+\check{z})}}{z} \times \\ \times \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-ik_0 \left[\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2z} + \frac{(x')^2 + (y')^2}{2\check{z}} \right]} dx' dy'. \quad (58.6) \end{aligned}$$

Поскольку нас будет интересовать лишь точка наблюдения $M(0, 0, z)$, то в (58.6) надо положить $x = 0$ и $y = 0$. Интеграл, как и в § 54, п. 1, распадается на два идентичных по форме интеграла по x' и y' . Один из них:

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_0 \left[\frac{(x')^2}{2z} + \frac{(x')^2}{2\check{z}} \right]} dx' = \int_{-a/2}^{a/2} e^{ik_0 \frac{(x')^2}{2z\check{z}/(z+\check{z})}} dx'.$$

В сравнении со случаем дифракции плоской волны (§ 54), когда множитель $e^{-ik_0(x')^2/2z}$ отсутствует, различие свелось к тому, что вместо z мы имеем теперь $\frac{z\check{z}}{z+\check{z}}$.

Выписать результат интегрирования уже не представляет труда: надо лишь внести очевидные изменения в (54.3), (54.3а). Но требуется не выражение поля, а представление о волновых размерах отверстия. Ясно, что новые размеры будут по-прежнему выражаться формулами (54.8) при замене в них z на $\frac{z\check{z}}{z+\check{z}}$, и смысл этих параметров сохранится (вывод формул (54.9) остается в силе¹⁾). Поэтому вместо (58.4) будем иметь

$$\check{d} = \frac{d}{\sqrt{\lambda \frac{z\check{z}}{z+\check{z}}}}, \quad (58.7)$$

и, положив минимально допустимый волновой размер отверстия равным C , получим

$$d = C \sqrt{\lambda \frac{z\check{z}}{z+\check{z}}}. \quad (58.8)$$

Проанализируем этот результат, отметив сначала, что $z + \check{z}$ есть не что иное, как расстояние между приемной и передающей антеннами $QM = \Delta$. На рис. 58.3, в введена декартова система координат (ξ, η) с началом на середине радиолинии; пусть $P(\xi, \eta)$ — точка на краю отверстия, ограничивающего доминантную область, так что (рис. 58.3, в) $\check{z} = \frac{\Delta}{2} + \xi$, $z = \frac{\Delta}{2} - \xi$ и $d = 2\eta$. Внося это в (58.8), после простых преобразований находим

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1, \quad A = \frac{\Delta}{2}, \quad B = \frac{C}{4} \sqrt{\lambda \Delta}. \quad (58.9)$$

Получено уравнение *эллипса*, на котором будут лежать краевые точки указанного отверстия при перемещении экрана вдоль всей линии. Таким образом, доминантная область для радиолинии имеет форму тела с продольным сечением в виде эллипса. Начальная и конечная точки радиолинии находятся в фокусах эллипса, а его поперечная полуось B , как и следовало ожидать, уменьшается вместе с длиной волны λ . При $\lambda \rightarrow 0$ доминантная область вырождается в линию, соединяющую обе антенны. Нетрудно догадаться, что вообще она является эллипсоидом вращения; к такому выводу мы бы пришли непосредственно, если бы исходили из задачи дифракции на круглом отверстии.

¹⁾ Надо иметь в виду, что \check{A} в (58.6), а следовательно, и в получаемых отсюда формулах типа (54.9) есть амплитудный коэффициент поля в отверстии, зависящий от \check{z} ($A \sim 1/\check{z}$).

Выводы, которые обычно делаются из приведенного рассмотрения, заключаются в том, что для действия радиолинии существенным является лишь электромагнитный процесс в эллипсоидальной доминантной области с наибольшим поперечным размером $2B = C\sqrt{\lambda\Delta}/2$. Все необходимые оговорки и уточнения вместе с расширением интерпретации будут приведены ниже в п. 3. Пока же остановимся на выборе констант C и поясним предыдущее при помощи геометрического построения.

Строго говоря, следует брать $C \gg 1$, однако часто граница доминантной области определяется так, что это эквивалентно выбору $C = 2$ в (58.8).

Что, на самом деле, означает выбор $C = 2$, можно легко представить на примере квадратного отверстия в экране, взяв крупномасштабную диаграмму в виде спирали Корню (рис. 54.3). Для нахождения концов изображающего отрезка используется шкала величины $\omega\sqrt{2/\pi}$ (засечки на кривой), а ω вычисляется по одной из формул (54.3а), где x (или y) берется равным нулю, z заменяется на $z\check{z}/(z + \check{z})$, а a (или b) — на d . При $C = 2$ концы отрезка лежат в точках $\omega\sqrt{2/\pi} = \pm\sqrt{2}$; отношение отрезков для $C = 2$ и $C \rightarrow \infty$ (они схематически представлены на рис. 58.4) оказывается около

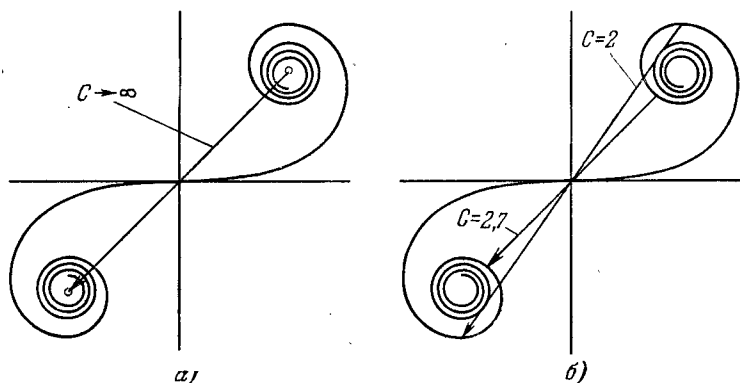


Рис. 58.4.

1,25, что соответствует отношению мощностей $(1,25)^4 \approx 2,4$. С увеличением отверстия поле сильно осциллирует, достигая минимума при $\omega\sqrt{2/\pi} \approx 1,9$ ($C \approx 2,7$). Изображающий отрезок по сравнению со случаем $C = 2$ составляет здесь около 60%, а следовательно, мощность падает приблизительно до 13%. Как видно, экран с отверстием при $C = 2$ нельзя считать не влияющим на прямую передачу энергии.

Обратимся, наконец, к построению на рис. 58.5, где показано, как сферический фронт волны, излучаемой в Q , делится на зоны Френеля (в § 54, п. 3 аналогичные зоны строились на плоскости). По-прежнему

центральная (первая) зона Френеля ограничена окружностью, а следующие зоны являются кольцевыми. Пусть отверстие в экране вырезает n зон Френеля. Тогда

$$\check{r} = \sqrt{\check{z} + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx \check{z} + \frac{1}{2\check{z}} \left(\frac{d}{2}\right)^2, \quad r = \sqrt{z^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \approx z + \frac{1}{2z} \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

и

$$\check{r} + r = \check{z} + z + n \frac{\lambda}{2},$$

так что

$$n\lambda = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{\check{z}}\right),$$

и, следовательно, радиус отверстия равен

$$\frac{d}{2} = \sqrt{n\lambda \frac{\check{z}z}{z + \check{z}}}. \quad (58.10)$$

Сравнение формул (58.8) и (58.10) показывает, что выбор $C = 2$ означает совпадение поперечного сечения доминантной области с первой зоной Френеля на сфере.

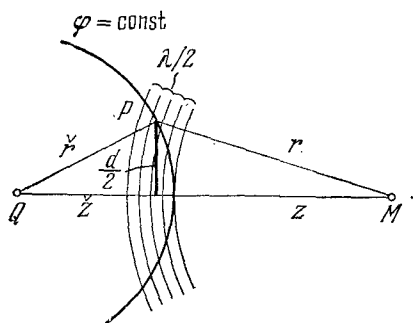


Рис. 58.5.

Если отверстие в экране «вырезает» первую зону Френеля, то интенсивность излучения перед ним больше, чем без экранирования, но увеличение отверстия вплоть до границы второй зоны Френеля существенно снижает интенсивность.

3. Геометрическая оптика и теория дифракции при анализе радиолиний. Попробуем использовать понятие доминантной области радиолинии для уяснения главных черт процесса распространения радиоволн над Землей и смысла применяемых методов анализа. При этом отчасти выяснится соотношение методов, базирующихся на геометрической оптике и представлении о локально плоских волнах, с одной стороны, и методов теории дифракции и близких к ним — с другой.

Само понятие доминантной области возникло при рассмотрении радиолинии в свободном пространстве. В этом случае при излучении сферической волны в точке Q поле в точке M вполне определяется процессом внутри некоторой границы, обозначенной на рис. 58.6, a пунктиром. Можно сказать, что такие лучи, как QM' и QM'' здесь совершенно пренебрежимы.

Пусть, далее, радиолиния расположена над Землей. При этом возможны различные случаи. Если обе антенны находятся достаточно высоко (рис. 58.6, b), то, очертив доминантную область (пунктир), мы отмечаем, что между точками Q и M существует «связь

по прямой видимости», в результате которой в M создается такое поле, которое было бы в отсутствие Земли. Однако в сравнении со случаем свободного пространства появилась весьма существенная особенность. Дело в том, что луч QM'' уже не может считаться пренебрежимым. В результате действия Земли он, отражаясь, приходит в точку M ; полное поле в M складывается, таким образом, из двух компонент, одна из которых соответствует прямой видимости, а другая — отражению от Земли. Возникает вопрос: допустимо ли рассматривать влияние Земли в аспекте геометрической оптики? На него можно ответить, прибегая опять-таки к понятию доминантной области. На рис. 58.6, б построена такая область для ломаного луча $QM'M$. Если оказывается, что в пределах площадки на поверхности Земли, лежащей в доминантной области (на рис. 58.6, б она выделена) условия однородны, то можно ввести

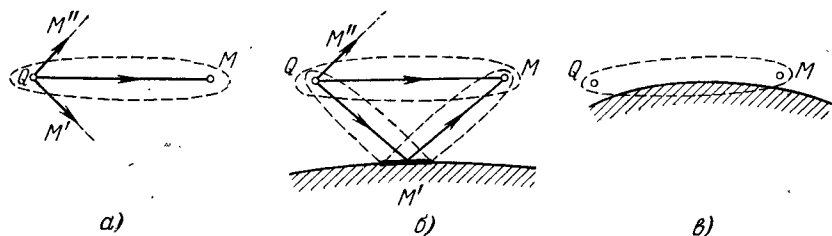


Рис. 58.6.

понятие коэффициента отражения и воспользоваться формулами Френеля (§ 38), полагая волну локально плоской.

Заметим, что если сказывается влияние ионосферы (§ 41, п. 2), которое в данной главе не учитывается, то нельзя пренебрегать также излучением под большими углами к горизонту. Луч QM'' (рис. 58.6, б) может тогда прийти в M в результате рефракции в ионосфере.

Обратимся теперь к наиболее трудному для анализа случаю, когда антенны находятся в непосредственной близости у Земли, и доминантная область не лежит целиком над Землей (рис. 58.6, в). В сущности это означает, что Земля влияет и на связь по прямой видимости. Простая лучевая трактовка неприменима здесь даже как приближенный подход, и нужна строгая постановка электродинамической задачи о возбуждении поля вблизи тела, имитирующего Землю. Такая задача может ставиться как дифракционная (§ 50, п. 5).

Если на пути радиолинии имеется отчетливо выраженное препятствие в виде холма, здания и т. п. (рис. 58.7, а), размеры которого значительно превышают длину волны, то его обычно рассматривают как край отверстия в экране (рис. 58.7, б). В простейшем варианте радиоволна может считаться нормально падающей на воображаемый экран (полуплоскость); интенсивность поля за препят-

ствием, где расположена приемная антенна, распределена по ранее выясненному закону (§ 54, п. 2), что и показано на рис. 58.7, б; на «границе тени» амплитуда поля падает вдвое, зато несколько выше имеется область наибольшего «усиления поля препятствием» (амплитуда поля выше, чем при его отсутствии). Действительная

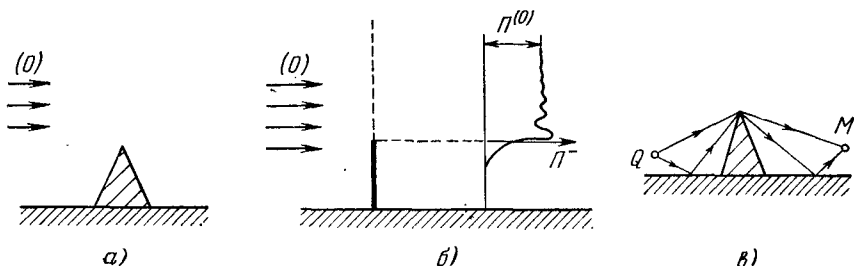


Рис. 58.7.

картина процесса бывает значительно сложнее, в частности, из-за действия Земли. Рис. 58.7, в поясняет практикуемое при этом приближенное рассмотрение. Считается, что на объект падают две волны (одна отраженная от Земли), каждая из которых дифрагирует по прежнему закону; в свою очередь дифрагированная волна за препятствием, получаемая как соответствующее наложение, приходит в M такими же двумя путями. При хорошем отражении от Земли и благоприятных фазовых соотношениях «усиление» может проявляться и в «области тени».

§ 59. Земные радиоволны

1. Удаленная от Земли короткая радиолиния; плоская модель Земли. В данном параграфе будут рассмотрены свойства земных радиоволн при условии, что не сказывается неоднородность тропосферы. С точки зрения анализа наиболее простым является случай радиолинии, когда высоты обеих антенн над Землей значительно превышают длину волны, а расстояние между ними намного меньше радиуса Земли, так что земную поверхность в пределах радиолинии (при достаточно хорошем рельефе, § 58, п. 1) можно считать плоской. Пользуясь обозначениями рис. 59.1, а, выразим эти исходные данные в виде неравенств

$$h_1 \gg \lambda, \quad h_2 \gg \lambda; \quad r_1 \ll R_0, \quad (59.1)$$

полагая, что они выполняются в достаточно сильной степени.

Как следует из § 58, п. 3 (рассматриваемое положение соответствует рис. 58.6, б), поле в точке приема M можно найти как суперпозицию прямой волны (луч QM) и волны, отраженной от Земли (луч $QM'M$), причем изменение амплитуды и фазы при отражении

определяется так, как будто бы речь идет о плоской однородной волне, падающей на плоскую границу раздела сред (т. е. по формулам Френеля, § 38). Надо, однако, оговориться, что окрестность точки отражения M' в пределах сечения доминантной области предполагается ровной и однородной (§ 58, пп. 1—3).

Таким образом, поле в M есть результат наложения, интерференции двух волн. Обозначая комплексные амплитуды вектора E этих волн \dot{E}_{m1} и \dot{E}_{m2} , для полного поля будем иметь

$$\dot{E}_m = \dot{E}_{m1} + \dot{E}_{m2}. \quad (59.2)$$

Первое из слагаемых немедленно определяется при помощи формулы (41.4):

$$\dot{E}_{m1} = e_{01} \sqrt{\frac{D(\vartheta_1, \alpha) \bar{P} W_0}{2\pi}} \frac{e^{-ik_0 r_1}}{r_1}. \quad (59.3)$$

Здесь e_{01} — орт вектора E_1 и ϑ_1 — угол склонения прямого луча (рис. 59.1, б). Что касается величины \dot{E}_{m2} , то нужно учесть, что отражаемый луч приходит в M' под углом ϑ_2 , отличающимся от ϑ_1 , и

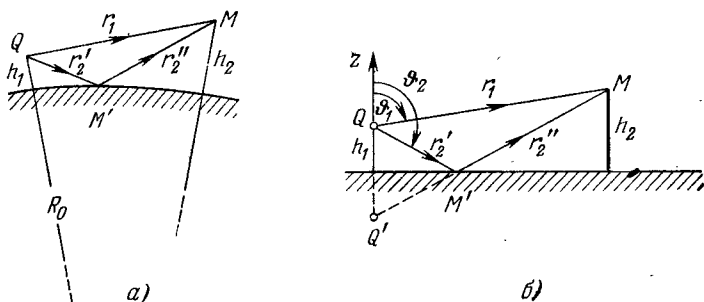


Рис. 59.1.

вектор E_2 , вообще говоря (за исключением случая перпендикулярной поляризации), направлен не так, как E_1 . Далее существенно, что отраженная волна является сферической, и ее путь от источника Q до M есть $r_2 = r_2' + r_2''$, а в результате отражения происходит изменение амплитуды и фазы, учитываемое при помощи коэффициента ρ . Следовательно,

$$\dot{E}_{m2} = e_{02} \sqrt{\frac{D(\vartheta_2, \alpha) \bar{P} W_0}{2\pi}} \rho \frac{e^{-ik_0 r_2}}{r_2}. \quad (59.4)$$

Полагая, что поляризация может быть перпендикулярной или параллельной, будем определять $\rho = \rho_{\perp, \parallel}$ по формулам (38.8) и (38.17); в иных случаях волну нетрудно разложить на компоненты той и другой поляризации (§ 34, п. 2). Подчеркнем, что при использовании указанных формул Френеля надо соответственно выбирать орт e_{02} в (59.4). Так, при перпендикулярной поляризации (§ 38, п. 1) $e_{02} = x_0$, а при параллельной (§ 38, п. 2) $e_{02} = e_0$ (см. рис. 38.2, б).

Итак, чтобы найти поле в точке приема, надо применить соотношения (59.2) — (59.4); все они имеют элементарный характер. Иногда задача еще более упрощается. Важен случай, когда

$$h_1 \ll r_1 = r. \quad (59.5)$$

При этом (рис. 59.2, а)

$$\vartheta_2 \approx \vartheta_1 = \vartheta, \quad r_2 \approx r_1 + 2h_1 \cos \vartheta_1 = r + 2h_1 \cos \vartheta.$$

Если поляризация перпендикулярная, то $e_{02} = e_{01} (= e_0)$. Пусть

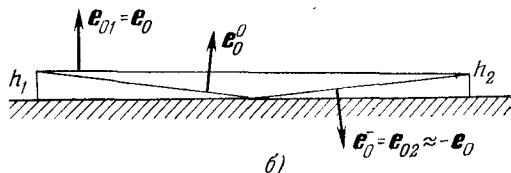
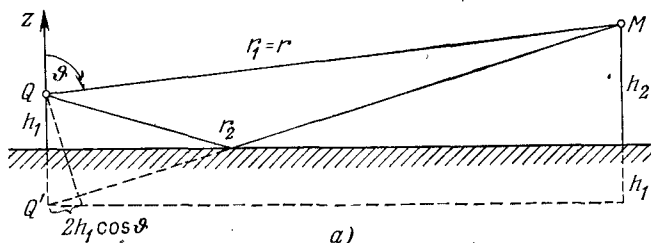


Рис. 59.2.

далее поляризация параллельная, а первоначальное условие усилено:

$$h_1 \ll r \text{ и } h_2 \ll r. \quad (59.5a)$$

Тогда (рис. 59.2, б; ср. рис. 38.2, б) $e_{02} \approx -e_{01}$. Обозначая $e_{01} = e_0$, в обоих случаях из (59.2) — (59.4) имеем

$$\dot{E}_{m0} \approx \dot{E}_0 (1 \pm \dot{\rho}_{\perp, \parallel} e^{-i2k_0 h_1 \cos \vartheta}), \quad \dot{E}_0 \approx e_0 \sqrt{\frac{D(\vartheta, \alpha) \bar{P} W_0}{2\pi}} \frac{e^{-ik_0 r}}{r}. \quad (59.6)$$

Обозначая комплексный коэффициент отражения $\dot{\rho}_{\perp, \parallel} = \rho_{\perp, \parallel} e^{i\psi_{\perp, \parallel}}$, находим отсюда

$$E_m \approx E_0 \sqrt{1 + \rho_{\perp, \parallel}^2 \pm 2\rho_{\perp, \parallel} \cos(2k_0 h_1 \cos \vartheta - \psi_{\perp, \parallel})}. \quad (59.6a)$$

Заметим теперь, что условие (59.5a) означает близость угла падения к прямому. Полагая в формулах Френеля (38.8) и (38.17) $\varphi = 90^\circ$, находим: $\dot{\rho}_{\perp} = -1 = e^{i\pi}$ и $\dot{\rho}_{\parallel} = 1$. Формула (59.6a) дает

$$E_m \approx E_0 \sqrt{2 - 2 \cos(2k_0 h_1 \cos \vartheta)}$$

или

$$E_m \approx 2E_0 |\sin(k_0 h_1 \cos \vartheta)| \quad (59.7)$$

для обеих поляризаций.

Это выражение приводится к еще более простому виду. Поскольку $\vartheta \approx 90^\circ$, то мал $\cos \vartheta$, а с ним и аргумент синуса в (59.7), так что

$$E_m \approx 2E_0 k_0 h_1 \cos \vartheta.$$

Очевидно, что угол ϑ более правильно брать как среднее арифметическое углов ϑ_1 и ϑ_2 рис. 59.1, б. При этом

$$\cos \vartheta \approx \frac{\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_2 - h_1}{r_1} + \frac{h_2 + h_1}{r_2} \right) \approx \frac{h_2}{r}$$

и окончательно

$$E_m \approx 2E_0 k_0 \frac{h_1 h_2}{r} = 2e_0 \sqrt{\frac{DPW_0}{2\pi}} k_0 \frac{h_1 h_2}{r^2}. \quad (59.8)$$

Это весьма употребительная формула Введенского.

Подчеркнем, что формулы (59.6) — (59.8) удовлетворительны при слабой направленности антенн в вертикальной плоскости ($D(\vartheta, \alpha)$ медленно меняется в зависимости от ϑ). Может показаться, что вследствие неравенства (59.5) углы ϑ_1 и ϑ_2 достаточно близки всегда; но в случае остронаправленной антенны величины $D(\vartheta_1, \alpha)$ и $D(\vartheta_2, \alpha)$ даже при близких ϑ_1 и ϑ_2 могут различаться во много раз, и представление (59.6) станет неправомерным.

Формула Введенского интересна тем, что в явной форме показывает рост ослабления поля с расстоянием в результате действия земной поверхности при заданных условиях: $\sim 1/r^2$ вместо $\sim 1/r$ в свободном пространстве. Это следствие противофазности отраженной волны; чем меньше поэтому отличается r_2 от r_1 (к равенству эти пути стремятся при увеличении), тем ближе к 180° соответствующая разность фаз.

Если бы речь шла об идеально проводящей отражающей плоскости, то из (38.8) точно следовало бы: $\dot{\rho}_\perp = -1$, но из (38.17) вместо $+1$ было бы получено значение $\dot{\rho}_\parallel = -1$, что означает здесь синфазность отражения (при малых углах $e_0^- \approx -e_0^0$). Тогда переход от (59.6а) к формуле (59.7) незаконен, и вместо нее должна получиться следующая:

$$E_m \approx 2E_0 |\cos(k_0 h \cos \vartheta)|. \quad (59.9)$$

Хотя реально такой случай невозможен, надо учитывать, что при проводящей границе (скажем, морская поверхность) величина W_2 в (38.17) может быть очень мала по модулю. Поэтому переход от (59.6а) к (59.7) будет справедлив в области существенно меньших значений $\cos \vartheta$, чем при перпендикулярной поляризации.

Рассмотрим далее две относительно близкие антенны. Пусть они расположены на одинаковых высотах h (рис. 59.3, а), и $D(\vartheta_1, \alpha) = D(\vartheta_2, \alpha)$, $\dot{\rho} = \dot{\rho}_\perp = -1$, а также с достаточной точностью $1/r_1 \approx$

$\approx 1/r_2$. Складывая комплексные амплитуды \dot{E}_{m1} (59.3) и \dot{E}_{m2} (59.4), имеем

$$\dot{E}_m = \dot{E}_0 [1 - e^{-ik_0(r_2 - r_1)}],$$

где \dot{E}_0 — та же величина, что и в (59.6). Отсюда

$$E_m = 2E_0 \left| \sin \frac{k_0(r_2 - r_1)}{2} \right|. \quad (59.10)$$

Из рис. 59.3 видно, что $r_2 = \sqrt{r^2 + (2h)^2}$, а потому

$$k_0(r_2 - r_1) = k_0 [\sqrt{r^2 + (2h)^2} - r] = k_0 r \left(\frac{2h^2}{r^2} + \dots \right)$$

и, ограничиваясь первым членом разложения, получим из (59.10) результат, соответствующий формуле Введенского.

Примечательно, что определяемая формулой (59.10) величина E_m , вообще говоря, не является монотонно убывающей функцией расстояния. Для относительно близких антенн разность хода

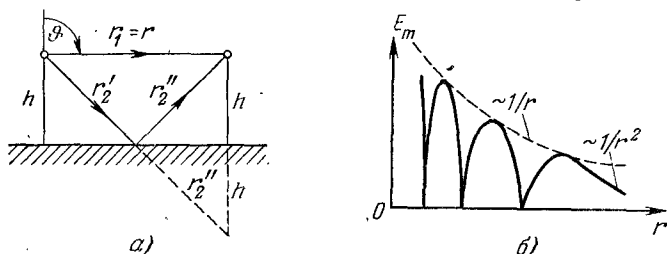


Рис. 59.3.

лучей $r_2 - r_1$ может быть не мала в сравнении с длиной волны, и зависимость $E_m(r)$ при выполнении требования (59.1) имеет вид, показанный на рис. 59.3, б. Из (59.9) и (59.6) следует, что в области осцилляций огибающая кривой (пунктир) — характера $1/r$. С ростом r_2 и r_1 их разность монотонно уменьшается, стремясь к нулю при $r_2 \rightarrow r_1 \rightarrow \infty$. Начиная с какого-то расстояния, это приводит к монотонному уменьшению синуса в (59.10): мы приходим в область применимости формулы Введенского, где $E_m \sim 1/r^2$ (рис. 59.3, б).

Формулы, полученные на основании (59.2) из (59.3) и (59.4), называют обычно «интерференционными». Остановимся на конкретизации интерференционных формул применительно к известным излучателям.

Начнем с замечания, что действие излучателей над идеально проводящей плоскостью уже исследовалось в § 49, п. 4 с других позиций. Легко проверить, что оба способа ведут к идентичным результатам. Возьмем, например, формулу (49.15) для горизонтально расположенного над плоскостью элементарного электрического излучателя. При $\varphi = 90^\circ$ (см. рис. 49.8, а; система координат отличается от применяемой сейчас) находим из нее

$$E_m = 2E_0 \left| \sin(k_0 h \cos \vartheta) \right|; \quad E_0 = \frac{p_m k_0^2}{4\pi \epsilon_0 r}, \quad (59.11)$$

где обозначение угла изменено ($\alpha \rightarrow \theta$) в соответствии с рис. 59.2. То же находится из (59.7), причем написанное здесь выражение E_0 следует из второй строчки (59.6) при подстановке $D = 3/2$ и $\bar{P} = \frac{4\pi^3 \rho_m^2 W_0}{3\epsilon_0 \mu_0 \lambda^4}$ согласно (44.17) и (44.20). Читателю это предлагается установить самостоятельно.

Рассматривая прежний горизонтально ориентированный элементарный излучатель над произвольной средой, мы лишь должны

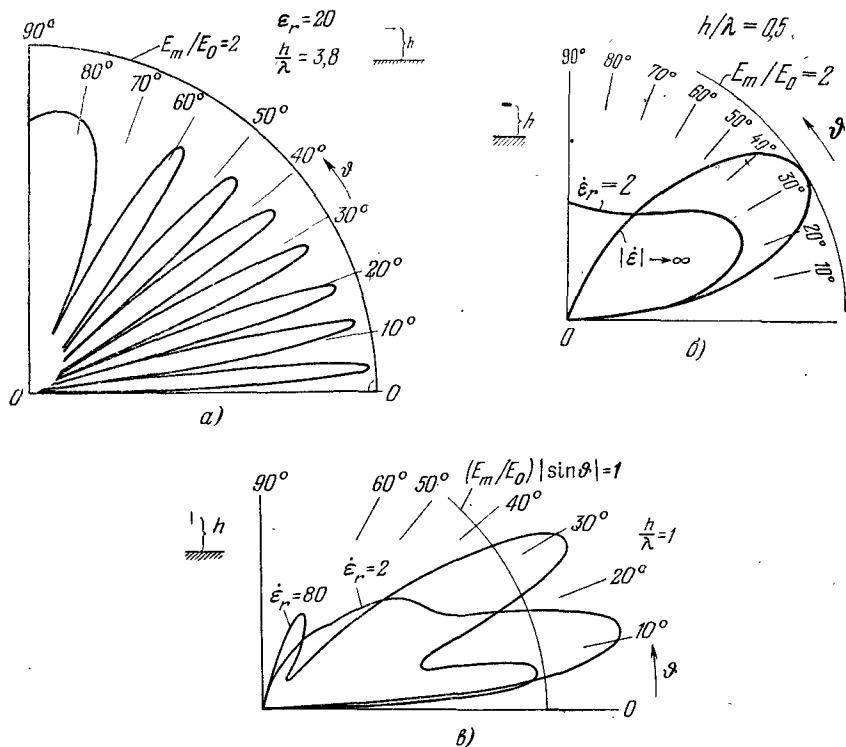


Рис. 59.4.

заменить в (59.11) $2 |\sin(k_0 h \cos \theta)|$ вытекающим из (59.6a) множителем

$$E_m/E_0 = \sqrt{1 + \rho_{\perp}^2 + 2\rho_{\perp} \cos(2k_0 h \cos \theta - \psi_{\perp})}.$$

Для вертикально ориентированного элементарного электрического излучателя над идеально проводящей плоскостью в соответствии (49.14) имеем (рис. 49.7, а)

$$E_m = 2E_0 |\cos(k_0 h \cos \theta)|, \quad E_0 = \frac{\rho_m k_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} |\sin \theta|. \quad (59.11a)$$

Эта формула получается также из (59.9) при должной конкретизации E_0 (рекомендуется проверить).

В общем случае в (59.11а) $2 | \cos(k_0 h \cos \vartheta) |$ заменяется множителем

$$E_m/E_0 = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 - 2\rho_{\parallel} \cos(2k_0 h \cos \vartheta - \psi_{\parallel})}.$$

В заключение приведем некоторые результаты вычислений E_m/E_0 по обсуждавшимся формулам [Е. 3]. На рис. 59.4, а представлена зависимость величины E_m/E_0 от ϑ для горизонтального электрического излучателя на высоте $h = 3,8\lambda$ в предположении, что почва имеет параметры $\mu = \mu_0$ и $\epsilon = 20\epsilon_0$ (т. е. $\epsilon_r = 20$, $\sigma = 0$). Как видно, при такой высоте излучение характеризуется уже значительным числом интерференционных максимумов, которое с ростом h быстро увеличивается. При высоте $h = 0,5\lambda$ в каждом квадрате имеется лишь один максимум (рис. 59.4, б); кривая для $|\epsilon| \rightarrow \infty$ является точной, данные же для $\epsilon = 2\epsilon_0$ не вполне достоверны, так как условие применимости интерференционных формул $h \gg \lambda$ заведомо не удовлетворено. Аналогичные диаграммы для вертикального электрического излучателя приведены на рис. 59.4, в; ввиду относительно малой высоты ($h = \lambda$) данные более достоверны при большой диэлектрической проницаемости (близость к предельному случаю $|\epsilon| \rightarrow \infty$). Отметим, что при вертикальном положении излучателя из-за дополнительного множителя $|\sin \vartheta|$ максимумы напряженности поля не достигают прежних значений.

2. Прилегающая к Земле радиолиния. В отличие от предыдущего, рассмотрение радиолинии, прилежащей к Земле, порождает ряд сложных для анализа проблем. Мы имеем в виду линию, доминантная область которой по прямой видимости не лежит целиком над Землей, что соответствует рис. 58.6, в. Здесь возможны три основных положения (рис. 59.5, а, б, в).



Рис. 59.5.

В наиболее простом случае (рис. 59.5, а) радиолиния настолько коротка, что относящийся к ней участок земной поверхности можно считать плоским, как и выше в п. 1. Различие же состоит в том, что антенны уже не подняты над Землей так высоко, как это требуется для выполнения двух первых неравенств в (59.1). Задача о такой радиолинии решается элементарно только в предположении, что поверхность Земли идеально проводящая. Тогда — независимо от высоты поднятия антенн — подход, продемонстрированный в п. 1, остается правомерным (соответствующие результаты получаются также по правилам, указанным в § 49, п. 4). Однако это приближение не дает вполне удовлетворительной картины процесса

уже потому, что игнорируется поглощение: поскольку принимается, что на поверхности Земли $E_\tau = 0$, то отсутствует уходящий в глубь нее поток энергии. Впрочем, полученные в п. 1 интерференционные формулы сохраняют достоверность и при невыполнении неравенств (59.1), пока высоты антенн еще не малы в сравнении с длиной волны, и часто в этих условиях применяются (рис. 59. 4, б, в).

Если вещество почвы является все же проводником (§ 6, п. 3), то понять характер поля вблизи земной поверхности можно при

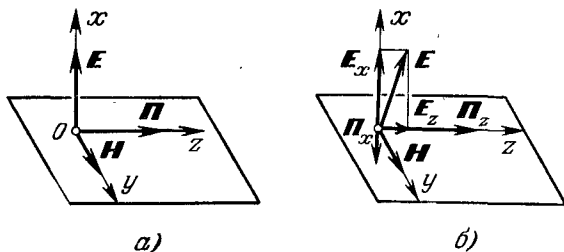


Рис. 59.6.

помощи граничных условий Леонтовича (§ 40, п. 2). Пусть в предположении бесконечной проводимости почвы поляризация волны, распространяющейся вдоль Земли, вертикальна (вектор \mathbf{E} перпендикулярен земной поверхности). Волну будем рассматривать локально как плоскую и однородную, так что (рис. 59.6, а)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= x_0 A e^{-ik_0 z}, \\ \dot{H}_m &= y_0 \frac{A}{W_0} e^{-ik_0 z} \end{aligned} \right\} x \geq 0.$$

При конечной проводимости почвы такого поля быть не может, однако существенно иным будет лишь вид вектора \mathbf{E} : появится тангенциальная электрическая компонента, которую можно вычислить прямо по формуле (40.4), внося туда \dot{H}_m из сделанной записи. Эта дополнительная компонента имеет комплексную амплитуду

$$\dot{E}_\tau = \dot{W}_2 [\mathbf{x}_0, \dot{H}_m] = z_0 \frac{\dot{W}_2}{W_0} A e^{-ik_0 z}, \quad (59.12)$$

т. е. оказывается *продольной* (рис. 59.6, б). Поэтому результирующий вектор несколько наклонен в продольной вертикальной плоскости; можно сказать, что он в этой плоскости эллиптически поляризован, так как компоненты E_x и E_z сдвинуты по фазе. Внутрь Земли направлен вектор Пойнтинга со средним значением

$$\bar{\Pi} = -\mathbf{x}_0 \operatorname{Re} \frac{\dot{W}_2}{2W_0^2} A^2. \quad (59.13)$$

Получение строгого решения задачи об излучателе над полупроводящей средой, ограниченной плоскостью, требует применения

метода ¹⁾, в сущность которого мы здесь входить не можем. Поэтому ограничимся обзорением окончательного результата в форме, оправдавшей себя в инженерной практике. Взяв формулу (41.4), введем в нее коэффициент F , так что теперь

$$E_m = \sqrt{\frac{D\bar{P}W_0}{2\pi}} \frac{1}{r} F. \quad (59.14)$$

«Множитель ослабления» F находится при помощи графика [Е. 1], приведенного на рис. 59.7, или по формуле

$$F \approx \sqrt{2} \frac{2 + 0,3\rho}{2 + \rho + 0,6\rho^2}, \quad (59.15)$$

где $\rho = \frac{1}{2} \frac{k_0 r}{|\epsilon_r|}$. Это упрощенный вариант так называемой «формулы Шулейкина — Ван-дер-Поля».

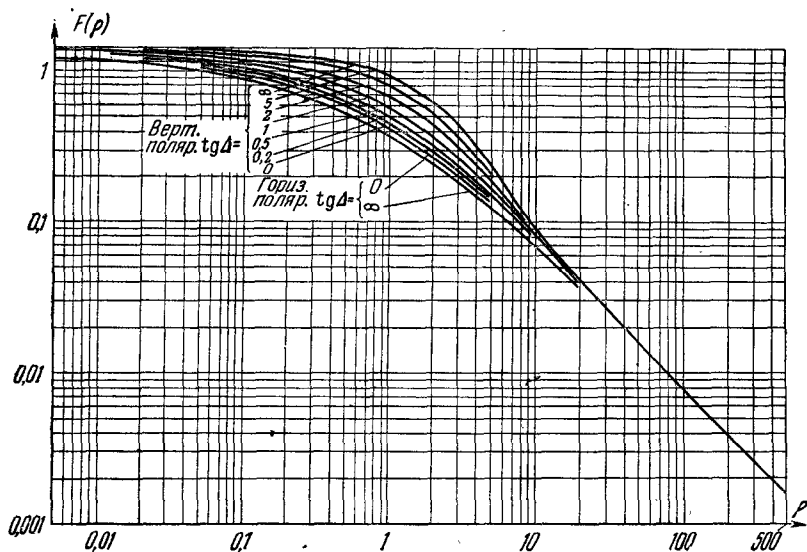


Рис. 59.7.

Переходя к случаю модели земной поверхности в виде идеально проводящей плоскости ($|\epsilon_r| \rightarrow \infty$, $\rho = 0$), видим, что как по формуле (59.15), так и на основании графика рис. 59.7 $F = \sqrt{2}$. При этом, согласно (59.14), напряженность поля возрастает в $\sqrt{2}$ раз по сравнению со случаем идеальной передачи в свободном пространстве. Это естественный результат для вертикального вибратора (диполя Герца), поток энергии которого при излучении прежней мощности в полупространство должен быть вдвое больше.

¹⁾ См., например, [Г.7], гл. 11, п. 1.

3. Учет сферичности Земли. Прежде чем рассматривать положения, показанные на рис. 59.5, б, в, вернемся к случаю поднятой радиолинии (п.1), несколько ослабив неравенство $r_1 \ll R_0$, так, чтобы поверхность Земли в пределах линии была уже заметно сферической. Так как доминантная область, соответствующая прямой видимости, лежит целиком над Землей, предпосылки вывода формул (59.2)—(59.4) никак не затрагиваются. Поэтому последние остаются в силе, и расстояния $r_1, r_2 = r_2' + r_2''$ определяются так же, как и ранее. Что же касается последующих интерференционных формул, включающих высоты антенн, то они нуждаются в несложных поправках, смысл которых понятен из рис. 59.8. Действительные высоты h_1 и h_2 в этих формулах, например в формуле Введенского (59.8), надо заменить приведенными высотами \tilde{h}_1 и \tilde{h}_2 . Углы QOM' и $M'OM$ обычно малы, вследствие чего

$$\tilde{h}_1 \approx h_1 - \delta_1 \quad \text{и} \quad \tilde{h}_2 \approx h_2 - \delta_2, \quad (59.16)$$

где δ_1 и δ_2 — высоты точек, находящихся на наименьшем расстоянии прямой видимости $Q_1M_1 = r_0$. Само это расстояние вычисляется по приближенной формуле, вытекающей из рассмотрения треугольников $\triangle Q_1M_1O$ и $\triangle M'OM_1$

$$r_0 = \sqrt{(R_0 + \delta_1)^2 - R_0^2} + \sqrt{(R_0 + \delta_2)^2 - R_0^2} \approx \sqrt{2R_0} (\sqrt{\delta_1} + \sqrt{\delta_2}). \quad (59.17)$$

Пусть далее, независимо от того, выполняются или нет первые неравенства (59.1), т. е. низко или высоко расположены антенны над сферической Землей, последняя оказывается в доминантной области радиолинии (рис. 59.5, б, в). Тогда Земля проявляет себя как объект дифракции, не допускающий упрощенной геометрической трактовки (§ 58, п. 3). Более прост случай, когда приемная антенна находится в «области тени», т. е. там, где в представлении геометрической оптики поле должно отсутствовать (рис. 59.5, в). При этом в существующей практике используется формула, внешне совпадающая с (59.14), но с множителем ослабления, определяемым как произведение

$$F = U \left(r \left(\frac{\pi}{\lambda R_0^3} \right)^{1/3} \right) V \left(2h_1 \left(\frac{\pi^2}{\lambda^2 R_0} \right)^{1/3} \right) V \left(2h_2 \left(\frac{\pi^2}{\lambda^2 R_0} \right)^{1/3} \right), \quad (59.18)$$

где сомножители находятся по графикам¹⁾ (рис. 59.9, а, б); поскольку

¹⁾ Графики заимствованы из [Е.5].

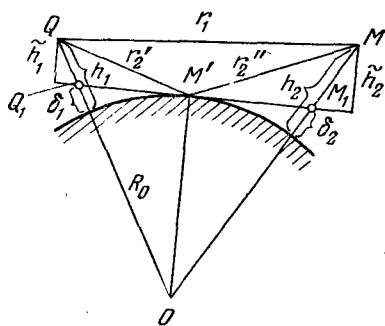


Рис. 59.8.

они даны в децибелах (§ 33, п. 2), то $F_{\partial\delta} = U_{\partial\delta} + V_{\partial\delta} |_1 + V_{\partial\delta} |_2$ и далее $F = 10^{F_{\partial\delta}/20}$. Формула (59.18) является результатом

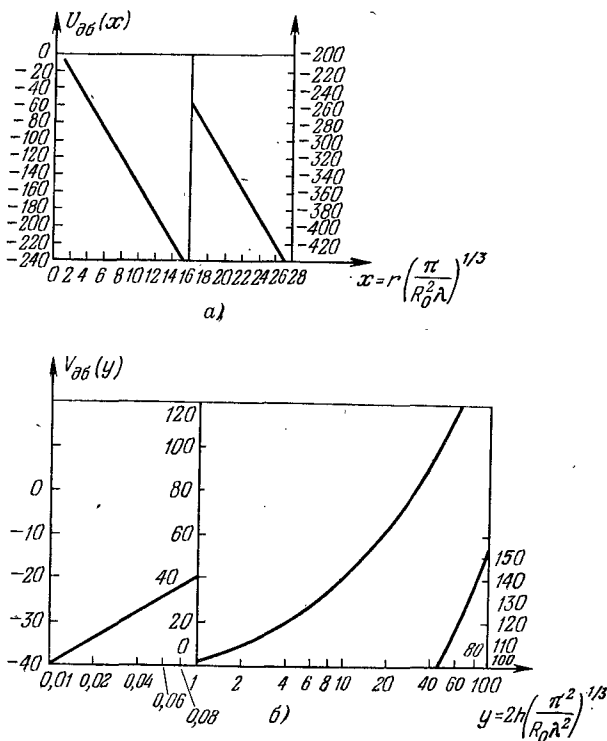


Рис. 59.9.

упрощенной трактовки выводов теории дифракции. Последняя в значительной степени была разработана В. А. Фоком [Г.7].

§ 60. Влияние тропосферы

1. Атмосферная рефракция. Уже подчеркивалось, что хотя тропосфера является весьма слабо неоднородной средой, она может оказывать заметное влияние на распространение радиоволн ввиду значительной протяженности радиолиний. Слабое изменение показателя преломления с высотой вызывает в тропосфере явления, которые вполне можно рассматривать с позиций геометрической оптики и трактовать как искривление лучей. Это так называемая *атмосферная рефракция*.

Типичным является убывание показателя преломления с высотой (§ 58, п.1), что, согласно (57.10), приводит к искривлению луча в сторону Земли.

Действительно, при $dn/dz < 0$ по формуле

$$R = - \frac{n}{\frac{dn}{dz} \sin \theta_0} \quad (60.1)$$

находим, что $R > 0$ (рис. 60.1, а). Для луча, идущего под заданным углом θ_0 , вместо прямолинейной траектории, которая должна быть при $dn/dz = 0$ (пунктир на рис. 60.1, а), получается криволинейная, а это имеет следствием увеличение расстояния прямой видимости и соответственно удлинение радиолинии. Такая — чаще наблюдаемая — рефракция называется *положительной*.

Учет рефракции при рассмотрении различных радиолиний, о которых говорилось в § 59, производится следующим образом. Пусть действительная картина распространения радиоволн соответствует рис. 60.1, а; при этом относительная кривизна

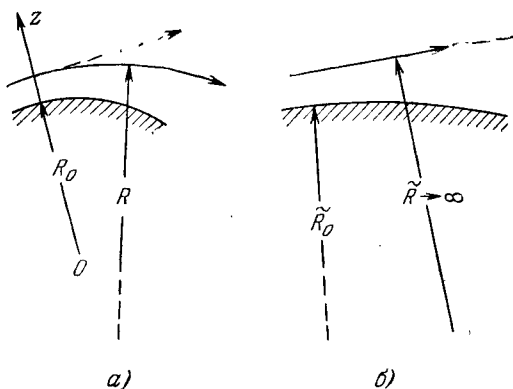


Рис. 60.1.

луча и профиля земной поверхности характеризуется разностью $\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}$. Построим теперь воображаемую картину распространения с прямолинейным лучом ($\tilde{R} \rightarrow \infty$) над поверхностью кругового профиля радиуса \tilde{R}_0 (рис. 60.1, б); относительная кривизна прямолинейного луча остается прежней, если

$$\frac{1}{\tilde{R}} - \frac{1}{\tilde{R}_0} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \quad (\tilde{R} \rightarrow \infty),$$

откуда

$$\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{1 - R_0/R}. \quad (60.2)$$

Говорят, что \tilde{R}_0 есть *эквивалентный радиус земного шара* при рефракции. На основании (60.1) при $\theta_0 = 90^\circ$ получаем

$$\tilde{R}_0 = \frac{R_0}{1 + \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}}. \quad (60.3)$$

При нормальной положительной рефракции $dn/dz = -4 \cdot 10^{-5} \text{ 1/км}$ (§ 58, п. 1); внося в (60.3) также $R_0 = 6370 \text{ км}$, находим: $\tilde{R}_0 \approx 4R_0/3 \approx \approx 8500 \text{ км}$.

После того как найден эквивалентный радиус Земли, надо, лишь взяв \tilde{R}_0 вместо R_0 , сделать поправки в тех формулах, которые используют сферическую модель Земли. Так, в частности, делается при определении расстояния прямой видимости по формуле (59.18). Согласно предыдущему при нормальной рефракции это расстояние, увеличивающееся в $\sqrt{\tilde{R}_0/R_0}$ раз, равно $\tilde{r}_0 \approx 1,15 r_0$, т. е. протяженность радиолинии возрастает приблизительно на 15%.

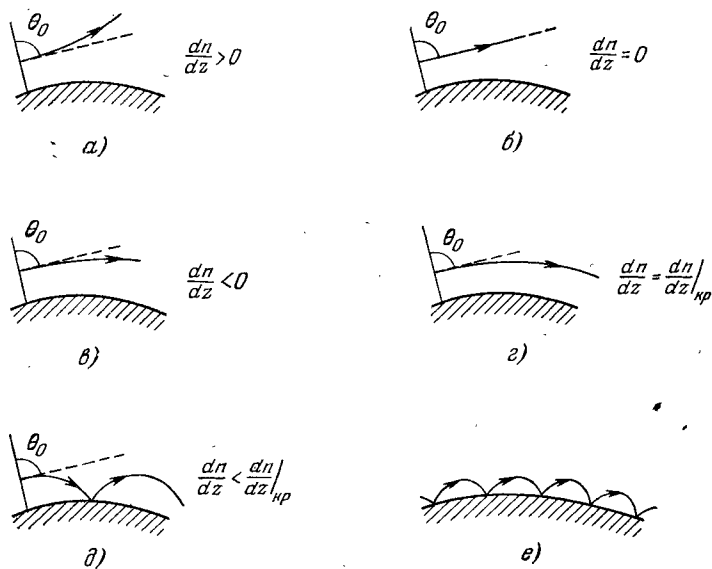


Рис. 60.2.

Вследствие сложности температурного режима тропосферы встречаются различные локальные отклонения от ее нормального состояния, охватывающие значительные области пространства. Поэтому, кроме рассмотренного случая нормальной рефракции, следует принимать во внимание возможности повышенной и пониженной положительной рефракции (n убывает с высотой быстрее или соответственно медленнее), отрицательной рефракции ($dn/dz > 0$) и отсутствия рефракции ($dn/dz = 0$). Схема различных случаев атмосферной рефракции представлена на рис. 60.2. При отрицательной рефракции расстояние прямой видимости уменьшается ($\tilde{r}_0 < r_0$), так что она представляет лишь негативный интерес. Что касается разных видов положительной рефракции, то интересна принципиальная возможность критической рефракции (рис. 60.2, д), при которой луч должен огибать земной шар на неизменной высоте; для нее требуется зна-

чение величины dn/dz , равное $dn/dz|_{кр} \approx -15,7 \cdot 10^{-5}$ 1/км. При более быстром спаде коэффициента преломления с высотой ($dn/dz < < dn/dz|_{кр}$) будет иметь место *сверхрефракция* (рис. 60.2, д), когда луч возвращается к Земле. Заметим, что сверхрефракцией обусловлены и такие явления, как оптический мираж. Можно представить себе процесс, при котором траектория луча, многократно отражаемого земной поверхностью, периодична (рис. 60.2, е). Говорят, что сверхрефракция приводит в таком случае к образованию *тропосферного волновода*. Действительно, тропосфера при этом (как, впрочем, и при критической рефракции) играет роль направляющей системы. Картина лучей в тропосферном волноводе (рис. 60.2, е) напоминает рис. 39.5, поясняющий процесс распространения волн между идеально проводящими плоскостями.

2. Рассеяние и поглощение в тропосфере. Подчеркнем, что рассмотренные выше состояния тропосферы, обуславливающие различные виды аномальной рефракции, являются временными и местными образованиями. Тропосфера подвержена разным изменениям случайного характера, причем турбулентные движения воздуха вызывают многочисленные локальные изменения его плотности, а следовательно, и оптической плотности среды. Каждое такое образование есть объект дифракции радиоволн, который — при малости размеров — создает поле рассеяния, подобное полю элементарного электрического излучателя. Считая область изменения диэлектрической проницаемости сферической, мы можем выразить поле рассеяния отдельного объекта при помощи формул (50.13). Поскольку в данном случае $\epsilon_i \approx \epsilon_e \approx \epsilon_0$, то, первой из строчек (50.13) удобно придать следующий вид:

$$\dot{E}_m^- = -\vartheta_0 \frac{R^3}{3} \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon_0} k_0^3 \dot{E}_m^0 \frac{\sin \vartheta}{r} e^{-tk_0 r}, \quad (60.4)$$

где $\Delta\epsilon = \epsilon_i - \epsilon_e$, а $\dot{E}_m^0 = \dot{E}_m^0(0)$ — комплексная амплитуда величины E падающей волны в области объекта. Полагают, что в среднем относительное отклонение диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon/\epsilon_0$ имеет порядок 10^{-6} , так что в отдельности поле рассеяния (60.4) вполне пренебрежимо. Однако полное поле рассеяния в тропосфере образуется в результате наложения множества таких полей, амплитуды и фазы которых случайны.

Как показывают измерения, в результате действия различных случайных факторов и главным образом тропосферного рассеяния ¹⁾ напряженность поля в диапазоне УКВ за границей прямой видимости² систематически оказывается значительно больше, чем это должно быть в результате дифракции на границе Земли (§ 59, п. 3). Образец подобных данных дает рис. 60.3 [Е. 2], на котором приведены кривые множителя ослабления F (коэффициента в формуле типа (59.14)), вычисленного с учетом Земли как объекта дифракции (§ 59, п. 3), — кривая 1, и измеренного — кривая 2; последняя по-

¹⁾ Позднее (§ 88) при рассмотрении УКВ-радиолиний будут отмечены также иные причины рассеяния радиоволн.

строена в результате усреднения многих данных, полученных для сантиметровых и дециметровых волн.

Тропосфера заметно поглощает волны высокочастотной части диапазона УКВ, начиная с дециметровых. В основном это связано

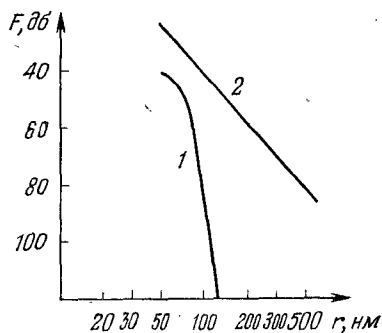


Рис. 60.3.

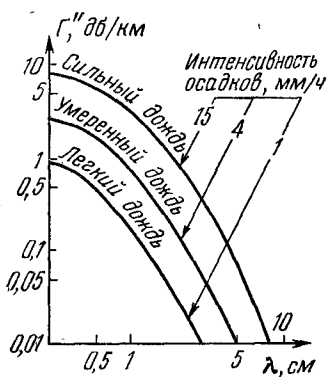


Рис. 60.4.

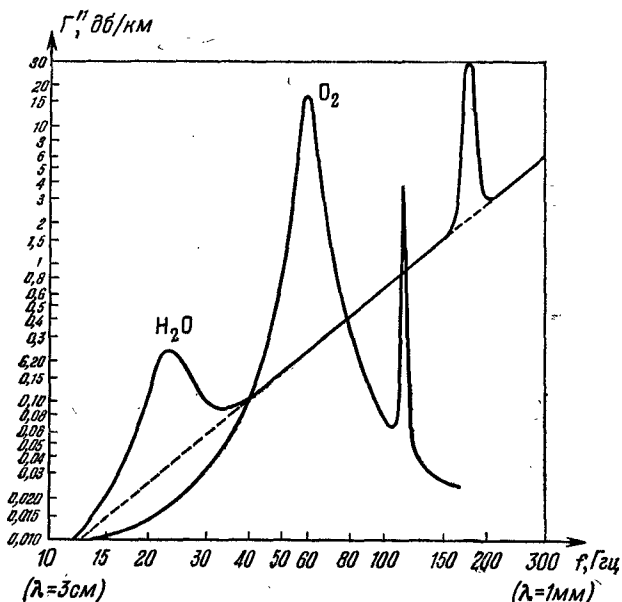


Рис. 60.5.

с действием капель воды (туман, дождь). Каплю с еще большим основанием, чем газовую неоднородность, можно рассматривать как сферический объект дифракции, который во многих случаях мал в сравнении с длиной волны. При этом, согласно (50.11), (50.13),

для одной капли

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^- &= -\vartheta_0 R^3 \frac{\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\dot{\varepsilon} + 2\varepsilon_0} k_0^2 \dot{E}_m^0 \frac{\sin\vartheta}{r} e^{-ik_0 r} \\ \dot{E}_m^+ &= \frac{3\varepsilon_0}{\dot{\varepsilon} + 2\varepsilon_0} \dot{E}_m^0, \end{aligned} \right\} \quad (60.5)$$

где $\dot{\varepsilon}$ — комплексная диэлектрическая проницаемость воды, и поглощаемая мощность есть $\bar{P}_n = \frac{1}{2} \omega \varepsilon'' (E_m^+)^2 V = \frac{2\pi R^3}{3} \omega \varepsilon'' (E_m^+)^2$ (§ 30, п. 2).

В системе капель дифракция многократна: поле рассеяния каждого объекта дифрагирует на других. Появляется дополнительное поглощение. Непоглощенное же рассеяние в свою очередь отнимает энергию распространяющейся радиоволны, вызывая излучение «в стороны». Из (60.5) нетрудно заключить, что затухание передаваемой волны должно возрастать с ее укорочением (множитель k_0^2 в первой строчке). И действительно, это подтверждается экспериментом. Затухание описывают при помощи экспоненциального множителя $e^{-\Gamma'' r}$. По данным измерений коэффициент затухания Γ'' изменяется в зависимости от длины волны и интенсивности осадков, как показано на рис. 60.4 [Е.5].

Кроме указанного существенным является затухание радиоволн в результате молекулярного резонансного поглощения газами тропосферы. На рис. 60.5 представлены соответствующие зависимости Γ'' для кислорода и водяных паров [Е.5].

НАПРАВЛЯЕМЫЕ ВОЛНЫ И ПОЛЯ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЪЕМАХ

1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НАПРАВЛЯЕМЫХ ВОЛН

Понятие *направляемой волны* было введено в § 39 при описании волновых процессов у плоских границ раздела сред. Можно сказать, что полностью отражающая граница обладает способностью направлять движение электромагнитной энергии. Поле имеет при этом характер распространяющейся вдоль границы *плоской неоднородной волны*: оно распределено неравномерно в плоскости фронта. Это и есть волна, направляемая границей.

В § 39 (пп. 2—4) мы рассмотрели простейшие объекты существования направляемых волн в виде системы идеально проводящих параллельных плоскостей и диэлектрического слоя. Вообще *направляющими системами*, или *волноводами* (в широком смысле этого слова), являются все линии передачи электромагнитной энергии, поскольку процесс передачи есть распространение волны. Выше отмечалось, что направляющие системы образуются и в природных условиях (§ 42, п. 3, § 60, п. 1).

Некоторые распространенные линии передачи схематически изображены на рис. 61.1. Это обычная двухпроводная линия (*а*), коаксиальная линия (*б*), полосковые линии (*в*, *г*), полые волноводы: прямоугольный (*д*) и круглый (*е*), круглый диэлектрический волновод (*ж*), волновод Губо (*з*). Об этих устройствах, а также о некоторых других в дальнейшем будет говориться подробно.

Ближайшей нашей задачей является выяснение общих свойств свободных направляемых волн.

§ 61. Строение полей и виды плоских неоднородных волн

1. Общее описание направляемой волны. Любая из систем, показанных на рис. 61.1, продольно однородна, т. е. не изменяет своих физических свойств в одном прямолинейном направлении, которое будет обозначаться z ; в дальнейшем рассматриваются именно такие направляющие системы.

Допустим, что в естественно выделенном направлении z распространяется какой-то электромагнитный процесс в виде свободной гармонической волны. Чем должен он отличаться от простейшего

одномерного процесса, описанного в §§ 32, 33? Во-первых, тем, что ввиду поперечной неоднородности системы поле уже не может быть неизменным в плоскости $z = \text{const}$, и в уравнениях электродинамики нельзя заранее положить $\partial/\partial x = 0$, $\partial/\partial y = 0$. В самом деле, поперечно однородное поле ни в одной из показанных систем (рис. 61.1) невозможно, поскольку граничные условия на поверхности проводника или диэлектрика не удовлетворялись бы. Далее, нет оснований полагать, что фазовая скорость и затухание волны будут обязательно такими же, как и при одномерном процессе.

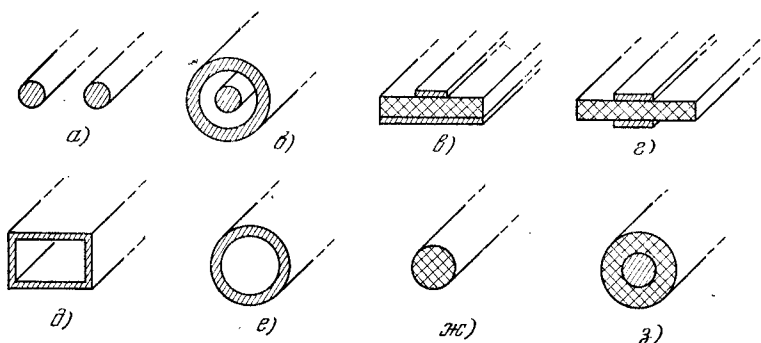


Рис. 61.1.

Не зная заранее комплексного волнового числа, обозначим его $\dot{\Gamma}$ (в отличие от определяемой формулой (33.1) величины $\dot{k} = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$). Таким образом, будем исходить из общего выражения поля *плоской неоднородной волны*, и запишем комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathcal{E}}(x, y) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \quad \dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathcal{H}}(x, y) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \quad (61.1)$$

где $\dot{\mathcal{E}}(x, y)$ и $\dot{\mathcal{H}}(x, y)$ — функции, характеризующие распределение поля в поперечном сечении. Заметим, что $\dot{\Gamma}$ обычно называют *постоянной распространения*, а также *продольным волновым числом*.

По аналогии с (33.2), (33.6) введем обозначения

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'', \quad \Gamma' = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{v_\phi}, \quad (61.2)$$

где смысл величин остается прежним: Γ'' есть коэффициент затухания, Λ — длина волны, а v_ϕ — ее фазовая скорость. В частности, когда $\dot{\Gamma}$ — вещественная величина ($\Gamma'' = 0$, $\Gamma' = \Gamma$), то $\Gamma = \frac{2\pi}{\Lambda} = \frac{\omega}{v_\phi}$; длина волны Λ есть в данном случае пространственный период процесса.

Как и в § 32, возьмем однородные уравнения Гельмгольца (29.20) и (29.21) справедливые для однородных сред; остановимся,

например, на втором из них. Применяя оператор Лапласа ∇^2 к $\dot{\mathbf{E}}_m$ из (61.1), имеем

$$\begin{aligned}\nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_m &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \dot{\mathbf{E}}_m = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \dot{\mathbf{E}}_m - \dot{\Gamma}^2 \dot{\mathbf{E}}_m = \\ &= \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathbf{E}}_m - \dot{\Gamma}^2 \dot{\mathbf{E}}_m = e^{-i\dot{\Gamma}z} (\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{E}} - \Gamma^2 \dot{\mathcal{E}}),\end{aligned}$$

где ∇_{\perp}^2 есть оператор Лапласа в плоскости $z = \text{const}$. Введем также величину

$$\dot{\chi}^2 = k^2 - \dot{\Gamma}^2, \quad (61.3)$$

которую называют *поперечным волновым числом*. С учетом предыдущего из уравнения (29.21) получаем следующее двумерное уравнение:

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{E}} + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{E}} = 0. \quad (61.4)$$

Точно так же из (29.20) следует:

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{H}} + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{H}} = 0. \quad (61.5)$$

Двумерные векторные уравнения Гельмгольца (61.4) и (61.5) применяются при изучении плоских неоднородных волн.

2. Компоненты поля. Желая, далее, исследовать связи различных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} плоской неоднородной волны, обратимся к уравнениям Максвелла. Внося в (29.11) при $\dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = 0$ выражения $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ из (61.1), имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + i\dot{\Gamma} \dot{\mathcal{E}}_y &= -i\omega \dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_x, & \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} + i\dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_y &= i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mathcal{E}}_x, \\ i\dot{\Gamma} \dot{\mathcal{E}}_x + \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} &= i\omega \dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_y, & i\dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_x + \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} &= -i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mathcal{E}}_y, \\ \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_x}{\partial y} &= -i\omega \dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_z, & \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_x}{\partial y} &= i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mathcal{E}}_z. \end{aligned} \right\} \quad (61.6)$$

Важной особенностью уравнений (61.6) является то, что поперечные компоненты $\dot{\mathcal{E}}_x$, $\dot{\mathcal{E}}_y$, $\dot{\mathcal{H}}_x$ и $\dot{\mathcal{H}}_y$ можно выразить через продольные, т. е. $\dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_z$. Действительно, первая строчка в левом столбце и вторая в правом — это система линейных алгебраических уравнений относительно $\dot{\mathcal{E}}_y$ и $\dot{\mathcal{H}}_x$, а вторая строчка в левом столбце и первая в правом — такая же система относительно $\dot{\mathcal{E}}_x$ и $\dot{\mathcal{H}}_y$. Запишем решения этих систем, используя обозначение (61.3):

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_x &= -\frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} - \frac{i\omega \dot{\mu}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}, & \dot{\mathcal{H}}_x &= \frac{i\omega \dot{\epsilon}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}, \\ \dot{\mathcal{E}}_y &= -\frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y} + \frac{i\omega \dot{\mu}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x}, & \dot{\mathcal{H}}_y &= -\frac{i\omega \dot{\epsilon}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x} - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (61.7)$$

Полученным выражениям можно придать более компактный вид. Обозначая поперечные части векторов $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$ символами $\dot{\mathcal{E}}_t$ и $\dot{\mathcal{H}}_t$:

$$\dot{\mathcal{E}}_t = x_0 \dot{\mathcal{E}}_x + y_0 \dot{\mathcal{E}}_y, \quad \dot{\mathcal{H}}_t = x_0 \dot{\mathcal{H}}_x + y_0 \dot{\mathcal{H}}_y, \quad (61.8)$$

и принимая во внимание формулы (П1.6) и (П1.20), находим

$$\dot{\mathcal{E}}_t = -\frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \nabla_{\perp} \dot{\mathcal{E}}_z - \frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2} \text{rot}_{\perp} \dot{\mathcal{H}}_z, \quad \dot{\mathcal{H}}_t = \frac{i\omega\dot{\epsilon}}{\dot{\chi}^2} \text{rot}_{\perp} \dot{\mathcal{E}}_z - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \nabla_{\perp} \dot{\mathcal{H}}_z \quad (61.9)$$

(символ \perp , как и ранее, означает, что операция производится по координатам, лежащим в плоскости $z = \text{const}$).

Выражения (61.9) удобны также тем, что они сохраняют смысл для любой «обобщенно-цилиндрической» системы координат q_1, q_2, z , т. е. при использовании в поперечной плоскости $z = \text{const}$ любых криволинейных ортогональных координат q_1, q_2 . Чтобы записать (61.9) в тех или иных конкретных криволинейных координатах, надо применить формулы (П1.7) и (П1.21), подставив в них нужные координаты и коэффициенты Ламэ. В случае обычных цилиндрических координат следует, конечно, прямо брать формулы (П1.8) и (П1.22). Мы будем так делать при рассмотрении некоторых направляющих систем (§§ 65, 66).

3. Классификация волн. Как видно из (61.7), а также из (61.9), поперечные компоненты поля плоской неоднородной волны в общем случае слагаются из двух частей, одна из которых обращается в нуль вместе с $\dot{\mathcal{E}}_z$, а другая — с $\dot{\mathcal{H}}_z$.

Частный класс плоских волн составляют такие, которые лишены продольной магнитной компоненты ($H_z = 0$). Это так называемые *E-волны* («электрические волны»), или, как еще говорят, *TM-волны* («поперечно-магнитные волны»). Положив в (61.9) $\dot{\mathcal{H}}_z = 0$, с учетом (61.1) запишем выражения комплексных амплитуд векторов поля для волн этого класса:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \left(\dot{\mathcal{E}}_z - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \nabla_{\perp} \dot{\mathcal{E}}_z \right) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_m &= \frac{i\omega\dot{\epsilon}}{\dot{\chi}^2} \text{rot}_{\perp} \dot{\mathcal{E}}_z e^{-i\dot{\Gamma}z} = \frac{i\omega\dot{\epsilon}}{\dot{\chi}^2} [\nabla_{\perp} \dot{\mathcal{E}}_z, \mathbf{z}_0] e^{-i\dot{\Gamma}z}. \end{aligned} \right\} \quad (61.10)$$

Другой частный класс образуют волны без продольной электрической компоненты ($E_z = 0$), называемые *H-волнами*, или *TE-волнами* (т. е. «магнитными», или соответственно «поперечно-электрическими»). Взяв в (61.9) $\dot{\mathcal{E}}_z = 0$, в этом случае имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= -\frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2} \text{rot}_{\perp} \dot{\mathcal{H}}_z e^{-i\dot{\Gamma}z} = -\frac{i\omega\dot{\mu}}{\dot{\chi}^2} [\nabla_{\perp} \dot{\mathcal{H}}_z, \mathbf{z}_0] e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_m &= \left(\dot{\mathcal{H}}_z - \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \nabla_{\perp} \dot{\mathcal{H}}_z \right) e^{-i\dot{\Gamma}z}. \end{aligned} \right\} \quad (61.11)$$

Третий частный класс включает волны чисто поперечные ($E_z = 0$ и $H_z = 0$), которые называются *ТЕМ-волнами* (т. е. «поперечно-электромагнитными»). Из (61.7) или (61.9) видно, что если $\dot{\mathcal{E}}_z = 0$ и $\dot{\mathcal{H}}_z = 0$, то при $\dot{\chi}^2 \neq 0$ обращаются в нуль все компоненты поля, а это значит, что волны *ТЕМ* невозможны. Однако данный запрет снимается при $\dot{\chi}^2 = 0$, поскольку выражения всех поперечных компонент становятся при этом неопределенностями типа $0/0$. Равенство нулю поперечного волнового числа $\dot{\chi}$ является, таким образом, свойством всех *ТЕМ-волн*.

Конечно, к классу *ТЕМ-волн* относится и хорошо уже знакомая по предыдущему плоская однородная волна (§§ 32, 33), распространяющаяся в безграничной однородной среде. Выражения ее компонент соответствуют случаю $\dot{\mathcal{E}} = \text{const}$, $\dot{\mathcal{H}} = \text{const}$ и $\dot{\Gamma} = \dot{k}$ в (61.1); последнее, согласно (61.3), и обеспечивает обращение в нуль поперечного волнового числа.

Поле *ТЕМ-волны* можно рассматривать как предельный случай поля *E-волны* при $E_z \rightarrow 0$, $\dot{\chi} \rightarrow 0$ или *H-волны* при $H_z \rightarrow 0$, $\dot{\chi} \rightarrow 0$. Поэтому для *ТЕМ-волн* на основании (61.10) и (61.11)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \nabla_{\perp} \varphi e^{-ikz}, \\ \dot{H}_m &= \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\mu}}} [z_0, \nabla_{\perp} \varphi] e^{-ikz}, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \sqrt{\frac{\dot{\mu}}{\dot{\epsilon}}} [\nabla_{\perp} \psi, z_0] e^{-ikz}, \\ \dot{H}_m &= \nabla_{\perp} \psi e^{-ikz}, \end{aligned} \right\} \quad (61.12)$$

где $\varphi = \lim_{\substack{\dot{\mathcal{E}}_z \rightarrow 0, \\ \dot{\chi} \rightarrow 0}} \frac{-i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \dot{\mathcal{E}}_z$ и $\psi = \lim_{\substack{\dot{\mathcal{H}}_z \rightarrow 0, \\ \dot{\chi} \rightarrow 0}} \frac{-i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}^2} \dot{\mathcal{H}}_z$.

В заключение отметим, что плоские неоднородные волны общего вида, имеющие обе продольные компоненты ($E_z \neq 0$ и $H_z \neq 0$), называют *ЕН-волнами* и *НЕ-волнами*.

§ 62. Основные особенности направляемых волн

1. Волны *ТЕМ*. Обсуждение особенностей различных направляемых волн начнем с класса *ТЕМ*.

Было отмечено, что обязательным свойством волн этого класса является равенство нулю поперечного волнового числа; поэтому, согласно (61.3), продольное волновое число оказывается таким же, как в случае плоской однородной волны:

$$\dot{\chi} = 0; \quad \dot{\Gamma} = \dot{k} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}\dot{\mu}}. \quad (62.1)$$

Это значит, что прежними будут также фазовая скорость и длина волны:

$$v_{\phi} = \frac{1}{\text{Re} \sqrt{\dot{\epsilon}\dot{\mu}}}, \quad \Lambda = \lambda, \quad (62.1a)$$

т. е., в частности, при отсутствии поглощения в среде $v = 1/\sqrt{\dot{\epsilon}\dot{\mu}}$.

Выражение (62.1), будучи очень простым, позволяет тем не менее сразу же прийти к одному интересному выводу. Подчеркнем, что $\dot{\Gamma}$ может быть только постоянной величиной (иначе уравнение $\dot{\Gamma}z = \text{const}$ не описывало бы плоскость поперечного сечения), и выше во всех действиях это, конечно, учитывалось. Вместе с тем в силу поперечной неоднородности любой направляющей системы $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ изменяются в плоскости $z = \text{const}$. Например, в случае диэлектрического волновода (рис. 61.1, ж) проницаемости имеют одно значение внутри стержня и другое — вне его, так что нет постоянной величины $\dot{\Gamma} = \dot{k}$ (62.1), а следовательно, не может быть *ТЕМ*-волны. Если бы мы допустили два разных значения $\dot{\Gamma}$ для внутренней и внешней стержня, то речь пошла бы уже о двух различных волнах, причем существование таких волн невозможно, поскольку при разных зависимостях от z внешнее и внутреннее поля неизбежно не удовлетворяют граничным условиям на поверхности стержня. Так как, в сущности, сказанное относится не только к диэлектрическому волноводу, а ко всем направляющим системам (рис. 61.1), то напрашивается вывод, что направляемых *ТЕМ*-волн в реальных условиях вообще не может быть.

Иное дело — системы с однородной средой, ограниченные идеальным проводником: внутри последнего поле должно отсутствовать, и гипотетические волны будут распространяться в области, где $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ постоянны; не исключено, что среди них окажутся и волны *ТЕМ*. Но, как уже не раз подчеркивалось, реальные металлы весьма близки электродинамически к идеальному проводнику. Поля при наличии металлических границ лишь очень мало отличаются от тех, которые были бы при границах идеально проводящих. Поэтому естественно ожидать, что хотя бы в некоторых металлических направляющих системах с однородным диэлектриком возможны волны, которые практически надо отнести к классу *ТЕМ* ($E_z \approx 0$, $H_z \approx 0$). Взяв какую-нибудь конкретную систему этого рода, скажем, полый прямоугольный волновод (рис. 61.1, д) или коаксиальную линию (рис. 61.1, б), нужно только выяснить, могли бы в ней существовать «истинные» *ТЕМ*-волны ($E_z = 0$, $H_z = 0$) при идеальности проводника ($\sigma \rightarrow \infty$).

Итак, постараемся найти условия существования *ТЕМ*-волн в идеализированных системах. Обращаясь к уравнениям (61.4) и (61.5), видим, что для данного класса волн в силу обязательного требования (62.1) они вырождаются в двумерные уравнения Лапласа

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{E}} = 0 \quad (62.2)$$

и

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{H}} = 0. \quad (62.3)$$

Это примечательный факт, поскольку из § 14, п. 4, а также § 21, п. 1 известно, что векторные уравнения Лапласа описывают стационарные (постоянные во времени) поля.

Рассматривая ту или иную направляющую систему с однородной диэлектрической средой и идеальным проводником, легко установить, возможно ли в ней существование электростатического поля \mathbf{E}_0 и стационарного магнитного поля \mathbf{H}_0 , не изменяющихся по оси z . Положительный ответ на этот вопрос означает, что имеются решения уравнений $\nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}_0 = 0$ и $\nabla_{\perp}^2 \mathbf{H}_0 = 0$ при тех же самых граничных условиях, которые налагаются на $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$ в (62.2) и (62.3).

Поэтому существуют решения $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$, совпадающие с \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 соответственно (с точностью до постоянного коэффициента), а следовательно, в данной направляющей системе может распространяться *ТЕМ*-волна, поперечная структура которой повторяет эти стационарные поля. Если же в системе невозможны стационарные поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 , то не будут распространяться и волны *ТЕМ*.

Теперь мы имеем основание утверждать, что в идеализированной ($\sigma \rightarrow \infty$) коаксиальной линии (рис. 61.1, б) может распространяться *ТЕМ*-волна, строение электрического поля которой в поперечном сечении такое же, как поля коаксиального конденсатора (§ 17, п. 6), а поперечное строение поля магнитного — как при постоянном токе (§ 24, п. 1). Подобным же образом следует охарактеризовать, например, и двухпроводную линию (рис. 61.1, а). Но в полых волноводах (рис. 61.1, д, 61.1, е) волны *ТЕМ* невозможны, как и стационарные поля \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 (§ 17, п. 1, § 24, п. 1).

Наконец, вернемся к формулам (61.12), которые ввиду предыдущего нетрудно уточнить. Принимая как должное, что векторы $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$ потенциальны: $\dot{\mathcal{E}} = \nabla_{\perp} \phi$ и $\dot{\mathcal{H}} = \nabla_{\perp} \psi$, сформулируем граничные задачи, имеющие решениями ϕ и ψ (ср. § 14, п. 3 и § 21, п. 1). Пусть S_{\perp} с контуром L_{\perp} есть поперечное сечение направляющей системы (точнее, области существования поля в ней); для открытых систем

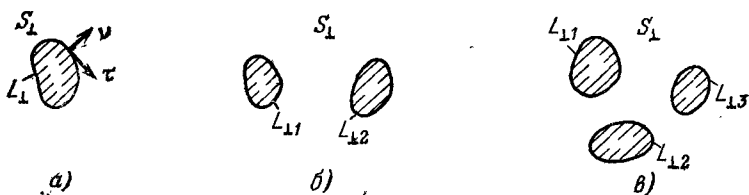


Рис. 62.1.

область S_{\perp} бесконечна (рис. 62.1, а, б, в), при многосвязном поперечном сечении контур L_{\perp} распадается на несколько частей: $L_{\perp} = L_{\perp 1} + L_{\perp 2} + \dots + L_{\perp N}$ (рис. 62.1, б, в и 61.2, б, в). Так как $\dot{\mathcal{E}}_{\tau} = \partial \phi / \partial \tau$ и $\dot{\mathcal{H}}_{\nu} = \partial \psi / \partial \nu$, то получаем следующие задачи Дирихле и Неймана (см. приложение 5, п. 2):

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \phi &= 0 & \text{в } S_{\perp}, \\ \phi &= C_i & \text{на } L_i \end{aligned} \right\} \quad (62.4)$$

(C_i — константы) и

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \psi &= 0 & \text{в } S_{\perp}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} &= 0 & \text{на } L. \end{aligned} \right\} \quad (62.5)$$

Исследуя их, можно показать, что в экранированной односвязной системе (рис. 62.2, а) TEM -волн действительно нет, а во всех N -связных системах ($N > 1$) может существовать $N - 1$ различных TEM -волн, т. е. одна волна в случаях рис. 62.1, а и 62.2, б и две волны в случаях рис. 62.1, б и 62.2, в; подробнее см. § 66, п. 4.

В заключение отметим, что выражения (61.12) свидетельствуют о взаимной перпендикулярности векторов E и H волны TEM , а также

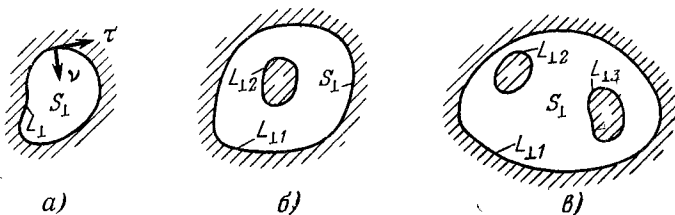


Рис. 62.2.

о постоянстве отношения их комплексных амплитуд в любой плоскости $z = \text{const}$. Последнее называют *волновым сопротивлением*, обозначая \dot{W} . Из (61.12) следует, что

$$\dot{E}_m = \dot{W} [\dot{H}_m, z_0], \quad \dot{W} = \sqrt{\dot{\mu}/\dot{\epsilon}}. \quad (62.6)$$

Этот же смысл и такую же величину имеет, как известно, волновое сопротивление в случае плоской однородной волны (§§ 32, 33).

2. Быстрые E - и H -волны. Волны, распространяющиеся в некоторой однородной среде с фазовой скоростью, превышающей фазовую скорость TEM -волны в этой среде, называют *быстрыми* (для данной среды). Таким образом, в случае быстрых волн

$$\Gamma < k', \quad v_{\phi} > v = 1/\text{Re} \sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}} \quad (62.7)$$

и, в частности, при отсутствии поглощения $\Gamma < k$ и $v_{\phi} > 1/\sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}$. Можно показать, что быстрыми должны быть E - и H -волны в направляющих системах, полностью ограниченных (экранированных) идеально проводящей оболочкой, т. е. при конфигурации полого волновода (рис. 61.1, д, е), коаксиальной линии (рис. 61.1, б) и т. п. (рис. 62.2, а, б, в). Сюда относится и рассмотренная в § 39, п. 2 система идеально проводящих плоскостей.

Пусть дана такая идеализированная ($\sigma \rightarrow \infty$) система с односвязным или многосвязным поперечным сечением (рис. 62.2, а, б, в), и требуется исследовать ее E - и H -волны. Как видно из соотношений (61.10) и (61.11), в обоих случаях поле полностью определяется

одной продольной компонентой: $\dot{\mathcal{E}}_z$ или $\dot{\mathcal{H}}_z$. Поэтому надо сформулировать задачу определения этой компоненты.

При изучении E -волн будем исходить из уравнения (61.4), которое спроектируем на ось z , учитывая, что $(\nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{E}})_z = \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{E}}_z$. Таким образом, имеем следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{E}}_z + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \quad \text{в } S_{\perp}, \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \quad \text{на } L_{\perp} \end{aligned} \right\} \quad (62.8)$$

($E_{\tau} = 0$ на поверхности идеального проводника). Это не что иное, как первая краевая задача типа (П5.27) для двумерного уравнения Гельмгольца. Переписывая для задачи (62.8) формулу (П5.31), получаем

$$\dot{\chi}^2 = \frac{\int_{S_{\perp}} |\nabla_{\perp} \dot{\mathcal{E}}_z|^2 ds}{\int_{S_{\perp}} |\dot{\mathcal{E}}_z|^2 ds} \geq 0, \quad (62.9)$$

причем нуль имеет место только в предельном случае TEM -волн. Итак, для E -волн

$$\dot{\chi}^2 > 0, \quad (62.10)$$

т. е. поперечное волновое число $\dot{\chi} = \chi$ — величина *вещественная*.

Переходя к случаю H -волн, мы должны сформулировать граничную задачу относительно $\dot{\mathcal{H}}_z$. Для этого сначала придется вывести соответствующее граничное условие.

Фиксируя произвольную точку идеально проводящей границы направляющей системы, примем криволинейные координаты τ, ν (рис. 62.2) за локальные декартовы координаты x, y и на этом основании перепишем первую строчку уравнений (61.6) в форме

$$\frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial \nu} + i\Gamma \dot{\mathcal{H}}_z = i\omega \dot{\mathcal{E}}_{\tau}.$$

Поскольку на поверхности идеально проводящего тела $E_{\tau} = 0$ и $B_{\nu} = 0$, то здесь $\dot{\mathcal{E}}_{\tau} = 0$ и $\dot{\mathcal{H}}_{\nu} = 0$, а потому должно быть

$$\partial \dot{\mathcal{H}}_z / \partial \nu = 0. \quad (62.11)$$

Это и есть требуемое граничное условие.

Проектируя (61.5) на ось z , получаем, таким образом, следующую краевую задачу:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \dot{\mathcal{H}}_z + \dot{\chi}^2 \dot{\mathcal{H}}_z &= 0 \quad \text{в } S_{\perp}, \\ \partial \dot{\mathcal{H}}_z / \partial \nu &= 0 \quad \text{на } L_{\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (62.12)$$

т. е. вторую краевую задачу типа (П5.28) для двумерного уравнения Гельмгольца. Конкретизируя формулу (П5.31), пишем:

$$\dot{\chi}^2 = \frac{\int_{S_{\perp}} |\nabla_{\perp} \mathcal{H}_z|^2 ds}{\int_{S_{\perp}} |\mathcal{H}_z|^2 ds} \geq 0, \quad (62.13)$$

а так как нуль будет только в предельном случае ТЕМ-волн, то для H -волн выполняется неравенство (62.10).

Учитывая (62.10), нетрудно проверить справедливость неравенств (62.7). Например, при отсутствии поглощения (вещественное $\dot{k}^2 = k^2$) немедленно убеждаемся, что $\Gamma = \sqrt{k^2 - \chi^2} < k^2$, т. е. E - и H -волны действительно являются быстрыми.

Краевые задачи (62.8) и (62.12) — это задачи на собственные значения (см. примеры в Приложении 7). Решения \mathcal{E}_z и \mathcal{H}_z образуют бесконечные множества $\{\mathcal{E}_{zn}\}$ и $\{\mathcal{H}_{zn}\}$, причем каждому соответствует определенное значение поперечного волнового числа $\dot{\chi} = \chi_n$, так что все их можно расположить в виде последовательности

$$0 < \chi_1^2 \leq \chi_2^2 \leq \dots \leq \chi_n^2 \leq \dots \quad (62.14)$$

Поэтому существует бесконечное множество E - и H -волн, которые могут при определенных условиях распространяться в конкретной направляющей системе (например, в полом волноводе), имея постоянные распространения $\dot{\Gamma}_n = \sqrt{k^2 - \chi_n^2}$.

Наконец, возвращаясь к формулам (61.10) и (61.11), отметим, что поперечные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно перпендикулярны как для E -волн, так и для H -волн. Отношения их комплексных амплитуд в обоих случаях постоянны, они называются волновыми сопротивлениями \dot{W}^E и \dot{W}^H соответственно. При этом

$$\begin{aligned} \dot{H}_m &= \frac{1}{\dot{W}^E} [z_0, \dot{E}_m], & \dot{W}^E &= \dot{\Gamma} / \omega \dot{\epsilon} \quad (E\text{-волны}), \\ \dot{E}_m &= \dot{W}^H [\dot{H}_m, z_0], & \dot{W}^H &= \omega \dot{\mu} / \dot{\Gamma} \quad (H\text{-волны}). \end{aligned} \quad (62.15)$$

При отсутствии поглощения волновые сопротивления вещественны, если вещественна постоянная распространения; тогда поперечные компоненты напряженностей поля находятся в фазе. Продольные же компоненты, как следует из (61.10) и (61.11), сдвинуты по отношению к ним на 90° по фазе. Легко сообразить, что в результате этого в любом поперечном направлении $\bar{\Pi} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] = 0$, т. е. в среднем равен нулю поток энергии.

3. Дисперсия быстрых волн при отсутствии поглощения. Для быстрых E - и H -волн при $\sigma \rightarrow \infty$ мы можем, таким образом, на основании (61.3) и (62.10) выразить продольное волновое число формулой

$$\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{k}^2 - \chi^2}, \quad \chi^2 > 0. \quad (62.16)$$

Будем пока рассматривать распространение волн в непоглощающей среде, так что $k^2 = k^2 = \omega^2 \epsilon \mu$. Пусть $f = \omega/2\pi$ — частота электромагнитного процесса, и $\lambda = 2\pi/k$ — длина плоской однородной *ТЕМ*-волны, распространяющейся при этой частоте в неограниченной среде с проницаемостями ϵ и μ (теми же, что и для среды внутри направляющей системы). Иногда λ называют «рабочей длиной волны». Введем параметры

$$f_{кр} = \frac{\chi}{2\pi\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр} = \frac{2\pi}{\chi}, \quad (62.17)$$

называемые соответственно *критической частотой* и *критической длиной волны*. Поскольку на основании (62.16)

$$\dot{\Gamma} = k\sqrt{1 - (\chi/k)^2},$$

то теперь можно также написать следующие выражения продольного волнового числа:

$$\dot{\Gamma} = k\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (62.18)$$

При $f \geq f_{кр}$ ($\lambda \leq \lambda_{кр}$) постоянная распространения $\dot{\Gamma}$ вещественна: $\Gamma'' = 0$, $\dot{\Gamma} = \Gamma$; используя (61.2), нетрудно при этом выразить фазовую скорость и длину волны:

$$v_{\phi} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad f \geq f_{кр} \quad (62.19)$$

и

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \quad f \geq f_{кр}. \quad (62.20)$$

Весьма существенно, что параметры $f_{кр}$ и $\lambda_{кр}$ вместе с χ постоянны для того или иного типа волны конкретной направляющей системы (см., например, формулу (39.6) для случая системы плоскостей). Как видно, фазовая скорость направляемой волны v_{ϕ} и ее длина Λ являются функциями частоты. Здесь мы встречаемся с *дисперсией* волны (§ 35, п. 1) при отсутствии поглощения.

При частотах, значительно превышающих критическую ($f \gg f_{кр}$), т. е. при «рабочих длинах волн» значительно более коротких, чем критическая ($\lambda \ll \lambda_{кр}$), постоянная распространения направляемой волны $\dot{\Gamma} = \Gamma$ лишь незначительно отличается от волнового числа k однородной *ТЕМ*-волны; поэтому близки соответствующие фазовые скорости ($v_{\phi} \approx v$) и длины волн ($\Lambda \approx \lambda$).

С уменьшением f (ростом λ) фазовая скорость v_{ϕ} и длина волны Λ неограниченно возрастают по мере приближения f к $f_{кр}$ (λ к $\lambda_{кр}$). После этого (при $f < f_{кр}$; $\lambda > \lambda_{кр}$) постоянная распространения $\dot{\Gamma}$ становится чисто мнимой величиной:

$$\dot{\Gamma} = \pm ik\sqrt{(f_{кр}/f)^2 - 1}, \quad f \leq f_{кр}. \quad (62.21)$$

Взяв здесь знак минус, получаем продольную зависимость комплексных амплитуд поля (61.1) следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} e^{-i\Gamma z} &= e^{-\Gamma'' z}, \\ \Gamma'' &= k\sqrt{(f_{кр}/f)^2 - 1} \geq 0 \end{aligned} \right\} f \leq f_{кр}, \quad (62.22)$$

что означает экспоненциальное убывание вдоль оси z без изменения фазы. Так, например,

$$E = \operatorname{Re} \dot{\mathcal{E}} e^{-i\Gamma z} e^{i\omega t} = \operatorname{Re} \mathcal{E} e^{i\varphi} e^{-\Gamma'' z} e^{i\omega t} = \mathcal{E} e^{-\Gamma'' z} \cos(\omega t + \varphi),$$

где φ — какая-то постоянная начальная фаза ($\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{E} e^{i\varphi}$). Собственно говоря, это уже не бегущая волна, поскольку поле везде синфазно; говорят, что при $f = f_{кр}$ волна «испытывает отсечку». Поскольку волновые сопротивления (62.15) при чисто мнимом $\dot{\Gamma}$ в отсутствие поглощения ($\dot{\epsilon} = \epsilon$, $\dot{\mu} = \mu$) также являются чисто мнимыми, то поперечные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты по фазе на 90° . Это в свою очередь означает обращение в нуль среднего вектора Пойнтинга вдоль оси z : при $f < f_{кр}$ нет передачи энергии.

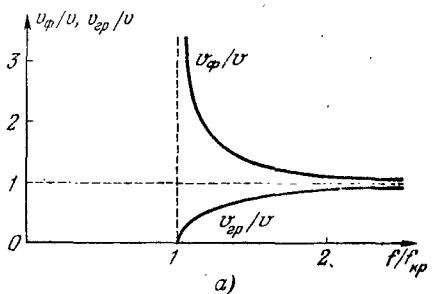
Вычислим далее групповую скорость (§ 35) быстрой волны, взяв формулу (35.9), в которой ввиду (61.2) k заменяется на Γ :

$$\begin{aligned} v_{гр} &= \frac{d\omega}{d\Gamma} = v \sqrt{1 - \left(\frac{f_{кр}}{f}\right)^2} = \\ &= v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad f \geq f_{кр}, \end{aligned} \quad (62.23)$$

Таким образом, при критической частоте групповая скорость обращается в нуль. Заметим, что формулы (62.19) и (62.23) приводят к следующему соотношению:

$$v_\phi v_{гр} = v^2 = \text{const.} \quad (62.24)$$

Дисперсию быстрой E - или H -волны в идеализированной ($\sigma \rightarrow \infty$) системе при отсутствии поглощения во внутренней среде ($\dot{k} = k$) характеризует приводимый ниже график зависимостей $v_\phi(f)$ и $v_{гр}(f)$, построенный по формулам (62.19) и (62.23), рис. 62.3, а.



$$\dot{\Gamma}/k = \begin{cases} \Gamma'/k & \text{при } f/f_{кр} > 1 \\ -\Gamma''/k & \text{при } f/f_{кр} < 1 \end{cases}$$

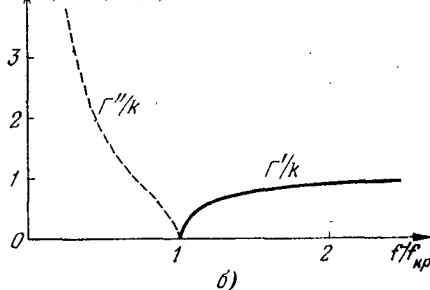


Рис. 62.3.

На рис. 62.3, б представлена также зависимость от частоты отношения $\dot{\Gamma}/k$ (волна распространяется вдоль оси z). При $f < f_{кр}$ эта величина является мнимой (пунктир) и стремится к $-i\infty$ при $f \rightarrow 0$, что соответствует максимальному значению коэффициента затухания $\Gamma_{\max} = \chi$.

4. **Медленные волны.** Волны, фазовые скорости которых меньше, чем фазовая скорость ТЕМ-волны в той же среде, называются *медленными*. Для медленных волн

$$\Gamma > k', \quad v_{\phi} < v = 1/\text{Re} \sqrt{\epsilon \mu} \quad (62.25)$$

(в частности, при отсутствии поглощения $\Gamma > k$ и $v_{\phi} < 1/\sqrt{\epsilon \mu}$).

В § 39, п. 3 было показано, что плоские неоднородные E - и H -волны, образующиеся при полном отражении однородной ТЕМ-волны на границе раздела прозрачных сред, являются медленными

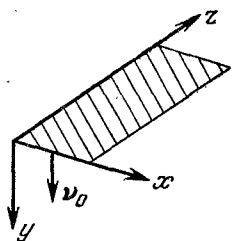


Рис. 62.4.

по отношению к менее плотной из них. Соответствующее поперечное волновое число χ_2 (39.21) — величина чисто мнимая, и это определяет *поверхностный характер* волны. Отметим также, что χ_2 — не константа (ср. пп. 2, 3), а функция частоты.

Эти особенности оказываются довольно общими для медленных волн различного вида.

Из (61.3) следует, что для медленной волны, т. е. при условии (62.25), в отсутствие поглощения поперечное волновое число обязательно должно быть чисто мнимым:

$$\dot{\chi}^2 = k^2 - \dot{\Gamma}^2 < 0, \quad \dot{\chi} = \pm i\beta \quad (\beta > 0). \quad (62.26)$$

Пусть имеется некоторая открытая направляющая система так что, в частности, поле существует в полупространстве $y < 0$ (рис. 62.4), причем вдоль оси z распространяется медленная E -волна. Если можно считать, что в поперечном направлении x вдоль границы раздела $y = 0$ поле не изменяется ($\partial/\partial x = 0$), то уравнение (61.5) принимает вид

$$\frac{d^2 \mathcal{H}}{dy^2} - \beta^2 \mathcal{H} = 0, \quad (62.27)$$

где $\dot{\chi}^2$, согласно (62.26), заменено через $-\beta^2$. Его общее решение есть (в скалярной форме)

$$\mathcal{H} = \dot{A} e^{-\beta y} + \dot{B} e^{\beta y} \quad (\beta > 0).$$

Но в соответствии с физическим содержанием задачи здесь надо положить $\dot{A} = 0$ (поле не может неограниченно возрастать при удалении от направляющей системы, $y < 0$), так что

$$\mathcal{H} = \dot{B} e^{\beta y} \quad (\beta > 0; y < 0). \quad (62.28)$$

Таким образом, речь идет об экспоненциально убывающем в поперечном направлении $-y$ поле направляемой *поверхностной* волны.

Из последней строчки (61.6) немедленно получаем

$$-\beta \mathcal{H}_x = i\omega\epsilon \dot{\mathcal{E}}_z, \quad (62.29)$$

причем, как следует из третьей строчки первого столбца (61.6),

$\dot{\mathcal{E}}_x = 0$, а потому \dot{E}_{mz} и \dot{H}_{mx} — проекции векторов $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ на плоскость $y = 0$. Обозначая их \dot{E}_m^S и \dot{H}_m^S , запишем на основании (62.29):

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^S / \dot{H}_m^S &= \dot{z}_S, \\ \dot{E}_m^S &= \dot{z}_S [\dot{H}_m^S, \mathbf{v}_0], \end{aligned} \right\} \dot{z}_S = i \frac{\beta}{\omega\epsilon} \quad (62.30)$$

($\mathbf{v}_0 = +\mathbf{y}_0$ есть единичный вектор внутренней нормали к границе направляющей системы $y = 0$). Назовем \dot{z}_S *поверхностным импедансом* границы. Поскольку $\beta/\omega\epsilon$ — положительная величина, можно сказать, что импеданс имеет «индуктивный» характер.

Рассмотренная поверхностная волна может существовать, если в силу определенных физических условий внутри направляющей системы ($y > 0$) плоскость $y = 0$ будет обладать таким импедансом, т. е. создастся необходимое соотношение тангенциальных компонент \dot{E}_m^S и \dot{H}_m^S . Эти условия создаются, например, на границе рассмотренного в § 39, п. 4 диэлектрического слоя при вертикальной поляризации. Читателю предлагается проверить указанное обстоятельство, а также самостоятельно исследовать в том же плане случай горизонтальной поляризации, когда направляемая волна относится к классу H .

Медленные волны, принадлежащие различным классам и, в частности, имеющие обе продольные компоненты, будут описаны в § 67.

§ 63. Передача энергии и волны при поглощении

1. Передача энергии. Средняя мощность направляемой волны вычисляется как поток среднего вектора Пойнтинга $\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*]$ через поперечное сечение системы S_{\perp} :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S_{\perp}} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*] \mathbf{ds} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{S_{\perp}} [\dot{E}_{mt}, \dot{H}_{mt}^*] \mathbf{ds} \quad (63.1)$$

(для открытых систем область S_{\perp} бесконечна). Это выражение для систем с однородной средой можно записать в виде

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \text{Re} \dot{W}^{(E, H)} \int_{S_{\perp}} H_{mt}^2 \mathbf{ds} = \frac{1}{2} \text{Re} \frac{1}{\dot{W}^{(E, H)*}} \int_{S_{\perp}} E_{mt}^2 \mathbf{ds}, \quad (63.2)$$

где $\dot{W}^{(E, H)}$ это \dot{W} , \dot{W}^E или \dot{W}^H в зависимости от типа волны.

При вещественном $\dot{W}^{(E, H)}$ знак Re опускается, так как стоящая за ним величина вещественна, а при чисто мнимом $\dot{W}^{(E, H)}$ средняя мощность \bar{P} равна нулю. В § 35, п. 3 скорость движения энергии при гармонических колебаниях вычислялась по формуле

$$v_3 = \bar{\Pi} / \bar{w}. \quad (63.3)$$

С этой точки зрения скорость энергии, которая переносится волной вдоль направляющей системы, есть

$$\check{v}_3 = \frac{\int_{S_{\perp}} \bar{\Pi} ds}{\int_{S_{\perp}} \bar{w} ds} = \frac{\bar{P}}{\bar{W}'}, \quad (63.4)$$

где \bar{W}' — средняя энергия, отнесенная к единице длины системы.

Возьмем случай быстрых E - или H -волн при отсутствии поглощения и покажем, что введенная для них групповая скорость $v_{гр}$ совпадает с \check{v}_3 . Действительно, например, для E -волн из (63.4) с учетом (61.10) и (62.15) имеем

$$\begin{aligned} \check{v}_3 &= \frac{\frac{\omega \epsilon}{2\Gamma} \int_{S_{\perp}} \frac{\Gamma^2}{\chi^4} |\nabla_{\perp} \mathcal{E}_z|^2 ds}{\frac{\epsilon}{4} \int_{S_{\perp}} \left\{ |\mathcal{E}_z|^2 + \frac{\Gamma^2}{\chi^4} |\nabla_{\perp} \mathcal{E}_z|^2 \right\} ds + \frac{\mu}{4} \int_{S_{\perp}} \frac{\omega^2 \epsilon^2}{\chi^4} |\nabla_{\perp} \mathcal{E}_z|^2 ds} = \\ &= \frac{2}{\frac{\Gamma}{\omega \epsilon} \left\{ \epsilon \left[\frac{\chi^4}{\Gamma^2} \frac{\int_{S_{\perp}} |\mathcal{E}_z|^2 ds}{\int_{S_{\perp}} |\nabla_{\perp} \mathcal{E}_z|^2 ds} + 1 \right] + \mu \frac{\omega^2 \epsilon^2}{\Gamma^2} \right\}} \end{aligned}$$

Привлекая (62.9) и (61.3), находим далее

$$\check{v}_3 = \frac{2}{\frac{\Gamma}{\omega} \left(\frac{\chi^2}{\Gamma^2} + 1 \right) + \frac{\omega \epsilon \mu}{\Gamma}} = \frac{\Gamma}{\omega \epsilon \mu} = v \frac{\Gamma}{k}.$$

Таким образом,

$$\check{v}_3 = v \frac{\Gamma}{k} = v \sqrt{1 + \left(\frac{f_{кр}}{f} \right)^2}, \quad (63.5)$$

что совпадает с (62.23).

Читателю предлагается сделать аналогичную проверку, взяв случай быстрых H -волн.

2. Поглощение. Исследование постоянной распространения. Действие поглощающей среды уже изучалось в случае плоской однородной TEM -волны (§ 33). Как и эта простейшая волна, все плоские неоднородные волны при распространении в поглощающих средах затухают по экспоненциальному закону. Действительно, при комплексных проницаемостях комплексной величиной является и постоянная распространения: $\tilde{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma''$; тогда амплитуды векторов

E и H изменяются вдоль оси z по закону $e^{-\Gamma''z}$, т. е. происходит экспоненциальное затухание в направлении z , когда $\Gamma'' > 0$. Уже говорилось (§ 61, п. 1), что Γ'' называется коэффициентом затухания (как и k'' , ср. § 33); затуханием волны на некотором отрезке пути l называют величину $L = \Gamma''l$ (ср. § 33, п. 2).

Рассмотрим сначала настоящие ТЕМ-волны, свойственные, как указывалось (§ 61, п. 1), системе с идеальным ($\sigma \rightarrow \infty$) направляющим проводником. Поскольку для этих волн $\dot{\Gamma} = \dot{k}$, то можно прямо воспользоваться найденными ранее результатами. Так, при отсутствии магнитных потерь ($\dot{\mu} = \mu$) на основании (33.15) пишем

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' = k_{e'} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + \text{tg}^2 \Delta} + 1)} - i \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + \text{tg}^2 \Delta} - 1)} \right], \quad (63.6)$$

где $k_{e'} = \omega \sqrt{\epsilon' \mu}$ (напомним, что ϵ' есть обычная диэлектрическая проницаемость среды ϵ только при $\alpha = 0$, § 29, п. 2). Соответственно, при весьма малых электрических потерях ($\text{tg}^2 \Delta \ll 1$), свойственных диэлектрику, верны формулы (33.16а), т. е.

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' \approx k_{e'} \left(1 - i \frac{1}{2} \text{tg} \Delta \right). \quad (63.6a)$$

Возьмем далее быстрые E - и H -волны в системах, экранированных идеальным проводником (§ 62, п. 2). Постоянная распространения $\dot{\Gamma}$ выражается в этом случае формулой (62.16), которая после возведения в квадрат и разделения вещественной и мнимой частей дает

$$\left. \begin{aligned} (\Gamma')^2 - (\Gamma'')^2 &= (k')^2 - (k'')^2 - \chi^2 = \omega^2 \epsilon' \mu - \chi^2, \\ 2\Gamma' \Gamma'' &= 2k' k'' = \omega^2 \epsilon' \mu \text{tg} \Delta \end{aligned} \right\}$$

(по-прежнему полагаем $\dot{\mu} = \mu$). Находя отсюда Γ' и Γ'' (ср. § 33, п. 3), представим постоянную распространения в форме

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' = k_{e'} \left\{ \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\dot{\Gamma}_{e'}}{k_{e'}} \right)^4 + \text{tg}^2 \Delta} + \left(\frac{\dot{\Gamma}_{e'}}{k_{e'}} \right)^2} \right]} - i \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\dot{\Gamma}_{e'}}{k_{e'}} \right)^4 + \text{tg}^2 \Delta} - \left(\frac{\dot{\Gamma}_{e'}}{k_{e'}} \right)^2} \right]} \right\}, \quad (63.7)$$

где $k_{e'} = \omega \sqrt{\epsilon' \mu}$ и $\dot{\Gamma}_{e'} = k_{e'} \sqrt{1 - (\chi/k_{e'})^2} = k_{e'} \sqrt{1 - (f_{\text{кр}}/f)^2}$.

Полученный результат потребует некоторого внимания. Отметим, во-первых, что при определенных условиях формулу (63.7) можно существенно упростить:

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' \approx \left\{ \begin{aligned} &\Gamma_{e'} \left(1 - i \frac{k_{e'}^2}{2\Gamma_{e'}^2} \text{tg} \Delta \right), f > f_{\text{кр}}, \\ &|\dot{\Gamma}_{e'}| \left(\frac{k_{e'}^2}{2|\dot{\Gamma}_{e'}|^2} \text{tg} \Delta - i \right), f < f_{\text{кр}} \end{aligned} \right\} \text{tg} \Delta \ll \frac{|\dot{\Gamma}_{e'}|^2}{k_{e'}^2}. \quad (63.7a)$$

Поскольку обычно речь идет о распространении волн в диэлектрической среде ($\operatorname{tg} \Delta \ll 1$), то представление (63.7а) оказывается возможным везде, за исключением «области отсечки», т. е. сравнительно малой окрестности точки $f = f_{\text{кр}}$ ($\dot{\Gamma}_{\varepsilon'} = 0$). В самой же точке $f = f_{\text{кр}}$

$$\dot{\Gamma} = \Gamma' - i\Gamma'' = (1 - i) k_{\varepsilon'} \sqrt{\operatorname{tg} \Delta / 2} \quad (f = f_{\text{кр}}). \quad (63.7б)$$

Характер частотной зависимости $\dot{\Gamma}$ иллюстрируется построенными по формуле (63.7) кривыми (рис. 63.1). При $\varepsilon' = \varepsilon$ ($k_{\varepsilon'} = k$) вычислены функции частоты Γ'/k и Γ''/k для случая $\operatorname{tg} \Delta = \sigma/\omega\varepsilon = 0,2f_{\text{кр}}/f$ (т. е. таких σ и ε , что $\operatorname{tg} \Delta = 0,1$, когда $f = 2f_{\text{кр}}$). Пунктиром для сравнения нанесены кривые Γ'/k и Γ''/k при отсутствии поглощения ($\operatorname{tg} \Delta = 0$). В результате действия поглощающей среды

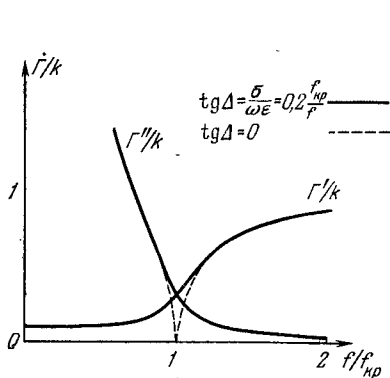


Рис. 63.1.

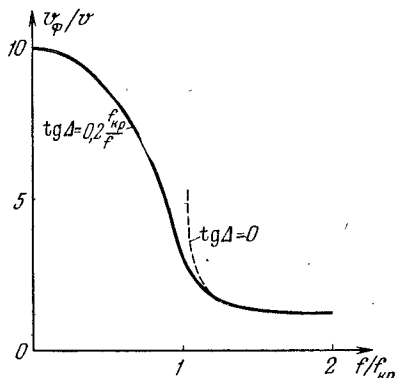


Рис. 63.2.

постоянная распространения $\dot{\Gamma}$ комплексна при всех частотах, причем $\Gamma' \neq 0$. Следовательно, в отличие от случая направляющей системы без поглощения (§ 62, п. 3), теперь распространяющаяся волна сохраняется и при $f < f_{\text{кр}}$. Правда, в этой области с уменьшением частоты происходит резкое увеличение затухания и фазовой скорости (уменьшается $\Gamma' = \omega/v_{\phi}$). Но v_{ϕ} уже не обращается в бесконечность (рис. 63.2), а стремится при $f \rightarrow 0$ к пределу

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} v_{\phi} = \frac{2 |\dot{\Gamma}_{\varepsilon'}| \omega}{k_{\varepsilon'}^2 \operatorname{tg} \Delta} = \frac{2\chi\omega}{k_{\varepsilon'}^2 \operatorname{tg} \Delta}, \quad (63.8)$$

и если $\varepsilon' = \varepsilon$, то

$$\lim_{f \rightarrow 0} v_{\phi} = 4\pi \frac{f_{\text{кр}} \varepsilon}{\sigma} v \quad (63.8а)$$

(при $\operatorname{tg} \Delta = 0,2f_{\text{кр}}/f$ получаем отсюда $v_{\phi} = 10v$).

В качестве упражнения предлагается выяснить на данном численном примере область применимости приближенных формул (63.7а).

3. Энергетический метод определения затухания. При исследовании направляемых волн часто не удается найти точное решение электродинамической задачи при наличии поглощения. Прямое вычисление затухания волны, продемонстрированное выше в п. 2, при этом невозможно. Однако если поглощение невелико, оказывается, затухание можно определить, исходя из решения задачи, полученного при отсутствии поглощения. Для этой цели может быть использован так называемый *энергетический метод*, излагаемый ниже.

Начнем с вывода некоторых точных соотношений.

Поскольку при распространении волны вдоль оси z комплексные амплитуды векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} изменяются по закону $e^{-i\Gamma z}$, то передаваемая за единицу времени энергия — мощность волны — падает, согласно (63.1), как $e^{-i\Gamma z}$ ($e^{-i\Gamma z}$)^{*} = $e^{-2\Gamma''z}$. Поэтому, если в некотором сечении z передаваемая мощность есть $\bar{P}(z) = \bar{P}$, то можно написать

$$\bar{P} = \bar{P}_0 e^{-2\Gamma''z}, \quad (63.9)$$

где $\bar{P}_0 = \bar{P}(0)$ — мощность волны в сечении $z = 0$.

Убывание мощности волны при прохождении весьма малого участка направляющей системы Δz вычислим как

$$\Delta \bar{P} \approx - \frac{d\bar{P}}{dz} \Delta z = 2\Gamma'' \bar{P} \Delta z. \quad (63.10)$$

Разумеется, величина $\Delta \bar{P}$ должна быть равна поглощаемой на участке Δz за единицу времени энергии — мощности потерь $\Delta \bar{P}_n$; последнюю можно выразить в виде

$$\Delta \bar{P}_n = \frac{d\bar{P}_n}{dz} \Delta z = \bar{p}_n \Delta z, \quad (63.11)$$

где $\bar{p}_n = d\bar{P}_n/dz$ — мощность потерь, отнесенная к единице длины направляющей системы. При $\Delta z \rightarrow 0$ равенства (63.10), (63.11) становятся точными; из уравнения баланса энергии $\Delta \bar{P} = \Delta \bar{P}_n$ находим

$$\Gamma'' = \bar{p}_n / 2\bar{P}. \quad (63.12)$$

Это и есть «энергетическое выражение» коэффициента затухания.

Если при нахождении мощности потерь величину \bar{p}_n по каким-то соображениям удобно разбить на части: $\bar{p}_n = \bar{p}_{n1} + \bar{p}_{n2} + \dots$, то

$$\Gamma'' = \frac{\bar{p}_{n1}}{2\bar{P}} + \frac{\bar{p}_{n2}}{2\bar{P}} + \dots,$$

т. е. коэффициент Γ'' представляется в виде суммы «частичных» коэффициентов

$$\Gamma'' = \Gamma''_1 + \Gamma''_2 + \dots, \quad (63.13)$$

каждый из которых определяется предыдущим выражением, т. е. $\Gamma''_1 = \bar{p}_{n1}/2\bar{P}$ и т. д.

Чтобы определить $\bar{\rho}_n$ в числителе (63.12), сосредоточим внимание на области существования поля ΔV , соответствующей участку Δz направляющей системы. Очевидно, $\Delta V = S_{\perp} \Delta z$ и, согласно (30.14),

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_n &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{\omega}{2} \int_{\Delta V} (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) dv = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\omega}{2} \Delta z \int_{S_{\perp}} (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) ds \right], \end{aligned}$$

т. е.

$$\bar{\rho}_n = \frac{\omega}{2} \int_{S_{\perp}} (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) ds. \quad (63.14)$$

Поэтому на основании (63.12) с учетом (63.1)

$$\Gamma^* = \frac{\omega \int_{S_{\perp}} (\epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \mu'' \dot{H}_m \dot{H}_m^*) ds}{2 \operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds}. \quad (63.15)$$

Проницаемости $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$, вообще говоря, являются функциями координат в поперечной плоскости. Поперечное сечение S_{\perp} может распадаться на несколько областей с постоянными проницаемостями («кусочно-постоянные» $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$).

Часто направляющая система состоит из металлических и диэлектрических элементов. Например, полый волновод представляет собой трубу с диэлектрическим заполнением, двухпроводная линия состоит из двух металлических стержней с промежуточной диэлектрической средой и т. д. Вычисляя в таких случаях коэффициент затухания по формуле (63.15), надо производить интегрирование по поперечному сечению диэлектрика и металла. Известно, однако (§ 40), что при скин-эффекте сколько-нибудь заметное поле имеется лишь вблизи самой поверхности проводника. При сильном скин-эффекте внутреннее состояние с большой точностью описывается условиями на поверхности, а именно граничными условиями Леонтовича. Это позволяет находить поглощение в металле путем вычисления интеграла (40.10), выражающего уходящий внутрь него поток энергии.

Чтобы найти указанным путем потери в металле направляющей системы, отнесенные к единице ее длины, выделим на поверхности металлической части (рис. 63.3) пояс ΔS шириной Δz и запишем:

$$\bar{\rho}_{\text{пм}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int_{\Delta S} H_{m\tau}^2 ds = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\Delta z}{2\sigma\Delta^0} \int_{L_{\perp}} H_{m\tau}^2 dl \right],$$

поскольку $\Delta S = L_{\perp} \Delta z$, где L_{\perp} — контур (или совокупность контуров) поперечного сечения границы металла с диэлектриком.

Величина $\bar{\rho}_{\text{пм}}$, следовательно, находится как контурный интеграл

$$\rho_{\text{пм}} = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} \int_{L_{\perp}} H_{m\tau}^2 dl, \quad (63.16)$$

а частичный коэффициент $\Gamma''_{\text{м}}$, учитывающий только потери в металле согласно (63.12), а также (63.1), есть

$$\Gamma''_{\text{м}} = \frac{\int_{L_{\perp}} H_{m\tau}^2 dl}{2\sigma\Delta^0 \operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds}. \quad (63.17)$$

Формулу (63.15) обычно применяют не для вычисления полного коэффициента затухания Γ'' , а только для нахождения частичного коэффициента $\Gamma''_{\text{д}}$, учитывающего потери в диэлектрике. При этом

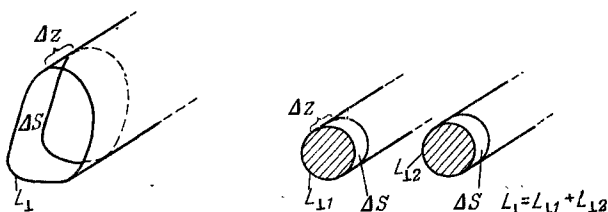


Рис. 63.3.

вместо S_{\perp} берется поперечное сечение диэлектрической области $S_{\perp\text{д}}$ (совокупности областей). Если, как это чаще бывает, магнитных потерь нет ($\mu'' = 0$), то из (63.15) следует:

$$\Gamma''_{\text{д}} = \frac{\omega \int_{S_{\perp\text{д}}} \epsilon'' \dot{E}_m \dot{E}_m^* ds}{2 \operatorname{Re} \int_{S_{\perp}} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds}. \quad (63.18)$$

Полный коэффициент затухания находится в соответствии с (63.13) как

$$\Gamma'' = \Gamma''_{\text{м}} + \Gamma''_{\text{д}}, \quad (63.19)$$

где $\Gamma''_{\text{м}}$ и $\Gamma''_{\text{д}}$ определяются формулами (63.17) и (63.18).

4. Применение энергетического метода. Уже говорилось, что энергетический метод приходит на помощь, когда нет аналитического выражения $\dot{\Gamma}$ и нет возможности вычислить Γ'' как $-\operatorname{Im} \dot{\Gamma}$, но величины \bar{P} и $\bar{\rho}_{\text{п}}$ могут быть приближенно найдены. Обычно при этом используются выражения полей, полученные в результате анализа направляющей системы без поглощения.

Сначала произведем действия, которые можно рассматривать как проверку такого подхода, а именно вычислим в указанном приближении по формуле (63.18) $\Gamma''_{\text{д}}$ для быстрых E - и H -волн, а также

волн $ТЕМ$ (диэлектрик однороден). Поскольку при идеальности проводника системы ($\sigma \rightarrow \infty$) имеется точное выражение $\Gamma'' = \Gamma_d''$ (п. 2), то сделаем затем сопоставление результатов.

После преобразования знаменателя (63.18) при помощи (63.2) имеем

$$\Gamma_d'' = \frac{\omega \epsilon'' W^{(E, H)}}{2} \left\{ 1 + \frac{\int_{S_{\perp}} |\dot{E}_{mz}|^2 ds}{\int_{S_{\perp}} |\dot{E}_{mt}|^2 ds} \right\}$$

(для распространяющейся волны при отсутствии поглощения $\dot{W}^{(E, H)} = W^{(E, H)}$ и $\dot{\Gamma} = \Gamma$). В случае H -волн ($\dot{E}_{mz} = 0$) отсюда сразу следует:

$$\Gamma_d'' = \frac{\omega \epsilon'' W^H}{2} = \frac{\omega^2 \epsilon'' \mu}{2\Gamma} = \frac{1}{2} \frac{k^2 \operatorname{tg} \Delta}{\Gamma}, \quad f > f_{кр}. \quad (63.20a)$$

Взяв E -волны, выразим \dot{E}_{mz} и \dot{E}_{mt} на основании (61.11) и учтем (62.9). Это дает

$$\Gamma_d'' = \frac{\omega \epsilon'' W^E}{2} \left(\frac{k}{\Gamma} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{k^2 \operatorname{tg} \Delta}{\Gamma}, \quad f > f_{кр}. \quad (63.20б)$$

Наконец, для $ТЕМ$ -волн, положив в (63.20a), (63.20б) $\Gamma = k$, получаем

$$\Gamma_d'' = \frac{1}{2} k \operatorname{tg} \Delta. \quad (63.20в)$$

Мы видим, что выражения (63.20a)—(63.20в) при $\epsilon' = \epsilon$ дают те же значения Γ_d'' , что и приближенные формулы (63.7a), (63.6a). В области отсечки ($f \approx f_{кр}$) формулы (63.7a), как известно, неприменимы. Тот факт, что таким же свойством обладают и результаты энергетического метода (63.20a), (63.20б), не должен удивлять. При подстановке в (63.18) функций \dot{E}_m и \dot{H}_m , найденных для непоглощающей системы, мы получим в знаменателе нуль для всей области частот $f \leq f_{кр}$ (которая выше была исключена), что, конечно, не соответствует действительности, поскольку при поглощении поток энергии никогда полностью не исчезает (п. 2). Поэтому вычисление \bar{P} при $f \approx f_{кр}$ не может быть точным и в области $f > f_{кр}$.

Энергетический метод является основным средством учета поглощения в направляющих проводниках, так как обычно строгое решение задачи отсутствует, когда они неидеальны. Конечно, как и выше, результаты получаются для области частот $f > f_{кр}$ и при $f \approx f_{кр}$ становятся неточными. Общая формула для Γ_m'' , следующая из (63.17) при подстановке функций \dot{E}_m и \dot{H}_m , найденных для непоглощающей системы, имеет вид

$$\Gamma_m'' = \frac{\int_{L_{\perp}} H_m^2 dl}{2\sigma \Delta^0 W^{(E, H)} \int_{S_{\perp}} H_{mt}^2 ds} = \frac{\mathcal{R}_S \int_{L_{\perp}} H_m^2 dl}{2W^{(E, H)} \int_{S_{\perp}} H_{mt}^2 ds}, \quad (63.21)$$

где использовано обозначение (40.16a); в рассмотрение входят волны E , H и $ТЕМ$.

II. СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

На основе изложенной выше общей теории теперь будет рассмотрен ряд распространенных направляющих систем. Мы исследуем свободные, т. е. в сущности *возможные* электромагнитные процессы в этих системах, не ставя пока вопроса об условиях возбуждения волн.

Определяя и анализируя электромагнитные поля, будем сначала считать металлические элементы направляющих систем идеальными проводниками, что ввиду сильного скин-эффекта в большинстве случаев вполне допустимо, пока не ставится целью найти затухание волны, вызванное поглощением в металле. Эта последняя задача будет решаться энергетическим методом.

§ 64. Прямоугольный волновод

1. Постановка задачи. E -волны. Из полых металлических волноводов самым распространенным является волновод прямоугольного поперечного сечения; он схематически изображен на рис. 64.1. Полагая оболочку трубы идеально проводящей, мы приходим к системе, довольно просто анализируемой. Согласно § 62, п. 1 в ней не может быть волн $ТЕМ$, и следует ожидать, что свободные поля имеют характер E - и H -волн, которые уже рассматривались в общем виде в § 62, пп. 2, 3. Теперь представляется возможность подробно рассмотреть важный пример таких волн.

Поставив целью исследовать E -волны идеализированного прямоугольного волновода, мы должны решить краевую задачу (62.8), которая в данном случае формулируется в виде (рис. 64.1)

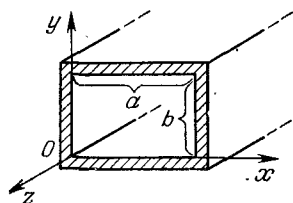


Рис. 64.1.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial y^2} + \chi^2 \dot{\mathcal{E}}_z &= 0, & \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < a, \\ 0 < y < b; \end{array} \right. \\ \dot{\mathcal{E}}_z &= 0 \text{ при } \left\{ \begin{array}{l} x = 0, x = a, \\ y = 0, y = b. \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (64.1)$$

Эта первая краевая задача для двумерного уравнения Гельмгольца решается в Приложении 7. Действительно, формулировки (64.1) и (П7.10) полностью совпадают. Воспользовавшись готовыми результатами в виде формулы (П7.11) и далее, напишем

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \dot{\mathcal{E}}_z^{mn} = \dot{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (64.2)$$

и

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (64.3)$$

(\dot{E}_0 — неопределенный амплитудный коэффициент).

Напомним, что \dot{E}_z^{mn} — это *собственные функции* задачи (64.1), а χ_{mn}^2 — соответствующие им *собственные значения*, т. е. значения параметра χ^2 в (64.1), при которых реализуются решения \dot{E}_z^{mn} . Они составляют бесконечное множество, причем каждая из функций \dot{E}_z^{mn} характеризует распределение в поперечном сечении волновода продольной компоненты вектора E той или иной свободной волны, которую будем называть *волной типа* E_{mn} ; будет также употребляться выражение *поле типа* E_{mn} . На рис. 64.2 показаны распределения E_z для полей типа E_{11} , E_{21} , E_{31} и E_{32} ; пунктиром проведены «линии узлов», на которых $E_z = 0$.

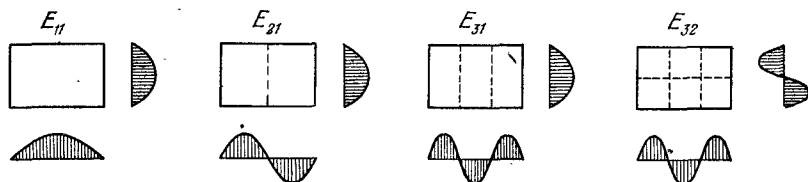


Рис. 64.2.

Зная функцию \dot{E}_z^{mn} , по формулам (61.7), (61.1) можно определить комплексные амплитуды всех компонент поля типа E_{mn} . В результате получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{E}_{mz} &= \dot{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\
 \dot{E}_{mx} &= -i\dot{E}_0 \frac{\dot{\Gamma}\chi_x}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\
 \dot{E}_{my} &= -i\dot{E}_0 \frac{\dot{\Gamma}\chi_y}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\
 \dot{H}_{mx} &= i\dot{E}_0 \frac{\omega\dot{\epsilon}\chi_y}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\
 \dot{H}_{my} &= -i\dot{E}_0 \frac{\omega\dot{\epsilon}\chi_x}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\
 \chi &= \chi_{mn}, \\
 \chi_x &= \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_y = \frac{n\pi}{b},
 \end{aligned} \right\} \quad (64.4)$$

где на основании (61.3) или (62.16) с учетом (64.3)

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\dot{k}^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (64.5)$$

есть комплексное продольное волновое число (постоянная распространения) данной E -волны. При этом следует оговориться, что поле, по существу, теряет волновой характер, если $\dot{\Gamma}$ — чисто мни-

мая величина (62, п. 3), что при комплексном k невозможно (63, п. 1).
 Запишем также выражение волнового сопротивления $\dot{W}^E = \dot{W}_{mn}^E$ (62.15):

$$\dot{W}^E = \dot{W}_{mn}^E = \frac{\dot{\Gamma}_{mn}}{\omega \dot{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]}. \quad (64.6)$$

На рис. 64.3 показано строение различных полей E_{mn} прямоугольного волновода для некоторого фиксированного момента времени («мгновенный снимок» волны, ср. стр. 164). Ввиду отсутствия

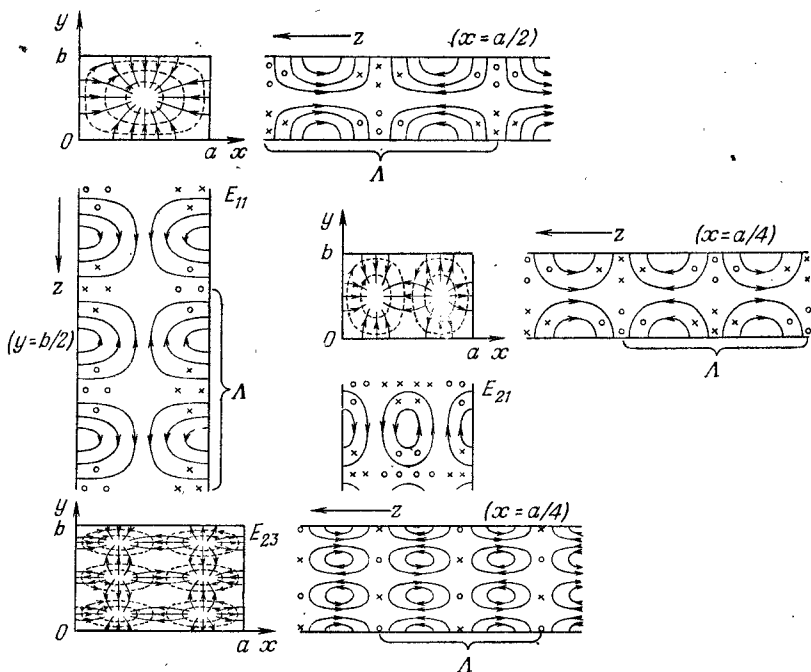


Рис. 64.3.

продольной компоненты вектора H магнитные силовые линии лежат в плоскости поперечного сечения. Поле E_{11} ($m = 1, n = 1$) является простейшим; его структура включает одно семейство замкнутых силовых линий, расположенных симметрично относительно средней точки сечения, где находится максимум продольной составляющей вектора E . По рис. 64.3 легко найти соответствие между строением полей E_{mn} и значениями индексов m и n : последние указывают числа полупериодов структуры по поперечным осям x и y на отрезках a и b . При отсутствии поглощения поле периодически также в продольном направлении z , и периодом является длина волны Λ .

2. H-волны. Для изучения H-волн надо сначала решить граничную задачу (62.12), формулировка которой для прямоугольного

волновода (рис. 64.1) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y^2} + \chi^2 \dot{\mathcal{H}}_z = 0, & \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < x < a, \\ 0 < y < b; \end{array} \right. \\ \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ x = a; \end{array} \right. & \quad \frac{\partial \dot{\mathcal{H}}_z}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0, \\ y = b, \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (64.7)$$

что совпадает с уже рассмотренной задачей (П7.12). Взяв готовый результат (П7.13), запишем собственные функции

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \dot{\mathcal{H}}_z^{mn} = \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (64.8)$$

и соответствующие им собственные значения

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} m = (0), 1, 2, \dots, \\ n = (0), 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (64.9)$$

задачи (64.7); индексы m и n могут быть равны нулю порознь.

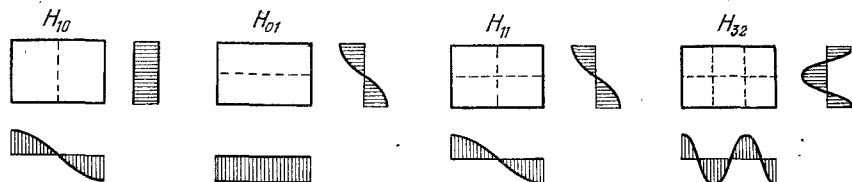


Рис. 64.4.

Каждая из бесконечного множества функций $\dot{\mathcal{H}}_z^{mn}$ характеризует распределение в поперечном сечении волновода продольной компоненты вектора \mathbf{H} свободного поля типа H_{mn} . На рис. 64.4 показаны распределения H_z для полей типа H_{10} , H_{01} , H_{11} и H_{32} .

Выпишем, как и в случае E -волн, комплексные амплитуды всех компонент векторов поля типа H_{mn} , получаемые по формулам (61.7) и (61.1) при подстановке $\dot{\mathcal{H}}_z$ (64.8):

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_{mx} &= i\dot{H}_0 \frac{\dot{\Gamma}\chi_x}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_{my} &= i\dot{H}_0 \frac{\dot{\Gamma}\chi_y}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{E}_{mx} &= i\dot{H}_0 \frac{\omega\dot{\mu}\chi_y}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{E}_{my} &= -i\dot{H}_0 \frac{\omega\dot{\mu}\chi_x}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \chi &= \chi_{mn}, \\ \chi_x &= \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_y = \frac{n\pi}{b}. \end{aligned} \right\} \quad (64.10)$$

Здесь, как и ранее,

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\dot{k} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (64.11)$$

т. е. постоянные распространения E - и H -волн при одинаковых индексах m и n совпадают. Каждой волне H_{mn} , за исключением волн H_{0n} и H_{m0} соответствует волна E_{mn} , распространяющаяся с такой же фазовой скоростью. Здесь же запишем выражение волнового сопротивления $\dot{W}^H = \dot{W}_{mn}^H$ (62.15)

$$\dot{W}^H = \dot{W}_{mn}^H = \frac{\omega \dot{\mu}}{\dot{\Gamma}_{mn}} = \frac{\sqrt{\dot{\mu}/\dot{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\dot{k}^2} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \right]}}. \quad (64.12)$$

Строение различных полей H_{mn} прямоугольного волновода представлено на рис. 64.5 (ср. рис. 64.3). Простейшими являются поля

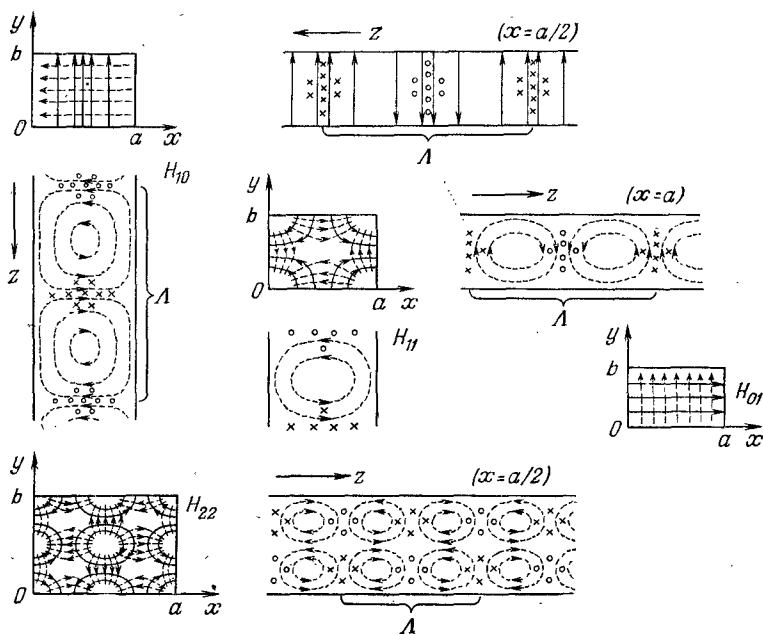


Рис. 64.5.

H_{10} и H_{01} . Магнитные силовые линии поля H_{10} образуют замкнутые контуры, лежащие в плоскостях $y = \text{const}$, а электрические линии параллельны оси y ; при этом максимум электрического поля сдвинут вдоль оси z от центра семейства магнитных линий на четверть пространственного периода, т. е. на $\Lambda/4$. Заметим, что при этом в центре лежит максимум тока смещения (читателю рекомендуется это проверить). Как и в случае E -полей, индексы m и n указывают числа пространственных полупериодов на отрезках a и b . Когда

один из них равен нулю, поле вдоль соответствующего направления однородно («О полупериодов»).

3. **Волновод без поглощения. Основная волна.** Исследуем характер распространения волн в прямоугольном волноводе с идеально проводящей оболочкой при отсутствии поглощения, взяв в (64.5), (64.11) $k = k$. При этом удобна форма записи из § 62, п. 3. Конкретизируя выражения (62.18)—(62.20) и др., мы должны лишь положить в них на основании (62.17) и (64.3), (64.9)

$$f_{кр} = f_{кр}^{mn} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр} = \lambda_{кр}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \quad (64.13)$$

То или иное поле типа E_{mn} или H_{mn} будет иметь характер распространяющейся волны, когда постоянная распространения $\dot{\Gamma}_{mn}$, определяемая формулой (62.18), вещественна, а это будет при $f > f_{кр}$ ($\lambda < \lambda_{кр}$). Если же для всех типов полей $f < f_{кр}$, то передача энергии по волноводу невозможна. Пусть теперь частота f постепенно возрастает; когда она превысит наименьшую из всех критических частот $f_{кр}^{mn}$, в волноводе сможет распространяться одна волна. Эта волна имеет наибольшее техническое значение и обычно называется *основной волной* (имеется в виду, что реальный прямоугольный волновод весьма близок к рассматриваемому идеализированному). Будем считать, что $a > b$, как это соответствует рис. 64.1. Тогда, согласно (64.13), наименьшая критическая частота есть

$$\min f_{кр}^{mn} = f_{кр}^{10} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (64.14)$$

Это критическая частота поля H_{10} . Волна H_{10} и является, таким образом, основной волной прямоугольного волновода.

Продолжая повышать частоту f , можно прийти к выполнению неравенства $f > f_{кр}$ для двух, трех и более типов волн. Очевидно, для всякого конкретного волновода без поглощения при фиксированной частоте f лишь конечное число полей E_{mn} и H_{mn} может иметь вид распространяющихся волн.

Рассмотрим основную волну H_{10} подробнее. Из (64.13) получается легко запоминающееся соотношение

$$\lambda_{кр}^{10} = 2a. \quad (64.14a)$$

Критическая длина волны для поля H_{10} (равная длине TEM -волны при $f = f_{кр}$ в среде такого же вида, как и внутри волновода) оказывается вдвое больше наибольшего поперечного размера волновода.

Выпишем комплексные амплитуды компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} волны H_{10} , положив в (64.10) $m = 1$ и $n = 0$:

$$\dot{E}_{my} = -i\dot{H}_0 \frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \quad (64.15)$$

$$\dot{H}_{mz} = \dot{H}_0 \cos \frac{\pi x}{a} e^{-i\dot{\Gamma}z}, \quad \dot{H}_{mx} = i\dot{H}_0 \frac{\lambda_{кр}}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\dot{\Gamma}z},$$

где $\lambda/\lambda_{кр} = \lambda/2a$. Величины $\dot{\Gamma}$, v_{ϕ} , $v_{гр}$, Λ , W^H вычисляются по формулам (62.18) — (62.20), (62.23) и (64.12). Так как критическая длина волны $\lambda_{кр}^H = 2a$ не зависит от поперечного размера b , все эти величины сохраняют свои значения для всех «одинаково широких» волноводов ($a = \text{const}$) независимо от «высоты» b .

С уменьшением частоты (ростом λ) растет пространственный период поля Λ (рис. 64.6, а, б), пока не становится бесконечным при $\lambda = 2a$ (рис. 64.6, в); поперечная компонента H_x при этом утрачивается, как видно из (64.15). Затем, когда $\lambda > 2a$, то $H_x \neq 0$, но все магнитное поле по отношению к электрическому сдвинуто на 90°

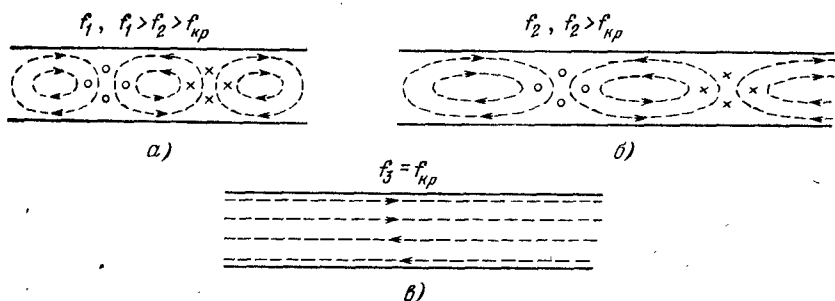


Рис. 64.6.

по фазе, так что передачи энергии нет. При $\lambda/a \rightarrow 0$ (неограниченное уменьшение λ или «расширение» волновода), как видно из (64.15),

$$\frac{\dot{H}_{mz}}{\dot{H}_{mx}} = -i \frac{\lambda}{2a} \frac{\text{ctg} \frac{\pi x}{a}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}} \rightarrow 0,$$

т. е. основная волна H_{10} переходит в волну чисто поперечную, причем $W^H \rightarrow \sqrt{\mu/\epsilon}$ и $\Lambda \rightarrow \lambda$.

4. Передача энергии и затухание волн. Для вычисления передаваемой мощности используются формулы из § 63, п. 1. Взяв опять основную волну H_{10} при отсутствии поглощения, будем исходить из электрического поля; это удобнее, поскольку оно имеет только одну компоненту E_y (64.15). Величина $\frac{\dot{H}_0 \omega \mu}{\chi} = H_0 \frac{2a}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = E_0$ есть амплитуда вектора \mathbf{E} в пучности поля ($x = a/2$). Ниже устанавливается связь E_0 с мощностью распространяющейся волны H_{10} . На основании (63.2)

$$\bar{P} = \frac{E_0^2}{2W^H} \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \frac{abE_0^2}{4W^H}, \quad (64.16)$$

где $W^H = W/\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$ согласно (64.12); $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$.

По мере приближения к критической частоте ($\lambda \rightarrow 2a$) напряженность поля при фиксированной мощности волны неограниченно возрастает. Это резонансное явление, конечно, сохраняется и при поглощении, но E_0 уже не стремится к бесконечности, в чем легко убедиться, взяв k вместо k и соответственно заменив W^H в (64.16) через $\text{Re} \dot{W}^{H*}$.

Рассмотрим далее затухание волн.

Затухание в результате поглощения энергии в заполняющем волновод диэлектрике вычисляется на основании формул (63.7), (63.7а). Первая из них в случае идеально проводящей оболочки является точной. Напомним, что для области частот $f > f_{кр}$ существует сходный с (63.7а) результат энергетического метода (63.20а).

В большинстве случаев, однако, волновод заполнен воздухом, поглощение в котором пренебрежимо мало, так что затухание фактически вызывается лишь действием металла ($\Gamma'' = \Gamma_M''$).

Вычислим Γ_M'' для основной волны H_{10} по формуле (63.21). Согласно (64.15) интеграл в числителе (63.21) имеет вид

$$\int_{L_{\perp}} H_m^2 dl = 2 \left[\int_0^b H_{mz}^2 |_{x=0} dy + \int_0^a (H_{mz}^2 + H_{mx}^2)_{y=0} dx \right],$$

т. е.

$$\int_{L_{\perp}} H_m^2 dl = 2H_0^2 \left\{ b + \int_0^a \left[\cos^2 \frac{\pi x}{a} + \left(\frac{4a^2}{\lambda^2} - 1 \right) \sin^2 \frac{\pi x}{a} \right] dx \right\} = 2H_0^2 \left(b + \frac{2a^3}{\lambda^2} \right).$$

Интеграл в знаменателе (63.21) в сущности уже вычислен при нахождении передаваемой мощности:

$$W^H \int_{S_{\perp}} H_{mt}^2 ds = \frac{1}{W^H} \int_{S_{\perp}} E_{mt}^2 ds = H_0^2 \frac{ab}{2W^H} \left(\frac{\omega \mu}{\chi} \right)^2.$$

Подстановка полученных результатов в (63.21) приводит к следующему выражению:

$$\Gamma_M'' = \frac{\mathcal{R}_S \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]}{Wb \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2}} \quad \left(W = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \mathcal{R}_S = \frac{1}{\Delta^0 \sigma} \right). \quad (64.17)$$

Зависимость Γ_M'' от частоты, описываемая этой формулой, представлена графически на рис. 64.7. Согласно (64.17) $\Gamma_M'' \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 2a$; однако в области отсечки ($\lambda \approx 2a$) выражение Γ_M'' неточно (§ 63, п. 4), и в действительности рост затухания не является неограниченным. С увеличением частоты затухание сначала падает, а потом медленно возрастает в результате уменьшения глубины проник-

новения $\Delta^0 = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$ (§ 40, п. 1). Зависимость $\Gamma_M''(f)$ такого вида типична для различных волн полых волноводов; с отклонением от нее мы встретимся позднее (§ 65) в единственном случае.

5. Заключительные замечания. Картина электромагнитных процессов в прямоугольном волноводе еще нуждается в ряде дополнений.

Во-первых, надо принять во внимание, что в металлической оболочке волновода распределен ток. Полагая ее идеально проводящей, констатируем, что на границе внутренней области имеются поверхностный ток и заряд, плотности которых равны $\eta = [v_0, H]$ и $\xi = \epsilon E$ соответственно (§ 8, п. 1). Линии вектора η ортогональны магнитным силовым линиям на поверхности волновода. Для основной волны H_{10} распределение тока и заряда представлено на рис. 64.8. Волнам типа E

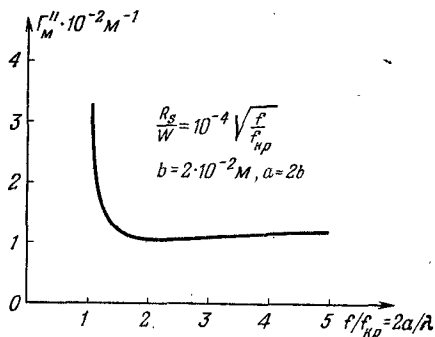


Рис. 64.7.

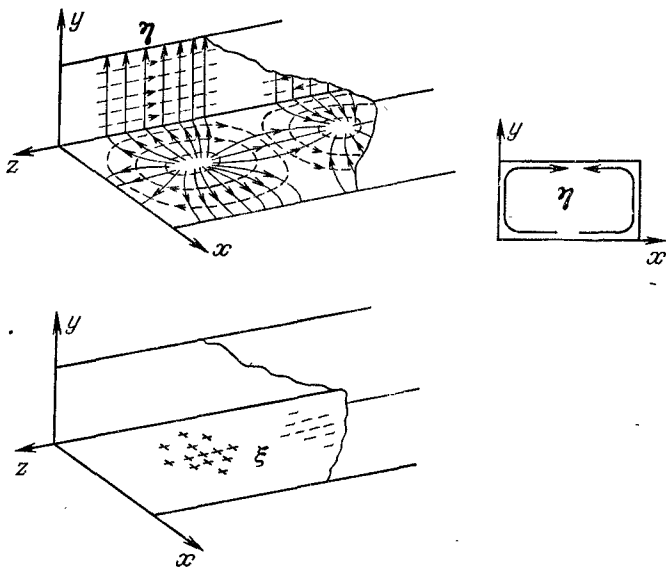


Рис. 64.8.

сопутствуют только продольные токи ($\eta = z_0\eta$), поскольку вектор H поперечен.

Во-вторых, отметим, что хотя строение полей в реальном металлическом волноводе весьма близко к идеализированному представ-

лению, полученному выше в пп. 1—3, сам характер различий нельзя не учитывать. Возьмем, например, опять основную волну H_{10} . Поскольку соответствующий ей ток в оболочке волновода имеет продольную компоненту, то в силу закона Ома ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$) существует и продольная составляющая вектора \mathbf{E} . Правда, она весьма мала в сравнении с поперечной, но, с точки зрения строгой классификации, следует уже говорить о волне не H -, а EH -типа.

Выше (п. 2) отмечалось, что некоторые волны прямоугольного волновода с идеально проводящей оболочкой имеют одинаковые постоянные распространения; их называют *вырожденными*¹⁾. Таковы все E - и H -волны с одинаковыми соответственными индексами m и n (например, волны E_{11} и H_{11} , E_{23} и H_{23} и т. д.). Кроме того, вырождение существует при определенных пространственных соотношениях; так, в волноводе квадратного сечения ($a = b$) вырождены волны E_{mn} и E_{nm} , H_{mn} и H_{nm} . Волны, распространяющиеся в реальных волноводах, характерны тем, что они могут быть близки не к изученным вырожденным волнам, скажем, E_{11} и H_{11} , а к их вполне определенным комбинациям. Имеются волны, которые можно назвать EH_{11} и HE_{11} по тому признаку, что они близки к комбинациям волн E_{11} и H_{11} , причем $EH_{11} \rightarrow H_{11}$ и $HE_{11} \rightarrow E_{11}$ при $\sigma \rightarrow \infty$, т. е. при переходе к идеализированному волноводу такие волны (вообще уже невырожденные) становятся известными нам волнами типа E и H . Говорят, что существование волн EH и HE есть следствие энергетической связи E - и H -волн в указанных условиях.

В заключение вернемся к вопросу о том, чем различаются условия распространения основной волны H_{10} в волноводах одинаковой ширины a при разных b . Ранее мы видели, что формулы (62.18)—(62.20), (62.23), (62.12), в которые при этом b не входит, таких различий не обнаруживают. Но от b зависят передаваемая мощность \bar{P} и затухание Γ_m^L . При равных \bar{P} напряженность поля больше в волноводе меньшего поперечного сечения.

Затухание же, согласно (64.17), обратно пропорционально высоте поперечного сечения b .

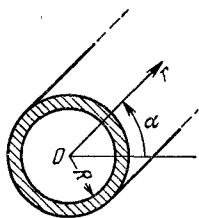


Рис. 65.1.

§ 65. Круглый волновод

1. Постановка задачи. E -волны. Полый металлический волновод круглого поперечного сечения (рис. 65.1), как и прямоугольный волновод, часто используется в технике. Мы рассмотрим его в том же плане, полагая сначала оболочку идеально проводящей.

¹⁾ Если в некоторой задаче разным собственным функциям соответствуют одинаковые собственные значения, это называется *вырождением*. В данном случае имеется в виду вырождение в задачах (64.1) и (64.7).

Исследуя E -волны, поставим граничную задачу (62.8) в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{\mathcal{E}}_z}{\partial \alpha^2} + \chi^2 \dot{\mathcal{E}}_z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < R, \\ 0 \leq \alpha < 2\pi, \end{array} \right. \quad (65.1)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_z = 0 \text{ при } r = R,$$

что совпадает с (П7.18). Поэтому, согласно (П7.19),

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \dot{\mathcal{E}}_z^{nm} = J_n(\chi_{nm} r) \left\{ \begin{array}{l} \dot{C} \cos n\alpha + \dot{D} \sin n\alpha, \\ \dot{Q} e^{-ina} + \dot{T} e^{ina} \end{array} \right\} = J_n(\chi_{nm} r) A(n\alpha) \quad (65.2)$$

и

$$\chi^2 = \chi_{nm}^2 = \left(\frac{B_{nm}}{R} \right)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots, \\ m = 1, 2, \dots, \end{array} \right. \quad (65.3)$$

где B_{nm} — корни уравнения $J_n(x) = 0$, сведенные в таблицу в Приложении 6, п. 6. Множитель азимутальной зависимости $A(n\alpha)$ записан здесь в двух вариантах (верхняя и нижняя строчки).

Каждая из бесконечного множества собственных функций $\dot{\mathcal{E}}_z^{nm}$ определяет поле круглого волновода типа E_{nm} , компоненты которого находятся при подстановке (65.2) в (61.10) с учетом (П1.8) и (П1.22). Это дает:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= J_n(\chi r) A(n\alpha) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{E}_{mr} &= -i \frac{\dot{\Gamma}}{\chi} J_n(\chi r) A(n\alpha) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -i \frac{n\dot{\Gamma}}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_{mr} &= i \frac{n\omega\dot{\mathcal{E}}}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -i \frac{\omega\dot{\mathcal{E}}}{\chi} J_n(\chi r) A(n\alpha) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \end{aligned} \right\} \chi = \chi_{nm}, \quad (65.4)$$

где $J_n'(\chi r)$ — производная $J_n(\chi r)$ по аргументу χr и $A'(n\alpha)$ — производная $A(n\alpha)$ по $n\alpha$:

$$A'(n\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} -\dot{C} \sin n\alpha + \dot{D} \cos n\alpha, \\ -i\dot{Q} e^{-ina} + i\dot{T} e^{ina}. \end{array} \right\}$$

В (65.4) постоянная распространения $\dot{\Gamma}$, определяемая формулами (61.3) и (65.3), равна

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\dot{k}^2 - (B_{nm}/R)^2}. \quad (65.5)$$

Перед изучением строения полей разных типов выясним смысл множителя азимутальной зависимости $A(n\alpha)$. В одном варианте он представляет собой линейную комбинацию функций $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$. Это значит, что всякое решение с данным распределением поля по

радиусу $J_n(\chi r)$ может иметь как косинусоидальное ($\dot{D} = 0$), так и синусоидальное ($\dot{C} = 0$) азимутальное распределение. Можно говорить о двух вырожденных волнах, поскольку n и m для обоих решений совпадают. При этом поля типа E_{nm} , получаемые при $A(n\alpha) = \dot{C} \cos n\alpha$ и $A(n\alpha) = \dot{D} \sin n\alpha$, различаются лишь ориентацией: так как $\sin n\alpha = \cos(n\alpha - 90^\circ)$, то одно поле переходит в другое при повороте около оси волновода на 90° . Что же означает произвольная линейная комбинация обоих решений ($\dot{C} \neq 0$ и $\dot{D} \neq 0$)? Взяв вещественные C и D , т. е. рассматривая наложение обоих вырожденных полей в фазе, имеем

$$\left. \begin{aligned} A(n\alpha) &= C \cos n\alpha + D \sin n\alpha = E_0 \cos(n\alpha - \psi); \\ E_0 &= \sqrt{C^2 + D^2}, \quad \psi = \arctg \frac{D}{C}. \end{aligned} \right\}$$

Речь идет, следовательно, о косинусоидальном распределении, повернутом относительно начала координат на некоторый угол ψ , т. е. о возможности произвольной азимутальной ориентации поля в круглом волноводе, что естественно при его симметрии.

При комплексных \dot{C} и \dot{D} происходит сложение двух указанных полей с разными фазами. Возьмем, например, $\dot{C} = E_0$ и $\dot{D} = \pm iE_0$. Тогда $A(n\alpha) = E_0(\cos n\alpha \pm i \sin n\alpha) = E_0 e^{\pm i n\alpha}$, что соответствует выбору $A(n\alpha)$ в виде выражения в нижней строчке (65.2) с $\dot{Q} = E_0$ и $\dot{T} = 0$, либо $\dot{Q} = 0$ и $\dot{T} = E_0$. Поля с таким азимутальным распределением имеют структуру, вращающуюся относительно оси волновода с круговой частотой ω (аналогия круговой поляризации, § 34, п. 3), причем направление вращения зависит от выбора знака в $e^{\pm i n\alpha}$.

В общем случае составления линейной комбинации вырожденных функций $J_n(\chi r) \cos n\alpha$ и $J_n(\chi r) \sin n\alpha$ или $J_n(\chi r)e^{-in\alpha}$ и $J_n(\chi r)e^{in\alpha}$ с комплексными коэффициентами получается подобие эллиптической поляризации.

Обратимся к рис. 65.2, на котором показано строение различных E -полей круглого волновода. Поля с $n = 0$, для которых функция $A(n\alpha)$ является константой, не изменяются в зависимости от угла α , т. е. азимутально однородны. Остальные поля изображены при ориентации, соответствующей $\dot{D} = 0$ в (65.2); в одном случае, однако, показано (поле E_{11}), как изменяется азимутальная ориентация при разных $A(n\alpha)$. Привлекая для сравнения рис. 64.3, где изображены E -поля волновода прямоугольного, сразу же находим черты сходства: полю E_{11} прямоугольного волновода аналогично поле E_{01} круглого, полю E_{21} прямоугольного — поле E_{11} круглого и т. д. Но такое соответствие существует далеко не всегда. В частности, в прямоугольном волноводе не может быть аналогов полям круглого волновода типа E_{0m} при $m \neq 1$.

На рис. 65.3, который нужно рассматривать, сопоставляя его с графиком бесселевых функций (рис. П6.1) и картинami силовых

линий на рис. 65.2, показано, как изменяется по радиусу продольная компонента E_z полей разных типов. Из сравнения читатель легко установит, какую характеристику структуры поля могут дать

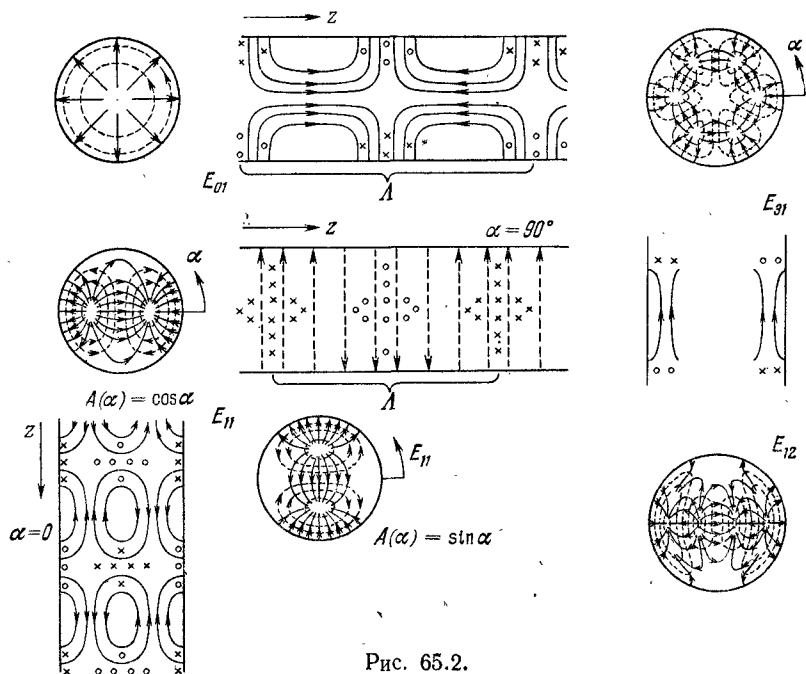


Рис. 65.2.

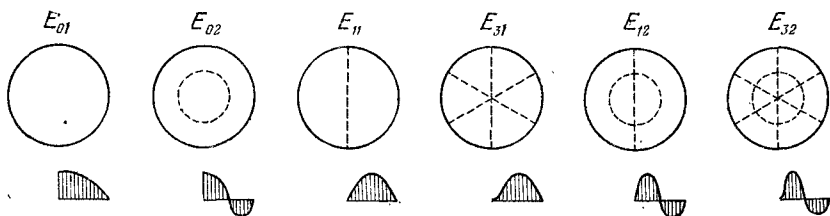


Рис. 65.3.

числа m и n , являющиеся индексами того или иного типа E_{nm} . Как и на рис. 64.2, пунктиром проведены «линии узлов», на которых $E_z = 0$.

2. **H-волны.** Поставив граничную задачу (62.12) в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}_z}{\partial \alpha^2} + \chi^2 \mathcal{H}_z = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq r < R, \\ 0 \leq \alpha \leq 2\pi, \end{array} \right. \quad (65.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = R,$$

обнаруживаем ее совпадение с задачей (П7.24) и сразу записываем известное решение:

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \dot{\mathcal{H}}_z^{nm} = J_n(\chi_{nm}r) \left\{ \begin{array}{l} \dot{C} \cos n\alpha + \dot{D} \sin n\alpha \\ \dot{Q} e^{-in\alpha} + \dot{T} e^{in\alpha} \end{array} \right\} = J_n(\chi_{nm}r) A(n\alpha), \quad (65.7)$$

где

$$\chi^2 = \chi_{nm}^2 = \left(\frac{A_{nm}}{R} \right)^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots, \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (65.8)$$

(A_{nm} — корни уравнения $J'_n(x) = 0$; см. таблицу в приложении 6, п. 6.

Теперь, пользуясь формулами (61.11), определяем комплексные амплитуды всех компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} поля типа H_{nm} :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{H}_{mz} = J_n(\chi r) A(n\alpha) e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_{nr} = -i \frac{\dot{\Gamma}}{\chi} J'_n(\chi r) A(n\alpha) e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_{m\alpha} = -i \frac{n\dot{\Gamma}}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{E}_{mr} = -i \frac{n\omega\mu}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{E}_{m\alpha} = i \frac{\omega\mu}{\chi} J'_n(\chi r) A(n\alpha) e^{-i\Gamma z}, \\ \chi = \chi_{nm} \end{array} \right\} \quad (65.9)$$

(обозначения см. п. 1), где

$$\dot{\Gamma} = \dot{\Gamma}_{nm} = \sqrt{\dot{k}^2 - (A_{nm}/R)^2}. \quad (65.10)$$

На рис. 65.4 показано строение различных H -полей при ориентации, соответствующей $\dot{D} = 0$ в (65.7). Как и ранее (п. 1), заметна аналогия ряда полей круглого и прямоугольного волноводов; сходны, например, типы полей H_{11} круглого волновода и H_{10} прямоугольного. Однако аналогия по-прежнему не распространяется на все типы полей. Так, в частности, в круглом волноводе нет соответствия полям H_{mn} волновода прямоугольного при четных m и n . Простейшие по строению азимутально однородные поля круглого волновода H_{0m} (которым нет соответствия в прямоугольном волноводе) интересны тем, что на оболочке имеют только продольную компоненту вектора \mathbf{H} . Последняя стремится к нулю при $\lambda/R \rightarrow 0$ (это

относится и к другим полям, ср. § 64, п. 3), а следовательно, в пределе на оболочке отсутствует поле и нет тока. Строение полей дополнительно поясняется эджурами H_z на рис. 65.5.

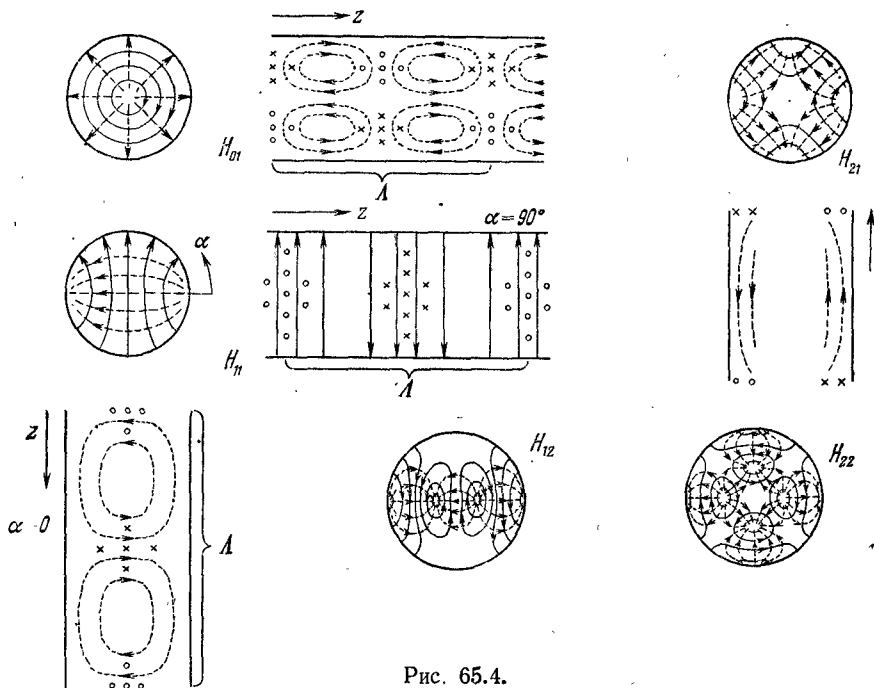


Рис. 65.4.

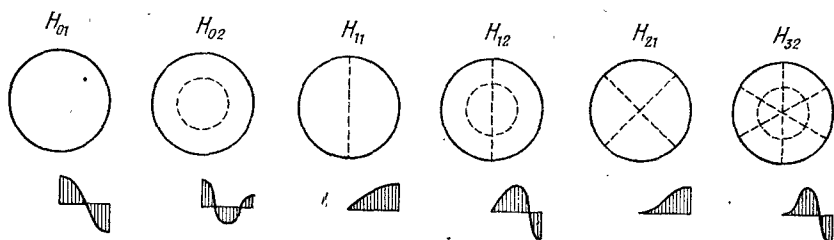


Рис. 65.5.

3. Волны без поглощения. Простейшие типы полей. Положив в полученных формулах $\epsilon = \epsilon$ и $\mu = \mu$ ($k = k$), приходим к случаю волновода без поглощения во внутренней среде. При переходе к символике из § 62, п. 3 имеем:

для E -волн

$$f_{кр} = f_{кр}^{nm} = \frac{i}{2\pi \sqrt{\epsilon\mu}} \frac{B_{nm}}{R} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр} = \lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi R}{B_{nm}}; \quad (65.11a)$$

для H -волн

$$f_{кр} = f_{кр}^{nm} = \frac{1}{2\pi \sqrt{\epsilon_{\mu}}} \frac{A_{nm}}{R} \quad \text{и} \quad \lambda_{кр} = \lambda_{кр}^{nm} = \frac{2\pi R}{A_{nm}}. \quad (65.116)$$

На основании таблиц из Приложения 6, п. 6 составлена следующая таблица значений $\lambda_{кр}$ для разных типов волн.

Таблица 65.1

Критические длины волн $\lambda_{кр}^{nm}$, отнесенные к R

$n \backslash m$	1	2	3	4
E -волны				
0	2,612	1,138	0,726	0,5328
1	1,64	0,8955	0,6176	0,4716
2	1,223	0,7464	0,5407	0,4246
3	0,9847	0,6436	0,4827	0,3873
H -волны				
0	1,64	0,8955	0,6176	0,4716
1	3,413	1,178	0,736	0,5367
2	2,057	0,9369	0,6302	0,477
3	1,495	0,7839	0,5538	

4 1. 13 11

Не рассматривая вновь общие особенности распространения волн, обсуждавшиеся как в § 62, п. 3, так и на примере прямоугольного волновода в § 64, п. 3, подчеркнем, что в данном случае основной является волна типа H_{11} :

$$\min f_{кр}^{nm} = f_{кр}^{11}, \quad \max \lambda_{кр}^{nm} = \lambda_{кр}^{11} \approx 3,413R. \quad (65.12)$$

Эта волна, не будучи низшей по индексам, аналогична, как уже отмечалось, основной волне прямоугольного волновода H_{10} . Можно представить себе, что при постепенном переходе круглого волновода в прямоугольный основная волна H_{11} , деформируясь, преобразуется в основную волну H_{10} .

Далее критические длины волн располагаются в такой последовательности:

$$\lambda_{кр}^{H_{11}} > \lambda_{кр}^{E_{01}} > \lambda_{кр}^{H_{21}} > \lambda_{кр}^{H_{01}} = \lambda_{кр}^{E_{11}} > \lambda_{кр}^{H_{31}} > \lambda_{кр}^{E_{21}} > \dots, \quad (65.13)$$

т. е. с ростом частоты вслед за основной волной будет распространяться волна E_{01} , затем H_{21} и т. д.

Простейшими в смысле описания являются поля E_{01} и H_{01} . Первое имеет компоненты E_z , E_r и H_α , а второе — H_z , H_r и E_α . Основное поле H_{11} имеет все пять компонент, присутствующих в (65.9). Читателю предлагается выписать выражения величин v_ϕ , $v_{гр}$, $\dot{\Gamma}$, Λ и $W^{E, H}$ для полей E_{01} , H_{01} и H_{11} , пользуясь формулами (62.18) — (62.20), (62.23), (62.15), а также формулами (65.11), (65.12) и табл. 65.1.

4. Передача энергии и затухание волн. Вычислим мощность, передаваемую волной H_{11} при отсутствии поглощения. На основании (63.2) и (65.9), обозначая, согласно (62.15), $\omega\mu/\Gamma = W^H$, имеем

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{W^H}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (H_{mr}^2 + H_{m\alpha}^2) r dr d\alpha = \\ &= \frac{W^H}{2} \left(\frac{\Gamma}{\chi}\right)^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} \left\{ [J_1(\chi r) |A(\alpha)|]^2 + \frac{[J_1(\chi r) |A'(\alpha)|]^2}{\chi^2 r^2} \right\} r dr d\alpha.\end{aligned}$$

Будем рассматривать волну, распространяющуюся без вращения относительно оси волновода (п. 1), и положим здесь $A(\alpha) = \hat{C} \cos \alpha$. Интегрируя по α , а затем делая простую замену переменных и учитывая соотношение (65.8), имеем

$$\bar{P} = \frac{W^H}{2} C^2 \frac{\pi \Gamma^2}{\chi^4} \int_0^{A_{11}} \left[J_1'^2(x) + \frac{J_1^2(x)}{x^2} \right] x dx$$

и, согласно (П6.21), ввиду равенства $J_1'(A_{11}) = 0$ получаем

$$\bar{P} = C^2 \frac{\pi W^H \Gamma^2}{4\chi^4} (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11}), \quad (65.14)$$

или

$$\bar{P} = E_0^2 \frac{\pi R^2}{W^H} \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^2} J_1^2(A_{11}) \approx 0,75 E_0^2 \frac{R^2}{W^H}, \quad (65.14a)$$

где $E_0 = (\Gamma W^H / 2\chi) C$ есть амплитуда вектора E на оси волновода. Действительно, из (65.9) при $A(\alpha) = \hat{C} \cos \alpha$ следует:

$$E_0 = E_{mr} |_{r=0, \alpha=90^\circ} = C \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Gamma W^H}{\chi^2 r} J_1(\chi r) \sin 90^\circ = \frac{\Gamma W^H}{2\chi} C$$

(в пределе при $r \rightarrow 0$ функция $J_1(\chi r)$ заменяется первым членом степенного ряда (П6.10) $\chi r/2$).

Для вращающейся волны H_{11} с $\dot{A}(\alpha) = \dot{Q}e^{-i\alpha}$, как легко убедиться, в правую часть равенства (65.14a) надо ввести коэффициент 2.

Вычислим мощность волны E_{01} . Взяв формулы (63.2) и (65.9) ($A(n\alpha) = \hat{C}$), пишем:

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{W^E}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} H_{m\alpha}^2 r dr d\alpha = \\ &= C^2 \frac{W^E \omega^2 \varepsilon^2}{2\chi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1^2(\chi r) r dr d\alpha = \frac{\pi C^2 \Gamma^2}{W^E \chi^4} \int_0^{B_{01}} J_1^2(x) x dx.\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $J_0(B_{01}) = 0$, на основании формулы (П6.20) получаем

$$\bar{P} = \frac{\pi C^2 \Gamma^2 B_{01}^2 J_1^2(B_{01})}{2W^E \chi^4} = \frac{\pi C^2 \Gamma^2 R^4 J_1^2(B_{01})}{2B_{01}^2 W^E}. \quad (65.15)$$

Аналогично в случае волны H_{01} ($A(n\alpha) = \dot{C}$)

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{W^H}{2} \int_0^R \int_0^{2\pi} H_{mr}^2 r dr d\alpha = \\ &= \frac{C^2 W^H \Gamma^2}{2\chi^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} J_1^2(\chi r) r dr d\alpha = \frac{\pi C^2 W^H \Gamma^2}{\chi^4} \int_0^{A_{01}} J_1^2(x) x dx. \end{aligned}$$

Поскольку $J_0'(A_{01}) = 0$ (т. е. ввиду (П6.17) $J_1(A_{01}) = 0$), то, согласно (П6.20),

$$\bar{P} = \frac{\pi C^2 W^H \Gamma^2 A_{01}^3 J_0^2(A_{01})}{2\chi^4} = \frac{\pi C^2 W^H \Gamma^2 R^4 J_0^2(A_{01})}{2A_{01}^3}. \quad (65.16)$$

Теперь, как это делалось в случае прямоугольного волновода (§ 64, п. 4), рассмотрим затухание волн. Поскольку коэффициент Γ_{α}^2 находится по формулам, которые уже известны (§ 63, п. 2), то по-прежнему предстоит учитывать только поглощение в металле.

Чтобы определить Γ_m^2 для основной волны H_{11} , вычислим сначала контурный интеграл в числителе (63.21). Пусть, как и ранее, $A(\alpha) = \dot{C} \cos \alpha$; тогда

$$\begin{aligned} \int_{L_{\perp}} H_m^2 dl &= \int_{L_{\perp}} (H_{m\alpha}^2 + H_{mz}^2)_{r=R} dl = \\ &= C^2 \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\Gamma}{\chi^2 R} \right)^2 J_1^2(\chi R) \sin^2 \alpha + J_1^2(\chi R) \cos^2 \alpha \right] R d\alpha = \\ &= C^2 \pi J_1^2(A_{11}) \left[1 + \left(\frac{\Gamma}{\chi A_{11}} \right)^2 \right] R. \end{aligned}$$

Интеграл в знаменателе (63.21) находим, привлекая готовый результат (65.14):

$$\int_{S_{\perp}} H_{mt}^2 ds = \frac{2\bar{P}}{W^H} = C^2 \frac{\pi \Gamma^2}{2\chi^4} (A_{11}^2 - 1) J_1^2(A_{11}).$$

Таким образом,

$$\Gamma_m^2 = \frac{\mathcal{R}_S}{W^H} \frac{1 + \frac{1}{A_{11}^2} \left(\frac{\Gamma}{\chi} \right)^2}{\left(\frac{\Gamma}{\chi} \right)^2 \frac{A_{11}^2 - 1}{A_{11}^3} R} = \frac{\mathcal{R}_S \left[\left(\frac{\chi}{k} \right)^2 + \frac{1}{A_{11}^2 - 1} \right]}{W \frac{\Gamma}{k} R} = \frac{\mathcal{R}_S \left[\left(\frac{\lambda}{3,413R} \right)^2 + 0,418 \right]}{WR \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{3,413R} \right)^2}}. \quad (65.17)$$

Для волны E_{01}

$$\int_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \int_{L_{\perp}} H_{m\alpha}^2 |_{r=R} dl = \frac{2\pi C^2 \Gamma^2}{W E^2 \chi^2} R J_1^2(B_{01}),$$

так что с учетом (65.15) на основании (63.21)

$$\Gamma_M'' = \frac{\mathcal{R}_S}{W^E R} = \frac{\mathcal{R}_S}{WR \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2,612R}\right)^2}}. \quad (65.18)$$

Для волны H_{01}

$$\int_{L_{\perp}} H_m^2 dl = \int_{L_{\perp}} H_{mz}^2 \Big|_{r=R} dl = 2\pi C^2 R J_0^2(A_{01})$$

и ввиду (65.16)

$$\Gamma_M'' = \frac{\mathcal{R}_S \lambda^2}{W^H \Gamma^2 R} = \frac{\mathcal{R}_S (\lambda/1,64R)^2}{WR \sqrt{1 - (\lambda/1,64R)^2}}. \quad (65.19)$$

Полученные формулы (65.17) и (65.18) качественно сходны с формулой (64.17). И действительно, представленные на рис. 65.6, а, б кривые зависимости $\Gamma_M''(f)$ для волн круглого волновода H_{11} и E_{01} напоминают аналогичный график для основной волны волновода прямоугольного (рис. 64.7). Совершенно иной характер имеет зависимость $\Gamma_M''(f)$ для волны круглого волновода H_{01} (рис. 65.6, в). С ростом частоты числитель (65.19) стремится к нулю при $f \rightarrow \infty$, и коэффициент затухания Γ_M'' неограниченно уменьшается. Объяснение этой закономерности содержится в замечании, сделанном в конце п. 2. В самом деле, раз поле и ток на оболочке волновода для волн H_{0m} при $\lambda/R \rightarrow 0$ исчезают, то прекращается и поглощение энергии, переносимой по волноводу.

5. Заключение. На рис. 65.7 представлены картины токов в оболочке волновода для волн H_{11} , E_{01} и H_{01} . В первом случае заметно сходство с картиной тока основной волны прямоугольного волновода (рис. 64.8). Волне E_{01} сопутствует чисто продольный ток, а волне H_{01} — чисто поперечный (азимутальный). В последнем случае оболочка не несет заряда.

Каждая из волн круглого волновода, как отмечалось в п. 1, является двукратно вырожденной. Так, например, говоря о невращающейся основной волне, следует иметь в виду две ортогонально ориентированные структуры, показанные на рис. 65.8. Этот тип вырождения, связанный с аксиальной симметрией системы, при- сущ как идеализированному волноводу, так и реальному (с конеч-

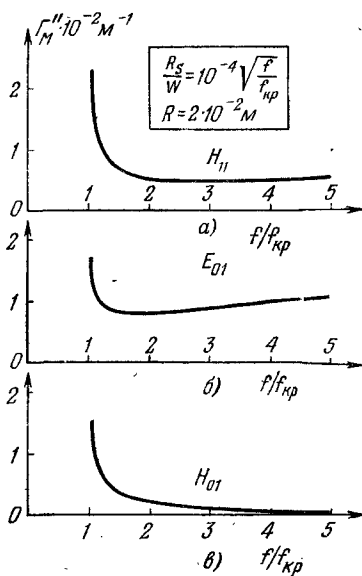


Рис. 65.6.

ной проводимостью оболочки). Ввиду равенства $B_{1m} = A_{0m}$ для всех m попарно вырождены также волны идеализированного волновода E_{1m} и H_{0m} . Соответствующие им волны реального металлического

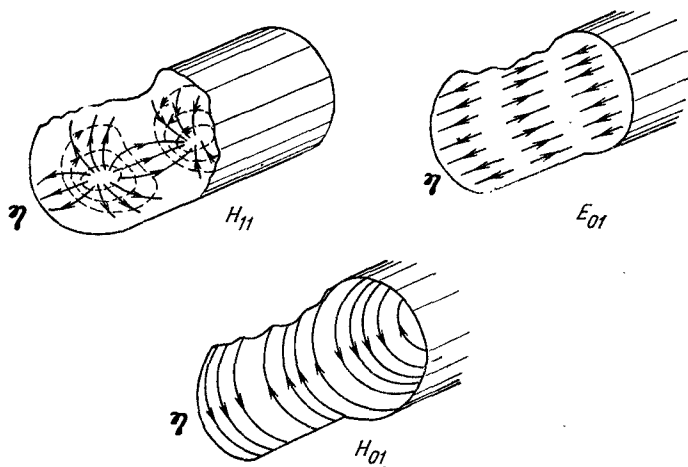


Рис. 65.7.

волновода имеют лишь незначительные структурные отличия и хотя уже не равные, но весьма близкие постоянные распространения. Практически создать условия для распространения одной волны H_{01} и таким путем реализовать передачу энергии с очень малым поглощением (п. 4) чрезвычайно трудно.

Заметим, что в волноводе с неидеально проводящей оболочкой азимутально однородные волны E_{0m} и H_{0m} сохраняются (при пере-

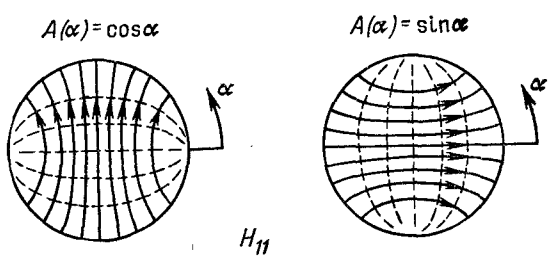


Рис. 65.8.

ходе к конечному σ вместо них не появляются волны HE и EH). Например, волна H_{01} , создающая в оболочке азимутальный ток, приобретает электрическую компоненту E_α , но не E_z . Однако лишь при очень небольших деформациях волновода эта волна, можно сказать, не вступает в энергетическую связь с полями других типов (в особенности с волной E_{11}).

§ 66. Различные системы с однородным диэлектриком

1. Односвязные волноводы. Прямоугольный и круглый волноводы (§§ 64, 65) — важнейшие среди направляющих систем типа металлической трубы. На рис. 66, 1, а, б, в, г показано несколько видов

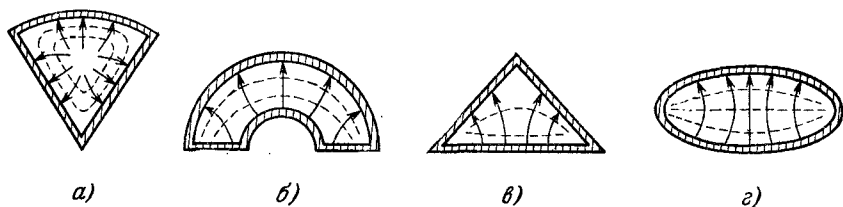


Рис. 66.1.

поперечного сечения полых волноводов, для которых решение задач (62.8) и (62.12) по-прежнему может быть получено в замкнутой форме методом разделения переменных. Для секториальных областей (рис. 66.1, а, б) такие задачи решены в приложении 7, п. 3, и читатель может развить теорию соответствующих волноводов, повторяя применявшуюся схему. Для треугольного поперечного сечения (рис. 66.1, в) задачи (62.8) и (62.12) решаются в декартовых координатах, а для эллиптического (рис. 66.1, г) — в эллиптических координатах. Пока сечение остается выпуклым, общий характер строения полей и передачи энергии сохраняется; на рис. 66.1 показаны некоторые картины силовых линий.

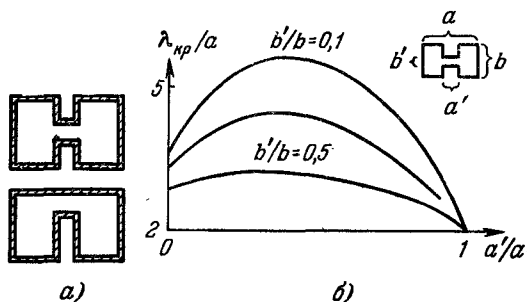


Рис. 66.2.

Волноводы вогнутого поперечного сечения, например так называемые *П-образный* и *Н-образный* (рис. 66.2, а), могут иметь весьма низкие критические частоты $f_{кр}$ (высокие $\lambda_{кр}$). При этом электрическое поле основного типа сосредоточено в узком зазоре, а магнитное имеет относительно малую продольную компоненту, так что волна близка к типу *ТЕМ*. Некоторые зависимости для *Н-образного* волновода качественно представлены на рис. 66.2, б.

Можно показать, что среди *Е*- и *Н*-волн любого полого волновода низшим поперечным волновым числом обязательно обладает

$$H\text{-волна:} \quad \min \chi_H^2 \leq \min \chi_E^2. \quad (66.1)$$

Таким образом, односвязному полуму волноводу свойственна основная H -волна.

Простейшей открытой односвязной системой является однопроводная линия. В принципе в однопроводной линии из идеального проводника возможна волна TEM . Напряженности поля E и H должны быть при этом распределены в поперечном сечении так же, как и в случае стационарных полей (§ 62, п. 1). Учитывая соотношение \dot{E}_m и \dot{H}_m (62.6), на основании (24.1) и (62.1) пишем:

$$\dot{H}_m = \alpha_0 \frac{I_m}{2\pi r} e^{-ikz}, \quad \dot{E}_m = r_0 \dot{W} \frac{I_m}{2\pi r} e^{-ikz} \quad (66.2)$$

при $r \geq R$ (рис. 66.3); для провода в вакууме $\dot{W} = W_0$, $k = k_0$ и, вычисляя переносимую волной энергию, при помощи (63.2) находим

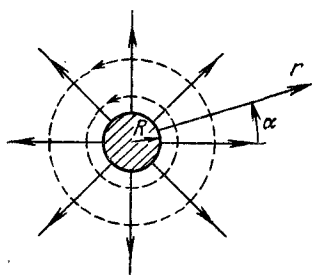


Рис. 66.3.

$$\bar{P} = \frac{I_m^2 W_0}{4\pi^2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \frac{dr d\alpha}{r} = \frac{I_m^2 W_0}{2\pi} \ln r \Big|_R^\infty \rightarrow \infty$$

при $I_m \neq 0$, (66.3)

т. е. при любом конечном токе в проводе средняя мощность оказывается бесконечной. Конечная же мощность соответствует исчезающе малому току, а следовательно, и полю. Рассмотренная волна поэтому физически немыслима; с

этой точки зрения ее можно сравнить с однородной TEM -волной (§§ 32, 33), также физически нереализуемой.

Позднее (§ 68) будет показано, что учет конечной проводимости металла реальной однопроводной линии меняет дело, но при этом существенна неоднородность среды, передающей энергию.

2. Двусвязные и многосвязные системы. Такие двусвязные и многосвязные системы, как коаксиальная линия, двухпроводная линия и др., интересны главным образом своей способностью направлять TEM -волны.

Взяв систему двух проводников произвольного типа при отсутствии поглощения, покажем, что для TEM -волны уравнения Максвелла приводят к так называемым «телеграфным уравнениям» относительно напряжения и тока в линии.

Электрическое поле TEM -волны в каждой поперечной плоскости системы $z = \text{const}$ потенциально, ибо подобно полю электростатическому (§ 62, п. 1). Поэтому можно ввести понятие разности потенциалов, или *напряжения* между проводниками A и B направляющей системы в данной поперечной плоскости

$$U = \int_{(A)}^{(B)} E dl \quad (66.4)$$

(начало и конец пути интегрирования лежат на разных проводниках при $z = \text{const}$); как известно, интеграл (66.4) не зависит от пути интегрирования.

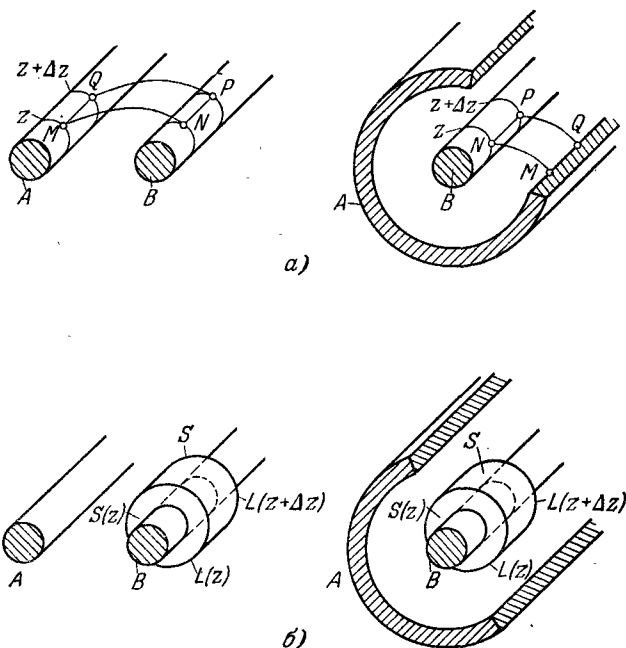


Рис. 66.4.

В двух поперечных плоскостях z и $z + \Delta z$ (рис. 66.4, а) проведем пути интегрирования от A до B и вычислим напряжения $U(z)$ и $U(z + \Delta z)$ по формуле (66.4):

$$U(z) = \int_{(M)}^{(N)} \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad \text{и} \quad U(z + \Delta z) = \int_{(Q)}^{(P)} \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

В то же время

$$\oint_{(NMQP)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{(M)}^{(N)} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{(Q)}^{(P)} \mathbf{E} d\mathbf{l},$$

поскольку на проводниках (участки пути NP и QM) $E_{\tau} = 0$. Следовательно,

$$\int_{(NMQP)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -U(z) + U(z + \Delta z) = \frac{dU}{dz} \Delta z + \dots$$

Взяв второе уравнение Максвелла (2.3), имеем, таким образом:

$$\frac{dU}{dz} \Delta z + \dots = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} ds = - \frac{d}{dt} \Delta \Phi,$$

где S — поверхность, ограниченная контуром $NMQP$ и $\Delta\Phi$ — магнитный поток через нее. В пределе при $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{dU}{dz} = - \frac{d}{dt} \frac{d\Phi}{dz}.$$

Если \mathcal{L}' — индуктивность, приходящаяся на единицу длины системы (величина, определяемая для стационарного поля, § 25, п. 2), то $d\Phi/dz = \mathcal{L}' I$, и мы получаем

$$\frac{dU}{dz} = - \mathcal{L}' \frac{dI}{dt}. \quad (66.5)$$

Это и есть одно из «телеграфных уравнений».

Второе уравнение находится следующим образом. На плоскостях z и $z + \Delta z$, как на основаниях, построим цилиндр, охватывающий один из проводников (рис. 66.4, б). Площади оснований обозначим $S(z)$ и $S(z + \Delta z)$, а боковую поверхность цилиндра — S . Возьмем первое уравнение Максвелла (2.8). Применяя его к основаниям цилиндра, имеем

$$\oint_{L(z)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I(z) \quad \text{и} \quad \oint_{L(z+\Delta z)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I(z + \Delta z),$$

где $L(z)$ и $L(z + \Delta z)$ — контуры оснований цилиндра $S(z)$ и $S(z + \Delta z)$; ток смещения отсутствует, так как вектор \mathbf{D} лежит параллельно основаниям (поле TEM не имеет продольной электрической компоненты). В то же время

$$\oint_{L(z)} \mathbf{H} d\mathbf{l} - \oint_{L(z+\Delta z)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l},$$

где L — контур боковой поверхности цилиндра S . Поэтому

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I(z) - I(z + \Delta z) = - \frac{dI}{dz} \Delta z + \dots$$

Теперь, согласно уравнению Максвелла (2.8) и теореме Гаусса (3.4),

$$- \frac{dI}{dz} \Delta z + \dots = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \Delta q,$$

где Δq — заряд проводника на участке Δz (ток проводимости через боковую поверхность S , естественно, отсутствует). Поэтому в пределе при $\Delta z \rightarrow 0$

$$\frac{dI}{dz} = - \frac{d}{dt} \frac{dq}{dz}.$$

Пусть C' — емкость, приходящаяся на единицу длины системы (она определяется при решении электростатической задачи, § 17, п. 5). Тогда $dq/dz = C' U$. Следовательно,

$$\frac{dI}{dz} = - C' \frac{dU}{dt}. \quad (66.6)$$

Это второе «телеграфное уравнение».

Перейдем к рассмотрению гармонической *ТЕМ*-волны, когда поля, а следовательно, также напряжения и токи изменяются по закону $\cos(\omega t - kz - \varphi)$. Внося в телеграфные уравнения (66.5) и (66.6) комплексные представления тока и напряжения $I = I_m e^{i(\omega t - kz - \varphi_I)} = I_m e^{i\omega t}$ и $U = U_m e^{i(\omega t - kz - \varphi_U)} = U_m e^{i\omega t}$, получаем

$$\left. \begin{aligned} k\dot{U}_m &= \omega \mathcal{L}' I_m, \\ kI_m &= \omega C' \dot{U}_m. \end{aligned} \right\} \quad (66.7)$$

Отсюда сразу же находится выражение волнового числа $k = \omega / \sqrt{\varepsilon\mu}$ через параметры двухсвязной системы \mathcal{L}' и C' :

$$k = \omega \sqrt{\mathcal{L}' C'}. \quad (66.8)$$

Это значит, что вообще имеет место соотношение

$$\varepsilon\mu = \mathcal{L}' C', \quad (66.9)$$

поэтому, например, фазовая скорость *ТЕМ*-волны $v = 1 / \sqrt{\varepsilon\mu}$ есть также

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}' C'}}. \quad (66.10)$$

Далее из (66.7) можно найти отношение \dot{U}_m и I_m , которое оказывается равным

$$W_n = \frac{\dot{U}_m}{I_m} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}'}{C'}}. \quad (66.11)$$

Это *волновое сопротивление*, рассматриваемое в теории длинных линий (речь идет об известном читателю разделе теории цепей). Поскольку W_n — величина вещественная, ток и напряжение бегущей *ТЕМ*-волны находятся в фазе (начальные фазы φ_I и φ_U , выбранные ранее, совпадают).

Естественно, что W_n и введенное ранее волновое сопротивление W (62.6) — различные величины. Последняя равна $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ для любой *ТЕМ*-волны (при отсутствии поглощения). Что касается W_n , то это волновое сопротивление существенно зависит от вида направляющей системы. Согласно предыдущему

$$W_n = \frac{\int_{(A)}^{(B)} \mathbf{E} \, dl}{\oint_L \mathbf{H} \, dl}. \quad (66.12)$$

В заключение запишем выражения величин \mathcal{L}' и C' , вытекающие из (66.11) и (66.10):

$$\mathcal{L}' = W_n \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{W_n}{v} \quad \text{и} \quad C' = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{W_n} = \frac{1}{W_n v}. \quad (66.13)$$

Таким образом, параметры \mathcal{L}' и C' , определяемые из задач о стационарных полях, можно найти также, зная W_n и v ; однако для

получения W_{λ} , согласно (66.12), в свою очередь нужно знать напряженности E и H поля TEM -волны в данной системе.

Уместна, наконец, оговорка относительно определения \mathcal{L}' из задачи о постоянном токе. Проводник направляющей системы считался идеальным ($\sigma \rightarrow \infty$), так что подобное стационарному магнитное поле волны TEM внутри него отсутствует, а ток является поверхностным. Постоянный ток при нахождении \mathcal{L}' надо поэтому также брать поверхностным.

3. TEM -волна коаксиальной линии. Коаксиальная линия является технически важной и просто анализируемой двухсвязной системой. Полагая проводник идеальным, мы должны рассмотреть E -, H - и TEM -волны этой системы:

Начнем с TEM -волны. Ее магнитное поле имеет то же строение, что и поле коаксиального кабеля с постоянным током (§ 24, п. 1),

а электрическое — как поле коаксиального конденсатора (§ 17, п. 6), отношение же \dot{E}_m и \dot{H}_m есть \dot{W} . Поэтому комплексные амплитуды поля TEM -волны имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= r_0 \dot{W} \frac{i_m}{2\pi r} e^{-ikr}, \\ \dot{H}_m &= \alpha_0 \frac{i_m}{2\pi r} e^{-ikr} \end{aligned} \quad (66.14)$$

($R_1 \leq r \leq R_2$). Эти выражения отличаются от полученных в п. 1 при рассмотрении однопроводной линии только областью существования поля (рис. 66.5), теперь ограниченной.

Вычислим комплексную амплитуду напряжения между проводниками; на основании (66.4)

$$\dot{U}_m = \int_{R_1}^{R_2} \dot{E}_m dr = \dot{W} \frac{i_m}{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\dot{W} i_m}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (66.15)$$

и волновое сопротивление \dot{W}_{λ}

$$\dot{W}_{\lambda} = \frac{\dot{U}_m}{i_m} = \frac{\dot{W}}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (66.16)$$

которое, в отличие от предыдущего, комплексно, так как диэлектрик взят поглощающим. Для линии, заполненной газом (например, воздухом), внутренняя среда практически не отличается от вакуума по своим электродинамическим характеристикам ($\dot{W} = \dot{W} = 120 \pi$), так что

$$W_{\lambda} = 60 \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (66.16a)$$

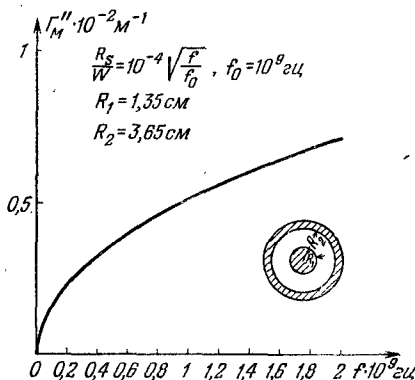


Рис. 66.5.

Формулу (66.16) можно получить также на основании (66.11), взяв \mathcal{L}' и C' из решений соответствующих стационарных задач при области существования поля $R_1 \leq r \leq R_2$ (разумеется, в этих задачах ε и μ вещественны). Действительно, согласно (17.17) и (25.26),

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}' = \frac{1}{2\pi} \mu \ln \frac{R_2}{R_1}, \quad (66.17)$$

и корень их отношения дает нужный результат. Аналогичная проверка показывает, что выполняется соотношение (66.10).

Вычисляя мощность TEM -волны, на основании (63.1) находим

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{W} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*]_z r dr d\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \dot{W} \frac{I_m^2}{4\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\alpha}{r} = \\ &= \operatorname{Re} \dot{W} \frac{I_m^2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = \operatorname{Re} \dot{W}_s \frac{I_m^2}{2}. \end{aligned} \quad (66.18)$$

Затухание TEM -волны в результате поглощения в диэлектрике находится по общей формуле (63.6). Для учета поглощения в металле применим энергетический метод, как это делалось в случаях прямоугольного и круглого волноводов. При подстановке в (63.21)

$$\oint_{L_{\perp}} H_m^2 dt = \int_0^{2\pi} (H_m^2|_{r=R_1} R_1 + H_m^2|_{r=R_2} R_2) d\alpha = \frac{I_m^2}{2\pi} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

и

$$\int_{S_{\perp}} H_{mt}^2 ds = \frac{I_m^2}{4\pi^2} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \frac{dr d\alpha}{r} = \frac{I_m^2}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

получаем

$$\Gamma_m^* = \frac{\mathcal{R}_S (R_1 + R_2)}{2WR_1R_2 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (66.19)$$

Коэффициент затухания Γ_m^* зависит от частоты через \mathcal{R}_S ; на рис. 66.5 показан пример такой зависимости. Необходимо иметь в виду, что данные достоверны только в области сильного скин-эффекта ($\Delta^0 \ll R_1$), и потому при малых частотах не имеют смысла.

Выражение (66.19) можно найти и иным путем, внося в энергетическую формулу (63.12) \bar{P} из (66.18) при $\dot{W}_s = W_s$, а $\bar{p}_{\text{п}}$ определяя как $I_m^2 (\mathcal{R}'_1 + \mathcal{R}'_2)/2$, где \mathcal{R}'_1 и \mathcal{R}'_2 — отнесенные к единице длины сопротивления внутреннего и внешнего проводников; согласно (40.20)

$$\mathcal{R}'_1 = \frac{1}{2\pi R_1 \Delta^0 \sigma} = \frac{\mathcal{R}_S}{2\pi R_1} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}'_2 = \frac{1}{2\pi R_2 \Delta^0 \sigma} = \frac{\mathcal{R}_S}{2\pi R_2}$$

(сильный скин-эффект). Физическое содержание такого вывода,

разумеется, остается прежним. Читателю предлагается распространить его на случай, когда внутренний и внешний проводники коаксиальной линии различны ($\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$).

4. Заключение. Высшие волны коаксиальной линии. Как во всех двухсвязных и многосвязных системах с *ТЕМ*-волнами, *ТЕМ*-волна коаксиальной линии выступает в качестве основной: она может распространяться при отсечке высших волн всех типов. Основная волна реальной металлической линии, имея (хотя и весьма малую) продольную электрическую компоненту, строго говоря, является волной *E*, а не *ТЕМ*.

Заметим, что открытые и замкнутые системы из двух проводников, рассматривавшиеся в п. 3 идентично, все же различаются тем, что в случае первых задача электростатики имеет решение и при равных потенциалах обоих проводников. Поэтому мыслима соответствующая *ТЕМ*-волна, которая подобна волне однопроводной линии (п. 1); при $\sigma \rightarrow \infty$ она также физически нереальна. Такую *ТЕМ*-волну называют *синфазной*, поскольку ей соответствуют одинаково направленные токи обоих проводников; волны, рассмотренные в пп. 2, 3, *противофазные* (токи направлены противоположно).

Противофазная волна системы из двух проводников вполне определяется разностью комплексных амплитуд потенциалов проводников в заданном поперечном сечении $\phi_{1m} - \phi_{2m} = \Phi_{12}$; соответствующее электрическое поле обозначим $E(\Phi_{12})$. Если известна некоторая векторная функция $E(1)$, то для любой *ТЕМ*-волны $E(\Phi_{12}) = cE(1)$, где c — постоянный коэффициент: существует лишь один тип противофазной *ТЕМ*-волны.

Пусть далее имеется какая-то направляющая система из трех проводников (рис. 62.1, в, 62.2, в). Если в ней распространяется *ТЕМ*-волна, то подобно предыдущему проводники характеризуются амплитудами потенциалов ϕ_{1m} , ϕ_{2m} и ϕ_{3m} . При этом поле вполне определяется двумя разностями $\Phi_{12} = \phi_{1m} - \phi_{2m}$ и $\Phi_{23} = \phi_{2m} - \phi_{3m}$ (разность $\phi_{1m} - \phi_{3m}$ есть $\Phi_{12} + \Phi_{23}$). Поэтому для электрического поля произвольной *ТЕМ*-волны введем обозначение $E(\Phi_{12}, \Phi_{23})$. Имея векторные функции $E(1, 0)$ и $E(0, 1)$, можно построить любую *ТЕМ*-волну, взяв линейную комбинацию $E(\Phi_{12}, \Phi_{23}) = c_1E(1, 0) + c_2E(0, 1)$, а это значит, что возможны *две* независимые *ТЕМ*-волны, не считая синфазной (в открытой системе), для которой $\phi_{1m} = \phi_{2m} = \phi_{3m}$.

Сделаем, наконец, замечание о высших типах полей коаксиальной линии, полагая, проводник идеальным ($\sigma \rightarrow \infty$). Соответствующие задачи (62.8) и (62.12) решены в приложении 7, п. 3. Так, компоненты \mathcal{E}_z *E*-полей имеют вид (П7.20), а компоненты \mathcal{H}_z *H*-полей — вид (П7.27). Поперечные волновые числа — корни уравнений (П7.21) и (П7.28) соответственно. По известной схеме читатель может выписать все компоненты полей. Строение некоторых простейших полей показано на рис. 66.6. Корни трансцендентных уравнений (П7.21) и (П7.28) приводятся в справочниках (например, [Л.3]). Низшая волна H_{11} напоминает такую же волну круглого

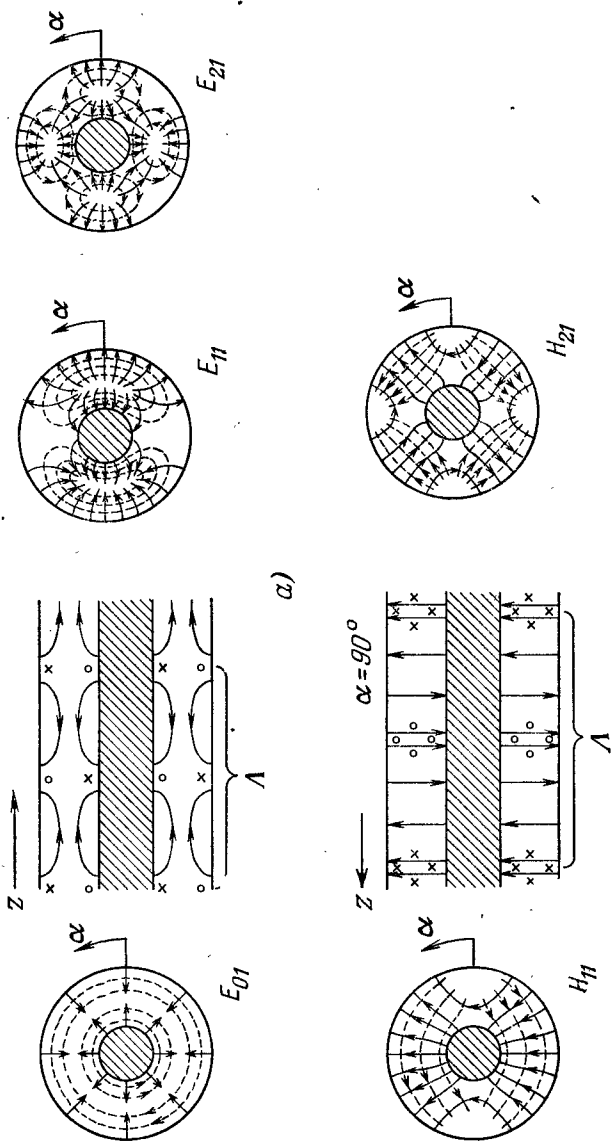


Рис. 66.6.

волновода. Когда размеры R_1 и R_2 относительно близки, $\lambda_{кр}^{H_{11}} \approx \pi (R_1 + R_2)$, т. е. отсечка происходит при средней длине окружности около длины волны λ . Если $\lambda > \lambda_{кр}^{H_{11}}$, то в коаксиальной линии может распространяться только $ТЕМ$ -волна.

§ 67. Системы с неоднородной средой

1. Открытая цилиндрическая система. Общее решение. Будем рассматривать область в виде бесконечного однородного кругового цилиндра, расположенного в однородной среде с иными свойствами (поперечное сечение системы представлено на рис. 67.1); система в целом *поперечно* неоднородна. В зависимости от того, каковы свойства каждой из сред, рассматриваемая система проявляет различные особенности. Например, если внешняя среда — металл, а внутренняя — диэлектрик, мы имеем полый волновод, а при обратном соотношении — однопроводную линию; если внутренняя среда является более плотным диэлектриком в сравнении с внешней, получаем диэлектрический волновод.

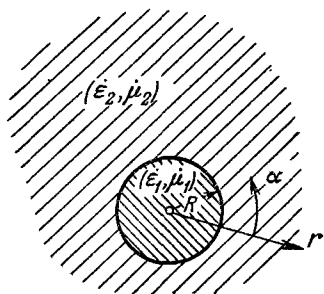


Рис. 67.1.

Выразим решение уравнений электродинамики для исследуемой системы в виде наиболее общего типа направляемой волны, имеющей как электрическую, так и магнитную продольные компоненты

Функции $\dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_z$ являются решениями скалярных уравнений Гельмгольца, получаемых проектированием (61.4) и (61.5) на ось z , и их можно сразу выписать (с должной степенью неопределенности), опираясь на общую форму решения из приложения 7, п. 3. Возьмем $\dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_z$ в таком виде:

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \dot{C}_1 J_n(\dot{\chi}_1 r) \cos n\alpha, \quad \dot{\mathcal{H}}_z = \dot{C}_2 J_n(\dot{\chi}_1 r) \cos(n\alpha - \psi) \quad \text{при } r \leq R, \quad (67.1)$$

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \dot{C}_1 H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \cos n\alpha, \quad \dot{\mathcal{H}}_z = \dot{C}_2 H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \cos(n\alpha - \psi) \quad \text{при } r \geq R,$$

причем на основании (61.3)

$$\dot{\chi}_1^2 = \dot{k}_1^2 - \Gamma^2 \quad \text{и} \quad \dot{\chi}_2^2 = \dot{k}_2^2 - \Gamma^2, \quad (67.2)$$

где $\dot{k}_1^2 = \omega^2 \dot{\epsilon}_1 \dot{\mu}_1$ и $\dot{k}_2^2 = \omega^2 \dot{\epsilon}_2 \dot{\mu}_2$.

Запись (67.1) требует некоторых пояснений. Выбор при $r \leq R$ радиальной зависимости $J_n(\dot{\chi}_1 r)$ ($B = 0$ в (П7.17)) соответствует требованию ограниченности решения при $r = 0$ (см. приложение 6, п. 1). Выбор зависимости $H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)$ при $r \geq R$ ($P = 0$ в (П7.17)) отвечает условию (П6.9); при $P \neq 0$ для поглощающей среды мы

имели бы решение, неограниченно возрастающее в бесконечности. Азимутальная зависимость в (67.1) описывает какую-то фиксированную ориентацию поля (ср. § 66, п. 1); азимутальный сдвиг ψ распределений $\dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_z$ пока неизвестен. Идентичность азимутальной зависимости в обеих средах следует из требования непрерывности $\dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_z$ на границе раздела; из этих соображений далее имеем

$$\dot{C}'_1 = \dot{C}_1 \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \quad \text{и} \quad \dot{C}'_2 = \dot{C}_2 \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}. \quad (67.3)$$

Из (67.2) следует:

$$\dot{\chi}_1^2 - \dot{\chi}_2^2 = \dot{k}_1^2 - \dot{k}_2^2. \quad (67.4)$$

Исходя из (67.1), выразим поперечные зависимости всех компонент векторов поля при помощи формул (61.9).

При $r < R$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_r &= -i\dot{C}_1 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r) \cos n\alpha + i\dot{C}_2 \frac{n\omega\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r) \sin(n\alpha - \psi), \\ \dot{\mathcal{E}}_\alpha &= i\dot{C}_1 \frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r) \sin n\alpha + i\dot{C}_2 \frac{\omega\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r) \cos(n\alpha - \psi), \\ \dot{\mathcal{H}}_r &= -i\dot{C}_1 \frac{n\omega\dot{\epsilon}_1}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r) \sin n\alpha - i\dot{C}_2 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r) \cos(n\alpha - \psi), \\ \dot{\mathcal{H}}_\alpha &= -i\dot{C}_1 \frac{\omega\dot{\epsilon}_1}{\dot{\chi}_1} J_n'(\dot{\chi}_1 r) \cos n\alpha + i\dot{C}_2 \frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1^2 r} J_n(\dot{\chi}_1 r) \sin(n\alpha - \psi); \end{aligned}$$

при $r > R$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_r &= -i \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \left[\dot{C}_1 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2} H_m^{(2)'}(\dot{\chi}_2 r) \cos n\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \dot{C}_2 \frac{n\omega\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2^2 r} H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \sin(n\alpha - \psi) \right], \\ \dot{\mathcal{E}}_\alpha &= i \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \left[\dot{C}_1 \frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2^2 r} H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \sin n\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \dot{C}_2 \frac{\omega\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 r) \cos(n\alpha - \psi) \right], \\ \dot{\mathcal{H}}_r &= -i \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \left[\dot{C}_1 \frac{n\omega\dot{\epsilon}_2}{\dot{\chi}_2^2 r} H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \sin n\alpha + \right. \\ &\quad \left. + \dot{C}_2 \frac{\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2} H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 r) \cos(n\alpha - \psi) \right], \\ \dot{\mathcal{H}}_\alpha &= -i \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \left[\dot{C}_1 \frac{\omega\dot{\epsilon}_2}{\dot{\chi}_2} H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 r) \cos n\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \dot{C}_2 \frac{n\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2^2 r} H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \sin(n\alpha - \psi) \right]. \end{aligned} \quad (67.5)$$

Требую непрерывности тангенциальных компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} на границе раздела сред, приравниваем оба выражения $\dot{\mathcal{E}}_\alpha$ и $\dot{\mathcal{H}}_\alpha$ при $r=R$. Это дает:

$$\begin{aligned} \dot{C}_1 \sin n\alpha \frac{n\dot{\Gamma}}{R} J_n(\dot{\chi}_1 R) \left(\frac{1}{\dot{\chi}_1^2} - \frac{1}{\dot{\chi}_2^2} \right) = \\ \text{и} \quad = \omega \dot{C}_2 \cos(n\alpha - \psi) \left[-\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} J'_n(\dot{\chi}_1 R) + \frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)} H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R) \right] \\ \omega \dot{C}_1 \cos n\alpha \left[-\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\chi}_1} J'_n(\dot{\chi}_1 R) + \frac{\dot{\varepsilon}_2}{\dot{\chi}_2} \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R)}{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)} H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R) \right] = \\ = \dot{C}_2 \sin(n\alpha - \psi) \frac{n\dot{\Gamma}}{R} J_n(\dot{\chi}_1 R) \left(\frac{1}{\dot{\chi}_1^2} - \frac{1}{\dot{\chi}_2^2} \right). \end{aligned}$$

Записанные равенства могут быть выполнены только при идентичной азимутальной зависимости в их левых и правых частях, что ведет к требованию: $\psi = 90^\circ$.

После простых преобразований с учетом (67.4) записываем:

$$\dot{C}_1 \frac{n\dot{\Gamma}}{\omega \dot{\mu}_2} \frac{\dot{k}_1^2 - \dot{k}_2^2}{\dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2} = \dot{C}_2 \left[\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\mu}_2} \dot{\chi}_2 R \frac{J'_n(\dot{\chi}_1 R)}{J_n(\dot{\chi}_1 R)} - \dot{\chi}_1 R \frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)}{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)} \right] \quad (67.6)$$

и

$$- \dot{C}_2 \frac{n\dot{\Gamma}}{\omega \dot{\varepsilon}_2} \frac{\dot{k}_1^2 - \dot{k}_2^2}{\dot{\chi}_1 \dot{\chi}_2} = \dot{C}_1 \left[\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2} \dot{\chi}_2 R \frac{J'_n(\dot{\chi}_1 R)}{J_n(\dot{\chi}_1 R)} - \dot{\chi}_1 R \frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)}{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)} \right]. \quad (67.7)$$

Наконец, из (67.6) и (67.7) можно исключить амплитудные коэффициенты \dot{C}_1 и \dot{C}_2 , в результате чего возникает следующее трансцендентное уравнение относительно поперечных волновых чисел $\dot{\chi}_1$ и $\dot{\chi}_2$, рассматриваемое совместно с (67.4):

$$\begin{aligned} -n^2 \frac{\dot{\Gamma}^2 \dot{k}_2^2}{\dot{\chi}_1^2 \dot{\chi}_2^2} (\dot{k}_1^2 - 1)^2 = \left[\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\mu}_2} \dot{\chi}_2 R \frac{J'_n(\dot{\chi}_1 R)}{J_n(\dot{\chi}_1 R)} - \right. \\ \left. - \dot{\chi}_1 R \frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)}{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)} \right] \left[\frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2} \dot{\chi}_2 R \frac{J'_n(\dot{\chi}_1 R)}{J_n(\dot{\chi}_1 R)} - \dot{\chi}_1 R \frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)}{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R)} \right]. \quad (67.8) \end{aligned}$$

2. Диэлектрический волновод. Прежде всего используем полученные результаты для рассмотрения направляющей системы в виде диэлектрического цилиндра, находящегося в оптически менее плотной среде (обычно это воздух).

Как показывают формулы (67.5), в общем случае поле диэлектрического волновода нельзя отнести ни к классу E , ни к классу H . Однако, например, сопоставление выражений компонент векторов $\dot{\mathcal{E}}$ и $\dot{\mathcal{H}}$ при $r < R$ с формулами для полого волновода (65.4) и (65.9) приводит к выводу, что речь идет как бы о комбинациях знаковых E - и H -полей.

$$\dot{\mathcal{E}} = \dot{C}_1 \dot{\mathcal{E}}^E + \dot{C}_2 \dot{\mathcal{E}}^H, \quad \dot{\mathcal{H}} = \dot{C}_1 \dot{\mathcal{H}}^E + \dot{C}_2 \dot{\mathcal{H}}^H. \quad (67.9)$$

Впрочем, возможны также чистые E - и H -поля. Полагая в (67.8) $n = 0$, т. е. рассматривая поля азимутально однородные,

мы обращаем в нуль левую часть этого трансцендентного уравнения. Это значит, что равно нулю одно из выражений в квадратных скобках справа. Пусть, например, выбор остановлен на первом множителе в квадратных скобках. Из его равенства нулю следует уничтожение правой части равенства (67.6), откуда $\dot{C}_1 = 0$, а следовательно, азимутально однородное поле относится к классу H . Если же равен нулю второй множитель справа в (67.8), то вместе с ним уничтожается и правая часть равенства (67.7); в этом случае $\dot{C}_2 = 0$, и мы имеем поле E . Итак, азимутально однородные поля диэлектрического волновода — это либо H -поля, либо E -поля.

Для азимутально однородных полей ($n = 0$) уравнение (67.8) «распадается» на два более простых, соответствующих уничтожению одного из множителей справа. Запишем их после небольших преобразований с учетом соотношения (П6.17):

$$\frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\mu}_1} \dot{\chi}_1 R \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R)}{J_1(\dot{\chi}_1 R)} = \dot{\chi}_2 R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \quad (H\text{-волны}) \quad (67.10)$$

и

$$\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \dot{\chi}_1 R \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R)}{J_1(\dot{\chi}_1 R)} = \dot{\chi}_2 R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \quad (E\text{-волны}). \quad (67.11)$$

Как видно, при равенстве отношений $\dot{\mu}_2/\dot{\mu}_1 = \dot{\epsilon}_2/\dot{\epsilon}_1$ оба уравнения совпадают, так что азимутально однородные E - и H -поля окажутся в этих условиях вырожденными.

Характер распространения волн в диэлектрическом волноводе уже обсуждался в § 39, п. 4 на простом модельном примере. Аналогичные закономерности можно проследить теперь в случае диэлектрического стержня. Остановимся на исследовании азимутально однородных E -волн при отсутствии поглощения ($\dot{\epsilon}_1 = \epsilon_1$, $\dot{\mu}_1 = \mu_1$ и $\dot{\epsilon}_2 = \epsilon_2$, $\dot{\mu}_2 = \mu_2$, т. е. $\dot{k}_1 = k_1$ и $\dot{k}_2 = k_2$). Пусть поперечное волновое число $\dot{\chi}_1$ вещественно, а потому вещественна левая часть уравнения (67.11); чтобы последнее могло иметь решение, число $\dot{\chi}_2$ должно быть чисто мнимым, так как только при этом будет вещественна правая часть (читателю рекомендуется сделать соответствующую проверку при помощи формулы (П6.8) для цилиндра бесконечного радиуса). Поскольку $\dot{\chi}_1^2 > 0$ и $\dot{\chi}_2^2 < 0$, то, согласно (67.2),

$$k_1^2 > \Gamma^2 > k_2^2 \quad (67.12)$$

(ср. (39.24)), т. е. волны, будучи быстрыми по отношению к внутренности стержня, для внешней среды являются медленными. В силу мнимости $\dot{\chi}_2$ (при должном знаке: $\dot{\chi}_2 = -i\beta$, $\beta > 0$) функции Ханкеля второго рода в (67.5) выражают поверхностный характер этих волн.

На рис. 67.2 качественно представлена зависимость модуля левой части уравнения (67.11) от своего аргумента $\dot{\chi}_1 R$. Кривая образует ряд ветвей, начинающихся в точках на оси абсцисс, для

которых равен нулю числитель $J_0(\chi_1 R)$, и асимптотически касающихся вертикальных прямых, соответствующих обращению в нуль знаменателя $J_1(\chi_1 R)$. Первая ветвь лежит, таким образом, в

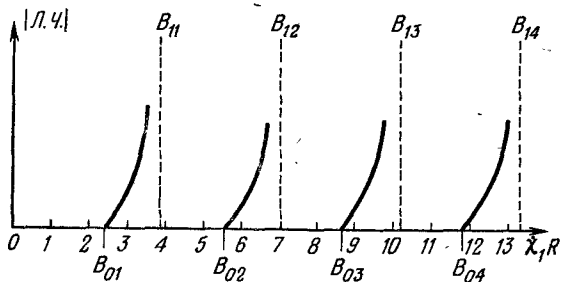


Рис. 67.2.

области значений аргумента $B_{01} < \chi_1 R < B_{11}$, т. е. $2,405 < \chi_1 R < 3,832$, а вообще для произвольной ветви

$$B_{0m} < \chi_1 R < B_{1m}. \quad (67.13)$$

В таких пределах и находятся корни уравнения (67.11). Каждый корень можно найти графически по пересечению кривых, изображающих функции в левой и правой частях (67.11); это показано на рис. 67.3.

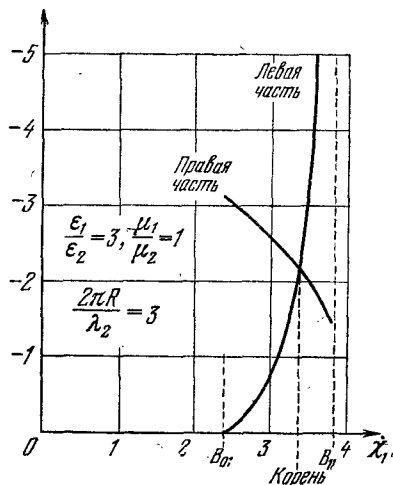


Рис. 67.3.

Убедимся, что поверхность диэлектрического цилиндра проявляется себя как индуктивная импедансная поверхность, т. е. в соотношении типа (62.30), которое имеет вид

$$\dot{E}_m(R) = \dot{z}_S [\dot{H}_m(R), -r_0] \quad (67.14)$$

будет $\dot{z}_S = i\mathcal{X}_S$, $\mathcal{X}_S > 0$. Используя (67.1) и (67.5), имеем

$$\dot{z}_S = \frac{\dot{E}_{mz}}{\dot{H}_{m\alpha}} = -i \frac{\chi_1 J_0(\chi_1 R)}{\omega \epsilon_1 J_1(\chi_1 R)}.$$

Требуемое соотношение выполняется, поскольку в областях аргумента (67.13) функции $J_1(\chi_1 R)$ и $J_0(\chi_1 R)$ имеют разные знаки, что нетрудно понять из рис. П6.1.

Степень концентрации передаваемой энергии диэлектрическим стержнем (быстрота убывания поля в радиальном направлении вне волновода) прямо зависит от величины $\chi_2 = -i\beta$. Чем меньше β ,

тем убывание поля слабее. Критической частотой для волны диэлектрического волновода следует считать такую, при которой χ_2 обращается в нуль:

$$\dot{\chi}_2(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega = \omega_{\text{кр}}. \quad (67.15)$$

При этом из (67.2) и (67.11) имеем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Gamma} &= k_2, \\ J_0(\dot{\chi}_1 R) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \omega = \omega_{\text{кр}}, \quad (67.16)$$

т. е. при $\omega = \omega_{\text{кр}}$ аргумент $\dot{\chi}_1 R$ равен B_{0m} . Равенство (67.4) при $\omega = \omega_{\text{кр}}$ дает $(B_{0m}/R)^2 = \omega_{\text{кр}}^2 (\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2)$, т. е.

$$\omega_{\text{кр}} = \frac{B_{0m}}{R} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1 - \epsilon_2 \mu_2}} \quad (67.17)$$

(ср. с (39.31)). При критической частоте стержень не концентрирует энергии; отсутствует и замедление: согласно первой строчке (67.16)

$$v_{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} \quad \text{при} \quad \omega = \omega_{\text{кр}}. \quad (67.18)$$

Во внешней среде мы имеем распространяющуюся вдоль направления стержня *ТЕМ*-волну, доля энергии внутри него исчезающе мала. Для пояснения сущности процесса можно опять привлечь уже обсуждавшееся построение на рис. 39.9: волна данного типа разрушилась, так как при $\omega = \omega_{\text{кр}}$ на границе стержня перестало выполняться условие полного отражения для составляющих ее внутренних парциальных волн.

Все рассуждения непосредственно относились к азимутально однородным *E*-волнам; они почти без изменений переносятся и на азимутально однородные *H*-волны, поскольку различия уравнений (67.10) и (67.11) несущественны. Что касается всех прочих волн диэлектрического волновода, имеющих продольные компоненты обоих векторов поля, то их анализ уже более сложен, но общие закономерности распространения сходны. Исключение составляет основная волна диэлектрического волновода EH_{11} ($n = 1$ в (67.8); низший корень), критическая частота которой оказывается равной нулю. Ни при какой частоте волна не подвергается описанному ранее разрушению, что, однако, не означает, что диэлектрический волновод остается способным канализировать энергию при сколь угодно низких частотах.

С уменьшением частоты все меньшая доля энергии распространяется внутри стержня, что иллюстрируется графиком на рис. 67.4, *a*; на рис. 67.4, *б* представлены зависимости фазовой скорости волны EH_{11} от плотности и толщины стержня.

Строение поля EH_{11} волны вне волновода по мере уменьшения частоты все более приближается к простейшему типу волны свободного пространства — однородной *ТЕМ*-волне, изучавшейся в

§§ 32, 33. Стержень как бы возмущает уже существующую однородную TEM -волну. Разумеется, при выполнении условия квазистационарности ($R \ll \lambda_1$) поле внутри стержня легко найти, исходя

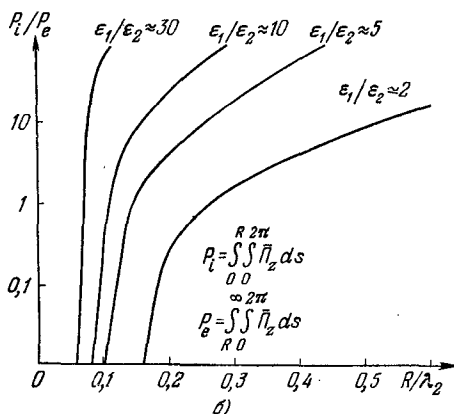
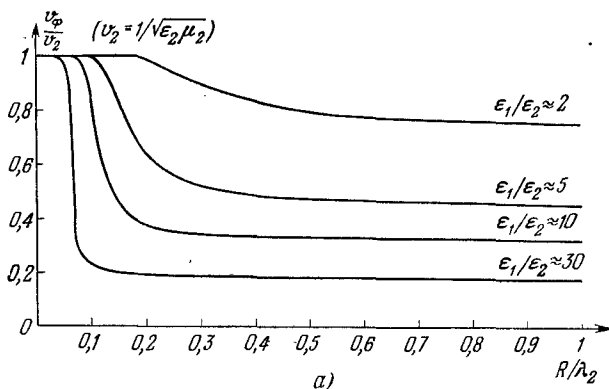


Рис. 67.4.

из знания невозмущенной TEM -волны. Пусть для нее $\dot{\mathbf{E}}_m = \mathbf{x}_0 \dot{A} e^{-ik_2 z}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m = \mathbf{y}_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_2} e^{-ik_2 z}$. Тогда внутри диэлектрического цилиндра

$$\dot{\mathbf{E}}_m \approx \mathbf{x}_0 \frac{2\dot{A} \dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2} e^{-ik_2 z} \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{H}}_m \approx \mathbf{y}_0 \frac{2\dot{A} \dot{\mu}_2}{\dot{W}_2 (\dot{\mu}_1 + \dot{\mu}_2)} e^{-ik_2 z}.$$

Этот результат получен путем непосредственного обобщения формул (20.19) и (21.8), ср. § 50, п. 4.

3. Диэлектрический волновод с идеально проводящим стержнем. Предыдущее рассмотрение легко распространить на тот случай, когда внутри диэлектрического цилиндра коаксиально распо-

жен стержень идеально проводящий. Это образ используемой в технике однопроводной линии, направляющей поверхностную волну (ее называют иногда линией Губо).

В данном случае в области $0 \leq r < R_1$ (рис. 67.5, а) поле отсутствует. Представляя $\dot{\mathcal{E}}_z$ в слое $R_1 \leq r \leq R_2$, мы уже не можем, как в (67.1), отбросить в (П7.17) функцию Неймана и должны написать:

$$\dot{\mathcal{E}}_z = [\dot{C}_1 J_n(\dot{\chi}_1 r) + \dot{C}_2 N_n(\dot{\chi}_1 r)] \cos n\alpha, \quad R_1 \leq r \leq R_2,$$

но соотношение коэффициентов \dot{C}_1 и \dot{C}_2 немедленно находится из требования $\dot{\mathcal{E}}_z = 0$ при $r = R_1$:

$$\frac{\dot{C}_2}{\dot{C}_1} = -\frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)}.$$

Поэтому вместо (67.1) имеем

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 \left[J_n(\dot{\chi}_1 r) - \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 r) \right] \cos n\alpha, & R_1 \leq r \leq R_2, \\ \dot{C}_1 H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \cos n\alpha, & r \geq R_2, \end{cases} \quad (67.19)$$

и далее

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_2 \left[J_n(\dot{\chi}_1 r) - \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 r) \right] \sin n\alpha, & R_1 < r \leq R_2, \\ \dot{C}_2 H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \sin n\alpha, & r \geq R_2. \end{cases} \quad (67.20)$$

Здесь учтено, что при $r = R_1$ должно выполняться граничное условие $\partial \dot{H}_z / \partial r = 0$, а также принято во внимание, что $\psi = 90^\circ$ (теперь это легко предвидеть, см. п. 1).

Дальнейшие действия должны повторять выкладки из п. 1 с той лишь разницей, что функции Бесселя из (67.1) заменяются комбинациями цилиндрических функций из первых строчек (67.19), (67.20). Таким путем читатель легко получит вместо формул (67.3), (67.5), (67.6) и (67.7) аналогичные, которые, правда, будут занимать больше места. Ограничимся записью трансцендентного уравнения, соответствующего (67.8):

$$\begin{aligned} & -n^2 \frac{\dot{\Gamma}^2 \dot{k}_2^2}{\dot{\chi}_1^2 \dot{\chi}_2^2} \left(\frac{\dot{k}_1^2}{\dot{k}_2^2} - 1 \right)^2 = \\ & = \left[\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\mu}_2} \dot{\chi}_2 R_2 \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_2) - \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 R_2)}{J_n(\dot{\chi}_1 R_2) - \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 R_2)} - \dot{\chi}_1 R_2 \frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R_2)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R_2)} \right] \times \\ & \times \left[\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}_2} \dot{\chi}_2 R_2 \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_2) - \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 R_2)}{J_n(\dot{\chi}_1 R_2) - \frac{J_n(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_n(\dot{\chi}_1 R_1)} N_n(\dot{\chi}_1 R_2)} - \dot{\chi}_1 R_2 \frac{H_n^{(2)'}(\dot{\chi}_2 R_2)}{H_n^{(2)}(\dot{\chi}_2 R_2)} \right]. \quad (67.21) \end{aligned}$$

В случае азимутально однородных полей ($n = 0$) это уравнение также распадается на два, одно из которых отвечает H -волнам, а другое — E -волнам. Последнее получается путем приравнивания нулю величины во второй квадратной скобке (67.21); после простых преобразований

$$\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \dot{\chi}_1 R_2 \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R_2) - \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_0(\dot{\chi}_1 R_1)} N_0(\dot{\chi}_1 R_2)}{J_1(\dot{\chi}_1 R_2) - \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R_1)}{N_0(\dot{\chi}_1 R_1)} N_1(\dot{\chi}_1 R_2)} = \dot{\chi}_2 R_2 \frac{H_0^2(\dot{\chi}_2 R_2)}{H_1^2(\dot{\chi}_2 R_2)} \quad (67.22)$$

(ср. (67.11)). Наибольший интерес представляет низшая азимутально однородная E -волна, обозначаемая E_{00} ; она не имеет критической частоты ($\omega_{кр} = 0$) и может рассматриваться как возмущенная диэлектрическим слоем основная волна однопроводной линии (§ 66, п. 1).

Полагая в (67.19) $n = 0$ и пользуясь формулами (61.10), выразим комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} азимутально однородной E -волны вне диэлектрического слоя

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m &= \dot{E}_0 \left[z_0 H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) + r_0 \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2} H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) \right] e^{-i\dot{\Gamma}z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_m &= \alpha_0 E_0 \frac{i\omega \dot{\epsilon}_2}{\dot{\chi}_2} H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 r) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \end{aligned} \right\} r > R_2. \quad (67.23)$$

Строение поля E_{00} схематически представлено на рис. 67.5, б.

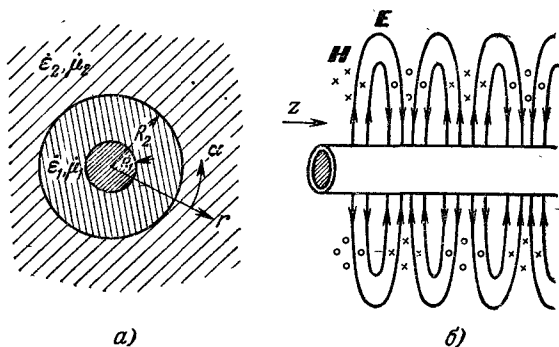


Рис. 67.5.

Разумеется, как и в случае обычного диэлектрического волновода (п. 2), для распространяющихся волн при отсутствии поглощения $\dot{\chi}_1^2 > 0$ и $\dot{\chi}_2^2 < 0$ ($\dot{\chi}_2 = -i\beta$, $\beta > 0$); постоянная распространения лежит в пределах, указанных соотношением (67.12). Взяв формулу (67.15), нетрудно показать, что внешняя поверхность диэлектрика обладает индуктивным импедансом; это предоставляется читателю.

4. Заключение. Исследование аксиально симметричных систем будет продолжено ниже в § 68; при этом мы рассмотрим случаи, когда в одной из областей среда является реальным проводником. В заключение же предыдущего остановимся еще на нескольких примерах систем с неоднородным диэлектриком.

Пусть в круглый волновод, оболочку которого считаем идеально проводящей, внесен коаксиальный диэлектрический цилиндр

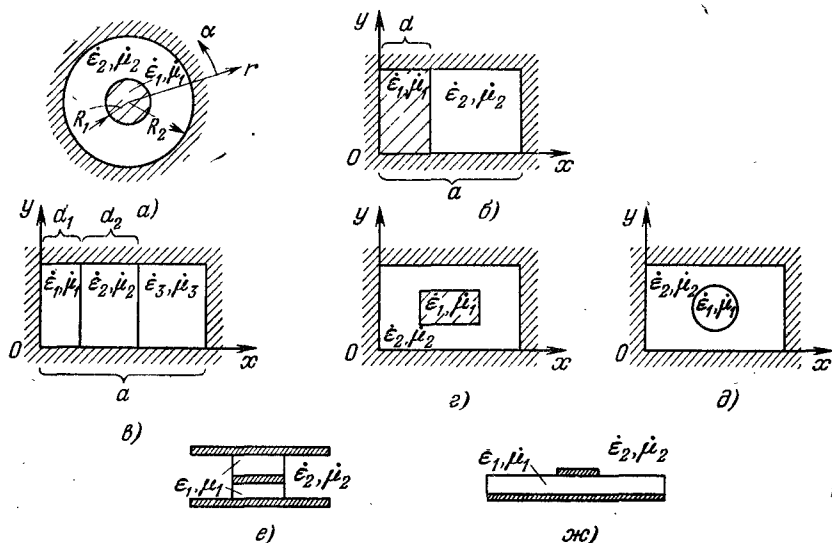


Рис. 67.6.

(рис. 67.6, а). Такая система легко анализируется прежним методом (п. 1). Функции $\dot{\mathcal{E}}_z$ и $\dot{\mathcal{H}}_z$ имеют вид

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 J_n(\dot{\chi}_1 r) \cos n\alpha, & 0 \leq r \leq R_1, \\ \dot{C}_n \left[J_n(\dot{\chi}_2 r) - \frac{J_n(\dot{\chi}_2 R_2)}{N_n(\dot{\chi}_2 R_2)} N_n(\dot{\chi}_2 r) \right] \cos n\alpha, & R_1 \leq r \leq R_2, \end{cases} \quad (67.24)$$

и

$$\dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_2 J_n(\dot{\chi}_1 r) \sin n\alpha, & 0 \leq r \leq R_1, \\ \dot{C}_2 \left[J_n(\dot{\chi}_2 r) - \frac{J_n(\dot{\chi}_2 R_2)}{N_n(\dot{\chi}_2 R_2)} N_n(\dot{\chi}_2 r) \right] \sin n\alpha, & R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases} \quad (67.25)$$

(ср. (67.1) и (67.19), (67.20)). Нахождение поля и вывод трансцендентного уравнения для поперечных волновых чисел предлагается в качестве упражнения. Отметим, что, как и ранее, все волны, за исключением азимутально однородных будут иметь и электрическую, и магнитную продольные компоненты. Эти волны делятся на EH и HE . Первые трансформируются в H -волны, а вторые — в E -волны

круглого волновода при переходе к однородной среде (т. е. при $R_1 \rightarrow 0$ или $k_1 \rightarrow k_2$).

Перейдем к примеру прямоугольного волновода с двухслойной диэлектрической средой (рис. 67.6, б). Задача очень проста. Ограничиваясь случаем H -полей, зависящих только от координаты x , пишем:

$$\mathcal{H}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 \cos \dot{\chi}_1 x, & 0 < x \leq d, \\ \dot{C}_2 \cos \dot{\chi}_2 (a - x), & d \leq x < a \end{cases} \quad (67.26)$$

(удовлетворяется граничное условие $\partial \mathcal{H}_z / \partial x = 0$ при $x = 0$ и $x = a$, ср. § 64, п. 2). Из условия непрерывности продольной компоненты вектора \mathbf{H} на границе раздела сред ($x = d$) имеем

$$\dot{C}_1 \cos \dot{\chi}_1 d = \dot{C}_2 \cos \dot{\chi}_2 (a - d). \quad (67.27)$$

По формулам (61.11) получаем

$$\dot{E}_m = \begin{cases} -y_0 \dot{C}_1 \frac{i\omega \dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} \sin \dot{\chi}_1 x e^{-i\dot{\Gamma}z}, & 0 \leq x \leq d, \\ y_0 \dot{C}_2 \frac{i\omega \dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \sin \dot{\chi}_2 (a - x) e^{-i\dot{\Gamma}z}, & d \leq x \leq a, \end{cases} \quad (67.28a)$$

и

$$\dot{H}_m = \begin{cases} \dot{C}_1 \left[z_0 \cos \dot{\chi}_1 x + x_0 \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_1} \sin \dot{\chi}_1 x \right] e^{-i\dot{\Gamma}z}, & 0 < x < d, \\ \dot{C}_2 \left[z_0 \cos \dot{\chi}_2 (a - x) - x_0 \frac{i\dot{\Gamma}}{\dot{\chi}_2} \sin \dot{\chi}_2 (a - x) \right] e^{-i\dot{\Gamma}z}, & d < x < a. \end{cases} \quad (67.28b)$$

Приравнивая на границе раздела сред тангенциальные компоненты вектора \mathbf{E} , пишем

$$-\dot{C}_1 \frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} \sin \dot{\chi}_1 d = \dot{C}_2 \frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \sin \dot{\chi}_2 (a - d) \quad (67.29)$$

и теперь из (67.27), (67.29) находим следующее уравнение относительно поперечных волновых чисел:

$$\frac{\dot{\mu}_1}{\dot{\chi}_1} \operatorname{tg} \dot{\chi}_1 d + \frac{\dot{\mu}_2}{\dot{\chi}_2} \operatorname{tg} \dot{\chi}_2 (a - d) = 0. \quad (67.30)$$

Числа $\dot{\chi}_1$ и $\dot{\chi}_2$, подчиненные, как и ранее, равенствам (67.2), связаны соотношением (67.4).

Читателю рекомендуются следующие упражнения: а) задавшись свойствами сред и относительными размерами областей, найти несколько решений уравнения (67.30) графически и исследовать распределение поля; б) получить решение задачи, зависящее от x и y (будут ли поля иметь электрическую и магнитную продольные компоненты?); в) рассмотреть трехслойную систему (рис. 67.6, в).

Следует подчеркнуть, что продемонстрированный в этом параграфе подход к решению задач о направляющих системах с неод-

нородными средами далеко не универсален. Он возможен, если в поперечном сечении имеется несколько однородных областей, к каждой из которых может быть применен метод разделения переменных, причем положение условий на границах (как говорят, «сшивание решений») реализуемо в замкнутой форме. За эти рамки выходит, например, уже задача о прямоугольном волноводе с диэлектрическим стержнем типа рис. 67.6, *г*. При таких и более сложных («поперечно-нерегулярных», § 66, п. 1) конфигурациях могут использоваться проекционные методы, § 76, Приложение 8, п. 4, [И. 3].

К направляющим системам с неоднородной средой относятся и различные полосковые линии (рис. 67.6, *е*, *ж*), имеющие большое значение в технике. Практически используется основная волна такой системы, которая была бы волной ТЕМ при однородном диэлектрике (и идеальном проводнике), но в силу влияния оптически более плотной внутренней вставки оказывается замедленной по отношению к внешней среде. Поле быстро убывает в поперечном направлении вне вставки, в чем проявляется ее положительная роль.

§ 68. Действие реального проводника

1. Скин-эффект в цилиндрическом проводе. Сначала вернемся к вопросу о поверхностном эффекте, ранее рассматривавшемся в § 40. Теперь после анализа ряда направляющих систем, описываемых в цилиндрических координатах (§§ 65—67), мы без труда рассмотрим проявление скин-эффекта в проводе.

Пусть вдоль цилиндрического провода радиуса R течет переменный ток. Полагая его распределение равномерным по азимуту ($\partial/\partial\alpha = 0$), а также учитывая, что при конечной проводимости среды току обязательно сопутствует продольное электрическое поле, мы должны заключить, что в целом электромагнитное поле будет иметь вид азимутально однородной E -волны (§ 67, пп. 1—2), так что

$$\dot{E}_{mz} = \dot{C} J_0(\dot{\chi}_1 r) e^{-i\dot{\Gamma}z}, \quad r \leq R.$$

Электрическое поле имеет еще радиальную компоненту E_r (при нулевом порядке функции Бесселя $E_\alpha = 0$). Однако, взяв случай относительно низких частот, когда ток можно считать неизменным вдоль провода ($\partial/\partial z = 0$), и полагая соответственно $\dot{\Gamma} = 0$, из (67.5) находим, что $\dot{E}_{mr} = 0$; при этом также $\dot{\chi}_1 = \dot{k}_1$. Таким образом,

$$\dot{E}_m = z_0 \dot{C} J_0(\dot{k}_1 r), \quad r \leq R, \quad (68.1)$$

или

$$\dot{E}_m = z_0 \dot{C}_{m\tau} \frac{J_0(\dot{k}_1 r)}{J_0(\dot{k}_1 R)}, \quad r \leq R, \quad (68.1a)$$

поскольку тангенциальная компонента вектора \dot{E}_m на поверхности

провода, согласно (68.1), равна $\dot{C}J_0(\dot{k}_1R)$. В силу (33.17) и (40.3) для проводника

$$\dot{k}_1 = \dot{k} = (1-i) \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1-i}{\Delta^0}, \quad (68.2)$$

где Δ^0 — параметр, имеющий смысл «глубины проникновения» в случае плоской границы (§ 40, п. 1).

Полученная формула (68.1a) дает закон распределения поля и плотности тока ($\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$) внутри провода. Несколько кривых зависимости

$$\frac{E_m(r)}{E_{m\pi}} = \frac{j_m(r)}{j_{m\pi}} = \left| \frac{J_0(\dot{k}r)}{J_0(\dot{k}R)} \right|$$

показаны на рис. 68.1, а. Мы видим, что поверхностный эффект проявляется все слабее по мере уменьшения $|\dot{k}R|$ или R/Δ^0 ($\sqrt{2}R/\Delta^0 =$

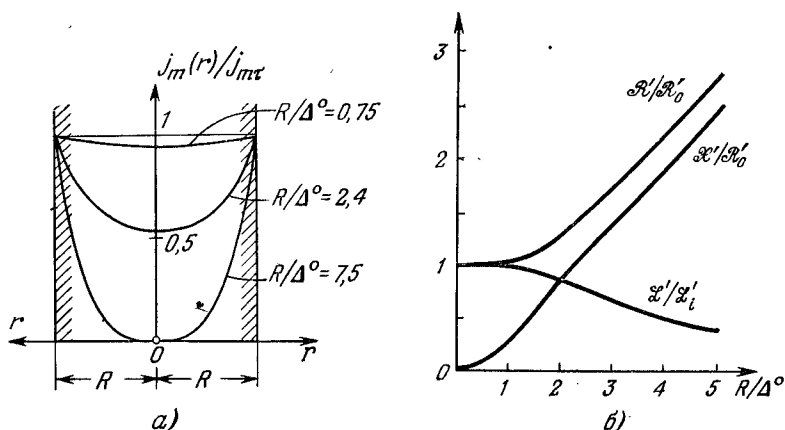


Рис. 68.1.

$= |\dot{k}R|$); он уже очень мал при $R \approx \Delta^0$ (разумеется, надо помнить, что Δ^0 в рассматриваемой задаче не глубина проникновения, как в § 40, а только условный параметр).

Путем интегрирования по поперечному сечению провода величины $j_m = \sigma \dot{E}_m$ найдем комплексную амплитуду проходящего по нему тока проводимости:

$$i_m = \sigma \int_0^R \int_0^{2\pi} \dot{E}_m r dr d\alpha = \frac{2\pi\sigma \dot{E}_{m\pi}}{J_0(\dot{k}R)} \int_0^R J_0(\dot{k}r) r dr.$$

Так как, согласно (П6.18),

$$\int_0^R J_0(\dot{k}r) r dr = \frac{r}{\dot{k}} J_1(\dot{k}r) \Big|_0^R = \frac{R}{\dot{k}} J_1(\dot{k}R),$$

то

$$j_m = \frac{2\pi R \sigma \dot{E}_{m\tau} J_1(\dot{k}R)}{\dot{k} J_0(\dot{k}R)}. \quad (68.3)$$

Отношение

$$\dot{Z}' = \frac{\dot{E}_{m\tau}}{j_m} = \frac{\dot{k}}{2\pi R \sigma} \frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} \quad (68.4)$$

есть не что иное, как сопротивление провода, отнесенное к единице его длины.

Возьмем предельный случай, когда $R/\Delta^0 \rightarrow \infty$ ($|\dot{k}R| \rightarrow \infty$), т. е., можно сказать, исчезает относительная кривизна проводника. На основании (Пб.5) при этом

$$\frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} \rightarrow \frac{\cos\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\dot{k}R - \frac{3\pi}{4}\right)} = i \frac{e^{i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\dot{k}R - \frac{\pi}{4}\right)}}$$

и далее

$$\lim_{|\dot{k}R| \rightarrow \infty} \frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} = i,$$

так как $e^{-i(\dot{k}R - \pi/4)} \rightarrow 0$. Выражение \dot{Z}' (69.4) в пределе принимает вид

$$\dot{Z}' = \frac{1+i}{2\pi R \sigma \Delta^0} = \frac{\dot{Z}'_S}{2\pi R}, \quad (68.5)$$

что совпадает с приближенной формулой (40.20), полученной при выполнении условия сильного скин-эффекта (40.17).

Если же, наоборот, $R/\Delta^0 \ll 1$ ($|\dot{k}R| \ll 1$) и скин-эффект весьма слаб, то, используя разложение (Пб.10), имеем

$$\frac{J_0(\dot{k}R)}{J_1(\dot{k}R)} = \frac{2}{\dot{k}R} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{k}R}{2} \right)^2 + \dots \right].$$

В результате

$$\dot{Z}' = \frac{1}{\pi R^2 \sigma} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2 (1-i)^2}{4\Delta^{0^2}} + \dots \right]. \quad (68.6)$$

Первый член выражает сопротивление при отсутствии скин-эффекта, т. е. при постоянном токе.

Зависимость $\dot{Z}' = \mathcal{R}' + i\mathcal{X}'$ от R/Δ^0 иллюстрируется кривыми на рис. 68.1, б, построенными по точной формуле (68.4). Все величины отнесены к их предельным значениям при постоянном токе ($\omega \rightarrow 0$). Сопротивление имеет индуктивный характер ($\mathcal{X}' > 0$), что нетрудно заметить и в предельных случаях, взяв формулы (68.5) и (68.6). На рис. 68.1, б нанесена также кривая индуктивности единицы длины провода \mathcal{L}' ; эта величина отнесена к получаемой при постоянном токе по формуле (25.25) индуктивности $\mathcal{L}'_i = \mu/8\pi$.

2. Однопроводная линия и круглый волновод. В § 66, п. 1 говорилось об однопроводной линии в виде идеально проводящего цилиндра. Возьмем теперь линию из реального проводника и рас-

смотрим ее основную волну, которая, как это понятно, будет азимутально однородной E -волной. Привлекая трансцендентное уравнение (67.11), допустим, что постоянная распространения этой волны весьма близка к волновому числу ТЕМ-волны во внешней среде (случай идеального провода), т. е. $\dot{\Gamma} \approx \dot{k}_2$ (рис. 67.1). Тогда, согласно (67.2), $|\dot{\chi}_2|$ — весьма малая величина. Учитывая также, что $|\dot{k}_1| \gg |\dot{k}_2|$, из (67.5) имеем: $\dot{\chi}_1 \approx \dot{k}_1$. Это дает основание для записи уравнения (67.11) в виде

$$\omega \dot{\epsilon}_2 \dot{W}_1 R \frac{J_0(\dot{k}_1 R)}{J_1(\dot{k}_1 R)} = \dot{\chi}_2 R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)} \quad (68.7)$$

($W_1 = \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}$). Далее, поскольку речь идет о сильном скин-эффекте, отношение бесселевых функций слева можно считать равным i (см. выше п. 1), так что уравнение еще упрощается:

$$i\omega \dot{\epsilon}_2 \dot{W}_1 R = \dot{\chi}_2 R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)}. \quad (68.8)$$

Как легко проверить, к этому уравнению можно прийти, отказавшись от рассмотрения внутреннего поля (при $r < R$) и вместо этого налагая на внешнее при $r = R$ граничное условие Леонтовича (§ 40, п. 2), которое в данном случае превращается в отношение

$$\frac{\dot{E}_{mz}(R)}{\dot{H}_{m\alpha}(R)} = \dot{W}_1.$$

Внося сюда получаемые из (67.1) и (67.5) с учетом (67.3) величины $\dot{E}_{mz}(R) = \dot{C}_1 H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)$ и $\dot{H}_{m\alpha}(R) = i\dot{C}_1 \frac{\omega \dot{\epsilon}_2}{\dot{\chi}_2} H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 R)$, получаем (68.8); заметим, что можно также использовать формулы (67.23).

Поскольку, как отмечалось, величина $|\dot{\chi}_2|$ очень мала, то при достаточно малом R функции Ханкеля справа в (68.8), почти не отличающиеся от $-iN_0(\dot{\chi}_2 R)$ и $-iN_1(\dot{\chi}_2 R)$ соответственно (это следует из Приложения 6, п. 1), можно представить при помощи соотношений (П6.12). Таким путем получают уравнение ¹⁾

$$(\dot{\chi}_2 R)^2 \ln \frac{2}{\gamma \dot{\chi}_2 R} = i\omega \dot{\epsilon}_2 \dot{W}_1 R. \quad (68.9)$$

Не входя в методику его решения, рассмотрим известный из литературы пример. Медный провод диаметром $2R = 2$ мм расположен в воздухе ($\dot{k}_2 = k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$), и частота составляет 10^9 гц ($\lambda_2 = 30$ см). Оказывается, что $\dot{\chi}_2$ — малая комплексная величина, и определяемая по формуле $\dot{\Gamma} = \sqrt{k_0^2 - \dot{\chi}_2^2}$ постоянная распространения равна: $\dot{\Gamma} = k_0 (1,00006 - i0,000064)$.

¹⁾ Уравнение такого типа было получено еще Зоммерфельдом (см., например, [А.3]) и неоднократно обсуждалось в современных курсах [В.2, 4].

Полученный результат не является неожиданным: распространяющаяся вдоль провода основная волна — это медленная ($\Gamma' > k_0$) волна, затухающая из-за поглощения в проводнике. Она близка к волне ТЕМ идеально проводящей однопроводной линии, но в отличие от этой волны представляет собой реальный физический объект: интеграл типа (66.3) при $I_m \neq 0$ уже не обратится в бесконечность, поскольку в радиальном направлении поле убывает быстрее, чем $1/r$ (зависимость $H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)$). Будучи медленной, волна имеет поверхностный характер (§ 62, п. 4), что обусловлено индуктивным импедансом границы металла (см. выше п. 1). В принципе волна относится к классу E и по своему строению (вне провода) повторяет уже известную структуру волны E_{00} провода с диэлектрической оболочкой (рис. 67.5, б); компоненты поля описываются формулами (67.23). Но продольная компонента вектора E в сравнении с поперечной чрезвычайно мала; действительно, согласно (67.23),

$$\frac{\dot{E}_{mz}}{\dot{E}_{mr}} = -i \frac{\dot{\chi}_2}{\dot{\Gamma}} \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}_2 r)} \approx -i \frac{\dot{\chi}_2}{\dot{\Gamma}} \dot{\chi}_2 r \ln \frac{2}{\dot{\chi}_2 r} \quad (r \geq R),$$

где следует учесть малость $\dot{\chi}_2$.

Заметим, что, принимая во внимание только что обсуждавшийся результат, нетрудно сделать вывод о физической реальности синфазной волны произвольной многосвязной направляющей системы (см. начало п. 4 в § 66).

Высшие волны однопроводной линии из реального проводника мы рассматривать не будем. Анализ показывает [А.3], что эти волны (в отличие от основной) испытывают очень сильное поглощение, поскольку их поля в основном сосредоточены в проводнике (ср. диэлектрический волновод).

Наконец, сделаем несколько замечаний о круглом полем волноводе, рассматривавшемся в § 65, главным образом в предположении идеальной проводимости оболочки. Этот волновод можно трактовать как канал в безграничном проводнике, а на такую систему распространяются все действия, выполненные в § 67, п. 1 — достаточно лишь придать требуемые значения параметрам k_1 и k_2 в (67.2). Поэтому поперечные волновые числа круглого волновода, собственно говоря, надо искать как корни трансцендентного уравнения (67.8), причем ввиду сильного скин-эффекта в проводнике допустимы существенные упрощения данного уравнения. Аналогом уравнения (68.8) является следующее:

$$-i\omega \dot{\epsilon}_1 \dot{W}_2 R = \dot{\chi}_1 R \frac{J_0(\dot{\chi}_1 R)}{J_1(\dot{\chi}_1 R)}. \quad (68.10)$$

Его нетрудно получить на основе граничного условия Леонтовича, что и предлагается читателю.

Как следует из формул (67.5), в общем случае поле круглого волновода (как и в случае волновода диэлектрического, § 67, п. 2), нельзя отнести ни к классу E , ни к классу H . Чистые E - и H -поля

азимутально однородны (E_{0m} и H_{0m}); это показывается так же, как и в § 67, п. 2. Остальные же можно разделить на классы EH и HE в зависимости от соотношения коэффициентов \dot{C}_1 и \dot{C}_2 в формулах (67.11), которые, разумеется, по-прежнему справедливы. При переходе к случаю идеальной проводимости оболочки волны EH становятся волнами H ($\dot{C}_1/\dot{C}_2 \rightarrow 0$), а волны HE — волнами E ($\dot{C}_2/\dot{C}_1 \rightarrow 0$).

Таким образом, теперь подкреплены соображения, высказанные в § 65, п. 5.

III. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Простейшая модель объемного резонатора была рассмотрена в § 36, п. 4, это была система идеально проводящих плоскостей. Различные объемные резонаторы в виде металлических полостей находят широкое применение в радиотехнике СВЧ. Ниже будут рассмотрены свободные (§ 28, п. 1) поля резонаторов; уравнения электродинамики приводят в этом случае к задачам на собственные значения.

§ 69. Общие свойства объемных резонаторов

1. Направляющая система и резонатор. Движение энергии в изолированном объеме может иметь циклический или колебательный характер (рис. 69.1, *a*, *б*). Последнее свойственно любой стоячей волне, в среднем не переносящей энергии. Как известно (§ 34, п. 4, § 36, п. 4), простейшая электромагнитная стоячая волна образу-

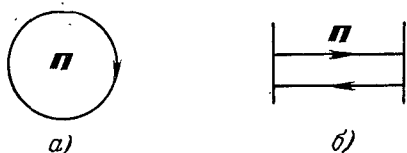


Рис. 69.1.

ется при наложении двух движущихся навстречу плоских однородных волн с одинаковыми амплитудами. Подобно этому возникают стоячие волны и в направляющих системах.

Ясно, что поле типа стоячей волны возможно в области направляющей системы, отсеченной двумя идеально проводящими плоскостями, которые отражают бегущие волны (ср. § 36, п. 4). На рис. 69.2 схематически показаны такие области, образованные диэлектрическим волноводом (*a*), двухпроводной линией (*б*), коаксиальной линией (*в*), прямоугольным и круглым волноводами (*г*, *д*). В последних трех случаях возникают объемы, которые можно рассматривать как полностью ограниченные идеальным проводником.

Исследуем системы типа рис. 69.2 подробнее. Одна бегущая волна в выделенной области, естественно, существовать не может. Взяв ее поперечную электрическую компоненту в виде комплексной амплитуды

$$\dot{E}_{mt} = \dot{E}_e e^{-i\dot{\tau}z},$$

сразу же убеждаемся, что на введенных поперечных плоскостях не удовлетворяется условие равенства нулю тангенциальной компоненты вектора \mathbf{E} , так как для этого должно быть

$$\dot{E}_{mt} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} z = 0, \\ z = L. \end{cases} \quad (69.1)$$

Возьмем теперь суперпозицию двух распространяющихся в противоположные стороны волн; тогда

$$\dot{E}_{mt} = \dot{\mathcal{E}}_t^+ e^{-i\Gamma z} + \dot{\mathcal{E}}_t^- e^{i\Gamma z}, \quad (69.2)$$

где $\dot{\mathcal{E}}_t^+$ и $\dot{\mathcal{E}}_t^-$ могут различаться только постоянным коэффициентом, так как поперечные распределения полей обеих волн одинаковы ¹⁾.

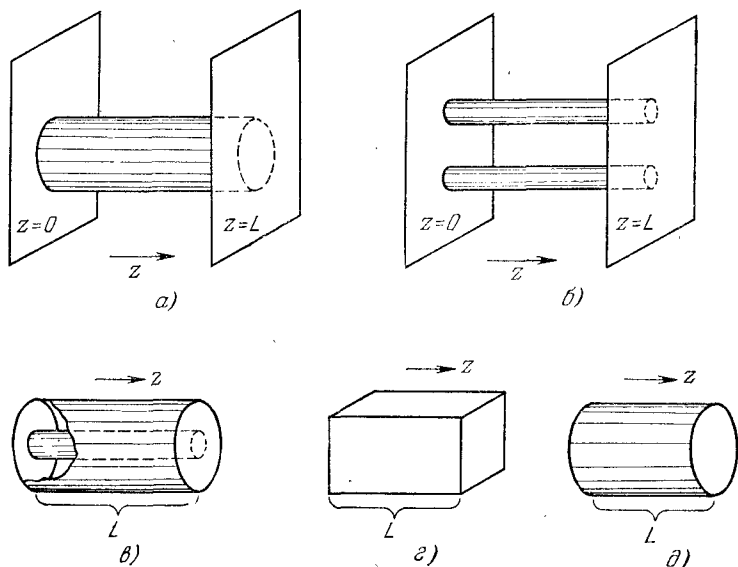


Рис. 69.2.

Требование (69.1) в данном случае легко выполнить; подчиняя ему функцию \dot{E}_{mt} (69.2), получаем

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_t^+ + \dot{\mathcal{E}}_t^- &= 0, \\ \dot{\mathcal{E}}_t^+ e^{-i\Gamma L} + \dot{\mathcal{E}}_t^- e^{i\Gamma L} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (69.3)$$

а эта система уравнений относительно $\dot{\mathcal{E}}_t^+$ и $\dot{\mathcal{E}}_t^-$ всегда разрешима. Используя первую строчку (69.3), приводим выражение (69.2) к виду

$$\dot{E}_{mt} = -i2\dot{\mathcal{E}}_t^+ \sin \Gamma z. \quad (69.4)$$

¹⁾ Это утверждение при анизотропии среды может оказаться несправедливым.

Вторая же строчка (69.3) равносильна равенству

$$\sin \dot{\Gamma}L = 0, \quad (69.5)$$

из которого следует

$$\dot{\Gamma} = \frac{\rho\pi}{L}, \quad \rho = (0), 1, 2, \dots \quad (69.6)$$

Остается истолковать полученные результаты. Мы видим, что в отсеченном объеме действительно может существовать суперпозиция двух противоположно движущихся волн, составляющих стоячую волну. Отличительным качеством последней является независимость фазы поля от координат (§ 36, п. 4); формулы (69.4), (69.6) демонстрируют это. Весьма существенно, что постоянная распространения $\dot{\Gamma}$ принимает ряд значений (69.6), каждому из которых отвечает определенный тип стоячей волны; это поясняется

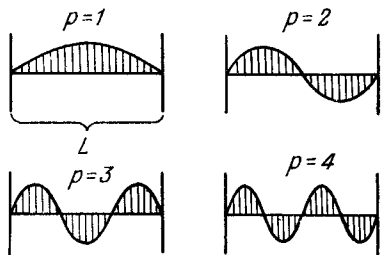


Рис. 69.3.

на рис. 69.3, показывающем различные продольные распределения компоненты E_{ml} , соответствующие разным значениям $\dot{\Gamma}$ в (69.4).

К чему сводятся условия существования типов стоячей волны между идеально проводящими перегородками, выясним, привлекая общее соотношение (61.3)

$$\dot{k}^2 = \dot{\chi}^2 + \dot{\Gamma}^2.$$

Внося сюда значения $\dot{\Gamma}$ из (69.6), имеем

$$\dot{k}^2 = \dot{\chi}^2 + \chi_z^2, \quad \chi_z = \frac{\rho\pi}{L} \quad (69.7)$$

(новое обозначение χ_z аналогично χ_x и χ_y из § 64). «Разрешенные» значения $\dot{\Gamma} = \chi_z$ (69.6) вещественны, что, как мы знаем, возможно при отсутствии поглощения в направляющей системе, так что $\dot{k} = k$; позднее, правда, будет сделано важное дополнение (см. ниже п. 3). Подставим в (69.7) $\dot{k}^2 = \omega^2\epsilon\mu$. Немедленно следует вывод, что отнюдь не любую частоту может иметь поле в отсеченном объеме: каждому типу стоячей волны свойственна *собственная частота*

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\dot{\chi}^2 + \chi_z^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \sqrt{\dot{\chi}^2 + \left(\frac{\rho\pi}{L}\right)^2}. \quad (69.8)$$

Объем обладает, так сказать, частотной избирательностью, т. е. является *резонатором*.

Рассматриваемый объемный резонатор — система с бесконечным числом степеней свободы. Его собственные круговые частоты ω_0 образуют последовательность

$$0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n \leq \dots, \quad (69.9)$$

причем эти величины получаются не только перебором всех p в (69.8) в соответствии с (69.6), но и выбором разных поперечных волновых чисел направляющей системы $\chi = \chi_{mn}$ (различные типы волн). Разумеется, можно говорить как о собственных круговых частотах $\omega_0 = \omega_n$, так и об обычных собственных частотах $f_0 = \omega_0/2\pi$ либо о собственных длинах волн $\lambda_0 = v/f_0 = 1/f_0 \sqrt{\epsilon\mu}$ и собственных волновых числах $k_0 = \omega_0/v = \omega_0 \sqrt{\epsilon\mu}$.

Обращаясь к соотношению (61.2), сделаем один очень простой вывод. При сопоставлении (61.2) и (69.6) получаем

$$L = p \frac{\Lambda}{2}, \quad p = (0), 1, 2, \dots, \quad (69.10)$$

т. е. условием существования поля оказывается кратность длины резонатора L половине длины волны $\Lambda/2$ в направляющей системе.

Случай $p = 0$ требует особого внимания. Из (69.4) и (69.6) видно, что при $p = 0$ электрическое поле совершенно лишено поперечной компоненты. Это может быть только при отсечке E -волны полой направляющей системы; электрическое поле тогда продольно, как показано на рис. 69.4 (граничные условия на идеально проводящих перегородках, конечно, выполняются). Так как при отсечке $\Lambda \rightarrow \infty$, то, согласно (69.10), длина резонатора неопределенна:

$$L = 0 \cdot \infty \quad \text{при } p = 0, \quad (69.10a)$$

она на самом деле может быть любой — условия существования поля изменением L не затрагиваются. Получаемая при $p = 0$ из (69.6) величина $\dot{\Gamma} = 0$ как раз и соответствует случаю отсечки ($f = f_{кр}$). Формула собственных частот (69.8) здесь принимает вид

$$\omega_0 = \frac{\chi}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (69.11)$$

Действительно, собственные частоты являются критическими (ср. величину $f_{кр} = \chi/2\pi \sqrt{\epsilon\mu}$ (62.17) и $f_0 = \omega_0/2\pi$).

Отметим важное свойство, которым обладают электромагнитные поля в виде чистых стоячих волн. Если электрическое поле имеет везде постоянную фазу, т. е. в выражении комплексной амплитуды $\dot{E}_m = E_m e^{i\varphi_E}$ фаза φ_E не зависит от координат, то

$$\dot{H}_m = \frac{i}{\omega\mu} \text{rot } \dot{E}_m = H_m e^{i(\varphi_E + \frac{\pi}{2})},$$

где $H_m = \frac{1}{\omega\mu} \text{rot } E_m$. Таким образом,

$$\varphi_H = \varphi_E + \frac{\pi}{2}, \quad (69.12)$$

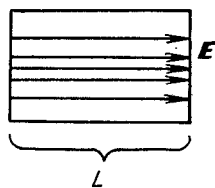


Рис. 69.4.

т. е. векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} сдвинуты на 90° по фазе, рис. 69.5: в некоторые моменты в резонаторе существует только электрическое поле ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_m, \mathbf{H} = 0$), и есть такие моменты, когда, наоборот, существует только магнитное поле ($\mathbf{H} = \mathbf{H}_m, \mathbf{E} = 0$). При условии (69.12) в любой области резонатора в среднем передача энергии отсутствует: $\bar{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \text{Re} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m^*] = 0$.

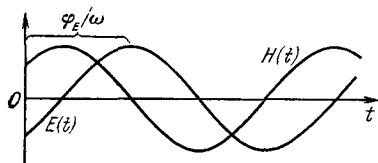


Рис. 69.5

В заключение сделаем замечание о резонаторах с циклическими потоками энергии (рис. 69.1, а). Поле типа бегущей волны в ограниченном объеме можно создать, образовав из направляющей системы замкнутую цепь; берут, например, согнутый в кольцо прямоугольный волновод (рис. 69.6, а). Конечно, в кольцеобразном резонаторе возможна и стоячая волна как суперпозиция двух волн, бегущих навстречу. С другой стороны, не следует думать, что циклические потоки энергии бывают лишь в двусвязных областях. В круглом волноводе, как известно (§ 65, п. 1), поля могут быть вращающимися; легко проверить, что в поперечном сечении вращающаяся волна создает циклический поток энергии ($\bar{\mathbf{P}}_a \neq 0$). Если такая волна резонирует в цилиндрическом объеме (рис. 69.2, д), то движение энергии является колебательным вдоль оси z и циклическим при $z = \text{const}$, что схематически показано на рис. 69.6, б. То же самое возможно в полости квадратного сечения, напри-

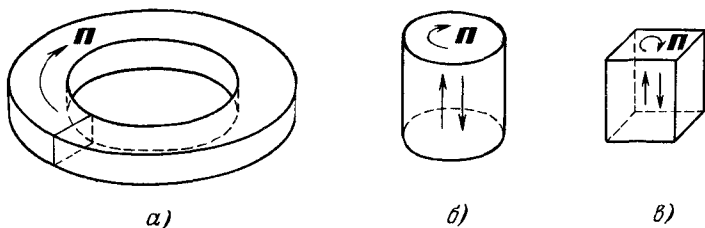


Рис. 69.6.

мер, при резонансе волн H_{10} и H_{01} , фазы которых отстают на 90° (рис. 69.6, в). Позднее (§ 70) мы вернемся к обсуждению подобных случаев.

2. Полые резонаторы. Задачу о резонаторе в виде объема, ограниченного идеально проводящей оболочкой, нетрудно поставить независимо от рассмотрения полого волновода. В принципе форма полости произвольна, и полый резонатор вовсе не обязательно должен образовывать отсеченный отрезок волновода. Общий подход тем более важен, что в технике (особенно в электронике СВЧ) иногда находят применение полые резонаторы довольно сложной формы.

Задача о полом резонаторе ставится как граничная задача для уравнений Максвелла или производных уравнений второго порядка. Так, взяв уравнения (29.16) и (29.17), при исследовании свободных полей ($\mathbf{j}^{\text{ст}} = 0$) в полости V с границей S имеем следующие граничные задачи:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\mu}^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m - \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m &= 0 \text{ в } V, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m\tau} &= 0 \text{ на } S, \end{aligned} \right\} \quad (69.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{\epsilon}^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m - \omega^2 \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m &= 0 \text{ в } V, \\ (\dot{\epsilon}^{-1} \text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m)_\tau &= 0 \text{ на } S. \end{aligned} \right\}$$

В случае однородной изотропной среды

$$\text{div } \dot{\mathbf{E}}_m = 0 \quad \text{и} \quad \text{div } \dot{\mathbf{H}}_m = 0, \quad (69.14)$$

и исходные уравнения преобразуются в уравнения Гельмгольца (29.20) и (29.21), а задачи (69.13) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{E}}_m &= 0 \text{ в } V, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m\tau} &= 0 \text{ на } S \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} \nabla^2 \dot{\mathbf{H}}_m + \dot{k}^2 \dot{\mathbf{H}}_m &= 0 \text{ в } V, \\ (\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m)_\tau &= 0 \text{ на } S \end{aligned} \right\} \quad (69.15)$$

($\dot{k}^2 = \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu}$). Условия (69.14) необходимо принимать во внимание и при нахождении полей резонаторов из (69.15). Например, потенциальное решение $\dot{\mathbf{E}}_m = \text{grad } \dot{\phi}_m$ первой задачи (69.15), для которого $\text{div } \dot{\mathbf{E}}_m \neq 0$ в V (возможно, за исключением границы S), отбрасывается. Оно не имеет электродинамического содержания: в однородной среде обязательно $\text{div } \dot{\mathbf{E}}_m = 0$, если нет объемного заряда ($\rho_m = 0$). В то же время функция $\dot{\mathbf{E}}_m = \text{grad } \dot{\phi}_m$ может быть решением более общей краевой задачи (П5.29).

Трехмерные задачи (69.15) полезно сравнить с двумерными задачами (62.8) и (62.12), которые ставятся при рассмотрении полых волноводов. В данном случае, воспользовавшись формулой (П5.32), с учетом (69.14) для задач (69.15) получаем

$$\dot{k}^2 = k_0^2 = \frac{\int_V |\text{rot } \dot{\mathbf{E}}_m|^2 dv}{\int_V |\dot{\mathbf{E}}_m|^2 dv} = \frac{\int_V |\text{rot } \dot{\mathbf{H}}_m|^2 dv}{\int_V |\dot{\mathbf{H}}_m|^2 dv} > 0. \quad (69.16)$$

Читателю рекомендуется вывести (69.6) непосредственно из (69.15).

Ряд конкретных резонаторов мы рассмотрим в § 70.

3. Колебания при поглощении. В реальных резонаторах происходит поглощение энергии, в результате чего свободные колебания оказываются затухающими. Экспоненциальное убывание запаса энергии в изолированной системе было рассмотрено еще в § 12, п. 1. Пусть теперь имеется такая система в виде резонатора с идеально проводящей оболочкой, содержащего поглощающую среду.

Если резонатор построен на основе полого волновода (быть может, неодносвязного, как, скажем, коаксиальная линия), то в формуле (69.7) $\dot{\chi}^2 = \chi^2 \geq 0$ (§ 62, пп. 1—2), и мы получаем неравенство

$$\dot{k}^2 = k_0^2 > 0. \quad (69.17)$$

Такой же смысл имеют и найденное для полых резонаторов произвольной формы соотношение (69.16). Собственные волновые числа $k_0 = \omega_0 \sqrt{\epsilon \mu}$, таким образом, вещественны, что ввиду комплексности проницаемостей возможно, только если комплексна величина ω_0 . Мы пришли к представлению о комплексных собственных частотах резонатора с поглощением¹⁾, которые будем обозначать

$$\dot{\omega}_0 = \omega'_0 + i\omega''_0. \quad (69.18)$$

Вместо (69.8) в данном случае из (69.7) будет следовать:

$$\dot{\omega}_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\chi^2 + \chi_z^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \sqrt{\chi^2 + \left(\frac{\rho \pi}{L}\right)^2}. \quad (69.19)$$

Полагая, что $\omega'_0 > 0$, легко убедиться (ср. § 33, п. 1), что для обычных поглощающих сред $\omega''_0 > 0$.

Каков смысл комплексной собственной частоты? Желая выразить напряженности поля в резонаторе, пишем:

$$\left. \begin{aligned} E &= \text{Re } \dot{E}_m e^{i\dot{\omega}_0 t} = E_m e^{-\omega''_0 t} \cos(\omega'_0 t + \varphi_E), \\ H &= \text{Re } \dot{H}_m e^{i\dot{\omega}_0 t} = H_m e^{-\omega''_0 t} \cos(\omega'_0 t + \varphi_H) \end{aligned} \right\} \quad (69.20)$$

(для случая, когда все компоненты векторов имеют одинаковые фазы), т. е., как и ожидалось, они, колеблясь, убывают. При этом круговой частотой колебаний является вещественная часть комплексной собственной частоты $\omega'_0 = \text{Re } \dot{\omega}_0$; мнимая же часть $\omega''_0 = \text{Im } \dot{\omega}_0$ есть коэффициент затухания. Обычно $\omega''_0 \ll \omega'_0$, и процесс является почти периодическим. Действительно, введем величины: $T' = 2\pi/\omega'_0$ — удвоенный интервал между ближайшими нулевыми значениями $E(t)$ или $H(t)$ и $T'' = 1/\omega''_0$ — «постоянную времени», указывающую, через какой интервал наибольшее значение $E(t)$ или $H(t)$ уменьшится в $e \approx 2,71$ раза. Записанное выше неравенство означает, что $T' \ll T''$ (рис. 69.7); T' можно рассматривать как период процесса на том основании, что в течение нескольких T' колебания, можно сказать, неотличимы от гармонических с частотой $f'_0 = \omega'_0/2\pi$.

Допустим, что при очень малом поглощении ($\omega''_0 \ll \omega'_0$) правомерна энергетическая трактовка (30.18) равенства (30.116). Пони-

¹⁾ Уместно подчеркнуть, что представление о двух бегущих волнах, составляющих поле резонатора (п.1), сохраняется. Постоянная распространения $\dot{\Gamma} = \sqrt{\dot{\omega}_0^2 \epsilon \mu - \chi^2}$, несмотря на поглощение, остается вещественной величиной.

мая \bar{W}° и \bar{W}^M как средние за период T' , для свободных колебаний изолированной системы ($P^{CT} = 0$, $\Pi = 0$ на S) из (30.18) имеем

$$\bar{W}^{\circ} = \bar{W}^M. \quad (69.21)$$

При этом

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \bar{W}^{\circ} + \bar{W}^M = 2\bar{W}^{\circ} = 2\bar{W}^M = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2\omega_0'' t} \int_V \varepsilon' E_m^2 dv = \frac{1}{2} e^{-2\omega_0'' t} \int_V \mu' H_m^2 dv, \end{aligned} \quad (69.22)$$

где были взяты выражения напряженностей (69.20); замена t на $t \pm T'$ должна лишь ничтожно изменять \bar{W} . Таким образом,

$$\bar{W}(t) = \bar{W}(0) e^{-2\omega_0'' t}. \quad (69.23)$$

Нетрудно убедиться, что в прежнем приближении $\bar{W}(t) = W(t)$. Фазовое соотношение (69.12) для напряженностей (69.20)

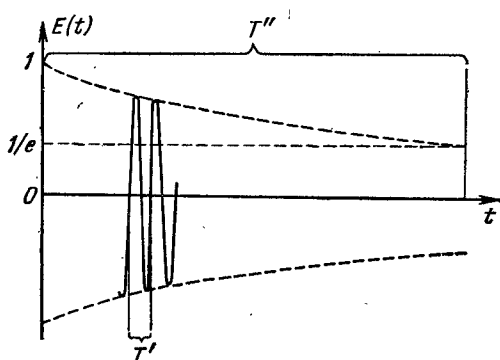


Рис. 69.7.

сохраняется с большой точностью, поскольку $\text{Re}(\dot{\omega}_0 \dot{\mu}) \gg \text{Im}(\dot{\omega}_0 \dot{\mu})$ (см. вывод в п. 1). Поэтому

$$\begin{aligned} W(t) &= \frac{1}{2} e^{-2\omega_0'' t} \left[\cos^2(\omega_0' t + \varphi_E) \int_V \varepsilon' E_m^2 dv + \sin^2(\omega_0' t + \varphi_E) \times \right. \\ &\times \left. \int_V \mu' H_m^2 dv \right] = \frac{1}{2} e^{-2\omega_0'' t} \int_V \varepsilon' E_m^2 dv = \frac{1}{2} e^{-2\omega_0'' t} \int_V \mu' H_m^2 dv \end{aligned} \quad (69.24)$$

(ввиду (69.22)), т. е.

$$W(t) = W_{max}^{\circ}(t) = W_{max}^M(t) = \bar{W}(t). \quad (69.24a)$$

Введем величину, называемую добротностью резонатора. Это отношение

$$Q = \frac{\omega_0' W}{P_R} = 2\pi \frac{W}{\Delta W_{T'}}, \quad (69.25)$$

где $\bar{P}_\pi = \bar{P}_\pi(t)$ — средняя мощность, расходуемая при поглощении, а $\Delta W_{T'} = WT'$ — убыль запаса энергии $W = W(t)$ за период T' . Поскольку с учетом предыдущего

$$\bar{P} = -\frac{dW}{dt} = 2\omega_0' W,$$

то также справедливо

$$Q = \omega_0' / 2\omega_0''. \quad (69.26)$$

Остается сделать некоторые обобщения. Не может быть сомнений в том, что экспоненциальное убывание энергии свободных колебаний (69.23) свойственно не только случаю, когда поглощение происходит в одном внутреннем диэлектрике. Принимая во внимание поглощение энергии в металлических элементах (не являющихся в действительности идеально проводящими), а также, быть может, излучение (например, из отверстия в оболочке полого резонатора), мы не теряем права пользоваться понятиями комплексной собственной частоты и добротности. В общем случае в (69.25) $\bar{P}_\pi = \bar{P}_d + \bar{P}_m + \bar{P}_\Sigma$, где учтены перечисленные факторы; слагаемые соответствуют каждому из них в отдельности (индексы означают: д — диэлектрик, м — металл, Σ — излучение). Из (69.25) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Q} &= \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_m} + \frac{1}{Q_\Sigma}, \\ Q_d &= \frac{\omega_0' W}{\bar{P}_d}, \quad Q_m = \frac{\omega_0' W}{\bar{P}_m}, \quad Q_\Sigma = \frac{\omega_0' W}{\bar{P}_\Sigma}, \end{aligned} \right\} \quad (69.27)$$

где Q_d , Q_m и Q_Σ — «частичные» добротности (ср. 63.13). Зная добротность Q и собственную частоту $\omega_0 = \omega_0'$, нетрудно на основании (69.18) и (69.26) определить собственную комплексную частоту:

$$\omega_0 = \omega_0' \left(1 + i \frac{1}{2Q} \right). \quad (69.28)$$

В заключение остановимся на определении частичных добротностей Q_d и Q_m . Из (69.27), (69.24) и (30.14) при $\mu'' = 0$ получаем

$$Q_d = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{1}{\operatorname{tg} \Delta} \quad (69.29)$$

(в (30.14) \dot{E}_m в соответствии с (69.20) заменяется на $\dot{E}_m e^{-\omega_0'' t}$, а ω — на ω_0' ; среда однородна, так что ε' и ε'' выносятся за знак интеграла).

Для нахождения Q_m используем формулу (40.10), по которой ввиду (69.20)

$$\bar{P}_m = \frac{1}{2\sigma\Delta^0} e^{-2\omega_0'' t} \int_S H_m^2 ds = \frac{1}{2} \mathcal{R} \int_S e^{-2\omega_0'' t} H_m^2 ds$$

($H_m = H_{m\tau}$). Внося это в выражение Q_m (69.27) и представляя W , согласно (69.24), через H_m , получаем

$$Q_m = \frac{\omega_0 \mu' \int_V H_m^2 dv}{\mathcal{R}_S \int_V H_m^2 ds} = \frac{2\mu' \int_V H_m^2 dv}{\Delta^0 \mu_m \int_S H_m^2 ds}, \quad (69.30)$$

где μ' характеризует внутреннюю среду (диэлектрик), а μ_m — металл (обычно $\mu_m = \mu_0$). При пользовании данными формулами H_m находят для системы с идеальным проводником (см. § 40, п. 2), т. е. так же, как при определении Γ_m'' по формуле (63.21).

§ 70. Важнейшие объемные резонаторы

1. Прямоугольный резонатор. Поле прямоугольного резонатора, представляющего собой полый параллелепипед (рис. 70.1, а) с идеально проводящей поверхностью, можно найти, решая краевые задачи (69.15) с учетом (69.14). Для этого векторы \dot{E}_m и \dot{H}_m проектируются на оси декартовой системы координат, и на общие

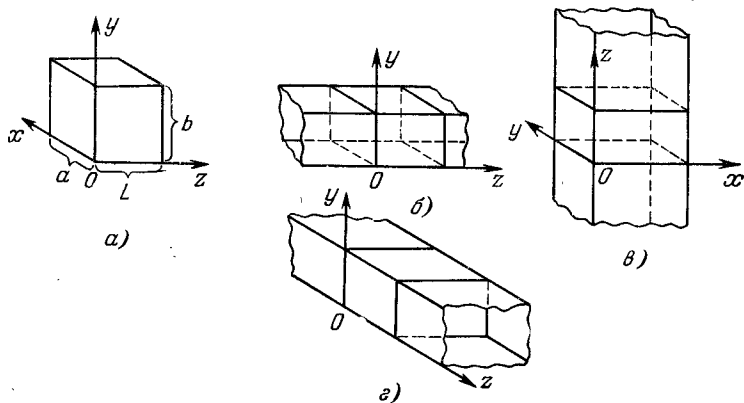


Рис. 70.1.

решения получающихся скалярных уравнений Гельмгольца налагаются указанные в (69.15) граничные условия. Заметим, что формулируемые при этом краевые задачи относительно компонент векторов \dot{E}_m и \dot{H}_m , в отличие от задач (П5.27), (П5.28) являются «смешанными» (условия типа $u = 0$ на одной части поверхности и $\partial u / \partial \nu = 0$ на другой). Описанный подход читатель может испытать, опираясь на материал Приложения 7.

Другой путь, идущий от представления стоячей волны в виде двух бегущих навстречу (§ 69, п. 1), в данном случае оказывается более коротким, так как мы уже располагаем выражениями всех компонент этих волн (§ 64). Надо лишь удовлетворить граничным условиям при $z = 0$ и $z = L$, как это делалось в § 69, п. 1. Рассмат-

ривая последовательно E - и H -волны прямоугольного волновода, на основании формул (64.4) и (64.10) находим E -поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= \dot{E}_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{mx} &= -\dot{E}_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{my} &= -\dot{E}_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{mx} &= i\dot{E}_0 \frac{\dot{\omega}_0 \dot{\epsilon} \chi_y}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{my} &= -i\dot{E}_0 \frac{\dot{\omega}_0 \dot{\epsilon} \chi_x}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{L} \end{aligned} \right\} (70.1)$$

и H -поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= \dot{H}_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{mx} &= -\dot{H}_0 \frac{\chi_x \chi_z}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{my} &= -\dot{H}_0 \frac{\chi_y \chi_z}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{mx} &= i\dot{H}_0 \frac{\dot{\omega}_0 \dot{\mu} \chi_y}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{my} &= -i\dot{H}_0 \frac{\dot{\omega}_0 \dot{\mu} \chi_x}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{p\pi z}{L} \end{aligned} \right\} (70.2)$$

прямоугольного резонатора. Здесь $\chi_x = m\pi/a$, $\chi_y = n\pi/b$, $\chi_z = p\pi/L$, $\chi = \chi_{mn}$, $\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_{mnp}$; при этом в (70.1) $m = 1, 2, \dots$, $n = 1, 2, \dots$, $p = 0, 1, 2, \dots$, а в (70.2) $m = (0), 1, 2, \dots$, $n = (0), 1, 2, \dots$, $p = 1, 2, \dots$. Неопределенные коэффициенты \dot{E}_0 и \dot{H}_0 отличаются от таких же коэффициентов в § 64 вдвое по модулю. Величина χ_{mn} определяется по формуле (64.3), а собственная частота $\dot{\omega}_0$ — по формуле (69.19), которая принимает вид

$$\dot{\omega}_0 = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}} \sqrt{\chi_{mn}^2 + \chi_z^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}. \quad (70.3)$$

Запишем также выражение собственной длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$:

$$\lambda_0 = \lambda_{mnp} = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{L}\right)^2}. \quad (70.4)$$

Векторные функции \dot{E}_m и \dot{H}_m , составляемые из компонент (70.1) и (70.2), являются *собственными функциями* задач (69.15); им отвечают *собственные значения* $k_{mnp}^2 = \dot{\omega}_{mnp}^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu}$, которые для обеих задач одинаковы.

Подобно тому как в случае прямоугольного волновода говорилось о *типах волн* E_{mn} и H_{mn} , теперь введем представление о *типах*

колебаний (полей) E_{mnp} и H_{mnp} прямоугольного резонатора, происхождение которых можно видеть в наложении этих волн. Всякие три целых положительных числа m , n и p (нуль пока исключается) определяют типы полей E_{mnp} (70.1) и H_{mnp} (70.2), имеющих равные собственные частоты ω_{mnp} (70.3). При $a \neq b \neq L$ существуют только эти два типа колебаний с частотой ω_{mnp} , т. е., как говорят, вырождение двукратно (ср. § 64, п. 5). Но, например, в случае кубического резонатора ($a = b = L$) при $m \neq n \neq p$ типов колебаний с той же частотой уже двенадцать, это E_{mnp} , E_{mpn} , E_{nmp} , E_{npm} , E_{pnm} , E_{pntn} , H_{mnp} , H_{mpn} , H_{nmp} , H_{npm} , H_{pnm} и H_{pntn} (они различаются хотя бы ориентацией поля). Из соображений, изложенных в § 64, пп. 1, 2 и § 69, п. 1, следует, что лишь одно из чисел m , n и p может принимать нулевое значение; в (70.1) это p , а в (70.2) m или n .

Подчеркнем, что выбор продольной оси z для прямоугольного резонатора, в отличие от волновода произволен. Можно тремя способами устанавливать ось z , что соответствует получению резонатора путем пересечения поперечными плоскостями трех различных волноводов (рис. 70.1, б, в, г). Каждому из фактических типов полей можно, таким образом, сопоставить три разных трактовки.

Основным принято называть тип колебаний с наименьшим собственным волновым числом $k_{mnp} = \omega_{mnp} \sqrt{\epsilon \mu}$ (наибольшей собственной длиной $\lambda_{mnp} = 2\pi/k_{mnp}$). Пусть L — самое короткое ребро параллелепипеда ($L < a$, $L < b$), тогда

$$\min k_{mnp} = k_{110} = \pi \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}, \quad (70.5)$$

т. е. основным является тип колебаний E_{110} . При $b < a$, $b < L$ основным будет тип H_{101} , а при $a < b$, $a < L$ — тип H_{011} . Впрочем, соответствующие поля различаются только ориентацией, так что при замене координат $x \rightarrow z$, $y \rightarrow x$, $z \rightarrow y$ потребуется изменение обозначений $E_{110} \rightarrow H_{101}$, а при $x \rightarrow y$, $y \rightarrow z$, $z \rightarrow x$ — $E_{110} \rightarrow H_{011}$. Основным всегда будет тип колебаний без вариаций поля вдоль наименьшего ребра.

Выпишем компоненты поля H_{101} в комплексных амплитудах (70.2):

$$\begin{aligned} \dot{E}_{my} &= -i\dot{H}_0 \frac{a\dot{\omega}_0\mu}{\pi} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{mz} &= H_0 \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \dot{H}_{mx} = -\dot{H}_0 \frac{a}{L} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi z}{L} \end{aligned} \quad (70.6)$$

($\dot{\omega}_0 = (\pi/\sqrt{\epsilon \mu})\sqrt{1/a^2 + 1/L^2}$). Строение поля представлено на рис. 70.2. Сопоставляя это изображение с «мгновенным снимком» волны H_{10} прямоугольного волновода (рис. 64.6), видим, что по сравнению с ним электрическое и магнитное поля резонатора сдвинуты на расстояние $\Lambda/4$ по оси z ; благодаря этому, можно сказать, удовлетворяются граничные условия при $z = 0$ и $z = L$. рассмат-

ривая изображенное поле при соответствующей замене координат как E_{110} , мы можем отождествить его с волной E_{11} при критической частоте (§ 69, п. 1).

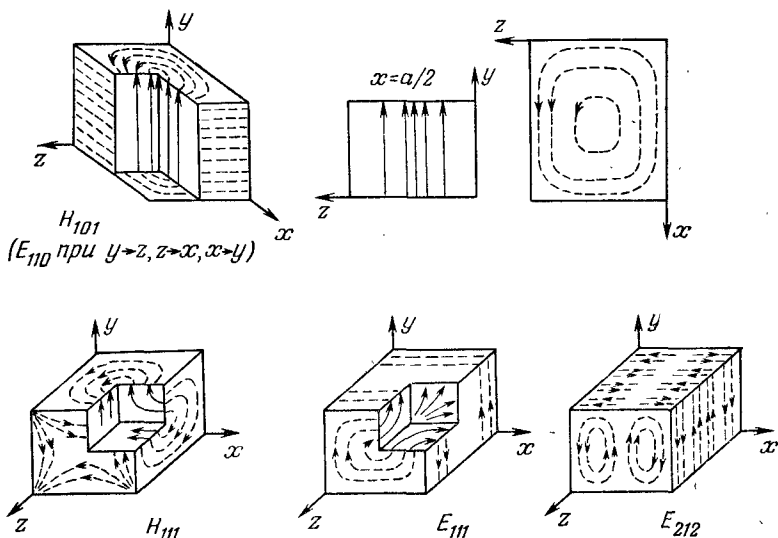


Рис. 70.2.

Рис. 70.2 дает также представление о высших типах полей резонатора; сравнение с рис. 64.4 и рис. 64.6 приводит к аналогичному выводу о соотношении полей резонатора и волновода. Заметим, что поле E_{111} можно рассматривать как наложение двух таких полей, которые трактуются как H_{111} в системах координат, получаемых при замене $x \rightarrow z$, $y \rightarrow x$, $z \rightarrow y$ и $y \rightarrow z$, $z \rightarrow x$, $x \rightarrow y$ соответственно. Подобным же образом описываются и другие высшие поля.

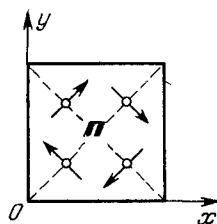


Рис 70.3.

На примере прямоугольного резонатора легко показать возможность свободных колебаний с циклическим потоком энергии (§ 69, п. 3). Взяв поля H_{101} и H_{011} с одинаковыми амплитудами и фазовым сдвигом $\pm 90^\circ$ (в (70.2) $\dot{H}_0 = A$ для H_{101} и $\dot{H}_0 = \pm iA$ для H_{011}), получим

$$\vec{\Pi} = \pm \frac{A^2 \omega_0 \mu}{2} (-x_0 \chi_x^{-1} \sin \chi_x x \cos \chi_y y + y_0 \chi_y^{-1} \cos \chi_x x \sin \chi_y y) \times \sin^2 \chi_z z \quad (70.7)$$

($\epsilon = \epsilon$, $\dot{\mu} = \mu$). На рис. 70.3 для квадратного сечения ($a = b$) показано направление вектора $\vec{\Pi}$ в точках $x = \pm a/4$, $y = \pm b/4$ и $0 < z < L$ при выборе в (70.7) знака плюс.

Наконец, приведем вычисление добротности прямоугольного резонатора Q_m для типа колебаний H_{101} по формуле (69.30). Интегралы в числителе и знаменателе находятся в пренебрежении поглощением. На основании (70.6) $H_m^2 = H_0^2 \left(\cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi z}{L} + \frac{a^2}{L^2} \times \right.$

$\left. \times \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi z}{L} \right)$, и интегрирование по объему дает

$$\int_0^a \int_0^b \int_0^L H_m^2 dx dy dz = H_0^2 \frac{abL}{4} \left(1 + \frac{a^2}{L^2} \right),$$

а при интегрировании по поверхности получаем

$$\begin{aligned} 2 \int_0^L \int_0^a H_m^2 dz dx + 2 \int_0^a \int_0^b H_m^2 |_{z=0} dx dy + 2 \int_0^b \int_0^L H_m^2 |_{x=0} dy dz = \\ = H_0^2 \left[\frac{aL}{2} \left(1 + \frac{a^2}{L^2} \right) + \frac{a^3 b}{L^2} + bL \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{abL(L^2 + a^2)}{aL(L^2 + a^2) + 2b(L^3 + a^3)}. \quad (70.8)$$

При пропорциональном увеличении размеров резонатора в m раз во столько же раз возрастает множитель при $1/\Delta^0$ и уменьшается собственная частота (70.3), а потому глубина проникновения Δ^0 увеличивается в \sqrt{m} раз; таким образом, добротность Q_m растет, как \sqrt{m} . В частном случае кубического резонатора ($a = b = L$) формула (70.8) принимает вид

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{a}{3}, \quad (70.8a)$$

а при $a \gg b$ и $L \gg b$

$$Q_m \approx \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} b. \quad (70.8б)$$

Поскольку собственная частота типа колебаний H_{101} не зависит от b (в (70.3) $n = 0$), добротность такого плоского резонатора с уменьшением b пропорционально падает.

2. Односвязный и двусвязный цилиндрические резонаторы. Совершенно так же, как в случае прямоугольного резонатора, поля резонатора в виде кругового цилиндра (рис. 70.4) находятся при наложении распространяющихся навстречу волн соответствующего волновода (§ 69, п. 1) на основании имеющих формулы (65.4) и (65.9). Это дает

E-поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= J_n(\chi r) A(n\alpha) \cos \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{mr} &= -\frac{\chi z}{\chi} J'_n(\chi r) A(n\alpha) \sin \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= -\frac{n\chi z}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) \sin \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{mr} &= i \frac{n\dot{\omega}_0 \dot{\epsilon}}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) \cos \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= -i \frac{\dot{\omega}_0 \dot{\epsilon}}{\chi} J'_n(\chi r) A(n\alpha) \cos \frac{\rho\pi z}{L}, \end{aligned} \right\} (\chi z = \frac{\rho\pi}{L}, \chi = \chi_{nm}) \quad (70.9)$$

($p = 0, 1, 2, \dots$), причем $\chi = \chi_{nm}$ определяется по формуле (65.3) и, согласно (69.19),

$$\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_{nmp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}} \sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{L}\right)^2}, \quad \lambda_0 = \lambda_{nmp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{B_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{L}\right)^2}} \quad (70.10)$$

(числа B_{nm} сведены в таблицу в приложении 6, п. 6);
H-поля

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{mz} &= J_n(\chi r) A(n\alpha) \sin \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{mr} &= \frac{\chi z}{\chi} J'_n(\chi r) A(n\alpha) \cos \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{H}_{m\alpha} &= \frac{n\chi z}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) \cos \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{mr} &= -i \frac{n\dot{\omega}_0 \dot{\mu}}{\chi^2 r} J_n(\chi r) A'(n\alpha) \sin \frac{\rho\pi z}{L}, \\ \dot{E}_{m\alpha} &= i \frac{\dot{\omega}_0 \dot{\mu}}{\chi} J'_n(\chi r) A(n\alpha) \sin \frac{\rho\pi z}{L} \end{aligned} \right\} (\chi z = \frac{\rho\pi}{L}, \chi = \chi_{nm}), \quad (70.11)$$

($p = 1, 2, \dots$); здесь $\chi = \chi_{nm}$ определяется по формуле (69.19), так что

$$\dot{\omega}_0 = \dot{\omega}_{nmp} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}} \sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{L}\right)^2}, \quad \lambda_0 = \lambda_{nmp} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{A_{nm}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\rho\pi}{L}\right)^2}} \quad (70.12)$$

(числа A_{nm} см. таблицу в приложении 6, п. 6).

Разумеется, векторные функции \dot{E}_m и \dot{H}_m , составляемые из компонент (70.9) и (70.11), являются собственными функциями задач (69.15), а по формулам (70.10) и (70.12) находятся отвечающие им собственные значения $k_{nmp}^2 = \dot{\omega}_{nmp} \dot{\epsilon} \dot{\mu}$, которые одинаковы для обеих задач.

Так как направление z , в отличие от прямоугольного резонатора, в данном случае выделено вследствие аксиальной симметрии области, то и деление полей на классы E и H уже не относительно. Вырождение колебаний также имеет иной характер и обусловлено главным образом теми обстоятельствами, которые были описаны при рассмотрении круглого волновода (§ 65 пп. 1 и 5). В частности,

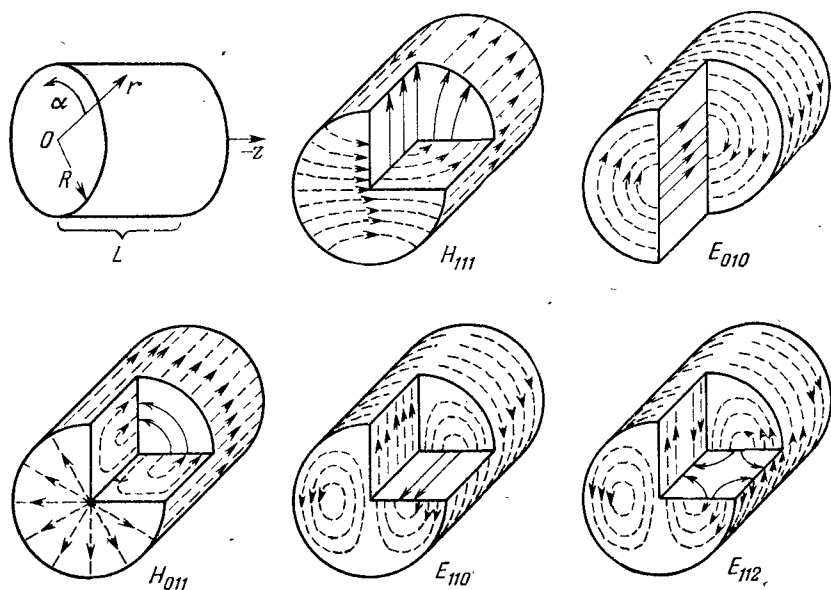


Рис. 70.4.

собственные частоты типов колебаний E_{nmp} и H_{nmp} не совпадают. Строение некоторых полей показано на рис. 70.4; его рекомендуется сравнить с рис. 65.2 и 65.4.

Интересно, что в зависимости от формы цилиндрического резонатора, т. е. от соотношения R и L , основным типом колебаний является H_{111} либо E_{010} . Действительно, как следует из (70.10) и (70.12), волновые числа $k_{111}^H = \dot{\omega}_{111}^H \sqrt{\epsilon\mu}$ и $k_{010}^E = \dot{\omega}_{010}^E \sqrt{\epsilon\mu}$ равны при

$$\left(\frac{B_{01}}{R}\right)^2 = \left(\frac{A_{11}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2,$$

т. е. в случае резонатора с соотношением размеров

$$\frac{L}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{B_{01}^2 - A_{11}^2}} \approx 2,03 \quad (70.13)$$

колебания H_{111} и E_{010} вырождены. При иных соотношениях L и R одно из указанных волновых чисел будет наименьшим, а именно:

$$\min k_{nmp} = \begin{cases} k_{010}^E & \text{при } L/R < 2,03, \\ k_{111}^H & \text{при } L/R > 2,03. \end{cases} \quad (70.14)$$

Таким образом, E_{010} — основной-тип колебаний плоского резонатора, а H_{111} — вытянутого.

Легко убедиться, что вращающиеся поля цилиндрического резонатора ($A(n\alpha) = Ce^{\pm in\alpha}$) создают азимутальный поток энергии (§ 69, п. 3). Так, для типа колебаний H_{11p} на основании (70.11) получаем

$$\bar{\Pi} = \pm \alpha_0 \frac{C^2 \omega_0 \mu}{2 \chi^2} \frac{J_1^2(\chi r)}{r} \sin^2 \chi z z \quad (\dot{\varepsilon} = \varepsilon, \dot{\mu} = \mu). \quad (70.15)$$

Перейдем к вычислению добротности Q_m . Для произвольного типа колебаний H_{nmp} при азимутальной зависимости $A(n\alpha) = C \cos n\alpha$ без поглощения $E_m^2 = C^2 \frac{\omega_0^2 \mu^2}{\chi^2} \left[\frac{n^2 J_n^2(\chi r)}{\chi^2 r^2} \sin^2 n\alpha + J_n^2(\chi r) \times \right. \\ \left. \times \cos^2 n\alpha \right] \sin^2 \frac{p\pi z}{L}$ и ввиду (69.21)

$$\int_V H_m^2 dv = \frac{\varepsilon}{\mu} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L E_m^2 r dr d\alpha dz = \\ = \delta C^2 \frac{k_0^3}{\chi^4} \pi L \int_0^{nm} \left[\frac{n^2 J_n^2(x)}{x^2} + J_n^2(x) \right] x dx = \delta C^2 \frac{k_0^3}{2\chi^4} \pi L (A_{nm}^2 - n^2) J_n^2(A_{nm}),$$

где $\delta = 1$ при $n = 0$ и $\delta = 1/2$ при $n \neq 0$ (см. (П6.21)). Далее

$$H_m^2 = C^2 J_n^2(\chi r) \cos^2 n\alpha \sin^2 \frac{p\pi z}{L} + \\ + C^2 \frac{\chi_z^2}{\chi^2} \left[J_n^2(\chi r) \cos^2 n\alpha + \frac{n^2}{\chi^2 r} J_n^2(\chi r) \sin^2 n\alpha \right] \cos^2 \frac{p\pi z}{L}.$$

Поэтому

$$\int_S H_m^2 ds = 2 \int_0^R \int_0^{2\pi} H_m \Big|_{z=0} r dr d\alpha + R \int_0^R \int_0^{2\pi} H_m^2 \Big|_{r=R} d\alpha dz = \\ = \delta C^2 \left\{ 4\pi \left(\frac{\chi_z}{\chi^2} \right)^2 \int_0^{nm} \left[\frac{n^2 J_n^2(x)}{x^2} + J_n^2(x) \right] x dx + \pi LR J_n^2(A_{nm}) \left(1 + \frac{n^2 \chi_z^2}{\chi^4 R^2} \right) \right\} = \\ = \delta C^2 \pi \left[\frac{2\chi_z^2}{\chi^4} (A_{nm}^2 - n^2) + LR \left(1 + \frac{n^2 \chi_z^2}{\chi^4 R^2} \right) \right] J_n^2(A_{nm}) \\ (\delta = 1 \text{ при } n=0 \text{ и } \delta = 1/2 \text{ при } n \neq 0).$$

Внося полученные результаты в (69.30), после преобразований находим

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{RL}{(2R-L) \left(\frac{\chi_z}{k_0} \right)^2 + L \frac{A_{nm}^2}{A_{nm}^2 - n^2}} \quad (70.16)$$

($n \neq 0$ и $n = 0$).

Аналогично выводятся формулы добротности Q_m в классе E -полей. Ограничимся записью готового результата для типа колебаний E_{010} :

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{RL}{R+L}. \quad (70.17)$$

Предлагается получить его самостоятельно в качестве упражнения.

Наконец, рассмотрим двусвязный цилиндрический резонатор, построенный на основе коаксиальной линии (рис. 70.5). Основной интерес представляют в данном случае поля класса TEM . Комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} собственных колебаний находим подобно предыдущему, составляя суперпозицию противоположно

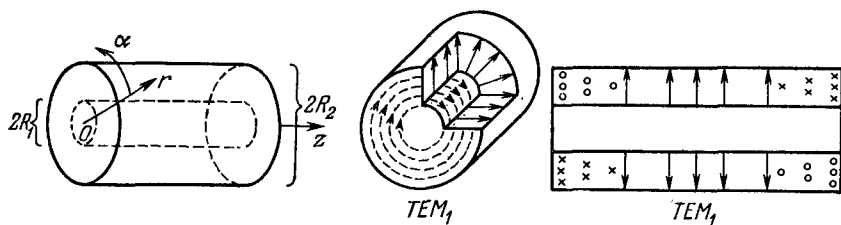


Рис. 70.5.

направленных волн TEM (§ 69, п. 1) и используя при этом формулы (66.14):

$$\dot{E}_m = -r_0 \dot{A} \frac{i\dot{W}}{r} \sin \frac{\rho\pi z}{L}, \quad (70.18)$$

$$\dot{H}_m = \alpha_0 \dot{A} \frac{1}{r} \cos \frac{\rho\pi z}{L}$$

($\rho = 1, 2, \dots$), причем $\dot{W} = \sqrt{\mu/\epsilon}$ и $\dot{A} = I_m/2\pi$, где I_m — комплексная амплитуда тока в пучности. Типы колебаний будем называть TEM_p ; на рис. 70.5 показано строение полей. Соответствующие собственные частоты определяются по формуле (69.19):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{\rho\pi}{L}, \quad \lambda_0 = \frac{2L}{\rho}. \quad (70.19)$$

Определим добротность Q_m для типа колебаний TEM_p . Очевидно,

$$\int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L H_m^2 r \, dr \, d\alpha \, dz = \pi LA^2 \ln \frac{R_2}{R_1}$$

и

$$\begin{aligned} 2 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} H_m^2 |_{z=0} r \, dr \, d\alpha + \int_0^L \int_0^{2\pi} (R_1 H_m^2 |_{r=R_1} + R_2 H_m^2 |_{r=R_2}) \, d\alpha \, dz = \\ = \pi A^2 \left[4 \ln \frac{R_2}{R_1} + L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right], \end{aligned}$$

так что, согласно (69.30),

$$Q_m = \frac{1}{\Delta^0} \frac{\mu'}{\mu_m} \frac{2L \ln \frac{R_2}{R_1}}{4 \ln \frac{R_2}{R_1} + L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}. \quad (70.20)$$

3. Объемные резонаторы, близкие к квазистационарным. Квазистационарные (см. Введение, (В.1)) резонирующие системы, называемые обычно «колебательными контурами», обладают тем свойством, что их электрические и магнитные поля можно считать пространственно разделенными (§ 27, п. 2): первые практически сосредоточены в емкостных элементах, а вторые — в индуктивных. В этом

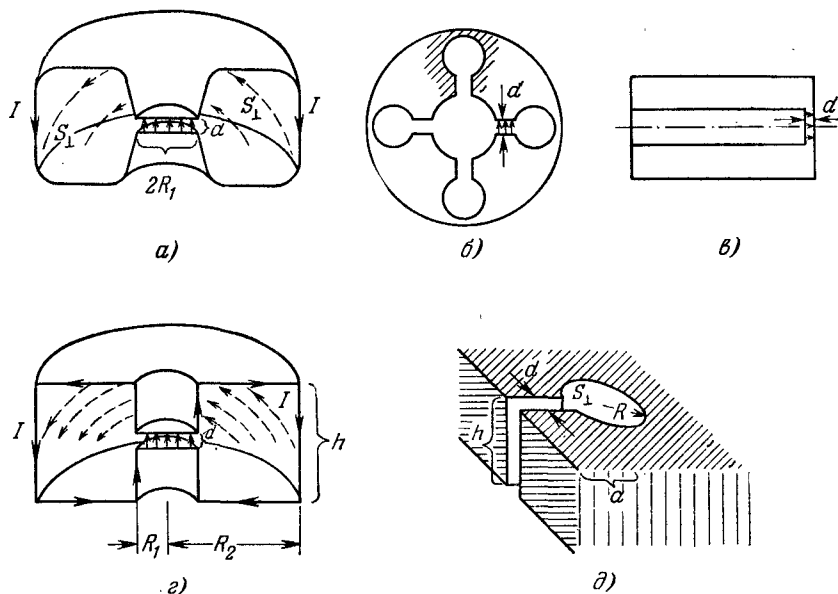


Рис. 70.6.

смысле к ним близки некоторые объемные резонаторы, применяемые главным образом в электронике СВЧ. Таковы, например, колебательные системы клистронов, магнетронов и триодных СВЧ генераторов, схематически изображенные на рис. 70.6, а, б, в. Их электрические поля, можно сказать, локализованы в узких квазистационарных зазорах ($d \ll \lambda$), внутри или вблизи которых происходит взаимодействие колебаний системы с электронным потоком (квазистационарность зазора связана с требованием, чтобы время пролета электронов было малым в сравнении с периодом колебаний). Зазор поэтому приближенно можно рассматривать как плоский конденсатор, приписывая роль чистой индуктивности примыкающему объему.

Применим такой подход в случае *тороидального резонатора* (рис. 70.6, а, з). Для плоского конденсатора в зазоре

$$C \approx \frac{\varepsilon S}{d} = \frac{\varepsilon \pi R_1^2}{d}$$

(§ 17, п. 6). Магнитные силовые линии являются концентрическими, так что в квазистационарном приближении $H = I/2\pi r$ (ср. § 25, п. 3, случай тороида), где I — полный ток, охватываемый магнитным потоком. Индуктивность равна

$$\mathcal{L} = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu}{I} \int_{S_{\perp}} H ds = \frac{\mu}{2\pi} \int_{S_{\perp}} \frac{ds}{r}.$$

Теперь можно вычислить собственную частоту:

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}} \approx \sqrt{\frac{2\pi d}{\varepsilon \mu S \int_{S_{\perp}} \frac{ds}{r}}}. \quad (70.21)$$

В частности, для прямоугольного тороида (рис. 70.6, з) эта формула принимает вид

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{2d}{\varepsilon \mu h R_1^2 \ln \frac{R_2}{R_1}}}. \quad (70.21a)$$

Рассмотренный тип колебаний является основным; нетрудно убедиться, что при достаточно малом d собственная длина волны $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{\varepsilon \mu}}$ может значительно превышать все размеры тороидального резонатора, который оказывается при этом в целом квазистационарной системой.

На рис. 70.6, д изображена отдельная ячейка магнетронного резонатора (рис. 70.6, б). Собственная частота ее основного типа колебаний находится аналогично. Емкость конденсатора в зазоре равна

$$C \approx \frac{\varepsilon ah}{d}.$$

Примыкающая плоскость в некотором приближении подобна отрезку бесконечного соленоида, так что $H \approx I/h$ (§ 24, п. 3) и

$$\mathcal{L} = \frac{\Phi}{I} \approx \frac{\mu HS_{\perp}}{I} = \frac{\mu \pi R^2}{h}.$$

Отсюда

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}} \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{d}{\varepsilon \mu \pi a}}. \quad (70.22)$$

Заметим, что по этому же принципу можно получить приближенное выражение критической частоты для основного типа волны Н-образного или П-образного волновода (рис. 66.2, а), поле

которого при $\omega = \omega_{кр}$ должно иметь тот же характер, что и в «сдвоенном» резонаторе типа рис. 70.6, д. Формула имеет вид

$$\omega_{кр} \approx 2 \sqrt{b' / \epsilon \mu a' (a - a')} b \quad (70.23)$$

(см. обозначения размеров на рис. 66.2, б). Читателю предлагается вывести эту формулу.

Что касается коаксиального резонатора с зазором, показанного на рис. 70.6, в, то он может приближенно рассматриваться с позиций теории цепей как отрезок линии, закороченной на одном конце и нагруженный емкостью на другом.

4. Заключение. Сделаем несколько общих замечаний. В п. 1 было показано, что добротность Q_m прямоугольного резонатора для типа колебаний H_{101} вместе с увеличиваемыми в m раз размерами растет как \sqrt{m} , т. е. как $\sqrt{\lambda_0}$. Легко убедиться, что данная закономерность свойственна всем типам колебаний полых резонаторов. Действительно, для фиксированного типа колебаний отношение интегралов

$$\int_V H_m^2 dv \Big/ \int_S H_m^2 ds$$

в (69.30) при неизменной форме резонатора пропорционально λ_0 , а глубина проникновения Δ^0 — корню квадратному из λ_0 .

Для каждого типа колебаний объемный резонатор можно охарактеризовать эквивалентными параметрами \mathcal{L} , C и \mathcal{R} , в выборе которых, однако, существует неопределенность, поскольку в энергетических соотношениях

$$W_m^M = \frac{\mathcal{L} I_m^2}{2}, \quad W_m^Э = \frac{C U_m^2}{2} = \frac{q_m^2}{2C}$$

($W_m^Э = W_m^M$) ток или заряд в общем случае могут определяться разными способами. Можно, например, в качестве q взять заряд на какой-то части оболочки резонатора и энергетически определить C ; тогда индуктивность находится из соотношения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}.$$

Сопrotивление \mathcal{R} (последовательной эквивалентной схемы) вычисляется после этого по известной добротности: $\mathcal{R} = \omega_0 \mathcal{L} / Q = 1 / \omega_0 C Q$.

В ряде случаев существует естественный способ определения эквивалентных параметров. Так, для типа колебаний E_{010} цилиндрического резонатора без поглощения, согласно (70.9) и (70.10), $\dot{E}_m = z_0 A J_0(\chi r)$, $\dot{H}_m = \alpha_0 \frac{iA}{W} J_1(\chi r)$ ($\chi = B_{01}/R$, $W = \sqrt{\mu/\epsilon}$, $\omega_0 = B_{01}/R \sqrt{\epsilon\mu}$), и запас энергии равен (П6.20)

$$W = W_m^M = W_m^Э = \frac{\epsilon}{2} \int_V E_m^2 dv = \frac{1}{2} \pi A^2 \epsilon R^2 L J_1^2(B_{01}). \quad (70.24)$$

Заряды — одинаковые по абсолютной величине и разные по знаку — локализованы на основаниях цилиндра, а ток проходит по боковой поверхности вдоль образующей и далее по основаниям радиально, убывая на них до нуля в центре. Взяв в качестве q заряд одного основания, а в качестве I — ток, проходящий по полной боковой поверхности, имеем (Пб.18)

$$q_m = \int_{S_{\text{осн}}} \xi_m ds = \varepsilon \int_{S_{\text{осн}}} E_m ds = 2\pi A \varepsilon R^2 J_1(B_{01})/B_{01}, \quad (70.25)$$

$$I_m = 2\pi R \eta_m = 2\pi R H_m |_{r=R} = 2\pi R A J_1(B_{01})/W.$$

Емкость и индуктивность при этом находятся из энергетических выражений независимо:

$$C = 4\pi \varepsilon R^2/B_{01}^2 L \quad \text{и} \quad \mathcal{L} = \mu L/4\pi \quad (70.26)$$

и оказываются «согласованными», поскольку по формуле $\omega_0 = 1/\sqrt{\mathcal{L}C}$ получается правильное значение ω_0 .

Привлекая выражение добротности Q_m (70.17), находим также

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0 \mathcal{L}}{Q} = \frac{1}{\omega_0 C Q} = \frac{\omega_0 \mu_m \Delta^0}{4\pi} \left(1 + \frac{L}{R}\right) = \frac{\mathcal{R}_S}{2\pi} \left(1 + \frac{L}{R}\right) \quad (70.27)$$

(при отсутствии поглощения в диэлектрике).

Предлагается рассмотреть таким же способом коаксиальный резонатор (поля ТЕМ) и прямоугольный резонатор при основных колебаниях.

IV. ВЫНУЖДЕННЫЕ ПОЛЯ. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ

Электромагнитные поля в объемных резонаторах и направляющих системах, используемых в радиотехнике, обычно бывают *вынужденными*; они возбуждаются посредством специальных *элементов связи*, играющих по существу роль антенн. Свободные колебания резонаторов и свободные волны волноводов — это *возможные* поля в этих системах при отсутствии внешних энергетических связей; лишь изредка они представляют технический интерес сами по себе. Вынужденные поля выступают как *необходимое* следствие действия источников (§ 28, п. 1). При определенных условиях вынужденное поле в волноводе или резонаторе может быть очень близким по строению к свободному полю того или иного типа, но отличается уже тем, что его амплитуда вполне определена расходом энергии внешних источников. В общем случае, как будет показано, вынужденные поля можно получать при решении электродинамических задач как суперпозиции свободных полей (позднее мы сделаем некоторые уточнения).

Регулярными называют направляющие системы и объемные резонаторы, для которых соответствующие краевые задачи электродинамики имеют замкнутые аналитические решения. В случае полых резонаторов с однородной изотропной средой это задачи (69.15);

в § 66, п. 1 в этом смысле говорилось о задачах (62.8) и (62.12). Реальные системы всегда в той или иной степени нерегулярны. Направляющие системы не бесконечны и содержат различные элементы (включая элементы связи), усложняющие их форму и свойства среды. Употребляются всевозможные соединения волноводов и других направляющих систем, полых элементов и т. д. Поэтому ниже будет уделено внимание и этим вопросам.

§ 71. Вынужденные колебания резонатора

1. Постановка задачи. На рис. 71.1 показаны три основных способа соединения полого резонатора с экранированной направляющей системой: в качестве «оконечной нагрузки» (рис. 71.1, *а*), «последовательного элемента» (рис. 71.1, *б*) и «параллельного элемента» (рис. 71.1, *в*). Соединительное отверстие служит элементом связи —

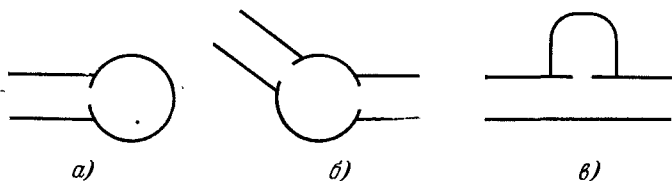


Рис. 71.1.

антенной, возбуждающей поле в резонаторе под действием электромагнитного процесса в волноводе; это может быть, в частности, щелевая антенна (§ 55, п. 2). Роль такого же элемента связи могут играть различные подобию электрического и магнитного элементарных излучателей (§§ 44, 45) — «штырьки» и «рамки»; в электронике СВЧ резонаторы возбуждаются электронным потоком. В гл. 6 будет говориться также о возбуждении резонаторов активной средой, свойства которой обусловлены параметрическими или квантовыми процессами. Различные элементы связи показаны на рис. 71.2. Рассматривая его, нетрудно уяснить себе некоторые соображения, позволяющие так выбирать и располагать эти элементы, чтобы получать поля желательного строения. Например, на рис. 71.2, *а* возбуждение цилиндрического резонатора осуществляется находящимся в средней части радиальным штырьком, который является продолжением среднего проводника коаксиальной линии. Такая антенна создаст поле с параллельной себе электрической компонентой, и если частота возбуждения будет близка к собственной частоте колебаний H_{111} , то следует ожидать, что поле вынужденных колебаний окажется похожим по структуре (это отмечено символом \dot{H}_{111}). Аналогично в случае двусвязного коаксиального резонатора (рис. 71.2, *б*) рамочная антенна при подходящей частоте возбуждает поле, мало отличающееся от типа свободных колебаний TEM_1 ; действительно, излучение рамки имеет нормальную ее плоскости

магнитную компоненту, которая в данном случае, как это и требуется, направлена азимутально. С таких же позиций следует рассматривать и остальные случаи, представленные на рис. 71.2;

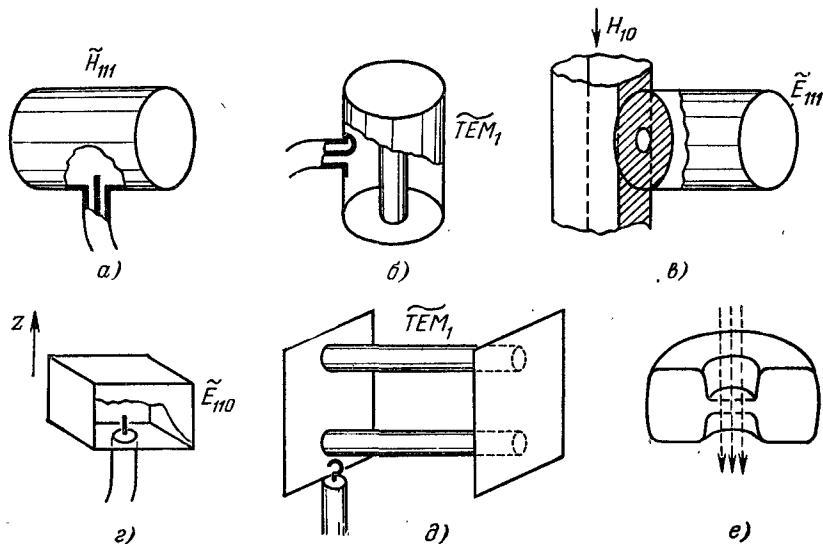


Рис. 71.2.

среди них возбуждение тороидального резонатора электронным потоком (рис. 71.2, e), а также — резонатора на основе двухпроводной линии при помощи «рамки» (или, как еще говорят, «петли связи»).

После этих предварительных замечаний качественного характера перейдем к постановке электродинамической задачи о возбуждении полого резонатора заданными источниками. Он представляет собой полость V , ограниченную идеально проводящей оболочкой с отверстием S_Σ , на котором задано стороннее поле в виде тангенциальной компоненты вектора E^{ct} , рис. 71.3. Кроме того, внутри полости имеются заранее известные распределения электрического и магнитного сторонних токов j^{ct} и j^m . Таким образом, взяв симметричные уравнения Максвелла (46.2), запишем:

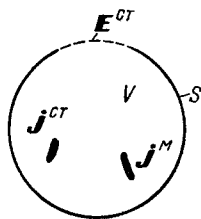


Рис. 71.3.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_m &= i\omega \dot{E}_m + j_m^{ct}, \\ \operatorname{rot} \dot{E}_m &= -i\omega \dot{H}_m - j_m^m \quad \text{в } V; \\ \dot{E}_{m\tau} &= 0 \quad \text{на } S - S_\Sigma, \quad \dot{E}_{m\tau} = \dot{E}_{m\tau}^{ct} \quad \text{на } S_\Sigma. \end{aligned} \right\} \quad (71.1)$$

Это и есть исходная постановка задачи.

Как найти решение задачи (71.1)? Интуиция подсказывает, что возбужденное поле должно содержать структурные элементы, соответствующие всевозможным типам собственных колебаний резонатора, выраженные в большей или меньшей степени в зависимости от того, насколько близки их собственные частоты к частоте возбуждения, а также в зависимости от вида источников. Если задача о свободных колебаниях резонатора предварительно решена, то все эти типы колебаний со своими частотами известны.

2. Представление возбужденного поля. Сказанное наводит на мысль искать решение $\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_m$ задачи (71.1) в виде суперпозиции всевозможных собственных колебаний резонатора:

$$\dot{\mathbf{E}}_m \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \dot{\mathbf{E}}_m^n \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{H}}_m \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \dot{\mathbf{H}}_m^n. \quad (71.2)$$

Но анализ показывает, что разложения (71.2) не содержат всех элементов, требуемых для представления поля вынужденных колебаний. На этом необходимо остановиться.

Ограничимся случаем однородной среды ($\dot{\epsilon} = \text{const}, \dot{\mu} = \text{const}$). Тогда векторные функции $\dot{\mathbf{E}}_m^n$ и $\dot{\mathbf{H}}_m^n$ — это собственные функции задач (69.15), им соответствуют собственные значения $k_n^2 = \dot{\omega}_n^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu}$ (при комплексных $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ комплексна собственная частота $\dot{\omega}_n$, но волновое число k_n вещественно, § 69, п. 2, 3). Как $\dot{\mathbf{E}}_m^n$, так и $\dot{\mathbf{H}}_m^n$, будучи собственными функциями задачи типа (П8.11), ортогональны; их можно нормировать, т. е. путем подбора постоянных коэффициентов подчинять соотношению (П8.6). Таким образом, представления (71.2) можно рассматривать как ряды Фурье типа (П8.7). При этом, однако, возникает вопрос о полноте систем $\{\dot{\mathbf{E}}_m^n\}$ и $\{\dot{\mathbf{H}}_m^n\}$, и выясняется, что эти системы данным свойством не обладают. Полные же системы собственных функций порождаются задачами (П5.29) и (П5.30), причем системы $\{\dot{\mathbf{E}}_m^n\}$ и $\{\dot{\mathbf{H}}_m^n\}$ оказываются включенными в указанные полные системы, по которым уже можно производить разложение Фурье, рассчитывая на сходимость в среднем.

Не входя в подробности ¹⁾, приведем ряд сведений, которые следует учитывать при решении задачи о возбуждении резонатора. Решения первой краевой задачи (П5.29) \mathbf{u} образуют систему $\{\mathbf{E}_n, \mathbf{E}_{n'}\}$, распадающуюся на две подсистемы: $\{\mathbf{E}_n\}$, $\text{div } \mathbf{E}_n = 0$ ($k^2 = k_n^2$) и $\{\mathbf{E}_{n'}\}$, $\text{rot } \mathbf{E}_{n'} = 0$ ($k^2 = k_{n'}^2$). В знак того, что функции на границе области удовлетворяют тем же условиям, что и вектор \mathbf{E} , они обозначаются таким же символом и условно называются *электрическими*. Принадлежащие первой подсистеме функции \mathbf{E}_n *соленоидальны* и могут рассматриваться как комплексные амплитуды вектора \mathbf{E} собственных колебаний резонатора: $\mathbf{E}_n = \dot{\mathbf{E}}_m^n$. Функции второй подсистемы *потенциальны*; они являются градиентами ска-

¹⁾ Подробное освещение вопроса см. в [И.3].

лярных функций $E_{n'} = \nabla\psi_{n'}$; последние же — не что иное, как собственные функции задачи (П5.27): $\psi_{n'} = u$.

Подобно этому решению второй краевой задачи (П5.30) u образуют систему $\{H_n, H_{n'}\}$ также состоящую из двух подсистем: $\{H_n\}$, $\text{div } H_n = 0$ ($k^2 = k_n^2$) и $\{H_{n'}\}$, $\text{rot } H_{n'} = 0$ ($k^2 = k_{n'}^2$). Они называются *магнитными*, будучи обозначены тем же символом, что и вектор H , потому что удовлетворяют таким же условиям на границе области. Соленоидальные функции H_n можно отождествить с комплексными амплитудами \dot{H}_m^n вектора H собственных колебаний резонатора. Потенциальные же функции $H_{n'}$ — это градиенты $\nabla\psi_{n'}$, причем скалярные функции $\psi_{n'}$ являются собственными функциями задачи (П5.28): $\psi_{n'} = u$.

Нужно еще добавить, что все сказанное относится к односвязным областям и таким, границы которых не состоят из разделенных частей. В общем случае, кроме соленоидальных и потенциальных собственных функций (образующих бесконечные системы), задачи (П5.29) и (П5.30) могут иметь конечное число *гармонических* собственных функций, для которых обращаются в нуль и вихрь, и расхождение; это решения векторного уравнения Лапласа ($k = 0$). Условимся, что такие функции, если они появляются, будем включать в потенциальные подсистемы.

Системы функций $\{E_n, E_{n'}\}$ и $\{H_n, H_{n'}\}$ можно считать ортонормированными в соответствии с (П8.6).

Вместо интуитивно построенных представлений (71.2) решения \dot{E}_m, \dot{H}_m задачи (71.1) запишем теперь следующие:

$$\dot{E}_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_n + \sum_{n'=1}^{\infty} a_{n'} E_{n'} \quad \text{и} \quad \dot{H}_m = \sum_{n=1}^{\infty} b_n H_n + \sum_{n'=1}^{\infty} b_{n'} H_{n'}. \quad (71.3)$$

При должном выборе коэффициентов представления (71.3) образуют сходящиеся в среднем ряды Фурье.

3. Свойства собственных функций. Ниже в п. 4 будет получено решение задачи (71.1) в виде представлений (71.3), т. е. их коэффициенты будут найдены. Затем в п. 6 функции $E_n, E_{n'}$ и $H_n, H_{n'}$ будут построены в одном из важных случаев. Перед этим рассмотрим некоторые особенности собственных функций.

Поскольку мы желаем отождествлять функции E_n и H_n с комплексными амплитудами векторов E и H свободных колебаний резонатора ($E_n = \dot{E}_m^n, H_n = \dot{H}_m^n$), их надо подчинить уравнениям Максвелла. Это наложит определенные связи.

Запишем уравнения Максвелла для собственных колебаний типа n и взятые в комплексно сопряженной форме уравнения Максвелла для собственных колебаний типа k :

$$\begin{aligned} \text{rot } E_n &= -i\omega_n \dot{\mu} H_n, & \text{rot } E_k^* &= i\omega_n^* \dot{\mu}^* H_k^*, \\ \text{rot } H_n &= i\omega_n \dot{\epsilon} E_n, & \text{rot } H_k^* &= -i\omega_k^* \dot{\epsilon}^* E_k^*. \end{aligned} \quad (71.4)$$

Сосредоточим внимание на первом уравнении первого столбца и

втором второго. Производя в них умножение на H_k^* и E_n соответственно, вычитание левых и правых частей, а затем интегрирование по области резонатора (ср. § 48, п. 1), получаем

$$\dot{\omega}_n \dot{\mu} \int_V H_n H_k^* dv - \dot{\omega}_k^* \dot{\epsilon}^* \int_V E_n E_k^* du = 0. \quad (71.5a)$$

Подобным образом из оставшихся уравнений (71.4) находим

$$\dot{\omega}_k^* \dot{\mu}^* \int_V H_n H_k^* dv - \dot{\omega}_n \dot{\epsilon} \int_V E_n E_k^* dv = 0. \quad (71.5b)$$

Из (71.5a), (71.5b) легко исключить интеграл, содержащий E , или другой. Это дает следующие равенства:

$$(k_n^2 - k_k^2) \int_V H_n H_k^* dv = 0 \quad \text{и} \quad (k_n^2 - k_k^2) \int_V E_n E_k^* dv = 0, \quad (71.6)$$

где $k_n^2 = \dot{\omega}_n^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} = \dot{\omega}_n^{*2} \dot{\epsilon}^* \dot{\mu}^*$ и $k_k^2 = \dot{\omega}_k^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} = \dot{\omega}_k^{*2} \dot{\epsilon}^* \dot{\mu}^*$ — вещественные собственные значения задач (69.15) или (П5.29), (П5.30). Полученные выражения свидетельствуют об ортогональности соленоидальных собственных функций при отсутствии вырождения ($k_n^2 \neq k_k^2$), что подтверждает вывод из Приложения 8, п. 3.

Ввиду взаимной зависимости векторов E и H электрические или магнитные функции нельзя нормировать произвольно (тогда они могли бы не удовлетворять уравнениям Максвелла). Полагая в (71.5) $k = n$, имеем, например,

$$\dot{\omega}_n \dot{\mu} \int_V H_n H_n^* dv = \dot{\omega}_n^* \dot{\epsilon}^* \int_V E_n E_n^* dv.$$

Поскольку $\dot{\omega}_n \dot{\mu} = k_n \dot{\mu} / \sqrt{\dot{\epsilon} \dot{\mu}} = k_n \sqrt{\dot{\mu}} / \sqrt{\dot{\epsilon}}$ и $\dot{\omega}_n^* \dot{\epsilon}^* = k_n \dot{\epsilon}^* / \sqrt{\dot{\epsilon}^* \dot{\mu}^*} = k_n \sqrt{\dot{\epsilon}^*} / \sqrt{\dot{\mu}^*}$, то отсюда следует:

$$|\dot{\mu}| \int_V H_n H_n^* dv = |\dot{\epsilon}| \int_V E_n E_n^* dv. \quad (71.7)$$

Ради единообразия потенциальные собственные функции $E_n = \nabla \psi_n$ и $H_n = \nabla \psi_n'$ тоже можно рассматривать как решения уравнений Максвелла (71.4). Учитывая тождество (П1.33), замечаем, что, поскольку $E_n \neq 0$ и $H_n \neq 0$, это возможно лишь при $\dot{\omega}_n = 0$, т. е. все «собственные частоты» $\dot{\omega}_n$ в уравнениях Максвелла, отвечающие потенциальным собственным функциям, равны нулю¹⁾. Электрические и магнитные потенциальные функции, в отличие от соленоидальных решений уравнений (71.4), лишены взаимной связи. Но для удобства выкладок ее можно ввести искусственно в виде равенства, повторяющего (71.7). Итак, для ортогональных

¹⁾ Подчеркнем, что это « ∞ — кратное вырождение» потенциальных функций не имеет отношения к задачам (П5.29) и (П5.30), где $k_n^2 \neq 0$.

систем $\{E_n, E_{n'}\}$ и $\{H_n, H_{n'}\}$ можно установить следующее общее соотношение ортонормировки:

$$|\dot{\mu}| \int_V H_{k'}^* \cdot H_{n'} dv = |\dot{\varepsilon}| \int_V E_{k'}^* \cdot E_{n'} dv = \delta_{k'n'}. \quad (71.8)$$

В этих обозначениях штрих в скобках означает, что он либо остается, либо опускается, т. е., например, $E_{n'}$ есть либо соленоидальная функция E_n , либо потенциальная функция $E_{n'}$.

4. Решение задачи о вынужденных колебаниях. Вернемся к формулировке (71.1) поставленной задачи о возбуждении резонатора, чтобы получить теперь ее решение.

Из (71.1) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \int_V (\text{rot } \dot{H}_m - i\omega \dot{\varepsilon} \dot{E}_m - \dot{j}_m^{\text{ct}}) \dot{E}_{k'}^* dv &= 0, \\ \int_V (\text{rot } \dot{E}_m + i\omega \dot{\mu} \dot{H}_m + \dot{j}_m^{\text{ct}}) H_{k'}^* dv &= 0, \end{aligned} \right\} k' = 1, 2, \dots, \infty, \quad (71.9)$$

поскольку в круглых скобках заключены равные нулю величины. Равенства (71.9) — это не что иное, как разновидности проекционного соотношения (П8.15). После применения формулы (П1.31), т. е. интегрирования по частям, получаем

$$\left. \begin{aligned} \int_V \dot{H}_m \text{rot } E_{k'}^* dv - \int_V (i\omega \dot{\varepsilon} \dot{E}_m + \dot{j}_m^{\text{ct}}) E_{k'}^* dv &= 0, \\ \int_V \dot{E}_m \text{rot } H_{k'}^* dv + \int_{S_\Sigma} [\dot{E}_m^{\text{ct}}, H_{k'}^*] ds + \int_V (i\omega \dot{\mu} \dot{H}_m + \dot{j}_m^{\text{M}}) H_{k'}^* dv &= 0, \end{aligned} \right\} k' = 1, 2, \dots, \infty, \quad (71.10)$$

где учтены граничные условия задач (71.1) и (П5.29); последняя существенна ввиду участия функций $E_{n'}$.

Сюда мы можем внести представления \dot{E}_m и \dot{H}_m в виде ортогональных рядов (71.3), коэффициенты которых подлежат определению. Такая подстановка в (71.9) была бы необоснованной, поскольку потребовала бы почленного дифференцирования рядов (операция rot); в общем случае это привело бы к неверному результату.

Итак, заменяя в (71.10) \dot{E}_m на $\underline{\dot{E}}_m$ и \dot{H}_m на $\underline{\dot{H}}_m$ в соответствии с (71.3) и учитывая (71.4), имеем

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n'=1}^{\infty} \left[\dot{\omega}_{k'}^* \dot{\mu}^* b_{n'} \int_V H_{n'} H_{k'}^* dv - \dot{\omega} a_{n'} \int_V E_{n'} E_{k'}^* dv \right] + \\ + i \int_V \dot{j}_m^{\text{ct}} E_{k'}^* dv = 0, \\ \sum_{n'=1}^{\infty} \left[\dot{\omega}_{k'}^* \dot{\varepsilon}^* a_{n'} \int_V E_{n'} E_{k'}^* dv - \dot{\omega} \mu b_{n'} \int_V H_{n'} H_{k'}^* dv \right] + \\ + i \int_V \dot{j}_m^{\text{M}} H_{k'}^* dv + i \int_{S_\Sigma} [\dot{E}_m^{\text{ct}}, H_{k'}^*] ds = 0, \end{aligned} \right.$$

где $\dot{\omega}_{k'} = 0$ для всех k' (это эквивалентно тому, что $\text{rot } \mathbf{E}_{k'} \equiv 0$ и $\text{rot } \mathbf{H}_{k'} \equiv 0$, см. п. 3). Остается использовать соотношение ортонормировки (71.8), что дает

$$\left. \begin{aligned} \omega \frac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|} a_{k'} - \dot{\omega}_{k'}^* \frac{\dot{\mu}^*}{|\dot{\mu}|} b_{k'} &= i \int_V \mathbf{j}_m^{\text{CT}} \mathbf{E}_{k'}^* dv, \\ \dot{\omega}_{k'}^* \frac{\dot{\varepsilon}^*}{|\dot{\varepsilon}|} a_{k'} - \omega \frac{\dot{\mu}}{|\dot{\mu}|} b_{k'} &= -i \int_V \mathbf{j}_m^{\text{M}} \mathbf{H}_{k'}^* dv - i \int_{S_\Sigma} [\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{CT}}, \mathbf{H}_{k'}^*] ds, \end{aligned} \right\} \dot{\omega}_{k'} = 0. \quad (71.11)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{i}{\omega^2 - \dot{\omega}_k^2} \frac{|\dot{\varepsilon}|}{\dot{\varepsilon}} \left[\omega \int_V \mathbf{j}_m^{\text{CT}} \mathbf{E}_k^* dv + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\dot{\mu}^*}{\mu} \dot{\omega}_k^* \left(\int_V \mathbf{j}_m^{\text{M}} \mathbf{H}_k^* dv + \int_{S_\Sigma} [\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{CT}}, \mathbf{H}_k^*] ds \right) \right], \\ b_k &= \frac{i}{\omega^2 - \dot{\omega}_k^2} \frac{|\dot{\mu}|}{\dot{\mu}} \left[\frac{\dot{\varepsilon}^*}{\dot{\varepsilon}} \dot{\omega}_k^* \int_V \mathbf{j}_m^{\text{CT}} \mathbf{E}_k^* dv + \right. \\ &\quad \left. + \omega \left(\int_V \mathbf{j}_m^{\text{M}} \mathbf{H}_k^* dv + \int_{S_\Sigma} [\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{CT}}, \mathbf{H}_k^*] ds \right) \right], \\ a_{k'} &= \frac{i}{\omega} \frac{|\dot{\varepsilon}|}{\dot{\varepsilon}} \int_V \mathbf{j}_m^{\text{CT}} \mathbf{E}_{k'}^* dv, \\ b_{k'} &= \frac{i}{\dot{\omega}} \frac{|\dot{\mu}|}{\dot{\mu}} \left(\int_V \mathbf{j}_m^{\text{M}} \mathbf{H}_{k'}^* dv + \int_{S_\Sigma} [\dot{\mathbf{E}}_m^{\text{CT}}, \mathbf{H}_{k'}^*] ds \right). \end{aligned} \right\} \quad (71.12)$$

В результате все коэффициенты ортогональных рядов (71.3) определены.

5. Исследование вынужденных колебаний. Рассмотрим внимательно решение задачи о вынужденных колебаниях резонатора, представляемое рядами (71.3) с коэффициентами (71.12).

Отметим, во-первых, что в случае резонатора без отверстия, возбуждаемого электрическим сторонним током ($\mathbf{E}^{\text{CT}} = 0$, $\mathbf{j}^{\text{M}} = 0$), $b_{k'} = 0$, т. е. в разложении $\dot{\mathbf{H}}_m$ потенциальные функции отсутствуют (напомним, что электрическое поле на отверстии эквивалентно поверхностному магнитному току, § 47, п. 1). Если же, напротив, имеются только магнитные источники ($\mathbf{j}^{\text{CT}} = 0$), то $a_{k'} = 0$: потенциальных функций нет в разложении $\dot{\mathbf{E}}_m$.

Во-вторых, теперь имеется возможность обосновать концепцию, использованную выше в п. 1. Как видно из (71.12), коэффициенты при соленоидальных векторных функциях разложений $\dot{\mathbf{E}}_m$ и $\dot{\mathbf{H}}_m$ возрастают с уменьшением $|\omega^2 - \dot{\omega}_k^2|$. Иными словами, структурная составляющая поля вынужденных колебаний, соответствующая свободным колебаниям типа k , увеличивается по мере приближения

частоты возбуждения ω к собственной частоте этого типа. Сказанное нуждается в некотором уточнении. Пусть сначала поглощение отсутствует, и собственные частоты вещественны ($\omega_k = \omega_k$). Тогда, если интегралы в (71.12) отличны от нуля, то

$$\begin{cases} a_k \rightarrow b_k \rightarrow \infty \\ \text{при } \omega \rightarrow \omega_k. \end{cases}$$

Это *идеальный резонанс* типа k ; поскольку, как можно показать, при исключении k -го члена ряда (71.3) сходятся, т. е. дают конечные величины, которыми можно пренебречь, поле вынужденных колебаний имеет строение типа k свободных колебаний. Резонанс типа k невозможен, если в силу характера источников равны нулю интегралы в выражении a_k (b_k): «источники не имеют k -проекции». Так, например, в случае прямоугольного резонатора, возбуждаемого током, направленным по оси x ($\mathbf{j}^{\text{ср}} = x_0 \mathbf{j}^{\text{ср}}$), не будет резонанса типа E_{110} ($\mathbf{E}_k = z_0 \mathbf{E}_k$), так как $\mathbf{j}_m^{\text{ср}} \dot{\mathbf{E}}_k^* = 0$. Интенсивность возбуждения той или иной структурной составляющей зависит от ориентации элементов связи; для положений, показанных на рис. (71.2), она максимальна.

При наличии поглощения модули коэффициентов a_k и b_k пропорциональны функции частоты

$$A_k(\omega) = \frac{1}{|\omega^2 - \omega_k^2|}. \quad (71.13)$$

Учитывая, что, согласно (69.26), $Q_k = \omega_k' / 2\omega_k''$ есть добротность резонатора для типа колебаний k , запишем:

$$A_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k'^2 \left| \left(\frac{\omega}{\omega_k'} \right)^2 - 1 + \frac{1}{4Q_k^2} - i \frac{1}{Q_k} \right|}. \quad (71.13a)$$

Функция $A_k(\omega)$ имеет максимум при частоте $\omega = \omega_{(k)}$, причем

$$\left. \begin{aligned} \max A_k(\omega) &= A_k(\omega_{(k)}) = \frac{Q_k}{\omega_k'^2}, \\ \omega_{(k)} &= \omega_k' \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_k^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (71.14)$$

Речь идет о *реальном резонансе* системы; *резонансная частота* $\omega_{(k)}$ тем ближе к вещественной части ω_k' собственной частоты ω_k , чем выше добротность Q_k . При этом, как мы видим, коэффициенты рядов (71.3) a_k и b_k принимают максимальные значения $a_k(\omega_{(k)})$ и $b_k(\omega_{(k)})$, которые пропорциональны добротности Q_k .

На рис. 71.4 представлен график функции $A_k(\omega)$, отнесенный к ее максимальному значению $A_k(\omega_{(k)})$; это типичная резонансная кривая. Пренебрегая в (71.13a) членом $1/4Q_k^2$ и учитывая приближенное равенство $\left(\frac{\omega}{\omega_k'} \right)^2 - 1 \approx 2 \frac{\omega - \omega_k'}{\omega_k'}$, легко показать, что

$$Q_k \approx 2\Delta\omega_0/\omega_{(k)}, \quad (71.15)$$

где $2\Delta\omega_0$ — «полоса пропускания» резонатора для колебаний типа k , на краях которой — по определению — амплитуда возбуждаемого поля падает в $\sqrt{2}$ раз (рис. 71.4). Частотную характеристику резонатора выражает функция $\underline{E}_m(\omega)$ или $\underline{H}_m(\omega)$ (71.3);

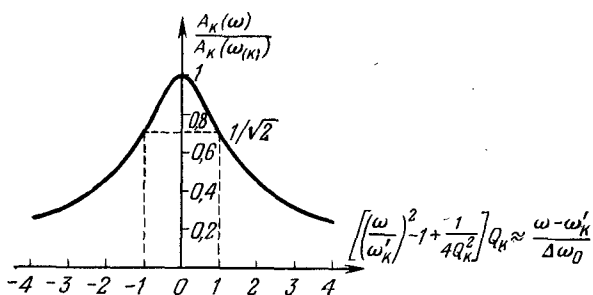


Рис. 71.4.

при достаточно высоких добротностях Q_k ее график близок к наложению резонансных кривых всех типов колебаний, причем интенсивность последних зависит от характера источников (элементов связи), что отражают интегралы в (71.12). Рис. 71.5 качественно иллюстрирует сказанное. Отметим, что коэффициенты при потенциальных функциях в (71.3) изменяются монотонно, возраста

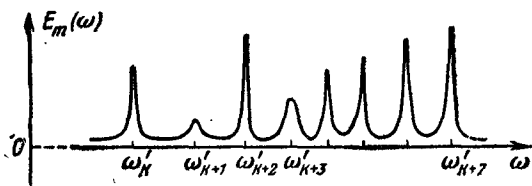


Рис. 71.5.

с уменьшением частоты; отвечающие им структурные компоненты поля не резонируют.

Полученные результаты допускают дальнейшее обобщение. Хотя в сущности все действия выполнены для случая полой системы с идеально проводящей оболочкой при поглощении во внутреннем диэлектрике, формулы (71.3), (71.12) и последующие могут применяться при рассмотрении резонаторов с металлической оболочкой и даже при излучении. Для этого требуется, чтобы строение полей отличалось от предыдущего лишь незначительно, а данное условие часто выполняется. Тогда надо только изменить величины комплексных собственных частот, определив их по формуле (69.28).

6. Прямоугольный резонатор. На основании того, что уже известно о свободных колебаниях резонаторов (§ 70, пп. 1 и 2), нетрудно построить соответствующие системы собственных функций $\{E_n, E_{n'}\}$ и $\{H_n, H_{n'}\}$, подчиненные соотношению (71.8). Соле-

ноидальные функции в случае прямоугольного резонатора уже имеются в виде выражений (70.1) и (70.2); их надо лишь нормировать. Потенциальные находятся дополнительно. Окончательно имеем:

электрические функции

$$E_{i^{(r)}} = x_0 A_x \cos \chi_x x \sin \chi_y y \sin \chi_z z + y_0 A_y \sin \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z + z_0 A_z \sin \chi_x x \sin \chi_y y \cos \chi_z z; \quad (71.16)$$

магнитные функции

$$H_{i^{(r)}} = x_0 B_x \sin \chi_x x \cos \chi_y y \cos \chi_z z + y_0 B_y \cos \chi_x x \sin \chi_y y \cos \chi_z z + z_0 B_z \cos \chi_x x \cos \chi_y y \sin \chi_z z. \quad (71.17)$$

Здесь и далее

$$\chi_x = \frac{m\pi}{a}, \quad \chi_y = \frac{n\pi}{b}, \quad \chi_z = \frac{p\pi}{L} \quad (m, n, p = (0), 1, 2, \dots), \quad (71.18)$$

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2, \quad k^2 = k_{mnp}^2 = \omega_{mnp}^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu} = \chi^2 + \chi_z^2,$$

так что индекс $i^{(r)}$ понимается как совокупность трех чисел: $i^{(r)} = (m, n, p)$.

Соленоидальные подсистемы ($E_{i^{(r)}} = E_i$, $H_{i^{(r)}} = H_i$) состоят из E -функций и H -функций. Для E -функций в (71.16) и (71.17)

$$\left. \begin{aligned} A_x &= -\frac{2\sqrt{2}}{V|\dot{\epsilon}|abL} \frac{\chi_x \chi_z}{k\chi}, & A_y &= -\frac{2\sqrt{2}}{V|\dot{\epsilon}|abL} \frac{\chi_y \chi_z}{k\chi}, \\ & & A_z &= \frac{2\sqrt{2}}{V|\dot{\epsilon}|abL} \frac{\chi}{k}, \\ B_x &= \frac{i2\sqrt{2}}{V|\dot{\mu}|abL} \frac{\chi_y}{\chi}, & B_y &= -\frac{i2\sqrt{2}}{V|\dot{\mu}|abL} \frac{\chi_x}{\chi}, & B_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (71.19)$$

где $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$. Третье из этих чисел может быть нулем, но тогда все приведенные коэффициенты умножаются еще на $1/\sqrt{2}$, что диктуется соотношением (71.8).

Запишем аналогичные выражения коэффициентов в (71.16) и (71.17) для H -функций:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{2\sqrt{2}}{V|\dot{\epsilon}|abL} \frac{\chi_y}{\chi}, & A_y &= -\frac{i2\sqrt{2}}{V|\dot{\epsilon}|abL} \frac{\chi_x}{\chi}, & A_z &= 0, \\ B_x &= \frac{i2\sqrt{2}}{V|\dot{\mu}|abL} \frac{\chi_x \chi_z}{k\chi}, & B_y &= \frac{i2\sqrt{2}}{V|\dot{\mu}|abL} \frac{\chi_y \chi_z}{k\chi}, \\ B_z &= \frac{-i2\sqrt{2}}{V|\dot{\mu}|abL} \frac{\chi}{k}, \end{aligned} \right\} \quad (71.20)$$

где $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$. Нулю может быть равно m или n ; тогда коэффициенты умножаются на $1/\sqrt{2}$.

Читателю рекомендуется проверить, что формулы (71.16), (71.17) при коэффициентах (71.19), (71.20) совпадают с выражениями

комплексных амплитуд, получаемыми из (70.1), (70.2) при должном выборе постоянных \dot{E}_0 и \dot{H}_0 , а также убедиться в выполнении соотношения ортонормировки (71.8).

В *потенциальных подсистемах*

$$\left. \begin{aligned} E_{i^{(c)}} = E_{i'} = A \operatorname{grad} (\sin \chi_x x \sin \chi_y y \sin \chi_z z), \\ H_{i^{(c)}} = H_{i'} = iB \operatorname{grad} (\cos \chi_x x \cos \chi_y y \cos \chi_z z), \end{aligned} \right\} \quad (71.21)$$

и коэффициенты в формулах (71.16) и (71.17) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\epsilon}| abL}} \frac{\chi_x}{k}, & A_y &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\epsilon}| abL}} \frac{\chi_y}{k}, \\ A_z &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\epsilon}| abL}} \frac{\chi_z}{k}, \\ B_x &= \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}| abL}} \frac{\chi_x}{k}, & B_y &= \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}| abL}} \frac{\chi_y}{k}, \\ B_z &= \frac{-i2\sqrt{2}}{\sqrt{|\dot{\mu}| abL}} \frac{\chi_z}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (71.22)$$

В (71.22) предполагается, что $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. Однако одно или одновременно два из этих чисел могут быть нулями, и тогда коэффициенты умножаются на $(1/\sqrt{2})^\alpha$, где α — число нулей ($\alpha = 1, 2$).

В качестве примера рассмотрим прямоугольный резонатор, возбуждаемый прямолинейным элементом тока (рис. 71.6), причем

$$\mathbf{j}_{m}^{\text{ст}} = \mathbf{y}_0 I_m^{\text{ст}} \delta\left(z - \frac{L}{2}\right) \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (0 < y < h) \quad (71.23)$$

(о δ -функции см. Приложение 2). Желая найти компоненту поля вынужденных колебаний, имеющую строение H_{101} , выделим из

(71.3) соответствующий член и запишем:

$$\dot{E}_m^{101} = a_{101} E_{101}, \quad (71.24)$$

где, согласно (71.16) и (71.20),

$$E_{101} = \mathbf{y}_0 \frac{-2}{\sqrt{\epsilon_0 abL}} \sin \frac{\pi z}{L} \sin \frac{\pi x}{a} \quad (71.25)$$

(внутренняя среда — вакуум или воздух: $\dot{\epsilon} = \epsilon_0$, $\dot{\mu} = \mu_0$). На основании (71.12)

$$a_{101} = \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_{101}^2} \int_V \mathbf{j}_m^{\text{ст}} E_{101} dV = i \frac{-2I_m^{\text{ст}} h}{\sqrt{\epsilon_0 abL}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{101}^2}, \quad (71.26)$$

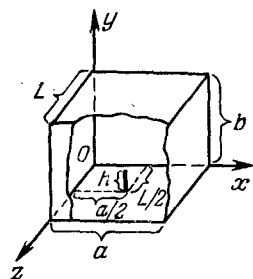


Рис. 71.6.

где ввиду (69.28), (70.3) и (70.8)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{10i} &= \omega_{10i} \left(1 + i \frac{1}{2Q_{10i}} \right), \\ \omega_{10i} &= \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{L^2}}, \quad Q_{10i} = \frac{1}{\Delta^0} \frac{abL(L^2 + a^2)}{aL(L^2 + a^2) + 2b(L^3 + a^3)}. \end{aligned} \right\} (71.27)$$

При резонансе ($\omega = \omega_{10i}$) в соответствии с (71.3), (71.26)

$$\underline{\dot{E}}_m \approx \underline{\dot{E}}_m^{10i} = a_{10i}(\omega_{10i}) E_{10i} = y_0 \frac{-4I_m^{CT} h Q_{10i}}{\epsilon_0 abL \omega_{10i}} \sin \frac{\pi z}{L} \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (71.28)$$

§ 72. Вынужденные волны волновода

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Для возбуждения волн в направляющих системах используются те же самые средства, которые были рассмотрены в § 71, п. 1. Элементы связи, т. е. элементарные антенны, прямо или косвенно соединяющие направляющую систему с генератором (например, через посредство

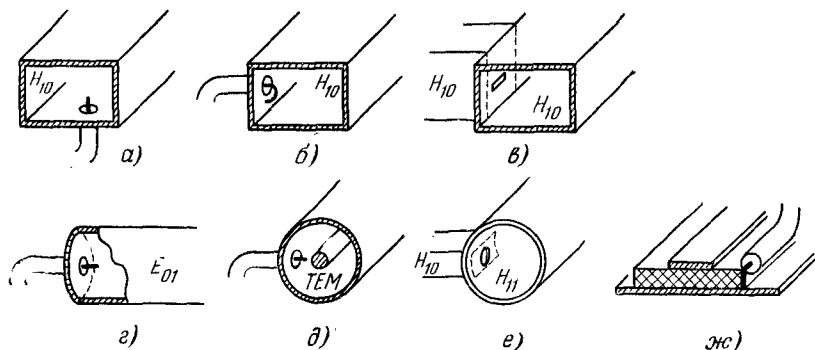


Рис. 72.1.

другой направляющей системы), имеют вид штырьков, рамок (петель), отверстий (в частности, щелей). Штырьком возбуждаются волны с параллельной ему электрической компонентой, петлей — волны с магнитной компонентой, направленной по нормали к ее плоскости. Отверстия соединяют области систем, в которых их поля должны иметь близкие структуры. Поэтому, например, основную волну H_{10} прямоугольного волновода можно возбудить коаксиальным кабелем, заканчивающимся штырьком или петлей, как это показано на рис. 72.1, а, б, или другим прямоугольным волноводом с основной волной через щель (рис. 72.1, в). На рис. 72.1 представлены и различные иные случаи расположения элементов связи в направляющих системах.

На рис. 72.2, а схематически изображен бесконечный волновод, содержащий источники в некоторой ограниченной области V между поперечными сечениями S_1 и S_2 . Каково бы ни было поле в V ,

за границами S_1 и S_2 в полубесконечных регулярных участках волновода оно может быть представлено в виде суперпозиции всевозможных свободных полей. При этом речь может идти только о волнах, расходящихся от источника, либо (когда условия распространения не выполнены) затухающих в тех же направлениях «запредельных» полей. Собственно, данное требование есть выражение условия излучения для волновода (Приложение 5, п. 3). Если — при отсутствии поглощения — распространяться может одна основная волна, то она лишь фактически и сохраняется на достаточно больших расстояниях от источника; остальные (высшие) поля экспоненциально затухают (§ 62, п. 3, § 64, п. 3). Это условно отмечено на рис. 72.2, а.

Поскольку в дальнейшем будут составляться суперпозиции свободных полей волновода, введем необходимые средства описания.

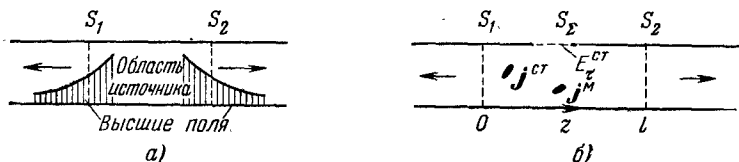


Рис. 72.2.

Комплексные амплитуды векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} свободных полей, имеющих характер волн, распространяющихся вдоль оси z , будем обозначать $\dot{\mathbf{E}}_m^{n+}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m^{n+}$, а при изменении направления на обратное — $\dot{\mathbf{E}}_m^{n-}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m^{n-}$; индекс n указывает тип поля. Согласно (61.1) и (61.2)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^{n+} &= \mathcal{E}_n^+ e^{-i\dot{\Gamma}_n z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_m^{n+} &= \mathcal{H}_n^+ e^{-i\dot{\Gamma}_n z}, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}_m^{n-} &= \mathcal{E}_n^- e^{+i\dot{\Gamma}_n z}, \\ \dot{\mathbf{H}}_m^{n-} &= \mathcal{H}_n^- e^{+i\dot{\Gamma}_n z}, \end{aligned} \right\} \quad (72.1)$$

$$\dot{\Gamma}_n = \Gamma_n - i\Gamma_n'' \quad (\Gamma_n' \geq 0, \Gamma_n'' \geq 0)$$

(при отсутствии поглощения либо $\Gamma_n'' = 0$, либо $\Gamma_n' = 0$; в последнем случае мы имеем запредельное поле). При этом удобно выделить поперечные компоненты векторов \mathcal{E}_n^\pm и \mathcal{H}_n^\pm ; устанавливая для них обозначения, на основании формул (61.8), (61.10) и (61.11) запишем:

$$\mathcal{E}_{n\perp}^\pm = \mathbf{e}_n, \quad \mathcal{H}_{n\perp}^\pm = \pm \mathbf{h}_n; \quad \mathbf{h}_n = \dot{W}_n [z_0, \mathbf{e}_n]. \quad (72.2)$$

Векторные функции \mathbf{e}_n и \mathbf{h}_n подчинены уравнениям Гельмгольца (получаемым проектированием уравнений (61.4) и (61.5) на поперечное сечение волновода). Точнее, это собственные функции задач

$$\left. \begin{aligned} \nabla_\perp^2 \mathbf{e}_n + \chi_n^2 \mathbf{e}_n &= 0 \text{ в } S_\perp, \\ e_{n\tau} &= 0, \\ \text{div}_\perp \mathbf{e}_n &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } L_\perp, \quad \left. \begin{aligned} \nabla_\perp^2 \mathbf{h}_n + \chi_n^2 \mathbf{h}_n &= 0 \text{ в } S_\perp, \\ h_{n\nu} &= 0, \\ (\text{rot}_\perp \mathbf{h}_n)_\tau &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } L_\perp, \quad (72.3)$$

являющихся двумерными аналогами граничных задач (П5.29) и

(П5.30). Здесь S_{\perp} — поперечное сечение волновода, а L_{\perp} — его контур. Поэтому системы $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ вполне аналогичны¹⁾ рассмотренным в § 71, п. 2. Мы ортонормируем их, принимая во внимание связи (72.2), следующим образом:

$$\int_S e_k e_n^* ds = \delta_{kn} |\dot{W}_n| = |\dot{W}_n|^2 \int_S h_k h_n^* ds; \quad \int_S [e_k, h_n^*]_z ds = \delta_{kn} \frac{\dot{W}_n}{|\dot{W}_n|}. \quad (72.4)$$

Теперь можно перейти к формулированию условий задачи о возбуждении поля в волноводе. Волновод бесконечен, и все источники заключены в ограниченной области V на его отрезке $0 < z < l$ (рис. 72.2, б). Они заданы посредством функций j^{ct} и j^m в V и E_{τ}^{ct} на отверстии в оболочке волновода, которая считается идеально проводящей (ср. § 71, п. 1).

Поле вне V представляется в виде рядов

$$\dot{E}_m = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \dot{E}_m^{n-}, & z \leq 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \dot{E}_m^{n+}, & z \geq l, \end{cases} \quad \dot{H}_m = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \dot{H}_m^{n-}, & z \leq 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \dot{H}_m^{n+}, & z \geq l. \end{cases} \quad (72.5)$$

Надо определить коэффициенты этих рядов.

2. Решение задачи. Исследуемое вынужденное поле подчинено неоднородным уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \dot{E}_m &= -i\omega\mu \dot{H}_m - \dot{j}_m^m, \\ \text{rot } \dot{H}_m &= i\omega\varepsilon \dot{E}_m + \dot{j}_m^{ct}, \end{aligned} \right\} \quad (72.6)$$

а свободные поля волновода — решения однородных уравнений, которые ниже записаны в комплексно сопряженной форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } (\dot{E}_m^{k\pm})^* &= i\omega\mu (\dot{H}_m^{k\pm})^*, \\ \text{rot } (\dot{H}_m^{k\pm})^* &= -i\omega\varepsilon (\dot{E}_m^{k\pm})^*. \end{aligned} \right\} \quad (72.7)$$

($\varepsilon = \varepsilon$, $\mu = \mu$, так как поглощение по условию отсутствует).

Рассмотрим попарно первую строчку (72.6) и вторую строчку (72.7), выполнив умножение на $(\dot{H}_m^{k\pm})^*$ и \dot{E}_m соответственно, а затем оставшиеся уравнения с множителями $(\dot{E}_m^{k\pm})^*$ и \dot{H}_m . Взяв в качестве области интегрирования объем V (рис. 72.2, б), произведем

¹⁾ В системах $\{e_n\}$ и $\{h_n\}$ можно было бы выделить соленоидальные и потенциальные подсистемы. Как видно из (61.10) и (61.11), соленоидальны магнитные компоненты E -полей ($\text{div}_{\perp} h_n = 0$) и электрические компоненты H -полей ($\text{div}_{\perp} e_n = 0$), а потенциальны электрические компоненты E -полей ($\text{rot}_{\perp} e_n = 0$) и магнитные компоненты H -полей ($\text{rot}_{\perp} h_n = 0$).

действия того же рода, что и в § 48, п. 1 (см. также § 71, п. 3). Это дает

$$\oint_S \{[\dot{E}_m, (\dot{H}_m^{k\pm})^*] + [(\dot{E}_m^{k\pm})^*, \dot{H}_m]\} ds = \\ = - \int_V (\dot{j}_m^k (\dot{H}_m^{k\pm})^* + \dot{j}_m^{ct} (\dot{E}_m^{k\pm})^*) dv,$$

где S — граница объема V , или

$$\int_{S_1+S_2} \{[\dot{E}_m, (\dot{H}_m^{k\pm})^*] + [(\dot{E}_m^{k\pm})^*, \dot{H}_m]\} ds = \\ = - \int_{S_\Sigma} [\dot{E}_m^{ct}, (\dot{H}_m^{k\pm})^*] ds - \int_V (\dot{j}_m^k (\dot{H}_m^{k\pm})^* + \dot{j}_m^{ct} (\dot{E}_m^{k\pm})^*) dv, \quad (72.8)$$

так как на боковой поверхности волновода тангенциальные компоненты векторов \dot{E}_m и $\dot{E}_m^{k\pm}$ равны нулю, за исключением отверстия, где $\dot{E}_{m\tau} = \dot{E}_{m\tau}^{ct}$.

Левую часть равенства (72.8) обозначим I_k^\pm ; внося в нее представления (72.5), имеем

$$I_k^\pm = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n^- \int_{S_1} \{[\dot{E}_m^{n-}, (\dot{H}_m^{k\pm})^*] + [(\dot{E}_m^{k\pm})^*, \dot{H}_m^{n-}]\} z_0 ds + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^+ \int_{S_2} \{[\dot{E}_m^{n+}, (\dot{H}_m^{k\pm})^*] + [(\dot{E}_m^{k\pm})^*, \dot{H}_m^{n+}]\} z_0 ds \quad (72.9)$$

(внешняя нормаль направлена по z на S_2 и против z на S_1). Внося в (72.9) выражения (72.1) и учитывая соотношения (72.2), (72.4), убеждаемся, что в каждой из сумм отличен от нуля только один член, и находим

$$I_k^\pm = c_k^- \left(\mp \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k^*} + \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} \right) + c_k^+ \left(\pm \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k^*} + \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} \right) e^{-i(\dot{\Gamma}_k \mp \dot{\Gamma}_k^*)l}.$$

Для распространяющихся волн ($\omega \geq \omega_{кр}$ при данном k) $\dot{\Gamma}_k$ и \dot{W}_k вещественны и положительны, а для запредельных полей ($\omega < \omega_{кр}$) $\dot{\Gamma}_k = -i|\dot{\Gamma}_k|$ и $\dot{W}_k = \mp i|\dot{W}_k|$ (верхний и нижний знаки в случаях E и H полей соответственно). Поэтому

$$\left. \begin{aligned} I_k^\pm &= 2 \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} c_k^\pm = 2c_k^\pm \quad \text{при } \omega \geq \omega_{кр}, \\ I_k^\pm &= 2 \frac{|\dot{W}_k|}{\dot{W}_k} c_k^\mp = \begin{cases} +i2c_k^\pm, & \text{тип } E \\ -i2c_k^\pm, & \text{тип } H \end{cases} \quad \text{при } \omega < \omega_{кр} \end{aligned} \right\} \quad (72.10)$$

и из (72.8) получаем следующие формулы для коэффициентов рядов (72.5):

$$c_k^\pm = - \frac{\dot{W}_k}{2|\dot{W}_k|} \left\{ \int_{S_\Sigma} [\dot{E}_m^{ct}, (\dot{H}_m^{k\pm})^*] ds + \right. \\ \left. + \int_V [\dot{j}_m^k (\dot{H}_m^{k\pm})^* + \dot{j}_m^{ct} (\dot{E}_m^{k\pm})^*] dv \right\} \quad (\omega \geq \omega_{кр}) \quad (72.11a)$$

и

$$c_k^\pm = - \frac{\dot{W}_k}{2|\dot{W}_k|} \left\{ \int_{S_\Sigma} [\dot{E}_m^{ct}, (\dot{H}_m^{k\mp})^*] ds + \int_V [\mathbf{j}_m^M (\dot{H}_m^{k\mp})^* + \dot{\mathbf{j}}_m^{ct} (\dot{E}_m^{k\mp})^*] dv \right\} \quad (\omega < \omega_{кр}). \quad (72.11a)$$

Поставленная задача решена.

Если e_k и h_k вещественны (в поперечном сечении волновода стоячая волна: циклический поток энергии отсутствует), то полученный результат можно представить более кратко:

$$c_k^\pm = \frac{\dot{W}_k}{2|\dot{W}_k|} \left\{ \pm \int_{S_\Sigma} [\dot{E}_m^{ct}, \dot{H}_m^{k\mp}] ds + \int_V [\pm \mathbf{j}_m^M \dot{H}_m^{k\mp} - \dot{\mathbf{j}}_m^{ct} \dot{E}_m^{k\mp}] dv \right\}. \quad (72.11b)$$

Здесь перед слагаемыми знак выбирается не в соответствии с верхним индексом, а по правилу: верхний знак при $\omega \geq \omega_{кр}$ и нижний — при $\omega < \omega_{кр}$.

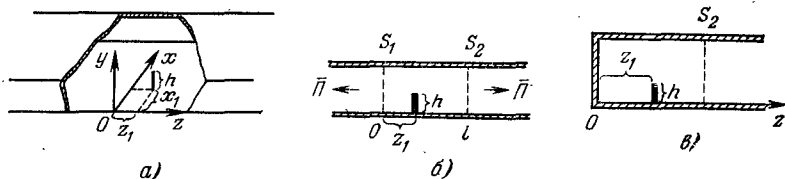


Рис. 72.3.

3. Пример возбуждения волновода. Заключение. Пусть прямоугольный волновод возбуждается элементом тока (рис. 72.3, а) так, что

$$\dot{\mathbf{j}}_m^{ct} = \mathbf{y}_0 i_m^{ct} \delta(z - z_1) \delta(x - x_1) \quad (0 < y < h). \quad (72.12)$$

Определим коэффициенты $c_k^\pm = c_{10}^\pm$ для основной волны H_{10} . По формулам (72.11а, б) или (72.11в)

$$c_{10}^\pm = - \frac{\dot{W}_{10}}{2|\dot{W}_{10}|} \int_V \dot{\mathbf{j}}_m^{ct} \dot{E}_m^{10\mp} dv, \quad (72.13)$$

где

$$\dot{E}_m^{10\mp} = e_{10} e^{\pm i\Gamma_{10}z} = \mathbf{y}_0 \sqrt{\frac{2|\dot{W}_{10}|}{ab}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{\pm i\Gamma_{10}z} \quad (72.14)$$

(см. (64.15) и (72.4)). Внося (72.12) и (72.14) в (72.13), получаем

$$c_{10}^\pm = - \frac{\dot{W}_{10}}{\sqrt{2|\dot{W}_{10}|} ab} i_m^{ct} h \sin \frac{\pi x_1}{a} e^{\pm i\Gamma_{10}z}. \quad (72.15)$$

Чтобы найти комплексную амплитуду вектора \mathbf{E} волны H_{10} , распространяющейся от элемента тока в направлении оси z , и

волны H_{10} противоположного направления ($\omega \geq \omega_{кр}$), а также соответствующих запредельных полей ($\omega < \omega_{кр}$), надо взять теперь один член ряда (72.5). Это даёт

$$\dot{E}_m = c_{10}^{\pm} \dot{E}_m^{10 \pm} = -y_0 \frac{\dot{W}_{10} j_m^{ct} h}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{10} (z - z_1)} \quad (72.16)$$

$$(z > z_1, z < z_1),$$

где

$$\dot{\Gamma}_{10} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \dot{W}_{10} = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}}.$$

Как видно, амплитуда возбуждаемой волны пропорциональна величине $p_m = y_0 j_m^{ct} h / \omega$, являющейся амплитудой момента диполя Герца, эквивалентного действующему источнику (§ 44, п. 1). В зависимости от горизонтального смещения x_1 амплитуда E_m меняется синусоидально (максимальное возбуждение при $x_1 = a/2$), частотная же зависимость имеет резонансный характер: $E_m \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow 2a$; напомним, что не учтено поглощение.

Вычислим поток энергии, выходящий из области V (рис. 72.3, б), при условии, что характер распространяющейся волны имеет только поле типа H_{10} . Согласно (63.2) и (72.16) через поперечное сечение S_2 в среднем проходит поток энергии

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{1}{\dot{W}_{10}^*} \int_{S_2} E_m^2 ds = \operatorname{Re} \frac{1}{\dot{W}_{10}^*} \frac{|\dot{W}_{10}|^2 j_m^{ct^2} h^2}{4ab} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a},$$

а поскольку излучение в обоих направлениях одинаково, то полный поток энергии из V вдвое больше; он равен средней мощности излучения элемента тока в волноводе, которую обозначим \bar{P}^{Σ} . Таким образом,

$$\bar{P}^{\Sigma} = \operatorname{Re} \frac{1}{\dot{W}_{10}^*} \frac{|\dot{W}_{10}|^2 j_m^{ct^2} h^2}{2ab} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}. \quad (72.17)$$

При $\lambda > 2a$ волновое сопротивление \dot{W}_{10} оказывается чисто мнимым; как видно из (72.17), при этом передача энергии в волновод отсутствует: $\bar{P}^{\Sigma} = 0$.

Как и в случае элементарного электрического излучателя в свободном пространстве (§ 44), в данном случае также можно ввести понятие сопротивления излучения $\mathcal{R}^{\Sigma} = 2\bar{P}^{\Sigma} / I_m^{ct^2}$. Читателю рекомендуется произвести соответствующее сопоставление с формулами (44.18).

В заключение сделаем некоторые замечания.

Ценой усложнения можно было бы распространить теорию возбуждения полей на волноводы с поглощением (ср. § 71). Однако в этом нет особой необходимости, так как при частотах, существенно отличающихся от критических, полученные результаты вполне

достоверны (а именно эти случаи представляют практический интерес).

В технических устройствах возбуждающие элементы располагаются в волноводах обычно вблизи оконечных металлических перегородок — «закорачивающих стенок», которые иногда выполняются в виде перемещаемых «поршней». Применение формул (72.11) в подобных случаях требует лишь небольших дополнительных рассуждений. Так, если в рассмотренный выше прямоугольный волновод ввести металлическую (практически идеально проводящую) перегородку (рис. 72.3, в) на расстоянии z_1 от элемента тока, то движущаяся в ее сторону волна основного типа отразится с изменением фазы на 180° (ср. § 33, п. 4) и наложится на прямую волну, пройдя в сравнении с ней дополнительный путь $2z_1$. Таким образом, к комплексной амплитуде, вычисляемой по формуле (72.16), мы должны добавить еще величину, отличающуюся на множитель $-e^{-i2\Gamma_{10}z_1} = -e^{-i\frac{4\pi}{\Lambda_{10}}z_1}$. В результате получаем

$$\begin{aligned} \dot{E}_m &= -y_0 \frac{W_{10} \dot{I}_m^{ct} h}{ab} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x}{a} (1 - e^{-i2\Gamma_{10}z_1}) e^{-i\Gamma_{10}(z-z_1)} = \\ &= -y_0 \frac{i2\dot{W}_{10} \dot{I}_m^{ct} h}{ab} \sin \frac{2\pi z_1}{\Lambda_{10}} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-i\Gamma_{10}z} \quad (\lambda < 2a), \quad (z > z_1). \end{aligned} \quad (72.18)$$

Мощность излучения \bar{P}_Σ будет равна

$$\bar{P}_\Sigma = \frac{W_{10} I_m^{ct^2} h^2}{ab} \sin^2 \frac{2\pi z_1}{\Lambda_{10}} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} \quad (\lambda < 2a) \quad (72.19)$$

(ср. (72.17)).

§ 73. Волноводные системы

1. Предварительные замечания. В радиотехнике СВЧ применяются устройства, составленные из отрезков направляющих систем (в частности, полых волноводов), объемных резонаторов, а также различных иных элементов, к числу которых относятся и элементы связи (§ 71, п. 1, § 72, п. 1); будем кратко называть их *волноводными системами*. На основании материала, изложенного в §§ 61—72, можно уже многое сказать об электромагнитных процессах в реальных волноводных системах, но необходим ряд дополнительных соображений.

Начнем со следующих замечаний.

В § 55, п. 2 при описании щелевых излучателей было отмечено, что если в идеально проводящем листе прорезать узкую щель, не пересекающую тока проводимости, то излучение, можно сказать, будет отсутствовать. То же самое, конечно, можно утверждать и в отношении щелей в оболочках волноводных систем, и это всегда принимается во внимание при их конструировании. Так, например, круглый волновод, в котором распространяется волна H_{0m} , может

быть «безболезненно» разрезан поперек (рис. 73.1, а), поскольку ток в оболочке азимутален; в случае же какой-либо волны типа E допустим продольный разрез (рис. 73.1, б). В прямоугольном волноводе с основной волной H_{10} можно сделать неизлучающие щели, показанные на рис. 73.1, в (продольная щель в ряде случаев используется для введения зондирующего элемента). Цилиндрический резонатор при колебаниях H_{0mp} можно перестраивать в диапазоне частот, изменяя его объем при помощи подвижного «поршня» (дна), не опасаясь существенного уменьшения добротности в результате излучения из кольцевой щели (рис. 73.1, г). Число таких примеров легко увеличить.

Второе замечание касается описания металлических элементов волноводных систем, т. е. в первую очередь металлических оболочек полых волноводов и резонаторов. Во многих случаях металл можно принимать за идеальный проводник. Затухание волн, проходящих короткие отрезки направляющих систем, практически

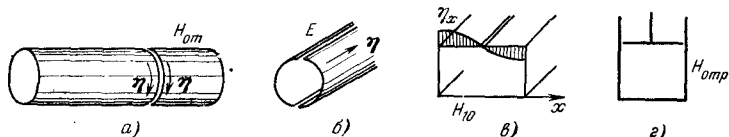


Рис. 73.1.

незаметно. В длинных же линиях передачи это важнейший технический параметр. Надо иметь в виду, что металлические поверхности бывают в той или иной степени шероховатыми в зависимости от характера их обработки, в то время как выражения Γ_m' (63.21), Q_m (69.30) и аналогичные получены в предположении идеальной гладкости границ раздела сред. Поэтому вычисляемые значения Γ_m' и Q_m обычно несколько отличаются от экспериментально наблюдаемых; иногда вводится представление об эквивалентной удельной проводимости $\tilde{\sigma}$ шероховатой поверхности, которая должна быть внесена в (63.21) или (69.30) вместо σ для получения правильного результата. Значения $\tilde{\sigma}$ для разных случаев можно найти в справочниках, например, в [Л. 3].

2. Волноводный тракт. Под *волноводным трактом*, или линией передачи, понимают отрезок направляющей системы, соединяющий генератор с каким-либо устройством, условно называемым «полезной нагрузкой». В волноводный тракт могут вводиться элементы разного назначения (измерительные, регулирующие и др.), он может быть разветвленным; наконец, выполняемая им функция бывает более сложной, чем простое соединение генератора с его нагрузкой. Но для определенности мы рассмотрим сначала простейший пример волноводного тракта.

Пусть волноводный тракт представляет собой отрезок продольно регулярного (с неизменным поперечным сечением) полого волновода. На одном конце он возбуждается генератором, напри-

мер клистронным, энергия которого вводится при помощи штыревого элемента связи; при этом имеется (рис. 73.2, а) перемещаемый «закорачивающий поршень» (ср. § 72, п. 3), служащий для регулировки возбуждения. Каково бы ни было поле в волноводном тракте, на регулярном участке волновода оно может быть представлено в виде суперпозиции его всевозможных свободных полей (ср. § 72, п. 1). Обычно размеры волновода таковы, что характер распространяющейся волны имеет лишь поле основного типа; эта волна и передает энергию нагрузке. Вблизи элемента связи поле, будучи вообще довольно сложным, содержит компоненты в виде высших полей волновода, однако они экспоненциально затухают

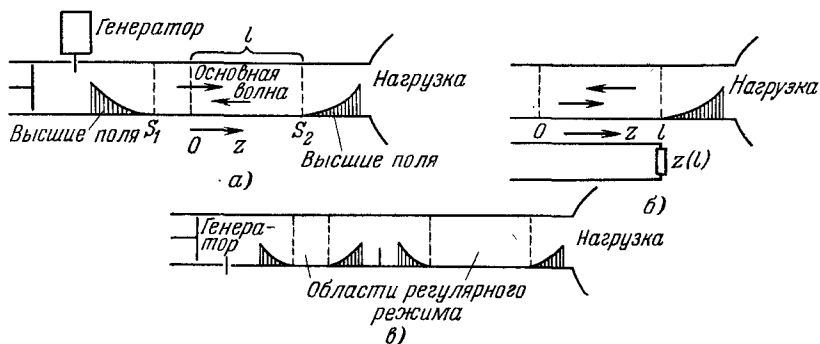


Рис. 73.2.

в направлении к нагрузке и, начиная с некоторого поперечного сечения S_1 , становятся пренебрежимо малыми. В зависимости от свойств нагрузки, вид которой мы не уточняем (это может быть, например, антенна), в тракте существует также более или менее интенсивная обратная волна основного типа, называемая *отраженной*. Вблизи нагрузки поле вообще содержит компоненты в виде высших полей волновода, которые затухают в направлении к генератору и пренебрежимо малы, начиная с некоторой границы S_2 .

В области тракта между сечениями S_1 и S_2 , таким образом, есть лишь прямая и обратная волны основного типа; будем называть ее *областью регулярного режима*. Пользуясь обозначениями (72.1), представим комплексные амплитуды поля области регулярного режима в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= c_1^+ \dot{E}_m^{1+} + c_1^- \dot{E}_m^{1-} = c_1^+ \mathcal{E}_1^+ e^{-i\Gamma_1 z} + c_1^- \mathcal{E}_1^- e^{i\Gamma_1 z}, \\ \dot{H}_m &= c_1^+ \dot{H}_m^{1+} + c_1^- \dot{H}_m^{1-} = c_1^+ \mathcal{H}_1^+ e^{-i\Gamma_1 z} + c_1^- \mathcal{H}_1^- e^{i\Gamma_1 z} \end{aligned} \right\} \quad (73.1)$$

($n = 1$), где c_1^+ и c_1^- — амплитудные коэффициенты того же рода, что и коэффициенты рядов (72.5). При помощи соотношений (72.2) запишем поперечные части векторов \dot{E}_m и \dot{H}_m :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mt} &= c_1^+ e_1 e^{-i\Gamma_1 z} (1 + \rho_0 e^{i2\Gamma_1 z}), \\ \dot{H}_{mt} &= c_1^+ h_1 e^{-i\Gamma_1 z} (1 - \rho_0 e^{i2\Gamma_1 z}), \end{aligned} \right\} \quad (73.2)$$

где введено обозначение

$$\dot{\rho}_0 = \frac{c_1^-}{c_1^+} = \frac{\dot{E}_{mt}^-}{\dot{E}_{mt}^+} \Big|_{z=0} = - \frac{H_{mt}^-}{H_{mt}^+} \Big|_{z=0}. \quad (73.3)$$

Величина $\dot{\rho}_0$ называется коэффициентом отражения, отнесенным к сечению $z = 0$. Что касается записи (73.2), то она по своей форме повторяет выражения (36.13), полученные при анализе нормального падения плоской однородной волны на границу раздела сред. Разница состоит в том, что теперь локализованной в пространстве отражающей границы может и не быть. Может оставаться неизвестным, как именно формируется отраженная волна где-то

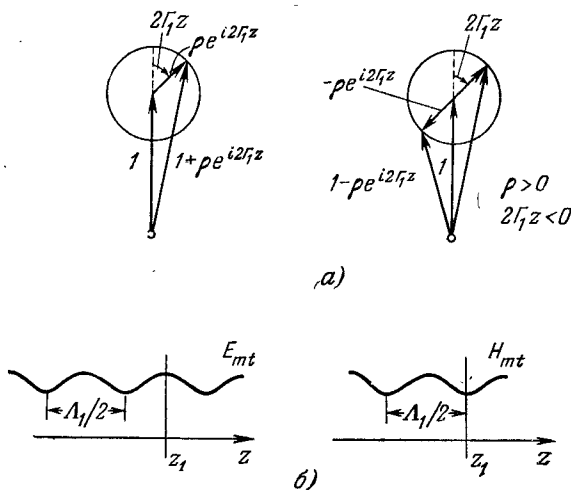


Рис. 73.3.

в области нагрузки; мы имеем право лишь говорить о ее существовании в регулярном участке волновода (внутри которого лежит область регулярного режима). Поэтому часто определяют коэффициент отражения в произвольном сечении z этого участка как функцию

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}(z) = \frac{\dot{E}_{mt}^-}{\dot{E}_{mt}^+} = - \frac{H_{mt}^-}{H_{mt}^+}. \quad (73.4)$$

Очевидно,

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 e^{-i2\Gamma_1 z}, \quad \dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(0). \quad (73.5)$$

Напомним, что формулы (36.13) позволили построить диаграммы (рис. 36.3 и 36.4), поясняющие строение поля, представляющего собой наложение прямой и обратной волн. Выражения (73.2) приводят к аналогичной интерпретации строения поля в области регулярного режима (рис. 73.3, а, б); все необходимые рассуждения читатель найдет в § 36, п. 3.

Составим далее отношение

$$\dot{Z} = \dot{Z}(z) = \dot{E}_{mt} / \dot{H}_{mt}. \quad (73.6)$$

Функцию $\dot{Z}(z)$, определенную на регулярном участке волновода, называют *сопротивлением* в сечении z для волны основного типа. Из (73.2) с учетом (73.5) и (72.2) следует, что

$$\dot{Z} = \dot{W}_1 \frac{1 + \dot{\rho}}{1 - \dot{\rho}}, \quad (73.7)$$

и если отраженная волна отсутствует, то $\dot{Z} = \dot{W}_1$.

Почему отношение величин \dot{E}_{mt} и \dot{H}_{mt} называют «сопротивлением»? Если направляющая система является двусвязной, то при рассмотрении ее основной ТЕМ-волны можно оперировать не только напряженностями полей, но также напряжениями и токами. Пусть, в частности, речь идет о двухпроводной линии, в которой распространяются прямая и обратная ТЕМ-волны. Напряжение и ток в некотором сечении при этом имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_m &= \dot{U}_m^+ e^{-ikz} + \dot{U}_m^- e^{ikz}, \\ \dot{I}_m &= \dot{I}_m^+ e^{-ikz} + \dot{I}_m^- e^{ikz}. \end{aligned} \right\} \quad (73.8)$$

Обозначая

$$\frac{\dot{U}_m^-}{\dot{U}_m^+} = - \frac{\dot{I}_m^-}{\dot{I}_m^+} = \dot{\rho}_0 \quad \text{и} \quad \frac{\dot{U}_m^\pm}{\dot{I}_m^\pm} = \pm W_n \quad (73.9)$$

(см. также § 66, п. 2), составим отношение величин \dot{U}_m и \dot{I}_m , которое есть не что иное, как сопротивление линии в данном сечении z ; оно оказывается равным

$$\dot{Z}_n = W_n \frac{1 + \dot{\rho}}{1 - \dot{\rho}}, \quad (73.10)$$

где $\dot{\rho} = \dot{\rho}_0 e^{i2kz}$.

По форме выражения (73.7) и (73.10) совпадают. Это означает, что величина $\dot{Z}(z)$ подобна сопротивлению $\dot{Z}_n(z)$, и можно построить отрезок условной двухпроводной линии с параметрами $W_n = \dot{W}_1$ и $k = \dot{\Gamma}_1$, который будет «моделировать» область регулярного режима волноводного тракта. Такой отрезок (рис. 73.2, б) при $z = l$ должен быть нагружен сопротивлением $\dot{Z}_n = \dot{Z}(l)$.

Если, помимо генератора и нагрузки, регулярность волновода нарушается включенными в него элементами, то вблизи каждого из них поле тракта будет содержать компоненты в виде высших полей волновода, экспоненциально затухающие с расстоянием. На рис. 73.2, в представлен волноводный тракт с включенным элементом (пассивным штырем), расположенным на относительно больших расстояниях от генератора и нагрузки; в этом случае в тракте имеются две области регулярного режима.

Когда волноводный тракт является отрезком открытой направляющей системы (двухпроводной линии, диэлектрического волновода и др.), элементы, нарушающие регулярность системы,

вызывают излучение в окружающее пространство. Здесь так же можно выделять области регулярного режима, в которых поле тракта представляет собой суперпозицию прямой и обратной волн основного типа.

На рис. 73.4, а, б показано два примера открытых трактов. Открытый конец двухпроводной линии (рис. 73 и, а) подобен элементарному электрическому излучателю (§ 44). Область регулярного режима начинается там, где полем излучения, убывающим при удалении от конца, можно пренебречь. Так как мощность излучения пропорциональна $(d/\lambda)^2$ (ср. § 44, п. 4), при достаточно малом расстоянии между проводами действие концевой нерегулярности практически незаметно. Следует подчеркнуть, что аналогично открытому концу проявляет себя любая нерегулярность двухпроводного тракта. Другой пример — отрезок линии Губо (§ 61, п. 3),

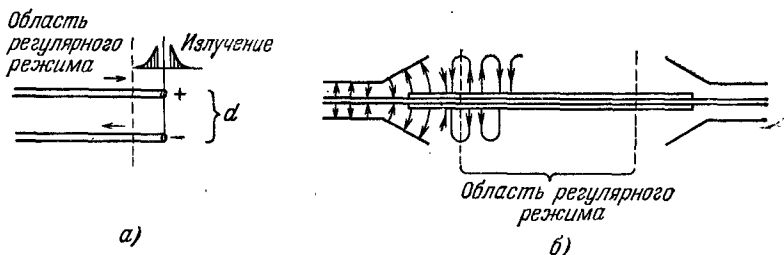


Рис. 73.4.

переходящий при подключении к генератору и нагрузке в коаксиальную линию; соединительные элементы имеют вид рупоров. Требуется, чтобы осуществлялось преобразование волны ТЕМ коаксиальной линии в волну E_{00} линии Губо на передающем конце и обратное преобразование — на приемном. «Чистая» волна E_{00} формируется на некотором расстоянии от рупора, где и начинается область регулярного режима; соединительные элементы конструируются так, чтобы свести к минимуму излучение в окружающее пространство.

3. Общее описание волноводных систем. На рис. 73.5 в нескольких вариантах изображена полная система с присоединенными к ней регулярными волноводами; последние могут быть односвязными и многосвязными, но обязательно являются экранированными. Мы не задаемся каким-либо определенным внутренним устройством полой системы и формой ее оболочки. Такой *волноводный трансформатор* может содержать внутри себя различные проводящие и диэлектрические элементы, изотропные и анизотропные. Наша задача состоит в том, чтобы установить средства описания общего вида волноводных трансформаторов.

В каждом из присоединенных волноводов выделим определенное поперечное сечение, которое назовем *входным сечением*. Взяв какое-либо из входных сечений S_α , построим для него системы функ-

ций $\{e_{n(\alpha)}\}$ и $\{h_{n(\alpha)}\}$ (§ 72, п. 1), подчиненные условиям ортонормировки вида (72.4)

$$\int_{S_\alpha} e_{k(\alpha)} e_{n(\alpha)}^* ds = \delta_{kn} |\dot{W}_{n(\alpha)}| = |\dot{W}_{n(\alpha)}|^2 \int_{S_\alpha} h_{k(\alpha)} h_{n(\alpha)}^* ds;$$

$$\int_{S_\alpha} [e_{k(\alpha)}, h_{n(\alpha)}^*]_z ds = \delta_{kn} \frac{\dot{W}_{n(\alpha)}}{|\dot{W}_{n(\alpha)}|}. \quad (73.11)$$

Любое поперечное поле на S_α разлагается по этим системам в ортогональные ряды:

$$\dot{E}_{m(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n(\alpha)} e_{n(\alpha)}, \quad \dot{H}_{m(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n(\alpha)} h_{n(\alpha)}. \quad (73.12)$$

Пусть такое разложение произведено на всех входных сечениях волноводного трансформатора ($\alpha = 1, 2, \dots, P$), т. е. можно говорить

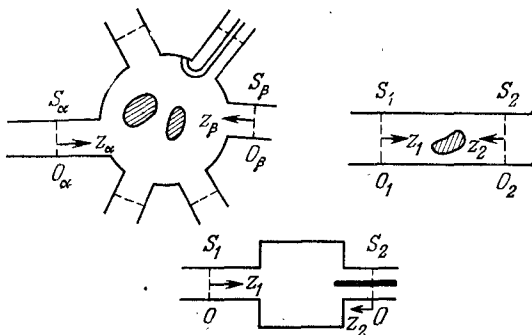


Рис. 73.5.

о коэффициентах Фурье $a_{n(\alpha)}$ и $b_{n(\alpha)}$. Объединяя все эти коэффициенты, составим векторы (см. Приложение 9, п. 1) $a = (a_{1(1)}, a_{2(1)}, \dots, a_{1(2)}, a_{2(2)}, \dots)$ и $b = (b_{1(1)}, b_{2(1)}, \dots, b_{1(2)}, b_{2(2)}, \dots)$. Если среда внутри волноводного трансформатора линейна и пассивна (отсутствуют источники), то векторы a и b связаны линейной однородной зависимостью, так что можно написать:

$$a = Zb \quad \text{и} \quad b = Ya, \quad (73.13)$$

где матрицы Y и Z называют *матрицей сопротивления* и соответственно *матрицей проводимости* волноводного трансформатора. Они имеют строение, которое ниже поясняется на примере матрицы Z :

$$Z = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} Z^{11} & Z^{12} & \dots & Z^{1P} \\ \hline Z^{21} & Z^{22} & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline Z^{P1} & \dots & \dots & Z^{PP} \end{array} \right\|, \quad \text{где} \quad Z^{\alpha\beta} = \left\| \begin{array}{c|c|c} Z_{11}^{\alpha\beta} & Z_{12}^{\alpha\beta} & \dots \\ \hline Z_{21}^{\alpha\beta} & Z_{22}^{\alpha\beta} & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots \end{array} \right\|,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \dots, P \quad (73.14)$$

(клетки $Z^{\alpha\beta}$ — бесконечные матрицы).

Поскольку на каждом сечении S_α поле можно представить также в виде суперпозиции прямых и обратных волн данного волновода с поперечными компонентами $e_{n(\alpha)}$ и $h_{n(\alpha)}$ (включая запрещенные поля), то вместо (73.12) можно написать:

$$\dot{E}_{m(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n(\alpha)}^+ e_{n(\alpha)} + c_{n(\alpha)}^- e_{n(\alpha)}), \quad (73.15)$$

$$\dot{H}_{m(\alpha)} = \sum_{n=1}^{\infty} (c_{n(\alpha)}^+ h_{n(\alpha)} - c_{n(\alpha)}^- h_{n(\alpha)}).$$

Совокупности всех коэффициентов $c_{n(\alpha)}^+$ и $c_{n(\alpha)}^-$ ($\alpha=1, 2, \dots, P$; $n=1, 2, \dots$) образуют векторы c^+ и c^- такого же типа, как a и b , причем на основании сопоставления (73.12) и (73.15) имеем

$$\left. \begin{aligned} a &= c^+ + c^-, \\ b &= c^+ - c^-. \end{aligned} \right\} \quad (73.16)$$

В линейном однородном соотношении

$$c^- = R c^+ \quad (73.17)$$

матрица R называется *матрицей рассеяния*; зная R , можно определить амплитуды всех уходящих («рассеянных») волн в виде вектора c^- , если заданы амплитуды волн приходящих («падающих»), определяемые вектором c^+ .

Матрица рассеяния имеет такую же структуру, как матрицы Z и Y (73.14). Смысл ее элементов очень прост. Пусть все волноводы бесконечны и только по одному из них на сечение S_α падает волна типа $n(\alpha)$, т. е. вектор c^+ имеет только одну отличную от нуля компоненту $c_{n(\alpha)}^+$. Тогда, согласно (73.17), в этом волноводе появляется *отраженная* волна того же типа с амплитудным коэффициентом $c_{n(\alpha)}^- = R_{nn}^{\alpha\alpha} c_{n(\alpha)}^+$ и *отраженные* волны других типов, для которых эти коэффициенты равны $c_{k(\alpha)}^- = R_{kn}^{\alpha\alpha} c_{n(\alpha)}^+$; на остальных же сечениях появятся *прошедшие* волны с амплитудными коэффициентами $c_{k(\beta)}^- = R_{kn}^{\beta\alpha} c_{n(\alpha)}^+$. Таким образом, элементы $R_{kn}^{\alpha\alpha}$ — это *коэффициенты отражения* для входных сечений S_α (при $k=n$ речь идет об отражении волны без преобразования типа), а элементы $R_{kn}^{\beta\alpha}$ — *коэффициенты прохождения (передачи)* данного волноводного трансформатора.

Установим связь матриц R , Z и Y . Из (73.13) и (73.16) следует: $c^+ + c^- = Z(c^+ - c^-)$ и далее, с учетом (73.17):

$(I + R)c^- = Z(I - R)c^-$. На этом основании пишем:

$$I + R = Z(I - R), \quad (73.18a)$$

а отсюда

$$Z = (I + R)(I - R)^{-1} \quad \text{и} \quad R = (Z + I)^{-1}(Z - I). \quad (73.18b)$$

Аналогично находим

$$I - R = Y(I + R), \quad (73.19a)$$

откуда

$$Y = (I - R)(I + R)^{-1} \quad \text{и} \quad R = (I + Y)^{-1}(I - Y). \quad (73.19b)$$

Наконец, на основании (73.13)

$$Y = Z^{-1}. \quad (73.20)$$

Нетрудно увидеть в первом из соотношений (73.18б) обобщение ранее полученного равенства (73.7). Можно сказать, что в п. 2 была рассмотрена простейшая система с одним входным сечением ($P=1$) и одним типом поля. Матрицы Z и R имеют при этом по одному элементу (Z_{11}^{11} и R_{11}^{11}), так что равенство (73.18б) принимает вид $Z_{11}^{11} = \frac{1+R_{11}^{11}}{1-R_{11}^{11}}$ и переходит в (73.7). При этом $R_{11}^{11} = \rho$ — коэффициент отражения для основной волны, а Z_{11}^{11} — «нормированное» (отнесенное к \dot{W}_1) сопротивление \dot{Z}/\dot{W}_1 .

Наконец, отметим следующее важное обстоятельство. Хотя в общем случае матрицы Z , Y и R бесконечные, всегда можно так расположить входные сечения (при достаточной длине волноводов), чтобы матрицы практически стали конечными. Пусть в каждом

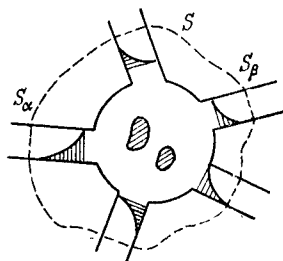


Рис. 73.6.

из присоединенных волноводов характер распространяющейся волны имеет только один тип поля. Это значит, что если сечение S_α находится в области регулярного режима, то в выражениях (73.12) можно считать равными нулю все коэффициенты, кроме $a_{1(\alpha)}$ и $b_{1(\alpha)}$. Векторы a и b оказываются только P -мерными: $a = (a_{1(1)}, a_{1(2)}, \dots, a_{1(P)})$ и $b = (b_{1(1)}, b_{1(2)}, \dots, b_{1(P)})$, и в бесконечных клеточных матрицах $Z^{\alpha\beta}$ (73.14) остается по одному элементу $Z_{11}^{\alpha\beta}$ (это касается, конечно, и аналогичных матриц $Y_{11}^{\alpha\beta}$ и $R_{11}^{\alpha\beta}$). Таким образом, при отнесении входных сечений S_α в области регулярного режима (рис. 73.6) матрицы Z , Y и R будут иметь равный числу входных сечений порядок P . Волноводный трансформатор описывается тогда, как $2P$ -полосник в теории цепей.

§ 74. Свойства волноводных трансформаторов

1. Матрицы сопротивления и проводимости. Ниже мы будем рассматривать только волноводные трансформаторы с входными сечениями, лежащими в областях регулярного режима присоединенных волноводов, передающих лишь одну основную волну. Выясним некоторые свойства матриц Z и Y .

Мысленно построим поверхность S , проходящую через все входные сечения S_α и полностью охватывающую волноводный трансформатор (рис. 73.6). Векторы поля отличны от нуля только на S_α ,

причем представления (73.12) имеют вид: $\dot{E}_{m(\alpha)} = a_{1(\alpha)} e_{1(\alpha)}$ и $\dot{H}_{m(\alpha)} = b_{1(\alpha)} h_{1(\alpha)}$; волновые сопротивления вещественны ($\dot{W}_{1(\alpha)} = W_{1(\alpha)}$). Поэтому

$$\oint_S [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds = \sum_{\alpha=1}^P \int_{S_\alpha} [\dot{E}_{m(\alpha)}, \dot{H}_{m(\alpha)}^*] ds = - \sum_{\alpha=1}^P a_{1(\alpha)} b_{1(\alpha)}^*. \quad (74.1)$$

Можно задать такое поле, что на входных сечениях поперечная электрическая компонента будет отсутствовать везде, кроме одного из них:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(\alpha)} &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, \beta - 1, \beta + 1, \dots, P, \\ \dot{E}_{m(\beta)} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (74.2)$$

($a_{1(\beta)} \neq 0$). Это так называемый «режим короткого замыкания»; он будет иметь место, если в соответствующих входных сечениях введены идеально проводящие перегородки. При условии (74.2) из (74.1) следует:

$$\oint_S [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds = - a_{1(\beta)} b_{1(\beta)}^*. \quad (74.3)$$

Если волноводный трансформатор является непоглощающим и пассивным, то, согласно (30.11),

$$\operatorname{Re} \oint_S [\dot{E}_m, \dot{H}_m^*] ds = 0. \quad (\epsilon'' = 0, \mu'' = 0, \dot{P}^{\text{ст}} = 0). \quad (74.4)$$

В то же время при условии (74.2) $b_{1(\beta)} = Y_{11}^{\beta\beta} a_{1(\beta)}$. Поэтому правая часть (74.3) принимает вид $- |b_{1(\beta)}|^2 = Y_{11}^{\beta\beta*}$, и из (74.3) с учетом (74.4) получаем

$$\operatorname{Re} Y_{11}^{\beta\beta} = 0, \quad (74.5)$$

т. е. все элементы матрицы проводимости $Y_{11}^{\beta\beta}$ (сечение S_β произвольно: $\beta = 1, 2, \dots, P$) в случае пассивного непоглощающего трансформатора являются *мнимыми*.

Задав далее «режим холостого хода»

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_{m(\alpha)} &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, \beta - 1, \beta + 1, \dots, P, \\ \dot{H}_{m(\beta)} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (74.6)$$

($b_{1(\beta)} \neq 0$), также приходим к равенству (74.3). Теперь можно написать: $a_{1(\beta)} = Z_{11}^{\beta\beta} b_{1(\beta)}$, и в правой части получить $- |a_{1(\beta)}|^2 Z_{11}^{\beta\beta}$. Отсюда

$$\operatorname{Re} Z_{11}^{\beta\beta} = 0, \quad (74.7)$$

т. е. *мнимыми* являются и все элементы $Z_{11}^{\beta\beta}$ матрицы сопротивления.

Теперь используем лемму Лоренца в форме (48.6). Применяя ее к прежней области, ограниченной поверхностью S , проходящей через все входные сечения (рис. 73.6), имеем

$$\oint_S \{ [\dot{E}_{m2}, \dot{H}_{m1}] - [\dot{E}_{m1}, \dot{H}_{m2}] \} ds = 0. \quad (74.8)$$

Пусть режим короткого замыкания распространен на все входные сечения, кроме двух S_β и S_γ . Каковы бы ни были два разных решения уравнений Максвелла \dot{E}_{m1} , \dot{H}_{m1} и \dot{E}_{m2} , \dot{H}_{m2} , на входных сечениях S_β и S_γ представления (73.12) дают

$$\dot{E}_{m1,2} = \begin{cases} \dot{E}_{m(\beta)}^{(1,2)} = a_{1(\beta)}^{(1,2)} e_{1(\beta)} = (Y_{11}^{\beta\beta} b_{1(\beta)}^{(1,2)} + Y_{11}^{\beta\gamma} b_{1(\gamma)}^{(1,2)}) e_{1(\beta)} \text{ на } S_\beta, \\ \dot{E}_{m(\gamma)}^{(1,2)} = a_{1(\gamma)}^{(1,2)} e_{1(\gamma)} = (Y_{11}^{\gamma\gamma} b_{1(\gamma)}^{(1,2)} + Y_{11}^{\gamma\beta} b_{1(\beta)}^{(1,2)}) e_{1(\gamma)} \text{ на } S_\gamma; \end{cases}$$

$$\dot{H}_{m1,2} = \begin{cases} \dot{H}_{m(\beta)}^{(1,2)} = b_{1(\beta)}^{(1,2)} h_{1(\beta)} \text{ на } S_\beta, \\ \dot{H}_{m(\gamma)}^{(1,2)} = b_{1(\gamma)}^{(1,2)} h_{1(\gamma)} \text{ на } S_\gamma \end{cases}$$

(верхние индексы (1,2) указывают на принадлежность первому и второму решению). Внося это в (74.8), при вещественности $e_{1(\beta,\gamma)}$ и $h_{1(\beta,\gamma)}$ с учетом (73.11) пишем:

$$(Y_{11}^{\beta\beta} b_{1(\beta)}^{(2)} + Y_{11}^{\beta\gamma} b_{1(\gamma)}^{(2)}) b_{1(\beta)}^{(1)} + (Y_{11}^{\gamma\gamma} b_{1(\gamma)}^{(2)} + Y_{11}^{\gamma\beta} b_{1(\beta)}^{(2)}) b_{1(\gamma)}^{(1)} - (Y_{11}^{\beta\beta} b_{1(\beta)}^{(1)} + Y_{11}^{\beta\gamma} b_{1(\gamma)}^{(1)}) b_{1(\beta)}^{(2)} - (Y_{11}^{\gamma\gamma} b_{1(\gamma)}^{(1)} + Y_{11}^{\gamma\beta} b_{1(\beta)}^{(1)}) b_{1(\gamma)}^{(2)} = 0,$$

откуда

$$Y_{11}^{\beta\gamma} (b_{1(\gamma)}^{(2)} b_{1(\beta)}^{(1)} - b_{1(\beta)}^{(1)} b_{1(\gamma)}^{(2)}) = Y_{11}^{\gamma\beta} (b_{1(\gamma)}^{(2)} b_{1(\beta)}^{(1)} - b_{1(\beta)}^{(1)} b_{1(\gamma)}^{(2)})$$

и, следовательно,

$$Y_{11}^{\beta\gamma} = Y_{11}^{\gamma\beta} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, P). \quad (74.9)$$

Матрица проводимости Y , таким образом, симметрическая (Приложение 9). Анализируя аналогичный режим холостого хода, таким же путем легко прийти к выводу, что

$$Z_{11}^{\beta\gamma} = Z_{11}^{\gamma\beta} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, P). \quad (74.10)$$

Следует подчеркнуть, что равенства (74.9) и (74.10), выражающие принцип взаимности для волноводного трансформатора (ср. § 48, п. 2), верны только в пределах справедливости леммы Лоренца (§ 48, п. 1).

Покажем, что все элементы матриц Y и Z непоглощающего пассивного волноводного трансформатора, подчиненного принципу взаимности, являются мнимыми («сопротивления» и «проводимости» имеют «реактивный» характер). Создавая короткое замыкание на всех входных сечениях, кроме S_α и S_β , в правой части (74.1) будем иметь $-a_{1(\beta)} b_{1(\beta)}^* - a_{1(\gamma)} b_{1(\gamma)}^*$ (ср. 74.3)). На основании (74.4)

$$\operatorname{Re} (a_{1(\beta)} b_{1(\beta)}^* + a_{1(\gamma)} b_{1(\gamma)}^*) = 0,$$

т. е.

$$\operatorname{Re} [a_{1(\beta)} (Y_{11}^{\beta\beta} a_{1(\beta)} + Y_{11}^{\beta\gamma} a_{1(\gamma)})^* + a_{1(\gamma)} (Y_{11}^{\gamma\gamma} a_{1(\gamma)} + Y_{11}^{\gamma\beta} a_{1(\beta)})^*] = 0.$$

Отсюда с учетом (74.5) и (74.9) следует:

$$\operatorname{Re} Y_{11}^{\beta\gamma} (a_{1(\beta)}^* a_{1(\gamma)} + a_{1(\beta)} a_{1(\gamma)}^*) = 0,$$

а поскольку величина в скобках вещественна, то

$$\operatorname{Re} Y_{11}^{\beta\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, P). \quad (74.11)$$

Аналогично устанавливается, что при тех же исходных условиях

$$\operatorname{Re} Z_{11}^{\beta\gamma} = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, P). \quad (74.12)$$

2. Матрица рассеяния. Ввиду соотношений (73.186) и (73.196) при выполнении равенств (74.9), (74.10) матрица рассеяния R является *симметрической*, как Z и Y :

$$R_{11}^{\beta\gamma} = R_{11}^{\gamma\beta} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, \dots, P) \quad (74.13)$$

(это можно установить при помощи формул приложения 9).

Далее существенно, что для непоглощающего пассивного волноводного трансформатора матрица рассеяния *унитарна* (приложение 9). Покажем это. Унитарная матрица R , согласно (П9.6), должна быть подчинена соотношению

$$\tilde{R} = R^{-1}. \quad (74.14)$$

Выражая R через Z при помощи формулы (73.186), записываем обратную матрицу R^{-1} в виде

$$R^{-1} = (Z - I)^{-1} (Z + I) \quad (74.15)$$

(простая проверка показывает, что произведение этой матрицы на R дает единичную матрицу I). Найдем сопряженную матрицу \tilde{R} , т. е. транспонированную и комплексно сопряженную. Но матрица R симметрическая, и поэтому $\tilde{R} = R^*$; таким образом, $\tilde{R} = (Z^* + I)^{-1} (Z^* - I) = (-Z + I)^{-1} (-Z - I) = (Z - I)^{-1} (Z + I)$. (74.16)

Сравнивая результаты (74.15) и (74.16), видим, что равенство (74.14) действительно выполняется.

Унитарность матрицы рассеяния есть следствие закона сохранения энергии в форме (74.4). Поскольку

$$\dot{E}_{m(\alpha)} = (c_{1(\alpha)}^+ + c_{1(\alpha)}^-) \mathbf{e}_{1(\alpha)},$$

и

$$\dot{H}_{m(\alpha)} = (c_{1(\alpha)}^+ - c_{1(\alpha)}^-) \mathbf{h}_{1(\alpha)},$$

это равенство можно записать так:

$$\operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^P \int_{S_{\alpha}} [(c_{1(\alpha)}^+ + c_{1(\alpha)}^-) \mathbf{e}_{1(\alpha)}, (c_{1(\alpha)}^+ - c_{1(\alpha)}^-)^* \mathbf{h}_{1(\alpha)}] ds = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} \sum_{\alpha=1}^P (|c_{1(\alpha)}^+|^2 - |c_{1(\alpha)}^-|^2 - c_{1(\alpha)}^+ (c_{1(\alpha)}^-)^* + c_{1(\alpha)}^- (c_{1(\alpha)}^+)^*) = 0,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha=1}^P (|c_{1^+}^{(\alpha)}|^2 - |c_{1^-}^{(\alpha)}|^2) = 0 \quad (74.17)$$

или

$$(c^+, c^+) = (c^-, c^-) \quad (74.17a)$$

(ср. приложение 9, стр. 604). Дальнейшие действия — те же, что и в приложении 9. Выражая c^- через c^+ при помощи соотношения (73.17), имеем

$$(c^+, c^+) = (Rc^+, Rc^+),$$

или, что то же,

$$(c^+, Ic^+) = (c^+, \tilde{R}Rc^+).$$

А это опять приводит к (74.14).

3. Примеры. Заключение. Рассмотрим несколько простых примеров. Пусть в области регулярного режима волноводного тракта выделен отрезок длиной l (рис. 74.1). Поскольку распространяется только одна основная волна, которая проходит через выделенную область без отражений, приобретая фазовый сдвиг $-\Gamma_1 l$, и нет причины для появления высших полей, то матрица рассеяния имеет вид

$$R = \begin{vmatrix} 0 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 0 \end{vmatrix} \quad (74.18)$$

независимо от длины l ; выбрав $l = n\Lambda$ ($n = 1, 2, \dots$), получаем, в частности,

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (74.18a)$$

В радиотехнике СВЧ применяются так называемые *направленные ответвители*. Это устройства, принцип действия которых можно

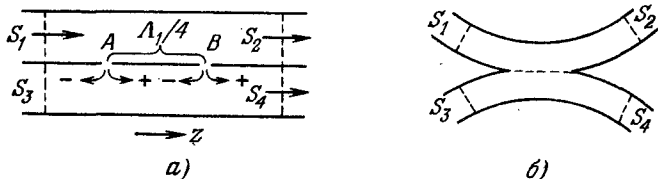


Рис. 74.2.

пояснить на примере двух волноводов, соединенных весьма малыми отверстиями A и B (рис. 74.2, а), расположенными на расстоянии $\Lambda_1/4$. Чем меньше размер отверстий, тем с большим основанием можно считать, что каждое из них действует так, как если бы оно было одно. Если в волноводе 1 от S_1 к S_2 распространяется основная волна, то в присоединенном волноводе 2 возбуждаются (помимо высших полей) четыре основные волны, условно обо-

значаемые A^+ , A^- , B^+ и B^- ; смысл этих символов понятен из рис. 74.2, а. Волны A^+ и B^+ , налагаясь, дают волну, выходящую из S_4 . Они интерферируют в фазе, потому что отверстие A возбуждается по сравнению с B с опережением на 90° , но зато в присоединенном волноводе волна A^+ отстает от B^+ на те же 90° . Что касается волн A^- и B^- , то они интерферируют в противофазе, так что из S_3 волна не выходит. Действительно, к опережению возбуждения волны A^- по сравнению с B^- со стороны волновода 1 добавляется еще опережение на 90° в результате различия путей в волноводе 2. Итак, распространяющаяся в волноводе 1 от S_1 к S_2 волна порождает в волноводе 2 волну, движущуюся параллельно. Устройство симметрично, и мы придем к аналогичному выводу, изучая первичные волны, идущие от S_2 к S_1 , от S_3 к S_4 и от S_4 к S_3 .

Имеется целый ряд способов построения направленных ответвителей (причем более интересных, с технической точки зрения), поэтому остановимся на общем их описании.

Общего вида направленный ответвитель условно изображен на рис. 74.2, б. Если он идеален, то, как и в рассмотренном выше случае будет:

$$R_{11}^{31} = R_{11}^{13} = R_{11}^{24} = R_{11}^{42} = 0. \quad (74.19a)$$

Если также нет отражений, то

$$R_{11}^{11} = R_{11}^{22} = R_{11}^{33} = R_{11}^{44} = 0 \quad (74.19b)$$

(позднее будет показано, что эти условия должны выполняться одновременно). Затем ввиду симметрии устройства

$$R_{12} = R_{21} = R_{34} = R_{43} = a \quad (74.20a)$$

и

$$R_{14} = R_{41} = R_{32} = R_{23} = b, \quad (74.20b)$$

где a и b — некоторые комплексные числа. Таким образом, записывая матрицу рассеяния при входных сечениях, отнесенных в области регулярного режима, имеем

$$R = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \end{vmatrix}. \quad (74.21)$$

Дальнейшую информацию об элементах матрицы R принесет учет того факта, что она унитарна. Умножая $\bar{R} = R^*$ на R , мы должны получить единичную матрицу I :

$$\begin{vmatrix} 0 & a^* & 0 & b^* \\ a^* & 0 & b^* & 0 \\ 0 & b^* & 0 & a^* \\ b^* & 0 & a^* & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ a & 0 & b & 0 \\ 0 & b & 0 & a \\ b & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (74.22)$$

По правилу умножения матриц (приложение 9, стр. 603) находим

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{R}R)_{11} &= |\dot{a}|^2 + |\dot{b}|^2 = 1, \\ (\tilde{R}R)_{13} &= \dot{a}^* \dot{b} + \dot{b}^* \dot{a} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (74.23)$$

так что, обозначая $\dot{a} = ae^{i\varphi}$ и $\dot{b} = be^{i\psi}$ (a и b вещественные), получаем

$$\left. \begin{aligned} b &= \sqrt{1 - a^2}, \\ \operatorname{Re}(\dot{a}\dot{b})^* &= 0, \operatorname{Re}e^{i(\varphi - \psi)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (74.24)$$

Вторая строчка означает, что

$$\cos(\varphi - \psi) = 0,$$

т. е.

$$\varphi - \psi = \pm (2n - 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (74.24a)$$

и мы пришли к выводу, что прямая и ответвляемая волны находятся в квадратуре.

Покажем, наконец, что исходные условия (74.19a) и (74.19б) не являются независимыми, т. е. что идеальный направленный ответвитель должен быть неотражающим. Предположим, что вместо (74.19a)

$$R_{11}^{31} = R_{11}^{13} = R_{11}^{24} = R_{11}^{42} = \dot{c}, \quad (74.25)$$

и внесем это значение в (74.22) вместо соответствующих нулей. Тогда будет:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{R}R)_{13} &= \dot{a}^* \dot{b} + \dot{b}^* \dot{a} = 0, \\ (\tilde{R}R)_{12} &= \dot{c}^* \dot{b} + \dot{b}^* \dot{c} = 0, \\ (\tilde{R}R)_{14} &= \dot{a}^* \dot{c} + \dot{c}^* \dot{a} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (74.26)$$

(первая из строчек совпадает со второй строчкой (74.23)). Но эти уравнения несовместны. Действительно, перепишем (74.26) в виде трех пропорций:

$$\frac{\dot{a}^*}{\dot{a}} = -\frac{\dot{b}^*}{\dot{b}}, \quad \frac{\dot{b}^*}{\dot{b}} = -\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}}, \quad \frac{\dot{a}^*}{\dot{a}} = -\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}}.$$

Исключая из первого равенства \dot{a}^*/\dot{a} и \dot{b}^*/\dot{b} , получаем

$$\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}} = -\frac{\dot{c}^*}{\dot{c}} \quad (?)$$

Предположение (74.25) отвергается.

Пример направленного ответвителя примечателен тем, что, исходя из общих свойств матрицы рассеяния и симметрии системы, удалось установить некоторые особенности последней, которые непосредственно не очевидны. Число такого рода примеров можно было бы увеличить.

Матрица рассеяния в сравнении с матрицами сопротивления и проводимости дает более естественное средство описания волноводных трансформаторов, поскольку в действительности обычно бывают известны не полные электрические и магнитные поля на входных сечениях, а падающие волны. В то же время матрицы Z и Y позволяют составлять «эквивалентные схемы» волноводных трансформаторов в виде цепей, точнее $2P$ -полусников; при этом коэффициенты $a_{1(\alpha)}$ и $b_{1(\alpha)}$ рассматриваются как входные напряжения и токи соответственно.

Возьмем в качестве примера отрезок волновода, для которого получена матрица рассеяния (74.18). На основании (73.186)

$$Z = \left\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & -e^{-i\Gamma_1 l} \\ -e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{array} \right\|^{-1} \right\|,$$

т. е. согласно (П9.7)

$$Z = \left\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & e^{-i\Gamma_1 l} \\ e^{-i\Gamma_1 l} & 1 \end{array} \right\| \frac{1}{1 - e^{-i2\Gamma_1 l}} \right\|.$$

Перемножая матрицы, находим

$$Z = -i \left\| \left\| \begin{array}{cc} \operatorname{ctg} \Gamma_1 l & \operatorname{cosec} \Gamma_1 l \\ \operatorname{cosec} \Gamma_1 l & \operatorname{ctg} \Gamma_1 l \end{array} \right\| \right\|. \quad (74.27)$$

Это значит, что действие отрезка волновода, выделенного в области регулярного режима, можно выразить при помощи схемы эквивалентного четырехполюсника, например, Т-образной (рис. 74.3), где

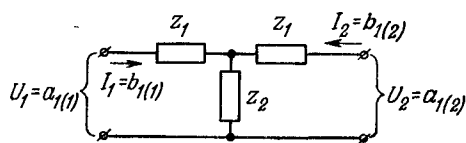


Рис. 74.3.

$$Z_1 = Z_{11} - Z_{12} = -i(\operatorname{ctg} \Gamma_1 l - \operatorname{cosec} \Gamma_1 l)$$

и

$$Z_2 = Z_{12} = -i \operatorname{cosec} \Gamma_1 l.$$

В заключение необходимо подчеркнуть, что, кроме некоторых простых случаев, матрицы Z , Y и R волноводных трансформаторов нельзя определить из элементарных соображений. Однако при исследовании реальных систем элементы этих матриц можно находить посредством измерений; соответствующие методы излагаются в курсах радиоизмерений на СВЧ. Для вычисления матриц Y , Z и R надо располагать решениями специально поставленных краевых задач электродинамики для рассматриваемого волноводного трансформатора. Этого вопроса мы коснемся ниже в § 76.

§ 75. Теория возмущений

1. Постановка задачи. Принцип сравнения. Уже отмечалось, что задачи о направляющих системах, объемных резонаторах и волноводных трансформаторах лишь в немногих случаях являются

регулярными, т. е. имеют замкнутые аналитические решения. Однако нерегулярные задачи иногда удобно рассматривать как регулярные, претерпевшие некоторое отклонение, возмущение исходных условий.

При малости возмущения решение нерегулярной, возмущенной задачи часто в некотором приближении можно определить, имея решение регулярной задачи.

Начнем с того, что сопоставим две крайние задачи для уравнений Максвелла.

<p>Задача 1 («начальная»)</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_{m0} &= -i\omega_0 \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{m0}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_{m0} &= i\omega_0 \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{m0} + \dot{\mathbf{j}}_{m0}^{\text{ср}}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m0\tau} &= 0 \text{ на } S_0 - S_{0\Sigma}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m0} &= \dot{\mathbf{E}}_{m0\Sigma} \text{ на } S_{0\Sigma}, \end{aligned} \right\} \text{ в } V_0,$	<p>Задача 2 («возмущенная»)</p> $\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}_m &= -i\omega \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}_m &= i\omega \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m + \dot{\mathbf{j}}_m^{\text{ср}}, \\ \dot{\mathbf{E}}_{m\tau} &= 0 \text{ на } S - S_\Sigma, \\ \dot{\mathbf{E}}_m &= \dot{\mathbf{E}}_{m\Sigma} \text{ на } S_\Sigma. \end{aligned} \right\} \text{ в } V,$
--	--

(75.1)

Проницаемости ϵ_0 и μ_0 — скалярные вещественные величины; частота ω_0 всегда вещественна (последнее уточнение имеет смысл при

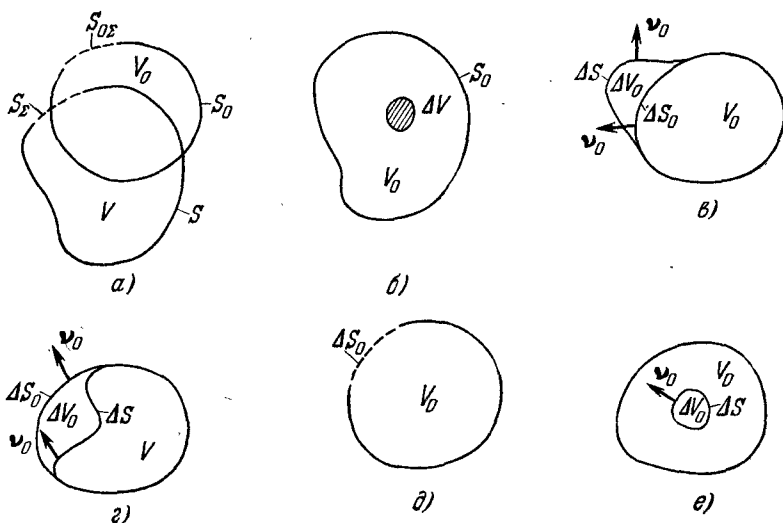


Рис. 75.1.

рассмотрении свободных колебаний). Области V_0 и V с границами S_0 и S обязательно пересекаются или совпадают, что составляет важный частный случай (рис. 75.1, а).

Взяв уравнения (75.1) (задача 1) в комплексно сопряженной форме и произведя уже знакомые действия (ср., например, § 71.

п. 3 и § 72, п. 2), получаем из (75.1) соотношения

$$\oint_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*] ds = -i\dot{\omega} \int_{V_0} \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^* dv + i\omega_0 \int_{V_0} \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* dv - \int_{V_0} \mathbf{j}_{m0}^{ct*} \dot{\mathbf{E}}_m dv \quad (75.2)$$

и

$$\oint_{S_0} [\dot{\mathbf{E}}_{m0}^*, \dot{\mathbf{H}}_m] ds = i\omega_0 \int_{V_0} \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^* dv - i\dot{\omega} \int_{V_0} \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* dv - \int_{V_0} \mathbf{j}_m^{ct} \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* dv \quad (75.3)$$

(предполагается, что при несовпадении областей V и V_0 существуют подчиненные уравнения Максвелла продолжения функций $\dot{\mathbf{E}}_m$, $\dot{\mathbf{H}}_m$ в V_0). Объединяя равенства (75.2) и (75.3), находим

$$i \oint_{S_0} \{[\dot{\mathbf{E}}_{m0}^*, \dot{\mathbf{H}}_m] + [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*]\} ds = -i \int_{V_0} (\mathbf{j}_{m0}^{ct*} \dot{\mathbf{E}}_m + \mathbf{j}_m^{ct} \dot{\mathbf{E}}_{m0}^*) dv + \dot{\omega} \int_{V_0} (\Delta \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* + \Delta \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*) dv + \Delta \dot{\omega} \int_{V_0} (\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^* + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^*) dv, \quad (75.4)$$

где $\Delta \dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \epsilon_0$, $\Delta \dot{\mu} = \dot{\mu} - \mu_0$ и $\Delta \dot{\omega} = \dot{\omega} - \omega_0$.

2. Свободные колебания. Будем рассматривать объемный резонатор с идеально проводящей оболочкой; при этом возмущенная задача будет отличаться от начальной характером внутренней среды — проницаемости получают приращения $\Delta \dot{\epsilon}$ и $\Delta \dot{\mu}$ в некоторой части ΔV объема V_0 (рис. 75.1, б) (быть может, во всем объеме: $\Delta V = V_0$). Полагая в (75.4) $S_{0\Sigma} = 0$, $\mathbf{j}_{m0}^{ct} = 0$ и $\mathbf{j}_m^{ct} = 0$, получаем

$$\frac{\Delta \dot{\omega}}{\dot{\omega}} = \frac{\int_{\Delta V} (\Delta \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* + \Delta \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*) dv}{\int_{V_0} (\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^* + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^*) dv} \quad (75.5)$$

($\Delta \dot{\epsilon} = 0$ и $\Delta \dot{\mu} = 0$ вне ΔV ; поверхностный интеграл исчезает, поскольку при $S_{0\Sigma} = 0$ на всей границе S_0 нет тангенциальной электрической компоненты обеих полей).

Пусть далее возмущение состоит в том, что в оболочке резонатора S_0 появилось отверстие ΔS_0 (рис. 75.1, в) либо оболочка деформирована (рис. 75.1, в, г); тогда ΔS_0 — начальное положение границы в месте деформации. Полагая в (75.4) $\mathbf{j}_{m0}^{ct} = \mathbf{j}_m^{ct} = 0$, $S_{0\Sigma} = 0$, $\Delta \dot{\epsilon} = 0$ и $\Delta \dot{\mu} = 0$, находим

$$\Delta \dot{\omega} = i \frac{\int_{\Delta S_0} [\dot{\mathbf{E}}_m, \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*] ds}{\int_{V_0} (\mu_0 \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^* + \epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^*) dv} \quad (75.6)$$

($\dot{\mathbf{E}}_{m0} = 0$ на всей границе S_0).

Для случая деформации границы формулу (75.6) нетрудно преобразовать. Заметим предварительно, что соотношение типа (75.2) можно записать, взяв вместо V_0 объем деформации ΔV_0 , ограниченный поверхностью $\Delta S_0 + \Delta S$, и считая при необходимости функции \dot{E}_{m0} и \dot{H}_{m0} продолженными. Если, как и в (75.6), за положительную принимать внешнюю нормаль к S_0 , то это дает

$$i \int_{\Delta S_0} [\dot{E}_m, \dot{H}_{m0}^*] ds = \mp \dot{\omega} \int_{\Delta V_0} \mu_0 \dot{H}_m \dot{H}_{m0}^* dv \pm \omega_0 \int_{\Delta V_0} \epsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* dv, \quad (75.7)$$

где верхний знак соответствует увеличению, а нижний — уменьшению объема V_0 при деформации (рис. 75.1, *в, г*). Таким образом, поверхностный интеграл в числителе (75.6) можно заменить комбинацией объемных на основании (75.7).

Если требуется исследовать влияние помещаемого внутрь V_0 идеально проводящего тела ΔV_0 (рис. 75.1, *е*), то можно использовать результат, полученный выше для случая деформации оболочки с уменьшением объема («прогиб внутрь»).

Пусть теперь принцип сравнения применяется в обратном порядке: прежнее возмущенное состояние будем считать начальным, а начальное — возмущенным. Равенство (75.6) запишем при этом в виде

$$(\Delta \dot{\omega}) = i \frac{\int_{(\Delta S_0)} [\dot{E}_m, \dot{H}_{m0}^*] ds}{\int_{(V_0)} (\mu_0 \dot{H}_m \dot{H}_{m0}^* + \epsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^*) dv}.$$

Чтобы перейти к прямой задаче, сделаем замену: $\dot{E}_m \rightleftharpoons \dot{E}_{m0}^*$, $\dot{H}_m \rightleftharpoons \dot{H}_{m0}$, $(\Delta \dot{\omega}) \rightarrow -\Delta \dot{\omega}^*$, $(\Delta S_0) \rightarrow \Delta S$ и $(V_0) \rightarrow V_0 \pm \Delta V_0$. После комплексного сопряжения получим

$$\Delta \dot{\omega} = i \frac{\int_{\Delta S} [\dot{E}_{m0}^*, \dot{H}_m] ds}{\int_{V_0 \pm \Delta V_0} (\mu_0 \dot{H}_m \dot{H}_m^* + \epsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}_m^*) dv}. \quad (75.8)$$

Поверхностный интеграл в числителе можно преобразовать в комбинации объемных, записав подобное (75.3) соотношение

$$i \int_{\Delta S} [\dot{E}_{m0}^*, \dot{H}_m] ds = \mp \omega_0 \int_{\Delta V_0} \mu_0 \dot{H}_m \dot{H}_m^* dv \pm \dot{\omega} \int_{\Delta V_0} \epsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* dv \quad (75.9)$$

(смысл двойного знака тот же, что и в (75.7)). Формулы (75.8), (75.9) имеют такое же значение, как (75.6), (75.7).

3. Свободные волны. Возьмем теперь бесконечный полый волновод. Возмущение сначала будет заключаться в продольно однородном изменении внутренней среды (скажем, в помещении внутри соосного диэлектрического стержня). Объем V_0 выделим, рассматривая отрезок волновода, ограниченный поперечными сечениями

$S_{\perp 1}$ и $S_{\perp 2}$ (рис. 75.2, а). При этом $\dot{j}_{m0}^{\text{ст}} = \dot{j}_m^{\text{ст}} = 0$, $S_{0\Sigma} = S_{\perp 1} + S_{\perp 2}$ и для какой-либо из свободных волн

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m0} &= \dot{E}_0 e^{-i\Gamma_0 z}, \\ \dot{H}_{m0} &= \dot{H}_0 e^{-i\Gamma_0 z}, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \dot{E} e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_m &= \dot{H} e^{-i\Gamma z}. \end{aligned} \right\}$$

Разумеется, также $\Delta \dot{\omega} = 0$.

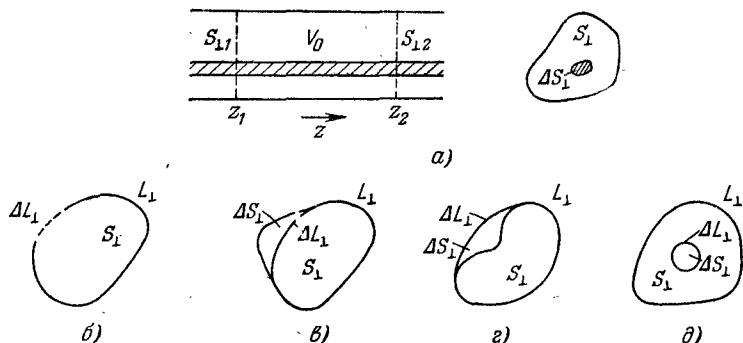


Рис. 75.2.

Интегралы в (75.4) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} i \oint_{S_0} \{[\dot{E}_{m0}^*, \dot{H}_m] + [\dot{E}_m, \dot{H}_{m0}^*]\} ds = \\ = i [e^{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z_2} - e^{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z_1}] \int_{S_{\perp}} \{[\dot{E}_0^*, \dot{H}] + [\dot{E}, \dot{H}_0^*]\} z_0 ds \end{aligned}$$

(S_{\perp} — произвольное поперечное сечение волновода) и

$$\begin{aligned} \dot{\omega} \int_V (\Delta \dot{E} \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* + \Delta \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_{m0}^*) dv = \\ = \omega \int_{z_1}^{z_2} e^{i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z} dz \int_{S_{\perp}} (\Delta \dot{E} \dot{E}_0^* + \Delta \dot{\mu} \dot{H} \dot{H}_0^*) ds = \\ = \omega \frac{e^{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z_2} - e^{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0) z_1}}{-i(\dot{\Gamma} - \Gamma_0)} \int_{\Delta S_{\perp}} (\Delta \dot{E} \dot{E}_0^* + \Delta \dot{\mu} \dot{H} \dot{H}_0^*) ds \end{aligned}$$

($\Delta \dot{E} = 0$ и $\Delta \dot{\mu} = 0$ вне ΔS_{\perp}). Поэтому из (75.4) получаем

$$\Delta \dot{\Gamma} = \omega \frac{\int_{\Delta S_{\perp}} (\Delta \dot{E} \dot{E}_0^* + \Delta \dot{\mu} \dot{H} \dot{H}_0^*) ds}{\int_{S_{\perp}} \{[\dot{E}_0^*, \dot{H}] + [\dot{E}, \dot{H}_0^*]\} z_0 ds}, \quad (75.10)$$

где $\Delta \dot{\Gamma} = \dot{\Gamma} - \Gamma_0$.

Если возмущение заключается в щелевом разрезе или деформации оболочки волновода, оставляющими его продольно однородным (рис. 75.2, б, в, г), то справедливо соотношение

$$\Delta \dot{\Gamma} = -i \frac{\int_{\Delta L_{\perp}} [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*] v_0 dt}{\int_{S_{\perp}} \{[\dot{\mathcal{E}}_0^*, \dot{\mathcal{H}}] + [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*]\} z_0 ds} \quad (75.11)$$

(ср. (75.6)). Для случая деформации оболочки (75.11) приводится к виду

$$\Delta \dot{\Gamma} = \omega \frac{\pm \int_{\Delta S_{\perp}} \mu_0 \dot{\mathcal{H}} \dot{\mathcal{H}}_0^* ds \mp \int_{\Delta S_{\perp}} \epsilon_0 \dot{\mathcal{E}} \dot{\mathcal{E}}_0^* ds}{\int_{S_{\perp}} \{[\dot{\mathcal{E}}_0^*, \dot{\mathcal{H}}] + [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*]\} z_0 ds \pm \int_{\Delta S_{\perp}} [\dot{\mathcal{E}}, \dot{\mathcal{H}}_0^*] z_0 ds}, \quad (75.12)$$

причем эта формула может применяться и при внутренних включениях типа идеально проводящего стержня (рис. 75.2, д). Вывод формул (75.11) и (75.12) предоставляется читателю в виде упражнения¹⁾.

4. Применение теории возмущений. Формула (75.5) и последующие результаты теории возмущений являются точными соотношениями, но наряду с известными величинами в них входят неизвестные комплексные амплитуды векторов возмущенного поля. Лишь когда о нем можно сделать достоверные предположения, указанные формулы практически применимы, и притом как приближенные; обычно это бывает в случаях малых возмущений.

Сделаем сначала некоторые качественные выводы. Пусть в полый резонатор вносится малое диэлектрическое поле. Собственная частота ω_0 получит при этом лишь небольшое (вообще комплексное) приращение, так что $\Delta \dot{\omega} / \omega \approx \Delta \dot{\omega} / \omega_0$; поле в полости деформируется локально, и в знаменателе (75.5), где интегрирование производится по всему объему, можно пренебречь отличием возмущенного поля от начального, положив $\dot{\mathbf{E}}_m = \dot{\mathbf{E}}_{m0}$ и $\dot{\mathbf{H}}_m = \dot{\mathbf{H}}_{m0}$. Это приводит к приближенной формуле

$$\frac{\Delta \dot{\omega}}{\omega_0} \approx - \frac{\int_{\Delta V} (\Delta \dot{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* + \Delta \dot{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*) dv}{\int_{V_0} (\epsilon_0 \dot{\mathbf{E}}_{m0} \dot{\mathbf{E}}_{m0}^* + \mu_0 \dot{\mathbf{H}}_{m0} \dot{\mathbf{H}}_{m0}^*) dv}. \quad (75.13)$$

Знаменатель положителен, поэтому числитель указывает характер изменения собственной частоты. Предположим, что $\Delta \dot{\epsilon} = \Delta \epsilon > 0$ — скалярная вещественная величина (среда изотропна; поглощение пренебрежимо) и $\Delta \dot{\mu} = 0$. Можно догадаться, что $\dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_{m0}^*$ положи-

¹⁾ Опущенные здесь подробности, а также иные результаты теории возмущений содержатся в [И. З].

тельно. Таким образом, собственная частота ω_0 уменьшится: $\Delta\dot{\omega} < 0$. Очевидно, приращение частоты будет исчезающе малым («незаметным»), если возмущающее тело окажется в «узле» электрического поля.

Аналогичные рассуждения приводят от формул (75.6), (75.7) или (75.8), (75.9) к приближенной формуле

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} \approx \frac{\pm \int_{V_0} \epsilon_0 \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* dv \mp \int_{V_0} \mu_0 \dot{H}_m \dot{H}_{m0}^* dv}{\int_{V_0} (\epsilon_0 \dot{E}_{m0} \dot{E}_{m0}^* + \mu_0 \dot{H}_{m0} \dot{H}_{m0}^*) dv}, \quad (75.14)$$

которая применяется при оценках влияния деформаций оболочки резонатора и помещения внутрь металлических тел (верхние знаки соответствуют увеличению объема при возмущении, нижние — уменьшению). Отсюда можно, например, заключить, что внесение металла или прогиб внутрь оболочки в области преобладания магнитного поля вызовут — при достаточной малости возмущения — увеличение собственной частоты, а если преобладает электрическое поле, то уменьшение. Выгиб оболочки наружу приводит к противоположному изменению.

Ниже дается несколько примеров вычисления $\Delta\dot{\omega}$.

Возьмем цилиндрический резонатор произвольного поперечного сечения (рис. 75.3, а); в частности, это может быть обычный (круговой) цилиндр (рис. 75.3, б) или параллелепипед (рис. 75.3, в). Пусть какие-либо колебания типа H возмущаются внесением в «пучность» электрического поля поперечного диэлектрического слоя толщиной h . Считая, что слой очень тонкий и учитывая непрерывность вектора E на границе диэлектрика (нормальная компонента отсутствует), отождествим начальное и возмущенное поля внутри слоя. Числитель (75.13) принимает вид

$$- \int_{\Delta V} (\Delta\dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* + \Delta\dot{H}_m \dot{H}_{m0}^*) dv \approx - \Delta\dot{\epsilon} h \int_{S_{\perp}} E_{m0}^2 \Big|_{\max} ds.$$

Вычисляем далее знаменатель:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\epsilon_0 \dot{E}_{m0} \dot{E}_{m0}^* + \mu_0 \dot{H}_{m0} \dot{H}_{m0}^*) dv &= 2\epsilon_0 \int_{V_0} E_{m0}^2 dv = \\ &= 2\epsilon_0 \int_{S_{\perp}} \int_0^L E_{m0}^2 \Big|_{\max} \sin^2 \frac{p\pi z}{L} ds dz = \epsilon_0 L \int_{S_{\perp}} E_{m0}^2 \Big|_{\max} ds \end{aligned}$$

и получаем

$$\frac{\Delta\dot{\omega}}{\omega_0} \approx - \frac{h}{L} \frac{\Delta\dot{\epsilon}}{\epsilon_0}, \quad (75.15)$$

где величина $\dot{\epsilon}$, входящая в $\Delta\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} - \epsilon_0$, есть диэлектрическая проницаемость слоя.

Рассмотрим возмущение основного поля E_{110} прямоугольного резонатора тонким диэлектрическим цилиндром (рис. 75.3, з),

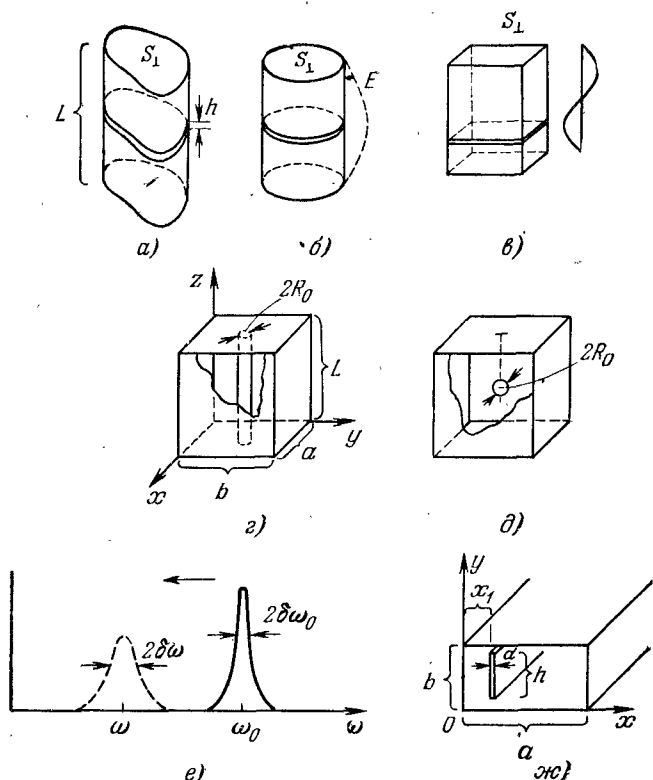


Рис. 75.3.

помещаемым в «пучность» электрического поля параллельно вектору E .

При этом

$$-\int_{\Delta V} (\Delta \dot{\epsilon} \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* + \Delta \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_{m0}^*) dv \approx -\Delta \dot{\epsilon} \pi R_0^2 L \dot{E}_{m0}^2 \Big|_{\max},$$

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\epsilon_0 \dot{E}_{m0} \dot{E}_{m0}^* + \mu_0 \dot{H}_{m0} \dot{H}_{m0}^*) dv &= 2\epsilon_0 \int_{V_0} E_{m0}^2 dv = \\ &= 2\epsilon_0 \int_0^a \int_0^b \int_0^L E_{m0}^2 \Big|_{\max} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy dz = \epsilon_0 \frac{abL}{2} E_{m0}^2 \Big|_{\max}, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\Delta \dot{\omega}}{\omega_0} \approx -\frac{2\pi R_0^2}{ab} \frac{\Delta \dot{\epsilon}}{\epsilon_0}. \quad (75.16)$$

Пусть теперь возмущающим телом служит диэлектрическая сфера (рис. 75.3 д). Как бы ни была она мала, в данном случае

уже нельзя считать, что возмущенное поле в диэлектрике не отличается от начального. Однако при достаточной малости возмущающего тела хороший результат дает так называемое «квазистационарное приближение», согласно которому соотношение внутреннего возмущенного поля и начального поля в этой области таково же, как и при помещении сферы в однородное электростатическое поле (§ 20, п. 3). Тогда (ср. § 50, п. 4)

$$\dot{E}_m = \frac{3\varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} \dot{E}_{m0} \quad \text{в } \Delta V \quad (75.17)$$

и числитель (75.13) примет вид

$$-\int_{\Delta V} (\Delta \dot{E}_m \dot{E}_{m0}^* + \Delta \dot{\mu} \dot{H}_m \dot{H}_{m0}^*) dv \approx -\Delta \dot{\varepsilon} \frac{4\pi R_0^3 \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} E_{m0}^2 \Big|_{\max},$$

так что

$$\frac{\Delta \dot{\omega}}{\omega_0} \approx -\frac{8\pi R_0^3}{abL} \frac{\Delta \dot{\varepsilon}}{\varepsilon + 2\varepsilon_0}. \quad (75.18)$$

Формулы (75.15), (75.16), (75.18) и подобные после разделения вещественной и мнимой частей распадаются на два соотношения: $\Delta \omega' = f_1(\varepsilon', \varepsilon'')$ и $\Delta \omega'' = f_2(\varepsilon', \varepsilon'')$, причем в простейших случаях

$$\frac{\Delta \omega'}{\omega_0} \approx -F \frac{\Delta \varepsilon'}{\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta \omega''}{\omega_0} \approx F \frac{\varepsilon''}{\varepsilon_0},$$

где F — «формфактор» — коэффициент, зависящий только от конфигурации системы. Учитывая связь ω'' и Q (69.28), а также равенство (71.15), которому теперь удобно придать вид $Q = 2\delta\omega/\omega_0$, запишем:

$$\frac{\Delta \omega''}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \Delta \left(\frac{\omega_0}{2Q} \right) = \frac{\Delta \delta\omega}{\omega_0}.$$

Здесь $\Delta \delta\omega$ — приращение половины ширины резонансной кривой¹⁾. Можно сказать, что при помещении в резонатор диэлектрического тела происходит сдвиг и уширение резонансной кривой для каждого типа колебаний (рис. 75.3, е). Этот эффект иногда используется для измерения комплексной диэлектрической проницаемости веществ (т. е. величин ε' и ε''). Аналогично можно измерять и μ . Читателю предлагается самостоятельно построить соответствующий пример и вычислить сдвиг частоты $\Delta \dot{\omega}$, который бы зависел только от $\Delta \mu$, на основании (75.13).

Следует иметь в виду, что действие возмущающего тела может быть и более сложным, чем «независимая» деформация полей различных собственных колебаний начального состояния. Вырожден-

¹⁾ Теоретическая добротность начального состояния бесконечна (не учитывалось поглощение ни в диэлектрике, ни в проводящей оболочке), так что должно было бы быть: $\Delta \delta\omega = \delta\omega$. Но здесь имеется в виду применение результатов к реальным резонаторам, которое вполне правомерно.

ные колебания в результате возмущения могут получить разные приращения собственных частот, причем возмущенные поля предстают в виде суперпозиций деформированных начальных полей: возмущение связывает типы колебаний. Пользование формулой (75.13) при этом несколько усложняется. Что касается формулы (75.14), то ее применение для количественных оценок очень ограничено. Обычно полагают, что $\dot{E}_m = \dot{E}_{m0}$ и $\dot{H}_m = \dot{H}_{m0}$, но это лишь иногда приводит к удовлетворительному вычислению $\Delta\dot{\omega}$.

В заключение рассмотрим волноводный пример. Прямоугольный волновод возмущается тонкой диэлектрической пластиной (рис. 75.3, ж); требуется найти приращение постоянной распространения волны H_{10} . Взяв формулу (75.10), пишем:

$$\int_{s_{\perp}} \{[\dot{E}_0^*, \dot{H}_0] + [\dot{E}, \dot{H}_0^*]\} z_0 ds \approx 2 \int_{s_{\perp}} [\dot{E}_0, \dot{H}_0^*]_z ds = \frac{2}{W^H} \int_{s_{\perp}} \mathcal{E}_0^* ds = \\ = \frac{2}{W^H} \int_0^a \int_0^b \mathcal{E}_0^* \Big|_{\max} \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \frac{ab}{W^H} \mathcal{E}_0^* \Big|_{\max}$$

и

$$\omega \int_{\Delta s_{\perp}} (\Delta \dot{E} \dot{E}_0^* + \Delta \dot{H} \dot{H}_0^*) ds \approx \omega \Delta \dot{E} dh \mathcal{E}_0^* \Big|_{\max} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}.$$

Таким образом,

$$\Delta \dot{\Gamma} \approx \frac{dh}{ab} \omega W^H \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} \Delta \dot{E},$$

или

$$\frac{\Delta \dot{\Gamma}}{\Gamma_0} \approx \frac{dh}{ab} \frac{\sin^2 \frac{\pi x_1}{a}}{1 - (\lambda/2a)^2} \frac{\Delta \dot{E}}{\epsilon_0}. \quad (75.19)$$

Теория возмущений может быть распространена и на волноводные трансформаторы; существуют, например, формулы, позволяющие вычислять приращения элементов матрицы рассеяния при возмущении системы.

Результаты теории возмущений просты по форме и в этом смысле удобны, однако ввиду малости рассматриваемых эффектов область их применения сравнительно невелика.

§ 76. Общие алгоритмы для нерегулярных систем

1. Постановка задачи. Резонаторы. Реальные резонаторы, волноводные системы и аналогичные устройства в целом всегда нерегулярны, причем отклонения от легко анализируемых регулярных систем часто весьма значительны. Общая теория нерегулярных систем базируется на применении проекционных методов (Приложение 8, п. 4). В настоящее время она практически охватывает все задачи прикладной электродинамики; результаты здесь имеют вид универсальных алгоритмов, приспособленных для решения целых классов задач и подлежащих реализации на ЭВМ. В этой

книге невозможно изложить относящиеся сюда вопросы с должной полнотой¹⁾, и мы ограничимся лишь пояснением общих принципов.

Останемся на способе построения универсального алгоритма для класса задач о резонаторе с всевозможными внутренними включениями. Пусть резонатор без включений изучен; это какой-либо регулярный резонатор (на рис. 76.1, *a* для определенности изображен резонатор прямоугольный), так что известны системы собственных функций $\{E_n, E_{n'}\}$ и $\{H_n, H_{n'}\}$ (§ 71, пп. 2, 3, 6). Требуется найти поля и собственные частоты резонатора при наличии любых включений.

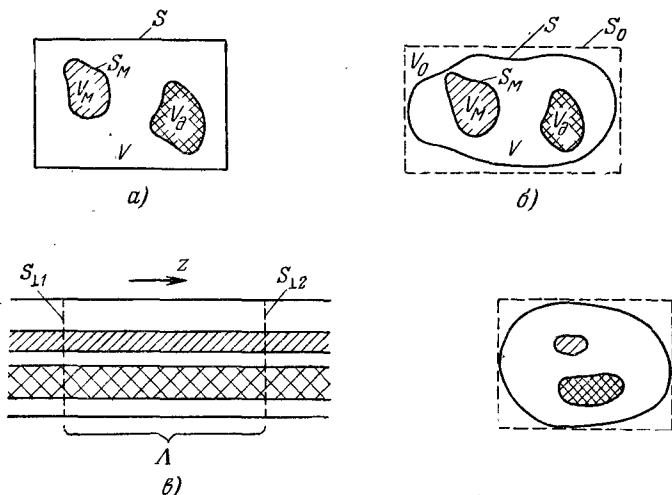


Рис. 76.1.

Применяя проекционный метод, представим комплексные амплитуды исследуемого поля \dot{E}_m, \dot{H}_m в виде сумм

$$\dot{E}_m^N = \sum_{n=1}^N a_n E_n + \sum_{n'=1}^{N'} a_{n'} E_{n'}, \quad \dot{H}_m^N = \sum_{n=1}^N b_n H_n + \sum_{n'=1}^{N'} b_{n'} H_{n'} \quad (76.1)$$

(ср. ряды (71.3)). Для \dot{E}_m и \dot{H}_m , подчиненных однородным уравнениям Максвелла, справедливы соотношения²⁾

$$\left. \begin{aligned} \int_{V-V_M} (\text{rot } \dot{H}_m - i\omega \dot{E}_m) E_{k^{(l)}}^* dv &= 0, \\ \int_{V-V_M} (\text{rot } \dot{E}_m + i\omega \dot{H}_m) H_{k^{(l)}}^* dv &= 0 \end{aligned} \right\} k^{(l)} = 1, 2, \dots, \infty \quad (76.2)$$

¹⁾ Они подробно рассмотрены [И. 3].

²⁾ В (76.2) символ $k^{(l)}$ означает, что имеется в виду два случая, в одном из которых берется k , а в другом k' , ниже штрих в скобках при любых символах имеет аналогичный смысл.

(интегрирование производится по внутреннему объему резонатора за вычетом объема, занимаемого металлическими телами, которые принимаются за идеально проводящие). Это проекционные соотношения типа (П8.15) (ср. (71.9)). После применения формулы (П1.31) получаем

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \int_{V-V_M} \dot{H}_m \operatorname{rot} E_{k^{(l)}}^* dv - i\dot{\omega} \int_{V-V_M} \dot{\epsilon} \dot{E}_m \dot{E}_{k^{(l)}}^* dv - \int_{S_M} [E_{k^{(l)}}^*, H_m] ds, \\ 0 &= \int_{V-V_M} \dot{E}_m \operatorname{rot} H_{k^{(l)}}^* dv + i\dot{\omega} \int_{V-V_M} \dot{\mu} \dot{H}_m H_{k^{(l)}}^* dv, \end{aligned} \right\} k^{(l)} = 1, 2, \dots, \infty. \quad (76.3)$$

Сюда мы имеем право внести вместо \dot{E}_m и \dot{H}_m их представления \dot{E}_m^N и \dot{H}_m^N , ограничив перебор индексов $k^{(l)}$ в пределах выбранного базиса ($k^{(l)} = 1, 2, \dots, N^{(l)}$); в знак того, что речь идет уже о приближенном решении, будем писать также $\dot{\omega}^N$ вместо $\dot{\omega}$ (обозначение приближенных частот). Мы придем так к соотношениям типа (П8.18).

Базисные функции удобно подчинить ортонормировке (71.8) с $|\dot{\epsilon}| = \epsilon_0$ и $|\dot{\mu}| = \mu_0$; соответственно этому в уравнениях Максвелла (71.4) $\dot{\epsilon} = \epsilon_0$ и $\dot{\mu} = \mu_0$ (не путать эти константы с проницаемостями среды внутри исследуемого резонатора, входящими в (76.3)). Внося под интегралы суммы (76.1), получим следующую систему уравнений, записанную ниже в матричной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}^N (\mathcal{A} + \mathcal{A}') - (\Omega \dot{M} + iS) b - (\Omega \dot{M}' + iS') b' &= 0, \\ \dot{\omega}^N (\mathcal{A} + \mathcal{A}') - i'S b - i'S' b' &= 0, \\ \Omega \mathcal{A} + \Omega \mathcal{A}' - \dot{\omega}^N (M b + M' b') &= 0, \\ 'M b + 'M' b' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (76.4)$$

Здесь a и a' — векторы, составленные из коэффициентов a_n и a_n' сумм (76.1) соответственно; аналогичный смысл имеют векторы b и b' . Входящие в (76.4) матрицы состоят из элементов:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{A}}_{kn}^{(l)} &= \epsilon_0 \int_{V-V_M} E_{n^{(l)}} \cdot E_k^* dv; & \dot{M}_{kn}^{(l)} &= \mu_0 \int_{V-V_M} H_{n^{(l)}} \cdot H_k^* dv; \\ \dot{\mathcal{A}}_{kn}^{\prime(l)} &= \int_{V-V_M} \dot{\epsilon} E_{n^{(l)}} \cdot E_k^* dv; & \dot{M}_{kn}^{\prime(l)} &= \int_{V-V_M} \dot{\mu} H_{n^{(l)}} \cdot H_k^* dv; \\ \dot{S}_{kn}^{\prime(l)} &= \int_{S_M} [E_{k^{(l)}}^*, H_{n^{(l)}}] ds, & \Omega_{kn} &= \omega_n \delta_{kn}. \end{aligned} \right\} \quad (76.5)$$

Например, $\mathcal{A}'_{kn} = \int_{V-V_M} \dot{\epsilon} E_{n^{(l)}} \cdot E_k^* dv$ и т. п. Проницаемости $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ — функции координат (быть может, тензоры); в частности, на рис. 76.1, a предполагается, что они имеют одни постоянные значения в V_d и другие — вне V_d . Матрица Ω диагональная; она составлена из собственных частот ω_n пустого резонатора.

Решение однородной системы (76.4) приводит к определению ряда приближенных собственных значений ω^N (как корней характеристического уравнения, получаемого обращением в нуль детерминанта системы) и коэффициентов представлений (76.1). По мере увеличения порядка матриц они приближаются к точным значениям и стремятся к ним в пределе при $N \rightarrow \infty$.

Система (76.4) сохраняется при исследовании резонатора, отличающегося к тому же еще сложной оболочкой, т. е. нерегулярного даже без внутренних включений (рис. 76.1, б). Здесь для получения (76.4) резонатор мысленно помещают внутрь регулярной области (пунктирная граница на рис. 76.1, б), поставляющей базис. По сравнению с предыдущим различие будет состоять в том, что матрицы ${}^{(N)}S_{kn}^{(N)}$ в (76.4) теперь имеют элементы

$${}^{(N)}S_{kn}^{(N)} = \int_{S_M+S} [\dot{E}_{k^{(N)}}^*, H_{n^{(N)}}] ds, \quad (76.6)$$

где интегрирование распространяется также на оболочку резонатора. Матрица Ω составляется из базисных частот.

Разумеется, кроме уравнений (76.4), существуют и другие алгебраические формы, к которым приводят проекционные методы, и мы не касаемся здесь вопроса о их вычислительных преимуществах и недостатках в сравнении с (76.4).

Если рассматриваются вынужденные колебания нерегулярного резонатора при заданных источниках, то проекционный метод развивается так же, как и в § 71, п. 4. При этом получается система уравнений, в левой части совпадающая с (76.4); правая же часть ее может быть прямо записана на основании соотношений (71.11); вместо ω^N мы имеем, разумеется, заданную частоту возбуждения ω . Читателю рекомендуется выписать эту систему уравнений.

2. Волноводы и волноводные трансформаторы. Заключение.

Если требуется определить постоянную распространения какой-либо волны поперечно-нерегулярного волновода, то можно выделить объемную область, ограниченную двумя поперечными сечениями $S_{\perp 1}$ и $S_{\perp 2}$, и представить внутреннее поле в виде сумм типа (76.1). Пусть длина выделенного отрезка есть $\Lambda = 2\pi/\Gamma$ (рис. 76.1, в) (величина неизвестная). В качестве базисов вместо $\{E_n, E_{n'}\}$ и $\{H_n, H_{n'}\}$ возьмем системы функций, удовлетворяющих уравнению Гельмгольца и прежним граничным условиям на боковой поверхности волновода (или вспомогательной базисной

области, рис. 76.1, з), но с продольной зависимостью $e^{-i\frac{2\pi}{\Lambda}z}$; такие функции принимают одинаковые значения на $S_{\perp 1}$ и $S_{\perp 2}$, т. е. подчинены «периодическим» (по z) граничным условиям. Нетрудно убедиться, что при данной постановке задачи мы опять приходим к системе алгебраических уравнений (76.4), в которых вместо ω^N будет заданная частота ω , а матричные элементы (76.5) (за исключением ${}^{(N)}S_{kn}^{(N)}$) сведутся к интегралам по поперечному сечению волновода (за вычетом площади включенного металличе-

кого стержня, если он имеется), умноженным на неизвестную длину волны $\Lambda = \Lambda^N$, которая может быть и комплексной. Аналогично этому матричные элементы $''S_{kn}''$ сведутся к контурным интегралам.

Рассмотрим далее произвольный волноводный трансформатор (рис 76.2, а); входные сечения, в отличие от § 74, теперь не должны обязательно находиться в областях регулярного режима. Если задать условия короткого замыкания

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{m(\alpha)} &= 0, & \alpha &= 1, 2, \dots, \beta - 1, \beta + 1, \dots, P, \\ \dot{E}_{m(\beta)} &= e_n(\beta) \end{aligned} \right\} \quad (76.7)$$

(ср. (74.2), то, согласно (73.12), (73.13), для любого входного сечения S_α (в частности, и при $\alpha = \beta$) $b_{k(\alpha)} = Y_{kn}^{\alpha\beta}$. Пусть $\dot{H}_m^{\beta n}$ — комплексная амплитуда вектора H внутри полости, полученной при

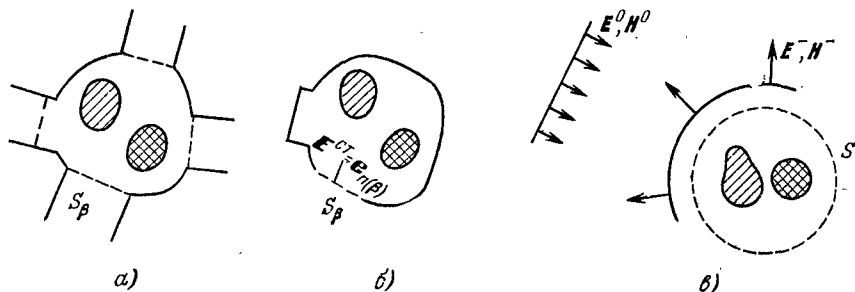


Рис. 76.2.

этом коротком замыкании (рис. 73.2, б) и возбуждаемой в соответствии с условием (76.7) через отверстие S_β сторонним полем ($\dot{E}_m^{ct} = e_n(\beta)$). Тогда ввиду (73.11) и (73.12)

$$Y_{kn}^{\alpha\beta} \equiv b_{k(\alpha)} = \left| \dot{W}_{k(\alpha)} \right| \int_{S_\alpha} \dot{H}_m^{\beta n} h_{k(\alpha)}^* ds \quad (\dot{H}_m^{\beta n} = \dot{H}_{m(\alpha)} \text{ на } S_\alpha). \quad (76.8)$$

Таким образом, любой элемент матрицы проводимости волноводного трансформатора может быть определен по формуле (76.8), если известно решение задачи о возбуждении резонатора в указанной постановке. Такое решение — а точнее, сходящееся к нему в среднем представление — получается, как об этом говорилось выше в п.1. Следует подчеркнуть, что для пользования формулой (76.8) надо, чтобы представление сходилась в среднем и на оболочке резонатора. Этим свойством как раз обладает представление в базисе $\{H_n, H_n\}$. Если бы требовалось аналогичным путем найти элементы матрицы сопротивления, то пришлось бы представлять электрическое поле на входных сечениях, что возможно в ином базисе (в случае базиса $\{E_n, E_n\}$ будет иметь место сходимое в среднем в объеме резонатора). Существуют также возможности

построения универсальных алгоритмов, приводящих непосредственно к определению матрицы рассеяния.

Интересно, что описанный выше прием может быть применен и для построения универсальных алгоритмов для внешних задач электродинамики — антенных и дифракционных. Антенна или объект дифракции мысленно окружается сферической границей (рис. 76.2, в), которая играет роль входного сечения «волноводного трансформатора»; окружающее пространство описывается как волноводный канал, в котором распространяются сферические волны разных типов. Рассматриваемая система вполне характеризуется матрицей проводимости, сопротивления или рассеяния такого волноводного трансформатора. Поле излучения или рассеяния находится как суперпозиция расходящихся сферических волн. Внешняя задача электродинамики сводится к серии задач о возбуждении сферического резонатора с включением в виде исследуемой антенны или объекта дифракции. Возможно и непосредственное определение матрицы рассеяния антенны или объекта дифракции.

3. Заключение. Еще раз подчеркнем, что получение наиболее выгодных в вычислительном отношении формулировок не было целью проведенного изложения. Был лишь продемонстрирован общий подход к задачам электродинамики, приводящий к алгоритмам для ЭВМ универсального типа. Единый подход к внутренним и внешним задачам при этом весьма характерен. Вообще можно показать, что антенная или дифракционная задача есть внутренняя краевая задача для показанной на рис. 76.2, в сферической области, на границе которой заданы весьма общего вида импедансные условия («импедансная трактовка»¹⁾).

Следующее замечание связано с вариационным исчислением. Читатель, знакомый с этой областью математики, может принять к сведению, что уравнения (76.4) и аналогичные могут быть получены методом Ритца на основе соответствующих функционалов.

Как функционалы («функции от функций») могут рассматриваться и формулы (62.9), (62.13), (69.16). Низшее значение χ^2 или k_0^2 всегда может быть получено с избытком путем подстановки в одну из этих формул векторных функций, не являющихся решениями уравнений электродинамики, а только допускающих применение требуемых операций. При этом для подстановки в (62.13) и вторую формулу (69.16) (с \dot{H}_m) пригодны функции, не удовлетворяющие граничным условиям. Точность результата зависит, конечно, от близости этих «допустимых» функций к настоящим решениям.

В. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И КВАЗИОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Представление о направляемых волновых процессах было бы неполным без рассмотрения *периодических* направляющих систем, т. е. состоящих из повторяющихся структурных элементов.

¹⁾ В. В. Никольский, Радиотехника и электроника 16, № 7, 1120; № 8, 1342 (1971).

Такого рода системы находят многочисленные применения, в частности, в электронике СВЧ и антенной технике. Развита в §§ 61—83 теория направляемых волн здесь уже, строго говоря, неприменима, поскольку свойства систем не остаются постоянными в направлении передачи энергии, т. е. системы продольно неоднородны. Однако когда пространственный период Λ достаточно мал, волновой процесс в хорошем приближении предстает как обычная направляемая волна (§ 61), длина которой намного превосходит Λ . Мы увидим, что периодические системы дают одно из средств получать такие *медленные* (§ 62, п.4) волны.

Особые периодические системы находят применение для канализации весьма коротких волн. Они могут рассматриваться как совокупности линз или зеркал. Само это описание предполагает, что размеры элементов значительно превосходят длину волны; тем более сказанное справедливо в отношении расстояния между отдельными элементами (близкого к пространственному периоду). Такие системы называются *квазиоптическими*.

В нашу задачу не входит описание всевозможных электродинамических систем, которые имеют характер линз или зеркал и потому могут быть отнесены к квазиоптическим. Обычно это антенны или антенные элементы, и они изучаются в курсах антенн. Однако кроме периодических будут рассмотрены также такие квазиоптические системы, которые играют роль объемных резонаторов и применяются в лазерной технике.

§ 77. Периодические системы и импедансные поверхности

1. Волновые процессы в периодических системах. На рис. 77.1 показано несколько систем, строение которых является периодическим вдоль оси z : через расстояние Λ оно повторяется.

Положим, что поглощение отсутствует. Поперечная структура свободных полей в периодических системах в силу симметрии также должна повторяться через период Λ . Однако, взяв два отстоящих на Λ поперечных сечения, мы вовсе не должны обнаружить там одинаковые фазы колебаний. Зато, если соответствующий фазовый сдвиг равен φ , то при дальнейшем смещении на $n\Lambda$ дополнительный фазовый сдвиг составит $n\varphi$. Вообще для комплексных амплитуд векторов поля справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m(x, y, z + \Lambda) &= \dot{E}_m(x, y, z) e^{-i\varphi}, \\ \dot{H}_m(x, y, z + \Lambda) &= \dot{H}_m(x, y, z) e^{-i\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (77.1)$$

Иногда говорят, что эти равенства выражают содержание *теоремы Флоке*.

До решения конкретной электродинамической задачи о той или иной периодической системе, разумеется, нельзя сказать, по какому именно закону изменяется фаза поля вдоль ее произволь-

ного отрезка длиной $\dot{\Lambda}$, т. е. — по принятой терминологии — вдоль ячейки структуры. Но существует прием, позволяющий сделать некоторые общие выводы о характере поля. Введем величину

$$\gamma = \varphi / \dot{\Lambda} \quad (77.2)$$

и построим функции

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(x, y, z) &= \dot{E}_m(x, y, z) e^{i\gamma z}, \\ \dot{\mathcal{H}}(x, y, z) &= \dot{H}_m(x, y, z) e^{i\gamma z}, \end{aligned} \right\} \quad (77.3)$$

которые, как следует из (77.1), являются периодическими, так

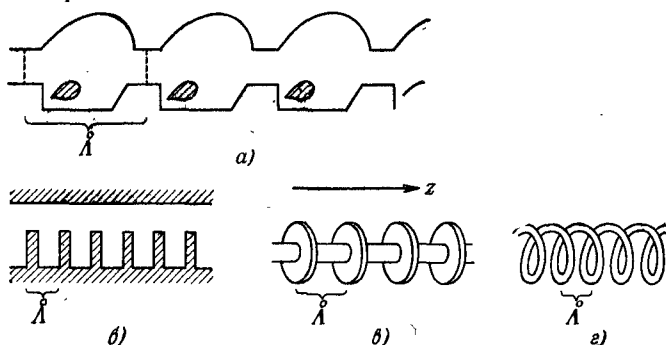


Рис. 77.1.

что, например, $\dot{\mathcal{E}}(x, y, z + \dot{\Lambda}) = \dot{\mathcal{E}}(x, y, z)$. Разлагая $\dot{\mathcal{E}}(x, y, z)$ в ряд Фурье типа (П 8.1), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(x, y, z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_n(x, y) e^{-i \frac{2\pi n}{\dot{\Lambda}} z}, \\ \dot{\mathcal{E}}_n(x, y) &= \frac{1}{\dot{\Lambda}} \int_z^{z+\dot{\Lambda}} \dot{\mathcal{E}}(x, y, z) e^{i \frac{2\pi n}{\dot{\Lambda}} z} dz = \frac{1}{\dot{\Lambda}} \int_z^{z+\dot{\Lambda}} \dot{E}_m(x, y, z) \times \\ &\quad \times e^{i \left(\gamma + \frac{2\pi n}{\dot{\Lambda}} \right) z} dz. \end{aligned} \quad (77.4)$$

Таким образом, ввиду (77.3)

$$\dot{E}_m(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\mathcal{E}}_n(x, y) e^{-i \left(\gamma + \frac{2\pi n}{\dot{\Lambda}} \right) z} \quad (77.5)$$

и точно так же можно представить комплексную амплитуду \dot{H}_m .

Полученное разложение есть одно из основных соотношений теории периодических направляющих систем. Согласно (77.5) свободный волновой процесс в периодической системе можно рассматривать как наложение бесконечной совокупности плоских

неоднородных волн с поперечными распределениями $\dot{\mathcal{E}}_n(x, y)$ (и $\dot{\mathcal{H}}_n(x, y)$) и постоянными распространения

$$\Gamma_n = \gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty. \quad (77.6)$$

Как следует отсюда, этим парциальным волнам свойственны фазовые скорости (§ 61, п.1)

$$v_{\Phi(n)} = \frac{\omega}{\Gamma_n} = \frac{\omega}{\gamma + \frac{2\pi n}{\Lambda}} \quad (77.7a)$$

при одной и той же групповой скорости (§ 35, см. также § 62, п.3)

$$v_{\Gamma(n)} = \frac{d\omega}{d\Gamma_n} = \frac{d\omega}{d\gamma}, \quad (77.7b)$$

которая характеризует передачу энергии.

В зависимости от величины n в (77.6) фазовые скорости парциальных волн $v_{\Phi(n)}$ (77.7a), называемых обычно «пространственными гармониками», имеют разные знаки. Волновой процесс в периодической системе, таким образом, представляется в виде совокупности *прямых* ($v_{\Phi}/v_{\Gamma} > 0$) и *обратных* ($v_{\Phi}/v_{\Gamma} < 0$) волн; последние обладают тем свойством, что фазовая и групповая скорости противоположны.

Какой смысл имеет построенное разложение? При каждом фиксированных $x = x_1, y = y_1$ мы получаем в (77.4) ряд Фурье некоторой функции от z , заданной на отрезке $(z, z + \Lambda)$, который сходится к ней (вообще только в среднем). Разлагаемая функция и пространственные гармоники определены и в таких областях, где нет поля. Например, при фиксированных на рис. 77.2 координатах x_1, y_1 в виде ряда Фурье представляется функция, равная $\dot{\mathcal{E}}(x_1, y_1, z)$ на l_2 и нулю на l_1 и l_3 . В области, заштрихованной на рис. 77.2, ряд Фурье определен и сходится к нулю.

Физическое содержание пространственных гармоник видят в том, что в области существования поля можно (по крайней мере в принципе) реализовать взаимодействие с отдельной из них, например, при помощи электронов нужной скорости¹⁾.

Наконец, заметим, что все предыдущее легко распространить на системы с поглощением. Для этого в (77.1) и далее надо рассматривать комплексные ϕ .

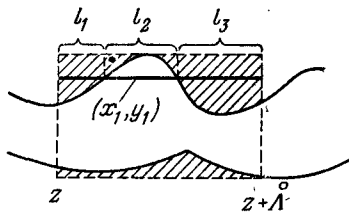


Рис. 77.2.

¹⁾ О заряженных частицах в электромагнитном поле будет сказано позднее (§ 80).

2. Простейшая периодическая система. На рис. 77.3, а изображена простейшая «гребенчатая структура», которая мыслится как ряд параллельных идеально проводящих полос, толщиной которых пренебрегают, примыкающих к такой же плоской границе; система неограниченна в направлениях z и x , а по x однородна.

Если период структуры весьма мал в сравнении с длиной волны в той же однородной среде ($\Lambda \ll \lambda$), то можно ожидать

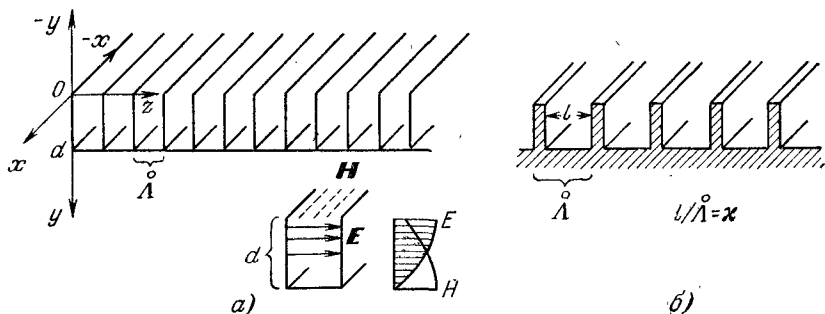


Рис. 77.3.

что он будет мал и по отношению к длине волны основной гармоники $\Lambda_0 = 2\pi/\Gamma_0$. При этом условии удовлетворительные результаты дает следующий приближенный подход.

Рассматривая распространяющуюся вдоль оси z E -волну, будем считать, что поле в каждом из пазов гребенки имеет характер стоячей ТЕМ-волны в направлении y . Для его выражения можно прямо использовать формулы (36.17) с соответствующей заменой координат (ср. рис. 36.1 и 36.5 с рис. 77.3, а), а именно $z \rightarrow y - d$, $x \rightarrow z$, $y \rightarrow x$. Таким образом, в данном приближении при каждом фиксированном z

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= -iz_0 2\dot{A} \sin k(y-d), \\ \dot{H}_m &= x_0 \frac{2\dot{A}}{W} \cos k(y-d), \end{aligned} \right\} 0 \leq y \leq d, \quad (77.8)$$

и поверхность гребенки ($y=0$) можно охарактеризовать импедансом (62.30) \dot{Z}_S :

$$\dot{E}_m(0) = \dot{Z}_S [\dot{H}_m(0), \dot{y}_0]; \quad \dot{Z}_S = \frac{\dot{E}_m(0)}{\dot{H}_m(0)} = iW \operatorname{tg} kd. \quad (77.9)$$

Если $\operatorname{tg} kd > 0$, то, как показано в § 62, п.4, данная импедансная поверхность способна направлять медленную E -волну, поле которой, согласно (62.28) — (62.30) и (61.1), будет иметь компоненты

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_{mz} &= \dot{B} \dot{Z}_S e^{\beta y} e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_{mx} &= \dot{B} e^{\beta y} e^{-i\Gamma z}, \end{aligned} \right\} y \leq 0 \quad (77.10)$$

(а также компоненту \dot{E}_{my} , нахождение которой предоставляется

читателю). Приравнивая тангенциальные составляющие (77.10) и (77.8) при $y=0$, находим, что в (77.8)

$$\dot{A} = -i \frac{\dot{B} \dot{z}_S}{2 \sin kd} e^{-i\Gamma z}, \quad (e^{-i\Gamma z} \approx e^{-i\Gamma(z+\lambda)}). \quad (77.11)$$

Постоянная распространения Γ , согласно (62.26), есть

$$\Gamma = \sqrt{k^2 + \beta^2} \geq k, \quad (77.12)$$

а из (77.9) и (62.30) имеем

$$\frac{\beta}{k} = \operatorname{tg} kd \geq 0 \quad (77.13)$$

и далее, с учетом (77.12),

$$\Gamma/k = \sec kd \geq 1, \quad (77.14)$$

или

$$\frac{v_\Phi}{v} = \cos kd \leq 1 \quad (v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}). \quad (77.14a)$$

Мы видим, что волна может существовать при $0 < d < \lambda/4$, затем при $3\lambda/4 < d < \lambda$ и т. д. Ее замедление и поверхностный характер усиливаются в каждой такой полосе с возрастанием d/λ , потом волна терпит отсечку.

Можно сказать, что рассмотренное упрощенное решение является усредненным по z . Действительно, при такой процедуре, примененной по отношению к ряду (77.4), останется лишь непериодическая часть $\dot{\mathcal{E}}_0(x, y)$.

Принцип усреднения позволяет далее очень просто подойти к анализу гребенчатой структуры с ребрами конечной толщины (рис. 77.3, б). Полагают, что для пазов по-прежнему верна формула (77.9), а на идеально проводящих торцах ребер $\dot{z}_S = 0$ ($\dot{E}_z(0) = 0$). Поэтому усредненный импеданс есть

$$\dot{z}_S = i\kappa W \operatorname{tg} kd, \quad (77.15)$$

где $\kappa = l/\lambda$ — отношение ширины паза к периоду структуры (рис. 77.3, б). Эту величину вместо (77.9) и вносят в последующие соотношения, так что, например, вместо (77.13) получается

$$\beta/k = \kappa \operatorname{tg} kd. \quad (77.16)$$

Несмотря на то, что подход, использованный выше при рассмотрении гребенчатых структур (рис. 77.3а, б), довольно груб, он приводит к верным качественным представлениям и даже в ряде случаев оказывается полезным в технических расчетах. В сущности гребенка уподобляется при этом диэлектрическому слою на идеально проводящей плоскости (§ 39, п.4, рис. 39.7, б), граница которого является импедансной поверхностью, а сам он — простей-

шим диэлектрическим волноводом. Гребенку можно даже рассматривать как слой «искусственного диэлектрика» (см. ниже § 82, п.1) и охарактеризовать при помощи эквивалентной диэлектрической проницаемости.

Читателю предлагается самостоятельно изучить систему в виде экранированной гребенки (рис. 77.1, б).

3. Осесимметричные системы. На рис. 77.4 схематически изображены открытая (рис. 77.4, а) и экранированная (рис. 77.4, б) периодические системы круглого поперечного сечения с гребенчатой (гофрированной) поверхностью. Первая из них аналогична рассмотренному в § 77, п. 3 диэлектрическому волноводу с внутренним проводником: роль диэлектрического слоя играет гофрированная часть проводника.

Представляя — в прежнем приближении — азимутально однородную

E -волну, направляемую гофрированным стержнем (рис. 77.4, а), для внешнего поля мы должны получить выражение комплексных амплитуд типа (67.23), т. е.

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= E_0 \left[z_0 H_0^{(2)}(\dot{\chi}r) + r_0 \frac{i\Gamma}{\chi} H_1^{(2)}(\dot{\chi}r) \right] e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_m &= \alpha_0 E_0 \frac{i\omega\epsilon}{\chi} H_1^{(2)}(\dot{\chi}r) e^{-i\Gamma z}, \end{aligned} \right\} r > R. \quad (77.17)$$

Если глубина пазов относительно невелика ($d \ll R$), то поверхность цилиндра можно рассматривать локально как импедансную плоскость, для которой справедлива формула (77.15), так что

$$\frac{\dot{E}_{mz}(R)}{\dot{H}_m(R)} = i\kappa W \operatorname{tg} kd \quad (77.18)$$

(ср: (67.14) и далее). Приравнявая это импедансу, следующему из (77.17), получим трансцендентное уравнение

$$-\kappa k R \operatorname{tg} kd = \dot{\chi} R \frac{H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)}, \quad (77.19)$$

которое рекомендуется сравнить с (67.22) и (68.8).

В случае экранированной системы (рис. 77.4б) — ее называют «диафрагмированным волноводом» — вместо (77.17) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= E_0 \left[z_0 J_0(\dot{\chi}r) + r_0 \frac{i\Gamma}{\chi} J_1(\dot{\chi}r) \right] e^{-i\Gamma z}, \\ \dot{H}_m &= \alpha_0 E_0 \frac{i\omega\epsilon}{\chi} J_1(\dot{\chi}r) e^{-i\Gamma z}, \end{aligned} \right\} r < R, \quad (77.20)$$

а вместо (77.18) — аналогичное соотношение с измененным знаком (если раньше при использовании (62.30) было $v_0 = -r_0$, то в данном случае $v_0 = r_0$). Таким образом, получается уравнение

$$\kappa k R \operatorname{tg} kd = \dot{\chi} R \frac{J_0(\dot{\chi} R)}{J_1(\dot{\chi} R)} \quad (77.21)$$

(ср. (68.10)).

Перейдем, наконец, к рассмотрению так называемого «спирального волновода» (рис. 77.1, з, 77.5, а). При простейшем его описании полагают, что вдоль провода спирали (т. е. по винтовой линии) распространяется волна ТЕМ со своей обычной скоростью

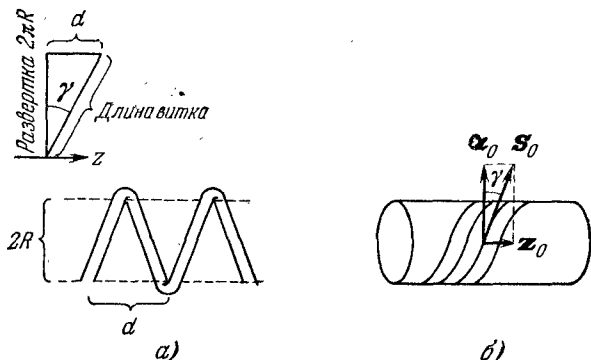


Рис. 77.5.

$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$. Тогда фазовая скорость волнового процесса в направлении оси системы есть

$$v_\phi = v \sin \gamma \quad (77.22)$$

(рис. 77.5, а); входящий сюда «угол намотки» γ есть угол, составляемый проводом с плоскостью $z = \text{const}$ ($\operatorname{tg} \gamma = d/2\pi R$).

В качестве удовлетворительной модели спирального волновода часто берут цилиндр с анизотропной проводимостью (рис. 77.5, б), в каждой точке которого ток может иметь лишь такое направление, какое свойственно току витка спирали, проходящего в этой области. Исследуем азимутально однородную волну в этой системе.

Используя выражения (67.1), запишем:

$$\dot{\mathcal{E}}_z = \begin{cases} \dot{C}_1 J_0(\dot{\chi} r), & r < R; \\ \dot{C}_1 H_0^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R; \end{cases} \quad \dot{\mathcal{H}}_z = \begin{cases} \dot{C}_2 J_0(\dot{\chi} r), & r < R; \\ \dot{C}_2 H_0^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R, \end{cases} \quad (77.23)$$

где $\dot{\chi} = \sqrt{k^2 - \Gamma^2}$. При помощи формул (61.10) определим азимутальные компоненты (ср. (67.5)):

$$\dot{\mathcal{E}}_\alpha = \begin{cases} -i\dot{C}_2 \frac{\omega\mu}{\dot{\chi}} J_1(\dot{\chi} r), & r < R, \\ -i\dot{C}_2 \frac{\omega\mu}{\dot{\chi}} H_1^{(2)}(\dot{\chi} r), & r > R, \end{cases} \quad \dot{\mathcal{H}}_\alpha = \begin{cases} i\dot{C}_1 \frac{\omega\epsilon}{\dot{\chi}} J_1(\dot{\chi} r), & r < R, \\ i\dot{C}_1 \frac{\omega\epsilon}{\dot{\chi}} H_1^{(2)}, & r > R. \end{cases} \quad (77.24)$$

Тангенциальные составляющие вектора \mathbf{E} должны быть непрерывными на поверхности цилиндра (при $r=R$); учитывая это в (77.23) и (77.24), имеем

$$\dot{C}'_1 = \dot{C}'_1 \frac{J_1(\dot{\chi}R)}{H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)} \quad \text{и} \quad \dot{C}'_2 = \dot{C}'_2 \frac{J_1(\dot{\chi}R)}{H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)}. \quad (77.25)$$

Анизотропная проводимость цилиндра проявляется в том, что параллельная направлению тока электрическая компонента по обе стороны его поверхности равна нулю (что соответствует идеальной проводимости «канала тока»):

$$\dot{\mathcal{E}}_S(R-0) = \dot{\mathcal{E}}_S(R+0) = 0, \quad (77.26a)$$

а такая же магнитная компонента непрерывна:

$$\dot{\mathcal{H}}_S(R-0) = \dot{\mathcal{H}}_S(R+0) \quad (77.26b)$$

(она не связана с поверхностным током); заметим тут же, что

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{a}_0 \cos \gamma + \mathbf{z}_0 \sin \gamma \quad (77.27)$$

(рис. 77.5, б).

Ввиду (77.27) условие (77.26б) с учетом (77.23), (77.24) дает

$$\begin{aligned} i\dot{C}'_1 \frac{\omega \varepsilon}{\dot{\chi}} J_1(\dot{\chi}R) \cos \gamma + \dot{C}'_2 J_0(\dot{\chi}R) \sin \gamma = \\ = i\dot{C}'_1 \frac{\omega \varepsilon}{\dot{\chi}} H_1^{(2)}(\dot{\chi}R) \cos \gamma + \dot{C}'_2 H_0^{(2)}(\dot{\chi}R) \sin \gamma, \end{aligned}$$

т. е. после исключения \dot{C}'_1 и \dot{C}'_2 при помощи (77.25)

$$\dot{C}'_2 \dot{\chi} H_0^{(2)}(\dot{\chi}R) = i\dot{C}'_1 \omega \varepsilon H_1^{(2)}(\dot{\chi}R) \operatorname{ctg} \gamma. \quad (77.28)$$

Далее реализуем условие (77.26a), согласно которому

$$i\dot{C}'_2 \omega \mu J_1(\dot{\chi}R) \operatorname{ctg} \gamma = \dot{C}'_1 \dot{\chi} J_0(\dot{\chi}R). \quad (77.29)$$

Последние два равенства приводят к следующему трансцендентному уравнению относительно поперечного волнового числа $\dot{\chi}$ волны в спиральной системе:

$$\left(\frac{\dot{\chi}}{k}\right)^2 = -\frac{J_1(\dot{\chi}R) H_1^{(2)}(\dot{\chi}R)}{J_0(\dot{\chi}R) H_0^{(2)}(\dot{\chi}R)} \operatorname{ctg}^2 \gamma. \quad (77.30)$$

Это и есть требуемый результат.

Возвращаясь к первоначально записанной простой формуле (77.22), попробуем выяснить теперь степень ее применимости. Для медленной волны $\dot{\chi}$ является чисто мнимым. Если при этом $|\dot{\chi}R| \gg 1$, то, как следует из асимптотических представлений цилиндрических функций (Приложение 6, п. 2), их комбинация в (77.30) близка к единице, так что это уравнение принимает вид

$$\dot{\chi} \approx -ik \operatorname{ctg} \gamma. \quad (77.30a)$$

Поэтому

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \dot{\chi}^2} = k^2 \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma} = \frac{k}{\sin \gamma},$$

что равносильно (77.22). Согласно (77.30а) использованное неравенство $|\dot{\chi}R| \gg 1$ равносильно следующему: $kR \gg \operatorname{tg} \gamma$. В то же время модель спиральной системы в виде анизотропно проводящего цилиндра имеет смысл, пока период, т. е. шаг спирали d , мал в сравнении с длиной волны $\Lambda = 2\pi/\Gamma$; учитывая, что $d = 2\pi R \operatorname{tg} \gamma$ и $\Gamma = k/\sin \gamma$, убеждаемся в равносильности неравенств $d \ll \Lambda$ и $kR \ll 1$. Итак, формула (98.22) применима при

$$1 \gg kR \gg \operatorname{tg} \gamma. \quad (77.31)$$

В заключение подчеркнем одну особенность азимутально однородной волны спирального волновода. В отличие от ранее рассматривавшихся азимутально однородных волн разных направляющих систем (§§ 67, 68), которые могли быть только E -волнами либо H -волнами, она имеет как электрическую, так и магнитную продольные компоненты. Можно сказать, что спираль «связывает» даже азимутально однородные E - и H -поля.

§ 78. Квазиоптические системы

1. **Линзовые и зеркальные линии передачи.** Как отмечалось, рассмотренные выше в § 77 периодические системы являются главным образом средством получения медленных волновых процессов, используемых в электронике СВЧ, а также в антенной технике. Особое место занимают периодические системы, появившиеся при решении проблемы канализации весьма коротких электромагнитных волн — миллиметровых, субмиллиметровых и световых. Дело в том, что применение продольно однородных направляющих систем обычного типа уже на миллиметровых волнах становится невыгодным из-за большого поглощения. Если, например, в случае круглого волновода сохраняется отношение λ/R , то, как следует из формул (65.17) — (65.19) и т. п., коэффициент затухания Γ_m с уменьшением λ растет, как \mathcal{R}_S/R , т. е. как $\lambda^{-3/2}$. В действительности Γ_m возрастает значительно быстрее, так как шероховатость поверхности металла (§ 73, п. 1) все сильнее проявляется с укорочением длины волны (эквивалентная электропроводность $\tilde{\sigma}$ в $\mathcal{R}_S = \sqrt{\omega\mu/2\tilde{\sigma}}$ уменьшается). О затухании в случае диэлектрического волновода можно судить на основании (63.20); согласно этим формулам Γ_d при $\lambda/R = \operatorname{const}$ изменяется как λ^{-1} . Таким образом, по мере перехода к все более коротким волнам следует отдавать предпочтение линиям передачи, которые способны направлять поток электромагнитной энергии в воздухе при минимальном соприкосновении с металлом или твердым диэлектриком, тем более, что одновременно облегчается и практическая реализация подобных устройств. В самом деле, легко представить, что

нужным требованиям удовлетворяет периодическая система линз или зеркал (рис. 78.1, а—д), однако само понятие линзы или зеркала имеет смысл лишь при достаточно больших в сравнении с λ размерах объекта, т. е. близости к пределу геометрической

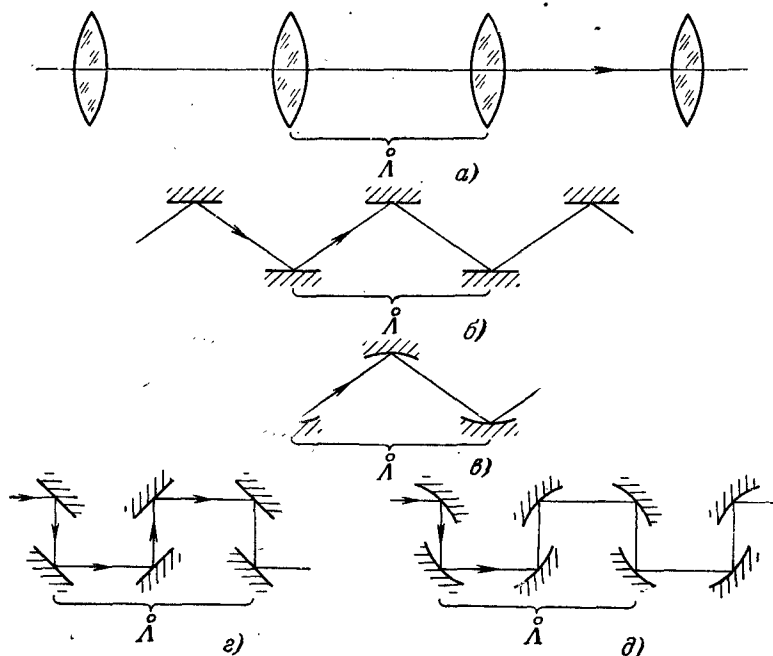


Рис. 78.1.

оптики (§ 50, пп. 2 и 3). Системы этого рода называют *квазиоптическими*.

Система линз очень большого диаметра $2R$ может поддерживать поток энергии внутри канала шириной $d \ll 2R$. Как в любой периодической системе, при этом выполняется условие (77.1), в котором ϕ можно считать вещественной величиной, т. е. квазиоптическая ячейка практически вызывает лишь сдвиг фазы. В приближении геометрической оптики процесс характеризуется показанной на рис. 78.2, а картиной лучей в пространстве между линзами. Все лучи касаются некоторой поверхности (пунктир), которая является границей пучка лучей и называется *каустикой*. В действительности на каустике нет скачкообразного спада интенсивности поля до нуля, а происходит постепенное ее уменьшение типа экспоненциального. Но линзы далеко не всегда настолько велики. Обычно выполняются неравенства

$$R \gg \lambda \text{ и } R \ll \dot{\lambda}, \quad (78.1)$$

так что еще не определено соотношение величин R^2 и $\lambda\tilde{\Lambda}$, получаемых перемножением соответственных частей обоих неравенств. Между тем, если принять одну из линз за излучающую апертуру, то величина $\sqrt{\lambda\tilde{\Lambda}}$, согласно (54.10), будет не чем иным, как радиусом первой зоны Френеля в области второй (соседней) линзы. Понятно, что если не выполняется неравенство $R^2 \gg \lambda\tilde{\Lambda}$, то линза вообще может не «перехватывать» почти весь направляемый на нее поток энергии: передача будет сопровождаться существенным затуханием в результате излучения за пределы линзовой линии — «радиационные потери»; в соотношении (77.1) при этом φ — величина комплексная. Разумеется, данный дифракционный эффект не может быть объяснен с позиций геометрической оптики.

2. Теория линзовой линии. Начнем с рассмотрения действия отдельной линзы как «фазового корректора»; этот частный вопрос

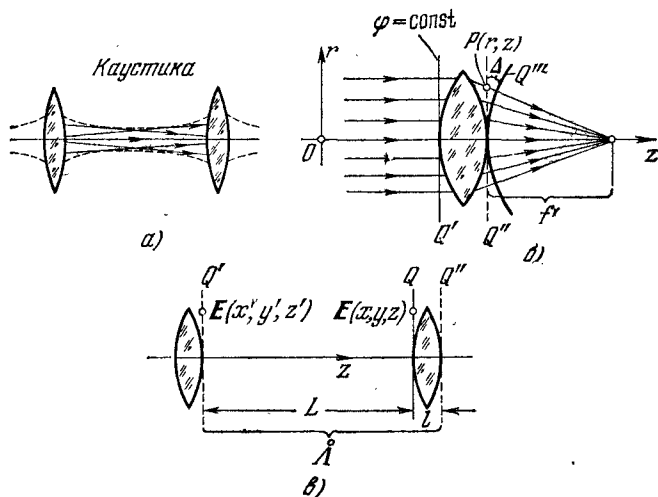


Рис. 78.2.

поддается методу геометрической оптики. Пусть на линзу произвольной формы падает параллельный пучок лучей (рис. 78.2, б), который в силу известного закона (§ 50, п. 3) сходится за ней в фокусе. Как распределена фаза поля на плоскости Q'' (пунктир) за линзой? Ответ дает определение длины Δ отрезка луча, соединяющего Q'' в произвольной точке $P(r, z)$ со сферическим фронтом Q''' сходящейся в фокус волн; положим, что Q'' касается Q''' (на оси линзы). Как видно из рис. 78.2, б,

$$(\Delta + f)^2 = f^2 + r^2.$$

Отсюда, пренебрегая Δ^2 в сравнении с $2\Delta f$, находим

$$\Delta = r^2/2f.$$

Для определения фазы в точке $P(r, z)$ на Q'' достаточно умножить эту величину на волновое число внешнего пространства k_0 и добавить произвольную постоянную φ_0 :

$$\varphi = k_0 \frac{r^2}{2f} + \varphi_0. \quad (78.2)$$

Далее, поскольку на Q' фаза постоянна, то полученная формула выражает также изменение фазы волнового процесса, вносимое линзой при разных r на отрезках от Q' до Q'' . Результат верен для любых *параксиальных* пучков (когда лучи составляют малые углы с осью z). Поле линзовой линии, можно сказать, чисто поперечно ($E_z \approx 0$, $H_z \approx 0$). Если в плоскости Q комплексная амплитуда вектора \mathbf{E} равна $\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)$ (рис. 78.2, в), то в соответствии с (78.2) за линзой на Q''

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z+l) = \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z) e^{-i(k_0 \frac{r^2}{2f} + \varphi_0)}. \quad (78.3)$$

Участок между плоскостями Q' и Q рассмотрим, применяя принцип Гюйгенса: исходя из заданной на Q' величины $\dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z')$, определим величину $\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z)$ на Q . Согласно (53.4)

$$d\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z) = \frac{ik_0 \dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z')}{4\pi} (1 + \cos \vartheta_q) (\vartheta_{0q} \cos \alpha_q - \alpha_{0q} \sin \alpha_q) \frac{e^{-ik_0|r-r'|}}{|r-r'|} dx' dy'.$$

Используя далее те же приближения, что и в § 54, п.1, вместо (54.1) получаем

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z) = \frac{ik_0 e^{-ik_0 L}}{2\pi L} \int_{Q'} \dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z') e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2L}} dx' dy', \quad (78.4)$$

где $z = z' + L$.

Заметим теперь (рис. 78.2, в), что

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z+l) = \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z'+\hat{L}) \quad (78.5)$$

и наложим условие (77.1), которое запишем так:

$$\dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z'+\hat{L}) = \dot{\kappa} \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z'), \quad \dot{\kappa} = e^{-i\dot{\varphi}} \quad (78.6)$$

(допуская комплексные значения $\varphi = \dot{\varphi}$). Объединение формул (78.3) — (78.6) дает

$$\dot{\kappa} \dot{\mathbf{E}}_m(x, y, z') = \frac{ik_0}{2\pi L} e^{-i[k_0(L + \frac{r^2}{2f}) + \varphi_0]} \int_{Q'} \dot{\mathbf{E}}_m(x', y', z') e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2L}} dx' dy'. \quad (78.7)$$

Комплексная амплитуда $\dot{\mathbf{E}}_m$ как функция поперечных координат — величина неизвестная, и полученный результат (78.7) есть

не что иное, как *интегральное уравнение*, которому она подчинена. Точнее, это *интегральное уравнение Фредгольма второго рода* однородное; оно представляет собой формулировку задачи на собственные значения (ср. (П8.11))

$$\mathcal{L}\dot{E}_m = \chi \dot{E}_m, \quad (78.7a)$$

где \mathcal{L} — интегральный оператор:

$$\mathcal{L}u(x, y) = \frac{ik_0}{2\pi L} \int_{Q(\xi, \eta)} u(\xi, \eta) e^{-i \left[k_0 \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2L} + \psi \right]} d\xi d\eta, \quad (78.7b)$$

причем $\psi = k_0 \left(L + \frac{r^2}{2f} \right) + \varphi_0$.

Совокупность *собственных функций* уравнения (78.7) $\dot{E}_m = u_n$, соответствующих *собственным значениям* $\chi = \chi_n$, описывает различные *свободные волновые процессы*. Основной волне, как можно выяснить, отвечает (с точки зрения геометрической оптики) наиболее

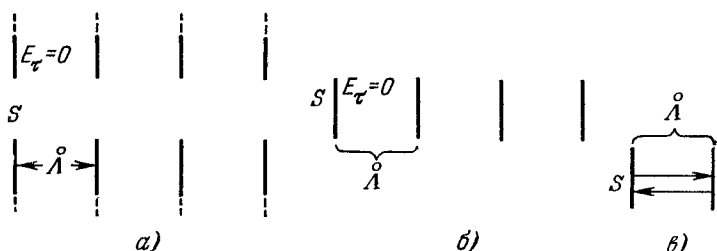


Рис. 78.3.

узкий пучок лучей. В вынужденных режимах эта волна играет главную роль, обладая наименьшими радиационными потерями (см. конец п.1).

Заметим, что в соответствии с принципом Гюйгенса (§§ 47, 53) интегрирование в (78.7) должно распространяться на всю плоскость. В теории линзовых линий, однако, бывает уместным приближение Кирхгофа (§ 53, п.1), согласно которому в качестве области интегрирования берется лишь проекция S линзы на поперечную плоскость (ср. формулировку (53.1)).

В приближении Кирхгофа предельной формой системы линз является «диафрагменная линия» (рис. 78.3, a), т. е. система непрозрачных плоскостей с отверстиями S , вне которых (на самих плоскостях) поле, по предположению, отсутствует. Для такой линии в (78.7b) надо положить $Q=S$, $L=\dot{L}$ и $\psi = k_0 L$ (отсутствие «фазовой коррекции»).

3. Зеркальные системы. Открытые резонаторы. Периодические системы зеркал (рис. 78.1, б — д) рассматриваются с тех же позиций, что и линзовая линия. Геометрическая оптика дает картину

лучей, а принцип Гюйгенса в приближении Кирхгофа приводит к учету радиационных потерь. При этом можно получить аналогичные (78.7) интегральные уравнения.

Если взять систему плоских зеркал S (рис. 78.3, б), дополнительную к диафрагменной линии (рис. 78.3, а), то, с одной стороны, это уже будет не линия передачи: в приближении Кирхгофа два соседних зеркала представляют собой энергетически изолированную систему (рис. 78.3, в). С другой стороны, в силу принципа двойственности (§ 55, п.1) нет нужды заново решать задачу о зеркалах, раз имеется решение задачи о дополнительных к ним диафрагмах. На основании предыдущего (п.2) можно прямо написать интегральное уравнение для периодической системы (рис. 78.3, б), а следовательно, и для системы двух (рис. 78.3, в) зеркал.

Полагая непрозрачные части идеально проводящими, мы должны (§ 55, п.1) заменить в интегральном уравнении \dot{E}_m на \dot{H}_m . Взяв в (78.76) $Q=S$, $L=\dot{A}$ и $\psi = k_0 L$ (см. конец п. 2), вместо (78.7) получим

$$\kappa \dot{H}_m(x, y, z') = \frac{ik_0 e^{-ik_0 \dot{\Lambda}}}{2\pi \dot{\Lambda}} \int_S \dot{H}_m(x', y', z') e^{-ik_0 \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{2\dot{\Lambda}}} dx' dy'. \quad (78.8)$$

Остается истолковать этот результат. Система двух зеркал есть *открытый резонатор*. В том случае, когда расстояние между зеркалами значительно меньше их поперечных размеров, такой резонатор по своим свойствам близок к идеализированной системе, рассмотренной в § 36, п. 4; при иных же соотношениях размеров системы существенную роль играет дифракция. Происхождение интегрального уравнения (78.8) можно истолковать следующим образом. Пусть при распределении поля $H^{(1)}$ одно из зеркал возбуждает на втором поле $H^{(2)}$, которое можно определить при помощи принципа Гюйгенса как $\dot{H}_m^{(2)} = \mathcal{L} \dot{H}_m^{(1)}$. В свою очередь новое поле на первом зеркале $H^{(3)}$ определяется теперь как $\dot{H}_m^{(3)} = \mathcal{L} \dot{H}_m^{(2)}$. Если таким путем мы описываем процесс многократного отражения от зеркал, в результате которого на них устанавливается некоторое собственное распределение поля, то в соотношении $\dot{H}_m^{(n+1)} = \mathcal{L} \dot{H}_m^{(n)}$ (для « n -го прохода») при $n \rightarrow \infty$ поле на одном зеркале может отличаться от поля на другом только постоянным множителем: $\dot{H}_m^{(n+1)} = \kappa \dot{H}_m^{(n)}$; последний указывает изменение фазы и амплитуды (из-за радиационных потерь). Написанное равенство и есть интегральное уравнение (78.8).

Собственные функции уравнения (78.8) $\dot{H}_m = v_n$ дают поперечные распределения поля H для различных свободных колебаний резонатора; им отвечают собственные значения $\kappa = \kappa_n$. Поскольку каждому типу собственных колебаний свойственно возвращение

отраженной волны к первому зеркалу в фазе, то величина κ_n^2 должна быть положительной вещественной; легко убедиться, что это будет при $\varphi' = p\pi$ ($\varphi = \varphi' - i\varphi''$, p — целое). Из данного условия

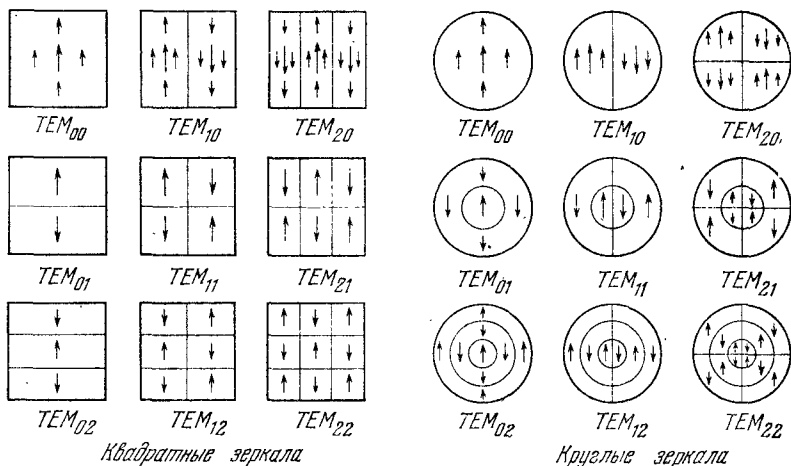


Рис. 78.4.

определяются собственные частоты. На рис. 78.4 показана классификация структур различных собственных колебаний для квадратных и круглых зеркал по Фоксу и Ли¹⁾; схематически представлено строение поперечного электрического поля. Следует подчеркнуть, что эти поля, названные TEM, имеют в действительности продольные компоненты (хотя и пренебрежимо малые).

Существует сходство между линзовой линией и открытым резонатором, составленным из фокусирующих (неплоских) зеркал. Такой резонатор имеет собственные колебания, описываемые в представлении геометрической оптики такими же картинами лучей, как и свободные волны в эквивалентной линзовой линии. Простейший пучок лучей с каустической поверхностью показан на рис. 78.5, (ср. рис. 78.2). Интегральное уравнение для резонатора из одинаковых фокусирующих зеркал совпадает с уравнением (78.7), ибо множитель фазовой коррекции для зеркала оказывается таким же, как и для линзы.

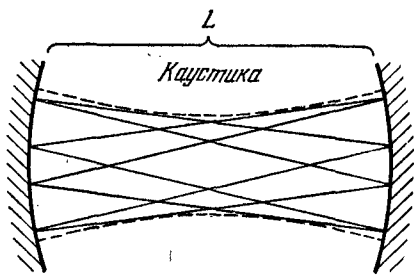


Рис. 78.5.

¹⁾ А. Г. Фокс, Т. Ли, Bell System Techn. Journ. 40, № 2, 453 (1961) (см. также [Д. 9]).

Остается отметить особенности открытых зеркальных резонаторов, благодаря которым они находят применение в технике.

Дело в том, что для любого полого резонатора число собственных частот, лежащих в некотором интервале $\Delta\omega$, быстро возрастает с ростом ω ; в этом легко удостовериться на примере прямоугольного резонатора (§ 70, п.1). Рассматривая вынужденные колебания в резонаторе при весьма высоких частотах, уже невозможно выделить резонансные кривые, соответствующие отдельным типам колебаний (высокого порядка). Можно сказать, что они «сливаются». Система перестает быть резонансной.

Отмеченное уплотнение спектра, т. е. относительный рост числа высших колебаний, в лучевой трактовке связывается с возможностью многих видов многократных отражений в резонаторе (рис. 78.6, а). В случае, когда по какой-либо причине существуют только параллельные лучи (рис. 78.6, б), спектр не уплотняется:

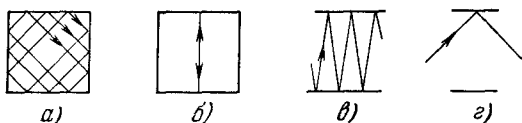


Рис. 78.6.

собственные частоты следуют через одинаковые промежутки. Именно такой случай был предметом изучения в § 35, п. 4. Неуплотнение спектра — свойство *одномерной* системы (в отличие от трехмерной, а также двумерной).

Впрочем, между бесконечными параллельными плоскостями возможны, конечно, не только нормальные лучи, которым отвечают колебания ТЕМ (§ 36, п. 4), но и наклонные лучи (колебания *E* и *H*). Но положение существенно изменяется, когда берется система двух ограниченных зеркал. Здесь, кроме нормальных лучей, можно представить себе только наклонные лучи, идущие под сравнительно небольшими углами к нормали (рис. 78.6, в); многократные же отражения при больших углах явно невозможны (рис. 78.6, г). Благодаря этому спектр открытого зеркального резонатора оказывается в значительной мере «разреженным».

Ввиду указанной особенности открытые зеркальные резонаторы находят применение в наиболее коротковолновых диапазонах, особенно в качестве резонансных систем лазеров.

Деформация (в частности, перекося) плоских зеркал приводит к резкому увеличению радиационных потерь для колебаний всех типов. Резонатору из вогнутых зеркал свойственно меньшее разрежение спектра, но зато колебания, вообще говоря, более устойчивы по отношению к деформациям.

Для подробного ознакомления с квазиоптическими системами читателю рекомендуются книги [В. 4] и [Ж. 4].

ОСОБЕННОСТИ ПОЛЕЙ В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

I. ПОЛЯ И ЗАРЯЖЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ

В этом разделе будут рассмотрены некоторые простейшие представления о заряженных частицах в электромагнитных полях; ни квантовая, ни релятивистская физика при этом не затрагиваются. Модели классической физики оказываются достаточными для объяснения многих процессов, имеющих важное значение в радиотехнике.

Сведения о движении частиц в стационарных полях используются в теории радиотехнических электровакуумных приборов, они относятся к предмету *электронной оптики*. Для электроники СВЧ характерны неквазистационарные электромагнитные поля при наличии электронных потоков. Колебательное движение системы частиц в переменном электромагнитном поле лежит в основе электродинамических моделей различных сред, например металла и ионизированного газа.

Ознакомление с перечисленными вопросами даст возможность перейти к изучению радиоволн в ионосфере, начатому ещё в § 41.

§ 79. Частицы в стационарных полях

1. Электростатические поля. Предположим, что в неизменном электростатическом поле с напряженностью E находится свободная материальная частица, обладающая зарядом q . Под действием силы

$$F = qE$$

она должна двигаться с ускорением.

Мы не ставим целью найти полное поле системы — на исходное электростатическое поле наложится нестационарное электромагнитное поле движущегося заряда. Рассмотрим лишь само движение, полагая его достаточно медленным: скорость v остается значительно меньше скорости света. Согласно классической механике

$$qE = m \frac{dv}{dt}, \quad (79.1)$$

где m — масса частицы. Пусть, в частности, электростатическое

В технике часто используются системы с неоднородными электростатическими полями, действующие на электронные пучки подобно линзам. Рассмотрим в общих чертах два типа таких электростатических линз.

Роль линзы может играть круглая диафрагма в проводящем экране. В однородном поле (рис. 79.2, а) идущий нормально эквипотенциальным поверхностям пучок частиц не деформируется. Пусть такое поле существует в полупространстве, ограниченном

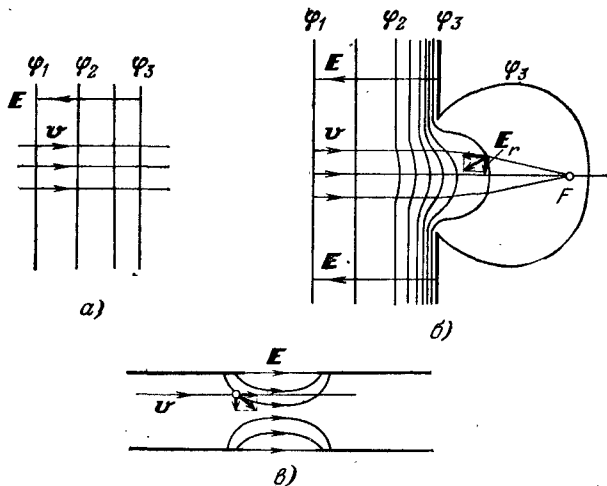


Рис. 79.2.

экраном. Если в экране имеется диафрагма, поле выглядит деформированным, как это показано на рис. 79.2, б при помощи системы эквипотенциалей. Видно, что здесь налицо радиальная компонента, которая должна оказать «сжимающее» действие на поток частиц, замедляемых полем (в данном случае частиц положительных). Достаточно узкий пучок частиц при этом соберется за диафрагмой в «фокусе».

Линзой будет и поперечно разрезанный проводящий цилиндр (рис. 79.2, в). Проходящий в нем коаксиальный параллельный пучок частиц испытывает действие радиальной компоненты поля, направленной к оси в одной области и от оси — в другой. Если частицы, ускоряемые продольным полем, попадают во вторую область позднее, то они *быстрее* проходят ее. Поэтому в целом система оказывается собирающей.

2. Стационарные магнитные поля. Частица с зарядом q , движущаяся в стационарном магнитном поле со скоростью v , находится под действием лоренцевой силы $F = q[v, B]$ (§ 1 п. 1). Поэтому

$$q[v, B] = m \frac{dv}{dt}. \quad (79.5)$$

Пусть речь идет об однородном поле, причем $\mathbf{B} = z_0 \mu_0 H$. Тогда

$$\mu_0 \frac{q}{m} v_y H = \frac{dv_x}{dt}, \quad -\mu_0 \frac{q}{m} v_x H = \frac{dv_y}{dt}, \quad 0 = \frac{dv_z}{dt}. \quad (79.5a)$$

Исключая из первых двух уравнений v_y или v_x , находим дифференциальные уравнения второго порядка относительно одной из этих функций, которые оказываются одинаковыми:

$$\frac{d^2 v_{x,y}}{dt^2} + \left(\mu_0 \frac{q}{m} H \right)^2 v_{x,y} = 0. \quad (79.6)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} \equiv v_x(t) &= A \cos \Omega t + B \sin \Omega t, \\ \frac{dy}{dt} \equiv v_y(t) &= A' \cos \Omega t + B' \sin \Omega t \end{aligned} \quad (79.7a)$$

($\Omega = \mu_0 \frac{q}{m} H$), а третья строчка (79.5a) дает

$$\frac{dz}{dt} = v_z(t) = v_z(0). \quad (79.7b)$$

Уточним постоянные коэффициенты в (79.7a). Из первого уравнения (79.5a) следует:

$$\Omega (A' \cos \Omega t + B' \sin \Omega t) = \Omega (-A \sin \Omega t + B \cos \Omega t),$$

т. е.

$$A' = B \quad \text{и} \quad B' = -A.$$

Поэтому выражения (79.7a) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} v_x(t) &= A \cos \Omega t + B \sin \Omega t = V \cos(\Omega t - \varphi_0), \\ v_y(t) &= B \cos \Omega t - A \sin \Omega t = -V \sin(\Omega t - \varphi_0), \end{aligned} \quad (79.8)$$

где $V = \sqrt{A^2 + B^2}$ и $\varphi_0 = \text{arctg } B/A$, причем константа V есть не что иное, как абсолютное значение скорости частицы в плоскости xOy : $V = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Интегрируя уравнения (79.7a, б) с учетом (79.8), получаем

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{V}{\Omega} \sin(\Omega t - \varphi_0) + \frac{V}{\Omega} \sin \varphi_0 + x(0), \\ y(t) &= \frac{V}{\Omega} \cos(\Omega t - \varphi_0) - \frac{V}{\Omega} \cos \varphi_0 + y(0), \\ z(t) &= v_z(0) t + z(0). \end{aligned} \quad (79.9)$$

В частном случае, когда $v_z(0) = 0$, найденный результат описывает движение по окружности с радиусом $R = V/\Omega$. Действительно, мы имеем уравнение

$$\left[x(t) - \frac{V}{\Omega} \sin \varphi_0 - x(0) \right]^2 + \left[y(t) + \frac{V}{\Omega} \cos \varphi_0 - y(0) \right]^2 = \left(\frac{V}{\Omega} \right)^2. \quad (79.10)$$

Вращение происходит с круговой частотой $\Omega = \mu_0 \frac{q}{m} H$, а положение центра круговой траектории частицы и ее радиус опреде-

ляются начальными данными. Согласно (79.8) $\mathbf{v}(0) = (x_0 \cos \varphi_0 + y_0 \sin \varphi_0) V$.

При $v_z(0) \neq 0$ заряженная частица движется по винтовой линии (рис. 79.3, а, б): складываются рассмотренные выше движение по круговой орбите и равномерное прямолинейное движение вдоль оси z .

Стационарные магнитные поля, как и электростатические, используются для отклонения и фокусировки электронных пучков. В качестве упражнения читателю предлагается рассмотреть пучок, проходящий через ограниченный участок однородного поля (модель отклоняющей системы в виде электромагнита) и вычислить угол отклонения.

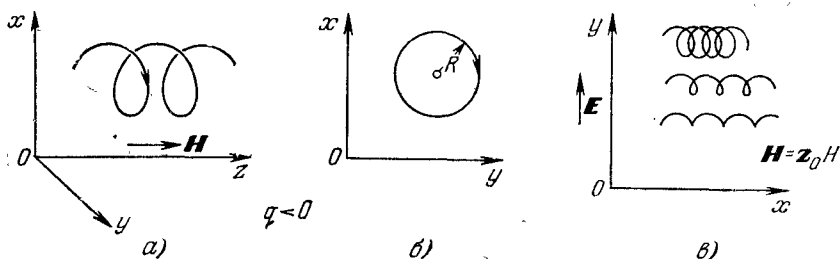


Рис 79.3.

3. Стационарные электромагнитные поля. Возьмем, наконец, более общий случай, когда на заряженную частицу действует стационарное электромагнитное поле. Вместо (79.1) и (79.5) мы имеем уравнение движения

$$q \{ \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (79.11)$$

При $\mathbf{E} = y_0 \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} = z_0 \mu_0 H$ отсюда следует:

$$\Omega v_y = \frac{dv_x}{dt}, \quad \frac{q}{m} E - \Omega v_x = \frac{dv_y}{dt}, \quad 0 = \frac{dv_z}{dt}, \quad (79.11a)$$

где, как и в п. 2, $\Omega = \mu_0 \frac{q}{m} H$.

Исключение из первых двух уравнений (79.11a) компоненты v_y дает

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \Omega^2 v_x = \Omega \frac{q}{m} E, \quad (79.12)$$

и, следовательно,

$$\frac{dx}{dt} \equiv v_x(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t + C, \quad (79.13a)$$

где константа C , определяемая при подстановке (79.13a) в (79.12), оказывается равной

$$C = \frac{1}{\Omega} \frac{q}{m} E = \frac{E}{\mu_0 H}. \quad (79.13б)$$

Теперь из первой строчки (79.11а) имеем

$$\frac{dy}{dt} \equiv v_y(t) = -A \sin \Omega t + B \cos \Omega t \quad (79.14)$$

и из третьей

$$\frac{dz}{dt} \equiv v_z(t) = v_z(0). \quad (79.15)$$

Как и при получении (79.8) из (79.7а), положим $V = \sqrt{A^2 + B^2}$ и $\varphi_0 = \arctg B/A$. После соответствующего преобразования произведем интегрирование уравнений (79.13) – (79.15). Это дает

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{V}{\Omega} \sin(\Omega t - \varphi_0) + \frac{V}{\Omega} \sin \varphi_0 + \frac{E}{\mu_0 H} t + x(0), \\ y(t) &= \frac{V}{\Omega} \cos(\Omega t - \varphi_0) - \frac{V}{\Omega} \cos \varphi_0 + y(0), \\ z(t) &= v_z(0) t + z(0). \end{aligned} \quad (79.16)$$

Вдоль оси z , как и ранее (п. 2), происходит лишь равномерное движение. Что касается процесса в плоскости xOy при $v_z(0) = 0$, то это движение по *циклоиде*: действительно, первые два уравнения (79.16) являются параметрическими уравнениями циклоиды. Из них легко получить

$$\begin{aligned} \left[x(t) - \frac{V}{\Omega} \sin \varphi_0 - x(0) - \frac{E}{\mu_0 H} t \right]^2 + \\ + \left[y(t) + \frac{V}{\Omega} \cos \varphi_0 - y(0) \right]^2 = \left(\frac{V}{\Omega} \right)^2. \end{aligned} \quad (79.17)$$

Поэтому можно сказать, что частица движется по окружности радиуса $R = V/\Omega$ с круговой частотой Ω , но сама эта окружность (ее центр) смещается вдоль оси x с постоянной скоростью $E/\mu_0 H$. Вид циклоиды зависит от соотношения линейной скорости движения по окружности V и скорости смещения ее центра $E/\mu_0 H$, что показано на рис. 79.3, в. Параметры траектории определяются начальными данными; при $v_z(0) = 0$ из (79.13) и (79.14) имеем: $\mathbf{v}(0) = \mathbf{x}_0 \left(V \cos \varphi_0 + \frac{E}{\mu_0 H} \right) + \mathbf{y}_0 V \sin \varphi_0$.

Заметим, что рассмотренный вид движения заряженных частиц характерен (в общих чертах) для ряда приборов электроники СВЧ типа магнетронов.

4. О прецессии магнитного момента. Заключение. Материальные частицы могут обладать магнитным моментом, что имеет простое классическое объяснение. Действительно, в этом приближении можно говорить об орбитальных движениях электронов в атомах и их спинах как о круговых токах, которые проявляют себя как магнитные диполи (§ 23, пп. 3, 4). Согласно (23.10) эквивалентный замкнутому току магнитный момент определяется формулой: $\mathbf{m} = \mathbf{z}_0 I S \mu_0$ (среда – вакуум). В то же время,

как следует из (1.4), на такой ток во внешнем магнитном поле действует момент силы $\mathbf{K} = IS\mu_0 [\mathbf{z}_0, \mathbf{H}]$, т. е.

$$\mathbf{K} = [\mathbf{m}, \mathbf{H}]. \quad (79.18)$$

Это соотношение мы используем при рассмотрении частицы, обладающей магнитным моментом \mathbf{m} . Так как последний обусловлен некоторым вращательным движением, то частица имеет также момент количества движения, который обозначим \mathbf{S} , причем

$$\mathbf{m} = \gamma \mathbf{S}, \quad (79.19)$$

где γ — постоянная. В частности, для спина электрона $\gamma = -2,21 \times 10^5 (a/M)^{-1} \text{сек}^{-1}$. Взяв известный закон классической механики

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{S}}{dt}, \quad (79.20)$$

на основании (79.18) и (79.19) получим

$$\gamma [\mathbf{m}, \mathbf{H}] = \frac{d\mathbf{m}}{dt}. \quad (79.21)$$

Это не что иное, как уравнение движения частицы с магнитным моментом \mathbf{m} в магнитном поле с напряженностью \mathbf{H} .

Описываемое движение при $\mathbf{H} = \text{const}$ есть так называемая *прецессия* около направления \mathbf{H} . Заметим сначала, что длина вектора \mathbf{m} при движении сохраняется. Действительно, умножая обе части (79.21) скалярно на \mathbf{m} , имеем

$$0 \equiv \gamma [\mathbf{m}, \mathbf{H}] \mathbf{m} = \mathbf{m} \frac{d\mathbf{m}}{dt},$$

откуда

$$\frac{d}{dt} m^2 = 0, \quad (79.22)$$

что и доказывает это утверждение. Вектор $d\mathbf{m}/dt$, который имеет смысл скорости перемещения конца \mathbf{m} на векторной диаграмме (с фиксированным началом), согласно (79.21) перпендикулярен \mathbf{m} и \mathbf{H} . Иными словами, для двух последовательных положений магнитного момента $\mathbf{m}(t)$ и $\mathbf{m}(t + \Delta t)$ приращение $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t)$ при $\Delta t \rightarrow 0$ лежит перпендикулярно плоскости \mathbf{m} и \mathbf{H} (рис. 79.4, а).

Это значит, что «магнитная стрелка» \mathbf{m} (связанная с частицей), оставаясь под углом ϑ к \mathbf{H} (рис. 79.4, б), *прецессирует* подобно оси волчка в гравитационном поле: ее конец вращается около направления \mathbf{H} с постоянной линейной скоростью $V = |d\mathbf{m}/dt| = |\gamma [\mathbf{m}, \mathbf{H}]| = |\gamma m H \sin \vartheta|$. Нетрудно найти и угловую

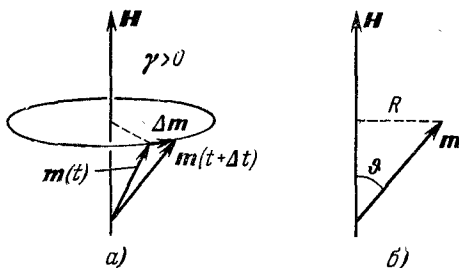


Рис. 79.4.

скорость (круговую частоту) вращения $\Omega = V/R$, где $R = m \sin \theta$ (рис. 79.4, б). Получаем

$$\Omega = |\gamma H|. \quad (79.23)$$

Направление вращения составляет *правовинтовую систему* с вектором H .

Моделью магнетика — сплошной среды — служит система частиц, каждая из которых движется в соответствии с уравнением (79.21), причем намагниченность M есть магнитный момент системы, отнесенный к единице объема (§ 21, п. 3). Поэтому положим $M = N' m$, где N' — требуемое число частиц, и запишем:

$$\gamma [M, H] = \frac{dM}{dt}. \quad (79.24)$$

Это так называемое *уравнение движения намагниченности*.

При выводе уравнения (79.24) не были учтены потери энергии в среде. Это обычно делается путем введения в (79.24) дополнительного члена, вид которого отвечает той или иной модели «механизма» поглощения. Широко используется *уравнение Ландау — Лифшица*

$$\gamma [M, H] - \eta \mu_0 \frac{[M, [M, H]]}{M^2} = \frac{dM}{dt}. \quad (79.25)$$

Здесь диссипативный член представляет собой вектор, перпендикулярный M ; он влияет на амплитуду прецессии, не изменяя величины M . Параметр η (величина положительная) определяется экспериментальным путем.

В заключение сделаем два замечания. Еще раз подчеркнем (см. начало п. 1), что во всех случаях поле, в котором движется частица, считалось заданным. Между тем, ускоренно движущийся заряд (переменный ток) излучает, и «реакция излучения» — потеря энергии — изменяет его движение. Пренебрегать этим не всегда допустимо.

Следующее замечание состоит в том, что движение частиц можно рассматривать на основе принципа наименьшего действия механики. При этом выясняется аналогия с принципом Ферма (§ 56, п. 4), из которого, как известно, выводятся законы геометрической оптики. Так строятся основы *электронной оптики*, занимающейся траекториями заряженных частиц в стационарных полях; ее законы оказываются аналогичными.

§ 80. Частицы в переменных полях и модели сред

1. Взаимодействие полей с потоками частиц. Поток заряженных частиц можно охарактеризовать, указывая их скорость v и плотность заряда ρ как функции координат; при этом, согласно (6. 3), также определена плотность тока проводимости

$$j = \rho v. \quad (80.1)$$

Положим, что переменное электромагнитное поле может не иметь каких-либо иных источников, кроме электронного потока, в то же время движение частиц обусловлено полем. Если бы функция \mathbf{j} оказалась известной, то, найдя решение уравнений электродинамики (28.1) (или (28.6), (28.7)), мы должны были бы получить именно то поле, благодаря которому частицы движутся по данным траекториям со скоростью \mathbf{v} , создавая ток с плотностью \mathbf{j} . В действительности, строго говоря, параметры потока \mathbf{v} и ρ не могут быть заранее известны, а это значит, что уравнения электродинамики (28.1) надо решать *совместно* (как единую систему) с уравнениями движения заряда (80.1) и (79.11). Такая полная постановка задачи даже в своих частных формах приводит к значительным трудностям, поэтому обычно прибегают к разного рода упрощениям.

В электронике СВЧ рассматриваются электромагнитные поля в объемных резонаторах и направляющих системах, возбуждаемые

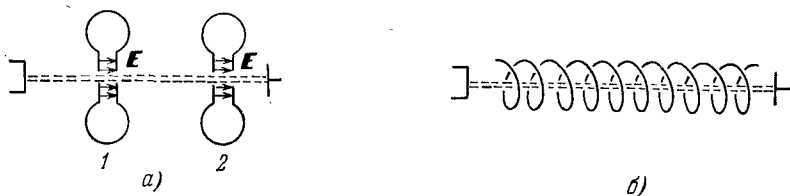


Рис. 80.1.

или усиливаемые электронными потоками. В частности, система двух (обычно тороидальных) резонаторов с отверстиями, пронизываемых электронным потоком (рис. 80. 1, а), может служить прибором типа *клистрона*. Если в первом резонаторе существует поле, то оно, как говорят, модулирует поток частиц по скорости, то ускоряя, то замедляя их в зависимости от времени прихода в пространство взаимодействия (область резонатора), где направление вектора \mathbf{E} меняется периодически. Поэтому функция \mathbf{j} , характеризующая ток во втором резонаторе, уже имеет гармоническую составляющую, и там возбуждаются электромагнитные колебания. Резонаторы можно связать и создать таким путем систему, способную к самовозбуждению.

На рис. 80. 1, б схематически показано прохождение электронного потока внутри направляющей системы в виде спирального волновода (§ 77, п. 3). Если движение частиц таково, что они преимущественно тормозятся бегущей волной спирали, то энергия отдается электромагнитному полю, и амплитуда волны возрастает. Так действуют приборы типа *лампы бегущей волны*.

Вясним некоторые особенности взаимодействия электронного потока с бегущей волной, полагая электрическое поле в его области чисто продольным и неизменным в поперечном сечении (пучок узок). Таким образом, \mathbf{E} , а соответственно \mathbf{v} , \mathbf{j} и ρ будут рас-

смагиваться как функции продольной координаты z и времени t . Составляя производную от $v = v_z(z, t)$ по t , имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z},$$

так что уравнение движения (79.1) принимает вид

$$\frac{q}{m} E = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z}. \quad (80.2)$$

Функции $E(z, t)$, $v(z, t)$, $j(z, t)$ и $\rho(z, t)$ представим рядами Фурье вида (П 8.1), так что, в частности,

$$v(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n(z) e^{in\omega t}, \quad (80.3a)$$

причем будем считать, что

$$v_0(z) = \text{const}, \quad v_1(z) = \dot{v}_m e^{-i\Gamma z}, \quad v_0 \gg |\dot{v}_m| = v_m, \quad (80.3б)$$

а остальными членами ряда пренебрежем, полагая их несущественными для изучаемого процесса взаимодействия. Причем перечисленные функции опишем аналогично. В сущности предполагается, что в пучке преобладает постоянная составляющая, а переменная имеет характер гармонической волны с частотой ω и постоянной распространения Γ .

Внося в (80.2) указанные представления E и v , получаем следующее приближенное линейное соотношение для переменной составляющей:

$$\frac{q}{m} \dot{E}_m \approx i\omega \dot{v}_m - i\Gamma v_0 \dot{v}_m. \quad (80.4)$$

Точно так же из (80.1) находим

$$\dot{j}_m \approx \rho_0 \dot{v}_m + \dot{\rho}_m v_0. \quad (80.5)$$

Наконец, используем уравнение непрерывности (4.2), которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial j}{\partial z} \quad (80.6)$$

и дает

$$\dot{\rho}_m \approx \frac{\Gamma}{\omega} \dot{j}_m. \quad (80.7)$$

Исключая из (80.4), (80.5) и (80.7) комплексные амплитуды $\dot{\rho}_m$ и \dot{v}_m , находим следующую связь \dot{j}_m и \dot{E}_m :

$$\dot{j}_m \approx \frac{-ik_q \frac{\rho_0}{v_0} \frac{q}{m}}{(k_q - \Gamma)^2} \dot{E}_m, \quad (80.8)$$

где обозначено $k_q = \omega/v_0$. Это дает возможность выразить плот-

ность мощности переменной составляющей в пучке $\dot{p} = \frac{j\dot{m} E_m}{2}$ при помощи равенства

$$\dot{p} \approx \frac{ik_q \frac{\rho_0}{v_0} \frac{q}{m}}{2(k_q - \Gamma^*)^2} E_m^2. \quad (80.9)$$

Отдача энергии частиц полю происходит, если $\text{Re } \dot{p} < 0$ (§ 30); при этом амплитуда бегущей волны возрастает: $\Gamma'' < 0$ ($\Gamma = \Gamma' - i\Gamma''$). Поскольку элементарное преобразование предыдущего результата приводит к выражению

$$\dot{p} \approx \frac{k_q \frac{\rho_0}{v_0} \frac{q}{m} [-2(k_q - \Gamma')\Gamma'' + i(k_q^2 - 2k_q\Gamma' + \Gamma'^2 - \Gamma''^2)]}{2[(k_q^2 - 2k_q\Gamma' + \Gamma'^2 - \Gamma''^2)^2 + 4(k_q - \Gamma')^2\Gamma''^2]} E_m^2, \quad (80.9a)$$

то, как видно, усиление волны будет при

$$k_q - \Gamma' < 0 \quad (\Gamma'' < 0), \quad (80.10)$$

т. е. с учетом (61.2) при

$$v_0 > v_\phi. \quad (80.10a)$$

Постоянная составляющая скорости частиц должна превышать фазовую скорость волны.

Мы получили этот вывод при ряде упрощений, приводящих к *линеаризации* исходных уравнений — вообще нелинейных. Однако результаты отражают главные черты процесса, и формула (80.9) пригодна для приближенных оценок. Электронный поток в поле, как говорят, группируется, разбиваясь на отдельные сгустки. При «синхронизме» движения электронов с волной, когда $v_0 = v_\phi$, сгустки локализуются в ее узлах, и лишь при $v_0 > v_\phi$ происходит эффективное торможение электронов полем; если же $v_0 < v_\phi$, то, напротив, электроны ускоряются полем и отбирают энергию, в результате чего волна затухает ($\Gamma'' > 0$).

В заключение отметим, что электронный поток можно рассматривать как среду с комплексной диэлектрической проницаемостью, вид которой выясняется при сопоставлении (80.9a) с выражением плотности мощности \dot{p} , следующим из (30.9). В частности, согласно (30.16), $\text{Re } \dot{p} = \omega \epsilon'' E_m^2 / 2$. При выполнении неравенства (80.10) среда оказывается *активной* (регенеративной): $\epsilon'' < 0$.

2. Простейшая модель плазмы. Важный для дальнейшего пример представляет *плазма*, т. е. частично или полностью ионизированный газ, при наличии гармонически колеблющегося электромагнитного поля. Имеется, таким образом, система заряженных частиц — электронов и ионов, а также нейтральных атомов. Будем сначала пренебрегать их соударениями. При этом движение каждой заряженной частицы под действием электрического поля описывается уравнением (79.1), которому придадим вид

$$\frac{q}{m} E = \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad (80.11)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор положения частицы. Полагая $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m \times \cos(\omega t + \varphi)$, находим решение:

$$\mathbf{r} = -\frac{q\mathbf{E}}{m\omega^2} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0, \quad (80.12)$$

причем функция $\mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$ характеризует положение частицы при отсутствии поля. Разумеется, первый член решения, выражающий вынужденные гармонические колебания в поле, можно получить методом комплексных амплитуд, согласно которому уравнение (80.11) переходит в алгебраическое $\frac{q}{m} \dot{\mathbf{E}}_m = -\omega^2 \dot{\mathbf{r}}_m$, откуда

$$\dot{\mathbf{r}}_m = -\frac{q\dot{\mathbf{E}}_m}{m\omega^2}. \quad (80.12a)$$

Плазма есть нейтральная система зарядов (число электронов и отрицательных ионов равно числу ионов положительных). Поэтому можно вычислить электрический момент произвольного элемента ее объема ΔV по формуле (18.2), что ввиду (80.12) дает

$$\mathbf{p}_{\Delta V} = \sum_i^{(\Delta V)} q_i \left(-\frac{q_i \mathbf{E}}{m_i \omega^2} + \mathbf{v}_{0i} t + \mathbf{r}_{0i} \right), \quad (80.13)$$

где индекс i означает суммирование по всем частицам внутри ΔV . Нас интересует лишь гармоническая составляющая момента. Переходя к комплексным амплитудам и учитывая, что все заряды одинаковы по абсолютной величине и равны заряду электрона ($|q_i| = e$, ионы считаются одновалентными), получаем

$$\dot{\mathbf{p}}_{m\Delta V} = -\frac{e^2 \dot{\mathbf{E}}_m}{\omega^2} \sum_i^{(\Delta V)} \frac{1}{m_i}. \quad (80.13a)$$

В дальнейшем пренебрежем влиянием ионов, так как их массы весьма велики в сравнении с массой электрона, которую обозначим m , так что

$$\dot{\mathbf{p}}_{m\Delta V} = -\frac{e^2 N_{\Delta V}}{m\omega^2} \dot{\mathbf{E}}_m, \quad (80.13b)$$

где $N_{\Delta V}$ — число электронов в объеме ΔV . Переходя к пределу, как в (18.10), определяем комплексную амплитуду вектора поляризованности среды:

$$\dot{\mathbf{P}}_m = -\frac{e^2 N'}{m\omega^2} \dot{\mathbf{E}}_m \quad (80.14)$$

(N' — число электронов, отнесенное к единице объема).

Полученный результат дает возможность охарактеризовать плазму при помощи электрической восприимчивости χ^3 и диэлектрической проницаемости ϵ , которые сразу же находятся на основании формул (5.4) (либо (18.11)) и (5.8):

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi^3) = \epsilon_0 - \frac{e^2 N'}{m\omega^2}. \quad (80.15)$$

При переходе к относительной проницаемости и подстановке численных значений параметров электрона e и m имеем

$$\dot{\epsilon}_r = 1 - \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m \omega^2} = 1 - 80,6 \frac{N'}{f^2}. \quad (80.15a)$$

Здесь концентрация N' выражена числом электронов, приходящихся на 1 м^3 , а частота f — в Гц (либо, что практически удобнее, частота берется в кГц , а число электронов относится к 1 см^3).

Величина $\dot{\epsilon}$ оказалась вещественной; это отражает тот факт, что система колеблющихся в поле частиц в среднем не отбирает и не отдает энергии. Примечательно, что при данной концентрации электронов N' в зависимости от частоты диэлектрическая проницаемость может быть и положительной, и отрицательной величиной, проходя через нуль при $\omega^2 = e^2 N' / \epsilon_0 m$. Выражению (80.15) можно придать также вид

$$\dot{\epsilon}_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \left(\omega_p^2 = \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m} \right). \quad (80.15b)$$

Параметр ω_p называют *плазменной частотой*.

3. Поглощающая плазма. Чтобы учесть поглощение в плазме, введем в рассмотрение отдачу энергии колеблющимися электронами при столкновениях с тяжелыми частицами. Полагая, что при соударении с нейтральной частицей или ионом электрон, движущийся со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, передает ей свой импульс $m d\mathbf{r}/dt$, а среднее число таких соударений за единицу времени есть ν , мы должны учесть в уравнении движения дополнительное изменение импульса за единицу времени, равное $m\nu d\mathbf{r}/dt$. При этом вместо (80.11) пишем

$$\frac{q}{m} \mathbf{E} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (80.16)$$

Совокупный эффект соударений подобен проявлению силы трения.

Поскольку, как и выше в п. 2, интерес представляют лишь вынужденные гармонические колебания электронов, применим метод комплексных амплитуд, приводящий от (80.16) к алгебраическому уравнению $\frac{q}{m} \dot{\mathbf{E}}_m = -\omega^2 \dot{\mathbf{r}}_m + i\nu \dot{\mathbf{r}}_m$, откуда

$$\dot{\mathbf{r}}_m = -\frac{q \dot{\mathbf{E}}_m}{m\omega} \frac{1}{\omega - i\nu} \quad (80.17)$$

(ср. (80.12a)). Вместо (80.14) теперь — прежним путем — получим

$$\dot{\mathbf{P}}_m = -\frac{e^2 N'}{m\omega} \frac{1}{\omega - i\nu} \dot{\mathbf{E}}_m \quad (80.18)$$

и далее перейдем к выражению комплексной диэлектрической проницаемости

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_0 - \frac{e^2 N'}{m\omega} \frac{1}{\omega - i\nu}, \quad (80.19)$$

или

$$\dot{\epsilon}_r = 1 - \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m (\omega^2 + \nu^2)} - i \frac{e^2 N' \nu}{\epsilon_0 m \omega (\omega^2 + \nu^2)}. \quad (80.19a)$$

Сопоставление этого результата с выражением (29.2) позволяет получить формулу проводимости плазмы

$$\sigma = \frac{e^2 N' \nu}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \quad (80.20)$$

Приведем еще часто используемые приближенные формулы комплексной диэлектрической проницаемости, следующие из (80.19а), при $\omega^2 \gg \nu^2$

$$\epsilon_r \approx 1 - \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m \omega^2} - i \frac{e^2 N' \nu}{\epsilon_0 m \omega^3}; \quad (80.21)$$

при $\omega^2 \ll \nu^2$

$$\epsilon_r \approx 1 - \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m \nu^2} - i \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m \omega \nu}. \quad (80.22)$$

Подчеркнем, наконец, что рассмотренная электродинамическая модель плазмы является одновременно моделью металла. Для металла обычно полагают

$$\dot{\epsilon} \approx -i \frac{\sigma}{\omega} \quad (80.23)$$

(в таком приближении, например, получены формулы (33.17) (33.19) и др.). Согласно (80.19) это справедливо при относительно низких частотах, причем

$$\sigma = e^2 N' / m \nu \quad (80.24)$$

(ср. (80.22)).

Однако при собственных металлам N' и ν «низкими» оказываются любые радиочастоты.

4. О модели диэлектрика. Заключение. Статическая модель диэлектрика в виде системы связанных зарядов была рассмотрена в § 18. При отклонении от положения равновесия на такой заряд действует пропорциональная смещению «восстанавливающая» сила, которая подобна силе упругости; в статически поляризованном диэлектрике она уравнивается силой поля qE .

Обозначив восстанавливающую силу αr , введем ее в уравнение движения (80.16), которое принимает вид

$$\frac{q}{m} E = \frac{d^2 r}{dt^2} + \nu \frac{dr}{dt} + \frac{\alpha}{m} r. \quad (80.25)$$

Заметим, что параметр ν не имеет в данном случае смысла частоты соударений электрона с тяжелыми частицами; однако в диэлектриках имеются силы типа трения, поэтому член $\nu dr/dt$ сохранен.

Пользуясь методом комплексных амплитуд, т. е. приводя (80.25) к виду $\frac{q}{m} \dot{E}_m = -\omega^2 \dot{r}_m + i\omega\nu \dot{r}_m + \frac{\alpha}{m} \dot{r}_m$, получим

$$\dot{r}_m = -\frac{q \dot{E}_m}{m} \frac{1}{\omega^2 - \frac{\alpha}{m} - i\omega\nu} \quad (80.26)$$

и далее

$$\dot{P}_m = -\frac{e^2 N'}{m} \frac{1}{\omega^2 - \frac{\alpha}{m} - i\omega\nu} \dot{E}_m, \quad (80.27)$$

откуда

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 - \frac{e^2 N'}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - i\omega\nu}, \quad (80.28)$$

где обозначено $\omega_0^2 = \alpha/m$.

По ряду причин, связанных с необходимостью уточнения силы, действующей на связанный заряд, а также с ограниченностью представлений классической физики, описание диэлектрика как среды, характеризующейся проницаемостью $\hat{\epsilon}$ вида (80.28), в большинстве случаев оказывается слишком упрощенным; оно, однако, может быть достаточным, например, для газа. Существенной особенностью динамической модели диэлектрика является наличие *резонанса* при совпадении частоты электромагнитного процесса ω с *собственной частотой* среды ω_0 ; вообще диэлектрик имеет спектр собственных частот. Напомним, что о резонансном поглощении в газах упоминалось в § 60, п. 2 в связи с распространением радиоволн в тропосфере.

Построенные модели сред объединены единообразием подхода, но по своей ценности они различны. В отличие от модели диэлектрика, хотя и более сложной, но менее претендующей на адекватность, модель плазмы находит широкое практическое применение при рассмотрении *радиоволн в ионосфере*.

§ 81. Радиоволны в ионосфере

1. Ионизация атмосферы и рефракция радиоволн. В общих чертах описание ионосферы и особенностей распространения различных ионосферных радиоволн было сделано в §§ 41, 42. Возвращаясь к этой теме, мы привлечем теперь для объяснения электромагнитных процессов построенную в § 80 модель плазмы.

О структуре ионосферы уже говорилось достаточно подробно. Главной причиной ионизации газов атмосферы является ультрафиолетовое излучение Солнца, а точнее, излучение в диапазоне волн короче $0,1 \text{ мк}$; заметим, что на эту часть спектра приходится довольно малая доля энергии солнечного излучения. Более длинноволновое электромагнитное излучение (с меньшей энергией квантов) не в состоянии произвести требуемую работу ионизации. Вторым по значению ионизирующим фактором являются корпускулярные потоки также в основном солнечного происхождения.

Чем вызвано образование ионизированных слоев, описанных в § 42? Это можно понять на примере идеализированной атмосферы однородного состава. Плотность энергии ионизирующего потока, приходящего к Земле, по мере проникновения в атмосферу падает в результате поглощения. Плотность же газа, наоборот, падает с увеличением расстояния от Земли. Поэтому-то количество свободных электронов в единице объема N' как функция высоты имеет максимум: на некоторой высоте ионизация наиболее интенсивна и лежит «ядро» слоя.

В § 41, п. 2 была обрисована картина рефракции в ионосфере. Для ее обоснования надо удостовериться, что при вертикальном вхождении в ионосферный слой с повышением ионизации оптическая плотность среды *уменьшается*. Но это непосредственно следует из формулы (80.15) или (80.19). Действительно, диэлектрическая проницаемость (или модуль ϵ) падает с ростом N' (при $\omega > \omega_p$). Конкретизируя формулу (41.11) при помощи выражений (80.15) и (80.15а), имеем

$$\sin \vartheta_0 = \sqrt{1 - \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m \omega^2}} = \sqrt{1 - 80,6 \frac{N'}{f^2}}. \quad (81.1)$$

Здесь N' — значение концентрации на высоте «поворота луча» при данной частоте f и начальном угле ϑ_0 .

Несмотря на упрощенность трактовки (ниже обсуждение будет расширено), равенство (81.1) часто используется для различных оценок. Пусть луч направлен вертикально ($\vartheta_0 = 0$), тогда равенство (81.1) удовлетворяется при обращении в нуль подкоренного выражения, т. е. когда $\omega^2 = e^2 N' / \epsilon_0 m = \omega_p^2$ (согласно (80.15б) круговая частота равна плазменной). Положим, что при этом N'_{\max} есть максимальное значение электронной концентрации для данного слоя; вычислим частоту

$$f_{\text{кр}} = \frac{\omega_{p \max}}{2\pi} = \sqrt{80,6 N'_{\max}}, \quad (81.2)$$

называемую *критической*, можно утверждать, что при меньших частотах ($f < f_{\text{кр}}$) волны будут полностью отражаться от ионосферы, а при больших ($f > f_{\text{кр}}$) — проходить через нее. Действительно, от нижней границы слоя до его ядра концентрация изменяется в пределах от нуля до N'_{\max} , так что в первом случае обязательно найдется уровень, для которого $\omega = \omega_p$, и выполняется условие полного отражения при нормальном падении. Во втором же случае такого уровня нет.

Для всякого наклонного луча ($\vartheta_0 \neq 0$) существует своя *максимальная рабочая частота*

$$f(\vartheta_0)_{\max} = \frac{\omega_{p \max}}{2\pi \cos \vartheta_0} = \frac{\sqrt{80,6 N'_{\max}}}{\cos \vartheta_0} > f_{\text{кр}}. \quad (81.3)$$

Согласно (81.1) при $f < f(\vartheta_0)_{\max}$ в слое найдется уровень поворота луча, а если $f > f(\vartheta_0)_{\max}$, то луч уйдет за пределы ионосферы.

Угол ϑ_0 всегда меньше прямого; его максимальное значение $\vartheta_{0 \max}$ (рис. 81.1) есть

$$\vartheta_{0 \max} = \arcsin \frac{R_0}{R_0 + h}, \quad (81.4)$$

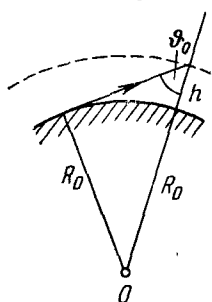


Рис. 81.1.

где h — высота луча, а R_0 — радиус Земли. Поэтому и возникает высокочастотное ограничение ионосферных волн:

$$f \leq f(\vartheta_{0 \max})_{\max} = \frac{\omega_{p \max}}{2\pi \cos \vartheta_{0 \max}} = \frac{\sqrt{80,6N'_{\max}}}{\cos \vartheta_{0 \max}}. \quad (81.5)$$

Напомним (42 п. 3), что эта граница лежит в диапазоне коротких волн. В редких случаях — в годы наибольшей солнечной активности в дневное время — рефракция в ионосфере оказывается достаточной для поворота луча при $\lambda < 10$ м (в длинноволновой части диапазона УКВ).

Как уже отмечалось, простые рассуждения, основанные на использовании равенства (81.1) и его следствий, употребительны на практике. Взяв значения N' из рис. 42.1, таким путем нетрудно подтвердить указанные в § 42, п. 3 диапазонные особенности ионосферных волн, обусловленные степенью концентрации электронов. Поглощение (и его влияние на оптическую плотность среды) при этом не учитывается. Но и при отсутствии поглощения лежащее в основе всего применение геометрической оптики нельзя считать обоснованным для областей, где диэлектрическая проницаемость близка к нулю. Дело в том, что при этом неограниченно возрастает длина волны в среде λ , и изменение свойств среды на расстояниях порядка λ уже не может быть малым, а потому критерий (56.20) не выполняется.

2. Поглощение и дисперсия. Заключение. Выходя за пределы геометрической оптики, рассмотрим плоскую однородную электромагнитную волну, распространяющуюся в безграничной однородной плазме. Собственно говоря, решение такой электродинамической задачи содержится в общих формулах, полученных в § 33; их надо лишь конкретизировать. Поскольку, согласно (80.19а),

$$\varepsilon' = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \right), \quad \operatorname{tg} \Delta = \frac{\nu}{\omega \left(\frac{\omega^2 + \nu^2}{\omega_p^2} - 1 \right)}, \quad (81.6)$$

где $\omega_p^2 = e^2 N' / \varepsilon_0 m$ — плазменная частота (80.15б), то формулы (33.15), выражающие вещественную и мнимую части комплексного волнового числа, примут вид

$$k' = k_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \right) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2 \left(\frac{\omega^2 + \nu^2}{\omega_p^2} - 1 \right)^2}} \right]}, \quad (81.7)$$

$$k'' = k_0 \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu^2} \right) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{\omega^2 \left(\frac{\omega^2 + \nu^2}{\omega_p^2} - 1 \right)^2}} \right]}$$

($k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$). Если $\operatorname{tg} \Delta \ll 1$, т. е. ионизированный газ может

рассматриваться как несовершенный диэлектрик, то удобны приближенные формулы (33.16а), согласно которым с учетом (81.6)

$$k' \approx k_0, \quad k'' \approx k_0 \frac{\operatorname{tg} \Delta}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{2} \frac{v \omega_p^2}{\omega^2 + v^2 - \omega_p^2}. \quad (81.8)$$

Наибольший путь в ионосфере проходят короткие волны (§ 42, п. 3), причем на всем его протяжении, за исключением небольшой области вблизи места поворота луча, $\omega^2 \gg \omega_p^2$; кроме того, в этом диапазоне $\omega^2 \gg v^2$. Из (81.8) при этом получаем

$$k'' \approx \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{2} v \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^2. \quad (81.9)$$

Коэффициент затухания растет линейно с увеличением частоты столкновений v и обратно пропорционален квадрату частоты ω .

Пусть теперь $\operatorname{tg} \Delta \gg 1$ (среда является проводником). Тогда в соответствии с (33.17а) и (81.6)

$$k' \approx k'' \approx k_0 \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{2}} \sqrt{\frac{\omega v \omega_p^2}{\omega^2 + v^2 - \omega_p^2}}. \quad (81.10)$$

Этот результат справедлив при весьма низких частотах; учитывая, что в этом случае $\omega^2 \ll v^2$ и $\omega^2 \gg \omega_p^2$, имеем

$$k' \approx k'' \approx \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 / 2} \omega_p \sqrt{\omega / v}, \quad (81.11)$$

т. е. коэффициент затухания с частотой ω растет, как $\sqrt{\omega}$, а при увеличении частоты столкновений v уменьшается, как $1/\sqrt{v}$.

Возьмем, наконец, простейший случай, когда можно пренебречь столкновениями (их частота весьма мала). Ввиду (80.15б) при этом

$$k = k_0 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = k_0 \sqrt{\left(1 - \frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}. \quad (81.12)$$

Интересно, что зависимость волнового числа от частоты имеет здесь совершенно такой же характер, как и в случае быстрых E - и H -волн в направляющей системе (§ 62, п. 3): ср. формулы (81.12) и (62.18). При $\omega < \omega_p$ электромагнитный процесс утрачивает характер бегущей волны, поле затухает по закону (ср. (62.22))

$$e^{-ikz} = e^{-k''z}, \quad k'' = k_0 \sqrt{\left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2 - 1} \geq 0 \quad (81.13)$$

при $f \leq f_{\text{кр}}$ ($f_{\text{кр}}$ определяется формулой (81.2)). Совершенно такой же, как и для быстрых волн без поглощения, оказывается групповая скорость рассматриваемой волны:

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = v_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_{\text{кр}}}{f}\right)^2}, \quad f \geq f_{\text{кр}} \quad (81.14)$$

(ср. (62.23)); здесь $v_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Поэтому также

$$v_\Phi v_{\text{гр}} = v_0^2. \quad (81.15)$$

Ионосфера — среда заметно диспергирующая, что, конечно, следует и из общего выражения k' (81.7).

В заключение отметим, что установленные выше в пп. 1, 2 относительно простые закономерности существенны при рассмотрении реальных радиолиний; позднее (§ 88) это будет учитываться. Однако мы не приняли еще во внимание некоторые важные особенности распространения ионосферных радиоволн. К их числу относится влияние магнитного поля Земли, вследствие которого плазма ионосферы в действительности обладает анизотропией особого вида — *гиротропией*. Этот последний вопрос будет обсужден ниже в § 84, п. 1.

II. АНИЗОТРОПНЫЕ СРЕДЫ

Понятие *анизотропии* было введено в § 5, п. 4, однако в последующем рассматривались изотропные среды и лишь иногда указывалось на ограничения при распространении тех или иных общих принципов на среды анизотропные.

Анизотропия проявляется при упорядоченности строения, хотя упорядоченность не обязательно ведет к анизотропии. Естественными упорядоченными структурами являются кристаллы. В технике нередко искусственно получают макроскопические структуры, сравнимые с кристаллами; таковы *искусственные диэлектрики*, широко применяемые в антенной технике.

В ряде случаев упорядоченность навязывается внешними факторами, вызывающими определенную ориентацию элементарных процессов в веществе. При наложении постоянного магнитного поля плазма становится анизотропным диэлектриком по отношению к полю переменному, что нужно принимать во внимание при изучении ионосферных волн. Аналогично ведут себя магнетики, из которых особого упоминания заслуживают *ферриты*, нашедшие весьма значительную область применения в радиотехнике СВЧ, благодаря своей «прозрачности» (в отличие от ферромагнитных металлов).

В постоянном магнитном поле феррит становится анизотропным магнетиком по отношению к переменному полю. Вид анизотропии, свойственный указанным средам, называется *гиротропией*. Гиротропные среды не подчинены принципу взаимности, и это обстоятельство используется для селекции волновых процессов по направлению.

Для техники весьма важна также возможность управления волновым процессом путем «подмагничивания» феррита. В настоящее время многообразие волноводных устройств с применением намагниченных ферритов весьма велико.

§ 82. Природа и проявления анизотропии

1. Кристаллы и искусственные диэлектрики. В § 77 были рассмотрены системы, строение которых в каком-то прямолинейном направлении повторяется; они были названы периодическими. Нетрудно представить себе системы с трехмерной периодичностью. Таково, вообще говоря, строение кристаллов. Мы не можем подробно останавливаться на характере связей ионов или атомов в кристаллах, а также свойствах их симметрии; это относится к предмету физики твердого тела и кристаллографии (см. например, [Д. 4]). Кристаллическая структура характеризуется при помощи так называемой «пространственной решетки» в виде упорядоченной системы точек. Возможны, например, точки, следующие периодически вдоль трех ортогональных направлений (рис. 82.1); «элементарной ячейкой» решетки при этом является параллелепипед.

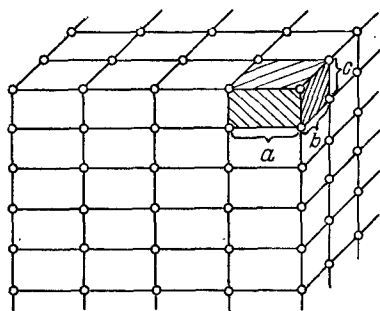


Рис. 82.1.

Ограничимся этим типом пространственной решетки и, отвлекаясь от действительного строения кристаллического вещества, предположим, что в каждом узле расположена поляризуемая частица (скажем, молекула). Выделив макроскопически малый объем ΔV ,

предположим, что в каждом узле расположена поляризуемая частица (скажем, молекула). Выделив макроскопически малый объем ΔV ,

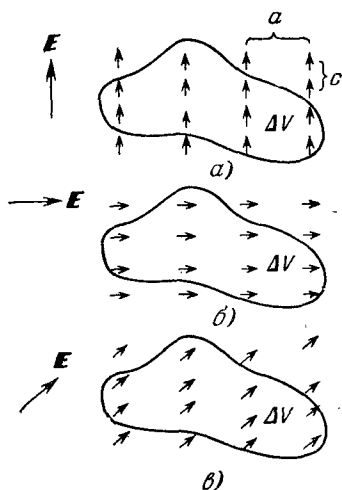


Рис. 82.2.

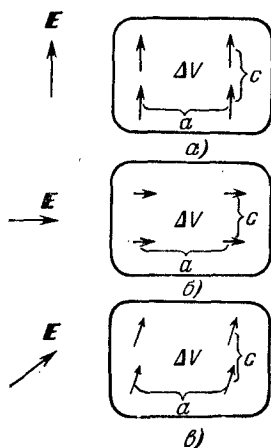


Рис. 82.3.

рассмотрим несколько случаев приложения внешнего поля (рис. 82.2, а, б, в). В каждом из них частицы приобретают элект-

рический момент в направлении вектора \mathbf{E} , и если допустить, что среднее поле в любой точке ΔV зависит только от внешних факторов (источников) и средней плотности частиц, то при всех направлениях поля (рис. 82.2, *a*, *б*, *в*) объем ΔV приобретает один и тот же по абсолютному значению момент $\mathbf{p}_{\Delta V}$, который каждый раз параллелен \mathbf{E} . Вещество проявляет себя как *изотропное* (ср. § 18, п. 2). В действительности поляризация частиц зависит от их взаимодействия, которое различно при разных ориентациях внешнего поля по отношению к структуре. Момент $\mathbf{p}_{\Delta V}$ в случаях, показанных на рис. 82.3, *a* и рис. 82.3, *б*, параллелен \mathbf{E} , но имеет разные абсолютные значения; поэтому в третьем случае (в рис. 82.3) векторы \mathbf{E} и $\mathbf{p}_{\Delta V}$ уже не параллельны. Это *анизотропия*, обусловленная видом решетки. Она отсутствует, если решетка является кубической ($a=b=c$ на рис. 82.1). Однако анизотропия вызывается и собственными особенностями частиц. Представим себе, что в узлах решетки находятся жестко ориентированные «не взаимодействующие» диполи; величина $\mathbf{p}_{\Delta V}$ будет при этом определяться только соосной составляющей вектора \mathbf{E} , изменяясь с его направлением.

Несмотря на некоторую искусственность, приведенные соображения поясняют природу анизотропии диэлектрических свойств кристаллов как упорядоченных структур. При должном выборе координатных осей x , y , z тензор диэлектрической проницаемости (§ 5, п. 4) имеет диагональный вид

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}. \quad (82.1)$$

Если структура имеет одно выделенное направление (с ним совмещают ось z), то в (82.1) $\epsilon_x = \epsilon_y \neq \epsilon_z$, и кристалл называют *одноосным*. При решетке рис. 82.1 одноосность соответствует, например, случаю, когда $a=b \neq c$ ($c \parallel z$) или $a=b=c$, но частицы сами обладают выделенной осью симметрии.

Заметим теперь, что можно взять упорядоченную систему шаров, эллипсоидов, дисков или тел другой формы (в частности, металлических) и рассматривать в ней пространственно усредненные поля. Таким образом, если речь пойдет о свободном волновом процессе в этой периодической системе, то предметом изучения будет только нулевая пространственная гармоника, которой соответствует член при $n=0$ в (77.5). При таком подходе данная периодическая система вполне аналогична кристаллической структуре. Можно утверждать, например, что кубическая решетка шаров (если они сами из изотропного материала) ведет себя как изотропная среда (рис. 82.4, *a*), а при элементарной ячейке в виде параллелепипеда (рис. 82.4, *б*) уже будет наблюдаться анизотропия; но она должна быть пренебрежимо малой при достаточно больших промежуточных расстояниях. Решетка дисков (рис. 82.4, *в*) или эллипсоидов (рис. 82.4, *г*) анизотропна уже в силу асимметрии отдельных элементов; кубическая решетка этого рода подобна одноосному

кристаллу. Следует, однако, иметь в виду, что для переменного электромагнитного поля не только диэлектрическая, но и магнитная проницаемость такого *искусственного диэлектрика* есть тензор. Это очевидно, если принять во внимание, что вектор \mathbf{H} возбуждаемого в системе («дифрагированного») поля под влиянием внешнего поля зависит от ориентации последнего.

Искусственные диэлектрики применяются в антенной технике для изготовления линз. С некоторой точки зрения (по отношению к усредненному полю) в качестве искусственного диэлектрика можно рассматривать любую периодическую структуру, о чем упоминалось в § 77, п. 2.

Задачу определения эквивалентных параметров искусственного диэлектрика относительно легко решить в квазистатическом приближении, пренебрегая также взаимодействием отдельных элементов, т. е. полагая, что каждый из них реагирует на поле, как уединенное тело в электростатике (магнитостатике). Учитывая, например, что металлический шар в однородном электростатическом поле с напряженностью \mathbf{E} подобен диполю с моментом $\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \mathbf{E}$ (20.33),

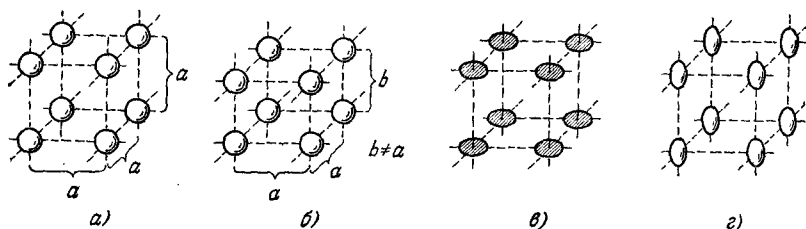


Рис. 82.4.

искусственному диэлектрику, содержащему в единице объема N' шаров, можно приписать поляризованность $\mathbf{P} = 4\pi N' \epsilon_0 R^3 \mathbf{E}$ и соответственно диэлектрическую проницаемость

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + 4\pi N' R^3). \quad (82.2)$$

Разумеется, эта формула сколько-нибудь достоверна лишь при $R \ll \lambda$ и очень больших расстояниях между шарами.

В заключение подчеркнем, что физические факторы, обуславливающие анизотропию естественных кристаллов, разнообразны. Ряд кристаллов обладает магнитной анизотропией.

2. Намагниченная плазма. Важный пример среды, проявляющей анизотропию под влиянием внешнего фактора ориентации элементарных процессов, дает плазма в постоянном магнитном поле. Возвращаясь к уравнению движения (80.16), введем в дополнение к $q\mathbf{E}$ действующую в этом случае на частицу лоренцеву силу $q[\mathbf{v}, \mathbf{H}_0] = q\mu_0 [d\mathbf{r}/dt, \mathbf{H}_0]$, где \mathbf{H}_0 — напряженность постоянного магнитного поля. Уравнение принимает вид

$$\frac{q}{m} \mathbf{E} + \frac{q}{m} \mu_0 \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{H}_0 \right] = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{v} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (82.3)$$

или в комплексных амплитудах:

$$\omega(\omega - i\nu) \dot{\mathbf{r}}_m + i\omega \frac{q}{m} \mu_0 [\dot{\mathbf{r}}_m, \mathbf{H}_0] = -\frac{q}{m} \dot{\mathbf{E}}_m. \quad (82.3a)$$

Поляризованность среды \mathbf{P} определим, как это делалось в § 80, п. 2 при получении формулы (80.14), учитывая только электроны; тогда $\dot{\mathbf{P}}_m = N'q\dot{\mathbf{r}}_m$ и $q = e < 0$. Направим ось z вдоль вектора \mathbf{H}_0 : $\mathbf{H}_0 = z_0 \mathbf{H}_0$, а также будем использовать обозначения $\Omega = \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0$ (79.7a) и $\omega_p^2 = e^2 N' / \epsilon_0 m$ (80.15б). При этом из (82.3a) получаем

$$\omega(\omega - i\nu) \dot{\mathbf{P}}_m - i\omega\Omega [\dot{\mathbf{P}}_m, \mathbf{z}_0] = -\epsilon_0 \omega_p^2 \dot{\mathbf{E}}_m, \quad (82.4)$$

или в координатной форме:

$$\begin{aligned} \omega(\omega - i\nu) \dot{P}_{mx} - i\omega\Omega \dot{P}_{my} &= -\epsilon_0 \omega_p^2 \dot{E}_{mx}, \\ i\omega\Omega \dot{P}_{mx} + \omega(\omega - i\nu) \dot{P}_{my} &= -\epsilon_0 \omega_p^2 \dot{E}_{my}, \\ \omega(\omega - i\nu) \dot{P}_{mz} &= -\epsilon_0 \omega_p^2 \dot{E}_{mz}. \end{aligned} \quad (82.4a)$$

Решая эту систему, выражаем компоненты вектора $\dot{\mathbf{P}}_m$:

$$\begin{aligned} \dot{P}_{mx} &= -\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]} [(\omega - i\nu) \dot{E}_{mx} + i\Omega \dot{E}_{my}], \\ \dot{P}_{my} &= -\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]} [-i\Omega \dot{E}_{mx} + (\omega - i\nu) \dot{E}_{my}], \\ \dot{P}_{mz} &= -\frac{\epsilon_0 \omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)} \dot{E}_{mz}, \end{aligned} \quad (82.5)$$

что следует рассматривать как развернутую форму соотношения $\dot{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\chi}^{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_m$ (§ 5, пп. 2 и 4): среда анизотропна. Не выписывая компонент тензора электрической восприимчивости намагниченной плазмы $\overleftrightarrow{\chi}^{\epsilon}$, перейдем сразу к тензору диэлектрической проницаемости $\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0 (I + \overleftrightarrow{\chi}^{\epsilon})$ (5.15). Он имеет вид

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon} & -i\dot{\beta} & 0 \\ i\dot{\beta} & \dot{\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix}, \quad (82.6)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \epsilon_0 \left\{ 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega - i\nu)}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]} \right\}, & \dot{\beta} &= \epsilon_0 \frac{\omega_p^2 \Omega}{\omega [(\omega - i\nu)^2 - \Omega^2]}, \\ \dot{\epsilon}_z &= \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - i\nu)} \right], & \omega_p^2 &= \frac{e^2 N'}{\epsilon_0 m}, & \Omega &= \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0. \end{aligned} \quad (82.7)$$

В результате того, что диэлектрическая проницаемость среды оказывается характерным кососимметрическим тензором вида (82.6), последняя обладает рядом специфических свойств, которые будут рассмотрены в § 83; она называется *гиротропной*.

Постоянное магнитное поле, ориентированное по оси z , создает в плазме выделенное направление; при этом вдоль z сохраняются прежние свойства: компонента тензора диэлектрической проницаемости ϵ_z (82.7) не отличается от ϵ (80.19) при отсутствии магнитного поля. Параметр Ω есть не что иное, как круговая частота вращения электронов в постоянном магнитном поле (§ 79, п.2), совершающегося в данном случае в плоскости xOy ; ее называют *гироскопической частотой* электронов. Электромагнитный процесс в намагниченной плазме имеет резонансный характер: приближение ω к Ω вызывает *гиромангнитный резонанс*. Взяв идеализированный случай отсутствия поглощения ($\nu=0$), обнаруживаем, что при $\omega \rightarrow \Omega$ компоненты тензора диэлектрической проницаемости в первых двух строчках (82.6) неограниченно возрастают по абсолютной величине: $|\hat{\epsilon}| \rightarrow \infty$ и $|\hat{\beta}| \rightarrow \infty$. Заметим, что при $\nu=0$ тензор *эрмитов* (Приложение 9): $\hat{\epsilon}_{xy} = \hat{\epsilon}_{yx}^*$ (согласно (82.6) $\hat{\epsilon}_{xy} = -i\hat{\beta}$ и $\hat{\epsilon}_{yx} = i\hat{\beta}$).

Происхождение гиротропии намагниченной плазмы имеет очень простое объяснение: под влиянием постоянного магнитного поля электроны «закручиваются» в перпендикулярной ему плоскости, если только в ней лежит компонента вектора скорости. Пусть, например, вектор \mathbf{E} направлен вдоль оси x и, следовательно, имеется компонента v_x ; лоренцева сила $q[\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]$ вызывает при этом движение в направлении оси y , и появляются соответствующие компоненты поляризованности \mathbf{P} и индукции \mathbf{D} . Кососимметричность тензора $\hat{\epsilon}$ обусловлена направлением вращательного движения электронов. Гиротропия не проявляется, если \mathbf{E} и соответственно \mathbf{v} направлены параллельно \mathbf{H}_0 по (оси z), так как в этом случае не действует лоренцева сила.

В заключение подчеркнем, что ввиду пренебрежения ионами при выводе тензора диэлектрической проницаемости формулы (82.7) в той или иной мере утрачивают достоверность вблизи соответствующих гироскопических частот $\Omega' = \mu_0 \frac{|e|}{m'} H_0$, где m' — масса иона. Так как $m' \gg m$, то $\Omega' \ll \Omega$.

3. Намагниченный феррит. Магнетикам свойственна гиротропия, вызываемая прецессией вектора \mathbf{M} (§ 79, п.4). Она в сильной степени проявляется в случае *ферритов*, которые, обладая ферромагнитными свойствами, по характеру электрических потерь ($\text{tg} \Delta \ll 1$) являются диэлектриками на СВЧ, т. е. «прозрачны» для электромагнитных волн.

Взяв уравнение движения намагниченности (79.24), отметим сначала, что в случае постоянного поля ($\mathbf{M} = \text{const}$) $[\mathbf{M}, \mathbf{H}] = 0$, т. е. векторы \mathbf{M} и \mathbf{H} параллельны — среда изотропна. Пусть

теперь $M = M_0 + M(t)$ и $H = H_0 + H(t)$, где нулевыми индексами отмечены постоянные составляющие. Внося эти функции в (79.24), получаем

$$\frac{dM(t)}{dt} = \gamma \{ [M_0, H(t)] + [M(t), H_0] + [M_0, H_0] + [M(t), H(t)] \}. \quad (82.8)$$

Если, как это часто бывает, $M(t) \ll M_0$ и $H(t) \ll H_0$, то квадратичным членом $[M(t), H(t)]$ можно пренебречь, и уравнение (82.8) оказывается линеаризованным относительно переменной составляющей. Рассматривая гармонические колебания, при этом правомерно применить метод комплексных амплитуд, сделав замену $M(t) \rightarrow \dot{M}_m e^{i\omega t}$ и $H(t) \rightarrow \dot{H}_m e^{i\omega t}$. Тогда из (82.8) следует:

$$[M_0, H_0] = 0, \quad i\omega \dot{M}_m = \gamma \{ [M_0, \dot{H}_m] + [\dot{M}_m, H_0] \}. \quad (82.9)$$

Направим ось z вдоль постоянного поля ($M_0 = z_0 M_0$, $H_0 = z_0 H_0$). Представляя второе равенство (82.9) в координатной форме и перенося компоненты вектора \dot{M}_m влево, имеем

$$\begin{aligned} i\omega \dot{M}_{mx} - \gamma H_0 \dot{M}_{my} &= -\gamma M_0 \dot{H}_{my}, \\ \gamma H_0 \dot{M}_{mx} + i\omega \dot{M}_{my} &= \gamma M_0 \dot{H}_{mx}, \\ i\omega \dot{M}_{mz} &= 0. \end{aligned} \quad (82.9a)$$

Решая полученную систему уравнений относительно \dot{M}_{mx} , \dot{M}_{my} и \dot{M}_{mz} , находим

$$\begin{aligned} \dot{M}_{mx} &= \frac{|\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2} \left(-\Omega \dot{H}_{mx} + i \frac{\gamma}{|\gamma|} \omega \dot{H}_{my} \right), \\ \dot{M}_{my} &= \frac{|\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2} \left(-i \frac{\gamma}{|\gamma|} \omega \dot{H}_{mx} - \Omega \dot{H}_{my} \right), \\ \dot{M}_{mz} &= 0, \end{aligned} \quad (82.10)$$

где в соответствии с (79.23) обозначено: $\Omega = |\gamma| H_0$. Это не что иное, как подробная запись соотношения $\dot{M}_m = \mu_0 \dot{\chi}^m H_m$ (§ 5, пп.2 и 4), свидетельствующая о магнитной анизотропии среды. Тензор магнитной проницаемости $\dot{\mu} = \mu_0 (I + \dot{\chi}^m)$, как следует отсюда, имеет вид

$$\dot{\mu} = \begin{pmatrix} \dot{\mu} & -i\dot{\alpha} & 0 \\ i\dot{\alpha} & \dot{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mu}_z \end{pmatrix}, \quad (82.11)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= \mu_0 - \frac{\Omega |\gamma| M_0}{\omega^2 - \Omega^2}, \\ \dot{\alpha} &= -\frac{\omega \gamma M_0}{\omega^2 - \Omega^2}, \\ \dot{\mu}_z &= \mu_0, \quad \Omega = |\gamma| H_0. \end{aligned} \quad (82.12)$$

Тензор $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ (82.11) по структуре таков же, как и тензор $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ (82.6): среда гиротропна. Происхождение гиротропии объясняется тем, что постоянное поле создает в магнетике (феррите) выделенное направление, около которого происходит прецессия вектора \mathbf{M} . Частота $\Omega = |\gamma| H_0$ есть *собственная частота прецессии*; поскольку ферромагнетизм обусловлен спиновыми магнитными моментами электронов, значение *гиромагнитного отношения* γ для ферритов оказывается близким к указанной в § 79, п.4 величине — $2,21 \cdot 10^5 (a/m)^{-1} \text{сек}^{-1}$. Приближение круговой частоты электромагнитного процесса ω к Ω вызывает *ферромагнитный резонанс*; при $\omega \rightarrow \Omega$ абсолютные значения компонент тензора $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ в первых двух строчках, согласно (82.12), неограниченно возрастают:

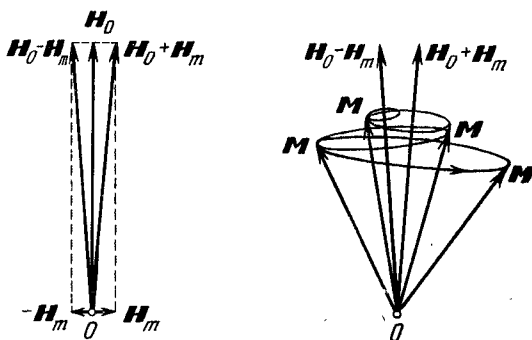


Рис. 82.5.

$|\overset{\leftrightarrow}{\mu}| \rightarrow \infty$ и $|\overset{\leftrightarrow}{\alpha}| \rightarrow \infty$. Тензор $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ *эрмитов* (Приложение 9). Компонента $\overset{\leftrightarrow}{\mu}_z$ не отличается от магнитной постоянной («проницаемости вакуума») μ_0 . Вместе с изменением направления постоянного намагничивания (т. е. изменением знаков H_0 и M_0) меняет знак $\overset{\leftrightarrow}{\alpha}$, а $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ остается неизменным.

В упрощенном представлении механизм ферромагнитного резонанса состоит в том, что при совпадении ω и Ω прецессионное движение вектора \mathbf{M} совершает один цикл синхронно с «качанием» результирующего вектора \mathbf{H} из положения $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_m$ в положение $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_m$ (рис. 82.5). Поскольку \mathbf{H} задает мгновенную ось прецессии, ее радиус возрастает (в полученном приближении неограниченно, что противоречит (79.22)).

Выражения (82.12) являются идеализированными не только в силу использованной линеаризации задачи (в противном случае вообще нельзя было бы охарактеризовать среду при помощи тензора $\overset{\leftrightarrow}{\mu}$ в рамках метода комплексных амплитуд), но и, в част-

1) На практике в формулах (82.12) величины ω и Ω обычно заменяют частотами f и F , измеряемыми в Мгц. Соответственно этому имеем соотношение: $F = \gamma' H_0$, где $\gamma' = 0,035 \text{ Мгц } (a/m)^{-1}$.

ности, потому, что уравнение движения (79.24) не учитывает поглощения энергии. Можно получить выражения компонент тензора магнитной проницаемости с учетом потерь энергии, исходя, например, из уравнения Ландау — Лифшица (79.25); соответствующие формулы читатель найдет в специальной литературе [Д.5 — 7].

Компоненты тензора $\hat{\mu}$ поглощающей среды — это комплексные величины: $\hat{\mu} = \mu' - i\mu''$, $\hat{\alpha} = \alpha' - i\alpha''$, $\hat{\mu}_z = \mu'_z - i\mu''_z$. Их можно определять посредством специальных измерений. На рис. 82.6 качественно представлены зависимости этих величин от H_0 . Тензор $\hat{\mu}$ поглощающей среды — не эрмитов. Кривые на рис. 82.6 характеризуют реальный ферромагнитный резонанс.

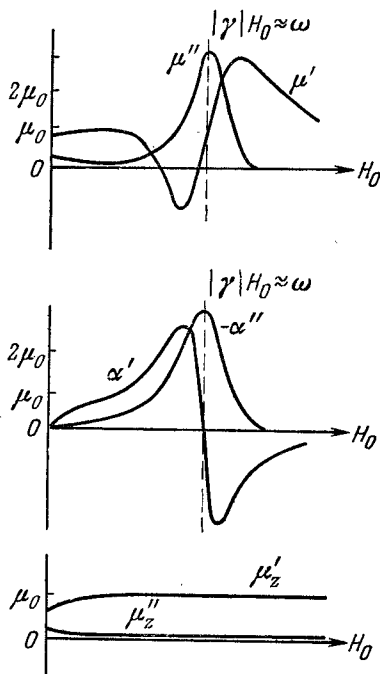


Рис. 82.6.

§ 83. Поля и волны в гиротропных средах

1. Свободные поля в гиротропных средах. Чтобы понять наиболее существенные электродинамические особенности гиротропных сред, полезно изучить характерные типы свободных полей в этих средах. Начнем с записи основных уравнений электродинамики.

Возьмем сначала безграничный однородный магнетик, который в постоянном поле с напряженностью $\mathbf{H}_0 = z_0 H_0$ приобретает для поля переменного гиротропные свойства и характеризуется тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ вида (82.11). Однородные уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд (уравнения (29.11) при $\hat{\mathbf{j}}_m^{\text{ст}} = 0$) принимают форму

$$\text{rot} \hat{\mathbf{H}}_m = i\omega \hat{\mathbf{E}}_m, \quad \text{rot} \hat{\mathbf{E}}_m = -i\omega \hat{\hat{\mu}} \hat{\mathbf{H}}_m \quad (83.1)$$

или в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{H}_{my}}{\partial z} &= i\omega \hat{E}_{mx}, \\ \frac{\partial \hat{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{H}_{mz}}{\partial x} &= i\omega \hat{E}_{my}, \\ \frac{\partial \hat{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{H}_{mx}}{\partial y} &= i\omega \hat{E}_{mz} \end{aligned} \quad (83.1a)$$

И

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} &= -i\omega (\dot{\mu} \dot{H}_{mx} - i\dot{\alpha} \dot{H}_{my}), \\ \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} &= -i\omega (i\dot{\alpha} \dot{H}_{mx} + \dot{\mu} \dot{H}_{my}), \\ \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} &= -i\omega \dot{\mu}_z \dot{H}_{mz}.\end{aligned}\quad (83.16)$$

В случае подобным же образом намагниченной плазмы ($H_0 = z_0 H_0$) вместо (83.1) имеем

$$\text{rot } \dot{H}_m = i\omega \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \dot{E}_m, \quad \text{rot } \dot{E}_m = -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_m, \quad (83.2)$$

где $\overset{\leftrightarrow}{\epsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости (82.6). В декартовых координатах уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial z} &= i\omega (\dot{\epsilon} \dot{E}_{mx} - i\dot{\beta} \dot{E}_{my}), \\ \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_{mz}}{\partial x} &= i\omega (i\dot{\beta} \dot{E}_{mx} + \dot{\epsilon} \dot{E}_{my}), \\ \frac{\partial \dot{H}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_{mx}}{\partial y} &= i\omega \dot{\epsilon}_z \dot{E}_{mz}\end{aligned}\quad (83.2a)$$

И

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial z} &= -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{mx}, \\ \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_{mz}}{\partial x} &= -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{my}, \\ \frac{\partial \dot{E}_{my}}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_{mx}}{\partial y} &= -i\omega \dot{\mu} \dot{H}_{mz}.\end{aligned}\quad (83.2б)$$

Ниже будут рассмотрены некоторые решения записанных уравнений. Заметим, что уравнения (83.1) при замене $\dot{\epsilon} \rightarrow -\dot{\mu}$ и $\dot{\mu} \rightarrow -\dot{\epsilon}$, $\dot{E}_m \rightleftharpoons \dot{H}_m$ переходят в (83.2) (и соответственно (83.1a), (83.1б) в (83.2a), (83.2б)), а уравнения (83.2) — в (83.1) при обратной замене. В этом для гиротропных сред проявляется принцип двойственности (ср. § 46, п. 3). Следовательно, если найдено какое-то свободное поле в гиротропном магнетике, описываемое решением \dot{E}_m^M , \dot{H}_m^M уравнений (83.1), то существует аналогичное поле в гиротропном диэлектрике, которому отвечает решение \dot{E}_m^D , \dot{H}_m^D уравнений (83.2), причем одно решение переходит в другое ($\dot{E}_m^M \rightleftharpoons \dot{H}_m^D$, $\dot{H}_m^M \rightleftharpoons \dot{E}_m^D$) при указанной замене проницаемостей ($\dot{\epsilon} \rightleftharpoons -\dot{\mu}$, $\dot{\mu} \rightleftharpoons \dot{\epsilon}$).

2. **Продольные волны. Эффект Фарадея.** Исследуем плоские однородные волны в безграничной однородной гиротропной среде, распространяющиеся в направлении постоянного намагничивания z ; будем называть их кратко *продольными волнами*. Волновой процесс является одномерным (ср. § 32): изменения в плоскости xOy отсутствуют, и в уравнениях (83.1a), (83.1б) или (83.2a), (83.2б) мы должны положить равными нулю производные по x и y . Из последних строчек указанных систем уравнений следует, что электромагнитное поле не имеет продольных компонент ($\dot{E}_{mz} = 0$, $\dot{H}_{mz} = 0$), т. е., как и в изотропной среде, однородная волна относится к классу ТЕМ. Взяв продольную зависимость комплексных амплитуд в виде $e^{-\Gamma \dot{t}z}$, где $\dot{\Gamma}$ — пока неизвестная постоянная распространения, будем, таким образом, иметь

$$\begin{aligned}\dot{E}_m &= (x_0 \dot{\mathcal{E}}_x + y_0 \dot{\mathcal{E}}_y) e^{-\Gamma \dot{t}z}, \\ \dot{H}_m &= (x_0 \dot{\mathcal{H}}_x + y_0 \dot{\mathcal{H}}_y) e^{-\Gamma \dot{t}z}.\end{aligned}\quad (83.3)$$

Возьмем случай гиротропного магнетика. Внося представления (83.3) в (83.1a, б), получаем

$$\begin{aligned}\pm \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_y &= \omega \dot{\epsilon} \dot{\mathcal{E}}_x, & \pm \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{E}}_y &= -\omega (\dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_x - i \dot{\alpha} \dot{\mathcal{H}}_y), \\ \pm \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_x &= -i \dot{\omega} \dot{\epsilon} \dot{\mathcal{E}}_y, & \pm \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{E}}_x &= \omega (i \dot{\alpha} \dot{\mathcal{H}}_x + \dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_y),\end{aligned}\quad (83.4)$$

откуда после исключения $\dot{\mathcal{E}}_x$ и $\dot{\mathcal{E}}_y$ вытекает:

$$\begin{aligned}(\dot{\Gamma}^2 - \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu}) \dot{\mathcal{H}}_y &= i \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\alpha} \dot{\mathcal{H}}_x, \\ (\dot{\Gamma}^2 - \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu}) \dot{\mathcal{H}}_x &= -i \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\alpha} \dot{\mathcal{H}}_y.\end{aligned}\quad (83.5)$$

Перемножая левые и соответственно правые части в обеих строчках, находим следующее уравнение относительно $\dot{\Gamma}$:

$$(\dot{\Gamma}^2 - \omega^2 \dot{\epsilon} \dot{\mu})^2 = \omega^4 \dot{\epsilon}^2 \dot{\alpha}^2. \quad (83.6)$$

Из (83.6) следует, что

$$\dot{\Gamma}^2 = \omega^2 \dot{\epsilon} (\dot{\mu} \pm \dot{\alpha}), \quad (83.7)$$

и приходится заключить, что существует два рода продольных волн с постоянными распространения, которые мы обозначим

$$\dot{\Gamma}^+ = \omega \sqrt{\dot{\epsilon} (\dot{\mu} + \dot{\alpha})} \quad \text{и} \quad \dot{\Gamma}^- = \omega \sqrt{\dot{\epsilon} (\dot{\mu} - \dot{\alpha})}. \quad (83.8)$$

Сопоставляя (83.8) и (33.1), можно сказать, что гиротропная среда для каждой из таких волн ведет себя как изотропная с эквивалентной магнитной проницаемостью $\dot{\mu}^+ = \dot{\mu} + \dot{\alpha}$ или $\dot{\mu}^- = \dot{\mu} - \dot{\alpha}$. Остается выяснить строение электромагнитного поля в этих двух случаях. Внося (83.7) в (83.5), получаем следующее решение:

$$\dot{\mathcal{H}}_y = \pm i \dot{\mathcal{H}}_x, \quad (83.9)$$

показывающее, что компоненты H_x и H_y вектора \mathbf{H} равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на $\pm 90^\circ$. Продольные волны с постоянными распространения $\dot{\Gamma}^\pm$, оказывается, *поляризованы по кругу* (§ 34, п.3) в противоположных направлениях. На основании (83.3), (83.9) и первого столбца (83.4) находим выражения комплексных амплитуд их векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

волна $\frac{\text{правой}}{\text{левой}}$ круговой поляризации

$$\dot{E}_m^+ = \pm \dot{W}^+ \dot{A} (ix_0 - y_0) e^{\mp i\dot{\Gamma}^+ z}, \quad \dot{H}_m^+ = \dot{A} (x_0 + iy_0) e^{\mp i\dot{\Gamma}^+ z}, \quad (83.10a)$$

волна $\frac{\text{левой}}{\text{правой}}$ круговой поляризации

$$\dot{E}_m^- = \pm \dot{W}^- \dot{A} (-ix_0 - y_0) e^{\mp i\dot{\Gamma}^- z}, \quad \dot{H}_m^- = \dot{A} (x_0 - iy_0) e^{\mp i\dot{\Gamma}^- z}. \quad (83.10б)$$

Здесь \dot{A} — неопределенный коэффициент, а $\dot{W}^\pm = \sqrt{\frac{\mu^\pm}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu^\pm \alpha}{\varepsilon}}$ есть волновое сопротивление.

Отметим, что направление вращения поля левополяризованной волны совпадает с направлением прецессионного движения вектора \mathbf{M} гиротропной среды (§ 79, п.4, § 82, п.3), а при ферромагнитном резонансе совпадают и частоты вращения. Этому соответствует резкое возрастание величины $\mu'' - \alpha''$ (как видно из рис. 82.6, $\alpha'' < 0$). Напротив, правополяризованная волна поглощается слабо, так как величина $\mu'' + \alpha''$ весьма мала.

Перейдем к рассмотрению весьма важной особенности гиротропных сред, благодаря которой они и получили это название. Положим, что в среде одновременно существуют распространяющиеся вдоль оси z продольные волны правой и левой круговой поляризации с одинаковыми амплитудами; поглощением пренебрежем. В каждой точке пространства поляризация будет линейной (§ 34, п.3). Действительно, складывая поля в начале координат ($z = 0$), согласно (83.10а), (83.10б) получаем

$$\dot{H}_m(0) = \dot{H}_m^+(0) + \dot{H}_m^-(0) = x_0 2\dot{A}, \quad (83.11)$$

что соответствует «вертикально» поляризованной волне. Так как волны правой и левой круговой поляризации распространяются с разными скоростями

$$v^+ = 1/\sqrt{\varepsilon(\mu + \alpha)} \quad \text{и} \quad v^- = 1/\sqrt{\varepsilon(\mu - \alpha)},$$

то векторы $\dot{H}_m^+(l)$ и $\dot{H}_m^-(l)$ (на расстоянии от начала координат $z = l$ по движению волны) окажутся повернутыми на разные углы (рис. 83.1, а) и, складываясь, дадут волну линейной поляризации, плоскость которой также будет повернута относительно начального положения.

Найдем угол поворота плоскости поляризации ϑ . Вектор \mathbf{H} , комплексная амплитуда которого при $z=0$ выражается формулой (83.11), при $z=l$ будет иметь комплексную амплитуду

$$\dot{\mathbf{H}}_m(l) = \dot{\mathbf{H}}_m^+(l) + \dot{\mathbf{H}}_m^-(l) = \dot{A} [x_0(e^{-i\Gamma^+l} + e^{-i\Gamma^-l}) + iy_0(e^{-i\Gamma^+l} - e^{-i\Gamma^-l})],$$

или, после простых преобразований,

$$\dot{\mathbf{H}}_m(l) = 2\dot{A}e^{-i\frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2}l} \left(x_0 \cos \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l + y_0 \sin \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l \right), \quad (83.12)$$

т. е. (рис. 83.1, б) произошел поворот вектора \mathbf{H} , а следовательно, и плоскости поляризации на угол

$$\vartheta = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2}l \text{ [рад]}. \quad (83.13)$$

Мы видим, что в гиротропном магнетике вдоль направления постоянного магнитного поля может распространяться, условно говоря, линейно поляризованная волна, плоскость поляризации которой при этом вращается. Это называют *эффектом Фарадея*. Само слово «гиротропия» по происхождению связано с данным эффектом.

Величина

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{2} (\sqrt{\mu + \alpha} - \sqrt{\mu - \alpha}), \quad (83.14)$$

выражающая угол поворота плоскости поляризации на единицу длины пути, называется *постоянной Фарадея* гиротропного магнетика. Из (83.12) видно, что постоянная распространения волны при эффекте Фарадея есть

$$\Gamma_\Phi = \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon}}{2} (\sqrt{\mu + \alpha} + \sqrt{\mu - \alpha}). \quad (83.15)$$

Эффект Фарадея *необратим*. Если смотреть вдоль направления распространения волны, совпадающего с направлением постоянного поля \mathbf{H}_0 , то при $\alpha > 0$ плоскость поляризации будет вращаться по часовой стрелке ($R > 0$); при движении волны *против* \mathbf{H}_0 изменится знак α и R ; наблюдая уходящую волну, мы обнаружим вращение ее плоскости поляризации, совершающееся против часовой стрелки (рис. 83.2, а, б). Характер распространения волны зависит, таким образом, от направления; поле в гиротропной

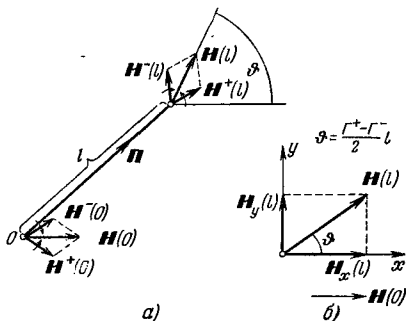


Рис. 83.1.

среде не подчиняется принципу взаимности (§ 48), о чем специально будет говориться ниже (п. 4).

Несколько сложнее выглядит эффект Фарадея при поглощении.

Нам остается распространить полученные выводы на гиротропный диэлектрик (намагниченную плазму), когда диэлектрическая проницаемость — тензор вида (82.6). Воспользовавшись принципом

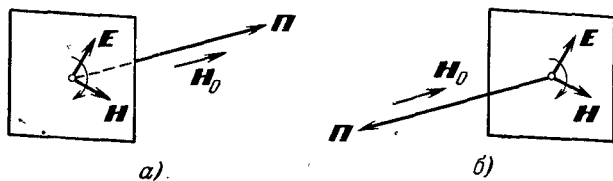


Рис. 83.2.

двойственности (п. 1), сразу выпишем аналоги имеющихся результатов¹⁾.

В среде могут распространяться продольные волны правой и левой круговой поляризации. При этом (ср. (83.10а), (83.10б))

$$\begin{aligned} \dot{E}_m^\pm &= \dot{A}(x_0 \pm iy_0) e^\mp i\dot{\Gamma}^\pm z, \\ \dot{H}_m^\pm &= \mp (\dot{W}^\pm)^{-1} \dot{A}(\pm ix_0 - y_0) e^\mp i\dot{\Gamma}^\pm z, \end{aligned} \quad (83.16)$$

где $(\dot{W}^\pm)^{-1} = \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}^\pm}{\dot{\mu}}} = \sqrt{\frac{\dot{\epsilon} \pm \dot{\beta}}{\dot{\mu}}}$ и

$$\dot{\Gamma}^\pm = \omega \sqrt{(\dot{\epsilon} \pm \dot{\beta}) \dot{\mu}} \quad (83.17)$$

(ср. (83.8)).

При эффекте Фарадея (без поглощения)

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\mu}}{2} (\sqrt{\epsilon + \beta} - \sqrt{\epsilon - \beta}) \quad (83.18)$$

и

$$\Gamma_\Phi = \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} = \frac{\omega \sqrt{\mu}}{2} (\sqrt{\epsilon + \beta} + \sqrt{\epsilon - \beta}) \quad (83.19)$$

(ср. (83.14) и (83.15)).

3. Поперечные волны. Эффект Коттон — Мутона. Рассмотрим теперь волны в гиротропной среде, распространяющиеся в плоскости, которая перпендикулярна направлению постоянного намагничивания (xOy). Все направления в ней равноправны, и мы ограничимся случаем, когда

$$\dot{E}_m = \dot{\mathcal{E}} e^\mp i\dot{\Gamma}^\pm x, \quad \dot{H}_m = \dot{\mathcal{H}} e^\mp i\dot{\Gamma}^\pm x, \quad (83.20)$$

т. е. выберем ось x ; волны однородны, так что по осям y и z

¹⁾ Поскольку $W = \omega\mu/\Gamma$, то, не изменив в процессе применения принципа двойственности знака Γ , мы должны изменить знак W .

напряженности поля не изменяются (в (83.20) $\dot{\mathcal{E}} = \text{const}$, $\dot{\mathcal{H}} = \text{const}$).
Уравнения (83.1а), (83.1б) принимают следующий вид:

$$0 = \dot{\mathcal{E}}_x, \quad \pm \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_z = \omega \dot{\mathcal{E}}_y, \quad \mp \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{H}}_y = \omega \dot{\mathcal{E}}_z \quad (83.21a)$$

и

$$0 = \dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_x - i \dot{\alpha} \dot{\mathcal{H}}_y, \quad \mp \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{E}}_z = \omega \left(i \dot{\alpha} \dot{\mathcal{H}}_x + \dot{\mu} \dot{\mathcal{H}}_y \right), \\ \pm \dot{\Gamma} \dot{\mathcal{E}}_y = \omega \dot{\mu}_z \dot{\mathcal{H}}_z. \quad (83.21б)$$

Записанные уравнения распадаются на две независимые системы, одну из которых образуют второе и последнее равенства (83.21а), (83.21б). Исключая из них $\dot{\mathcal{H}}_z$ и $\dot{\mathcal{E}}_y$, находим

$$\dot{\Gamma}^2 = \omega^2 \dot{\mu}_z. \quad (83.22)$$

Речь, как видно, идет о волне, характеризуемой комплексными амплитудами:

$$\dot{E}_m = y_0 \dot{A} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\parallel} x}, \quad \dot{H}_m = \pm z_0 \frac{\dot{A}}{\dot{W}_{\parallel}} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\parallel} x}, \quad (83.23)$$

где

$$\dot{\Gamma}_{\parallel} = \omega \sqrt{\dot{\mu}_z} \quad \text{и} \quad \dot{W}_{\parallel} = \sqrt{\dot{\mu}_z / \dot{\varepsilon}}. \quad (83.24)$$

Эта волна, магнитный вектор которой параллелен напряженности постоянного магнитного поля H_0 , имеет такой же характер, как обычная однородная ТЕМ-волна в изотропной среде (§§ 32, 33) и называется *обыкновенной*.

Третье, четвертое и пятое равенства (83.21а), (83.21б) образуют вторую самостоятельную систему уравнений; из них находим

$$\dot{\Gamma}^2 = \omega^2 \dot{\varepsilon} \frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}}. \quad (83.25)$$

Для соответствующей волны

$$\dot{E}_m = z_0 \dot{A} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\perp} x}, \quad \dot{H}_m = \mp \frac{\dot{A}}{\dot{W}_{\perp}} \left(y_0 + x_0 \frac{i \dot{\alpha}}{\dot{\mu}} \right) e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\perp} x}, \quad (83.26)$$

где

$$\dot{\Gamma}_{\perp} = \omega \sqrt{\dot{\varepsilon} \frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}}} \quad \text{и} \quad \dot{W}_{\perp} = \sqrt{\frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\varepsilon} \dot{\mu}}}. \quad (83.27)$$

Как видно, в данном случае электрический вектор волны параллелен H_0 , а магнитный имеет как поперечную (H_y), так и продольную (H_x) компоненты. Эта однородная H -волна называется *необыкновенной*; ее волновое число $\dot{\Gamma}_{\perp}$ зависит от квадрата недиагональной компоненты тензора магнитной проницаемости. Согласно (83.27) роль эквивалентной магнитной проницаемости играет в данном случае величина $\dot{\mu}_{\perp} = \frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}}$.

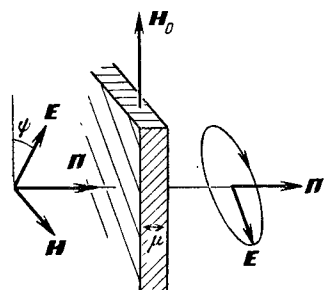
Пусть в гиротропный магнетик (скажем, в виде слоя) входит линейно поляризованная волна, распространяясь перпендикулярно

вектору H_0 , с которым вектор E составляет некоторый угол ψ (рис. 83.3). Не интересуясь отражением, отметим, что параллельная H_0 компонента $E \cos \psi$ возбуждает в гиротропной среде необыкновенную волну, а перпендикулярная H_0 компонента $E \sin \psi$ — обыкновенную. Распространяясь с разными скоростями

$$v_{\perp} = 1 / \sqrt{\epsilon \frac{\mu^2 - \alpha^2}{\mu}} \quad \text{и} \quad v_{\parallel} = 1 / \sqrt{\epsilon \mu_z}$$

(поглощением пренебрегаем), эти волны при выходе из гиротропной среды окажутся в разных фазах и в изотропной среде образуют волну эллиптической поляризации (в частности, круговой при равенстве амплитуд и фазовом сдвиге на 90°). Это явление известно как *эффект Коттон — Мутона*.

Рис. 83.3.



Перейдем к случаю гиротропного диэлектрика — намагниченной плазмы. По принципу двойственности, решениям (83.23) (83.24) и (83.26), (83.27) соответствуют следующие (см. сноску на стр. 538):

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m &= \mp z \dot{A} \dot{W}_{\parallel} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\parallel} x}, \\ \dot{H}_m &= y_0 \dot{A} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\parallel} x}, \end{aligned} \right\} \quad (83.28)$$

где

$$\dot{\Gamma}_{\parallel} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_z \dot{\mu}} \quad \text{и} \quad \dot{W}_{\parallel} = \sqrt{\dot{\mu} / \dot{\epsilon}_z} \quad (83.29)$$

— обыкновенная волна и

$$\dot{E}_m = \pm \dot{A} \dot{W}_{\perp} \left(y_0 + x_0 \frac{i \dot{\beta}}{\dot{\epsilon}} \right) e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\perp} z}, \quad \dot{H}_m = z_0 \dot{A} e^{\mp i \dot{\Gamma}_{\perp} z}, \quad (83.30)$$

где

$$\dot{\Gamma}_{\perp} = \omega \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}^2 - \dot{\beta}^2}{\dot{\epsilon}} \dot{\mu}} \quad \text{и} \quad \dot{W}_{\perp} = \sqrt{\frac{\dot{\epsilon} \dot{\mu}}{\dot{\epsilon}^2 - \dot{\beta}^2}} \quad (83.31)$$

— необыкновенная волна, для которой $\dot{\epsilon}_{\perp} = \frac{\dot{\epsilon}^2 - \dot{\beta}^2}{\dot{\epsilon}}$ играет роль эквивалентной диэлектрической проницаемости.

4. Некоторые общие свойства полей. Заключение. Возьмем произвольную анизотропную среду, свойства которой в какой-то ортогональной системе координат q_1, q_2, q_3 характеризуются тензорами

$$\vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \dot{\mu}_{11} & \dot{\mu}_{12} & \dot{\mu}_{13} \\ \dot{\mu}_{21} & \dot{\mu}_{22} & \dot{\mu}_{23} \\ \dot{\mu}_{31} & \dot{\mu}_{32} & \dot{\mu}_{33} \end{pmatrix}. \quad (83.32)$$

Внося $\overset{\cdot}{\epsilon}$ и $\overset{\cdot}{\mu}$ вместо $\dot{\epsilon}$ и $\dot{\mu}$ в уравнение (30.9) мы приходим к выводу, что средняя мощность поглощения в среде будет выражаться вместо (30.14) формулой

$$\bar{P}_n = \frac{\omega}{2} \text{Im} \int_V \left(\overset{\cdot}{\epsilon}^* \dot{\mathbf{E}}_m \dot{\mathbf{E}}_m - \overset{\cdot}{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^* \right) dv. \quad (83.33)$$

Легко убедиться, что эта величина равна нулю, т. е. среда является непоглощающей, если тензоры $\overset{\cdot}{\epsilon}$ и $\overset{\cdot}{\mu}$ эрмитовы (Приложение 9). Действительно, при этом, в частности,

$$\overset{\cdot}{\mu} \dot{\mathbf{H}}_m \dot{\mathbf{H}}_m^* = \overset{\cdot}{\mu}_{11} |\dot{H}_{m1}|^2 + \overset{\cdot}{\mu}_{22} |\dot{H}_{m2}|^2 + \overset{\cdot}{\mu}_{33} |\dot{H}_{m3}|^2 + \overset{\cdot}{\mu}_{12} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}^* + \\ + \overset{\cdot}{\mu}_{21} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1}^* + \overset{\cdot}{\mu}_{23} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m3}^* + \overset{\cdot}{\mu}_{32} \dot{H}_{m3} \dot{H}_{m2}^* + \overset{\cdot}{\mu}_{31} \dot{H}_{m3} \dot{H}_{m1}^* + \overset{\cdot}{\mu}_{13} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m3}^*$$

— величина вещественная, так как вследствие соотношения $\overset{\cdot}{\mu}_{kn} = \overset{\cdot}{\mu}_{nk}^*$ $\overset{\cdot}{\mu}_{11}$, $\overset{\cdot}{\mu}_{22}$ и $\overset{\cdot}{\mu}_{33}$ вещественны, а также $\overset{\cdot}{\mu}_{12} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}^* + \overset{\cdot}{\mu}_{21} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1}^* = 2\text{Re}(\overset{\cdot}{\mu}_{12} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2}^*)$ и т. д.

Частные проявления отмеченной закономерности были указаны в § 82, пп. 2, 3.

Вернемся далее к принципу взаимности (§ 48). Если среда анизотропна, то в (48.3), (48.4) вместо ϵ и μ следует ввести $\overset{\cdot}{\epsilon}$ и $\overset{\cdot}{\mu}$ (83.32). Тогда выражающее принцип взаимности равенство (48.5) будет получено только, если

$$\overset{\cdot}{\mu} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1} - \overset{\cdot}{\mu} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2} = 0 \quad \text{и} \quad \overset{\cdot}{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_{m2} \dot{\mathbf{E}}_{m1} - \overset{\cdot}{\epsilon} \dot{\mathbf{E}}_{m1} \dot{\mathbf{E}}_{m2} = 0. \quad (83.34)$$

Последние равенства выполняются при симметрических $\overset{\cdot}{\epsilon}$ и $\overset{\cdot}{\mu}$ (Приложение 9), т. е. при $\overset{\cdot}{\epsilon}_{kn} = \overset{\cdot}{\epsilon}_{nk}$ и $\overset{\cdot}{\mu}_{kn} = \overset{\cdot}{\mu}_{nk}$.

Для гиротропного магнетика ($\overset{\cdot}{\mu}_{11} = \overset{\cdot}{\mu}_{22} = \overset{\cdot}{\mu}$, $\overset{\cdot}{\mu}_{12} = -\overset{\cdot}{\mu}_{21} = -i\overset{\cdot}{\alpha}$, $\overset{\cdot}{\mu}_{33} = \overset{\cdot}{\mu}_z$, а остальные компоненты равны нулю)

$$\overset{\cdot}{\mu} \dot{H}_{m2} \dot{H}_{m1} - \overset{\cdot}{\mu} \dot{H}_{m1} \dot{H}_{m2} = i2\overset{\cdot}{\alpha} (\dot{H}_{m2x} \dot{H}_{m1y} - \\ - \dot{H}_{m2y} \dot{H}_{m1x}) = i2\overset{\cdot}{\alpha} [\dot{H}_{m2}, \dot{H}_{m1}]_z. \quad (83.35)$$

Принцип взаимности будет соблюдаться лишь для полей, магнитные компоненты которых в плоскости xOy (перпендикулярно направлению постоянного намагничивания) параллельны.

Аналогичный вывод справедлив для гиротропного диэлектрика.

Заметим еще, что в анизотропных средах нормаль к фронту плоской волны может не совпадать по направлению со средним вектором Пойнтинга, а поэтому векторы фазовой скорости и скорости движения энергии (35.13) также оказываются неколлинеарными.

Возвращаясь к случаю поперечных волн в гиротропных средах, отметим следующий факт. При исчезновении гиротропии ($\overset{\cdot}{\alpha} \rightarrow 0$

или $\beta \rightarrow 0$) обыкновенная и необыкновенная волны остаются невырожденными ($\vec{\Gamma}_{\parallel} \neq \vec{\Gamma}_{\perp}$), если только $\vec{\mu} \neq \mu_z$ или соответственно $\vec{\epsilon} \neq \epsilon_z$; среда же при этом по характеру тензора $\vec{\mu}$ или $\vec{\epsilon}$ подобна одноосному кристаллу (§ 82, п.1). Вообще в отношении поперечных волн гиротропная среда ведет себя так же, как одноосный кристалл. Кроме эффекта Коттон—Мутона в том и другом случае — при

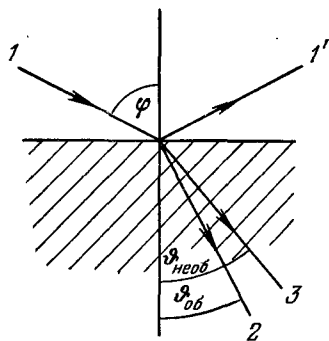


Рис. 83.4.

наличии плоской границы с изотропной средой — может наблюдаться *двойное преломление*. На рис. 83.4 изображена такая граница, причем ось z (для гиротропной среды направление постоянного намагничивания) есть нормаль к чертежу. Если в изотропной среде на границу падает волна произвольной поляризации (луч 1), то ее удобно разложить на составляющие волны параллельной и перпендикулярной поляризации (§ 38) с тем, чтобы рассматривать отражение и преломление каждой в отдельности. Но теперь одна из преломленных

волн окажется обыкновенной, а другая — необыкновенной. Фазовые скорости их во второй среде различны, поэтому соответствующие преломленные лучи не совпадают, их два (луч 2 и луч 3 на рис. 83.4), причем, согласно (37.7а),

$$\frac{\sin \vartheta_{об}}{\sin \varphi} = \frac{v_{\parallel}}{v_1} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \vartheta_{необ}}{\sin \varphi} = \frac{v_{\perp}}{v_1}. \quad (83.36)$$

В заключение отметим, что при нормальном падении линейно поляризованной волны на границе с гиротропной средой, намагниченной также в направлении нормали, отраженная волна оказывается поляризованной в повернутой плоскости. Это называют *эффектом Керра*.

§ 84. Гиротропия в радиотехнике

1. Гиротропия ионосферы. Вследствие влияния магнитного поля Земли плазма ионосферы представляет собой гиротропную среду, диэлектрическая проницаемость которой описывается тензором $\vec{\epsilon}$ вида (82.6) — (82.7). Величина H_0 в среднем имеет значение около 40 а/м, так что частота $F = \Omega/2\pi = \mu_0 \frac{|e|}{m} H_0/2\pi$, вблизи которой происходит гиромагнитный резонанс электронов, оказывается около 1,4 Мгц. Заметим, что для ионов атомарного кислорода $F' = \Omega'/2\pi \approx 54$ гц.

Учет гиротропии приводит, в частности, к более сложной картине рефракции в ионосфере в сравнении с описанной в § 41, п. 2

и § 81, п.1. Полагая, что по отношению к магнитному полю Земли распространение волн является поперечным, мы должны рассматривать обыкновенные и необыкновенные волны, которые, имея различные фазовые скорости, рефрагируют по-разному, в результате чего ионосферный луч «расщепляется» (рис. 84.1). Это аналогично двойному преломлению, о котором говорилось выше в § 83, п.4.

Легко убедиться, что критические частоты (§ 81, п.1) для обыкновенной и необыкновенной волн существенно различны. В соответствии с (41.11) и § 83, п.3

$$\sin \vartheta_{0 \text{ об}} = \sqrt{\frac{\epsilon_z}{\epsilon_0}} \quad \text{и} \quad \sin \vartheta_{0 \text{ необ}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{\perp}}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\epsilon^2 - \beta^2}{\epsilon \epsilon_0}}. \quad (84.1)$$

Полагая в (82.7) $\nu=0$ и внося выражения компонент тензора ϵ в (84.1), видим, что первое из равенств не отличается от (81.1), а потому $f_{\text{кр об}} = f_{\text{кр}}$ (81.2). Что касается необыкновенной волны, то после простых преобразований находим

$$\sin \vartheta_{0 \text{ необ}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_p^2 - \Omega^2}}, \quad (84.2)$$

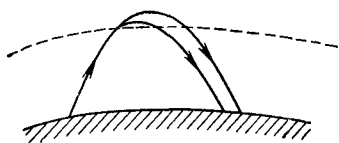


Рис. 84.1.

а так как $\sin \vartheta_{0 \text{ необ}} = 0$ при $\omega = \omega_{\text{кр необ}}$ ($f = f_{\text{кр необ}}$), то, приравнявая нулю подкоренное выражение, получаем

$$\omega^2 \mp \omega \Omega - \omega_p^2 = 0, \quad \omega = \omega_{\text{кр необ}}. \quad (84.3)$$

При фиксированной частоте ω меньшей электронной концентрации здесь отвечает знак минус (см. выражение ω_p^2 в (80.156)). Полагая, что нормально падающая волна полностью отражается от соответствующего — наиболее низкого — уровня, найдем

$$\omega_{\text{кр необ}} = \frac{\Omega}{2} + \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 + \omega_p^2}. \quad (84.4)$$

В диапазоне коротких волн $(\Omega/2)^2 \ll \omega_p^2$, а потому

$$\omega_{\text{кр необ}} \approx \omega_p + \frac{\Omega}{2}. \quad (84.4a)$$

или

$$f_{\text{кр необ}} \approx f_p + 0,7 \text{ [МГц]} \quad (84.4b)$$

(выше отмечалось, что $F = \Omega/2\pi \approx 1,4 \text{ МГц}$).

Для волн, распространяющихся в плазме вдоль направления магнитного поля Земли, согласно § 83, п.2 и (82.7), при $\nu=0$

$$\epsilon^{\pm} = \epsilon \pm \beta = \epsilon_0 \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \Omega)} \right]. \quad (84.5)$$

Поэтому при достаточно низких частотах ($\omega < \Omega$) эквивалентная

диэлектрическая проницаемость для волны левой круговой поляризации ϵ^- остается положительной. Эта продольная волна, таким образом, не претерпевает полного отражения при нормальном (и близком к нормальному) падении на ионосферный слой. Ввиду указанного обстоятельства в сверхдлинноволновом диапазоне возможно распространение электромагнитной энергии вдоль силовых линий магнитного поля Земли (рис. 84.2), которые как бы направляют волновой процесс. Столь низкочастотные волны создаются грозowymi разрядами; они получили название «свистящих атмосфериков» — в знак того, что соответствующие сигналы прослушиваются в приемнике в виде свиста.

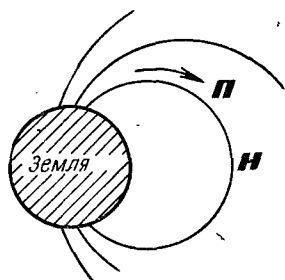


Рис. 84.2.

Заметим, что выражение (84.5), как и исходные формулы (82.7), достоверны, пока $\omega \gg \Omega'$, где Ω' — гироскопическая частота ионов.

2. Ферриты в радиотехнике СВЧ. Намагниченные ферриты, являющиеся гиротропными магнетиками, весьма широко применяются в волноводных и иных устройствах радиотехники СВЧ. Рассмотрим действие некоторых таких устройств.

Важное значение имеет *волноводный эффект Фарадея*. Если в неограниченной гиротропной среде эффект Фарадея заключается во вращении плоскости поляризации волны, то в случае волновода речь идет о повороте всей структуры поля. Пусть имеется круглый волновод с коаксиальным ферритовым продольно намагниченным цилиндром; обычно последний имеет конические заострения для уменьшения отражений (рис. 84.3, б). Когда слева на ферритовый элемент падает основная невращающаяся волна H_{11} «пустого» волновода, строение которой в поперечном сечении S_1 показано на рис. 84.3, а, справа от феррита в сечении S_2 мы будем иметь прошедшую основную волну с измененной азимутальной ориентацией (рис. 84.3, в). Сущность явления нетрудно понять. Разложим исходную волну H_{11} на две вращающиеся волны с азимутальными зависимостями $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$ (§ 65, п. 1). На оси волновода их поля поляризованы по кругу в противоположные стороны. В феррит эти волны проходят, конечно, деформируясь, но указанное качество сохраняется, причем в случае тонкого ферритового стержня можно считать, что круговая поляризация имеет место во всем его поперечном сечении. Но тогда на основании § 83, п. 2 нетрудно заключить, что феррит ведет себя как среда с магнитной проницаемостью $\mu^+ = \mu + \alpha$ для одной волны (правая круговая поляризация) и с магнитной проницаемостью $\mu^- = \mu - \alpha$ для другой (левая круговая поляризация). Поэтому в участке волновода с ферритом данные волны распространяются с разными скоростями, получая по выходе различные фазовые

сдвиги; наложение их и дает повернутую структуру, показанную на рис. 84.3, *в* (ср. рис. 83.1, *а*).

Волноводный эффект Фарадея используется в ряде устройств, так называемых «вентилей» («изоляторов») и «циркуляторов».

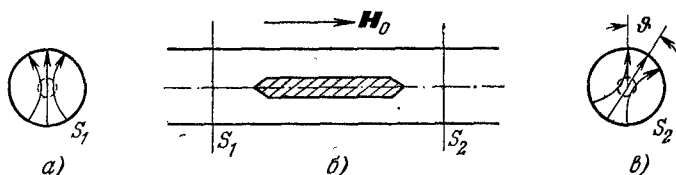


Рис. 84.3.

Действие первого поясняется на рис. 84.4, *а*. Отрезок круглого волновода соединен с развернутыми на 45° прямоугольными волноводами и содержит продольно намагниченный ферритовый стержень, создающий поворот структуры поля также на 45° . Пусть при движении волны от 1 к 2 вращение структуры происходит по часовой стрелке, тогда волна, падающая на вход 1, должна

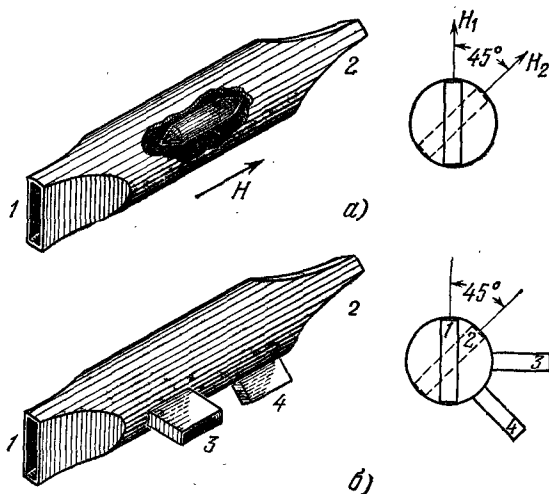


Рис. 84.4.

пройти в выход 2. Но в противоположном направлении (от 2 к 1) волна не пройдет. Действительно, эффект Фарадея необратим (§ 83, п. 2), и теперь структура будет вращаться против часовой стрелки для наблюдателя, тождественно ориентированного относительно движения волны. По отношению к широкой стенке волновода 1 вектор E прошедшей через феррит (из 2) волны окажется параллельным, так что основная волна H_{10} не возбудится, а пройдет полное отражение. Заметим, что обычно отраженная

волна «гасится» при помощи поляризованного поглотителя в виде тонкой проводящей пластинки, поставленной в круглом волноводе вблизи соединения с волноводом 1 параллельно его широкой стенке; на выходящую из 1 волну он почти не действует.

Аналогичное устройство с двумя дополнительно присоединенными прямоугольными волноводами (рис. 84.4, б) работает как циркулятор. Это значит, что волна из 1 попадает в 2 , из 2 — в 3 , из 3 — в 4 и из 4 — в 1 . Объяснение действия в принципе не отличается от предыдущего. Поместив в волноводы 3 и 4 неотражающие поглотители («согласованные нагрузки»), мы придем от циркулятора к вентилю.

Часто в прямоугольный волновод ставят вертикальную поперечно намагниченную ферритовую пластинку (рис 84.5). Напомним (§ 64), что в силу фазового сдвига на 90° поперечной и продольной компонент вектора \mathbf{H} волны H_{10} пустого волновода,

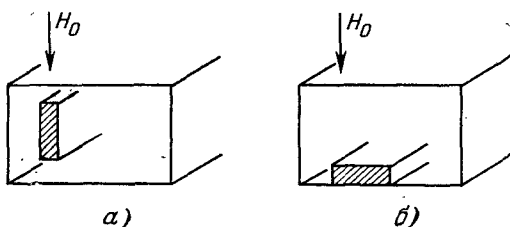


Рис. 84.5.

магнитное поле вращается в плоскости его широкой стенки, причем на расстоянии

$$x = \frac{a}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{2a}{\lambda} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

поляризация является круговой, а направление вращения зависит от направления распространения волны. В несимметрично расположенной ферритовой пластинке в зависимости от направления движения волны волновода также будет преобладать правая или левая круговая поляризация магнитного поля. Поэтому можно сказать, что эквивалентная магнитная проницаемость пластинки для противоположно движущихся волн будет иметь различные значения. Разными, следовательно, будут и постоянные распространения (т. е. фазовые скорости и затухания) этих волн. Система необратима и может быть использована для построения вентиля, а также циркулятора. Аналогично действие поперечно намагниченного ферритового стержня иной формы, например в виде горизонтальной пластинки (рис. 84.5, б).

Одно из устройств на основе описанной системы — так называемый «резонансный вентиль». Феррит намагничивается до состояния ферромагнитного резонанса; при этом параметры μ'' и $-\alpha''$

($-\text{Im } \dot{\mu}$ и $-\text{Im } \dot{\alpha}$) максимальны и приблизительно равны (рис. 82.6). Тогда $(\dot{\mu}^-)^* \approx 2\mu^*$ и $(\dot{\mu}^+)^* \approx 0$, а это значит, что одна из движущихся навстречу основных волн прямоугольного волновода с ферритом (с преобладающей левой круговой поляризацией) будет сильно поглощаться, а другая пройдет почти без затухания (§ 83, п. 2).

В качестве примера циркулятора на той же основе рассмотрим систему, составленную из двух направленных ответвителей (§ 74, п. 3), производящих деление передаваемой энергии пополам ($a=b$ в (74.21)); их называют «щелевыми мостами»; ферритовые

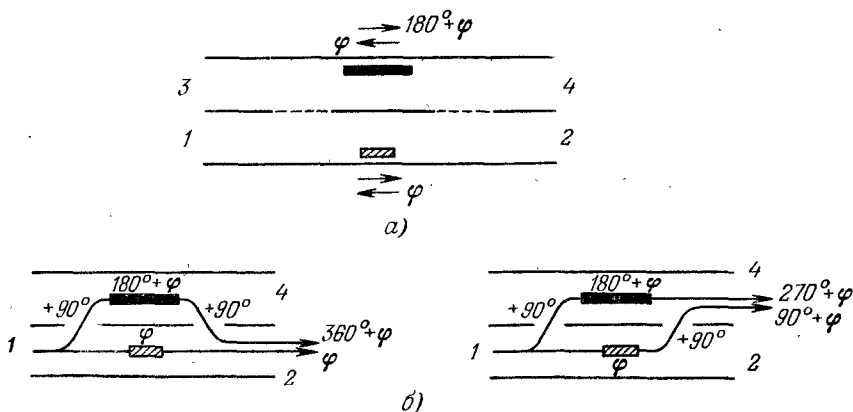


Рис. 84.6.

элементы помещаются в одном или обоих каналах между ответвителями. Схематическое изображение устройства в одном из вариантов дано на рис. 84.6,а. Пусть канал с ферритом для одного направления создает фазовый сдвиг $\varphi + 180^\circ$, а для другого φ ; симметричный же канал для обоих направлений вызывает фазовый сдвиг φ (в нем расположен нужный для этого диэлектрический элемент). Необходимо также учитывать, что при делении потока энергии направленным ответвителем происходит сдвиг фаз на 90° (см. (74.24а)); в данном случае фаза изменяется на 90° «при проходе через отверстие». Если волна попадает на вход 1, то она выйдет через 2, не попав в 4. Действительно, как видно из рис. 84.6,б, в 2 приходят два волновых потока половинной энергии, один из которых (прямой) имеет фазовый сдвиг φ , а другой — сдвиг $90^\circ + (180^\circ + \varphi) + 90^\circ$ (два прохода через отверстие и действие феррита); они интерферируют в фазе и складываются. В то же время в 4 приходят потоки с фазовыми сдвигами $\varphi + 90^\circ$ и $90^\circ + (180^\circ + \varphi)$, т. е. противофазные, уничтожающиеся при интерференции. Таким же образом нетрудно проследить, как из 2 волна пройдет в 3, из 3 — в 4 и из 4 — в 1.

Заметим, что матрица рассеяния (§ 74, пп. 2, 3) идеального циркулятора с P каналами должна иметь вид

$$R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}. \quad (84.6)$$

Входные сечения предполагаются лежащими в дальней зоне и выбраны так, чтобы скомпенсировать фазовые сдвиги (ср. переход от (74.18) к (74.18а)).

Четырех-, а чаще трехканальные циркуляторы выполняются также в виде разветвления прямоугольного волновода в H -плоскости

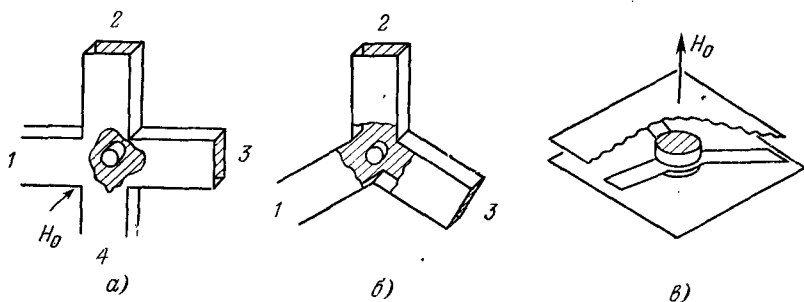


Рис. 84.7.

(либо аналогичного разветвления полосковой линии), в которое симметрично помещается ферритовый элемент, намагниченный перпендикулярно к этой плоскости (рис. 84.7 а, б, в). Падающая на феррит волна дифрагирует асимметрично; при требуемом выборе параметров поток энергии из 1 будет направляться в 2, из 2 — в 3 и т. д. Устройства этого типа называются «Х-циркуляторами» и «У-циркуляторами» соответственно.

Волноводные системы с намагниченными ферритами очень разнообразны, и в этой книге нет места для сколько-нибудь полного их описания¹⁾. Различные вентили и циркуляторы (выше были рассмотрены лишь некоторые их виды) являются важнейшими устройствами такого рода, но далеко не исчерпывают всего многообразия функций, которые можно реализовать с применением ферритов. Огромное техническое значение имеет уже сама возможность управления амплитудой и фазой волнового процесса «электрическим путем», т. е. посредством изменения тока в электромагните, намаг-

¹⁾ Интересующийся читатель отсылается к монографиям [Д. 5—7].

ничивающем ферритовый элемент, вместо механического введения в волновод какого-то тела, вызывающего поглощение, отражение или сдвиг фазы.

В заключение обратимся к случаю полого резонатора с намагниченным ферритом; особенно интересно при этом проявление эффекта Фарадея. Пусть для определенности резонатор образован «закороченным» отрезком круглого волновода с продольно намагниченным коаксиальным ферритовым цилиндром (рис. 84.8, а). При отсутствии внутри феррита постоянного магнитного поля ($H_0 = 0$) последний лишь несколько деформирует невращающееся поле колебаний основного типа, одинаково действуя на обе вращающиеся компоненты с азимутальными зависимостями $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$, которые

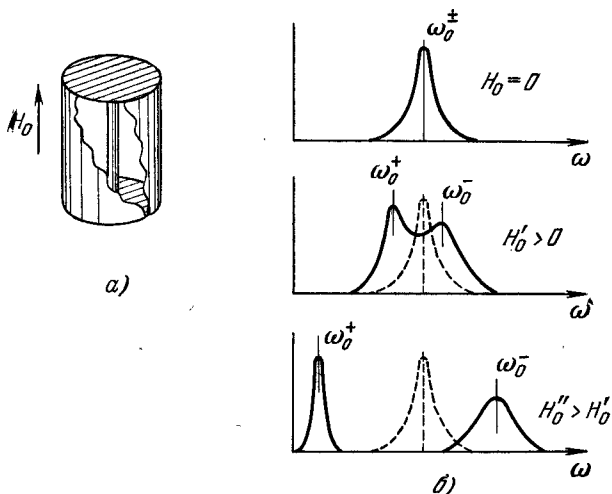


Рис. 84.8.

остаются вырожденными; соответствующие резонансные кривые идентичны и «неразделимы». С приложением постоянного поля ($H_0 \neq 0$) феррит по-разному возмущает вращающиеся типы колебаний (если стержень тонок, можно сказать, что в одном случае его эквивалентная магнитная проницаемость есть $\mu^+ = \mu + \alpha$, а в другом $\mu^- = \mu - \alpha$). Собственная частота одного из них увеличивается, а другого — уменьшается.

Наблюдаемая резонансная кривая сначала становится двугорбой, а затем с увеличением H_0 собственные частоты разнесутся весьма значительно (рис. 84.8, б). При этом кривая, соответствующая типу колебаний с правой круговой поляризацией на оси, не только сдвигается в сторону низких частот, но и сужается в результате повышения добротности: $(\mu^+)'' < \mu''$. Другая же (левая круговая поляризация) смещается в сторону высоких частот и расширяется $(\mu^-)'' > \mu''$.

3. О теории волноводных систем с гиротропными элементами.

Заключение. Реальные волноводные системы, содержащие ферриты, нерегулярны, и к ним следует применять методы, о которых кратко говорилось в § 76; эти вопросы подробно излагаются в [И. 3]. Но большой практический интерес представляет уже рассмотрение

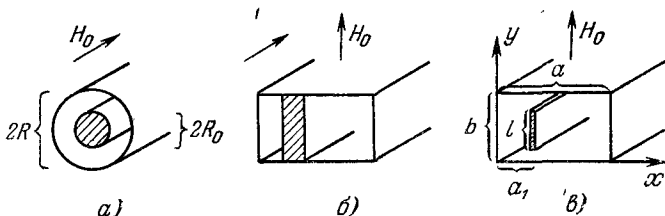


Рис. 84.9.

идеализированных систем, например регулярного круглого волновода с продольно намагниченным ферритовым стержнем в виде коаксиального цилиндра (рис. 84.9, а), регулярного прямоугольного волновода с полным по высоте поперечно намагниченным слоем (рис. 84.9, б) и т. п. Такие задачи сравнительно просты; они давно решены методами, использовавшимися в § 67 (см. [Д. 5—7]). Если ферритовый образец мал хотя бы по одному из размеров (сфера и цилиндр малого радиуса, тонкая пластинка и т. п.), успешно применяется теория возмущений (§ 75).

В качестве примера рассмотрим возмущение типа колебаний H_{11p} круглого цилиндрического резонатора малым коаксиальным ферритовым диском, намагниченным по оси и лежащим на одном из оснований, рис. 84.10. Диск расположен, таким образом, в пучности магнитного поля, которое тангенциально его поверхности; возмущенное магнитное поле внутри диска (H) можно отождествить с начальным полем в этой области, пренебрегая продольной компонентой магнитного вектора и электрическим полем (которое поперечно).

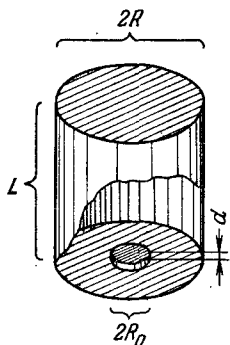


Рис. 84.10.

Пусть начальное поле является вращающимся (с азимутальной зависимостью $e^{i\alpha}$ или $e^{-i\alpha}$). В области диска при $R_0 \ll R$ поле допустимо считать однородным, а поляризацию — круговой, так что в зависимости от знака в $e^{\pm i\alpha}$ эквивалентная магнитная проницаемость феррита есть $\dot{\mu}^{\pm} = \dot{\mu} \pm \dot{\alpha}$ и формула (75.5) или (75.13) дает

$$\frac{\Delta\dot{\omega}^{\pm}}{\omega_0} \approx -(\dot{\mu} \pm \dot{\alpha} - \mu_0) \frac{\Delta V \int |\dot{H}_{m0}|^2 dv}{2\mu_0 \int_V |\dot{H}_{m0}|^2 dv}. \quad (84.7)$$

(средняя электрическая и магнитная энергии начальных колебаний совпадают). Индекс \pm при $\Delta\dot{\omega}$ соответствует двум различным направлениям круговой поляризации. Внося сюда компоненты вектора $\dot{H}_m = \dot{H}_{m0}$ поля типа H_{11p} из (70.11) при $z=0$, после интегрирования получаем

$$\frac{\Delta\dot{\omega}^{\pm}}{\omega_0} \approx -\frac{1}{2} \left(\frac{\chi_z}{k_0} \right)^2 \frac{d}{L} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{A_{i1}^2}{(A_{i1}^2 - 1) J_1^2(A_{i1})} \left(\frac{\dot{\mu} \pm \dot{\alpha}}{\mu_0} - 1 \right). \quad (84.8)$$

Смысл этого примера тот же, что и в случае, обсуждавшемся в конце п. 2. Гиротропия снимает вырождение вращающихся полей. Иллюстрацией (качественной) к результату (84.8) может служить рис. 84.8, б.

В случае круглого волновода с коаксиальным продольно намагниченным цилиндром, когда последний тонкий, можно применить аналогичный прием, учитывая, однако различие начального и возмущенного полей внутри стержня. В квазистатическом приближении (ср. § 50 и формулы (51.29), (51.31))

$$\dot{E}_m = \frac{2\varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} \dot{E}_{m0}, \quad \dot{H}_m = \frac{2\mu_0 \dot{H}_{m0}}{\dot{\mu}^{\pm} - \mu_0} = \frac{2\mu_0}{\dot{\mu} \pm \dot{\alpha} - \mu_0} \dot{H}_{m0},$$

и применение формулы (75.10) дает

$$\frac{\Delta\dot{\Gamma}^{\pm}}{\Gamma_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{A_{i1}^2}{(A_{i1}^2 - 1) J_1^2(A_{i1})} \left[\frac{\dot{\mu} \pm \dot{\alpha} - \mu_0}{\dot{\mu} \pm \dot{\alpha} + \mu_0} + \left(\frac{k}{\Gamma_0} \right)^2 \frac{\dot{\varepsilon} - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0} \right] \quad (R_0 \ll R) \quad (84.9)$$

(рис. 84.9, а) для волн двух противоположных вращений. Отсюда постоянная Фарадея (ср. § 83, п. 2) равна

$$R = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} = \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 \frac{A_{i1}^2 \Gamma_0}{(A_{i1}^2 - 1) J_1^2(A_{i1})} \frac{\mu_0 \alpha}{(\mu + \mu_0)^2 - \alpha^2}. \quad (84.10)$$

Приведем еще без вывода получаемую методом возмущений формулу приращения постоянной распространения волны H_{10} прямоугольного волновода при помещении вертикальной намагниченной ферритовой пластинки (рис. 84.9, в):

$$\frac{\Delta\dot{\Gamma}^{\pm}}{\Gamma_0} = \frac{ld}{ab} \left\{ \left[1 - \frac{\mu_0}{\dot{\mu}} + \left(\frac{k}{\Gamma_0} \right)^2 \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \right] \sin^2 \frac{\pi a_1}{a} + \left(\frac{\chi}{\Gamma_0} \right)^2 \left(\frac{\dot{\mu}^2 - \dot{\alpha}^2}{\dot{\mu}\mu_0} - 1 \right) \cos^2 \frac{\pi a_1}{a} \pm \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\mu}} \frac{\chi}{\Gamma_0} \sin \frac{2\pi a_1}{a} \right\} \quad (d \ll a). \quad (84.11)$$

Двойной знак соответствует двум направлениям распространения волны (необратимость).

С последовательным применением теории возмущений и получаемыми при этом результатами читатель может ознакомиться в [И.3].

В заключение подчеркнем, что, рассмотрев наиболее типичные случаи гиротропии в радиотехнике, мы все же далеко не исчерпали

этой темы. Одним из заранее наложенных ограничений было требование *линейности* среды. Но гиротропные среды могут быть и заметно нелинейны, что в ряде случаев существенно. О нелинейных средах будет говорить отдельно в §§ 86, 87.

III. АКТИВНЫЕ СРЕДЫ

Активной, или *регенеративной*, мы будем называть среду, которая в противоположность среде поглощающей отдает энергию электромагнитному полю. Разумеется, это бывает обусловлено действием тех или иных физических факторов, являющихся по отношению к рассматриваемому полю сторонними. Однако речь идет не о заданных сторонних силах (в виде функций $E^{ст}$ или $j^{ст}$ и т. п.); тогда некоторая область, заполненная активной средой, была бы просто областью источника (§ 43, п. 1), т. е. отсутствовала бы необходимость выходить за пределы обычной постановки задачи об излучении (о возбуждении поля фиксированными источниками). Признаком активной среды является «отклик» на электромагнитное поле — сторонние процессы совершаются под действием последнего и отдают ему энергию. Как было отмечено в § 30 п. 2, при гармонических колебаниях (или для гармонических составляющих при произвольной временной зависимости) активные среды описываются путем введения комплексных проницаемостей $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$ и $\mu = \mu' - i\mu''$ с $\epsilon'' < 0$ и (или) $\mu'' < 0$. Таковую же роль может играть отрицательная удельная проводимость $\sigma < 0$ (§ 9, п. 2).

Представление об активных средах удобно тем, что дает единое средство описания различных регенеративных факторов при постановке электродинамических задач. В современной радиотехнике их многообразие довольно велико. Для построения усилителей и генераторов используются макроскопические движения частиц в полях (электроника) и микроскопические эффекты (квантовая радиотехника); большое значение приобрело параметрическое усиление и возбуждение. Подробное изучение этих вопросов, конечно, далеко выходит за рамки данного курса. Мы ограничимся общим электродинамическим аспектом, который будет полезен читателю как подготовка к соответствующим специальным дисциплинам.

§ 85. Поля и волны в активных средах

Природа и проявления регенерации. Вернемся к результатам анализа взаимодействия электронного пучка с бегущей электромагнитной волной, полученным в § 80, п. 1. Область пучка (в которой электроны отдают энергию полю) мы вправе рассматривать как активную среду. Регенеративный процесс является чисто электрическим — взаимодействие с электрическим полем волны, что видно из (80.9). Поскольку, согласно (30.16), $\text{Re } \dot{p} = \omega \epsilon'' E_m^2 / 2$, то на основании (80.9а) сразу же можно получить выражение мнимой части комплексной диэлектрической проницаемости

данной активной среды. При $|\Gamma''|^2 \ll |k_q - \Gamma'|^2$ находим

$$\varepsilon'' \approx -2 \frac{\rho_0}{v_0^2} \frac{q}{m} \frac{\Gamma''}{(k_q - \Gamma')^2}. \quad (85.1)$$

Регенерация имеет место при условии (80.10).

Далее рассмотрим в упрощенной форме принцип *параметрического резонанса*¹⁾, при котором регенерация колебаний вызывается периодическим изменением того или иного параметра колебательной системы. В качестве идеализированного примера возьмем случай мгновенного изменения емкости колебательного контура, которое производится, скажем, путем смещения пластин конденсатора либо введения и удаления

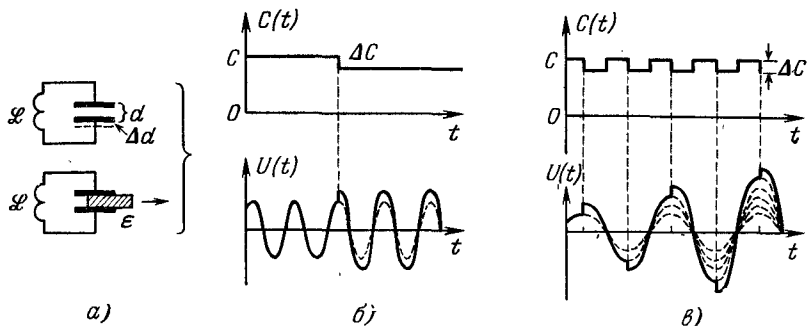


Рис. 85.1.

твердого диэлектрика (рис. 85.1а). Пусть при максимальном значении емкости C происходят гармонические колебания с собственной частотой контура $\omega = 1/\sqrt{\mathcal{L}C}$. Если в момент максимального напряжения на конденсаторе ($u = u_m$), когда также максимален заряд ($q = q_m$) и отсутствует ток, мгновенно уменьшить емкость конденсатора на величину ΔC (например, разведя пластины), то произойдет скачок напряжения до величины $u'_m = q_m (C - \Delta C)$, и затем при этой амплитуде будут совершаться гармонические колебания с частотой $\omega' = \sqrt{\mathcal{L}(C - \Delta C)}$ (рис. 85.1б). Энергия контура увеличилась потому, что при разведении пластин была совершена работа против силы поля, обуславливающей их взаимное притяжение (заметим, что мощность $P(t)$ есть при этом δ -функция).

Можно, однако, в момент, когда напряжение на конденсаторе отсутствует ($u = 0$), вернуть емкости прежнее значение (путем сближения пластин), не внося никакого энергетического влияния, но изменив собственную частоту с ω' до ω , а в момент максимума напряжения опять уменьшить емкость на ΔC . Если этот

¹⁾ В связи с современным значением параметрического резонанса читателю будет интересно познакомиться с лекцией Л. И. Маидельштама ([Г. 1], стр.189), прочитанной в 1931 г.

процесс повторяется периодически, то напряжение скачкообразно возрастает, как это показано на рис. 85.1,в; принято, что $\Delta C \ll C$ и $\omega' \approx \omega$.

Будем считать, что кривая на рис. 85.1,в близка к синусоиде на протяжении каждого «периода» и вычислим среднюю мощность, отдаваемую электромагнитным колебаниям:

$$\bar{P} = -\frac{2}{T} \left[\frac{q_m^2}{2(C-\Delta C)} - \frac{q_m^2}{2C} \right] \approx -\frac{p_m^2}{TC^2} \Delta C = -\frac{\omega q_m^2}{2\pi C^2} \Delta C$$

($T = 2\pi/\omega$). Приписывая энергетическое воздействие активности среды внутри конденсатора, согласно (30.16) получим

$$-\frac{\omega q_m^2}{2\pi C^2} \Delta C \approx \frac{\omega \varepsilon''}{2} E_m^2 V,$$

а поскольку $q_m = \varepsilon E_m S$, $C = \varepsilon S/d$ и $V = Sd$, то отсюда следует:

$$\varepsilon'' = -\varepsilon \frac{1}{\pi} \frac{\Delta C}{C}, \quad (85.2)$$

и, в частности, в том варианте, когда внутрь конденсатора вводится диэлектрик с проницаемостью ε ,

$$\varepsilon'' = -\frac{1}{\pi} (\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (85.2a)$$

В радиотехнике применяются так называемые *параметрические усилители* и аналогичные устройства, в которых роль модулируемой емкости играет слой, образующийся в $p-n$ -переходе полупроводникового диода. Диод может быть, например, помещен в полый резонатор и играть роль области с активной средой для собственных колебаний с частотой ω ; при этом модуляция емкости производится полем с частотой 2ω (ср. рис. 85.1, в). Это, как говорят, поле «накачки» и служит источником энергии для усиливаемого поля.

Можно модулировать параметр колебательной системы, связанный не с электрической, а с магнитной энергией, т. е. в простейшем случае — индуктивность цепи. Параметрические усилители строились и с периодически перемагничиваемыми ферритовыми элементами в полых резонаторах. Но они так и не вышли из стадии экспериментальных образцов.

Широко известно значение *квантовых усилителей и генераторов СВЧ* (мазеров) и *оптических квантовых генераторов* (лазеров). Мы не можем излагать принципы их действия, поскольку предшествующий материал книги для этого совершенно недостаточен; это предмет *квантовой радиотехники* (см., например, [Д.8]). Однако подчеркнем, что и они описываются как электродинамические системы — полые и открытые резонаторы и волноводы — с активными средами. Например, парамагнитные вещества, применяемые в мазерах, ведут себя как регенеративные магнетики ($\mu'' < 0$).

2. Свойства электромагнитных полей. Выясним закономерности, свойственные электромагнитным полям в активных средах.

В случае одномерного процесса поле описывается решением (32.2) уравнения (32.1). Комплексное волновое число $\hat{k} = \omega \sqrt{\hat{\epsilon} \hat{\mu}}$ (33.1) представим, как и ранее: $\hat{k} = k' - ik''$ (33.2). Пусть $\epsilon' > 0$ и $\mu' > 0$, но поскольку среда активна, в отличие от ранее рассмотренного случая (§ 33), $\epsilon'' \leq 0$ или $\mu'' \leq 0$. Соответственно этому вместо (33.3) рассмотрим неравенства

$$\text{или} \quad \left. \begin{aligned} k' > 0, k'' < 0 \\ k' < 0, k'' > 0, \end{aligned} \right\} \quad (85.3)$$

а так как характер решения (33.4) не изменяется в зависимости от того, используется ли первая либо вторая строчка (85.3) (слагаемые только меняются ролями), то для определенности остановимся на неравенствах первой строчки: $k' > 0, k'' < 0$.

Выражениям векторов поля плоской однородной волны (33.13) на этом основании придадим вид

$$\left. \begin{aligned} E &= x_0 A e^{i k'' |z|} \cos(\omega t - k' z + \varphi), \\ H &= y_0 \frac{A}{|\hat{W}|} e^{i k'' |z|} \cos(\omega t - k' z + \varphi - \varphi_W). \end{aligned} \right\} \quad (85.4)$$

При распространении волны амплитуды напряженностей E и H экспоненциально *нарастают*; «мгновенный снимок» распределения $E(z)$ и $H(z)$ показан на рис. 85.2 (ср. рис. 33.1). Величину $|k''|$ естественно назвать *коэффициентом усиления* волны. Отношение

$$\frac{E_m(z+l)}{E_m(z)} = e^{i k'' l} \quad (85.5)$$

показывает, во сколько раз увеличилась амплитуда волны на расстоянии l (ср. (33.8)). Можно говорить об *усилении* волны $G = |k''| l$, измеряемом в *неперах* или — после умножения — на $20 \lg e$ — в *децибелах* (ср. (33.9)).

Разумеется, случай безграничной активной среды нереален (как, впрочем, и любой безграничной среды с постоянными $\hat{\epsilon}$ и $\hat{\mu}$), но встречающиеся процессы в активных средах могут быть близки к одномерному.

В радиотехнике СВЧ применяются *усилители бегущей волны* в виде отрезка той или иной направляющей системы, содержащей активную среду. Как следует из (63.15), при отрицательных ϵ'' и μ'' величина Γ'' в (61.2) также отрицательна. В выражениях (61.1),

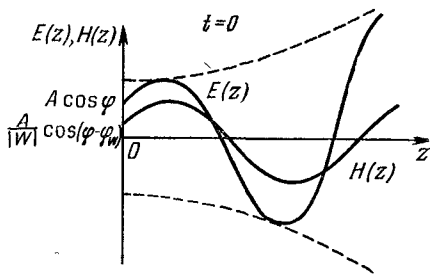


Рис. 85.2.

описывающих направляемую волну, при этом $e^{-i\Gamma z} = e^{-i\Gamma'z} e^{|\Gamma''|z}$. Коэффициентом усиления теперь является величина $|\Gamma''|$, которую можно ввести в (85.5) вместо $|k''|$.

В действительности надо учитывать, что используемый в усилителе отрезок направляющей системы содержит и поглощающую среду (поглощают, например, металлические оболочки волноводов), так что в соответствии с (63.13)

$$\frac{E_m(z+l)}{E_m(z)} = e^{(-\Gamma'_1 + |\Gamma''_2|)l}, \quad (85.6)$$

где $\Gamma''_1 > 0$ — коэффициент затухания, характеризующий поглощение, а $|\Gamma''_2|$ — коэффициент усиления волны активной средой. Величина $|\Gamma''_2| = |\Gamma''_2(P_H)|$ есть монотонно возрастающая от нуля функция мощности P_H генератора «накачки», обуславливающего действие активной среды. При выключенной накачке ($P_H = 0$) отношение (85.6) равно $e^{-\Gamma'_1 l} < 1$, а при некоторой величине $P_H = P_H^*$ поглощение будет скомпенсировано ($-\Gamma'_1 + |\Gamma''_2| = 0$), и волна пройдет без затухания. Усиление имеет место при $P_H > P_H^*$, когда отношение (85.6) превышает единицу.

Наконец, рассмотрим полый резонатор с активной средой, соединенный с двумя волноводами «на проход» (рис. 85.3; а) либо при помощи одного отверстия и циркулятора (§ 84, п. 2), разделяющего волны двух направлений (в четвертом канале циркулятора стоит неотражающий поглотитель), рис. 85.3б.

Введем в рассмотрение абсолютные значения амплитуд вектора E сигнала, поступающего на вход 1 (E_1), поля в резонаторе (E) и выходного сигнала (E_2); последний идет в канал 2 (рис. 85.3а) либо в канал 3 (рис. 85.3, б). При резонансе, согласно § 71, п.5, $E = k_1 Q E_1$, где k_1 — некоторый коэффициент пропорциональности. Введя другой коэффициент пропорциональности k_2 , запишем: $E_2 = k_2 E$, т. е. $E_2 = k_1 k_2 Q E_1$. Пусть записанное равенство относится к случаю отсутствия накачки ($P_H = 0$), а при ее включении добротность и выходной сигнал изменились, а именно: $\tilde{E}_2 = k_1 k_2 \tilde{Q} E_1$. Относительным коэффициентом усиления назовем дробь \tilde{E}_2 / E_2 . Очевидно,

$$\frac{\tilde{E}_2}{E_2} = \frac{\tilde{Q}}{Q} \quad (85.7)$$

(коэффициенты k_1 и k_2 можно считать неизменными), причем добротности равны

$$Q = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma} \quad \text{и} \quad \tilde{Q} = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma + P_{\text{сст}}} = \frac{\omega W}{P_0 + P_\Sigma - |P_{\text{сст}}|} \quad (85.8)$$

(§ 69, п.3), где P_0 — мощность поглощения внутри резонатора, P_Σ — мощность излучения в результате связи с волноводами, а $P^{ст} < 0$ — мощность, отдаваемая полю резонатора активной средой. Очевидно, ее можно выразить через мощность и к.п.д. накачки: $|P^{ст}| = \eta(P_H) P_H$. Итак,

$$\frac{\tilde{E}_2}{E_2} = \frac{1}{1 - |P^{ст}| / (P_0 + P_\Sigma)}. \quad (85.9)$$

С ростом P_H добротность \tilde{Q} (85.7) неограниченно возрастает, пока $|P^{ст}|$ приближается к величине $P_0 + P_\Sigma$ (рис. 85.4, а). Коэффициент усиления при этом становится бесконечным, т. е. выходной сигнал существует при исчезающе малом входном. Это «порог возбуждения» системы, которая начинает работать как генератор.

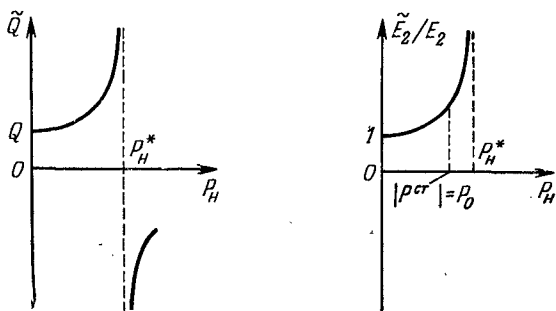


Рис. 85.4.

На рис. 85.4, б представлен график \tilde{E}_2/E_2 . В качестве усилителя резонатор функционирует, начиная с момента компенсации внутренних потерь: $|P^{ст}| = P_0$.

IV. НЕЛИНЕЙНЫЕ СРЕДЫ

Как подчеркивалось в § 5, п. 3 и далее, «строго линейных» сред не бывает, хотя, безусловно, преобладают положения, когда среды «практически линейны», и применимы линеаризованные соотношения (5.6), (5.7) и (6.6) либо — при анизотропии — (5.13), (5.14) и (6.7).

Нелинейность большинства распространенных сред проявляется лишь в сравнительно очень сильных полях, пока еще редко встречающихся в технике. Однако давно известны и нелинейные явления, наблюдаемые при значениях \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые типичны для практики. В первую очередь отметим явления *ферромагнетизма*; нелинейность ферромагнетиков учитывалась еще в XIX веке при проектировании электрических машин. Ферромагнетикам аналогичны *сегнетоэлектрики* — речь идет о сходстве зависимостей $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ в первом случае и $\mathbf{D}(\mathbf{E})$ — во втором (в феноменологическом понимании). Существенно нелинейной является зависимость $\mathbf{j}(\mathbf{E})$ для частиц в

вакууме — например, электронных пучков — и плазмы. Нелинейность плазмы ионосферы в ряде случаев оказывается заметной при распространении радиоволн. В § 80, п. 1 уже отмечалась нелинейность задач электроники СВЧ.

Не стремясь дать полный перечень существенно нелинейных сред, отметим лишь, что в последние годы в связи с появлением мощных лазеров стали доступными беспрецедентно сильные электромагнитные поля, и значительно расширился круг наблюдаемых нелинейных явлений, имеющих волновой характер. Возникла *нелинейная оптика* — научная область, ставшая уже довольно обширной.

Ниже будут рассмотрены некоторые проявления нелинейности и вопросы электродинамики нелинейных сред.

§ 86. Природа и проявления нелинейности

1. Нелинейность электропроводности. Рассмотрим в общих чертах прохождение постоянного тока через газ. Последний в результате действия различных внешних факторов (см., например, § 81, п. 1) всегда несколько ионизирован и, как можно полагать, равновесно: числа вновь образующихся и рекомбинирующих электронов и ионов одинаковы, так что средние плотности положительного и отрицательного зарядов ρ^+ и $\rho^- = -\rho^+$ остаются постоянными. Приложение электрического поля вызовет ток. Теперь, кроме потерь на рекомбинацию, заряженные частицы будут изыматься во внеш-

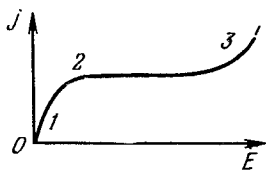


Рис. 86.1.

нюю цепь постоянного тока¹⁾, но при малых полях эта убыль частиц вполне пренебрежима, и плотность тока можно определить как $j = \rho^+ v^+ + \rho^- v^-$, где v^+ и v^- — скорости частиц, а плотности не зависят от E . При достаточно большом числе столкновений с нейтральными молекулами, которым отдается энергия, v^+ и v^- пропорциональны E .

Таким образом, получается линейное соотношение $j = \rho^+ (k^+ + k^-) E$; k^+ и k^- — коэффициенты пропорциональности, называемые «подвижностями» частиц. Это обычный закон Ома, его иллюстрирует участок 1 кривой на рис. 86.1. С ростом E плотность тока возрастает, и все большее число заряженных частиц уходит, не успевая рекомбинировать, пока, наконец, током не будут увлечены *все* вновь возникающие частицы: происходит насыщение (рис. 86.1, участок 2). Дальнейшее увеличение E какое-то время не вызывает роста тока. Но потом энергия частиц возрастает настолько, что наступает ударная ионизация. Это лавинообразный процесс, и наличие внешних ионизирующих факторов теперь уже не является необходимым для поддержания тока; начи-

¹⁾ Можно представить себе, что ток проходит через параллельные пластинчатые электроды. Для поддержания постоянного тока наличие цепи, содержащей генератор, как известно, необходимо (§ 26, п. 4).

нается так называемый «самостоятельный разряд» (рис. 86.1, участок 3). Зависимость $j(E)$ нелинейна.

Упомянем нелинейность совсем другого рода, которую можно назвать косвенной. Удельная проводимость металлов σ в фиксированных условиях, можно сказать, совершенно не зависит от напряженности электрического поля (или плотности тока). Тем не менее металл ведет себя, как заметно нелинейная среда, даже при слабых полях и токах, если с увеличением E происходит сильный разогрев, вследствие которого изменяется σ ; поэтому, например, нелинейно сопротивление лампы накаливания.

2. Ферромагнетизм и сегнетоэлектричество. Ферромагнетики в первую очередь характерны самопроизвольной намагниченностью (§ 21, п. 4). Говоря о модели среды в виде совокупности магнитных диполей, приходится в данном случае вводить в рассмотрение весьма сильные внутренние ориентирующие факторы, сущность которых получает объяснение лишь с позиций квантовой физики. Под действием этих факторов диполи должны ориентироваться параллельно, и это действительно происходит внутри очень малых, но макроскопических областей, называемых *доменами*; последние, однако, образуют (для определенности будем говорить о поликристаллическом веществе) хаотическую

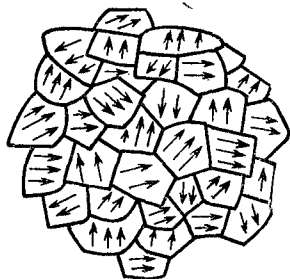


Рис. 86.2.

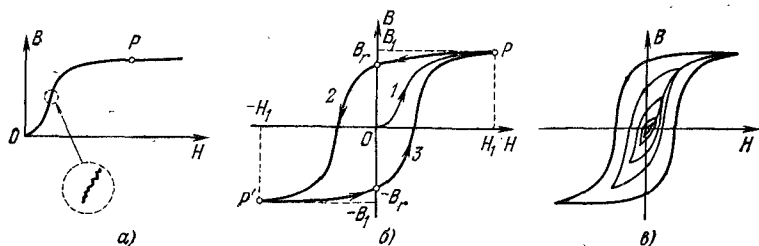


Рис. 86.3.

структуру (рис. 86.2). Является ли при этом вещество в среднем намагниченным, зависит от его «предыстории».

Если в исходном состоянии ферромагнетик размагничен (равна нулю средняя самопроизвольная намагниченность M^0), то с приложением магнитного поля средняя индукция B в зависимости от H будет изменяться, как показано на рис. 86.3, а. Домены деформируются с тенденцией превратиться в один-единственный домен, в котором вектор намагниченности параллелен H — «насыщение». Интересно, что скачкообразность этого процесса может быть замечена экспериментально («скачки Баркгаузена»); на

рис. 86.3, а схематически представлен участок средней части кривой $B(H)$ в увеличенном масштабе. Эта кривая намагничивания демонстрирует существенную нелинейность зависимости.

Пусть, намагничивая ферромагнетик, мы увеличивали напряженность магнитного поля H от нуля до некоторой величины H_1 , что описывается движением изображающей точки по кривой намагничивания от начала координат до положения $P(H_1, B_1)$ (рис. 86.3, а, б). Если теперь уменьшать H , то это отнюдь не приведет к возвращению в предшествующие состояния. Ход изменения B будет соответствовать движению по кривой 2 (рис. 86.3, б), так что при $H=0$ будет $B=B_r$ — «остаточная индукция». Дальнейшее движение по кривой 2 отвечает изменению знака (направления) напряженности магнитного поля при прохождении через нуль. При $H=-H_1$ мы придем в точку $P'(-H_1, -B_1)$, которая симметрична $P(H_1, B_1)$ относительно начала координат, а изменив здесь направление намагничивающего поля, будем уже двигаться по кривой 3 и, снова пройдя через нуль, вернемся в $P(H_1, B_1)$. При этом оказывается пройденной замкнутая кривая, называемая *петлей гистерезиса*.

Если, прилагая поле к размагниченному ферромагнетик, остановиться не в точке $P(H_1, B_1)$, а «раньше — при меньшем значении H , то можно пройти другую петлю гистерезиса, которая будет лежать внутри первой. Ряд таких частных петель показан на рис. 86.3, в. При очень малых полях петли гистерезиса вырождаются в отрезки прямой начального участка на кривой намагничивания; в этой области процесс *обратим*. В дальнейшем же *необратимость* намагничивания обусловлена потерями энергии при деформации доменной структуры вещества.

Согласно (10.8) и § 11, п.1 бесконечно малое приращение магнитной энергии в объеме V можно выразить в виде

$$dW^M = \int_V \mathbf{H} d\mathbf{B} dv, \quad (86.1)$$

а ее изменение при переходе от состояния H_1, B_1 к H_2, B_2 есть

$$W_2^M - W_1^M = \int_V \int_{B_1}^{B_2} \mathbf{H} d\mathbf{B} dv. \quad (86.2)$$

При циклическом перемагничивании ферромагнетика, совершив один обход петли гистерезиса, получим

$$\Delta W^M = \int_V \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} dv, \quad (86.3)$$

где контурный интеграл есть не что иное, как площадь этой петли на графике зависимости $B(H)$. Таким образом, возвращение в первоначальное состояние достигается здесь ценой потери энергии ΔW^M .

Если магнитное поле гармонически колеблется, то изображающая точка проходит петлю гистерезиса за каждый период коле-

баний. Потери оказываются пропорциональными площади петли и частоте. Надо отметить, что сам характер петли гистерезиса зависит от быстроты намагничивания, т. е. от частоты колебаний.

Подчеркнем, что, хотя рассмотренный выше процесс намагничивания ферромагнетика имеет резко нелинейный характер, гистерезис — явление, которое может заключаться всего лишь в запаздывании линейного процесса. Если в рамках метода комплексных амплитуд имеется линейная зависимость $\dot{B}_m = \mu \dot{H}_m$ (§ 29, п.2), то это означает, что при $H = H_m \cos \omega t$ будет $B = \mu H_m \cos(\omega t - \beta)$. График $B(H)$ свидетельствует о гистерезисе: он циклический, а точнее, кривая есть эллипс. Вычисляя интеграл (86.3), учтем, что $dB = -\mu \omega H_m \sin(\omega t - \beta) dt$. Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{P}_\Pi^M &= \frac{\Delta W_T^M}{T} = -\frac{\omega \mu}{T} \int_V H_m^2 \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t - \beta) dt dv = \\ &= \frac{\omega \mu \sin \beta}{2} \int_V H_m^2 dv = \frac{\omega \mu''}{2} \int_V H_m^2 dv. \end{aligned}$$

Этот результат совпадает с известным из § 30, п.2 (ср. (30.14)). Разумеется, при комплексной диэлектрической проницаемости можно говорить об электрическом гистерезисе, если $\alpha \neq 0$.

Вернемся к случаю постоянного магнитного поля в ферромагнетике. Пусть требуется рассчитать тороид с зазором, принимаемый за магнитную цепь (§ 24, п. 2, рис. 24.3,а). Согласно § 24, п. 2 (см. вывод формулы (24.8))

$$nI = H(L - d) + H_{\text{заз}} d,$$

а поскольку вектор B , будучи нормальным к границе раздела сред, имеет одно и то же значение в ферромагнетике и воздушном зазоре, то отсюда

$$nI = H(L - d) + \frac{B}{\mu_0} d, \quad (86.4)$$

где имеются в виду B и H в ферромагнетике. В то же время B и H связаны нелинейной зависимостью типа рис. 86.3, б. Требуемое решение задачи находится графически: на график гистерезиса наносится прямая $B(H)$, описываемая уравнением (86.4), как это показано на рис. 86.4. Теперь надо лишь взять значения B и H , соответствующие точке пересечения обеих линий. Таких точек три, и какую из них выбрать, ясно из предыдущего; если, например, тороид сначала был размагничен, то это будет точка Q .

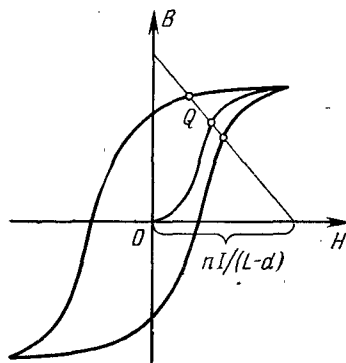


Рис. 86.4.

О сегнетоэлектриках скажем лишь, что зависимость $D(E)$ здесь имеет в основных чертах такой же характер, как зависимость $B(H)$ в случае ферромагнетиков, хотя внутренние процессы — совершенно иные.

3. Нелинейности в электродинамике. В § 80, п. 1 оказалось возможным *линеаризовать* нелинейную задачу электродинамики в условиях, когда постоянная составляющая поля значительно превышает переменную. Такие условия довольно типичны. Пусть имеется, например, нелинейная зависимость $j(E)$ (рис. 86.5), причем $E = E_0 + E(t)$; $E_0 = \text{const}$, $|E(t)| \ll E_0$ (например, $E(t) = E_m \cos \omega t$ и $E_m \ll E_0$). Очевидно, что $\Delta j \approx \frac{\partial j}{\partial E} \Delta E = \frac{\partial j}{\partial E} E(t)$, т. е. чем меньше переменная составляющая (приращение) напряженности поля, тем с большим основанием зависимость Δj от ΔE ($j(t)$ от $E(t)$) можно считать линейной; коэффициент $\frac{\partial j}{\partial E}$

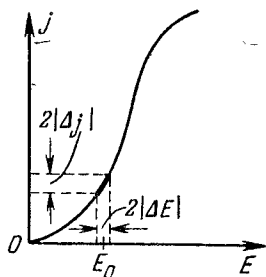


Рис. 86.5.

иногда называют «дифференциальной удельной проводимостью» и обозначают σ_d , это функция постоянной составляющей: $\sigma_d = \sigma_d(E_0)$ (рис. 86.5). Аналогично при рассмотрении зависимости $D(E)$ и $B(H)$ вводят понятия дифференциальных проницаемостей $\epsilon_d = \epsilon_d(E_0)$ и $\mu_d = \mu_d(H_0)$.

Зависимость становится существенно нелинейной даже при малых амплитудах векторов поля, если в рядах Тэйлора для зависимостей $j(E)$, $D(E)$, $B(H)$ и т. п. (ср. (5.10)) нельзя пренебречь производными

второго и более высоких порядков. Возьмем для определенности зависимость $P(E)$ (5.3), которую представим подробно (5.11), но запишем это несколько по-иному:

$$\left. \begin{aligned} P(E) &= P^{\text{л}} + P^{\text{нл}}, \\ P^{\text{л}} &= \epsilon_0 \chi_{\text{л}}^{\text{э}} E, \quad P^{\text{нл}} = \epsilon_0 (\chi_1^{\text{э}} E + \chi_2^{\text{э}} E^2 + \dots + \chi_i^{\text{э}} E^i + \dots) E. \end{aligned} \right\} (86.5)$$

Здесь поляризованность P разбита на линейную и нелинейную части $P^{\text{л}}$ и $P^{\text{нл}}$ соответственно.

В простейшем случае вектор E совершает гармонические колебания с частотой ω : $E = E_m \cos(\omega t + \varphi)$. Хотя метод комплексных амплитуд (Приложение 3) в данном случае прямо и неприменим, мы можем воспользоваться представлением (П3.5), согласно которому $E = \frac{1}{2} (\dot{E}_m e^{i\omega t} + \dot{E}_m^* e^{-i\omega t})$. Подставив это в (86.5), легко убедиться, что $P^{\text{нл}}$ предстает как ряд, состоящий из членов $\dot{P}_m^{\text{нл}}(\pm n\omega)$, которые изменяются по закону $e^{\pm in\omega t}$ ($n=0, 1, 2, \dots$), причем

$$\begin{aligned} \dot{P}_m^{\text{нл}}(\omega) &= \epsilon_0 [\dot{\chi}^{\text{э}}(\omega + \omega - \omega) \dot{E}_m \dot{E}_m^* + \\ &\quad + \dot{\chi}^{\text{э}}(\omega + \omega + \omega - \omega - \omega) \dot{E}_m^{\text{э}} \dot{E}_m^{\text{э}*} + \dots], \\ \dot{P}_m^{\text{нл}}(2\omega) &= \epsilon_0 [\dot{\chi}^{\text{э}}(\omega + \omega) \dot{E}_m^{\text{э}} + \dot{\chi}^{\text{э}}(\omega + \omega + \omega - \omega) \dot{E}_m^{\text{э}} \dot{E}_m^{\text{э}*} + \dots] \end{aligned}$$

и т. д., где различные $\dot{\chi}^{\circ}(\dots)$ — коэффициенты, составленные из χ_i° (86.5). Вследствие нелинейности функции $P(E)$ гармонические колебания E с частотой ω порождают также колебания с удвоенными, утроенными и т. д. частотами вектора поляризованности. Чтобы найти, например, составляющую удвоенной частоты, надо сложить $\dot{P}_m^{\text{нл}}(2\omega)$ и $\dot{P}_m^{\text{нл}}(-2\omega)$ либо взять вещественную часть от одной из этих величин, например $\dot{P}_m^{\text{нл}}(2\omega)$.

Если вектор E имеет две частотные составляющие, т. е. $E = E_{mp} \cos(\omega_p t + \varphi_p) + E_{mq} \cos(\omega_q t + \varphi_q)$, то таким же путем легко разложить $\dot{P}^{\text{нл}}$ в ряд по частотным компонентам $\dot{P}_m^{\text{нл}}(\pm k\omega_p \pm n\omega_q)$, изменяющимся, как $e^{i(\pm k\omega_p \pm n\omega_q)t}$, причем

$$\begin{aligned} \dot{P}_m^{\text{нл}}(\omega_p \pm \omega_q) &= \\ &= \varepsilon_0 \left[\dot{\chi}^{\circ}(\omega_p \pm \omega_q) \dot{E}_{mp} \dot{E}_{mq} + \dot{\chi}^{\circ}(\omega_p + \omega_p - \omega_p \pm \omega_q) \dot{E}_{mp}^{\circ} \dot{E}_{mp}^* \dot{E}_{mq} + \dots \right], \\ \dot{P}_m^{\text{нл}}(2\omega_p \pm \omega_q) &= \varepsilon_0 \left[\dot{\chi}^{\circ}(\omega_p + \omega_p \pm \omega_q) \dot{E}_{mp} \dot{E}_{mq} + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\chi}^{\circ}(\omega_p + \omega_p + \omega_p - \omega_p \pm \omega_q) \dot{E}_{mp}^{\circ} \dot{E}_{mp}^* \dot{E}_{mq} + \dots \right] \end{aligned}$$

и т. д., где всевозможные $\dot{\chi}^{\circ}(\dots)$ составлены из χ_i° (86.5). Компонента той или иной комбинационной частоты $\pm k\omega_p \pm n\omega_q$ находится этим способом.

Все рассуждения можно обобщить на любого вида временные зависимости поля, используя разложение в ряд или интеграл Фурье (Приложение 8). Разумеется, вместо $P(E)$ можно говорить также о зависимости $M(H)$, $j(E)$ и т. п.

4. Дальнейшее обсуждение. Рассмотрим пример, который послужит иллюстрацией к представлению (86.5), но в то же время покажет и его ограниченность. Пусть в плазме электромагнитное поле задано в виде плоской однородной волны, которая была бы в пустоте (в разреженной плазме поле может быть очень близким), а именно (§ 32, п. 3):

$$E = x_0 A \cos(\omega t - k_0 z), \quad H = y_0 \frac{A}{W_0} \cos(\omega t - k_0 z), \quad (86.6)$$

$(k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}, \quad W_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}})$. Будем учитывать лоренцеву силу, обусловленную переменным магнитным полем; при этом уравнение движения отличается от (82.3) лишь присутствием H вместо H_0 . Полагая, согласно (86.6), $E = x_0 E$ и $H = y_0 E/W_0$, напомним:

$$\frac{q}{m} \left\{ x_0 E + \frac{1}{v_0} \left[\frac{dr}{dt}, y_0 E \right] \right\} = \frac{d^2 r}{dt^2} + v \frac{dr}{dt} \quad \left(v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right). \quad (86.7)$$

Для простоты пренебрежем столкновениями ($v=0$) и приведем

уравнение к координатной форме:

$$\frac{q}{m} E - \frac{q}{m} \frac{1}{v_0} \frac{dz}{dt} E = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{q}{m} \frac{1}{v_0} \frac{dx}{dt} E = \frac{d^2z}{dt^2}. \quad (86.7a)$$

Нелинейность заключена в произведениях скоростей на напряженность поля (первое и третье равенства); так как $v_{z,x} \ll v_0$ ¹⁾, соответствующие члены весьма невелики и в первом — линейном — приближении могут быть отброшены. Тогда (86.7a) есть частная форма уравнения (80.11), и для нахождения \mathbf{P} можно воспользоваться формулой (80.14). Впрочем, при этом первое равенство (86.7a) ввиду (86.6) дает

$$\frac{q}{m} A \cos(\omega t - kz) = \frac{d^2x}{dt^2},$$

откуда

$$x = - \frac{q}{m\omega^2} A \cos(\omega t - kz) \quad (86.8)$$

и, следовательно, суммируя электрические моменты частиц $q\mathbf{x}$ в единице объема, получим

$$\mathbf{P}^{\text{л}} = - \mathbf{x}_0 \frac{e^2 N'}{m\omega^2} A \cos(\omega t - kz) = - \frac{e^2 N'}{m\omega^2} \mathbf{E} \quad (86.9)$$

(N' — число электронов, $q=e$); это же следует из (80.14).

Чтобы найти нелинейную поправку, внесем (86.8) в третью строчку (86.7a). Учитывая также (86.6), после простых преобразований получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{q}{m} \right)^2 \frac{A^2}{\omega v_0} \sin(2\omega t - 2kz) = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Отсюда

$$z = - \frac{A^2}{8\omega^3 v_0} \left(\frac{q}{m} \right)^2 \sin(2\omega t - 2kz). \quad (86.10)$$

Таким образом, вследствие нелинейности плазмы, обусловленной лоренцевой силой, возникает *продольное* колебательное движение частиц с *удвоенной* частотой. Соответствующая составляющая вектора поляризованности находится умножением на $\mathbf{z}_0 q N'$

$$\mathbf{P}^{\text{нл}} = - \mathbf{z}_0 \frac{e^3 N'}{8\omega^3 v_0 m^2} A^2 \sin(\omega t - 2kz) \quad (q=e). \quad (86.11)$$

Очевидно,

$$\dot{\mathbf{P}}_m^{\text{нл}}(2\omega) = \mathbf{z}_0 \frac{ie^3 N'}{8\omega^3 v_0 m^2} \dot{\mathbf{E}}_m^2. \quad (86.11a)$$

Интересно, что найденная компонента нелинейной поляризованности не параллельна, а ортогональна напряженности электрического поля. Скалярное разложение (86.5) не предусматривает такой возможности. Более общей является векторная запись типа (86.5), в которой частичные восприимчивости имеют тензорный характер.

Нелинейность рассмотренного вида не отнимает энергии распространяющейся волны, и излучение с частотой 2ω отсутствует.

¹⁾ Поскольку используются законы классической механики, скорости должны быть достаточно малы.

Действительно, интеграл

$$(dW^{\text{нл}})^{\text{нл}} = \int_V \mathbf{E} dD^{\text{нл}} dv = \int_V \mathbf{E} dP^{\text{нл}} dv \quad (86.12)$$

(ср. (86.1)) в силу ортогональности \mathbf{E} и $\mathbf{P}^{\text{нл}}$ равен нулю.

Однако существует еще целый ряд факторов, обуславливающих нелинейность плазмы. Частота соударений ν (§ 80, п. 3) при данной длине свободного пробега зависит от скорости движения электронов. На тепловое движение налагается движение под действием поля, так что в (80.16) $\nu = \nu(dr/dt)$. В свою очередь скорость $\mathbf{v} = dr/dt$ зависит от поля; в пренебрежении поглощением, согласно (80.12а), $\dot{\mathbf{v}}_m = iq\dot{\mathbf{E}}_m/m\omega$. Таким образом, в некотором приближении верно, что через ν функцией поля является комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы (80.19).

При распространении радиоволн в ионосфере указанная нелинейность плазмы проявляется на средних волнах: при данной мощности волны ν_m возрастает с уменьшением ω , однако на длинных волнах поле лишь незначительно проникает в ионосферу. Если, в частности, мощная волна несет модулированный сигнал, то промодулированной оказывается и величина ν , а с ней поглощение. При наличии другой — относительно слабой — волны это изменяет условия ее распространения; на второй сигнал (в силу изменения амплитуды волны с ν) налагается первый. Этот эффект *перекрестной модуляции* называется также «люксембург-горьковским».

При распространении волны, создаваемой мощным лазером, через жидкость или газ учитывают нелинейность поляризации, которая оказывается вызванной действием многих факторов. Помимо поведения «оптических» электронов в сильном световом поле, существенно механическое действие поля на вещество; возникает давление, пропорциональное средней мощности волны, сгущающее среду и увеличивающее ее диэлектрическую проницаемость. Часто приближенно полагают, что с учетом всех факторов

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \alpha \bar{E}^2), \quad (86.13)$$

где $\alpha > 0$, а \bar{E}^2 — среднее значение квадрата напряженности электрического поля (ср. (5.11)); обычно речь идет о колебаниях с медленно меняющейся амплитудой, и усреднение производится по квазипериоду (при гармонических колебаниях $\bar{E}^2 = E_m^2/2$).

§ 87. Волновые процессы в нелинейных средах

1. Представление уравнений Максвелла. Продолжим рассмотрение сред с нелинейной зависимостью $\mathbf{P}(\mathbf{E})$, т. е. нелинейных диэлектриков; переход к случаю нелинейных магнетиков не представляет труда: достаточно лишь к окончательным результатам применить принцип двойственности (§ 46, п. 3).

Согласно (5.1) и (86.5)

$$D = \varepsilon_0 E + P^л + P^{нл} = \varepsilon_л E + P^{нл},$$

где $\varepsilon_л = \varepsilon_0 (1 + \chi_л^э)$ (ср. (5.8)); пусть также $B = \mu_0 H$. Уравнения Максвелла (2.1), (2.2) принимают вид

$$\text{rot } H = \varepsilon_л \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P^{нл}}{\partial t} + j, \quad \text{rot } E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (87.1)$$

где $j = \sigma E + j^{ст}$.

Пусть источник совершает гармонические колебания с частотой ω : $j^{ст} = j_m^{ст} \cos(\omega t + \varphi)$. Разложим функции $E = E(t)$, $H = H(t)$ и $P = P(t)$ в ряды Фурье (П8.1):

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{E}_m(n\omega) e^{in\omega t} \quad \text{и т.д.}, \quad (87.2)$$

а плотность стороннего тока представим в виде: $j^{ст} = \frac{1}{2} (j_m^{ст} e^{i\omega t} + j_m^{ст*} e^{-i\omega t})$. Внося это в уравнения (87.1), получаем следующую бесконечную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot } \dot{H}_m(n\omega) &= in\omega [\varepsilon_л(n\omega) \dot{E}_m(n\omega) + \dot{P}_m^{нл}(n\omega)] + j_m^{ст}(n\omega), \\ \text{rot } \dot{E}_m(n\omega) &= -in\omega \mu_0 \dot{H}_m(n\omega), \end{aligned} \quad (87.3)$$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Здесь $\varepsilon_л(n\omega) = \varepsilon_л - i \frac{\sigma}{n\omega}$ и все $j_m^{ст}(n\omega)$ равны нулю, за исключением $j_m^{ст}(\pm\omega)$ ($j_m^{ст}(\omega) = j_m^{ст}/2$ и $j_m^{ст}(-\omega) = j_m^{ст*}/2$).

Присутствие $\dot{P}_m^{нл}(n\omega)$ делает все пары частичных уравнений Максвелла относительно коэффициентов Фурье (87.2) *связанными*. Действительно, подобно тому как это было в § 86, п. 3,

$$\begin{aligned} \dot{P}_m^{нл}(\omega) &= \varepsilon_0 [\dot{\chi}^э(2\omega - \omega) \dot{E}_m(2\omega) \dot{E}_m^*(\omega) + \dot{\chi}^э(3\omega - 2\omega) \times \\ &\times \dot{E}_m(3\omega) \dot{E}_m^*(2\omega) + \dots + \dot{\chi}^э(\omega + \omega - \omega) \dot{E}_m^2(\omega) \dot{E}_m^*(\omega) + \dots], \quad (87.4) \\ \dot{P}_m^{нл}(2\omega) &= \varepsilon_0 [\dot{\chi}^э(\omega + \omega) \dot{E}_m^2(\omega) + \dot{\chi}^э(3\omega - \omega) \dot{E}_m(3\omega) \dot{E}_m^*(\omega) + \dots \\ &\dots + \dot{\chi}^э(\omega + \omega + \omega - \omega) \dot{E}_m^3(\omega) \dot{E}_m^*(\omega) + \dots] \end{aligned}$$

и т. д.

Обычно, анализируя определенный нелинейный эффект, оставляют в (87.3) лишь наиболее существенные связи, отбрасывая малые члены в представлениях (87.4). Относительно мала вся частотная компонента $\dot{P}_m^{нл}(\omega)$ нелинейной поляризованности. Пренебрегая ею, имеем обычные линейные уравнения Максвелла относительно первой гармоники поля

$$\text{rot } \dot{H}_m(\omega) = i\omega \varepsilon_л(\omega) \dot{E}_m(\omega) + j_m^{ст}(\omega), \quad \text{rot } \dot{E}_m(\omega) = -i\omega \mu_0 \dot{H}_m(\omega). \quad (87.5)$$

Во второй строчке (87.4) справа оставим лишь первый член, тогда для второй гармоники получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_m(2\omega) &= i2\omega \dot{\epsilon}_d(2\omega) \dot{E}_m(2\omega) + i2\omega \epsilon_0 \dot{\chi}^s(\omega + \omega) \dot{E}_m(\omega) \dot{E}_m(\omega), \\ \operatorname{rot} \dot{E}_m(2\omega) &= -i2\omega \mu_0 \dot{H}_m(2\omega). \end{aligned} \quad (87.6)$$

Ясно, что совокупность уравнений (87.5), (87.6) описывает порождение нелинейной средой второй гармоники поля. Уравнения (87.5) формулируют линейную задачу электродинамики о возбуждении поля, гармонически колеблющегося с частотой ω , заданным источником (функция $(\dot{j}_m^{\text{ct}}(\omega))$). Определив $\dot{E}_m(\omega)$, мы тем самым приобретаем информацию о «нелинейном источнике», фигурирующем в уравнениях (87.6) в виде функции $i2\omega \dot{P}_m^{\text{nl}}(2\omega) = i2\omega \epsilon_0 \dot{\chi}^s(\omega + \omega) \times \dot{E}_m(\omega) \dot{E}_m(\omega)$; поскольку она теперь задана, получена формулировка линейной задачи электродинамики о возбуждении поля, колеблющегося с удвоенной частотой.

Совершенно аналогично решается задача о порождении полей на комбинационных частотах. При этом сторонний ток задается как наложение нескольких частотных компонент, например $\dot{j}^{\text{ct}} = \dot{j}_{m\rho}^{\text{ct}} \cos(\omega_\rho t + \varphi_\rho) + \dot{j}_{mq}^{\text{ct}} \cos(\omega_q t + \varphi_q)$. В первом приближении для каждой из этих компонент формулируется линейная задача типа (87.5) и задача с нелинейным источником типа (87.6). Это называют также «приближением заданного поля», так как не учитывается реакция нелинейной среды на частотные компоненты исходного источника.

2. Падение волны на границу раздела с нелинейной средой. В качестве примера исследуем падение плоской однородной волны перпендикулярной поляризации из линейной среды 1 на плоскую границу ($z=0$) с нелинейной средой 2, задавая ее выражениями комплексных амплитуд (38.1)

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_m^0(\omega) &= x_0 \dot{A} e^{-i k_1(\omega)(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \\ \dot{H}_m^0(\omega) &= \frac{\dot{A}}{\dot{W}_1(\omega)} (y_0 \cos \varphi - z_0 \sin \varphi) e^{-i k_1(\omega)(y \sin \varphi + z \cos \varphi)}, \end{aligned} \right\} z < 0 \quad (87.7)$$

(рис. 38.1, а), где $k_1(\omega) = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_1(\omega)}$ и $\dot{W}_1(\omega) = \sqrt{\mu_0 / \dot{\epsilon}_1(\omega)}$ соответствуют заданным характеристикам среды 1.

Рассматривая первую гармонику, мы имеем уравнения Максвелла (29.11) с $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_1(\omega)$ и $\dot{\mu} = \mu_0$, а также $\dot{j}_m^{\text{ct}} = 0$ для первой среды и те же по форме уравнения (87.5) для второй — нелинейной — среды ($\dot{j}_m^{\text{ct}}(\omega) = 0$); источники отсутствуют (можно считать, что падающая волна возбуждается источником, лежащим в бесконечности). В сущности ставится именно та задача, которая была изучена в § 38, п. 1, и ее решение уже получено в виде

формул (38.10а), (38.10б), в которых, кроме заданных $\dot{k}_{1(\omega)}$ и $\dot{W}_{1(\omega)}$, надо в соответствии с (87.5) положить

$$\dot{k}_{2(\omega)} = \omega \sqrt{\dot{\epsilon}_l(\omega) \mu_0} \quad \text{и} \quad \dot{W}_{2(\omega)} = \sqrt{\mu_0 / \dot{\epsilon}_l(\omega)}.$$

Сосредоточим внимание на второй гармонике. Исключая в (87.6) $\dot{H}_m(2\omega)$, находим уравнение

$$\text{rot rot } \dot{E}_m(2\omega) - \dot{k}_{2(2\omega)}^2 \dot{E}_m(2\omega) = \Delta \dot{k}_{2(2\omega)}^2 \dot{E}_m(\omega) \dot{E}_m(\omega), \quad z > 0, \quad (87.8)$$

где $\dot{k}_{2(2\omega)}^2 = 4\omega^2 \dot{\epsilon}_l(2\omega) \mu_0$ и $\Delta \dot{k}_{2(2\omega)}^2 = 4\omega^2 \epsilon_0 \dot{\chi}^2(\omega + \omega) \mu_0$. В первой среде комплексная амплитуда $\dot{E}_m(2\omega)$ подчинена вытекающему из (29.11) уравнению

$$\text{rot rot } \dot{E}_m(2\omega) - \dot{k}_{1(2\omega)}^2 \dot{E}_m(2\omega) = 0, \quad (87.9)$$

где $\dot{k}_{1(2\omega)}^2 = 4\omega^2 \dot{\epsilon}_1(2\omega) \mu_0$.

Очевидно, что в (87.8) $\dot{E}_m(\omega)$ есть не что иное, как комплексная амплитуда прошедшей волны первой гармоники, а именно, согласно (38.10а) $\dot{E}_m(\omega) = \mathbf{x}_0 \dot{A} \dot{\tau}_\perp e^{-i \dot{k}_{2(\omega)}(y \sin \Theta + z \cos \Theta)}$, а потому уравнения (87.8) и (87.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \dot{E}_m(2\omega)}{dy^2} + \frac{d^2 \dot{E}_m(2\omega)}{dz^2} + \dot{k}_{1(2\omega)}^2 \dot{E}_m(2\omega) = \\ = \begin{cases} -\Delta \dot{k}_{2(2\omega)}^2 \dot{A}^2 \dot{\tau}_\perp^2 e^{-i 2 \dot{k}_{2(\omega)}(y \sin \Theta + z \cos \Theta)}, & z > 0; \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (87.10) \end{aligned}$$

Решение уравнения (87.10) для нелинейной среды ($z > 0$), когда оно является неоднородным, естественно искать в виде

$$\dot{E}_m(2\omega) = \dot{T} e^{-i \dot{k}_{2(2\omega)}(y \sin \Theta + z \cos \Theta)} + \dot{S} e^{-i 2 \dot{k}_{2(\omega)}(y \sin \Theta + z \cos \Theta)},$$

где первый член — решение соответствующего однородного уравнения (с правой частью в виде нуля), выражающее прошедшую волну, амплитуда которой и ориентационный угол Θ (ср. (38.2)) пока неизвестны. Второй член — частное решение неоднородного уравнения также типа плоской волны; угол Θ — тот же, что и в выражении прошедшей волны первой гармоники, а комплексная амплитуда \dot{S} легко находится при подстановке в (87.10). В результате имеем

$$\begin{aligned} \dot{E}_m(2\omega) = \mathbf{x}_0 \left[\dot{T} e^{-i \dot{k}_{2(2\omega)}(y \sin \Theta + z \cos \Theta)} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta \dot{k}_{2(2\omega)}^2 \dot{A}^2 \dot{\tau}_\perp^2}{4 \dot{k}_{2(2\omega)}^2 - \dot{k}_{2(\omega)}^2} e^{-i 2 \dot{k}_{2(\omega)}(y \sin \Theta + z \cos \Theta)} \right], \quad z > 0. \quad (87.11) \end{aligned}$$

Решение уравнения (87.10) для линейной среды ($z < 0$), возьмем

в виде плоской волны, описываемой подобно отраженной волне первой гармоники (38.3), так что

$$\dot{E}_m(2\omega) = x_0 \dot{R} e^{-i k_1(2\omega)(y \sin \Phi + z \cos \Phi)}, \quad z < 0, \quad (87.12)$$

где \dot{R} и Φ — неизвестные величины.

Смысл полученных результатов состоит в том, что при падении на границу с нелинейной средой некоторой гармонической волны, помимо отраженной и преломленной волн той же частоты, во второй среде появляется волновое поле удвоенной частоты в виде двух «преломленных» волн (87.11), а в первой среде — «отраженная» волна удвоенной частоты (87.12).

Чтобы убедиться в правильности этого вывода, нужно лишь проверить, что при должном выборе постоянных в (87.11), (87.12) граничные условия будут удовлетворены; при этом, разумеется, мы получим новую информацию о поле удвоенной частоты.

Начнем с вывода соотношений типа законов Снеллиуса, потребовав (ср. § 37, п. 1), чтобы выражения (87.11) и (87.12) были одинаковыми функциями координаты y ; в силу этого необходимого условия

$$\dot{k}_2(2\omega) \sin \Theta = 2 \dot{k}_2(\omega) \sin \vartheta = \dot{k}_1(2\omega) \sin \Phi, \quad (87.13)$$

или

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \vartheta} = \frac{2 \dot{k}_2(\omega)}{\dot{k}_2(2\omega)}, \quad \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} = \frac{\dot{k}_2(2\omega)}{\dot{k}_1(2\omega)}. \quad (87.13a)$$

Пусть допустимо пренебречь поглощением в обеих средах ($\epsilon_1 = \epsilon$ и $\epsilon_n = \epsilon_n$ в силу $\sigma_2 = \sigma = 0$), однако будем считать, что вообще $\epsilon_{1,n}(\omega) \neq \epsilon_{1,n}(2\omega)$. В этом случае из (87.13a) находим

$$\begin{aligned} \frac{\sin \Theta}{\sin \vartheta} &= \sqrt{\frac{\epsilon_n(\omega)}{\epsilon_n(2\omega)}}, \\ \frac{\sin \Phi}{\sin \Theta} &= \sqrt{\frac{\epsilon_n(2\omega)}{\epsilon_1(2\omega)}}. \end{aligned} \quad (87.14)$$

Схема лучей представлена на рис. 87.1. Символами (0), (+) и (—), как и в §§ 37 и 38, обозначены лучи, соответствующие падающей, преломленной и отраженной волнам основной частоты. Лучи (T), (S) и (R) отвечают волнам удвоенной частоты с амплитудными коэффициентами \dot{T} , \dot{S} и \dot{R} в (87.11), (87.12) и предшествующем выражении.

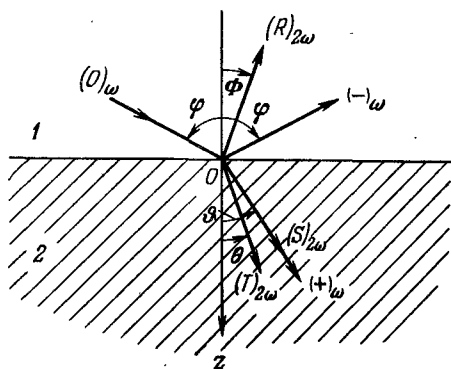


Рис. 87.1.

Покажем, как определяются коэффициенты T и R . Ввиду непрерывности $\dot{E}_{mx} = \dot{E}_m$ при $z=0$ из (87.11) и (87.12) получаем

$$\dot{T} - \dot{R} = - \frac{\Delta \dot{k}_{2(2\omega)}^2 \dot{A}^2 \dot{\tau}_{\perp}^2}{4 \dot{k}_{2(\omega)}^2 - \dot{k}_{2(2\omega)}^2}. \quad (87.15)$$

Непрерывны также магнитные компоненты $\dot{H}_{my} = \frac{i}{2\omega\mu_0} \partial \dot{E}_m / \partial z$. Поэтому

$$\dot{k}_{2(2\omega)} \dot{T} \cos \Theta - \dot{k}_{1(2\omega)} \dot{R} \cos \Phi = - 2 \frac{\Delta \dot{k}_{2(2\omega)}^2 \dot{A}^2 \dot{\tau}_{\perp}^2}{4 \dot{k}_{2(\omega)}^2 - \dot{k}_{2(2\omega)}^2} \dot{k}_{2(\omega)} \cos \vartheta. \quad (87.16)$$

Чтобы получить \dot{T} и \dot{R} , надо лишь выписать решение этой системы двух уравнений, что предоставляется читателю. Результат будет своего рода обобщением формул Френеля на нелинейные среды¹⁾.

3. О самовоздействии волновых процессов. Заключение. Луч лазера — это резко неоднородная волна, амплитуда которой весьма быстро убывает с расстоянием от оси. Распространяясь в среде с диэлектрической проницаемостью вида (86.13), такой волновой процесс, можно сказать, увеличивает оптическую плотность в области луча, создавая осесимметричную неоднородность, что в свою очередь оказывает действие на электромагнитное поле; происходит *самовоздействие* волнового процесса. Разумеется, такое описание несколько упрощает процесс как единое целое. Но во всяком случае верно, что при прохождении луча через слабо нелинейную среду его поле все более деформируется. Можно ожидать, что при определенных условиях волновому процессу сопутствует образование канала, направляющего его энергию, нечто вроде диэлектрического волновода. Рассмотрим элементарные соображения, поясняющие возможность такой *самоканализации*, которые были высказаны Р. Чиао, Е. Гармайр и Ч. Таунсом²⁾.

Пусть круглой апертурой радиуса R с равномерным распределением поля создается «луч»; согласно (53.13) его расхождение характеризуется углом

$$\vartheta_0 = 1,22 \lambda / 2R_0. \quad (87.17)$$

С точки зрения геометрической оптики естественно приписать этому слабо расходящемуся лучу резкую границу: интенсивность изменяется скачкообразно от нуля вне луча до некоторой постоянной в его сечении. Предположим, что луч идет из левого полупространства (рис. 87.2), где среда линейна, и падает на границу с нелинейной средой (на рисунке пунктир). Далее в области луча, на рисунке заштрихованной, среда будет иметь постоянную

¹⁾ Впервые отражение от нелинейной среды, по-видимому, было исследовано Н. Бломбергеном и П. Першаном (N. Bloembergen, P. S. Pershan, Phys. Rev. 128, 606 (1962)).

²⁾ R. Chiao, E. Garmire, C. Townes, Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964).

диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha \bar{E}^2)$ (86.13); вне луча везде диэлектрическая проницаемость есть ε_0 .

Мыслимо, что в нелинейной среде луч станет нерасходящимся. Действительно (рис. 87.2), в силу второго закона Снеллиуса

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{1 + \alpha \bar{E}^2}. \quad (87.18)$$

Полагая здесь $\vartheta = 90^\circ$, мы удовлетворяем условию критического полного отражения (начала полного отражения), при котором луч направляется вдоль границы раздела сред (§ 37, п. 2), т. е. в данном случае пучок лучей становится параллельным, образуется нерасходящийся волновой канал.

Итак, условие самоканализации имеет вид

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \sqrt{1 + \alpha \bar{E}^2} = 1 + \frac{1}{2} \alpha \bar{E}^2 + \dots, \quad (87.19)$$

а поскольку

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\cos \vartheta_0} \approx \frac{1}{\sqrt{1 - \vartheta_0^2}} = 1 + \frac{1}{2} \vartheta_0^2 + \dots,$$

то, внося в (87.19) выражение ϑ_0 из (87.17), получаем

$$(1,22 \lambda / 2R)^2 = \alpha \bar{E}^2, \quad (87.20)$$

где также заменено R_0 на R (рис. 87.2) в соответствии с предположением об однородности поля в поперечном сечении канала.

Вычисляя передаваемую при самоканализации мощность $\bar{P}_0 = \pi R^2 \bar{E}^2 / W_0$, на основании (87.20) получаем

$$\bar{P}_0 = 1,22^2 \lambda^2 \frac{\pi}{4 W_0 \alpha} = 0,0031 \frac{\lambda^2}{\alpha} \quad (W_0 = 120\pi). \quad (87.21)$$

Это «критическая мощность» самоканализации. При $\bar{P} < \bar{P}_0$ пучок лучей будет еще расходиться, а при $\bar{P} > \bar{P}_0$ он должен стать сходящимся и фокусироваться в некоторой точке — самофокусировка.

Разумеется, ввиду упрощенности подхода полученный результат не претендует на точное количественное описание процесса.

Заканчивая на этом рассмотрение волновых процессов в нелинейных средах, подчеркнем, что тема эта весьма широка, и многие важные вопросы остались по необходимости вне нашего поля зрения. К ним относятся вопросы взаимодействия полей, образования ударных волн и другие. Наконец, при более подробном изучении можно было бы выявить черты общности в концепциях активности (§ 84) и нелинейности. Читателю, желающему расширить свои представления об электродинамике нелинейных сред, рекомендуются имеющиеся монографии [Д. 10, 11].

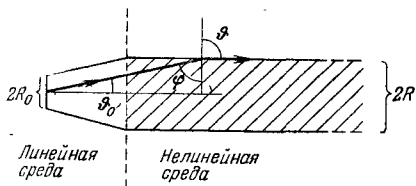


Рис. 87.2.

V. РАДИОЛИНИИ

В заключение мы возвращаемся к рассмотрению радиолиний, начальные сведения о которых были сообщены в §§ 41 и 42. Позднее обсуждались различные виды волновых процессов в природных условиях: земные и тропосферные радиоволны (§§ 58 и 59), радиоволны в ионосфере (§§ 81 и 84, п.1). В свою очередь этот материал был подготовлен предшествующим содержанием книги, что попутно отражено в ссылках. Таким образом, сведения о распространении радиоволн в природных условиях были постепенно углублены и расширены. На этой основе полезно вновь обратиться к материалу, изложенному в § 42, п. 3.

Предлагаемое резюме содержит ряд дополнительных данных о радиолиниях разных диапазонов (подробнее см. [Е.1—5]).

§ 88. Радиолинии разных диапазонов

1. Сверхдлинные, длинные и средние волны. В § 42, п. 3 уже отмечалось, что в диапазоне длинных волн (а это тем более верно для волн сверхдлинных) почва ведет себя обычно как проводник; следует добавить, что земная поверхность здесь оказывается относительно наиболее гладкой (§ 58, п. 1): большинство образований невелико в сравнении с длиной волны. В то же время из-за относительной быстроты изменения свойств среды (опять в масштабе длины волны) граница с ионосферой проявляет себя как наиболее резкая. В целом область пространства, в которой происходит распространение длинных и сверхдлинных волн, представляет собой сферический слой, ограниченный двумя хорошо отражающими поверхностями: поверхностью Земли и нижней границей ионосферы. Моделью области является сферический волновод (§ 42, п. 3).

Утверждение, что длинные (и сверхдлинные) волны неглубоко проникают в ионосферу (§ 42, п. 3), легко понять с позиций § 81, п. 1: согласно (81.1) при данном ϑ_0 концентрация электронов N' на высоте поворота луча тем меньше, чем ниже частота f , т. е. вместе с f высота эта падает, приближаясь к нижнему краю ионосферы. Следует, однако, иметь в виду, что условие применимости геометрической оптики в данном случае существенно нарушено, так что формула (81.1) способна давать лишь качественное представление.

Земная волна принимается вплоть до расстояния около 3000 км (§ 42, п. 3), но уже значительно ближе преобладает волна ионосферная. В практике расчета радиолиний длинных и сверхдлинных волн используется так называемая *формула Остина* (эмпирического происхождения); ниже она приводится в форме, которая употребительна в инженерной практике:

$$E_m = \frac{300 \sqrt{2P_A D_A}}{r} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} e^{-\frac{0,0014}{\lambda^{0,6}} r}. \quad (88.1)$$

Здесь D_A — к. н. д. передающей антенны (§ 41, п. 1), смысл угла

θ понятен из рис. 88.1, r и λ выражены в км, P_A — в квт, а амплитуда напряженности поля в месте приема E_m — в мв/м. Считается [Е.1], что формулой Остина можно пользоваться до расстояний 16 000 ÷ 18 000 км при рассмотрении радиолиний, функционирующих в дневные часы и проходящих над морем или сушей, причем в последнем случае начиная с расстояний 2000 ÷ 3000 км.

При расчетах напряженности поля земной волны до расстояний около 500 км применяется формула Шулейкина — Ван-дер-Поля (§59, п.2), а затем учитывается сферичность Земли; множитель ослабления в (59.15) находят, например, по формуле (59.18). Впрочем, с расстояний более 500 км земная волна существенно слабее ионосферной. Тропосфера практически не оказывает влияния на распространение сверхдлинных, длинных и средних волн.

Напомним, что к диапазону наиболее длинных волн относятся эффекты продольного (по отношению к земному магнитному полю) распространения, рассматривавшиеся в § 84 (п. 1, окончание).

Исторически сверхдлинные и длинные волны впервые использовались для трансатлантической связи (частоты 15 ÷ 50 кГц). Вообще радиолинии на этих волнах характеризуются высоким уровнем атмосферных — грозовых — помех; антенные сооружения имеют громадные размеры и весьма дороги; направленность излучения невелика (антенны по своим относительным размерам близки к элементарным излучателям, §§ 44 и 45); полоса частот узка. В то же время связь устойчива по отношению к ионосферным возмущениям; зона действия передатчика плавно — без колебаний интенсивности излучения — охватывает огромные пространства; дополнительным преимуществом является глубокое проникновение поля в слои воды (связь с подводными лодками и т. п.). Международными соглашениями предусматривается применение сверхдлинных и длинных волн, главным образом для радионавигации и радиовещания.

Перейдем к обсуждению особенностей радиолиний средних волн. Как отмечалось в § 42, п. 3, в отличие от длинных (и сверхдлинных) волн, отражаемых нижним краем ионосферы, т. е. от слоя E ночью и слоя D днем, средние волны не испытывают поворота к Земле при электронных концентрациях, которые свойственны слою D ; проходя через него, они сильно поглощаются; поворот же происходит в слое E . Поэтому днем связь осуществляется посредством земной волны; в свою очередь и она претерпевает большее поглощение, чем в ранее рассмотренных диапазонах, вследствие увеличения проникновения в почву; связь оказывается возможной не более чем на расстояния около 1000 км. Ночью же — с разрушением слоя D — ионосферные волны (относительно неглубоко входящие в слой E) поглощаются слабо, и дальность связи резко возрастает. При этом, однако, приходится считаться с существо-

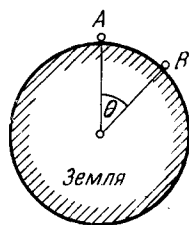


Рис. 88.1.

ванием обширной зоны, в которую приходят земная и ионосферная волны сравнимых интенсивностей. Их интерференция вследствие ряда случайных факторов обуславливает «замирания», обсуждавшиеся в § 42, п. 3. Приведем эмпирическую формулу [Е.1] напряженности поля средневолновых линий связи, полученную в результате длительных наблюдений в условиях европейского радиовещания:

$$E_m = (10233/\sqrt{r}) \sqrt{2P_A D_A} e^{-8,94 \cdot 10^{-4} \lambda^{-0,26}}, \quad (88.2)$$

(обозначения и единицы те же, что в формуле Остина (88.1)).

Средние волны интенсивно используются в радиовещании; имеются и радионавигационные средневолновые системы. Типичная дальность радиолиний соответствует использованию земной волны; появление ночью ионосферной волны, искажающей передачу вследствие замираний, требует контрмер («антифединговые» средства): к их числу относится построение антенн, направляющих излучение в основном под малыми углами к горизонту.

Одна из особенностей средних волн — существование в этом диапазоне эффекта перекрестной модуляции (§ 86, п. 4, окончание).

2. Короткие волны. Для коротких волн характерно значительно более глубокое проникновение поля как в почву (несовершенный диэлектрик), так и в ионосферу; первое приводит к сильному поглощению земной волны. Напомним в связи с этим об эффекте «зоны молчания» (§ 42, п. 3), в которой уже не принимается земная волна и еще не может быть принята волна ионосферная.

В диапазоне коротких волн впервые в практике радиолиний были реализованы остронаправленные антенны, позволяющие экономно расходовать энергию передатчика при двусторонней связи; наличие таких антенн и относительная малость поглощения при рефракции в ионосфере и отражении от Земли (в типичных условиях) делают короткие волны весьма подходящими для дальней радиосвязи. Интересно, что исторически значение коротких волн было понято сначала радиолюбителями.

Диапазон коротких волн — область применения формул геометрической оптики, а также простых соображений, приведенных в § 81. Они составляют основу понимания главных закономерностей функционирования коротковолновых радиолиний, уже обсуждавшихся в § 42, п. 3. Со стороны высоких частот ограничение этого диапазона приблизительно соответствует прекращению поворота ионосферной волны к Земле в дневное время. Наиболее короткая волна, для которой такой поворот еще происходит, определяется при помощи формулы (81.3); в практике радиосвязи соответствующая частота называется *максимальной применимой частотой*, МПЧ. Выбирая рабочую частоту ниже МПЧ, нельзя забывать, что ввиду (81.9) затухание волны растет приблизительно обратно пропорционально квадрату частоты. Существует *наименьшая применимая частота*, НПЧ, такая, что при данной мощности передатчика напряженность поля в месте приема находится на грани

выполнения требуемой нормы. При расчете коротковолновых линий связи используются графики суточного изменения МПЧ и НПЧ, составляемые при помощи различных полуэмпирических правил на основании данных измерений, осуществляемых так называемыми ионосферными станциями; пример такого графика приведен на рис. 88.2 [Е.2]. Что касается ионосферных станций, то они производят главным образом «вертикальное зондирование» ионосферы, т.е., посылая волну той или иной частоты в зенит, устанавливают, на какой высоте происходит отражение. Напомним (§ 42, п.3), что рефракция коротких волн происходит в ионосферном слое F , электронная концентрация которого существенно меняется от дня к ночи и сезонно, не говоря о разного рода несистематических возмущениях. Днем — при более высокой величине N' — МПЧ повышается, ночью — снижается; в связи с этим говорилось о «дневных волнах» (10 — 25 м) и «ночных волнах» (35 — 100 м).

На коротких волнах также имеют место интерференционные замирания, вызываемые наложением нескольких относительно независимо распространяющихся волн, несущих принимаемый сигнал. Одна из причин (как на средних волнах, § 42, п. 3) — приход в место приема волн, претерпевших разное число «отражений» от ионосферы (скажем, одно и два). Могут также, например, интерферировать обыкновенная и необыкновенная волны (§ 84, п. 1). Бывают и поляризационные замирания. Дело в том, что вследствие гиротропии ионосферы в магнитном поле Земли поляризация проходящей волны изменяется; случайный характер макроскопических движений в ионосфере имеет следствием несистематические колебания поляризации, а следовательно, и принимаемого сигнала, если приемная антенна реагирует на определенную (например, вертикальную) поляризацию. Напомним еще о таком существенном эффекте диапазона коротких волн, как *радиоэхо* (§ 42, п. 3).

Относительно стабильный режим ионосферы время от времени нарушается под влиянием процессов на Солнце. Действие интенсивных корпускулярных потоков, приходящих от Солнца, приводит к сильному изменению структуры и падению электронной концентрации слоя F , к его «разрушению», в результате чего рефракция коротких волн к земной поверхности становится невозможной; действие радиопередачи прекращается. Такие возмущения ионосферы наиболее сильны в полярных областях, куда преимущественно попадают корпускулярные потоки, направляемые магнитным полем Земли. Другой важный вид нарушения коротковолновой связи — внезапное поглощение из-за возникновения повышенной ионизации слоя D под влиянием хромосферных вспышек на Солнце, сопровождаемых ростом ультрафиолетового и рентгеновского излучения.

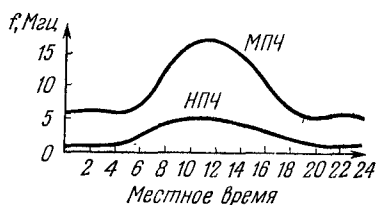


Рис. 88.2.

3. Ультракороткие волны. В годы высшей солнечной активности рефракция в ионосфере приводит к «отражению» волн, формально выходящих за пределы коротковолнового диапазона (например, около 6 м). За этим исключением все ультракороткие волны объединяет то качество, что рефракция не возвращает их к Земле.

В силу сказанного обычные радиолинии этого диапазона действуют в пределах прямой видимости; для увеличения дальности радиосвязи антенны поднимают над земной поверхностью. Если последняя является достаточно гладкой, то радиолиния часто принадлежит к классу, рассмотренному в § 59, п. 1, и при расчете напряженности поля в месте приема могут использоваться полученные там интерференционные формулы. Особенно употребительна формула Введенского (59.8). Следует помнить, что при выводе формул (59.6) — (59.8) антенны считались слабо направленными ($D(\vartheta_1, \alpha) \approx D(\vartheta_2, \alpha)$); это могут быть, например, линейные вибраторы (§ 44, п. 5), часто применяемые в поддиапазонах метровых и дециметровых волн. В случае остронаправленных антенн надо исходить из более общих соотношений (59.2) — (59.4). Впрочем, при этом отражения от земной поверхности могут быть пренебрежимо малыми, и тогда радиолиния рассчитывается как идеальная (§ 41, п. 1). С увеличением дальности связи следует принимать во внимание сферичность Земли (§ 59, п. 3) и атмосферную рефракцию (§ 60, п. 1), используя \tilde{R}_0 вместо R_0 согласно (60.3).

Чем короче волна, тем менее относительно гладкой оказывается земная поверхность. Часто даже в тех случаях, когда критерий гладкости (58.2) не выполняется, пользуются понятием эффективного коэффициента отражения. Однако типичны случаи, когда это становится невозможным; например, при распространении ультракоротких волн в пределах города. Именно в данном диапазоне встречаются положения, при которых доминантная область частично захватывает отдельные образования на земной поверхности (§ 58, п. 3); возможно «усиление препятствием» и т. п.

Различные случаи дальнего распространения ультракоротких волн представляют особый интерес. В этом диапазоне реализуются возможности существенного влияния тропосферных явлений, рассмотренных в § 60. Весьма значительное превышение расстояния прямой видимости возможно в результате *сверхрефракции* при образовании *тропосферных волноводов* (§ 60, п. 1), а также как следствие процессов *рассеяния в тропосфере* (§ 60, п. 2). Дальность линий связи при этом может быть порядка 1000 км.

Дальнее распространение ультракоротких волн, особенно метровых, может быть обусловлено рассеянием на неоднородностях ионосферы, а также на ионизированных областях, образующихся при вхождении в атмосферу метеоров («следы» метеоров) и при полярных сияниях. Существуют весьма протяженные (свыше 1000 км) линии связи, использующие эти явления.

Дециметровые волны почти не рассеиваются в ионосфере; на них также еще почти не влияют осадки. Сантиметровые волны

короче 5 см уже испытывают заметное воздействие осадков, а затем сказывается молекулярное поглощение (§ 60, п. 2). Оно является резонансным (селективным), так что и на миллиметровых волнах имеются так называемые «окна» относительно слабого поглощения. Субмиллиметровые и оптические волны испытывают сильное влияние осадков и тумана. Волны диапазона УКВ, и в особенности дециметровые, сантиметровые и миллиметровые, используются в радиолокации. В нем же лежит интенсивно изучаемое излучение астрономических объектов. Для связи сантиметровые волны находят применение в радиорелейных линиях. Изучается целесообразность практического применения экранированных линзовых и зеркальных линий (§ 78) для связи на оптических волнах.

4. О космической радиосвязи. Диапазон ультракоротких волн ввиду прозрачности для этих волн ионосферы используется в системах космической связи. Следует различать связь с космическими объектами, т.е. различными спутниками Земли и Луны, а также космическими кораблями, направляемыми к планетам Солнечной системы, с одной стороны, и применение космических объектов для связи на Земле — с другой стороны. Наконец, при освоении Луны и планет возникнет потребность в местной связи; в последнем случае использование ультракоротких волн может и не иметь особых преимуществ.

Космические линии связи могут быть беспрецедентно протяженными, простираясь на многие миллионы километров, как, например, линии связи с советскими космическими станциями, направлявшимися к Венере. Система спутников с активными или пассивными ретрансляторами (в последнем случае используется отражение радиоволн от поверхности спутника) способна обеспечить радиосвязь, охватывающую всю Землю.

Космические радиолинии обычно близки к идеальной (§ 41, п. 1), и в основе их расчета лежит формула (41.8). Введя в нее характеристики приемника, включая общую характеристику шумов, нетрудно проследить влияние различных факторов на дальность космической радиосвязи. При функционировании радиолинии должно быть $\bar{P}_B \geq kT\Delta FN P_c / P_{ш}$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ дж · град⁻¹ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура ($T \approx 300^\circ$ К), N — коэффициент шума приемника, $P_c / P_{ш}$ — отношение сигнал/шум, требуемое для нормальной работы приемника, ΔF — его полоса частот. Таким образом, согласно (41.8)

$$r \leq \frac{\lambda}{4\pi} \sqrt{D_A D_B \bar{P}_A / kT\Delta FN \frac{P_c}{P_{ш}}}. \quad (88.3)$$

Связь в неземных условиях может иметь различные особенности. Так, например, отсутствие у Луны ионосферы чрезвычайно затрудняет проблему дальней связи. Оказывается, что для связи между лунными объектами, лежащими вне пределов прямой видимости, возможно, наиболее выгодно использование радиолинии на сантиметровых волнах с ретрансляцией через Землю.

ВЕКТОРЫ

1. Некоторые формулы векторной алгебры

Ниже имеются в виду векторы $A = x_0 A_x + y_0 A_y + z_0 A_z$, $B = x_0 B_x + y_0 B_y + z_0 B_z$ и $C = x_0 C_x + y_0 C_y + z_0 C_z$ (A_x, A_y, \dots — декартовы компоненты, x_0, y_0, \dots — соответствующие орты).

Скалярное произведение векторов A и B

$$(A, B) \equiv AB = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (\text{П1.1})$$

(знак \equiv указывает переход к другому обозначению; α — угол между направлениями A и B).

Векторное произведение векторов A и B

$$[A, B] \equiv A \times B = v_0 AB \sin \alpha = \\ = x_0 (A_y B_z - A_z B_y) + y_0 (A_z B_x - A_x B_z) + z_0 (A_x B_y - A_y B_x) \quad (\text{П1.2})$$

(v_0 — единичный вектор нормали к плоскости векторов A и B , причем A, B и v_0 образуют «правую тройку» векторов). В краткой записи

$$[A, B] = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П1.2a})$$

Векторное произведение некоммумутативно:

$$[B, A] = -[A, B]. \quad (\text{П1.3})$$

Векторно-скалярное (смешанное) произведение векторов A, B и C :

$$A[B, C] = [A, B]C = [C, A]B = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П1.4})$$

Двойное векторное произведение векторов A, B и C :

$$[A, [B, C]] = B(A, C) - C(A, B). \quad (\text{П1.5})$$

2. Операции векторного анализа

В рассмотрение входят скалярные функции ψ и векторные функции F как декартовых координат, так и криволинейных ортогональных координат q_1, q_2, q_3 (орты e_1, e_2, e_3 ; метрические коэффициенты h_1, h_2, h_3), в частности, координат цилиндрических ($q_1 = r, q_2 = \alpha, q_3 = z$; $e_1 = r_0, e_2 = \alpha_0, e_3 = z_0$; $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = 1$) и сферических ($q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \alpha$; $e_1 = r_0, e_2 = \vartheta_0, e_3 = \alpha_0$; $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \vartheta$).

1) Сведения, приводимые здесь в краткой форме, более подробно изложены в [К.5].

Градиент.

а) В декартовых координатах:

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \psi = x_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (\text{П1.6})$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\text{grad } \psi \equiv \nabla \psi = e_1 \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + e_2 \frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + e_3 \frac{1}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3}. \quad (\text{П1.7})$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\text{grad } \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \alpha_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + z_0 \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (\text{П1.8})$$

г) В сферических координатах:

$$\text{grad } \psi = r_0 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \theta_0 \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \alpha_0 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}. \quad (\text{П1.9})$$

Пусть r и r' — радиус-векторы точек $M(r)$ и $P(r')$ соответственно. Направленный отрезок $\overline{PM} = r - r'$ имеет длину $|r - r'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$. Если $|r - r'|$ рассматривается как функция координат точки M (точка P фиксирована), то

$$\text{grad } |r - r'| = \frac{r - r'}{|r - r'|}. \quad (\text{П1.10})$$

Если же $|r - r'|$ рассматривается как функция координат точки P (фиксирована точка M), то, используя обозначение grad' , имеем

$$\text{grad}' |r - r'| = - \frac{r - r'}{|r - r'|}. \quad (\text{П1.11})$$

Расхождение (дивергенция)

а) В декартовых координатах:

$$\text{div } F \equiv \nabla F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{П1.12})$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\text{div } F \equiv \nabla F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 F_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_3) \right]. \quad (\text{П1.13})$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\text{div } F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{П1.14})$$

г) В сферических координатах:

$$\text{div } F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta F_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \alpha}. \quad (\text{П1.15})$$

Скалярный оператор Лапласа $\nabla^2 \equiv \text{div grad}$.

а) В декартовых координатах:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (\text{П1.16})$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{П1.17})$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}. \quad (\text{П.1.18})$$

г) В сферических координатах:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}. \quad (\text{П.1.19})$$

Вихрь (ротация).

а) В декартовых координатах:

$$\text{rot } F \equiv \nabla \times F = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.20})$$

б) В произвольных ортогональных криволинейных координатах:

$$\text{rot } F \equiv \nabla \times F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ h_2 h_3 & h_3 h_1 & h_1 h_2 \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.21})$$

в) В цилиндрических координатах:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} r_0 & \alpha_0 & z_0 \\ r & & r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\alpha & \partial/\partial z \\ F_r & rF_\alpha & F_z \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.22})$$

г) В сферических координатах:

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} r_0 & \vartheta_0 & \alpha_0 \\ r^2 \sin\vartheta & r \sin\vartheta & r \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\vartheta & \partial/\partial\alpha \\ F_r & rF_\vartheta & r \sin\vartheta F_\alpha \end{vmatrix}. \quad (\text{П.1.23})$$

3. Интегральные формулы векторного анализа

Теорема Остроградского — Гаусса.

$$\int_V \text{div } F \, dv = \oint_S F \, ds. \quad (\text{П.1.24})$$

Теорема Стокса.

$$\int_S \text{rot } F \, ds = \oint_L F \, dl. \quad (\text{П.1.25})$$

Теорема Грина.

$$\int_V (\nabla\psi\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi) \, dv = \oint_S \psi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \, ds \quad (\text{П.1.26})$$

(первая формула Грина),

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi) \, dv = \oint_S \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial\nu} \right) \, ds \quad (\text{П.1.27})$$

(вторая формула Грина).

Формула с объемным интегралом от $\operatorname{rot} F$.

$$\int_V \operatorname{rot} F dv = \oint_S [ds, F]. \quad (\text{П1.28})$$

В записанных формулах $ds = \mathbf{v}_0 ds$ (\mathbf{v}_0 — единичный вектор внешней нормали ν); $dl = \boldsymbol{\tau}_0 dl$ ($\boldsymbol{\tau}_0$ — единичный вектор касательной).

4. Дифференциальные формулы векторного анализа

$$\operatorname{grad} \varphi \psi = \varphi \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \varphi, \quad (\text{П1.29})$$

$$\operatorname{div} \psi F = F \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{div} F, \quad (\text{П1.30})$$

$$\operatorname{div} [F, G] = G \operatorname{rot} F - F \operatorname{rot} G, \quad (\text{П1.31})$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0, \quad (\text{П1.32})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0, \quad (\text{П1.33})$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \nabla^2 F, \quad (\text{П1.34})$$

$$\operatorname{rot} \psi F = [\nabla \psi, F] + \psi \operatorname{rot} F, \quad (\text{П1.35})$$

$$\operatorname{grad} f(\xi) = f'(\xi) \operatorname{grad} \xi. \quad (\text{П1.36})$$

5. Уравнение силовых линий

$$\frac{h_1 dq_1}{F_1} = \frac{h_2 dq_2}{F_2} = \frac{h_3 dq_3}{F_3}, \quad (\text{П1.37})$$

в частности, в декартовых координатах

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}.$$

Приложение 2

ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ ДИРАКА

Дельта-функцией Дирака $\delta(x-x')$ называют особый математический объект, входящий в следующее соотношение:

$$\int_L f(x) \delta(x-x') dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \text{ вне } L, \\ f(x') & \text{при } x' \text{ внутри } L, \end{cases} \quad (\text{П2.1})$$

где $f(x)$ — некоторая функция, рассматриваемая в обычном математическом анализе. Соотношение (П2.1) принимают за определение дельта-функции.

Если интегрирование в (П2.1) распространить на бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$, то результатом будет $f(x')$.

В частности, из (П2.1) при $f(x) = 1$ следует:

$$\int_L \delta(x-x') dx = \begin{cases} 0 & \text{при } x' \text{ вне } L, \\ 1 & \text{при } x' \text{ внутри } L. \end{cases} \quad (\text{П2.2})$$

По существу соотношение (П2.1) регламентирует и употребление дельта-функции.

Хотя $\delta(x-x')$ не является функцией в обычном смысле, интуитивно можно прийти к понятию дельта-функции, пытаясь найти предел «импульсной» функции (рис: П2.1, а, б): $\delta(\xi) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} F(\xi)$ (при этом $F(\xi) = 0$, когда $\xi < -\Delta\xi$

и $\xi > \Delta\xi$, а также выполняется интегральное соотношение $\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) d\xi = 1$).

В частности, в случае прямоугольного импульса (рис. П2.1, б) имеем

$$\delta(\xi) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{при } \xi < -\Delta\xi \text{ и } \xi > \Delta\xi, \\ \frac{1}{2\Delta\xi} & \text{при } -\Delta\xi \leq \xi \leq \Delta\xi \end{cases}$$

(функция, везде равная нулю, кроме исчезающе малой окрестности начала

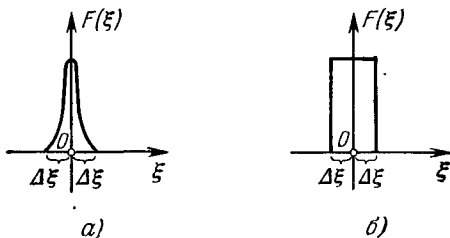


Рис. П2.1.

координат, где она неограниченна). С точки зрения обычного анализа предела не существует. Обобщение на трехмерные области:

$$\int f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv = \begin{cases} 0 & \text{при } M(\mathbf{r}') \text{ вне } V, \\ f(\mathbf{r}') & \text{при } M(\mathbf{r}') \text{ внутри } V \end{cases} \quad (\text{П2.3})$$

и, в частности, при $f(\mathbf{r})=1$

$$\int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') dv = \begin{cases} 0 & \text{при } M(\mathbf{r}') \text{ вне } V, \\ 1 & \text{при } M(\mathbf{r}') \text{ внутри } V. \end{cases} \quad (\text{П2.4})$$

Представление дельта-функции $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (\text{П2.5})$$

Примеры применения дельта-функции.

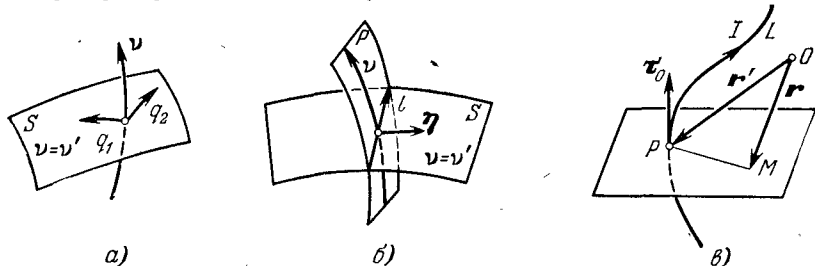


Рис. П2.2.

а) Представление плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ в случае точечного заряда q , расположенного в точке $P(\mathbf{r}')$:

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (\text{П2.6})$$

б) Представление плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ в случае поверхности S , заряженной с плотностью $\xi(q_1, q_2)$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \xi(q_1, q_2) \delta(v-v') \quad (\text{П2.7})$$

(q_1, q_2 —координаты на S ; v —ортогональная к S координата, принимающая значение v' на S , рис. П2.2, а).

в) Представление плотности тока $j(\mathbf{r})$ в случае поверхностного тока, распределенного на S с плотностью $\eta(q_1, q_2)$:

$$j(\mathbf{r}) = \eta(q_1, q_2) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \quad (\text{П2.8})$$

(рис. П2.2, б).

г) Представление плотности тока $j(\mathbf{r})$ в случае тока I , проходящего по линии L (рис. П2.2, в):

$$j(\mathbf{r}) = \tau_0 I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (\text{П2.9})$$

где дельта-функция двумерная; соответственно этому точки $M(\mathbf{r})$ и $P(\mathbf{r}')$ (последняя лежит на L) при интегрировании остаются на какой-либо поверхности, пересекаемой током; орт τ_0 указывает направление тока.

Приложение 3

МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД

1. Представление гармонических колебаний. В случае гармонических колебаний векторные функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ вообще имеют вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = x_0 F_{mx} \cos(\omega t + \varphi_x) + y_0 F_{my} \cos(\omega t + \varphi_y) + z_0 F_{mz} \cos(\omega t + \varphi_z), \quad (\text{П3.1})$$

где $F_{mx} = F_{mx}(\mathbf{r})$, $F_{my} = F_{my}(\mathbf{r})$, $F_{mz} = F_{mz}(\mathbf{r})$ — амплитуды компонент вектора $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_x = \varphi_x(\mathbf{r})$, $\varphi_y = \varphi_y(\mathbf{r})$, $\varphi_z = \varphi_z(\mathbf{r})$ — их фазы (в частности, $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = \varphi$; тогда $F_m = x_0 F_{mx} + y_0 F_{my} + z_0 F_{mz}$ есть амплитуда вектора $\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t)$).

На основании формулы Эйлера

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \text{Re } \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{П3.2})$$

где комплексное представление $\dot{\mathbf{F}}$ получается из (П3.1) заменой косинусов экспоненциальными функциями по схеме: $\cos \alpha \rightarrow e^{i\alpha}$. Выделяется комплексная амплитуда

$$\dot{\mathbf{F}}_m(\mathbf{r}) = x_0 F_{mx} e^{i\varphi_x} + y_0 F_{my} e^{i\varphi_y} + z_0 F_{mz} e^{i\varphi_z} \quad (\text{П3.3})$$

При этом комплексное представление $\dot{\mathbf{F}}$ выражается как произведение функции координат $\dot{\mathbf{F}}_m(\mathbf{r})$ и функции времени $e^{i\omega t}$:

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \dot{\mathbf{F}}_m(\mathbf{r}) e^{i\omega t}. \quad (\text{П3.4})$$

Заметим также, что функции $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ (П3.1) есть

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^*), \quad (\text{П3.5})$$

где $\dot{\mathbf{F}}^*$ — комплексно сопряженная величина.

Скалярные функции могут рассматриваться как частный случай векторных.

2. Применение к линейным уравнениям. Пусть функция \mathbf{u} вида (П3.1) подчинена уравнению

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (\text{П3.6})$$

где \mathbf{f} — известная функция того же вида (гармонические колебания), а \mathcal{L} — некоторый линейный (дифференциальный или интегральный) оператор: если $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ — некоторые допустимые функции, а c_1, c_2 — постоянные, то $\mathcal{L}(c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2) = c_1 \mathcal{L}\mathbf{u}_1 + c_2 \mathcal{L}\mathbf{u}_2$. Ввиду (П3.2) запишем уравнение относительно $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_m e^{i\omega t}$ (П3.4)

$$\mathcal{L}\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{f}}, \quad (\text{П3.7})$$

которое при отделении вещественной части дает (П3.6). После выполнения операций по t и сокращения множителя $e^{i\omega t}$ получаем уравнение относительно комплексной амплитуды $\dot{\mathbf{u}}_m$:

$$\mathcal{L}_\omega \dot{\mathbf{u}}_m = \dot{\mathbf{f}}_m, \quad (\text{П3.8})$$

где временная зависимость отсутствует. Если его решение \dot{u}_m найдено, то для получения решения u уравнения (ПЗ.6) надо лишь произвести операцию: $u = \text{Re } \dot{u}_m e^{i\omega t}$.

Например, в случае уравнения (ПЗ.6) вида

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{ПЗ.9})$$

($f=0$, $\mathcal{L} = \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$) имеем уравнение относительно комплексной амплитуды \dot{u}_m (ПЗ.8)

$$\nabla^2 \dot{u}_m + k^2 \dot{u}_m = 0, \quad k = \omega/v \quad (\text{ПЗ.10})$$

($\mathcal{L}_\omega = \nabla^2 + k^2$).

3. Средние величины. Средним значением функции $\Phi(u_1, u_2)$, где $u_{1,2}$ имеют вид (ПЗ.1), назовем величину (вообще функцию координат)

$$\overline{\Phi(u_1, u_2)} = \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(u_1, u_2) dt, \quad (\omega T = 2\pi). \quad (\text{ПЗ.11})$$

В частности,

$$\overline{u} = 0, \quad (\text{ПЗ.12})$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{2} \dot{u}_m \dot{u}_m^* = \frac{1}{2} (u_{mx}^2 + u_{my}^2 + u_{mz}^2), \quad (\text{ПЗ.13})$$

$$\overline{u_1 u_2} = \frac{1}{2} \text{Re } \dot{u}_{1m} \dot{u}_{2m}^* = \frac{1}{2} \text{Re } \dot{u}_{1m}^* \dot{u}_{2m}, \quad (\text{ПЗ.14})$$

$$\overline{[u_1, u_2]} = \frac{1}{2} \text{Re } [\dot{u}_1, \dot{u}_2^*] = \frac{1}{2} \text{Re } [\dot{u}_1^*, \dot{u}_2]. \quad (\text{ПЗ.15})$$

Приложение 4

ВРАЩЕНИЕ ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Пусть имеется две системы координат (x, y, z) и (ξ, η, ζ) с общим началом O (рис. П4.1, а). Направление каждой из осей второй системы можно охарактеризовать тремя углами между этой осью (например, ξ) и тремя осями

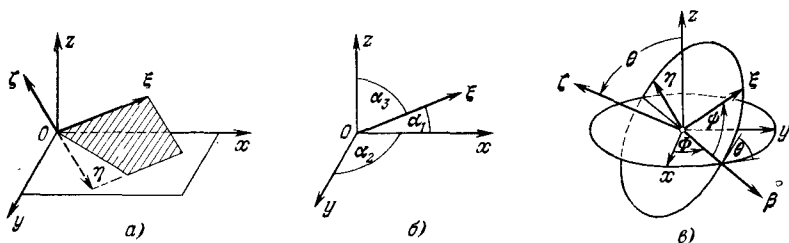


Рис. П4.1.

первой системы (т. е. x, y, z), как показано на рис. П4.1, б. Таким образом, имеется девять углов

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array}$$

(например, β_1 — угол между осями η и x , γ_2 — угол между осями ζ и y и т. д.). Очевидно,

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= x_0 \cos \alpha_1 + y_0 \cos \alpha_2 + z_0 \cos \alpha_3, \\ \eta_0 &= x_0 \cos \beta_1 + y_0 \cos \beta_2 + z_0 \cos \beta_3, \\ \zeta_0 &= x_0 \cos \gamma_1 + y_0 \cos \gamma_2 + z_0 \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.1a})$$

и

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \xi_0 \cos \alpha_1 + \eta_0 \cos \beta_1 + \zeta_0 \cos \gamma_1, \\ y_0 &= \xi_0 \cos \alpha_2 + \eta_0 \cos \beta_2 + \zeta_0 \cos \gamma_2, \\ z_0 &= \xi_0 \cos \alpha_3 + \eta_0 \cos \beta_3 + \zeta_0 \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.1б})$$

Аналогично преобразуются компоненты некоторого вектора $F = x_0 F_x + y_0 F_y + z_0 F_z = \xi_0 F_\xi + \eta_0 F_\eta + \zeta_0 F_\zeta$, в частности, радиус-вектора $r = x_0 x + y_0 y + z_0 z = \xi_0 \xi + \eta_0 \eta + \zeta_0 \zeta$. Приводимые ниже формулы преобразования компонент вектора F являются, таким образом, также формулами преобразования координат $(x, y, z) \rightleftharpoons (\xi, \eta, \zeta)$

$$\left. \begin{aligned} F_\xi &= F_x \cos \alpha_1 + F_y \cos \alpha_2 + F_z \cos \alpha_3, \\ F_\eta &= F_x \cos \beta_1 + F_y \cos \beta_2 + F_z \cos \beta_3, \\ F_\zeta &= F_x \cos \gamma_1 + F_y \cos \gamma_2 + F_z \cos \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.2a})$$

и

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_\xi \cos \alpha_1 + F_\eta \cos \beta_1 + F_\zeta \cos \gamma_1, \\ F_y &= F_\xi \cos \alpha_2 + F_\eta \cos \beta_2 + F_\zeta \cos \gamma_2, \\ F_z &= F_\xi \cos \alpha_3 + F_\eta \cos \beta_3 + F_\zeta \cos \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.2б})$$

Справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 &= 1, \\ \cos \varphi_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_2 \cos \psi_2 + \cos \varphi_3 \cos \psi_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \varphi &= \alpha, \beta, \gamma; \\ \psi &= \alpha, \beta, \gamma; \\ \varphi &\neq \psi, \end{aligned} \quad (\text{П4.3})$$

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \alpha_i + \cos^2 \beta_i + \cos^2 \gamma_i &= 1, \\ \cos \alpha_i \cos \alpha_k + \cos \beta_i \cos \beta_k + \cos \gamma_i \cos \gamma_k &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, 2, 3; \\ k &= 1, 2, 3; \\ i &\neq k. \end{aligned}$$

Углы Эйлера. Ориентация одной системы координат относительно другой вполне определяется тремя *углами Эйлера* Θ , Φ и Ψ , выбираемыми, как показано на рис. П4.1, в. При этом фигурирующие в (П4.1) — (П4.3) направляющие косинусы выражаются так:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 &= \cos \Phi \cos \Psi - \cos \Theta \sin \Phi \sin \Psi, \\ \cos \alpha_2 &= \sin \Phi \cos \Psi + \cos \Theta \cos \Phi \sin \Psi, \quad \cos \alpha_3 = \sin \Theta \sin \Psi, \\ \cos \beta_1 &= -\cos \Phi \sin \Psi - \cos \Theta \sin \Phi \cos \Psi, \\ \cos \beta_2 &= -\sin \Phi \sin \Psi + \cos \Theta \cos \Phi \cos \Psi, \quad \cos \beta_3 = \sin \Theta \cos \Psi, \\ \cos \gamma_1 &= \sin \Theta \sin \Phi, \\ \cos \gamma_2 &= -\sin \Theta \cos \Phi, \quad \cos \gamma_3 = \cos \Theta. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П4.4})$$

Приложение 5

ОБ УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Уравнение Пуассона. При интегрировании скалярного уравнения Пуассона

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (\text{П5.1})$$

вводится функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, подчиненная уравнению Пуассона следующего частного вида:

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (\text{П5.2})$$

Имеется (ср. (П2.5)) функция Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}. \quad (\text{П5.3})$$

Используя вторую формулу Грина (П1.27) и формулу (П2.4), а также учитывая симметричность функции Грина относительно аргументов \mathbf{r} и \mathbf{r}' , нетрудно получить соотношение

$$u(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dv' + \oint_S \left[u(\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial v'} - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial u(\mathbf{r}')}{\partial v'} \right] ds' \quad (\text{П5.4})$$

(переменными являются координаты со штрихами).

При рассмотрении уравнения Пуассона в неограниченной области важен класс задач, в которых при $r \rightarrow \infty$ решение $u(\mathbf{r})$ убывает не медленнее, чем $1/r$ ($u(\mathbf{r}) = O(1/r)$): «регулярно в бесконечности». В этом случае при отнесении границы S области V в бесконечность поверхностный интеграл в (П5.4) исчезает и получается следующее представление решения:

$$u(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (\text{П5.5})$$

Аналогично в случае векторного уравнения Пуассона

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \quad (\text{П5.6})$$

имеем выражение решения

$$u(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'. \quad (\text{П5.7})$$

2. Уравнение Лапласа. Решения уравнения Лапласа

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{П5.8})$$

образуют класс функций, называемых *гармоническими*. Важное значение имеют *краевые задачи* для уравнения Лапласа, когда требуется найти решение $u(\mathbf{r})$

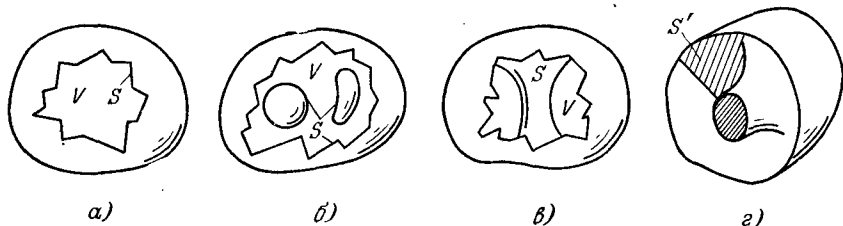


Рис. П5.1.

в области V при некоторых сведениях о его поведении на границе S . Рассматриваются *внутренние* и *внешние* задачи (рис. П5.1, а, б, в и рис. П5.2, а, б, в); в последнем случае область V бесконечна. Краевая задача

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{r}) &= 0, \\ u(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) \text{ на } S \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.9})$$

называется *задачей Дирихле*. Доказывается (при этом используется первая формула Грина (П1.26)), что решение задачи Дирихле единственно. *Задачей Неймана* называется краевая задача

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{r}) &= 0, \\ \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial v} &= f(\mathbf{r}) \text{ на } S. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.10})$$

При этом в случае внутренней задачи должно быть: $\int_S f(\mathbf{r}) ds = 0$. Решение внешней задачи Неймана для односвязных областей (рис. П5.2, а, б) единственно, а решение внутренней задачи (рис. П5.1, а, б) определено с точностью до аддитивной постоянной. Двусвязная (рис. П5.1, в и П5.2, в) и вообще многосвязная область приводится к односвязной введением «перегородок» (рис. П5.1, г). Однако если решение задачи Неймана многозначно, то эта операция порождает *смешанную* краевую задачу (на обеих сторонах перегородки задаются значения $u(\mathbf{r})$). Решение этой задачи единственно. Выше в случае внешних задач (П5.9) и (П5.10) подразумевалась регулярность решения в бесконечности (см. стр. 587).

Если известно, что $u(\mathbf{r})$ принимает некоторые постоянные значения на частях составной поверхности S (рис. П5.1, б, рис. П5.2, б), то краевая

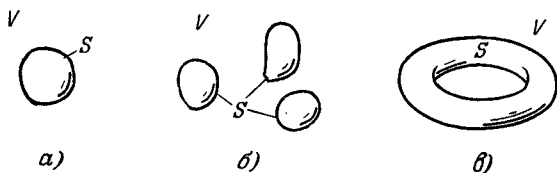


Рис. П5.2.

задача имеет решение, однозначно определяемое заданием интеграла $\int \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial \nu} ds$ на каждой части S .

3. Уравнение Даламбера и неоднородное уравнение Гельмгольца.

Неоднородное волновое уравнение, или уравнение Даламбера

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r}, t) \quad (\text{П5.11})$$

в случае гармонических колебаний порождает (ср. стр. 585) *неоднородное уравнение Гельмгольца* относительно комплексной амплитуды решения $u(\mathbf{r}, t)$:

$$\nabla^2 \dot{u}_m(\mathbf{r}) + k^2 \dot{u}_m(\mathbf{r}) = \dot{f}_m(\mathbf{r}), \quad k = \omega/v. \quad (\text{П5.12})$$

При его интегрировании вводится функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ как решение уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{П5.13})$$

(ср. (П5.2)). В частности, функция Грина

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \quad (\text{П5.14})$$

(ср. (П5.3)) имеет характер однородной расходящейся сферической волны. Легко проверить, что остается справедливой формула (П5.4). Если при рассмотрении неограниченной области поставить так называемое *условие излучения*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial \dot{u}_m(\mathbf{r})}{\partial r} + ik \dot{u}_m(\mathbf{r}) \right] = 0, \quad (\text{П5.15})$$

то поверхностный интеграл в (П5.4) при отнесении границы в бесконечность исчезает; тогда имеем решение

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) = \int_V G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \dot{f}_m(\mathbf{r}') dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\dot{f}_m(\mathbf{r}') e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dv'. \quad (\text{П5.16})$$

Легко убедиться, что условию излучения удовлетворяют лишь решения типа расходящихся сферических волн

$$\dot{u}_m(r) \rightarrow \frac{\dot{u}(\vartheta, \alpha)}{r} e^{-ikr} \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (\text{П5.17})$$

($k > 0$; для сходящихся волн экспоненциальный множитель имеет вид e^{ikr} ; существует и такого рода функция Грина (П5.14)).

В общем случае функции $u(r, t)$ и $f(r, t)$ в уравнении Даламбера (П5.11) можно представить в виде интегралов Фурье (стр. 600)

$$u(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{и} \quad f(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{П5.18})$$

Тогда при условии обращения в нуль решения и его временной производной при $t = \pm \infty$ из (П5.11) получается уравнение Гельмгольца относительно спектральной плотности решения

$$\nabla^2 \dot{u}(r, \omega) + k^2 \dot{u}(r, \omega) = \dot{f}(r, \omega), \quad k = \omega/v. \quad (\text{П5.19})$$

Выражая $\dot{u}(r, \omega)$ при помощи формулы (П5.16) и переходя к $u(r, t)$ на основании (П5.18), находим следующее представление решения Даламбера (П5.11):

$$u(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f\left(r', t - \frac{|r-r'|}{v}\right)}{|r-r'|} dv'. \quad (\text{П5.20})$$

Аналогичные результаты получаются в случае векторных уравнений

$$\nabla^2 u(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} = f(r, t) \quad (\text{П5.21})$$

и

$$\nabla^2 \dot{u}_m(r) + k^2 \dot{u}_m(r) = \dot{f}_m(r) \quad (\text{П5.22})$$

($k = k' - ik''$ в данном случае взято комплексным; $k' > 0$, $k'' \geq 0$). А именно:

$$\dot{u}_m(r) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f_m(r') e^{-ik|r-r'|}}{|r-r'|} dv', \quad (\text{П5.23})$$

при условии излучения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[\frac{\partial u_m(r)}{\partial r} + ik \dot{u}_m(r) \right] = 0 \quad (\text{П5.24})$$

и

$$u(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{f\left(r', t - \frac{|r-r'|}{v}\right)}{|r-r'|} dv'. \quad (\text{П5.25})$$

4. Однородное уравнение Гельмгольца.

Однородное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 u(r) + k^2 u(r) = 0 \quad (\text{П5.26})$$

называют просто *уравнением Гельмгольца* или *волновым уравнением*. Взяв область V с границей S , поставим *первую краевую задачу* для уравнения Гельмгольца (ср. (П5.9))

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0, \\ u &= 0 \text{ на } S. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.27})$$

Эта задача имеет бесконечную последовательность решений $\{u_n\}$, каждое из

которых реализуется при определенном значении числа $k^2 = k_n^2$. Решения u_n называются *собственными функциями*, а k_n^2 — соответствующими им *собственными решениями* задачи. Нумерация производится в таком порядке, что $k_1^2 \leq k_2^2 \leq k_3^2 \leq \dots$ ($0 \leq k_n^2 \leq \infty$).

Вторая краевая задача для уравнения Гельмгольца формулируется следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + k^2 u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \text{ на } S. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.28})$$

Это также задача, порождающая систему собственных функций с отвечающими им собственными значениями.

Для векторного уравнения Гельмгольца имеем следующую *первую краевую задачу*:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= 0, \\ u_\tau &= 0, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ на } S, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.29})$$

и *вторую краевую задачу* —

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) + k^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) &= 0, \\ u_\nu &= 0, (\operatorname{rot} \mathbf{u})_\tau = 0 \text{ на } S. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П5.30})$$

Эти задачи также порождают системы собственных (векторных) функций с соответствующими им собственными значениями.

Для скалярных задач (П5.27) и (П5.28) при помощи первой формулы Грина нетрудно получить интегральное выражение

$$k^2 = \frac{\int_V |\operatorname{grad} u|^2 dv}{\int_V |u|^2 dv}. \quad (\text{П5.31})$$

Аналогично для векторных задач (П5.29) и (П5.30)

$$k^2 = \frac{\int_V (|\operatorname{rot} \mathbf{u}|^2 + |\operatorname{div} \mathbf{u}|^2) dv}{\int_V |\mathbf{u}|^2 dv} \quad (\text{П5.32})$$

(при получении (П5.32) используются формулы (П1.34), (П1.30), (П1.31) и теорема Остроградского — Гаусса). Из (П5.31), (П5.32) следует неотрицательность соответствующих собственных значений k^2 .

Выражения (П5.31), (П5.32), можно рассматривать как *функционалы* («функции от функций»). В качестве функций, которые вносятся в (П5.31), (П5.32), берутся те, что удовлетворяют граничным условиям из (П5.27), (П5.28) и (П5.29), (П5.30). При этом минимальное значение функционала оказывается равным наименьшему собственному значению краевой задачи, а реализующая его функция — отвечающей k_1^2 собственной функцией.

Приложение 6

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Уравнение Бесселя и цилиндрические функции. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (\text{П6.1})$$

называется *уравнением цилиндрических функций* или *уравнением Бесселя* n -го порядка. Его решения, называемые *цилиндрическими функциями*, удобно

сопоставлять с решениями уравнения $y'' + y = 0$, т. е. тригонометрическими и экспоненциальными. Так, частным решениям этого уравнения $\cos x$ и $\sin x$ соответствуют следующие решения уравнения цилиндрических функций (Пб.1):

$$\begin{aligned} J_n(x) & \text{— функции Бесселя } n\text{-го порядка,} \\ N_n(x) & \text{— функции Неймана } n\text{-го порядка.} \end{aligned}$$

Точно так же экспоненциальным функциям $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ отвечают следующие цилиндрические функции:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) & \text{— функции Ханкеля 1-го рода } n\text{-го порядка,} \\ H_n^{(2)}(x) & \text{— функции Ханкеля 2-го рода } n\text{-го порядка.} \end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) \quad \text{и} \quad H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x). \quad (\text{Пб.2})$$

Цилиндрические функции не являются периодическими, но они «осциллируют»; функции $J_n(x)$ и $N_n(x)$ с возрастанием x принимают значения, колеблющиеся около нуля с монотонно убывающей амплитудой и приближающиеся к тригонометрическим при $x \rightarrow \infty$. Полезно помнить, что $J_0(0) = 1$ и $J_n(0) = 0$ при $n \neq 0$, а также $N_n(0) = -\infty$. Общее решение уравнения (Пб.1) можно выразить в двух формах:

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x) \quad (\text{Пб.3a})$$

или

$$y = PH_n^{(1)}(x) + QH_n^{(2)}(x). \quad (\text{Пб.3б})$$

Обычно требуется, чтобы решение удовлетворяло *условию ограниченности*: $|y| < \infty$. Поэтому, если в рассмотрение входит точка $x=0$, то общее решение (Пб.3a) принимает вид

$$y = AJ_n(x). \quad (\text{Пб.4})$$

Графики некоторых цилиндрических функций даны на рис. Пб.1.

2. Асимптотические представления цилиндрических функций. При неограниченно возрастающем аргументе цилиндрические функции переходят в тригонометрические или, соответственно, экспоненциальные:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] + O(x^{-3/2}), \quad (\text{Пб.5})$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] + O(x^{-3/2}), \quad (\text{Пб.6})$$

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]} + O(x^{-3/2}), \quad (\text{Пб.7})$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i \left[x - \frac{\pi}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right]} + O(x^{-3/2}). \quad (\text{Пб.8})$$

Очевидно,

$$y = QH_n^{(2)}(x) \quad (\text{Пб.9})$$

является решением, которое при $x = kr$ имеет характер комплексной амплитуды расходящейся волны.

3. Степенные ряды; представления функций малого аргумента. Функции Бесселя представляются степенными рядами вида

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{0! n!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2}}{1! (n+1)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+4}}{2! (n+2)!} - \dots, \quad (\text{Пб.10})$$

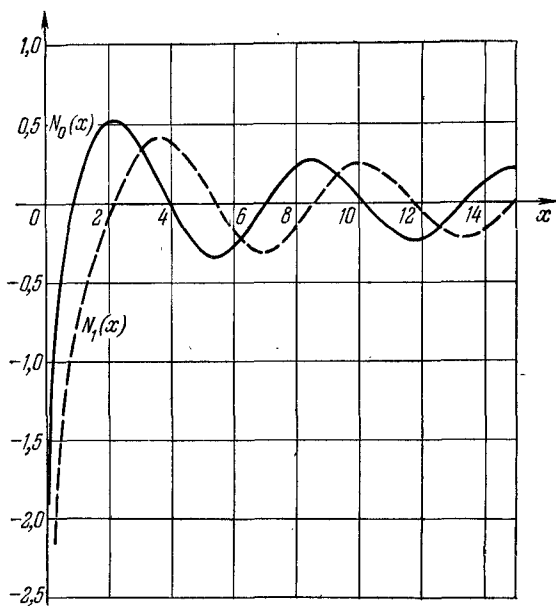
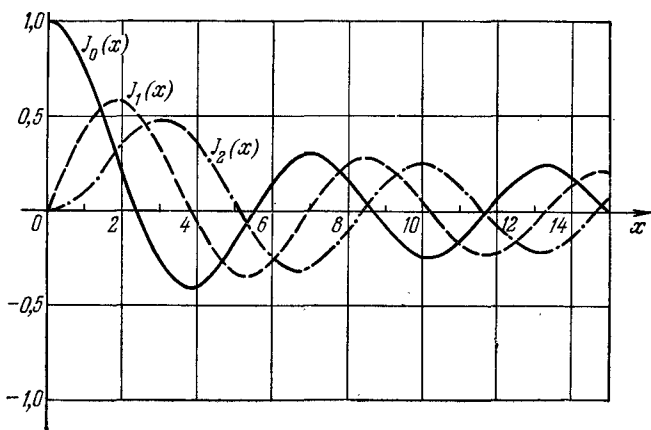


Рис. П6.1.

поэтому при $x \ll 1$

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{n! 2^n} \quad \left(J_0(x) \approx 1, \quad J_1(x) \approx \frac{x}{2} \right). \quad (\text{П6.11})$$

Запишем также представления:

$$N_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma x} \quad \text{и} \quad N_n(x) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^n, \quad n \neq 0 \quad (\text{П6.12})$$

($\gamma = 1,781\dots$).

4. Функциональные соотношения. Ниже под $Z_n(x)$ понимается произвольная цилиндрическая функция. Для натурального n

$$Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x) \quad (Z_{-1} = -Z_1). \quad (\text{П6.13})$$

Далее

$$\frac{dZ_n(x)}{dx} = -\frac{n}{x} Z_n(x) + Z_{n-1}(x) = \frac{n}{x} Z_n(x) - Z_{n+1}(x). \quad (\text{П6.14})$$

В частности, отсюда следует:

$$Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Z_n(x). \quad (\text{П6.15})$$

Другие формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} Z_n(kx)] = -kx^{-n} Z_{n+1}(kx) \quad (\text{П6.16})$$

и

$$\frac{d}{dx} [x^n Z_n(kx)] = kx^n Z_{n-1}(kx) \quad (\text{П6.17})$$

(в частности, $Z'_0(x) = -Z_1(x)$ и $Z'_1(x) = Z_0(x) - \frac{Z_1(x)}{x}$).

Неопределенные интегралы:

$$\int x^{n+1} Z_n(x) dx = x^{n+1} Z_{n+1}(x), \quad (\text{П6.18})$$

$$\int x^{-n+1} Z_n(x) dx = -x^{-n+1} Z_{n+1}(x), \quad (\text{П6.19})$$

$$\begin{aligned} \int x Z_n^2(x) dx &= \frac{x^2}{2} [Z_n^2(x) - Z_{n-1}(x) Z_{n+1}(x)] = \\ &= \frac{x^2}{2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{n}{x} \right)^2 \right] Z_n^2(x) + Z_n'^2(x) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{П6.20})$$

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{n^2 Z_n^2(x)}{x^2} + Z_n'^2(x) \right] x dx &= \\ &= \frac{x^2}{2} \left[Z_n^2(x) \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) + \frac{2}{x} Z_n(x) Z_n'(x) + Z_n'^2(x) \right], \end{aligned} \quad (\text{П6.21})$$

$$\int x Z_n(\alpha x) Z_n(\beta x) dx = \frac{\beta x Z_n(\alpha x) Z_{n-1}(\beta x) - \alpha x Z_{n-1}(\alpha x) Z_n(\beta x)}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (\text{П6.22})$$

5. Разложение по функциям Бесселя. Пусть некоторая функция $f(\alpha)$ определена на отрезке $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Разлагая $f(\alpha)$ в ряд Фурье по $\{e^{in\alpha}\}$ (см. стр. 601), имеем

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\alpha}, \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) e^{-in\alpha} d\alpha.$$

Возьмем $f(\alpha) = e^{-ix \cos \alpha}$. Учитывая интегральное представление

$$J_n(x) = \frac{(-i)^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(x \cos \alpha + n\alpha)} d\alpha, \quad (\text{П6.23})$$

видим, что ряд Фурье принимает форму

$$e^{-ix \cos \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(x) e^{in\alpha}. \quad (\text{П6.24})$$

6. Таблицы корней. Обозначая $x = B_{nm}$ корни уравнения $J_n(x) = 0$, сведем некоторые из них в таблицу.

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223

Ниже приведена таблица корней $x = A_{nm}$ уравнения $J'_n(x) = 0$.

$n \backslash m$	1	2	3	4
0	3,832	7,016	10,173	13,324
1	1,841	5,331	8,536	11,706
2	3,054	6,706	9,969	13,170
3	4,201	8,015	11,346	

7. Цилиндрические функции полуцелого порядка

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{(x dx)^n} \left(\frac{\sin x}{x} \right); \quad (\text{П6.25})$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{n-1} x^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d^n}{(x dx)^n} \left(\frac{\cos x}{x} \right). \quad (\text{П6.26})$$

В частности,

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right), \quad (\text{П6.27})$$

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad N_{3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\sin x + \frac{\cos x}{x} \right).$$

Функции Ханкеля определяются на основании (П6.2).

8. Присоединенные функции Лежандра. Ограниченными решениями уравнения

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dT}{dt} \right] + \left(p^2 - \frac{m^2}{1-t^2} \right) T = 0 \quad (\text{П6.28})$$

($-1 < t < 1$) являются присоединенные функции Лежандра $P_n^{(m)}(t)$, при этом параметр p^2 принимает значение $n(n+1)$ (собственные значения, соответствующие этим собственным функциям):

$$T(t) = P_n^{(m)}(t) = (1-t^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m} \quad (n=0, 1, 2, \dots; m \leq n), \quad (\text{П6.29})$$

где $P_n(t)$ — полиномы Лежандра:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \quad P_1(t) = t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \\ P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \dots, \\ (n+1)P_{n+1}(t) - t(2n+1)P_n(t) + nP_{n-1}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П6.30})$$

Приложение 7

МЕТОД РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Сущность метода. Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. В методе разделения переменных уравнение с частными производными сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Например, в случае двумерного уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (решение не зависит от z), согласно (П1.18), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (\text{П7.1})$$

(несущественный общий множитель $1/r$ отброшен). Вводится предположение, что искомое решение $u(r) = u(r, \alpha)$ представляет собой произведение $u(r, \alpha) = \mathcal{R}(r) \mathcal{A}(\alpha)$, где каждый из множителей зависит только от одной из координат. Подстановка этого представления в (П7.1) с последующим умножением обоих слагаемых на $r/\mathcal{R}\mathcal{A}$ дает

$$\frac{r}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} = 0. \quad (\text{П7.2})$$

Таким образом, левую часть (П7.1) удалось представить в виде суммы двух *независимых* функций. Слагаемые должны быть *постоянными*. Действительно, фиксируя некоторое значение r и делая тем самым постоянным первое слагаемое, будем менять в возможных пределах α , на что мы имеем право в силу независимости слагаемых. Второе слагаемое, как видно из (П7.2) при этом остается неизменным и равным первому с обратным знаком. Рассуждения легко продолжить, зафиксировав α и меняя r . Постоянная, которой равно первое слагаемое, пока неизвестна. Обозначим ее n^2 . Приравнявая слагаемые (П7.2) n^2 и $-n^2$ соответственно, получаем после очевидных преобразований два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} + n^2 \mathcal{A} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{R}}{dr} - n^2 \frac{\mathcal{R}}{r^2} = 0. \quad (\text{П7.3})$$

Это и есть результат «разделения переменных». Ясно, что уравнение Лапласа (П7.1) имеет решение в форме $u = \mathcal{R}\mathcal{A}$, и надо лишь найти решения обыкновенных дифференциальных уравнений \mathcal{R} и \mathcal{A} .

Решение первого из уравнений (П7.3) запишем в форме

$$\mathcal{A}(\alpha) = A \cos n\alpha + B \sin n\alpha. \quad (\text{П7.4})$$

Если оно ищется в области $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, то требование однозначности приводит к условию периодичности: $\mathcal{A}(\alpha + 2\pi) = \mathcal{A}(\alpha)$. Отсюда следует, что $n = 0, 1, 2, \dots$ Далее

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r) &= Cr^n + Dr^{-n}, \quad n \neq 0, \\ \mathcal{R}(r) &= C \ln r + D, \quad n = 0, \end{aligned} \quad (\text{П7.5})$$

что дает теперь возможность записать решение уравнения Лапласа $u(r, \alpha) = \mathcal{R}(r) \mathcal{A}(\alpha)$.

2. Решение однородного уравнения Гельмгольца в декартовых координатах.
Решение уравнения (П5.26), имеющего в декартовых координатах вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0, \quad (\text{П7.6})$$

будем искать в форме $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Внося в (П7.6) это представление, после деления всех членов на $u = XYZ$, получаем

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0, \quad (\text{П7.7})$$

откуда (ср. выше п. 1) следуют обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \chi_x^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \chi_y^2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \chi_z^2 Z = 0, \quad (\text{П7.8})$$

где $\chi_x^2, \chi_y^2, \chi_z^2$ — некоторые константы, подчиненные равенству $\chi_x^2 + \chi_y^2 + \chi_z^2 = k^2$. Очевидно,

$$X = A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x, \quad Y = C \cos \chi_y y + D \sin \chi_y y, \quad Z = E \cos \chi_z z + F \sin \chi_z z \quad (\text{П7.9a})$$

или в другой форме

$$X = P e^{-i\chi_x x} + Q e^{i\chi_x x}, \quad Y = R e^{-i\chi_y y} + S e^{i\chi_y y}, \quad Z = T e^{-i\chi_z z} + W e^{i\chi_z z}. \quad (\text{П7.9б})$$

В двумерном случае (решение не зависит от z) вместо k^2 в (П7.6) напомним χ^2 . При этом $u(r) = u(x, y) = X(x)Y(y)$ (П7.9) и $\chi_x^2 + \chi_y^2 = \chi^2$.

Рассмотрим *первую краевую задачу* (П5.27) в двумерном случае:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \chi^2 u &= 0, \\ u &= 0 \text{ при } \begin{cases} x=0, x=a, \\ y=0, y=b \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П7.10})$$

(функция $u(x, y)$ определена в прямоугольнике, рис. П7.1, а). Будем искать решение $u = XY$, используя формулы (П7.9а). Налагаем граничное условие

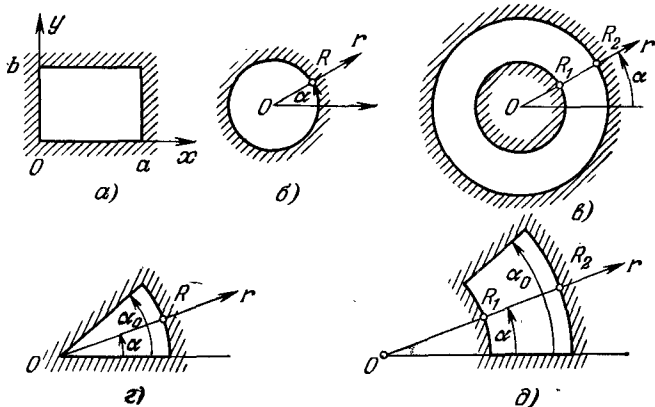


Рис. П7.1.

$u(0, y) = 0$, потребуем равенства $A \cos \chi_x x + B \sin \chi_x x = 0$, при $x=0$, откуда $A=0$. Аналогично из требования $u(x, 0) = 0$ следует, что $C=0$. Таким образом, $u(x, y) = u_0 \sin \chi_x x \sin \chi_y y$, где u_0 — постоянная $u_0 = BD$. Далее из гра-

ничного условия $u(a, y) = 0$ имеем $\sin \chi_x a = 0$, а отсюда $\chi_x a = m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Подобно этому из условия $u(x, b) = 0$ получаем: $\chi_y b = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). В конечном счете находим следующие решения задачи (П7.10):

$$u(x, y) = u^{mn}(x, y) = u_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (\text{П7.11})$$

Это собственные функции задачи (П7.10), которым соответствуют собственные значения $\chi_{mn}^2 = \chi_x^2 + \chi_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$ (см. Приложение 5, п. 4).

Сформулируем вторую краевую задачу (П5.28) для той же области:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \chi^2 u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \text{ при } x=0, x=a; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ при } y=0, y=b. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П7.12})$$

При помощи аналогичных рассуждений находим следующие собственные функции этой задачи:

$$u(x, y) = u^{mn}(x, y) = u_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad (\text{П7.13})$$

которым отвечают прежние собственные значения $\chi_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$.

3. Решение однородного уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах. Уравнение (П5.26) теперь имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \quad (\text{П7.14})$$

Разыскивая его решение $u(r, \alpha, z) = \mathcal{R}(z) \mathcal{A}(\alpha) Z(z)$ после подстановки данного представления в (П7.14) и деления на $u = \mathcal{R} \mathcal{A} Z$, получаем

$$\frac{1}{\mathcal{R}r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{1}{\mathcal{A}r^2} \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 = 0. \quad (\text{П7.15})$$

Третий член есть функция координаты z и, таким образом, независим от предыдущих, что дает основание (ср. п.1) положить его равным постоянной, которую обозначим $-\chi_z^2$. Поэтому имеем уравнения

$$\frac{1}{\mathcal{R}r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{1}{\mathcal{A}r^2} \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} = \chi^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\chi_z^2,$$

причем $\chi^2 + \chi_z^2 = k^2$. Для разделения переменных в первом уравнении умножим его члены на r^2 , что дает

$$\frac{r}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} + \chi^2 r^2 = 0.$$

Радиально-зависимую часть здесь положим равной n^2 . В конечном счете (П7.15) приводит к следующим трем обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathcal{R}}{dr} + \left(\chi^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \mathcal{R} &= 0, \\ \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} + n^2 \mathcal{A} &= 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + \chi_z^2 Z = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П7.16})$$

При этом первое есть уравнение Бесселя (Пб.1), в котором $x = \chi r$. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R} &= A J_n(\chi r) + B N_n(\chi r) = P H_n^{(1)}(\chi r) + Q H_n^{(2)}(\chi r), \\ \mathcal{A} &= C \cos n\alpha + D \sin n\alpha = Re^{-in\alpha} + Se^{in\alpha}, \\ Z &= E \cos \chi_z z + F \sin \chi_z z = Te^{-i\chi_z z} + We^{i\chi_z z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{П7.17})$$

(ср. (П7.9а), (П7.9б)).

Первая краевая задача (П5.27) для круга (рис. П7.1, б) формулируется следующим образом:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \chi^2 u = 0, \quad (П7.18)$$

$$u = 0 \text{ при } r = R; \quad u(\alpha + 2\pi) = u(\alpha).$$

Для других областей имеем отличающиеся граничные условия, а именно: для кольцевой области (рис. П7.1, в)

$$u = 0 \text{ при } r = R_1, r = R_2; \quad u(\alpha + 2\pi) = u(\alpha); \quad (П7.18а)$$

для секториальной области (рис. П7.1, е)

$$u = 0 \text{ при } r = R, \alpha = 0, \alpha = \alpha_0; \quad (П7.18б)$$

для секториальной области кольца (рис. П7.1, д)

$$u = 0 \text{ при } r = R_1, r = R_2, \alpha = 0, \alpha = \alpha_0. \quad (П7.18в)$$

В случае круговой области (рис. П7.1, б) получаем решения:

$$u^{nm}(r, \alpha) = J_n(\chi r) (C \cos n\alpha + D \sin n\alpha) = J_n(\chi r) (Qe^{-in\alpha} + Te^{in\alpha}) \quad (П7.19)$$

(в (П7.17) $B=0$, см. (П6.4)), причем $\chi = \chi_{nm} = B_{nm}/R$, где B_{nm} — корни уравнения $J_n(x) = 0$, $n=0, 1, 2, \dots$, $m=1, 2, \dots$ (см. Приложение 6, п.6). Собственным функциям u^{nm} соответствуют собственные значения χ_{nm}^2 (ср. выше п.2).

В случае кольцевой области имеем собственные функции

$$u^{nm}(r, \alpha) = \left[J_n(\chi r) - \frac{J_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_1)} N_n(\chi r) \right] \{ C \cos n\alpha + D \sin n\alpha, \} \quad (П7.20)$$

(в фигурных скобках даются две формы выражения), которым отвечают собственные значения χ_{nm}^2 ($n=0, 1, 2, \dots$, $m=1, 2, 3, \dots$), являющиеся корнями уравнения (рис. П7.1, в)

$$\frac{J_n(\chi R_1)}{J_n(\chi R_2)} = \frac{N_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_2)}. \quad (П7.21)$$

В случае секториальной области (рис. П7.1, е)

$$u^{nm}(r, \alpha) = u_0 J_n(\chi r) \sin n\alpha, \quad (П7.22)$$

где $n = k\pi/\alpha_0$, $k=1, 2, \dots$; $\chi = \chi_{nm} = B_{nm}/R$.

Для кольцевого сектора (рис. П7.1, д)

$$u^{nm}(r, \alpha) = u_0 \left[J_n(\chi r) - \frac{J_n(\chi R_1)}{N_n(\chi R_1)} N_n(\chi r) \right] \sin n\alpha, \quad (П7.23)$$

где n то же, что и в (П7.22), а χ подчинено уравнению (П7.21).

Сформулируем вторую краевую задачу для круга (рис. П7.1, б)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \chi^2 u = 0, \quad (П7.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R; \quad u(\alpha + 2\pi) = u(\alpha)$$

и приведем граничные условия для других областей:

для кольцевой области (рис. П7.1, в)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_1, r = R_2; \quad u(\alpha + 2\pi) = u(\alpha); \quad (П7.25а)$$

для секториальной области (рис. П7.1, е)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R, \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = \alpha_0; \quad (П7.25б)$$

для секториальной области кольца (рис. П7.1, б)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R_1, r = R_2; \quad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } \alpha = 0, \alpha = \alpha_0. \quad (\text{П7.25в})$$

Соответственно этому имеем решения в виде систем собственных функций с соответствующими собственными значениями:

для круговой области (рис. П7.1, б)

$$u^{nm}(r, \alpha) = J_n(\chi r) (C \cos n\alpha + D \sin n\alpha) = J_n(\chi r) (Qe^{-in\alpha} + Te^{in\alpha}), \quad (\text{П7.26})$$

где $\chi = \chi_{nm} = A_{nm}/R$, причем A_{nm} — корни уравнения $J'_n(x) = 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 1, 2, \dots$ (см. приложение 6, п.6);

для кольцевой области (рис. П7.1, в)

$$u^{nm}(r, \alpha) = \left[J_n(\chi r) - \frac{J'_n(\chi R_1)}{N'_n(\chi R_1)} N_n(\chi r) \right] \left\{ C \cos n\alpha + D \sin n\alpha \right\}, \quad (\text{П7.27})$$

причем

$$\frac{J'_n(\chi R_1)}{J'_n(\chi R_2)} = \frac{N'_n(\lambda R_1)}{N'_n(\lambda R_2)}; \quad (\text{П7.28})$$

для секториальной области (рис. П7.1, в)

$$u^{nm}(r, \alpha) = u_0 J_n(\chi r) \cos n\alpha, \quad (\text{П7.29})$$

где n то же, что и в (П7.22), а $\chi = \chi_{nm} = A_{nm}/R$;

для секториальной кольцевой области (рис. П7.1, д)

$$u^{nm}(r, \alpha) = \left[J_n(\chi r) - \frac{J'_n(\chi R_1)}{N'_n(\chi R_1)} N_n(\chi r) \right] \cos n\alpha, \quad (\text{П7.30})$$

где n прежнее, а χ — корни уравнения (П7.28).

4. Решение однородного уравнения Гельмгольца в сферических координатах. Теперь уравнение (П5.26) имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + k^2 u = 0. \quad (\text{П7.31})$$

Подстановка $u(r, \vartheta, \alpha) = \mathcal{R}(r) \Theta(\vartheta) \mathcal{A}(\alpha)$ с последующим умножением всех членов на $r^2 \sin^2 \vartheta / \mathcal{R} \Theta \mathcal{A}$ дает

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{1}{\mathcal{A}} \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} + k^2 r^2 \sin^2 \vartheta = 0.$$

Третий член, зависящий только от α , приравнивается $-m^2$, и уравнение распадается на два, одно из которых делится на $\sin^2 \vartheta$, после чего члены, зависящие только от r , приравниваются p^2 . В результате имеем три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + k^2 r^2 &= p^2, \\ \frac{1}{\Theta \sin^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} &= -p^2, \quad \frac{d^2 \mathcal{A}}{d\alpha^2} + m^2 \mathcal{A} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П7.32})$$

Если $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, то $u(r, \vartheta, \alpha + 2\pi) = u(r, \vartheta, \alpha)$, так что $m = 0, 1, 2, \dots$. В уравнении относительно $\Theta(\vartheta)$ сделаем замену $t = \cos \vartheta$ и приведем его к виду

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{d\Theta}{dt} \right] + \left(p^2 - \frac{m^2}{1-t^2} \right) \Theta = 0 \quad (\text{П7.33})$$

($-1 < t < 1$). Это уже рассматривавшееся уравнение (П6.28), так что $\Theta(\vartheta) = P_n^{(m)}(\cos \vartheta)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$). Первое из уравнений (П7.32)

после дифференцирования выражения в круглых скобках и замены (в соответствии с обсуждением (П6.28)) ρ на $n(n+1)$, а также представления $\mathcal{R}(r) = \rho(r)/\sqrt{kr}$ приводится к следующему уравнению:

$$\frac{d^2\rho}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\rho}{dr} + \left[k^2 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right] \rho = 0. \quad (\text{П7.34})$$

Это не что иное, как уравнение Бесселя (П6.1) порядка $n + \frac{1}{2}$ относительно функции $\rho(kr)$. Таким образом,

$$\mathcal{R}(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \left[J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + BN_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right] = \frac{1}{\sqrt{kr}} \left[PH^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) + QH^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right].$$

Итак, решения уравнения (П7.31) имеют вид

$$u(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{kr}} \left\{ \begin{array}{cc} AJ_{n+\frac{1}{2}}(kr) + BN_{n+\frac{1}{2}}(kr) \\ PH^{(1)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) + QH^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr) \end{array} \right\} \times \\ \times P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} C \cos m\alpha + D \sin m\alpha \\ Re^{-im\alpha} + Se^{-im\alpha} \end{array} \right\}. \quad (\text{П7.35})$$

Приложение 8

РЯДЫ ФУРЬЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Разложение Фурье и метод комплексных амплитуд. Пусть в (П3.6) u и f — некоторые периодические функции времени (период T). Разложим их в ряды Фурье, используя комплексную форму записи. Так,

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{u}_n e^{in\omega t}, \quad \dot{u}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-in\omega t} dt \quad (\text{П8.1})$$

($\omega T = 2\pi$); аналогично разлагается известная функция $f(t)$; ее коэффициенты Фурье \dot{f}_n , в отличие от \dot{u}_n , можно считать известными при постановке задачи. Внося разложения u и f в (П3.6), получаем относительно коэффициентов Фурье \dot{u}_n следующие уравнения вида (П3.8):

$$\mathcal{L}_n \dot{u}_n = \dot{f}_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{П8.2})$$

В случае произвольной временной зависимости функции u и f можно представить в виде интегралов Фурье. Так,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{u}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \dot{u}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{П8.3})$$

При этом из (П3.6) получается уравнение типа (П3.8) относительно спектральной плоскости $\dot{u}(\omega)$:

$$\mathcal{L}_\omega \dot{u}(\omega) = \dot{f}(\omega) \quad (\text{П8.4})$$

($\dot{f}(\omega)$ — спектральная плотность известной функции $f(t)$).

Прямая подстановка интеграла Фурье $u(t)$ под знак оператора \mathcal{L} требует некоторых обоснований, и ее можно заменить следующей процедурой. Пусть, например, $\mathcal{L} = d/dt$. Напишем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} u(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t) e^{-i\omega t} dt,$$

откуда после интегрирования по частям

$$\mathcal{L} u(\omega) + (2\pi)^{-1} u(t) e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \dot{f}(\omega)$$

($\mathcal{L} u = i\omega u$). Уравнение (П8.4) отсюда следует при $u(\pm\infty) = 0$.

2. Ортогональные системы. Скалярным произведением (u, v) функций u и v , определенных в V , называют интеграл

$$(u, v) = \int_V uv^* dv. \quad (\text{П8.5})$$

В частности, вместо объема V может фигурировать поверхность S или линия L . Говорят, что u и v ортогональны, если $(u, v) = 0$.

Система функций u_1, u_2, u_3, \dots (кратко $\{u_n\}$) называется ортогональной системой, если для любых двух функций u_i и u_k выполняется соотношение ортогональности $(u_i, u_k) = 0$. Путем выбора постоянного коэффициента ее можно сделать ортонормированной, т. е. обеспечить выполнение равенства

$$(u_i, u_k) = \delta_{ik}, \quad (\text{П8.6})$$

где $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{ik} = 1$ при $i = k$ (символ Кронекера).

Взяв ортонормированную систему функций $\{u_n\}$ и некоторую функцию u , определенную в той же области, построим ряд

$$\underline{u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad a_n = (u, u_n). \quad (\text{П8.7})$$

Он называется ортогональным рядом или рядом Фурье функции u , а a_n — коэффициентами Фурье. Отличительным свойством ряда Фурье является выполнение равенства

$$(\underline{u}, u_k) = (u, u_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{П8.8})$$

Действительно, составляя в (П8.7) скалярное произведение с u_k , справа получаем нуль во всех членах, кроме k -го, который в силу (П8.6) дает a_k . Говорят, что ряд Фурье \underline{u} сходится в среднем к u , а система $\{u_n\}$ полна (в этом смысле), если

$$\left(u - \sum_{n=1}^N a_n u_n, u - \sum_{n=1}^N a_n u_n \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (\text{П8.9})$$

Для уяснения сущности разложения Фурье рассмотрим следующую иллюстрацию. Пусть в трехмерном пространстве выбрана декартова система координат, и, следовательно, имеются три единичных взаимно перпендикулярных вектора $u_1 = x_0$, $u_2 = y_0$ и $u_3 = z_0$. Взяв произвольный вектор u , мы можем разложить его по этим ортам (рис. П8.1):

$$a = \sum_{n=1}^3 a_n u_n, \quad a_n = (a, u_n) = a u_n. \quad (\text{П8.10})$$

Вектор u теперь представлен при помощи трех своих проекций $a_n = (a, u_n)$,

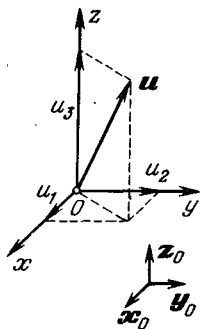


Рис. П8.1.

являющихся скалярными произведениями \mathbf{a} на единичные базисные векторы \mathbf{u}_n , подчиненные соотношению $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k) = \delta_{ik}$ (ср. (П8.6)). Сопоставляя (П8.10) и (П8.7), замечаем отчетливую формальную аналогию между построенным разложением вектора \mathbf{a} и рядом Фурье функции u . Функция подобна вектору в бесконечномерном пространстве, а ее ряд Фурье можно рассматривать как разложение этого вектора в базисе, образованном ортонормированной системой $\{\mathbf{u}_n\}$.

Заметим, что (П8.1) следует рассматривать как ряд Фурье (П8.7), получаемый при разложении функции $u(t)$, определенной на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$

по ортонормированной системе $\{\mathbf{u}_n\} = \left\{ \sqrt{1/T} e^{in \frac{2\pi}{T} t} \right\}_{-\infty}^{\infty}$. Действительно, (П8.7) при этом имеет вид

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in \frac{2\pi}{T} t}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-in \frac{2\pi}{T} t} dt.$$

В качестве примера полной ортонормированной системы функций, определенных в области V в виде параллелепипеда с ребрами a, b и c , приведем следующую:

$$\{u^{mnp}\} = \left\{ u_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \cos \frac{p\pi z}{c} \right\},$$

где $u_0 = 2\sqrt{2}/\sqrt{abc}$ при $m \neq 0, n \neq 0, p \neq 0$; когда среди этих чисел имеются нули, u_0 столько раз делится на $\sqrt{2}$, каково число нулей (один, два и т. д.). Это собственные функции второй краевой задачи для уравнения Лапласа (П5.28) (см. также приложение 7).

3. Об операторе Лапласа. Краевые задачи (П5.27) — (П5.30) можно кратко выразить в форме

$$\mathcal{L}u = \kappa u, \quad (П8.11)$$

где $\mathcal{L} = -\nabla^2$, причем подразумевается, что функции u подчинены требуемым граничным условиям, которые входят в определение оператора \mathcal{L} . Легко проверить, что оператор \mathcal{L} во всех этих случаях симметрический, т. е. выполняется соотношение (см. (П8.5))

$$(\mathcal{L}u, v) = (u, \mathcal{L}v). \quad (П8.12)$$

Согласно предыдущему (приложения 5 и 7) (П8.11) есть задача на собственные значения. Пусть u_n — собственные функции задачи (П8.11), соответствующим собственным значениям κ_n ; предположим, что все κ_n вещественны, или, как говорят, отсутствует вырождение. Взяв две любые собственные функции u_i и u_k , имеем

$$\mathcal{L}u_i = \kappa_i u_i \quad \text{и} \quad \mathcal{L}u_k = \kappa_k u_k.$$

Образуя скалярные произведения $(\mathcal{L}u_i, u_k)$ и $(u_i, \mathcal{L}u_k)$, получаем

$$(\mathcal{L}u_i, u_k) = (u_i, \mathcal{L}u_k) = (\kappa_i - \kappa_k)(u_i, u_k)$$

(κ_i и κ_k вещественны, см. Приложение 5, п.4), или в силу (П8.12)

$$(\kappa_i - \kappa_k)(u_i, u_k) = 0, \quad (П8.13)$$

и отсюда следует, что при $i \neq k$ $(u_i, u_k) = 0$, т. е. собственные функции u_n ортогональны.

4. О проекционных методах. Пусть поставлена задача (быть может, некоторая краевая задача электродинамики) в виде

$$\mathcal{A}u = f, \quad (П8.14)$$

где \mathcal{A} есть, в частности, дифференциальный оператор, заданный с подлежащими граничными условиями. Разность $\mathcal{A}u - f$ равна нулю, а потому равны нулю и ее проекции на базис $\{\mathbf{u}_n\}$, коэффициенты Фурье $(\mathcal{A}u - f, u_n)$:

$$(\mathcal{A}u - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (П8.15)$$

вектор в трехмерном пространстве характеризуется набором трех чисел, выражающих его компоненты; подобно этому x и b играют роль векторов в n -мерном пространстве. На векторы x и b распространяются обычные правила действий (сложение, умножение на скаляр, т. е. на число); скалярное произведение векторов a и b определяется как число

$$(a, b) = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*. \quad (\text{П9.3})$$

Формальный смысл равенства (П9.2) заключен в том, что его левую часть следует рассматривать как произведение матрицы A на вектор x ; с этой точки зрения левая часть (П9.1) указывает правило умножения A на x , результатом

которого является вектор с компонентами $b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$.

Над матрицами также производятся алгебраические действия. Равенство $Aa + Ba = b$, где A и B — квадратные матрицы порядка n , а a и b — соответствующие векторы, можно выразить в виде: $Ca = b$, в котором C — новая матрица, являющаяся суммой матриц A и B : $C = A + B$ ($C_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$). К понятию умножения матрицы на матрицу приходим, имея равенства типа (П9.1) $Ax = b$ и $x = Bc$. Исключая x , запишем $Cc = b$, где матрица C есть произведение A и B .

Правило образования элементов C_{ik} из A_{ik} и B_{ik} имеет вид: $C_{ik} = \sum_{s=1}^n A_{is} B_{sk}$.

2. Некоторые виды матриц. Матрица называется *диагональной*, если все элементы A_{ik} при $i \neq k$ равны нулю, т. е. $A_{ik} = A_{ik} \delta_{ik}$; в частности, при $A_{ik} = \delta_{ik}$ матрица A называется *единичной* и обозначается $A = I$; все элементы A_{ii} при этом равны единице, а остальные — нулю.

Транспонированной по отношению к A называют матрицу A' , обладающую тем свойством, что $A'_{ik} = A_{ki}$.

Комплексно сопряженной называется матрица A^* с комплексно сопряженными элементами: $(A^*)_{ik} = A_{ik}^*$.

Введем далее понятие *обратной* матрицы A^{-1} , для нее $AA^{-1} = I$ и $A^{-1}A = I$. Матрица A может не иметь обратной и называется тогда *особенной*.

Для данной матрицы A можно найти *сопряженную* матрицу \tilde{A} , удовлетворяющую условию

$$(Aa, b) - (a, \tilde{A}b) = 0, \quad (\text{П9.4})$$

где a и b — произвольные векторы. На основании (П9.3) должно быть

$$\sum_{k=1}^n (Aa)_k b_k^* = \sum_{i=1}^n a_i (\tilde{A}b)_i^*,$$

т. е.

$$\sum_{i, k=1}^n b_k^* A_{ki} a_i = \sum_{i, k=1}^n a_i \tilde{A}_{ik}^* b_k^*.$$

При любых a и b это возможно лишь при равенстве $A_{ki} = \tilde{A}_{ik}^*$ для всех i и k , а следовательно,

$$\tilde{A}_{ik} = A_{ki}^*. \quad (\text{П9.5})$$

Мы видим, что сопряженная матрица является транспонированной и комплексно сопряженной.

Если матрица A равна сопряженной ($A = \tilde{A}$), т. е., согласно (П9.4), $(Aa, b) = (a, Ab)$, то ввиду (П9.5) $A_{ik} = A_{ki}^*$. Диагональные элементы такой матрицы вещественны. Матрица называется *эрмитовой* (самосопряженной). Если эрмитова матрица вещественна ($A^* = A$), то $A_{ik} = A_{ki}$, т. е. $A = A'$; такая матрица называется *симметрической*.

Наконец, вернемся к уравнению (П9.2) и поставим вопрос, каким свойством должна обладать матрица A , чтобы выполнялось равенство $(x, x) = (b, b)$. Его можно истолковать так: при преобразовании вектора x в b последний сохраняет длину, т. е. имеет место поворот вектора в n -мерном пространстве. Выражая b через x , имеем $(x, x) = (Ax, Ax)$. Перепишем это с учетом (П9.4) в виде $(x, Ax) = (x, \tilde{A}Ax)$. Отсюда следует, что равенство $(x, x) = (b, b)$ выполняется, если

$$\tilde{A}A = I, \quad (\text{П9.6})$$

т. е. ввиду определения обратной матрицы сопряженная и обратная матрицы равны. Исходная матрица A называется при этом *унитарной*.

Если матрица A вещественна и унитарна, то $A'A = I$. Такую матрицу называют *ортогональной*. Заметим, что ортогональными являются матрицы преобразований, рассмотренных в Приложении 4, составленные из направляющих косинусов в трехмерном пространстве. Элементы произвольной ортогональной матрицы можно истолковать как направляющие косинусы в n -мерном пространстве.

3. Обращение матрицы. Если матрица A в (П9.2) неособенная (имеет обратную), то, умножая (П9.2) слева на A^{-1} , сразу получаем формальное решение задачи: $x = A^{-1}b$. Показывается, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_{11}/\Delta & \Delta_{21}/\Delta & \dots & \Delta_{n1}/\Delta \\ \Delta_{12}/\Delta & \Delta_{22}/\Delta & \dots & \Delta_{n2}/\Delta \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n}/\Delta & \Delta_{2n}/\Delta & \dots & \Delta_{nn}/\Delta \end{pmatrix}, \quad (\text{П9.7})$$

где $\Delta = \text{Det } A$ — определитель, соответствующий матрице A , а Δ_{kn} — алгебраические дополнения к элементам A_{kn} ; подчеркнем, что в (П9.7) фигурируют алгебраические дополнения не к тем элементам матрицы, на местах которых они находятся, а к элементам транспонированной матрицы.

ЛИТЕРАТУРА¹⁾

А. Электродинамика

1. И. Е. Тамм, Основы теории электричества, Гостехиздат, 1956.
2. Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, 1948.
3. А. Зоммерфельд, Электродинамика, ИЛ, 1958.

Б. Электродинамика для физиков

1. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, т. 5, Электричество и магнетизм, «Мир», 1966.
2. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, т. 6, Электродинамика, «Мир», 1966.
3. Дж. Джексон, Классическая электродинамика, «Мир», 1965.
4. В. Пановский, М. Филиппс, Классическая электродинамика, Физматгиз, 1963.

В. Электродинамика для радиотехников и радиофизиков

1. С. Рамо, Дж. Уиннери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1950.
2. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, «Сов. радио», 1957.
3. В. В. Никольский, Теория электромагнитного поля, «Высшая школа», 1964.
4. Б. З. Каценеленбаум, Высокочастотная электродинамика, «Наука», 1966.
5. В. В. Никольский, Антенны, «Связь», 1966.

Г. Теория колебаний и волновых процессов

1. Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. IV, АН СССР, 1955.
2. А. Зоммерфельд, Оптика, ИЛ, 1953.
3. Г. С. Горелик, Колебания и волны, Гостехиздат, 1950.
4. А. И. Потехин, Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, «Сов. радио», 1948.
5. Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, «Мир», 1964.
6. М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, «Наука», 1970.
7. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, «Сов. радио», 1970.

¹⁾ Автор не ставил целью дать полный список литературы последних лет по теории электромагнетизма и смежным вопросам. Указываются только некоторые рекомендуемые книги, а также те из книг, которые цитировались в тексте.

Д. Электродинамика сред и смежные вопросы

1. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, т. 7, Физика сплошных сред, «Мир», 1966.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
3. А. Р. Хиппель, Диэлектрики и волны, ИЛ, 1960.
4. Ч. Киттель, Введение в физику твердого тела, Гостехиздат, 1957.
5. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, 1960.
6. Б. Лакс, К. Баттон, Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики, «Мир», 1965.
7. А. Л. Микаэлян, Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах, Госэнергоиздат, 1963.
8. В. М. Файн, Я. И. Ханин, Квантовая радиофизика, «Сов. радио», 1965.
9. Лазеры, Сборник статей, ИЛ, 1963.
10. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики.
11. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, «Мир», 1966.
12. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, «Наука», 1967.

Е. Радиоволны в природных условиях

1. М. П. Долуханов, Распространение радиоволн, «Связь», 1965.
2. Г. П. Грудинская, Распространение радиоволн, «Высшая школа», 1967.
3. Б. А. Введенский, А. Г. Аренберг, Вопросы распространения ультракоротких волн, «Сов. радио», 1948.
4. Использование радиоспектра, «Связь», 1948.
5. Распространение ультракоротких волн, Перев. с англ. под ред. Б. А. Шиллерова, «Сов. радио», 1954.

Ж. Направляющие системы и резонаторы

1. Г. В. Кисунько, Электродинамика полых систем, Изд. ВКАС, Ленинград, 1949.
2. А. Г. Гуревич, Полые резонаторы и волноводы, «Сов. радио», 1952.
3. Р. А. Силин, В. П. Сазонов, Замедляющие системы, «Сов. радио», 1966.
4. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, «Сов. радио», 1966.

З. История науки

1. Б. Г. Кузнецов, Развитие физических идей от Галилея до Эйнштейна в свете современной науки, «Наука», 1966.
2. А. Т. Григорьян, А. Н. Вяльцев, Генрих Герц, «Наука», 1968.

И. Математическая физика

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
2. С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, «Наука», 1970.
3. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, «Наука», 1967.

К. Математика

1. Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, АН СССР, 1961.
2. И. Е. Тарасов, Векторный анализ и начала тензорного исчисления, «Высшая школа», 1966.
3. Б. П. Демидович, И. А. Марон, Основы вычислительной математики, Физматгиз, 1960.
4. Г. И. Кручкович, Г. М. Мордасова, В. Л. Подольский, Б. С. Римский-Корсаков, Х. Р. Сулейманова, И. А. Чечис, Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики, «Высшая школа», Москва, 1970.
5. В. В. Никольский, Математический аппарат электродинамики, изд. МИРЭА, М., 1973.

Л. Справочники

1. Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.
2. Дж. Кэй, Т. Лэби, Таблицы физических и химических констант, Физматгиз, 1962.
3. Справочник по волноводам, «Сов. радио», 1952.

Вячеслав Владимирович Никольский
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

М., 1973 г., 608 стр. с илл.

Редактор *В. А. Угаров.*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр.*

Корректор *Н. Б. Румянцева.*

Сдано в набор 17/X 1972 г. Подписано к печати
23/V 1973 г. Бумага 60×90^{1/16}. Тип. № 2. Физ. печ.
л. 38, Условн. печ. л. 38. Уч.-изд. л. 38,21. Тираж
17 000 экз. Т-05795. Цена книги 1 р. 48 к.
Заказ 522

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической
литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинград-
ская типография № 1 «Печатный Двор» имени
А. М. Горького Союзполиграфпрома при Госу-
дарственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной
торговли. Ленинград, Гатчинская ул., 26

