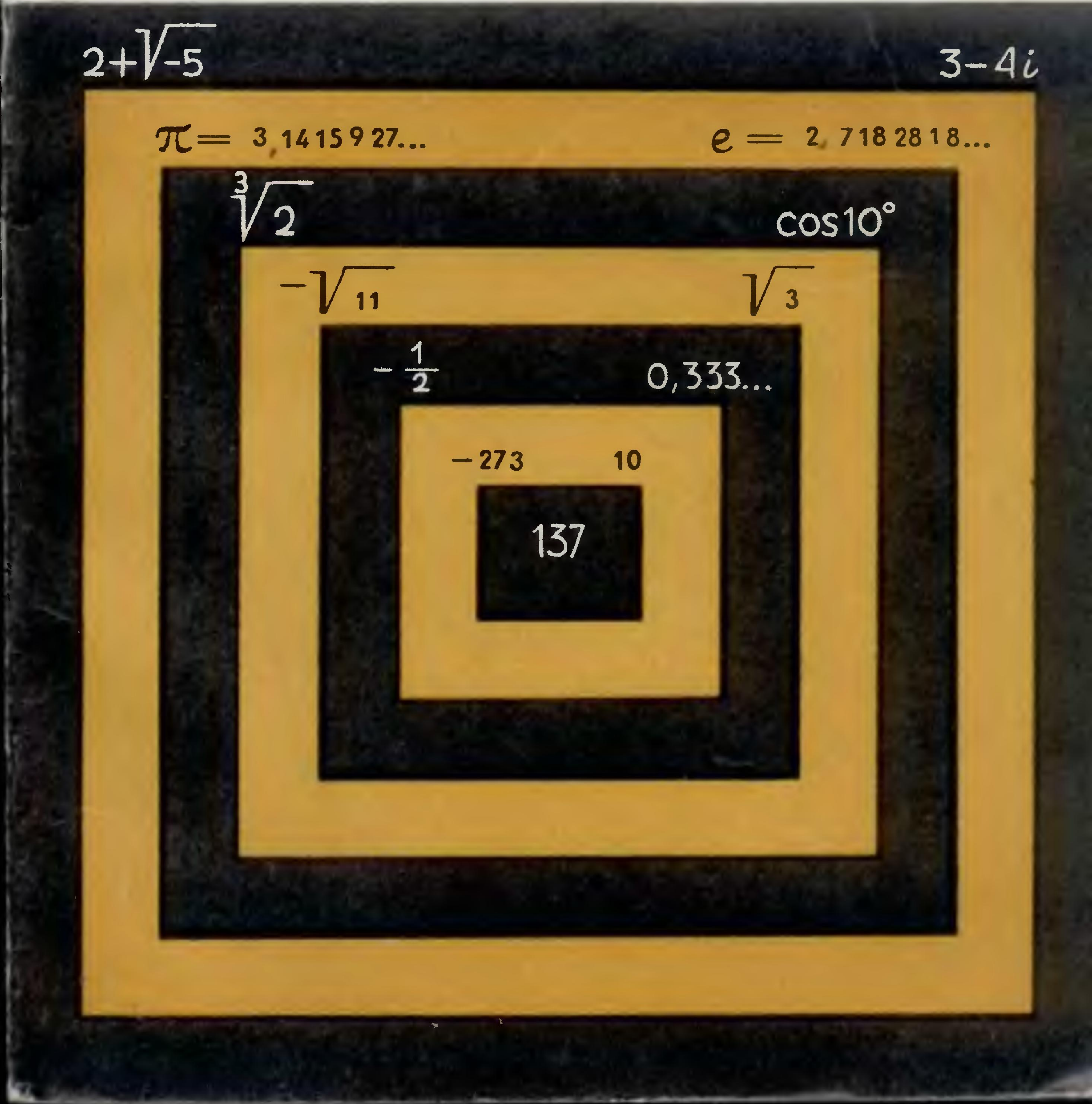
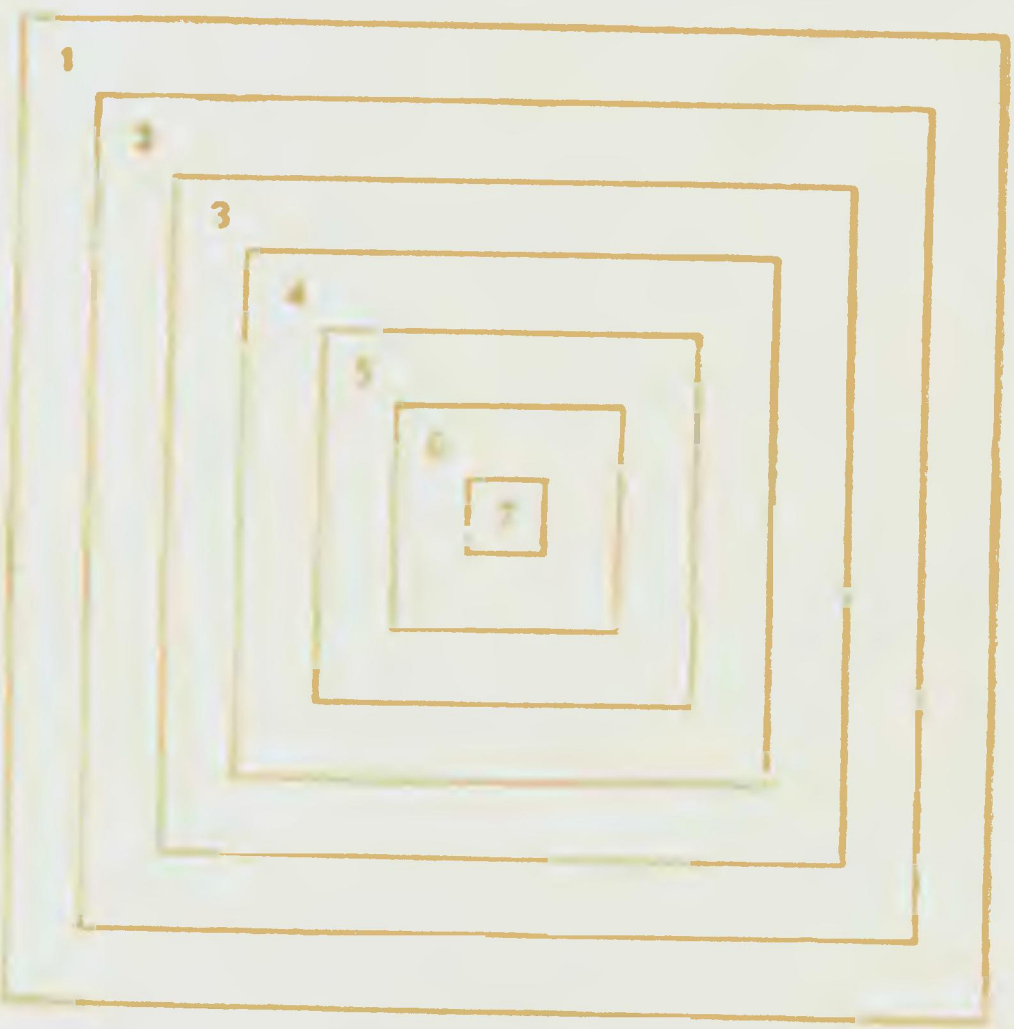
А. НИВЕН

ЧИСЛА РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ



57 коп.



1. Комплексные числа
2. Действительные числа
3. (Действительные) алгебраические числа
4. Числа, допускающие построение
5. Рациональные числа
6. Целые числа
7. Натуральные числа

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МИР»

NEW MATHEMATICAL LIBRARY
THE SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP

NUMBERS: RATIONAL AND IRRATIONAL

by
Ivan Niven
University of Oregon

RANDOM HOUSE
New York 1961

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Популярная серия

АЙВЕН НИВЕН

Числа рациональные и иррациональные

Перевод с английского
В. В. Сазонова

Под редакцией И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1966

УДК 511.0

Эта книга посвящена одному из основных понятий математики — понятию действительного числа. Ученики старших классов (именно на них она в первую очередь и рассчитана) узнают из нее некоторые свойства чисел, о которых они раньше и не подозревали, и познакомятся с доказательствами теорем, принимаемых в школьном курсе алгебры на веру.

Изложение очень простое и живое. Оно сопровождается рядом вопросов и задач, облегчающих активное усвоение материала.

Автор книги — известный американский специалист по теории чисел.

Редакция литературы по математическим наукам

От редактора

Эта книга рассчитана в первую очередь на учащихся старших классов средней школы; ее можно также рекомендовать всем любителям математики, заинтересованным в уточнении понятия «число», и особенно тем читателям, которые призваны — в настоящем или будущем — удовлетворять математическую любознательность школьников-старшеклассников: учителям средних школ и студентам педагогических институтов.

Большинство начинающих математиков стремятся главным образом к конкретным знаниям; их интересуют новые теоремы, неизвестные им ранее задачи, неожиданные математические факты. Но есть среди наших школьников и люди другого склада, интерес которых к математике направлен, так сказать, не вширь, а вглубь: их не удовлетворяют те знания, которыми они как будто уже владеют, им хочется получить точные ответы на принципиальные вопросы, которые курс средней школы тщательно обходит. Что такое число, линия, функция? Какие бывают числа, линии, функции? Какие свойства числа, линии, функции должны доказываться, а какие входят в определения этих объектов? Для этой последней категории учащихся и написана настоящая книга, Основным предметом изучения здесь является **число**. Понятие числа является не только одним из самых важных в математике, но и одним из самых сложных; можно без всякого преувеличения сказать, что вся математика — и арифметика, и алгебра, и геометрия, и анализ — уже содержится, как в зародыше, в связанном с понятием числа круге проблем. Разумеется, это маленькая книга и не претендует на то, чтобы дать ответ на все возникающие здесь вопросы — ее цель скорее состоит в том, чтобы заставить читателя задуматься над некоторыми из возникающих в этой связи задач. После смерти замечательного французского математика Анри Пуанкаре о нем было сказано, что плодом его деятельности явилось увеличение — а не уменьшение — числа нерешенных вопросов: Пуанкаре больше поставил новых, в его время неразрешимых задач, чем решил тех, которые были поставлены до него. Точно так же и прочитавший эту книгу школьник может быть решит, что теперь он знает математику **хуже**, чем до чтения этой книги. Но ведь не задумываться над вопросом — это вовсе не то же самое, что знать на него ответ, — и нам кажется, что польза от вдумчивого чтения этой книги будет очень большой.

В конце книги имеется составленный редактором небольшой список литературы, дополняющей содержание настоящей книги; надо только иметь в виду, что большая часть указанных в этом списке книг и статей несколько труднее книги А. Нивена.

Многие из доказанных в книге теорем покажутся читателю совсем простыми, но простота эта часто является обманчивой. Мы очень рекомендуем читателю не пренебрегать таким хорошим способом самоконтроля, как решение имеющихся в книге задач, Вообще каждую книгу по математике — в частности, и настоящую — следует читать с карандашом в руке: на быстрое чтение математическая литература не рассчитана. Последние главы этой книги являются несколько более сложными, чем первые, но за эту сложность читатель будет компенсирован теми глубокими, иногда неожиданными результатами, которые содержатся в последних главах. Желание увеличить число полученных в книге конкретных результатов побудило редактора к написанию приложения Г, содержащего доказательство некоторых результатов, упомянутых в гл. V; это приложение, пожалуй, несколько труднее первых трех приложений, составленных автором книги.

Ссылка в тексте книги на § 3 или на теорему 4 означает, что речь идет о параграфе или о теореме той же главы; в том случае, когда ссылка относится к материалу другой главы, это каждый раз специально оговаривается.

Автор этой книги Айвен Нивен является известным американским математиком, специализирующимся в области теории чисел. Он проявляет большой интерес к проблемам преподавания математики и является автором ряда научно-популярных книг и статей. А. Нивен — профессор Университета штата Орегон; одновременно он является редактором замечательного журнала «Американский математический ежемесячник» (American Mathematical Monthly), рассчитанного на учителей американских школ и на широкие круги любителей математики, а также председателем Издательского комитета высокоавторитетной «Исследовательской группы по школьной математике» (School Mathematics Study Group) Американского математического общества, издающей, в частности, серию книг для школьников «Новая математическая библиотека» (New Mathematical Library), первым выпуском которой явилась настоящая книга. Вышедшие ранее книги популярной серии «Современная математика»: О. Оре «Графы и их применение»; Э. Бекенбах и Р. Беллман «Введение в неравенства» — также первоначально были изданы в серии «Новая математическая библиотека».

И. М. Яглом

Введение

Простейшими числами являются целые положительные числа 1, 2, 3 и т. д., используемые при счете. Они называются *натуральными числами*, и люди их знали так много тысячилетий назад, что знаменитый математик Леопольд Кронекер мог позволить себе сказать: «Бог создал натуральные числа; все остальное — дело рук человека».

Насущные потребности повседневной жизни привели к появлению простых дробей — чисел вида $1/2$, $2/3$, $5/4$ и т. д.[1] Такие числа называются *рациональными числами*. Им дано это название не потому, что они «разумны», а потому, что они являются отношениями целых чисел[2].

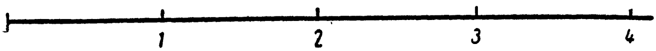


Рис. 1.

Натуральные числа можно представить себе в виде точек на прямой линии (рис. 1), причем каждая точка отстоит от предыдущей на отрезок единичной длины

---

[1]) Для экономии при печати дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$, равно как и другие, часто печатаются в этой книге с наклонной черточкой, т. е. как $1/2$, $2/3$, $5/4$.

[2]) По-английски отношение — ratio, рациональный — rational; слово rational, подобно тому как в русском языке слово «рациональный», употребляется также в смысле «разумный», «целесообразный». — *Прим. перев.*

подобно тому, как, например, располагаются сантиметровые деления на рулетке. Рациональные числа представляются точками на той же самой прямой (рис. 2), и можно считать, что они измеряют доли длины.

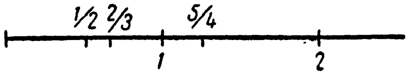


Рис. 2.

Значительно позднее индусами было изобретено очень важное число 0, а в начале нового времени итальянские алгебраисты открыли отрицательные числа. Нуль и отрицательные числа тоже могут представляться точками прямой линии, как показано на рис. 3.

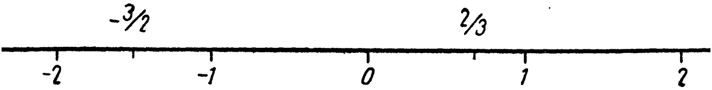


Рис. 3.

Когда математики говорят о рациональных числах, они имеют в виду положительные и отрицательные целые числа (эти числа также могут быть представлены как отношения, например, $2=2/1=6/3$ и т. д.), нуль и простые дроби. Положительные и отрицательные целые числа и нуль называются также *целыми числами*. Ясно, что класс рациональных чисел содержит класс целых чисел.

Еще 2500 лет назад греческими математиками было обнаружено, что нужды геометрии не обеспечиваются простыми дробями. Они были удивлены и обескуражены, заметив, что длина диагонали квадрата, стороны которого имеют длину единица (рис. 4), не может быть выражена никаким рациональным числом. (Мы докажем это в гл. III.) На современном языке это означает, что корень квадратный из 2 (который в соответствии с теоремой Пифагора является длиной диагонали такого квадрата) есть *число иррациональное.* Это утверждение имеет такой геометрический смысл: у стороны и диагонали квадрата не существует общей меры, т. е. никакой отрезок, как бы мал он ни был, не укладывается на стороне и на диагонали по целому числу раз. Иными словами, ни для

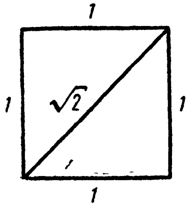


Рис. 4.

какой единицы длины, как бы мала она ни была, сторона и диагональ квадрата не являются целыми кратными. Для греков это открытие повлекло за собой значительные трудности, поскольку во многих своих геометрических доказательствах они предполагали, что любые два прямолинейных отрезка имеют общую единицу длины. Таким образом, в логической структуре евклидовой геометрии был обнаружен пробел — неполнота в рассуждениях об отношениях и пропорциях длин. В § 7 гл. III мы покажем, как может быть устранен этот пробел.

Точно так же длина окружности есть иррациональное кратное число (именно — π-кратное) длины ее диаметра. Ряд других иррациональных чисел появляется при попытке вычислить значения некоторых из основных для математики функций, например при вычислении, скажем, $\sin x$, когда x равно 60°, мы придем к иррациональному числу $\sqrt{3}/2$. Аналогично при отыскании значений функции $\log x$ даже для рациональных x обычно приходят к иррациональным числам. Хотя числа, приводимые в таблицах логарифмических и тригонометрических функций, рациональны, в действительности они являются лишь рациональными приближениями к истинным значениям, которые, за небольшим числом исключений, все иррациональны.

Ясно, таким образом, что в элементарной математике целый ряд естественных путей ведет к появлению иррациональных чисел.

Действительные числа образуются всеми рациональными и иррациональными числами и являются основной числовой системой в математике. Любое геометрическое рассуждение, касающееся длин, площадей или объемов, сразу приводит к действительным числам. Геометрия дает простой интуитивный способ описания действительных чисел как чисел, требуемых для измерения всевозможных длин при помощи данной единицы длины. Если мы опять рассмотрим представление чисел точками прямой линии, то обнаружим, что хотя любой отрезок (как бы мал он ни был) содержит бесконечно много рациональных точек, он всегда содержит и много других точек (таких, как $\sqrt{2}$, π и т. д.), расстояния которых от нуля не могут быть выражены рациональными числами. Но когда рассматриваются все действительные числа, каждая точка на прямой соответствует в точности одному действительному числу, и каждому действительному числу соответствует в точности одна точка на прямой. Тот факт, что все длины могут быть выражены действительными числами, называется *свойством полноты* множества действительных чисел. От этого свойства зависит все развитие математического анализа.

Имеется, таким образом, два типа действительных чисел — рациональные и иррациональные. Есть еще другое, появившееся значительно позднее, разделение действительных чисел на две категории — на *алгебраические* и *трансцендентные* числа. Действительное число называется *алгебраическим*, если оно удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. Например, число $\sqrt{2}$ является алгебраическим, поскольку оно удовлетворяет уравнению $x^2-2=0$. Действительные не алгебраические числа называются *трансцендентными*. Из этого определения неясно, существуют ли вообще трансцендентные, т. е. не алгебраические, числа. В 1851 г. французский математик Лиувилль установил, что трансцендентные числа существуют. Доказательство Лиувилля состояло в указании некоторых чисел, которые, как он показал, не являются алгебраическими. В гл. VII мы установим существование трансцендентных чисел, следуя методу Лиувилля.

Позднее, в XIX в., было доказано, что π есть число трансцендентное, и тем самым доказана неразрешимость древней геометрической задачи на построение, известной под названием «квадратуры круга». Этому кругу вопросов посвящена гл. V. Другим достижением XIX в. было доказательство немецким математиком Кантором существования трансцендентных чисел посредством совершенно иного подхода. Хотя метод Кантора в противоположность методу Лиувилля и не позволяет указать ни одного трансцендентного числа в явном виде, он имеет другое преимущество — позволяет утверждать, что в известном смысле трансцендентных чисел значительно больше, чем алгебраических. Утверждение подобного рода предполагает сравнение бесконечных множеств, так как имеется бесконечно много как алгебраических, так и трансцендентных чисел. Эти идеи довольно далеки от основной линии этой книги, и поэтому доказательство Кантора существования трансцендентных чисел проводится в приложении В.

Настоящая книга построена по следующему плану. В первых трех главах рассматриваются натуральные, целые, рациональные и действительные числа. Затем в гл. IV дается стандартный способ узнавать, является ли данное число иррациональным. Глава V посвящена так называемым тригонометрическим и логарифмическим числам, т. е. тем числам, приблизительные значения которых приводятся в таблицах логарифмических и тригонометрических функций. В гл. VI обсуждается вопрос о том, сколь точно можно приблизить иррациональные числа посредством рациональных. Эта глава труднее других и имеет несколько более специальный характер. Она включена для того, чтобы дать возможность некоторым читателям познакомиться с математическими рассуждениями нового типа.

Глава VII и приложение В содержат два совершенно различных доказательства существования трансцендентных чисел. В гл. VII применяется метод Лиувилля, в приложении В — метод Кантора. Используемые в этих доказательствах методы совсем различны, и читатель будет хорошо вознагражден, если он разберет каждое из них. Доказательство гл. VII перегружено неизбежными техническими деталями. Чтобы разобраться в нем, карандаш и бумага потребуются еще больше, чем в предыдущих главах. Не исключено, что читатель может найти гл. I—V не очень сложными, гл. VI довольно трудной и гл. VII фактически недоступной для понимания. В таком случае ему предлагается отложить изучение гл. VII до того времени, когда он получше познакомится с математикой. С другой стороны, читатель, для которого главы I—V не представят большого труда, может предпочесть изучить гл. VII до гл. VI. Это возможно, так как гл. VII не зависит от остального содержания книги, за исключением одного хорошо известного результата о неравенствах, приведенного в § 1 гл. VI.

Для понимания приложения В из гл. VII нужно знать теорему о делимости многочлена на линейный двучлен (теорему 2, стр. 141), в остальном же это приложение можно читать независимо от гл. VII. Если читатель незнаком с теорией множеств, то идеи приложения В окажутся для него совсем новыми.

На приложение А, в котором доказывается бесконечность числа простых чисел, не опирается никакое из рассуждений, приводимых в этой книге. Оно включено потому, что тесно связано с основной темой, а также потому, что это изящное предложение восходит еще к Евклиду. Приложение Б, содержащее доказательство так называемой «основной теоремы арифметики» напротив, является существенным для наших рассуждений, особенно в гл. IV и V. Доказательство этой теоремы отнесено в приложение, поскольку оно довольно длинно и трудно в сравнении с доказательствами первых пяти глав. Математически мало подготовленный читатель может принять основную теорему арифметики на веру.

В конце отдельных параграфов имеется много упражнений; значительную часть их читателю следует попытаться решить, чтобы проверить свое понимание прочитанного. (Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед!) Более трудные задачи отмечены звездочкой. Читатель не должен отчаиваться, если он не в состоянии решить все задачи. Успех часто зависит от его математической образованности, т. е. от знакомства с достаточно обширным набором математических приемов, полученного в результате прошлых занятий математикой. Ответы к задачам помещены в конце книги; там же даются указания к решению наиболее трудных задач.

К системе действительных чисел, рациональных и иррациональных, можно подойти на любом из нескольких у р о в н е й с т р о г о с т и.

В математике рассуждение называют *строгим*, если его заключение получается из исходного утверждения при помощи ряда предложений, логически следующих непосредственно друг из друга, а не опирается на основанную на интуиции уверенность в справедливости каких-либо из этих предложений. Уровень строгости тем выше, чем меньше мы полагаемся на интуицию. Наша цель состоит в том, чтобы дать первое знакомство с предметом, и мы выбираем для этого довольно интуитивный путь. Таким образом, мы не принимаем никаких аксиом или постулатов за основу изучения. Будущий математик, в руки которого, возможно, попадет эта книга, в дальнейшем захочет изучить тщательное аксиоматическое построение системы действительных чисел. Почему? Причина состоит в следующем: наша трактовка носит настолько описательный характер, что некоторые из основных вопросов остаются без ответа. Например, в гл. III говорится, что действительные числа могут быть описаны тремя различными способами. Но как можем мы быть уверенными, что эти различные способы описывают одну и ту же систему? Вот пример более конкретного вопроса, на который не дается ответа в настоящей книге: из чего мы заключаем, что $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ или что $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{35}$? Для ответа на такие вопросы необходимо дать точное определение операций над иррациональными числами, чего не будет здесь сделано, поскольку это не так легко, как может показаться. Лучше отложить строгое изложение до того момента, когда изучающий станет обладать не только бо́льшим математическим умением, но и бо́льшим пониманием природы и смысла математического доказательства. Как сказал американский математик Е. Г. Мур: «Строгости этого на сегодня достаточно».

«Природа и смысл математического доказательства!» Невозможно дать здесь точное описание того, что составляет доказательство, и это является одним из наиболее загадочных и отпугивающих факторов для новичка в математике. Если природу доказательства нельзя детально описать или сформулировать, то как можно кого-нибудь ей научить? Пользуясь упрощенной аналогией, можно сказать, что ее изучают таким же образом, каким ребенок учится опознавать цвета. Он наблюдает, как другие опознают зеленые предметы, синие предметы и т. д., и затем подражает тому, что он видел. Сначала могут быть неудачи, обусловленные недостаточной ориентировкой в категориях и образцах, но в конце концов обучающийся овладевает искусством. Также обстоит дело и с загадкой математического доказательства. Некоторые из наших рассуждений предназначены дать образцы техники доказательства и тем самым познакомить читателя с понятиями и методами доказательства. Таким образом, хотя мы и не в состоянии дать никакого надежного способа определять, что является, а что не является правильным доказательством, мы все же приводим несколько соображений на этот счет и надеемся, что читатель, еще не дойдя до конца этой книги, не только сможет отличать правильные доказательства, но и будет иметь удовольствие построить некоторые из них самостоятельно.

ГЛАВА I

Натуральные и целые числа

Исходную числовую систему в математике образуют обычные числа, используемые для счета:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots .$$

Это — положительные целые числа, называемые также *натуральными числами.* Наименьшим натуральным числом является 1, но наибольшего натурального числа не существует, поскольку, какое бы большое число мы ни взяли, существуют еще бо́льшие натуральные числа. Мы говорим поэтому, что имеется бесконечно много натуральных чисел.

При сложении любых двух натуральных чисел в результате получается также натуральное число, например $4+4=8$ или $4+7=11$. Подобным же образом и при умножении любых двух натуральных чисел в результате получается натуральное число, так, например, $4\times7=28$. Эти два свойства можно кратко сформулировать, сказав, что совокупность натуральных чисел *замкнута относительно сложения и замкнута относительно умножения.* Вообще, если имеются совокупность объектов (скажем, множество всех натуральных чисел) и операция (скажем, сложение), такие, что к каким бы элементам этой совокупности ни применить рассматриваемую операцию (скажем, к 4 и 7), в результате получается элемент исходной совокупности, то мы говорим, что наша совокупность замкнута относительно рассматриваемой операции. Возьмем теперь множество, образованное только

2 Зак. 107

числами 1, 2, 3. Это множество не замкнуто относительно сложения, поскольку $1+3=4$, а 4 не является элементом рассматриваемого множества. Говоря о множестве натуральных чисел, мы будем иметь в виду множество всех натуральных чисел. Желая рассмотреть лишь некоторые из них, мы будем точно указывать, какие числа включаются в наше множество. Таким образом, мы видели, что множество натуральных чисел замкнуто относительно сложения, в то время как множество, состоящее лишь из трех натуральных чисел 1, 2, 3, относительно сложения не замкнуто.

Совокупность натуральных чисел не замкнута относительно вычитания. Чтобы убедиться в этом, нужно лишь показать, что не всякое вычитание одного натурального числа из другого приводит к натуральному числу. Например, если 7 вычесть из 4, то в результате мы получим —3, т. е. не натуральное число. Конечно, при вычитании 4 из 7 в результате получается натуральное число 3. Однако в соответствии с данным определением мы должны сказать, что множество чисел не замкнуто относительно вычитания, если результат хотя бы одного возможного вычитания не содержится в этом множестве. Аналогично множество натуральных чисел не замкнуто относительно деления, так как, например, при делении 4 на 7 получается дробь 4/7, не являющаяся натуральным числом.

Во многих случаях при делении одного натурального числа на другое в результате получается натуральное число; так, например, 35, деленное на 5, есть 7. Мы говорим при этом, что 5 есть *точный делитель* 35-ти или, короче, что 5 есть *делитель* (или *множитель*) 35-ти. Обращая это утверждение, мы говорим, что 35 есть *кратное* 5-ти. Вообще, пусть b и d обозначают какие-нибудь два натуральных числа. Если существует третье натуральное число q, такое, что $b=dq$, то d называется *делителем* b, а b — *кратным* d. В приведенном выше примере $b=35$ и $d=5$, а q, конечно, равно 7.

§ 1. Простые числа

Сколько делителей имеет число 35? Всего четыре, в чем можно убедиться, выписав их все: 1, 5, 7, 35. Поставленный вопрос оказался нетрудным, так как 35 является относительно малым натуральным числом. А сколько делителей имеет число 187? На этот вопрос не так легко ответить, однако, пробуя числа 1, 2, 3 и т. д., мы обнаруживаем, что число делителей опять равно четырем. Именно делителями 187 являются числа 1, 11, 17 и 187. Для нахождения делителей 11 и 17 от читателя потребовалось бы, возможно, небольшое усилие, делители же 1 и 187 очевидны. Подобным образом ясно, что числа 1 и 179 являются делителями 179; однако оказывается, что других делителей у числа 179 нет. Натуральные числа, имеющие, как 179, в точности два делителя, называются *простыми*. Иными словами, простое число есть натуральное число, единственными делителями которого являются оно само и 1. Первыми простыми числами в порядке возрастания являются

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, \ldots .$$

Отметим, что 1 не включено в эту последовательность. То обстоятельство, что 1 не является простым числом, разумеется, не теорема, оно представляет собой математический договор или соглашение, другими словами, это определение. Математики договорились не считать 1 простым числом. Можно было бы принять обратное решение — включить 1 в множество простых чисел. Но, как будет показано ниже, исключение 1 позволяет сформулировать ряд предложений о простых числах, не делая в их условиях никаких оговорок.

Упражнения

(Звездочкой отмечены более трудные упражнения.)

1. Установить, какие из следующих утверждений верны и какие ложны:

   а) множество 1, 0, —1 замкнуто относительно сложения;

б) множество 1, 0, —1 замкнуто относительно умножения;
в) множество 1, 0, —1 замкнуто относительно вычитания;
г) множество положительных степеней числа 2, т. е. множество чисел $2^1=2$, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, ..., замкнуто относительно умножения;
*д) множество положительных степеней числа 2 замкнуто относительно сложения.

2. Сколько делителей имеет число 30?
3. Сколько делителей имеет число 16?
4. Каково наименьшее натуральное число, имеющее в точности три делителя?
5. Найти все простые числа, заключенные между 50 и 100.
*6. Доказать, что если число 3 является делителем некоторых двух чисел, то оно является также делителем их суммы и разности. Обобщая этот результат, показать, что если d является делителем двух чисел b_1 и b_2, то d является также делителем чисел b_1+b_2 и b_1-b_2.

§ 2. Единственность разложения на простые множители

При рассмотрении все бо́льших и бо́льших натуральных чисел простые числа встречаются все реже. Для иллюстрации смысла этого утверждения отметим, что всего имеется

168 простых чисел между 1 и 1000,
135 простых чисел между 1000 и 2000,
127 простых чисел между 2000 и 3000,
120 простых чисел между 3000 и 4000,
119 простых чисел между 4000 и 5000.

Тем не менее **последовательность простых чисел бесконечна**, т. е. имеется бесконечно много простых чисел. Этот факт доказан в приложении А в конце книги. Приведенное доказательство не требует никаких специальных знаний, и читатель может, если пожелает, прочитать его сейчас. Мы поместили его в приложении, потому что этот результат нам ни разу не понадобится для доказательства других предложений. Однако совсем исключить из книги это доказательство было бы обидно, ибо сам по себе указанный результат весьма интересен.

Каждое натуральное число, кроме числа 1, либо простое, либо может быть разложено на простые множители. Рассмотрим, например, натуральное число 94 860. Оно, очевидно, не простое, поскольку

$$94\,860 = 10 \times 9486.$$

Кроме того, 9486 делится на 2, а также на 3 и, более того, на 9. Следовательно, можно написать

$$94\,860 = 10 \times 2 \times 9 \times 527 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 527.$$

Если бы число 527 было простым, то это выражение было бы разложением 94 860 на простые множители. Но 527 не является простым, поскольку $527 = 17 \times 31$. Разложение числа 94 860 на простые множители имеет, таким образом, вид

$$94\,860 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 17 \times 31.$$

Мы рассмотрели определенное число 94 860; но тот же самый процесс применим к *любому* натуральному числу n. Действительно, либо n простое число, либо — не простое. Если оно не простое, то его можно разложить в произведение двух меньших чисел, скажем, a и b, $n = ab$. Каждое из чисел a, b в свою очередь либо простое, либо может быть разложено в произведение еще меньших чисел. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим разложение n на простые множители.

В первой фразе предыдущего абзаца простые числа выделяются из множества всех других натуральных чисел. В математике часто желательно делать определения настолько общими, чтобы становилось ненужным выделение отдельных случаев. Под «разложением на простые множители», например, понимается разложение числа, скажем 12, в произведение *нескольких* простых чисел, в нашем случае $2 \times 2 \times 3$. Обобщим теперь понятие «разложение на простые множители» таким образом, чтобы оно включало случай единственного множителя. При этом, например, простое число 23 будет иметь разложение на простые множители, состоящее из единственного множителя 23. Используя это обобщенное понимание «разложения на простые множители», наше первоначальное утверждение можно заменить на следующее: «Каждое натуральное число, отличное от числа 1, может быть разложено на простые множители». Таким образом, мы укоротили определение и исключили необходимость различения того, является ли рассматриваемое натуральное число простым или нет; по крайней мере это различие становится ненужным в формулировке утверждения о разложении натуральных чисел на простые множители.

Одним из фундаментальных результатов математики является тот факт, что *разложение натурального числа на простые множители единственно*. Например, для числа 94 860 не существует иного разложения, кроме приведенного выше. Порядок множителей, конечно, может быть различным, так, например, можно также написать

$$94\,860 = 3 \times 17 \times 2 \times 5 \times 31 \times 3 \times 2.$$

Однако, за исключением подобных изменений порядка, для 94 860 нельзя указать никакого другого разложения. Этот результат известен как теорема о единственности разложения на множители или основная теорема арифметики.

Основная теорема арифметики. *Каждое натуральное число, отличное от* 1, *может быть разложено в произведение простых множителей, и притом лишь единственным способом, если отвлечься от порядка следования множителей.*

Доказательство этой теоремы содержится в приложении Б. В дальнейших рассуждениях нам придется ее использовать. Мы поместили доказательство в приложение, потому что оно довольно сложно. Однако никакие из встречающихся в дальнейшем в книге идей не используются в этом доказательстве, так что читатель может, если желает, прочитать приложение Б сейчас. Можно также отложить изучение приложения Б, с тем чтобы сначала познакомиться с более простыми вещами и лишь затем перейти к более сложным.

Приведенная выше формулировка основной теоремы арифметики объясняет одну из причин, почему число 1 не включено в совокупность простых чисел. Именно если число 1 считать простым, то можно было бы написать, например,

$$35 = 5 \times 7 = 1 \times 5 \times 7,$$

т. е. число 35 (равно как и любое другое натуральное число) разлагалось бы в произведение простых множителей более чем одним способом. Конечно, основная теорема арифметики по-прежнему была бы верна, однако ее формулировка потребовала бы больше оговорок типа «за исключением...» или «если не...». Таким образом, исключение числа 1 из совокупности простых чисел позволяет формулировать результаты короче и изящнее.

§ 3. Целые числа

Множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4, ... замкнуто относительно сложения и умножения, но не замкнуто относительно вычитания. Замкнутости относительно вычитания можно достигнуть посредством расширения множества натуральных чисел добавлением к нему отрицательных чисел и нуля:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ \ldots .$$

Вместе с натуральными числами эти числа образуют множество *целых чисел:*

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots .$$

Читатель, по-видимому, знаком с основными свойствами целых чисел: для любых целых a, b и c

$$a+b=b+a, \qquad ab=ba, \qquad a\cdot 0=0\cdot a=0,$$

$$(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc),\ (-a)(-b)=ab,$$

$$a+0=0+a=a, \qquad a\cdot 1=1\cdot a=a,$$

$$a(b+c)=ab+ac.$$

Этими свойствами обладают все числовые системы, рассматриваемые в настоящей книге. Мы не будем обсуждать происхождение перечисленных свойств. Такое обсуждение увело бы нас к изучению теоретических основ арифметики в сторону от разбираемой здесь темы. Нашей целью является изучение различных свойств чисел, особенно иррациональных, причем основные положения мы просим принять на веру.

Множество целых чисел уже замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения. Оно не замкнуто относительно деления, поскольку, например, результат деления 2 на 3 не есть целое число и, стало быть, деление выводит за пределы класса целых чисел.

Прежде чем заняться делением целых чисел, мы изучим остальные операции и результаты, к которым они приводят. Рассматривая сложение целых чисел, мы видим не только что сумма двух целых чисел есть целое число, но также что существует только одно целое число, являющееся суммой заданных чисел. Например, сумма 3 и —1 есть 2, но не 5 и не какое-либо другое число. Этот факт может быть выражен следующим образом: для каждых двух данных целых чисел существует единственное третье целое число, являющееся их суммой. Аналогично обстоит дело и с умножением: для каждых двух данных целых чисел существует единственное третье целое число, являющееся их произведением.

При обсуждении деления натуральных чисел мы видели, что не всегда для двух данных натуральных чисел, скажем b и d, существует третье натуральное число q, их *частное,* для которого $b=dq$. Однако ясно, что всякий раз, когда такое третье число существует, оно единственно, и поэтому мы не оговаривали выше специально единственность натурального числа q, удовлетворяющего условию $b=dq$. Однако, определяя деление в множестве целых чисел, мы уже должны специально оговорить требование единственности частного. Проанализируем причину этого различия.

Прежде всего мы должны согласиться, что желательно иметь только один ответ на каждый из следующих вопросов: сколько будет 3—7? Сколько будет $(-2)\times(-3)$? Сколько будет 8/4? Иными словами, мы претендуем на то, чтобы результат каждой из наших операций был однозначен. Рассмотрим теперь, однозначна ли операция деления в множестве целых чисел. Пусть по-прежнему b и d — два данных целых числа; их частное q мы определим как такое целое число, что $b=dq$. Возьмем, к примеру, $b=-12$ и $d=3$. Ясно, что $q=-4$, поскольку $-12=3\cdot(-4)$. Соответствующее число q существует, и оно единственно. Пусть, далее, b — произвольное целое число, а d равно нулю. Мы должны найти такое q, что $b=0\cdot q$. Если $b\neq 0$ [1]), то это уравнение неразрешимо, т. е. не существует такого q, которое бы ему удовлетворяло. Если же $b=0$, то наше уравнение принимает вид $0=0\cdot q$, и ему удовлетворяет любое целое число q. Иначе говоря, если решение q уравнения $b=0\cdot q$ и существует, то оно не единственно. В силу важности единственности результатов арифметических операций нам хочется сконструировать числовую систему таким образом, чтобы частное от деления одного целого числа на другое не только существовало, но и было единственным. Этого можно достигнуть просто запрещением деления на нуль. Теперь мы можем сказать, что *целое число d называется делителем целого числа b если существует единственное целое число q, для которого $b=dq$.* (При этом, согласно проведенному выше анализу, $d\neq 0$.) Или можно сказать, что отличное от нуля целое число d называется делителем b, если существует целое число q, для которого $b=dq$. (Так как число 0 исключено из совокупности возможных делителей, то частное автоматически будет единственным.)

В проведенном выше (стр. 19) рассуждении мы задавались вопросом о том, сколько делителей имеет число 35. Тогда мы ограничивались натуральными числами; соответственно этому имели четыре делителя: 1, 5, 7 и 35. Если мы теперь будем считать, что имеются в виду целые (но не обязательно натуральные) делители, то число делителей будет восемь (а именно: ± 1, ± 5, ± 7 и ± 35).

---

[1]) Символ $\neq$ означает «не равно».

Упражнения

1. Является ли -5 делителем 35?
2. Является ли 5 делителем -35?
3. Является ли -5 делителем -35?
4. Является ли 3 делителем -35?
5. Является ли 1 делителем -35?
6. Является ли 1 делителем 0?
7. Является ли 0 делителем 1?
8. Является ли 1 делителем 1?
9. Является ли 0 делителем 0?
10. Является ли 1 делителем всякого целого числа?
11. Является ли 0 делителем 35?
12. Проверить, что имеется двадцать пять простых чисел между 1 и 100 и двадцать одно простое число между 100 и 200.

§ 4. Четные и нечетные целые числа

Целое число называется *четным*, если оно делится на 2; в противном случае оно называется *нечетным*. Таким образом, четными числами являются

$$\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$$

и нечетными числами —

$$\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots .$$

Из делимости четных чисел на два вытекает, что каждое четное число можно записать в виде $2n$, где символ n обозначает произвольное целое число. Когда некоторый символ (подобно букве n в рассматриваемом нами случае) может представлять любой элемент некоторого определенного множества объектов (множества целых чисел в нашем случае), мы говорим, что *областью значений* этого символа является указанное множество объектов. В соответствии с этим в рассматриваемом случае мы говорим, что каждое четное число может быть записано в виде $2n$, где область значений символа n совпадает с множеством целых чисел. Например, четные числа 18, 34, 12 и -62 имеют вид $2n$, где n соответственно равно 9, 17, 6 и -31. Нет особой причины использовать здесь именно букву n. Вместо того чтобы говорить, что четными числами являются целые числа вида $2n$, равным образом можно было бы сказать, что четные числа имеют вид $2m$, или $2j$ или $2k$.

При сложении двух четных чисел в результате получается тоже четное число. Это обстоятельство иллюстрируется следующими примерами:

$$12+14=26, \quad 30+22=52, \quad 46+(-14)=32,$$
$$(-10)+(-46)=-56.$$

Однако для доказательства общего утверждения о том, что *множество четных чисел замкнуто относительно сложения*, недостаточно набора примеров. Чтобы дать такое доказательство, обозначим одно четное число через $2n$, а другое — через $2m$. Складывая эти числа, можно написать

$$2m+2n=2(m+n).$$

Сумма $2m+2n$ записана в виде $2(m+n)$. Из этого видна ее делимость на 2. Было бы недостаточно написать

$$2n+2n=4n,$$

поскольку последнее выражение представляет собой сумму четного числа и того же самого числа. Иными словами, мы доказали бы, что удвоенное четное число есть опять четное число (в действительности делящееся даже на 4), в то время как нужно доказать, что сумма любых двух четных чисел есть число четное. Поэтому мы использовали обозначение $2n$ для одного четного числа и $2m$ для другого четного числа с тем, чтобы указать, что эти числа могут быть и разными.

Какое обозначение можно использовать для записи любого нечетного числа? Отметим, что при вычитании 1 из нечетного числа получается четное число. Поэтому можно утверждать, что любое нечетное число записывается в виде $2n+1$. Запись такого рода не единственна. Подобным же образом мы могли бы заметить, что при прибавлении 1 к нечетному числу получается четное число, и могли бы заключить отсюда, что любое нечетное число записывается в виде $2n-1$. Аналогично можно сказать, что любое нечетное число записывается в виде $2n+3$, или $2n-3$, или $2k-5$ и т. д.

Можно ли утверждать, что каждое нечетное число записывается в виде $2n^2+1$? Подставляя в эту формулу вместо n целые числа

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots,$$

получаем следующее множество чисел:

$$\ldots, 51, 33, 19, 9, 3, 1, 3, 9, 19, 33, 51, \ldots .$$

Каждое из этих чисел нечетно, однако ими не исчерпываются все нечетные числа. Например, нечетное число 5 не может быть так записано. Таким образом, *неверно, что каждое нечетное число имеет вид* $2n^2+1$, хотя *каждое целое число вида* $2n^2+1$ *нечетно.* Аналогично неверно, что каждое четное число записывается в виде $2k^2$, где область значений символа k есть множество всех целых чисел. Например, 6 не равно $2k^2$, какое бы целое число ни взять в качестве k. Однако каждое целое число вида $2k^2$ четно.

Соотношение между этими утверждениями — то же самое, что и между утверждениями «все кошки — животные» и «все животные — кошки». Ясно, что первое из них верно, а второе — нет. Это соотношение будет обсуждаться дальше при разборе утверждений, включающих фразы «тогда», «только тогда» и «тогда и только тогда» (см. § 3 гл. II).

Упражнения

Какие из следующих утверждений верны и какие ложны? (Предполагается, что областью значений символов n, m, j, ... является совокупность всех целых чисел.)

1. Каждое нечетное число может быть представлено в виде

а) $2j-1$;	г) $2n^2+3$;
б) $2n+7$;	д) $2n^2+2n+1$;
в) $4n+1$;	е) $2m-9$.

2. Каждое целое число вида а) (см. упр. 1) нечетно; это же имеет место для чисел вида б), в), г), д) и е).

3. Каждое четное число может быть представлено в виде

а) $2n+4$; г) $2-2m$;
б) $4n+2$; д) n^2+2.
в) $2m-2$;

4. Каждое целое число вида а) (см. упр. 3) четно; то же самое имеет место для чисел вида б), в), г) и д).

§ 5. Свойства замкнутости

Следующие два предположения будут использованы в одной из последующих глав.

1) *Множество четных чисел замкнуто относительно умножения.*

2) *Множество нечетных чисел замкнуто относительно умножения.*

Для доказательства утверждения 1) нужно установить, что *произведение любых двух четных чисел четно.* Любые два четных числа можно записать как $2m$ и $2n$. Перемножая эти числа, получаем

$$(2m)(2n)=4mn=2(2mn).$$

Произведение делится на 2 и таким образом четно.

Для доказательства утверждения 2) нужно установить, что *произведение любых двух нечетных чисел нечетно.* Представляя два нечетных числа как $2m+1$ и $2n+1$ и перемножая их, получаем

$$(2m+1)(2n+1)=4mn+2m+2n+1=$$
$$=2(2mn+m+n)+1.$$

Число $2(2mn+m+n)$ четно, какие бы целые числа ни подставить в его выражение вместо m и n. Следовательно, число $2(2mn+m+n)+1$ нечетно.

Утверждения 1) и 2) можно было бы доказать, применяя теорему о единственности разложения на простые множители. Мы, однако, не будем входить в детали по поводу этого метода. (Читатель, возможно, пожелает самостоятельно провести доказательство таким методом. При этом следует помнить, что целое число четно тогда и только тогда, когда в его разложение на простые множители входит число 2.)

Мы рассмотрели четные и нечетные числа, т. е. целые числа вида соответственно $2m$ и $2m+1$. Четность и нечетность целых чисел связаны с делимостью их на 2. Подобным образом можно рассмотреть класс целых чисел, делящихся на 3, а именно:

$$\ldots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \ldots .$$

Эти числа *кратны трем*. Их можно также описать, как класс чисел вида $3n$. Целыми числами вида $3n+1$ являются числа

$$\ldots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \ldots,$$

а целыми числами вида $3n+2$ — числа

$$\ldots, -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, \ldots .$$

Три выписанные совокупности целых чисел исчерпывают все целые числа. Можно сказать, таким образом, что любое целое число имеет в точности один из видов $3n$, $3n+1$, $3n+2$.

§ 6. Замечания о природе доказательства

Раньше уже отмечалось, что для доказательства замкнутости множества четных чисел относительно сложения, т. е. четности суммы любых двух четных чисел, было бы недостаточно исследовать лишь несколько конкретных примеров типа $12+14=26$. Так как имеется бесконечно много четных чисел, то мы не в состоянии проверить все суммы конкретных пар четных чисел. Поэтому здесь нам необходимо воспользоваться алгебраической символикой. Так, например, использование символа $2n$, который употребляется для обозначения любого четного числа, позволило нам доказать замкнутость множества всех четных чисел относительно умножения.

Однако для доказательства отрицательного утверждения, такого, как «множество нечетных чисел не замкнуто относительно сложения», нет необходимости использовать какие-либо общие алгебраические символы типа $2m+1$: подобное отрицательное утверждение может быть установлено с помощью единственного примера. Для доказательства любого предложения, утверждающего, что не все элементы некоторого множества обладают определенным свойством, достаточно, очевидно, найти хотя бы один элемент, этим свойством не обладающий. Чтобы доказать, что не все мальчики имеют карие глаза, нам достаточно указать мальчика с голубыми или черными глазами. Чтобы доказать, что не все суммы двух нечетных чисел нечетны, заметим, что $3+5=8$; указания этого одного примера двух нечетных чисел, имеющих четную сумму, вполне достаточно для доказательства нашего общего утверждения. Однако если мы хотим доказать, что сумма любых двух нечетных чисел есть число четное, то мы не можем уже ограничиться примером $3+5=8$. Даже указание большего количества примеров $7+11=18$, $5+53=58$ и т. д. не может служить корректным математическим доказательством нашего утверждения, хоть оно и делает это утверждение весьма правдоподобным.

Вот еще один пример отрицательного утверждения: «не каждое простое число нечетно». Для доказательства его достаточно отметить, что четное число 2 является простым.

Упражнения

(Первые три упражнения содержат отрицательные утверждения, и для их решения достаточно указать один числовой пример.)

1. Доказать, что множество нечетных чисел не замкнуто относительно вычитания.
2. Доказать, что множество целых чисел вида $3n+1$ не замкнуто относительно сложения.
3. Доказать, что множество целых чисел вида $3n+2$ не замкнуто относительно умножения.
4. Доказать, что сумма любых двух нечетных чисел есть число четное.
5. Доказать, что следующие множества замкнуты относительно указанных операций:
   а) целые числа вида $3n+1$ — относительно умножения;
   б) целые числа вида $3n$ — относительно сложения;
   в) целые числа вида $3n$ — относительно умножения.

6. Определить, какие из следующих множеств замкнуты относительно указанных операций (в каждом случае дать соответствующее доказательство):
   а) целые числа вида $6n+3$ — относительно сложения;
   б) целые числа вида $6n+3$ — относительно умножения;
   в) целые числа вида $6n$ — относительно сложения;
   г) целые числа вида $6n+1$ — относительно вычитания;
   д) целые числа вида $6n+1$ — относительно умножения;
   е) целые числа вида $3n$ — относительно умножения;
   ж) целые числа, не представимые в виде $3n$, — относительно умножения.

ГЛАВА II

Рациональные числа

§ 1. Определение рациональных чисел

Как мы уже видели, множество натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

замкнуто относительно сложения и умножения, а множество целых чисел

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

замкнуто относительно сложения, умножения и вычитания. Однако ни одно из этих множеств не замкнуто относительно деления, поскольку деление целых чисел может привести к дробям, как, например, в случаях $4/3$, $7/6$, $-2/5$ и т. д. Совокупность всех таких дробей образует множество рациональных чисел. Таким образом, *рациональное число (рациональная дробь) есть такое число, которое можно представить в виде a/d, где a и d — целые числа, причем d не равно нулю.* Сделаем по поводу этого определения несколько замечаний.

1) Мы потребовали, чтобы d было отлично от нуля. Это требование (математически записываемое неравенством $d \neq 0$) необходимо, поскольку здесь d является делителем. Рассмотрим следующие примеры:

Случай 1. $a = 21$, $d = 7$, $\frac{a}{d} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1} = 3$.

Случай 2. $a = 25$, $d = 7$, $\frac{a}{d} = \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$.

В случае 1 d является делителем в смысле предыдущей главы, т. е. 7 есть точный делитель 21. В случае 2

d по-прежнему является делителем, но уже в другом смысле, поскольку 7 не есть точный делитель 25. Если 25 назвать *делимым*, а 7 — *делителем*, то мы получим *частное* 3 и *остаток* 4. Итак, слово *делитель* используется здесь в более общем смысле и применимо к большему числу случаев, чем в гл. I. Однако в случаях, подобных случаю 1, должно оставаться применимым понятие делителя, введенное в гл. I; поэтому необходимо, как и в гл. I, исключить возможность $d=0$.

2) Отметим, что, в то время как выражения *рациональное число* и *рациональная дробь* являются синонимами, само по себе слово *дробь* используется для обозначения любого алгебраического выражения, состоящего из числителя и знаменателя, как, например,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{17}{x} \quad \text{или} \quad \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}.$$

3) В определение рационального числа входит выражение «число, которое можно представить в виде a/d, где a и d — целые числа и $d \neq 0$». Почему его нельзя заменить выражением «число вида a/d, где a и d — целые числа и $d \neq 0$»? Причиной этому является то обстоятельство, что существует бесконечно много способов выражения одной и той же дроби (например, 2/3 можно также записать, как 4/6, 6/9, ..., или $2\pi/3\pi$, или $2\sqrt{3}/3\sqrt{3}$, или $-10/-15$ и т. п.), и нам желательно, чтобы наше определение рационального числа не зависело от частного способа его выражения.

Дробь определяется таким образом, что ее значение не меняется при умножении числителя и знаменателя на одно и то же число. Однако не всегда можно сказать, просто посмотрев на данную дробь, является она рациональной или нет. Рассмотрим, например, числа

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}.$$

Ни одно из них в выбранной нами записи не имеет вида a/d, где a и d — целые числа. Мы можем, однако, произвести над первой дробью ряд арифметических преобразований и получить

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{1}.$$

Таким образом, мы приходим к дроби, равной исходной дроби, для которой $a=2$, $d=1$. Число $\sqrt{12}/\sqrt{3}$, следовательно, рационально, но оно не было бы рациональным, если бы определение рационального числа требовало бы, чтобы число имело вид a/b, где a и b — целые числа. В случае дроби $\sqrt{15}/\sqrt{3}$ преобразования

$$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{5}$$

приводят к числу $\sqrt{5}$. В последующих главах мы узнаем, что число $\sqrt{5}$ не может быть представлено как отношение двух целых чисел и, следовательно, оно не рационально или, как говорят, *иррационально.*

4) Отметим, что всякое целое число рационально. Как мы только что видели, это верно в случае числа 2. В общем случае произвольных целых чисел можно, аналогично, приписать каждому из них знаменатель, равный 1, и получить их представление в виде рациональных дробей:

$$\ldots, \frac{-5}{1}, \frac{-4}{1}, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1},$$
$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \ldots.$$

Упражнения

1. Доказать, что число 2 может быть записано в виде рациональной дроби a/d (с целыми a и d) бесконечным числом способов.
2. Доказать, что рациональное число $^1/_3$ может быть записано в виде рациональной дроби a/d бесконечным числом способов.
3. Доказать, что число 0 может быть записано в виде рациональной дроби a/d бесконечным числом способов.
4. Доказать, что каждое рациональное число имеет бесконечно много различных представлений в виде рациональной дроби.

5. Определение. Пусть k — произвольное число. *Обратным* к k называется такое число l, что $k \cdot l = 1$. Из этого определения вытекает, что все числа, исключая 0, имеют обратные. Если дано число $k \neq 0$, то, по определению, обратное к нему число удовлетворяет уравнению $k \cdot l = 1$. Отсюда

$$l = \frac{1}{k}.$$

(Это выражение имеет смысл лишь при $k \neq 0$.) Доказать, что *обратное к любому рациональному числу* (отличному от нуля) *есть число рациональное.*

§ 2. Конечные и бесконечные десятичные дроби

Имеется иное представление рационального числа 1/2, отличное от представлений вида 2/4, 3/6, 4/8 и т. д. Мы подразумеваем представление в виде десятичной дроби 0,5. Одни дроби имеют конечные десятичные представления, например,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5, \quad \frac{2}{5} = 0{,}4, \quad \frac{1}{80} = 0{,}0125,$$

в то время как десятичные представления других дробей бесконечны:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ \ldots, \quad \frac{1}{6} = 0{,}16666\ \ldots,$$

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ \ldots\ .$$

Эти бесконечные десятичные дроби можно получить из соответствующих рациональных дробей, деля числитель на знаменатель. Например, в случае дроби 5/11, деля 5,000... на 11, получаем 0,454545... .

Какие рациональные дроби a/b имеют конечные десятичные представления? Прежде чем ответить на этот вопрос в общем случае, рассмотрим конкретный пример. Возьмем, скажем, конечную десятичную дробь 0,8625. Мы знаем, что

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10\,000},$$

и что любая конечная десятичная дробь может быть записана в виде рациональной десятичной дроби со знаменателем, равным 10, 100, 1000 или какой-либо другой степени 10. Приводя дробь справа к несократимой дроби, получаем

$$0{,}8625 = \frac{8625}{10\,000} = \frac{69}{80}.$$

Знаменатель 80 получен делением 10 000 на 125 — наибольший общий делитель 10 000 и 8625. Поэтому в разложение на простые множители числа 80, как и числа 10 000, входят только два простых множителя: 2 и 5. Если бы мы начинали не с 0,8625, а с любой другой конечной десятичной дроби, то получившаяся несократимая[1]) рациональная дробь a/b тоже обладала бы этим свойством. Иначе говоря, в разложение знаменателя b на простые множители могли бы входить лишь простые числа 2 и 5, поскольку b есть делитель некоторой степени 10, а $10=2\cdot 5$. Это обстоятельство оказывается определяющим, а именно имеет место следующее общее утверждение:

Несократимая рациональная дробь a/b имеет конечное десятичное представление тогда и только тогда, когда число b не имеет простых делителей, отличных от 2 *и* 5.

Отметим, что при этом b не обязано иметь среди своих простых делителей оба числа 2 и 5: оно может делиться лишь на одно из них или не делиться на них вовсе. Например,

$$\frac{1}{25} = 0{,}04, \quad \frac{1}{16} = 0{,}0625, \quad \frac{7}{1} = 7{,}0;$$

здесь b соответственно равно 25, 16 и 1. Существенным является отсутствие у b других делителей, отличных от 2 и 5.

Сформулированное выше предложение содержит выражение *тогда и только тогда.* До сих пор мы доказали лишь ту часть, которая относится к обороту только тогда. Именно мы показали, что разложение рационального числа в десятичную дробь будет конечным лишь в том случае, когда b не имеет

[1]) Рациональная дробь a/b называется несократимой, если целые числа a и b не имеют общего делителя, бо́льшего, чем 1.

простых делителей, отличных от 2 и 5. (Иными словами, если b делится на простое число, отличное от 2 и 5, то несократимая дробь a/b не имеет конечного десятичного выражения.)

Та часть предложения, которая относится к слову *тогда*, утверждает, что если целое число b не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, то несократимая рациональная дробь a/b может быть представлена конечной десятичной дробью. Чтобы это доказать, мы должны взять произвольную несократимую рациональную дробь a/b, у которой b не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, и убедиться в том, что соответствующая ей десятичная дробь конечна. Рассмотрим сначала пример. Пусть

$$\frac{a}{b}=\frac{9741}{3200}=\frac{9741}{2^7\cdot 5^2}.$$

Для получения десятичного разложения преобразуем эту дробь в дробь, знаменатель которой представляет собой целую степень десяти. Этого можно достигнуть, умножив числитель и знаменатель на 5^5:

$$\frac{9741}{2^7\cdot 5^2}=\frac{9741\cdot 5^5}{2^7\cdot 5^7}=\frac{30\,440\,625}{10^7}=3{,}0440625.$$

Приведенное рассуждение можно распространить на общий случай следующим образом. Предположим, что b имеет вид $2^m\cdot 5^n$, где m и n — неотрицательные целые числа (т. е. положительные числа или нуль). Возможны два случая: либо n меньше или равно m (это условие записывается $n\leqslant m$), либо n больше m (что записывается $n>m$). При $n\leqslant m$ умножим числитель и знаменатель дроби на 5^{m-n}:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\cdot 5^n}=\frac{a\cdot 5^{m-n}}{2^m\cdot 5^n\cdot 5^{m-n}}=\frac{a\cdot 5^{m-n}}{2^m\cdot 5^m}=\frac{a\cdot 5^{m-n}}{10^m}.$$

Поскольку целое число $m-n$ не отрицательно (т. е. положительно или равно нулю), то 5^{m-n}, а следовательно, и $a\cdot 5^{m-n}$ — целое положительное число. Положим $a\cdot 5^{m-n}=c$. Тогда

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{10^m}.$$

Но деление целого числа на 10^m сводится просто к постановке запятой на соответствующем месте в десятичном представлении этого числа. Поэтому мы получим конечную десятичную дробь.

Во втором случае, когда $n>m$, умножим числитель и знаменатель дроби a/b на 2^{n-m}:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{2^m\cdot 5^n}=\frac{a\cdot 2^{n-m}}{2^m\cdot 5^n\cdot 2^{n-m}}=\frac{a\cdot 2^{n-m}}{2^n\cdot 5^n}=\frac{a\cdot 2^{n-m}}{10^n}.$$

Отсюда, обозначив целое число $a\cdot 2^{n-m}$ через d, получаем

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{10^n}.$$

Таким образом, здесь, как и в первом случае, мы приходим к конечной десятичной дроби.

Упражнение

Следующие рациональные дроби представить в виде конечных десятичных дробей:

а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{200}$; в) $\frac{321}{400}$; г) $\frac{7}{625}$; д) $\frac{352}{125}$; е) $\frac{3149}{2500}$.

§ 3. Различные способы формулировки и доказательства предложений

Мы уже пользовались фразой «тогда и только тогда», не определяя точно, что она означает. Теперь мы прервем наше изложение для того, чтобы кратко объяснить некоторые из выражений, используемых при формулировке математических утверждений, а также связь между этими выражениями и соответствующими логическими отношениями. В математике имеются два основных типа утверждений или предложений:

Если A, то B

и

Если A, то B, и обратно.

Рассмотрим их поочередно.

Утверждение, «если m и n — четные числа, то число mn четно», о котором шла речь в § 5 гл. I, является утверждением типа «если A, то B». Утверждение такого рода может быть выражено многими различными способами. Вот некоторые из них:

Различные формулировки отношения «если A, то B»:

1. Если верно A, то верно B.
2. Если выполняется A, то выполняется B.
3. A влечет B.
4. B вытекает из A.
5. B следует из A.
6. A является достаточным условием для B.
7. B является необходимым условием для A.
8. B верно всякий раз, когда верно A.
9. B верно, если верно A.
10. A верно только тогда, когда верно B.
11. Невозможно, чтобы одновременно A было верно, а B — ложно.
12. Если B ложно, то A тоже ложно.

В этом списке содержатся лишь наиболее употребительные формы. Он, конечно, неполон, поскольку в действительности можно привести сколько угодно много различных форм рассматриваемого утверждения. Некоторые из выражений, как, например, *6* и *7*, не используются в этой книге и приведены здесь лишь ради полноты. Кроме *12*, все перечисленные выражения могут рассматриваться как определения терминов типа «влечет», «необходимое условие», «достаточное условие», и «только тогда».

Например, *10* определяет использование в математике выражения «только тогда». Заменив символы A и B на утверждения относительно m и n, о которых говорилось выше, мы заключаем, что следующие предложения обозначают одно и то же:

«Если целые числа m и n четны, то целое число mn тоже четно».

«Целые числа m и n четны только тогда, когда целое число mn четно».

Если читатель чувствует, что эти предложения не есть одно и то же, то причина этому в его привычке к иному повседневному использованию слова «только»; читатель ощущает разницу между техническим языком математики и языком, используемым обыденно. Имея много общего, эти языки обладают и определенным различием, как видно из рассматриваемого примера. Если кто-либо освоился с математическим языком, он может, если пожелает, использовать его в повседневной речи. При этом, однако, люди, которые не имеют отношения к математике, будут смотреть на него, как на педанта, а быть может, даже как на несовсем нормального — в лучшем случае, как на весьма скучного человека.

То, что до сих пор нами было сказано относительно списка разных форм выражения «если A, то B», сводится к тому, что формулировки *1—11* представляют собой попросту соглашения, относящиеся к языку математики. Форма *12* связана не только с чисто терминологическими соглашениями, но также с фундаментальной аксиомой логики. То, что предложения *12* и «если A, то B» представляют собой одно и то же, основывается на логике, но одно предложение вовсе не является просто перефразировкой другого. Аксиома логики, о которой идет речь (известная под названием *закона исключенного третьего*), может быть сформулирована следующим образом: либо A верно, либо A ложно, где под A мы понимаем любое утверждение, справедливость или логичность которого может быть выяснена некоторым анализом. По существу, эта аксиома исключает все промежуточные между истинностью и ложностью A варианты. Примем ее на веру и докажем, что предложения *1* и *12* равносильны.

Для этого нам нужно доказать, что *1* влечет *12* и, обратно, *12* влечет *1*. Допустим сначала справедливость *1* и рассмотрим утверждение *12*:

«Если B ложно, то A ложно».

Возможно ли, что это заключение ложно и что на самом деле должно быть «A верно»? В таком случае мы из *1* вывели бы, что B верно, но это противоречит предпосылке в *12*. Следовательно, заключение «A ложно» правильно.

Обратно, пусть справедливо *12*. Докажем, что тогда имеет место *1*:

«Если A верно, то B верно».

Правильно ли такое заключение, не должно ли стоять в нем «B ложно»? Если бы это было так, то из *12* мы бы вывели, что A ложно в противоречие с предпосылкой *1*. Следовательно, заключение «B верно» является правильным.

Формы *11* и *12* позволяют подойти к пониманию природы косвенного доказательства. Предположим, что мы желаем установить справедливость утверждения «если A, то B». Прямое доказательство заключается в следующем: утверждение A предполагается верным, и из него выводится утверждение B. Рассматривая *11*, мы видим, что можно также дать доказательство, допуская одновременную верность A и ложность B и выводя из этих предпосылок противоречие. Этот метод называется *методом доказательства от противного*; он является одним из способов косвенного доказательства. Доказательство от противного можно отличить по допущениям, с которых начинается рассуждение: они содержат предположения о ложности доказываемого утверждения. Косвенные доказательства можно отличить также по фразе, завершающей доказательство, которая обычно звучит примерно так: «...таким образом, мы пришли к противоречию, что и доказывает теорему».

Еще одна общая схема косвенного доказательства подсказывается формой *12*. Именно для доказательства справедливости утверждения «если A, то B» мы можем предположить ложность B и вывести отсюда ложность A.

Вот три типа доказательства, о которых мы здесь говорили:

предполагается A, выводится B (прямое доказательство);

предполагается A и «не B» (т. е. истинность A и ложность B), откуда выводится противоречие (вариант косвенного доказательства — доказательство от противного);

предполагается ложность B (истинность «не B»), откуда и выводится ложность A (другой вариант косвенного доказательства).

Любопытно, что в математических книгах (включая и эту) отмеченные три типа доказательства обычно используются без какого-либо явного указания на то, какой тип рассуждения применяется в тот или иной момент. Предполагается, что читатель самостоятельно определяет тип рассматриваемого доказательства. Это, однако, нетрудно, и читатель может обычно уяснить, какие допущения сделал автор уже в начале доказательства.

Рассмотрим, далее, второй вид математических предложений, отмеченный в начале этого параграфа:

«Если A, то B, и обратно».

Слова *и обратно* означают «если B, то A»; это есть утверждение, *обратное* к утверждению «если A, то B». Читатель, по-видимому, сознает, что прямое и обратное утверждение — это две разные вещи. Одно из них может быть верным, а другое — ложным, оба могут быть верными, или оба могут быть ложными — в зависимости от обстоятельств. Например, утверждение «если m и n четны, то mn четно» верно, в то время как обратное утверждение «если mn четно, то m и n четны» ложно.

Подобно тому, как это было сделано выше, здесь можно указать различные эквивалентные формы выражения «если A, то B, и обратно»:

если B, то A, и обратно;
A верно тогда и только тогда, когда B верно;
B верно тогда и только тогда, когда A верно;
A ложно тогда и только тогда, когда B ложно;
B ложно тогда и только тогда, когда A ложно;
A влечет B, и обратно;

B влечет A, и обратно;
A есть необходимое и достаточное условие для B;
B есть необходимое и достаточное условие для A;
утверждения A и B эквивалентны.

Все эти утверждения выражают в точности одно и то же.

Отметим теперь значительное разнообразие существующих методов доказательства утверждения «если A, то B, и обратно». Как мы видели выше, есть три основных подхода к доказательству утверждения «если A, то B». Подобным образом есть три основных метода доказательства утверждения «если B, то A». Поскольку любой из первых трех методов можно комбинировать с любым из вторых трех, то всего есть девять возможных схем для доказательства утверждения «если A, то B, и обратно». Пожалуй, наиболее распространенная схема порождается прямыми доказательствами:

1) предполагается A, выводится B;
2) предполагается B, выводится A.

Распространена также следующая схема:

1) предполагается A, выводится B;
2) A предполагается ложным, выводится, что B ложно.

В сложных доказательствах эти схемы часто комбинируются. Доказательство утверждения «если A, то F» может быть проведено посредством доказательства цепочки утверждений: «если A, то B», «если B, то C», «если C, то D», «если D, то E», «если E, то F». Здесь каждое утверждение влечет следующее. Далее, если одним из указанных выше методов может быть установлено не только любое из этих утверждений, но также и обратное к нему, то будет справедлива также следующая цепочка умозаключений: «если F, то E», «если E, то D», «если D, то C», «если C, то B», «если B, то A». Таким образом, обратное к исходному утверждение «если F, то A» тоже справедливо. Именно это имеется в виду, когда говорится, что «обратное утверждение может быть доказано с помощью обращения каждого из сделанных шагов».

Все перечисленные схемы встречаются в математических книгах, и, как уже отмечалось выше, автор нередко приступает к доказательству теоремы, не указывая явным образом, какой схеме он следует. При этом предполагается, что читатель самостоятельно разберется в структуре доказательства.

Упражнения

1. Доказать, что утверждение «если mn четно, то m и n четны» ложно.
2. Какие из следующих утверждений верны и какие ложны? Несократимая дробь a/b может быть представлена в виде конечной десятичной дроби:
   а) тогда и только тогда, когда b не делится ни на какое простое число, отличное от 2;
   б) если b не делится ни на какое простое число, отличное от 2;
   в) только тогда, когда b не делится ни на какое простое число, отличное от 2;
   г) тогда и только тогда, когда b не делится на 3;
   д) если b не делится на 3;
   е) только тогда, когда b не делится на 3.
3. Какие из следующих утверждений верны и какие ложны? Рациональное число a/b может быть представлено в виде конечной десятичной дроби:
   а) тогда и только тогда, когда b не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5;
   б) если b не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5;
   в) только тогда, когда b не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5.

   Указание. Принять во внимание, что несократимость дроби a/b в условии этой задачи не оговаривается.
4. В одной недавно вышедшей книге по алгебре фигурирует в качестве аксиомы следующее утверждение: «$ab=0$ только тогда, когда $a=0$ или $b=0$». Переформулировать это утверждение в виде «если A, то B».
5. а) Доказать, что если β (бета) — рациональное число, то число β^2 тоже рационально;
   б) доказывает ли это, что если β^2 иррационально, то β иррационально?

§ 4. Периодические десятичные дроби

Вернемся теперь к рассмотрению рациональных чисел. Рациональные дроби были нами разделены на два типа — на представимые конечными десятичными дробями и на не представимые таким образом. Покажем, что десятичное разложение любой дроби второго типа содержит периодически повторяющиеся части; например,

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ \ldots \quad \text{и} \quad \frac{3097}{9900} = 0{,}31282828\ \ldots\ .$$

Для удобства мы воспользуемся стандартным обозначением периодических десятичных дробей, а именно повторяющуюся часть мы будем заключать в круглые скобки:

$$\frac{5}{11} = 0,(45); \quad \frac{3097}{9900} = 0{,}31\,(28); \quad \frac{1}{3} = 0,(3); \quad \frac{1}{6} = 0{,}1\,(6)$$

и т. д.

Причину появления периодичности можно понять из процедуры перевода рациональной дроби, например 2/7, в десятичную:

$$\begin{array}{r|l}
2 & \;7 \\ \hline
20 & 0{,}285714 \\
14 & \\ \hline
60 & \\
56 & \\ \hline
40 & \\
35 & \\ \hline
50 & \\
49 & \\ \hline
10 & \\
7 & \\ \hline
30 & \\
28 & \\ \hline
2 &
\end{array}
\qquad \frac{2}{7} = 0{,}(285714)$$

В процессе деления последовательными остатками являются числа 6, 4, 5, 1, 3, 2. По достижении остатка 2 цикл завершается, и мы возвращаемся к делению 20 на 7. Все остатки меньше, чем делитель, равный 7, так что имеется всего шесть различных возможных остатков, и поэтому необходимо возникнет повторение остатков. (Остаток 0 невозможен, так как конечные десятичные разложения исключены из рассмотрения.)

В разобранном выше примере повторение обнаружилось, когда деление 20 на 7 встретилось во второй раз. При этом деление 20 на 7 было также *первым шагом* всего процесса деления. Повторение вовсе не обязательно возвращает нас именно к первому шагу. Рассмотрим, например, разложение в десятичную дробь числа 209/700:

```
209     | 700
2090    | 0,29857142
1400
 6900
 6300
  6000
  5600
   4000
   3500
    5000
    4900
     1000
      700
     3000
     2800
      2000
      1400
       600
```

$$\frac{209}{700} = 0{,}29\,(857142)$$

Повторение здесь возникает при появлении остатка 600, который уже встречался несколькими шагами раньше. Как мы знаем, если делитель равен 700, то возможными остатками являются числа 1, 2, 3, ..., 699. У нас имеется, таким образом, уверенность в повторении остатка, хотя для достижения повторения, возможно, пришлось бы проделать весьма значительное число шагов.

Общий случай произвольной дроби a/b может быть разобран аналогичным способом. Именно при делении целого числа a на целое число b в остатке могут появиться лишь следующие числа: $1, 2, 3, \ldots, b-2, b-1$; поэтому в процессе деления неизбежно возникает повторение остатка. С этого места начинается новый цикл; результатом деления является периодическая десятичная дробь.

Таким образом, нами доказана половина следующего предложения:

Всякое рациональное число a/b представимо как конечная или бесконечная периодическая десятичная дробь; обратно, любая конечная, а также любая бесконечная периодическая десятичная дробь представляют собой некоторое рациональное число.

Вторая половина этого предложения, которую нам еще только предстоит доказать, касается двух типов десятичных дробей — конечных и бесконечных периодических. Конечные десятичные дроби рассмотрены были выше, и мы видели, что они представляют собой рациональные числа. Обратимся теперь к бесконечным периодическим десятичным дробям. Покажем сначала, что некоторая конкретная бесконечная периодическая десятичная дробь представляет собой рациональное число. После разбора частного случая тот же метод будет применен к произвольной периодической десятичной дроби.

Рассмотрим бесконечную периодическую десятичную дробь:

$$x = 28{,}123(456),$$

или, в иной записи,

$$x = 28{,}123456456\ \ldots\ .$$

Умножим ее сначала на одно число, затем — на другое; числа, на которые мы умножаем дробь, выбираются таким образом, чтобы при вычитании одного произведения из другого бесконечная периодическая часть сократилась бы. В нашем примере в качестве таких множителей можно взять числа 10^6 и 10^3, поскольку

$$10^6 \cdot x = 28123456,(456)$$

и

$$10^3 \cdot x = 28123,(456),$$

так что разность $10^6 \cdot x - 10^3 \cdot x$ равна

$$999000x = 28095333.$$

Следовательно,

$$x = \frac{28095333}{999000},$$

и, стало быть, x — число рациональное.

Обобщая использованный метод, мы покажем, что множители 10^3 и 10^6 не были «взяты с потолка», а были выбраны согласно определенному правилу. Ниже целая часть десятичной дроби (в рассмотренном выше примере равная 28) опускается, поскольку в доказательстве она не играет существенной роли. Любую бесконечную периодическую десятичную дробь (без целой части) можно записать в виде

$$x = 0,\overline{a_1a_2 \ldots a_s}(\overline{b_1b_2 \ldots b_t}),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_s$ обозначают s последовательных цифр неповторяющейся части, а $b_1, b_2, \ldots, b_t$ суть t цифр периода[1]). В рассмотренном примере $s=3$, $t=3$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$; $b_1=4$, $b_2=5$ и $b_3=6$. Если x умножить сначала на 10^{s+t}, затем на 10^s и второе произведение вычесть из первого, то мы получим

$$10^{s+t} \cdot x = \overline{a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t} + 0,(\overline{b_1b_2 \ldots b_t}),$$

$$10^s \cdot x = \overline{a_1a_2 \ldots a_s} + 0,(\overline{b_1b_2 \ldots b_t})$$

и

$$(10^{s+t} - 10^s) \cdot x = \overline{a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t} - \overline{a_1a_2 \ldots a_s},$$

---

[1]) Поскольку запись $a_1a_2 \ldots a_s$ в алгебре означает произведение $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_s$ (а запись $b_1b_2 \ldots b_t$ — произведение $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_t$), мы ставим над числом черту, означающую, что, например, выражение $\overline{a_1a_2 \ldots a_s}$ надо понимать не как произведение чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$, а иначе — как последовательность цифр $a_1, a_2, \ldots, a_s$ десятичной записи числа. Символы 1, 2, … …, s в обозначении $a_1, a_2, \ldots, a_s$ называются (нижними) индексами и имеют лишь смысл меток или ярлыков; отказавшись от использования индексов, мы очень скоро обнаружили бы, что нам не хватает букв.

так что

$$x = \frac{\overline{a_1a_2 \ldots a_sb_1b_2 \ldots b_t} - \overline{a_1a_2 \ldots a_s}}{10^{s+t} - 10^s}.$$

Следовательно, число x равно отношению двух целых чисел и, стало быть, рационально, что нам и требовалось доказать.

Упражнение

Найти рациональные дроби, равные следующим десятичным дробям:

а) 0,111 ...; б) 5,6666 ...; в) 0,37 (43);
г) 0,9 (987); д) 0,00 (01); е) 0,(9).

§ 5. Всякую конечную десятичную дробь можно представить в виде периодической десятичной дроби

Выше в этой главе было установлено, что некоторые рациональные числа могут быть записаны в виде конечных десятичных дробей, в то время как другие представляются бесконечными десятичными дробями. Любопытно, что любую конечную десятичную дробь (исключая нуль) можно выразить в виде бесконечной дроби. Это можно, конечно, сделать совсем очевидным способом, представив, например, 6,8 как 6,8000..., т. е. с помощью бесконечной последовательности нулей. Кроме такого очевидного способа перевода конечной дроби в бесконечную посредством добавления последовательности нулей, имеется другой, пожалуй, в некоторой степени удивительный прием. Начнем с хорошо известного разложения дроби 1/3:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333 \ldots .$$

Если обе части этого равенства домножить на 3, то в результате получится следующее равенство, выглядящее довольно странно:

$$1 = 0{,}99999 \ldots . \qquad (1)$$

Таким образом, имеется равенство между конечной десятичной дробью 1, или 1,0, и бесконечной десятичной дробью 0,99999...

Посмотрим на соотношение (1) с другой точки зрения. Обозначим бесконечную десятичную дробь 0,99999... через x:

$$x = 0{,}99999 \ldots . \tag{2}$$

Домножая обе части равенства (2) на 10, получаем

$$10x = 9{,}99999 \ldots = 9 + 0{,}99999 \ldots .$$

Вычитая отсюда (2), найдем

$$9x = 9 \quad \text{или} \quad x = 1.$$

Таким образом, равенство (1) доказано теперь нами другим методом, отличным от первоначального.

Поделим теперь равенство (1) на 10, затем на 100, на 1000, на 10 000 и т. д. В результате получится целая последовательность соотношений:

$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 0{,}099999 \ldots, \\ 0{,}01 &= 0{,}0099999 \ldots, \\ 0{,}001 &= 0{,}00099999 \ldots, \\ 0{,}0001 &= 0{,}000099999 \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{3}$$

Эти соотношения могут быть использованы для перевода любой конечной десятичной дроби в бесконечную. Например, можно написать

$$6{,}8 = 6{,}7 + 0{,}1 = 6{,}7 + 0{,}099999 \ldots = 6{,}799999 \ldots .$$

Приведем еще несколько примеров:

$$0{,}43 = 0{,}42 + 0{,}01 = 0{,}42 + 0{,}0099999 \ldots = \\ = 0{,}4299999 \ldots;$$

$$0{,}758 = 0{,}757 + 0{,}001 = 0{,}757 + 0{,}00099999 \ldots = \\ = 0{,}75799999 \ldots;$$

$$0{,}102 = 0{,}101 + 0{,}001 = 0{,}101 + 0{,}00099999 \ldots = \\ = 0{,}10199999 \ldots;$$

$$6{,}81 = 6{,}8 + 0{,}01 = 6{,}8 + 0{,}0099999 \ldots = \\ = 6{,}8099999 \ldots.$$

Описанный прием позволяет любую конечную десятичную дробь записать как бесконечную. Обратно, равенства (1) и (3) могут быть использованы для преобразования любой десятичной дроби, содержащей бесконечную последовательность девяток, в конечную десятичную дробь:

$$0{,}4699999\ldots = 0{,}46 + 0{,}0099999\ldots =$$
$$= 0{,}46 + 0{,}01 = 0{,}47,$$
$$18{,}099999\ldots = 18 + 0{,}099999\ldots = 18 + 0{,}1 = 18{,}1.$$

Ответ на вопрос, сколько представлений в виде десятичных дробей имеет определенное число, зависит от того, как этот вопрос понимать. В самом деле, для числа 0,43, кроме записи 0,42999, можно привести еще целый ряд представлений:

$$0{,}430,\ 0{,}4300,\ 0{,}43000,\ 0{,}430000,\ \ldots .$$

Эти представления, однако, являются столь очевидными вариациями представления 0,43, что мы не считаем их действительно от него отличающимися. Когда мы говорим о записи в виде бесконечной десятичной дроби некоторого числа, например 0,43, то имеется в виду 0,42999..., а не 0,43000....

Упражнения

1. Каждую из следующих дробей записать в виде конечной десятичной дроби:

   а) 0,11999 ...; б) 0,299999 ...; в) 4,79999 ...; г) 9,999 ... .

2. Каждую из следующих дробей записать в виде бесконечной десятичной дроби:

   а) 0,73; б) 0,0099; в) 13.

3. Какие рациональные числа a/b имеют два существенно различных представления в виде десятичной дроби?
4. Какие рациональные числа a/b имеют три существенно различных представления в виде десятичной дроби?

§ 6. Краткие выводы

Рациональные числа a/b мы разделили на два типа: к первому типу принадлежат те числа, у которых b не имеет других простых делителей, кроме 2 и 5, ко второму — все остальные. (Здесь предполагается, что дробь a/b несократима.) Числа первого типа могут быть записаны как в виде конечной, так и в виде бесконечной десятичной дроби. Например,

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}499999\ \ldots\ .$$

Числа второго типа могут быть записаны лишь в виде бесконечной десятичной дроби. Например,

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ \ldots\ .$$

Эти представления являются единственными в том смысле, что $^1/_2$ и $^1/_3$ не могут быть выражены в виде никакой другой десятичной дроби, исключая, конечно, такие тривиальные формы, как 0,500. В следующей главе будет объяснено, почему это так.

Основное внимание нами было уделено рациональным числам и их десятичным представлениям. Подходя к вопросу с другой стороны, поставим во главу угла именно десятичные представления чисел. Все бесконечные десятичные дроби, встречавшиеся в этой главе, были периодическими. А что можно сказать о бесконечных непериодических десятичных дробях, таких, как

$$q = 0{,}101\,001\,000\,100\,001\,000\,001\,000\,000\,1\ \ldots\ ,$$

где последовательность цифр после запятой образована сериями нулей, разделенными единицами, причем первая серия содержит один нуль, вторая серия — два нуля, третья серия — три нуля и т. д.? Что за число, если это вообще число, определяет собой дробь q? Из настоящей главы мы знаем, что «число» q не может быть рациональным. В следующей главе мы расширим границы нашего исследования с тем, чтобы включить в них числа, подобные q.

ГЛАВА III

Действительные числа

§ 1. Геометрическая точка зрения

Когда в геометрии вводятся координаты, некоторая прямая линия принимается за ось x, и каждой точке этой оси сопоставляется некоторое число. Делается это посредством выбора двух произвольных

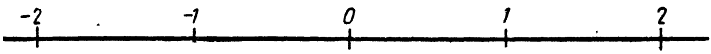


Рис. 5.

(но различных) точек на оси, которым сопоставляются 0 и 1, причем расстояние между этими двумя точками играет роль *единицы длины,* или *единичной длины.* Обычно (рис. 5) точка, отвечающая 1, выбирается справа от нулевой точки, так что слева от нулевой точки находятся точки, сопоставляемые отрицательным числам. Нулевая точка называется *началом.* Точка, отвечающая, например, числу 7, лежит справа от начала на расстоянии, в семь раз большем единицы длины, а точка, отвечающая числу —7, лежит слева от начала на том же расстоянии. Таким способом каждая точка связывается с некоторым числом: отвечающее точке число есть расстояние от нее до начала, взятое со знаком плюс, если точка лежит справа от начала, и со знаком минус в противном случае. Как показано на рис. 6, местоположение таких рациональных чисел, как —4/3, 1/2 и 2,3, легко определяется по их отношению к точкам 0 и 1, Символ $\sqrt{2}$ обозначает число, которое, будучи помноженным само на себя, дает 2, т. е. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$. Чтобы пояснить геометрический смысл числа $\sqrt{2}$, рассмотрим единичный квадрат (рис. 7). Из теоремы

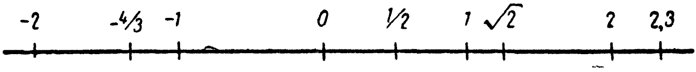


Рис. 6.

Пифагора следует, что квадрат длины диагонали этого квадрата равен 2. Длина диагонали обозначается поэтому через $\sqrt{2}$, и число $\sqrt{2}$ сопоставляется той точке оси, расстояние которой от начала равно длине диагонали нашего единичного квадрата.

Так как каждая точка оси лежит на некотором расстояния от начала, то интуитивно ясно, что для

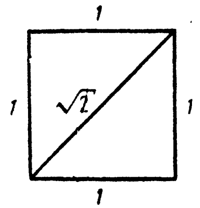


Рис. 7. Квадрат со сторонами длины 1.

каждой точки имеется отвечающее ей число. Под *действительными числами*[1]) мы понимаем совокупность всех чисел, связываемых с точками оси. Каждое рациональное число принадлежит этой совокупности, поскольку каждому рациональному числу b/a отвечает точка, расстояние которой от начала равно b/a единиц длины. Можно, таким образом, сказать, что рациональные числа образуют подмножество множества всех действительных чисел.

Имеются, однако, действительные числа, не являющиеся рациональными. В этой главе будет показано,

[1]) Употребляется также термин *вещественные числа*. — *Прим. ред.*

что число $\sqrt{2}$ не рационально. Всякое действительное число, которое, подобно $\sqrt{2}$, нерационально, называется *иррациональным* числом. Согласно этому определению, каждое действительное число либо рационально, либо иррационально. Прямая линия, или ось, с каждой точкой которой описанным выше способом связано некоторое число, называется *действительной прямой*. Точки этой прямой называются рациональными или иррациональными, смотря по тому, рационально или иррационально соответствующее им число.

Отметим, что данное выше определение иррационального числа сводится к следующему: действительное число называется иррациональным, если его нельзя представить в виде отношения a/b двух целых чисел.

§ 2. Десятичные представления

Ясно, что число 1/3 сопоставляется одной из точек, которые делят на три равные части отрезок, соединяющий начало с единичной точкой, а именно с левой из двух таких точек (рис. 8).

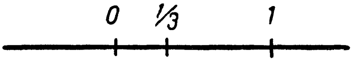


Рис. 8.

Рассмотрим теперь десятичное представление числа 1/3:

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10000} + \ldots .$$

Это соотношение выражает $^1/_3$ в виде суммы с бесконечным числом членов. Несмотря на то что число членов бесконечно, сумма имеет определенное значение, а именно $^1/_3$. Точки на действительной прямой, отвечающие числам

$$0{,}3,\ 0{,}33,\ 0{,}333,\ 0{,}3333,\ \ldots,$$

образуют последовательность, сходящуюся к точке $^1/_3$. Это видно на рис. 9. (Единица длины на нем взята достаточно большой.) Аналогично, любая бесконечная десятичная дробь отвечает некоторой точке на дей-

Рис. 9.

ствительной прямой. Дроби 0,9999... отвечает предел последовательности точек, связанных с числами

$$0{,}9,\ 0{,}99,\ 0{,}999,\ 0{,}9999,\ 0{,}99999 \text{ и т. д.}$$

Как показано на рис. 10, эти точки сходятся к единичной точке в соответствии с соотношением $1 = 0{,}99999\ldots$, выведенным в предыдущей главе.

Рис. 10.

Обращаясь, далее, к числу

$$q = 0{,}101\,001\,000\,100\,001\,000\,001\,000\,000\,1\ \ldots,$$

рассмотренному выше в качестве примера, мы видим, что оно тоже отвечает определенной точке действительной прямой. Точку эту можно представить себе как предел следующей последовательности точек:

$$\begin{aligned}
&0{,}1,\\
&0{,}101,\\
&0{,}101\,001,\\
&0{,}101\,001\,000\,1,\\
&0{,}101\,001\,000\,100\,001 \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Так как дробь q не периодична, то она представляет собой иррациональное число, и отвечающая ему точка иррациональна.

Вышеизложенное подсказывает иной способ, позволяющий представить себе совокупность действительных чисел. Действительные числа образуются совокупностью всех десятичных дробей, конечных или бесконечных, как, например

$$17{,}34,\quad 2{,}176,\quad -6{,}037\,222\,22\ldots,\quad q=0{,}101\,001\,000\,1\ldots.$$

В соответствии с предыдущей главой совокупность этих десятичных дробей можно разделить на два класса: класс рациональных чисел и класс иррациональных чисел. Рациональные числа — это те десятичные дроби, которые либо конечны, либо периодичны; иррациональные числа — это бесконечные (непериодические) десятичные дроби, как, например, дробь q, о которой говорилось выше. Кроме того, поскольку каждая конечная десятичная дробь (или каждая дробь вида 0,43000... с бесконечной последовательностью нулей) может так же быть записана, как истинно бесконечная периодическая десятичная дробь, то мы можем принять соглашение (действующее до конца этого параграфа) записывать все рациональные числа в виде бесконечных периодических десятичных дробей. (В соответствии со сделанным соглашением 0,43, например, будет записываться как 0,42999...; это может показаться нелепым, однако упрощает проводимое ниже рассуждение.)

Покажем теперь, что *представление действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби единственно.* Иными словами, две бесконечные десятичные дроби равны только тогда, когда их цифры, стоящие на одинаковых местах, равны, т. е. когда записи этих дробей одинаковы.

Почему бесконечное десятичное представление числа единственно? Для ответа на этот вопрос рассмотрим два числа с различными бесконечными десятичными представлениями. Поскольку представления различны, то имеется по крайней мере одна цифра, в которой они отличаются. Например,

$$a=17{,}923416\ \ldots,$$
$$b=17{,}923415\ \ldots.$$

Бесконечная последовательность чисел, следующая за 6 в числе a, может быть любой, какую только захочет себе представить читатель, исключая бесконечную последовательность нулей. То же самое относится к числу b. Далее, поскольку бесконечная последовательность нулей исключается, то a строго больше, чем 17,923416; символически это записывается в виде

$$a > 17{,}923416.$$

С другой стороны, b может быть равным самое большее 17,923416, так как равенство $b = 17{,}923416$ имеет место лишь тогда, когда все цифры в b, следующие за «5», суть девятки, т. е. когда $b = 17{,}923415(9)$. Утверждение «b самое большее равно 17,923416» символически записывается

$$b \leqslant 17{,}923416, \quad \text{или} \quad 17{,}923416 \geqslant b.$$

Объединяя вместе полученные неравенства для a и b, получаем

$$a > 17{,}923416 \geqslant b,$$

откуда следует, что $a > b$. Таким образом, a больше чем b, и это исключает, конечно, возможность их равенства. Мы провели рассуждение в частном случае двух конкретных чисел a и b, но оно без труда обобщается на любую пару чисел, имеющих разные бесконечные десятичные представления.

§ 3. Иррациональность числа $\sqrt{2}$

Мы дадим здесь традиционное косвенное доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$. В следующей главе будет приведено еще одно доказательство этого факта, использующее значительно более общий подход.

В гл. I было показано, что множество четных чисел, равно как и множество нечетных чисел, замкнуто относительно умножения. В частности, квадрат четного числа четен, а квадрат нечетного числа нечетен.

Допустим теперь, что число $\sqrt{2}$ рационально, скажем

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b},$$

где a и b — целые числа. Мы предположим, и в доказательстве это будет использовано, что рациональная дробь a/b несократима. Точнее, мы воспользуемся тем, что числа a и b не являются оба четными — в противном случае дробь a/b была бы сократимой. Возводя в квадрат выписанное выше равенство и производя упрощения, получаем

$$2=\frac{a^2}{b^2},\quad a^2=2b^2.$$

Число $2b^2$ четно. Поэтому a^2 и, следовательно, a четно, скажем, $a=2c$, где c — целое. Заменяя a на $2c$ в равенстве $a^2=2b^2$, получаем

$$(2c)^2=2b^2,\quad 4c^2=2b^2,\quad 2c^2=b^2.$$

Число $2c^2$ четно. Поэтому четно b^2, а вместе с ним и b. Мы пришли к заключению, что как a, так и b четно, в то время как дробь a/b была предположена несократимой. Полученное противоречие имеет своим следствием невозможность представить $\sqrt{2}$ в виде рациональной дроби a/b. Таким образом, число $\sqrt{2}$ иррационально.

§ 4. Иррациональность числа $\sqrt{3}$

Одно из возможных доказательств иррациональности числа $\sqrt{3}$ схоже с только что приведенным доказательством иррациональности числа $\sqrt{2}$. В отличие от случая $\sqrt{2}$, однако, решающим фактором здесь является делимость на 3, а не на 2. Прежде чем переходить к доказательству, мы покажем, что *квадрат целого числа делится на* 3 *тогда и только тогда, когда само это целое число делится на* 3. Отметим, что делящееся на 3 целое число имеет вид $3n$, в то время как не делящееся на 3 целое число имеет вид $3n+1$ или $3n+2$. Это обстоятельство вместе с равенствами

$$(3n)^2=9n^2=3(3n^2),$$
$$(3n+1)^2=9n^2+6n+1=3(3n^2+2n)+1,$$
$$(3n+2)^2=9n^2+12n+4=3(3n^2+4n+1)+1$$

убеждает нас в справедливости высказанного утверждения.

Предположим теперь, что число $\sqrt{3}$ рационально, скажем

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b},$$

где a и b — целые числа. И здесь, как в случае $\sqrt{2}$, мы предположим, что дробь a/b несократима, в частности, что числа a и b одновременно не делятся на 3. Возводя в квадрат выписанное выше равенство и производя упрощения, получаем

$$3=\frac{a^2}{b^2},\ a^2=3b^2.$$

Целое число $3b^2$ делится на 3. Поэтому делится на 3 число a^2, а вместе с ним и a. Пусть $a=3c$, где c — целое. Заменяя a на $3c$ в равенстве $a^2=3b^2$, получаем

$$(3c)^2=3b^2,\qquad 9c^2=3b^2,\qquad 3c^2=b^2.$$

Это показывает, что b^2 и, следовательно, b делится на 3. Таким образом, как a, так и b делится на 3, что противоречит допущению о несократимости дроби a/b. Тем самым доказано, что число $\sqrt{3}$ иррационально.

§ 5. Иррациональность чисел $\sqrt{6}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

Доказательства иррациональности чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ основывались на свойствах делимости целых чисел соответственно на 2 и 3. В основу соответствующего доказательства иррациональности числа $\sqrt{6}$ можно положить как делимость на 2, так и на 3. Проводя, например, доказательство параллельно случаю $\sqrt{2}$, предположим, что

$$\sqrt{6}=\frac{a}{b},$$

где целые числа a и b не являются одновременно четными. Возводя в квадрат, получаем

$$6=\frac{a^2}{b^2},\ a^2=6b^2.$$

Число $6b^2$ четно, поэтому четно a^2, а вместе с ним и a. Пусть $a=2c$. Имеем

$$a^2=6b^2,\ (2c)^2=6b^2,\ 4c^2=6b^2,\ 2c^2=3b^2.$$

Согласно последнему соотношению, $3b^2$ четно. Но тогда четно b^2, а следовательно, и b. Поскольку, согласно предположению, числа a и b не являются одновременно четными, то число $\sqrt{6}$ должно быть иррациональным. В качестве упражнения читатель может вывести то же заключение с помощью рассуждения, параллельного тому, которое было использовано для доказательства иррациональности $\sqrt{3}$.

Мы заключим рассмотрение примеров иррациональных чисел выражением $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Иррациональность этого числа будет выведена из иррациональности $\sqrt{6}$. Предположим, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ рационально, и обозначим его через r:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r.$$

После возведения в квадрат и упрощений, получаем

$$2+2\sqrt{6}+3=r^2,\quad 2\sqrt{6}=r^2-5,\quad \sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}.$$

Вспоминая теперь, что множество рациональных чисел замкнуто относительно всех четырех операций: сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль), убеждаемся в рациональности числа $\frac{1}{2}(r^2-5)$. Но это противоречит иррациональности числа $\sqrt{6}$. Следовательно, число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ должно быть иррациональным.

Каково бы ни было целое число $n=a\cdot b$, относительно которого известно, что $\sqrt{n}=\sqrt{a\cdot b}$ иррационально, аналогичным использованному выше методом можно доказать, что число $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ иррационально[1]).

---

[1]) Здесь существенно лишь, что a и b рациональны, а $\sqrt{ab}$ — иррационально. — *Прим. перев.*

Упражнения

1. Доказать двумя способами, что квадрат целого числа делится на 5 тогда и только тогда, когда само это целое число делится на 5:
   а) дать сначала доказательство, аналогичное приведенному в тексте для случая делимости на 3. Начать с того, что каждое целое число имеет одну из следующих форм: $5n$, $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$;
   б) дать затем доказательство, основывающееся на основной теореме арифметики. Теорему эту можно найти в гл. I или в приложении Б.
2. Доказать, что число $\sqrt{5}$ иррационально.
3. Доказать, что число $\sqrt{15}$ иррационально.
4. Доказать, что число $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ иррационально.
5. Доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.
6. Известно, что α (альфа) — иррациональное число. Доказать, что число $\alpha^{-1}=1/\alpha$ тоже иррационально.
7. Рационально или иррационально число 0?

§ 6. Слова, которыми мы пользуемся

Язык, который мы используем для описания различных классов чисел, является частью нашего исторического наследства, и поэтому он вряд ли изменится, хотя мы чувствуем, что использование некоторых слов в нем несколько необычно. Например, в повседневной речи при описании чего-либо как «иррационального» мы обычно имеем в виду нечто не воспринимаемое нашим разумом, нечто непознаваемое. Но, конечно, мы не рассматриваем иррациональные числа — например, длину диагонали единичного квадрата — как нечто непознаваемое. По-видимому, древние греки были удивлены, когда обнаружили иррациональные числа, поскольку до этого они предполагали, что каковы бы ни были два прямолинейных отрезка (например, сторона и диагональ квадрата) существуют целые числа a и b, отношение которых равно отношению длин рассматриваемых отрезков. Таким образом, слово «рациональный» в математическом смысле связано с отношением целых чисел, а «иррациональный» — с отсутствием такого отношения.

Слово «соизмеримые» также использовалось для описания двух длин, отношение которых есть рациональное число. Две *соизмеримые* длины связаны таким образом, что одна из них может быть «измерена» с помощью другой в следующем смысле: существует некоторое целое число k, такое, что когда первый отрезок делится на k равных частей, каждая длины l, то второй отрезок тоже делится на целое число, скажем m, равных частей длины l. При этом отношение рассматриваемых длин равно

$$\frac{kl}{ml}=\frac{k}{m},$$

и, таким образом, рационально (рис. 11).

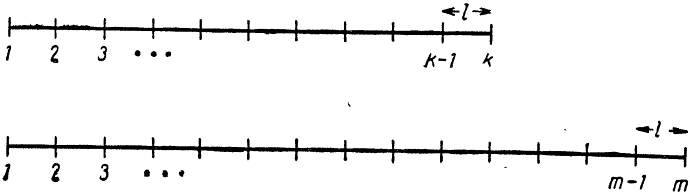


Рис. 11.

Когда отношение длин отрезков (например, стороны и диагонали квадрата) иррационально, вышеизложенная конструкция не может быть осуществлена, как бы велико ни было число k (и как бы мал соответственно ни был отрезок l)! В этом случае рассматриваемые отрезки называются *несоизмеримыми*.

Числа типа $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{24}$, общий вид которых есть $\sqrt[n]{a}$, где a — рационально и n — целое число, называются *радикалами*.

Термин «действительные числа» является еще одним примером исторического наследия. Если бы нам пришлось давать им название теперь, то мы бы их, возможно, назвали «одномерные числа». Во всяком случае, мы не рассматриваем числа, не входящие в класс действительных чисел, как «недействительные». Читатель, возможно, знаком с комплексными числами, частным случаем которых являются действительные числа. *Комплексным числом* называется число вида $a+bi$, где a и b действительны, а i удовлетворяет соотношению $i^2=-1$. Это определение приведено здесь лишь для завершения обсуждения названий классов чисел. Содержание настоящей книги ограничивается действительными числами, и более широкого класса комплексных чисел мы здесь не коснемся.

§ 7. Приложение к геометрии

Большинство учебников по геометрии оставляют пробелы в тех доказательствах, где возникает нужда в иррациональных числах. Этот пробел связан с тем,

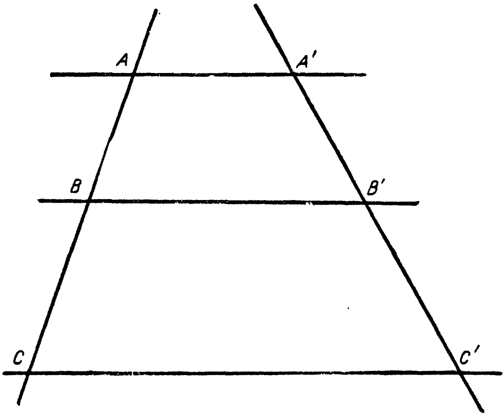


Рис. 12.

что в доказательстве рассматривается лишь «рациональный случай», в то время как «иррациональный случай» замалчивается. Часто так обстоит дело со следующим предложением.

Теорема 1. *Если три параллельные прямые пересечены двумя прямыми в точках A, B, C, A', B', C', как показано на рис.* 12, *то*

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'},$$

где, например, AB обозначает длину прямолинейного отрезка с концами A и B.

Эта теорема может быть использована для доказательства основной теоремы о подобных треугольниках: *если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то соответствующие стороны треугольников пропорциональны* (рис. 13). Этот результат в свою очередь часто используется для доказательства

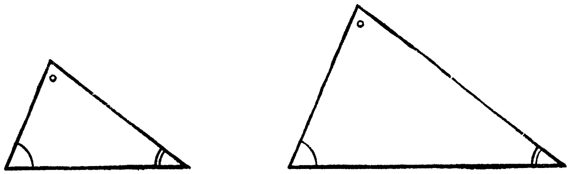


Рис. 13.

теоремы Пифагора, так что вся тригонометрия и аналитическая геометрия практически строятся на основе указанных теорем.

Докажем теперь теорему 1 для случая, когда отношение AB/BC иррационально. Мы принимаем без доказательства справедливость ее для случая рационального AB/BC, поскольку эта часть теоремы вполне корректно доказывается во всех книгах по элементарной геометрии. Прежде, чем переходить к доказательству теоремы 1 в случае иррационального отношения AB/BC, полезно установить следующий предварительный результат, относящийся к тому же рис. 12.

Теорема 2. *Если m и n — такие положительные целые числа, что*

$$\frac{m}{n} < \frac{AB}{BC},$$

то

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Доказательство. Начнем с некоторого дополнительного построения. Разделим отрезок BC на n равных частей. Пусть каждая часть имеет длину α, так что $BC=n\alpha$. Отложим, далее, последовательно m отрезков длины α вдоль отрезка BA и обозначим че-

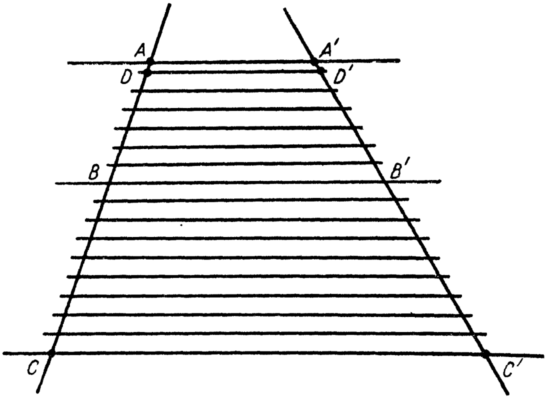


Рис. 14.

рез D более удаленный от B конец последнего из этих отрезков. Покажем сначала, что D лежит между B и A, как показано на рис. 14.

Так как $BC=n\alpha$ и $DB=m\alpha$, то

$$\frac{DB}{BC}=\frac{m\alpha}{n\alpha}=\frac{m}{n};$$

но, согласно сделанному предположению,

$$\frac{m}{n}<\frac{AB}{BC};$$

и поэтому

$$\frac{DB}{BC}<\frac{AB}{BC}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $DB<AB$, поскольку обе дроби имеют один и тот же знаменатель BC. Таким образом, DB короче AB и, следовательно, точка D лежит внутри отрезка AB.

Проведем, далее, из всех этих точек деления прямые параллельно AA', и пусть точке D прямой AB соответствует точка D' прямой $A'B'$, как это показано на рис. 14. Согласно теореме 1 для рационального случая (справедливость которой мы приняли без доказательства), $B'C'$ разделится при этом на n равных частей, а $D'B'$ — на m равных частей одной и той же длины. Следовательно,

$$\frac{D'B'}{B'C'}=\frac{m}{n}.$$

Но, как видно из рис. 14, $D'B'<A'B'$, так что

$$\frac{D'B'}{B'C'}<\frac{A'B'}{B'C'},\quad \frac{m}{n}<\frac{A'B'}{B'C'}.$$

Отметим также, что имеет место

Теорема 2′. *Если* $\frac{m}{n}>\frac{AB}{BC}$, *то* $\frac{m}{n}>\frac{A'B'}{B'C'}$.

Теорема 2′ вполне аналогична теореме 2 и доказывается так же.

Используем теперь доказанные нами теоремы 2 и 2′ для того, чтобы установить справедливость теоремы 1 в том случае, когда отношение AB/BC равно иррациональному числу β. При этом мы воспользуемся десятичным представлением β, о котором говорилось в § 2.

Для иллюстрации того, что мы собираемся делать, допустим, например, что $\beta=\pi=3{,}14159\ldots$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{1}<\beta<\frac{4}{1},\\
&\frac{31}{10}<\beta<\frac{32}{10};\\
&\frac{314}{100}<\beta<\frac{315}{100};\\
&\frac{3141}{1000}<\beta<\frac{3142}{1000},\ \ldots \text{ и т. д.}
\end{aligned}\tag{1}$$

Рациональные дроби слева равны соответственно десятичным дробям 3; 3,1; 3,14; 3,141 и т. д., взятым из десятичного разложения β. Дроби справа получаются увеличением этих дробей на 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Цепочка неравенств (1) бесконечна. Мы выписали только первые четыре из них. Все эти неравенства (в бесконечном числе!) полностью характеризуют то значение β, которое мы рассматриваем, а именно

$\beta=\pi$. Иными словами, если число β удовлетворяет всем неравенствам (1), то оно равно π.

Разумеется, неравенства (1) относятся только к иллюстрирующему общий случай примеру, когда β имеет значение π. Покончив теперь с этим примером, отметим, что десятичное разложение произвольного иррационального числа β дает цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} &\frac{a_1}{1}<\beta<\frac{1+a_1}{1};\\ &\frac{a_2}{10}<\beta<\frac{1+a_2}{10};\\ &\frac{a_3}{100}<\beta<\frac{1+a_3}{100};\\ &\frac{a_4}{1000}<\beta<\frac{1+a_4}{1000}, \ \ldots \text{ и т. д.,} \end{aligned} \tag{2}$$

однозначно определяющих β, причем каждое из этих неравенств утверждает, что число β заключено между определенными рациональными числами. Символы a_1, a_2, a_3, ... в наших неравенствах означают некоторые целые числа.

Наш план состоит в следующем: положив $A'B'/B'C'=\beta'$, показать, что β', так же как и β, удовлетворяет всем неравенствам (2). Поскольку неравенства (2) однозначно определяют β, это будет означать полное совпадение чисел β' и β, так что

$$\beta=\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}=\beta'.$$

Теперь нам осталось только доказать, что β' удовлетворяет всем неравенствам (2). Воспользуемся для этого теоремой 2. Возьмем сначала какую-либо из дробей $a_1/1$, $a_2/10$, $a_3/100$ и т. д., например $a_3/100$, и примем ее за фигурирующее в теореме 2 рациональное число m/n. Условие теоремы 2

$$\frac{m}{n}<\frac{AB}{BC}$$

сводится тогда к неравенству

$$\frac{a_3}{100}<\beta,$$

имеющему место в силу соотношений (2). Таким образом, согласно теореме 2,

$$\frac{m}{n} < \frac{A'B'}{B'C'},$$

т е.

$$\frac{a_3}{100} < \beta'.$$

Мы видим, стало быть, что β' удовлетворяет неравенствам

$$\frac{a_1}{1} < \beta', \quad \frac{a_2}{10} < \beta', \quad \frac{a_3}{100} < \beta', \quad \frac{a_4}{1000} < \beta' \quad \text{и т. д.}$$

Используя аналогичным образом теорему 2′, приходим к неравенствам

$$\beta' < \frac{1+a_1}{1}, \quad \beta' < \frac{1+a_2}{10}, \quad \beta' < \frac{1+a_3}{100}, \quad \beta' < \frac{1+a_4}{1000}$$

и т. д. Следовательно, β', так же как и β, удовлетворяет всем неравенствам (2). Поэтому $\beta = \beta'$, что и завершает доказательство теоремы 1.

§ 8. Краткие выводы

В настоящей главе было отмечено, что каждое действительное число может быть связано в точности с одной точкой на «действительной прямой». Мы видели также, что каждое действительное число имеет в точности одно представление в виде бесконечной десятичной дроби (при этом предполагается, что исключены представления, оканчивающиеся бесконечной последовательностью нулей, т. е. конечные десятичные дроби). Это представление иррационального числа в виде бесконечной десятичной дроби было использовано в § 7 при доказательстве весьма важной теоремы элементарной геометрии. Кроме того, была установлена иррациональность некоторых чисел, таких, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и т. д. Примененные нами методы, однако, имеют довольно частный характер, и мы не дали никакого общего способа определения того, является ли данное число рациональным или иррациональным.

В следующей главе иррациональные числа будут изучены несколько более систематично. Мы разовьем метод, с помощью которого может быть установлена иррациональность широкого класса чисел.

ГЛАВА IV

Иррациональные числа

В настоящей и следующей главах мы увидим, что действительные числа, помимо деления на рациональные и иррациональные, могут быть разделены еще на два других класса. В первый класс входят так называемые *алгебраические числа* — такие числа, которые являются корнями алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Второй класс образуют числа, не принадлежащие к первому классу; они называются *трансцендентными числами.* Смысл разграничения чисел первого и второго классов будет более понятен из дальнейшего. Отметим, однако, здесь же, что некоторые алгебраические числа рациональны, некоторые иррациональны, но *все трансцендентные числа иррациональны.*

Основная цель настоящей главы — дать систематический метод для определения того, является ли заданное алгебраическое число рациональным или иррациональным. (В действительности мы не будем рассматривать класс алгебраических чисел в его полной общности, а применим наш метод к большому числу примеров.) Но прежде чем переходить к этому методу, мы изучим некоторые простые свойства множества иррациональных чисел.

§ 1. Свойства замкнутости

В противоположность рациональным числам, множество которых, как было показано, замкнуто относительно сложения, вычитания, умножения и деления (исключая деление на нуль), множество иррациональных чисел не обладает ни одним из перечисленных свойств. Прежде чем показать это, мы докажем теорему, позволяющую построить бесконечно много иррациональных чисел, исходя из одного данного иррационального числа.

Теорема 1. *Пусть α — произвольное иррациональное число и r — любое рациональное число, отличное от нуля. Тогда сложение, вычитание, умножение и деление, примененные к числам α и r, приводят к иррациональным числам. Кроме того, числа $-\alpha$ и α^{-1} иррациональны.*

Доказательство. Перечисленные результаты легко получить, применяя косвенный метод доказательства. Предположим, например, что число $-\alpha$ рационально, и пусть $-\alpha=r'$, где r' — рациональное число. Тогда $\alpha=-r'$, причем число $-r'$ тоже рационально. Мы пришли, таким образом, к противоречию, поскольку число α иррационально.

Теорема утверждает, что $-\alpha$, $\alpha^{-1}=1/\alpha$, $\alpha+r$, $\alpha-r$, $r-\alpha$, $r\alpha$, α/r и r/α — иррациональные числа. Случай числа $-\alpha$ уже нами разобран. Для доказательства иррациональности α^{-1} отметим, что этот факт есть частный случай иррациональности r/α (нужно лишь положить здесь $r=1$), и поэтому нет необходимости рассматривать его отдельно[1]).

Докажем оставшиеся шесть утверждений одновременно одним рассуждением. Если бы одно или более из интересующих нас выражений были рациональными, то выполнялось бы одно или более из нижеследующих равенств:

$$\alpha+r=r_1,\ \alpha-r=r_2,\ r-\alpha=r_3,\ r\alpha=r_4,$$
$$\frac{\alpha}{r}=r_5,\ \frac{r}{\alpha}=r_6,$$

где r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 — некоторые рациональные числа. Разрешая выписанные уравнения относительно

[1]) Заметим, впрочем, что случай числа $-\alpha$ также можно отдельно не рассматривать, поскольку $-\alpha=r-\alpha$, где $r=0$. — *Прим. ред.*

«неизвестного» α, получим

$$\alpha = r_1 - r, \quad \alpha = r_2 + r, \quad \alpha = r - r_3, \quad \alpha = \frac{r_4}{r},$$

$$\alpha = r r_5, \quad \alpha = \frac{r}{r_6}.$$

Правые части этих равенств являются рациональными числами в силу свойств замкнутости множества рациональных чисел. Так как α иррационально, то ни одно из этих равенств не может иметь места. Поэтому ни одно из чисел $\alpha + r$, $\alpha - r$ и т. д. не может быть рациональным. Доказательство теоремы, таким образом, закончено.

С помощью теоремы 1 можно построить широкий класс иррациональных чисел, исходя из одного иррационального числа, например из $\sqrt{2}$. Применяя каждое из утверждений теоремы, можно заключить, например, что все числа

$$-\sqrt{2}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sqrt{2}+5, \ 3-\sqrt{2}, \ -2\sqrt{2}, \ \frac{\sqrt{2}}{7}, \ \frac{4}{\sqrt{2}}$$

иррациональны. Так как имеется бесконечно много рациональных чисел, которые можно использовать в каждом из первых четырех утверждений теоремы, то ясно, что таким способом можно построить бесконечное множество иррациональных чисел.

Более того, каждое из построенных таким способом чисел, например $\sqrt{2}+5$, может далее быть использовано как исходное иррациональное число α в теореме 1. В результате получается новое бесконечное множество иррациональных чисел, порождаемое этим числом. В случае $\sqrt{2}+5$ такими числами, например, будут

$$-\sqrt{2}-5, \ \frac{1}{\sqrt{2}+5}, \ \sqrt{2}+8, \ 5\sqrt{2}+25, \ \frac{\sqrt{2}+5}{7}$$

и т. д.

Замкнуто ли множество иррациональных чисел относительно сложения? Нет, не замкнуто. Чтобы убедиться в этом, достаточно указать лишь одну пару иррациональных чисел, сумма которых рациональна. В предыдущей главе было установлено, что число $\sqrt{2}$ иррационально. Согласно теореме 1, число $-\sqrt{2}$ тоже иррационально. Но сумма чисел $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, равная нулю, рациональна. Точно так же рациональна сумма иррациональных чисел $3+\sqrt{2}$ и $5-\sqrt{2}$. Вообще, сумма чисел $r_1+\alpha$ и $r_2-\alpha$ (где числа r_1 и r_2 рациональны, а α — иррационально) рациональна.

Незамкнутость множества иррациональных чисел относительно сложения не означает, что в результате сложения *любых двух* иррациональных чисел получается рациональное число. Она означает лишь, что имеется *по крайней мере один* случай, когда сумма иррациональных чисел рациональна. Результат сложения иррациональных чисел может быть как рациональным, так и иррациональным в зависимости от чисел, фигурирующих в качестве слагаемых. В то время как сумма чисел $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ рациональна, сумма чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, согласно результатам предыдущей главы, иррациональна.

Замкнуто ли множество иррациональных чисел относительно вычитания? Разумеется, нет, поскольку, например, при вычитании иррационального числа $\sqrt{2}$ из того же самого числа получается рациональное число 0.

Аналогично множество иррациональных чисел не замкнуто относительно умножения и деления. Доказательство этого настолько сходно с предыдущим рассуждением, что мы оставляем его читателю в качестве упражнения (см. ниже).

Упражнения

(При решении некоторых из этих упражнений, возможно, окажутся полезными результаты, полученные в предыдущей главе, а именно иррациональность чисел $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.)

1. Указать два иррациональных числа, разность которых иррациональна.

2. Указать два иррациональных числа, произведение которых рационально, и тем самым доказать, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно умножения.
3. Указать два иррациональных числа, произведение которых иррационально.
4. Указать два иррациональных числа, частное которых рационально, и тем самым доказать, что множество иррациональных чисел не замкнуто относительно деления.
5. Указать два иррациональных числа, частное которых иррационально.
*6. Доказать, что число $\sqrt{3}(\sqrt{6}-3)$ иррационально.
7. Пусть α — положительное иррациональное число. Доказать, что число $\sqrt{\alpha}$ также иррационально.
8 Пусть α и β иррациональны, а $\alpha+\beta$ рационально. Показать, что числа $\alpha-\beta$ и $\alpha+2\beta$ иррациональны.

§ 2. Алгебраические уравнения

В предыдущей главе было показано, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ иррациональны. Как можно было бы ожидать (или, возможно, как читатель уже знает), такие числа, как $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{5}$ и $\sqrt[5]{91}$, тоже иррациональны. Нашей ближайшей целью является доказательство иррациональности всех чисел этого типа с помощью некоторой общей схемы. Для этого мы перейдем от самих чисел к простым алгебраическим уравнениям, корнями которых наши числа являются. Например, $\sqrt{2}$ есть корень уравнения $x^2-2=0$, иначе говоря, число $\sqrt{2}$ удовлетворяет уравнению $x^2-2=0$. Аналогично, другие указанные выше числа удовлетворяют следующим уравнениям:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{3}, && x^2-3=0,\\
&\sqrt{6}, && x^2-6=0,\\
&\sqrt{7}, && x^2-7=0,\\
&\sqrt[3]{5}, && x^3-5=0,\\
&\sqrt[5]{91}, && x^5-91=0.
\end{aligned}
$$

Мы установим, что все эти уравнения и вообще все уравнения, удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям, не имеют рациональных корней. Предварительно нам придется определить несколько понятий, используемых для описания рассматриваемых уравнений.

Под *квадратным многочленом* относительно x мы понимаем выражение вида ax^2+bx+c, где a, b, c — некоторые числа, называемые *коэффициентами многочлена. Кубический многочлен,* или *многочлен степени* 3, — это выражение вида ax^3+bx^2+cx+d. Чтобы избежать появления все новых и новых букв при возрастании степени многочлена, удобно пользоваться следующей записью:

$$c_3x^3+c_2x^2+c_1x+c_0.$$

Далее, многочлен произвольной степени n (где n — целое положительное число) определяется как выражение вида

$$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0,$$

где c_n не равно 0. *Алгебраическим уравнением* степени n мы будем называть равенство вида

$$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0=0. \tag{1}$$

Числа c_0, c_1, c_2, ..., c_n (где $c_n \neq 0$) называются *коэффициентами* уравнения (1).

Пример. Определить значения степени n, коэффициента c_n и других коэффициентов в уравнении

$$3x^6+2x^5-x^4+10x^3+4x-7=0.$$

Ответ. Из непосредственного сравнения нашей записи с формулой (1) видно, что

$$n=6; \quad c_6=3, \quad c_5=2, \quad c_4=-1, \quad c_3=10,$$
$$c_2=0, \quad c_1=4, \quad c_0=-7.$$

Отметим, что требование, чтобы все коэффициенты уравнения (1) были целыми числами, не сильнее требования рациональности коэффициентов. В самом деле, если коэффициенты рациональны, то

$$c_0=\frac{a_0}{b_0}, \quad c_1=\frac{a_1}{b_1}, \quad c_2=\frac{a_2}{b_2}\ldots,$$

где все числа a и b целые. Все эти дроби

$$\frac{a_0}{b_0},\quad \frac{a_1}{b_1},\quad \frac{a_2}{b_2},\ \ldots$$

можно переписать так, чтобы они имели одинаковый знаменатель, например произведение $b_0b_1b_2\ldots b_n$. Домножая затем обе части уравнения на этот общий знаменатель, мы получим новое уравнение, все коэффициенты которого целые и корни которого совпадают с корнями исходного уравнения.

Напомним, что *корнем* уравнения относительно x называется число, которое, будучи подставленным в уравнение вместо x, удовлетворяет ему. Например, $\sqrt{7}$ есть, как уже отмечалось раньше, корень уравнения $x^2-7=0$.

Пример. Является ли 2/5 корнем уравнения $10x^3+6x^2+x-2=0$?

Ответ. Подставив 2/5 вместо x в наше уравнение, получаем

$$10\left(\frac{2}{5}\right)^3+6\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{2}{5}-2=0.$$

Справедливость этого равенства проверяется простым подсчетом; следовательно, $^2/_5$ есть корень рассматриваемого уравнения.

Теперь мы готовы перейти к нашей основной задаче. Подчеркнем еще раз, что метод, который мы собираемся использовать для решения вопроса о том, иррационально ли данное число, применим тогда и только тогда, когда можно выписать алгебраическое уравнение, для которого рассматриваемое число является корнем. Этот метод может быть использован не только для чисел, иррациональность которых была установлена в предыдущей главе, но также для любого числа, допускающего запись в виде конечной комбинации символов $+$, $-$, $\times$, : и $\sqrt[n]{\ }$, примененных к рациональным числам и их комбинациям. Число

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt[10]{7}-\sqrt[11]{7}}}{\sqrt[156]{25}}$$

является примером довольно сложного числа того типа, о котором здесь идет речь.

В этой книге мы не докажем, что все такие числа представляют собой корни алгебраических уравнений с целыми коэффициентами [1]), однако будут выписаны алгебраические уравнения, корнями которых являются многие конкретные числа этого типа.

Упражнения

1. Определить значения n, c_n и т. д., если роль уравнения (1) играет следующее уравнение:
   а) $15x^3-23x^2+9x-1=0$;
   б) $3x^3+2x^2-3x-2=0$;
   в) $2x^3+7x^2-3x-18=0$;
   г) $2x^4-x^2-3x+5=0$;
   д) $3x^5-5x^3+6x^2-12x+8=0$;
   е) $x^4-3x^2-5x+9=0$.
2. а) Является ли $^1/_3$ корнем уравнения а) упр. 1?
   б) Является ли $-^2/_3$ корнем уравнения б) упр. 1?
   в) Является ли $^3/_2$ корнем уравнения в) упр. 1?
   г) Является ли 2 корнем уравнения г) упр. 1?
   д) Является ли -2 корнем уравнения д) упр. 1?
   е) Является ли $^1/_2$ корнем уравнения а) упр. 1?
3. Доказать, что $\sqrt{7}$ есть корень уравнения $\frac{1}{3}x^2-\frac{7}{3}=0$.
4. Доказать, что если некоторое число есть корень алгебраического уравнения вида
$$\frac{a_3}{b_3}x^3+\frac{a_2}{b_2}x^2+\frac{a_1}{b_1}x+\frac{a_0}{b_0}=0$$
с рациональными коэффициентами a_3/b_3 и т. д., то это число является также корнем некоторого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами.
5. Обобщить результат предыдущего упражнения на уравнения степени n.

§ 3. Рациональные корни алгебраических уравнений

Наша цель теперь состоит в выведении простого правила, сформулированного ниже как теорема 3, дающего возможность находить все рациональные корни любого алгебраического уравнения с целыми

[1]) Это обстоятельство действительно имеет место. — *Прим. ред.*

коэффициентами. Мы будем, следовательно, в состоянии отделить рациональные корни уравнения от иррациональных и тем самым установить иррациональность широкого класса чисел.

Установим сначала следующий вспомогательный результат:

Теорема 2. *Пусть u, v, w — такие целые числа, что u есть делитель vw, причем u и v взаимно просты (т. е. не имеют общих простых делителей). Тогда u есть делитель w. Более обще, если u есть делитель $v^n w$, где n — любое целое положительное число, а u и v — взаимно просты, то u есть делитель w.*

Прежде, чем переходить к доказательству теоремы, проиллюстрируем ее несколькими примерами.

1) Пусть $u=2$, $v=3$ и $vw=12$. Числа 2 и 3 взаимно просты. Кроме того, 12 делится на 2, так что условия теоремы 2 выполнены. Заключение, состоящее в том, что 2 есть делитель $w=12/v=4$, также, очевидно, справедливо.

2) Пусть $u=4$, $v=5$, $v^3w=500$. Числа 4 и 5 взаимно просты, а 500 делится на 4. Более общее утверждение, состоящее здесь в том, что 4 есть делитель числа $w=500/125=4$, также справедливо.

Доказательство. Основным результатом, на который мы будем здесь опираться, является основная теорема арифметики, доказанная в приложении Б в конце книги. Согласно этой теореме, числа u, v и w можно разложить на простые множители лишь одним способом. Поскольку vw делится на u, то все простые множители числа u являются также простыми множителями числа vw; более того, если какое-нибудь простое число p входит в разложение u в степени α, то оно входит в разложение vw в степени β, по меньшей мере равной α (т. е. такой, что $\beta \geqslant \alpha$). Далее, так как u и v не имеют общих простых множителей, то все простые множители числа u входят (и притом по меньшей мере в той же степени) и в разложение числа w. Следовательно, u есть делитель w.

Последнее утверждение теоремы можно обосновать аналогичным способом. Из предположения, что

u и v взаимно просты, вытекает, что u и v^n тоже взаимно просты (не имеют общих простых множителей). Отсюда, как и выше, выводим, что число v^n нисколько не способствует делимости числа $v^n w$ на u, и поэтому u есть делитель w.

Теперь мы накопили достаточно предварительного материала, чтобы сформулировать и доказать следующее предложение:

Теорема 3. *Рассмотрим произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами:*

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \ldots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0 = 0. \tag{1}$$

Если это уравнение имеет рациональный корень a/b (дробь a/b предполагается несократимой), то a является делителем c_0, а b — делителем c_n.

Опять, прежде чем переходить к доказательству теоремы, проиллюстрируем ее примером. Рассмотрим уравнение

$$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0.$$

Теорема утверждает, что если a/b есть рациональный корень нашего уравнения, причем дробь a/b несократима, то a есть делитель -3, а b — делитель 2. Следовательно, возможными значениями для a являются $+1$, -1, $+3$, -3, а возможными значениями для b являются $+1$, -1, $+2$, -2. Объединяя эти возможности, мы видим, что все рациональные корни принадлежат следующему множеству дробей:

$$\frac{+1}{+1}, \frac{+1}{-1}, \frac{+1}{+2}, \frac{+1}{-2}, \frac{-1}{+1}, \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{+2}, \frac{-1}{-2},$$
$$\frac{+3}{+1}, \frac{+3}{-1}, \frac{+3}{+2}, \frac{+3}{-2}, \frac{-3}{+1}, \frac{-3}{-1}, \frac{-3}{+2}, \frac{-3}{-2}.$$

Выписанное множество содержит только восемь различных чисел, а именно 1, -1, $1/2$, $-1/2$, 3, -3, $3/2$, $-3/2$. С помощью подстановки читатель легко сможет убедиться, что в действительности корнями являются лишь числа 1, $1/2$ и 3.

Доказательство. Пусть a/b есть корень уравнения (1). Это означает, что если вместо x подставить в уравнение (1) число a/b, то получается равенство

$$c^n\left(\frac{a}{b}\right)^n+c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1}+\ldots+c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2+c_1\left(\frac{a}{b}\right)+c_0=0. \tag{2}$$

Чтобы читателю было легче следить за деталями доказательства, начнем с разбора частного случая, когда $n=3$. Несколько ниже аналогичное рассуждение будет проведено и в общем случае.

При $n=3$ равенство (2) сводится к

$$c_2\left(\frac{a}{b}\right)^3+c_2\left(\frac{a}{b}\right)^2+c_1\left(\frac{a}{b}\right)+c_0=0.$$

Умножая это равенство на b^3, получаем

$$c_3a^3+c_2a^2b+c_1ab^2+c_0b^3=0. \tag{3}$$

Равенство (3) перепишем в виде

$$c_3a^3=-c_2a^2b-c_1ab^2-c_0b^3.$$

Вынесем в правой части b за скобку:

$$c_3a^3=b(-c_2a^2-c_1ab-c_0b^2).$$

Из последнего равенства следует, что b — делитель числа c_3a^3. Применим теперь теорему 2, заменив u, v и w соответственно на b, a и c_3. Предположение теоремы 2 об отсутствии у u и v общих простых множителей выполнено, так как дробь a/b несократима и, стало быть, числа a и b взаимно просты. Поэтому из теоремы 2 следует, что b — делитель числа c_3. Этот факт является частью заключения теоремы 3 для $n=3$, поскольку в этом случае c_n совпадает с c_3.

Перепишем далее равенство (3) в виде

$$c_0b^3=-c_1ab^2-c_2a^2b-c_3a^3.$$

Вынесем в правой части a за скобку:

$$c_0b^3=a(-c_1b^2-c_2ab-c_3a^2).$$

Из последнего равенства следует, что a есть делитель c_0b^3. С помощью рассуждения, по существу не отличающегося от приведенного выше, снова применяя теорему 2, заключаем, что a есть делитель c_0. Таким образом, в случае $n=3$ теорема доказана.

Для доказательства теоремы в общем случае (для произвольного n) вернемся к уравнению (2). Умножив обе его части на b^n, получим

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \ldots + c_2a^2b^{n-2} + c_1ab^{n-1} + c_0b^n = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) можно переписать в виде

$$c_n a^n = -c_{n-1}a^{n-1}b - \ldots - c_2a^2b^{n-2} - c_1ab^{n-1} - c_0b^n.$$

Вынесем справа b за скобку:

$$c_n a^n = b(-c_{n-1}a^{n-1} - \ldots + c_2a^2b^{n-3} - c_1ab^{n-2} - c_0b^{n-1}).$$

Из последнего равенства следует, что b есть делитель c_na^n. Применим теорему 2, заменив u, v и w соответственно на b, a и c_n, и получим, что b есть делитель c_n.

Перепишем, наконец, равенство (4) в виде

$$c_0b^n = a(-c_na^{n-1} - \ldots - c_2ab^{n-2} - c_1b^{n-1}).$$

Из полученного соотношения видно, что a есть делитель c_0b^n. Применяя опять теорему 2, в которой u, v и w заменены соответственно на a, b и c_0, получим, что a есть делитель c_0. Тем самым теорема 3 доказана.

Можно было бы избежать рассуждения, занимающего предыдущий абзац, заметив, что равенство (4) симметрично и в нем b занимает точно такое же место по отношению к c_n, как a по отношению к c_0.

Посмотрим теперь, к какому результату мы придем, положив, что $c_n=1$.

Следствие 1. *Рассмотрим уравнение вида*

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0$$

с целыми коэффициентами. Если это уравнение имеет рациональный корень, то корень этот — целый и является делителем числа c_0.

Доказательство. Рассмотрим произвольный рациональный корень a/b. Можно предположить, что число b положительно, поскольку противоположный случай можно свести к этому, отнеся знак минус к a. В соответствии с теоремой 3 число b должно быть делителем c_n, т. е. делителем 1. Но единственным делителем 1 являются $+1$ и -1, и поэтому $b=+1$, так как мы исключили отрицательные b. Следовательно, всякий рациональный корень имеет вид $a/1$, т. е. представляет собой целое число a. В силу той же теоремы 3 a есть делитель числа c_0, что и завершает доказательство следствия.

Пример. Доказать, что число $\sqrt{7}$ иррационально.

Решение. $\sqrt{7}$ есть корень уравнения $x^2-7=0$. Здесь, в соответствии с нашими обозначениями, $n=2$, $c_2=1$, $c_0=-7$.

Имеется два пути, которыми мы можем воспользоваться. Следуя первому из них, применим следствие 1, рассуждая таким образом: если бы уравнение $x^2-7=0$ имело рациональный корень a/b, то этот рациональный корень должен был бы быть целым числом. Мы можем показать, что $\sqrt{7}$ не есть целое число и, следовательно, не является рациональным корнем уравнения $x^2-7=0$. Но оно — корень этого уравнения и поэтому должно быть иррациональным. Ясно, что число $\sqrt{7}$ не целое, так как оно лежит между последовательными целыми числами 2 и 3. Это в свою очередь вытекает из неравенств

$$4<7<9,$$

$$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9},$$

$$2<\sqrt{7}<3.$$

Второй путь использует следствие 1 в полном объеме. Согласно этому следствию, любой рациональный корень уравнения $x^2-7=0$ является целым числом и притом делителем числа -7. Совокупность делителей числа -7 состоит всего из четырех чисел: 1, -1, 7 и -7. Простой подстановкой легко убедиться, что ни одно из этих чисел не является корнем рассматриваемого уравнения: все равенства

$$1^2-7=0,\quad (-1)^2-7=0,\quad 7^2-7=0,\quad (-7)^2-7=0$$

ложны. Поэтому уравнение $x^2-7=0$ не имеет целых, а следовательно, и рациональных корней, так что число $\sqrt{7}$ иррационально.

Пример. Доказать, что число $\sqrt[3]{5}$ иррационально.

Решение. $\sqrt[3]{5}$ есть корень уравнения $x^3-5=0$. Согласно следствию 1, если это уравнение имеет рациональный корень, то он является целым числом и притом делителем числа 5. Совокупность делителей числа 5 состоит из четырех чисел $+1$, -1, $+5$ и -5. Но ни одно из этих чисел не есть корень нашего уравнения, поскольку все равенства

$$1^3-5=0,\quad (-1)^3-5=0,\quad 5^3-5=0,\quad (-5)^3-5=0$$

ложны. Следовательно, уравнение $x^3-5=0$ не имеет рациональных корней и число $\sqrt[3]{5}$ иррационально.

Приведенные два примера являются частными случаями следующего более общего результата:

Следствие 2. *Число вида $\sqrt[n]{a}$, где a и n — положительные целые числа, либо иррациональное, либо целое. В последнем случае a есть n-я степень целого числа.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 1, поскольку $\sqrt[n]{a}$ есть корень уравнения $x^n-a=0$, и если такое уравнение имеет рациональный корень, то он целый. Кроме того, если число $\sqrt[n]{a}$ целое и равно, скажем, k, то $a=k^n$.

Упражнения

1. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$ и $\sqrt[5]{91}$ иррациональны.
2. Доказать, что число $(4\sqrt{13}-3)/6$ иррационально.
3. Доказать, что число $\sqrt{15}$ иррационально.
4. Доказать, что число $4/(16-3\sqrt{15})$ иррационально.
5. Доказать, что число $\sqrt[3]{6}$ иррационально.
6. Доказать, что число $(1/3)(2\sqrt[3]{6}+7)$ иррационально.
7. Доказать, что теорема 3 теряет силу, если в ней опустить требование несократимости дроби a/b.

§ 4. Дальнейшие примеры

В гл. III с помощью метода, применимого к довольно широкому классу чисел, было доказано, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально. Еще более широкий класс чисел можно охватить, используя следствие 1.

Рассмотрим еще раз число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Положим $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогда

$$x-\sqrt{2}=\sqrt{3}.$$

Возводя обе стороны в квадрат, имеем

$$x^2-2x\sqrt{2}+2=3,$$

откуда после несложных преобразований следует

$$x^2-1=2x\sqrt{2}.$$

Возведем теперь в квадрат и это равенство:

$$x^4-2x^2+1=8x^2.$$

Окончательно получим

$$x^4-10x^2+1=0. \tag{5}$$

Из способа построения уравнения (5) ясно, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является его корнем. Применяя теперь следствие 1, мы покажем, что уравнение (5) не имеет рациональных корней, откуда и будет вытекать иррациональность $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

В силу следствия 1 рациональные корни уравнения (5), если только они существуют, должны быть целыми делителями 1. Число 1 имеет всего два делителя: $+1$ и -1, ни один из которых не является корнем уравнения $x^4-10x^2+1=0$. Следовательно, уравнение (5) рациональных корней не имеет, так что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

Имеется другой путь, который приводит к тому же самому выводу: вместо проверки того, являются ли числа $+1$ и -1 корнями уравнения (5), можно рассуждать следующим образом. Число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ отлично от чисел $+1$ и -1. В этом можно убедиться, например, заметив, что как $\sqrt{2}$, так и $\sqrt{3}$ больше 1, так что сумма $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и подавно больше -1 и $+1$. Следовательно, число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ не входит во множество возможных рациональных корней уравнения (5) независимо от того, являются числа $+1$ и -1 корнями этого уравнения или нет. Таким образом, число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

Пример. Доказать, что число $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ иррационально.

Решение. Положим $x=\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$. Тогда

$$x+\sqrt{3}=\sqrt[3]{2}.$$

Возводя обе стороны в куб, получим

$$x^3+3\sqrt{3}x^2+9x+3\sqrt{3}=2,$$

откуда после несложных преобразований имеем

$$x^3+9x-2=-3\sqrt{3}(x^2+1).$$

Возводя теперь обе стороны в квадрат, получим

$$x^6+18x^4-4x^3+81x^2-36x+4=27(x^4+2x^2+1)$$

или

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0.$$

Из способа построения этого уравнения следует, что число $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ — его корень. Но единственно возможными рациональными корнями этого уравнения являются целые числа — делители числа -23, т. е. $+1$, -1, $+23$ и -23. Эти числа, однако, не являются корнями, как показывает непосредственная подстановка:

$$+1:\ 1^6-9(1)^4-4(1)^3+\\ +27(1)^2-36(1)-23=0 \text{ (Неверно!)}$$

$$-1:\ (-1)^6-9(-1)^4-4(-1)^3+\\ +27(-1)^2-36(-1)-23=0 \text{ (Неверно!)}$$

$$23:\ (23)^6-9(23)^4-4(23)^3+\\ +27(23)^2-36(23)-23=0.$$

(Неверно, поскольку, например, $(23)^6$ слишком велико, чтобы поглотиться другими членами!)

$$-23: \quad (-23)^6-9(-23)^4-4(-23)^3+$$
$$+27(-23)^2-36(-23)-23=0 \text{ (Неверно!)}.$$

Таким образом, рациональных корней наше уравнение не имеет, так что число $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ заведомо иррационально.

Как и в предыдущем примере, здесь нет необходимости проверять, являются ли числа $+1$, -1, $+23$ и -23 корнями рассматриваемого уравнения. Вместо этого можно доказать, что $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ отлично от любого из выписанных четырех возможных рациональных корней. Заметим, что $\sqrt[3]{2}$ приблизительно равно 1,2, а $\sqrt{3}$ приблизительно есть 1,7. Поэтому $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ приблизительно равно $-0{,}5$ и, стало быть, не равно ни одному из чисел $+1$, -1, $+23$, -23. Отсюда вытекает, что корень $\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ иррационален, поскольку он отличен от всех возможных рациональных корней.

Упражнения

1. Доказать, что число $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ иррационально.
2. Доказать, что число $\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}$ иррационально.
3. Доказать, что число $\sqrt[3]{5}-\sqrt{3}$ иррационально.

§ 5. Краткие выводы

В этой главе рассматривались так называемые «алгебраические иррациональности». Мы видели, что имеется бесконечно много иррациональных чисел, а также познакомились со способами построения некоторых из них, исходя из данного иррационального числа.

Кроме того, был разработан следующий метод определения, является или нет данное число k иррациональным, Сначала ищется алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами:

$$c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0,$$

которому удовлетворяет значение $x = k$ (если мы не сможем найти такое уравнение, то наш метод не применим). Затем применяется теорема 3 или, если $c_n = 1$, ее следствие 1. Нередко бывает ясно, что уравнение вообще не имеет рациональных корней. Тогда k, очевидно, должно быть иррациональным корнем. Иногда на глаз видно, что k отличается от всех возможных рациональных корней уравнения, и тогда мы снова заключаем, что k иррационально. Наконец, можно непосредственной подстановкой отбирать из всех возможных рациональных корней те, которые действительно являются корнями уравнения. Тогда, чтобы доказать иррациональность числа k, нужно лишь показать, что k отличается от всех этих рациональных корней.

В следующей главе мы используем методы настоящей главы для доказательства иррациональности многих чисел, фигурирующих в таблицах тригонометрических функций[1], а также чисел, фигурирующих в таблицах логарифмов (здесь нам понадобится основная теорема арифметики). Наконец, прочтя следующую главу книги, мы узнаем, что существуют иррациональные числа, не являющиеся корнями никаких алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

[1]) Разумеется, в любой таблице выписаны рациональные числа, приближенно равные требуемым числам, часто являющимся иррациональными. Лишь об этих числах, которые должны бы были стоять в таблицах, если бы их можно было записать, мы здесь и говорим! — *Прим. ред.*

ГЛАВА V

Значения тригонометрических и логарифмической функций

Читатель, несомненно, знаком с такими тригонометрическими функциями, как $\sin\theta$ или $\cos\theta$, и знает, что каждая из этих функций ставит в соответствие всякому углу θ некоторое действительное число. Возможно, читателю приходилось также сталкиваться с логарифмической функцией $\log x$, которая ставит в соответствие некоторое действительное число каждому положительному действительному числу x.

За исключением некоторых специальных значений угла θ, тригонометрические функции принимают иррациональные значения[1]). Подобным образом значения функции $\log x$ иррациональны для почти всех действительных положительных чисел x.

Мы не можем доказать здесь эти утверждения в их полной общности и ограничимся лишь рассмотрением нескольких простых примеров.

§ 1. Иррациональные значения тригонометрических функций

Используя методы предыдущей главы и некоторые основные тригонометрические тождества, мы покажем, что для многих углов θ соответствующие значения тригонометрических функций иррациональны.

---

[1]) Приводимые в таблицах десятичные представления значений тригонометрических функций являются оборванными на некотором месте *бесконечными* десятичными дробями. Иными словами, в таблицах указаны лишь *приближения* рассматриваемых чисел.

Напомним сначала следующие основные тригонометрические формулы:

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \tag{1}$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B. \tag{2}$$

Заменяя A и B одним значением, например θ, получаем

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{3}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{4}$$

Далее, заменяя в (1) A на 2θ и B на θ, находим

$$\cos 3\theta = \cos 2\theta \cos\theta - \sin 2\theta \sin\theta.$$

Отсюда, используя (3) и (4), а также хорошо известную формулу $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, получаем

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta = \\ &= \cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta = \\ &= \cos^3\theta - 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta,\end{aligned}$$

или, наконец,

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь число $\cos 20°$. Положив $\theta = 20°$ в (5), будем иметь

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°.$$

Обозначим $x = \cos 20°$. Поскольку, как известно, $\cos 60° = \frac{1}{2}$, полученное равенство сводится к

$$\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x,$$

или

$$8x^3 - 6x - 1 = 0. \tag{6}$$

Таким образом, число $\cos 20°$ — корень уравнения (6). Применяя к этому уравнению теорему 3 гл. IV, видим, что единственно возможными его рациональными корнями являются числа ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{8}$. Однако ни одно из этих восьми чисел в действительности корнем не является — в этом можно убедиться с помощью непосредственной подстановки. Следовательно, уравнение (6) не имеет рациональных корней, так что число $\cos 20^\circ$ иррационально.

К этому же заключению можно было прийти и не проверяя, являются ли корнями уравнения (6) рациональные числа $\pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{4},\ \pm\frac{1}{8}$. Достаточно показать, что $\cos 20^\circ$ отличается от всех этих восьми чисел. Это можно сделать, сравнивая их со значением $\cos 20^\circ$, данным в таблицах тригонометрических функций. (В таблицах указывается, разумеется, лишь приближенное значение тригонометрических функций.) Не прибегая к таблицам, можно заметить, что $\cos 20^\circ$ заключен между $\cos 0^\circ$ и $\cos 30^\circ$, поскольку в пределах от 0° до 30° косинус есть функция убывающая. Следовательно, $\cos 20^\circ$ лежит между 1 и $\sqrt{3}/2$, а значит, и между 1 и 0,8. Тем самым показано, что $\cos 20^\circ$ не равен ни одному из единственно возможных рациональных корней уравнения (6) и поэтому иррационален.

Пример. Доказать, что число $\sin 10^\circ$ иррационально.

Первое решение. Один из способов решения — начать с тригонометрического тождества для $\sin 3\theta$:

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta, \tag{7}$$

которое можно получить из (2) подобно тому, как (5) было получено из (1). Заменяя в (7) θ на 10° и используя равенство $\sin 30^\circ = 1/2$, получаем

$$\frac{1}{2} = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ.$$

Отсюда, обозначив $x = \sin 10^\circ$, приходим к уравнению

$$\frac{1}{2} = 3x - 4x^3,$$

или

$$8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Как и в случае уравнения (6), нетрудно показать (с помощью теоремы 3 гл. IV), что полученное уравнение $8x^3-6x+1=0$ не имеет рациональных корней. Следовательно, число $\sin 10^\circ$ иррационально.

Второе решение. Из соотношения (3) и основного тождества

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

вытекают следующие два соотношения:

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1, \qquad \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta. \tag{8}$$

Заменяя во втором из соотношений (8) θ на 10°, получаем

$$\cos 20^\circ=1-2\sin^2 10^\circ. \tag{9}$$

Предположим теперь, что $\sin 10^\circ$ рационален. Тогда $\sin^2 10^\circ$ и $1-2\sin^2 10^\circ$ тоже рационально. Однако, как показано выше, $\cos 20^\circ$ иррационален. Мы пришли к противоречию; следовательно, число $\sin 10^\circ$ иррационально.

Упражнения

При выполнении нижеследующих упражнений применяйте (в тех случаях, когда это полезно) полученные ранее результаты, как содержащиеся в основном тексте книги, так и составляющие содержание предшествующих упражнений.

1. Доказать, что следующие числа иррациональны:

   а) $\cos 40^\circ$; б) $\sin 20^\circ$; в) $\cos 10^\circ$; г) $\sin 50^\circ$.

2. Доказать, тождество (7).
3. а) Доказать тождество $\cos 5\theta=16\cos^5\theta-20\cos^3\theta+5\cos\theta$;
   б) доказать, что число $\cos 12^\circ$ иррационально.
4. Какие из следующих чисел рациональны:

а) $\sin 0^\circ$;	г) $\sin 30^\circ$;	ж) $\sin 45^\circ$;	к) $\sin 60^\circ$;
б) $\cos 0^\circ$;	д) $\cos 30^\circ$;	з) $\cos 45^\circ$;	л) $\cos 60^\circ$;
в) $\operatorname{tg} 0^\circ$;	е) $\operatorname{tg} 30^\circ$;	и) $\operatorname{tg} 45^\circ$;	м) $\operatorname{tg} 60^\circ$.

§ 2. Одно общее правило

Обобщая методы § 1, можно доказать, что, за исключением нескольких очевидных случаев, все значения тригонометрических функций от углов, представляющих собой целое число градусов, минут и секунд (т. е. углов типа $14^\circ 41' 13''$), иррациональны. Исключения составляют углы 0°, 30°, 45°, 60°, а также все углы, получаемые из этих четырех прибавлением или вычитанием любого целого кратного 90°. При этом слово «исключение» означает, что значение по крайней мере одной тригонометрической функции от указанного угла, например от угла 30°, рационально, а вовсе не то, что все тригонометрические функции этого угла имеют рациональные значения.

Эти утверждения не будут здесь доказаны в полной общности поскольку уравнения, возникающие при рассмотрении таких углов, как 14°41′13″, слишком сложны, чтобы их рассматривать в настоящей книге[1]). Тем не менее имеет место следующий простой принцип, значительно продвигающий нас вперед в вопросе, которым мы интересуемся:

Если угол θ *таков, что число* $\cos 2\theta$ *иррационально, то и числа* $\cos\theta$, $\sin\theta$ *и* $\operatorname{tg}\theta$ *также иррациональны.*

Для доказательства этого утверждения воспользуемся соотношениями (8). Предположим, что число $\cos\theta$ рационально. Тогда числа $\cos^2\theta$ и $2\cos^2\theta - 1$ также рациональны. Но это противоречит предположенной иррациональности $\cos 2\theta$, поскольку $2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$.

Аналогично предположим, что число $\sin\theta$ рационально. Тогда число $\sin^2\theta$, и, следовательно, $1-2\sin^2\theta$, тоже рационально. Но это снова противоречит иррациональности $\cos 2\theta$, поскольку $1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$.

Предположим, наконец, что число $\operatorname{tg}\theta$ рационально. Тогда и число $\operatorname{tg}^2\theta$ рационально, а следовательно, рационально и число $\cos^2\theta$, поскольку $\operatorname{tg}^2\theta$ и $\cos^2\theta$ связаны следующим хорошо известным тождеством:

$$1+\operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}.$$

Таким образом, мы опять приходим к противоречию, так как в силу (8) рациональность $\cos^2\theta$ влечет за собой и рациональность $\cos 2\theta$. Таким образом, $\operatorname{tg}\theta$ иррационален.

Повторным применением только что доказанного принципа можно установить иррациональность бесконечно многих значений тригонометрических функций.

---

[1]) См., впрочем, приложение Г в конце книги. — *Прим. ред.*

Например, из иррациональности числа $\cos 20^\circ$ вытекает иррациональность следующих чисел:

$$\begin{array}{lll}
\cos 10^\circ, & \sin 10^\circ, & \operatorname{tg} 10^\circ, \\
\cos 5^\circ, & \sin 5^\circ, & \operatorname{tg} 5^\circ, \\
\cos 2^\circ 30', & \sin 2^\circ 30', & \operatorname{tg} 2^\circ 30', \\
\cos 1^\circ 15', & \sin 1^\circ 15', & \operatorname{tg} 1^\circ 15', \\
\cos 37' 30'', & \sin 37' 30'', & \operatorname{tg} 37' 30'', \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Упражнения

1. Доказать, что следующие числа иррациональны:

$$\begin{array}{llll}
\text{а)} & \cos 15^\circ, & \sin 15^\circ, & \operatorname{tg} 15^\circ; \\
\text{б)} & \cos 7^\circ 30', & \sin 7^\circ 30', & \operatorname{tg} 7^\circ 30'; \\
\text{в)} & \cos 22^\circ 30', & \sin 22^\circ 30', & \operatorname{tg} 22^\circ 30'; \\
{}^*\text{г)} & \cos 35^\circ, & \sin 35^\circ, & \operatorname{tg} 35^\circ; \\
{}^*\text{д)} & \cos 25^\circ, & \sin 25^\circ, & \operatorname{tg} 25^\circ.
\end{array}$$

2. Доказать, что $14^\circ 41' 13''$ равно некоторому рациональному числу, умноженному на 90°, т. е. что $14^\circ 41' 13''$ есть рациональное кратное числа 90°.
3. а) Пусть число $\cos\theta$ рационально. Доказать, что число $\cos 3\theta$ тоже рационально;
   б) равносильно ли это доказательству того, что если число $\cos 3\theta$ иррационально, то число $\cos\theta$ тоже иррационально?
4. Пусть число $\sin 3\theta$ иррационально. Доказать, что число $\sin\theta$ тоже иррационально.

§ 3. Иррациональные значения десятичных логарифмов

В этой книге будут рассматриваться только десятичные логарифмы, и поэтому не будет необходимости каждый раз указывать, по какому основанию берется логарифм. Напомним, что логарифмом по основанию 10 положительного действительного числа y называется число k, для которого $10^k = y$. Таким образом, для любого $y > 0$ соотношения

$$\log y = k$$

и

$$10^k = y$$

эквивалентны. Все приводимые ниже доказательства основываются на основной теореме арифметики, доказанной в приложении Б. Эта теорема утверждает, что всякое целое число единственным образом разлагается в произведение простых множителей.

Пример 1. Доказать, что число $\log 2$ иррационально.

Решение. Предположим, что, напротив, $\log 2 = a/b$, где a и b — положительные целые числа. Числа a и b можно считать положительными, поскольку число $\log 2$ положительно. Имеем

$$2 = 10^{a/b}.$$

Возводя обе стороны этого равенства в степень b, получаем

$$2^b = 10^a = 2^a 5^a.$$

Последнее равенство связывает два целых положительных числа; поэтому здесь можно применить основную теорему арифметики. Согласно этой теореме, равенство $2^b = 2^a 5^a$ невозможно, так как 2^b есть целое число, ни при каком b не делящееся на 5, в то время как $2^a 5^b$ делится на 5, поскольку b есть целое положительное число. Следовательно, число $\log 2$ иррационально.

Пример 2. Доказать, что число $\log 21$ иррационально.

Решение. Предположим, что, напротив, имеются такие положительные целые числа a и b, для которых

$$\log 21 = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad 21 = 10^{a/b}.$$

Возводя опять обе стороны в степень b, получим

$$21^b = 10^a.$$

Но последнее равенство не может быть верным, поскольку 21^b имеет простые множители 3 и 7, в то время как простыми множителями числа 10^a являются 2 и 5.

Пример 3. Пусть c и d — два различных неотрицательных целых числа. Доказать, что число $\log(2^c5^d)$ иррационально.

Решение. Воспользуемся опять косвенным рассуждением. В силу условий, наложенных на c и d, 2^c5^d больше 1, поэтому $\log(2^c5^d)$ больше 0. Предположим, что

$$\log(2^c5^d) = \frac{a}{b},$$

где a и b — положительные целые числа. Тогда

$$2^c5^d = 10^{a/b}.$$

Возводя обе стороны этого равенства в степень b, получим

$$2^{bc}5^{bd} = 10^a = 2^a5^a.$$

Согласно основной теореме арифметики, это равенство возможно лишь тогда, когда $bc=a$ и $bd=a$, т. е. когда $bc=bd$. Но поскольку числа c и d различны, то различны и числа bc и bd. Следовательно, число $\log(2^c5^d)$ иррационально.

Упражнения

1. Доказать, что число $\log {}^3/_2$ иррационально.
2. Доказать, что число $\log 15$ иррационально.
3. Доказать, что число $\log 5+\log 3$ иррационально.

*4. Доказать, что целые числа 1, 2, 3, ..., 1000 могут быть разбиты на следующие три различных непересекающихся класса:

класс A — целые числа 1, 10, 100, 1000,
класс B — целые числа вида 2^c5^d, где c и d различны,
класс C — целые числа, делящиеся на по крайней мере одно нечетное простое число p, отличное от 5,

и что число $\log n$ рационально тогда и только тогда, когда число n относится к классу A.

§ 4. Трансцендентные числа

Кроме деления действительных чисел на рациональные и иррациональные, имеется другое их деление — на алгебраические и трансцендентные. Если действительное число удовлетворяет некоторому уравнению вида

$$c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+c_{n-2}x^{n-2}+\ldots+c_2x^2+c_1x+c_0=0$$

с целыми коэффициентами, то мы говорим, что это число *алгебраическое*. Действительное число, не удовлетворяющее никакому уравнению такого вида, называется *трансцендентным*. (Комплексные числа делятся на алгебраические и трасцендентные точно таким же образом, однако в дальнейшем нас будут интересовать только действительные числа.)

Легко видеть, что каждое рациональное число является алгебраическим. Например, $^5/_7$ удовлетворяет уравнению требуемого типа $7x-5=0$. Вообще, любое рациональное число a/b удовлетворяет уравнению $bx-a=0$ и потому является алгебраическим.

Так как каждое рациональное число является алгебраическим, то каждое неалгебраическое число нерационально (см. способ *12* из указанной на стр. 40 таблицы «Способов выражения: если *A*, то *B*»), или, в более удобной для нас форме: *каждое трансцендентное число иррационально*. Это деление схематически проиллюстрировано на рис. 15.

- Действительные числа
  - Рациональные (все они являются алгебраическими)
  - Иррациональные
    - Алгебраические, например $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{7}$
    - Трансцендентные, например $2^{\sqrt{2}}$, $\log 2$ и π

- Действительные числа
  - Алгебраические
    - Рациональные
    - Иррациональные
  - Трансцендентные (все они являются иррациональными)

Рис. 15

На этом рисунке числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt[3]{7}$ фигурируют в качестве примеров алгебраических чисел. Они действительно являются алгебраическими, поскольку удовлетворяют соответственно следующим алгебраическим уравнениям:

$$x^2-2=0 \quad \text{и} \quad x^3-7=0.$$

Числа $\log 2$ и π, с другой стороны, указаны как примеры трансцендентных чисел. (Число π, равное 3,14159..., представляет собой отношение длины окружности к длине ее диаметра.) Мы не можем привести здесь доказательства трансцендентности этих чисел, поскольку они основываются на применении методов значительно более глубоких чем те, которыми мы пользуемся. Трансцендентность числа π была установлена в 1882 г., а трансцендентность чисел $2^{\sqrt{2}}$ и $\log 2$ является значительно более поздним результатом — она была доказана лишь в 1934 г. Число $2^{\sqrt{2}}$ было использовано в качестве примера великим математиком Давидом Гильбертом, когда он в 1900 г. огласил знаменитый список двадцати трех проблем, рассматриваемых им как важнейшие нерешенные математические проблемы. В частности, седьмая проблема Гильберта состояла в следующем: выяснить, является ли число α^β алгебраическим или трансцендентным, если известно, что числа α и β алгебраические. (Случаи $\alpha=0$, $\alpha=1$ и рационального β были исключены, так как в этих случаях довольно легко доказать, что число α^β — алгебраическое.) В 1934 г. А. О. Гельфонд и независимо от него Т. Шнейдер установили, что число α^β трансцендентно. Трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$ является, конечно, частным случаем этого общего результата.

Трансцендентность числа $\log 2$ также вытекает из этого результата. В самом деле, обозначим $\log 2$ через β, а 10 — через α. В силу определения десятичного логарифма

$$10^{\log 2}=\alpha^\beta=2.$$

Если бы число β было алгебраическим и иррациональным, то по теореме Гельфонда — Шнейдера число 2 должно было бы быть трансцендентным. Поскольку это не так, то $\beta = \log 2$ либо рационально, либо трансцендентно. Но выше мы показали, что число $\log 2$ иррационально. Следовательно, оно трансцендентно.

Вообще, из теоремы Гельфонда — Шнейдера вытекает, что все числа $\log r$, где r рационально, являются либо трансцендентными, либо рациональными. В силу сказанного в § 3 (см. также упр. 4 на стр. 97) это означает, что число $\log r$ трансцендентно при всех положительных рациональных r, исключая следующие:

$$\ldots,\ 10^{-5},\ 10^{-4},\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\quad 10^{0},\ 10^{1},\ 10^{2},\ 10^{3},\ 10^{4},\ 10^{5},\ \ldots.$$

Не следует забывать, что все рассматриваемые в настоящей книге логарифмы являются десятичными, т. е. берутся по основанию 10.

Таким образом, *все числа* $\log n$, *где* n — *любое целое число между* 1 *и* 1000, *исключая* $n=1$, $n=10$, $n=100$ *и* $n=1000$, *трансцендентны*. С другой стороны, *значения тригонометрических функций*, например число $\cos 20°$, иррациональность которых была доказана в начале этой главы, *являются алгебраическими*. Относящийся сюда общий результат формулируется так: для любого рационального числа r числа

$$\sin(90r)^\circ,\ \cos(90r)^\circ \text{ и } \operatorname{tg}(90r)^\circ$$

являются алгебраическими. Здесь $(90r)^\circ$ обозначает угол, получаемый при умножении $90°$ на r. Единственная оговорка, которую нужно при этом сделать, состоит в следующем: в случае $\operatorname{tg}(90r)^\circ$ число r должно быть таким, чтобы число $\operatorname{tg}(90r)^\circ$ существовало. Например, значение $r=1$ исключается, поскольку действительного числа $\operatorname{tg} 90°$ не существует.

Выше уже говорилось, что число π трансцендентно. Будучи трансцендентным, π также иррационально. Иррациональность числа π доказать проще, чем трансцендентность, однако даже и это доказательство выходит за рамки настоящей книги [1]).

Упражнения

1. Доказать, что следующие числа являются алгебраическими:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; г) $\cos 20°$; д) $\sin 10°$.

*2. Исходя из трансцендентности π, доказать, что число 2π трансцендентно.

§ 5. Три знаменитые задачи на построение

Теория алгебраических и трансцендентных чисел позволила математикам решить три знаменитые геометрические задачи, остававшиеся нерешенными со времен античности. Мы имеем в виду задачу об «удвоении куба», задачу о «трисекции угла» и задачу о «квадратуре круга». Эти задачи относятся к построениям с помощью циркуля и линейки и состоят в следующем:

1) «Удвоение куба». Требуется построить куб, имеющий вдвое больший объем по сравнению с данным кубом. Хотя куб и пространственная фигура, задача, по существу, является планиметрической. В самом деле, если в качестве единицы длины взять ребро данного куба (рис. 16), то задача будет состоять в построении отрезка длины $\sqrt[3]{2}$, поскольку именно такой будет длина ребра куба, имеющего вдвое больший объем по сравнению с данным.

2) «Трисекция угла». Найти способ, посредством которого, используя лишь циркуль и линейку, можно **любой** угол разделить на три равные части. Имеются некоторые углы, например 90° или 45°, которые можно с помощью циркуля и линейки разделить на три равные части, однако так называемый «общий» угол с помощью этих инструментов разделить на три равные части нельзя.

---

[1]) См., например, § 17 статьи [6], указанной в списке литературы на стр. 195. — *Прим. ред.*

3) «Квадратура круга». Построить квадрат, по площади равный данному кругу, или, что равносильно, построить круг, равный по площади данному квадрату.

Известно, что эти три построения неосуществимы, т. е. они не могут быть выполнены с помощью лишь циркуля и линейки. Многие любители продолжают решать эти задачи не зная, что их усилия пропадают впустую. Хотя такие любители и отдают себе отчет

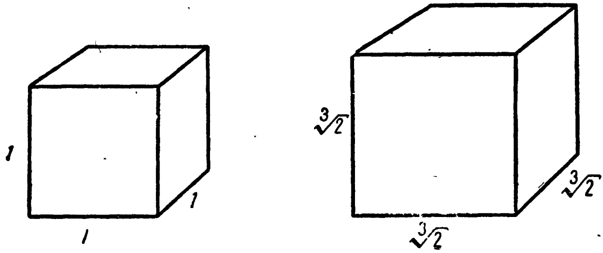


Рис. 16.

в том, что ни один математик не смог еще осуществить этих построений, они, по-видимому, неосведомлены о строго доказанной **невозможности** таких построений. Время от времени математики-любители находят **приблизительное** решение какой-нибудь из этих задач, но никогда, конечно, не находят их точных решений. Ясно, в чем заключается здесь различие: задача об удвоении куба, например, состоит в построении с помощью теоретически совершенных чертежных инструментов отрезка, который имел бы длину не приблизительно $\sqrt[3]{2}$, а в точности равную этому числу. Задача не решается построением, к примеру, отрезка длиной $10(8-\sqrt{62})$, несмотря на то, что числа $10(8-\sqrt{62})$ и $\sqrt[3]{2}$ совпадают с точностью до шести десятичных знаков.

В случае задачи о трисекции угла имеется особый источник непонимания. Любой угол *можно* разделить на три равные части, если воспользоваться линейкой с делениями. Таким образом, утверждение о невозможности разделения общего угла на три равные части может быть сделано лишь тогда, когда предполагается, что допустимыми инструментами при построении являются циркуль и линейка без делений.

Так как в отношении этих трех классических задач имеет место большая путаница, мы сейчас бегло объясним, как можно доказать невозможность всех трех построений. Мы не можем дать здесь полных доказательств, поскольку в деталях они довольно специальны. Если читатель желает подробно с ними познакомиться, то он может обратиться к книге Р. Куранта и Г. Роббинса [2] [1]), в которой имеется полный разбор задач о трисекции угла и об удвоении куба (стр. 197—205). Доказательство невозможности квадратуры круга значительно сложнее доказательств невозможности двух других построений.

Как можно доказать невозможность интересующих нас построений? Первым делом нужно в какой-то степени понять, отрезки какой длины могут быть построены с помощью циркуля и линейки, если задан отрезок единичной длины. Не приводя доказательств, мы утверждаем (и каждый знакомый с геометрическими построениями согласится с нами), что среди длин, которые можно построить, находятся все длины, получаемые последовательными извлечениями квадратных корней, примененными к рациональным числам, например.

$$\sqrt{2},\ \sqrt{1+\sqrt{2}},\ \sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}},\ \sqrt{1+\sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}}. \qquad (10)$$

Все получаемые таким образом числа — алгебраические. Четыре числа (10), выписанные в качестве примера, являются соответственно корнями следую-

[1]) Цифры в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы на стр. 194—195. — *Прим. ред.*

щих уравнений:

$$x^2-2=0, \tag{11}$$

$$x^4-2x^2-1=0, \tag{12}$$

$$x^8-20x^6+132x^4-320x^2+94=0, \tag{13}$$

$$x^{16}-8x^{14}+8x^{12}+64x^{10}-98x^8-\\ -184x^6+200x^4+224x^2-113=0. \tag{14}$$

Возьмем одно из уравнений, скажем (13), и проверим, что число

$$x=\sqrt{5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

действительно является его корнем. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, получим

$$x^2=5-3\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Перенося член 5 налево и опять возводя в квадрат, находим

$$x^2-5=-3\sqrt{1+\sqrt{2}},$$

$$x^4-10x^2+25=9+9\sqrt{2},$$

$$x^4-10x^2+16=9\sqrt{2}.$$

Теперь еще одно возведение обеих частей в квадрат приводит к уравнению (13).

Далее, помимо того, что числа (10) являются соответственно корнями уравнений (11)—(14), ни одно из этих чисел не является корнем уравнения с целыми коэффициентами меньшей степени. Возьмем, например, число $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Оно удовлетворяет уравнению (12) степени 4, но не удовлетворяет никакому уравнению степени 3, 2 или 1 с целыми коэффициентами. (Мы не доказываем этого утверждения.) Если алгебраическое число есть корень уравнения степени n с целыми коэффициентами, но не является корнем никакого уравнения меньшей степени с целыми коэффициентами, то оно называется *алгебраическим числом степени n*. Таким образом, числа (10) — алгебраические числа степеней 2, 4, 8 и 16 соответственно.

Вышеизложенное подсказывает следующий основной результат о длинах отрезков, которые могут быть построены при помощи циркуля и линейки:

Теорема о геометрических построениях. *Длина любого отрезка, который может быть построен, исходя из данного отрезка единичной длины, при помощи циркуля и линейки, есть алгебраическое число степени либо* 1, *либо* 2, *либо* 4, *либо* 8, ... *т. е., вообще говоря, степени* 2^n, *где* n — *целое неотрицательное число* [1]).

Мы предлагаем читателю принять этот результат на веру и, базируясь на нем, покажем, что все три знаменитые построения невозможны [2]).

Начнем с задачи об удвоении куба. Как мы видели выше при ее формулировке, она равносильна следующей: исходя из отрезка единичной длины построить отрезок длины $\sqrt[3]{2}$. Но удовлетворяет ли число $\sqrt[3]{2}$ необходимым для этого условиям? Оно удовлетворяет уравнению

$$x^3-2=0, \tag{15}$$

и это наводит на мысль, что $\sqrt[3]{2}$ есть алгебраическое число степени 3. В действительности именно так дело и обстоит, и, чтобы убедиться в этом, нужно лишь показать, что число $\sqrt[3]{2}$ не удовлетворяет никакому уравнению с целыми коэффициентами степени 1 или 2. Доказательство этого хотя и несложно, требует некоторой хитрости, и мы отложим его до следующего параграфа.

---

[1]) Заметим, что из сформулированной теоремы вовсе не следует обратный результат: из того, что x есть алгебраическое число степени 2^n, не следует, что отрезок длины x может быть построен циркулем и линейкой. — *Прим. ред.*

[2]) Обратим внимание читателя на то, что сформулированная теорема влечет (см. стр. 40, *12*) следующее утверждение: длины, представляющие собой алгебраические числа степени m, где m не есть степень 2, не могут быть построены с помощью циркуля и линейки; не могут быть так построены и длины, представляющие собой трансцендентные числа.

Поскольку $\sqrt[3]{2}$ есть алгебраическое число степени 3, то в силу сформулированной выше теоремы о геометрических построениях невозможно построить отрезок длины $\sqrt[3]{2}$, исходя из отрезка единичной длины. Таким образом, *удвоить куб невозможно.*

Рассмотрим теперь задачу о трисекции угла. Чтобы установить невозможность трисекции в общем случае, достаточно показать, что некоторый фиксированный угол не может быть разделен на три одинаковые части циркулем и линейкой. Возьмем угол, равный 60°. Трисекция угла в 60° означает построение угла в 20°. Это сводится к построению, исходя из данного отрезка единичной длины, отрезка, имеющего длину $\cos 20°$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим треугольник с основанием длины 1 и с углами при основании 60° и 90°, т. е. треугольник ABC с основанием $AB=1$ и углами $BAC=60°$ и $ABC=90°$ (рис. 17). На стороне BC возьмем точку D так, чтобы угол BAD был равен 20°. Из элементарной тригонометрии мы знаем, что

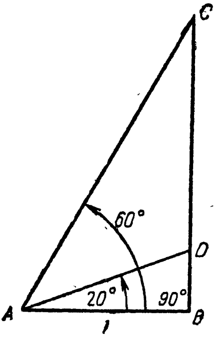


Рис. 17.

$$AD=\frac{AD}{1}=\frac{AD}{AB}=\sec 20°.$$

Таким образом, трисекция угла 60° сводится к построению отрезка длины $\sec 20°$. Но это в свою очередь сводится к построению отрезка длины $\cos 20°$, поскольку $\cos 20°$ и $\sec 20°$ суть обратные друг другу числа, а хорошо известно, что если можно построить отрезок некоторой данной длины, то можно построить и отрезок обратной длины [1]).

---

[1]) Если $b=1/a$ и e — отрезок длины 1, то построение отрезка b по отрезку a сводится к хорошо известной задаче о построении «третьего пропорционального» к двум известным отрезкам: $b=e^2/a$ (или $a:e=e:b$). — *Прим. ред.*

Таким образом, интересующий нас вопрос сводится к следующему: можно ли, исходя из данного отрезка единичной длины, построить отрезок длины $\cos 20°$? Нам известно, что $\cos 20°$ есть корень кубического (т. е. степени 3) уравнения (6). Более того, $\cos 20°$ не удовлетворяет никакому уравнению степени 1 или 2 с целыми коэффициентами (доказательство этого мы опускаем, поскольку оно несколько громоздко). Следовательно, $\cos 20°$, как и $\sqrt[3]{2}$, есть алгебраическое число степени 3, так что, согласно теореме о геометрических построениях, отрезок длины $\cos 20°$ построить невозможно. Таким образом, *трисекция угла в* $60°$ *посредством циркуля и линейки неосуществима.*

Рассмотрим, наконец, задачу о квадратуре круга. Пусть имеется некоторый круг. Мы можем принять его радиус за единицу длины. Тогда площадь его будет равна π квадратных единиц. Квадрат той же площади имеет сторону длины $\sqrt{\pi}$. Стало быть, задача о квадратуре круга сводится к задаче о построении отрезка длины $\sqrt{\pi}$, исходя из данного отрезка единичной длины. Далее, из теории геометрических построений хорошо известно, что если имеются отрезки длины 1 и a, то можно построить отрезок длины a^2 [1]). Следовательно, если бы можно было построить отрезок длины $\sqrt{\pi}$, то можно было бы построить и отрезок длины π.

В предыдущем параграфе было отмечено, однако, что π есть число трансцендентное, т. е. неалгебраическое. Поэтому, согласно теореме о геометрических построениях, отрезок длины π построить невозможно. Таким образом, *«квадратура круга» неосуществима циркулем и линейкой.*

---

[1]) Если отрезок e имеет длину 1, отрезок a — длину α и отрезок b — длину α^2, то $b = a^2/e$, т. е. мы снова приходим к задаче о построении «третьего пропорционального» к двум известным отрезкам. — *Прим. ред.*

Упражнения

(Упражнения 2 и 3 предназначаются для читателей, знакомых с геометрическими построениями.)

1. Доказать, что первое, второе и четвертое из чисел (10) являются соответственно корнями уравнений (11), (12) и (14).
2. Доказать, что если заданы отрезки длины 1 и $\sin 20^\circ$, то с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок длины $\cos 20^\circ$.
3. Доказать, что если заданы отрезки длины 1 и $\operatorname{tg} 20^\circ$, то с помощью циркуля и линейки можно построить отрезок длины $\cos 20^\circ$.

§ 6. Дальнейший анализ числа $\sqrt[3]{2}$

В предыдущем параграфе было сделано утверждение о том, что $\sqrt[3]{2}$ есть алгебраическое число степени 3, т. е. что число $\sqrt[3]{2}$, корень уравнения $x^3-2=0$, не является корнем никакого уравнения степени 1 или 2 с целыми коэффициентами. Докажем теперь это утверждение.

Для доказательства того, что $\sqrt[3]{2}$ не является корнем никакого уравнения степени 1 с целыми коэффициентами, мы должны показать, что не существует отличного от нуля целого числа a и целого числа b, для которых

$$a\sqrt[3]{2}+b=0.$$

Если бы такие числа существовали, то мы имели бы $\sqrt[3]{2}=-b/a$ и, следовательно, число $\sqrt[3]{2}$ было бы рациональным. Однако, как установлено в следствии 2 из § 3 гл. IV, число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.

Труднее доказать, что $\sqrt[3]{2}$ не есть корень никакого квадратного уравнения с целыми коэффициентами, т. е. уравнения вида

$$ax^2+bx+c=0,$$

где a, b, c — целые и a не равно нулю. Предположим, что $\sqrt[3]{2}$ является корнем такого уравнения, и покажем, что это приводит к противоречию. Согласно предположению,

$$a(\sqrt[3]{2})^2+b\sqrt[3]{2}+c=0,$$

или

$$a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}=-c.$$

Возводя обе стороны в квадрат и упрощая, получаем

$$b^2\sqrt[3]{4}+2a^2\sqrt[3]{2}=c^2-4ab.$$

Два последних равенства можно рассматривать как систему двух уравнений первой степени с «неизвестными» $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[3]{2}$. Эта система уравнений либо разрешима, либо нет в зависимости от того, не пропорциональны или пропорциональны пары коэффициентов a, b и b^2, $2a^2$.

В случае разрешимости системы, исключая, например, $\sqrt[3]{4}$, находим

$$\sqrt[3]{2}=\frac{4a^2b-ac^2-b^2c}{b^3-2a^3}.$$

Тем самым получено противоречие, поскольку число $\sqrt[3]{2}$ иррационально.

В случае неразрешимости системы коэффициенты обоих уравнений пропорциональны. Это означает, что

$$\frac{a}{b}=\frac{b^2}{2a^2},\quad 2=\frac{b^3}{a^3}=\left(\frac{b}{a}\right)^3,\quad \sqrt[3]{2}=\frac{b}{a},$$

и мы опять приходим к противоречию. Таким образом доказано, что $\sqrt[3]{2}$ есть алгебраическое число степени 3.

Упражнения

1. Доказать, что $\sqrt{2}$ есть алгебраическое число степени 2.
2. Доказать, что $\sqrt[3]{3}$ есть алгебраическое число степени 3.

§ 7. Краткие выводы

В этой главе с помощью ранее развитых методов было показано, что большинство значений тригонометрических функций и десятичных логарифмов, приближения которых имеются во всех таблицах, иррациональны. Затем мы разделили множество действительных чисел на два новых класса — на класс алгебраических и класс трансцендентных чисел — и выяснили, в каком отношении эти новые классы находятся к введенному ранее делению действительных чисел на рациональные и иррациональные числа. Далее мы познакомились со следующим результатом, не затрагивая, впрочем, вопрос об его доказательстве: если отрезок можно построить с помощью циркуля и линейки, исходя из данного отрезка единичной длины, то длина этого отрезка есть алгебраическое число степени 2^k, где k — некоторое неотрицательное целое число. (Читатель, знакомый с аналитической геометрией, может понять смысл этой теоремы о геометрических построениях, анализируя алгебраический смысл тех шагов, которые можно осуществить с помощью циркуля и линейки. Тремя основными шагами, которые, быть может, используются многократно, здесь являются следующие: нахождение точки пересечения двух уже известных прямых, прямой и окружности, двух окружностей.) Исключив, таким образом, возможность построения отрезка, длина которого есть алгебраическое число степени 3, мы убедились, что посредством циркуля и линейки нельзя удвоить куб или осуществить трисекцию произвольного угла. Мы видели также, что невозможность построения отрезка, длина которого есть трансцендентное число, влечет за собой отрицательный ответ на вопрос о возможности решения задачи о квадратуре круга.

ГЛАВА VI

Приближение иррациональных чисел рациональными

Настоящая глава посвящена вопросу о точности приближения иррационального числа рациональными. Как мы увидим, можно найти рациональные числа, сколь угодно мало отличающиеся, например, от $\sqrt{2}$. Существуют рациональные числа a/b, отличающиеся от $\sqrt{2}$ не более, чем на 10^{-10}, не более, чем на 10^{-20} и, вообще, не более, чем на произвольное заранее нами выбранное число. То же самое верно для любого иррационального числа, а не только для $\sqrt{2}$.

Но чтобы найти рациональное число a/b, отличающееся от данного иррационального числа не более, чем на 10^{-20}, нужно искать дробь a/b с очень большим знаменателем b. Если допустить такое большое значение b, как 10^{20}, то дробь a/b, удовлетворяющую нашему условию, найти нетрудно. А что будет происходить, если потребовать, чтобы b было не больше 10^{15}, или 10^{10}? Ограничение такого рода делает задачу более глубокой и более трудной. Рассматривая вопросы подобного типа, мы будем интересоваться тем, что можно сказать относительно *любого* иррационального числа, а не только относительно некоторых конкретных чисел, например $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$.

При изучении приближений одного числа другими нам будут удобны терминология и обозначения, заимствованные из теории неравенств. С них мы и начнем наше изложение.

§ 1. Неравенства[1])

То обстоятельство, что u больше v, т. е. что $u-v$ положительно, символически записывают следующим образом: $u>v$. Конечно, если u больше v, то v меньше u; последнее обстоятельство символически записывается так: $v<u$. Следовательно, четыре неравенства:

$$u > v, \quad u - v > 0, \quad v < u, \quad v - u < 0,$$

представляют собой просто четыре способа выражения одного и того же основного отношения между u и v. Аналогично $u \geqslant v$ означает, что u больше или равно v, и это равносильно тому, что $u-v$ положительно или равно нулю, но не отрицательно.

Теорема 1.

а) *Если $u>v$ и w — любое число, то $u+w>v+w$.*

б) *Если $u>v$ и w — любое число, то $u-w>v-w$.*

в) *Если $u>v$ и w — любое положительное число, то $uw>vw$.*

г) *Если $u>v$ и w — любое положительное число, то $u/w>v/w$.*

д) *Если $u>v$ и если u и v положительны, то $u^2>v^2$, но $1/u<1/v$.*

е) *Если $u>v$ и $v>w$, то $u>w$.*

ж) *Все утверждения* (а)—(е) *остаются справедливыми, если знаки $>$ и $<$ всюду заменены соответственно на $\geqslant$ и $\leqslant$.*

Доказательство. Примем на веру следующие два правила: *сумма двух положительных чисел положительна, произведение двух положительных чисел положительно.*

а) Нам известно, что $u-v$ положительно, и нужно доказать, что $(u+w)-(v+w)$ тоже положительно. Но это очевидно, поскольку

$$u - v = (u + w) - (v + w).$$

[1]) Более полное изложение теории неравенств содержится в книге: Э. Беккенбах и Р. Беллман, Введение в неравенства, изд во «Мир» (М. 1965), входящей в эту же серию.

б) Нам опять известно, что $u-v$ положительно, и нужно доказать положительность $(u-w)-(v-w)$. Это тоже очевидно, поскольку

$$u-v=(u-w)-(v-w).$$

в) Нам известно, что $u-w$ положительно, и нужно доказать, что $uw-vw$ тоже положительно. Это следует из равенства $uw-vw=w(u-v)$ и положительности произведения двух положительных чисел.

г) Это утверждение, по существу, содержится в в), поскольку если w положительно, то $1/w$ тоже положительно, и поэтому $1/w$ можно использовать как множитель в в) вместо w: если $u>v$, то $u(1/w)>$ $>v(1/w)$.

д) Так как u и v положительны, то и $u+v$ положительно. Разность $u-v$ тоже положительна, поскольку $u>v$. Следовательно, $(u+v)(u-v)$ положительно. Имеем, таким образом,

$$(u+v)(u-v)>0, \quad u^2-v^2>0, \quad u^2>v^2.$$

С другой стороны, поскольку в силу в) обе части неравенства $u>v$ можно домножить на $1/uv$, то получим

$$u\cdot\frac{1}{uv}>v\cdot\frac{1}{uv},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{v}>\frac{1}{u}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{u}<\frac{1}{v}.$$

е) Известно, что $u-v$ и $v-w$ положительны, и нужно доказать, что $u-w$ тоже положительно. Но

$$u-w=(u-v)+(v-w),$$

так что остается лишь еще раз использовать положительность суммы положительных чисел.

ж) Один путь доказательства утверждения ж) — доказать заново соответствующий вариант каждого из утверждений а) — е). Имеется, однако, более легкий путь. Доказательства утверждений а) — е) основывались на следующих двух правилах: сумма двух положительных чисел положительна, произведение двух положительных чисел положительно. С другой стороны, в то время как $u>v$ означает, что $u-v$ положительно, $u \geqslant v$ означает, что $u-v$ положительно или равно нулю, или, иными словами, что $u-v$ неотрицательно. Но сумма и произведение двух неотрицательных чисел неотрицательны. Из сказанного следует, что все доказательства п. а) — е) автоматически переносятся со случая $>$ на случай $\geqslant$.

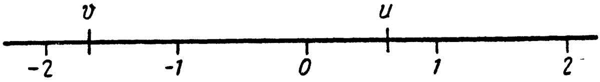


Рис. 18. Иллюстрация неравенства $v < u$.

Если числа u и v связываются с точками действительной прямой так, как это объяснялось в гл. III, то неравенство $v<u$ означает, что v находится левее u или что u расположено справа от v (рис. 18). Запись $w<v<u$ понимается как совокупность двух нера-

Рис. 19. Иллюстрация неравенств $w < v < u$.

венств: $w<v$ и $v<u$, так что v лежит между w и u (рис. 19). Однако нам еще следует пояснить использование термина «между».

Если пишут $w<v<u$, то имеют в виду, что v находится «строго между» u и w, т. е. что v не совпадает ни с w ни с u. Но если говорят просто «между» или пишут $w \leqslant v \leqslant u$, то при этом допускаются случаи равенства v как w, так и u. В некоторых случаях нам также оказывается удобным допустить лишь одну из этих возможностей, при этом мы пишем $w<v \leqslant u$ или $w \leqslant v<u$. Во всех случаях символическая запись точно выражает, что имеется в виду.

Упражнения

1. Доказать, что если $u^2>v^2$ и u и v положительны, то $u>v$.
2. Доказать, что если $r>s$, то $-r<-s$.

3. Доказать, что член из одной части неравенства можно переносить в другую часть, изменив его знак на противоположный. В частности, показать, что если

$$a+b-c>d+e-f, \quad \text{то} \quad a-e+f>d-b+c.$$

4. Для положительных целых чисел n и k выполняется неравенство $n \leqslant k$. Доказать, что

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{k} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n^2} \geqslant \frac{1}{nk}.$$

5. Определить верны или ложны следующие утверждения:
   а) если $r>s$, то $r^2>s^2$;
   б) если $r>s$ и c — любое число, то $cr>cs$;
   в) если $-1/2<\lambda<1/2$, то $-1<\lambda<1$ [1]);
   г) если $-1/2<\lambda<1/2$, то $-3/2<\lambda<3/2$;
   д) если $0<\lambda<1/2$, то $-1/2<\lambda<1/2$;
   е) если $-1/2<\lambda<1/2$, то $-1/3<\lambda<1/3$;
   ж) если $-1/(2n)<\lambda<1/(2n)$, то $-1/n<\lambda<1/n$.
6. Некоторое иррациональное число λ лежит строго между -10 и 10. Записать это с помощью математических символов.
7. Доказать, что если w отрицательно и $u>v$, то $uw<vw$.
8. а) Пусть u и v — любые два различных числа, взятые из совокупности чисел 1, 2, 3, ..., 10. Доказать, что $-9 \leqslant u-v \leqslant 9$.
   б) Если в а) не требовать, чтобы целые числа u и v были различными, то будут ли по-прежнему справедливы неравенства $-9 \leqslant u-v \leqslant 9$?

§ 2. Приближение целыми числами

При округлении рационального числа посредством замены его на ближайшее целое число совершаемая ошибка не превосходит 1/2. Например, когда 6,3 заменяется на 6, или 9,7 заменяется на 10, или 7,5 заменяется на 7 либо на 8, ошибка каждый раз не превосходит 1/2. Если же иррациональное число заменяется ближайшим целым числом, то сделанная ошибка меньше 1/2. С этого простейшего обстоятельства мы и начнем изложение теории приближений.

Теорема 2. *Каждому иррациональному числу α соответствует единственное целое число m, такое, что*

$$-\frac{1}{2}<\alpha-m<\frac{1}{2}.$$

[1]) λ — это греческая буква; она называется «ламбда».

Доказательство. Возьмем в качестве m ближайшее к α целое число; например, если $\alpha=\sqrt{3}=1{,}73\ldots$, то мы принимаем $m=2$, а если $\alpha=2\sqrt{3}=3{,}46\ldots$, то берем $m=3$. Как видно из этих примеров, m может быть как первым из целых чисел, больших α, так и последним из целых чисел, меньших α, в зависимости от того, к какому из этих двух чисел α ближе. (Ясно, что к одному из них α ближе, чем к другому, поскольку в противном случае α лежало бы точно посередине между двумя последовательными целыми числами, между n и $n+1$, и было бы, следовательно, равно рациональному числу $n+1/2$ в противоречие с

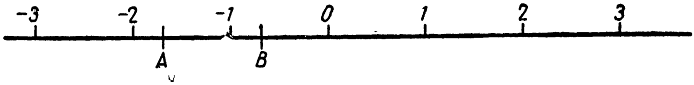


Рис. 20.

нашим предположением.) То же самое можно иначе выразить следующим образом. Каждый отрезок AB длины единица, выбранный на действительной прямой (см. рис. 20), содержит в точности одно целое число, за исключением того случая, когда точки A и B целые. Возьмем в качестве A точку, отвечающую числу $\alpha-1/2$, а в качестве B точку, отвечающую числу $\alpha+1/2$. Но числа $\alpha-1/2$ и $\alpha+1/2$ не целые (они даже не рациональные; см. теорему 1 гл. IV); поэтому мы можем быть уверены, что точки A и B не целые. Обозначая через m единственное целое число, принадлежащее отрезку AB, мы видим, что m лежит строго между $\alpha-1/2$ и $\alpha+1/2$. Таким образом,

$$\alpha-\frac{1}{2}<m<\alpha+\frac{1}{2},$$

откуда, вычитая α, получаем

$$-\frac{1}{2}<m-\alpha<\frac{1}{2}.$$

Но если число $m-\alpha$ лежит между $-1/2$ и $1/2$, то то же самое верно и для числа, получаемого из него заменой знака на противоположный, так что $\alpha-m$ тоже лежит между —1/2 и 1/2. Тем самым неравенства теоремы 2 доказаны.

Целое число m единственно. В самом деле, предположим, что существует другое целое число n, для которого

$$-\frac{1}{2} < \alpha - n < \frac{1}{2}.$$

Тогда также

$$-\frac{1}{2} < n - \alpha < \frac{1}{2}.$$

Добавляя к каждому из составляющих это неравенство чисел по α, видим, что n должно удовлетворять неравенствам

$$\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Но отрезок AB содержит лишь одно целое число, и поэтому число n обязано совпадать с m.

Упражнения

(При выполнении этих и последующих упражнений полезно знать, что $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$; $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$; $\pi = 3{,}14159\ldots$).

1. Для следующих чисел найти ближайшие к ним целые числа:

а) $\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{2}$; г) $4\sqrt{2}$; д) $3\sqrt{3}$;

е) $4\sqrt{3}$; ж) π; з) 10π; и) $-\sqrt{3}$; к) -7π.

2. Доказать, что для любого иррационального числа α существует единственное целое число q, такое, что $0 < \alpha - q < 1$.

§ 3. Приближение рациональными числами

Один из способов приближения иррационального числа, скажем числа $\sqrt{2}$, состоит в том, чтобы использовать его десятичное представление:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots.$$

Числа 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; ... образуют последовательность, члены которой все теснее и теснее приближаются к $\sqrt{2}$. Все эти приближения являются рациональными числами, так что мы имеем бесконечную последовательность рациональных приближений к $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{14}{10},\quad \frac{141}{100},\quad \frac{1414}{1000},\quad \frac{14\,142}{10\,000},\quad \frac{141\,421}{100\,000},\ \ldots \tag{1}$$

Числа последовательности (1) по мере продвижения по ней вправо становятся все ближе и ближе к $\sqrt{2}$. Более того, имеют место неравенства

$$\frac{1}{1} < \sqrt{2} < \frac{2}{1},$$
$$\frac{14}{10} < \sqrt{2} < \frac{15}{10},$$
$$\frac{141}{100} < \sqrt{2} < \frac{142}{100},$$
$$\frac{1414}{1000} < \sqrt{2} < \frac{1415}{1000},$$
$$\frac{14\,142}{10\,000} < \sqrt{2} < \frac{14\,143}{10\,000},$$
$$\frac{141\,421}{100\,000} < \sqrt{2} < \frac{141\,422}{100\,000} \quad \text{и т. д.}$$

Из этих неравенств видно, что бесконечно много членов последовательности (1) лежит так близко к $\sqrt{2}$, как мы потребуем. Пусть, например, мы желаем убедиться, что имеется бесконечно много рациональных чисел, отличающихся от $\sqrt{2}$ меньше, чем на 0,0001. Для этого достаточно заметить, что требуемому условию удовлетворяют все числа последовательности (1), начиная с пятого.

Однако все рациональные числа (1) обладают той особенностью, что их знаменатели суть степени 10. В общем случае, когда на знаменатели не накладывается никаких ограничений, могут найтись лучшие приближения $\sqrt{2}$ рациональными числами.

То, что мы хотим сказать, хорошо видно на примере иррационального числа π. Так как π имеет значение 3,14159..., то аналогичная (1) последовательность для π имеет вид

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{31}{10}, \quad \frac{314}{100}, \quad \frac{3141}{1000}, \quad \frac{31\,415}{10\,000}, \quad \frac{314\,159}{100\,000}, \ldots . \tag{2}$$

Известно, однако, что число 22/7 лучше приближает π, чем 31/10. В действительности 22/7 ближе к π, даже чем 314/100, хотя и не ближе, чем последующие члены последовательности (2).

Для того чтобы избавиться от зависимости от знаменателей 10, 10^2, 10^3 и т. д., покажем сначала, что каждое иррациональное число можно приблизить рациональным числом, имеющим любой заданный знаменатель.

Теорема 3. *Пусть λ — любое иррациональное число и n — любое положительное целое число. Тогда существует такое рациональное число m/n с знаменателем n, что*

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Доказательство этой теоремы мы сначала проиллюстрируем на примере. Предположим, что λ равно $\sqrt{2}$ и n равно 23. Рассмотрим иррациональное число $23\sqrt{2}$. Пользуясь тем, что $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$, находим следующее приближенное значение числа $23\sqrt{2}$:

$$23\sqrt{2} = 32{,}52\ldots .$$

Следовательно, ближайшее целое к $23\sqrt{2}$ есть 33. Это и есть m теоремы 2, которая для $\alpha = 23\sqrt{2}$ утверждает, что

$$-\frac{1}{2} < 23\sqrt{2} - 33 < \frac{1}{2}.$$

Но 33 представляет собой также m теоремы 3, поскольку, поделив полученные неравенства на 23 (что возможно в силу теоремы 1), мы получаем

$$-\frac{1}{46} < \sqrt{2} - \frac{33}{23} < \frac{1}{46}.$$

Доказательство. Заметим сначала, что число $n\lambda$, согласно теореме 1 гл. IV, иррационально. Определим теперь m как ближайшее к $n\lambda$ целое число. По теореме 2

$$-\frac{1}{2} < n\lambda - m < \frac{1}{2}.$$

Поделив эти неравенства на положительное целое число n (что возможно в силу теоремы 1), находим

$$-\frac{1}{2n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Таким образом, теорема 3 доказана.

Пример. Найти рациональные числа m/n, о которых говорится в теореме 3, для $\lambda = \sqrt{2}$ и $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

Решение. Простое вычисление показывает, что ближайшими к числам

$$\sqrt{2},\quad 2\sqrt{2},\quad 3\sqrt{2},\quad 4\sqrt{2},\quad 5\sqrt{2},\quad 6\sqrt{2},\quad 7\sqrt{2},\quad 8\sqrt{2},\quad 9\sqrt{2},\quad 10\sqrt{2}$$

целыми числами являются 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 14. Следовательно, искомые рациональные числа — это

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{6},\ \frac{10}{7},\ \frac{11}{8},\ \frac{13}{9},\ \frac{14}{10}.$$

Ошибка каждого из этих приближений меньше чем $1/2n$, где n — целое число, стоящее в знаменателе.

Из приведенного примера видно, что дробь m/n в теореме 3 не обязательно несократима.

Упражнения

1. Найти рациональные числа m/n, о которых говорится в теореме 3, для случаев, когда $\lambda = \sqrt{3}$ и $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
2. Найти рациональные числа m/n, о которых говорится в теореме 3, для случаев, когда $\lambda = \pi = 3{,}14159\ldots$ и $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.
3. Доказать, что для любых заданных иррационального числа λ и положительного целого числа n существует такое целое число m, что

$$-\frac{1}{n} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n}.$$

*4. Доказать, что для любых фиксированных иррационального числа λ и положительного целого числа n имеется только одно целое число m, удовлетворяющее неравенствам теоремы 3.

*5. Доказать, что теорема 3 была бы неверной, если в ней дробь m/n считалась бы несократимой, т. е. если в ее формулировке вместо «Тогда существует такое рациональное число m/n с знаменателем n» стояло бы «Тогда существует такая несократимая рациональная дробь m/n с знаменателем n ...».

§ 4. Лучшие приближения

Теорема 3 утверждает, что любое иррациональное число λ можно приблизить рациональным числом m/n «с точностью до $1/2n$», т. е. с ошибкой меньшей, чем $1/2n$. Можно ли найти аналогичное приближение с точностью до $1/3n$, или с точностью до $1/4n$ или, возможно, еще лучшее? Ответ на этот вопрос положителен. В следующей теореме будет показано, что λ можно приблизить посредством рационального числа m/n с точностью до $1/nk$, каково бы ни было k: $k=3$, $k=4$, $k=1000$ и т. д. Однако в то время как в теореме 3 приближение с точностью до $1/2n$ можно было получить для любого целого положительного n, приближение с точностью до $1/kn$ с заданным k в теореме 4 возможно не для всех n.

Можно ли приблизить любое иррациональное число λ рациональным числом m/n с точностью до $1/n^2$, или с точностью до $1/n^3$ или, возможно, еще лучше? С точностью до $1/n^2$ — можно, с точностью до $1/n^3$ — нельзя. Но этим вопросам посвящены дальнейшие параграфы. А сейчас мы займемся приближениями числа λ посредством дроби m/n с точностью до $1/kn$.

Теорема 4. *Каковы бы ни были иррациональное число λ и положительное целое число k, существует рациональное число m/n с знаменателем n, не превосходящим k, такое, что*

$$-\frac{1}{nk}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{nk}.$$

Прежде чем доказывать эту теорему в общем случае, проиллюстрируем ее на одном частном примере, а именно когда $\lambda=\sqrt{3}$ и $k=8$. Вычислим сначала все кратные λ от $1\cdot\lambda$ до $k\cdot\lambda$ включительно. Мы выпишем эти кратные $\sqrt{3}$, представляя каждое из них в виде суммы двух положительных чисел — целого числа и числа, меньшего, чем 1 [1]):

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}&=1+0{,}732\ldots, & \sqrt{3}-1&=0{,}732\ldots,\\
2\sqrt{3}&=3+0{,}464\ldots, & 2\sqrt{3}-3&=0{,}464\ldots,\\
3\sqrt{3}&=5+0{,}196\ldots, & 3\sqrt{3}-5&=0{,}196\ldots,\\
4\sqrt{3}&=6+0{,}928\ldots, & 4\sqrt{3}-6&=0{,}928\ldots,\\
5\sqrt{3}&=8+0{,}660\ldots, & 5\sqrt{3}-8&=0{,}660\ldots,\\
6\sqrt{3}&=10+0{,}392\ldots, & 6\sqrt{3}-10&=0{,}392\ldots,\\
7\sqrt{3}&=12+0{,}124\ldots, & 7\sqrt{3}-12&=0{,}124\ldots,\\
8\sqrt{3}&=13+0{,}856\ldots, & 8\sqrt{3}-13&=0{,}856\ldots.
\end{aligned}$$

В приведенной таблице равенства, стоящие в правом столбце, получены из соответствующих равенств в левом столбце вычитанием целой части.

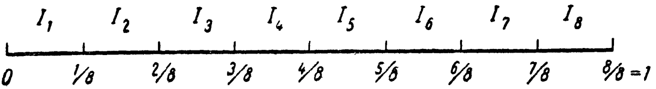


Рис. 21.

Далее разделим единичный интервал на восемь частей: $I_1, I_2, \ldots, I_8$, как показано на рис. 21. При этом интервал I_1 состоит из чисел, лежащих между 0 и 1/8, I_2 — из чисел между 1/8 и 2/8, I_3 — из чисел ме-

---

[1]) Наибольшее целое число, не превышающее данное число α («целая часть» α), иногда обозначают через $[\alpha]$, а разность $\alpha-[\alpha]$ («дробная доля» α) — через $\{\alpha\}$. Таким образом, в правой части для каждого числа x от $1\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}$ до $k\cdot\sqrt{3}=8\sqrt{3}$ записано разложение

$$\alpha=[\alpha]+\{\alpha\};$$

в правом столбце выписано число $\{\alpha\}$. — *Прим. ред.*

жду 2/8 и 3/8 и т. д.[1]). Распределим теперь дробные доли восьми рассматриваемых кратных $\sqrt{3}$ по интервалам $I_1, I_2, \ldots, I_8$. При этом

0,732... принадлежит I_6 (поскольку 0,732 ... находится между 5/8 и 6/8)

0,464... принадлежит I_4,

0,196... принадлежит I_2,

0,928... принадлежит I_8,

0,660... принадлежит I_6,

0,392... принадлежит I_4,

0,124... принадлежит I_1,

0,856... принадлежит I_7.

Воспользуемся тем числом из этой таблицы, которое принадлежит I_1:

0,124... принадлежит I_1, т. е.

$7\sqrt{3}-12$ принадлежит I_1.

Поскольку числа, принадлежащие I_1, заключены между 0 и 1/8, то

$$0<7\sqrt{3}-12<\frac{1}{8}.$$

Далее, так как число $7\sqrt{3}-12$ заключено между 0 и 1/8, то оно, конечно, заключено также между —1/8 и 1/8, т. е.

$$-\frac{1}{8}<7\sqrt{3}-12<\frac{1}{8}.$$

---

[1]) Так как нам желательно получить строгие неравенства, то «между» удобно понимать как «строго между». Таким образом, интервал I_j состоит из всех точек u, для которых

$$(j-1)/8<u<j/8.$$

(Заметим, что ни одно из рассматриваемых кратных $\sqrt{3}$ не может совпасть с границей одного из интервалов $I_1, \ldots, I_8$, поскольку эти кратные — числа иррациональные, а границы $0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$, 1 интервалов рациональны. — *Прим. ред.*)

Деля эти неравенства на 7, находим

$$-\frac{1}{7\cdot 8}<\sqrt{3}-\frac{12}{7}<\frac{1}{7\cdot 8}.$$

Тем самым мы получили результат того вида, о котором идет речь в теореме 4, с $\lambda=\sqrt{3}$, $k=8$, $n=7$ и $m=12$.

Проведенные рассуждения основывались на том, что число $7\sqrt{3}-12$ принадлежит I_1. А что же делать, если в интервал I_1 не попадает ни одно число? Заметим, что в этом случае один из интервалов $I_2, I_3, \ldots, I_8$ должен содержать два или больше чисел. В нашем примере не только существует число в интервале I_1, но также в двух интервалах — в I_4 и в I_6 — имеется по два числа. Рассмотрим пару чисел из интервала I_6:

0,732... принадлежит I_6, т. е.

$\sqrt{3}-1$ принадлежит I_6

и

0,660... принадлежит I_6, т. е.

$5\sqrt{3}-8$ принадлежит I_6.

Ясно, что если два числа принадлежат I_6 (или любому другому из этих интервалов), то они отличаются друг от друга меньше чем на 1/8, и поэтому их разность лежит между $-1/8$ и $+1/8$. В частности, для двух рассматриваемых чисел из интервала I_6 имеем

$$-\frac{1}{8}<(5\sqrt{3}-8)-(\sqrt{3}-1)<\frac{1}{8},$$

$$-\frac{1}{8}<4\sqrt{3}-7<\frac{1}{8}.$$

Поделив эти неравенства на 4, находим

$$-\frac{1}{4\cdot 8}<\sqrt{3}-\frac{7}{4}<\frac{1}{4\cdot 8}.$$

Полученные неравенства тоже представляют собой результат того вида, о котором идет речь в теореме 4, где $\lambda=\sqrt{3}$ и $k=8$, но теперь $n=4$, $m=7$.

Доказательство теоремы 4. Только что разобранный пример может служить моделью для доказательства теоремы 4 в общем случае. Пусть заданы иррациональное число λ и положительное целое число k. Образуем k чисел $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda, \ldots, k\lambda$ и запишем каждое из них в виде суммы целой части и дробной доли:

$$\begin{array}{ll}
\lambda = a_1 + \beta_1, & \lambda - a_1 = \beta_1, \\
2\lambda = a_2 + \beta_2, & 2\lambda - a_2 = \beta_2, \\
3\lambda = a_3 + \beta_3, & 3\lambda - a_3 = \beta_3, \\
4\lambda = a_4 + \beta_4, & 4\lambda - a_4 = \beta_4, \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
k\lambda = a_k + \beta_k, & k\lambda - a_k = \beta_k.
\end{array}$$

Буквы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ обозначают целые числа, а буквы $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — числа, заключающиеся между 0 и 1. Далее разобьем единичный интервал на k частей, $I_1, I_2, \ldots, I_k$, длины $1/k$ каждая (рис. 22). При этом интервал I_1 состоит из чисел, заключенных между 0 и $1/k$, I_2 — из чисел, заключенных между $1/k$ и $2/k$, I_3 — из чисел, заключенных между $2/k$ и $3/k$ и т. д.

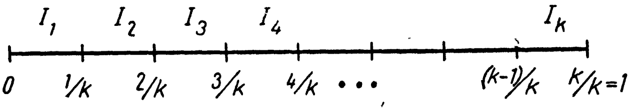


Рис. 22.

Слово «между» понимается здесь в строгом смысле, так что, например, числа $2/k$ и $3/k$ сами не принадлежат интервалу I_3. Заметим, что, согласно теореме 1 гл. IV, каждое из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ иррационально. Следовательно, ни одно из чисел β не может быть равным ни одному из рациональных чисел

$$0, \ \frac{1}{k}, \ \frac{2}{k}, \ \frac{3}{k}, \ldots, \frac{k-1}{k}, \ \frac{k}{k},$$

и поэтому каждое β принадлежит в точности одному из интервалов $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_k$.

Имеются следующие две возможности: либо интервал I_1 содержит одно или более из чисел β, либо он не содержит ни одного из этих чисел. Каждую из возможностей мы рассмотрим в отдельности.

Случай 1. Интервал I_1 содержит одно или более из чисел β. Пусть β_n принадлежит I_1. Символ n обозначает одно из чисел 1, 2, 3, ..., k. Число β_n равно $n\lambda - a_n$, так что

$$0 < n\lambda - a_n < \frac{1}{k},$$

поскольку I_1 есть интервал, ограниченный числами 0 и $1/k$. Отсюда имеем

$$-\frac{1}{k} < n\lambda - a_n < \frac{1}{k};$$

после деления на n получаем

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{a_n}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Таким образом, в этом случае теорема 4 доказана, так как в качестве m можно взять число a_n.

Случай 2. Интервал I_1 не содержит ни одного из чисел β. В этом случае k чисел распределены по $k-1$ интервалам:

$$I_2, I_3, \ldots, I_k.$$

Применим теперь так называемый принцип ящиков Дирихле. Согласно этому принципу, если в $k-1$ ящиках сидят k кроликов, то по крайней мере в одном ящике находится два или более кроликов. Таким образом, по крайней мере один интервал содержит два или более чисел β. Пусть в одном и том же интервале находятся числа β_r и β_j, где r и j — два различных числа из совокупности 1, 2, 3, ..., k. Предположив, что j больше r, получим, что $j-r$ есть положительное число, меньшее k.

Так как числа β_r и β_j лежат внутри одного и того же интервала длины $1/k$, то их разность заключена между $-1/k$ и $1/k$:

$$-\frac{1}{k} < \beta_j - \beta_r < \frac{1}{k}.$$

Но $\beta_j=j\lambda-a_j$, $\beta_r=r\lambda-a_r$, и поэтому

$$-\frac{1}{k}<(j\lambda-a_j)-(r\lambda-a_r)<\frac{1}{k},$$

или

$$-\frac{1}{k}<(j-r)\lambda-(a_j-a_r)<\frac{1}{k}.$$

Обозначим $j-r$ через n и a_j-a_r через m. Тогда

$$-\frac{1}{k}<n\lambda-m<\frac{1}{k}.$$

Поскольку число n, в силу его определения, положительно, то, согласно теореме 1 г), предыдущие неравенства можно поделить на n и получить

$$-\frac{1}{kn}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{kn}.$$

Так как, кроме того, число $n=j-r$ меньше k, то теорема 4 полностью доказана.

Отметим, что рациональная дробь m/n не обязательно несократима. Если числа $j-r$ и a_j-a_r не имеют общих множителей, то она несократима, в противном случае — сократима.

Упражнения

1. Сразу после формулировки теоремы 4 разбирается ее частный случай, когда $\lambda=\sqrt{3}$ и $k=8$. Какие значения m и n получились бы, если бы мы выбрали пару чисел 0,464 ... и 0,392 ... из I_4 вместо рассмотренной пары чисел, принадлежащей интервалу I_6?
2. Применить метод, использованный для доказательства теоремы 4, к каждому из следующих случаев и получить в результате числа m и n, удовлетворяющие неравенствам этой теоремы:

а) $\lambda=\sqrt{3}$, $k=2$;	з) $\lambda=\sqrt{2}$, $k=8$;
б) $\lambda=\sqrt{3}$, $k=4$;	и) $\lambda=\sqrt{2}$, $k=10$;
в) $\lambda=\sqrt{3}$, $k=6$;	к) $\lambda=\sqrt{2}$, $k=14$;
г) $\lambda=\sqrt{3}$, $k=10$;	л) $\lambda=\pi$, $k=2$;
д) $\lambda=\sqrt{2}$, $k=2$;	м) $\lambda=\pi$, $k=4$;
е) $\lambda=\sqrt{2}$, $k=4$;	н) $\lambda=\pi$, $k=6$;
ж) $\lambda=\sqrt{2}$, $k=6$;	о) $\lambda=\pi$, $k=8$.

§ 5. Приближения с точностью до $1/n^2$

В начале § 4 было указано общее направление наших исследований. Мы хотим найти по возможности лучшие приближения произвольного иррационального числа λ. От приближения λ посредством дроби m/n с точностью до $1/2n$ для любого n (теорема 3) мы перешли к приближению с точностью до $1/kn$ для некоторого $n \leqslant k$ (теорема 4). Теперь будет получено приближение с точностью до $1/n^2$.

Теорема 5. *Для любого иррационального числа λ существует бесконечно много несократимых рациональных дробей m/n, таких, что*

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Доказательство. Отметим сначала, что любое рациональное число m/n, удовлетворяющее неравенствам теоремы 4, автоматически удовлетворяет также неравенствам теоремы 5. В самом деле, так как n не превосходит k, т. е. $k \geqslant n$, то, согласно пунктам г), д) и ж) теоремы 1, $1/k \leqslant 1/n$ и $1/kn \leqslant 1/n^2$. Следовательно, любое число, заключенное между $-1/kn$ и $1/kn$, заключено также между $-1/n^2$ и $1/n^2$.

Покажем далее, что если какая-нибудь сократимая дробь удовлетворяет неравенствам теоремы 5, то несократимая дробь, представляющая то же самое рациональное число, также должна удовлетворять соответствующим неравенствам. Пусть M/N есть представление числа m/n в виде несократимой дроби. Не будет ограничением предположить, что оба числа n и N положительны, так как знак «минус» всегда может быть отнесен к числителю. Таким образом,

$$\frac{m}{n} = \frac{M}{N}, \quad 0 < N < n,$$

поскольку сведение сократимой дроби к несократимой, не меняя значения самой дроби, меняет величину ее знаменателя. Из теоремы 1 вытекает, что

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} \quad \text{и} \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N^2};$$

поэтому, если число λ удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2},$$

оно автоматически удовлетворяет также неравенствам

$$-\frac{1}{N^2} < \lambda - \frac{M}{N} < \frac{1}{N^2}.$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 5, осталось лишь показать, что имеется бесконечно много несократимых рациональных дробей m/n, удовлетворяющих требуемым неравенствам. Предположим, что, напротив, имеется только конечное число таких дробей, скажем

$$\frac{m_1}{n_1}, \quad \frac{m_2}{n_2}, \quad \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \frac{m_i}{n_i},$$

и рассмотрим следующие i чисел:

$$\lambda - \frac{m_1}{n_1}, \quad \lambda - \frac{m_2}{n_2}, \quad \lambda - \frac{m_3}{n_3}, \ldots, \lambda - \frac{m_i}{n_i}.$$

Как следует из теоремы 1 гл. IV, все эти числа иррациональны, и поэтому ни одно из них не равно нулю. Некоторые среди них могут быть положительными, другие — отрицательными. Возьмем целое число k настолько большим, чтобы $1/k$ лежало между 0 и всеми положительными, а $-1/k$ — между 0 и всеми отрицательными этими числами. Так выбрать число k всегда можно, поскольку чем больше будет k, тем ближе к нулю лежат $1/k$ и $-1/k$. Число k выбрано, таким образом, настолько большим, что ни одно из следующих неравенств не является верным [1]):

$$\begin{gathered} -\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m_1}{n_1} < \frac{1}{k}, \\ -\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m_2}{n_2} < \frac{1}{k}, \\ \cdots \\ -\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m_i}{n_i} < \frac{1}{k}. \end{gathered} \tag{3}$$

[1]) То есть в каждой строке одно из неравенств неверно. — *Прим. перев.*

Применяя теорему 4 для этого значения k, получаем, что существует рациональное число m/n, для которого

$$-\frac{1}{kn} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{kn}.$$

Число $\lambda - m/n$, будучи заключенным между $-1/kn$ и $1/kn$, заключено также между $-1/k$ и $1/k$, т. е.

$$-\frac{1}{k} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{k}.$$

Отсюда следует, что число m/n отлично от всех i чисел m_1/n_1, m_2/n_2, ..., m_i/n_i, поскольку неравенства (3) неверны. Мы получили, таким образом, еще одну рациональную дробь, удовлетворяющую неравенствам теоремы 5.

Пример. Найти четыре рациональных приближения к иррациональному числу π, представляемые несократимыми рациональными дробями и удовлетворяющие неравенствам теоремы 5.

Решение. Заметим сначала, что так как $\pi = 3{,}14159\ldots$, то

$$-\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{3}{1} < \frac{1}{1^2} \quad \text{и} \quad -\frac{1}{1^2} < \pi - \frac{4}{1} < \frac{1}{1^2}.$$

Для нахождения двух других приближений можно воспользоваться методом теоремы 3 и найти ближайшие к π рациональные дроби с знаменателями 2, 3 и т. д.:

$$\frac{6}{2},\ \frac{9}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \ldots.$$

Дроби 6/2 и 9/3 мы отбрасываем, поскольку они сократимы и после сокращения ничего нового не дают, а остальные проверяем — удовлетворяют они или нет неравенствам теоремы 5. Например,

$$-\frac{1}{36} < \pi - \frac{19}{6} < \frac{1}{36} \quad \text{(верные неравенства!).}$$

В результате дроби 13/4 и 16/5 отвергаются, а дроби 19/6 и 22/7 принимаются. Таким образом, 3/1, 4/1, 19/6 и 22/7 — одно из решений рассматриваемой задачи.

Рациональное число 22/7 является очень хорошим приближением к π. Это число — самое близкое к π среди всех рациональных чисел, знаменатели которых заключены между 1 и 56. Рациональное число 179/57 несколько ближе к π, чем 22/7, однако оно не удовлетворяет неравенствам теоремы 5. Рациональное число 355/113 удовлетворяет неравенствам теоремы 5 и лежит к π значительно ближе, чем 22/7 (оно совпадает с π с точностью до шести знаков после запятой!).

Можно установить справедливость следующего усиления теоремы 5: *для любого иррационального числа λ существует бесконечно много несократимых рациональных дробей m/n, таких, что*

$$-\frac{1}{n(n+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

Если бы вместо теоремы 5 использовалась эта теорема, то в предыдущем примере дробь 4/1 (представляющую собой сравнительно плохое приближение к π) пришлось бы считать неподходящей.

Чтобы доказать указанное усиление теоремы 5, нужен более сильный вариант теоремы 4. Мы наметим лишь основные вехи доказательства, оставляя читателю проведение всех деталей.

В доказательстве теоремы 4 с помощью принципа ящиков Дирихле устанавливалось, что если k чисел распределяются по k интервалам, то либо одно из чисел попадает в первый интервал, либо имеется интервал, содержащий по меньшей мере два из этих чисел. Для получения усиленного варианта теоремы 4 разделим единичный интервал на $k+1$ меньших интервалов и будем рассуждать следующим образом: если k чисел распределяются по $k+1$ интервалам, то либо одно из чисел оказывается в первом интервале, либо одно из чисел оказывается в последнем интервале, либо имеется интервал, содержащий по меньшей мере два из этих чисел. Такое использование принципа ящиков приводит к неравенству

$$-\frac{1}{n(k+1)} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n(k+1)}$$

которое сильнее неравенства из теоремы 4 (остальная часть формулировки этой теоремы остается без изменений). Теперь доказательство усиленной теоремы 5 получается без труда.

Упражнения

1. Доказать, что для любого иррационального числа λ среди бесконечного множества рациональных чисел m/n, удовлетворяющих условиям теоремы 5, имеется два таких, для которых $n=1$, т. е. которые являются целыми числами.
2. Пусть λ — любое заданное иррациональное число. Доказать, что все, кроме одного, рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам теоремы 5, автоматически удовлетворяют также неравенствам теоремы 3.
3. Найти два не целых рациональных числа, удовлетворяющих неравенствам теоремы 5, для

$$\text{а) } \lambda=\sqrt{2};\quad \text{б) } \lambda=\sqrt{3};\quad \text{в) } \lambda=\sqrt{5}.$$

4. а) Какие из первых пяти чисел последовательности (1) удовлетворяют неравенствам теоремы 3 для $\lambda=\sqrt{2}$?
   б) Какие из них удовлетворяют неравенствам теоремы 5?
5. а) Какие из первых пяти чисел последовательности (1) удовлетворяют неравенствам теоремы 3 для $\lambda=\sqrt{3}$?
   б) Какие из них удовлетворяют неравенствам теоремы 5?

*6. Доказать, что в случае $\lambda={}^{3}/_{5}$ утверждение теоремы 5 неверно.

*7. а) Пусть a/b и m/n — несократимые рациональные дроби с положительными знаменателями. Доказать, что если $n>b$, то эти дроби неравны. Вывести отсюда, что при $n>b$ неравенства

$$-\frac{1}{bn}<\frac{a}{b}-\frac{m}{n}<\frac{1}{bn}$$

неверны.

б) Доказать, что если $\lambda=a/b$ — любое фиксированное рациональное число, то утверждение теоремы 5 неверно.

*8. Провести полностью доказательство усиленного варианта теоремы 5 (следуя наброску, данному в конце § 5). Показать, что разности $\pi-{}^{4}/_{1}$ и $\pi-{}^{19}/_{6}$ не удовлетворяют усиленным неравенствам, а разность $\pi-{}^{22}/_{7}$ удовлетворяет.

§ 6. Ограничения точности приближений

В теореме 3 было доказано, что для любого иррационального числа λ существует бесконечно много рациональных чисел m/n, таких, что

$$-\frac{1}{2n}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{2n}.$$

Затем в теореме 5 было установлено, что имеется бесконечно много рациональных чисел m/n, для которых

$$-\frac{1}{n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Можно ли утверждать существование бесконечно большого числа рациональных чисел m/n, для которых

$$-\frac{1}{2n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n^2}?$$

Ответ на поставленный здесь вопрос положителен, однако мы не остановимся на его доказательстве. Более того, имеется замечательная теорема, согласно которой *для каждого иррационального числа λ существует бесконечно много рациональных чисел m/n, таких, что*

$$-\frac{1}{\sqrt{5}n^2} < \lambda - \frac{m}{n} < \frac{1}{\sqrt{5}n^2},$$

причем $\sqrt{5}$ есть наибольшее число, позволяющее сформулировать подобный результат. Это значит, что если число $\sqrt{5}$ в знаменателях стоящих слева и справа дробей заменить на какое угодно большее число, то утверждение теоремы станет неверным[1]).

Чтобы дать понятие о том, как можно доказать наличие ограничений, накладываемых на величину постоянной c в знаменателе дроби $1/cn^2$, установим следующий результат: *имеется лишь конечное число рациональных чисел m/n, для которых*

$$-\frac{1}{5n^2} < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < \frac{1}{5n^2}. \tag{4}$$

Мы покажем, что в действительности (4) не имеет места ни для какого n, большего 10.

Доказательство проведем косвенным путем. Предположим, что (4) выполняется для некоторых целых

[1]) Доказательство этой теоремы приведено, например, в статье [6] (см. список литературы на стр. 195). — *Прим. ред.*

чисел m и n, где $n>10$. Из неравенства

$$-\frac{1}{5n^2}<\sqrt{2}-\frac{m}{n}$$

при $n>10$ следует, что

$$\frac{m}{n}<\sqrt{2}+\frac{1}{5n^2}<\sqrt{2}+\frac{1}{500}<2. \tag{5}$$

С другой стороны, из неравенства

$$\sqrt{2}-\frac{m}{n}<\frac{1}{5n^2}$$

при $n>10$ вытекает, что

$$\frac{m}{n}>\sqrt{2}-\frac{1}{5n^2}>\sqrt{2}-\frac{1}{500}>1. \tag{6}$$

Далее, прибавляя m/n к обеим сторонам неравенств (4), получаем

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{5n^2}<\sqrt{2}<\frac{m}{n}+\frac{1}{5n^2}. \tag{7}$$

Если показать, что все три числа, соединенные неравенствами (7), положительны, то их можно будет, согласно теореме 1 д), возвести в квадрат с сохранением неравенств. В силу (6) имеем

$$\frac{m}{n}-\frac{1}{5n^2}>1-\frac{1}{5n^2}>1-\frac{1}{500}>0,$$

и поэтому все фигурирующие в неравенствах (7) числа положительны (ибо положительно даже меньшее из них). Возводя все части неравенства (7) в квадрат, получаем

$$\left(\frac{m}{n}-\frac{1}{5n^2}\right)^2<2<\left(\frac{m}{n}+\frac{1}{5n^2}\right)^2,$$

т. е.

$$\frac{m^2}{n^2}-\frac{2m}{5n^3}+\frac{1}{25n^4}<2<\frac{m^2}{n^2}+\frac{2m}{5n^3}+\frac{1}{25n^4}.$$

Отсюда, домножая на n^2, имеем

$$m^2-\frac{2m}{5n}+\frac{1}{25n^2}<2n^2<m^2+\frac{2m}{5n}+\frac{1}{25n^2}. \tag{8}$$

Далее, в силу (5),

$$m^2+\frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{25n^2}<m^2+\frac{2}{5}(2)+\frac{1}{25n^2}<$$
$$<m^2+\frac{4}{5}+\frac{1}{2500}<m^2+1. \qquad (9)$$

С другой стороны, тоже согласно (5),

$$m^2-\frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{25n^2}>m^2-\frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right)>m^2-\frac{4}{5}>m^2-1. \qquad (10)$$

Применяя (9) и (10) к неравенствам (8), находим

$$m^2-1<m^2-\frac{2}{5}\left(\frac{m}{n}\right)+\frac{1}{25n^2}<2n^2<$$
$$<m^2+\frac{2m}{5n}+\frac{1}{25n^2}<m^2+1,$$
$$m^2-1<2n^2<m^2+1.$$

Так как число $2n^2$ целое и заключено между m^2-1 и m^2+1, то оно равно m^2. Следовательно,

$$2n^2=m^2, \quad 2=\frac{m^2}{n^2}, \quad \sqrt{2}=\frac{m}{n},$$

что невозможно, поскольку $\sqrt{2}$ есть число иррациональное, а числа m и n, по предположению, целые.

Упражнения

1. а) Доказать, что при $n>10$ не существует рациональных чисел m/n, таких, что

$$-\frac{1}{5n^2}<\sqrt{3}-\frac{m}{n}<\frac{1}{5n^2};$$

б) найти все рациональные числа m/n, удовлетворяющие этим неравенствам.

2. а) Доказать, что при $n>10$ не существует рациональных чисел m/n, таких, что

$$-\frac{1}{n^3}<\sqrt{2}-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^3};$$

б) найти все рациональные числа m/n, удовлетворяющие этим неравенствам.

3. а) Доказать, что при $n>10$ не существует рациональных чисел m/n, таких, что

$$-\frac{1}{n^3}<\sqrt{3}-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^3};$$

б) найти все рациональные числа m/n, удовлетворяющие этим неравенствам.

§ 7. Краткие выводы

Мы установили ряд результатов о том, насколько хорошо произвольное иррациональное число λ можно приблизить бесконечным количеством рациональных чисел m/n. Наиболее сильная из доказанных теорем утверждает, что λ можно приблизить с точностью до $1/n^2$. Позже, в § 6, был установлен результат отрицательного характера, согласно которому существует лишь конечное множество рациональных чисел m/n, отличающихся от $\sqrt{2}$ меньше чем на $1/(5n^2)$. Аналогичный отрицательный результат имеет место для любого алгебраического числа. А именно справедливо следующее утверждение (здесь оно не доказывается): *если λ — алгебраическое число, то существует лишь конечное множество рациональных чисел m/n, отличающихся от λ меньше чем на* $1/n^3$. В отношении трансцендентных чисел подобное утверждение в общем случае неверно. Оно справедливо лишь для некоторых, но не для всех трансцендентных чисел. В следующей главе мы укажем число, которое можно приблизить бесконечным количеством рациональных чисел m/n не только с точностью до $1/n^3$, но также с точностью до $1/n^4$, с точностью до $1/n^{100}$ и, вообще, с точностью до $1/n^j$ для любого j, которое пожелает выбрать читатель, как бы велико это число ни было. Будет доказано, что это число не является алгебраическим, и, таким образом, мы получим доказательство существования трансцендентных чисел. До сих пор мы говорили о них, не зная даже, существуют они или нет!

ГЛАВА VII

Существование трансцендентных чисел

Существуют ли трансцендентные числа? В настоящей заключительной главе мы дадим ответ на этот вопрос. Легко указать трансцендентное число. Совсем иное дело доказать его трансцендентность. То число α, трансцендентность которого мы установим, имеет следующую важную особенность: его десятичное разложение в основном состоит из нулей. Оно равно

$$\alpha = 0{,}1100010000\ldots,$$

где единицы стоят на местах с номерами

$$1, \quad 2, \quad 6, \quad 24, \quad 120, \quad 720, \quad 5040, \ldots ,$$

т. е. на местах с номерами

$$1!, \quad 2!, \quad 3!, \quad 4!, \quad 5!, \quad 6!, \quad 7!, \ldots .$$

Символ $k!$, где k — натуральное число, читается k *факториал* и обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до k:

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-2) \cdot (k-1) \cdot k.$$

Все цифры в десятичном разложении числа α, за исключением тех, номера которых выражаются факториалами целых чисел, равны нулю. Следовательно, α можно записать в виде следующей суммы отрицательных степеней 10:

$$\begin{aligned}\alpha &= 10^{-1!} + 10^{-2!} + 10^{-3!} + 10^{-4!} + 10^{-5!} + \ldots = \\ &= 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-6} + 10^{-24} + 10^{-120} + \ldots = \\ &= 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}000001 + \ldots . \qquad (1)\end{aligned}$$

Указанное число α называется **числом Лиувилля**, по имени французского математика, впервые доказавшего существование трансцендентных чисел.

Какое конкретное свойство числа α можно использовать для доказательства того, что оно не является алгебраическим? Таким свойством является следующее: α можно приблизить бесконечно большим количеством рациональных чисел m/n не только с точностью до $1/n^2$ (это справедливо для **любого** иррационального числа, см. гл. VI), но также с точностью до $1/n^3$, $1/n^4$ и вообще с точностью до $1/n^r$, где r — какое угодно положительное число. Ни одно алгебраическое число этим свойством не обладает. Если λ — произвольное иррациональное число, то, как мы видели в теореме 5 гл. VI, существует бесконечно много рациональных чисел m/n, отличающихся от λ меньше, чем на $1/n^2$. Но если λ — алгебраическое число, то его нельзя приблизить бесконечным количеством рациональных чисел m/n более тесно — ни с точностью до $1/n^3$, ни даже с точностью до $1/n^{2,1}$; среди всех выражений вида $1/n^r$ выражение $1/n^2$ является **наилучшим возможным**. В течение многих лет такого рода результат об алгебраических числах составлял знаменитую проблему.

Решена она была в 1955 г. английским математиком К. Ф. Ротом, который в 1958 г. на Международном конгрессе математиков в Эдинбурге (Шотландия) был награжден за эту блестящую работу медалью Филдса. Его результат получил название теоремы Туэ — Зигеля — Рота, поскольку А. Туэ и С. Л. Зигелем были установлены некоторые факты, послужившие основой для работы Рота [1]).

Как уже было отмечено, доказать трансцендентность числа α гораздо труднее, чем просто выписать его десятичное представление. Ниже будет использован материал § 1 гл. VI, посвященного свойствам неравенств. Нам потребуется также понятие абсолютной величины числа, с которым читатель, возможно, уже

[1]) См. по этому поводу статью А. О. Гельфонда [8], указанную в списке литературы на стр. 195. — *Прим. ред.*

знаком. Тем не менее, рассчитывая и на читателя, для которого это понятие является новым, мы определим абсолютную величину числа и докажем некоторые ее свойства. В порядке предварительной подготовки мы докажем также теорему о делимости многочлена на двучлен.

§ 1. Предварительные сведения из алгебры

Любое действительное число a либо положительно, либо отрицательно, либо равно нулю. Для каждого действительного числа a определим *абсолютную величину* a, обозначаемую через $|a|$, следующим образом: $|a|=a$, если a положительно или равно нулю, и $|a|=-a$, если a — отрицательно [1]). Например,

$$|0|=0, \quad |7|=7, \quad |-4|=4, \quad |-6|=6,$$
$$|3|=|3|, \quad |-5|=5, \quad |-1000|=1000.$$

Вместо того чтобы определять абсолютную величину числа отдельно для случаев, когда a положительно, отрицательно или равно нулю, можно было бы ввести ее посредством единственного равенства

$$|a|=\sqrt{a^2}, \tag{2}$$

поскольку, согласно принятым соглашениям, число $\sqrt{a^2}$ всегда неотрицательно (т. е. положительно или равно нулю).

Из данного определения непосредственно вытекает, что если два числа равны, то равны и их абсолютные величины, т. е. если $a=b$, то $|a|=|b|$. Другое простое следствие определения (2) состоит в том, что числа a и $-a$ всегда имеют одинаковые абсолютные величины: $|a|=|-a|$.

Важно отметить также равенство $|ab|=|a|\cdot|b|$. С помощью (2) его можно доказать следующим образом:

$$|a|=\sqrt{a^2}, \quad |b|=\sqrt{b^2}, \quad |ab|=\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^2},$$

---

[1]) Детальное рассмотрение понятия абсолютной величины можно найти в гл. III книги Беккенбаха и Беллмана, указанной в подстрочном примечании на стр. 112.

откуда

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

Далее мы покажем, как связаны $|a+b|$ и $|a|+|b|$. Оказывается, что $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Для доказательства этого неравенства, известного в более общем случае комплексных чисел как *неравенство треугольника*, рассмотрим отдельно несколько возможностей. Если a и b оба положительны, то

$$|a+b| = a+b, \quad |a| = a, \quad |b| = b$$

и, следовательно,

$$|a+b| = |a|+|b|.$$

Если a и b оба отрицательны, то

$$|a+b| = -a-b, \quad |a| = -a, \quad |b| = -b,$$

так что по-прежнему

$$|a+b| = |a|+|b|.$$

Если a и b разных знаков, одно положительно, а другое отрицательно, то при сложении происходит сокращение, и поэтому $|a+b|$ меньше, чем большее из чисел $|a|$, $|b|$. Следовательно, в этом случае

$$|a+b| < |a|+|b|.$$

Если одно из чисел a, b, скажем b, равно нулю, то

$$|a+b| = |a+0| = |a|, \quad |b| = |0| = 0,$$

и, стало быть,

$$|a+b| = |a|+|b|.$$

Таким образом, во всех случаях либо

$$|a+b| = |a|+|b|,$$

либо

$$|a+b| < |a|+|b|.$$

Все указанные выше результаты об абсолютных величинах для удобства собраны в следующей теореме:

Теорема 1. *Если a и b — произвольные действительные числа, то*

1) *если $a=b$, то и $|a|=|b|$,*
2) $|a|=|-a|$,
3) $|ab|=|a|\cdot|b|$,
4) $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

Докажем теперь одну теорему из алгебры, известную как теорема о делимости многочлена на двучлен[1]). Мы докажем ее в специальном виде, удобном для наших дальнейших целей.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и пусть рациональное число β является корнем уравнения $f(x)=0$. Тогда $x-\beta$ есть делитель $f(x)$, т. е. существует многочлен $q(x)$ такой, что*

$$f(x)=(x-\beta)\,q(x).$$

Более того, $q(x)$ имеет рациональные коэффициенты и степень его на единицу меньше степени $f(x)$.

Доказательство. Если $f(x)$ поделить на $x-\beta$, то получатся некоторое частное $q(x)$ и остаток r. Так как степень остатка всегда меньше степени делителя (который в нашем случае является многочленом первой степени $x-\beta$), то r есть постоянная, не зависящая от x. Имеем, таким образом,

$$f(x)=(x-\beta)\,q(x)+r,$$

причем коэффициенты многочлена $q(x)$ рациональны, поскольку последовательные шаги в процессе деления многочлена на многочлен представляют собой так называемые рациональные операции. Выписанное соотношение является тождеством относительно x, и поэтому вместо x в него можно подставить число β, в результате чего мы получаем $f(\beta)=r$. Но β есть корень уравнения $f(x)=0$, так что $f(\beta)=0$. Следовательно, $r=0$. Таким образом, при делении $f(x)$ на $x-\beta$ остаток равен нулю, т. е. $f(x)=(x-\beta)q(x)$. Ясно, наконец, что степень $q(x)$ на единицу меньше степени $f(x)$, какова бы ни была степень $f(x)$.

[1]) Или теорема Безу, названная так по имени французского математика XVIII в. — *Прим. ред.*

Упражнения

1. Найти значения $|2|$, $|-2|$, $|-8|$ и $|10^{-1}|$.
2. В § 1 было установлено, что если $a=b$, то $|a|=|b|$. Верно ли обратное утверждение?
3. Доказать, что $|a+b+c| \leqslant |a|+|b|+|c|$.
4. а) Доказать, что $|x+7|=x+7$ при $x \geqslant -7$, но $|x+7|=-x-7$ при $x \leqslant -7$;

   б) проанализировать аналогичным образом соотношение $|x-7|=x-7$.
5. При каких значениях x (если такие значения x вообще существуют) справедливы следующие равенства:

   а) $|x+7|=5+|x|$; в) $|x+7|+|x-7|=|x|+7$;

   б) $|x|=|x-4|$; г) $|2x|=2|x|$?
6. Доказать, что неравенства теоремы 5 гл. VI:

$$-\frac{1}{n^2}<\lambda-\frac{m}{n}<\frac{1}{n^2}$$

можно записать в виде

$$\left|\lambda-\frac{m}{n}\right|<\frac{1}{n^2}.$$

7. Доказать, что $8!=8\cdot(7!)$ и вообще $(j+1)!=(j+1)\cdot(j!)$.
8. Доказать, что $(j+1)!-j!=j\cdot(j!)$.
9. Убедиться, что $^3/_2$ есть корень уравнения $f(x)=2x^4-13x^3+27x^2-4x-21=0$. Проверить затем теорему 2, вычислив частное $q(x)$ от деления $f(x)$ на $x-{}^3/_2$.

§ 2. Один способ приближения числа α

Трансцендентность числа α обусловливается возможностью исключительно хорошего приближения его некоторыми рациональными числами. Сейчас мы продемонстрируем один способ приближения α. Хорошее рациональное приближение получается, если брать конечное число членов ряда (1), определяющего α. Пусть β есть сумма первых j членов ряда (1):

$$\beta=10^{-1!}+10^{-2!}+10^{-3!}+\ldots+10^{-j!}. \qquad (3)$$

Значение целого числа j будет уточнено позднее. Отметим, что число β рационально, так как его можно записать в виде суммы дробей с знаменателями, являющимися степенями 10:

$$\beta=\frac{1}{10^{1!}}+\frac{1}{10^{2!}}+\frac{1}{10^{3!}}+\ldots+\frac{1}{10^{j!}}.$$

Записав, далее, все эти дроби с одним и тем же знаменателем $10^{j!}$ и произведя сложение, получим

$$\beta=\frac{t}{10^{j!}}, \tag{4}$$

где числитель t есть некоторое целое число, точное значение которого для нас неважно.

Рациональное число β весьма мало отличается от α. Из (1) и (3) имеем

$$\alpha-\beta=10^{-(j+1)!}+10^{-(j+2)!}+10^{-(j+3)!}+\ldots.$$

Десятичное разложение $\alpha-\beta$, подобно разложению самого α, состоит лишь из нулей и единиц. Цифра 1 впервые появляется на $(j+1)!$-м месте, затем на $(j+2)!$-м и т. д. Следовательно, число $\alpha-\beta$ меньше чем

$$0{,}000000\ldots0000002,$$

где все цифры равны нулю, за исключением цифры 2, стоящей на $(j+1)!$-м месте. Иначе это можно выразить неравенством

$$\alpha-\beta<\frac{2}{10^{(j+1)!}}. \tag{5}$$

Нам потребуется еще несколько других простых неравенств, относящихся к α и β. Так как α и β положительны, то положительны и все их степени. Кроме того, поскольку $\alpha<1$ и $\beta<1$, то $\alpha^r<1$, $\beta^s<1$ и $\alpha^r\beta^s<1$ для любых положительных целых r и s, так что

$$0<\alpha^r<1, \qquad 0<\beta^s<1, \qquad 0<\alpha^r\beta^s<1. \tag{6}$$

§ 3. План доказательства

Для доказательства трансцендентности числа α мы предположим противное, т. е. что α является числом алгебраическим, и затем получим противоречие.

Сделанное допущение означает, что α удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами. Среди всех алгебраических уравнений, которым удовлетворяет α, выберем уравнение наименьшей степени. Пусть это будет уравнение

$$c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \dots$$
$$\dots + c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0. \qquad (7)$$

Для краткости стоящий в (7) слева многочлен обозначим через $f(x)$. На протяжении оставшейся части главы многочлен $f(x)$ будет играть центральную роль. Вот основные предположения относительно $f(x)$, которые следует помнить:

1) $f(x)$ имеет целые коэффициенты;
2) число α есть корень уравнения $f(x)=0$, так что $f(\alpha)$ равно нулю [под $f(\alpha)$ мы понимаем число, получающееся в результате подстановки α в $f(x)$ вместо x];
3) число α не является корнем никакого уравнения с целыми коэффициентами степени меньше n.

Число $f(\beta)$, получающееся в результате подстановки β в $f(x)$ вместо x, тоже будет играть важную роль в дальнейшем рассуждении.

Идея доказательства состоит в следующем: число $f(\alpha)—f(\beta)$ [или, что то же, $—f(\beta)$, поскольку $f(\alpha)=0$] рассматривается с двух различных точек зрения. С одной точки зрения $—f(\beta)$ есть многочлен относительно β с целыми коэффициентами. Так как число β рационально, то $—f(\beta)$ тоже рационально, и мы увидим, что его абсолютная величина сравнительно велика. С другой точки зрения $f(\alpha) — f(\beta)$ есть разность двух многочленов, и мы покажем в следующем параграфе, что величина этой разности имеет одинаковый порядок с $\alpha—\beta$ и поэтому относительно мала [см. соотношение (5)]. Таким образом, предположив, что число α — алгебраическое, мы придем к двум исключающим друг друга утверждениям о порядке величины $f(\alpha)—f(\beta)$ и тем самым получим противоречие.

Мы подготовим путь для этого в следующем параграфе, показав, что $f(\beta)$ не равно нулю и что величина $f(\alpha)-f(\beta)$ имеет тот же порядок, что и $\alpha-\beta$.

Упражнения

1. Проверить тождества:

   а) $\alpha^4-\beta^4=(\alpha-\beta)(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)$;

   б) $\alpha^5-\beta^5=(\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)$;

   в) $\alpha^6-\beta^6=(\alpha-\beta)(\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^4+\beta^5)$.

2. Написать тождество, выражающее $\alpha^7-\beta^7$ в виде произведения $\alpha-\beta$ на многочлен степени 6.
3. Доказать, что всякое алгебраическое число является корнем бесконечного числа алгебраических уравнений с целыми коэффициентами.

§ 4. Свойства многочленов

Теорема 3. *Число β не есть корень уравнения* (7), *т. е.* $f(\beta)\neq 0$.

Доказательство. Предположим, что β является корнем уравнения (7). Тогда по теореме 2 $x-\beta$ есть делитель $f(x)$:

$$f(x)=(x-\beta)\,q(x),$$

причем степень многочлена $q(x)$ на единицу меньше степени многочлена $f(x)$ и коэффициенты его рациональны. Далее, так как α есть корень уравнения $f(x)=0$, то

$$f(\alpha)=(\alpha-\beta)\,q(\alpha)=0.$$

Но произведение двух чисел равно нулю только тогда, когда одно из них равно нулю. Число $\alpha-\beta$ не равно нулю, поскольку α не совпадает с β. Следовательно, $q(\alpha)=0$, т. е. α есть корень уравнения $q(x)=0$, причем степень $q(x)$ равна $n-1$. Обозначим через k произведение знаменателей всех рациональных коэффициентов $q(x)$. Ясно, что многочлен $kq(x)$ имеет целые коэффициенты и число α есть его корень, т. е. $kq(\alpha)=0$. Но это противоречит нашему предположению о том, что α не удовлетворяет никакому уравнению с целыми коэффициентами степени меньше n. Таким образом, исходя из равенства $f(\beta)=0$, мы пришли к противоречию; теорема доказана.

Покажем теперь, следуя плану, намеченному в предыдущем параграфе, что величина $|f(\alpha)-f(\beta)|$ имеет одинаковый порядок с $|\alpha-\beta|$ и, следовательно, очень мала (см. § 2).

Теорема 4. *Существует зависящее только от коэффициентов многочлена $f(x)$ и от его степени число N, такое, что*

$$|f(\alpha)-f(\beta)|<N(\alpha-\beta).$$

Доказательство. Число N определяется равенством

$$N=n|c_n|+(n-1)|c_{n-1}|+(n-2)|c_{n-2}|+\ldots$$
$$\ldots+2|c_2|+|c_1|. \quad (8)$$

Отметим, в частности, что N не зависит от числа j, использованного при определении β.

В процессе доказательства нам будет полезна формула для разложения на множители разности $\alpha^k-\beta^k$, а также одно неравенство, которому эта разность удовлетворяет. Разложение $\alpha^k-\beta^k$ дается формулой

$$\alpha^k-\beta^k=(\alpha-\beta)(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\alpha^{k-3}\beta^2+\ldots$$
$$\ldots+\alpha^2\beta^{k-3}+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1}). \quad (9)$$

Здесь k — произвольное положительное целое число. Чтобы проверить формулу (9), произведем умножение в ее правой части. Имеем

$$\alpha(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1})=$$
$$=\alpha^k+\alpha^{k-1}\beta+\ldots+\alpha^2\beta^{k-2}+\alpha\beta^{k-1}$$

и

$$\beta(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\ldots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1})=$$
$$=\alpha^{k-1}\beta+\alpha^{k-2}\beta^2+\ldots+\alpha\beta^{k-1}+\beta^k.$$

При вычитании второго из этих выражений из первого сокращаются все члены в правой части, исключая первый член из первого равенства и последний из второго, так что в результате остается только $\alpha^k - \beta^k$.

Далее заметим, что, согласно неравенствам (6), все члены α^{k-1}, $\alpha^{k-2}\beta$ и т. д. из правой части соотношения (9) меньше 1. Следовательно, поскольку этих членов всего k и поскольку $\alpha - \beta$ положительно, имеем

$$\alpha^k - \beta^k < (\alpha - \beta)(1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 + 1) = \\ = k(\alpha - \beta). \qquad (10)$$

Подставляя теперь α и β вместо x в $f(x)$ и вычитая $f(\beta)$ из $f(\alpha)$, получаем

$$(\alpha) - f(\beta) = \\ = c_n(\alpha^n - \beta^n) + c_{n-1}(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \ldots + c_1(\alpha - \beta).$$

Используя далее тождество (9), вынесем из всех членов справа общий множитель $\alpha - \beta$. В результате будем иметь

$$f(\alpha) - f(\beta) = \\ = (\alpha - \beta)[c_n(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) + \\ + c_{n-1}(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2}) + \ldots + c_1].$$

Отсюда, беря абсолютные значения и применяя теорему 1 и неравенство (10), находим

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < \\ < |\alpha - \beta|[n|c_n| + (n-1)|c_{n-1}| + \ldots + |c_1|].$$

Замечая теперь, что $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$, и используя определяющее N равенство (8), окончательно получаем

$$|f(\alpha) - f(\beta)| < N(\alpha - \beta),$$

что и доказывает теорему.

§ 5. Трансцендентность числа α

Теперь мы завершим доказательство трансцендентности числа α, определяемого равенством (1). Рассмотрим сначала разность $f(\alpha) - f(\beta)$ с иной точки зрения.

Теорема 5. *Каково бы ни было положительное целое число j,*

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\cdot 10^{n\cdot j!} \tag{11}$$

есть целое положительное число.

Доказательство. Так как $f(\alpha)=0$, то рассматриваемое число можно переписать в виде

$$|-f(\beta)|\cdot 10^{n\cdot j!}, \quad \text{или} \quad |f(\beta)|\cdot 10^{n\cdot j!}.$$

Согласно (4), имеем

$$f(\beta)=c_n\beta^n+c_{n-1}\beta^{n-1}+c_{n-2}\beta^{n-2}+\ldots+c_1\beta+c_0=$$
$$=\frac{c_nt^n}{10^{n\cdot j!}}+\frac{c_{n-1}t^{n-1}}{10^{(n-1)\cdot j!}}+\frac{c_{n-2}t^{n-2}}{10^{(n-2)\cdot j!}}+\ldots+\frac{c_1t}{10^{j!}}+c_0,$$

откуда, домножая на $10^{n\cdot j!}$, получаем

$$f(\beta)\cdot 10^{n\cdot j!}=c_nt^n+c_{n-1}t^{n-1}10^{j!}+c_{n-2}t^{n-2}10^{2\cdot j!}+\ldots$$
$$\ldots+c_1t\,10^{(n-1)\cdot j!}+c_0\,10^{n\cdot j!}.$$

Правая часть этого равенства является, очевидно, целым числом. Оно не может быть равным нулю, поскольку, согласно теореме 3, $f(\beta)\neq 0$. Беря абсолютные значения, находим, что

$$|f(\beta)\cdot 10^{n\cdot j!}|=|f(\beta)|\cdot 10^{n\cdot j!}$$

есть целое положительное число, и теорема тем самым доказана.

Теперь мы покажем, что в противоречие с теоремой 5 задаваемое формулой (11) число заключено между 0 и 1. Для этого выберем целое число j, используемое при определении β так, чтобы было

$$\frac{2N\cdot 10^{n\cdot j!}}{10^{(j+1)!}}<1. \tag{12}$$

Возможно ли это? Да, возможно. В самом деле, неравенство (12) эквивалентно следующему:

$$\frac{2N}{10^{(j+1)!-n\cdot j!}}<1.$$

Показатель степени у знаменателя в последнем неравенстве можно переписать в виде

$$(j+1)!-n\cdot j!=(j+1)j!-n\cdot j!=(j+1-n)j!$$

Этот показатель при фиксированном n можно сделать сколь угодно большим, если взять j достаточно большим. Но n и N фиксированы соотношениями (7) и (8), а j не зависит ни от n, ни от N. Поэтому j можно взять настолько большим, чтобы выполнялось (12).

Покажем далее, что число, определяемое формулой (11), заключено между 0 и 1. В силу теоремы 4 и неравенств (5) и (12)

$$|f(\alpha)-f(\beta)|\cdot 10^{n\cdot j!}<N(\alpha-\beta)\cdot 10^{n\cdot j!}<\frac{2N\cdot 10^{n\cdot j!}}{10^{(j+1)!}}<1.$$

Положительность рассматриваемого числа вытекает из теоремы 3.

Полученное противоречие показывает, что α не может удовлетворять никакому уравнению вида (7). Следовательно, α есть трансцендентное число.

§ 6. Краткие выводы

В этой главе мы ответили на вопрос «Существуют ли трансцендентные числа?», показав, что конструктивно задаваемое число Лиувилля является трансцендентным, т. е. не алгебраическим.

Проследим кратко еще раз весь ход доказательства, поскольку детали, возможно, затемнили суть дела. Центральная идея доказательства, как было отмечено в начале главы, состоит в том, что число

$$\alpha=10^{-1!}+10^{-2!}+10^{-3!}+10^{-4!}+\ldots$$

может быть очень хорошо приближено рациональными числами. Этот факт отражен в неравенстве (5), которое, по существу, говорит о том, что $\alpha-\beta$ очень мало по сравнению с β. Напомним, что в то время как знаменатель рационального числа β есть $10^{j!}$ [см. (4)], разность $\alpha-\beta$ имеет порядок $10^{-(j+1)!}$. В теореме 4 из малости порядка величины $\alpha-\beta$ была выведена малость порядка величины $f(\alpha)-f(\beta)$, где $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, обращающийся, согласно предположению, в нуль при $x=\alpha$.

С другой стороны, рассматривая разность $f(\alpha)-f(\beta)$ в теореме 5 с совсем иной точки зрения, мы показали, что величина этой разности больше той, которая возможна в соответствии с сделанной выше оценкой. [Множитель $10^{n \cdot j!}$ в теореме 5 не играет существенной роли; он вводится с той целью, чтобы еще больше оттенить различие двух получающихся порядков величины $f(\alpha)-f(\beta)$.] Для этого было замечено, что $f(\alpha)-f(\beta)$ равно просто $-f(\beta)$, и что $f(\beta)$ есть рациональное число с знаменателем $10^{n \cdot j!}$. Таким образом, предположение о справедливости равенства $f(\alpha)=0$ позволяет доказать, что $f(\alpha)-f(\beta)$ значительно больше, чем должно быть согласно проведенным выше вычислениям. Полученное противоречие и устанавливает трансцендентность числа α.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Доказательство бесконечности числа простых чисел

Используемое здесь рассуждение представляет собой так называемое косвенное доказательство, именуемое также доказательством от противного, или *reductio ad absurdum* (приведением к абсурду). В доказательстве такого типа допускается, что сделанное предположение ложно, а затем из этого допущения выводится противоречие. В случае рассматриваемого предложения мы предполагаем, таким образом, что имеется лишь конечное число простых чисел.

Введем далее систему обозначений для простых чисел. Поскольку их всего конечное число, то можно воспользоваться обозначением

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k.$$

Это обозначение подразумевает, что всего имеется k простых чисел, где k — некоторое натуральное число. Если считать, что простые числа перечислены в порядке возрастания, то, конечно, $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $p_4=7$ и т. д. Тем не менее в процессе доказательства удобнее использовать обозначения p_1, p_2, p_3 и т. д. вместо 2, 3, 5 и т. д.

Так как каждое натуральное число можно разложить на простые множители, то каждое натуральное число должно делиться хотя бы на одно из чисел

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k,$$

поскольку, согласно сделанному предположению, других простых чисел нет. Рассмотрим, однако, натуральное число n, получающееся от перемножения всех простых чисел и последующего добавления единицы:

$$n = p_1 p_2 p_3 \ldots p_k + 1.$$

Число n не делится на p_1, поскольку при делении n на p_1 частное и остаток равны соответственно $p_2, p_3 \ldots p_k$ и 1. Если бы n делилось на p_1, то остаток был бы равен 0. Значит, n не делится на p_1.

Аналогично доказывается, что n не делится ни на одно из чисел $p_2, p_3, p_4, \ldots, p_k$.

Мы построили число n, не делящееся ни на одно простое число; но такого числа, конечно, быть не может. Таким образом, допущение, что имеется лишь конечное число простых чисел, привело к логическому противоречию. Следовательно, это допущение ложно. Тем самым доказано, что число простых чисел бесконечно.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Доказательство основной теоремы арифметики

В настоящем приложении доказывается, что *каждое натуральное число, отличное от* 1, *может быть разложено в произведение простых множителей лишь единственным способом, если отвлечься от порядка следования множителей.* При этом понимается, что натуральное число, являющееся простым, как, например, 23, само является своим «разложением на простые множители». Рассматриваемое утверждение легко проверить для маленьких натуральных чисел. Например, 10 можно разложить в произведение $2 \cdot 5$, и по опыту мы знаем, что других разложений у 10 нет. То же самое верно и для всех чисел, меньших 10:

$$2=2, \quad 3=3, \quad 4=2\cdot 2, \quad 5=5, \quad 6=2\cdot 3,$$
$$7=7, \quad 8=2\cdot 2\cdot 2, \quad 9=3\cdot 3, \quad 10=2\cdot 5.$$

Этот список можно было бы продолжить, однако такое перечисление, как бы длинным оно ни было, не может рассматриваться как доказательство. В самом деле, натуральных чисел бесконечно много, и поэтому нельзя проверить разложение их всех.

Мы должны обратиться, таким образом, к математическому рассуждению. Натуральные числа от 2 до 10 были выше перечислены, и мы видели, что каждое из них разлагается на простые множители единственным образом. Далее, либо этот список можно продолжить неограниченно, и тогда все натуральные числа разлагаются на простые множители единственным образом, либо на некотором этапе продолжения свойство единственности разложения нарушается. Имеются лишь эти две возможности. Нашей целью является доказательство того, что в действительности имеет место первая возможность. Мы воспользуемся для этого косвенным рассуждением: допустим, что имеет место вторая возможность, т. е. что на некотором этапе перечисления натуральных чисел свойство единственности разложения на простые множители нарушается, и покажем, что такое допущение приводит к противоречию.

Прежде чем проводить это довольно длинное рассуждение во всех деталях, дадим для ориентировки читателя его краткий набросок.

Обозначим через m первое из чисел, которое можно разложить на простые множители более чем одним способом, и рассмотрим два различных разложения m на простые множители. В части I доказательства будет показано, что никакой из простых множителей одного разложения m не встречается в другом разложении. Показав, что если m имеет два разных разложения, то все простые множители одного разложения отличны от всех простых множителей другого разложения, мы затем построим в части II доказательства число n, меньшее чем m, также имеющее два разных разложения на простые множители. Тем самым мы получим противоречие с допущением, что m есть наименьшее целое число, обладающее двумя различными разложениями на простые множители, и это завершит доказательство.

Итак, пусть m — первое натуральное число, которое можно разложить на простые множители более, чем одним способом. Иными словами, мы предполагаем, что каждое, меньшее чем m, натуральное число разлагается единственным образом, а разложение m не единственно. Согласно предположению, имеется по крайней мере два различных разложения числа m. Пусть это будут разложения

$$m = p_1 p_2 p_3 \ldots p_r \quad \text{и} \quad m = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s.$$

При этом обозначении подразумевается, что для m имеется разложение на простые множители p_1, p_2, p_3 и т. д. вплоть до p_r, а также имеется другое разложение на простые множители q_1, q_2, q_3 и т. д. вплоть до q_s. Во втором разложении последний член обозначен через q_s, а не через q_r, потому что мы не можем, исходя из известных нам фактов, предполагать равенство числа простых множителей в обоих разложениях.

Введенное обозначение требует еще дальнейших пояснений. Вовсе не имеется в виду, что, как это было в приложении А, p_1 есть лишь иное обозначение для простого числа 2, p_2 — иное обозначение для простого числа 3 и т. д. Нам вообще неизвестно принадлежит или нет простое число 2 совокупности $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Таким образом, p_1 может быть равным простому числу 2, или простому числу 23, или простому числу 47, или ни одному из них. Это есть попросту некоторое простое число. Точно так же p_2 есть некоторое простое число. Оно может как совпадать, так и не совпадать с p_1. Единственное, что мы предполагаем — это возможность разложить натуральное число m на простые множители двумя различными способами.

Доказательство. Часть I. Покажем, что все простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_r$ из первой совокупности отличны от всех простых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_s$ из второй совокупности. Таким образом, если, например, простое число 7 принадлежит первой совокупности, то оно не может принадлежать второй совокупности. Поскольку это вовсе не очевидно, мы должны дать соответствующее доказательство. Предположим, что имеется простое число, принадлежащее обеим совокупностям. Изменив, если нужно, обозначения, мы можем считать, что совпадают первые числа обеих совокупностей, т. е. что $p_1=q_1$. (Это можно сделать, поскольку в каждом разложении простые числа могут находиться в любом порядке.) Заменяя во втором разложении q_1 на p_1, мы получаем, что имеются следующие два разложения:

$$m=p_1p_2p_3\ldots p_r \quad \text{и} \quad m=p_1q_2q_3\ldots q_s.$$

Деля эти равенства на p_1, находим

$$\frac{m}{p_1}=p_2p_3\ldots p_r \quad \text{и} \quad \frac{m}{p_1}=q_2q_3\ldots q_s.$$

Мы пришли к двум различным разложениям натурального числа m/p_1, поскольку мы исходили из двух различных разложений для m. Но это невозможно, так как m, согласно предположению, есть наименьшее число, обладающее более, чем одним разложением, а m/p_1 меньше m.

Часть II. Итак, нами установлено, что все простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_r$ из первого разложения m отличны от всех простых чисел $q_1, q_2, \ldots, q_s$ из второго разложения m. В частности, p_1 не равно q_1, что можно записать как $p_1 \neq q_1$. Предположим, что p_1 есть наименьшее из чисел p_1, q_1, т. е. что $p_1 < q_1$. Мы вправе это сделать в силу полной симметрии обозначений в обеих совокупностях простых чисел. Таким образом, если мы проведем доказательство в случае $p_1 < q_1$, то по симметрии аналогичное доказательство применимо к случаю $p_1 > q_1$ с p, замененными на q, и наоборот.

Предполагая, что $p_1 < q_1$, мы укажем число, которое меньше, чем m, но имеет два различных разложения. Тем самым доказательство будет завершено, поскольку существование такого числа противоречит сделанному нами допущению, что m есть наименьшее натуральное число, обладающее более, чем одним разложением. Таким числом является

$$n = (q_1 - p_1) q_2 q_3 q_4 \ldots q_s.$$

Обратим внимание на то, как строится число n: оно равно произведению $q_1 - p_1$ и простых чисел $q_2, q_3, \ldots, q_s$. Его можно записать в виде разности:

$$n = q_1 q_2 q_3 \ldots q_s - p_1 q_2 q_3 \ldots q_s$$

или

$$n = m - p_1 q_2 q_3 \ldots q_s.$$

Из этой записи видно, что n меньше m, поскольку число $p_1 q_2 q_3 \ldots q_s$ положительно.

Установим, наконец, что натуральное число n имеет два различных разложения. Для этого рассмотрим n в той его форме, в которой оно было введено, а именно:

$$n = (q_1 - p_1) q_2 q_3 \ldots q_s.$$

Все числа $q_2, q_3, \ldots, q_s$ являются простыми, но число q_1-p_1 не обязательно простое. Если q_1-p_1 разложить на простые множители, то мы получим такое разложение n, которое не содержит простого числа p_1 в качестве множителя. Для доказательства этого заметим сначала, что, как показано в части I доказательства, число p_1 не встречается среди чисел $q_2, q_3, \ldots, q_s$. Далее, как бы число q_1-p_1 ни разлагалось на простые множители, простое число p_1 не может оказаться среди них. В самом деле, если бы p_1 было множителем в разложении q_1-p_1 на простые множители, то p_1 было бы делителем q_1-p_1. Иными словами, выполнялось бы равенство

$$q_1-p_1=p_1b,$$

где b есть частное от деления q_1-p_1 на p_1. Но из этого равенства следуют равенства

$$q_1=p_1+p_1b \quad \text{и} \quad q_1=p_1(1+b),$$

последнее из которых можно понимать как утверждение, что p_1 есть делитель q_1. Такое утверждение, конечно, ложно, поскольку никакое простое число не является делителем другого простого числа.

Покажем далее, что n имеет также другое разложение на простые множители, в которое входит p_1. Для этого вернемся к выведенному ранее равенству

$$n=m-p_1q_2q_3\ldots q_s.$$

Заменяя в нем m по формуле

$$m=p_1p_2p_3\ldots p_r,$$

получаем

$$n=p_1p_2p_3\ldots p_r-p_1q_2q_3\ldots q_s=$$
$$=p_1(p_2p_3\ldots p_r-q_2q_3\ldots q_s).$$

Стоящее в скобках число не обязательно является простым; однако если его разложить на простые множители, то мы получим разложение на простые множители для n, включающее p_1. Таким образом, нами указано два разложения n (или, скорее, два способа получения разложений n на простые множители), одно из которых содержит простое число p_1 в качестве множителя, а другое не содержит. Иными словами, число n, будучи меньше m, имеет два различных разложения на простые множители. Тем самым теорема доказана [1]).

---

[1]) У читателя может возникнуть сомнение в необходимости доказательства, причем доказательства не очень простого, факта, который сам по себе кажется бесспорным: а как может быть разложение числа на простые множители не единственным? Однако наше убеждение в справедливости самого факта на самом деле диктуется нам лишь привычкой не задумываться над возможностью иной ситуации. Для того чтобы разрушить это убеждение, приведем следующий пример. Рассмотрим совокупность четных чисел; под «простыми» четными числами будем понимать такие числа, которые нельзя разложить в произведение двух четных чисел. Разумеется, каждое четное число можно разложить в произведение «простых», но *такое разложение может быть не единственным*; так

$$180 = 6 \cdot 30 = 10 \cdot 18$$

и числа 6, 10, 18 и 30 — все «простые».

Мы рекомендуем читателю самому разобрать, почему проведенное выше доказательство единственности разложения каждого целого числа на простые множители не может быть использовано для доказательства того, что каждое четное число единственным образом разлагается на «простые» четные множители (последнее утверждение, как мы видели, просто не верно!). — *Прим. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Доказательство Кантора существования трансцендентных чисел

В гл. VII было указано одно трансцендентное число и, таким образом, доказано существование таких чисел. В этом приложении будет дано независимое доказательство существования трансцендентных чисел посредством совершенно иного метода, а также будет показано, что трансцендентных чисел имеется бесконечно много. В действительности мы установим даже, что в известном смысле трансцендентных чисел больше, чем алгебраических.

Вначале отметим, что мы рассматриваем только действительные алгебраические числа и действительные трансцендентные числа. Корнями уравнения $x^2+1=0$, например, являются алгебраические, но не действительные алгебраические числа. Устанавливаемые нами результаты и их доказательства верны также и в комплексном случае, однако, ограничиваясь лишь действительными числами, мы достигаем некоторого упрощения.

Под *множеством* S понимают любую совокупность определенных различимых объектов. Эти объекты называют членами множества S, или *элементами* S. Множество S может быть конечным, как, например, множество простых чисел, меньших, чем 20:

$$S=\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

и может быть бесконечным, как, например, множество всех натуральных чисел:

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}.$$

Бесконечное множество называется *счетным,* если его элементы можно представить в виде последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \dots$$

так, что каждый элемент множества является членом этой последовательности. Например, множество четных натуральных чисел можно записать в виде последовательности

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \dots,$$

n-й член которой равен $2n$, и поэтому это множество счетно.

Множество всех целых чисел счетно, поскольку его можно представить в виде последовательности

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ \dots .$$

Конечно, это множество может быть представлено в виде последовательности также другими способами, и любой из способов достаточен для доказательства счетности рассматриваемого множества.

Чтобы убедиться в счетности некоторого множества, вовсе не необходимо знать какую-либо определенную формулу для n-го члена последовательности. Например, множество простых чисел

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ \dots$$

счетно, хотя мы и не знаем точного значения стомиллионного простого числа. Достаточно лишь знать, что такое простое число существует, и тем самым иметь возможность понять, что все множество имеет вид последовательности.

Установим далее, что *множество всех рациональных чисел счетно.* Заметим, что любое рациональное число является корнем уравнения первой степени $ax+b=0$ с целыми коэффициентами a и b. Мы будем, кроме того, считать число a положительным, не ограничивая, конечно, этим общности наших рассуждений. Например, рациональное число 3/5 есть корень уравнения $5x-3=0$. Условимся говорить, что уравнение $ax+b=0$ имеет *высоту*

$$1+a+|b|.$$

Высота каждого такого уравнения является, очевидно, положительным целым числом. Например, уравнение $5x-3=0$ имеет высоту 9. Заметим, что нет ни одного уравнения высоты 1 и имеется лишь одно уравнение высоты 2, а именно уравнение $x=0$.

ТАБЛИЦА 1

Высота	Уравнения
2	$x=0$
3	$2x=0,\ x+1=0,\ x-1=0$
4	$3x=0,\ 2x+1=0,\ 2x-1=0,\ x+2=0,\ x-2=0$
5	$4x=0,\ 3x+1=0,\ 3x-1=0,\ 2x+2=0,\ 2x-2=0,$ $x+3=0,\ x-3=0$

В табл. 1 приведены все уравнения первой степени, высота которых не превосходит 5. Отвечающие уравнениям табл. 1 рациональные числа собраны в табл. 2, где они расположены в порядке возрастания.

ТАБЛИЦА 2

Высота	Вводимые рациональные числа
2	0
3	$-1,\ +1$
4	$-2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2$
5	$-3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3$

Ясно, что любой высоте j отвечает лишь конечное число уравнений первой степени. В действительности имеется ровно $2j-3$ уравнений высоты j, однако точное их число, по существу, не имеет значения. Таким образом, с каждым увеличением высоты добавляется лишь конечное число новых рациональных чисел.

Поэтому все рациональные числа можно расположить в виде последовательности

$$0,\ -1,\ 1,\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ -3,\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 3,\ \ldots,$$

перечисляя сначала все корни уравнений высоты 2, затем все корни уравнений высоты 3, не перечисленные ранее, и т. д., повышая каждый раз высоту на единицу. Так как каждое рациональное число войдет в эту последовательность, то множество рациональных чисел счетно.

По существу то же доказательство применимо для установления *счетности множества всех алгебраических чисел.* Но сначала мы должны узнать кое-что о том, сколько корней может иметь алгебраическое уравнение. Напомним, что число называется алгебраическим, если оно удовлетворяет некоторому уравнению вида

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0, \qquad (1)$$

где коэффициенты a_n, a_{n-1}, ..., a_0 — целые. Можно предполагать, что a_n положительно, поскольку противный случай сводится к этому умножением уравнения на -1; корни уравнения от этого умножения не меняются.

Теорема 1. *Всякое уравнение вида* (1) *имеет самое большее n различных корней.*

Доказательство. Предположим, что, напротив, уравнение (1) имеет $n+1$ различных корней. Пусть это будет $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$. Воспользуемся теперь теоремой 2 гл. VII, или, точнее, небольшим ее видоизменением. Из доказательства этой теоремы вытекает, что если β есть корень уравнения $f(x)=0$, то $x-\beta$ является делителем $f(x)$ независимо от того, рационально β или нет. В случае, когда β иррационально, частное $q(x)$ имеет иррациональные коэффициенты, но это здесь, однако, несущественно. Таким образом, поскольку β_1 — корень уравнения $f(x)=0$, то

$x-\beta_1$ является делителем $f(x)$. Обозначим через $q_1(x)$ соответствующее частное. Тогда

$$f(x)=(x-\beta_1)\,q_1(x).$$

Число β_2, будучи корнем уравнения $f(x)=0$, должно, следовательно, быть также корнем уравнения $q_1(x)=0$. Но в таком случае $x-\beta_2$ есть делитель $q_1(x)$ с частным, скажем $q_2(x)$:

$$q_1(x)=(x-\beta_2)\,q_2(x),$$
$$f(x)=(x-\beta_1)\,q_1(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\,q_2(x).$$

Продолжая этот процесс для корней $\beta_3, \beta_4, \ldots, \beta_n$, получаем, что $f(x)$ можно записать в виде

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x-\beta_3)\ \ldots\ (x-\beta_n)\,q_n(x). \tag{2}$$

Так как $f(x)$ есть многочлен степени n, то многочлен $q_n(x)$ должен сводиться к постоянной. (Более того, многочлен $q_n(x)$ должен быть равен a_n, поскольку разложение (2) должно соответствовать виду (1) многочлена $f(x)$.)

Рассмотрим теперь корень β_{n+1}, который не совпадает ни с одним из остальных корней. Так как $f(\beta_{n+1})=0$, то, согласно (2), должно быть

$$(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)(\beta_{n+1}-\beta_3)\ \ldots\ (\beta_{n+1}-\beta_n)\,a_n=0,$$

что невозможно, поскольку произведение ненулевых множителей не может равняться нулю. Тем самым теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Множество алгебраических чисел счетно.*

Доказательство. Определим высоту уравнения (1) как

$$n+a_n+|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\ \ldots\ +|a_2|+|a_1|+|a_0|.$$

Поскольку a_n положительно, то высота является положительным целым числом. Ясно, что данное определение представляет собой непосредственное обобщение определения высоты уравнения первой степени. Как и раньше, все уравнения для малых значений высоты можно выписать в виде таблицы. Это сделано в табл. 3.

ТАБЛИЦА 3

Высота	Уравнения
2	$x=0$
3	$x^2=0,\quad 2x=0,\quad x+1=0,\quad x-1=0$
4	$x^3=0,\quad 2x^2=0,\quad x^2+1=0,\quad x^2-1=0,\quad 3x=0,$ $2x+1=0,\quad 2x-1=0,\quad x+2=0,\quad x-2=0$

Подобно тому, как это делалось в случае уравнений первой степени, перечислим теперь все новые алгебраические числа, возникающие из уравнений табл. 3. Если для каждой высоты их расположить в порядке возрастания, то получится последовательность

$$0;\ -1,\ 1;\ -2,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2;\ -3,\ -\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ -\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ 3,\ -4,\ \ldots \tag{3}$$

Число 0 возникает из рассмотрения единственного уравнения высоты 2, числа —1 и +1 — из рассмотрения уравнений высоты 3, числа —2, —1/2, 1/2, 2 — из рассмотрения уравнений высоты 4 и т. д. Число уравнений любой фиксированной высоты h конечно, поскольку степень n и коэффициенты $a_n, \ldots, a_0$ могут принимать значения лишь из конечного множества целых чисел. Кроме того, согласно теореме 1, каждое уравнение степени n имеет самое большее n корней. Следовательно, в последовательность (3) войдут все действительные алгебраические числа. Нужно отметить, что хотя при увеличении высоты мы можем на каждом этапе выписать все уравнения заданной высоты, нельзя продолжить перечисление корней уравнений в явной форме, как это было сделано для нескольких первых корней в (3).

Из теоремы 2 мы желаем вывести дальнейшее заключение, а именно, что *множество действительных алгебраических чисел, лежащих между* 0 *и* 1, *счетно.* Заключение это получается с помощью простого общего принципа, который будет сформулирован в виде теоремы о так называемых подмножествах. Множество M называется *подмножеством* множества S, если каждый элемент M есть также элемент S.

Теорема 3. *Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$ — счетное множество и M — его бесконечное подмножество. Пусть первый элемент S, принадлежащий M, есть a_{i_1}, второй — a_{i_2} и т. д. Тогда

$$M=\{a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots\}$$

и, следовательно, множество M счетно.

Каждое из рассмотренных нами до сих пор бесконечных множеств было счетным. В следующей теореме речь будет идти о бесконечном множестве, которое несчетно.

Теорема 4. *Множество действительных чисел несчетно.*

Доказательство. В силу теоремы 3 достаточно доказать несчетность множества действительных чисел, лежащих между 0 и 1. Под таким множеством мы будем понимать множество действительных чисел x, для которых $0<x\leqslant 1$, так что 1 включается в наше множество, а 0 отбрасывается. Предположим, что, напротив, множество действительных чисел, лежащих между 0 и 1, счетно. Пусть оно образует последовательность

$$r_1, r_2, r_3, r_4, \dots .$$

Запишем все числа r в виде десятичных дробей, используя при этом лишь бесконечные дроби, так что вместо конечных десятичных дробей берутся равные им бесконечные периодические дроби (см. § 5 гл. II), Например, число 1/2 записывается не в виде 0,5, а в виде 0,499999... . В результате будем иметь

$$r_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15} \ldots,$$

$$r_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25} \ldots,$$

$$r_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35} \ldots, \text{ и т. д.}$$

Построим теперь число

$$\beta = 0, b_1b_2b_3b_4 \ldots$$

следующим образом. В качестве b_1 берем любую цифру от 1 до 9, отличную от a_{11}, в качестве b_2 — любую цифру от 1 до 9, отличную от a_{22} и т. д. Вообще b_k есть любая не равная нулю цифра, отличная от a_{kk}. Так построенное число β не равно r_1 (поскольку β и r_1 имеют разные цифры на первом месте после запятой), не равно r_2 (поскольку β и r_2 имеют разные цифры на втором месте после запятой) и вообще не равно r_k (поскольку β и r_k имеют разные цифры на k-м месте после запятой). Таким образом, β не равно ни одному из чисел r. Но, с другой стороны, β есть действительное число, лежащее между 0 и 1. Полученное противоречие доказывает теорему.

Так как множество алгебраических чисел, лежащих между 0 и 1, счетно и так как, согласно только что доказанной теореме, множество действительных чисел, лежащих между 0 и 1, несчетно, то существуют действительные числа, не являющиеся алгебраическими. Поскольку эти числа трансцендентны, то тем самым доказано существование трансцендентных чисел.

Теорема 5. *Множество действительных трансцендентных чисел несчетно.*

Доказательство. Предположим, что множество действительных трансцендентных чисел счетно и что оно образует последовательность

$$t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots .$$

Согласно теореме 2, множество действительных алгебраических чисел счетно. Обозначим его через

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$. Тогда множество всех действительных чисел можно записать в виде последовательности.

$$t_1, a_1, t_2, a_2, t_3, a_3, t_4, a_4, \ldots,$$

что, однако, противоречит теореме 4. Таким образом, теорема 5 доказана.

Отметим, наконец, что из теорем 2 и 5 можно сделать такой вывод: трансцендентных чисел имеется «больше», чем алгебраических. В то время как множество алгебраических чисел можно представить в виде бесконечной последовательности, трансцендентных чисел имеется слишком много, чтобы такое их представление было возможным.

Упражнения

1. а) Найти все уравнения первой степени высоты 6; б) найти все корни этих уравнений, не являющиеся корнями уравнений первой степени меньшей высоты.
2. Доказать, что множество всех нечетных чисел (положительных и отрицательных) счетно.
3. Доказать, что множество всех многочленов $a+bx^4$, где a и b пробегают множество всех натуральных чисел, счетно.
4. Найти все уравнения высоты 5 и затем проверить, что последовательность (3) вплоть до элемента 3 выписана правильно.
5. Доказать, что множество чисел вида $a+b\sqrt{3}$, где a и b пробегают все рациональные числа, счетно.
6. Доказать, что если множество A можно разбить на два счетных множества B и C, то A счетно.
7. Доказать, что множество всех действительных чисел, лежащих строго между 0 и 0,1, несчетно.
8. Доказать, что множество всех иррациональных чисел несчетно.

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

И. М. Яглом

Доказательство иррациональности значений тригонометрических функций

Наша основная цель заключается в доказательстве следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $0<\alpha<90^\circ$. *Тогда, если угол* α *содержит рациональное число градусов и* $\alpha\neq 60^\circ$, *то число* $\cos\alpha$ *иррационально.*

Существует удивительно красивое (хоть и вовсе не простое) доказательство этой теоремы. Оно тесно связано с известным вопросом о том, *какие правильные многоугольники можно изобразить на листке бумаги в клетку так, чтобы все вершины этих многоугольников совпадали с узлами имеющейся на листке сетки квадратов* [см., например, Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы планиметрии, М., «Наука», 1966, задачу 33 а) и родственные ей задачи 33 б), в)]. При этом нам будет удобно еще несколько обобщить постановку вопроса. А именно вместо сетки квадратов мы рассмотрим произвольную прямоугольную решетку, т. е. множество точек, имеющих целочисленные координаты (x, y) в произвольной системе прямоугольных декартовых координат (рис. 23); при этом мы будем считать, что единицы измерения длин вдоль оси x и вдоль оси y могут быть и разными (в этом и состоит обобщение указанной выше задачи[1])). Мы

[1]) Последующие рассуждения сохраняют полную силу и в том случае, если угол решетки на плоскости между направлениями оси x и y не обязательно прямой, так что решетка составлена из равных параллелограммов. Однако для доказательства теоремы 1 нам вполне достаточно ограничиться случаем прямоугольной решетки.

зададимся вопросом о том, какие правильные многоугольники можно расположить на плоскости так, чтобы все их вершины совпадали с узлами нашей решетки.

Мы утверждаем, что *если правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ таков, что все его вершины совпадают с узлами (прямоугольной) решетки, то $n=3, 4$ или 6.*

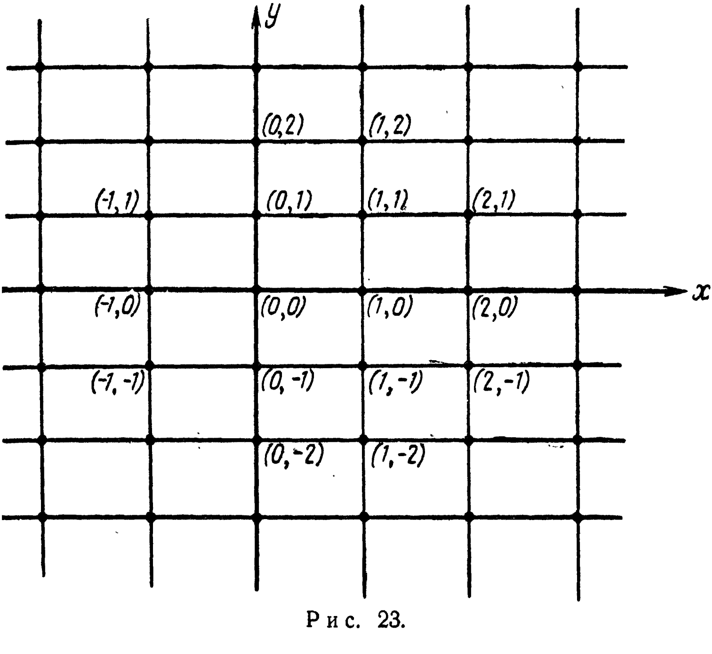


Рис. 23.

В самом деле, пусть $A_1, A_2\ldots A_n$ — правильный n-угольник, удовлетворяющий требуемому условию (рис. 24). Из произвольного узла нашей решетки отложим отрезки OB_1, OB_2, ..., OB_n, равные, параллельные и одинаково направленные с отрезками A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1. В таком случае *n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$ будет также правильным и также будет удовлетворять нашим условиям.*

В самом деле, все (равнобедренные) треугольники $OB_1B_2, OB_2B_3, \ldots, OB_nB_1$ будут, очевидно, равны

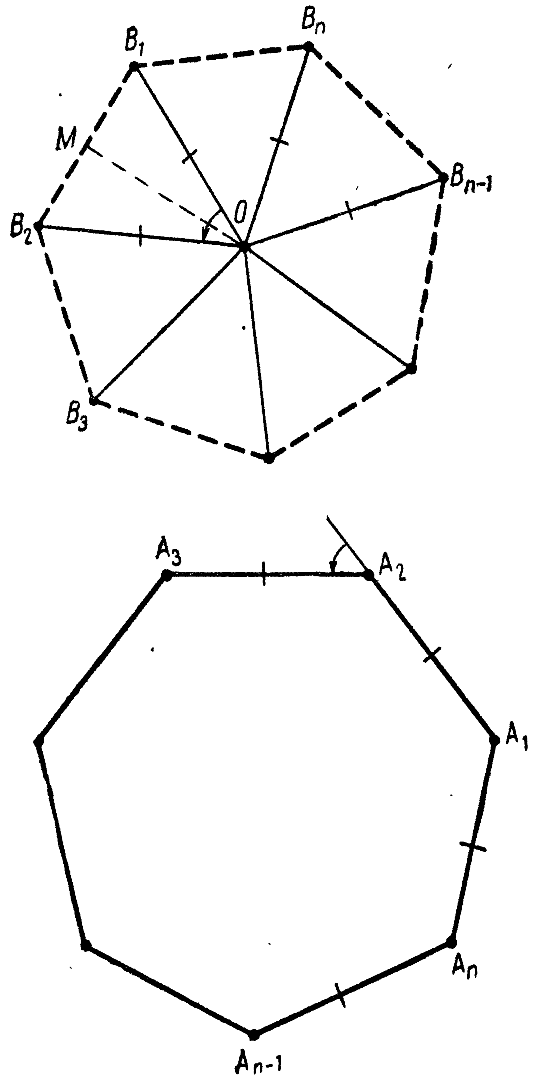


Рис. 24.

между собой; их боковые стороны $OB_1, OB_2, \ldots, OB_n$ будут равны стороне правильного n-угольника $A_1A_2, \ldots, A_n$, а углы $B_1OB_2, B_2OB_3, \ldots, B_nOB_1$ при вершинах — внешнему углу правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ (т. е. $\frac{360^\circ}{n}$; впрочем нам даже не обязательно знать величину углов $B_1OB_2, B_2OB_3, \ldots, B_nOB_1$). Поэтому все отрезки $B_1B_2, B_2B_3, \ldots, B_nB_1$ — основания рассматриваемых равнобедренных треугольников — равны между собой; равны между собой и углы $B_nB_1B_2, B_1B_2B_3, \ldots, B_{n-1}B_nB_1$, равные удвоенному углу при основании треугольников $OB_1B_2, OB_2B_3, \ldots, OB_nB_1$ [1]). Поэтому *n-угольник $B_1B_2\ldots B_n$ — правильный.*

С другой стороны, отрезок A_1A_2 по условию соединяет два узла A_1 и A_2 решетки; равный ему, параллельный и одинаково с ним направленный отрезок OB_1 исходит из узла O решетки. Параллельный перенос плоскости, переводящий точку A_1 в точку O, переводит отрезок A_1A_2 в отрезок OB_1; всю же решетку он переводит в ту же самую решетку (см. рис. 25). Поэтому точка B_1 также является узлом решетки. Аналогично доказывается, что и *все вершины правильного n-угольника $B_1B_2\ldots B_n$ совпадают с узлами решетки.*

Правильные n-угольники $B_1B_2\ldots B_n$ и $A_1A_2\ldots A_n$, разумеется, подобны между собой (ибо подобны любые два правильных n-угольника с одним и тем же

---

[1]) Очевидно, угол при основании любого из треугольников $OB_1B_2, OB_2B_3, \ldots, OB_nB_1$ равен

$$\frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right);$$

сумма двух таких углов равна

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{n}(180^\circ \cdot n - 360^\circ) = \frac{1}{n} \cdot 180^\circ (n-2),$$

т. е. совпадает с (внутренним) углом правильного n-угольника.

числом n сторон). При этом коэффициент подобия k равен (см. рис. 24):

$$k=\frac{B_1B_2}{A_1A_2}=\frac{2B_1M}{OB_1}=2\sin\angle MOB_1=$$
$$=2\sin\frac{\angle B_1OB_2}{2}=2\sin\left(\frac{1}{2}\,\frac{360^\circ}{n}\right)=2\sin\frac{180^\circ}{n}$$

(вот здесь мы существенно используем то, что внешний угол правильного n-угольника равен $\frac{360^\circ}{n}$ — последнее следует из того, что сумма всех внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°). Но если $n>6$, то $\frac{180^\circ}{n}<\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$, и в интервале $0<\alpha<90^\circ$ функция $\sin\alpha$ возрастает. Поэтому

$$k=2\sin\frac{180^\circ}{n}<2\sin 30^\circ=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Итак, при $n>6$ сторона правильного n-угольника $B_1B_2\ldots B_n$ будет равна

$$b=ak,$$

где a — сторона правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, а коэффициент подобия k меньше 1.

Примем теперь за исходный правильный n-угольник многоугольник $B_1, B_2\ldots B_n$ и построим, исходя из него, правильный n-угольник $C_1C_2\ldots C_n$ точно таким же образом, как, исходя из правильного n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$, мы построили многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$. Очевидно, что все вершины правильного n-угольника $C_1C_2\ldots C_n$ также будут совпадать с узлами нашей решетки; сторона c этого n-угольника будет равна

$$c=bk=ak^2.$$

Далее, исходя из n-угольника $C_1C_2\ldots C_n$, построим новый правильный n-угольник $D_1D_2\ldots D_n$, все вершины которого также совпадают с узлами решетки, а сторона d равна

$$d=ck=ak^3.$$

Продолжив этот процесс, мы получим последовательность правильных n-угольников $A_1A_2\ldots A_n$, $B_1B_2\ldots B_n$, $C_1C_2\ldots C_n$, $D_1D_2\ldots D_n, \ldots$, все вершины которых совпадают с узлами решетки и длины сторон

$$a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ \ldots$$

неограниченно уменьшаются (напоминаем, что $k<1$). Но это невозможно, так как отрезок, со-

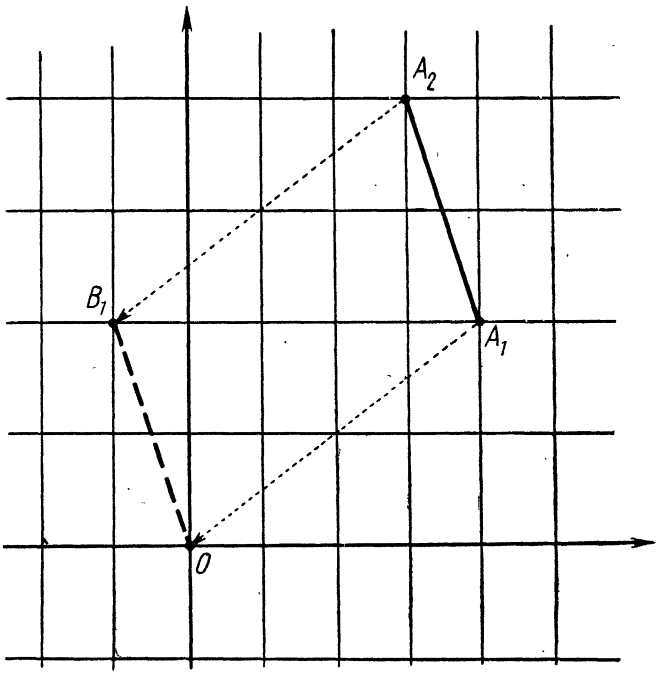


Рис. 25.

единяющий два узла решетки, не может быть слишком мал — он во всяком случае не меньше меньшей стороны образующих решетку прямоугольников (ср. рис. 23). Отсюда следует, что *при $n > 6$ построить правильный n-угольник, все вершины которого совпа-*

дали бы с узлами (прямоугольной) решетки, невозможно.

Аналогично доказывается и невозможность построения правильного пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$, все вершины которого совпадают с узлами (прямоугольной) решетки. В самом деле, обозначим точки пересечения диагоналей этого пятиугольника буквами

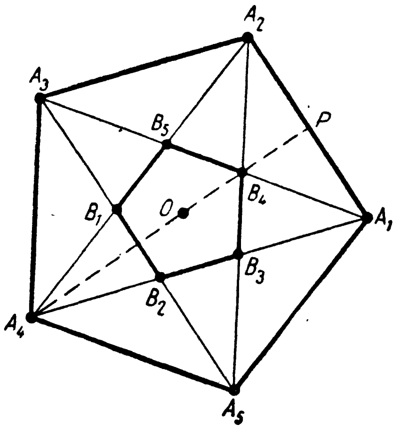


Рис. 26.

B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, как это указано на рис. 26. Так как четырехугольник $A_1A_2B_1A_5$ — параллелограмм [1]), то отрезки A_1A_2 и A_5B_1 равны, параллельны и одинаково направлены. Но отрезок A_1A_2 по условию соединяет узлы A_1 и A_2 решетки, а отрезок A_5B_1 исходит из узла A_5 решетки; поэтому и конец B_1 последнего отрезка также совпадает с одним из узлов решетки. Аналогично этому доказывается, что и точки B_2, B_3, B_4, B_5 также совпадают с узлами прямоугольной решетки.

---

[1]) Из того, что перпендикуляр A_4P, опущенный из вершины A_4 на сторону A_1A_2, является осью симметрии пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ вытекает, что $A_1A_2 \perp A_4P$ и $A_3A_5 \perp A_4P$, т. е. $A_5A_3 \parallel A_1A_2$. Аналогично доказывается и что $A_2A_4 \parallel A_1A_5$.

Так как пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ правильный, то и пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ — тоже правильный[1]. Ясно, что правильные пятиугольники $B_1B_2B_3B_4B_5$ и $A_1A_2A_3A_4A_5$ подобны; из рассмотрения треугольника $A_4A_1A_2$, очевидно, следует, что коэффициент подобия[2])

$$k = \frac{B_1B_2}{A_4A_1} = \frac{A_4B_2}{A_4A_1} < 1.$$

Построим теперь, исходя из правильного пятиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$, новый правильный пятиугольник $C_1C_2C_3C_4C_5$; исходя из правильного пятиугольника $C_1C_2C_3C_4C_5$ — правильный пятиугольник $D_1D_2D_3D_4D_5$ и т. д. (см. рис. 27). Очевидно, если $a, b, c, d, \ldots$ — стороны правильных пятиугольников $A_1A_2A_3A_4A_5$, $B_1B_2B_3B_4B_5$, $C_1C_2C_3C_4C_5$, $D_1D_2D_3D_4D_5$, ..., то

$$b = ak, \quad c = bk = ak^2, \quad d = ck = ak^3, \quad \ldots,$$

т. е. стороны этих правильных пятиугольников (все вершины которых должны совпадать с узлами нашей прямоугольной решетки!) неограниченно уменьшаются. Отсюда, в точности как и раньше, заключаем, что *построить правильный пятиугольник, все вершины которого совпадают с узлами (прямоугольной) решетки, нельзя.*

Нетрудно построить правильный четырехугольник (квадрат), все вершины которого совпадают с узлами (даже квадратной!) решетки (рис. 28, *а, б, в*); можно также построить правильный треугольник (рис. 29, *а*) или правильный шестиугольник (рис. 29, *б*), все вер-

---

[1]) То обстоятельство, что пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ является правильным, равносильно существованию вращения на угол $\frac{360°}{5}$ $(= 72°)$ вокруг некоторой точки O (центра правильного пятиугольника), переводящего $A_1A_2A_3A_4A_5$ в себя. Но при этом вращении каждая из диагоналей A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_1, A_5A_2 правильного пятиугольника переходит в другую диагональ и пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ переходит в себя; значит он тоже является правильным (с тем же центром O).

[2]) Нетрудно подсчитать, что

$$k = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38;$$

нам точное значение коэффициента подобия k не понадобится.

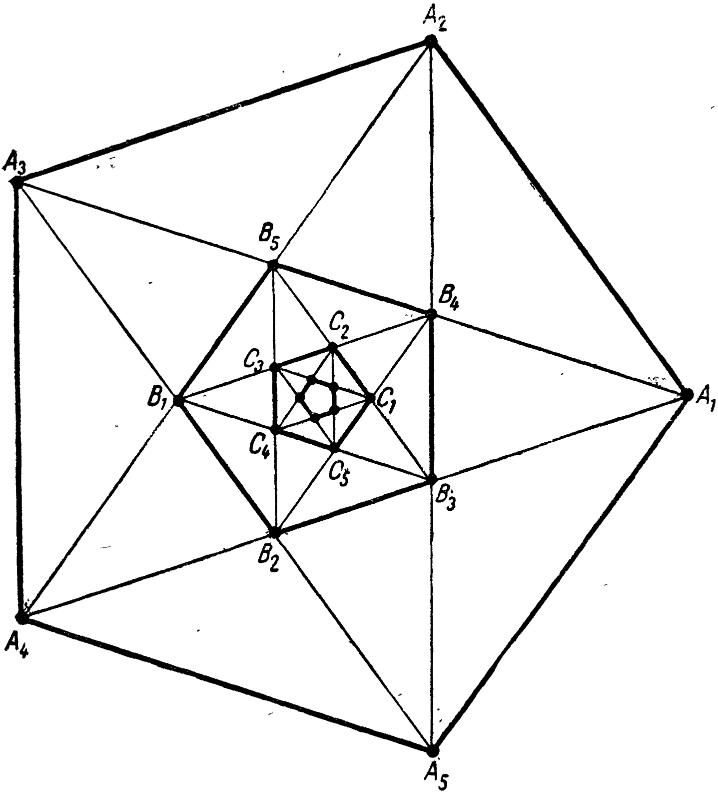


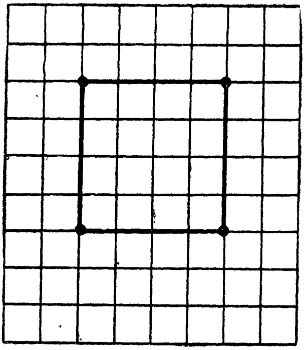
Рис. 27.

шины которых совпадают с узлами прямоугольной решетки [1]).

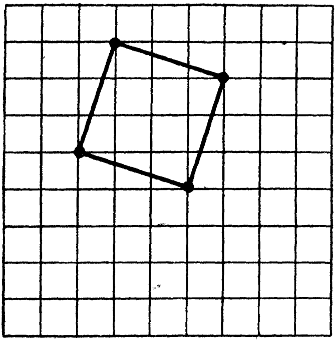
Вернемся теперь к интересующей нас теореме.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что угол α (где $0 < \alpha < 90°$) содержит рациональное

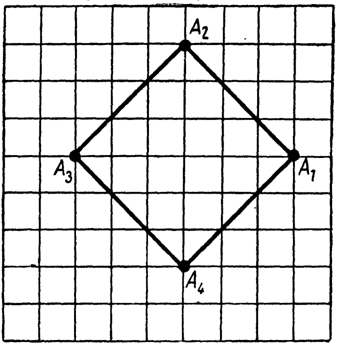
[1]) Можно доказать, что *правильный треугольник и правильный шестиугольник* *нельзя* *нарисовать на плоскости так, чтобы все их вершины совпадали с узлами сетки* *квадратов* (см., например, решение задачи 33 а), указанной на стр. 168 книги Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома). Нам, однако, здесь это утверждение не понадобится.



а



б



число градусов и число $\cos\alpha = p/q$ — рационально; выясним, каким именно может быть при этом угол α. Ясно, что число

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{p}{q}\right)^2} = \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q},$$

вообще говоря, будет уже иррационально. Число

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 =$$
$$= 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1 = \frac{2p^2-q^2}{q^2} = \frac{p_2}{q_2}$$

(см. выше, стр. 91—92; здесь мы обозначили $(2p^2-q^2)/q^2$ через p_2/q_2) будет снова рационально; число же

$$\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha = 2\frac{p}{q}\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q} =$$
$$= \frac{2p}{q^2}\sqrt{q^2-p^2} = \frac{r_2}{s_2}\sqrt{q^2-p^2}$$

(мы обозначили дробь $2p/q^2$ через r_2/s_2) будет рациональным кратным выражения $\sqrt{q^2-p^2}$. Точно так же число

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\frac{p}{q} =$$
$$= \frac{4p^3-3pq^2}{q^3} = \frac{p_3}{q_3}$$

рационально и число

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin\alpha =$$
$$= 4\left(\frac{p}{q}\right)^2\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q} - \frac{\sqrt{q^2-p^2}}{q} =$$
$$= \frac{4p^2-q^2}{q^3}\sqrt{q^2-p^2} = \frac{r_3}{s_3}\sqrt{q^2-p^2}$$

является рациональным кратным выражения $\sqrt{q^2-p^2}$ (здесь мы используем формулы, указанные на стр. 91, и формулу (7) стр. 92).

Мы утверждаем, что *каков бы ни был номер k, число $\cos k\alpha$ рационально, а число $\sin k\alpha$ является рациональным кратным выражения $\sqrt{q^2-p^2}$.* Для того чтобы убедиться в этом, мы воспользуемся приемом, уже использованным один раз при доказательстве теоремы приложения Б. А именно: мы покажем, что наше утверждение, справедливое, как мы только что убедились, при $k=1$, 2 и 3, будет верным для всех номеров k, т. е. что оно никак не может потерять силу при переходе от некоторого номера k к следующему

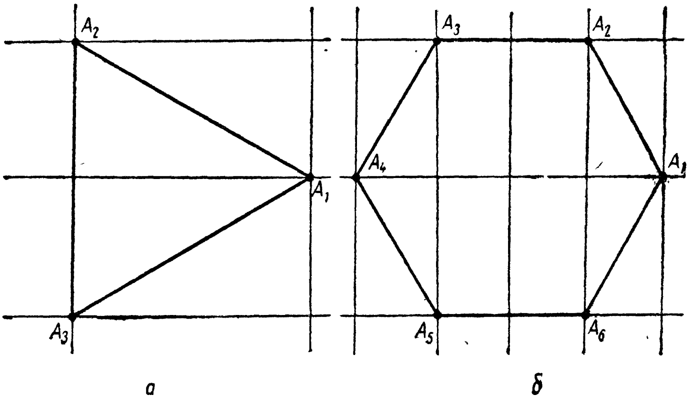


Рис. 29.

за ним номеру $k+1$ [1]). В самом деле, предположим уже известным, что число $\cos k\alpha=\frac{p_k}{q_k}$ рационально, а число $\sin k\alpha=\frac{r_k}{s_k}\sqrt{q^2-p^2}$ является рациональным кратным выражения $\sqrt{q^2-p^2}$. Тогда и число $\cos(k+1)\alpha=\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha=\frac{p_k}{q_k}\cdot\frac{p}{q}-$

$$-\frac{r_k}{s_k}\sqrt{q^2-p^2}\cdot\frac{1}{q}\sqrt{p^2-q^2}=\frac{pp_k}{qq_k}-\frac{r_k(q^2-p^2)}{qs_k}=$$

$$=\frac{pp_ks_k+p^2r_kq_k-q^2r_kq_k}{qq_ks_k}=\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

[1]) Этот метод рассуждения называется методом математической индукции (см., например, книгу И. С. Соминского, Л. И. Головиной и И. М. Яглома «О математической индукции», М., «Наука», 1966).

рационально, а число

$$\sin(k+1)\alpha = \cos k\alpha \sin\alpha + \sin k\alpha \cos\alpha =$$
$$= \frac{p_k}{q_k}\cdot\frac{1}{q}\sqrt{q^2-p^2} + \frac{r_k}{s_k}\sqrt{q^2-p^2}\cdot\frac{p}{q} =$$
$$= \left(\frac{p_k}{qq_k} + \frac{pr_k}{qs_k}\right)\sqrt{q^2-p^2} =$$
$$= \frac{p_k s_k + pq_k r_k}{qq_k s_k}\sqrt{q^2-p^2} = \frac{r_{k+1}}{s_{k+1}}\sqrt{q^2-p^2}$$

представляет собой рациональное кратное $\sqrt{q^2-p^2}$.

Предположим теперь, что угол α содержит рациональное число градусов; это обстоятельство нам будет удобно записать в виде

$$\alpha = \frac{m}{n}\,360^\circ,$$

где m/n — несократимая дробь. Рассмотрим n точек единичной окружности с центром в начале O (декартовой прямоугольной) системы координат (с одинаковыми единицами измерения длин вдоль обеих осей!)

$$A_1(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ A_2(\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha),\ A_3(\cos 3\alpha,\ \sin 3\alpha),\ \ldots$$
$$\ldots,\ A_{n-1}(\cos(n-1)\alpha,\ \sin(n-1)\alpha),\ A_n(\cos n\alpha,\ \sin n\alpha),$$

где числа в скобках означают координаты точек. Точка $A_k(\cos k\alpha,\ \sin k\alpha)$ (где $k=1,\ 2\ \ldots,\ n$) характеризуется тем, что радиус-вектор OA_k этой точки образует с осью x (быть может, больший 360°) угол $k\alpha$ (рис. 30); так как $n\alpha=m\cdot 360^\circ$, то точка A_n имеет координаты (1.0). Поскольку дробь m/n несократима, то все наши точки различны: в самом деле, совпадение точек $A_i(\cos i\alpha,\ \sin i\alpha)$ и $A_j(\cos j\alpha,\ \sin j\alpha)$, где $0<i<j\leqslant n$ означало бы, что разность углов $j\alpha$ и $i\alpha$ представляет собой целое кратное «полного угла» 360°:

$$j\alpha - i\alpha = 360^\circ\cdot l,$$

где j — целое число, или

$$\alpha = \frac{l}{j-i}\,360^\circ;$$

таким образом, мы приходим к равенству $\frac{m}{n}360^\circ = \frac{l}{j-i}360^\circ$, где $j-i<n$, доказывающему сократимость дроби $\frac{m}{n}$.

Заменим теперь все углы $k\alpha$ (где $k=1, 2, \ldots, n$), образованные радиусами-векторами $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ с осью x, меньшими 360°

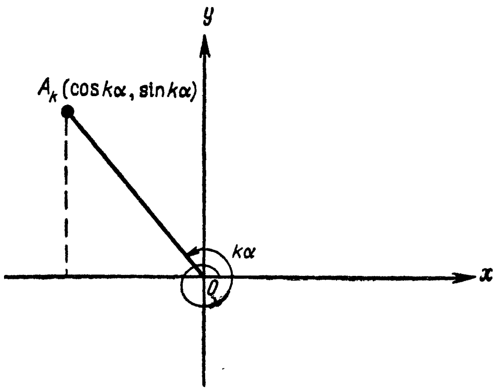


Рис. 30.

углами $\alpha_1=\alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n=0^\circ$. При этом величина угла α_k равна $k\alpha=t\cdot 360^\circ$, где t — соответствующим образом подобранное целое число; поэтому все углы

$$\alpha_k = k\alpha - t\cdot 360^\circ = k\cdot\frac{m}{n}360^\circ - t\cdot\frac{n}{n}360^\circ =$$

$$= \frac{km-tn}{n}\cdot 360^\circ = (km-tn)\cdot\frac{360^\circ}{n} \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

представляют собой целые кратные угла $\frac{360^\circ}{n}$.

Но различных целых кратных угла $\frac{360^\circ}{n}$, меньших 360°, существует ровно n; поэтому, поскольку все углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ различны (ибо различны точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$), то совокупность (заключенных в пределах $0\leqslant\alpha<360^\circ$) углов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, образованных отрезками $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$ с осью x, совпадает с совокупностью углов $0°$, $\frac{360°}{n}$, $2\cdot\frac{360°}{n}$, $3\cdot\frac{360°}{n}$, ..., $(n-1)\cdot\frac{360°}{n}$, т. е. точки $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ *являются вершинами правильного n-угольника* (ср. рис. 31, где $\alpha=\frac{2}{9}\cdot 360°$ и $n=9$).

Воспользуемся теперь тем, что, как было доказано выше,

$$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)=\left(\frac{p}{q},\ \frac{r}{s}\sqrt{q^2-p^2}\right),$$

$$(\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha)=\left(\frac{p_2}{q_2},\ \frac{r_2}{s_2}\sqrt{q^2-p^2}\right),$$

$$(\cos 3\alpha,\ \sin 3\alpha)=\left(\frac{p_3}{q_3},\ \frac{r_3}{s_3}\sqrt{q^2-p^2}\right), \ldots$$

$$\ldots,(\cos(n-1)\alpha, \sin(n-1)\alpha)=\left(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}\sqrt{q^2-p^2}\right),$$

$$(\cos n\alpha,\ \sin n\alpha)=(1,0),$$

где

$$\frac{p}{q},\ \frac{r}{s}=\frac{1}{q};\ \frac{p_2}{q_2}=\frac{2p^2-q^2}{q^2},\ \frac{r_2}{s_2}=\frac{2p}{q^2};\ \frac{p_3}{q_3}=\frac{4p^3-3pq^2}{q^3},$$

$$\frac{r_3}{s_3}=\frac{4p^2-q^2}{q^3},\ \ldots,\ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$$

— некоторые рациональные числа. Пусть Q — общий знаменатель всех дробей

$$\frac{p}{q},\ \frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \ldots,\ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},$$

а S — общий знаменатель дробей

$$\frac{r}{s},\ \frac{r_1}{s_1},\ \frac{r_2}{s_2},\ \ldots,\ \frac{r_{n-1}}{s_{n-1}};$$

в таком случае координаты наших точек можно записать так:

$$\left(\frac{P}{Q},\ \frac{R}{S}\sqrt{q^2-p^2}\right),\ \left(\frac{P_2}{Q},\ \frac{R_2}{S}\sqrt{q^2-p^2}\right),$$

$$\left(\frac{P_3}{Q},\ \frac{R_3}{S}\sqrt{q^2-p^2}\right),\ \ldots,\ \left(\frac{P_{n-1}}{Q},\ \frac{R_{n-1}}{S}\sqrt{q^2-p^2}\right),$$

$$\left(\frac{Q}{Q},\ \frac{0}{S}\sqrt{q^2-p^2}\right),$$

где $P, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, Q; R, R_2, R_3, \ldots, R_{n-1}, S$ — целые числа. Рассмотрим теперь на плоскости прямоугольную решетку, образованную прямыми, параллельными осям координат и удаленными от оси

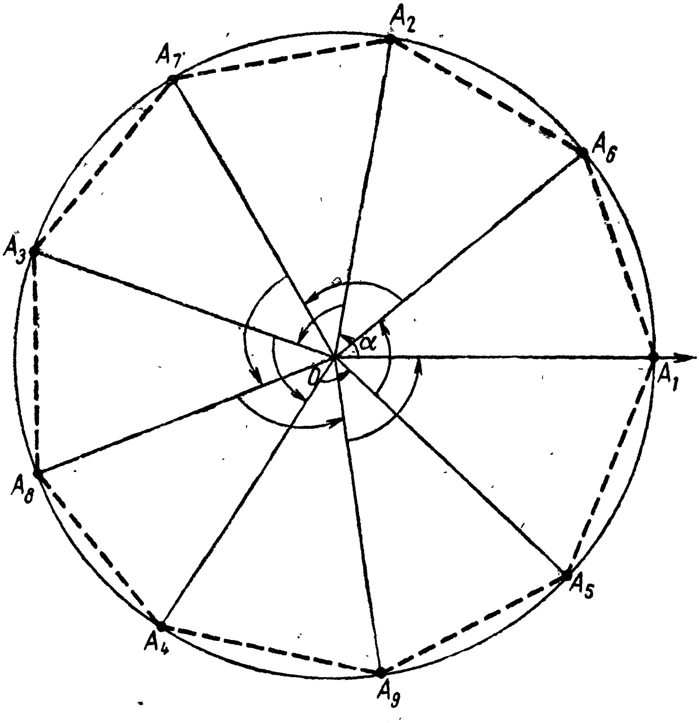


Рис. 31.

абсцисс на всевозможные целые кратные величины $\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}$ $\left(\text{т. е. на расстояния } 0, \pm\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S},\right.$ $\left.\pm 2\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}, \pm 3\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}, \ldots\right)$, а от оси ординат — на всевозможные целые кратные величины $\frac{1}{Q}$ $\left(\text{т. е. на расстояния } 0, \pm\frac{1}{Q}, \pm 2\frac{1}{Q}, \pm 3\frac{1}{Q}, \ldots\right)$.

Так как *точки* $A_1, A_2, \ldots A_n$ имеют координаты $A_1\left(P\cdot\frac{1}{Q},\ R\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}\right)$, $A_2\left(P_2\cdot\frac{1}{Q},\ R_2\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}\right)$, $A_3\left(P_3\cdot\frac{1}{Q},\ R_3\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}\right), \ldots$

$$\ldots,\ A_{n-1}\left(P_{n-1}\cdot\frac{1}{Q},\ R_{n-1}\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}\right),$$

$$A_n\left(Q\cdot\frac{1}{Q},\ 0\cdot\frac{\sqrt{q^2-p^2}}{S}\right),$$

то все они *совпадают с узлами построенной прямоугольной решетки* (рис. 32).

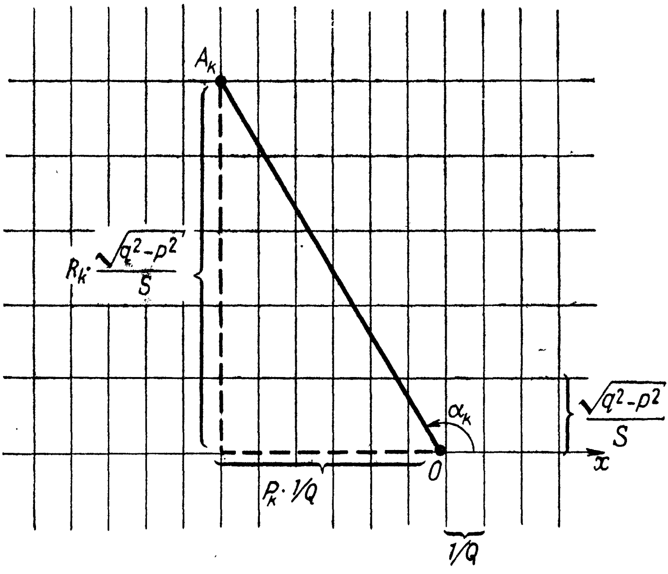


Рис. 32.

Но мы знаем, что правильный n-угольник можно лишь в том случае поместить на плоскости так, чтобы все его вершины совпадали с узлами прямоугольной решетки, если $n=3$, 4 или 6. А так как в силу условия теоремы 1 угол α заключен в пределах $0<\alpha<90°$, то единственное возможное значение (положительного, но меньшего 90°!) угла $\alpha=\frac{m}{n}\cdot 360°$ есть $\alpha=\frac{360°}{6}=60°$. Хорошо известно, что $\cos 60°=1/2$ в самом деле рационален; для всех же других углов α (где $0<\alpha<90°$), содержащих рациональное число градусов, $\cos\alpha$ иррационален. Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 1 сразу вытекает, что имеют место

Теорема 2. *Пусть* $0<\alpha<90°$. *Тогда если угол* α *содержит рациональное число градусов и* $\alpha\neq 30°$, *то число* $\sin\alpha$ *иррационально*,

и

Теорема 3. *Пусть* $0<\alpha<90°$. *Тогда если угол* α *содержит рациональное число градусов и* $\alpha\neq 45°$, *то число* $\operatorname{tg}\alpha$ *иррационально*.

Таким образом, из всех углов, содержащих рациональное число градусов, лишь углы вида $k\cdot 90°$ и $\pm 60°+k\cdot 180°$, где k — целое число, имеют рациональный косинус; лишь углы вида $k\cdot 90°$ и $\pm 30°+k\cdot 180°$ имеют рациональный синус и лишь углы вида $k\cdot 180°$ и $\pm 45°+k\cdot 180°$ имеют рациональный тангенс.

Первое доказательство теоремы 2. Так как

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha),$$

то число $\sin\alpha$ рационально в том и только в том случае, если рационально число $\cos(90°-\alpha)$; кроме того, если угол α содержит рациональное число градусов, то, разумеется, содержит рациональное число градусов и угол $90°-\alpha$. Поэтому если $0<\alpha<90°$ и угол α содержит рациональное число градусов, то число $\sin\alpha$ может быть рациональным лишь в том случае, когда $\cos(90°-\alpha)$ рационален, т. е. в силу теоремы 1 $90°-\alpha=60°$ и, следовательно, $\alpha=30°$. (Если $\alpha=30°$, то число $\sin\alpha=\sin 30°=\frac{1}{2}$ в самом деле рационально.)

Второе доказательство теоремы 2. В § 2 гл. V (см. стр. 94) было доказано, что если число $\cos 2\alpha$ иррационально, то число $\sin\alpha$ никак не может быть рациональным; с другой стороны, ясно, что если угол α содержит рациональное число градусов, то и угол $\beta=2\alpha$ содержит рациональное число градусов. Но из теоремы 1 и формулы $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ вытекает, что из всех углов β, таких, что β содержит рациональное число градусов и $0<\beta<180^\circ$, лишь углы 60°, 90° и 120° $(=180^\circ-60^\circ)$ имеют рациональный косинус. Поэтому из всех углов $\alpha=\beta/2$, где $0<\alpha<90^\circ$ и угол α содержит рациональное число градусов, лишь углы $30^\circ=60^\circ/2$, 45° и $60^\circ=120^\circ/2$ могут иметь рациональный синус. Синус угла 30° равен $1/2$, т. е. действительно рационален; однако $\sin 45^\circ=\sqrt{2}/2$ иррационален, ибо иррационально число $\sqrt{2}$ (см. § 3 гл. III, стр. 59), и $\sin 60^\circ=\sqrt{3}/2$ иррационален, ибо иррационально число $\sqrt{3}$ (см. § 4 гл. III, стр. 60). Отсюда и следует, что если угол α содержит рациональное число градусов, $0<\alpha<90^\circ$ и $\alpha\neq30^\circ$, то число $\sin\alpha$ иррационально.

Доказательство теоремы 3. В § 2 гл. V было доказано, что если число $\cos 2\alpha$ иррационально, то число $\operatorname{tg}\alpha$ никак не может быть рациональным. Отсюда и из того, что в пределах $0<\beta<180^\circ$ лишь углы $\beta=60^\circ$, $\beta=90^\circ$ и $\beta=120^\circ$, содержащие рациональное число градусов, имеют рациональные косинусы, в точности как во втором доказательстве теоремы 2, доказывается, что из всех углов $\alpha=\beta/2$, таких, что угол α содержит рациональное число градусов и $0<\alpha<90^\circ$, лишь углы 30°, 45° и 60° могут иметь рациональные тангенсы. Число $\operatorname{tg}45^\circ=1$, очевидно, в самом деле рационально; что же касается чисел $\operatorname{tg}30^\circ=\sqrt{3}/3$ и $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$, то эти числа иррациональны, ибо, как мы знаем (см. стр. 60), число $\sqrt{3}$ иррационально. Таким образом, из всех содержащих рациональное число градусов углов α, где $0<\alpha<90^\circ$, рациональный тангенс имеет лишь угол 45°.

Приведенное здесь «геометрическое» доказательство теорем 1—3 не является единственно возможным. Существуют также чисто алгебраические доказательства этих теорем, опирающиеся на известную формулу Муавра из учения о комплексных числах

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n,$$

$$n \text{ — целое}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

По этому поводу см. задачу 239 из книги: Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М., Избранные задачи и теоремы элементарной математики (арифметика и алгебра), М., «Наука», 1965, и решение этой задачи.

Ответы и указания к упражнениям

ГЛАВА I

§ 1, *стр.* 19

1. а) Ложно: $1+1=2$,
   б) Верно,
   в) Ложно: $1-(-1)=2$,
   г) Верно,
   *д) Ложно: $2^1+2^2=6$, и 6 не есть целая степень двойки.
2. Восемь, именно: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.
3. Пять, именно: 1, 2, 4, 8, 16.
4. 4.
5. 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

*6. Указание. Найти удачное обозначение для чисел, являющихся точными кратными данного числа d.

§ 3, *стр.* 26

1. Да, $q=-7$.
2. Да, $q=-7$.
3. Да, $q=7$.
4. Нет.
5. Да, $q=-35$.
6. Да, $q=0$.
7. Нет.
8. Да, $q=1$.
9. Нет, поскольку q не единственно.
10. Да.
11. Да.

§ 4, *стр.* 28

1. а), б) и е) верны, в), г) и д) ложны.
2. Верно во всех случаях.
3. а), в) и г) верны, б) и д) ложны.
4. а), б), в), г) верны, д) ложно.

§ 6, *стр.* 31

6. а) не замкнуто, б) замкнуто, в) замкнуто, г) не замкнуто, д) замкнуто, е) замкнуто, ж) замкнуто.

ГЛАВА II

§ 2, *стр.* 39

а) 0,25, б) 0,015, в) 0,8025,
г) 0,0112, д) 2,816, е) 1,2596.

§ 3, *стр.* 45

2. а) Ложно, как видно из случая $b=10$,
   б) верно,
   в) ложно, как видно из случая $b=10$,
   г) ложно, как видно из случая $b=7$,
   д) ложно, как видно из случая $b=7$,
   е) верно.
3. а) Ложно, как видно из случая дроби $^3/_6$,
   б) верно,
   в) ложно, как видно из случая дроби $^3/_6$.
4. Если $ab=0$, то $a=0$ или $b=0$.
5. б) Да.

§ 4, *стр.* 50

а) 1/9,
б) 17/3,
в) 3706/9900=1853/4950,
г) 9978/9990=1663/1665,
д) 1/9900,
е) 1.

§ 5, *стр.* 52

1. а) 0,12, б) 0,3, в) 4,8, г) 10,0.
2. а) 0,72999 ..., б) 0,0098999 ..., в) 12,999 ....
3. Те рациональные числа a/b (a/b несократимо), у которых b не делится ни на какое простое число, отличное от 2 и 5, и у которых, кроме того, $a \neq 0$.
4. Таких чисел нет.

ГЛАВА III

§ 5, *стр.* 63

7. Рационально.

ГЛАВА IV

§ 1, *стр.* 75

1. Например, $\sqrt{3}$ и $-\sqrt{2}$.
2. Например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.
3. Например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.
4. Например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$.
5. Например, $\sqrt{3}$ и $1/\sqrt{2}$.

§ 2, *стр.* 79

1. а) $n=3$, $c_3=15$, $c_2=-23$, $c_1=9$, $c_0=-1$;
   б) $n=3$, $c_3=3$, $c_2=2$, $c_1=-3$, $c_0=-2$;
   в) $n=3$, $c_3=2$, $c_2=7$, $c_1=-3$, $c_0=-18$;
   г) $n=4$, $c_4=2$, $c_3=0$, $c_2=-1$, $c_1=-3$, $c_0=5$;
   д) $n=5$, $c_5=3$, $c_4=0$, $c_3=-5$, $c_2=6$, $c_1=-12$, $c_0=8$;
   е) $n=4$, $c_4=1$, $c_3=0$, $c_2=-3$, $c_1=-5$, $c_0=9$.

2. а) Да. б) Да. в) Да. г) Нет. д) Да. е) Нет.

4. Указание. Умножить уравнение на произведение $b_3b_2b_1b_0$.

§ 3, *стр.* 85

2. Указание. Использовать теорему 1 гл. IV и один из результатов упр. 1.

7. Указание. Например, 2/2 является корнем уравнения $x^2-1=0$.

ГЛАВА V

§ 1, *стр.* 93

1. а) Указание. Заменить θ на 40° в соотношении (5) и использовать тот факт, что $\cos 120 = -0{,}5$.

   б) Указание. Использовать результат упражнения 1 а) и одно из соотношений (8).

   в) Указание. Использовать первое из соотношений (8) с $\theta=10^\circ$.

   г) Указание. Использовать результат упр. 1 а) и тождество $\cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)$.

3. Указание. В соотношении (1) заменить A на 3θ, B на 2θ и воспользоваться затем соотношениями (3), (4), (5) и (7).

4. а), б), в), г), и) и л) рациональны.

§ 2, *стр.* 95

1. а) Указание. Воспользоваться тем, что $\cos 30^\circ=\sqrt{3}/2$.

   в) Указание. Воспользоваться тем, что $\cos 45^\circ=\sqrt{2}/2$.

   г) Указание. Использовать иррациональность числа $\cos 40^\circ$ и соотношения $\cos 2\cdot 35^\circ=\cos 70^\circ=\cos(90-20^\circ)=\sin 20^\circ$ и т. д.

3. б) Да.

§ 3, *стр.* 97

3. Указание. Вспомнить, что $\log m+\log n=\log mn$.

4. Указание. Использовать, помимо других результатов, пример 3 из текста.

§ 4, *стр.* 101

1. а) Указание. $\sqrt{3}$ есть корень уравнения $x^2-3=0$.

б) Указание $\sqrt[3]{5}$ есть корень уравнения $x^3-5=0$.

в) Указание $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ есть корень уравнения $x^4-10x^2+1=0$.

См. соотношение (5) гл. IV.

г) Указание. См. соотношение (6) гл. V.

ГЛАВА VI

§ 1, *стр.* 114

5. а) Ложно, например, при $r=-2$, $s=-3$.

б) Ложно, например, при $r=4$, $s=3$ и $c=-2$.

в) Верно.

г) Верно.

д) Верно.

е) Ложно, например, если $\lambda={}^2/_5$.

ж) Верно.

6. $-10<\lambda<10$.

8. Да. Различие в том, что разность $u-v$ в б) может обращаться в 0, а в а) не может.

§ 2, *стр.* 117

2. а) 1, б) 3, в) 4, г) 6, д) 5, е) 7, ж) 3, з) 31, и) —2, к) —22.

§ 3, *стр.* 120

1. 2/1, 3/2, 5/3, 7/4, 9/5, 10/6, 12/7, 14/8, 16/9, 17/10.
2. 3/1, 6/2, 9/3, 13/4, 16/5, 19/6, 22/7, 25/8, 28/9, 31/10.
3. Указание. Вывести это из теоремы 3 гл. VI.

*5. Указание. Рассмотреть случай, когда $\lambda=\sqrt{2}$ и $n=4$, и установить, что не существует несократимой дроби $m/4$ (или, иными словами, дроби $m/4$ с нечетным m), для которой

$$-\frac{1}{8}<\lambda-\frac{m}{4}<\frac{1}{8}.$$

§ 4, *стр.* 127

1. $n=4$, $m=7$.

2.

	а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)	з)	и)	к)	л)	м)	н)	о)
n	2	3	4	4	1	3	5	5	5	5	1	1	1	7
m	3	5	7	7	1	4	7	7	7	7	3	3	3	22

§ 5, *стр.* 132

1. Указание. Рассмотреть первое целое число, большее λ, и первое целое число, меньшее λ.

2. Указание. Показать, что исключение составляет число m/n с $n=1$ и m равным более удаленному от λ числу из двух чисел, одно из которых есть первое целое число, предшествующее λ, а второе — первое целое число, следующее за λ.

3. а) Например, 3/2 и 4/3.
   б) Например, 3/2 и 5/3.
   в) Например, 7/3 и 9/4.

4. а) Все эти числа.
   б) 1/1 и 14/10, если его взять в приведенной форме 7/5.

5. а) 3/1, 31/10, 314/100, б) 3/1.

*6. Указание. Доказать, что неравенства теоремы 5 неверны для $\lambda=3/5$ и любого числа m/n с $n>5$, рассуждая следующим образом. Разность $\lambda-m/n$ либо положительна, либо отрицательна. Когда она положительна, она равна самое меньшее $1/5n$, а когда отрицательна, равна самое большее $-1/5n$.

*7. а) Указание. Для доказательства неравенства двух рассматриваемых рациональных чисел использовать основную теорему арифметики, доказанную в приложении Б.

б) Указание. Показать, что неравенства теоремы 5 не могут выполняться ни для какого рационального числа m/n, у которого n больше, чем b.

§ 6, *стр.* 135

1. б) Таких чисел нет.
2. б) 1/1, 2/1, 3/2.
3. б) 1/1, 2/1.

ГЛАВА VII

§ 1, *стр.* 142

1. 2, 2, 8 и 10^{-1}.
2. Нет.

4. б) $|x-7|=x-7$, если $x\geqslant 7$;
   $|x-7|=-x+7$, если $x\leqslant 7$.

5. а) $x=-1$; б) $x=2$; в) $x=7$ и $x=-7$;

   г) все значения x.

§ 3, *стр.* 145

2. $\alpha^7-\beta^7=(\alpha-\beta)(\alpha^6+\alpha^5\beta+\alpha^4\beta^2+\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4+\alpha\beta^5+\beta^6)$

3. Указание. Всякий корень уравнения $f(x)=0$ является также корнем уравнения $f(x)g(x)=0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

стр. 167

1. а) $5x = 0,\ 4x \pm 1 = 0,\ 3x \pm 2 = 0,\ 2x \pm 3 = 0,\ x \pm 4 = 0$;

б) $-4,\ -3/2,\ -2/3,\ -1/4,\ 1/4,\ 2/3,\ 3/2,\ 4$.

2. Его можно записать, например, в виде $1, -1, 3, -3, 5, -5, 7, -7, 9, -9, \ldots$.

3. Указание. Определить высоту многочлена $a+bx^4$ как $a+b$. Перенумеровать все такие многочлены, заметив, что имеется лишь конечное их число любой заданной высоты.

4. $x^4 = 0,\quad 2x^3 = 0,\quad x^3 \pm 1 = 0,\quad x^3 \pm x = 0$

$x^3 \pm x^2 = 0,\quad 3x^2 = 0,\quad 2x^2 \pm 1 = 0,$

$x^2 \pm 2 = 0,\quad 2x^2 \pm x = 0,\quad x^2 \pm x \pm 1 = 0;$

$x^2 \pm 2x = 0,\quad 4x = 0,\quad 3x \pm 1 = 0,\quad 2x \pm 2 = 0,$

$x \pm 3 = 0.$

5. Указание. Все такие числа являются алгебраическими; воспользоваться теоремой 3.

6. Указание. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ — представление B в виде последовательности и $c_1, c_2, c_3, \ldots$ — представление C в виде последовательности. Тогда A можно представить в виде

$$b_1,\ c_1,\ b_2,\ c_2,\ b_3,\ c_3,\ \ldots .$$

7. Указание. Рассуждать аналогично доказательству теоремы 4. Отличие рассматриваемого случая в том, что здесь цифры $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \ldots$ все равны нулю. Построить искомое неучтенное число, выбирая $b_1 = 0$, $b_2 \neq a_{12}$ и $b_2 \neq 0$, $b_3 \neq a_{23}$ и $b_3 \neq 0$, и, вообще, $b_i \neq a_{i-1,\,i}$ и $b_i \neq 0$.

Литература

[1] Арнольд И. В., Теоретическая арифметика, М., Учпедгиз, 1939.

Обстоятельное сочинение (рассчитанное, впрочем, не на школьников, а на студентов педагогических институтов), весьма широко трактующее круг вопросов, связанных с обобщением понятия числа.

[2] Курант Р. и Роббинс Г., Что такое математика, М. — Л., Гостехиздат, 1947.

Большая книга, рассчитанная на всех любителей математики (в том числе и на школьников) и затрагивающая исключительно широкий круг вопросов, относящихся и к алгебре, и к геометрии, и к анализу. К содержанию настоящей книги примыкает вторая глава «Математическая числовая система» книги Куранта и Роббинса и первая часть третьей главы «Геометрические построения. Алгебра числовых полей».

[3] Вебер Г. и Вельштейн И., Энциклопедия элементарной математики, т. I, Одесса, Матезис, 1911 г.

Большая и довольно сложная книга, рассчитанная в первую очередь на учителей математики средней школы. Указанный здесь первый том книги, принадлежащий выдающемуся немецкому математику и педагогу прошлого столетия Г. Веберу, посвящен основам алгебры и анализа и весьма тесно связан с содержанием настоящей книги.

[4] Дубнов Я. С., Измерение отрезков, М., Физматгиз, 1962.

Небольшая книжка, принадлежащая перу известного математика и выдающегося педагога; в ней весьма обстоятельно дискутируется круг вопросов, связанных с действительными числами, вводимыми в связи с задачей измерения длин отрезков. Особое внимание уделяется педагогическим аспектам проблемы.

[5] Цикл статей «Введение действительных чисел в средней и высшей школе», сборник «Математическое просвещение», вып. 2, 1957, стр. 131—171.

Все входящие в этот цикл статьи: Фихтенгольц Г. М., Иррациональные числа в средней школе, Ляпунов А. А., Действительные числа, Дубовицкий А. Я., Аксиоматическое построение действительных чисел и Колмогоров А. Н., К обоснованию теории вещественных чисел (первые три из этих статей посвящены обсуждению вопроса о преподавании учения о действительных числах в средней школе, в высшей технической школе и в педагогическом институте) — имеют весьма много точек соприкосновения с содержанием настоящей книги.

[6] Хинчин А. Я., Элементы теории чисел, «Энциклопедия элементарной математики», кн. I, М. — Л., Гостехиздат, 1951, стр. 253—353.

В этой статье много внимания уделяется вопросам приближения действительных чисел рациональными и различию между алгебраическими и трансцендентными числами.

[7] Манин Ю. И., О разрешимости задач на построение с помощью циркуля и линейки, «Энциклопедия элементарной математики», кн. IV, М., Физматгиз, 1963, стр. 205—227.

Небольшая статья, весьма отчетливо трактующая указанный в ее заголовке круг вопросов.

[8] Гельфонд А. О., О проблеме приближения алгебраических чисел рациональными, сборник «Математическое просвещение», вып. 2, 1957, стр. 35—50.

В этой небольшой доступно написанной статье, в частности, подробно охарактеризованы упомянутые на стр. 138 настоящей книги недавние результаты К. Рота.

[9] Гонин Е. Г., Теоретическая арифметика, М., Учпедгиз, 1959.

Эта книга по своему характеру близка к книге [1]; однако круг затронутых в ней проблем несколько уже и изложение менее элементарно.

[10] Гельфонд А. О., Алгебраические и трансцендентные числа, М., Гостехиздат, 1952.

Серьезное сочинение, весьма широко трактующее весь круг вопросов, связанных с трансцендентными числами. Изложение не элементарно.

Оглавление

Айвен Нивен

ЧИСЛА РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ

Редактор *Д. В. Беклемишев*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в производство 25/II 1966 г.
Подписано к печати 18/VII 1966 г.
Бумага $84 \times 108^{1}/_{32}=2{,}63$ бум. л.
10,5 усл. печ. л., 8,33 уч.-изд. л.
Изд. № 1/3727. Цена 57 коп.
Зак. 107.

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

*

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете
Министров СССР.
Измайловский проспект, 29