

SCATTERING
THEORY
OF
WAVES AND PARTICLES

ROGER G. NEWTON

*Professor of Physics,
Indiana University*

McGRAW-HILL BOOK COMPANY

New York—San Francisco—St. Louis
Toronto—London—Sydney

Р. НЬЮТОН

ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ВОЛН И ЧАСТИЦ

Перевод с английского

А. М. КУЗНЕЦОВА и А. А. ЧЕРНЕНКО

Под редакцией

А. М. БРОДСКОГО и В. В. ТОЛМАЧЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА

1969

Монография известного американского ученого Р. Ньютона посвящена систематическому изложению современной классической и квантовой теорий рассеяния, лежащих в основе описания экспериментов, посредством которых мы получаем основную информацию о многих явлениях атомной и молекулярной физики, электромагнетизма, физики элементарных частиц и т. д. Книга содержит все исходные положения, методы, а также основные результаты современной теории. По характеру изложения это учебное пособие, включающее большое количество задач; имеется обширная библиография. Изложение ведется на высоком научном и педагогическом уровне. Особенно полно рассмотрены задачи неупругого рассеяния.

Книга представляет большой интерес для научных работников — физиков и математиков, занимающихся теорией рассеяния и смежными с ней вопросами, а также может служить превосходным пособием для студентов и аспирантов, специализирующихся в различных областях физики.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга известного американского физика Р. Ньютона представляет собой оригинальную монографию по теории рассеяния в теории электромагнетизма, классической механике и нерелятивистской квантовой механике; одновременно эта книга может служить учебным пособием при углубленном изучении перечисленных разделов физики.

Квантовомеханическая теория рассеяния уже несколько десятилетий назад сложилась как по существу самостоятельная область теоретической и математической физики. Развитые в этой теории общие методы широко используются при рассмотрении широкого класса явлений атомной и молекулярной физики, электромагнитного излучения, оптики, физики твердого тела, физики ядра и физики элементарных частиц. Значение теории рассеяния обусловлено в первую очередь центральной ролью, которую играют эксперименты по рассеянию в современной физике. Нельзя не согласиться с автором книги, который в предисловии пишет, что «за последние пятьдесят лет значительная часть важнейших открытий сделана в экспериментах по столкновению частиц».

Разнообразные области применения, многочисленность приближенных подходов в конкретных задачах были причиной того, что результаты нерелятивистской квантовой теории рассеяния представлялись в различных монографиях и учебных курсах в виде отдельных разделов общего описания определенного круга физических явлений. Примерами могут служить ставшие теперь классическими монографии Мотта и Месси ¹⁾ и Блатта и Вайскопфа ²⁾, посвященные в основном соответственно атомно-молекулярной и ядерной физике.

В этих книгах собраны основные результаты теории рассеяния, полученные к началу пятидесятых годов. Последующие годы были периодом быстрого развития теории как в направлении расширения областей ее приложения, так и особенно в направлении усовершенствования ее математического аппарата и уточнения ее формальных основ. В связи с этим возникла настоятельная потребность в книгах, суммирующих достигнутые результаты, приведенные с разной степенью строгости только в оригинальных статьях. Книга Ньютона является одной из лучших появившихся в последние годы книг, удовлетворяющих указанным запросам.

В отличие, например, от известной монографии Гольдбергера и Ватсона ³⁾ в рассматриваемой книге подробно изложены только теоретические вопросы теории рассеяния, конкретные задачи рассматриваются лишь в качестве примеров или вынесены в специальные упражнения, которыми снабжены все главы. Благодаря этому книга как учебник значительно выигрывает, так как достигается логическое единство всего материала. Изложение тонких вопросов теории рассеяния, в особенности проблемы введения в теорию непрерывного

¹⁾ Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, перевод со второго английского издания, ИЛ, 1951 (в издательстве «Мир» готовится перевод третьего издания).

²⁾ Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, перевод с английского, ИЛ, 1954.

³⁾ М., Гольдбергер, К. Ватсон, Теория столкновений, перевод с английского, изд-во «Мир», 1967.

спектра, у Ньютона является несравненно более глубоким и более полным, чем, например, в книге Т. Ву и Т. Омура ¹⁾.

Используемый в книге прием добавления непосредственно в тексте подробных математических отступлений, обычно не принятый в учебных руководствах по квантовой механике, оказывается здесь крайне уместным и полезным. Эти разделы книги Р. Ньютона можно рассматривать как естественное развитие с учетом современных результатов, содержания известной книги фон Неймана ²⁾. Вообще в большинстве глав Ньютон пытается вести изложение на возможно более строгом математическом уровне, так что его книгу можно считать также руководством по современным проблемам математической теории рассеяния и, более того, по математическим проблемам квантовой механики в целом.

Наряду с изложением широко известных традиционных теорий Р. Ньютон приводит в своей книге также самые последние, доступные пока только по журнальным статьям результаты теории рассеяния, в развитие которой автор внес существенный вклад. Отдельные разделы книги носят оригинальный характер и восполняют определенные пробелы в традиционных изложениях рассматриваемой теории, имеющихся в монографической и учебной литературе.

Основное содержание книги — квантовомеханическая нерелятивистская теория рассеяния.

В качестве введения в начале книги изложена классическая теория рассеяния электромагнитных волн и частиц (гл. 1—5); эти разделы очень полезны, так как позволяют установить естественную связь между классической и квантовой теориями рассеяния. Интересно отметить, что при изложении классических задач автор широко пользуется аналогиями с понятиями и методами, развитыми в квантовой теории. При этом он справедливо отмечает, что использование квантовомеханических представлений для многих современных физиков более привычно, чем чисто классический подход.

Квантовомеханическая теория начинается с детального и наиболее строгого из имеющихся в литературе изложения формальной теории двухчастичного потенциального рассеяния во временной и стационарной трактовках (гл. 6 и 7). Ньютон вводит меллеровские операторы, S-матрицу, а также T- и K-матрицы. Для более отчетливой формулировки возникающих при этом математических проблем автор приводит два специальных математических раздела, посвященных вопросам функционального анализа. Подробно рассмотрены: спектр оператора Гамильтона, представления о сильной и слабой сходимости, сходимости по норме, аналитичность резольвенты, определение и свойства вполне непрерывных (компактных) операторов.

В главах 8—10 дается вывод формул для дифференциальных эффективных сечений и обсуждаются вопросы теории приближенных методов потенциального рассеяния (борновское приближение, приближение искаженных волн, метод квазичастиц и т. д.). Особенно полезно изложение проблем сходимости борновского ряда, причем выяснены многие важные особенности, обычно не затрагиваемые в руководствах по квантовой механике.

Далее (гл. 11—15) автор весьма подробно рассматривает разложения по парциальным волнам при потенциальном рассеянии как для скалярных частиц, так и для частиц со спином $1/2$ и 1, а также аналитические свойства амплитуд и дисперсионные соотношения. В главе 13 отдельно изложена теория комплексного углового момента и представление Мандельштама.

Большой интерес представляют главы 16—18, посвященные неупругому рассеянию. Содержащееся в них изложение является современным и наиболее

¹⁾ Т. Ву, Т. Омур а, Квантовая теория рассеяния, перевод с английского, изд-во «Наука», М., 1969.

²⁾ Дж. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, перевод с немецкого, Физматгиз, М., 1964.

полным из имеющихся в монографической литературе. Рассмотрены аналитические свойства и пороговые эффекты для многоканальных процессов и уравнения, которые в литературе известны под названием уравнений Фаддеева. Даны также наиболее теоретически обоснованные приближенные методы многочастичной теории рассеяния.

Однако та часть изложения задач многочастичного рассеяния, в которой автор пытается рассматривать процессы с перестройкой как прямое обобщение потенциального рассеяния с дискретным множеством конечных каналов рассеяния, вызывает известные возражения. В частности, здесь весьма трудно мотивировать обрезание непрерывного спектра. Не случайно, что вскоре после выхода книги автор вернулся к вопросам быстро развивающейся теории многочастичного рассеяния в специальных статьях¹⁾.

Последние две главы посвящены распаду нестабильных состояний и обратной задаче теории рассеяния (уравнения Гельфанда — Левитана и уравнения Марченко).

В заключение следует упомянуть, что книга Ньютона снабжена очень подробной библиографией по теории рассеяния с интересными историческими замечаниями. При этом весьма полно учтены работы советских авторов.

Перевод выполнен А. М. Кузнецовым (предисловие автора, гл. 1—11 и 17—20) и А. А. Черненко (гл. 12—16). А. М. Кузнецов также систематизировал имеющиеся в книге литературные ссылки и составил предметный указатель.

А. М. Бродский, В. В. Толмачев

¹⁾ R. N e w t o n, Journ. Math. Phys., 8, 851, 2347 (1967).

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вряд ли можно переоценить значение тех результатов, которые были получены физиками в исследованиях рассеяния волн и частиц. За последние пятьдесят лет значительная часть важнейших открытий сделана в экспериментах по столкновению частиц: обнаружение Резерфордом атомного ядра, атомная и ядерная спектроскопия, деление ядер, открытие элементарных частиц и исследование их свойств. Если дополнить эти явления всеми результатами экспериментов по рассеянию света, то получится весьма внушительный список.

Однако вплоть до совсем недавнего времени теория рассеяния не занимала подобающего места в программе университетских курсов теоретической физики. Хотя большинство существующих руководств по квантовой механике содержит главы по теории рассеяния, до сих пор существовала только одна книга (да и та многолетней давности), целиком посвященная теории атомных столкновений,— это книга Мотта и Месси «Теория атомных столкновений»¹⁾. Количество журнальных статей по теории рассеяния, наоборот, чрезвычайно велико. Лишь в самое последнее время положение начало изменяться и появились две новые монографии по квантовой теории рассеяния.

В настоящей книге автор отошел от традиционного деления теоретической физики на разделы и теория рассеяния рассматривается параллельно в рамках классической теории электромагнитного излучения, классической механики частиц и квантовой механики. Мотивы для такого отказа от традиционного построения курса двоякого рода. Во-первых, очень полезно показать читателю, что в разделах физики, на первый взгляд совершенно различных, мы сталкиваемся с аналогичными явлениями. Во-вторых, во всех таких разделах можно использовать одни и те же математические методы и терминологию. Тридцать лет назад считалось необходимым всегда, когда это возможно, интерпретировать новое квантовое явление на языке более привычной электромагнитной теории. Автор берет на себя смелость утверждать, что в настоящее время многие физики лучше знакомы с квантовой механикой, чем с классической теорией излучения, и при изложении некоторых разделов электромагнитной теории часто оказывается методически полезным, наоборот, опираться на знания студентов в области квантовой механики.

Эту книгу нужно читать последовательно, с самого начала. Другими словами, всякий, желающий изучить по нашей книге теорию рассеяния, не должен начинать чтение с гл. 6, даже если он интересуется одной лишь квантовой механикой. Этого не следует делать по той причине, что физические идеи, а также конкретные представления и понятия, которые лежат в основе более мощного математического аппарата первых двух глав части III, вводятся и обсуждаются ранее. Без предварительного ознакомления с этим материалом гл. 6 и 7 могут показаться слишком абстрактными. Конечно, многое из материала первых глав в дальнейшем опять подвергается обсуждению в квантовомеханическом аспекте, однако я хочу настоятельно предостеречь читателя от изучения квантовой теории рассеяния путем прочтения одной

¹⁾ В настоящее время вышло третье, дополненное и переработанное издание этой книги: N. Mott, H. Messerly, *The Theory of Atomic Collisions*, 3rd ed., London, 1965. (Готовится перевод: Н. Мотт, Х. Месси, *Теория атомных столкновений*, изд-во «Мир», 1969.) — *Прим. ред.*

лишь части III, начиная с гл. 6. Тем, кто интересуется исключительно квантово-механической теорией рассеяния, необязательно разбираться во всех подробностях, изложенных в предшествующих главах, но эти читатели должны по крайней мере прочитать те параграфы из частей I и II, которые указаны в начале гл. 6. Нашу книгу можно, таким образом, использовать в качестве части курса квантовой механики.

Книга не претендует на роль энциклопедии по теории рассеяния; многие значительные разделы теории рассеяния в нашем изложении опущены. Наиболее важный из них — большая часть релятивистской квантовой теории рассеяния. Этот раздел не включен в книгу главным образом потому, что методы исследования релятивистского рассеяния в настоящее время совершенно отличаются от методов, принятых в излагаемых здесь теориях. Еще не пришло время для написания книги, посвященной этой проблеме, которая представляла бы собой нечто большее, чем простой литературный обзор (но, разумеется, меньшее, чем оригинальный и революционный научный труд). Поэтому весь этот раздел автор не включил в книгу. Исключение составляют применяемая в некоторых местах релятивистская кинематика, обсуждение лоренц-инвариантности сечений и т. д.

Опущен еще один раздел теории, частично связанный с первым. Это многочисленные применения теории к интерпретации известных экспериментальных данных и анализ экспериментальных данных в рамках понятий, рассмотренных в данной книге. Эта книга предназначена не для того, чтобы изучать по ней, скажем, протон-протонное рассеяние или рассеяние электронов на ядрах, а для того, чтобы из нее можно было почерпнуть методы, идеи и принципы, при помощи которых можно анализировать подобные экспериментальные данные. Поэтому реальные физические объекты в книге часто заменяются более простыми, однако я надеюсь, что такие упрощения сделаны в разумных пределах. Само использование уравнения Шредингера для описания поведения частиц уже в известной мере является упрощением. Во всяком случае, такой подход, по-видимому, является наилучшим при изучении теоретической физики.

Каждая глава сопровождается комментариями библиографического и исторического характера. Я не рискую утверждать, что приведенная в книге библиография по каждой главе является полной. Однако по некоторым темам я попытался дать более полную библиографию по сравнению с той, которой, к сожалению, весьма часто ограничиваются в литературе по теории рассеяния. Тем не менее я должен, несомненно, взять на себя вину за то, что в отдельных местах могли быть пропущены ссылки на важные работы, за что я приношу читателю заранее свои извинения. В ряде других случаев библиография служит лишь своеобразным путеводителем для дальнейшего изучения предмета и отыскания дополнительной литературы по данному вопросу.

К каждой главе прилагается ряд задач, общим числом около 200. Несмотря на то что многие из них не являются очень трудными, они должны в известной мере помочь читателю при изучении книги. Будущее покажет, насколько удачно они составлены. К сожалению, лишь небольшое число из них прошло проверку непосредственно в учебной практике.

Я считаю, что подготовку, которой должен обладать читатель этой книги, имеют многие студенты-физики после окончания третьего курса ¹⁾. Читатель должен быть знаком с классической электродинамикой, т. е. с уравнениями Максвелла. Однако ему необязательно полностью знать стандартный курс по этому предмету. Часть I настоящей книги с успехом может быть использована в качестве отдельных разделов такого курса. Читатель должен быть знаком с квантовой механикой, однако одного вводного курса квантовой механики совершенно недостаточно. В зависимости от обстоятельств достаточной

¹⁾ Здесь имеются в виду наши учебные программы.— *Прим. ред.*

подготовкой можно считать усвоение программы первого семестра обычного курса квантовой механики, рассчитанного на два или три семестра.

Что касается математики, то, кроме хорошего университетского курса основ анализа, необходимо владеть разделами теории функций комплексного переменного и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Было бы полезным некоторое знакомство с линейными интегральными уравнениями и функциональным анализом, однако эти предметы можно изучать параллельно с чтением книги или более тщательно после того, как некоторые разделы данной книги будут использованы в качестве подготовительных.

Теперь несколько слов относительно *обозначений*, использованных при изложении квантовомеханической теории рассеяния. Я не применяю дираковских обозначений, за редким исключением, где они использованы для функций преобразования. Обычно, за некоторыми исключениями, которые, однако, надеемся, не приведут к путанице, прописные буквы Ψ и Φ и т. д. применяются для обозначения абстрактных векторов состояний, а строчные буквы ψ и ϕ и т. д.— для обозначения волновых функций. В книге использовано общепринятое в физической литературе обозначение для эрмитова скалярного произведения. Звездочка* означает комплексное сопряжение, значок \dagger — эрмитово сопряжение, символ Sp — след и \det — детерминант. Иногда используют диадные обозначения для операторов проектирования, например $\Psi_a \Psi_b^\dagger$. Это означает то же самое, что и выражение $|a\rangle\langle b|$ при записи в обозначениях Дирака. Другими словами, вектор Ψ_b^\dagger является образом вектора Ψ_b в пространстве \mathfrak{H}^\dagger , дуальном гильбертову пространству \mathfrak{H} , а эрмитово скалярное произведение в \mathfrak{H} -пространстве понимается как евклидово скалярное произведение элементов из \mathfrak{H} -пространства и из \mathfrak{H}^\dagger -пространства. Символы Re и Im обозначают действительную и мнимую части комплексного числа.

Р. Ньютон

*

Часть I

РАССЕЯНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ
ВОЛН

*

ГЛАВА I

Математический аппарат и общие результаты

§ 1. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

Во всей книге будет использоваться гауссовская система единиц, уравнения Максвелла имеют в ней следующий вид:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathcal{D} &= 4\pi\rho, \\ \nabla \cdot \mathcal{B} &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Уравнения Максвелла нужно дополнить соотношениями, учитывающими наличие среды,

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathcal{E},\tag{1.2}$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость и σ — проводимость. Все эти величины могут быть тензорами и зависеть от пространственных координат. Другими словами, среда, вообще говоря, является неоднородной и неизотропной.

Электрическое поле, гармонически изменяющееся во времени с циклической частотой ω , запишем в комплексной форме

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E} e^{-i\omega t} + \mathcal{E}^* e^{i\omega t}.\tag{1.3}$$

Аналогично будем записывать и другие поля. Тогда первые два уравнения Максвелла примут вид

$$\nabla \times \mathcal{H} = -ikn'^2 \mathcal{E}, \quad \nabla \times \mathcal{E} = ik\mathcal{B},\tag{1.4}$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \equiv \frac{1}{\lambda_0}, \quad n'^2 = \varepsilon + \frac{4\pi i\sigma}{\omega}\tag{1.5}$$

и λ_0 — длина волны в вакууме. Беря ротор от второго уравнения (1.4), получаем

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = K^2 \mathcal{E} + \mu^{-1} (\nabla \mu) \times (\nabla \times \mathcal{E}),\tag{1.6}$$

где

$$K \equiv kn, \quad n^2 \equiv \mu n'^2\tag{1.7}$$

при условии, что проницаемость μ не является тензором (т. е. она кратна единичному тензору). Второй член в правой части (1.6) отличен от нуля только в том случае, когда магнитная проницаемость μ изменяется в пространстве.

Вторая пара уравнений из (1.1) в дальнейшем нам не понадобится. Последнее уравнение (1.1) является следствием второго уравнения (1.4), а предпослед-

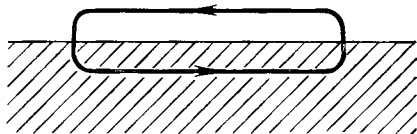
нее уравнение (1.1) дает возможность вычислять плотность заряда ρ . Поскольку из первого уравнения (1.4) следует, что

$$\nabla \cdot (n'^2 \mathcal{E}) = 0,$$

то

$$\rho = -\frac{i}{\omega} \nabla \cdot (\sigma \mathcal{E}). \quad (1.8)$$

Граничные условия на поверхности среды можно получить, интегрируя \mathcal{E} и \mathcal{H} по небольшому замкнутому контуру, показанному на фиг. 1.1, и используя теорему Стокса вместе с уравнением (1.1). Если площадь, заключенную



Ф и г. 1.1. Контур интегрирования, проходящий через поверхность раздела двух сред.

внутри контура, устремить к нулю, так чтобы отрезки контура, перпендикулярные поверхности раздела, были малы по сравнению с отрезками контура, параллельными ей, то получим, что компоненты \mathcal{E} и \mathcal{H} , параллельные поверхности, должны быть непрерывными. Это и есть все необходимые граничные условия. Используя вторую пару уравнений Максвелла (1.1), можно получить граничные условия для нормальных компонент \mathcal{E} и \mathcal{H} , но они либо вытекают из предыдущих условий, либо определяют поверхностный заряд.

§ 2. ПАРАМЕТРЫ СТОКСА И ПОЛЯРИЗАЦИЯ

1. Определение параметров Стокса

Плоскую электромагнитную волну удобно параметризовать следующим образом. Сначала выберем произвольную плоскость отсчета, проходящую через направление волнового вектора $\hat{\mathbf{k}}$ (при рассмотрении задач рассеяния наиболее удобно в качестве таковой выбрать плоскость, одновременно проходящую через направления падающего и рассеянного пучков, так как в этом случае ее можно использовать для определения параметров как падающей, так и рассеянной волн). Пусть $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ и $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ — единичные векторы, направленные соответственно параллельно и перпендикулярно плоскости отсчета, причем

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \times \hat{\mathbf{e}}_{\perp}.$$

Разложим теперь вектор электрического поля на две компоненты, согласно формуле

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\parallel} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} + \mathcal{E}_{\perp} \hat{\mathbf{e}}_{\perp}. \quad (1.9)$$

Тогда четыре параметра Стокса определяются так:

$$\begin{aligned} I &\equiv |\mathcal{E}_{\parallel}|^2 + |\mathcal{E}_{\perp}|^2, \\ Q &\equiv |\mathcal{E}_{\parallel}|^2 - |\mathcal{E}_{\perp}|^2, \\ U &\equiv -2 \operatorname{Re} (\mathcal{E}_{\parallel} \mathcal{E}_{\perp}^*), \\ V &\equiv -2 \operatorname{Im} (\mathcal{E}_{\parallel} \mathcal{E}_{\perp}^*). \end{aligned} \quad (1.10)$$

С другой стороны, плоскую волну можно рассматривать как суперпозицию волн с правой и левой круговой поляризацией. Пусть

$$\chi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_\perp - i\hat{e}_\parallel), \quad \chi_{-1} \equiv \chi_1^*. \quad (1.11)$$

Представим вектор \mathcal{E} в виде

$$\mathcal{E} = \chi_1 \mathcal{E}_r + \chi_{-1} \mathcal{E}_l. \quad (1.12)$$

Тогда параметры Стокса выразятся через компоненты \mathcal{E}_r и \mathcal{E}_l следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= |\mathcal{E}_r|^2 + |\mathcal{E}_l|^2, \\ Q &= -2 \operatorname{Re}(\mathcal{E}_l \mathcal{E}_r^*), \\ U &= 2 \operatorname{Im}(\mathcal{E}_l \mathcal{E}_r^*), \\ V &= |\mathcal{E}_r|^2 - |\mathcal{E}_l|^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Иногда более полезными оказываются другие системы параметров:

$$\begin{aligned} I_\parallel &\equiv |\mathcal{E}_\parallel|^2 = \frac{1}{2}(I + Q), \\ I_\perp &\equiv |\mathcal{E}_\perp|^2 = \frac{1}{2}(I - Q), \\ U, V \end{aligned} \quad (1.14)$$

или

$$\begin{aligned} I_r &\equiv |\mathcal{E}_r|^2 = \frac{1}{2}(I + V), \\ I_l &\equiv |\mathcal{E}_l|^2 = \frac{1}{2}(I - V), \\ Q, U. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Четыре параметра Стокса не являются независимыми, так как имеет место соотношение

$$I^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (1.16)$$

Для вектора электрического поля плоских электромагнитных волн будем применять следующие простые обозначения:

$$\mathcal{E}^{(L)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{E}_\parallel \\ \mathcal{E}_\perp \end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{E}^{(C)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \mathcal{E}_r \\ \mathcal{E}_l \end{pmatrix},$$

с указанием как точки наблюдения \mathbf{r} , так и волнового вектора \mathbf{k} . В тех случаях, когда между этими двумя способами разложения плоской волны на волны соответствующей поляризации не будет проводиться различия, вектор электрического поля будем обозначать просто \mathcal{E} . Однако следует помнить, что такие двухкомпонентные векторы можно складывать только тогда, когда их волновые векторы коллинеарны, а их плоскости отсчета совпадают.

2. Физический смысл параметров Стокса

Интенсивность I прямо связана со средней плотностью энергии волны

$$\bar{U} = \frac{1}{2\pi} I \quad (1.17)$$

и со средним потоком энергии, или вектором Пойнтинга,

$$\mathbf{S} = c\bar{U}\hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{2\pi} \hat{\mathbf{k}}I. \quad (1.18)$$

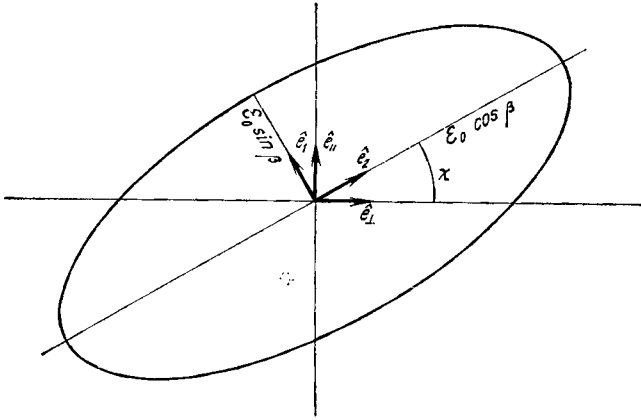
Для уяснения физического смысла других параметров Стокса запишем в самом общем виде эллиптически поляризованную волну, распространяющуюся в направлении z ,

$$\mathcal{E}(t) = 2\mathcal{E}_0 \hat{e}_1 \sin \beta \cos(\omega t - kz + \alpha) + 2\mathcal{E}_0 \hat{e}_2 \cos \beta \sin(\omega t - kz + \alpha) \quad (1.19)$$

в комплексной форме

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 (\hat{e}_1 \sin \beta + \hat{e}_2 i \cos \beta) e^{-i(\omega t - kz + \alpha)} + \text{Компл. сопр.}, \quad (1.20)$$

где \hat{e}_1 и \hat{e}_2 — единичные векторы в направлении главных осей эллипса (фиг. 1.2). Степень эллиптичности поляризации измеряется величиной $\tan \beta$. Если $\tan \beta = 0$ или $\pm\infty$, то волна является линейно поляризованной; если $|\tan \beta| = 1$,



Ф и г. 1.2. Эллипс поляризации.

то волна поляризована по кругу. Если $\tan \beta > 0$, то волна имеет правовинтовую поляризацию, т. е. при фиксированном z электрический вектор вращается по часовой стрелке относительно направления волнового вектора. Если $\tan \beta < 0$, то волна имеет левовинтовую поляризацию.

Из сравнения (1.20) с (1.9) видно, что

$$\mathcal{E}_{\parallel} = \mathcal{E}_0 (i \sin \chi \cos \beta + \cos \chi \sin \beta) e^{i(kz - \alpha)},$$

$$\mathcal{E}_{\perp} = \mathcal{E}_0 (i \cos \chi \cos \beta - \sin \chi \sin \beta) e^{i(kz - \alpha)}$$

и, следовательно,

$$I = \mathcal{E}_0^2,$$

$$V = \mathcal{E}_0^2 \sin 2\beta, \quad (1.21)$$

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 (1 - \cos 2\chi \cos 2\beta),$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0^2 (1 + \cos 2\chi \cos 2\beta),$$

$$Q = -\mathcal{E}_0^2 \cos 2\chi \cos 2\beta, \quad (1.22)$$

$$U = -\mathcal{E}_0^2 \cos 2\beta \sin 2\chi.$$

Из (1.21) и (1.22) следует, что

$$\tan 2\chi = \frac{U}{Q},$$

$$\tan 2\beta = V (U^2 + Q^2)^{-1/2}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{E}_0 = I^{1/2}.$$

Таким образом, только параметр V непосредственно связан со степенью эллиптичности поляризации; его знак определяет направление вращения вектора поляризации (правовинтовая или левовинтовая). Кроме степени эллиптичности, величина Q зависит также от «наклона» осей эллипса к плоскости отсчета. Поворот плоскости отсчета приводит только к изменению угла χ ; следовательно, величины I , V и $Q^2 + U^2$ являются инвариантами относительно такого вращения. Одновременное изменение знаков \hat{e}_{\parallel} и \hat{e}_{\perp} не оказывает никакого влияния на эти параметры.

С другой стороны, вектор электрического поля можно представить в виде

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 (\chi_{01} \cos \gamma + \chi_{0-1} \sin \gamma) e^{-i(\omega t - kz + \alpha)} + \text{Компл. сопр.}, \quad (1.24)$$

где

$$\chi_{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 + i \hat{e}_2) = \chi_1 e^{i\chi}, \quad \chi_{0-1} = \chi_0^* e^{-i\chi}. \quad (1.25)$$

Это дает

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{E}_0^2, & V &= \mathcal{E}_0^2 \cos 2\gamma, \\ I_r &= \mathcal{E}_0^2 \cos^2 \gamma, & I_l &= \mathcal{E}_0^2 \sin^2 \gamma, \\ Q &= -\mathcal{E}_0^2 \sin 2\gamma \cos 2\chi, & U &= -\mathcal{E}_0^2 \sin 2\gamma \sin 2\chi, \end{aligned} \quad (1.26)$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\chi &= \frac{U}{Q}, & \mathcal{E}_0 &= I^{1/2}, \\ \operatorname{tg}^2 \gamma &= \frac{I_l}{I_r} \text{ или } \operatorname{ctg} 2\gamma = V (Q^2 + U^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

3. Частично поляризованные пучки

Важно, что параметры Стокса не содержат фазы α . Поэтому их можно использовать для описания *некогерентного* пучка¹⁾, т. е. для описания суперпозиции многих волн, имеющих одинаковое направление распространения, но случайные фазы и, возможно, различную поляризацию. Тогда, приписав каждой отдельной волне в пучке индекс (i) , получим следующее выражение для интенсивности некогерентного пучка:

$$I = \left| \sum_i \mathcal{E}^{(i)} \right|^2 = \sum_i I^{(i)}, \quad (1.28)$$

так как члены, содержащие суммы различных фаз α , при усреднении обращаются в нуль.

Для каждой отдельной волны введем «вектор», компонентами которого являются последние три параметра Стокса

$$\mathfrak{P}^{(i)} \equiv (Q^{(i)}, U^{(i)}, V^{(i)}).$$

Тогда, согласно (1.16), длина этого вектора равна $I^{(i)}$

$$|\mathfrak{P}^{(i)}| = (\mathfrak{P}^{(i)2})^{1/2} = I^{(i)}.$$

Если сложить все эти векторы для некогерентного пучка

$$\mathfrak{P} \equiv \sum_i \mathfrak{P}^{(i)} \equiv (Q, U, V),$$

$$Q \equiv \sum_i Q^{(i)}, \quad U \equiv \sum_i U^{(i)}, \quad V \equiv \sum_i V^{(i)},$$

то в силу неравенства треугольника будем иметь

$$I^2 \geq \mathfrak{P}^2 = Q^2 + U^2 + V^2. \quad (1.29)$$

¹⁾ Более подробно некогерентные пучки рассмотрены в гл. 4, § 3.

Знак равенства достигается *тогда и только тогда*, когда углы χ и β одинаковы для всех волн, составляющих пучок; в этом случае пучок будет полностью поляризованным. Если $Q = U = V = 0$, то пучок не поляризован. Следовательно, для некогерентного пучка электромагнитных волн все четыре параметра Стокса являются независимыми и степень поляризации пучка можно определить отношением

$$P \equiv \frac{|\mathfrak{P}|}{I} = \frac{(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}}{I}. \quad (1.30)$$

Формулы (1.23) будут определять степень эллиптичности поляризации и наклон эллипса к данной плоскости для некогерентного пучка, за исключением случая $P = 0$. Аналогично формулы (1.27) будут определять соотношение между компонентами с левовинтовой и правовинтовой круговой поляризацией в пучке, а также их относительную фазу. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} Q &= -IP \cos 2\chi \cos 2\beta, \\ U &= -IP \sin 2\chi \cos 2\beta, \\ V &= IP \sin 2\beta \end{aligned} \quad (1.31)$$

и

$$\begin{aligned} Q &= -IP \cos 2\chi \sin 2\gamma, \\ U &= -IP \sin 2\chi \sin 2\gamma, \\ V &= IP \cos 2\gamma. \end{aligned} \quad (1.32)$$

4. Векторы Стокса

Параметры Стокса дают настолько полное описание пучка, насколько способен его дать «оптический» прибор (принцип оптической эквивалентности Стокса). Так как для некогерентного пучка эти параметры являются независимыми, то с их помощью можно составить четырехмерный «вектор» \mathcal{J} , компонентами которого в трех различных представлениях являются

$$\mathcal{J}^{(S)} \equiv (I, Q, U, V), \quad (1.33)$$

$$\mathcal{J}^{(L)} \equiv (I_{\parallel}, I_{\perp}, U, V), \quad (1.34)$$

$$\mathcal{J}^{(C)} \equiv (I_r, I_l, Q, U). \quad (1.35)$$

Легко найти, каким образом эти векторы преобразуются при повороте плоскости отсчета. Если последняя поворачивается по часовой стрелке на угол α относительно волнового вектора \mathbf{k} , то угол наклона χ увеличивается на α , а векторы \mathfrak{E} изменяются согласно формулам

$$\mathfrak{E}^{(L)'} = \mathfrak{R}_{\alpha}^{(L)} \mathfrak{E}^{(L)}, \quad \mathfrak{R}_{\alpha}^{(L)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

$$\mathfrak{E}^{(C)'} = \mathfrak{R}_{\alpha}^{(C)} \mathfrak{E}^{(C)}, \quad \mathfrak{R}_{\alpha}^{(C)} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \quad (1.36a)$$

При этом параметры Стокса преобразуются по формулам

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cos 2\alpha - U \sin 2\alpha, \\ U' &= Q \sin \alpha + U \cos 2\alpha, \\ I' &= I, \\ V' &= V. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Следовательно, векторы \mathcal{J}' относительно новой плоскости отсчета имеют вид

$$\mathcal{J}' = \mathfrak{M}_{\alpha} \mathcal{J}, \quad (1.38)$$

где для различных представлений вектора \mathcal{Y}

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(S)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha & 0 \\ 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(L)} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & -1/2 \sin 2\alpha & 0 \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 1/2 \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(C)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (1.41)$$

5. Связь с матрицей плотности

В квантовой механике матрица плотности является более обычным способом описания поляризации, чем векторы Стокса.

Матрица плотности определяется выражением

$$\rho_{ij} = \frac{\mathcal{E}_i \mathcal{E}_j^*}{I}. \quad (1.42)$$

Другими словами, в зависимости от используемого представления, для матрицы плотности имеем

$$\rho^{(L)} = \frac{1}{I} \begin{pmatrix} |\mathcal{E}_\parallel|^2 & \mathcal{E}_\parallel \mathcal{E}_\perp^* \\ \mathcal{E}_\perp \mathcal{E}_\parallel^* & |\mathcal{E}_\perp|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2I} \begin{pmatrix} I+Q & -U-iV \\ -U+iV & I-Q \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

или

$$\rho^{(C)} = \frac{1}{I} \begin{pmatrix} |\mathcal{E}_r|^2 & \mathcal{E}_r \mathcal{E}_l^* \\ \mathcal{E}_l \mathcal{E}_r^* & |\mathcal{E}_l|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2I} \begin{pmatrix} I+V & -Q-iU \\ -Q+iU & I-V \end{pmatrix}.$$

Из формулы (1.16) для полностью поляризованного пучка следует, что

$$\rho^2 = \rho, \quad (1.44)$$

т. е. ρ является идемпотентной матрицей.

Если пучок поляризован не полностью, то определение степени поляризации (1.30) приводит к следующему соотношению:

$$\rho^2 - \rho = \frac{1}{4} (P^2 - 1) \mathbf{1}. \quad (1.45)$$

Выразив матрицу плотности через угол наклона χ и степень эллиптичности поляризации β , получим, согласно (1.31),

$$\rho^{(L)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - P \cos 2\chi \cos 2\beta & P (\cos 2\beta \sin 2\chi - i \sin 2\beta) \\ P (\cos 2\beta \sin 2\chi + i \sin 2\beta) & 1 + P \cos 2\chi \cos 2\beta \end{pmatrix}, \quad (1.46)$$

так что всегда

$$\text{Sp } \rho = 1$$

и

$$\det \rho = \frac{1}{4} (1 - P^2). \quad (1.47)$$

Конечно, информация, содержащаяся в матрице плотности, точно такая же, как в векторах Стокса. Какую из величин следует использовать, целиком определяется соображениями удобства.

Поворот плоскости отсчета поляризации простым образом меняет матрицу плотности. Формулу, по которой она преобразуется, можно получить из (1.36) и (1.37)

$$\rho' = \mathfrak{N}_\alpha \rho \mathfrak{N}_{-\alpha}, \quad (1.48)$$

где \mathfrak{N}_α — одна из двух матриц, определяемых формулами (1.36) и (1.36а) (в зависимости от того, используются компоненты с линейной или круговой поляризацией).

§ 3. РАССЕЯНИЕ

1. Амплитуда рассеяния

Препятствие на пути плоской электромагнитной волны приводит к ее рассеянию. На расстояниях от рассеивающего центра, которые велики по сравнению как с длиной волны, так и с его собственными размерами (т. е. в «волновой зоне»), поле состоит из плоской и сферической волн. Рассмотрим волновой пакет, состоящий из таких волн,

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \int d\omega f(\omega) (\mathcal{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + r^{-1} \mathcal{E}_+ e^{i(kr - \omega t)} + r^{-1} \mathcal{E}_- e^{-i(kr + \omega t)}),$$

где подразумевается, что f имеет острый максимум при $\omega = \omega_0$. Тогда если $t \rightarrow -\infty$, то подынтегральное выражение быстро осциллирует и в среднем равно нулю, за исключением окрестности тех точек, в которых аргументы отдельных экспонент как функции частоты ω являются стационарными.

Это означает, что при больших $|\mathbf{r}|$ имеется вклад в интеграл от плоской волны при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \approx -c|t|$ и от сходящейся сферической волны при $r \approx c|t|$. Расходящаяся сферическая волна не дает вклада, так как для $t < 0$ производная по ω от $kr - \omega t$ всегда положительна. Следовательно, граничным условием, соответствующим ситуации, когда при $t = -\infty$ в направлении \mathbf{k} посылается волновой пакет плоских волн, является $\mathcal{E}_- = 0$. При помощи тех же рассуждений мы получим при $t \rightarrow +\infty$ вклады как от плоской волны, так и от расходящейся сферической волны при $r \approx ct$. Поскольку уравнения Максвелла линейны, то амплитуда этой сферической волны, называемой *рассеянной волной*, пропорциональна \mathcal{E}_0 .

Так как на больших расстояниях от рассеивателя электрическое поле является *поперечным* и в сферической волне¹⁾, то \mathcal{E}_0 и $\mathcal{E}_{\text{расс}}$, входящие в асимптотическую формулу

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{E}_{\text{расс}} r^{-1} e^{ikr}, \quad (1.49)$$

можно записать в двухкомпонентных обозначениях. Конечно, базисные векторы здесь не одинаковы даже тогда, когда плоскость отсчета выбрана так, что она одновременно содержит векторы $\hat{\mathbf{k}}$ и $\hat{\mathbf{r}}$. Определим амплитуду рассеяния \mathfrak{A} следующим соотношением:

$$\mathcal{E}_{\text{расс}} = \mathfrak{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \mathcal{E}_0, \quad (1.50)$$

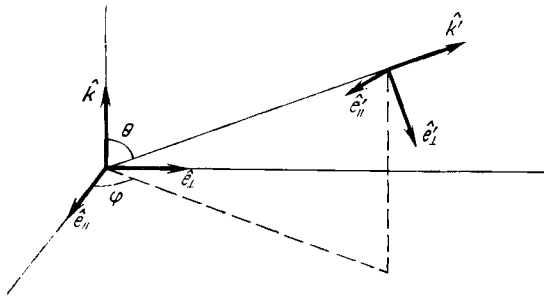
где $\mathbf{k}' \equiv \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{r}}$. *Плоскость рассеяния* определяется векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' , т. е. начальным и конечным направлениями распространения волны, причем рассеянная

¹⁾ Под «поперечностью» электрического поля в сферической волне подразумевается, что вектор \mathcal{E} перпендикулярен \mathbf{r} . Если небольшой участок сферической волны считается плоским, то его волновой вектор направлен вдоль \mathbf{r} и этот участок волны является поперечным в обычном смысле, т. е. $\mathcal{E} \perp \mathbf{k}$.

сферическая волна локально рассматривается как плоская. В (1.50) плоскость рассеяния как раз и выбрана в качестве плоскости отсчета. Она различна для разных точек наблюдения, в частности при переходе от точки к точке изменяется угол между ней и падающим пучком.

2. Переход к плоскости отсчета, проходящей через фиксированное направление

С другой стороны, мы всегда можем выбрать фиксированное направление и потребовать, чтобы и начальная, и конечная плоскости отсчета проходили через это направление; выберем в качестве такого направления ось x в системе координат, в которой падающий пучок движется вдоль оси z в положительном



Ф и г. 1.3. Поворот плоскости отсчета поляризации.

направлении (фиг. 1.3). Тогда для совмещения плоскости рассеяния с плоскостью xz ее нужно повернуть на угол $-\varphi$ вокруг волнового вектора падающего пучка k , а для совмещения ее с плоскостью xz' (ось z' направлена вдоль k') ее нужно повернуть на угол $-\varphi'$ вокруг конечного волнового вектора k' :

$$\text{ctg } \varphi' = \text{ctg } \varphi \cos \theta, \quad \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} > 0. \tag{1.51}$$

Компоненты вектора \mathfrak{E}_0 относительно плоскости, проходящей через фиксированное направление, можно получить из компонент этого вектора относительно плоскости рассеяния путем линейного преобразования

$$\mathfrak{E}_{0, \text{фикс}} = \mathfrak{N}_{-\varphi} \mathfrak{E}_0,$$

где $\mathfrak{N}_{-\varphi}$ — одна из двух матриц, определяемых формулами (1.36) и (1.36а). В то же время для $\mathfrak{E}_{\text{расс, фикс}}$ имеем

$$\mathfrak{E}_{\text{расс, фикс}} = \mathfrak{N}_{-\varphi'} \mathfrak{E}_{\text{расс}}. \tag{1.52}$$

Далее получаем

$$\mathfrak{E}_{\text{расс, фикс}} = \mathfrak{A}_{\text{фикс}} \mathfrak{E}_{0, \text{фикс}}, \tag{1.53}$$

где

$$\mathfrak{A}_{\text{фикс}} = \mathfrak{N}_{-\varphi'} \mathfrak{A}_{\varphi}. \tag{1.54}$$

Явное выражение для $\mathfrak{A}_{\text{фикс}}$ мы приведем только для случая круговой поляризации

$$\mathfrak{A}_{\text{фикс}}^{(C)} = \begin{pmatrix} A_{11}^C e^{i(\varphi-\varphi')} & A_{12}^C e^{-i(\varphi+\varphi')} \\ A_{21}^C e^{i(\varphi+\varphi')} & A_{22}^C e^{i(\varphi'-\varphi)} \end{pmatrix}. \tag{1.55}$$

3. Связь между амплитудами рассеяния, выраженными через компоненты, соответствующие круговой и линейной поляризации

Компоненты электрического поля, соответствующие двум видам поляризации, а именно компоненты, соответствующие линейной поляризации, и компоненты, соответствующие круговой поляризации, связаны между собой при помощи преобразования

$$\mathfrak{E}^{(C)} = \mathfrak{B}^{(CL)} \mathfrak{E}^{(L)}, \quad (1.56)$$

где унитарная матрица $\mathfrak{B}^{(L)}$ имеет вид

$$\mathfrak{B}^{(CL)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.57)$$

Итак, имеет место следующая связь между амплитудами рассеяния, соответствующими этим двум представлениям:

$$\mathfrak{U}^{(C)} = \mathfrak{B}^{(CL)} \mathfrak{U}^{(L)} \mathfrak{B}^{(CL)\dagger}, \quad (1.58)$$

или в явном виде

$$\mathfrak{U}^{(C)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (A_{11}^L + A_{22}^L) - i(A_{21}^L - A_{12}^L) & (A_{22}^L - A_{11}^L) + i(A_{21}^L + A_{12}^L) \\ (A_{22}^L - A_{11}^L) - i(A_{21}^L + A_{12}^L) & (A_{11}^L + A_{22}^L) + i(A_{21}^L - A_{12}^L) \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

4. Векторы Стокса рассеянной волны

На больших расстояниях r часть рассеянной волны, которая движется в данном направлении, можно «локально» рассматривать как плоскую волну. Поскольку полный поток рассеянного излучения, пересекающий сферическую поверхность радиусом r , равен

$$\frac{c}{2\pi} \int d\Omega \mathfrak{E}_0^* \mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{E}_0,$$

то локальная интенсивность указанной плоской волны определяется выражением

$$I \equiv r^{-2} I_{\text{расс}} = r^{-2} \mathfrak{E}_0^\dagger \mathfrak{U} \mathfrak{E}_0.$$

Эта величина линейно выражается через четыре параметра Стокса падающего пучка. Три других параметра Стокса рассеянного пучка также линейно связаны с четырьмя параметрами Стокса падающего пучка. Для «векторов», определяемых формулами (1.33)–(1.35), можно записать следующее соотношение:

$$\mathcal{I}_{\text{расс}} = \mathcal{F} \mathcal{I}_{\text{пад}}. \quad (1.60)$$

При этом подразумевается, что истинный вектор \mathcal{I} (локально) плоской волны, наблюдаемой в точке r , равен $r^{-2} \mathcal{I}_{\text{расс}}$. Приведем здесь явные выражения для матрицы \mathcal{F}

$$\mathcal{F}^{(L)} = \begin{bmatrix} |A_{11}^L|^2 & |A_{12}^L|^2 & -\text{Re}(A_{11}^L A_{12}^{L*}) & \text{Im}(A_{11}^L A_{12}^{L*}) \\ |A_{21}^L|^2 & |A_{22}^L|^2 & -\text{Re}(A_{21}^L A_{22}^{L*}) & \text{Im}(A_{21}^L A_{22}^{L*}) \\ -2 \text{Re}(A_{11}^L A_{21}^{L*}) & -2 \text{Re}(A_{12}^L A_{22}^{L*}) & \text{Re}(A_{11}^L A_{22}^{L*} + A_{12}^L A_{21}^{L*}) & \text{Im}(A_{22}^L A_{11}^{L*} - A_{21}^L A_{12}^{L*}) \\ -2 \text{Im}(A_{11}^L A_{21}^{L*}) & -2 \text{Im}(A_{12}^L A_{22}^{L*}) & \text{Im}(A_{11}^L A_{22}^{L*} + A_{12}^L A_{21}^{L*}) & \text{Re}(A_{22}^L A_{11}^{L*} - A_{21}^L A_{12}^{L*}) \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

и

$$\mathcal{F}^{(C)} = \begin{bmatrix} |A_{11}^C|^2 & |A_{12}^C|^2 & \text{Re}(A_{11}^C A_{12}^{C*}) & -\text{Im}(A_{11}^C A_{12}^{C*}) \\ |A_{21}^C|^2 & |A_{22}^C|^2 & \text{Re}(A_{21}^C A_{22}^{C*}) & -\text{Im}(A_{21}^C A_{22}^{C*}) \\ 2 \text{Re}(A_{11}^C A_{22}^{C*}) & 2 \text{Re}(A_{12}^C A_{22}^{C*}) & \text{Re}(A_{11}^C A_{22}^{C*} + A_{12}^C A_{21}^{C*}) & \text{Im}(A_{22}^C A_{11}^{C*} - A_{21}^C A_{12}^{C*}) \\ 2 \text{Im}(A_{11}^C A_{21}^{C*}) & 2 \text{Im}(A_{12}^C A_{22}^{C*}) & \text{Im}(A_{11}^C A_{22}^{C*} + A_{12}^C A_{21}^{C*}) & \text{Re}(A_{22}^C A_{11}^{C*} + A_{21}^C A_{12}^{C*}) \end{bmatrix}, \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned}
 2F_{21}^{(S)} &= |A_{11}^L|^2 \pm |A_{12}^L|^2 \pm |A_{21}^L|^2 + |A_{22}^L|^2, \\
 2F_{22}^{(S)} &= |A_{11}^L|^2 \mp |A_{12}^L|^2 \pm |A_{21}^L|^2 - |A_{22}^L|^2, \\
 F_{23}^{(S)} &= -\operatorname{Re}(A_{11}^L A_{12}^{L*} \pm A_{22}^L A_{21}^{L*}), \\
 F_{24}^{(S)} &= -\operatorname{Im}(A_{11}^L A_{12}^{L*} \mp A_{22}^L A_{21}^{L*}), \\
 F_{31}^{(S)} &= -\operatorname{Re}(A_{11}^L A_{21}^{L*} \pm A_{22}^L A_{12}^{L*}), \\
 F_{33}^{(S)} &= \operatorname{Re}(A_{11}^L A_{22}^{L*} \pm A_{12}^L A_{21}^{L*}), \\
 F_{34}^{(S)} &= \operatorname{Im}(A_{12}^L A_{21}^{L*} \mp A_{11}^L A_{22}^{L*}), \\
 F_{41}^{(S)} &= \operatorname{Im}(A_{21}^L A_{11}^{L*} \pm A_{22}^L A_{12}^{L*}).
 \end{aligned} \tag{1.63}$$

Эти выражения имеют место как в том случае, когда векторы \mathcal{J} отнесены к плоскости отсчета, проходящей через фиксированное направление, так и в том случае, когда они отнесены к плоскости рассеяния. Непосредственный переход от одного случая к другому осуществляется при помощи формулы (1.36). Так как

$$\mathcal{J}_{\text{пад, фикс}} = \mathfrak{M}_{-\varphi} \mathcal{J}_{\text{пад}}, \quad \mathcal{J}_{\text{расс, фикс}} = \mathfrak{M}_{-\varphi'} \mathcal{J}_{\text{расс}}, \tag{1.64}$$

то

$$\mathcal{F}_{\text{фикс}} = \mathfrak{M}_{-\varphi'} \mathcal{F} \mathfrak{M}_{\varphi}, \tag{1.65}$$

где \mathfrak{M}_{φ} определяется формулами (1.39), (1.40) или (1.41), а φ' — формулой (1.51).

5. Дифференциальное сечение рассеяния

В типичных экспериментах по рассеянию мы имеем пучок электромагнитных волн, падающий на препятствие, а также детекторы, расположенные на большом расстоянии от него (по сравнению как с длиной волны, так и с размерами препятствия) и предназначенные для измерения потока излучения, рассеянного в данном направлении. Такие измерения возможны только тогда, когда детекторы расположены вне падающего пучка. Следовательно, последний должен иметь конечную ширину, а это означает, что его волновой вектор определен не абсолютно точно. Неопределенность Δk поперечной компонентой волнового вектора падающего пучка связана с шириной пучка W соотношением

$$\Delta k W \approx 1.$$

Конечность Δk приводит к «размазыванию» направления падения пучка, а следовательно, к «размазыванию» угла рассеяния на величину

$$\frac{\Delta k}{k} \approx \frac{1}{Wk}.$$

Следовательно, для точного определения угла рассеяния необходимо выполнение условия $W \gg \lambda$. Кроме того, очевидно, что ширина пучка должна быть больше, чем размер D рассеивателя. Располагая детекторы на расстоянии, большем W и D , мы можем удовлетворить это требование к пучку, а также требование, чтобы детекторы находились вне пучка.

Дифференциальное сечение рассеяния определяется как отношение рассеянного потока в единицу телесного угла (на большом расстоянии от рассеи-

вающего центра) к падающему потоку:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{I_{\text{расс}}}{I_{\text{пад}}} . \quad (1.66)$$

Зная величину \mathcal{F} , можно сразу вычислить дифференциальное поперечное сечение при любой поляризации падающего пучка. Аналогичным образом с помощью величины \mathcal{F} можно выразить параметры рассеянного излучения через соответствующие параметры падающей волны. Используя формулы (1.31) и (1.63), можно получить следующее общее выражение для дифференциального поперечного сечения рассеяния через параметры P , χ и β падающей волны:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \frac{1}{2} (|A_{11}^L|^2 + |A_{12}^L|^2 + |A_{21}^L|^2 + |A_{22}^L|^2) + \\ & + \frac{1}{2} P \cos 2\chi \cos 2\beta (|A_{12}^L|^2 - |A_{11}^L|^2 - |A_{21}^L|^2 + |A_{22}^L|^2) + \\ & + P \sin 2\chi \cos 2\beta \operatorname{Re} (A_{12}^L A_{11}^{L*} + A_{22}^L A_{21}^{L*}) + \\ & + P \sin 2\beta \operatorname{Im} (A_{12}^L A_{11}^{L*} + A_{22}^L A_{21}^{L*}) . \end{aligned} \quad (1.67)$$

Можно показать, что если падающий пучок не поляризован, то степень поляризации рассеянного излучения определяется формулой

$$P^2 = 1 - \frac{|\det \mathfrak{A}|^2}{(d\sigma/d\Omega)^2} , \quad (1.68)$$

а для степени эллиптичности его поляризации имеем

$$\sin 2\beta = \frac{\operatorname{Im} (A_{21}^L A_{11}^{L*} + A_{22}^L A_{12}^{L*})}{[(d\sigma/d\Omega)^2 - |\det \mathfrak{A}|^2]^{1/2}} . \quad (1.69)$$

Приведем два примера. Для неполяризованного падающего пучка интенсивность рассеянного излучения, имеющего правовинтовую поляризацию, на единицу интенсивности общего падающего излучения равна

$$\frac{1}{2} |A_{11}^C|^2 + \frac{1}{2} |A_{12}^C|^2 = |A_{11}^L - iA_{21}^L|^2 + |A_{22}^L + iA_{12}^L|^2 .$$

Если падающее излучение имеет правовинтовую круговую поляризацию, то

$$\mathcal{J}_{\text{расс}}^{(C)} = [|A_{11}^C|^2, |A_{21}^C|^2, -2 \operatorname{Re} (A_{11}^C A_{21}^{C*}), 2 \operatorname{Im} (A_{21}^C A_{11}^{C*})] ,$$

так что дифференциальное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_{11}^C|^2 + |A_{21}^C|^2 .$$

Рассеянный пучок является полностью поляризованным, причем степень эллиптичности его поляризации характеризуется величиной

$$2 \operatorname{tg} 2\beta = \frac{|A_{11}^C|}{|A_{21}^C|} - \frac{|A_{21}^C|}{|A_{11}^C|} .$$

6. Матрица плотности рассеянной волны

Если падающий пучок описывают при помощи матрицы плотности $\rho_{\text{пад}}$, то

$$\begin{aligned} I_{\text{расс}} (\rho_{\text{расс}})_{ij} &= (\mathfrak{E}_{\text{расс}})_i (\mathfrak{E}_{\text{расс}})_j^* = \sum_{kl} (\mathfrak{E}_{\text{пад}})_k (\mathfrak{E}_{\text{пад}})_l^* A_{ik} A_{jl}^* = \\ &= \sum_{kl} (\rho_{\text{пад}})_{kl} A_{ik} A_{jl}^* I_{\text{пад}} , \end{aligned}$$

или в матричных обозначениях

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \rho_{\text{расс}} = \mathfrak{A} \rho_{\text{пад}} \mathfrak{A}^\dagger , \quad (1.70)$$

где

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I_{\text{расс}}}{I_{\text{пад}}} = \text{Sp } \mathfrak{A}_{\text{пад}} \mathfrak{A}^\dagger$$

есть дифференциальное сечение с учетом обеих компонент поляризации рассеянной волны. Формула (1.46) позволяет затем непосредственно выразить все параметры поляризации рассеянной волны через соответствующие параметры падающего пучка. Например, для первоначально неполяризованного излучения имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \text{Sp } \mathfrak{A}^\dagger \mathfrak{A} \quad (1.71)$$

и

$$\rho_{\text{расс}} = \frac{\mathfrak{A} \mathfrak{A}^\dagger}{\text{Sp } \mathfrak{A}^\dagger \mathfrak{A}}. \quad (1.72)$$

7. Зависимость рассеяния вперед и рассеяния назад от азимутального угла

Следует сказать несколько слов об амплитудах рассеяния вперед и рассеяния назад. Если $\theta = 0$ или 180° , то амплитуды $\mathfrak{A}_{\text{фикс}}$ не должны зависеть от φ , так как в этом случае азимутальный угол не определен. Однако амплитуды \mathfrak{A} зависят от φ , так как угол φ все еще определяет ориентацию плоскости отсчета для компонент \mathfrak{E} . Из рассмотрения формулы (1.55) следует, что зависимость $\mathfrak{A}^{(C)}$ от φ имеет очень простой характер. Для рассеяния вперед $\varphi' = \varphi$, поэтому A_{11}^C и A_{22}^C не зависят от φ , тогда как

$$A_{12}^C \sim e^{2i\varphi}, \quad A_{21}^C \sim e^{-2i\varphi}.$$

Для рассеяния назад $\varphi' = \pi - \varphi$, поэтому A_{12}^C и A_{21}^C не зависят от φ , в то время как

$$A_{11}^C \sim e^{-2i\varphi}, \quad A_{22}^C \sim e^{2i\varphi}.$$

Зависимость $\mathfrak{A}^{(L)}$ от φ является более сложной.

8. Эффекты вращательной и зеркальной симметрии

Если рассеиватель обладает полной вращательной и зеркальной симметрией, то амплитуда рассеяния $\mathfrak{A}^{(L)}$ должна быть диагональна. Это легко показать следующим образом.

Результат отражения рассеивателя в плоскости рассеяния должен быть таким же, как и результат отражения всей системы, кроме рассеивателя. В последнем случае величины $\mathfrak{E}_{\perp \text{пад}}$ и $\mathfrak{E}_{\perp \text{расс}}$ меняют знак, в то время как $\mathfrak{E}_{\parallel \text{пад}}$ и $\mathfrak{E}_{\parallel \text{расс}}$ знака не меняют. Это означает, что A_{12}^L и A_{21}^L меняют знак. С другой стороны, если рассеиватель инвариантен относительно такого отражения, то A_{12}^L и A_{21}^L должны оставаться неизменными; следовательно, для данного конкретного направления падения и рассеяния эти величины должны равняться нулю. Если рассеиватель обладает вращательной симметрией относительно направления падения пучка и зеркальной симметрией относительно любой плоскости, проходящей через него, то для этого конкретного направления падения пучка матрица $\mathfrak{A}^{(L)}$ должна быть диагональной независимо от направления рассеяния. Наконец, для рассеивателя, обладающего полной вращательной и зеркальной симметрией, $\mathfrak{A}^{(L)}$ есть диагональная матрица для любых начальных и конечных направлений.

Из диагональности матрицы $\mathfrak{A}^{(L)}$ не следует диагональность матрицы $\mathfrak{A}_{\text{фикс}}^{(L)}$ и $\mathfrak{A}^{(C)}$. Для компонент поля с круговой поляризацией рассуждений, подобных приведенным, провести нельзя. Однако из (1.59) видно, что если $\mathfrak{A}^{(L)}$

диагональна, то матрица $\mathfrak{A}^{(C)}$ должна быть *симметричной* и $A_{11}^C = A_{22}^C$. Наличие одной вращательной симметрии относительно оси падающего пучка еще не означает, что мы не можем различать направления поворота в рассеивающем центре и, следовательно, в силу ее одной еще невозможно требовать, чтобы выполнялось условие $A_{11}^{(C)} = A_{22}^{(C)}$, т. е. чтобы $\mathfrak{A}^{(L)}$ была диагональна.

Если рассеиватель является аксиально симметричным относительно оси падающего пучка, то \mathfrak{A} не может зависеть от φ . Кроме того, амплитуда $\mathfrak{A}_{\text{финс}}$ благодаря фиксированному положению исходной плоскости отсчета имеет простую зависимость от φ , которая для $\mathfrak{A}_{\text{финс}}^{(C)}$ определяется формулой (1.55).

Считая теперь, что имеет место симметрия относительно вращений и отражения, можно написать

$$A_{11}^L A_{22}^{L*} \equiv \alpha + i\beta.$$

Тогда из (1.61) видно, что выражение для $\mathcal{F}^{(L)}$ упрощается

$$\mathcal{F}^{(L)} = \begin{pmatrix} |A_{11}^L|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A_{22}^L|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

Кроме того,

$$A_{11}^C A_{12}^{C*} = \frac{1}{2} |A_{22}^L|^2 - \frac{1}{2} |A_{11}^L|^2 + i\beta$$

и

$$\mathcal{F}^{(C)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} |A_{11}^L + A_{22}^L|^2 & \frac{1}{2} |A_{22}^L - A_{11}^L|^2 & \frac{1}{2} |A_{11}^L|^2 - \frac{1}{2} |A_{22}^L|^2 & \beta \\ \frac{1}{2} |A_{22}^L - A_{11}^L|^2 & \frac{1}{2} |A_{11}^L + A_{22}^L|^2 & \frac{1}{2} |A_{11}^L|^2 - \frac{1}{2} |A_{22}^L|^2 & -\beta \\ |A_{22}^L|^2 - |A_{11}^L|^2 & -|A_{22}^L|^2 + |A_{11}^L|^2 & |A_{11}^L|^2 + |A_{22}^L|^2 & 0 \\ -2\beta & 2\beta & 0 & |A_{11}^L|^2 + |A_{22}^L|^2 \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

Формула для степени поляризации рассеянного излучения при неполяризованном падающем пучке сводится к выражению

$$P = \frac{|A_{11}^L|^2 - |A_{22}^L|^2}{|A_{11}^L|^2 + |A_{22}^L|^2}. \quad (1.75)$$

Половина излучения имеет левовинтовую круговую поляризацию, половина — правовинтовую; степень эллиптичности равна нулю.

Рассмотрим теперь рассеяние вперед и назад, когда, как мы уже знаем, $\mathfrak{A}_{\text{финс}}$ не зависит от φ .

1. Если рассеиватель является аксиально (вращательно) симметричным относительно оси падающего пучка, то матрица \mathfrak{A} также не должна зависеть от φ . Тогда из формулы (1.55) видно, что для рассеяния *вперед* ($\varphi' = \varphi$) матрица $\mathfrak{A}^{(C)}$ диагональна; поэтому из (1.59) следует, что

$$A_{11}^L = A_{22}^L, \quad A_{12}^L = -A_{21}^L.$$

При рассеянии *назад* ($\varphi' = \pi - \varphi$) аналогичным образом находим, что $A_{11}^C = A_{22}^C = 0$ и, следовательно,

$$A_{11}^L = -A_{22}^L, \quad A_{12}^L = A_{21}^L.$$

Для такого рассеивателя может быть важным направление поворота вокруг оси падения пучка. Поэтому излучения, имеющие право- и левовинтовую поляризации, необязательно будут рассеиваться одинаково.

2. Предположим, что рассеиватель обладает к тому же зеркальной симметрией относительно плоскости, проходящей через ось падающего пучка. Мы знаем, что в этом случае матрица $\mathfrak{U}^{(L)}$ должна быть диагональна. Отсюда следует, что для рассеяния *вперед*

$$A_{11}^C = A_{22}^C = A_{11}^L = A_{22}^L \equiv A,$$

в то время как все остальные матричные элементы равны нулю. Для рассеяния *назад*

$$-A_{11}^L = A_{22}^L = A_{21}^C = A_{12}^C,$$

а все остальные матричные элементы равны нулю. Дополнительная зеркальная симметрия ведет к тому, что мы не можем различать направления поворота рассеивателя вокруг оси падающего пучка, и поэтому в направлении вперед он одинаково рассеивает излучение, имеющее право- и левовинтовую поляризацию. В направлении назад он рассеивает их также одинаково, но в этом случае направление поворота (угловой момент) сохраняется, причем волна с правовинтовой поляризацией превращается в волну с левовинтовой поляризацией, и наоборот.

9. Рассеяние вперед; оптическая теорема

При рассеянии вперед или почти вперед электрическое поле на больших расстояниях от рассеивающего центра, согласно (1.49), определяется выражением

$$\mathfrak{E} \approx [1 + r^{-1} e^{ik(r-z)}] \mathfrak{U}(0) \mathfrak{E}_{\text{пад}}.$$

Предположим, что это излучение наблюдают в точках экрана, размеры которого малы по сравнению с расстоянием от рассеивателя. Это означает, что для этих точек

$$x^2 + y^2 \ll z^2,$$

и можно произвести разложение

$$r = [z^2 + (x^2 + y^2)]^{1/2} \approx z + \frac{1}{2} z^{-1} (x^2 + y^2),$$

так что

$$r^{-1} e^{ik(1-z)} \approx z^{-1} e^{ik(x^2 + y^2)/2z}.$$

Следовательно, интенсивность излучения в точке (x, y) на экране на расстоянии $z \gg \lambda$ в направлении вперед равна

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^\dagger \mathfrak{E} &\approx \mathfrak{E}_{\text{пад}}^\dagger \left\{ 1 + z^{-1} \exp \left[\frac{-ik(x^2 + y^2)}{2z} \right] \mathfrak{U}^\dagger(0) \right\} \times \\ &\times \left\{ 1 + z^{-1} \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right] \mathfrak{U}(0) \right\} \mathfrak{E}_{\text{пад}} \approx \\ &\approx \mathfrak{E}_{\text{пад}}^\dagger \mathfrak{E}_{\text{пад}} + 2z^{-1} \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right] \mathfrak{E}_{\text{пад}}^\dagger \mathfrak{U}(0) \mathfrak{E}_{\text{пад}} \right\}. \end{aligned}$$

Интегрируя по поверхности экрана, вычислим получаемую им полную энергию. Если размеры экрана «велики», но все же не слишком велики, т. е. таковы, что на краях экрана выполняется условие

$$\frac{k(x^2 + y^2)}{z} \gg 2\pi,$$

но в то же время

$$x^2 + y^2 \ll z^2,$$

то в результирующем интеграле

$$\iint dx dy \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right]$$

в качестве пределов интегрирования можно взять $x, y = \pm \infty$, не изменяя при этом заметно величины интеграла. Чтобы этот способ вычисления приводил к правильному результату, размер D принимающего экрана должен удовлетворять следующему условию:

$$(z\lambda)^{1/2} \ll D \ll z. \quad (1.76)$$

В этом случае гауссовский интеграл вычисляется:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z} \right] = 2\pi izk^{-1}.$$

Если a — площадь экрана, то интенсивность, проинтегрированная по его поверхности, равна

$$\mathfrak{E}_{\text{пад}}^{\dagger} \mathfrak{E}_{\text{пад}} a - 4\pi k^{-1} \text{Im} [\mathfrak{E}_{\text{пад}}^{\dagger} \mathfrak{X}(0) \mathfrak{E}_{\text{пад}}].$$

Второй член характеризует уменьшение интенсивности излучения, обусловленное присутствием рассеивателя. В зависимости от направления поляризации падающего пучка это уменьшение на единицу интенсивности падающего излучения равно

$$4\pi k^{-1} \text{Im} A_{11}(0) \quad \text{или} \quad 4\pi k^{-1} \text{Im} A_{22}(0).$$

Следует помнить, что для того, чтобы этот эффект можно было наблюдать как задержку излучения, принимающий экран должен быть *большим* в смысле (1.76). Это, в частности, означает, что на нем должно уместиться большое число дифракционных максимумов.

Далее, эта задержка характеризуется энергией, которая удаляется из первоначального пучка, движущегося в направлении вперед, в единицу времени в результате интерференции с рассеянным излучением, так называемым *теневым рассеянием*. Вследствие сохранения полной энергии электромагнитного поля указанная величина должна быть равна сумме полной рассеянной (в единицу времени) энергии и полной поглощенной энергии¹⁾.

$$\sigma_{\text{полн}}^{(i)} \equiv \sigma_{\text{расс}}^{(i)} + \sigma_{\text{погл}}^{(i)} = 4\pi k^{-1} \text{Im} A_{ii}(0). \quad (1.77)$$

Индекс (i) указывает, какую поляризацию имеет падающий пучок: линейную или круговую.

Если падающий пучок частично поляризован, то

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{полн}} = 2\pi k^{-1} [\text{Im} (A_{11}^L + A_{22}^L) + Q \text{Im} (A_{11}^L - A_{22}^L) - \\ - U \text{Im} (A_{12}^L + A_{21}^L) + V \text{Re} (A_{12}^L - A_{21}^L)], \end{aligned} \quad (1.78)$$

где все амплитуды соответствуют рассеянию вперед. Для неполяризованного пучка это выражение, конечно, сводится к формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{полн}} &= 2\pi k^{-1} \text{Im} [A_{11}^L(0) + A_{22}^L(0)] = \\ &= 2\pi k^{-1} \text{Im} [A_{11}^C(0) + A_{22}^C(0)]. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Если пучок падает вдоль оси симметрии рассеивателя, то, согласно результатам анализа, приведенного в § 3, п. 8.

$$\sigma_{\text{полн}} = 4\pi k^{-1} [\text{Im} A_{11}^L(0) + P \sin 2\beta \text{Re} A_{12}^L(0)].$$

¹⁾ Ввиду важности введенного сечения как меры отвода излучения из пучка для него используют специальный термин: *сечение экстинкции*.

Наконец, если рассеиватель полностью инвариантен относительно вращений и отражений, то сечение просто равно

$$\sigma_{\text{полн}} = 4\pi k^{-1} \text{Im } A(0). \quad (1.80)$$

Аналогичного типа соотношения в квантовой теории рассеяния обычно называют *оптической теоремой*¹⁾. Это название использовано нами и здесь.

§ 4. ДВУКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ

Излучение, рассеявшееся один раз на каком-либо препятствии, может еще раз рассеяться на каком-либо другом препятствии. Если два рассеивателя находятся друг от друга на расстоянии, сравнимом с длиной волны излучения, то их нужно рассматривать как один составной рассеиватель. Однако если расстояние между рассеивателями велико по сравнению как с длиной волны, так и с их собственными размерами, то они находятся в волновой зоне друг друга и поток на второй рассеиватель можно вычислить с помощью амплитуды рассеяния на первом, используя асимптотическое представление полей в виде (1.49).

Если считать, что два рассеивателя находятся в точках 1 и 2, а детектор расположен в точке 3, то электрическое поле в точке 3 в обычных обозначениях имеет вид

$$\mathcal{E}_0 e^{ik \cdot r} + r_{13}^{-1} e^{ikr_{13}} \mathcal{E}_{31} + r_{23}^{-1} e^{ikr_{23}} \mathcal{E}_{32} + r_{23}^{-1} e^{ikr_{23}} r_{12}^{-1} e^{ikr_{12}} \mathcal{E}_{321} + r_{13}^{-1} e^{ikr_{13}} r_{12}^{-1} e^{ikr_{12}} \mathcal{E}_{312}.$$

Здесь \mathcal{E}_{31} — поле, рассеянное первым центром в направлении детектора, \mathcal{E}_{321} — поле, рассеянное первым центром в направлении второго центра, а затем в направлении детектора, наконец, r_{ij} — расстояние от точки i до точки j .

Чтобы найти интенсивность и матрицу плотности рассеянного излучения, нужно взять произведение той части поля, которая соответствует рассеянному излучению, и комплексно сопряженной ей величины. Это приведет к появлению перекрестных членов, содержащих $\exp(ikr_{12})$ или $\exp(lik(r_{13} - r_{23}))$ и т. д. Вклад от этих перекрестных членов в измеряемый поток может быть обнаружен только в том случае, если положения рассеивающих центров определены с точностью до долей длины волны или если угол рассеяния определен значительно лучше, чем это возможно на практике. Следовательно, эти члены не будут, вообще говоря, давать вклада в измеряемую интенсивность в точке 3 и мы получим

$$I_3 = r_{13}^{-2} I_{31} + r_{23}^{-1} I_{32} + r_{23}^{-1} r_{12}^{-1} I_{321} + r_{13}^{-1} r_{12}^{-1} I_{312}. \quad (1.81)$$

Чтобы перейти от этого выражения к обычному сечению и написать его аналог для матрицы плотности, нужно сделать одно из двух предположений. Необходимо допустить, что либо расстояния r_{13} и r_{23} велики по сравнению с r_{12} , так что направления от рассеивателей к детектору по существу параллельны друг другу, либо детектор направлен в сторону только одного из рассеивателей и регистрирует излучение, поступающее только от него, а попадание на детектор потока от второго рассеивателя исключено. В последнем случае падающий поток, очевидно, должен попадать на второй рассеиватель не прямо, а только в результате рассеяния на первом. Рассмотрим сначала первый случай.

Считая, что $r_{13} \gg r_{12}$, $r_{23} \gg r_{12}$, можно преобразовать (1.81) непосредственно в дифференциальное сечение. Направление рассеяния в этом случае точно определено. Если обозначить искомое сечение с учетом поляризации в обоих направлениях через $d\sigma(3)/d\Omega$, сечение рассеяния только на первом рассеивателе (в направлении точки 3) посредством $d\sigma(31)/d\Omega$ и сечение рассея-

¹⁾ Эта формула также известна под названием *соотношения Бора — Пайерлса — Плачека*.

ния на первом рассеивателе в направлении второго центра (точка 2), а затем в направлении детектора (точка 3) через $d\sigma(321)/d\Omega$, то

$$\frac{d\sigma(3)}{d\Omega} = \frac{d\sigma(31)}{d\Omega} + \frac{d\sigma(32)}{d\Omega} + \frac{d\sigma(321)}{d\Omega} + \frac{d\sigma(312)}{d\Omega}, \quad (1.82)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(321)}{d\Omega} &= r_{12}^{-2} \frac{1}{2} \text{Sp} [\rho_{\text{пад}} \mathfrak{A}^\dagger(21) \mathfrak{A}^\dagger(32) \mathfrak{A}(32) \mathfrak{A}(21)], \\ \frac{d\sigma(312)}{d\Omega} &= r_{12}^{-2} \frac{1}{2} \text{Sp} [\rho_{\text{пад}} \mathfrak{A}^\dagger(12) \mathfrak{A}^\dagger(31) \mathfrak{A}(31) \mathfrak{A}(12)], \end{aligned} \quad (1.83)$$

поскольку

$$\mathfrak{G}_{321} = \mathfrak{A}(32) \mathfrak{A}(21) \mathfrak{G}_0. \quad (1.84)$$

Здесь амплитуды должны быть отнесены к плоскости отсчета, проходящей через фиксированное направление. Это направление удобно выбрать так, чтобы оно было перпендикулярно плоскости, образуемой падающим пучком и линией, соединяющей рассеивающие центры. Тогда его можно использовать для всех четырех амплитуд. Можно также выбрать в качестве этого направления линию, лежащую в первой плоскости рассеяния и перпендикулярную линии, соединяющей точки 1 и 2. Заметим, что отношение сечения (321) к сечению (21) по существу равно отношению сечения (32) к квадрату расстояния r_{12} . В большинстве случаев эта величина, конечно, весьма мала.

Аналогично находится матрица плотности рассеянного излучения

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(3)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(3) &= \frac{d\sigma(31)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(31) + \frac{d\sigma(32)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(32) + \\ &+ \frac{d\sigma(321)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(321) + \frac{d\sigma(312)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(312), \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\frac{d\sigma(321)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(321) = r_{12}^{-2} \mathfrak{A}(32) \mathfrak{A}(21) \rho_{\text{пад}} \mathfrak{A}^\dagger(21) \mathfrak{A}^\dagger(32), \quad (1.86)$$

$$\frac{d\sigma(312)}{d\Omega} \rho_{\text{расс}}(312) = r_{12}^{-2} \mathfrak{A}(31) \mathfrak{A}(12) \rho_{\text{пад}} \mathfrak{A}^\dagger(12) \mathfrak{A}^\dagger(31).$$

Конечно, все эти результаты можно получить, используя векторы Стокса, причем следует положить

$$F_{321} = r_{12}^{-1} F_{32} F_{21} \text{ и т. д.}$$

Теперь следует установить связь между углами рассеяния в системах координат, связанных с обоими рассеивающими центрами. Выберем систему координат так, чтобы вектор \hat{k}'' , направленный от первого рассеивателя ко второму, лежал в плоскости xz , и выберем первую плоскость рассеяния в качестве плоскости отсчета для поляризации при первом рассеянии. Так как ось x' расположена в этой плоскости (фиг. 1.4), то эту ось можно непосредственно использовать в качестве *фиксированного* направления, через которое должны проходить начальная и конечная плоскости отсчета для второго рассеяния. Тогда углы Θ и Φ в системе координат (x', y', z') связаны с углами θ и φ , измеренными в первой системе координат (x, y, z) , следующими соотношениями:

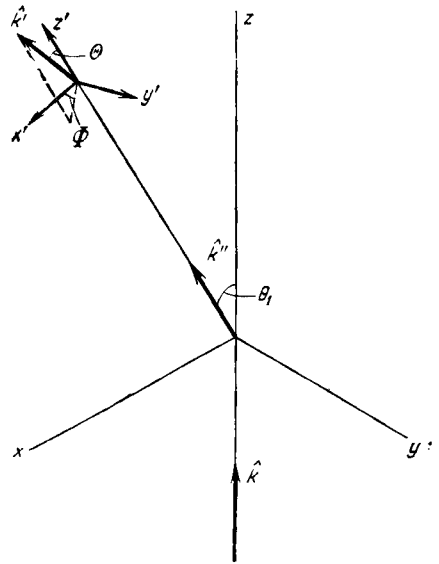
$$\begin{aligned} \cos \Theta &= \cos \theta \cos \theta_1 + \cos \varphi \sin \theta \sin \theta_1, \\ \text{ctg } \Phi &= \text{ctg } \varphi \cos \theta_1 - \text{cosec } \varphi \text{ctg } \theta \sin \theta_1, \end{aligned} \quad (1.87)$$

где θ_1 — (фиксированный) угол между линией, соединяющей первый и второй рассеиватели, и осью z , т. е. направлением падения пучка. Углы Φ и Θ нужно использовать вместо углов φ и θ при вычислении угла φ' по формуле (1.51), а также в формуле (1.54) при переходе от плоскости рассеяния, выступающей

в качестве плоскости отсчета, к плоскости отсчета для второго рассеяния, проходящей через ось x' . В сечении (312) угол θ'_1 следует заменить углом $\pi - \theta_1$.

Если используется экспериментальная установка, в которой регистрируется излучение только от второго рассеивателя и весь поток, достигающий второго рассеивателя, приходит из точки 1, то измеряется непосредственно сечение $d\sigma$ (321)/ $d\Omega$. Если, кроме того, производятся измерения поляризации, то можно сразу найти матрицу ρ (321). Цель такого эксперимента может состоять в том, чтобы определить поляризацию, создающуюся в результате однократного рассеяния, не прибегая к ее непосредственному измерению.

Предположим, что оба рассеивающих центра обладают вращательной и зеркальной симметрией, но что обе компоненты с определенными линейными поляризациями рассеиваются по-разному. Тогда в результате первого рассеяния первоначально неполяризованное излучение как-то поляризуется, а второе рассеяние приводит к появлению зависимости от азимутального угла, которая служит для исследования этой поляризации. Обозначим через $d\sigma^{(0)}(21)/d\Omega$ и $d\sigma^{(0)}(32)/d\Omega$ сечения рассеяния неполяризованного излучения на первом и втором рассеивающих центрах, а через $\Delta d\sigma/d\Omega$ — разность между соответствующими сечениями рассеяния излучения, имеющего линейную поляризацию, параллельную и перпендикулярную плоскостям рассеяния, т. е.



Ф и г. 1.4. Плоскости отсчета при двукратном рассеянии.

$$\Delta \frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv ||A_{\perp}^L|^2 - |A_{\parallel}^L|^2| = 2P \frac{d\sigma^{(0)}}{d\Omega},$$

где P — степень поляризации, которая создается в том случае, когда исходный пучок неполяризован. Тогда простые вычисления по формуле (1.83) с использованием (1.55) и (1.62) приводят к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(321)}{d\Omega} &= r_{12}^{-2} \left[\frac{d\sigma^{(0)}(32)}{d\Omega} \frac{d\sigma^{(0)}(21)}{d\Omega} + \frac{1}{4} \Delta \frac{d\sigma(32)}{d\Omega} \Delta \frac{d\sigma(21)}{d\Omega} \cos 2\Phi \right] = \\ &= r_{12}^{-2} \frac{d\sigma^{(0)}(32)}{d\Omega} \frac{d\sigma^{(0)}(21)}{d\Omega} [1 + P(32)P(21) \cos 2\Phi]. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Следовательно, разность между дифференциальными сечениями двукратного рассеяния при измерении детектором, регистрирующим излучение, поляризованное в плоскости первого рассеяния и в перпендикулярном направлении, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta \frac{d\sigma(321)}{d\Omega} &= \frac{1}{2} r_{12}^{-2} \Delta \frac{d\sigma(32)}{d\Omega} \Delta \frac{d\sigma(21)}{d\Omega} = \\ &= 2r_{12}^{-2} P(32)P(21) \frac{d\sigma^{(0)}(32)}{d\Omega} \frac{d\sigma^{(0)}(21)}{d\Omega}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Таким образом можно измерить обе степени поляризации, не используя поляризованные пучки или поляризационные фильтры.

§ 5. РАССЕЯНИЕ ОБЛАКОМ, СОСТОЯЩИМ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ

1. Аддитивность сечений

Если электромагнитная волна проходит через среду, содержащую большое число хаотически расположенных частиц (не кристалл), то фазы волн, рассеянных в любом данном направлении (за исключением рассеяния вперед) и приходящих от хаотических распределенных центров, являются некогерентными. Вследствие этого полная интенсивность равна сумме интенсивностей волн, приходящих от всех отдельных рассеивающих центров,

$$I = \sum_i I^{(i)}.$$

Сечения рассеяния также аддитивны:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_i \frac{d\sigma^i}{d\Omega}. \quad (1.90)$$

Естественно, что все складываемые дифференциальные сечения будут относиться к одному и тому же направлению рассеяния, если регистрация излучения производится на таком расстоянии от данного облака частиц, которое велико не только по сравнению с длиной волны, но также и по сравнению с размерами облака.

При рассеянии вперед изменение положения рассеивателя не приводит ни к какому сдвигу фаз, поэтому нужно складывать *амплитуды* рассеяния:

$$\mathfrak{A}(0) = \sum_i \mathfrak{A}^{(i)}(0).$$

Тогда из оптической теоремы (§ 3, п. 9) следует, что полные сечения также аддитивны

$$\sigma_{\text{полн}} = \sum_i \sigma_{\text{полн}}^{(i)}. \quad (1.91)$$

Отметим, однако, что аддитивность дифференциальных сечений (1.90) и полных сечений (1.91) обусловлена совершенно разными причинами. Следствием формул (1.90) и (1.91) является то, что сечения поглощения также аддитивны.

2. Показатель преломления

При отыскании корреляции между «оптическими» свойствами среды и оптическими свойствами составляющих ее частиц удобно рассмотреть два предельных случая. Предельный случай, когда длина волны велика по сравнению с расстоянием между частицами, есть по существу статический предел, поэтому его результатом (при определенных дополнительных предположениях) является формула Лорентца — Лоренца; он нас интересовать не будет.

В другом предельном случае, когда длина волны мала по сравнению с расстоянием между частицами, простой окончательный результат получается только для среды с *малой плотностью*. Это означает, что среднее расстояние между частицами D велико по сравнению с размером частицы R

$$D \gg R \quad (1.92)$$

(пока предполагается, что среда состоит только из частиц одного сорта). В цилиндре единичного поперечного сечения и длины x площадь, занимаемая находящимися в нем частицами, грубо говоря, равна

$$xNR^2 = \frac{xR^2}{D^3},$$

где N — число частиц в единице объема, поэтому характерное расстояние в среде, на котором происходит заметное изменение интенсивности пучка, равно

$$x \approx \frac{D^3}{R^2} = D \left(\frac{D}{R} \right)^2 \gg D. \quad (1.93)$$

Следовательно, можно выбрать слой вещества такой толщины dz , которая будет «бесконечно малой» в том смысле, что внутри этого слоя пучок можно считать постоянным, но в пределах которой будет содержаться достаточно много «рядов» частиц

$$D \ll dz \ll D \left(\frac{D}{R} \right)^2. \quad (1.94)$$

Выберем точку P на расстоянии d над поверхностью этого слоя, которое мало по сравнению с dz , но вместе с тем велико по сравнению с расстоянием между частицами

$$D \ll d \ll dz. \quad (1.95)$$

Следовательно, расстояние d таково, что соответствующим образом подобранный узкий конус C с вершиной в точке P , перпендикулярный поверхности слоя, хотя и является узким, но может все еще содержать большое число частиц в поперечном сечении. Поэтому под микроскопом с «обычным» коэффициентом увеличения среда будет выглядеть непрерывной, а точка P будет казаться лежащей на поверхности слоя бесконечно малой толщины dz .

Найдем, чему равно электрическое поле в точке P , если известно его значение до вхождения волны в слой толщиной dz . Если допустить, что длина волны λ мала по сравнению с расстоянием между частицами

$$\lambda \ll D, \quad (1.96)$$

то точка P автоматически оказывается в волновой зоне и электрическое поле можно найти из амплитуды рассеяния. Здесь нас интересует только когерентная часть амплитуды рассеяния, т. е. только плоская волна, которая распространяется в направлении вперед. Используя те же самые приближения, что и в § 3, п. 9, получаем

$$\mathfrak{E} \approx \mathfrak{E}_{\text{пад}} + \sum_j z_j^{-1} \exp \left[ik \frac{1}{2} z_j^{-1} (x_j^2 + y_j^2) \right] \mathfrak{A}(0) \mathfrak{E}_{\text{пад}}.$$

Здесь суммирование производится по всем частицам, расположенным в пространстве, вырезаемом из слоя узким телесным углом C . Из (1.92) следует, что многократным рассеянием можно пренебречь. В силу сделанных предположений рассматриваемая сумма содержит много членов даже при почти фиксированных z , поэтому ее можно заменить интегралом. Более того, пределы интегрирования в поперечном направлении можно распространить до бесконечности, так как раствор телесного угла можно выбрать настолько большим, чтобы на краях угла выполнялось условие

$$k(x^2 + y^2)z^{-1} \gg 2\pi,$$

т. е.

$$x^2 + y^2 \gg \lambda d.$$

В то же время угол должен оставаться настолько малым, чтобы выполнялось неравенство

$$x^2 + y^2 \ll d^2.$$

Вычисляя гауссовский интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &\approx \mathfrak{E}_{\text{пад}} + N \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy dz z^{-1} e^{ikh^1/2z^{-1}(x^2+y^2)} \mathfrak{A}(0) \mathfrak{E}_{\text{пад}} = \\ &= \mathfrak{E}_{\text{пад}} + 2\pi i N k^{-1} dz \mathfrak{A}(0) \mathfrak{E}_{\text{пад}}. \end{aligned}$$

Следовательно, в слое толщины dz поле волны изменяется на величину

$$d(\mathfrak{E}e^{-ikhz}) = 2\pi i N k^{-1} \mathfrak{A}(0) (\mathfrak{E}e^{-ikhz}) dz.$$

Это означает, что

$$\mathfrak{E} = e^{ikhnz} \mathfrak{E}_{00},$$

где \mathfrak{E}_{00} — константа (не зависящая от z), а показатель преломления определяется формулой

$$n = 1 + 2\pi N k^{-2} \mathfrak{A}(0). \quad (1.97)$$

Отметим, что, во-первых, n является комплексной величиной и, во-вторых, матрицей. Диагональные элементы этой матрицы дают комплексный показатель преломления для излучений, имеющих различные поляризации. Для линейно поляризованного излучения используют элементы $\mathfrak{A}^{(L)}$, а для излучения, поляризованного по кругу, — элементы $\mathfrak{A}^{(C)}$. Недиagonальные элементы матрицы характеризуют изменение поляризации с расстоянием, т. е. описывают вращение плоскости поляризации. Диагональные элементы действительной части матрицы

$$\text{Re } n_{ii} = 1 + 2\pi N k^{-2} \text{Re } \mathfrak{A}_{ii}(0) \quad (1.98)$$

описывают изменение длины волны в среде для двух направлений поляризации (двулучепреломление). Тот факт, что фазовая скорость c/n зависит от частоты, называют *дисперсией*. Диагональные матричные элементы мнимой части

$$\text{Im } n_{ii} = 2\pi N k^{-2} \text{Im } \mathfrak{A}_{ii}(0) = \frac{N}{2k} \sigma_{\text{полн}}^{(i)} \quad (1.99)$$

описывают поглощение (возможно, различное) обеих компонент поляризации в среде (дихроизм). Если ввести коэффициент поглощения γ по формуле

$$I = I_0 e^{-\gamma z}, \quad (1.100)$$

то получим

$$\gamma^{(i)} = N \sigma_{\text{полн}}^{(i)}. \quad (1.101)$$

Чтобы среда обладала поглощением, необязательно, чтобы этим свойством обладали отдельные рассеивающие центры. Даже если последние только рассеивают излучение, они тем самым отводят энергию в сторону от направления вперед, т. е. уводят энергию из когерентной части волны.

Следует отметить, что из самого характера предположений, сделанных при выводе выражения (1.97) для показателя преломления, вытекает, что последний всегда должен быть близок к единице. То, что выше было названо «радиусом» рассеивающей частицы R , по существу следует отождествить с $|\mathfrak{A}|$, и поэтому

$$|n - 1| \approx \lambda^2 N R = \left(\frac{\lambda}{D}\right)^2 \frac{R}{D} \ll 1. \quad (1.102)$$

3. Случай нескольких сортов частиц

Если среда содержит частицы разных сортов, причем следует учитывать и возможность наличия частиц с различной *ориентацией*, то предыдущие результаты можно непосредственно обобщить. В результате этого обобщения получим

$$n = 1 + 2\pi k^{-2} \sum_{\alpha} N_{\alpha} \mathfrak{A}_{\alpha}(0), \quad (1.103)$$

где N_{α} и \mathfrak{A}_{α} — число частиц сорта α в единице объема и амплитуда рассеяния частиц сорта α соответственно. Рассмотрим, в частности, среду, в которой имеются частицы *одного сорта*, но с различной ориентацией.

Пусть сначала все частицы ориентированы одинаковым образом вдоль оси падающего пучка, но имеют хаотически распределенные азимутальные углы относительно этой оси. Необходимо произвести усреднение по φ ; с помощью (1.55) получаем, что так как для рассеяния вперед амплитуда $\mathfrak{A}_{\text{фикс}}$ не должна зависеть от φ , недиагональные элементы $\mathfrak{A}^{(0)}$ при усреднении обращаются в нуль. Мы получаем такой же результат, как если бы *каждая* частица обладала вращательной симметрией относительно этой оси. В такой среде может иметь место двулучепреломление и дихроизм при круговой поляризации, но уже не может быть никакого двулучепреломления или дихроизма при линейной поляризации. Вместе с тем все еще имеется возможность вращения направления поляризации.

Пусть теперь каждая частица обладает аксиальной симметрией, и пусть оси симметрии частиц расположены параллельно направлению пучка, но среда в целом не «поляризована», т. е. на каждую частицу, ориентированную «вперед», приходится частица, ориентированная «назад». Если частицы имеют одинаковый вид спереди и сзади, но тем не менее все же не обладают зеркальной симметрией относительно плоскости, проходящей через ось пучка, то каждая из них должна обладать *винтовой симметрией*. В этом случае возможны двулучепреломление и дихроизм при круговой поляризации. Если поворот частицы на 180° приводит к тому, что в оптическом отношении она выглядит так же, как и ее зеркальное изображение, то величины A_{12}^L и A_{21}^L должны изменить знак, A_{11}^C и A_{22}^C остаются неизменными, а усреднение приводит к тому, что $n_{11}^C = n_{22}^C$. Для частиц, поворот которых имеет смысл, но которые не обладают винтовой симметрией, «выравнивание» их осей симметрии вдоль пучка не может вызвать двулучепреломления, дихроизма или вращения поляризации. Для получения такого рода эффектов среду необходимо *поляризовать*, т. е. заставить частицы «смотреть» в одну сторону.

Из многих других возможных случаев можно, наконец, рассмотреть случай, когда облако представляет собой смесь одинаковых частиц, ориентированных совершенно хаотическим образом. Если каждая частица совпадает со своим зеркальным изображением, то усреднение должно привести к тому, что $n_{11}^C = n_{22}^C = n_{11}^L = n_{22}^L$, т. е. явления двулучепреломления и дихроизма не могут иметь места. Если же частицы отличаются от своих зеркальных изображений, то даже в случайной среде могут существовать двулучепреломление и дихроизм при круговой поляризации.

КОММЕНТАРИИ

К § 2. Параметры Стокса и принцип оптической эквивалентности были введены Стоксом [801]. Векторы Стокса здесь используются по существу так же, как и в работе Хьюлста [857]. Другие ссылки можно также найти в книге Борна и Вольфа [92], стр. 550.

Матрица плотности часто используется в квантовой механике, но в классической электромагнитной теории она, по-видимому, сколь-нибудь широко не применялась; см., однако, книгу Борна и Вольфа [92], где рассматривается близкая по смыслу так называемая *матрица когерентности*.

К § 3, п. 1. Более строгое математическое доказательство требования стационарности фазы можно найти, например, в работах [858, 859, 244, 101].

К § 3, п. 4. Здесь при использовании матрицы \mathcal{F} мы следуем Хьюльсту [856].

К § 3, п. 9. Оптическая теорема, по-видимому, была известна еще лорду Релею. Она, несомненно, была известна Крамерсу; см., например, работу Крамерса [501], формула (12). Мы не будем пытаться проследить дальнейшую историю этой теоремы. В квантовой механике она была открыта независимо Фенбергом [250]. Занимательное место имеется в работе Хьюльста [856]; см. также замечание на стр. 39 в его книге [857]. Приведенное физическое доказательство теоремы (§ 3, п. 9) принадлежит Хьюльсту.

К § 4. Рассмотрение *многократного* рассеяния, разумеется, выходит за рамки данной книги. Оно связано с проблемами переноса. Рассмотрение многократного рассеяния и соответствующие литературные ссылки можно найти, например, в книге Чандрасекара [145] и в книге Керкера [480], часть 6.

ЗАДАЧИ

1. Доказать утверждение, приведенное после формулы (1.8) в § 1.

2. Допустим, что отношение интенсивностей излучений с левовинтовой и правовинтовой круговой поляризацией равно $1/4$. Каково минимальное значение степени поляризации? Чему равна степень эллиптичности поляризации, если степень поляризации равна 50%.

3. Отношение интенсивностей компонент излучения с правовинтовой и левовинтовой круговой поляризацией в пучке равно $1/2$; отношение интенсивностей компонент излучения с плоской поляризацией, параллельной и перпендикулярной данной плоскости отсчета, в том же пучке равно $1/2$. Каково минимальное значение степени поляризации? Пусть поляризация равна 75%. Чему равен угол наклона эллипса χ к плоскости отсчета? Чему равна степень эллиптичности поляризации?

4. Какова степень плоской поляризации, если степень круговой поляризации пучка равна 30%.

5. Выразить матрицу плотности для излучения, поляризованного по кругу, через углы γ и χ , введенные в формулах (1.24) и (1.25).

6. Выразить поляризацию через $\text{Sp } \rho^2$.

7. Найти унитарное преобразование для перехода от матрицы $\rho^{(L)}$ к матрице $\rho^{(C)}$.

8. Доказать формулу (1.51).

9. Найти матрицу, аналогичную (1.55), для случая плоской поляризации.

10. Доказать соотношения (1.68) и (1.69).

11. Допустим, что амплитуда рассеяния на данный угол такова, что $A_{12}^L = A_{21}^{L*}$ и $A_{11}^L = -A_{22}^{L*}$. Как должно зависеть дифференциальное сечение от поляризации падающего пучка?

12. Вывести общее выражение для степени поляризации рассеянной волны через амплитуду рассеяния и параметры поляризации падающего пучка.

13. Вывести формулу для полного сечения, аналогичную (1.78), но через компоненты амплитуды рассеяния при поляризации *по кругу*.

14. Доказать соотношение (1.88).

15. Допустим, что измеряется сечение двукратного рассеяния неполяризованного пучка как функция угла поворота относительно линии, соединяющей рассеивающие центры (при фиксированном угле отклонения от этой линии). Пусть таким образом найдено, что отношение минимума к максимуму равно R . Чему равно произведение степеней поляризации, возникших в результате двух однократных рассеяний неполяризованных пучков? При каком угле между двумя плоскостями рассеяния сечение двукратного рассеяния минимально? Допустим, что этот минимум равен нулю. Что можно сказать относительно поляризации, возникающей при каждом однократном рассеянии?

16. Видимый свет рассеивается каплями диаметром: а) 10^{-2} см, б) 10^{-3} см и в) 10^{-4} см. Предположим, что сечение рассеяния является по существу изотропным, если не считать острого дифракционного максимума в направлении вперед. Оценить, во сколько раз (самое меньшее) сечение для рассеяния вперед должно быть больше среднего в случаях «а»—«в».

Сферически симметричные рассеиватели

§ 1. СФЕРИЧЕСКИЕ ГАРМОНИКИ

Важным методом, используемым при вычислении амплитуд рассеяния, является разложение по сферическим гармоникам или по векторным сферическим гармоникам. В настоящем параграфе будет дано определение сферических гармоник и будут перечислены некоторые их свойства.

1. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра определяются формулой Родрига

$$P_l(\cos \theta) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^l (\sin \theta)^{2l} \quad (2.1)$$

или с помощью производящей функции

$$(1 - 2r_1^* \cos \theta + r^2)^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta), \quad r < 1. \quad (2.2)$$

Для полиномов Лежандра имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} l P_{l-1} &= l \cos \theta P_l + \sin^2 \theta P_l', \\ (l+1) P_{l+1} &= (l+1) \cos \theta P_l - \sin^2 \theta P_l'; \end{aligned} \quad (2.3)$$

их четность совпадает с четностью l

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x). \quad (2.4)$$

Полиномы Лежандра образуют полную систему ортогональных функций на отрезке $-1 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) &= \frac{\delta_{ll'}}{l+1/2}, \\ \sum_l \left(l + \frac{1}{2} \right) P_l(x) P_l(x') &= \delta(x-x'). \end{aligned} \quad (2.5)$$

2. Присоединенные функции Лежандра

Присоединенные функции Лежандра (первого рода) определяются через посредство полиномов Лежандра:

$$P_l^m(\cos \theta) \equiv (\sin \theta)^m \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^m P_l \cos \theta, \quad 0 \leq m \leq l; \quad (2.6)$$

их можно также представить в виде

$$P_l^m(\cos \theta) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} (\sin \theta)^{-m} \left(\frac{d}{d \cos \theta} \right)^{l-m} (\sin \theta)^{2l}. \quad (2.7)$$

Это выражение можно использовать при любом знаке m ,

$$P_l^{-m} = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m. \quad (2.8)$$

Четность функции P_l^m совпадает с четностью $l+m$:

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x). \quad (2.9)$$

Все функции Лежандра являются решениями дифференциального уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{d}{dx} P_l^m + \left(l - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m = 0. \quad (2.10)$$

3. Сферические гармоники

Сферические гармоники, используемые в настоящей книге, определяются формулой

$$Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \equiv (-1)^m i^l \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta), \quad (2.11)$$

где θ и φ — полярные углы единичного вектора $\hat{\mathbf{r}}$. Используя (2.8), получим, что комплексно сопряженные функции связаны соотношением

$$Y_l^{m*} = (-1)^{l+m} Y_l^{-m}. \quad (2.12)$$

Четность функции Y_l^m совпадает с четностью l :

$$Y_l^m(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}). \quad (2.13)$$

Сферические гармоники образуют полную ортонормированную систему функций

$$\int d\Omega_r Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.14)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') = \delta_{\Omega}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}'),$$

где δ_{Ω} есть δ -функция Дирака от телесного угла

$$\int d\Omega_r \delta_{\Omega}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}') f(\hat{\mathbf{r}}) = f(\hat{\mathbf{r}}'). \quad (2.15)$$

Сферические гармоники являются решением дифференциального уравнения в частных производных

$$-\left[\operatorname{cosec} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{cosec}^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_l^m = l(l+1) Y_l^m \quad (2.16)$$

или

$$\mathbf{L}^2 Y_l^m \equiv [\mathbf{r} \times (-i\nabla)]^2 Y_l^m = l(l+1) Y_l^m \quad (2.16a)$$

и

$$L_z Y_l^m \equiv [\mathbf{r} \times (-i\nabla)]_z Y_l^m = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_l^m = m Y_l^m. \quad (2.17)$$

Поскольку имеет место соотношение

$$4\pi \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_2) = (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2), \quad (2.18)$$

то любую функцию векторов $\hat{\mathbf{r}}_1$ и $\hat{\mathbf{r}}_2$, инвариантную относительно вращений, можно разложить в ряд

$$f(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{l,m} c_l Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}_2). \quad (2.19)$$

4. Векторные сферические гармоники

Для разложения векторных функций, таких, как векторы электромагнитного поля, необходимо пользоваться векторными сферическими гармониками. Введем сначала функции

$$\chi_1 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}^{(y)} - i\hat{e}^{(x)}), \quad \chi_0 \equiv i\hat{e}^{(z)}, \quad \chi_{-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e}^{(y)} + i\hat{e}^{(x)}). \quad (2.20)$$

Они нормированы таким образом, что

$$\mathbf{1} = \sum_{\mu} \chi_{\mu} \chi_{\mu}^*, \quad \chi_{\mu}^* \cdot \chi_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}; \quad (2.21)$$

где $\mathbf{1}$ — единичный тензор в диадных обозначениях. Эти функции определены так, чтобы они удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} S_z \chi_{\mu} &= \mu \chi_{\mu}, \\ S^2 \chi_{\mu} &= 2 \chi_{\mu}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где S — «оператор спина», компоненты которого определяются формулой

$$S_i \mathbf{f} \equiv i\hat{e}^{(i)} \times \mathbf{f}. \quad (2.23)$$

Кроме того, фазы функций χ_{μ} выбраны так, чтобы

$$\chi_{\mu}^* = (-1)^{1+\mu} \chi_{-\mu}; \quad (2.24)$$

тогда функции

$$Y_{l\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \chi_{\mu} \quad (2.25)$$

будут собственными функциями операторов углового момента, определенных согласно (2.16а), (2.17) и (2.23),

$$L_z Y_{l\mu} = m Y_{l\mu}, \quad S_z Y_{l\mu} = \mu Y_{l\mu}, \quad L^2 Y_{l\mu} = l(l+1) Y_{l\mu}. \quad (2.26)$$

С помощью коэффициентов Клебша — Гордана составим такие комбинации этих функций, чтобы они были собственными функциями оператора полного углового момента. Для $J = l-1, l, l+1$ линейные комбинации

$$\begin{aligned} Y_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) &\equiv \sum_{m\mu} C(l1J, m\mu M) Y_{lm\mu}(\hat{\mathbf{r}}) = \\ &= \sum_{\mu} C(l1J, M-\mu\mu M) Y_{lM-\mu\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (L_z + S_z) Y_{Jl}^M &= M Y_{Jl}^M, \\ (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 Y_{Jl}^M &= J(J+1) Y_{Jl}^M, \\ L^2 Y_{Jl}^M &= l(l+1) Y_{Jl}^M. \end{aligned} \quad (2.28)$$

В явном виде эти выражения имеют вид

$$\begin{aligned} Y_{J, J+1}^M &= \left[\frac{(J+1+M)(J+2+M)}{2(J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1}^{M+1} \chi_{-1} - \\ &- \left[\frac{(J+1+M)(J+1-M)}{(J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1}^M \chi_0 + \\ &+ \left[\frac{(J+1-M)(J+2-M)}{2(J+1)(2J+3)} \right]^{1/2} Y_{J+1}^{M-1} \chi_1, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} Y_{JJ}^M = & \left[\frac{(J+1+M)(J-M)}{2J(J+1)} \right]^{1/2} Y_J^{M+1} \chi_{-1} + \\ & + \frac{M}{[J(J+1)]^{1/2}} Y_J^M \chi_0 - \\ & - \left[\frac{(J+M)(J+1-M)}{2J(J+1)} \right]^{1/2} Y_J^{M-1} \chi_1, \end{aligned} \quad (2.29a)$$

$$\begin{aligned} Y_{JJ-1}^M = & \left[\frac{(J-1-M)(J-M)}{2J(2J-1)} \right]^{1/2} Y_{J-1}^{M+1} \chi_{-1} + \\ & + \left[\frac{(J+M)(J-M)}{J(2J-1)} \right]^{1/2} Y_{J-1}^M \chi_0 + \\ & + \left[\frac{(J-1+M)(J+M)}{2J(2J-1)} \right]^{1/2} Y_{J-1}^{M-1} \chi_1. \end{aligned} \quad (2.29b)$$

Рассматриваемые векторные гармоники образуют полную ортонормированную систему в следующем смысле:

$$\begin{aligned} \int d\Omega_r Y_{Jl}^{M*}(\hat{r}) \cdot Y_{Jl'}^{M'}(\hat{r}) &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{ll'}, \\ \mathbf{1} \sum_{JlM} Y_{Jl}^M(\hat{r}) Y_{Jl}^{M*}(\hat{r}') &= 1 \delta_{\Omega}(\hat{r}, \hat{r}'), \end{aligned} \quad (2.30)$$

причем последняя формула записана в диадных обозначениях и $\mathbf{1}$ — диадный единичный тензор. При $J=0$ имеется только одна векторная функция Y_{01}^0 , отличная от нуля.

5. Поперечные и продольные векторные сферические гармоники

Из введенных выше векторных функций образуем новые векторные сферические гармоники:

$$\begin{aligned} Y_{JM}^{(e)} &\equiv \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JJ-1}^M - \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JJ+1}^M, \\ Y_{JM}^{(m)} &\equiv Y_{JJ}^M, \\ Y_{JM}^{(0)} &\equiv \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JJ-1}^M + \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JJ+1}^M, \end{aligned} \quad (2.31)$$

из которых две первые функции являются поперечными

$$\hat{r} \cdot Y_{JM}^{(e)}(\hat{r}) = \hat{r} \cdot Y_{JM}^{(m)}(\hat{r}) = 0, \quad (2.32)$$

а третья — продольной $\hat{r} \times Y_{JM}^{(0)}(\hat{r}) = 0$.

Все они взаимно ортогональны в смысле ортогональности векторов. Для $\lambda, \lambda' = e, m, 0$ имеем

$$Y_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{r}) \cdot Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{r}) = 0, \quad \lambda \neq \lambda'. \quad (2.34)$$

Используя формулы (2.31), легко находим обратное преобразование

$$\begin{aligned} Y_{JJ-1}^M &= \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JM}^{(e)} + \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JM}^{(0)}, \\ Y_{JJ+1}^M &= \left(\frac{J}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JM}^{(e)} - \left(\frac{J+1}{2J+1} \right)^{1/2} Y_{JM}^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

При $J=0$ отлична от нуля только продольная функция $Y_{00}^{(0)}$. Далее, из (2.13) следует, что

$$\begin{aligned} Y_{JM}^{(e)}(-\hat{r}) &= (-1)^{J+1} Y_{JM}^{(e)}(\hat{r}), \\ Y_{JM}^{(m)}(-\hat{r}) &= (-1)^J Y_{JM}^{(m)}(\hat{r}), \\ Y_{JM}^{(0)}(-\hat{r}) &= (-1)^{J+1} Y_{JM}^{(0)}(\hat{r}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Так как при полной инверсии координат

$$P\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{r}}) \equiv \mathbf{Y}'(\hat{\mathbf{r}}') = -\mathbf{Y}(-\hat{\mathbf{r}}),$$

то четность функций \mathbf{Y}_{JM} определяется согласно формулам

$$\begin{aligned} P\mathbf{Y}_{JM}^{(e)} &= (-1)^J \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}, \\ P\mathbf{Y}_{JM}^{(m)} &= (-1)^{J+1} \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}, \\ P\mathbf{Y}_{JM}^{(0)} &= (-1)^J \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Эти векторные функции можно представить и в другом виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) &= [J(J+1)]^{-1/2} r \nabla Y_J^M(\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) &= \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) = r \nabla \times \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}), \\ \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}) &= \hat{\mathbf{r}} Y_J^M(\hat{\mathbf{r}}) = -r^2 [J(J+1)]^{-1/2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}})). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Они образуют полную ортонормированную систему функций

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda JM} \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}}) \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{\mathbf{r}}') &= 1 \delta_{\Omega}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}}'), \\ \int d\Omega_r \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{Y}_{J'M'}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) &= \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda\lambda'}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Здесь первое условие нормировки записано в диадных обозначениях, а индекс λ принимает значения e , m и 0 . Обозначения выбраны таким образом, чтобы при разложении вектора электрического поля в ряд

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \sum_{JM} [\mathcal{E}_{JM}^{(e)}(r) \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{E}_{JM}^{(m)}(r) \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) + \mathcal{E}_{JM}^{(0)}(r) \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}})]$$

члены, имеющие индексы e , J , M , соответствовали *электрическому* 2^J -мультипольному излучению, а члены, имеющие индексы m , J , M , представляли *магнитное* 2^J -мультипольное излучение.

6. Тензорные функции, инвариантные относительно вращений

Используя (2.21) и (2.18), для векторных гармоник можно написать следующее соотношение:

$$(2l+1)_l P_l(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) = 4\pi \sum_{JM} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) \mathbf{Y}_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}_2). \quad (2.40)$$

Доказательство этого соотношения основывается на преобразовании, обратном (2.27),

$$Y_l^m \chi_{\mu} = \sum_{JM} C(l1J, m\mu M) \mathbf{Y}_{Jl}^M, \quad (2.41)$$

где

$$\sum_{JM} C(lsJ, m\mu M) C(lsJ, m'\mu' M) = \delta_{mm'} \delta_{\mu\mu'} \quad (2.42)$$

и, кроме того,

$$\sum_{m\mu} C(lsJ, m\mu M) C(lsJ', m\mu M') = \delta_{JJ'} \delta_{MM'}. \quad (2.43)$$

Однако для получения тензорной функции от $\hat{\mathbf{r}}_1$ и $\hat{\mathbf{r}}_2$ самого общего вида, инвариантной относительно пространственных вращений, необязательно брать сумму (2.40). Такую функцию можно представить в виде

$$\mathcal{F}(\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{JMI'} \mathbf{Y}_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}_1) C_{II'}^M \mathbf{Y}_{Jl'}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}_2). \quad (2.44)$$

Справедливость последнего утверждения следует из свойств преобразования сферических гармоник при повороте системы координат (см., например, книгу Вигнера [912]).

7. Комплексное сопряжение

Связь между комплексно сопряженными векторными функциями можно получить, используя формулы (2.12), (2.24) и свойство (действительных) коэффициентов Клебша — Гордана,

$$C(lsJ, -m - \mu - M) = (-1)^{l+s-J} C(lsJ, m\mu M). \quad (2.45)$$

Это дает

$$Y_{Jl}^{M*} = (-1)^{J+M} Y_{Jl}^{-M}; \quad (2.46)$$

кроме того, с помощью (2.31) находим

$$Y_{JM}^{(\lambda)*} = (-1)^{J+M} Y_{J-M}^{(\lambda)}, \quad \lambda = e, m, 0. \quad (2.47)$$

8. θ - и φ -компоненты векторных сферических гармоник

Часто полезно знать компоненты векторных сферических гармоник в направлении возрастания полярных углов θ и φ , как это показано на фиг. 2.1. Три единичных вектора \hat{r} , $\hat{\theta}$ и

$$\hat{r} = \hat{\theta} \times \hat{\varphi} \quad (2.48)$$

образуют ортогональный базис, в котором элемент длины имеет вид

$$d\mathbf{r} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi,$$

а вектор градиента определяется формулой

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} r^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi} r^{-1} \operatorname{cosec} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.49)$$

Из (2.38) соответственно получаем

$$\begin{aligned} [Y_{JM}^{(e)}(\hat{r})]_{\theta} &= C_{JM} e^{iM\varphi} \frac{d}{d\theta} P_J^M, \\ [Y_{JM}^{(e)}(\hat{r})]_{\varphi} &= i C_{JM} e^{iM\varphi} M \operatorname{cosec} \theta P_J^M, \\ [Y_{JM}^{(m)}(\hat{r})]_{\theta} &= -i C_{JM} e^{iM\varphi} M \operatorname{cosec} \theta P_J^M, \\ [Y_{JM}^{(m)}(\hat{r})]_{\varphi} &= C_{JM} e^{iM\varphi} \frac{d}{d\theta} P_J, \end{aligned} \quad (2.50)$$

где

$$C_{JM} = (-1)^{M+J} \left[\frac{2J+1}{4\pi J(J+1)} \frac{(J-M)!}{(J+M)!} \right]^{1/2}. \quad (2.51)$$

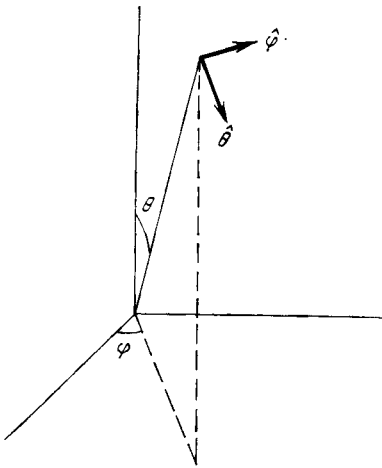
Используя θ - и φ -компоненты, можно ввести «круговые» компоненты, если определить χ согласно (2.20), но только в системе координат $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$,

$$\chi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\varphi} - i\hat{\theta}), \quad \chi_0 = i\hat{r}, \quad \chi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\varphi} + i\hat{\theta}). \quad (2.52)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} [Y_{JM}^{(\lambda)}]_{\mu} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (-i\mu)^{\lambda} C_{JM} e^{iM\varphi} \left(\mu M \operatorname{cosec} \theta + \frac{d}{d\theta} \right) P_J^M, \\ [Y_{JM}^{(0)}]_0 &= -i C_{JM} e^{iM\varphi} P_J^M \end{aligned} \quad (2.53)$$

(где $\lambda = 1$ означает $\lambda = e$, $\lambda = 2$ означает m , а $\mu = 0, \pm 1$).



Фиг. 2.1. Единичные векторы по направлениям возрастания полярных углов.

9. Случай, когда ось z направлена вдоль \mathbf{r}

Особый интерес представляет случай, когда вектор $\hat{\mathbf{r}}$ направлен в положительном направлении оси z . Тогда функции \mathbf{Y}_{JM} равны

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{JM}^{(c)}(\hat{\mathbf{r}}) &= i^{J-1} \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} \chi_M, & M = \pm 1, \\ \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) &= -i^J \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} \chi_{JM}, & M = \pm 1, \\ \mathbf{Y}_{JM}^{(0)}(\hat{\mathbf{r}}) &= i^{J-1} \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} \chi_0, & M = 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

и равны нулю для всех других значений M . Следовательно, если вычисление производится в системе координат, в которой вектор $\hat{\mathbf{r}}_2$ направлен вдоль оси z , то в выражениях вида (2.44) нужно сохранять в сумме только члены с $M = 0, \pm 1$. Выражения (2.53) для этих конкретных значений $M = 0, \pm 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}]_{\pm 1} &= i^{J-1} \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} e^{iM\varphi} (\pi_J \pm M\tau_J), & M = \pm 1, \\ [\mathbf{Y}_{J0}^{(e)}]_{\pm 1} &= \pm i^{J-1} \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} P_J^1, \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(m)}]_{\pm 1} &= -i^J \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} e^{iM\varphi} (M\tau_J \pm \pi_J), & M = \pm 1, \\ [\mathbf{Y}_{J0}^{(m)}]_{\pm 1} &= -i^J \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} P_J^1, \\ [\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}]_0 &= \pm \frac{i^{J-1}}{J(J+1)} \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} e^{iM\varphi} P_J^1, & M = \pm 1, \\ [\mathbf{Y}_{J0}^{(0)}]_0 &= i^{J-1} \left(\frac{2J+1}{8\pi} \right)^{1/2} P_J, \end{aligned} \quad (2.55)$$

где τ_J и π_J определяются формулами

$$\begin{aligned} \pi_J(\cos \theta) &\equiv \frac{1}{J(J+1)} \frac{d}{d \cos \theta} P_J(\cos \theta), \\ \tau_J(\cos \theta) &\equiv \frac{1}{J(J+1)} \frac{d}{d\theta} P_J^1(\cos \theta) = \cos \theta \pi_J - \sin^2 \theta \pi_J'. \end{aligned} \quad (2.56)$$

§ 2. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МУЛЬТИПОЛЯМ

1. Разложение плоской волны. Сферические функции Бесселя

Скалярную плоскую волну можно разложить по базису сферических гармоник

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{4\pi}{kr} \sum_{lm} i^l u_l(kr) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (2.57)$$

Коэффициентами разложения являются так называемые функции Риккати—Бесселя¹⁾

$$u_l(z) \equiv \sqrt{\frac{1}{2}} \pi z J_{l+1/2}(z) = z j_l(z) [= z \psi_l(z)], \quad (2.58)$$

асимптотические выражения для которых имеют вид

$$u_l(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \sin \left(z - \frac{1}{2} \pi l \right). \quad (2.59)$$

¹⁾ Часто эти функции называют просто функциями Бесселя.— Прим. ред.

Функции Риккати — Бесселя можно разложить на две части, соответствующие сходящейся и расходящейся волне. Для этого данные функции следует выразить через функции Риккати — Ганкеля¹⁾

$$\begin{aligned} \omega_l^{(+)}(z) &\equiv i e^{i\pi l} \sqrt{\frac{1}{2} \pi z} H_{l+1/2}^{(1)}(z) = i e^{i\pi l} z h_l^{(+)}(z) [= i e^{i\pi l} z \zeta_l^{(+)}(z)], \\ \omega_l^{(-)}(z) &\equiv \omega_l^{(+)}(-z) = e^{i\pi l} \omega_l^{(+)}(z)^* = -i \sqrt{\frac{1}{2} \pi z} H_{l+1/2}^{(2)}(z) = \\ &= -i z h_l^{(-)}(z) [= -i z \zeta_l^{(-)}(z)], \end{aligned} \quad (2.60)$$

которые имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\omega_l^{(\pm)}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} e^{\pm iz + 1/2 i \pi l}. \quad (2.61)$$

Имеем

$$u_l = \frac{1}{2} i (\omega_l^{(-)} - e^{-i\pi l} \omega_l^{(+)}). \quad (2.62)$$

Так как введенные функции будут часто использоваться в дальнейшем, приведем некоторые из наиболее важных их свойств.

Все они являются решениями дифференциального уравнения

$$y_l'' - l(l+1)z^{-2}y_l + y_l = 0. \quad (2.63)$$

Функция u_l представляет собой решение, регулярное в точке $z=0$; при малых z она имеет вид

$$u_l(z) = \frac{z^{l+1}}{(2l+1)!!} - \frac{1}{2} \frac{z^{l+3}}{(2l+3)!!} + O(z^{l+5}). \quad (2.64)$$

Функция Риккати — Неймана

$$v_l(z) \equiv \sqrt{\frac{1}{2} \pi z} N_{l+1/2}(z) = z n_l(z) \quad (2.65)$$

является решением, сингулярным в точке $z=0$. Зная ее, можно представить функцию $\omega_l^{(+)}(z)$ в виде

$$\omega_l^{(+)}(z) = e^{i\pi(l+1)} [v_l(z) - i u_l(z)]. \quad (2.66)$$

Поведение v_l при малых z описывается формулой

$$v_l(z) = -z^{-l} (2l-1)!! - \frac{1}{2} z^{-l+2} (2l-3)!! + O(z^{-l+4}), \quad (2.67)$$

а ее асимптотическое поведение определяется выражением

$$v_l(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} -\cos\left(z - \frac{1}{2} \pi l\right). \quad (2.68)$$

Для функций u_l , v_l и $\omega_l^{(-)}$, являющихся решением уравнения (2.63), имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} y_{l-1}(z) &= y_l'(z) + lz^{-1}y_l(z), \\ y_{l+1}(z) &= -y_l'(z) + (l+1)z^{-1}y_l(z); \end{aligned} \quad (2.69)$$

вронскианы для этих функций равны

$$\begin{aligned} W(u_l, v_l) &\equiv u_l v_l' - u_l' v_l = 1, \\ W(\omega_l^{(-)}, \omega_l^{(+)}) &= 2i e^{i\pi l}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

¹⁾ Эти функции называют часто просто функциями Ганкеля.— *Прим. ред.*

Ниже в явном виде приведены несколько первых функций Риккати — Бесселя:

$$\begin{aligned}
 u_0 &= \sin z, \\
 u_1 &= -\cos z + z^{-1} \sin z, \\
 u_2 &= -3z^{-1} \cos z + (3z^{-2} - 1) \sin z, \\
 v_0 &= -\cos z, \\
 v_1 &= -\sin z - z^{-1} \cos z, \\
 v_2 &= -3z^{-1} \sin z + (1 - 3z^{-2}) \cos z, \\
 w_0^{(+)} &= e^{iz}, \\
 w_1^{(+)} &= (i - z^{-1}) e^{iz}, \\
 w_2^{(+)} &= (3z^{-2} - 3iz^{-1} - 1) e^{iz}.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Явные выражения для последующих функций легко получить при помощи (2.69).

Из (2.18) и (2.40) вытекает, что разложение единичного тензора плоской волны в ряд в диадных обозначениях имеет вид

$$1 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{4\pi}{kr} \sum_{JM} i^J Y_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) u_l(kr) Y_{Jl}^{M*}(\hat{\mathbf{k}}). \tag{2.57a}$$

2. Разложение электрического поля

Тензорная функция от \mathbf{k} и \mathbf{r} самого общего вида, инвариантная относительно вращений, определяется формулой вида (2.44), а именно

$$\mathcal{F} = \frac{4\pi}{kr} \sum_{\substack{JM \\ \hat{\mathbf{r}}_{ll'}}} i^l Y_{Jl}^M(\hat{\mathbf{r}}) f_{ll'}^J(r) Y_{Jl'}^{M*}(\hat{\mathbf{k}}). \tag{2.72}$$

Для того чтобы функция $\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{E}_0$, где $\mathcal{E}_0 \cdot \mathbf{k} = 0$, удовлетворяла уравнению Максвелла

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) = k^2 \mathcal{E}$$

и соответствующему граничному условию рассеяния, функции $f_{ll'}^J$ должны иметь вид

$$f_{ll'}^J = \frac{1}{2} i [\omega_l^{(-)}(kr) \delta_{ll'} - (-1)^l S_{ll'}^J \omega_l^{(+)}(kr)] \tag{2.73}$$

и, кроме того, должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned}
 S_{J-1, J-1}^J &= S_{J+1, J+1}^J, \\
 JS_{J-1, J+1}^J &= (J+1) S_{J+1, J-1}^J, \\
 \sqrt{JS_{J-1, J}^J} &= \sqrt{J+1} S_{J+1, J}^J.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

Тогда часть функции $\mathcal{F} \cdot \mathcal{E}_0$, отвечающая сходящейся волне, равна соответствующей части функции $\mathcal{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$.

Переписав разложение электрического поля с помощью поперечной и продольной векторных функций, найдем общее выражение для вектора электрического поля, рассеянного на центре, имеющем вращательную симметрию,

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{2\pi}{kr} \sum_{\substack{JM \\ \lambda\lambda'}} i^{J+1} Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) f_{\lambda'\lambda}^J(r) Y_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \chi_{\lambda}; \tag{2.75}$$

здесь электрическое поле явно зависит от волнового вектора $\hat{\mathbf{k}}$ и от поляризации падающего пучка

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{k}\mu, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\chi'_\mu, \quad (2.76)$$

где χ'_μ — вектор, аналогичный вектору χ_μ в формуле (2.20), но только в случае, когда ось z направлена вдоль \mathbf{k} . Так как электрическое поле \mathbf{E}_0 поперечно, то μ пробегает лишь значения ± 1 , а λ в (2.75) — только значения e и m . Так как при $J = 0$ единственная отличная от нуля векторная функция является продольной, то минимальное значение J равно единице. Функции $f_{\lambda\lambda}^J$ определяются формулами

$$\begin{aligned} f_{ee}^J &= -i[\omega_{J'}^{(-)} - (-1)^J S_{ee}^J \omega_{J'}^{(+)}], \\ f_{mm}^J &= \omega_{J'}^{(-)} - (-1)^J S_{mm}^J \omega_{J'}^{(+)}, \\ f_{me}^J &= -(-1)^J S_{me}^J \omega_{J'}^{(+)}, \\ f_{em}^J &= i(-1)^J S_{em}^J \omega_{J'}^{(+)}, \\ f_{0e}^J &= -i\sqrt{J(J+1)}[\omega_{J'}^{(-)} - (-1)^J S_{ee}^J \omega_{J'}^{(+)}, \\ f_{0m}^J &= i(-1)^J \sqrt{J(J+1)} S_{em}^J \omega_{J'}^{(+)}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где

$$\begin{aligned} S_{mm}^J &= S_{JJ}^J, \\ S_{ee}^J &= S_{J-1 J-1}^J + \left(\frac{J}{J+1}\right)^{1/2} S_{J-1 J+1}^J, \\ S_{me}^J &= -i\left(\frac{J+1}{2J-1}\right)^{1/2} S_{JJ-1}^J - i\left(\frac{J}{2J+1}\right)^{1/2} S_{JJ+1}^J, \\ S_{em}^J &= i\left(\frac{2J-1}{J}\right)^{1/2} S_{J+1 J}^J. \end{aligned} \quad (2.78)$$

При выводе этих соотношений были использованы рекуррентные соотношения (2.69).

Заметим, что матрица рассеяния \mathcal{S} , элементами которой являются $S_{\lambda\lambda}^J$, необязательно диагональна. Недиагональные относительно индексов e и m элементы представляют «переходы» с несохранением четности, причем при данном J функции, описывающие электрические и магнитные мультиполи, имеют противоположную четность. Появление таких недиагональных элементов возможно потому, что не предполагалось наличия у рассеивающего центра *зеркальной* симметрии. Было сделано предположение только о наличии вращательной симметрии.

Легко убедиться, что электрическое поле (2.75) удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Поэтому в среде, где $k \neq \omega/c$, соответствующее выражение можно использовать только в том случае, когда плотность заряда равна нулю.

3. Магнитное поле

Магнитное поле можно найти из (2.75), используя соотношения

$$\begin{aligned} \nabla \times (f\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}) &= r^{-1}(rf)'\mathbf{Y}_{JM}^{(m)}, \\ \nabla \times (f\mathbf{Y}_{JM}^{(m)}) &= -r^{-1}(rf)'\mathbf{Y}_{JM}^{(e)} - r^{-1}f[J(J+1)]^{1/2}\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}, \\ \nabla \times (f\mathbf{Y}_{JM}^{(0)}) &= -r^{-1}f[J(J+1)]^{1/2}\mathbf{Y}_{JM}^{(m)} \end{aligned} \quad (2.79)$$

и

$$\mathfrak{B} = -ik^{-1}\nabla \times \mathfrak{E}.$$

При этом получаем

$$\mathfrak{B}(\mathbf{k}\mu, \mathbf{r}) = \frac{2\pi}{kr} \sum_{\substack{JM \\ \lambda\lambda'}} i^{J+1} Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}') g_{\lambda'\lambda}^J(r) Y_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{\mathbf{k}}') \cdot \chi_{\mu}, \quad (2.80)$$

где

$$\begin{aligned} g_{ee}^J &= i(-1)^{J+1} S_{me}^J \omega_J^{(+)}, \\ g_{mm}^J &= (-1)^{J+1} S_{em}^J \omega_J^{(+)}, \\ g_{me}^J &= \omega_J^{(-)} - (-1)^J S_{ee}^J \omega_J^{(+)}, \\ g_{em}^J &= i[\omega_J^{(-)} - (-1)^J S_{mm}^J \omega_J^{(+)}], \\ g_{0e}^J &= i(-1)^{J+1} [J(J+1)]^{1/2} S_{me}^J \omega_J^{(+)}, \\ g_{0m}^J &= i[J(J+1)]^{1/2} [\omega_J^{(-)} - (-1)^J S_{mm}^J \omega_J^{(+)}]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Индекс μ у магнитного поля \mathfrak{B} по-прежнему относится к поляризации электрического поля в падающем пучке.

4. \mathcal{K} -матрица

Коэффициенты $S_{\lambda\lambda'}^J$ определяются по тангенциальным компонентам векторов \mathfrak{E} и \mathfrak{B} на поверхности рассеивателя. Удобно пользоваться действительными функциями Риккати — Неймана (2.65) и \mathcal{K} -матрицей, связанной с \mathcal{S}^J соотношением

$$\mathcal{S}^J = (1 + i\mathcal{K}^J)(1 - i\mathcal{K}^J)^{-1}. \quad (2.82)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} f_{ee}^J &= -iF_{ee}^J, & f_{em}^J &= -iF_{em}^J, \\ f_{me}^J &= F_{me}^J, & f_{mm}^J &= F_{mm}^J \end{aligned} \quad (2.83)$$

и

$$F_{\lambda'\lambda}^J = \omega_J^{(-)} - (-1)^J S_{\lambda'\lambda}^J \omega_J^{(+)}, \quad \lambda', \lambda = e, m, \quad (2.84)$$

то выражение

$$\mathcal{S}^J = 2(1 - i\mathcal{K}^J)^{-1}(\mu_J 1 - \nu_J \mathcal{K}^J) \quad (2.85)$$

будет представлять собой матрицу, элементами которой являются $F_{\lambda'\lambda}^J$.

5. Амплитуда рассеяния

Асимптотическое выражение для электрического поля можно получить непосредственно из формул (2.61) и (2.75). Продольные компоненты стремятся к нулю быстрее чем r^{-1} , и электрическое поле становится (как и следовало ожидать) чисто поперечным:

$$\mathfrak{E}(\mathbf{k}\mu, \mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \chi_{\mu} + \frac{2\pi}{ikr} e^{ihr} \sum_{JM\lambda\lambda'} Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) (S_{\lambda'\lambda}^J - \delta_{\lambda'\lambda}) Y_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \chi_{\mu}, \quad (2.86)$$

где λ и λ' принимают значения e и m . Поэтому тензор амплитуды рассеяния имеет вид

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{ik} \sum_{JM\lambda\lambda'} Y_{JM}^{(\lambda')}(\mathbf{k}') (S_{\lambda'\lambda}^J - \delta_{\lambda'\lambda}) Y_{JM}^{(\lambda)*}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (2.87)$$

где $J \geq 1$. Таким образом,

$$\mathfrak{E}_{\text{расс}} = \mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \cdot \mathfrak{E}_{\text{пал}}. \quad (2.88)$$

6. Случай, когда ось z направлена вдоль вектора k

Изложим результаты для данного случая более подробно. Если ось z направлена вдоль падающего пучка, то для функций $Y_{JM}^{(\lambda)}(\hat{k})$ имеют место выражения (2.54). Кроме того, если плоскостью отсчета поляризации является плоскость рассеяния, то, согласно формулам (1.11), (1.53) и (2.21), базисные векторы для правовинтовой и левовинтовой круговой поляризации падающего пучка имеют вид

$$\chi_1'' = e^{i\varphi} \chi_1, \quad \chi_{-1}'' = e^{-i\varphi} \chi_{-1}. \quad (2.89)$$

Для рассеянной волны базисными векторами являются непосредственно χ_μ' и можно использовать формулы (2.55). Тогда, выбирая в качестве плоскости отсчета плоскость рассеяния, для матрицы амплитуды рассеяния, выраженной через компоненты круговой поляризации, получаем

$$A_{ll}^C = \frac{1}{4ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (\mp S_{em}^J \mp S_{me}^J + S_{ee}^J + S_{mm}^J - 2) (\tau_J + \pi_J), \quad (2.90)$$

$$A_{lr}^C = \frac{1}{4ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (\pm S_{em}^J \mp S_{me}^J + S_{ee}^J - S_{mm}^J) (\tau_J - \pi_J) \quad (2.91)$$

или

$$\mathfrak{A}^{(C)} = \frac{1}{4ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) [(\mathfrak{S}_J^C - 1) \tau_J + \varepsilon (\mathfrak{S}_J^C - 1) \varepsilon \pi_J], \quad (2.92)$$

где

$$\mathfrak{S}_J^C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{ee}^J & S_{em}^J \\ S_{me}^J & S_{mm}^J \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.93)$$

и

$$\varepsilon \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Для амплитуды рассеяния, выраженной через компоненты линейной поляризации, с помощью формулы (1.58) получаем

$$\mathfrak{A}^{(L)} = \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \left[\begin{pmatrix} S_{ee}^J - 1 & iS_{em}^J \\ -iS_{me}^J & S_{mm}^J - 1 \end{pmatrix} \tau_J + \begin{pmatrix} S_{mm}^J - 1 & iS_{me}^J \\ -iS_{em}^J & S_{ee}^J - 1 \end{pmatrix} \pi_J \right]. \quad (2.95)$$

Амплитуду рассеяния вперед получаем из этого выражения при $\cos \theta = 1$:

$$\tau_J(1) = \pi_J(1) = \frac{1}{2}; \quad (2.96)$$

отсюда следует, что

$$A_{rl}^C(0) = A_{lr}^C(0) = 0,$$

$$A_{rr}^C(0) = \frac{1}{4ik} \sum_1^{\infty} (2J+1) (\mp S_{em}^J \mp S_{me}^J + S_{ee}^J + S_{mm}^J - 2), \quad (2.97)$$

$$\mathfrak{A}^{(L)} = \frac{1}{4ik} \sum_1^{\infty} (2J+1) \begin{pmatrix} S_{ee}^J + S_{mm}^J - 2 & i(S_{em}^J + S_{me}^J) \\ -i(S_{em}^J + S_{me}^J) & S_{ee}^J + S_{mm}^J - 2 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

Полное сечение можно получить из (2.97), (2.98) с помощью оптической теоремы (1.77). Для излучения, поляризованного по кругу, имеем

$$\sigma_{\text{полн}}^{(i)} = \pi k^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \operatorname{Re} (2 - S_{ee}^J - S_{mm}^J \pm S_{em}^J \pm S_{me}^J), \quad (2.99)$$

а для полностью линейно поляризованного излучения

$$\sigma_{\text{полн}}^{(ll)} = \sigma_{\text{полн}}^{(ll)} = \pi k^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \operatorname{Re} (2 - S_{ee}^J - S_{mm}^J). \quad (2.100)$$

Полные сечения можно найти и другим способом, а именно интегрируя квадраты амплитуд рассеяния (2.90):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{расс}}^{(i)} &= \sum_j \sigma_{\text{расс}}^{(ji)} = \sum_j \int d\Omega |A_{ji}|^2 = \\ &= 2\pi \sum_j \int_{-1}^1 d \cos \theta |A_{ji}|^2. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Соответствующие вычисления легко выполнить, используя формулы

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 d \cos \theta (\pi_J \pi_{J'} + \tau_J \tau_{J'}) &= \frac{\delta_{JJ'}}{J+1/2}, \\ \int_{-1}^1 d \cos \theta (\pi_J \tau_{J'} + \tau_J \pi_{J'}) &= 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Последние получаются из (2.5) и определения (2.56) после интегрирования по частям с использованием уравнения Лежандра (2.10). В итоге находим, например,

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{расс}}^{(i)} &= \frac{1}{2} \pi k^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \{ |S_{ee}^J - 1|^2 + |S_{mm}^J - 1|^2 + |S_{em}^J|^2 + |S_{me}^J|^2 \mp \\ &\mp 2 \operatorname{Re} [(S_{ee}^J - 1) S_{em}^{J*} + (S_{mm}^J - 1) S_{me}^{J*}] \}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

Теперь с помощью формул (1.77), (2.99) и (2.103) можно вычислить сечение поглощения:

$$\sigma_{\text{погл}}^{(i)} = \pi k^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \left(1 - \frac{1}{2} |S_{ee}^J \mp S_{em}^J|^2 - \frac{1}{2} |S_{mm}^J \mp S_{me}^J|^2 \right). \quad (2.104)$$

§ 3. УНИТАРНОСТЬ И ОБРАТИМОСТЬ

1. Сохранение энергии и унитарность

Согласно (2.75), при заданных значениях J и M сферическую волну можно записать в форме

$$\mathcal{E}_{JM}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\lambda'} \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) f_{\lambda\lambda}^J(r) a^\lambda. \quad (2.105)$$

Следовательно, асимптотическим выражением для нее будет

$$\mathcal{E}_{JM}(\mathbf{r}) \approx i^J (kr)^{-1} \sum_{\lambda\lambda'} \mathbf{Y}_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) [\varepsilon_{\lambda\lambda'} e^{-ikr} - (-1)^J S_{\lambda\lambda'}^J e^{ikr}] a^\lambda, \quad (2.106)$$

где матрица ε определена формулой (2.94), а λ и λ' принимают значения e и m . Интегрируя по поверхности сферы очень большого радиуса, получаем

полный входящий поток энергии

$$\frac{c}{2\pi k^2} \sum_{\lambda} |a^{\lambda}|^2;$$

полный выходящий поток энергии равен

$$\frac{c}{2\pi k^2} \sum_{\lambda\lambda'} a^{\lambda*} (\mathcal{S}^{J\dagger} \mathcal{S}^J)_{\lambda\lambda'} a^{\lambda'}.$$

Если в рассеивающем центре не происходит поглощения энергии, то при любом a^{λ} выходящий поток должен быть равен входящему потоку. Поэтому матрица \mathcal{S}^J должна быть унитарной:

$$\mathcal{S}^{J\dagger} \mathcal{S}^J = 1 \quad (2.107)$$

или в явном виде

$$\sum_{\lambda''=e, m} S_{\lambda''\lambda}^{J*} S_{\lambda''\lambda'}^J = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = e, m.$$

Если в рассеивающем центре имеет место поглощение энергии (например, рассеивающая сфера является проводящей), то такого вывода сделать нельзя. Однако так как выходящий поток должен быть меньше входящего, то величина

$$\mathcal{D}^J \equiv 1 - \mathcal{S}^{J\dagger} \mathcal{S}^J$$

всегда должна быть положительно определенной матрицей

$$\sum_{\lambda\lambda'} a^{\lambda*} \mathcal{D}_{\lambda\lambda'}^J a^{\lambda'} > 0. \quad (2.108)$$

Следует отметить, что поскольку S является конечной матрицей, то при выполнении (2.107) имеет также место условие

$$\mathcal{S}^J \mathcal{S}^{J\dagger} = 1. \quad (2.107a)$$

Однако если условие унитарности не выполняется, то из (2.108), вообще говоря, не следует положительная определенность матрицы $1 - \mathcal{S}^J \mathcal{S}^{J\dagger}$.

Если положить

$$a^{\lambda} = \begin{cases} 1, & \lambda = e, \\ \pm 1, & \lambda = m, \end{cases}$$

то из (2.108) следует, что

$$2 - |S_{ee}^J \mp S_{em}^J|^2 - |S_{mm}^J \mp S_{me}^J|^2 > 0.$$

Сравнивая это выражение с формулой (2.104), видим, что это есть условие того, чтобы полное сечение для излучения, полностью поляризованного по кругу, было больше сечения просто рассеяния. Как и должно быть, сечение $\sigma_{\text{полг}}$ является величиной положительной.

2. Сдвиги фаз

Предположим сначала, что матрица \mathcal{S}^J диагональна, а также унитарна. Тогда ее можно записать в виде

$$S_{ee}^J = e^{2i\alpha_J}, \quad S_{mm}^J = e^{2i\beta_J}, \quad (2.109)$$

где α_J и β_J — действительные величины. Физический смысл этих углов легко усмотреть, если подставить (2.109) в асимптотические формулы для величин (2.77) и сравнить получившийся результат с (2.59). В отсутствие рассеивающего центра асимптотическое поведение вектора электрического поля элек-

трического 2^J -мультиполя определяется формулой

$$r^{-1} \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) \cos\left(kr - \frac{1}{2} \pi J\right),$$

а соответствующее асимптотическое поведение для магнитного 2^J -мультиполя — формулой

$$r^{-1} \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) \sin\left(kr - \frac{1}{2} \pi J\right).$$

При наличии рассеивающего центра эти выражения соответственно заменяются на следующие:

$$\begin{aligned} r^{-1} \mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) \cos\left(kr - \frac{1}{2} \pi J + \alpha_J\right) e^{i\alpha_J}, \\ r^{-1} \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) \sin\left(kr - \frac{1}{2} \pi J + \beta_J\right) e^{i\beta_J}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Поэтому углы α_J и β_J называют *сдвигами фаз* для рассеянной волны.

Допустим теперь, что матрица \mathcal{S}^J является унитарной, но недиагональной. Тогда $\mathcal{S}^J \varepsilon$ — также унитарная матрица [матрица ε определена формулой (2.94)]. С помощью унитарной матрицы ее можно привести к диагональному виду

$$\mathcal{S}^J \varepsilon = U^J \begin{pmatrix} -e^{2i\alpha_J} & 0 \\ 0 & e^{2i\beta_J} \end{pmatrix} U^{J\dagger}, \quad (2.111)$$

причем ее собственные значения по модулю будут равны единице. Таким образом, мы должны рассматривать волны, представляющие собой суперпозицию электрического и магнитного излучений, соотношение между которыми определяется соотношением отдельных элементов столбцов матрицы U^J . Асимптотические выражения для электрической и магнитной компонент такой волны имеют вид

$$\begin{aligned} r^{-1} [\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) U_{e1}^J + \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) U_{m1}^J] \cos\left(kr - \frac{1}{2} \pi J + \alpha_J\right), \\ r^{-1} [\mathbf{Y}_{JM}^{(e)}(\hat{\mathbf{r}}) U_{e2}^J + \mathbf{Y}_{JM}^{(m)}(\hat{\mathbf{r}}) U_{m2}^J] \sin\left(kr - \frac{1}{2} \pi J + \beta_J\right). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Поэтому углы α_J и β_J называют *собственными фазовыми сдвигами* рассматриваемой волны.

3. Инверсия времени и обратимость

Если нет никаких зарядов или токов, то уравнения Максвелла (1.1) инвариантны относительно одновременной замены \mathbf{r} на $-\mathbf{r}$ и t на $-t$. Для полей с определенной частотой $\omega = ck$ это выражается в следующем: если $\mathcal{E}(\mathbf{r})$ — решение уравнений (1.4), то $\mathcal{E}^*(-\mathbf{r})$ — также решение этих уравнений при условии, что n действительно, т. е. что проводимость всюду равна нулю. Далее, решение при определенных значениях J и M обязательно имеет вид (2.105). Используя (2.77), (2.84) и условие унитарности (2.107), получаем

$$f_{\lambda\lambda'}^J(r) = \sum_{\lambda''} \varepsilon_{\lambda\lambda''} h_{\lambda\lambda''}^J(r) S_{\lambda''\lambda'}^*, \quad (2.113)$$

где $\varepsilon_{\lambda\lambda'}$ определяется формулой (2.94), а $h_{\lambda\lambda'}^J$ имеет такой же вид, как и $f_{\lambda\lambda'}^J$, с той лишь разницей, что матричный элемент $S_{\lambda\lambda'}^J$ заменен на элемент $S_{\lambda'\lambda}^J$. Тогда с помощью (2.36) и (2.47) находим, что

$$\mathcal{E}_{JM}^*(-\mathbf{r}) = \sum_{\lambda\lambda'\lambda''} \mathbf{Y}_{\lambda-M}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}}) h_{\lambda\lambda''}^J(r) S_{\lambda''\lambda}^J a^{\lambda*} (-1)^M.$$

Это выражение также является решением уравнений (1.4), если $h_{\lambda\lambda'}^J = f_{\lambda\lambda'}^J$, т. е.

$$\tilde{\mathcal{F}}^J = \mathcal{F}^J. \quad (2.114)$$

Другими словами, из инвариантности относительно инверсии времени вытекает, что \mathcal{F} -матрица *симметрична*. Условие симметрии (2.114) также называют условием *обратимости*. Если из-за наличия проводимости рассеивающий центр может поглощать энергию, то инвариантность по отношению к инверсии времени отсутствует и обратимость может отсутствовать.

Комплексность показателя преломления означает отсутствие инвариантности относительно инверсии времени при рассеянии только в том случае, когда эта комплексность действительно обусловлена проводимостью. Однако это необязательно так, поскольку комплексность показателя преломления может быть обусловлена также наличием большого числа непоглощающих частиц в рассеивающем центре. Согласно (1.97), в последнем случае мы также имеем комплексный показатель преломления, и из вывода выражения (1.97) видно, какой смысл имеет определяемая им величина n . Это выражение относится только к распространению когерентной волны и, вообще говоря, неприменимо при вычислении амплитуды рассеяния облаком частиц. Из облака в конечном счете будет выходить также и некогерентная часть волны, которая будет давать вклад в рассеяние.

Далее, при наличии инвариантности относительно инверсии времени выражения (2.90) и (2.91) упрощаются:

$$A_{il}^C = \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (s^J \pm \Delta^J - 1) (\tau_J + \pi_J), \quad (2.115)$$

$$A_{rl}^C = A_{lr}^C = \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \delta^J (\tau_J - \pi_J),$$

где

$$s^J = \frac{1}{2} (S_{ee}^J + S_{mm}^J),$$

$$\Delta^J = S_{me}^J = S_{em}^J, \quad (2.116)$$

$$\delta^J = \frac{1}{2} (S_{ee}^J - S_{mm}^J).$$

Выражение (2.87) для тензора амплитуды рассеяния в диадных обозначениях обладает свойством обратимости:

$$\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \mathcal{A}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (2.117)$$

4. Обобщенная оптическая теорема

Теперь можно использовать свойство унитарности (2.107) в связи с формулой (2.87). Это приводит к следующему результату:

$$\int d\Omega_k \mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \cdot \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{k}'', \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{ik} [\mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') - \mathcal{A}^\dagger(\mathbf{k}'', \mathbf{k}')]. \quad (2.118)$$

Отсюда с помощью условия обратимости (2.117) получаем

$$\begin{aligned} \int d\Omega_k \mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \cdot \mathcal{A}^*(\mathbf{k}, \mathbf{k}'') &= \frac{2\pi}{ik} [\mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'') - \mathcal{A}^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}'')] = \\ &= 4\pi k^{-1} \text{Im} \mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}''). \end{aligned} \quad (2.119)$$

В частном случае $\mathbf{k}' = \mathbf{k}''$ имеем

$$4\pi k^{-1} \text{Im} A_{\mu\nu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}') = \sum_{\nu} \int d\Omega_k |A_{\nu\mu}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2.$$

Правая часть этого соотношения представляет собой полное сечение рассеяния для пучка, имеющего поляризацию μ и направление падения \mathbf{k}' . Таким образом, в частном случае $\mathbf{k}' = \mathbf{k}''$ соотношение (2.119) сводится к оптической теореме (1.77).

5. Обобщение на случай отсутствия сферической симметрии

Соображения, приводящие к свойствам унитарности (2.107) и симметрии (2.114), можно обобщить на случай отсутствия сферической симметрии. Конечно, теперь матрица \mathcal{S} не диагональна по индексу J или необязательно пропорциональна единичной матрице по индексам M . Тем не менее при тех же ограничениях, что и в рассмотренном случае вращательной симметрии, имеют место унитарность и обратимость.

§ 4. РАССЕЯНИЕ НА ОДНОРОДНОЙ СФЕРЕ (ТЕОРИЯ МИ)

1. Вычисление \mathcal{H} -матрицы

Если считать, что рассеивающий центр представляет собой однородную сферу, имеющую изотропную (нетензорную) диэлектрическую проницаемость ϵ , проводимость σ и магнитную проницаемость μ , то методом, изложенным в гл. 2, § 2, можно легко вычислить \mathcal{S} -матрицу. Уравнения Максвелла внутри рассеивателя в данном случае имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) &= \kappa^2 \mathcal{E}, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathcal{B}) &= \kappa^2 \mathcal{B}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

где

$$\kappa^2 = k^2 \mu \left(\epsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right) = n^2 k^2. \quad (2.121)$$

Кроме того, на поверхности сферы должны быть непрерывны тангенциальные компоненты \mathcal{H} и \mathcal{E} .

При фиксированных значениях J и M выражение для электрического поля внутри рассеивающей сферы должно иметь вид (2.75), а именно

$$\mathcal{E}_{JM}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda'} \frac{Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) \bar{f}_{\lambda'\lambda}^J(r)}{\kappa r}. \quad (2.122)$$

Здесь величины \bar{f} имеют такую же структуру, что и f , даваемые формулами (2.77), но построены из *регулярных* функций Бесселя. Запишем поперечную часть $\bar{f}(\lambda, \lambda' = e, m)$ в (2.122) в матричных обозначениях

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} -i\bar{u}'_J & 0 \\ 0 & \bar{u}_J \end{pmatrix} \mathcal{E},$$

где $\bar{u}_J \equiv u_J(\kappa r)$, \mathcal{E} — произвольная постоянная матрица. Выражение для магнитного поля получаем по аналогии с (2.80)

$$\mathcal{B}_{JM}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda'} \frac{Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) \bar{g}_{\lambda'\lambda}^J(r)}{\kappa r}, \quad (2.123)$$

где поперечная часть величины \bar{g} в матричных обозначениях имеет вид

$$\bar{g} = \frac{\kappa}{k} \begin{pmatrix} 0 & i\bar{u}'_J \\ \bar{u}_J & 0 \end{pmatrix} \mathcal{E}.$$

Вне рассеивающей сферы, согласно (2.75) и (2.80), имеем

$$\mathcal{E}_{JM}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda'} \frac{Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) f_{\lambda'\lambda}^J(r)}{kr}, \quad (2.124)$$

$$\mathcal{B}_{JM}(\mathbf{r}) = \sum_{\lambda'} \frac{Y_{JM}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) g_{\lambda'\lambda}^J(r)}{kr}. \quad (2.125)$$

Из (2.85) и (2.83) следует, что поперечные части величин f и g можно выбрать в виде

$$f = \begin{pmatrix} -iu_J' & 0 \\ 0 & u_J \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -iv_J' & 0 \\ 0 & v_J \end{pmatrix} \mathcal{K}^J, \\ g = \begin{pmatrix} 0 & iu_J' \\ u_J & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & iv_J' \\ v_J & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}^J,$$

где значения всех функций берутся в точке kr . На поверхности рассеивающей сферы радиусом R тангенциальные компоненты векторов \mathcal{E} и \mathcal{B} должны быть непрерывны; таким образом, это граничное условие содержит только поперечные компоненты электрического и магнитного полей. Поэтому при $r = R$ имеем

$$f = \bar{f}, \quad g = \frac{\bar{g}}{\mu}$$

или

$$\begin{pmatrix} u_J' & 0 \\ 0 & u_J \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_J' & 0 \\ 0 & v_J \end{pmatrix} \mathcal{K}^J = \begin{pmatrix} \bar{u}_J' & 0 \\ 0 & \bar{u}_J \end{pmatrix} \mathcal{E}, \\ \begin{pmatrix} 0 & u_J' \\ u_J & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & v_J' \\ v_J & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}^J = \frac{\kappa}{\mu k} \begin{pmatrix} 0 & \bar{u}_J' \\ \bar{u}_J & 0 \end{pmatrix} \mathcal{E}.$$

Эти матричные уравнения легко разрешить относительно матрицы \mathcal{K} . Вследствие зеркальной симметрии матрица \mathcal{K} оказывается диагональной. Вводя обозначения

$$x \equiv kR = \frac{2\pi R}{\lambda}, \quad (2.126)$$

$$\bar{X} \equiv \kappa R = nx,$$

получаем

$$K_e^J \equiv K_{ee}^J = \frac{nu_J'(x) u_J(\bar{X}) - \mu u_J'(\bar{X}) u_J(x)}{nv_J'(x) u_J(\bar{X}) - \mu u_J'(\bar{X}) v_J(x)}, \quad (2.127)$$

$$F_m^J \equiv K_{mm}^J = \frac{\mu u_J'(x) u_J(\bar{X}) - nu_J'(\bar{X}) u_J(x)}{\mu v_J'(x) u_J(\bar{X}) - nu_J'(\bar{X}) v_J(x)}.$$

Элементы \mathcal{S}^J матрицы получим из (2.82)

$$S_\lambda^J \equiv S_{\lambda\lambda}^J = \frac{1 + iK_\lambda^J}{1 - iK_\lambda^J}, \quad \lambda = e, m, \quad (2.128)$$

откуда, используя (2.66), находим

$$S_e^J = e^{i\pi J} \frac{n\omega_J^{(-)'} u_J - \mu\omega_J^{(-)} u_J'}{n\omega_J^{(+)} u_J - \mu\omega_J^{+'} u_J'}, \quad (2.127a) \\ S_m^J = e^{i\pi J} \frac{\mu\omega_J^{(-)'} u_J - n\omega_J^{(-)} u_J'}{\mu\omega_J^{(+)} u_J - n\omega_J^{+'} u_J'};$$

здесь каждая функция ω_J взята при значении аргумента x , а каждая функция u_J —при значении \bar{X} .

Заметим, что в отсутствие проводимости показатель преломления n действителен и, следовательно, величина \bar{X} также действительна. Это приводит к тому, что матрица \mathcal{K} оказывается действительной, а матрица \mathcal{S} —унитарной. Другими словами,

$$|S_e^J|^2 = |S_m^J|^2 = 1.$$

Обращаясь к сдвигам фаз (2.109), имеем

$$\begin{aligned} K_e^J &= \text{tg } \alpha_J, \\ K_m^J &= \text{tg } \beta_J. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Если сфера является проводящей, то происходит поглощение энергии, и следовательно,

$$|S_e^J|^2 < 1, \quad |S_m^J|^2 < 1. \quad (2.130)$$

Сдвиги фаз α_J и β_J можно по-прежнему находить по формулам (2.129), но теперь они не будут действительными.

В частном случае $\varepsilon = \mu$ различие между S_e^J и S_m^J исчезает. Тогда выполняется не только равенство $A_{rr}^C = A_{ll}^C$, но и равенство $A_{rl}^C = A_{lr}^C = 0$.

2. Амплитуда рассеяния

Выражения (2.90) и (2.91) для амплитуд рассеяния в рассматриваемом здесь случае упрощаются:

$$\begin{aligned} A_{rr}^C &= A_{ll}^C = \frac{1}{4ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (e^{2i\alpha_J} + e^{2i\beta_J} - 2) (\tau_J + \pi_J), \\ A_{rl}^C &= A_{lr}^C = \frac{1}{4ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (e^{2i\alpha_J} - e^{2i\beta_J}) (\tau_J - \pi_J). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Согласно (2.95) имеем

$$\begin{aligned} A_{12}^L &= A_{21}^L = 0, \\ A_{||}^L &\equiv A_{11}^L = \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) [(e^{2i\alpha_J} - 1) \tau_J + (e^{2i\beta_J} - 1) \pi_J], \\ A_{\perp}^L &\equiv A_{22}^L = \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) [(e^{2i\beta_J} - 1) \tau_J + (e^{2i\alpha_J} - 1) \pi_J]. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Амплитуды рассеяния можно выразить через следующие два более простые ряда:

$$\begin{aligned} A_e(\cos \theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (e^{2i\alpha_J} - 1) \pi_J(\cos \theta), \\ A_m(\cos \theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (e^{2i\beta_J} - 1) \pi_J(\cos \theta), \end{aligned} \quad (2.133)$$

а именно

$$\begin{aligned} A_{||}^L &= -\sin\theta \frac{d}{d \cos\theta} \sin\theta A_e + A_m, \\ A_{\perp}^L &= A_e - \sin\theta \frac{d}{d \cos\theta} \sin\theta A_m, \\ A_{rr}^C &= A_{rl}^C = \left(1 - \sin\theta \frac{d}{d \cos\theta} \sin\theta\right) \frac{1}{2} (A_e + A_m), \\ A_{rl}^C &= A_{rr}^C = \left(1 + \sin\theta \frac{d}{d \cos\theta} \sin\theta\right) \frac{1}{2} (A_m - A_e). \end{aligned} \quad (2.134)$$

Полное сечение для случая действительных α_J и β_J дается формулой (2.99)

$$\sigma_{\text{полн}} = [2x^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (\sin^2 \alpha_J + \sin^2 \beta_J)] \pi R^2. \quad (2.135)$$

Величина $\sigma_{\text{полн}}$ не зависит от поляризации. Выражение в квадратных скобках равно отношению полного сечения к площади геометрического поперечного сечения рассеивающей сферы. Если α_J и β_J не являются действительными величинами, то

$$\sigma_{\text{полн}} = [x^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (2 - \text{Re } S_e^J - \text{Re } S_m^J)] \pi R^2. \quad (2.136)$$

Здесь параметр x определяется формулой (2.126). Его величина характеризует соотношение между размером рассеивающей сферы и длиной волны излучения.

Используя (2.103), находим сечение рассеяния

$$\sigma_{\text{расс}} = \left[\frac{1}{2} x^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) (|S_e^J - 1|^2 + |S_m^J - 1|^2) \right] \pi R^2. \quad (2.137)$$

При отсутствии поглощения это выражение, как и следовало ожидать, сводится к формуле (2.135). Если же поглощение имеет место, то из (2.104) получим

$$\sigma_{\text{погл}} = \left[x^{-2} \sum_{J=1}^{\infty} (2J+1) \left(1 - \frac{1}{2} |S_e^J|^2 - \frac{1}{2} |S_m^J|^2\right) \right] \pi R^2. \quad (2.138)$$

Отношение сечения рассеяния к полному поперечному сечению называется *альбедо*:

$$\text{Альбедо} = \frac{\sigma_{\text{расс}}}{\sigma_{\text{полн}}} = 1 - \frac{\sigma_{\text{погл}}}{\sigma_{\text{полн}}}. \quad (2.139)$$

КОММЕНТАРИИ

К § 1, п. 1 и 2. Подробное рассмотрение свойств функций Лежандра можно найти в книгах Уиттекера и Ватсона [903] и Эрдейи [242], т. 1.

К § 1, п. 3. Используемые здесь сферические гармоники отличаются от функций, использованных в работе Блатта и Вайскопфа [77], и множителем i^l от функций, содержащихся в работе Роуза [718]; они также отличаются множителем $(-1)^m i^l$ от функций, использовавшихся Джексоном [426]. Сравнение с функциями, использовавшимися в других работах, можно найти у Роуза [718], приложение А. Определение сферических гармоник по формуле (2.11) выбрано для того, чтобы они обладали более удобными свойствами по отношению к комплексному сопряжению, т. е. по существу относительно обращения времени.

К § 1, п. 4. Для более подробного ознакомления с векторными сферическими гармониками см., например, книгу Роуза [718]. Выбор фазы векторов χ в (2.20) продиктован стремлением сделать ее такой же, как и фаза сферических функций.

Подробное рассмотрение коэффициентов Клебша — Гордана можно найти в работах Роуза [718], Эдмондса [237] и Вигнера [912].

К § 1, п. 5. Используемые обозначения для поперечной и продольной векторных сферических гармоник отличаются от обозначений, принятых в других работах. Например, в обозначениях Блатта и Вайскопфа [77], $Y_{JM}^{(m)} = i^{l+1} X_{JM}$, а в обозначениях Джексона [426] $Y_{JM}^{(m)} = i^{l+1} (-1)^m X_{JM}$.

К § 1, п. 9. Функции π_J и τ_J отличаются от функций в книге Хюльста [857], обозначенных теми же символами, множителем $1/J (J + 1)$.

К § 2, п. 1. Используемые в (2.58), (2.60) и (2.65) обозначения j_l , n_l и h_l в настоящее время очень часто употребляются в квантовой механике; функции ψ_l и ζ_l , заключенные в квадратные скобки в (2.58), (2.60), использовались Ватсоном и Зоммерфельдом, а также во многих других трудах по теории электромагнетизма. При решении дифференциальных уравнений для радиальных функций значительно более удобными оказываются именно функции u_l , v_l и w_l , отличающиеся от функций ψ_l , ζ_l множителем z или kr .

Для подробного ознакомления со свойствами функций Бесселя следует обратиться к работам Эрдейи [242], т. 2, и Ватсона [885].

К § 2, п. 2. Впервые S-матрица была введена в квантовой теории рассеяния независимо Уилером [900] и Гейзенбергом [372].

К § 2, п. 5. Разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам в виде, аналогичном (2.87), в квантовой механике впервые было использовано Факсеном и Хольцмарком [249].

К § 4. Точное решение задачи рассеяния электромагнитных волн на однородной диэлектрической сфере с использованием парциальных волн впервые дал Ми [597].

Сводки результатов, полученных при рассмотрении рассеяния электромагнитного излучения на сфере и на конусе, приведены соответственно в работах [349] и [491]. Обе статьи содержат обширную библиографию.

ЗАДАЧИ

1. Вывести формулы (2.73) и (2.74).
2. Вывести формулы (2.77) и (2.78).
3. Вывести формулы (2.80) и (2.81).
4. Доказать соотношения (2.102).
5. Справедлива ли формула (2.137), если падающее излучение не поляризовано? Если нет, то чему равно полное сечение рассеяния в этом случае?
6. Выразить матрицу плотности для волны, рассеянной в данном направлении однородной диэлектрической сферой, через матрицу плотности падающего пучка и фазы α_J и β_J , определенные формулами (2.129) и (2.127). Сделать это для случая плоской поляризации и поляризации по кругу. Может ли рассеянная волна оказаться поляризованной, если падающий пучок не поляризован?
7. Что является плоскостью отсчета для поляризации в формулах (2.132)?
8. Из формулы (2.131) следует, что при рассеянии излучения, имеющего только левовинтовую круговую поляризацию, на сфере некоторая часть излучения приобретает правовинтовую круговую поляризацию, и наоборот. Объяснить это явление на языке угловых моментов.
9. Объяснить, каковы истинные причины того, что амплитуды A_{rr}^C и A_{ll}^C в формуле (2.131) равны друг другу и почему $A_{rl}^C = A_{lr}^C$?

Предельные случаи и приближения

Согласно (2.127), отношение сечения рассеяния на однородной сфере к ее геометрическому поперечному сечению определяется тремя независимыми параметрами:

$$\begin{aligned}x &= kR = \frac{2\pi R}{\lambda}, \\n &\equiv \mu^{1/2} n' = \left[\mu \left(\varepsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right) \right]^{1/2}, \\ \frac{n}{\mu} &= \left[\frac{1}{\mu} \left(\varepsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right) \right]^{1/2}.\end{aligned}$$

Если параметр x велик или мал или если n и μ близки к единице, то выражение для сечения рассеяния упрощается. Ниже будут рассмотрены все эти предельные случаи. Каждый из них будет рассмотрен с точки зрения теории Ми, а затем в рамках некоторого более общего приближенного метода.

§1. СФЕРЫ МАЛОГО РАДИУСА НЕ СЛИШКОМ БОЛЬШОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ (РЕЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ)

Если радиус сферы мал по сравнению с длиной волны, $R \ll \lambda$, то

$$x \ll 1 \quad (3.1)$$

и в формулах (2.127) можно вместо функций u_J и v_J использовать первые члены их разложения (2.64) и (2.67) вблизи точки $x = 0$. Чтобы для функций $u_J(\bar{X})$ и $v_J(\bar{X})$ также можно было использовать первые члены разложения вблизи нуля, нужно допустить, что n не слишком велико, т. е.

$$xn \ll 1. \quad (3.2)$$

Из физических соображений следует ожидать, что ограничение (3.2) играет важную роль, так как величина

$$2x(n-1) = 2Rkn - 2Rk$$

равна сдвигу фазы волны, которая распространяется прямо сквозь рассеивающую сферу. Рассеяние будет мало, если этот сдвиг фаз мал.

Подстановка (2.64) и (2.67) в (2.127) дает

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \alpha_J &\approx \frac{J+1}{(2J+1)!!(2J-1)!!} \frac{n^2 - \mu}{Jn^2 + \mu(J+1)} x^{2J+1}, \\ \operatorname{tg} \beta_J &\approx \frac{J+1}{(2J+1)!!(2J-1)!!} \frac{\mu-1}{\mu J + J+1} x^{2J+1}.\end{aligned} \quad (3.3)$$

Так как $x \ll 1$, то в рядах (2.131) и (2.132) нужно оставить только члены с $J=1$. Для $J=1$ имеем

$$\alpha_1 \approx \frac{2}{3} \mathfrak{N} x^3, \quad \beta_1 \approx \frac{2}{3} \mathfrak{M} x^3,$$

где

$$\mathfrak{N} = \frac{n'^2 - 1}{n'^2 + 2}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2}. \quad (3.4)$$

Следует отметить, что в этом (нулевом) приближении электрическое и магнитное поля дают вклад независимо друг от друга, причем сдвиг фазы электрического поля определяется только диэлектрической проницаемостью и проводимостью, а сдвиг фазы магнитного поля — только магнитной проницаемостью.

Использование формул (2.131) и (2.56) для амплитуд, соответствующих поляризации по кругу, дает

$$\begin{aligned} A_{rr}^C &= A_{rl}^C \approx x^2 R (\mathfrak{N} + \mathfrak{M}) \cos^2 \frac{1}{2} \theta, \\ A_{rl}^C &= A_{lr}^C \approx x^2 R (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \sin^2 \frac{1}{2} \theta. \end{aligned} \quad (3.5)$$

С помощью формулы (2.132) для амплитуд, соответствующих линейной поляризации, получаем

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^L &\approx x^2 R (\mathfrak{N} \cos \theta + \mathfrak{M}), \\ A_{\perp}^L &\approx x^2 R (\mathfrak{N} + \mathfrak{M} \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если имеет место поглощение энергии, то, согласно (2.136), полное сечение равно

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 4x \operatorname{Im} \mathfrak{N} \pi R^2. \quad (3.7)$$

В этом случае экстинкция практически полностью обусловлена поглощением энергии, так как сечение рассеяния, вычисленное по формуле (2.137), оказывается значительно меньше полного сечения

$$\sigma_{\text{расс}} \approx \frac{8}{3} x^4 (|\mathfrak{N}|^2 + |\mathfrak{M}|^2) \pi R^2. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.6) в формулу (1.68), для степени поляризации первоначально неполяризованного пучка получаем

$$P = \frac{(|\mathfrak{N}|^2 - |\mathfrak{M}|^2) \sin^2 \theta}{(|\mathfrak{N}|^2 + |\mathfrak{M}|^2) (1 + \cos^2 \theta) + 4\mathfrak{M} \operatorname{Re} \mathfrak{N} \cos \theta}. \quad (3.9)$$

Если магнитная проницаемость равна единице, то степень поляризации не зависит от n :

$$P = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta}. \quad (3.10)$$

Следовательно, излучение, рассеянное под прямым углом, оказывается полностью поляризованным.

Таковы характерные особенности *релеевского* рассеяния. Их можно также получить, рассматривая рассеяние точечным диполем с поляризуемостью сферы. Вытекающая из (3.8) сильная зависимость сечения рассеяния от длины волны (как λ^{-4}) ответственна, в частности, за голубой цвет неба. Этим же обстоятельством объясняется эффективное проникновение инфракрасного света сквозь туман, состоящий из очень маленьких частиц. Легко также наблюдать и сильную поляризацию света, рассеянного атмосферой под прямым углом к направлению на Солнце. Если учесть члены с более высокими степенями x , то степень поляризации P больше не будет равна в точности 100%, а будет отличаться от этого значения на величину порядка x^4 . Поэтому сильнее поля-

ризуется длинноволновое излучение (*дисперсия поляризации*). Результатом этого является хорошо известный в цветной фотографии эффект увеличения голубизны неба в направлении, перпендикулярном направлению на Солнце, при наблюдении через поляризационный фильтр. Кроме того, от длины волны зависит также угол, при котором наблюдается максимум поляризации (*полихромизм*).

Следующий член по степеням x^2 приводит также к нарушению симметрии релеевского дифференциального сечения по отношению к рассеянию вперед и назад в сторону увеличения сечения рассеяния в направлении вперед.

§ 2. СФЕРА МАЛОЙ, НО НЕ СЛИШКОМ МАЛОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ (ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕЛЕЯ — ГАНСА; БОРНОВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Рассмотрим теперь предельный случай, когда

$$|n - 1| \ll 1, \quad |\mu - 1| \ll 1. \quad (3.11)$$

Радиус рассеивающей сферы является произвольным, но он не должен быть слишком большим. Другими словами, накладывается дополнительное условие

$$|n - 1| x \ll 1. \quad (3.12)$$

В этом случае при вычислении сдвига фаз по формуле (2.127) $u_J(\bar{X})$ можно заменить на

$$u_J(nx) \approx u_J(x) + (n - 1) x u_J'(x).$$

Аналогичным выражением можно заменить и v_J . Дифференциальное уравнение (2.63) для $u_J(x)$ и $v_J(x)$ и граничные условия дают выражение для вронскиана (2.70); подобным же образом находим

$$u_J(nx) u_J'(x) - n u_J(x) u_J'(nx) = (n^2 - 1) \int_0^x dx' u_J(x') u_J(nx'). \quad (3.13)$$

Подстановка этих выражений в (2.127) дает первое приближение

$$\alpha_J \approx (n^2 - 1) \int_0^x dx' [u_J(x')]^2 + (n^2 - \mu) u_J(x) u_J'(x),$$

$$\beta_J \approx (n^2 - 1) \int_0^x dx' [u_J(x')]^2 + (\mu - 1) u_J(x) u_J'(x).$$

С помощью (2.132) находим амплитуду рассеяния

$$A_{\parallel}^L = (n^2 - 1) k^{-1} \sum_{J=1}^{\infty} (2J + 1) \times$$

$$\times \left[\left(\int_0^x dx' u_J^2(x') + u_J u_J' \right) \tau_J + \int_0^x dx' u_J^2(x') \pi_J \right] +$$

$$+ (\mu - 1) k^{-1} \sum_{J=1}^{\infty} (2J + 1) u_J(x) u_J'(x) (\pi_J - \tau_J).$$

Амплитуда A_{\perp}^L получается из формулы для A_{\parallel}^L заменой π_J на τ_J , и наоборот. Выражения для амплитуд можно упростить, записав $u_J u_J'$ в виде

$$u_J u_J' = \int_0^x dx' (u_J^2 + u_J u_J'')$$

и используя дифференциальное уравнение (2.63), а также рекуррентные соотношения (2.69),

$$(2J+1) u_J u'_J = \int_0^x dx' [(J+1) u_{J-1}^2 - (2J+1) u_J^2 + J u_{J+1}^2].$$

Применим здесь рекуррентные соотношения (2.3) для полиномов Лежандра; это дает

$$\sum_J (2J+1) u_J u'_J \pi_J = (\cos \theta - 1) \sum_J \frac{2J+1}{J(J+1)} P_J \int_0^x dx' u_J^2,$$

$$\sum_J (2J+1) u_J u'_J \tau_J = (\cos \theta - 1) \sum_J \frac{2J+1}{J(J+1)} [J(J+1) P_J + P'_J] \int_0^x dx' u_J^2.$$

Простой расчет приводит к следующему результату:

$$A_{||}^L = k^2 \int_0^R dr r^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [j_l(kr)]^2 P_l(\cos \theta) [(n'^2 - 1) \cos \theta + \mu - 1],$$

$$A_{\perp}^L = k^2 \int_0^R dr r^2 \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [j_l(kr)]^2 P_l(\cos \theta) [(\mu - 1) \cos \theta + n'^2 - 1].$$

Входящие сюда бесконечные ряды можно представить в замкнутой форме. Используя разложение двух экспонент по формуле (2.57) и условия ортогональности (2.14) и (2.18), получаем

$$\begin{aligned} F(\theta) &\equiv \int_{|r| \leq R} dr e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} = \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \int_0^R dr r^2 [j_l(kr)]^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Поэтому для $A_{||}^L$ и A_{\perp}^L имеем

$$\begin{aligned} A_{||}^L &= \frac{k^2}{4\pi} F(\theta) [(n'^2 - 1) \cos \theta + \mu - 1], \\ A_{\perp}^L &= \frac{k^2}{4\pi} F(\theta) [(\mu - 1) \cos \theta + n'^2 - 1]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Этот результат можно также получить совершенно другим методом, известным под названием *метода Релея-Ганса*: рассеяние на сфере можно рассматривать как сумму релеевских рассеяний на всех элементах ее объема. Вследствие условия (3.11) формулы (3.6) упрощаются, так как при этом

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &\approx \frac{1}{3} (\mu - 1), \\ \mathfrak{N} &= \frac{1}{3} (n'^2 - 1). \end{aligned}$$

Напишем теперь амплитуды релеевского рассеяния на частице объемом dr в виде

$$\begin{aligned} dA_{||}^L &= \frac{k^2}{4\pi} dr [(n'^2 - 1) \cos \theta + \mu - 1], \\ dA_{\perp}^L &= \frac{k^2}{4\pi} dr [(\mu - 1) \cos \theta + n'^2 - 1]. \end{aligned}$$

Прежде чем суммировать эти амплитуды, нужно учесть, однако, относительный сдвиг фаз, который обусловлен тем, что элемент объема dr , на котором происходит рассеяние, расположен не в начале координат, а в точке \mathbf{r} (фиг. 3.1). Это означает, что dA_{\parallel}^L нужно умножить на $e^{i\delta}$, где

$$\delta = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

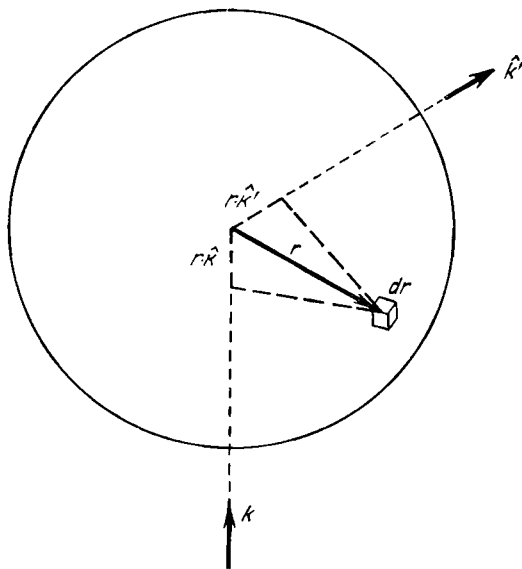
Тогда интегрирование сразу дает

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^L &= \frac{k^2}{4\pi} (F_e \cos \theta + F_m), \\ A_{\perp}^L &= \frac{k^2}{4\pi} (F_m \cos \theta + F_e). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Эти выражения можно использовать даже в том случае, когда n' и μ не постоянны, т. е. если рассеивающая сфера неоднородна. Функции

$$\begin{aligned} F_e &\equiv \int d\mathbf{r} (n'^2 - 1) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}}, \\ F_m &\equiv \int d\mathbf{r} (\mu - 1) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

называются *формфакторами* рассеивателя. Интегрирование в (3.17) производится по всему объему рассеивателя. Если n' и μ постоянны, а рассеиватель



Ф и г. 3.1. Оптическая длина пути при рассеянии элементом dr .

представляет собой сферу, то формулы (3.16) переходят в (3.15). Поляризация в этом случае будет определяться таким же выражением, как и в случае релеевского рассеяния, а именно формулой (3.9).

Сопоставляя (3.17) с (10.97) после замены потенциала внутри рассеивателя на постоянный показатель преломления, видим, что приближение Релея — Ганса является полным аналогом борновского приближения в квантовой механике.

Если рассеиватель сферически симметричен, то (3.17) сводится к

$$\begin{aligned} F_e &= 2\pi k^{-1} \int_0^R dr r (n'^2 - 1) \frac{\sin(2kr \sin \frac{1}{2}\theta)}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}, \\ F_m &= 2\pi k^{-1} \int_0^R dr r (\mu - 1) \frac{\sin(2kr \sin \frac{1}{2}\theta)}{\sin^2 \frac{1}{2}\theta}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

а если n' и μ постоянны, то единая функция F , входящая в (3.15), принимает вид

$$F = 2\pi R^2 \frac{j_1(2kR \sin^{1/2}\theta)}{k \sin^{1/2}\theta}. \quad (3.19)$$

Следовательно, для отдельных амплитуд имеем

$$\begin{aligned} A_{||}^L &= \frac{1}{2} R x \frac{j_1(2x \sin^{1/2}\theta)}{\sin^{1/2}\theta} [(n'^2 - 1) \cos \theta + \mu - 1], \\ A_{\perp}^L &= \frac{1}{2} R x \frac{j_1(2x \sin^{1/2}\theta)}{\sin^{1/2}\theta} [(\mu - 1) \cos \theta + n'^2 - 1]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Если магнитная проницаемость равна единице, то получающиеся сечения не зависят от того, будет ли $n > 1$ или $n < 1$. Последняя ситуация может иметь место, если внешней средой является не вакуум, как, например, в случае рассеяния пузырьками в жидкости.

Полное сечение рассеяния для неполяризованного излучения получается из (3.20) путем простого интегрирования

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{расс}} &= \pi \int_{-1}^1 d \cos \theta (|A_{||}^L|^2 + |A_{\perp}^L|^2) = \\ &= \pi R^2 \left\{ \frac{1}{4} [|n'^2 - 1|^2 + (\mu - 1)^2] I_1(x) + \frac{1}{2} (\mu - 1) \operatorname{Re} (n'^2 - 1) I_2(x) \right\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(x) &= 8x^2 \int_0^{2x} \frac{dz}{z} |j_1(z)|^2 \left(1 - \frac{z^2}{2x^2} + \frac{z^4}{8x^4} \right) = \\ &= \frac{5}{2} + 2x^2 - \frac{\sin 4x}{4x} - 7 \frac{1 - \cos 4x}{(4x)^2} + \left(\frac{1}{4x^2} - 1 \right) 4 \int_0^{2x} \frac{dz}{z} \sin^2 z, \\ I_2(x) &= 8x^2 \int_0^{2x} \frac{dz}{z} |j_1(z)|^2 \left(1 - \frac{z^2}{2x^2} \right) = \\ &= \frac{3}{2} + 2x^2 - 3 \frac{\sin 4x}{4x} + 3 \frac{1 - \cos 4x}{(4x)^2} - 4 \int_0^{2x} \frac{dz}{z} \sin^2 z. \end{aligned}$$

Остающийся в этих формулах интеграл можно представить в виде

$$2 \int_0^{2x} \frac{dz}{z} \sin^2 z = \gamma + \ln 4x - \operatorname{Ci}(4x),$$

где γ — постоянная Эйлера ($\gamma = 0,5771 \dots$), а $\operatorname{Ci}(x)$ — интегральный косинус

$$\operatorname{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{dy}{y} \cos y.$$

Выражение для амплитуды рассеяния вперед, получающееся из (3.18), совпадает с соответствующим выражением для амплитуды релеевского рассеяния вперед. Этого следовало ожидать, поскольку в данном случае не возникает никакого сдвига фаз при рассеянии на элементах, расположенных в различных точках пространства. Поэтому полное сечение также соответствует случаю релеевского рассеяния.

Если $x \ll 1$ или $x \gg 1$, то можно произвести дальнейшее упрощение выражений (3.20). В первом случае, конечно, получаются амплитуды релеевского рассеяния. Во втором случае, когда радиус сферы велик по сравнению с длиной волны, но не слишком велик, так что еще выполняется условие (3.12), формулы (3.20) принимают вид

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^L &= -\frac{1}{4} R \frac{\cos(2x \sin^{1/2} \theta)}{\sin^2 1/2 \theta} [(n'^2 - 1) \cos \theta + \mu - 1], \\ A_{\perp}^L &= -\frac{1}{4} R \frac{\cos(2x \sin^{1/2} \theta)}{\sin^2 1/2 \theta} [(\mu - 1) \cos \theta + n'^2 - 1], \end{aligned} \quad (3.22)$$

если только угол рассеяния не слишком мал. Другими словами, нужно считать, что

$$x \sin \frac{1}{2} \theta \gg 1.$$

Для полного сечения рассеяния получаем выражение

$$\sigma_{\text{расс}} = \frac{1}{2} |n'^2 + \mu - 2|^2 (x^2 - \ln x) \pi R^2, \quad (3.23)$$

которое в силу (3.12) все еще должно быть значительно меньше геометрического поперечного сечения.

Заметим, что амплитуды (3.20) обращаются в нуль при углах и длинах волн, определяемых уравнением

$$J_{1/2} \left(2kR \sin \frac{1}{2} \theta \right) = 0.$$

Это характерные дифракционные явления. Точная амплитуда тоже обращается в нуль, но ее нули не совпадают строго с нулями амплитуд (3.20). Если оптическая плотность рассеивателя не имеет резкой границы, а уменьшается постепенно, то осцилляции становятся более плавными.

§ 3. СФЕРА МАЛОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ

1. Резонансное рассеяние

Рассмотрим теперь предельный случай, когда

$$\frac{n}{\mu} \gg 1. \quad (3.24)$$

Тогда (2.127) принимает вид

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_J &\approx \frac{u'_J(x)/v'_J(x)}{1 - (\mu/n) [v_J(x)/v'_J(x)] [u'_J(\bar{X})/u_J(\bar{X})]}, \\ \operatorname{tg} \beta_J &\approx \frac{u_J(x)/v_J(x)}{1 - (\mu/n) [v'_J(x)/v_J(x)] [u_J(\bar{X})/u'_J(\bar{X})]}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Если, кроме того, рассеиватель является малым, т. е.

$$x \ll 1, \quad (3.26)$$

то сдвиги фаз можно просто приравнять значениям

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_J &\approx \frac{(J+1) x^{2J+1}}{J(2J+1)!!(2J-1)!!} \left[1 + \frac{\mu}{n} \frac{x}{J} \frac{u'_J(\bar{X})}{u_J(\bar{X})} \right]^{-1}, \\ \operatorname{tg} \beta_J &\approx -\frac{x^{2J+1}}{(2J+1)!!(2J-1)!!} \left[1 + \frac{\mu}{n} \frac{J}{x} \frac{u_J(\bar{X})}{u'_J(\bar{X})} \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Как и следовало ожидать, для рассеивателей малых размеров сдвиги фаз обычно весьма малы, причем они тем меньше, чем больше J . Однако есть некоторые значения x , при которых знаменатель в (3.27) обращается в нуль и, следовательно, соответствующий сдвиг фазы проходит через $1/2\pi$. Это приводит к тому, что данная парциальная амплитуда (т. е. соответствующий член ряда в разложении амплитуды) оказывается *максимальной* по величине, в то время как все остальные малы. Поэтому вблизи частоты, при которой знаменатель в (3.27) обращается в нуль, сечение рассеяния имеет острый максимум. Такое явление называется *резонансом*.

Резонансные частоты можно легко найти с помощью (3.27). Сдвиг фазы для электрического мультиполя α_J проходит через значение, равное $1/2\pi$ (по модулю π), когда

$$kR = x = x_{eJ} \equiv \frac{\omega_{eJ}R}{c} \approx \frac{z_J}{n}, \quad (3.28)$$

где z_J — нуль функции $u_J(z)$:

$$u_J(z_J) = 0. \quad (3.29)$$

При такой частоте амплитуды можно с хорошей точностью аппроксимировать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{rr}^C &= A_{ll}^C \approx -\frac{3}{4ik} (2J+1) (\tau_J + \pi_J), \\ A_{rl}^C &= A_{lr}^C \approx -\frac{1}{2ik} (2J+1) (\tau_J - \pi_J). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Для нахождения частоты, при которой фаза магнитного мультиполя проходит через $1/2\pi$, нужно использовать рекуррентные соотношения (2.69). С их помощью получаем условие

$$x = x_{mJ} \equiv \frac{\omega_{mJ}R}{c} \approx \frac{z'_{J-1}}{n}. \quad (3.31)$$

Если магнитная восприимчивость равна единице, то число z'_{J-1} равно z_{J-1} . В противном случае оно определяется уравнением

$$u_{J-1}(z'_{J-1}) + \frac{(\mu-1)Ju_J(z'_{J-1})}{z'_{J-1}} = 0. \quad (3.32)$$

При таком магнитном резонансе приближенные выражения для амплитуд совпадают с (3.30) с той лишь разницей, что A_{rl}^C и A_{lr}^C имеют противоположные знаки. В табл. 3.1 приведены первые несколько решений уравнения (3.29).

Таблица 3.1

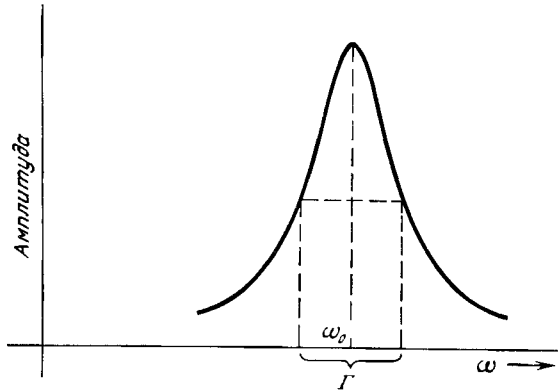
НУЛИ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ *

$$u_J(z_J^{(n)}) = 0$$

n	$J = 1$	$J = 2$
1	4,4934	5,7635
2	7,7253	9,0950
3	10,9041	12,3229
4	14,0662	15,5146

* Взято из книги Е. Янпке, Ф. Емде, Ф. Лёсх, Tables of Higher Functions, 6th ed., New York, 1960, p. 198. (Имеется перевод 6-го издания: Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, М. — Л., 1968.)

Каждой частоте, при которой $\operatorname{tg} \alpha_J = \infty$ или $\operatorname{tg} \beta_J = \infty$, соответствуют частоты, расположенные в непосредственной близости справа или слева от нее, при которых $\operatorname{tg} \alpha_J = 0$ или $\operatorname{tg} \beta_J = 0$. При последних частотах сдвиг фаз равен целому кратному π , а соответствующее парциальное сечение *обращается в нуль*. Однако поскольку другие парциальные амплитуды в этой точке не равны нулю, то отчетливо наблюдаемого эффекта не получается.



Ф и г. 3.2. Форма резонансной линии (лоренцевская форма линии).

Зависимость парциальной амплитуды от частоты вблизи резонанса наиболее легко установить, если в этой области использовать следующие соотношения:

$$\frac{1}{2i} (e^{2i\alpha_J} - 1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_J}{1 - i \operatorname{tg} \alpha_J} \approx \frac{1/2 \Gamma_{eJ}}{\omega - \omega_{eJ} + i/2 \Gamma_{eJ}}, \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{2i} (e^{2i\beta_J} - 1) \approx \frac{1/2 \Gamma_{mJ}}{\omega - \omega_{mJ} + i/2 \Gamma_{mJ}},$$

где

$$\Gamma_{eJ} = \frac{2x_{eJ}^{2J+2}}{J^2 [(2J-1)!!]^2} \frac{c\mu}{Rn^2}, \quad (3.34)$$

$$\Gamma_{mJ} = \frac{2x_{mJ}^{2J}}{[(2J-1)!!]^2} \frac{c\mu/R}{(nx_{mJ})^2 + (\mu-1)J + (\mu^2-1)J^2}.$$

Из (3.33) и (3.34) видно, что парциальные амплитуды имеют полюсы на комплексной x -плоскости, расположенные в точках

$$\omega = \omega_{eJ} - i \frac{1}{2} \Gamma_{eJ} \quad \text{и} \quad \omega = \omega_{mJ} - i \frac{1}{2} \Gamma_{mJ}.$$

При действительных n полюсы расположены очень близко к действительной оси. Когда k проходит через значения k_{eJ} или k_{mJ} , соответствующий сдвиг фазы быстро изменяется на величину π , причем так, что сдвиг фазы очень быстро принимает последовательные значения $1/2\pi$ и π (по модулю). Именно таким образом в зависимости парциальной амплитуды от частоты появляются максимумы и нули. Для действительных n парциальное сечение вблизи резонанса пропорционально величине

$$\frac{1/4 \Gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + 1/4 \Gamma^2}.$$

По своему физическому смыслу Γ , очевидно, является *шириной* резонансной линии. При $\omega = \omega_0 \pm 1/2 \Gamma$ кривая спадает до значения, равного половине значения в максимуме. Типичная форма резонансной линии показана на фиг. 3.2.

Если n комплексно, то резонансы все еще оказываются возможными, но появляется дополнительный вклад в ширину, обусловленный проводимостью. Так как нули z_J функций Бесселя действительны, то

$$\operatorname{Im} x_{eJ} \approx -\frac{z_J}{|n|^2} \operatorname{Im} n;$$

аналогичное выражение имеет место для мнимой части x_{mJ} . Эти величины необязательно малы (по сравнению с действительными частями), и соответственно резонансы необязательно являются острыми. Если проводимость мала, т. е.

$$\frac{\sigma}{\varepsilon |\omega|} \ll 1,$$

то

$$\operatorname{Im} n \approx \frac{2\lambda\sigma}{\sqrt{\varepsilon} c |k|},$$

а вклад в ширину равен

$$\Delta\Gamma \approx \frac{4\lambda\sigma}{\varepsilon}. \quad (3.35)$$

В зависимости от величины проводимости этот вклад в ширину может быть больше или меньше величин, определяемых формулой (3.34), но в любом случае характер его зависимости от J совершенно другой. Если проводимость велика, то ширина возникающих резонансов обычно не мала по сравнению с частотой, определяющей их положение. Действительно, в этом случае полюсы оказываются по существу расположенными на мнимой оси в точках

$$\omega \approx -i \frac{c^2}{4\pi\sigma R^2} z^2, \quad (3.36)$$

где z равно z_J для электрического мультиполя и z'_{J-1} для магнитного мультиполя.

Если магнитная восприимчивость равна нулю, то из (3.28) и (3.31) следует, что «электрические» максимумы для последовательных значений J «переплетаются» друг с другом, т. е. между двумя последовательными максимумами, соответствующими данному J , лежит только один максимум, соответствующий $J + 1$. Расстояние Δx между соседними резонансами, соответствующими одному и тому же J , имеет порядок n^{-1} . То же самое верно и для магнитных резонансов, но расстояние между электрическим резонансом, соответствующим данному J , и магнитным резонансом, соответствующим $J + 1$, имеет порядок n^{-3} .

Ширина магнитного резонанса, максимум которого находится в точке $\omega_{m, J+1}$ (в отсутствие проводимости), значительно больше ширины электрического резонанса с максимумом в точке ω_{eJ} , и поэтому электрический и магнитный резонансы находятся в пределах ширины магнитного максимума (если $\mu = 1$), за исключением случая $J = 1$. Таким образом, эти резонансы можно разделить только в том случае, когда рассматривают электрический дипольный и магнитный квадрупольный максимумы. Резонанс, который появляется при самой низкой частоте, является магнитным дипольным. Затем идет электрический дипольный резонанс, за которым непосредственно следует магнитный квадрупольный резонанс и т. д.

Физическую причину появления описываемых резонансов легче всего понять, рассмотрев физический смысл решения уравнений Максвелла, соответствующего такой частоте, при которой S^J имеет полюс. Если бы такое решение отвечало действительному значению частоты, то электромагнитное поле состояло бы только из расходящейся сферической волны и рассеиватель мог бы непрерывно излучать энергию, не получая ее извне. Конечно, такое

решение существовать не может. Поэтому его частота должна быть комплексной и иметь небольшую отрицательную мнимую часть, так чтобы электромагнитная энергия, будучи первоначально заключенной в ограниченной области пространства, медленно выходила за ее пределы, а плотность энергии всюду уменьшалась независимо от того, есть поглощение энергии или нет. Естественно, что величины Γ в (3.34) всегда положительны, а также всегда положителен и вклад в Γ , обусловленный комплексным показателем преломления. Поскольку электромагнитная энергия в данной области пространства является квадратичной функцией поля, то ее уменьшение со временем описывается характерной экспоненциальной зависимостью $e^{-\Gamma t}$. Отсюда интервал времени τ , по прошествии которого она уменьшается в e раз, равен $\tau = 1/\Gamma$. Если показатель преломления действителен, то это уменьшение целиком обусловлено тем фактом, что вся энергия излучается. Если показатель преломления комплексный, то часть энергии поглощается.

Процесс рассеяния при резонансе можно описать с помощью волновых пакетов, если последние в основном состоят из волн, частоты которых лежат в области резонанса. Волновой пакет проходит через рассеиватель по существу со скоростью света и частично рассеивается в обычную сферическую волну, которая сразу же уходит от рассеивателя. В то же время значительная часть энергии задерживается в рассеивателе и его окрестности и уходит от него значительно медленнее. Поэтому рассеиватель излучает энергию еще в течение длительного времени после того, как прошла возбуждающая волна, и он остается излучателем в течение характерного времени жизни $\tau = 1/\Gamma$. В сечении рассеяния учитывается *все* рассеянное излучение, независимо от того, задержано оно рассеивателем или нет. Поэтому временный захват излучения и последующее его испускание приводят к увеличению сечения рассеяния. И максимум сечения, и временная задержка характерны для резонансного процесса. Более подробное математическое описание явления временной задержки можно найти в гл. 19.

2. Полностью отражающая сфера

При нерезонансных частотах можно перейти к пределу $n \rightarrow \infty$ и заменить знаменатели в (3.27) на единицу. Этот предельный случай соответствует *идеальному проводнику* ($\sigma \rightarrow \infty$) или случаю *полного отражения*. Так как $x \ll 1$, то в амплитуде играет роль только член с $J = 1$ и мы получаем

$$A_{rr}^C \approx A_{ll}^C \approx \frac{1}{2} x^2 R \cos^2 \frac{1}{2} \theta, \quad A_{rl}^C \approx A_{lr}^C \approx -\frac{3}{2} x^2 R \sin^2 \frac{1}{2} \theta, \quad (3.37)$$

$$A_{ll}^L \approx x^2 R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right), \quad A_{\perp}^L \approx x^2 R \left(1 - \frac{1}{2} \cos \theta \right). \quad (3.38)$$

Полное сечение целиком обусловлено рассеянием, и для случая, когда падающее излучение неполяризовано, оно равно

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{10}{3} x^4 \pi R^2. \quad (3.39)$$

Степень поляризации первоначально не поляризованного пучка после рассеяния определяется формулой

$$P = \frac{3 \sin^2 \theta}{5 \cos^2 \theta + 5 - 8 \cos \theta}. \quad (3.40)$$

Следует отметить, что эти результаты отличаются от результатов, полученных для релеевского рассеяния, только тем, что сделан предельный переход при $n \rightarrow \infty$. Для релеевского рассеяния существенно предположение $x |n - 1| \ll 1$, и при его рассмотрении нельзя устремлять n к бесконечности. Физическая причина такого различия состоит в том, что релеевское рассеяние целиком обусловлено *электрическим* дипольным излучением. Однако

при $n \rightarrow \infty$ глубина проникновения поля в частицу становится значительно меньше ее радиуса и возникающий поверхностный ток приводит к появлению *магнитного дипольного* излучения. Сумма этих двух полей и дается выражениями (3.37) и (3.38). Тем не менее по порядку величины сечение рассеяния остается таким же, как и в случае релеевского рассеяния, а поляризация излучения, рассеянного вперед и назад, опять-таки обращается в нуль. Основное отличие от случая релеевского рассеяния при $\mu = 1$ состоит в асимметрии величины сечения рассеяния по отношению к рассеянию вперед и назад. Поляризация излучения, рассеянного под прямым углом, равна уже не 1, а $\frac{3}{5}$, причем максимальное значение степени поляризации $P = 1$ достигается при угле 60° .

Выражаясь математическим языком, предела при $n \rightarrow \infty$ не существует, если n не является комплексным. Это обусловлено тем, что при фиксированном x знаменатели в (3.27) при увеличении n могут проходить через нуль. Однако этого не происходит, если n комплексно и стремится к бесконечности, благодаря тому что $\sigma \rightarrow \infty$, и мы приходим к указанному выше пределу.

§ 4. ДИФFUЗНЫЕ СФЕРЫ БОЛЬШОГО РАДИУСА (ПРИБЛИЖЕНИЕ ХЮЛЬСТА)

Если размеры рассеивателя велики по сравнению с длиной волны, то мы находимся в области, близкой к геометрической оптике. Но прежде чем переходить к общему рассмотрению этой переходной области, остановимся сначала на одном физически возможном случае, когда наряду с условием, указанным выше, выполняется неравенство $|n - 1| \ll 1$. Так как при малых длинах волн (большие рассеиватели) рассеяние происходит преимущественно вперед, то мы в основном должны иметь дело с малыми углами рассеяния. Цель настоящего рассмотрения состоит в том, чтобы получить несколько улучшенные результаты для дифракции Фраунгофера. Метод, основанный на предельном переходе от точного решения Ми, будет рассмотрен в следующем параграфе. Здесь будет изложен приближенный метод, предложенный Хюльстом.

1. Рассеяние вперед

Рассмотрим сначала рассеяние вперед. Длину пути светового луча, который проходит через рассеивающую сферу, можно записать в виде

$$l = 2R \cos \gamma,$$

где γ — угол, показанный на фиг. 3.3. Поэтому в соответствующем узком пучке лучей происходит сдвиг фазы поля, в результате чего фазовый множитель e^{ikhz} переходит в

$$e^{ikhz + ik(n-1)2R \cos \gamma}.$$

Таким образом, в пределах круга радиусом $R \sin \gamma$ с центром на оси падающего пучка, в области геометрической тени, пучок в направлении вперед равен падающему пучку плюс

$$(e^{2ix(n-1) \cos \gamma} - 1) \mathcal{E}_0 e^{ikhz}.$$

На большом (по сравнению с R) расстоянии от рассеивателя наблюдается суперпозиция всех «лучей», которые проходят через рассеиватель в направлении (почти) вперед. Следовательно, наблюдаемое поле отличается от поля падающего пучка на величину

$$\int dS (e^{2ix(n-1) \cos \gamma} - 1) \mathcal{E}_0 e^{ikhz},$$

где интегрирование производится по поперечному сечению рассеивателя. Эта величина должна быть равна

$$\mathcal{A}(0) \cdot \mathcal{E}_0 e^{ikr} r^{-1} \approx \mathcal{A}(0) \cdot \mathcal{E}_0 z^{-1} e^{ikhz + ik(x^2 + y^2)/2z}.$$

Если принимающий экран велик по сравнению с $(\lambda r)^{1/2}$, то можно использовать такое же приближение, как в гл. 1, § 3, п. 9. Тогда полная интенсивность, наблюдаемая на экране, будет равна интенсивности, создаваемой падающим пучком, плюс величина

$$\mathcal{A}(0) \cdot \mathcal{E}_0 e^{ikhz} \frac{2\pi i}{k}.$$

Отсюда следует, что для собирания всего излучения, рассеянного вперед, на большом экране, а следовательно, и для вычисления полного поперечного сечения нужно найти величину

$$\mathcal{A}(0) \approx \frac{k}{2\pi i} \int dS (e^{2ix(n-1)\cos\gamma} - 1), \quad (3.41)$$

где интегрирование производится по поперечному сечению рассеивателя. Согласно оптической теореме, полное сечение равно

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 2 \operatorname{Re} \int dS (1 - e^{2ix(n-1)\cos\gamma}). \quad (3.42)$$

Для кругового геометрического сечения этот интеграл вычисляется заменой $\cos\theta = u$:

$$\mathcal{A}(0) = ixRK[-2ix(n-1)], \quad (3.43)$$

где

$$K(y) = \int_0^1 du u (1 - e^{-yu}) = \frac{1}{2} + y^{-1} e^{-y} + y^{-2} (e^{-y} - 1)$$

и

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 4 \operatorname{Re} K[-2ix(n-1)] \pi R^2. \quad (3.44)$$

Для действительных n формула (3.44) принимает вид

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 2(1 - \rho^{-1} \sin 2\rho + \rho^{-2} \sin^2 \rho) \pi R^2, \quad (3.45)$$

где

$$\rho = x(n-1). \quad (3.46)$$

Зависимость σ от ρ показана на фиг. 3.4; физическая причина появления максимумов и минимумов заключается в интерференции преломленных и дифрагированных волн.

Если $\rho \ll 1$, то в пределе больших x формула (3.45) переходит в соответствующее выражение теории Релея — Ганса для $\mu = 1$ [см. (3.23)]. Наоборот, если $\rho \gg 1$, то

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 2\pi R^2. \quad (3.47)$$

Таким образом, сфера большого радиуса имеет сечение рассеяния, равное удвоенной площади ее геометрического поперечного сечения. Это явление известно под названием *парадокса экстинкции*. Следует помнить, однако, что для его наблюдения нужно находиться вне области резкой тени.

Остановимся на частотной независимости предельного результата (3.47). Из формулы (3.47) вытекает, что в физически реализующихся случаях (напри-

мер, при прохождении сквозь реальный туман, состоящий из больших капель) инфракрасный свет проходит несколько не лучше видимого света.

Если n комплексно, то осцилляции на фиг. 3.4 сглаживаются. При помощи рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при выводе формулы (3.41), можно получить выражение для сечения поглощения

$$\sigma_{\text{погл}} \approx \int dS (1 - e^{-4x \operatorname{Im} n \cos \gamma}), \quad (3.48)$$

где интегрирование производится по геометрическому поперечному сечению рассеивателя. Для кругового поперечного сечения это дает

$$\sigma_{\text{погл}} \approx 2K (4x \operatorname{Im} n) \pi R^2. \quad (3.49)$$

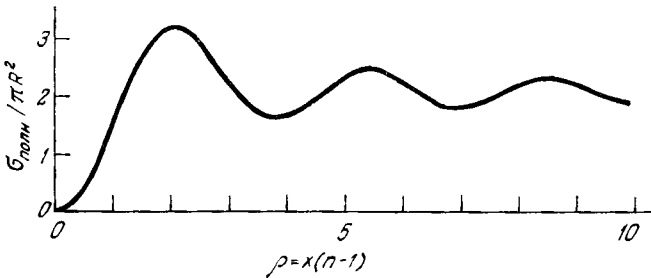
При малых $x \operatorname{Im} n$ последнее выражение принимает вид

$$\sigma_{\text{погл}} \approx \frac{8}{3} x \operatorname{Im} n \pi R^2, \quad (3.50)$$

поскольку

$$K(y) = \frac{1}{3} y - \frac{1}{8} y^2 + \dots$$

В этом случае полное сечение полностью обусловлено поглощением, а предел формулы (3.44) при $x|n-1| \ll 1$ совпадает с (3.50). Чтобы вычислить полное



Ф и г. 3.4. Зависимость полного сечения от ρ согласно формуле (3.45) [857].

сечение рассеяния, нужно удержать следующий член в разложении K . Если из полного сечения вычесть сечение поглощения, то получим формулу

$$\sigma_{\text{расс}} \approx 2x^2 |n-1|^2 \pi R^2, \quad (3.51)$$

которая опять-таки согласуется с соответствующим выражением теории Релея — Ганса.

Для случая $x \operatorname{Im} n \gg 1$ получаем просто

$$\sigma_{\text{погл}} \approx \pi R^2 \quad (3.52)$$

и, следовательно (при $x|n-1| \gg 1$),

$$\sigma_{\text{расс}} = \sigma_{\text{полн}} - \sigma_{\text{погл}} \approx \pi R^2. \quad (3.53)$$

Это означает, что

$$\text{Альбедо} \equiv \frac{\sigma_{\text{расс}}}{\sigma_{\text{полн}}} = \frac{1}{2}. \quad (3.54)$$

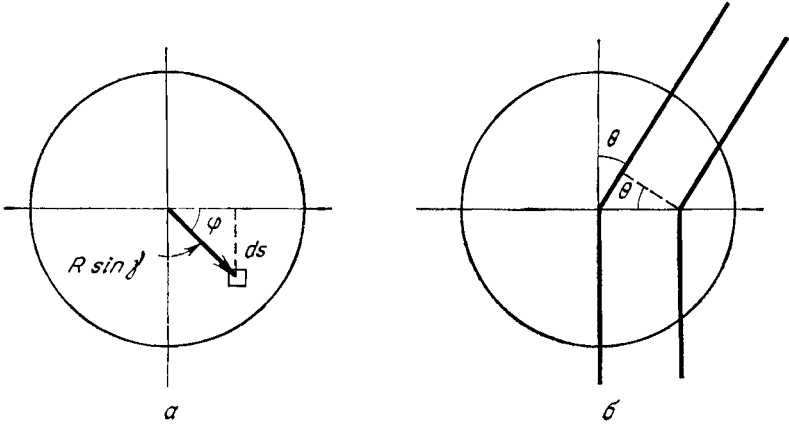
Тот факт, что сечение поглощения равно площади геометрического сечения, означает, что такой рассеиватель при

$$x|n-1| \gg 1, \quad x \operatorname{Im} n \gg 1 \quad \text{и} \quad |n-1| \ll 1$$

представляет собой *черное тело*. Чтобы можно было говорить о потоке излучения как о геометрическом луче, необходимо выполнение условия $x \gg 1$; для полного отсутствия отражения нужно, чтобы $|n - 1| \ll 1$, а для полного поглощения излучения, — чтобы $x \operatorname{Im} n \gg 1$. Таким образом, это единственное реальное черное тело.

2. Рассеяние на малые углы

Рассеяние на малые углы при $x \gg 1$ и $|n - 1| \ll 1$ рассматривается почти так же, как и рассеяние в направлении вперед, т. е. путем суммирования рассеяний на бесконечно малых дисках. Единственное отличие от (3.41) состоит в том, что в этом случае, как и в теории Релея — Ганса, появляется



Фиг. 3.5. *a* — вид в направлении падения пучка; *b* — вид в плоскости рассеяния.

дополнительный фазовый множитель $e^{i\delta}$, учитывающий различие длин оптических путей для лучей, рассеянных дисками в различных точках. Так как $|n - 1| \ll 1$, то при малых углах θ эту разность фаз можно найти согласно фиг. 3.5:

$$\delta = -k\theta R \sin \gamma \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}(\theta) \approx \frac{k}{2\pi i} \int dS (1 - e^{2ix(n-1)\cos\gamma}) e^{-ix\theta \sin\gamma \cos\varphi}, \quad (3.55)$$

где интеграл берется по поперечному сечению сферы. Интеграл по φ есть функция Бесселя

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{iz \cos \varphi},$$

и окончательно

$$\mathcal{A}(\theta) = ixRA [2x(n-1), x\theta], \quad (3.56)$$

где функция A определяется формулой

$$A(\rho, z) \equiv \int_0^{1/2\pi} d\gamma \sin \gamma \cos \gamma (1 - e^{i\rho \cos \gamma}) J_0(z \sin \gamma). \quad (3.57)$$

Интеграл (3.57) представляет собой интеграл Сонина. Мнимую часть его (при действительных n) можно проинтегрировать:

$$\operatorname{Im} A = \frac{\rho}{\rho^2 + z^2} u_1 [(\rho^2 + z^2)^{1/2}].$$

Действительную часть нужно разлагать в ряд или интегрировать численно. Для ознакомления с подробностями таких вычислений отсылаем читателя к книге Хюльста [857].

Следует отметить, что величина $x^{-1} \mathcal{A}(\theta)$ зависит только от комбинаций $\rho = (n - 1)x$ и $x\theta$, поэтому кривые для сечения рассеяния, соответствующие различным значениям n , имеют одинаковую форму и отличаются только масштабом. Формулу (3.56) можно использовать при действительных или комплексных n , а также когда показатель преломления является тензором. В последнем случае интеграл (3.57) следует вычислять разложением в ряд.

При $\rho \ll 1$ выражение для амплитуды рассеяния совпадает с формулой Релея — Ганса (3.20) (для $\mu = 1$) в пределе малых углов. При $\rho \gg 1$ главным членом в (3.57) является интеграл, соответствующий первому члену из заключенных в круглые скобки в подынтегральном выражении. Этот интеграл можно вычислить, и при

$$x \gg 1, \quad |n - 1| \ll 1, \quad x|n - 1| \gg 1$$

получаем

$$\mathcal{A}(\theta) \approx \frac{iR J_1(x\theta)}{\theta}. \quad (3.58)$$

Это амплитуда рассеяния на малые углы для дифракции Фраунгофера. Она имеет характерные нули и максимумы, положение которых совпадает с нулями и максимумами функции Бесселя J_1 . Более общий результат (3.56) отличается от результатов, получающихся при дифракции Фраунгофера; Хюльст назвал его *аномальной дифракцией*.

§ 5. СФЕРЫ БОЛЬШОГО РАДИУСА (ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ)

Вернемся теперь к точному решению (2.127), полученному Ми, и перейдем к предельному случаю *геометрической оптики*, т. е. положим

$$x \gg 1.$$

Для данного рассеивателя этот предельный случай соответствует высоким частотам или малым длинам волн. Рассматриваемый предел эквивалентен ВКБ-приближению в квантовой механике (гл. 18). В электромагнитной теории этот случай играет даже более важную роль, чем в квантовой механике, так как здесь аналогом потенциала, возникающего в квантовой механике, является величина $k^2(n^2 - 1)$, которая с ростом k^2 стремится к бесконечности. Вследствие этого при $k \rightarrow \infty$ сдвиги фаз α_J и β_J не стремятся к нулю и в пределе больших энергий борновское приближение не дает точного решения.

Выражаясь математическим языком, специальные методы, используемые в этой области, и получаемые результаты основаны на том свойстве функций Бесселя, что они принимают очень малые значения, когда их порядок значительно превышает аргумент. То, что это действительно так, легко видеть из рассмотрения интеграла Бесселя:

$$J_\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta e^{i(\lambda\theta - z \sin \theta)}.$$

При больших λ подынтегральная функция быстро осциллирует и ее среднее значение мало всюду, кроме тех точек, в которых фаза стационарна. Это означает, что при больших λ наибольший вклад в интеграл дает окрестность точки, в которой

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{z},$$

и если $\lambda/z \gg 1$, то интеграл вообще мал. Чем больше аргумент z , тем более резко происходит уменьшение интеграла, когда λ становится больше z . Наоборот, если $z \ll \lambda$, то хорошее приближение дает первый член разложения вблизи $z = 0$; приближенное выражение для функций Риккати — Бесселя в этом случае определяется формулой (2.64). Это означает, что функции Бесселя имеют заметную величину только вблизи $z \approx \lambda$.

Из указанного свойства функции Бесселя следует, что тангенсы сдвигов фаз α_J и β_J [см. (2.127)] пренебрежимо малы как при $J \gg x$, так и при $x \gg J$, причем чем больше x , тем резче происходит уменьшение их величины как функции J . Если $x \gg 1$, то тангенсы сдвигов фаз пренебрежимо малы уже при $J + 1/2 > x$.

Такое резкое обрезание при $J + 1/2 > x$ физически можно объяснить с помощью принципа оптической локализации, который, грубо говоря, утверждает, что член порядка J в разложении по парциальным волнам соответствует «лучу», проходящему от рассеивателя на расстоянии $(J + 1/2)/k$. Это аналог хорошо известного в квантовой механике факта, согласно которому парциальная волна с угловым моментом J соответствует частице, прицельный параметр которой равен $(J + 1/2)/k$, и чем больше k , тем более правильно это соответствие. С учетом сказанного можно пренебречь членами с такими значениями J , для которых $(J + 1/2)/k > R$, так как соответствующие лучи никогда не попадут на сферу радиусом R . Это в точности соответствует обрезанию, получаемому чисто математическим путем.

Если $x \gg 1$, то можно оборвать суммы (2.131) и (2.132) на членах с $J + 1/2 \approx x$. В оставшихся конечных суммах рассмотрим сначала члены, которые отвечают единице в круглых скобках в (2.132), т. е. члены, не зависящие от природы рассеивателя, а затем отдельно рассмотрим члены, содержащие множители $e^{2i\alpha_J}$ и $e^{2i\beta_J}$.

1. Дифракция Фраунгофера

Член, отвечающий единице, имеет острый максимум вблизи угла, соответствующего рассеянию вперед. Если бы не было обрезания при $J + 1/2 \approx x$, то он переходил бы в δ -функцию в точке $\theta = 0$, поэтому при $x \gg 1$ им следует пренебречь всюду, кроме области малых θ . Следовательно, полиномы Лежандра можно заменить их асимптотическими выражениями для больших J :

$$P_J(\cos \theta) \approx (\cos \theta)^J J_0 \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right] \approx (\cos \theta)^J J_0 \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \theta \right], \quad (3.59)$$

которые являются достаточно хорошими при $\sin \theta \ll 1/J$. Из этого выражения и из рекуррентных соотношений следует, что приближенно функции π_J и τ_J можно представить в виде

$$\begin{aligned} \pi_J &\approx \frac{1}{2} J_0(z) + \frac{1}{2} J_2(z), \\ \tau_J &\approx \frac{1}{2} J_0(z) - \frac{1}{2} J_2(z). \end{aligned} \quad z = \left(J + \frac{1}{2} \right) \theta, \quad (3.60)$$

Итак, достаточно хорошей аппроксимацией этой части амплитуды рассеяния будет выражение

$$A^{\text{Фр}} \equiv A_{\parallel}^{\text{Фр}} = A_{\perp}^{\text{Фр}} \approx -\frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^x (2J+1) J_0 \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \theta \right].$$

При больших x эта сумма содержит большое число членов, которые мало отличаются друг от друга, поэтому с достаточно хорошей точностью ее можно заменить интегралом

$$-2ikA^{\text{Фр}} \approx \frac{1}{2} \int_0^{2x} dy y J_0 \left(\frac{1}{2} \theta y \right).$$

Последний вычисляется так:

$$A^{\text{Фр}}(\theta) \approx \frac{iR J_1(x_0)}{\theta}. \quad (3.61)$$

Это не что иное, как известное выражение для амплитуды рассеяния на малые углы при дифракции Фраунгофера, совпадающее с полученным нами ранее (3.58). Область справедливости формулы (3.61) ограничена углами $\theta \ll x^{-1}$, так как только при таких углах справедливо приближение (3.59).

2. Рассеяние вбок; действительный показатель преломления

Рассмотрим теперь члены, содержащие сдвиги фаз. Так как при этом необходимо использовать более точные приближения, то удобно ввести параметр γ :

$$\sin \gamma \equiv \left(J + \frac{1}{2} \right) x^{-1}, \quad (3.62)$$

физический смысл которого для «локализованного» луча виден из фиг. 3.3. Это угол между лучом и нормалью к поверхности рассеивающей сферы. Аналогично угол γ' , определяемый формулой

$$\sin \gamma' = \left(J + \frac{1}{2} \right) (nx)^{-1} = n^{-1} \sin \gamma, \quad (3.63)$$

представляет собой угол преломления падающего луча. Здесь предполагается что показатель преломления n действителен.

Асимптотическое выражение для функции Ганкеля высокого порядка имеет вид

$$H_{J+1/2}^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ctg} \gamma e^{i(\varphi + \pi/6)} H_{1/3}^{(1)}(Z), \quad (3.64)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= x \cos \gamma - Z - \left(J + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \pi - \gamma \right), \\ Z &= \frac{1}{3} \left(J + \frac{1}{2} \right) \text{ctg}^3 \gamma = \frac{x^3 \cos^3 \gamma}{3 \left(J + \frac{1}{2} \right)^2}. \end{aligned}$$

Если аргумент x очень велик, то краевые эффекты, обусловленные лучами, скользящими по сфере, относительно малы. Они будут рассмотрены отдельно в § 8. Здесь не будут рассматриваться значения γ , близкие к 90° , а Z можно считать большим. Поэтому функцию $H_{1/3}^{(1)}$ можно заменить ее асимптотическим представлением для больших значений аргумента:

$$H_{J+1/2}^{(1)}(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x \cos \gamma} \right)^{1/2} e^{i(\Gamma x - 1/4\pi)}, \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \omega_J^{(+)}(x) &\approx (-1)^J (\cos \gamma)^{-1/2} e^{i(\Gamma x + 1/4\pi)}, \\ v_J(x) &\approx -(\cos \gamma)^{-1/2} \cos \left(\Gamma x + \frac{1}{4} \pi \right), \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$u_J(x) \approx (\cos \gamma)^{-1/2} \sin \left(\Gamma x + \frac{1}{4} \pi \right),$$

где

$$\Gamma = \cos \gamma + \left(\gamma - \frac{1}{2} \pi \right) \sin \gamma. \quad (3.67)$$

Аналогичным образом можно поступить с функциями, зависящими от аргумента $nx = \bar{X}$.

Подставляя полученные выражения в (2.127), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_J &\approx \frac{\rho_1 \cos(\Gamma x + \Gamma' \bar{X}) - \sin(\Gamma x - \Gamma' \bar{X})}{\rho_1 \sin(\Gamma x + \Gamma' \bar{X}) + \cos(\Gamma x - \Gamma' \bar{X})}, \\ \operatorname{tg} \beta_J &\approx \frac{\rho_2 \cos(\Gamma x + \Gamma' \bar{X}) - \sin(\Gamma x - \Gamma' \bar{X})}{\rho_2 \sin(\Gamma x + \Gamma' \bar{X}) + \cos(\Gamma x - \Gamma' \bar{X})}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

где

$$\Gamma' = \cos \gamma' + \left(\gamma' - \frac{1}{2} \pi \right) \sin \gamma', \quad (3.67a)$$

а ρ_1 и ρ_2 — коэффициенты отражения Френеля

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{n \cos \gamma - \mu \cos \gamma'}{n \cos \gamma + \mu \cos \gamma'}, \\ \rho_2 &= \frac{\mu \cos \gamma - n \cos \gamma'}{\mu \cos \gamma + n \cos \gamma'}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Следовательно, элементы \mathcal{S} -матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} e^{2i\alpha_J} &\approx e^{-2i(\Gamma x - \Gamma' \bar{X})} \frac{1 + i\rho_1 e^{-2i\Gamma' \bar{X}}}{1 - i\rho_1 e^{2i\Gamma' \bar{X}}}, \\ e^{2i\beta_J} &\approx e^{-2i(\Gamma x - \Gamma' \bar{X})} \frac{1 + i\rho_2 e^{-2i\Gamma' \bar{X}}}{1 - i\rho_2 e^{2i\Gamma' \bar{X}}}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Следующим шагом является разложение этих выражений в ряды по степеням $\rho_1 e^{2i\Gamma' \bar{X}}$ и $\rho_2 e^{2i\Gamma' \bar{X}}$:

$$\begin{aligned} e^{2i\alpha_J} &= ie^{-2i\Gamma' \bar{X}} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p^{(1)} (-ie^{2i\Gamma' \bar{X}})^p, \\ e^{2i\beta_J} &= ie^{-2i\Gamma' \bar{X}} \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon_p^{(2)} (-ie^{2i\Gamma' \bar{X}})^p, \end{aligned} \quad (3.71)$$

где появляющиеся коэффициенты ε_p равны

$$\varepsilon_p^{(1,2)} = \begin{cases} \rho_{1,2}, & p=0 \\ (1 - \rho_{1,2}^2) (-\rho_{1,2})^{p-1}, & p=1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.72)$$

Далее, полиномы Лежандра можно приближенно записать в виде

$$P_J(\cos \theta) \approx \left[\frac{2}{\pi(J + 1/2) \sin \theta} \right]^{1/2} \cos \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{1}{4} \pi \right]. \quad (3.73)$$

Приближение является достаточно хорошим для $J \gg 1$ и для не слишком больших и не слишком малых углов: $\sin \theta \gtrsim 1/J$. Для очень малых углов все в основном определяется рассмотренной выше дифракцией Фраунгофера; углы, близкие к π , будут рассмотрены в § 7. Замена P_J на (3.73) дает

$$\begin{aligned} \pi_J &\approx \frac{1}{J+1} \left(\frac{2}{\pi J \sin^3 \theta} \right)^{1/2} \sin \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{1}{4} \pi \right], \\ \tau_J &\approx \frac{1}{J+1} \left(\frac{2J}{\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \cos \left[\left(J + \frac{1}{2} \right) \theta - \frac{1}{4} \pi \right] = \\ &= \frac{1}{J+1} \left(\frac{J}{2\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \sum_{q=-1, 1} e^{iq \left[(J+1/2) \theta - 1/4\pi \right]}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Так как малые J дают малый вклад в сумму, то для всех J , дающих существенный вклад, $|\tau_J| \gg |\pi_J|$ и в (2.132) следует оставить только τ_J . Вследствие этого амплитуда $A_{||}^L$ содержит только фазу α_J , а A_{\perp}^L — только фазу β_J . Во всех других отношениях рассматриваемые ряды одинаковы и можно использовать единые символы A и ε_p . При рассмотрении конкретных амплитуд следует использовать соответствующие индексы: $\varepsilon_p^{(1)}$ для $A_{||}^L$ и $\varepsilon_p^{(2)}$ для A_{\perp}^L . Таким образом, выражение для амплитуды можно записать в виде

$$A(\theta) \approx \frac{1}{k} \left(\frac{x}{2\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{J=1}^x \sum_{q=-1, 1} \varepsilon_p (\sin \gamma)^{1/2} e^{i\xi},$$

$$\xi = 2x (np\Gamma' - \Gamma) - \frac{1}{2} \pi p - \frac{1}{4} \pi q + q\theta x \sin \gamma + 2\pi m \left(x \sin \gamma - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 2x \left\{ np \cos \gamma' - \cos \gamma + \left[\frac{1}{2} \pi (1 - p + 2m) - \gamma + p\gamma' + \frac{1}{2} q\theta \right] \sin \gamma \right\} -$$

$$- \frac{1}{2} \pi \left(p + \frac{1}{2} q + 2m \right). \quad (3.75)$$

Последний член в первом выражении для ξ возникает из-за того, что к ξ , не меняя результата, можно добавить величину, кратную $2\pi J = 2\pi (x \sin \gamma - 1/2)$; под m подразумевается произвольное целое число.

Теперь суммирование по J можно заменить интегрированием, так как в сумме имеется относительно большое число медленно изменяющихся членов. В качестве переменной интегрирования удобно выбрать γ , так чтобы

$$1 \rightarrow dJ = x d \sin \gamma.$$

Имеем

$$A(\theta) \approx \frac{1}{k} \left(\frac{x}{2\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=-1, 1} x \int_0^1 d \sin \gamma (\sin \gamma)^{1/2} \varepsilon_p e^{i\xi}. \quad (3.76)$$

Интеграл теперь вычисляется методом стационарной фазы. Чем больше x , тем быстрее осциллирует подынтегральная функция, и существенный вклад в интеграл дают лишь стационарные точки для величины ξ в функции γ . Это означает, что при $x \gg 1$ наибольший вклад в интеграл дают значения γ в окрестности точки γ_0 , в которой

$$\frac{d\xi}{d\gamma} = 2x \left[\frac{1}{2} \pi (1 - p + 2m) - \gamma + p\gamma' + \frac{1}{2} q\theta \right] \cos \gamma = 0,$$

т. е.

$$\Theta + q\theta - 2\pi m = 0, \quad (3.77)$$

где

$$\Theta = 2p \left(\gamma'_0 - \frac{1}{2} \pi \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \pi - \gamma_0 \right). \quad (3.78)$$

Значение ξ в данной точке равно

$$\xi_0 = 2x (np \cos \gamma'_0 - \cos \gamma_0) - \frac{1}{2} \pi \left(p + \frac{1}{2} q \right) - \pi m.$$

В окрестности этой точки можно произвести разложение

$$\xi = \xi_0 + a (J - J_0)^2 + \dots,$$

где γ_0 и J_0 связаны по формуле (3.62), а величина a равна

$$a = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial J^2} \Big|_{J=J_0} = \frac{1}{2x \cos \gamma_0} \frac{d\Theta}{d\gamma_0}. \quad (3.79)$$

Итак, получаем

$$A(\theta) \approx \frac{1}{k} \left(\frac{x \sin \gamma_0}{2\pi \sin \theta} \right)^{1/2} \sum_{p, q} \varepsilon_p e^{i\zeta_0} \int dJ e^{ia(J-J_0)^2}.$$

При больших x эта подынтегральная функция чрезвычайно быстро осциллирует на концах интервала $J=0$ и $J=x$, по которому производится интегрирование. Поэтому с очень большой степенью точности интегрирование можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$, после чего интеграл вычисляется точно.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dJ e^{ia(J-J_0)^2} = \left(\frac{|a|}{\pi} \right)^{1/2} e^{i\frac{1}{2}\pi \operatorname{sgn} a}$$

В результате получаем (для простоты вместо γ_0 будем писать γ)

$$A(\theta) \approx \sum_{p, q} R \varepsilon_p \left(\frac{\sin 2\gamma}{2 \sin \theta |d\Theta/d\gamma|} \right)^{1/2} e^{i\pi(1/4s - 1/2p - 1/4q - m) \cdot i\delta}, \quad (3.80)$$

где

$$s \equiv \operatorname{sgn} \frac{d\Theta}{d\gamma}, \quad \delta \equiv 2x(pn \cos \gamma' - \cos \gamma). \quad (3.81)$$

Формула (3.80) по существу совпадает с результатом геометрической оптики. В области геометрической оптики каждый падающий луч частично преломляется и таким образом он испытывает бесконечное число отражений внутри сферы. При каждом отражении часть энергии выходит за пределы сферы. Если p есть число внутренних отражений луча, который вначале составлял угол γ с нормалью к поверхности, то ε_p — соответствующий весовой множитель; оба множителя $(1 - \rho^2)^{1/2}$ обусловлены двумя преломлениями, которые испытывает луч прежде, чем выйти из сферы, а каждый множитель $-\rho$ возникает вследствие внутреннего отражения. Угол отклонения луча после прохождения сквозь сферу без единого внутреннего отражения равен $\pi - 2\gamma$; если имело место одно внутреннее отражение, то угол отклонения равен $2(\gamma - \gamma')$ и т. д. Таким образом, угол Θ , определяемый формулой (3.78), как раз равен углу отклонения луча. Он может иметь любую величину. Угол θ связан с углом Θ соотношением (3.77) или, так как $q = \pm 1$, соотношением

$$\theta = -q\Theta + 2\pi m q.$$

Целое число m нужно выбрать так, чтобы угол θ лежал между 0 и π . Если падающий пучок является однородным, то для $p-1$ внутренних отражений интенсивность излучения, уходящего в элемент телесного угла $d\Omega$, равна

$$I_{\text{пад}} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi = I_{\text{пад}} \varepsilon_p^2 (R \sin \gamma d\varphi) (R d \sin \gamma)$$

и, следовательно, вклад от $p-1$ внутренних отражений в дифференциальное сечение равен

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_p = \varepsilon_p^2 R \frac{\sin 2\gamma}{2 \sin \theta |d\Theta/d\gamma|},$$

где в качестве ε_p в соответствии с направлением поляризации нужно взять $\varepsilon_p^{(1)}$ или $\varepsilon_p^{(2)}$. Этот результат геометрической оптики в точности совпадает с вкладом в сечение от отдельного члена суммы (3.80), соответствующего данному p .

Следует, однако, помнить, что лучи, претерпевшие различное число внутренних отражений, являются когерентными. Поэтому для них нужно складывать амплитуды, а не сечения. По сравнению с лучом, который проходит в вакууме путь длиной $2R \cos \gamma$, луч, отразившийся $p-1$ раз, проходит путь, оптическая длина которого равна $2Rpn \cos \gamma'$. Поэтому возникает сдвиг фаз δ , определяемый формулой (3.81). Остальной сдвиг фаз в (3.80) обусловлен прохождением лучей по фокальным линиям. Таким образом, выражение (3.80)

можно полностью объяснить на основе геометрической оптики с помощью простых оценок для сдвигов фаз. Следовательно, его вывод иллюстрирует процедуру перехода от физической оптики к геометрической; это точный аналог перехода от квантовой механики к классической в рамках ВКБ-приближения. Выражение (3.80) для амплитуды рассеяния является достаточно хорошим приближением, если радиус рассеивателя примерно в 3 раза или более превышает длину волны, т. е. фактически при $x \lesssim 15$, кроме особых случаев, которые будут рассмотрены ниже, в § 6—8.

3. Большие сферы малой оптической плотности

Теперь рассмотрим формулу (3.80) для другого частного случая, когда

$$|n-1| \ll 1 \quad \text{и} \quad |\mu-1| \ll 1.$$

При этом коэффициенты отражения (3.69) малы и, согласно (3.72), величинами ϵ_p можно пренебречь при всех p , кроме $p=1$,

$$\epsilon_1^{(1)} \approx \epsilon_1^{(2)} \approx 1.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \gamma' &\approx \gamma - (n-1) \operatorname{tg} \gamma, \\ \Theta &= 2(\gamma' - \gamma) = 2(n-1) \operatorname{tg} \gamma, \\ \frac{d\Theta}{d\gamma} &= -\frac{2(n-1)}{\cos^2 \gamma} \end{aligned}$$

и $\theta = -\Theta$. Поэтому $q = +1$, $m = 0$, $s = -1$ (в случае когда среда рассеивателя является более диффузной, чем окружающая среда, $s = +1$) и

$$\delta \approx \frac{2x(n-1)}{\cos \gamma}.$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^L(\theta) &\approx A_{\perp}^L(\theta) \approx -R \frac{\cos^2 \gamma}{2(n-1)} e^{2ix(n-1) \sec \gamma} = \\ &= -R \frac{2(n-1)}{\theta^2 + 4(n-1)^2} e^{ix[\theta^2 + 4(n-1)^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx R^2 \frac{4(n-1)^2}{[\theta^2 + 4(n-1)^2]^2}. \quad (3.82)$$

Следует помнить, что для справедливости формулы (3.80) углы θ не должны быть слишком малыми, поэтому выражение (3.82) нельзя использовать для рассеяния вперед. В той области, где эта формула применима, дифференциальное сечение имеет пик для рассеяния вперед и значительно меньше, как и следовало ожидать, сечения (3.61).

4. Большие оптически плотные сферы

Если $n \gg 1$, то $\rho_1 \approx 1$, $\rho_2 \approx -1$ и всеми ϵ_p можно пренебречь, за исключением $\epsilon_0^{(1)} = 1$, $\epsilon_0^{(2)} = -1$, и тогда

$$\begin{aligned} \delta &\approx -2x \cos \gamma, & \Theta &\approx \pi - 2\gamma, & \frac{d\Theta}{d\gamma} &= -2, \\ \theta &= \Theta, & q &= -1, & m &= 0, & s &= -1. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} A_{\parallel}^L &\approx A_{\perp}^L \approx \frac{1}{2} R e^{-2ix \sin^{1/2} \theta}, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &\approx \frac{1}{4} R^2. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Таким образом, если отвлечься от дифракции в направлении вперед, то рассеяние на большой идеально отражающей сфере является изотропным.

5. Комплексный показатель преломления

Если n комплексно, то все сказанное в гл. 3, § 5, п. 2 применимо, как и прежде, до момента вычисления амплитуды (3.76). Теперь проведем интегрирование по методу перевала (см. приложение). Деформируем контур, соединяющий точки $\sin \gamma = 0$ и $\sin \gamma = 1$, так, чтобы он проходил через комплексную точку $\sin \gamma_0$, соответствующую решению уравнения (3.77) с действительным Θ , определяемым формулой (3.78). Согласно (3.63), это означает, что

$$\operatorname{Im} \gamma_0 = \rho \operatorname{Im} \gamma'_0 = \rho \operatorname{Im} \arcsin (n^{-1} \sin \gamma_0)$$

и при $n_2 \equiv \operatorname{Im} n \ll \operatorname{Re} n \equiv n_1$

$$\operatorname{Im} \gamma_0 \approx \frac{\rho n_2 \sin \gamma_0}{n_1 (\rho \cos \gamma_0 - n_1 \cos \gamma'_0)},$$

где γ_0 в правой части — действительная величина, получающаяся из (3.77) при $n_2 = 0$. Имеем

$$\operatorname{Im} \delta = \operatorname{Im} \xi_0 \approx 2x n_2 \rho \cos \gamma'_0, \quad (3.84)$$

и от мнимой части квадратного корня в (3.80) появляется дополнительный фазовый множитель $e^{i\varphi}$, где

$$\varphi = \frac{n_2}{n_1} \frac{2 + d\Theta/d\gamma}{|d\Theta/d\gamma|^2} \left[2(n-1) + n \frac{d\Theta}{d\gamma} + \frac{n^2 (n^2 - 1) \sin^2 \gamma}{\rho^2 \cos^4 \gamma} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d\Theta}{d\gamma} \right)^2 \right]. \quad (3.85)$$

При малых n_2 величина $A(\theta)$ уменьшается в $(1 - \operatorname{Im} \delta)$ раз, а ее фаза изменится на φ .

Более интересный результат для комплексного n получается при учете скользящих лучей. Этот случай будет рассмотрен в § 8.

§ 6. РАДУЖНОЕ РАССЕЯНИЕ

В течение многих веков радуга восхищала людей:

Первым ярко вспыхнул Красный,
Вслед — Оранжевого луч,
Чудный Желтый жгучий, ясный
Золотится среди туч.

Словно раннею весной
Молодых побегов цвет,
Луч Зеленый надо мною
Разливает мягкий свет.

Следом чистотой сияет
Невесомый Голубой,
Тот, что неба наполняет
Свод осеннею порой.

Синий луч печальный, тонкий
Освещает все вокруг,
Как морозный вечер звонкий,
Землю накрывает вдруг.

Луч последний тускло тлеет,
Умирая в вышине,
Фиолетовый не греет,
Не смеется в тишине.

И когда гроза смолкает
Над просторами лугов,
Всех цветов букет сверкает
Из-под темных облаков.

Мириады искр струятся
Из чудесного венца.
Исчезают, вновь рождаются,
И не видно им конца.

Вытканная родниковой
Чистой, свежою водой —
Красоты источник новой,
Вечной, робкой, молодой.

Она приводила в смятение разум:

Даже у радуги тело есть
Из струй дрожащих,
которых не счесть,
Из брызг,
искрящихся дивным огнем,
Под солнцем весенним днем.
Но невозможно ее осознать
И даже разумом понять.

Это красочное явление имеет исчерпывающее объяснение.

Когда угол отклонения является стационарным как функция угла γ между лучом, падающим на сферу, и нормалью к ее поверхности, рассеянное излучение должно быть особенно интенсивным. Если солнечный свет рассеивается капельками воды, большими по сравнению с длинами волн видимого света, то возникает радужное рассеяние. Угол рассеяния, при котором угол отклонения стационарен:

$$\frac{d\Theta}{d\gamma} = 0, \quad (3.86)$$

называют *углом радужного рассеяния*.

Из формулы (3.80) следует, что в предельном случае $x \gg 1$, амплитуда рассеяния при выполнении (3.86) действительно обращается в бесконечность. Используя (3.78), а также закон Снеллиуса (3.63), получаем, что величина

$$\cos \gamma_R = \left(\frac{n^2 - 1}{p^2 - 1} \right)^{1/2} \quad (3.87)$$

есть косинус угла между падающим лучом и нормалью к поверхности сферы, при котором для $(p - 1)$ -кратного внутреннего отражения возникает радужное рассеяние.

Чтобы найти амплитуду вблизи угла радужного рассеяния, нужно вернуться к выводу формулы (3.80). Вместо разложения, использованного при вычислении интеграла (3.76), теперь имеем

$$\xi = \xi_0 + (J - J_R) \frac{\partial \xi}{\partial J} + \frac{1}{6} (J - J_R)^3 \frac{\partial^3 \xi}{\partial J^3} + \dots,$$

где производные вычислены в точке $J = J_R$, т. е. при таком значении J , которое соответствует величине γ_R и определяется соотношением (3.62). Член со второй производной исчезает, так как из (3.86) следует, что при $J = J_R$ $\partial^2 \xi / \partial J^2 = 0$. Поэтому интеграл гауссовского вида, который приводит к формуле (3.80), можно заменить интегралом

$$\int dJ e^{ib(J - J_R) + 1/3ic(J - J_R)^3},$$

в котором постоянные b и c легко вычисляются:

$$b = \Theta_R + q\theta - 2\pi m,$$

$$c = -x^{-2} \frac{(p^2 - 1)^2}{p^2} \frac{(p^2 - n^2)^{1/2}}{(n^2 - 1)^{3/2}}.$$

Если интегрирование распространить до $\pm \infty$, то получим

$$2\pi c^{-1/3} \text{Ai}(bc^{-1/3}),$$

где $\text{Ai}(z)$ — интеграл Эйри:

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du e^{i(zu + \frac{1}{3}u^3)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \cos\left(zu + \frac{1}{3}u^3\right). \quad (3.88)$$

Расширение пределов интегрирования до $\pm \infty$ оправдано тем, что при больших x значение J_R велико и в любом случае главный вклад в интеграл дает окрестность точки $J = J_R$. Окончательное выражение для амплитуды имеет вид

$$A_p(\theta) \approx -R\varepsilon_p \left(\frac{2\pi}{\sin\theta_R}\right)^{1/2} x^{1/6} \frac{p^{2/3}}{(p^2-1)^{11/12}} (p^2-n^2)^{1/12} (n^2-1)^{1/2} \times \\ \times e^{-i\pi(1/2p+1/4q+m)+i\delta} \text{Ai}(z), \quad (3.89)$$

где

$$\delta = 2x[(p^2-1)(n^2-1)]^{1/2}, \\ z = q(\theta_R - \theta) x^{2/3} \frac{p^{2/3}}{(p^2-1)^{2/3}} \frac{(n^2-1)^{1/2}}{(p^2-n^2)^{1/6}}. \quad (3.90)$$

Угол радужного рассеяния θ_R определяется формулой

$$\theta_R = (2\pi m - \Theta_R) q,$$

где q и m выбираются так, чтобы $0 \leq \theta_R \leq \pi$, а Θ_R вычисляется путем подстановки (3.87) в (3.78). Коэффициенты ε_p можно найти по формуле (3.72) с использованием коэффициентов отражения

$$\rho_1 = \frac{n^2-p}{n^2+p}, \quad \rho_2 = \frac{1-p}{1+p} \quad (3.91)$$

(для $\mu = 1$). Это дает

$$\varepsilon_p^{(1)} = \frac{4pn^2}{(p+n^2)^2} \left(\frac{p-n^2}{p+n^2}\right)^{p-1}, \\ \varepsilon_p^{(2)} = \frac{4p}{(p+1)^2} \left(\frac{p-1}{p+1}\right)^{p-1}, \quad (3.92)$$

где $p \geq 2$.

Интеграл Эйри является регулярным решением дифференциального уравнения

$$\text{Ai}''(z) = z \text{Ai}(z) \quad (3.93)$$

и протабулирован. График интеграла Эйри приведен на фиг. 3.6; его можно выразить через функции Бесселя

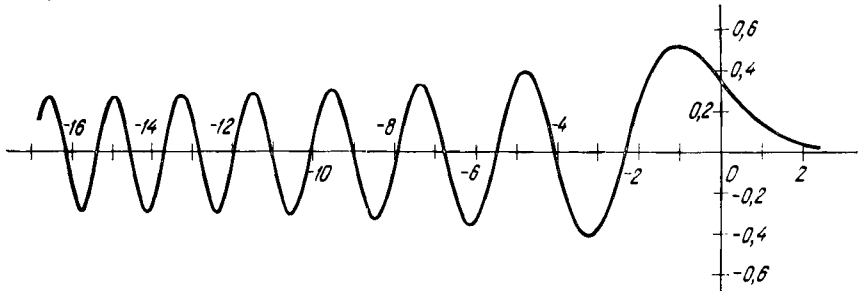
$$\text{Ai}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{3}\right)^{1/2} K_{1/3}\left(\frac{2z^{3/2}}{3}\right), & z > 0, \\ -\frac{1}{3} (-z)^{1/2} \left\{ J_{1/3}\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right] + J_{-1/3}\left[\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right] \right\}, & z < 0. \end{cases} \quad (3.94)$$

Легко установить ряд характерных свойств выражения (3.89). Наибольшее значение амплитуды получается для наименьшего возможного p ; при $n > 1$ наименьшее значение p равно 2. Это основное радужное рассеяние, обусловленное однократным внутренним отражением. Из элементарных геометрических соображений следует, что для такого луча

$$\theta = \pi - 4\gamma' + 2\gamma$$

и поэтому $m = 0$, $q = 1$. Угловое распределение вблизи $\theta = \theta_R$ описывается функцией Эйри (фиг. 3.6). Если $\theta < \theta_R$, то сечение быстро спадает до нуля.

Когда γ приближается к γ_R (сторона безразлична), угол основного радужного рассеяния достигается со стороны *бóльших* углов рассеяния. Следовательно, более яркой является внутренняя сторона радуги. Для лучей, подвергшихся двукратному внутреннему отражению ($p = 3$), $q = -1$. Таким образом, в этом случае имеет место обратная ситуация и яркой является внешняя сторона радуги. Отметим, что происходит сдвиг максимума интенсивности. Максимум расположен не при $\theta = \theta_R$, а при несколько большем угле (при $z = -1,0188$). Вторичные максимумы приводят к появлению «дополнительных радужных полос». Сечение в максимуме пропорционально $x^{1/3}$. Следовательно, это явление будет отчетливо наблюдаться, если рассеиватель весьма велик по сравнению с длиной волны, т. е. $x \gg 2000$.



Ф и г. 3.6. График интеграла Эйри $Ai(x)$.

Взято из книги «The Airy Integral», vol. B, p. B16, New York, 1946.

Угол радужного рассеяния сам по себе не зависит от размеров рассеивателя, но так как максимум интенсивности расположен при $z = -1,0188$, а не при $z = 0$, то имеется небольшая зависимость положения максимума от радиуса. Ширина вторичных максимумов, а также расстояние между ними пропорциональны $x^{-2/3}$. Чем меньше рассеиватель, тем шире максимумы и тем дальше друг от друга они расположены. Далее, для основного радужного рассеяния имеем

$$\frac{\epsilon_p^{(2)}}{\epsilon_p^{(1)}} = \frac{27n^2(2-n^2)}{(2+n^2)^3}.$$

Квадрат этой величины для воды ($n \approx 4/3$) много меньше единицы, поэтому после радужного рассеяния излучение сильно поляризовано.

Для капель воды угол основного радужного рассеяния равен $\theta \approx 138^\circ$. Так как, согласно (3.87), он зависит только от показателя преломления, который в свою очередь несколько изменяется в зависимости от длины волны света, то положение максимума интенсивности также немного зависит от длины волны и происходит хорошо наблюдаемое в радуге разделение цветов. То обстоятельство, что радуга является хорошо наблюдаемым и широко известным оптическим явлением, обусловлено именно малой зависимостью угла, при котором интенсивность имеет максимум, от размеров капли. Если капли становятся слишком малыми, то максимумы становятся широкими и цвета перекрываются. Результатом этого является *белое* радужное рассеяние.

§ 7. ТЕОРИЯ ОРЕОЛА (ГЛОРИИ)

При $x \gg 1$ амплитуда рассеяния (3.80) содержит множитель

$$\left(\frac{\sin 2\gamma}{\sin \theta}\right)^{1/2},$$

который для рассеяния вперед и назад обращается в бесконечность, если только γ не равно 0 или $1/2\pi$. Это означает, что сечения рассеяния вперед и назад

равны бесконечности всякий раз, когда луч, падающий не перпендикулярно и не по касательной к поверхности, может выходить из рассеивателя в прямом или в обратном направлениях. Возникающее явление называется *ореолом*, или *глонией*. В прямом направлении это явление обычно маскируется дифракцией и поэтому его трудно наблюдать. В обратном же направлении наблюдается поразительное явление, возникающее при рассеянии назад солнечного света от облаков, хотя и значительно более редко, чем радуга ¹⁾. Здесь нами будет рассмотрено только рассеяние назад.

Вернемся к рассмотренному в гл. 3, § 5 ряду (2.132) для амплитуды рассеяния, оборванному при $x \gg 1$ на члене с $J \approx x$. Для малых $\theta' = \pi - \theta$ аналогично (3.60) имеем

$$\begin{aligned} \pi_J &\approx \frac{1}{2} (-1)^{J+1} [J_0(z) + J_2(z)], \\ \tau_J &\approx \frac{1}{2} (-1)^J [J_0(z) - J_2(z)], \end{aligned} \quad (3.95)$$

где

$$z = \left(J + \frac{1}{2}\right) \sin \theta \approx \left(J + \frac{1}{2}\right) \theta' = \theta' x \sin \gamma. \quad (3.96)$$

Поскольку члены, соответствующие единицам в скобках ($e^{2i\alpha_J} - 1$) и ($e^{2i\beta_J} - 1$) в (2.132), дают вклад только в рассеяние вперед, то в (2.132) удерживаем только члены, содержащие экспоненциальные множители. В результате получим

$$A_{\parallel}^L \approx \frac{i}{4k} \sum_{J=1}^x (2J+1) (-1)^J [e^{2i\alpha_J} (J_2 - J_0) + e^{2i\beta_J} (J_0 + J_2)].$$

Выражение для A_{\perp}^L получается из приведенного выше заменой α_J на β_J , и наоборот. Подстановка сюда приближенных выражений (3.71) для фазовых множителей дает

$$A_{\perp}^L \approx -\frac{i}{4k} \sum_{J,p} (2J+1) (-1)^J e^{-2i\Gamma x} (-ie^{2i\Gamma^* \bar{x}})^p \times \\ \times [\epsilon_p^{(1)} (J_2 - J_0) + \epsilon_p^{(2)} (J_2 + J_0)].$$

Амплитуда A_{\perp}^L получается заменой $\epsilon_p^{(1)}$ на $\epsilon_p^{(2)}$, и наоборот. Подставляя сюда (3.67) и (3.67а) и заменяя сумму по J интегралом, находим

$$A_{\parallel}^L \approx \frac{i}{4k} \sum_p [(\epsilon_p^{(2)} - \epsilon_p^{(1)}) J_0 + (\epsilon_p^{(2)} + \epsilon_p^{(1)}) J_2] \int dJ (2J+1) e^{i\xi},$$

где ξ определяется формулой (3.75) при $q=0$, а угол Θ заменен на $\Theta + \pi$. Как и в § 5, п. 2, интеграл следует вычислять методом стационарной фазы. Главный вклад в интеграл аналогично (3.77) дает окрестность точки

$$\Theta \approx -(2m+1)\pi, \quad (3.97)$$

где Θ определяется формулой (3.78). Затем разлагаем ξ вблизи точки $J = J_g$, для которой выполняется равенство (3.97), и вычисляем интеграл гауссовского типа так же, как это было сделано при выводе (3.80). В результате получаем

$$A_{\parallel}^L \approx iR \sum_p \left(\frac{\pi x \sin^2 \gamma \cos \gamma}{2 |d\Theta/d\gamma|} \right)^{1/2} e^{i\pi(1/4s - 1/2p - m) + i\delta} \times \\ \times [(\epsilon_p^{(2)} + \epsilon_p^{(1)}) J_2(z) \pm (\epsilon_p^{(2)} - \epsilon_p^{(1)}) J_0(z)]. \quad (3.98)$$

¹⁾ Примером использования явления ореола на практике является применение специальной отражающей краски для дорожных знаков.

Параметры s и δ определяются формулами (3.81), z определяется формулой (3.96), а γ всюду представляет собой угол между падающим лучом, создающим эффект ореола, и нормалью к поверхности рассеивателя, т. е. γ определяется формулой (3.97). Верхний знак в (3.98) относится к $A_{||}^L$, нижний — к A_{\perp}^L .

Из членов ряда по p практически нужно удержать только первый член, для которого возможно обратное рассеяние в случае, когда для падающего луча $\gamma \neq 0$. Максимальное сечение пропорционально x , а угловое распределение определяется обеими функциями Бесселя. Заметим, что сечение рассеяния строго вперед конечно. Так как, согласно (3.96), z пропорционально $x\theta'$, то при $x \gg 1$ максимум расположен в точке, которая очень близка к π . Заметим также, что в каждую амплитуду входят оба коэффициента отражения.

К сожалению, рассмотренная выше простая теория не в состоянии дать количественное объяснение эффекта ореола или эффекта гало, который иногда наблюдается при обратном рассеянии солнечного света от облаков. Для капель воды $n \approx 4/3$ и наименьшее значение p , при котором (3.97) имеет решение, равно 5. Для рассеяния назад необходимо по меньшей мере четырехкратное внутреннее отражение. Но для таких больших значений p сечение уже весьма мало. Поэтому можно думать, что краевые эффекты делают возможным эффект ореола для одного или двух внутренних отражений (см. 18571, раздел 17.42).

§ 8. СКОЛЬЗЯЩИЕ ЛУЧИ (МЕТОД ВАТСОНА)

Если имеется значительное поглощение энергии в рассеивателе, то при $kr \gg 1$ главный вклад в рассеяние будут давать лучи, которые сразу отражаются от поверхности, и лучи, которые хотя и проникают в рассеивающую сферу, но падают на ее поверхность под скользкими углами. Чем меньше угол скольжения преломленного падающего луча, тем меньшее расстояние он проходит внутри рассеивающей сферы. Поэтому в случае сильного поглощения следует отдельно рассмотреть вклад от скользких лучей, для которых приближения, сделанные в § 5, п. 2, неприменимы. Физически отличие волн, которые нужно теперь рассмотреть, от волн, уже встречавшихся в предельном случае геометрической оптики, обусловлено наличием поверхностных «ползущих» волн.

Если пользоваться терминологией § 5, п. 2, то для луча, отраженного сразу, $q = -1$, а для скользких преломленных лучей $q = +1$, независимо от того, сколько раз они претерпели внутреннее отражение. (Чтобы это было верно, угол γ должен быть тем ближе к $1/2\pi$, чем больше число внутренних отражений.) Таким образом, вклад в рассеяние, обусловленный отраженными лучами, можно отделить от вклада, создаваемого скользкими лучами, по знаку q .

При рассмотрении скользких лучей мы впервые встречаемся с использованием весьма полезного математического метода, состоящего в замене ряда по парциальным волнам другим рядом, который в данном и некоторых других случаях сходится значительно быстрее. Он основан на замене бесконечного ряда контурным интегралом.

1. Преобразование Ватсона

Запишем амплитуды (2.133) в виде

$$A(z) = \frac{dB(z)}{dz},$$

$$B(z) = \frac{1}{2ik} \sum_{J=1}^{\infty} \frac{2J+1}{J(J+1)} (S^J - 1) (-1)^J P_J(-z),$$

где $z = \cos \theta$. При этом нами использовано то обстоятельство, что $P_J(-z) = (-1)^J P_J(z)$. Для получения A_e и A_m в эти выражения нужно подставить соответственно $S^J = \exp(2i\alpha_J)$ и $S^J = \exp(2i\beta_J)$.

Заменим P_J и S^J аналитическими функциями переменной λ , значения которых в точках $\lambda = J + 1/2$ совпадают с данными значениями S^J и P_J . Если получающийся интеграл

$$\int_C d\lambda \lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1} [S(\lambda) - 1] P_{\lambda-1/2}(-z) \sec \pi \lambda$$

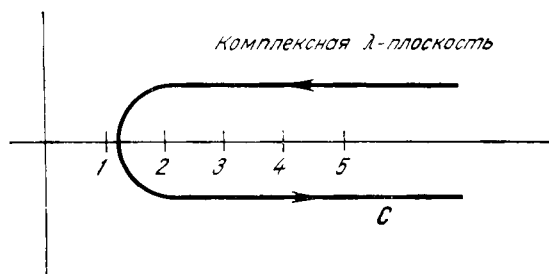
по контуру, показанному на фиг. 3.7, сходится, то по теореме Коши о вычетах его значение равно

$$-i \sum_1^{\infty} \frac{2J+1}{J(J+1)} (-1)^J (S^J - 1) P_J(-z) = 2kB(z).$$

Следовательно,

$$B(z) = \frac{1}{2k} \int_C \frac{d\lambda \lambda}{\lambda^2 - 1/4} [S(\lambda) - 1] P_{\lambda-1/2}(-z) \sec \pi \lambda. \quad (3.99)$$

Аналитическая интерполяция чисел P_J и S^J посредством аналитических функций не встречает затруднений. Полиномы Лежандра $P_\nu(z)$ имеют стандартное аналитическое продолжение, которое получается с использованием дифференциального уравнения Лежандра, если просто считать, что входящий в него параметр может принимать произвольные значения. Тогда регулярным



Ф и г. 3.7. Контур C в комплексной λ -плоскости.

решением этого уравнения будет гипергеометрическая функция ([242], т. 1, стр. 149, формула (3))

$$P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1}{2}(1-z)\right), \quad (3.100)$$

которая является аналитической функцией ν .

Если рассматривается случай рассеяния однородной сферой, то элементы \mathcal{S} -матрицы S^J также легко можно продолжить на нецелые значения J . Функции, содержащиеся в (2.127), непосредственно выражаются через функции Бесселя и Ганкеля, которые являются аналитическими функциями индексов, обозначающих их порядок. Согласно определению функций Риккати — Бесселя (2.58) и (2.60), имеем

$$\begin{aligned} S_e(\lambda) &= -\frac{nH_\lambda^{(2)'} - \mu H_\lambda^{(2)} \xi_\lambda + 1/2 \bar{X}^{-1} (n^2 - \mu) H_\lambda^{(2)}}{nH_\lambda^{(1)'} - \mu H_\lambda^{(1)} \xi_\lambda + 1/2 \bar{X}^{-1} (n^2 - \mu) H_\lambda^{(1)}}, \\ S_m(\lambda) &= -\frac{\mu H_\lambda^{(2)'} - nH_\lambda^{(2)} \xi_\lambda + 1/2 x^{-1} (\mu - 1) H_\lambda^{(2)}}{\mu H_\lambda^{(1)'} - nH_\lambda^{(1)} \xi_\lambda + 1/2 x^{-1} (\mu - 1) H_\lambda^{(1)}}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

где

$$\xi_\lambda \equiv \frac{J'_\lambda(\bar{X})}{J_\lambda(\bar{X})}.$$

Здесь значения функций Ганкеля берутся в точке x .

Следует ясно представлять, что такое аналитическое продолжение функций, заданных в отдельных точках, на непрерывное множество, конечно, не является однозначным. Существует бесконечно много других аналитических функций, значения которых при $\lambda = J + 1/2$ совпадают с данными значениями S^J и P_J . Достаточно добавить к функциям, приведенным выше, любую другую аналитическую функцию, умноженную на $\cos \pi \lambda$, чтобы получить еще одно аналитическое продолжение. Сделанный здесь конкретный выбор оправдывается тем, что он удобен для дальнейшего.

Преобразование контура. Произведем теперь следующие последовательные преобразования контурного интеграла в (3.99). Сначала сдвинем точку поворота петли влево, к точке $\lambda = 0$. Обозначим новый контур посредством C' . При этом возникает вклад в интеграл от вычета в двукратном полюсе в точке $\lambda = 1/2$. Так как $A(z)$ получается из $B(z)$ путем дифференцирования, то нас здесь интересует только та часть вычета, которая не обращается в нуль при дифференцировании по z . С точностью до постоянной имеем

$$B(z) = \frac{i}{2k} (S^0 - 1) \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu(-z) + \frac{1}{2k} \int_{C'} \dots$$

Предел легко вычисляется с помощью (3.100) и выражения для гипергеометрического ряда:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu(-z) = \ln \frac{1}{2} (1-z); \tag{3.102}$$

с точностью до постоянной получаем

$$B(z) = \frac{i}{2k} (S^0 - 1) \ln \frac{1}{2} (1-z) + \frac{1}{2k} \int_{C'} \dots \tag{3.103}$$

Величины S_e^0 и S_m^0 легко найти из (2.127a).

Рассмотрим отдельно интегралы по верхней C'_1 и нижней C'_2 ветвям контура C' в формуле (3.103). Дополним C'_1 дугой окружности большого радиуса с центром в начале координат, расположенной в первом квадранте. Как будет показано в § 8, п. 2, подынтегральное выражение быстро спадает при $\text{Im } \lambda \rightarrow \infty$ и $\text{Re } \lambda \rightarrow \infty$, поэтому интеграл по этой дуге обращается в нуль. Прибавим и вычтем из исходного интеграла по C'_1 интеграл по положительной мнимой полуоси:

$$\int_{C'_1} = - \int_0^{i\infty} - \oint_{\mathbb{C}_1},$$

где замкнутый контур \mathbb{C}_1 показан на фиг. 3.8. Интеграл по \mathbb{C}_1 вычисляется с помощью теоремы Коши о вычетах. Если S имеет полюсы в точках $\lambda = \lambda^{(n)}$ и вычеты в этих точках равны $R^{(n)}$, то

$$\int_{C'_1} = - \int_0^{i\infty} - 2\pi i \sum_n \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(n)2} - 1/4} R^{(n)} P_{\lambda^{(n)} - 1/2}(-z) \sec \pi \lambda^{(n)}. \tag{3.104}$$

Преобразуем далее интеграл по C'_2 . Здесь следует рассмотреть отдельно интеграл от функции, содержащей множитель S , и интеграл от функции, содержащей множитель 1. Последний интеграл вычисляется аналогично интегралу по C'_1 . При этом контур дополняют дугой окружности большого радиуса с центром в начале координат, расположенной в четвертом квадранте. Так как при $|\nu| \rightarrow \infty$ функция P_ν ведет себя так же, как и P_J в (3.73), то это допол-

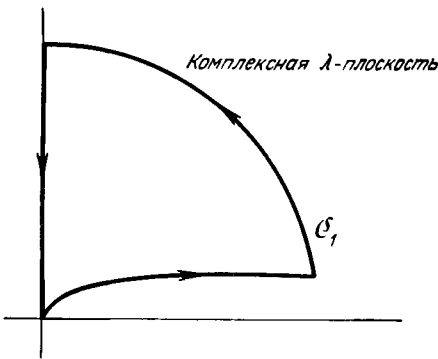
нение не приводит к изменению интеграла. Затем к интегралу по C'_2 добавим и вычтем интеграл по отрицательной мнимой полуоси

$$\int_{C'_2} = - \int_{-i\infty}^0 - \oint_{\mathfrak{C}_2},$$

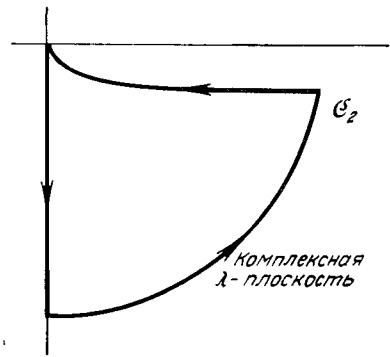
где замкнутый контур \mathfrak{C}_2 показан на фиг. 3.9. Внутри \mathfrak{C}_2 подынтегральная функция не имеет особенностей (это будет показано в § 8, п. 2), поэтому имеем

$$\int_{C'_2} = - \int_{-i\infty}^0.$$

Интеграл по C'_2 от функции, содержащей множитель $S(\lambda)$, распадается на две части, что обусловлено характером роста $S(\lambda)$ при $\text{Im } \lambda \rightarrow \infty$ (это



Ф и г. 3.8. Контур \mathfrak{C}_1 .



Ф и г. 3.9. Контур \mathfrak{C}_2 .

будет показано в § 8, п. 2). Используем то обстоятельство, что¹⁾

$$P_\nu(-z) = e^{-i\pi\nu} P_\nu(z) - \frac{2}{\pi} \sin \pi\nu Q_\nu(z + i0), \quad (3.105)$$

где $Q_\nu(z)$ — функция Лежандра второго рода. Она имеет разрез в плоскости z от $z = -\infty$ до $z = +1$ и для действительных z

$$Q_\nu(z + i0) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} Q_\nu(z + i\varepsilon).$$

Ту часть интеграла, подынтегральная функция которой содержит множители $S(\lambda)$ и Q_ν , оставим без изменения. Вторая часть интеграла, подынтегральная функция которой содержит множители $S(\lambda)$ и P_ν , а также экспоненциально убывающий множитель $e^{-i\pi\lambda}$, вычисляется так же, как интеграл от функции, когда вместо $e^{-i\pi\lambda}$ стоит единица. Как будет показано в § 8, п. 2, $S(\lambda)$ не имеет полюсов в четвертом квадранте; следовательно,

$$\int_{C'_2} = - \int_{-i\infty}^0 d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1} \sec \pi\lambda [Se^{-i\pi(\lambda-1/2)} P_{\lambda-1/2}(z) - P_{\lambda-1/2}(-z)] + \\ + \frac{2}{\pi} \int_{C'_2} d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)^{-1} S(\lambda) Q_{\lambda-1/2}(z + i0). \quad (3.106)$$

Здесь первый интеграл заменой λ на $-\lambda$ преобразуем в интеграл от 0 до $+i\infty$. Из симметрии гипергеометрической функции относительно первых двух пара-

¹⁾ См. [242], т. 1, стр. 141, формула (10).

метров следует, что

$$P_{-\lambda-1/2} = P_{\lambda-1/2}. \quad (3.107)$$

Комбинируя (3.103), (3.104) и (3.106) и используя опять (3.107), получаем

$$B(z) = B_{\text{полз}} + B_{\text{геом}},$$

$$B_{\text{сл}}(z) = \frac{i}{2k} (S^0 - 1) \ln \frac{1}{2} (1-z) - \frac{\pi i}{k} \sum_n \frac{\lambda^{(n)}}{\lambda^{(n)2} - 1/4}$$

$$R^{(n)} P_{\lambda^{(n)}-1/2}(-z) \sec \pi \lambda^{(n)} +$$

$$+ \frac{i}{2k} \int_0^{i\infty} \frac{d\lambda \lambda}{\lambda^2 - 1/4} \sec \pi \lambda P_{\lambda-1/2}(z) [S(-\lambda) e^{i\pi \lambda} - S(\lambda) e^{-i\pi \lambda}], \quad (3.108)$$

$$B_{\text{геом}}(z) = \frac{1}{\pi k} \int_{i\infty}^{\infty} \frac{d\lambda \lambda}{\lambda^2 - 1/4} S(\lambda) Q_{\lambda-1/2}(z+i0). \quad (3.109)$$

Последний интеграл берется по контуру, проходящему вдоль положительной мнимой полуоси и затем по C_2' .

Смысл разбиения $B(z)$ на $B_{\text{полз}}$ и $B_{\text{геом}}$ можно понять, рассмотрев асимптотическое выражение для Q_ν при $|\nu| \rightarrow \infty$ ¹⁾:

$$Q_\nu(z+i0) \approx \left(\frac{\pi}{2\nu \sin \theta} \right)^{1/2} e^{\mp i[(\nu+1/2)\theta + 1/4\pi]}. \quad (3.110)$$

Если $x \gg 1$, то $B_{\text{геом}}$ можно вычислять методом стационарной фазы, как и в § 5, п. 2. Это приводит к выражению для амплитуды, соответствующему предельному случаю геометрической оптики при $q = -1$. Если имеет место поглощение, то главным будет член, обусловленный излучением, сразу отраженным от рассеивателя. Таким образом, в пределе сильного поглощения выделенная часть $B_{\text{сл}}$ как раз описывает вклад, обусловленный скользящими лучами, или ползущей волной.

Ползущая волна. Рассмотрим теперь $B_{\text{полз}}$; из (3.101) следует, что при $|n| \gg 1$

$$S_e(\lambda) \approx - \frac{2xH_\lambda^{(2)'}(x) + H_\lambda^{(2)}(x)}{2xH_\lambda^{(1)'}(x) + H_\lambda^{(1)}(x)},$$

$$S_m(\lambda) \approx - \frac{H_\lambda^{(2)}(x)}{H_\lambda^{(1)}(x)}. \quad (3.111)$$

Однако функции Ганкеля обладают следующим свойством²⁾:

$$H_{-\lambda}^{(2)}(x) = H_\lambda^{(2)}(x) e^{-i\pi \lambda},$$

$$H_{-\lambda}^{(1)}(x) = H_\lambda^{(1)}(x) e^{i\pi \lambda}, \quad (3.112)$$

поэтому в пределе сильного поглощения как S_e , так и S_m удовлетворяют следующему соотношению:

$$S(-\lambda) \approx S(\lambda) e^{-2\pi i \lambda}. \quad (3.113)$$

Вследствие этого интеграл в (3.108) обращается в нуль.

Первый член в (3.108) имеет порядок $\lambda = R x^{-1}$. С другой стороны, величина $B_{\text{геом}}$ при больших x имеет порядок R . Таким образом, первым членом

¹⁾ См. [242], т. 1, стр. 163, формулы (1) и (2) и стр. 141, формула (2).

²⁾ См. [242], т. 2, стр. 13, формула (9).

в (3.108) также можно пренебречь и для вклада в амплитуду, обусловленного ползущей волной, получаем

$$A_{\text{полз}} \approx i\pi R x^{-1} \sum_n \lambda^{(n)} R^{(n)} \sec \pi \lambda^{(n)} \pi_{\lambda^{(n)} - 1/2}(-z). \quad (3.114)$$

Чтобы оценить величину (3.114), нужно оценить $\lambda^{(n)}$ и $R^{(n)}$ для больших x . Первые полюсы возникают при $\lambda \approx x$, где для функций Ганкеля можно использовать приближение (3.64). Из (3.64) следует, что если $|\lambda - x| \ll x$, то

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{x} \right) \right]^{1/2} e^{i\pi/6} H_{1/3}^{(1)}(Z), \quad (3.115)$$

где введено обозначение

$$Z = \frac{1}{3} \lambda^{-2} (x^2 - \lambda^2)^{3/2} \approx \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} x \right)^{-1/2} (x - \lambda)^{3/2},$$

поэтому имеет место соотношение

$$2x H_{\lambda}^{(1)'}(x) + H_{\lambda}^{(1)}(x) \approx \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{\lambda}{x} \right) \right]^{1/2} e^{i\pi/6} Z H_{1/3}^{(1)'}(Z). \quad (3.116)$$

Следовательно, первые полюсы функции S_m определяются корнями уравнения

$$H_{1/3}^{(1)}(Z) = 0,$$

а полюсы S_e — корнями уравнения

$$H_{1/3}^{(1)'}(Z) = 0.$$

Однако поскольку ¹⁾

$$H_{\lambda}^{(1)} = -i \operatorname{cosec} \pi \lambda (J_{-\lambda} - e^{-i\pi \lambda} J_{\lambda}), \quad (3.117)$$

а также ²⁾

$$J_{\lambda}(ze^{i\pi}) = e^{i\pi \lambda} J_{\lambda}(z), \quad (3.118)$$

то, согласно (3.94), для $\lambda = 1/3$ получаем

$$\begin{aligned} H_{1/3}^{(1)}(Z) &= 2 \sqrt{3} e^{i5\pi/6} q^{-1/2} \operatorname{Ai}(-q), \\ q &= \left(\frac{3}{2} Z \right)^{2/3} e^{i2\pi/3} \approx \left(\frac{1}{2} x \right)^{-1/3} (\lambda - x) e^{-i\pi/3}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Следовательно, положительные нули q_n функции Эйри определяют соответствующие нули функции Ганкеля, а комплексные значения $\lambda_m^{(n)}$, при которых S_m имеет свои первые полюсы, равны

$$\lambda_m^{(n)} \approx x + 2^{-1/3} x^{1/3} q_n e^{i\pi/3}. \quad (3.120)$$

Фаза определяется требованием, чтобы величина λ находилась в первом квадранте.

Аналогичным образом первые полюсы $\lambda_e^{(n)}$ функции S_e вычисляются согласно формуле

$$\lambda_e^{(n)} \approx x + 2^{-1/3} x^{1/3} q_n' e^{i\pi/3} \quad (3.121)$$

по нулям производной

$$[q_n^{-1/2} \operatorname{Ai}(-q_n)]' = 0.$$

¹⁾ См. [242], т. 2, стр. 12, формула (5).

²⁾ См. [2 2], т. 2, стр. 21, формула (61).

Вычеты в этих полюсах можно получить из вронскиана (который легко вычислить, воспользовавшись уравнением Бесселя и граничными условиями):

$$H_{\lambda}^{(1)}(x) H_{\lambda}^{(2)'}(x) - H_{\lambda}^{(1)'}(x) H_{\lambda}^{(2)}(x) = -4i(\pi x)^{-1}. \quad (3.122)$$

Из (3.122) следует, что если $H_{\lambda}^{(1)}(x) = 0$, то

$$H_{\lambda}^{(2)}(x) = \frac{4i}{\pi x H_{\lambda}^{(1)'}(x)}.$$

Таким образом, найдено, что вычет в полюсе S_m равен

$$R_m^{(n)} \approx \frac{3ix}{2\pi q_n} [Ai'(-q_n)]^{-2}, \quad (3.123)$$

а вычет в полюсе S_e равен

$$R_e^{(n)} \approx \frac{3ix}{2\pi (q_n'^2 - 1/4 q_n'^{-1})} [Ai(-q_n')]^{-2}. \quad (3.124)$$

Подставим теперь эти вычеты и выражение (3.73) в (3.114). Первые члены ряда для $A_{\text{сл}}$ примут вид

$$A_{\text{сл}} \approx 3iR (2\pi x \sin^3\theta)^{-1/2} e^{i(1/4\pi + x\theta)\Sigma},$$

где для электрического мультиполя

$$\Sigma_e \approx \sum_n (q_n'^2 - \frac{1}{4} q_n'^{-1})^{-1} [Ai(-q_n')]^{-2} \exp \left[\frac{i}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} q_n' \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{2} x \right)^{1/3} q_n' \theta \right] \quad (3.125)$$

и для магнитного мультиполя

$$\Sigma_m \approx \sum_n q_n^{-2} [Ai'(-q_n)]^{-2} \exp \left[\frac{i}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} q_n \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} q_n \theta \right]. \quad (3.126)$$

Фактические амплитуды, полученные с помощью этих выражений, согласно (2.134), имеют вид

$$\begin{aligned} A_{||}^L &\approx -\frac{3Rx^{1/2}}{(2\pi \sin \theta)^{1/2}} e^{i(1/4\pi + x\theta)\Sigma_e}, \\ A_{\perp}^L &\approx -\frac{3Rx^{1/2}}{(2\pi \sin \theta)^{1/2}} e^{i(1/4\pi + x\theta)\Sigma_m}. \end{aligned} \quad (3.127)$$

Из (3.127) видно, что при переходе к точному пределу геометрической оптики $x \rightarrow \infty$ эффект от скользящих лучей является пренебрежимо малым, однако при разумно больших значениях x он может иметь заметную величину. Члены ряда (3.114) для амплитуды рассеяния имеют порядок

$$Rx^{1/2} \exp \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{x}{2} \right)^{1/3} q_n \theta \right],$$

в то время как члены ряда (3.80) имеют порядок R . Поэтому ряд в (3.114) сходится очень быстро. (То, что он действительно сходится, будет показано в следующем пункте. Здесь же нас интересует только то обстоятельство, что для приближенного вычисления этих рядов достаточно нескольких первых членов.) Чем меньше угол рассеяния, тем больше вклад от скользящих лучей. Конечно, это правильно для всех углов, кроме области $\theta \ll x^{-1}$; в последней преобладает дифракционный максимум.

2. Вопросы сходимости

Прежде чем принять полученные результаты, нужно еще ответить на ряд вопросов, возникающих в связи с методом Ватсона. Чтобы определить, допустимы ли преобразования контуров C_1 и C_2 , а также выяснить, сходятся ряды (3.114) или нет, нужно исследовать поведение S в пределе больших $|\lambda|$. Результаты (3.120), (3.121), (3.123) справедливы только при $|\lambda^{(n)}|/x \approx 1$. Наконец, нужно доказать в общем виде, что S не имеет полюсов в четвертом квадранте λ -плоскости.

При $|\lambda| \gg z$ асимптотическое поведение функции Бесселя имеет вид

$$J_\lambda(z) \approx \frac{(1/2z)^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)}.$$

Используя формулу Стирлинга для аппроксимации выражения

$$\frac{\Gamma(1+\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} = \frac{1}{\pi} \Gamma(1+\lambda) \Gamma(\lambda) \sin \pi\lambda \approx 2 \sin \pi\lambda e^{2\lambda \ln(\lambda/e)},$$

из (3.117) получаем

$$e^{i\pi\lambda} \sin \pi\lambda \Gamma(1+\lambda) \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\lambda} H_\lambda^{(1)}(x) \approx i + \xi,$$

$$\xi = -2i \sin \pi\lambda e^{i\pi\lambda + 2\lambda \ln(2\lambda/ex)}.$$

Аналогичным образом, используя то обстоятельство, что

$$H_\lambda^{(2)}(x) = -i \operatorname{cosec} \pi\lambda (e^{i\pi\lambda} J_\lambda - J_{-\lambda}),$$

находим

$$-e^{i\pi\lambda} \sin \pi\lambda \Gamma(1+\lambda) \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\lambda} H_\lambda^{(2)}(x) \approx ie^{2i\pi\lambda} + \xi. \quad (3.128)$$

Здесь мы воспользовались соотношением

$$\frac{J'_\lambda(\bar{X})}{J_\lambda(\bar{X})} \approx \frac{\lambda}{\bar{X}}.$$

Заметим, что при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$

$$e^{2\lambda \ln \lambda} \approx e^{-\pi |\operatorname{Im} \lambda| |\lambda|^{2 \operatorname{Re} \lambda}},$$

так что при $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty$ величина ξ неограниченно возрастает. Если $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow +\infty$, то

$$|\xi| \approx e^{2\lambda \ln(2\lambda/ex)} \approx \left|\frac{2\lambda}{ex}\right|^{2 \operatorname{Re} \lambda} e^{-\pi \operatorname{Im} \lambda};$$

если же $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow -\infty$, то

$$|\xi| \approx |e^{2i\pi\lambda}| e^{2\lambda \ln(2\lambda/ex)} \approx \left|\frac{2\lambda}{ex}\right|^{2 \operatorname{Re} \lambda} e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}.$$

Поэтому из (3.101) следует, что при $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \infty$

$$S_m \approx S_e \approx 1,$$

а если $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow +\infty$, то с точностью до несущественных множителей получаем (как для S_e , так и для S_m)

$$|S| \approx |\xi| \approx \left|\frac{2\lambda}{ex}\right|^{2 \operatorname{Re} \lambda} e^{-\pi \operatorname{Im} \lambda}. \quad (3.129)$$

Формула (3.129) имеет место всюду при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow +\infty$, кроме тех прямых, на которых расположены полюсы. Если же $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow -\infty$, то как для S_e ,

так и для S_m получаем

$$|S| \approx \frac{|e^{2\pi i \lambda}|}{|\xi|} \approx \left| \frac{ex}{2\lambda} \right|^{2 \operatorname{Re} \lambda} e^{\pi |\operatorname{Im} \lambda|}. \quad (3.130)$$

Подстановка сделанных выше оценок, а также формулы (3.105) и асимптотического выражения (3.73) для P_N в (3.99) и использование их при выводе формулы (3.106) показывает, что подынтегральные выражения достаточно быстро обращаются в нуль на бесконечности, и поэтому описанное выше преобразование контура возможно. Ясно также, что разделение функции (3.105) на две части было существенным.

Полученные оценки позволяют также найти асимптотическое распределение полюсов. Так как полюсы расположены в верхней полуплоскости, то

$$S \approx 1 - i \frac{(e^{2\pi i \lambda} - 1) a}{\xi - ia},$$

где для S_e

$$a = a_e = \frac{n^2 - \mu}{n^2 + \mu}$$

и для S_m

$$a = a_m = \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

Следовательно, удаленные полюсы функции S определяются корнями уравнения

$$\xi - ia = 0$$

или уравнения

$$2\lambda \ln \frac{2\lambda}{ex} = \ln a + 2\pi i \left(N + \frac{1}{4} \right),$$

где N — целое число. Это означает, что и для полюсов S_e и для полюсов S_m имеют место формулы

$$\operatorname{Re} \lambda_N \approx \frac{1}{2} \pi^2 \left(N + \frac{1}{4} \right) \left[\ln \frac{2\pi(N+1/4)}{ex} \right]^{-2} \left[1 + O \left(\frac{\ln \ln N}{\ln N} \right) \right], \quad (3.131)$$

$$\operatorname{Im} \lambda_N \approx \pi \left(N + \frac{1}{4} \right) \left[\ln \frac{2\pi(N+1/4)}{ex} \right]^{-1} \left[1 + O \left(\frac{\ln \ln N}{\ln N} \right) \right].$$

При $N \rightarrow \infty$ как $\operatorname{Re} \lambda_N$, так и $\operatorname{Im} \lambda_N$ стремятся к бесконечности, однако фаза λ_N стремится к $1/2 \pi$.

Легко также найти вычеты

$$R_N \approx \frac{1}{2} \left[\ln \frac{2|\lambda|}{x} \right]^{-1}. \quad (3.132)$$

Подстановка (3.132) и (3.73) в (3.114) показывает, что ряды, связанные с полюсами функции S , сходятся.

Остается показать, что S не имеет полюсов в четвертом квадранте λ -плоскости. Это можно доказать, рассмотрев функцию f , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-\frac{d^2}{dr^2} f + \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) r^{-2} f = n^2 k^2 f$$

при $0 \leq r \leq R$ и уравнению

$$-\frac{d^2}{dr^2} f + \left(\lambda^2 - \frac{1}{4} \right) r^{-2} f = k^2 f$$

при $r > R$. Пусть в точке $r = R$ функция f непрерывна, но ее первая производная имеет скачок, так что

$$\lim_{r \rightarrow R+} \frac{d}{dr} f = \varepsilon \lim_{r \rightarrow R-} \frac{d}{dr} f, \quad \varepsilon > 0.$$

Функция

$$f = \begin{cases} -2u_J(nkr) e^{i\pi\lambda}, & r < R, \\ D\omega_J^{(+)}(kr) - N\omega_J^{(+)}(kr), & r > R \end{cases}$$

(где $J = \lambda - 1/2$) является решением этих уравнений с данными граничными условиями, если

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon n u_J' \omega_J^{(+)} - u_J \omega_J^{(+)'}, \\ N &= \varepsilon n u_J' \omega_J^{(-)} - u_J \omega_J^{(-)'}, \end{aligned}$$

где значение функции u_J берется в точке $\bar{X} = nkR$, а значение функции ω_J — в точке $x = kr$.

Используем теперь стандартный метод вычисления вронскиана. Умножим дифференциальное уравнение для f на f^* , уравнение для f^* умножим на f и вычтем получившиеся уравнения одно из другого:

$$\frac{d}{dr} W(f^*, f) \equiv \frac{d}{dr} (f^* f' - f^{*'} f) = 2i \operatorname{Im} \lambda^2 r^{-2} |f|^2.$$

Проинтегрируем последнее соотношение от R до ∞ и используем асимптотическое выражение для ω_J при вычислении предела в левой части получившегося соотношения

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(f^*, f) = 2i (|N|^2 - |D|^2).$$

При $r = R$ используем граничное условие для f

$$\lim_{r \rightarrow R+} W(f^*, f) = 4\varepsilon e^{-\pi \operatorname{Im} \lambda} W(u_J^*, u_J),$$

причем вронскиан в правой части этого соотношения вычисляется в точке \bar{X} . Следовательно, имеем

$$|N|^2 - |D|^2 = \operatorname{Im} \lambda^2 \int_R^\infty dr r^{-2} |f|^2 - 2i e^{-\pi \operatorname{Im} \lambda} \varepsilon W(u_J^*, u_J).$$

Если использовать тот же метод для $r < R$, то при $\operatorname{Re} \lambda > 0$ получим

$$2e^{-\pi \operatorname{Im} \lambda} W(u_J^*, u_J) = i \operatorname{Im} \lambda^2 \int_0^R dr r^{-2} |f|^2$$

и, следовательно,

$$|N|^2 - |D|^2 = \operatorname{Im} \lambda^2 \left(\varepsilon \int_0^R dr r^{-2} |f|^2 + \int_R^\infty dr r^{-2} |f|^2 \right).$$

Это и есть искомый результат. Из полученных выражений видно, что D может быть равно нулю только при $\operatorname{Im} \lambda^2 > 0$. Другими словами, при $\operatorname{Re} J > -1/2$, действительных x и \bar{X} и $\sigma \geq 0$ из условия

$$D = \sigma u_J'(\bar{X}) \omega_J^{(+)}(x) - u_J(\bar{X}) \omega_J^{(+)'}(x) = 0$$

следует, что $\operatorname{Im} J > 0$.

Согласно (2.127a), знаменатели функций S_e и S_m имеют такую же структуру, как и D . Таким образом, показано, что все полюсы обоих элементов \mathcal{L} -матрицы в правой полуплоскости λ -плоскости появляются при $\operatorname{Im} \lambda > 0$.

Приложение

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО МЕТОДУ ПЕРЕВАЛА (МЕТОД СКОРЕЙШЕГО СПУСКА)

Цель данного метода состоит в том, чтобы получить асимптотическое выражение для интеграла виде

$$I(\omega) = \int_C dz g(z) e^{\omega f(z)}$$

при больших значениях ω . Контур интегрирования C представляет собой некоторую линию, проходящую внутри области аналитичности функций $f(z)$ и $g(z)$.

При вычислении интеграла существенны два фактора: величина подынтегральной функции и ее фаза. Если мнимая часть f не равна нулю, то при больших значениях ω подынтегральное выражение будет быстро осциллировать и, следовательно, значения интеграла будут уменьшаться. Если же f имеет отличную от нуля действительную часть, то большие значения ω будут приводить к увеличению подынтегрального выражения, причем это увеличение будет тем больше, чем больше $\text{Re } f$. Первый эффект приводит к тому, что наибольший вклад в интеграл дают те области подынтегрального выражения, в которых фаза $v = \text{Im } f$ стационарна; второй эффект приводит к тому, что вклад в интеграл дают те области, где $u = \text{Re } f$ имеет максимум. Следовательно, если путь интегрирования можно сместить так, чтобы он проходил через точку z_0 в таком направлении, вдоль которого $u(z)$ имела бы максимум в точке z_0 , и одновременно фаза $v(z)$ была бы в этой точке стационарна, то в пределе больших ω весь вклад в интеграл $I(\omega)$ будет давать малая окрестность точки z_0 .

Посмотрим, каким условиям должны удовлетворять точка z_0 и выбранное направление. При $z = z_0$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0.$$

Но для аналитической функции f должны выполняться условия Коши — Римана

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

так что последнее из приведенных выше уравнений принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0.$$

Это, а также первое из приведенных выше уравнений показывают, что искомого направления существует тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что u и v стационарны в точке z_0 по *всем* направлениям. Но так как они не могут иметь максимумов или минимумов, то точка z_0 должна быть *седловой точкой*. Конечно, направление пути интегрирования в точке z_0 нужно выбрать так, чтобы для него максимум функции u был наиболее узким. Более того, для данного большого значения ω главный вклад в интеграл I будут давать значения подынтегральной функции из самой малой окрестности точки z_0 , если путь интегрирования выбран так, чтобы вдоль этого направления функция u имела самый острый максимум. Это и есть направление *скорейшего спуска*.

Из приведенного доказательства не следует, что этот метод является полностью универсальным, особенно если концы контура C расположены не на бесконечности. В этом случае функция u может иметь абсолютный максимум на конце контура, не будучи при этом нигде стационарной.

Предположим, что при действительных z функция f действительна. Тогда из принципа симметрии Шварца следует, что $f(z^*) = f^*(z)$ и, следовательно, $u(x, y) = u(x, -y)$. Поэтому на действительной оси производная u по y обращается в нуль. Если u имеет экстремум при движении вдоль действительной оси в точке x_0 , то эта точка должна быть седловой. Если x_0 является точкой максимума при движении вдоль действительной оси, то ось x будет также и линией скорейшего спуска. Если, наоборот, x_0 является точкой минимума, то u имеет максимум при движении вдоль линии, параллельной мнимой оси, которая и будет линией скорейшего спуска. Однако если контур C направлен вдоль действительной оси, то, конечно, нельзя воспользоваться тем, что x_0 является точкой минимума, и повернуть контур C от этой точки под прямым углом к действительной оси, так как тогда на участке контура, совпадающем с действительной осью, u будет принимать бóльшие значения при фазе ν , стационарной всюду на действительной оси. Разложим функцию f вблизи точки $z = z_0 = x_0$:

$$f(z) = f(x_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2 f''(x_0) + \dots$$

Пусть x_0 есть точка максимума функции f при действительных z . Тогда если контур C совпадает с действительной осью или если его можно деформировать так, чтобы он лежал вдоль действительной оси, не проходя через точки, в которых u принимает значения, большие, чем в максимуме, то интегрирование проводится по действительным z , в которых $(z - z_0)^2$ положительно, в то время как производная $f''(x_0)$ отрицательна. Интегрирование можно проводить в бесконечных пределах $z = \pm \infty$, так как почти весь вклад в интеграл всегда дает окрестность точки x_0 , и при учете исходного направления контура C получаем

$$I(\omega) \approx \pm g(x_0) e^{\omega f(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-1/2(x-x_0)^2 \omega |f''(x_0)|} = \pm \left(\frac{2\pi}{\omega |f''(x_0)|} \right)^{1/2} g(x_0) e^{\omega f(x_0)}.$$

С другой стороны, если f имеет минимум в точке x_0 (при движении вдоль действительной оси) и если контур C можно деформировать так, чтобы он проходил через эту точку, не проходя при этом через точки, в которых u принимает бóльшие значения (последнее исключает из рассмотрения контуры C , идущие от одной точки действительной оси к другой), то интегрирование производится в направлении мнимой оси. Теперь производная $f''(x_0)$ положительна, а величина $(z - z_0)^2$ отрицательна, и при учете первоначального направления контура C получаем

$$I(\omega) \approx \pm g(x_0) e^{\omega f(x_0)} i \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-1/2(iy)^2 \omega |f''(x_0)|} = \pm i \left(\frac{2\pi}{\omega |f''(x_0)|} \right)^{1/2} g(x_0) e^{\omega f(x_0)}.$$

На практике часто приходится вычислять интегралы, пользуясь методом перевала. Чтобы более отчетливо представить типичную ситуацию, запишем интеграл в виде

$$I(\omega) = \int_C dz g(z) e^{i\omega h(z)}.$$

Пусть контур C совпадает с действительной осью, и пусть на действительной оси функция h действительна. Далее, предположим, что точка $x = x_0$ является

стационарной точкой функции $h(z)$ при движении вдоль действительной оси:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0.$$

Отсюда, так же как и ранее, следует, что x_0 — седловая точка функции $\operatorname{Re} h$. В то же время поскольку $\operatorname{Im} h$ является нечетной функцией y , то x_0 — точка перегиба функции $\operatorname{Im} h$ в направлении, параллельном мнимой оси. Можно предположить, что интеграл будет *уменьшаться*, если контур деформировать, направив его в сторону больших значений $\operatorname{Im} h$. Ошибочность этого предположения связана с тем, что, хотя в направлении мнимой оси функция $\operatorname{Im} h$ имеет перегиб в точке x_0 , эта точка все же является седловой точкой функции $\operatorname{Im} h$. Поэтому нельзя сместить контур от точки x_0 и при этом не пройти через точки, в которых $\operatorname{Im} h$ принимает меньшие значения. В методе стационарной фазы предполагается, что основной вклад в интеграл дает окрестность точки x_0 , но направление скорейшего спуска специально не выбирают. Возникающий интеграл гауссовского типа обычно вычисляют таким, каким он получается. Однако при этом отыскание направления скорейшего спуска просто скрыто в вычислении интеграла гауссовского типа. Чтобы вычислить его правильно, нужно выбрать такое направление, чтобы показатель экспоненты был *действительным*, а это направление и является направлением скорейшего спуска.

КОММЕНТАРИИ

Более подробный обзор предельных случаев, отвечающих различным соотношениям между n и x , и рассмотрение приближенных методов можно найти в книге Хьюлста [857]. В этой книге читатель может найти также дополнительную библиографию. В противоположность рассмотрению, проведенному Хьюлстом [857], при выводе большинства полученных в данной главе результатов не предполагалось, что $\mu = 1$; см. также книгу Борна и Вольфа [92], стр. 630. Изложение более поздних результатов и соответствующие ссылки можно найти в работе Керкера [480].

К § 1. Сечение для случая $x \ll 1$ впервые было получено Релеем [702].

К § 1, п. 2. Приближение Релея — Ганса связано со статьями Релея [703] и Ганса [318].

К § 3. Работы по резонансному рассеянию начались со статьи Дебая [202].

К § 4. Более подробное изложение затронутых здесь вопросов можно найти в книге Хьюлста [857], гл. 11; см. также статью Шиффа [757].

К § 5. Изложенный способ перехода от физической оптики к предельному случаю геометрической оптики принадлежит Дебаю [202]; здесь мы в основном следуем книге Хьюлста [857].

К § 6 и 7. Поэтическое описание радуги заимствовано из «Оды сэру Исааку Ньютону» Джеймса Томсона. Второй отрывок взят из поэмы «Радуга» Д. Лоуренса. (Перевод стихов А. М. Кузнецова.— *Прим. ред.*) Этими отрывками автор обязан профессору Йельского университета Джону Холландеру.

Более подробное описание радужного рассеяния можно найти в работах [542, 857]. Соответствующие числовые таблицы содержатся в книгах [598, 422].

Пожалуй, наиболее интересно с точки зрения истории физики следующее обстоятельство, связанное с явлением ореола: Вильсон, открывший, как известно, камеру с конденсацией пара (камера Вильсона), пытался изучать в ней явление ореола экспериментально. Читателю следует обратить внимание на цитату на стр. 14 и 15 в работе Янга [929].

К § 8. Метод, ведущий к преобразованию Ватсона, был ранее него предложен Пуанкаре и Никольсоном, однако в электромагнитной теории он был впервые применен именно Ватсоном [884]; см. также работы [515, 860] и [788], стр. 282.

Разделение функции $B(z)$ на две части, одна из которых соответствует пределу геометрической оптики, а вторая — ползущей волне, было предложено Францем [291].

Нули функций Ганкеля и их производных в комплексной λ -плоскости исследованы в работе [478]. Там же можно найти и библиографию.

Более поздними являются работы [475, 350, 772, 663].

К приложению. Метод перевала для вычисления интегралов был предложен Дебаем [203, 204]. Позже он рассматривался Зоммерфельдом [788], стр. 98 и 116, Ван дер Верденом [861], Морсом и Фешбахом [615], т. 1, стр. 410, и Эрдейи [244].

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если выполняется условие (3.1), то отношение интенсивности излучения, рассеянного вперед, к интенсивности излучения, рассеянного назад, определяется формулой (для сферы с $\mu = 1$)

$$1 + \frac{4}{15} x^2 \frac{(n^2 + 4)(n^2 + 2)}{2n^2 + 3} + O(x^4).$$

2. Показать, что при условиях задачи 1 поляризация излучения, рассеянного на угол 90° , равна

$$P = 1 - 2x^4 \left[\frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{15(2n^2 + 3)} \right]^2 + \dots$$

3. Показать, что при условиях задачи 1 угол рассеяния, при котором поляризация максимальна (полюхроизм), определяется выражением

$$\cos \theta = -x^2 \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 2)}{15(2n^2 + 3)}.$$

4. Вычислить матрицу плотности рассеянной волны при релеевском рассеянии, зная матрицу плотности падающего пучка.

5. Проверить две формулы, предшествующие выражению (3.14).

6. Вывести формулы для дифференциального и полного сечений рассеяния на сфере малой плотности (т. е. при $|n - 1| \ll 1$), магнитная восприимчивость которой равна единице ($\mu = 1$), а радиус велик по сравнению с длиной волны ($x \gg 1$), но еще не слишком велик, так что выполняется неравенство $x|n - 1| \ll 1$. Считать, что угол рассеяния не слишком мал ($x \sin \frac{1}{2}\theta \gg 1$).

7. Вычислить степень поляризации (как функцию угла рассеяния) волны, рассеянной однородной диэлектрической сферой в случае, когда

$$|n - 1| \ll 1, \quad |\mu - 1| \ll 1, \quad x|n - 1| \ll 1,$$

а падающее излучение не поляризовано.

8. Чему равна степень поляризации (как функция угла рассеяния) рассеянной волны при электрическом резонансе порядка J (т. е. при $\alpha_J = \pi/2$), если падающее излучение не поляризовано?

9. Доказать утверждения, сформулированные в абзаце, следующем за формулой (3.36).

10. Пусть известно, что для данной оптически плотной сферы радиусом 0,1 см наблюдается резонанс при длине волны 6 см, причем сечение рассеяния при резонансе равно σ . Возьмем другую сферу радиусом 0,15 см, сделанную из того же материала. При какой длине волны будет иметь место резонансное рассеяние на этой сфере и чему приблизительно равно сечение рассеяния при резонансе?

11. Излучение рассеивается идеально отражающей сферой, радиус которой мал по сравнению с длиной волны. Чему равны степень поляризации и ее направление, если угол рассеяния равен 60° ?

12. Пусть свет с длиной волны $5 \cdot 10^{-5}$ см падает на сферу радиусом 0,01 см. Чему равны радиусы первых двух темных дифракционных колец на экране, расположенном на расстоянии 5 м?

13. Чему равна степень поляризации света в области фраунгоферовой дифракции, если падающий пучок не поляризован?

14. Вычислить относительные интенсивности лучей, сразу рассеянных от поверхности сферы ($p = 0$), лучей, подвергшихся двукратному преломлению ($p = 1$), и лучей, претерпевших одно внутреннее отражение ($p = 2$), для обоих направлений поляризации. Выяснить относительную важность членов ряда (3.80), составив таблицу их значений при $n = 4/3$, 3 и 5. Сравнить полученный результат с результатами Хьюльста [857].

15. Найти и изобразить на графике зависимость сечения рассеяния от угла рассеяния для сферы радиусом 1 мм, сделанной из вещества с показателем преломления $n = 1,1$, если рассеянное излучение имеет длину волны: а) 1 см, б) 10 см и в) 0,01 см. Считать, что показатель преломления не зависит от длины волны.

ГЛАВА 4

Дополнительные вопросы

§ 1. ДРУГИЕ МЕТОДЫ

1. Потенциалы Дебая

Уравнения Максвелла (1.4) для однородной, изотропной, немагнитной среды с показателем преломления n можно упростить, если ввести функции

$$\mathcal{F}_{\pm} = \mathfrak{B} \mp in\mathcal{E}. \quad (4.1)$$

Функции \mathcal{F}_{\pm} удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \times \mathcal{F}_{\pm} = \pm kn\mathcal{F}_{\pm} \quad (4.2)$$

как внутри среды, так и вне ее, но не на границе. Эти уравнения можно решить, введя две скалярные потенциальные функции

$$u_{\pm} = \phi \pm n\psi, \quad (4.3)$$

которые удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2 \psi + (kn)^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \phi + (kn)^2 \phi = 0. \quad (4.4)$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что функция

$$\mathcal{F}_{\pm} = k\nabla \times (\mathbf{r}u_{\pm}) \pm \frac{1}{n} \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{r}u_{\pm})] \quad (4.5)$$

удовлетворяет уравнению (4.2). Функции u_{\pm} называются *потенциалами Дебая*. Электрическое и магнитное поля выражаются через эти функции так:

$$-i\mathcal{E} = k\nabla \times (\mathbf{r}\psi) + \frac{1}{n^2} \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{r}\phi)], \quad (4.6)$$

$$\mathfrak{B} = k\nabla \times (\mathbf{r}\phi) + \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{r}\psi)]$$

или в r -, θ - и φ -компонентах (гл. 2, § 1, п. 8)

$$\begin{aligned} -i\mathcal{E}_r &= k^2 r\phi + \frac{1}{n^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\phi), \\ -i\mathcal{E}_\theta &= \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r\psi) + \frac{1}{n^2} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\phi), \\ -i\mathcal{E}_\varphi &= -\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\psi) + \frac{1}{n^2 r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r\phi), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_r &= (nk)^2 r\psi + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi), \\ \mathfrak{B}_\theta &= \frac{k}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (r\psi), \\ \mathfrak{B}_\varphi &= -\frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r\phi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r\psi) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Если среда имеет сферическую границу, то граничные условия для ψ и ϕ будут простыми. Так как тангенциальные компоненты \mathcal{E}_θ , \mathcal{E}_φ , \mathcal{H}_θ и \mathcal{H}_φ полей \mathcal{E} и \mathcal{H} должны быть непрерывными, то нужно, чтобы функции ψ и ϕ , их производные по θ и φ , а также производные $\partial(r\psi)/\partial r$ и $(1/n^2) \partial(r\phi)/\partial r$ были непрерывными. Таким образом, задача рассеяния электромагнитной волны на сфере сводится к задачам рассеяния на ней двух скалярных полей, описываемых уравнениями (4.4) при указанных выше граничных условиях.

Скалярные функции ϕ и ψ можно разложить в ряды по функциям Лежандра. Плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z и поляризованная по оси x , описывается потенциалами

$$\begin{aligned} r\phi_{\text{пад}} &= -k^{-2} \cos \varphi \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} u_l(kr) P_l^1(\cos \theta), \\ r\psi_{\text{пад}} &= -ik^{-2} \sin \varphi \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} u_l(kr) P_l^1(\cos \theta). \end{aligned} \quad (4.9)$$

При получении этого результата была использована формула (2.57), а также рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра и функций Бесселя. Вследствие граничных условий, накладываемых на ϕ и ψ , рассеянная волна должна иметь зависимость от φ , как в (4.9). Поэтому

$$\begin{aligned} r\phi_{\text{расс}} &= -k^{-2} \cos \varphi \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} f_l(r) P_l^1(\cos \theta), \\ r\psi_{\text{расс}} &= -ik^{-2} \sin \varphi \sum_{l=1}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{l(l+1)} g_l(r) P_l^1(\cos \theta), \end{aligned}$$

где функции f_l и g_l в среде должны удовлетворять уравнениям

$$-f_l'' + l(l+1)r^{-2}f_l = (kn)^2 f_l, \quad -g_l'' + l(l+1)r^{-2}g_l = (kn)^2 g_l,$$

а вне среды — тем же уравнениям с $n = 1$. Следовательно, вне среды эти функции с точностью до множителя равны функциям Риккати — Ганкеля, а в среде — функциям Риккати — Бесселя; константы определяются из граничных условий. Результаты совпадают с теми, которые были получены в гл. 2, § 4 для случая $\mu = 1$, и нет необходимости приводить их еще раз.

2. Метод функций Грина

Использование функций Грина, соответствующих рассматриваемым граничным условиям, является обычным методом решения задач электродинамики. Однако обычно функции Грина используют при рассмотрении задач отыскания потенциалов или задач дифракции для случая идеально проводящих границ раздела или им подобных. Ниже мы разовьем метод, который обычно применяется в квантовой теории рассеяния, с такими изменениями, чтобы его можно было использовать в случае рассеяния электромагнитных волн.

Дифференциальные уравнения Максвелла (1.4) можно записать в виде

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) - k^2 \mathcal{E} = k^2 (n'^2 - 1) \mathcal{E} + \nabla \times [(1 - \mu^{-1}) \nabla \times \mathcal{E}], \quad (4.10)$$

где как показатель преломления n'

$$n'^2 = \varepsilon + \frac{4\pi i \sigma}{\omega},$$

так и магнитная проницаемость μ могут носить тензорный характер. Если μ не тензор, то (4.10), так же как и (1.6), можно переписать в следующей форме:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) - k^2 \mathcal{E} = k^2 (n^2 - 1) \mathcal{E} + \mu^{-1} (\nabla \mu) \times (\nabla \times \mathcal{E}), \quad (4.11)$$

где

$$n^2 = \mu n'^2.$$

С помощью тензорной функции Грина

$$\begin{aligned} \Gamma(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= (1 + k^{-2} \nabla \nabla) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3} \frac{1k^2 - \mathbf{k}'\mathbf{k}'}{k^2(k'^2 - k^2 - i\varepsilon)} e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \end{aligned} \quad (4.12)$$

записанной в диадных обозначениях, можно преобразовать дифференциальное уравнение (4.10) вместе с граничным условием рассеяния в одно интегральное уравнение. Эта функция Грина удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla \times (\nabla \times \Gamma) - k^2 \Gamma = 1\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (4.13)$$

а также условию

$$\nabla \cdot \Gamma = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'. \quad (4.14)$$

Кроме того, на больших расстояниях r она содержит только *расходящиеся* сферические волны. Таким образом, она удовлетворяет граничным условиям задачи рассеяния.

Интегральное уравнение для $\mathcal{E}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r})$ в обозначениях, введенных после формулы (2.75) (чтобы не путать функцию $\chi_{\mathbf{v}}$ с магнитной восприимчивостью, она снабжена индексом \mathbf{v}), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}) &= \mathcal{E}_0(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \Gamma(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \{k^2 (n'^2 - 1) \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}') + \\ &+ \nabla' \times [(1 - \mu^{-1}) \nabla' \times \mathcal{E}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}')]\}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Интегрирование производится только по объему рассеивателя.

Асимптотическое поведение электрического поля при $r \rightarrow \infty$ получается из асимптотической формулы для функции Грина. Так как при $r \gg r'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r(1 - 2\hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} r^{-1} + r'^2 r^{-2})^{1/2} \approx r - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \hat{\mathbf{r}} r,$$

то

$$\Gamma(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} (1 - \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}) \frac{e^{ikr}}{4\pi r} e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}. \quad (4.16)$$

Следовательно, если $kr \gg 1$ и r значительно больше размеров рассеивателя, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}) &\approx \mathcal{E}_0(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}) + \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \int d\mathbf{r}' (1 - \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} \times \\ &\times [k^2 (n'^2 - 1) + \nabla' \times (1 - \mu^{-1}) \nabla' \times] \mathcal{E}(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Падающая плоская волна описывается формулой (2.76):

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{k}\mathbf{v}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \chi_{\mathbf{v}},$$

где $\chi_{\mathbf{v}}$ — вектор круговой поляризации относительно направления волнового вектора \mathbf{k} , вдоль которого направлена ось z , а индекс \mathbf{v} равен ± 1 . Можно записать соотношение

$$(1 - \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{r}}) e^{-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'} = \sum_{\mathbf{v}' = \pm 1} \chi_{\mathbf{v}'} \mathcal{E}_0^*(\mathbf{k}'\mathbf{v}', \mathbf{r}'),$$

где $\mathbf{k}' = \hat{r}k$, а χ_v'' — вектор круговой поляризации относительно направления волнового вектора \mathbf{k}' , вдоль которого направлена ось z . Используя его, имеем

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}v, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \mathcal{E}_0(\mathbf{k}v, r) + r^{-1} e^{ikr} \sum_{v' = \pm 1} \chi_{v'}'' A(\mathbf{k}'v', \mathbf{k}v), \quad (4.18)$$

где амплитуда рассеяния определяется формулой

$$A(\mathbf{k}'v', \mathbf{k}v) = \frac{1}{4\pi} \int_{\text{По объему рассеивателя}} dr \mathcal{E}_0^*(\mathbf{k}'v', r) \cdot \{k^2(n'^2 - 1)\mathcal{E}(\mathbf{k}v, r) + \nabla \times [(1 - \mu^{-1})\nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{k}v, r)]\}. \quad (4.19)$$

Это выражение несколько упрощается после интегрирования по частям:

$$A(\mathbf{k}'v', \mathbf{k}v) = \frac{k^2}{4\pi} \int_{\text{По объему рассеивателя}} dr [\mathcal{E}_0^*(\mathbf{k}'v', r) \cdot (n'^2 - 1) \cdot \mathcal{E}(\mathbf{k}v, r) + \mathcal{H}_0^*(\mathbf{k}'v', r) \cdot (\mu - 1) \cdot \mathcal{H}(\mathbf{k}v, r)], \quad (4.20)$$

где индексы, которые характеризуют магнитное поле, соответствуют поляризации *электрического* поля, т. е.

$$\mathcal{H}_0(\mathbf{k}v, r) = -ik^{-1} \nabla \times \mathcal{E}_0(\mathbf{k}v, r)$$

и

$$\mu \mathcal{H}(\mathbf{k}v, r) = -ik^{-1} \nabla \times \mathcal{E}(\mathbf{k}v, r).$$

Разложим функцию Грина по базису векторных сферических гармоник. Так как

$$-\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{krr'} \sum_{l, m} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \Gamma_l(k; r, r') Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') (-1)^l, \quad (4.21)$$

где

$$\Gamma_l(k; r, r') = u_l(kr_{<}) \omega_l^{(\pm)}(kr_{>}) \quad (4.22)$$

(u_l и $\omega_l^{(\pm)}$ — сферические функции Риккати — Бесселя, определенные в гл. 2, § 2, п. 1), то, используя рекуррентные соотношения (2.69), получаем

$$\Gamma(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = (krr')^{-1} \sum_{JM\lambda\lambda'} Y_{JM}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}}) \Gamma_{\lambda\lambda'}^J(k; r, r') Y_{JM}^{(\lambda')*}(\hat{\mathbf{r}}') (-1)^J, \quad (4.23)$$

где¹⁾

$$\begin{aligned} \Gamma_{ee}^J &= u_J(kr_{<}) \omega_J^{(\pm)'}(kr_{>}), \\ \Gamma_{mm}^J &= -u_J(kr_{<}) \omega_J^{(\pm)}(kr_{>}), \\ \Gamma_{00}^J &= -\frac{J+1}{k^2 r r'} u_J(kr_{<}) \omega_J^{(\pm)}(kr_{>}), \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\Gamma_{e0}^J(k; r, r') = \Gamma_{0e}^J(k; r', r) = -\frac{[J(J+1)]^{1/2}}{k^2 r'} \frac{\partial}{\partial r} [u_J(kr_{<}) \omega_J^{(\pm)}(kr_{>})],$$

а все остальные Γ равны нулю. Теперь интегральное уравнение (4.15) можно спроектировать на состояния с определенными значениями $JM\lambda$.

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}v, r) = \frac{4\pi}{kr} \sum_{\substack{JM\lambda \\ J'M'\lambda'}} Y_{JM}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}}) \mathcal{E}_{JM, J'M'}^{\lambda\lambda'}(r) i^J Y_{J'M'}^{(\lambda')*}(\hat{\mathbf{k}}) \cdot \chi_{v'}'. \quad (4.25)$$

¹⁾ Символы \langle и \rangle обозначают соответственно наименьшее и наибольшее из двух величин r и r' .

Тогда

$$\mathcal{E}_{JM, J'M'}^{\lambda\lambda'}(r) = u_J(kr) \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \delta_{\lambda\lambda'} (\delta_{\lambda 0} - 1) + \\ + k^2 \sum_{\substack{J''M'' \\ \lambda''\lambda''}} \int_0^\infty dr' \Gamma_{\lambda\lambda''}^J(r, r') \mathfrak{Y}_{JM, J''M''}^{\lambda''\lambda''}(r') \mathcal{E}_{J''M'', J'M'}^{\lambda''\lambda''}(r'), \quad (4.26)$$

где

$$\mathfrak{Y}_{JM, J''M''}^{\lambda''\lambda''}(r) = i^{J+J''} \int d\Omega Y_{JM}^{(\lambda'')*}(\hat{r}) \cdot (n^2 - 1) \cdot Y_{J''M''}^{(\lambda'')}(\hat{r}). \quad (4.27)$$

Если рассеиватель является сферически симметричным, то n можно вынести за знак интеграла в (4.27):

$$\mathfrak{Y}_{JM, J''M''}^{\lambda''\lambda''}(r) = (-1)^J \delta_{JJ''} \delta_{MM''} \delta_{\lambda''\lambda''} [n^2(r) - 1].$$

Уравнение (4.26) сводится к более простой системе из трех зацепляющихся уравнений

$$\mathcal{E}_{JM}^{\lambda\lambda'}(r) = u_J(kr) \delta_{\lambda\lambda'} (\delta_{\lambda 0} - 1) + (-1)^J k^2 \sum_{\lambda''} \int_0^R dr' \Gamma_{\lambda\lambda''}^J(r, r') \times \\ \times [n^2(r') - 1] \mathcal{E}_{JM}^{\lambda''\lambda'}(r'). \quad (4.28)$$

Однако если n — тензор, то даже для однородного сферического рассеивателя уравнение для данного значения J оказывается зацепленным с уравнениями для $J \pm 2$ и уравнения (4.26) не расцепляются.

Если рассеиватель достаточно мал и имеет не слишком большую оптическую плотность, то интегральные уравнения (4.15) или (4.26) можно решить методом итераций. Строгие условия сходимости этого ряда последовательных приближений здесь рассматриваться не будут. Интегральное уравнение (4.15) и его аналог для парциальных волн (4.26) имеют точно такую же форму, как и соответствующее интегральное уравнение для рассеяния частицы потенциалом конечного радиуса действия в квантовой механике (см. гл. 9).

В случае когда $|n^2 - 1| \ll 1$ и, кроме того, $x |n^2 - 1| \ll 1$, в выражение (4.19) или (4.20) для амплитуды рассеяния достаточно подставить падающую плоскую волну $\mathcal{E}_0(\mathbf{k}\nu, \mathbf{r})$, т. е. «нулевое» приближение для решения уравнения (4.15). При этом мы получим так называемое *борновское приближение* квантовой механики

$$A(\mathbf{k}'\nu', \mathbf{k}\nu) \approx \frac{k^2}{4\pi} \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \chi_{\nu'}^{*\prime} \cdot [n^2 - 1 + \nu\nu'(\mu - 1)] \cdot \chi_{\nu}, \quad (4.29)$$

так как из определений (2.20) следует, что

$$\hat{\mathbf{k}} \times \chi_{\nu} = -i\nu\chi_{\nu}.$$

Если в качестве плоскости отсчета использовать плоскость рассеяния, то

$$\hat{\mathbf{e}}_y'' = \hat{\mathbf{e}}_y' = \hat{\mathbf{e}}_{\perp},$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x'' = \hat{\mathbf{e}}_x' \cos \theta - \hat{\mathbf{k}} \sin \theta = \hat{\mathbf{e}}_{\parallel} \cos \theta - \hat{\mathbf{k}} \sin \theta.$$

Следовательно, если n' и μ — не тензоры, то (4.29) сводится к результату Релея — Ганса (3.16). В общем случае эту формулу лучше всего оставить в виде (4.29), помня, что χ_1 есть базисный вектор для праввинтовой круговой поляризации.

§ 2. ПРИЧИННОСТЬ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ

1. Введение

Рассмотрим опять развитие процесса рассеяния во времени. Возьмем волновой пакет излучения, движущийся в направлении рассеивателя. По достижении рассеивателя во всех направлениях от него начинает расходиться рассеянное излучение. Для определенности рассмотрим сначала излучение, рассеянное вперед.

Так как энергия электромагнитного поля распространяется с конечной скоростью c , то «причинность» требует, чтобы в любой точке P позади рассеивателя не наблюдалось никакого рассеянного излучения до тех пор, пока не пройдет время, достаточное для того, чтобы падающее излучение достигло рассеивателя, а затем рассеянное излучение пришло в точку P . Это требование накладывает важное ограничение на поведение амплитуды рассеяния как функции частоты.

Разложим падающий волновой пакет, движущийся в направлении $\hat{\mathbf{k}}$, в интеграл Фурье:

$$\mathcal{E}_{\text{пад}}(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathcal{E}_{\text{пад}}(\omega) e^{i\omega [(1/c)\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - t]}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\mathcal{E}_{\text{пад}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{E}_{\text{пад}}(t, \mathbf{r}) e^{-i\omega [(1/c)\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - t]}.$$

Если к началу координат движется *резкий волновой фронт*, который достигает его в момент времени $t=0$, то в последней формуле интегрирование производится фактически от $t=t_0 \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/c$:

$$\mathcal{E}_{\text{пад}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{\infty} dt \mathcal{E}_{\text{пад}}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega(t-t_0)}.$$

Но в полученном интеграле, очевидно, можно считать частоту ω комплексной величиной, имеющей положительную мнимую часть. Так как производная по ω существует также и при $\text{Im } \omega > 0$, то каждая компонента поля $\mathcal{E}_{\text{пад}}(\omega)$ является граничным значением аналитической функции комплексного переменного ω , регулярной в верхней полуплоскости комплексной ω -плоскости¹⁾.

Более того, если $|\omega| \rightarrow \infty$ при $\text{Im } \omega > 0$, то $\mathcal{E}_{\text{пад}}(\omega)$ обращается в нуль. Наоборот, этих двух условий, аналитичности и асимптотического обращения в нуль, достаточно, чтобы гарантировать возможность вычисления интеграла Фурье для $\mathcal{E}_{\text{пад}}(t, \mathbf{r})$ при $t < t_0$ путем замыкания контура полуокружностью большого радиуса в верхней полуплоскости комплексного переменного ω ; по теореме Коши этот интеграл равен нулю.

¹⁾ Здесь нас интересуют скорее интуитивные соображения, показывающие, что приводимые преобразования Фурье являются граничными значениями аналитических функций, чем строгие математические доказательства. Вот почему ничего не говорится о квадратичной интегрируемости функций и т. д. Мы считаем само собой разумеющимся, что рассматриваемые функции стремятся к нулю на бесконечности при действительных значениях аргумента достаточно быстро, чтобы быть квадратично-интегрируемыми. Более подробное рассмотрение затронутых здесь математических вопросов можно найти в книге Титчмарша [838].

2. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед

Теперь мы перейдем к двухкомпонентным обозначениям, введенным в гл. 1, § 2, п. 1. В этом случае предыдущее рассмотрение, конечно, также применимо. При любой частоте компоненты волны, рассеянной вперед, определяются через компоненты падающей волны с помощью соотношения

$$\mathfrak{E}_{\text{расс}}(\omega) = \mathfrak{A}(\omega) \cdot \mathfrak{E}_{\text{пад}}(\omega),$$

где $\mathfrak{A}(\omega)$ — амплитуда рассеяния вперед. Требование причинности состоит в следующем: *если падающая волна отсутствует до тех пор, пока не начинается выполняться условие $t \geq t_0 = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/c$, то волна, рассеянная вперед, также отсутствует до момента времени $t \geq t_0$ (при $t_0 > 0$)*. Если это условие сформулировать для фурье-образов, оно означает, что если функция $\mathfrak{E}_{\text{пад}}(\omega)$ выбрана так, что она является граничным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного ω и обращающейся в ней в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$, то функция $\mathfrak{E}_{\text{расс}}(\omega)$ тоже должна обладать такими свойствами. Ясно, что это может иметь место только в том случае, если амплитуда рассеяния вперед $\mathfrak{A}(\omega)$ сама является граничным значением аналитической функции, регулярной в верхней полуплоскости комплексного переменного ω , и если при $|\omega| \rightarrow \infty$ она ограничена в верхней полуплоскости. Таким образом, указанные свойства амплитуды рассеяния являются следствием условия причинности.

Аналитическую функцию $f(\omega)$ можно представить в виде интеграла. Пусть $f(\omega)$ — граничное значение аналитической функции, регулярной в верхней полуплоскости, и пусть $f(\omega) \rightarrow 0$ в верхней полуплоскости при $|\omega| \rightarrow \infty$. Тогда интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega}$$

можно вычислить, замкнув контур интегрирования полуокружностью большого радиуса в верхней полуплоскости и используя затем теорему Коши о вычетах. Если $\text{Im } \omega > 0$, то полюс в точке $\omega = \omega'$ дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} = 2\pi i f(\omega).$$

Однако если $\text{Im } \omega < 0$, то результат равен нулю. Для действительных ω соответственно получаем

$$f(\omega) = \frac{1}{i\pi} \mathfrak{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad (4.30)$$

где главное значение интеграла Коши определяется формулой

$$\mathfrak{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{f(\omega')}{\omega' - \omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\omega') \left(\frac{1}{\omega' - \omega + i\epsilon} - \frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} \right).$$

Беря от (4.30) действительную и мнимую части, находим, что они связаны преобразованием Гильберта

$$\text{Re } f(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im } f(\omega')}{\omega' - \omega},$$

$$\text{Im } f(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Re } f(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (4.31)$$

Так как эти соотношения следуют одно из другого, то в дальнейшем мы будем рассматривать только первое из них.

Если функция $f(\omega)$ не обращается в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$ в области $\text{Im } \omega \geq 0$, но ограничена в этой области, то вместо нее можно взять функцию

$$g(\omega) = \frac{f(\omega) - f(\omega_0)}{\omega - \omega_0}.$$

Тогда, так же как и выше, получаем

$$\text{Re} \frac{f(\omega) - f(\omega_0)}{\omega - \omega_0} = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega' - \omega} \text{Im} \frac{f(\omega') - f(\omega_0)}{\omega' - \omega_0}$$

или для действительных ω_0

$$\text{Re} f(\omega) = \text{Re} f(\omega_0) + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \text{Im} [f(\omega') - f(\omega_0)] \frac{\omega - \omega_0}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)}. \quad (4.32)$$

Допустим сначала, что, кроме условия причинности, выполняется также требование того, чтобы амплитуда рассеяния вперед обращалась в нуль в пределе больших частот. Тогда она должна удовлетворять уравнению

$$\text{Re} \mathfrak{A}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\text{Im} \mathfrak{A}(\omega')}{\omega' - \omega}. \quad (4.33)$$

Это уравнение можно упростить, если использовать требование действительности поля. Для того чтобы зависящее от времени электрическое поле было действительным, его компоненты Фурье должны удовлетворять условию

$$\mathfrak{E}(-\omega) = \mathfrak{E}^*(\omega)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^{(L)}(-\omega) &= \mathfrak{E}^{(L)*}(\omega), \\ \mathfrak{E}^{(C)}(-\omega) &= \Upsilon \mathfrak{E}^{(C)*}(\omega), \end{aligned}$$

где

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Амплитуда рассеяния должна быть такой, чтобы каждая действительная падающая волна превращалась в действительную рассеянную волну. Поэтому для действительных ω амплитуда рассеяния должна удовлетворять соотношениям

$$\mathfrak{A}^{(L)}(-\omega) = \mathfrak{A}^{(L)*}(\omega), \quad \mathfrak{A}^{(C)}(-\omega) = \Upsilon \mathfrak{A}^{(C)*}(\omega) \Upsilon. \quad (4.34)$$

Это, в частности, означает, что $\text{Re} \mathfrak{A}^{(L)}(\omega)$ является четной функцией ω , а $\text{Im} \mathfrak{A}^{(L)}(\omega)$ — нечетной функцией ω . Тогда преобразование Гильберта принимает вид

$$\text{Re} \mathfrak{A}^{(L)}(\omega) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega' \omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \text{Im} \mathfrak{A}^{(L)}(\omega'). \quad (4.33a)$$

Приведенное уравнение приобретает особый интерес, если его использовать совместно с оптической теоремой (1.77). При этом для диагональных матричных элементов получаем

$$\text{Re} A_{ii}^{(L)}(\omega) = \frac{1}{2\pi^2 c} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega' \omega'^2}{\omega'^2 - \omega^2} \sigma_{\text{полн}}^{(i)}(\omega'). \quad (4.35)$$

Другими словами, требование причинности позволяет, зная зависимость полного сечения от частоты, вычислить амплитуду рассеяния вперед. Аналогичные уравнения для компонент с круговой поляризацией являются несколько более сложными.

Особенно важно то, что, используя приведенный результат, можно установить связь между показателем преломления n и коэффициентом поглощения среды γ . Согласно (1.98) и (1.101), эти величины выражаются через действительную часть амплитуды рассеяния вперед и полное сечение

$$n(\omega) = 1 + \frac{c}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega' (\omega'/\omega)^2}{\omega'^2 - \omega^2} \gamma(\omega'), \quad (4.36)$$

где n означает *геометрический* (действительный) показатель преломления; само собой разумеется, что n и γ относятся к одной и той же поляризации. Это соотношение выражает частотную зависимость показателя преломления через частотную зависимость коэффициента поглощения и, следовательно, определяет величину дисперсии; поэтому его обычно называют *дисперсионным соотношением*. Так же называют и соответствующее соотношение (4.35) для амплитуды рассеяния.

Дисперсионное соотношение (4.36), если понимать его буквально, в действительности не вытекает из (4.35) строго. Связь между амплитудой рассеяния вперед и показателем преломления существует только в пределе коротких волн, т. е. больших частот. Однако подтверждение дисперсионного соотношения для n можно получить непосредственно из уравнений Максвелла (1.4)

$$\nabla \times \mathcal{H} = -ikn^2 \mathcal{E}.$$

Если в верхней полуплоскости поле $\mathcal{E}(\omega)$ является аналитической функцией и обращается в нуль на бесконечности, то поле $\mathcal{H}(\omega)$ будет обладать теми же свойствами только в том случае, когда в верхней полуплоскости $n(\omega)$ будет аналитической функцией, ограниченной на бесконечности. Если ни $\mathcal{E}(\omega)$, ни $\mathcal{H}(\omega)$ не будет обладать указанными свойствами, то распространение в сфере резкого волнового фронта со скоростью света (или меньшей) будет невозможно. Вместо этого будет происходить утечка энергии с бесконечной скоростью. Если исключить эту возможность, то для выполнения дисперсионного соотношения

$$n(\omega) = 1 + \frac{c}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega' \gamma(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} \quad (4.37)$$

требуется еще дополнительное предположение, чтобы комплексный показатель преломления стремился к единице при $|\omega| \rightarrow \infty$ и чтобы он удовлетворял «условию вещественности» $n(-\omega) = n^*(\omega)$. Если сделать более сильное предположение

$$(n-1)\omega^2 \rightarrow 0 \text{ при } |\omega| \rightarrow \infty,$$

то приходим к формуле (4.36).

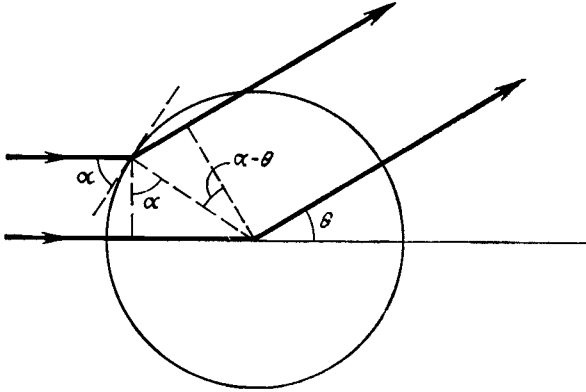
Между приведенными двумя дисперсионными формулами нет никакого противоречия. Действительно, если n быстро стремится к единице на бесконечности, то можно написать много других дисперсионных соотношений. «Более слабое» дисперсионное соотношение (4.37), для выполнения которого требуется только, чтобы $|n| \rightarrow 1$ при $|\omega| \rightarrow \infty$ и, следовательно, согласно (1.97), чтобы $|A(\omega)| = o(\omega^2)$, эквивалентно соотношению

$$\text{Re } A_{ii}^L(\omega) = \frac{\omega^2}{2\pi^2 c} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \sigma_{\text{полн}}^{L(i)}(\omega'). \quad (4.38)$$

Оно слабее (4.35) в том смысле, что для его выполнения требуется только, чтобы при $|\omega| \rightarrow \infty$ $\operatorname{Re} A_{ii}(\omega) = o(\omega^2)$, в то время как для выполнения (4.35) требуется, чтобы $\operatorname{Re} A_{ii}(\omega) = o(1)$. Каждая амплитуда, удовлетворяющая соотношению (4.35), также удовлетворяет и соотношению (4.38), но не наоборот.

3. Дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния на угол, отличный от нуля

Рассуждения, приводящие от условия причинности к дисперсионным соотношениям для амплитуды рассеяния вперед, можно обобщить и на случай амплитуд рассеяния на другие углы. Однако в этом случае момент времени t_0 , до которого рассеянная волна отсутствует, не совпадает с моментом времени,



Ф и г. 4.1. Оптическая длина пути при рассеянии на сфере.

до которого нет падающей волны. Как видно из фиг. 4.1 (R — радиус рассеивающей сферы и θ — угол рассеяния), луч, составляющий угол α с поверхностью, может сократить свой путь на величину

$$\Delta = R [\sin \alpha - \sin (\alpha - \theta)],$$

если направление его движения изменяется сразу после попадания на поверхность. Это уменьшение пути имеет максимальное значение

$$2R \sin \frac{1}{2} \theta = R |\hat{\mathbf{k}}' - \hat{\mathbf{k}}|,$$

когда $\alpha = 1/2\theta$. Таким образом, если $\mathcal{E}_{\text{пад}}(t, \mathbf{r}) = 0$ при $ct < \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}$, то $\mathcal{E}_{\text{расс}}(t, \mathbf{r}) = 0$ при

$$ct < \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - 2R \sin \frac{1}{2} \theta \equiv ct_1.$$

Итак, если $\mathcal{E}(\omega)$ является граничным значением аналитической функции, регулярной в верхней полуплоскости комплексного переменного ω , и обращается в нуль на бесконечности в области $\operatorname{Im} \omega > 0$, то всегда то же самое можно сказать и о функции

$$\begin{aligned} e^{2ikR \sin 1/2\theta} \mathcal{E}_{\text{расс}}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{\infty} dt \mathcal{E}_{\text{расс}}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega(t-t_0)} e^{i\omega(t_0-t_1)} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{\infty} dt \mathcal{E}_{\text{расс}}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega(t-t_1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, дисперсионным соотношениям удовлетворяет функция

$$e^{iR|\mathbf{k}'-\mathbf{k}|}\mathfrak{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = e^{2i\omega(R/c) \sin^{1/2}\theta}\mathfrak{A}(\omega; \theta, \varphi),$$

но необязательно сама функция $\mathfrak{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. При дополнительном предположении, что в области $\text{Im } \omega \geq 0$ функция $\mathfrak{A}(\omega; \theta, \varphi)$ обращается в нуль при $|\omega| \rightarrow \infty$, это означает, что

$$\begin{aligned} \text{Re} [e^{2i\omega(R/c) \sin^{1/2}\theta}\mathfrak{A}^{(L)}(\omega; \theta, \varphi)] = \\ = \frac{2}{\pi} \mathfrak{P} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \text{Im} [e^{2i\omega'(R/c) \sin^{1/2}\theta}\mathfrak{A}^{(L)}(\omega'; \theta, \varphi)]. \quad (4.39) \end{aligned}$$

Дисперсионное соотношение (4.39) для амплитуд рассеяния на угол, не равный нулю, зависит от радиуса R рассеивателя и оказывается значительно менее важным, чем соотношение (4.33а). В обе части равенства (4.39) входят как действительная, так и мнимая части амплитуды $\mathfrak{A}^{(L)}$. Более того, теперь с помощью оптической теоремы невозможно установить дополнительную связь между выражением в правой части формулы (4.39) и дополнительными экспериментально наблюдаемыми величинами.

Здесь представляется заманчивым рассматривать амплитуду рассеяния не как функцию частоты ω и угла θ (и φ), а как функцию ω и величины τ , $\tau \equiv 2\omega \sin^{1/2}\theta$ (и φ), так как тогда множитель

$$e^{2i\omega(R/c) \sin^{1/2}\theta} = e^{i\tau(R/c)},$$

доставляющий определенные неудобства, можно считать *постоянным* при $|\omega| \rightarrow \infty$.

Однако из этого следует, что если производить аналитическое продолжение амплитуды рассеяния в комплексную ω -плоскость, то угол рассеяния θ , а следовательно, и величина

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\omega} \right)^2$$

становятся комплексными. Для доказательства того, что амплитуда рассеяния является аналитической функцией ω , теперь уже недостаточно приведенных выше простых рассуждений, основанных на требовании причинности. Более того, даже если удастся показать, что амплитуда рассеяния обладает необходимыми свойствами регулярности, то соответствующее дисперсионное соотношение при фиксированном значении τ содержит «нефизическую область», в которой $\omega < \tau/2$ и, следовательно, $|\cos \theta| > 1$. Возможность такого рассмотрения далее исследоваться не будет.

4. Дисперсионные соотношения для парциальных волн

Рассуждения, основанные на требовании причинности, равным образом можно применить к сферическим волнам с фиксированными значениями J и M . Если сферическая волна, имеющая резкий фронт при $ct = r$, падает на рассеивающую сферу радиусом R , то расходящаяся сферическая волна должна отсутствовать вплоть до момента времени, при котором $ct = r - 2R$. Из этого следует, что если амплитуда падающей волны является граничным значением аналитической функции комплексного переменного ω , регулярной в верхней полуплоскости и обращающейся в нуль на бесконечности в области $\text{Im } \omega > 0$, то амплитуда расходящейся волны, умноженная на e^{2ihR} ,

¹⁾ На языке квантовой механики величина $\hbar\tau/c$ есть импульс, передаваемый рассеянному фотону, т. е. абсолютная величина разности между векторами начального и конечного импульсов фотона. Использование этой переменной вместо θ является часто более удобным.

с необходимостью обладает теми же свойствами. Следовательно, функция $e^{2ikR}\mathcal{S}^J$ должна быть граничным значением аналитической функции комплексного переменного ω или k , регулярной в верхней полуплоскости и ограниченной там при $|k| \rightarrow \infty$. В этом случае функция $e^{2ikR}\mathcal{S}^J$, конечно, не будет обращаться в нуль при $k \rightarrow \pm \infty$; таким образом, следует написать дисперсионное соотношение, подобное (4.32), т. е. «дисперсионное соотношение с одним вычитанием». Так как $\mathcal{S}(0) = 1$, то выбираем $k_0 = \omega_0/c = 0$ и получаем

$$\operatorname{Re} [e^{2ikR}\mathcal{S}^J(k)] = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' (k/k')}{k' - k} \operatorname{Im} [e^{2ik'R}\mathcal{S}^J(k')].$$

Из соответствующего соотношения (4.34) для амплитуды рассеяния для действительных k вытекает свойство

$$\mathcal{S}^J(-k) = \mathcal{S}^{J*}(k). \quad (4.40)$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{Re} [e^{2ikR}\mathcal{S}^J(k)] = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{dk' k'^2/k'}{k'^2 - k^2} \operatorname{Im} [e^{2ik'R}\mathcal{S}^J(k')]. \quad (4.41)$$

Если \mathcal{S}^J — диагональная матрица и если отсутствует поглощение, то, используя условие унитарности, дисперсионные соотношения можно преобразовать к виду

$$\cos [2\alpha_J(k) + 2kR] = 1 + \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{dk' k'^2/k'}{k'^2 - k^2} \sin [2\alpha_J(k') + 2k'R]. \quad (4.42)$$

Такое же соотношение имеет место для другого сдвига фаз β_J . Однако с большим успехом можно попытаться написать дисперсионные соотношения для $\ln \mathcal{S}^J$, т. е. для $\alpha_J(k)$ и $\beta_J(k)$. Прежде чем делать это, нужно устранить нули функции \mathcal{S}^J , которых обычно бесконечно много; в дисперсионных соотношениях они должны быть выделены в явном виде. Поэтому полезность этих соотношений ограничена.

§ 3. КОРРЕЛЯЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ (ЭФФЕКТ ХЭНБЕРИ-БРАУНА И ТВИССА)

Рассмотрим теперь недавно открытый метод измерения *фазы* амплитуды рассеяния как функции угла рассеяния. Этот метод основан на исследовании флуктуаций в некогерентных пучках. Для более ясного понимания основной идеи этого метода обратимся к обычному эксперименту по рассеянию и рассмотрим развитие процесса рассеяния во времени.

Можно представить себе, что некогерентный пучок электромагнитных волн состоит из случайной последовательности волновых пакетов, имеющих случайные фазы. Если такая волна является практически монохроматической, то в фиксированной точке пространства ее можно представить в виде

$$\mathcal{E}(t) = \sum_n \eta(t - t_n) (\mathcal{E}^{(n)} e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.}), \quad (4.43)$$

где функция $\eta(t)$ характеризует форму отдельного волнового пакета. Длительность каждого пакета во времени τ велика по сравнению с $1/\omega$. Если пучок достаточно интенсивный, так что имеется значительное перекрытие между последовательными пакетами, то в результате получается поле, амплитуда которого и фаза совершают «случайные» флуктуации, но таким образом, что большинство частот этих флуктуаций расположено в области частот, значи-

тельно меньших ω . Таким образом, можно написать

$$\mathfrak{E}(t) = E(t) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.} \quad (4.44)$$

Поток энергии в такой волне равен

$$S(t) = \frac{c}{4\pi} \{ [E^2(t) e^{-2i\omega t} + \text{Компл. сопр.}] + 2E^*(t) \cdot E(t) \}. \quad (4.45)$$

Первые два члена осциллируют во времени с частотой, близкой к 2ω , в то время как третий член изменяется во времени с более низкими частотами, содержащимися в функции $E(t)$. На практике для любого детектора измеряемый средний сигнал от первых двух членов будет равняться нулю; сигнал же от последнего члена, вообще говоря, отличен от нуля. В результате эффективный поток энергии будет определяться выражением

$$S_{\text{эфф}}(t) = \frac{c}{2\pi} E^*(t) \cdot E(t) = \frac{c}{2\pi} I(t), \quad (4.46)$$

а средний измеряемый поток будет равен

$$S = \langle S(t) \rangle = \langle S_{\text{эфф}}(t) \rangle = \frac{c}{2\pi} \langle I(t) \rangle. \quad (4.47)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и другие параметры Стокса данного пучка. Например, согласно (1.10), «мгновенное» значение параметра Стокса $Q(t)$ для волны (4.44) относительно некоторой плоскости отсчета имеет вид

$$Q(t) = |\mathfrak{E}_{\parallel}(t)|^2 - |\mathfrak{E}_{\perp}(t)|^2.$$

Эта величина автоматически является «эффективной», поскольку параметры Стокса определены так, чтобы они не были связаны с осцилляциями с частотой 2ω . Среднее значение параметра $Q(t)$ можно выразить через степень поляризации, угол наклона эллипса к плоскости отсчета χ и степень эллиптичности β . Согласно формуле (1.31), имеем

$$\langle Q(t) \rangle = -P \langle I(t) \rangle \cos 2\chi \cos 2\beta. \quad (4.48)$$

Аналогично определяются параметры $U(t)$ и $V(t)$, а затем и их средние значения

$$\begin{aligned} \langle U(t) \rangle &= P \langle I(t) \rangle \sin 2\chi \cos 2\beta, \\ \langle V(t) \rangle &= P \langle I(t) \rangle \sin 2\beta. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Эти соотношения определяют величины P , χ и β для пучка.

Флуктуации интенсивности вблизи ее среднего значения зависят от плотности пучка. Если средний промежуток времени между волновыми пакетами в (4.43) больше длительности отдельного пакета τ , то они редко будут перекрываться и интенсивность по существу будет принимать только два значения: нуль и значение, равное интенсивности одиночного пакета (которую можно принять постоянной). Если же имеется большое число перекрывающихся пакетов, так что, как правило, в данной точке пространства одновременно находится много волновых пакетов, то большую часть времени поле будет весьма мало вследствие случайного распределения фаз. Но эта малость будет компенсироваться редким появлением очень больших пиков, обусловленных случайным сложением волн. Чем плотнее пучок, тем реже и выше эти максимумы интенсивности. Этот эффект также известен под названием *эффекта складывания фотонов*. В квантовой механике его возникновение интерпретируется как следствие того, что фотоны являются бозонами и соответственно между ними возможно возникновение эффективного притяжения.

Используем теперь пучок (4.44) для рассмотрения экспериментов по рассеянию. Для монохроматической волны имеем

$$\mathfrak{E}(\omega)_{\text{расс}} = \mathfrak{U}(\omega) \cdot \mathfrak{E}(\omega)_{\text{пад}}.$$

Так как частоты флуктуаций малы по сравнению с ω , то из «условия вещественности» (4.34) для флуктуирующего пучка также получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\text{расс}}(t) &= \mathfrak{U}(\omega) \cdot E_{\text{пад}}(t) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.} = \\ &= E_{\text{расс}}(t) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.} \end{aligned} \quad (4.50)$$

[здесь рассматриваются компоненты с линейной поляризацией, хотя индекс (L) опущен]. Формула (4.50) будет правильной при условии, что вблизи ω амплитуда рассеяния \mathfrak{U} является гладкой функцией частоты, т. е. по существу постоянной в полосе частот пучка. Следовательно, эффективный рассеянный поток равен

$$S_{\text{эфф расс}}(t) = \frac{c}{2\pi} E_{\text{расс}}^*(t) \cdot E_{\text{расс}}(t) = \frac{c}{2\pi} E_{\text{пад}}^*(t) \cdot \mathfrak{U}^\dagger \cdot \mathfrak{U} \cdot E_{\text{пад}}(t). \quad (4.51)$$

Тогда так же, как в (1.60), для каждой из компонент вектора Стокса получим

$$\mathcal{J}_{\text{расс}}(t) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{J}_{\text{пад}}(t).$$

Усреднение обеих сторон этого равенства дает

$$\langle \mathcal{J}_{\text{расс}}(t) \rangle = \mathcal{F} \cdot \langle \mathcal{J}_{\text{пад}}(t) \rangle. \quad (4.52)$$

В частном случае, когда падающий пучок не поляризован, имеем

$$\begin{aligned} \langle I'(t) \rangle &= \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\omega} \langle I(t) \rangle, \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{2} (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2 + |A_{21}|^2 + |A_{22}|^2). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Отметим, что результаты измерений такого типа вовсе не зависят от фаз амплитуд рассеяния, а зависят только от их абсолютных величин. Следовательно, с помощью такого эксперимента нельзя определить фазу. Более того, из формул (1.61) — (1.63) или (1.70) видно, что даже если падающий пучок поляризован и измерены параметры поляризации, то и тогда *суммарная фаза матрицы амплитуды рассеяния не входит в \mathcal{F} и в матрицу плотности и, следовательно, таким путем ее измерить нельзя.*

Допустим теперь, что одновременно выполняются два эксперимента по рассеянию с двумя пучками и двумя детекторами (фиг. 4.2). Пусть первый пучок имеет вид

$$\mathfrak{E}_1(t) = E_1(t) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.},$$

а второй

$$\mathfrak{E}_2(t) = E_2(t) e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.}$$

Предполагается, что пучки независимы друг от друга, т. е. некогерентны. Тогда абсолютные величины и фазы функций E_1 и E_2 флуктуируют независимо. Для простоты будем сначала считать, что все четыре пучка лежат в одной плоскости, что оба падающих пучка полностью поляризованы в направлении, перпендикулярном этой плоскости, и что каждый детектор регистрирует излучение, поляризованное только в этом направлении. Если посредством $A(ji)$ обозначить амплитуду рассеяния на частоте ω i -го пучка в направлении j -го детектора, то компонента рассеянного поля, которую регистрирует j -й детектор, будет равна

$$\mathfrak{E}_j(t) = [A(j1) E_1(t) + A(j2) E_2(t)] e^{-i\omega t} + \text{Компл. сопр.}$$

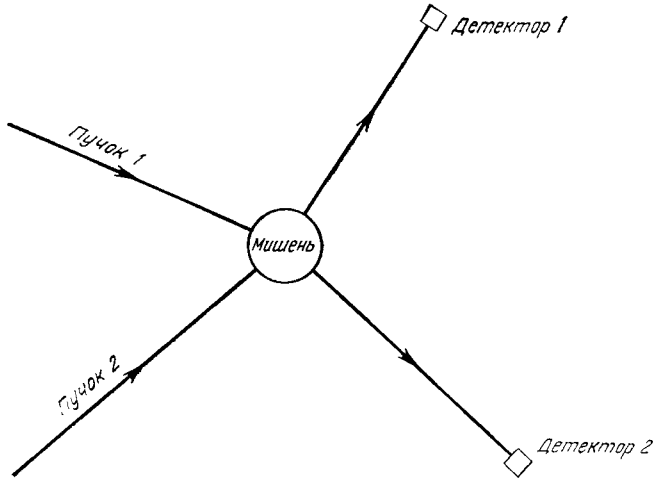
Поток на j -й детектор, усредненный по промежутку времени, большому по сравнению с $1/\omega$, но малому по сравнению с характерными временами флуктуаций, определяется формулой

$$S_j(t) = \frac{c}{4\pi} \{ [A^*(j1) E_1^*(t) + A^*(j2) E_2^*(t)] [A(j1) E_1(t) + A(j2) E_2(t)] + \text{Компл. сопр.} \} =$$

$$= \frac{c}{2\pi} [|A(j1)|^2 I_1(t) + |A(j2)|^2 I_2(t) + A^*(j1) A(j2) E_1^*(t) E_2(t) +$$

$$+ A(j1) A^*(j2) E_1(t) E_2^*(t)]. \quad (4.54)$$

Если это выражение усреднить, то вследствие независимости фаз первого



Ф и г. 4.2. Рассеяние двух пучков в двух направлениях.

и второго пучков последние два члена обращаются в нуль и мы получим

$$\langle S_j(t) \rangle = |A(j1)|^2 \langle S_{1\text{пад}}(t) \rangle + |A(j2)|^2 \langle S_{2\text{пад}}(t) \rangle. \quad (4.55)$$

Пусть детекторы устроены так, что они регистрируют излучение только тогда, когда оно попадает на них одновременно, т. е. измеряют мгновенное произведение двух потоков. В этом случае будем иметь

$$S_1(t) S_2(t) = \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 \{ |A(11)|^2 I_1 + |A(12)|^2 I_2 [|A(21)|^2 I_1 + |A(22)|^2 I_2] +$$

$$+ [A(11) A^*(12) A^*(21) A(22) + \text{Компл. сопр.}] I_1 I_2 \} \quad (4.56)$$

плюс члены, которые с учетом независимости фаз пучков \mathfrak{E}_1 и \mathfrak{E}_2 при усреднении обращаются в нуль. Таким образом, усредненные значения равны

$$\langle S_1(t) S_2(t) \rangle = \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 [|A(11)|^2 |A(21)|^2 \langle I_{1\text{пад}}^2 \rangle + |A(22)|^2 |A(12)|^2 \langle I_{2\text{пад}}^2 \rangle +$$

$$+ |A(11) A(22) + A(12) A(21)|^2 \langle I_{1\text{пад}} I_{2\text{пад}} \rangle]; \quad (4.57)$$

результат зависит не только от величины четырех амплитуд рассеяния, но также и от их относительных фаз. Изменяя углы, под которыми расположены детекторы, можно измерить зависимость фазы от угла рассеяния. Единственной величиной, которая остается неопределенной, является постоянное слагаемое в фазе, не зависящее от угла. Его можно определить, измеряя полное сечение и используя оптическую теорему.

Выражение (4.57) можно упростить, если расписать в явном виде среднее от квадрата флуктуации

$$\langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle \equiv \Delta I^2 = \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2$$

и использовать независимость двух падающих пучков

$$\langle I_{1\text{пад}} I_{2\text{пад}} \rangle = \langle I_{1\text{пад}} \rangle \langle I_{2\text{пад}} \rangle.$$

Тогда с помощью (4.55) получим

$$\begin{aligned} \langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle = & 2 \operatorname{Re} [A(11) A(22) A^*(12) A^*(21)] \langle S_{1\text{пад}} \rangle \langle S_{2\text{пад}} \rangle + \\ & + |A(11)|^2 |A(21)|^2 \Delta S_{1\text{пад}}^2 + |A(22)|^2 |A(12)|^2 \Delta S_{2\text{пад}}^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Второй и третий члены значительно меньше первого, так что весьма хорошим приближением является формула

$$\langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle \approx 2 \operatorname{Re} [A(11) A(22) A^*(12) A^*(21)] \langle S_{1\text{пад}} \rangle \langle S_{2\text{пад}} \rangle. \quad (4.59)$$

Ясно, что среднее от произведения двух потоков в один момент времени на практике не может быть измерено двумя детекторами. Всегда существует некоторый интервал времени T между сигналами от двух детекторов, отчасти обусловленный электронной схемой, а отчасти тем, что расстояния, проходимые излучением до каждого детектора, невозможно сделать *строго* одинаковыми. Следовательно, в действительности нужно вычислять величину

$$\begin{aligned} S_1(t) S_2(t-T) = & \\ = \left(\frac{c}{2\pi}\right)^2 \{ & [|A(11)|^2 I_1(t) + |A(12)|^2 I_2(t)] [|A(21)|^2 I_1(t-T) + \\ & + |A(22)|^2 I_2(t-T)] + [A^*(11) A(12) A(21) A^*(22) E_1^*(t) \times \\ & \times E_1(t-T) E_2(t) E_2^*(t-T) + \text{Компл. сопр.}] \} \end{aligned} \quad (4.60)$$

плюс члены, которые при усреднении обращаются в нуль. Следует различать два предельных случая. Если время задержки T мало по сравнению с характерным временем флуктуаций T_0 , т. е. мало по сравнению с обратной характерной частотой шума, то $E(t) \approx E(t-T)$ и мы получаем те же самые результаты, которые описываются формулами (4.56) — (4.59). Однако если время T больше, чем *время когерентности* T_c , то $E(t)$ и $E(t-T)$ *независимы* и последний член в (4.60) при усреднении обращается в нуль. Тогда интересующий нас эффект исчезает. Причина этого, конечно, заключается в том, что если $T > T_c$, то из независимости $S(t)$ и $S(t-T)$ непосредственно следует, что

$$\langle S_1(t) S_2(t-T) \rangle = \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle.$$

В промежуточном случае, когда T не мало по сравнению с характерным периодом шумов T_0 , но и невелико по сравнению с временем когерентности T_c ,

$$\langle E_i^*(t) E_i(t-T) \rangle \equiv \langle I_i \rangle \gamma_i(T),$$

где γ_i называется *степенью внутренней когерентности* i -го пучка. Пренебрегая опять флуктуационными членами, вместо (4.59), получаем

$$\begin{aligned} \langle S_1(t) S_2(t-T) \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle = & \\ = 2 \operatorname{Re} [A(11) A(22) A^*(12) A^*(21)] \langle S_{1\text{пад}} \rangle \langle S_{2\text{пад}} \rangle \gamma_1(T) \gamma_2(T). \end{aligned} \quad (4.59a)$$

Аналогичные видоизменения можно внести и в случае, когда оба падающих пучка частично когерентны. Тогда можно ввести понятие *степени взаимной когерентности*.

Обобщим эти результаты сначала на случай, когда детекторы регистрируют обе компоненты, соответствующие обоим компонентам поляризации (падающие пучки по-прежнему полностью поляризованы, и все четыре пучка лежат в одной плоскости). Тогда полный поток на детектор определяется не (4.54), а выражением

$$S_j(t) = \frac{c}{2\pi} \{ [\mathfrak{A}^\dagger(j1) \mathfrak{A}(j1)]_{11} I_{1\text{пад}} + [\mathfrak{A}^\dagger(j2) \mathfrak{A}(j2)]_{22} I_{2\text{пад}} + + [\mathfrak{A}^\dagger(j1) \mathfrak{A}(j2)]_{12} E_1^* E_2 + [\mathfrak{A}^\dagger(j2) \mathfrak{A}(j1)]_{21} E_2^* E_1 \}. \quad (4.61)$$

Подразумевается, что здесь матрицы амплитуды рассеяния имеют в качестве плоскости отсчета плоскость рассеяния. Для среднего значения произведения двух потоков, соответствующих одному моменту времени, вместо (4.57) получаем

$$\langle S_1(t) S_2(t) \rangle = \left(\frac{c}{2\pi} \right)^2 \{ [\mathfrak{A}^\dagger(11) \mathfrak{A}(11)]_{11} [\mathfrak{A}^\dagger(21) \mathfrak{A}(21)]_{11} \langle I_{1\text{пад}}^2 \rangle + + [\mathfrak{A}^\dagger(12) \mathfrak{A}(12)]_{22} [\mathfrak{A}^\dagger(22) \mathfrak{A}(22)]_{22} \langle I_{2\text{пад}}^2 \rangle + + [[\mathfrak{A}^\dagger(11) \mathfrak{A}(11)]_{11} [\mathfrak{A}^\dagger(22) \mathfrak{A}(22)]_{22} + + [\mathfrak{A}^\dagger(12) \mathfrak{A}(12)]_{22} [\mathfrak{A}^\dagger(21) \mathfrak{A}(21)]_{11}] \langle I_{1\text{пад}} \rangle \langle I_{2\text{пад}} \rangle + + 2 \operatorname{Re} [[\mathfrak{A}^\dagger(11) \mathfrak{A}(12)]_{12} [\mathfrak{A}^\dagger(22) \mathfrak{A}(21)]_{21}] \langle I_{1\text{пад}} \rangle \langle I_{2\text{пад}} \rangle \}$$

и, следовательно, вместо (4.58) имеем

$$\langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle = 2 \operatorname{Re} \{ [\mathfrak{A}^\dagger(11) \mathfrak{A}(12)]_{12} [\mathfrak{A}^\dagger(22) \mathfrak{A}(21)]_{21} \langle S_{1\text{пад}} \rangle \langle S_{2\text{пад}} \rangle + + [\mathfrak{A}^\dagger(11) \mathfrak{A}(11)]_{11} [\mathfrak{A}^\dagger(21) \mathfrak{A}(21)]_{11} \Delta S_{1\text{пад}}^2 + + [\mathfrak{A}^\dagger(22) \mathfrak{A}(22)]_{22} [\mathfrak{A}^\dagger(12) \mathfrak{A}(12)]_{22} \Delta S_{2\text{пад}}^2 \}. \quad (4.62)$$

Последними двумя членами опять-таки можно пренебречь, а первый член аналогичен (4.59) в случае, когда регистрируется излучение с любой поляризацией. Индексы у произведения матриц указывают направление поляризации обоих падающих пучков.

Допустим теперь, что оба пучка не поляризованы. Тогда можно считать, что каждый из них состоит из двух некогерентных компонент, соответствующих двум направлениям поляризации, причем фазы компонент изменяются случайным образом независимо друг от друга. После усреднения члены типа

$$\mathfrak{A}(11) \cdot E_1(t) E_1^*(t) \cdot \mathfrak{A}^\dagger(21)$$

принимают вид

$$\frac{1}{2} \mathfrak{A}(11) \mathfrak{A}^\dagger(21) I_1(t),$$

поскольку перекрестные члены, содержащие произведение различных компонент E_1 и E_1^* , при усреднении обращаются в нуль. В результате получаем

$$\langle S_j \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [\mathfrak{A}^\dagger(j1) \mathfrak{A}(j1)] \langle S_{1\text{пад}} \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [\mathfrak{A}^\dagger(j2) \mathfrak{A}(j2)] \langle S_{2\text{пад}} \rangle$$

и

$$\langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle = \frac{1}{4} \sum_j \{ [\mathfrak{A}^\dagger(1j) \mathfrak{A}(1j)]_{12} [\mathfrak{A}^\dagger(2j) \mathfrak{A}(2j)]_{21} + + [\mathfrak{A}^\dagger(1j) \mathfrak{A}(1j)]_{21} [\mathfrak{A}^\dagger(2j) \mathfrak{A}(2j)]_{12} \} \langle S_{j\text{пад}} \rangle^2 + + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \operatorname{Sp} [\mathfrak{A}^\dagger(11) \mathfrak{A}(12) \mathfrak{A}^\dagger(22) \mathfrak{A}(21)] \langle S_{1\text{пад}} \rangle \langle S_{2\text{пад}} \rangle \quad (4.63)$$

плюс пренебрежимо малые члены, пропорциональные средним флуктуациям. Первая сумма является новым членом, который своим существованием обязан тому факту, что детекторы не различают поляризации. Индексы в этом члене относятся к двум компонентам матрицы *произведения* $S_1 S_2$, имеющим различную поляризацию.

Рассмотренную экспериментальную установку можно видоизменить так, чтобы два падающих пучка заменились одним неполяризованным. Тогда вместо двух пучков, рассмотренных в предыдущем эксперименте, можно рассматривать компоненты одного пучка, соответствующие двум различным направлениям поляризации. Конечно, рассеиватель должен быть таким, чтобы при рассеянии пучка, имеющего одно из двух направлений поляризации, в рассеянном пучке присутствовали компоненты с обоими направлениями поляризации, т. е. он должен поворачивать плоскость поляризации. Тогда результат можно получить либо из формулы (4.63), положив $S_{2 \text{ пад}} = 0$, либо из формулы (4.62), если считать, что поток $S_{2 \text{ пад}}$ идет вдоль того же направления, что и $S_{1 \text{ пад}}$, но имеет другую поляризацию

$$\langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ [\mathfrak{Y}^\dagger(1) \mathfrak{Y}(1)]_{12} [\mathfrak{Y}^\dagger(2) \mathfrak{Y}(2)]_{21} \} \langle S_{\text{пад}} \rangle^2. \quad (4.64)$$

На этот раз достаточно указать, какому направлению расходящейся волны соответствует амплитуда рассеяния. Таким путем можно измерить компоненты амплитуды рассеяния, соответствующие различной поляризации, для случая неполяризованного пучка, не определяя поляризацию рассеянной волны. Например, если рассеиватель обладает полной вращательной и зеркальной симметрией, то, согласно рассмотрению, проведенному в гл. 1, § 3, п. 8, $A_{11}^C = A_{22}^C$ и $A_{12}^C = A_{21}^C$. Так как нужно использовать амплитуды рассеяния, которые отнесены к плоскостям отсчета, проходящим через фиксированное направление, то, согласно (1.55), для единичного падающего потока правая часть равенства (4.64) принимает вид

$$2 \text{Re} [A_{11}^{C*}(1) A_{12}^C(1) e^{-2i\varphi_1}] \text{Re} [A_{11}^{C*}(2) A_{12}^C(2) e^{-2i\varphi_2}].$$

Конечно, суммарная фаза амплитуды рассеяния таким образом не измеряется.

Далее можно использовать один неполяризованный падающий пучок и два детектора, расположенные почти в одном и том же месте, но чувствительные к излучениям с различными поляризациями. В этом случае формула (4.59) дает

$$\langle S_1 S_2 \rangle - \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} (A_{11} A_{22} A_{12}^* A_{21}^*) \langle S_{\text{пад}} \rangle^2,$$

причем амплитуды рассеяния являются компонентами матриц $\mathfrak{Y}_{\text{фикс}}^{(L)}$ или $\mathfrak{Y}_{\text{фикс}}^{(C)}$ в зависимости от того, какую поляризацию выделяют детекторы, линейную или круговую.

Если падающие пучки только *частично* поляризованы, то возможны и другие эффекты. В этом случае результаты значительно сложнее и мы их рассматривать не будем.

Если два детектора не лежат в той же плоскости, в которой лежат падающие пучки, то используемые амплитуды рассеяния должны относиться к плоскости отсчета, проходящей через фиксированное направление. Это направление наиболее удобно выбрать перпендикулярно плоскости, в которой лежат оба падающих пучка. Тогда все соотношения, полученные выше, по-прежнему сохраняют силу, за исключением того что изменяется смысл амплитуд в (4.63).

КОММЕНТАРИИ

К § 1, п. 1. Оба скалярных потенциала были введены Дебаем [202]. Из более поздних работ, в которых используются эти потенциалы, можно указать работы Стрэттона [803], Хюльста [857] и Джексона [426].

К § 1, п. 2. Более подробное изложение метода функций Грина применительно к электромагнитной теории можно найти в работах Зоммерфельда [788], Морса и Фешбаха [615], т. 1, Джексона [426] и особенно Левина и Швингера [526]. Из более ранних работ, в которых использовался метод функций Грина, укажем, например, работы Зоммерфельда [784, 785].

К § 2, п. 1. Более подробно свойства преобразования Гильберта изложены в книге Титчмарша [838]. Дисперсионное соотношение (4.36) впервые было получено Кронигом [504] и Крамерсом [501]. И тот и другой получили его как предельный случай в теории дисперсии резонансного поглощения, обусловленной атомными линиями, но только Крамерс связал этот результат с условием причинности. Более подробное рассмотрение дисперсионных соотношений можно найти в опубликованных сравнительно недавно статьях [864, 845], в которых также содержатся дополнительные ссылки; см. также работы [385, 324].

К § 3. То обстоятельство, что измерение корреляций флуктуаций интенсивности может оказаться полезным, было обнаружено Хэнбери-Брауном и Твиссом [115—117]. Этот метод был также рассмотрен Парселлом [699] и позднее Гольдбергером и др. [342]. Последние рассмотрели также аналогичные возможности в квантовой механике, которые в настоящей книге излагаться не будут. Принципы, лежащие в их основе, конечно, те же самые.

Совсем недавно флуктуационные явления и явления, связанные с когерентностью, были рассмотрены в электродинамике Манделем и Вольфом [568], а в квантовой механике Гольдбергером и Ватсоном [346, 347].

Подробное рассмотрение шумовых явлений и явлений флуктуаций электромагнитных волн проведено в книгах Лоусона и Уленбека [516], а также Борна и Вольфа [92], гл. 10.

Степень когерентности квантовых полей излучения рассматривалась в работах [335—337, 567, 807, 841, 842].

К части I. Кроме литературы, приведенной в конце каждой главы части I, в качестве литературы общего характера можно рекомендовать книги [488, 802].

ЗАДАЧИ

1. Вывести формулы (4.23) и (4.24).

2. Допустим, что $A(\omega)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости комплексной ω -плоскости и что в верхней полуплоскости при $|\omega| \rightarrow \infty$ она стремится к бесконечности, как $|\omega|$. Вывести дисперсионные соотношения для этого случая.

3. Уравнения Максвелла действительны. Какова же причина того, что возникает различие между случаями $+i$ и $-i$, которое вытекает из того факта, что амплитуда рассеяния аналитична в *верхней* полуплоскости комплексной ω -плоскости, а не в нижней.

4. В квантовой теории рассеяния амплитуда рассеяния может иметь полюсы в верхней полуплоскости k -плоскости. Почему она не имеет полюсов в случае рассеяния электромагнитных волн?

5. Рассмотреть рассеяние электромагнитных волн пузырьками воздуха, находящимися в среде с бесконечным показателем преломления. Изменится ли вывод дисперсионных соотношений? Если да, то каким образом?

*

Часть II

КЛАССИЧЕСКАЯ

ТЕОРИЯ

РАССЕЯНИЯ

ЧАСТИЦ

*

ГЛАВА 5

Рассеяние частиц в классической механике

§ 1. УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ И УГОЛ ОТКЛОНЕНИЯ

1. Нерелятивистский случай

Рассеяние классических частиц в поле центральных сил или друг на друге описывается посредством представления о траекториях движения частиц. Траектория наиболее просто получается из гамильтониана с помощью уравнения Гамильтона — Якоби.

Пусть частица массы m подвергается действию поля консервативных сил с потенциалом V . Будем считать, что потенциал V инвариантен относительно пространственных вращений, так что он зависит только от расстояния r между частицей и силовым центром. Можно также рассматривать две частицы в системе их центра масс, взаимодействие между которыми описывается потенциалом V . Тогда m и r будут означать приведенную массу двух частиц и расстояние между ними. Второй случай сводится к первому в пределе, когда масса одной из частиц стремится к бесконечности и она перестает испытывать отдачу.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r). \quad (5.1)$$

Вектор импульса можно разложить на его r -, ϑ - и φ -компоненты

$$p^2 = p_r^2 + r^{-2}p_\vartheta^2 + r^{-2}\operatorname{cosec}^2\vartheta p_\varphi^2 = p_r^2 + r^{-2}J^2, \quad (5.2)$$

где J — абсолютная величина сохраняющегося полного углового момента. При этом уравнение Гамильтона — Якоби для радиальной части характеристической функции Гамильтона принимает вид

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2mr^2} J^2 + V(r) = E$$

и соответственно

$$S(r, \vartheta) = \int dr [2m(E - V) - r^{-2}J^2]^{1/2} + J\vartheta.$$

Уравнение траектории получается из последнего выражения путем дифференцирования его по J :

$$\vartheta = J \int_r^\infty dr r^{-2} (p^2 - \mathcal{V}' - r^{-2}J^2)^{-1/2}. \quad (5.3)$$

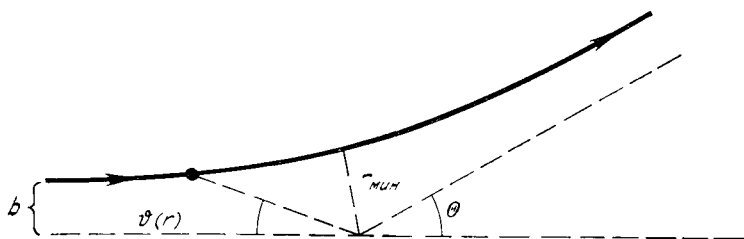
Здесь ϑ — угол, показанный на фиг. 5.1, p — асимптотическое значение импульса частицы и $\mathcal{V}' = 2mV$. Траектория является симметричной относительно кратчайшей прямой r_{\min} , соединяющей центр силового поля с наименее

удаленной от него точкой траектории частицы. Соответственно угол отклонения Θ определяется выражением

$$\Theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} dr r^{-2} [(p^2 - \mathcal{V}(r)) J^{-2} - r^{-2}]^{-1/2}, \quad (5.4)$$

где r_{\min} — наибольшее значение r , при котором корень обращается в нуль.

Прицельный параметр b определяется (фиг. 5.1) как расстояние от линии, по которой частица движется вдали от центра поля сил, до линии, по кото-



Ф и г. 5.1. Траектория частицы.

рой она движется при лобовом столкновении. Соответственно он связан с угловым моментом частицы и с асимптотическим значением ее импульса и энергией соотношением

$$J = pb = \sqrt{2mEb}. \quad (5.5)$$

Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} dr r^{-2} \left[b^{-2} \left(1 - \frac{V}{E} \right) - r^{-2} \right]^{-1/2} = \\ &= \pi - 2 \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^2} \{ \xi^2 [1 - f(\xi)] - 1 \}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\xi = \frac{r}{b}, \quad f(\xi) = \frac{V(b\xi)}{E}, \quad (5.7)$$

а ξ_0 определяется уравнением

$$f(\xi_0) = 1 - \xi_0^{-2}. \quad (5.8)$$

Отметим, что поскольку дело касается угла отклонения, то изменения энергии или прицельного параметра эквивалентны просто изменениям формы кривой потенциальной энергии. Изменение E эквивалентно изменению вертикального масштаба потенциала, а изменение b — изменению его горизонтального масштаба.

2. Релятивистский случай

Связь между энергией и импульсом свободной частицы в релятивистском случае имеет вид

$$W^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2.$$

Здесь энергия W включает в себя как кинетическую энергию, так и энергию покоя. В нерелятивистском пределе, когда

$$p^2 \ll m^2 c^2,$$

соотношение между энергией и импульсом переходит в

$$W \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

причем в нерелятивистском случае сохраняется только второй член.

Если частица находится под действием силового поля с потенциалом $V(r)$. то ее гамильтониан в релятивистском случае определяется формулой

$$H = (\mathbf{p}^2 + m^2c^2)^{1/2} c + V = (p_r^2 + m^2c^2 + J^2r^{-2})^{1/2} c + V \quad (5.9)$$

или

$$(H - V)^2 c^{-2} = p_r^2 + m^2c^2 + J^2r^{-2}. \quad (5.9a)$$

Соответственно уравнение Гамильтона — Якоби для характеристической функции Гамильтона принимает вид

$$(W - V)^2 c^{-2} = \left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 + J^2r^{-2} + m^2c^2.$$

Поэтому для уравнения траектории вместо (5.3) получаем

$$\theta = J \int_r^\infty dr r^{-2} [(W - V)^2 c^{-2} - m^2c^2 - J^2r^{-2}]^{-1/2}.$$

Обозначая асимптотическое значение импульса частицы опять через p , для угла отклонения Θ вместо (5.4) имеем

$$\Theta = \pi - 2J \int_{r_{\min}}^\infty dr r^{-2} [p^2 - V(2W - V) c^{-2} - J^2r^{-2}]^{-1/2}. \quad (5.10)$$

Сравнение формул (5.4) и (5.10) показывает, что (5.10) имеет в точности такой же вид, как и (5.4), только величина \mathcal{V} равна теперь не $2mV$, а

$$\mathcal{V} = V(2W - V) c^{-2}. \quad (5.11)$$

В нерелятивистском пределе в круглых скобках в (5.11) преобладающим становится слагаемое с энергией покоя mc^2 и правая часть формулы (5.11), как и должно быть, переходит в $2mV$.

Первая и главная особенность эффективного потенциала \mathcal{V} состоит в том, что если он сингулярен, то он *всегда отрицателен* независимо от знака V . Однако поскольку область $2W < V$ для частицы энергетически недоступна, это изменение знака физически несущественно.

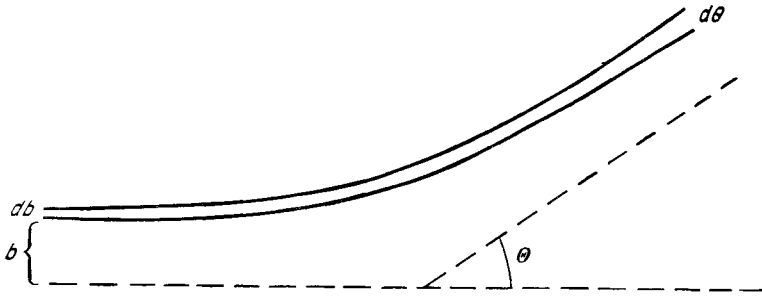
Вторая особенность формулы (5.11) состоит в следующем: если потенциал V сингулярен, то в релятивистском случае \mathcal{V} значительно более сингулярно, чем в нерелятивистском случае, причем сингулярность \mathcal{V} становится почти «квадратичной» по сравнению с сингулярностью V . Мы вернемся к этому вопросу в § 6.

Третьей особенностью формулы (5.11) является то, что эффективный релятивистский потенциал \mathcal{V} *зависит от энергии*. Чем больше энергия, тем больше эффективные силы.

Отметим, что задача релятивистского потенциального рассеяния является весьма искусственной. Хотя в математическом отношении ее постановка полностью оправдана, с физической точки зрения она не последовательна, так как при этом не учитываются важные эффекты запаздывания. Физически приемлемую теорию (не квантовомеханическую) следует развивать отдельно для каждого конкретного вида взаимодействия. Одним из примеров такой теории является электродинамика, другим — общая теория относительности. Таким образом, свобода в выборе потенциала весьма мала, если только она вообще существует.

§ 2. СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

В экспериментах по рассеянию не наблюдают траекторию отдельной частицы. Вместо этого на мишень направляют «пучок» частиц, в идеальном случае имеющих одинаковую энергию, и измеряют поток частиц, рассеянных в некотором направлении. Это означает, что падающие частицы не обладают ни фиксированным прицельным параметром, ни фиксированным азимутальным углом, а равномерно распределены по φ (относительно направления падения пучка, выбранного в качестве оси z) и по b (фиг. 5.2). Однако все падающие частицы, заключенные в «трубке», площадь сечения которой равна $b db d\varphi$, будут рассеиваться в бесконечно малый телесный угол $d\varphi d\theta \sin \theta$, где угол θ



Ф и г. 5.2. «Трубка» отклонения.

связан с b формулой (5.6). Таким образом, если N — плотность потока частиц в падающем пучке, то поток частиц в телесный угол $d\Omega$ в данном направлении (θ, φ) равен

$$N \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = N \frac{d\sigma}{d\Omega} d\varphi d\theta \sin \theta = N b db d\varphi$$

или

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b \operatorname{cosec} \theta}{|d\theta/db|}. \quad (5.12)$$

Чтобы найти $b(\Theta)$, нужно вычислить по формуле (5.6) угол отклонения Θ как функцию b и затем найти обратную функцию.

Из (5.12) сразу же вытекает, что если рассеивающий потенциал имеет бесконечный радиус действия, так что он отклоняет частицы с *любыми* прицельными параметрами, то дифференциальное сечение для рассеяния вперед всегда бесконечно, причем оно стремится к бесконечности быстрее, чем $1/\theta$. Это следствие того факта, что при $b \rightarrow \infty$ угол Θ стремится к нулю и, более того, при $b \rightarrow \infty$ (т. е. при $\Theta \rightarrow 0$) $d\theta/db$ тоже стремится к нулю. Следовательно, стремление величины $(d\sigma/d\Omega) \sin \theta$ к бесконечности при $\Theta \rightarrow 0$ обусловлено поведением в (5.12) как числителя, так и знаменателя.

Следует сказать несколько слов о соотношении между углом отклонения Θ , который может иметь любое значение от $-\infty$ до π , и углом рассеяния θ , который по определению всегда лежит между нулем и π . Эти два угла связаны между собой равенством

$$\Theta = q\theta - 2\pi m, \quad (5.13)$$

где $q = \pm 1$, а m — положительное целое число (или нуль). Для данного Θ числа q и m выбирают так, чтобы угол θ лежал между нулем и π .

Понятие дифференциального сечения рассеяния можно ввести и другим путем, а именно рассматривая падение на мишень не стационарного потока частиц, а «пучка», ограниченного в пространстве. Для этого при $t = -\infty$ создают моноэнергетическое облако частиц и посылают его в направлении рассеивателя с определенным распределением частиц по прицельным пара-

метрам или угловым моментам $f(J)$. По мере приближения к мишени они рассеиваются на различные углы и при $t \rightarrow +\infty$ радиально расходятся от рассеивателя. Тогда поток частиц, рассеянных в элемент телесного угла $d\Omega$, равен

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega f(J),$$

где момент J связан с θ формулами (5.4) и (5.13).

Полное сечение рассеяния получается интегрированием (5.12) по всем телесным углам

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \int d\varphi d\theta b \left| \frac{db}{d\theta} \right| = 2\pi \int_0^{b_{\text{макс}}} db b = \pi b_{\text{макс}}^2, \quad (5.14)$$

где $b_{\text{макс}}$ — максимальный прицельный параметр, при котором еще происходит отклонение частицы. Если «радиус действия» сил равен R , так что при $r > R$ потенциал обращается в нуль, то частица с прицельным параметром, большим R , отклоняться не будет. При этом сечение рассеяния будет равно πR^2 , т. е. геометрическому поперечному сечению области, в которой происходит рассеяние. Для потенциалов, которые не исчезают на конечном расстоянии (т. е. которые, хотя и слабо, но отклоняют частицы с любыми прицельными параметрами), полное классическое сечение рассеяния *всегда бесконечно*. Как следует из замечаний, сделанных после формулы (5.12), происхождение этой бесконечности обусловлено резким возрастанием дифференциального сечения рассеяния при $\theta \rightarrow 0$.

§ 3. ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА

Если потенциал имеет вид

$$V = \alpha r^{-1},$$

как в случае кулоновских сил или ньютоновского гравитационного поля, то интеграл в (5.6) вычисляется в явном виде. В результате получаем

$$\Theta = \pi - 2 \arcsin \frac{\alpha}{2Eb} \quad (5.15)$$

или

$$b = \frac{\alpha}{2E} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta.$$

Соответственно дифференциальное сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\alpha}{4E \sin^2 1/2\theta} \right)^2. \quad (5.16)$$

Если частица с зарядом $Z_1 e$ рассеивается другой частицей с зарядом $Z_2 e$, то получается известная формула Резерфорда с $\alpha = Z_1 Z_2 e^2$. Ее характерной особенностью является очень резкое возрастание дифференциального сечения для рассеяния вперед. Выражение (5.16) не зависит от того, притягиваются заряды друг к другу или отталкиваются, несмотря на то что траектории отдельных частиц в двух случаях, конечно, различны.

Если точечный заряженный рассеиватель заменить зарядом, распределенным в некоторой области пространства, то результат рассеяния будет изменяться в зависимости от того, притягиваются заряженные частицы друг к другу или отталкиваются. В случае отталкивания расстояние наибольшего сближения равно $r_{\text{мин}} = Z_1 Z_2 e^2 / E$, и, следовательно, если радиус распределения заряда меньше $r_{\text{мин}}$, то сечение не изменяется. Если имеет место притяже-

ние, то при лобовом столкновении ($b = 0$) частицы проходят прямо через центр, следовательно, они *всегда* «чувствуют» распределение заряда.

В релятивистском случае угол отклонения также легко вычисляется. Для $J > \alpha/c$ находим

$$\begin{aligned} \Theta &= \pi - \frac{2}{\eta} \operatorname{arctg} \frac{\alpha W}{c^2 \rho^2 b \eta} = \pi - \frac{2}{\eta} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{v J \eta}, \\ \eta &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{c^2 \rho^2 b^2}\right)^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{\alpha}{c J}\right)^2\right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где v — асимптотическое значение скорости частицы. При $J < \alpha/c$ это выражение не пригодно для случая притягивающихся частиц; так как расстояние их наибольшего сближения равно нулю, интеграл в (5.10) расходится и, следовательно, угол отклонения (будучи отрицательным) стремится к бесконечности. (Мы еще вернемся к этому вопросу в § 6.)

В противоположность уравнению (5.15), которое можно было разрешить относительно параметра b и выразить его в явном виде через θ , в случае уравнения (5.17) этого сделать нельзя. Следовательно, в релятивистском случае мы не можем записать явное выражение для сечения рассеяния в кулоновском поле. Тем не менее формулы (5.17) и (5.12) позволяют точно вычислять сечение рассеяния.

§ 4. ЗАКРУЧИВАНИЕ (РАССЕЯНИЕ ПО СПИРАЛИ)

Если силы всюду являются отталкивающими и потенциал монотонно уменьшается до нуля, то функция (5.7) такова, что при $\xi > \xi_0$ всегда $f(\xi) < f(\xi_0)$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \xi^{-1} \{\xi^2 [1 - f(\xi)] - 1\}^{-1/2} &< \int_{\xi_0}^{\infty} d\xi \xi^{-1} \{\xi^2 [1 - f(\xi_0)] - 1\}^{-1/2} < \\ &< \int_1^{\infty} d\xi \xi^{-1} (\xi^2 - 1)^{-1/2} = \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

Поэтому (что очевидно также из физических соображений)

$$0 \leq \Theta \leq \pi.$$

С другой стороны, при не монотонно убывающем потенциале интеграл в (5.6) может принимать любое наперед заданное положительное значение. Если частицы притягиваются друг к другу, то рассеянная частица может совершить большое число оборотов вокруг рассеивателя.

Допустим, что потенциал V имеет максимум в точке $r = r_0$, причем значение потенциала в максимуме равно V_0 . Тогда f имеет максимум в точке $\xi = r_0/b$, причем значение f в этой точке равно V_0/E . Таким образом, имеется целое семейство значений E и b , для которых кривая $f(\xi)$ вблизи максимума весьма близко подходит к кривой $1 - \xi^{-2}$. В этих случаях интеграл в (5.6) становится очень большим, и если кривая $f(\xi)$ касается кривой $1 - \xi^{-2}$, то он логарифмически *расходится*. Это происходит не в самой точке максимума $f(\xi)$, однако если V имеет максимум V_0 , то для любой энергии $E > V_0$ всегда найдется некоторое значение b_0 прицельного параметра b , при котором интеграл будет расходиться. Если $b < b_0$, то максимум функции $f(\xi)$ почти касается кривой $1 - \xi^{-2}$; если $b > b_0$, то максимум $f(\xi)$ оказывается выше кривой $1 - \xi^{-2}$ и большая внутренняя область, соответствующая силам притяжения, скачком перестает быть доступной для частиц, так как расстояние наибольшего сближения определяется пересечением кривых $f(\xi)$ и $1 - \xi^{-2}$. При том значении прицельного параметра, когда эти кривые касаются друг друга, частица

движется по спирали вокруг рассеивателя, асимптотически приближаясь к минимальному радиусу ¹⁾. Это явление называется *закручиванием*, или *рассеянием по спирали*. Функциональная зависимость угла $\pi - \Theta$ от b схематически показана на фиг. 5.3. При $b = b_0$ угол $\pi - \Theta$ логарифмически стремится к бесконечности. Чтобы найти функцию $b(\theta)$, нужно, начиная с каждой точки, кратной π , сдвигать часть соответствующей кривой до следующего кратного π назад, как бы складывая всю кривую. В результате $b(\theta)$ становится *бесконечнозначной функцией* θ . Для каждого значения θ имеется бесконечно много значений b и каждому из них соответствует вклад в сечение рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left| \frac{db_m^2}{d\theta} \right| \operatorname{cosec} \theta. \quad (5.18)$$

Поскольку по мере приближения b к критическому значению b_0 величина Θ расходится логарифмически, то

$$-\Theta \approx \begin{cases} \operatorname{const} + c \ln(b - b_0) & \text{при } b > b_0, \\ \operatorname{const} + 2c \ln(b_0 - b) & \text{при } b < b_0. \end{cases} \quad (5.19)$$

При $b > b_0$ имеем

$$b_m \approx b_0 + e^{qm\theta/c} e^{-2\pi m/c}.$$

Здесь для каждого m имеется одна ветвь с $q = +1$ и одна ветвь с $q = -1$. Следовательно, ряд в (5.18) сходится, так как

$$\sum_m e^{-2\pi m/c} = (1 - e^{-2\pi/c})^{-1}. \quad (5.20)$$

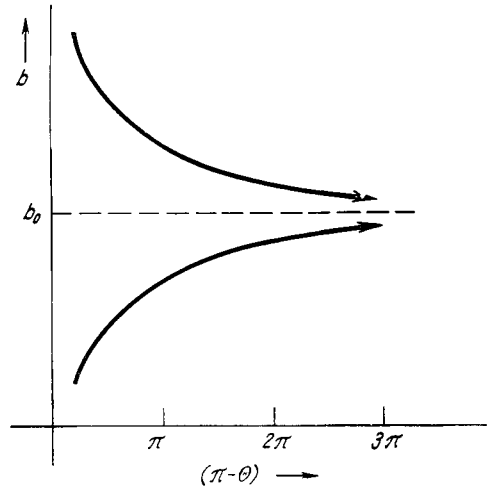
При изменении энергии падающих частиц *закручивание* не будет иметь места до тех пор, пока энергия будет оставаться меньше наибольшего значения потенциала. При $E = V_0$ *закручивание* происходит для частиц с нулевым прицельным параметром или нулевым угловым моментом.

Если потенциал всюду отрицателен и монотонно возрастает (т. е. частицы всюду притягиваются), то для достаточно большого прицельного параметра всегда существуют два значения энергии, при которых $f(\xi)$ касается кривой $1 - \xi^{-2}$. При меньшем из этих значений энергии происходит *закручивание*. По мере уменьшения b эти два значения энергии сближаются и при некотором b они должны совпасть. При таком специальном значении E и b (критическая точка) кривые $y = f(\xi)$ и $y = 1 - \xi^{-2}$ пересекаются в точке их перегиба, т. е. функция $1 - \xi^{-2} - f$ в этой точке имеет нуль третьего порядка. Тогда интеграл в (5.6) расходится более сильно

$$-\Theta \approx \operatorname{const} + c(b - b_0)^{-1/4},$$

но сечение все еще остается конечным. Для больших значений E *закручивания* не происходит, независимо от того, каково значение b .

¹⁾ Из этого следует, что частицы с таким прицельным параметром проводят бесконечно большое время вблизи рассеивающего центра, т. е. никогда не уходят от него. Так как подобное явление происходит только при определенном значении прицельного параметра, то это не лишает нас возможности вводить понятие сечения рассеяния.



Фиг. 5.3. Зависимость прицельного параметра b от угла отклонения в случае, когда имеет место *закручивание*.

§ 5. ОРЕОЛЬНОЕ (ГЛОРИЯ) И РАДУЖНОЕ РАССЕЙНИЯ

Из (5.12) видно, что дифференциальное сечение обращается в бесконечность, когда

$$\frac{d\Theta}{db} = 0. \quad (5.21)$$

Ясно, что углу отклонения, являющемуся стационарным, если его рассматривать как функцию прицельного параметра, будет соответствовать рассеяние большого числа частиц. Этот эффект совершенно аналогичен эффекту радуги при рассеянии электромагнитных волн.

Легко показать, что выполнение условия (5.21) действительно возможно. Из формулы (5.6) видно, что при увеличении b выражение под знаком корня уменьшается и, следовательно, при фиксированном r подынтегральное выражение растет. Однако в то же время обычно растет и величина $r_{\text{мин}}$ и, следовательно, область интегрирования уменьшается. Вследствие этого $\Theta(b)$ не обязательно должно быть монотонной функцией.

Если потенциал всюду соответствует притяжению (т. е. он всюду отрицательный и монотонно возрастает), то из физических соображений ясно, что при нулевом прицельном параметре угол отклонения равен нулю. Это можно также непосредственно показать, воспользовавшись формулой (5.6): если $b \rightarrow 0$, то

$$f(\xi) \rightarrow \frac{V(0)}{E}$$

и значение интеграла стремится к $1/2\pi$. То же самое верно и при положительном потенциале, но в этом случае $E > V(0)$, так что при нулевом прицельном параметре частица проходит прямо через центр. Так как при $b \rightarrow \infty$ угол отклонения в этом случае также должен обращаться в нуль, то при некотором конечном значении b он должен либо обращаться в бесконечность, либо иметь экстремум. Следовательно, для таких потенциалов (и энергий) должно иметь место либо явление закручивания, либо радужное рассеяние.

Из формулы (5.12) видно также, что если для прицельных параметров, отличных от нуля, возможно рассеяние назад, то сечение такого рассеяния равно бесконечности. Этот эффект аналогичен *ореальному рассеянию* (глории) электромагнитных волн. Он, несомненно, будет иметь место, когда для некоторых прицельных параметров угол отклонения будет меньше $-\pi$. Следовательно, этот эффект будет иметь место всякий раз, когда значение потенциала в максимуме V_0 меньше значения энергии. Действительно, всякий раз, когда происходит закручивание, имеет место и ореольное рассеяние. Если, наоборот, потенциал всюду положителен и монотонно убывает, то ореольное рассеяние не может иметь места.

§ 6. СИНГУЛЯРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Если эффективный потенциал \mathcal{V} вблизи $r = 0$ менее сингулярен, чем r^{-2} , то из (5.4) и (5.10) видно, что выражение под знаком радикала в подынтегральной функции при бесконечно больших расстояниях r всегда отрицательно. Поэтому при фиксированных E и b всегда существует расстояние наибольшего сближения $r_{\text{мин}}$. То же самое верно и в том случае, когда в точке $r = 0$ потенциал ведет себя как r^{-2} или еще более сингулярен, но при этом потенциал соответствует отталкиванию (положительный потенциал). Трудности возникают только тогда, когда потенциал сингулярен и соответствует *притяжению* (отрицательный потенциал)¹⁾.

¹⁾ Отметим, что в релятивистском случае границей между несингулярными и сингулярными потенциалами $V(r)$ является потенциал r^{-1} . Согласно (5.11), в этом случае эффективный потенциал \mathcal{V} вблизи нуля ведет себя как r^{-2} . Более того, для релятиви-

Если при $r \rightarrow 0$ величина $r^2 \mathcal{V}'$ стремится к $-\infty$, то не существует расстояния наибольшего сближения частиц. При всех энергиях и всех прицельных параметрах частица проходит прямо через рассеиватель и интегрирование в (5.6) производится от нуля. При более сильном предположении, что существует такое $\varepsilon > 0$ (или $\varepsilon = \infty$), для которого

$$r^4 \mathcal{V}'(r) \rightarrow -\varepsilon \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad (5.22)$$

отсутствие расстояния наибольшего сближения частиц не приводит ни к каким нежелательным последствиям ¹⁾. В этом случае частица проходит через рассеивающий центр и выходит под конечным, вполне определенным углом. Но если сингулярный потенциал \mathcal{V}' является промежуточным между r^{-2} и r^{-4} , то в начале координат каждая траектория имеет бесконечную кривизну и ее нельзя однозначным образом продолжить за начало координат. В этом случае угол отклонения не определен.

Если потенциал таков, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \mathcal{V}'(r) = -|a|, \quad (5.23)$$

то, до тех пор пока

$$b < \left(\frac{|a|}{E}\right)^{1/2} = b_0 \quad \text{или} \quad J < (2m|a|)^{1/2} = J_0, \quad (5.24)$$

интеграл в (5.6) расходится. При этом в случае достаточно малых прицельных параметров частица будет по спирали приближаться к рассеивающему центру и угол отклонения будет равен бесконечности. Угол рассеяния в этом случае не определен. Здесь опять невозможно дать ответ на вопрос физического характера, когда частица уйдет от рассеивателя. Небольшое видоизменение потенциала, при котором потенциал, имевший вблизи начала координат вид r^{-2} , заменяют «обрезанным» потенциалом (например, в случае учета конечного размера частиц), приводит к большому изменению угла отклонения и угла рассеяния. При таких условиях сечение рассеяния чрезвычайно чувствительно к выбору обрезания.

Для угловых моментов, больших J_0 , имеются вполне определенное расстояние наибольшего сближения и конечный угол отклонения. Поведение угла Θ при уменьшении J в направлении его критического значения зависит от детального вида потенциала.

В качестве примера рассмотрим нерелятивистский потенциал

$$V = ar^{-2}, \quad a > 0.$$

Простые вычисления по формуле (5.6) при $b^2 > a/E$ дают

$$\Theta = \pi - \pi \left(1 + \frac{a}{Eb^2}\right)^{-1/2}$$

или

$$b^2 = \frac{a}{E} \frac{(\pi - \Theta)^2}{(2\pi - \Theta)\Theta},$$

стских частиц никогда не возникает трудностей в случае сингулярного потенциала сил отталкивания. Если V — сингулярный потенциал сил отталкивания, то \mathcal{V}' все равно в нуле стремится к $-\infty$. Однако, как уже было отмечено выше, в этом случае еще существует расстояние наибольшего сближения частиц, так что никаких затруднений не возникает. И так, как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях сингулярный потенциал сил отталкивания не приводит ни к каким осложнениям.

¹⁾ Если на бесконечности потенциал убывает быстрее, чем r^{-2} , то из (5.22) следует, что потенциал в сумме с центробежным потенциалом имеет максимум. Следовательно, при некотором значении прицельного параметра должно происходить закручивание. Вследствие этого сечение может обращаться в бесконечность. Но даже если это и происходит, подобную бесконечность нельзя приписать сингулярности потенциала. Поэтому неправильно говорить, что при рассеянии классических частиц сингулярный потенциал сил притяжения обязательно приводит к трудностям. Последние возникают только в том случае, когда сингулярный потенциал является промежуточным между r^{-2} и r^{-4} .

и сечение рассеяния равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a\pi^2(\pi - \theta)}{E \sin \theta (2\pi - \theta)^2 \theta^2}.$$

Это сечение сильно расходуется в точке $\theta = 0$ (рассеяние вперед) (хотя и слабее, чем поперечное сечение в формуле Резерфорда). Для рассеяния назад оно имеет конечную величину, равную $a/E\pi^2$.

Если потенциал соответствует притяжению между частицами, то $a < 0$ и, когда b приближается сверху к своему критическому значению b_0 , угол отклонения θ стремится к $-\infty$. Если пучок совсем не содержит частиц с прицельными параметрами меньше b_0 , то для такого пучка можно определить сечение рассеяния на любые углы. При $b > b_0$ угол рассеяния вычисляется по формуле (5.13). Каждому значению θ соответствует бесконечно много значений прицельного параметра

$$b_{m,q}^2 = \frac{|a|}{E} \frac{(2m+1 - q\theta/\pi)^2}{(2m - q\theta/\pi)(2m+2 - q\theta/\pi)}, \quad q = \pm 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

и «дифференциальное сечение», так же как и в (5.18), будет суммой членов, соответствующих всем значениям b . Ряд легко суммируется:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|a|\pi}{2E\theta^2 \sin \theta}.$$

Кавычки указывают на то, что это сечение имеет особую природу, т. е. оно относится только к пучку с «вырезом». Отметим, что данное сечение обращается в бесконечность для рассеяния назад (так же как и для рассеяния вперед).

Аналогичная ситуация возникает и в случае рассеяния релятивистских частиц в кулоновском поле. Из выражения (5.11) видно, что если $V = \pm \alpha r^{-1}$, то эффективный релятивистский потенциал вблизи начала координат имеет вид $-\alpha^2 c^{-2} r^{-2}$. Однако это обстоятельство существенно только для потенциала сил притяжения, так как в противоположном случае частица не проникает в область пространства, приводящую к осложнениям. Следовательно, в противоположность рассеянию нерелятивистских частиц здесь имеется существенное различие в результатах рассеяния на потенциале сил притяжения и на потенциале сил отталкивания. В случае сил притяжения имеется минимальное значение углового момента $J_0 = \alpha/c$, ниже которого угол отклонения равен бесконечности, а сечение рассеяния не определено.

§ 7. ПЕРЕХОД ОТ ЛАБОРАТОРНОЙ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА К СИСТЕМЕ ЦЕНТРА МАСС

Если происходит не рассеяние частицы в фиксированном внешнем поле, а рассеяние двух частиц друг на друге, то все сказанное выше сохраняет силу в системе отсчета, в которой покоится центр масс сталкивающихся частиц. Однако эксперимент почти никогда не проводят в последней системе отсчета. Вместо этого опыты обычно выполняются в системе отсчета, в которой одна из двух частиц первоначально покоится. Поэтому такую систему называют *лабораторной системой отсчета*.

В системе координат, связанной с центром масс, угол рассеяния задается формулой

$$\cos \theta = \frac{p'_x}{p},$$

где p — абсолютная величина импульса каждой из частиц, а p'_x — компонента их конечного импульса в направлении, в котором частицы двигались до столкновения. В лабораторной системе, в которой частица 2 первоначально находи-

лась в состоянии покоя, имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{P'_y}{P'_{1x}},$$

где P'_y — поперечная компонента импульса любой из частиц после рассеяния, а P'_{1x} — компонента конечного импульса частицы 1 в направлении начального движения этой частицы.

Произведем выкладки для релятивистского случая, а затем перейдем к нерелятивистскому пределу. Закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в лабораторной системе отсчета имеют вид

$$\begin{aligned} Wc^{-1} &= (m_1^2c^2 + P_1^2)^{1/2} + m_2c = (m_1^2c^2 + P'_{1x}{}^2 + P'_y{}^2)^{1/2} + (m_2^2c^2 + P'_{2x}{}^2 + P'_y{}^2)^{1/2}, \\ P_1 &= P'_{1x} + P'_{2x}, \quad P'_{1y} = P'_{2y} = P'_y. \end{aligned}$$

Возводя первое равенство дважды в квадрат и используя закон сохранения импульса, получаем

$$\left(\frac{P'_y}{P'_{1x}}\right)^2 W^2 = \left(\frac{P'_{2x}}{P'_{1x}}\right) 2Wm_2c^2 + \left(\frac{P'_{2x}}{P'_{1x}}\right)^2 (m_2^2 - m_1^2) c^4. \quad (5.25)$$

Выразим далее скорость частицы через ее импульс и энергию:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{|\mathbf{p}|c}{W}.$$

Так как частица 2 в лабораторной системе отсчета покоится, а в системе центра масс имеет импульс p , то относительная скорость этих двух систем отсчета будет равна (ω_1 и ω_2 — энергии частиц в системе центра масс)

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{pc}{\omega_2}. \quad (5.26)$$

Это соотношение мы используем при установлении связи между энергиями и импульсами в двух системах отсчета посредством преобразований Лорентца:

$$W = \omega (1 - \beta^2)^{-1/2} = \frac{\omega\omega_2}{m_2c^2} \quad (5.27)$$

и

$$\frac{P'_{2x}}{P'_{1x}} = \frac{\beta\omega_2 - p'_{2x}c}{\beta\omega_1 + p'_{1x}c} = \frac{1 - \cos \theta}{(\omega_1/\omega_2) + \cos \theta}. \quad (5.28)$$

Подстановка (5.27) и (5.28) в (5.25) приводит к выражению

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{m_2c^2 \sin \theta}{\omega_1 + \omega_2 \cos \theta}. \quad (5.28a)$$

Так как в системе центра масс импульсы равны друг другу и противоположны по знаку, то, согласно (5.27), получаем следующее уравнение:

$$c^4 (m_1^2 - m_2^2) = \omega_1^2 - \omega_2^2 = \omega (\omega_1 - \omega_2) = \omega^2 - 2\omega\omega_2 = \omega^2 - 2m_2c^2W.$$

Следовательно, полная энергия в системе центра масс связана с полной энергией в лабораторной системе отсчета соотношением

$$\omega^2 = 2\omega_2c^2W + (m_1^2 - m_2^2) c^4. \quad (5.29)$$

Таким образом, выражение для тангенса угла рассеяния в лабораторной системе отсчета через полную энергию ω и угол рассеяния θ в системе

центра масс имеет вид

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{2\omega m_2 c^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta}{\omega^2 + (m_1^2 - m_2^2) c^4 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{Нерелят.}} \frac{2m_2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta}{(m_1 + m_2) + (m_1 - m_2) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta} = \frac{\sin \theta}{(m_1/m_2) + \cos \theta}. \quad (5.30)$$

Если массы одинаковы, то (5.30) переходит в формулу

$$\operatorname{tg} \vartheta = 2 \frac{mc^2}{\omega} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta. \quad (5.30a)$$

В этом случае рассеяние назад ($\theta = 180^\circ$) в системе центра масс соответствует рассеянию под прямым углом ($\vartheta = 90^\circ$) в лабораторной системе отсчета.

В то же самое время формула (5.30a) является предельным случаем выражений (5.30) для очень больших значений энергии в системе центра масс, за исключением углов θ , близких к π (рассеяние назад). В этом пределе все частицы (кроме тех, которые в системе центра масс рассеиваются в небольшой телесный угол в направлении назад) в лабораторной системе координат движутся в небольшом телесном угле в направлении вперед. Величины обоих телесных углов обратно пропорциональны полной энергии в системе центра масс.

Отметим, что если $m_2 < m_1$, то $\operatorname{tg} \vartheta > 0$ и рассеяние всегда происходит в телесный угол в направлении вперед, т. е. $\vartheta < \frac{1}{2}\pi$. Частица не может отразиться назад при столкновении с более легкой частицей. Максимальный угол рассеяния в лабораторной системе отсчета как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях определяется выражением

$$\sin \vartheta_{\max} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Если $m_1 < m_2$, то рассеяние в конус, направленный своим раствором вперед ($\theta < \frac{1}{2}\pi$) в системе центра масс, соответствует тому, что

$$\vartheta < \operatorname{arctg} \frac{2\omega m_2 c^2}{\omega^2 + (m_1^2 - m_2^2) c^4} \xrightarrow{\text{Нерелят.}} \operatorname{arctg} \frac{m_2}{m_1},$$

а рассеяние в конус, направленный своим раствором вперед в лабораторной системе координат, соответствует условию

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta < \frac{\omega}{(m_2^2 - m_1^2)^{1/2} c^2}$$

или в нерелятивистском случае

$$\cos \theta > -\frac{m_1}{m_2}.$$

Угол $\theta = 0$ соответствует $\vartheta = 0$, а рассеяние на угол $\theta = \pi$ соответствует тому, что $\vartheta = \pi$. При $m_2 \rightarrow \infty$, как и следовало ожидать, значения углов в обеих системах отсчета сближаются, так как очень массивная частица испытывает слабую отдачу.

Если массы двух частиц одинаковы, то углы рассеяния связаны между собой формулой (5.30a), которая в нерелятивистском пределе сводится просто к соотношению $\vartheta = \frac{1}{2}\theta$, т. е. в этом пределе угол рассеяния в лабораторной системе отсчета равен половине угла рассеяния в системе центра масс. При рассеянии релятивистских частиц с одинаковыми массами угол рассеяния в лабораторной системе отсчета меньше половины угла рассеяния в системе центра масс, за исключением случая $\theta = 180^\circ$. Рассеяние на угол, превышающий 90° в лабораторной системе отсчета, невозможно.

В системе центра масс обе частицы разлетаются в противоположных направлениях, т. е. $\theta_2 = \pi - \theta_1$. В лабораторной системе отсчета с помощью (5.28) получим

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{P'_y}{P'_{2x}} = \frac{P'_{1x}}{P'_{2x}} \operatorname{tg} \vartheta_1,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{2m_2 c^2 \omega}{\omega^2 + (m_2^2 - m_1^2) c^4} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta \xrightarrow{\text{Нерелят.}} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta. \quad (5.31)$$

Следовательно, в нерелятивистском пределе имеем просто

$$\vartheta_2 = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \theta = \frac{1}{2} \theta_2.$$

Таким образом, в лабораторной системе отсчета частица, которая до столкновения покоилась, получает отдачу под углом, равным половине угла, под которым она рассеивается в системе центра масс. Если массы одинаковы, то (5.31) принимает вид

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{2mc^2}{\omega} \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta = \left(\frac{2mc^2}{\omega} \right)^2 \operatorname{ctg} \vartheta_1. \quad (5.31a)$$

Следовательно, угол между направлениями движения частиц с одинаковыми массами после рассеяния равен

$$\operatorname{tg} (\vartheta_1 + \vartheta_2) = \frac{4mc^2 \omega}{\omega^2 - 4m^2 c^4} \operatorname{cosec} \theta. \quad (5.32)$$

В нерелятивистском пределе эта формула соответствует тому простому факту, что частицы расходятся под прямым углом.

В лабораторной системе отсчета энергия рассеянной частицы изменяется, причем часть энергии передается частице-мишени. Если обозначить через $\Delta W_1 = \Delta E_1$ разность между начальной и конечной энергиями налетающей частицы, а через $E_1 = W_1 - m_1 c^2$ ее начальную кинетическую энергию, то легко найти, что

$$\frac{\Delta E_1}{E_1} = \left[1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{\omega^2} \right] \sin^2 \frac{1}{2} \theta \xrightarrow{\text{Нерелят.}} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \sin^2 \frac{1}{2} \theta. \quad (5.33)$$

Как и следовало ожидать, потеря энергии максимальна при рассеянии назад в системе центра масс. Максимальная относительная потеря кинетической энергии равна

$$\left(\frac{\Delta E_1}{E_1} \right)_{\text{макс}} = 1 - \frac{(m_1 - m_2)^2 c^4}{\omega^2} \xrightarrow{\text{Нерелят.}} \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (5.34)$$

Налетающая частица может потерять всю свою энергию только в том случае, когда массы частиц одинаковы; тогда

$$\frac{\Delta E_1}{E} = \sin^2 \frac{1}{2} \theta. \quad (5.33a)$$

Это простое выражение является в то же время предельным случаем формулы (5.33), когда полная энергия в системе центра масс велика по сравнению с разностью энергии покоя обеих частиц.

Квадрат импульса, передаваемого налетающей частицей частице-мишени в системе центра масс, равен

$$\tau^2 = (\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)^2 = 2p_1^2 (1 - \cos \theta) = 4p_1^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta$$

или

$$\tau = 2 |\mathbf{p}_1| \sin \frac{1}{2} \theta. \quad (5.35)$$

Соответственно вместо угла рассеяния в системе центра масс можно пользоваться либо передаваемым импульсом, либо передаваемой энергией в лабораторной системе отсчета. Значения первой из этих величин изменяются между нулем и удвоенным значением начального импульса (одной из частиц), а второй — между нулем и максимальной величиной (5.34).

Потеря энергии ΔE_1 налетающей частицы равна кинетической энергии отдачи частицы-мишени в лабораторной системе отсчета. Следовательно, выполняется простое соотношение

$$\cos \theta = 1 - 2 \frac{E_2}{E_{2\text{макс}}}, \quad (5.33б)$$

которое позволяет определять дифференциальное сечение рассеяния в системе центра масс прямо путем измерения спектра энергий отдачи в лабораторной системе отсчета. Соотношение (5.33б) справедливо как в релятивистском, так и в нерелятивистском случаях.

Переход от системы центра масс к лабораторной системе отсчета влечет за собой преобразование сечений. Отношение потока частиц, рассеянных в элемент телесного угла, к падающему потоку должно быть одинаковым в обеих системах отсчета, так что

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) d\theta \sin \theta = \frac{d\sigma'}{d\Omega'}(\vartheta) d\vartheta \sin \vartheta$$

или

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'}{d\Omega'}(\vartheta) &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \frac{\sin \theta}{\sin \vartheta} \frac{d\theta}{d\vartheta} = \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \frac{[\omega^4 + 2\omega^2(m_1^2 + m_2^2)c^4 \operatorname{tg}^2 1/2\theta + (m_1^2 - m_2^2)^2 c^8 \operatorname{tg}^4 1/2\theta]^{3/2} \cos^4 1/2\theta}{\omega^2 m_2^2 c^4 |\omega^2 + (m_2^2 - m_1^2)c^4 \operatorname{tg}^2 1/2\theta|} \longrightarrow \\ &\xrightarrow{\text{Нерелят.}} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \frac{[1 + (m_1/m_2)^2 + 2(m_1/m_2) \cos \theta]^{3/2}}{|1 + (m_1/m_2) \cos \theta|}. \quad (5.36) \end{aligned}$$

Если $m_2 < m_1$, то знаменатель в (5.36) может обратиться в нуль. Соответственно для угла, определяемого соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \frac{\omega}{(m_1^2 - m_2^2)^{1/2}},$$

т. е.

$$\sin \vartheta = \frac{m_2}{m_1},$$

сечение рассеяния в лабораторной системе отсчета обычно бесконечно.

Если частицы имеют одинаковые массы, то формула для отношения сечений упрощается:

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega'}(\vartheta) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \frac{(\omega^2 + 4m^2c^4 \operatorname{tg}^2 1/2\theta)^{3/2} \cos^4 1/2\theta}{\omega m^2 c^4} \xrightarrow{\text{Нерелят.}} 4 \cos \vartheta \frac{d\sigma}{d\Omega}(2\vartheta). \quad (5.36а)$$

Если сечение рассеяния в системе центра масс при $\theta = 180^\circ$ не обращается в бесконечность, то сечение рассеяния двух частиц с одинаковыми массами под прямыми углами (и под углами, превышающими 90°) в лабораторной системе отсчета обращается в нуль.

§ 8. ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ЧАСТИЦЫ

Если две сталкивающиеся частицы неразличимы, то измеряется единый поток в каждом направлении, состоящий как из налетающих частиц, так и из тех частиц отдачи, которые отлетают при рассеянии налетающих частиц в противоположном направлении (в системе центра масс). Следовательно, сечение рас-

сеяния в системе центра масс равно сумме сечений рассеяния в двух диаметрально противоположных направлениях:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{d\sigma_1}{d\Omega}(\theta, \varphi) + \frac{d\sigma_1}{d\Omega}(\pi - \theta, \varphi + \pi), \quad (5.37)$$

где $d\sigma_1/d\Omega$ вычисляется по [формуле (5.12)]. Для сечения рассеяния в лабораторной системе координат имеем

$$\frac{d\sigma'}{d\Omega}(\vartheta) = \frac{d\sigma'_1}{d\Omega}(\vartheta_1) + \frac{d\sigma'_2}{d\Omega}(\vartheta_2), \quad (5.38)$$

где углы $\vartheta = \vartheta_1$ и $\vartheta = \vartheta_2$ связаны друг с другом формулой (5.31a), а $d\sigma'_1/d\Omega$ должно вычисляться с помощью (5.36a)

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'}{d\Omega}(\vartheta) = \frac{d\sigma_1}{d\Omega}(\theta) \frac{(\omega^2 + 4m^2c^4 \operatorname{tg}^2 1/2\theta)^{3/2} \cos^4 1/2\theta}{\omega m^2 c^4} + \\ + \frac{d\sigma_1}{d\Omega}(\pi - \theta) \frac{(\omega^2 + 4m^2c^4 \operatorname{ctg}^2 1/2\theta)^{3/2} \sin^4 1/2\theta}{\omega m^2 c^4}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

где углы θ и ϑ связаны между собой согласно (5.30a). Сечение рассеяния тождественных частиц в системе центра масс (если оно не зависит от φ) обязательно должно быть симметрично относительно угла 90° . Полное сечение получается из (5.37) путем интегрирования только в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = 1/2\pi$, так что полное сечение имеет ту же величину, что и раньше. В противном случае каждая частица была бы учтена дважды: первый раз в качестве налетающей частицы и второй раз в качестве частицы отдачи.

§ 9. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

В обычной формулировке задачи рассеяния потенциал считается заданным и по нему вычисляют сечение рассеяния. В обратной задаче рассеяния считается, что сечение рассеяния определяется экспериментально и требуется найти потенциал.

Допустим, что при фиксированной энергии сечение рассеяния является заданной функцией угла θ . Если каждому значению θ соответствует только одно значение прицельного параметра, т. е. θ является монотонной функцией b , то зависимость последнего от угла можно найти с помощью (5.12):

$$b^2(\theta) = 2 \int_{\theta}^{\pi} d\theta \sin \theta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta). \quad (5.40)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что в данном случае угол отклонения должен равняться π , когда прицельный параметр равен нулю. (Если $\theta = 0$ при $b = 0$, то θ не может быть монотонной функцией b , так как при $b \rightarrow \infty$ $\theta = 0$.)

Теперь, зная $b(\theta)$ или $\theta(b)$, нужно найти потенциал. В первом равенстве формулы (5.6) введем обозначение

$$v(r) = 1 - \frac{V(r)}{E}$$

и новую переменную интегрирования $x = 1/r^2v$. Тогда

$$\frac{1}{2} [\pi - \Theta(y)] = \int_0^y dx g(x) (y-x)^{-1/2}, \quad (5.41)$$

где

$$g(x) = -\frac{\sqrt{x}}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{rv^{3/2}}{2v+r dv/dr},$$

$$y = b^{-2}.$$

Согласно (5.41), функция g является преобразованием Эйлера от функции $^{1/2}(\pi - \Theta)$. Обращение этого преобразования эквивалентно решению интегрального уравнения абелевского типа

$$g(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^x dy \frac{\Theta'(y)}{\sqrt{x-y}} =$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta}{[x-y(\theta)]^{1/2}}, \quad (5.42)$$

поскольку $\Theta(0) = 0$. Верхний предел $\theta(x)$ в интеграле в (5.42) определяется условием $x = y(\theta)$. Теперь можно найти функцию $v(r)$:

$$-\frac{\sqrt{x}}{g(x)} = r \frac{dx}{dr} = -x \left(2 + r \frac{dx}{dr} \frac{d \ln v}{dx} \right),$$

откуда

$$\frac{d \ln v}{dx} = \frac{2g(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{\pi \sqrt{x}} \int_0^{\theta(x)} \frac{d\theta}{[x-y(\theta)]^{1/2}}.$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ (т. е. при $x \rightarrow 0$) $v \rightarrow 1$, то

$$v = \exp \left\{ -\frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \int_0^{\theta(x')} \frac{d\theta}{[x'-y(\theta)]^{1/2}} \right\}.$$

Интеграл по x' вычисляется путем изменения порядка интегрирования

$$\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{x'}} \int_0^{\theta(x')} \frac{d\theta}{[x'-y(\theta)]^{1/2}} = \int_0^{\theta(x)} d\theta \int_{y(\theta)}^x \frac{dx'}{\sqrt{x'} [x'-y(\theta)]^{1/2}} =$$

$$= 2 \int_0^{\theta(x)} d\theta \operatorname{arch} \left[\frac{x}{y(\theta)} \right]^{1/2},$$

где $\theta(x)$ определяется соотношением

$$xb^2(\theta) = 1.$$

Следовательно, окончательно имеем

$$v = \exp \left\{ -\frac{2}{\pi} \int_0^{\theta(x)} d\theta \operatorname{arch} [V \bar{x} b(\theta)] \right\}. \quad (5.43)$$

Таким образом, метод решения обратной задачи состоит в следующем. Зная дифференциальное сечение рассеяния, по формуле (5.40) находим $b(\theta)$. Затем по формуле (5.43) вычисляем v и в явном виде выражаем потенциал через x . После этого по формуле

$$r = \frac{1}{\sqrt{xv}} \quad (5.44)$$

находим зависимость r от x или x от r . Последнюю подставляем в выражение для $v(x)$ и по формуле

$$V = E(1 - v)$$

находим потенциал $V(r)$.

Для применимости данного метода решения обратной задачи рассеяния нужно предполагать, что угол отклонения Θ является монотонной функцией прицельного параметра b , так что функцию $b(\Theta)$ можно найти по формуле (5.40), зная сечение рассеяния. Далее величину $x = 1/r^2v$ можно использовать в качестве переменной интегрирования, только если $r^2(E - V)$ — монотонная функция. Последнее требование выполняется, если потенциал V всюду положителен и убывает, а также если $E > V(0)$. Однако это требование не является необходимым. Монотонность функции $\Theta(b)$ в любом случае является необходимым дополнительным предположением. Конечно, при заданной энергии потенциал можно найти только в той области пространства, которая соответствует расстояниям, превышающим расстояние наибольшего сближения частиц. Внутренняя область для частицы с такой энергией недостижима, и ее сечение рассеяния не зависит от хода потенциала в этой области. В приведенном методе решения обратной задачи рассеяния последнее обстоятельство проявляется в следующем факте: если $x \rightarrow \infty$, то интеграл в (5.43) стремится к бесконечности и, следовательно, $v \rightarrow 0$. Переменная r в (5.44) в этом случае стремится к значению, отличному от нуля.

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Сведения по теории уравнения Гамильтона — Якоби можно найти, например, в книге Голдстейна [348]; там же, в конце гл. 8 и 9, даются ссылки на литературу.

К § 3. Впервые сечение рассеяния заряженных частиц в кулоновском поле было вычислено Резерфордом [739]. Именно с помощью этих результатов Резерфорд пришел к открытию атомного ядра в экспериментах по рассеянию α -частиц. Это один из самых поразительных случаев в квантовой механике, когда сечение, вычисленное классическим и квантовомеханическим методами в пренебрежении релятивистскими эффектами, имеет одну и ту же величину. Открытие атомного ядра, по-видимому, задержалось бы, если бы не это совпадение, обеспечившее правильность классического доказательства Резерфорда.

Подробное изложение общего метода контурного интегрирования для вычисления интегралов типа (5.6) на примере кулоновского потенциала можно найти в книге Зоммерфельда [787].

К § 4. Закручивание, или рассеяние по спирали, рассмотрено в работах [390, 284].

К § 5. Эффекты ореольного и радужного рассеяний при рассеянии электромагнитных волн рассмотрены в гл. 3. Обсуждение этих эффектов при рассеянии классических частиц содержится в работе [284].

К § 6. Рассеяние классических частиц на потенциале r^{-4} рассмотрено в работе [876].

К § 7. Подробное рассмотрение рассеяния в лабораторной системе отсчета можно найти в работе [357].

К § 9. Содержание этого параграфа основано на статье Келлера и др. [477], в которой также дано подробное решение задачи для случаев резерфордовского рассеяния и рассеяния на потенциале r^{-2} .

Интегральное уравнение Абеля рассмотрено Дёчем [223], стр. 157. Интегралы типа того, который осуществляет преобразование Эйлера, называются также специальными интегралами Римана — Лиувилля; таблицы для них имеются в книге Эрдейи [243], т. 2, стр. 185.

К гл. 5. Рассмотрение задачи классического трехчастичного рассеяния, при котором частица A налетает на связанную систему частиц B и C и после рассеяния имеются частица A и неразрушенная система (B, C) или частица B и связанная система (A, C), или частица C и связанная система (A, B), можно найти в работах [458, 459, 460, 70, 358].

ЗАДАЧИ

1. Используя формулу, предшествующую (5.10), вычислить скорость прецессии перигелия частицы в связанном состоянии в кулоновском поле.

2. Вычислить первую релятивистскую поправку (т. е. член наименьшего порядка в разложении по степеням v/c) к классическому сечению рассеяния, определяемому формулой Резерфорда.

3. Доказать соотношения (5.19).

4. Показать, что если частица проходит через начало координат ($r = 0$), то ее скорость должна обращаться там в бесконечность.

5. Вычислить прицельный параметр, при котором происходит закручивание для потенциала $V = -ar^{-4}$, $a > 0$. Каково уравнение траектории для этого значения прицельного параметра? Является ли сечение рассеяния для такого потенциала конечным? Что изменится, если произвести обрезание потенциала при некотором малом значении r ?

6. Непосредственно вычислить нерелятивистское соотношение между углами рассеяния в лабораторной системе отсчета и в системе центра масс.

7. Используя метод, изложенный в § 9, решить обратную задачу рассеяния для случая, когда сечение определяется формулой Резерфорда.

*

Часть III

КВАНТОВАЯ

ТЕОРИЯ

РАССЕЯНИЯ

*

ГЛАВА 6

Временной формализм теории рассеяния

В первой и второй частях настоящей книги было рассмотрено соответственно рассеяние классических электромагнитных волн и классических частиц. Теперь мы можем обратиться к рассмотрению рассеяния частиц в квантовой механике. Обозначения, общий подход и многие из методов, излагаемых ниже, будут очень похожи на те, которые были использованы в предыдущих главах. Это связано с природой самой квантовой механики. Описание явлений в квантовой теории становится более наглядным при использовании волновой терминологии. Поэтому квантовая теория во многом напоминает классическую электромагнитную теорию. Однако волновой формализм тесно связан с интерпретацией, основанной на представлении о существовании частиц; при такой трактовке его изложение целесообразно сопоставлять с рассмотрением гл. 5.

В то же время квантовая теория рассеяния значительно сложнее, чем любая из двух теорий, изложенных в предыдущих главах, так как она значительно богаче по числу и разнообразию описываемых явлений природы. С самого начала важно рационализировать изложение, с тем чтобы за деталями конкретных явлений не потерять из виду присущие им всем общие характеристики. Как всегда в физике, это достигается ценой использования более абстрактного математического языка. В данном случае необходимым математическим аппаратом являются теория гильбертова пространства и функциональный анализ.

Тесная связь идей и методов квантовой теории рассеяния с идеями и методами, изложенными в первых двух частях настоящей книги, избавляет нас от необходимости предпосылать переходу к абстрактной и общей формулировке задачи рассеяния вводные пояснения и конкретные физические примеры. Читателю придется лишь вспомнить те части первых пяти глав, в которых процесс рассеяния описывается в общем виде. Соответствующее описание можно найти главным образом в гл. 1, § 3 (особенно в п. 1 и 5), гл. 2, § 2 и 3 и гл. 5, § 2. Конкретные детали, например выражения для амплитуды рассеяния, конечно, будут выведены в новом контексте. Однако общие физические идеи остаются весьма близкими. Ниже мы их вкратце суммируем.

Облако частиц в форме волнового пакета посылается в направлении мишени. При $t = -\infty$, когда был создан волновой пакет, частицы были свободными, т. е. не взаимодействовали с рассеивателем. Их спины и т. д. фиксированы, а их импульсы определены с точностью, ограничиваемой только конечными размерами облака. С течением времени налетающие частицы приходят во взаимодействие с мишенью и рассеиваются. При $t \rightarrow +\infty$ они разлетаются во всех направлениях и регистрируются детекторами, установленными далеко от рассеивателя. Дифференциальное сечение выражает интенсивность счета частиц детекторами как функцию углов по отношению к направлению падения.

Данное определение сечения основывается на определенной идеализации: импульс налетающей частицы считается заданным. Последнее условие противоречит предположению о конечных размерах падающего облака частиц и означает, что налетающие частицы образуют стационарный пучок. Полная теория, конечно, должна пользоваться такой идеализацией, которая подразумевает наличие бесконечного числа частиц. Поэтому, прежде чем давать определение дифференциального сечения, нужно совершить предельный переход от представления о движущемся волновом пакете к представлению о стационарном постоянном потоке бесконечной длины и ширины. В упомянутых выше параграфах из первой и второй частей книги подробно обсуждались многие физические детали, связанные с указанным переходом. *Формальная* теория является общим абстрактным математическим выражением такого перехода, однако без привлечения физических соображений она остается беспредметной.

Прежде чем переходить к изложению абстрактной теории рассеяния, напомним способы описания временной зависимости в квантовой механике. В одном из них — *представление Шредингера* — векторы состояния, описывающие физическую систему, зависят от времени; операторы же, соответствующие динамическим переменным системы, постоянны, т. е. не зависят от времени, если не учитывать явной «собственной» временной зависимости. Представление Шредингера наиболее легко интерпретировать на языке волн. Зависимость векторов состояний от времени описывается уравнением Шредингера.

В *представлении Гейзенберга* все векторы состояний постоянны. Зависимость от времени заключают в себе операторы, которые соответствуют динамическим переменным системы. Эта зависимость описывается уравнениями движения Гейзенберга. Такое представление наиболее непосредственно соответствует способу рассмотрения частиц в классической механике. В релятивистской теории поля представление Гейзенберга имеет то преимущество перед представлением Шредингера, что в нем зависимость операторов поля от времени и от пространственных координат рассматривается на равных основаниях. Наконец, имеется *представление взаимодействия*, которое занимает промежуточное положение между представлениями Шредингера и Гейзенберга. В этом представлении как векторы состояний, так и динамические переменные зависят от времени. Изменение векторов состояний со временем описывается уравнением Шредингера, в которое входит только взаимодействие, а изменение со временем динамических переменных описывается уравнением Гейзенберга, которое содержит только *гамильтониан свободных частиц*. Это представление имеет определенные преимущества при промежуточных вычислениях. С точки же зрения окончательного расчета наблюдаемых величин все эти представления, конечно, эквивалентны друг другу.

§ 1. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Мы будем рассматривать главным образом рассеяние нерелятивистских частиц. Однако мы будем излагать соответствующие вопросы так, что переход к релятивистскому случаю можно будет осуществить относительно просто, если только считать, конечно, что существует последовательная релятивистская квантовая теория.

Примем, что вектор состояния $\Psi(t)$ данной физической системы удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H\Psi(t), \quad (6.1)$$

где H — оператор Гамильтона. В целях установления связи между конкретной физической картиной явления рассеяния и развиваемым ниже математическим формализмом, по-видимому, наиболее естественно рассматривать зависимость $\Psi(t)$ от координат частиц, т. е. как волну в конфигурационном пространстве. Однако благодаря своей абстрактной формулировке квантовая

механика не привязана каким-либо образом обязательно к координатному представлению. Все нижеследующие формулы будут одинаковым образом справедливы как в импульсном, так и в любом другом представлении. Это равносильно утверждению, что $\Psi(t)$ есть вектор в абстрактном гильбертовом пространстве. Каждое представление является просто одной из его конкретных реализаций.

Следует сказать несколько слов относительно системы единиц, а также отметить комплексность уравнения Шредингера. В целях сокращения записи удобно измерять время в таких единицах, чтобы $\hbar = 1$. Если за единицу энергии принять один электронвольт (эВ), то это означает, что единицей времени является приблизительно $0,7 \cdot 10^{-15}$ сек. Такую систему единиц обычно называют *естественной*. В этих единицах уравнение Шредингера имеет вид

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t) = H \Psi(t). \quad (6.1a)$$

Тот факт, что в уравнении Шредингера присутствует мнимая единица $+i$, приводит к фундаментальному различию между решениями, соответствующими $+i$ и $-i$, т. е. различию между верхней и нижней комплексными полуплоскостями энергии и между другими переменными. Конечно, это различие условно и вызвано тем, что временную зависимость обычно записывают в виде $e^{-i\omega t}$, а не в виде $e^{i\omega t}$. Вследствие этого экспонента e^{ikr} соответствует *расходящейся* сферической волне, а e^{-ikr} — *сходящейся*. Полезно помнить об условности этого различия между решениями, соответствующими $+i$ и $-i$.

В § 2—6 теория будет развита до некоторой степени эвристическим способом, без исследования относящихся сюда тонких математических вопросов, таких, как установление смысла необходимых предельных переходов. Соответствующим математическим вопросам посвящен § 7.

§ 2. ИЗМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ СОСТОЯНИЙ ВО ВРЕМЕНИ В ШРЕДИНГЕРОВСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Для решения уравнения (6.1a) будем считать, что гамильтониан H можно разбить на две части:

$$H = H_0 + H', \quad (6.2)$$

где H_0 — гамильтониан частиц в отсутствие взаимодействия между ними. Другими словами, H_0 представляет собой только *кинетическую* энергию частиц. Конечно, существуют важные разделы физики, например релятивистская теория поля, в которых возможность такого разбиения гамильтониана в высшей степени проблематична. Здесь мы не будем касаться пока этих вопросов; для нас сейчас важно только то, что H_0 представляет энергию частиц, участвующих в эксперименте по рассеянию, когда они находятся далеко от рассеивателя. К проблеме представления гамильтониана в виде (6.2) для случая неупругих соударений мы вернемся в гл. 16. Здесь же мы будем иметь в виду главным образом упругое рассеяние, так что H' можно рассматривать как потенциальную энергию взаимодействия между двумя частицами или как энергию взаимодействия частицы с фиксированным силовым центром. Будем считать, что H не зависит от времени.

Функции Грина. Чтобы решить уравнение (6.1a), введем пропагаторы, или функции Грина, четырех видов, согласно уравнениям

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_0 \right) G^{\pm}(t) &= \delta(t), \\ \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \mathcal{G}^{\pm}(t) &= \delta(t), \end{aligned} \quad (6.3)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} G^+(t) = \mathcal{G}^+(t) = 0 & \quad \text{для} \quad t < 0, \\ G^-(t) = \mathcal{G}^-(t) = 0 & \quad \text{для} \quad t > 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Таким образом, G^+ и \mathcal{G}^+ — запаздывающие функции Грина, а G^- и \mathcal{G}^- — опережающие. Символ 1 в (6.3) означает единичный оператор, а $\delta(t)$ — дельта-функцию Дирака. Решения уравнений (6.3) и (6.4) можно записать символически:

$$G^+(t) = \begin{cases} -ie^{-iH_0 t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$G^-(t) = \begin{cases} 0 & t > 0, \\ ie^{-iH_0 t}, & t < 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{G}^+(t) = \begin{cases} -ie^{-iHt}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\mathcal{G}^-(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ ie^{-iHt}, & t < 0. \end{cases}$$

Следует отметить, что эти символические решения вовсе не являются более полезными или имеющими больший смысл, чем определяющие их уравнения (6.3) и (6.4).

Из того обстоятельства, что в уравнения (6.3) и (6.4) для G^\pm не входят операторы, не коммутирующие с H_0 , а в уравнения для \mathcal{G}^\pm не входят операторы, не коммутирующие с H_0 , следует, что функции G^\pm должны коммутировать с H_0 , а функция \mathcal{G}^\pm — с H . Конечно, эти свойства коммутации видны непосредственно и из (6.5) и (6.6). Из эрмитовости (по физическим соображениям) операторов H и H_0 следует, что

$$\begin{aligned} G^+(t)^\dagger &= G^-(-t), \\ \mathcal{G}^+(t)^\dagger &= \mathcal{G}^-(-t). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Правильность (6.7) очевидна из формул (6.5) и (6.6). Удобно перейти от дифференциальных уравнений (6.3) и начальных условий (6.4) к интегральным уравнениям

$$\mathcal{G}^\pm(t-t') = G^\pm(t-t') + \int_{-\infty}^{\infty} dt'' G^\pm(t-t'') H' \mathcal{G}^\pm(t''-t'), \quad (6.8)$$

или

$$\mathcal{G}^\pm(t-t') = G^\pm(t-t') + \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \mathcal{G}^\pm(t-t'') H' G^\pm(t''-t'), \quad (6.8a)$$

которые можно рассматривать как уравнения относительно функций \mathcal{G} при известных G , или наоборот. Обычно первое уравнение является более удобным, так как часто удастся записать G в явном виде в том или ином представлении. Интегрирование в (6.8) и (6.8a) фактически производится от $t'' = t$ до $t'' = t'$ или, наоборот, в зависимости от того, какая из функций G^+ и G^- берется под знаком интеграла, так что никаких вопросов о сходимости интегралов не возникает. Легко убедиться, что если G^+ и G^- удовлетворяют уравнениям (6.3) и начальным условиям (6.4), то решения \mathcal{G}^+ и \mathcal{G}^- интегральных уравнений (6.8)

или (6.8а) также удовлетворяют уравнениям (6.3) и начальным условиям (6.4). Далее, так как, скажем, для $t > 0$

$$\mathcal{G}^+(t) = G^+(t) + \int_0^t dt'' G^+(t-t'') H' \mathcal{G}^+(t''),$$

то рассматриваемые интегральные уравнения для \mathcal{G}^+ и \mathcal{G}^- являются уравнениями Вольтерра (хотя это операторные уравнения и в них имеются неоднородные члены) и, следовательно, они всегда имеют единственное решение. Таким образом, данные интегральные уравнения эквивалентны дифференциальным уравнениям (6.3) с начальными условиями (6.4).

Поскольку функции G и \mathcal{G} характеризуют изменение векторов состояний во времени, то их называют *пропагаторами*. Пусть $\Psi_0(t)$ — некоторый вектор состояния, удовлетворяющий уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0(t) = H_0 \Psi_0(t). \quad (6.9)$$

Тогда оператор G^+ дает возможность выразить вектор состояния $\Psi_0(t')$ в любой последующий момент времени $t' > t$ через его значение в момент $t' = t$:

$$\Psi_0(t') = iG^+(t' - t) \Psi_0(t). \quad (6.10)$$

Легко убедиться, что такой вектор $\Psi_0(t')$ при $t' > t$ удовлетворяет уравнению (6.9) и что при $t' \rightarrow t^+$ вектор $\Psi_0(t')$ в левой части (6.10) стремится к вектору $\Psi_0(t)$ в правой его части. Это действительно так, поскольку имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G^+(t) = -i1, \quad (6.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{G}^+(t) = -i1, \quad (6.11a)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} G^-(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mathcal{G}^-(t) = i1. \quad (6.11b)$$

Аналогично при $t' > t$ имеем

$$\Psi(t') = i\mathcal{G}^+(t' - t) \Psi(t), \quad (6.10a)$$

а при $t' < t$

$$\begin{aligned} \Psi_0(t') &= -iG^-(t' - t) \Psi_0(t), \\ \Psi(t') &= -i\mathcal{G}^-(t' - t) \Psi(t). \end{aligned} \quad (6.10b)$$

Таким образом, операторы G^+ и \mathcal{G}^+ описывают распространение волн в системе, характеризуемой гамильтонианом H_0 или H соответственно, в будущее, а операторы G^- и \mathcal{G}^- — в прошлое. Из сравнения (6.10) и (6.10b) немедленно следует, что при $t' > t$

$$G^-(t - t') G^+(t' - t) = G^+(t' - t) G^-(t - t') = 1,$$

т. е., согласно (6.7), при $t > 0$

$$G^-(-t) = G^+(t)^\dagger = G^+(t)^{-1} \quad (6.12)$$

и аналогично

$$\mathcal{G}^-(-t) = \mathcal{G}^+(t)^\dagger = \mathcal{G}^+(t)^{-1}, \quad (6.12a)$$

в то время как при $t < 0$

$$\begin{aligned} G^+(-t) &= G^-(t)^\dagger = G^-(t)^{-1}, \\ \mathcal{G}^+(-t) &= \mathcal{G}^-(t)^\dagger = \mathcal{G}^-(t)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.12b)$$

Пропагаторы $G^+(t)$ и $\mathcal{G}^+(t)$ унитарны при $t > 0$, а $\mathcal{G}^-(t)$ и $G^-(t)$ унитарны при $t < 0$. Эти свойства очевидны и из формул (6.5) и (6.6).

Ин- и аут-состояния. Рассмотрим вектор состояния

$$\Psi_0(t) \equiv iG^+(t-t') \Psi(t'). \quad (6.13)$$

Это некоторый вектор состояния, изменение которого во времени при $t > t'$ определяется невозмущенным гамильтонианом H_0 , но который в момент времени t_0 был равен вектору $\Psi(t_0)$. Пусть теперь $t' \rightarrow -\infty$; тогда получим состояние

$$\Psi_{\text{ин}}(t) \equiv \lim_{t' \rightarrow -\infty} iG^+(t-t') \Psi(t'). \quad (6.14)$$

Вектор состояния $\Psi_{\text{ин}}$ описывает некоторое состояние свободных частиц, т. е. состояние, изменение которого во времени при всех временах определяется гамильтонианом H_0 . Это состояние, в котором частицы не взаимодействуют друг с другом, но которое в бесконечно далеком прошлом совпадает с определенным состоянием полной взаимодействующей системы, описываемым вектором состояния $\Psi(t)$. То, что такое состояние $\Psi_{\text{ин}}$ действительно существует, является специальным предположением относительно природы рассматриваемой физической системы; если последняя удовлетворяет этому предположению, то мы имеем дело с *системой рассеяния*. Предполагается, что в далеком прошлом (так же как и в отдаленном будущем) все частицы находятся достаточно далеко друг от друга и их взаимодействием можно пренебречь.

Заметим, что из (6.3) и из факта коммутативности $G^+(t)$ и H_0 следует

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} [G^+(t-t') \Psi(t')] &= -i \frac{\partial}{\partial t} G^+(t-t') \Psi(t') + G^+(t-t') i \frac{\partial}{\partial t'} \Psi(t') = \\ &= -\delta(t-t') \Psi(t') + G^+(t-t') H' \Psi(t'). \end{aligned}$$

Интегрирование последнего соотношения от $t' = -\infty$ до $t' = +\infty$ с учетом (6.14) дает интегральное уравнение для функции $\Psi(t)$:

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{ин}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^+(t-t') H' \Psi(t'). \quad (6.15)$$

Разумеется, верхний предел интегрирования здесь фактически равен t , так что в силу (6.5) это уравнение можно переписать в виде

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{ин}}(t) - i \int_{-\infty}^t dt' e^{-iH_0(t-t')} H' \Psi(t'). \quad (6.15a)$$

Чтобы понять возникающую здесь физическую ситуацию, полезно рассмотреть решение уравнения (6.15) методом итераций, не интересуясь пока вопросами сходимости получающегося решения

$$\begin{aligned} \Psi(t) = \Psi_{\text{ин}}(t) + \int_{-\infty}^t dt' G^+(t-t') H' \Psi_{\text{ин}}(t') + \\ + \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' G^+(t-t') H' G^+(t'-t'') H' \Psi_{\text{ин}}(t'') + \dots \end{aligned}$$

Полученное решение разумно интерпретировать следующим образом: вектор состояния полной системы Ψ отличается от соответствующего вектора состоя-

ния свободных частиц $\Psi_{\text{ин}}$ наличием дополнительных слагаемых, соответствующих тому, что свободные частицы в момент времени t' вступают во взаимодействие, но затем движутся как свободные до момента времени t ; наличием слагаемых, соответствующих тому, что свободные частицы, провзаимодействовавшие друг с другом в момент времени t'' , свободно распространяются до момента времени t' , затем снова вступают во взаимодействие, после чего движутся как свободные до момента времени t и т. д. Таким образом, в согласии с данной интерпретацией n -й член в ряду итераций соответствует наличию n элементарных взаимодействий, происходящих в различные моменты времени от $-\infty$ до t .

Аналогичным образом рассмотрим вектор состояния

$$\Psi_{\text{аут}}(t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} -iG^-(t-t') \Psi(t'), \quad (6.16)$$

который представляет собой тоже некоторый вектор состояния свободных частиц, изменение которого во времени определяется гамильтонианом H_0 и который в бесконечно далеком будущем будет равен вектору состояния полной системы Ψ . Тогда получаем

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{аут}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^-(t-t') H' \Psi(t'), \quad (6.17)$$

или в символической форме

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{аут}}(t) + i \int_t^{\infty} dt' e^{-iH_0(t-t')} H' \Psi(t'). \quad (6.17a)$$

Соотношения, аналогичные приведенным, легко получить и другим способом. Изменение во времени вектора состояния

$$\Psi(t) = i\mathcal{G}^+(t-t') \Psi_0(t') \quad (6.18)$$

при всех временах t , больших t' , определяется полным гамильтонианом, а при $t=t'$ этот вектор состояния равен Ψ_0 . Следовательно, если положить $t' \rightarrow \pm \infty$, то мы должны получить

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \lim_{t' \rightarrow -\infty} i\mathcal{G}^+(t-t') \Psi_{\text{ин}}(t') = \\ &= \lim_{t' \rightarrow +\infty} -i\mathcal{G}^-(t-t') \Psi_{\text{аут}}(t'). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Поступая как при выводе уравнения (6.15), находим

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{ин}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}^+(t-t') H' \Psi_{\text{ин}}(t'), \quad (6.20)$$

$$\Psi(t) = \Psi_{\text{аут}}(t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}^-(t-t') H' \Psi_{\text{аут}}(t'), \quad (6.20a)$$

или в символической форме

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Psi_{\text{ин}}(t) - i \int_{-\infty}^t dt' e^{-iH(t-t')} H' \Psi_{\text{ин}}(t') = \\ &= \Psi_{\text{аут}}(t) + i \int_t^{\infty} dt' e^{-iH(t-t')} H' \Psi_{\text{аут}}(t'). \end{aligned} \quad (6.20б)$$

Эти выражения связывают вектор состояния полной системы $\Psi(t)$ с $\Psi_{\text{ин}}$ или $\Psi_{\text{аут}}$ и могут рассматриваться как «решения» интегральных уравнений (6.15) и (6.17). Мы действительно получаем решения этих уравнений, но ценой введения полной функции Грина \mathcal{G}^{\pm} , которая, как правило, известна не лучше, чем сам вектор $\Psi(t)$.

Важно четко понимать, какой смысл для данного состояния Ψ имеют векторы $\Psi_{\text{ин}}$ и $\Psi_{\text{аут}}$. Мы ожидаем, что в экспериментах по рассеянию вектор $\Psi_{\text{ин}}(t)$ будет описывать так или иначе коллимированный пучок. Конечно, по математическим соображениям этот пучок не должен браться *монохроматическим*. В противном случае возникли бы трудности в вопросах сходимости. Весьма желательно, чтобы пучок представлял собой *волновой пакет*. Вместе с тем этот волновой пакет содержит всю информацию о том, каким образом был создан волновой пакет в далеком прошлом, т. е. о том, были ли частицы посланы в сторону мишени вдоль заданного направления, скажем с (приблизительно) заданным импульсом \mathbf{p} и спином вдоль оси x , или же была создана сходящаяся сферическая волна с угловым моментом j и т. п. Все эти характеристики должны содержаться в наборе квантовых чисел, или собственных значений динамических переменных, которые коммутируют с гамильтонианом H_0 и, таким образом, могут быть точно определены в состоянии системы свободных частиц Ψ_0 . Соответствующее состояние полной системы взаимодействующих частиц обозначают посредством $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ и снабжают теми же квантовыми числами, что и $\Psi_{\text{ин}}$. Другими словами $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ представляет собой состояние полной системы взаимодействующих частиц, которое в далеком прошлом совпадало с состоянием системы свободных частиц $\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t)$, причем α — полный набор собственных значений динамических переменных, которые коммутируют с H_0 (но не обязательно с H). Вектор состояния $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ является решением уравнения

$$\Psi^{(+)}(\alpha, t) = \Psi_{\text{ин}}(\alpha, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^{+}(t-t') H' \Psi^{(+)}(\alpha, t'). \quad (6.21)$$

Это состояние *определено* заданным поведением в далеком прошлом, и его набор α соответствует такому определению.

В отдаленном будущем вектор $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ опять будет вектором состояния системы по существу свободных частиц, а именно он будет равен вектору $\Psi_{\text{аут}}$ и таким образом будет удовлетворять уравнению (6.17). Однако состояние $\Psi_{\text{аут}}$ *не задано* только поведением в прошлом. Помимо состояния $\Psi_{\text{ин}}$, в котором отражена вся предыстория рассеиваемого пучка, оно содержит неизвестную примесь состояния, соответствующего расходящейся рассеянной волне. Другими словами, то обстоятельство, что $\Psi^{(+)}$ удовлетворяет уравнениям (6.17) и (6.20а), не дает непосредственно никакой практической пользы, так как в них $\Psi_{\text{аут}}$ является неконтролируемым неизвестным. Важными являются уравнения (6.15) и (6.20) или в явном виде (6.21).

Точно так же можно определить состояние полной системы взаимодействующих частиц, которое определяется состоянием частиц после рассеяния (в далеком будущем), хотя с точки зрения эксперимента это бессмысленно. Такое состояние обозначают посредством $\Psi^{(-)}(\alpha, t)$. Набор его квантовых чисел α тот же, что и у состояния $\Psi_{\text{аут}}(\alpha, t)$. Они должны обладать такими же свойствами, как и раньше, т. е. отвечающие им динамические переменные должны коммутировать с H_0 , но теперь важными интегральными уравнениями являются уже (6.17) либо (6.20а) или в явном виде

$$\Psi^{(-)}(\alpha, t) = \Psi_{\text{аут}}(\alpha, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^{-}(t-t') H' \Psi^{(-)}(\alpha, t'). \quad (6.22)$$

То обстоятельство, что $\Psi^{(-)}$ удовлетворяет также уравнениям (6.15) и (6.20), не приносит никакой практической пользы, так как теперь $\Psi_{\text{ин}}$ является неконтролируемым состоянием, которое отличается от $\Psi_{\text{аут}}(\alpha, t)$, скажем, неизвестной примесью состояния, соответствующего сходящимся сферическим волнам. Поэтому смысл параметров α в векторах $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ и $\Psi^{(-)}(\alpha, t)$ совершенно различен. Состояние $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ таково, что в далеком прошлом оно представляет собой заданный «пучок», полностью определенный набором собственных значений α ; поведение его в отдаленном будущем целиком определяется гамильтонианом. Состояние же $\Psi^{(-)}(\alpha, t)$ таково, что в отдаленном будущем оно будет соответствовать пучку с набором квантовых чисел α ; поэтому в далеком прошлом оно должно представлять собой некоторое сложное состояние свободных частиц, точный вид которого зависит от H .

§ 3. МЕЛЛЕРОВСКИЙ ВОЛНОВОЙ ОПЕРАТОР В ШРЕДИНГЕРОВСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Подставляя (6.10б) в (6.20), получаем

$$\Psi(t) = \Omega^{(+)} \Psi_{\text{ин}}(t), \quad (6.23)$$

где введено следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \Omega^{(+)} &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}^+(t-t') H' G^-(t'-t) = \\ &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{G}^+(-t) H' \mathcal{G}^-(t). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Величина $\Omega^{(+)}$ называется *волновым оператором*. Это не зависящий от времени оператор, который переводит состояние свободных частиц $\Psi_{\text{ин}}(t)$ непосредственно в состояние полной системы взаимодействующих частиц $\Psi(t)$, соответствующее $\Psi_{\text{ин}}(t)$ в том смысле, что в далеком прошлом оба эти состояния практически совпадают друг с другом.

Удобно ввести еще один оператор $K^{(+)}$ согласно соотношению

$$\Omega^{(+)} = 1 + K^{(+)}, \quad (6.25)$$

из которого следует, что

$$\begin{aligned} K^{(+)} &= -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{G}^+(-t) H' G^-(t) = \\ &= -i \int_{-\infty}^0 dt e^{iHt} H' e^{-iH_0 t}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Так как последнее выражение можно представить в виде

$$K^{(+)} = - \int_{-\infty}^0 dt \frac{d}{dt} (e^{iHt} e^{-iH_0 t}), \quad (6.26a)$$

то мы получаем две эквивалентные формы записи

$$\Omega^{(+)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathcal{G}^+(-t) G^-(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}. \quad (6.27)$$

Аналогично подстановка (6.10) в (6.20a) дает

$$\Psi(t) = \Omega^{(-)} \Psi_{\text{аут}}(t), \quad (6.28)$$

где

$$\Omega^{(-)} = 1 + K^{(-)} = 1 + i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{G}^{-}(-t) H' G^{+}(t) \quad (6.29)$$

или

$$K^{(-)} = i \int_0^{\infty} dt e^{iHt} H' e^{-iH_0 t}. \quad (6.30)$$

Поскольку

$$K^{(-)} = \int_0^{\infty} dt \frac{d}{dt} (e^{iHt} e^{-iH_0 t}), \quad (6.30a)$$

то можно написать следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Omega^{(-)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{G}^{-}(-t) G^{+}(t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Другими полезными представлениями волновых операторов являются следующие:

$$\begin{aligned} \Omega^{(+)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_{-\infty}^0 dt e^{\varepsilon t} e^{iHt} e^{-iH_0 t}, \\ \Omega^{(-)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \int_0^{\infty} dt e^{-\varepsilon t} e^{iHt} e^{-iH_0 t}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Для доказательства, например, второго соотношения разобьем интеграл на два интеграла

$$\int_0^{\infty} dt \dots = \int_0^T dt \dots + \int_T^{\infty} dt \dots$$

Тогда независимо от величины T первый интеграл при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет обращаться в нуль. Второй интеграл при больших T сколь угодно мало отличается от

$$\Omega^{(-)} \varepsilon \int_T^{\infty} dt e^{-\varepsilon t} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \Omega^{(-)}.$$

Все приведенные соотношения легко обратить. Подставляя (6.10б) в (6.15), получаем

$$\Psi_{\text{ин}}(t) = \left[1 + i \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^{+}(t') H' \mathcal{G}^{-}(-t') \right] \Psi(t).$$

Отсюда с учетом (6.7), (6.24) и эрмитовости H' следует, что

$$\Psi_{\text{ин}}(t) = \Omega^{(+)\dagger} \Psi(t) \quad (6.33)$$

и аналогично

$$\Psi_{\text{аут}}(t) = \Omega^{(-)\dagger} \Psi(t). \quad (6.34)$$

Общие свойства волновых операторов. Из сравнения (6.33) и (6.34) с (6.23) и (6.28) видно, что

$$\Psi_{\text{ин}}(t) = \Omega^{(+)\dagger} \Omega^{(+)} \Psi_{\text{ин}}(t)$$

и

$$\Psi_{\text{аут}}(t) = \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(-)} \Psi_{\text{аут}}(t).$$

Следует учесть, что одним из наших фундаментальных предположений является то, что состояния свободных частиц $\Psi_{\text{ин}}(t)$ и $\Psi_{\text{аут}}(t)$ представляют собой волновые пакеты, которые образуют полную систему в гильбертовом пространстве. Это означает, что в любой фиксированный момент времени любое состояние можно сколь угодно точно аппроксимировать суперпозицией состояний $\Psi_{\text{ин}}$ либо $\Psi_{\text{аут}}$. Основываясь на данном предположении, можно сделать вывод о том, что операторы $\Omega^{(+)}$ и $\Omega^{(-)}$ являются *изометрическими*

$$\Omega^{(+)\dagger} \Omega^{(+)} = \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(-)} = 1. \quad (6.35)$$

Это означает, что операторы $\Omega^{(\pm)}$ не изменяют длину векторов:

$$\begin{aligned} \|\Omega\Psi\|^2 &= (\Omega\Psi, \Omega\Psi) = \\ &= (\Psi, \Omega^\dagger\Omega\Psi) = \\ &= (\Psi, \Psi) = \|\Psi\|^2. \end{aligned}$$

Однако из предыдущего *не следует*, что операторы $\Omega^{(+)}$ или $\Omega^{(-)}$ обязательно являются унитарными. Из равенства

$$\Psi(t) = \Omega^{(+)} \Omega^{(+)\dagger} \Psi(t)$$

нельзя сделать вывода о том, что соотношения (6.35) остаются справедливыми и при обратном порядке сомножителей $\Omega^{(+)}$ и $\Omega^{(+)\dagger}$. Состояния $\Psi(t)$, соответствующие рассеянию, не обязательно образуют полную систему в гильбертовом пространстве. Если H имеет связанные состояния, то их никак нельзя аппроксимировать волновыми пакетами $\Psi(t)$, которые развиваются во времени из свободных волновых пакетов, посланных из бесконечности. Состояния рассеяния ортогональны связанным состояниям.

Подставим (6.23) или (6.28) в уравнения Шредингера (6.1а) и (6.9). Исходя из предположения о том, что как состояния $\Psi_{\text{ин}}$, так и состояния $\Psi_{\text{аут}}$ образуют по отдельности полные наборы состояний, приходим к заключению, что

$$H\Omega = \Omega H_0, \quad (6.36)$$

где Ω равно либо $\Omega^{(+)}$, либо $\Omega^{(-)}$. Из одного этого соотношения видно, что оператор Ω , вообще говоря, не может быть унитарным. Если бы оператор Ω был унитарен, то спектры H_0 и H обязательно совпадали бы и связанных состояний оператора H не могло бы быть. Из (6.36) следует только то, что любое собственное значение гамильтониана H_0 является также собственным значением H , но не наоборот. Конечно, вопрос об унитарности операторов $\Omega^{(+)}$ или $\Omega^{(-)}$ можно свести к вопросу о связанных состояниях H , рассуждая следующим образом.

Пусть $\Psi_0(E, \alpha)$ — набор собственных состояний оператора H_0 для собственного значения энергии E ¹⁾.

¹⁾ Мы используем здесь обычную терминологию, принятую в физической литературе, и называем Ψ собственным состоянием оператора H даже тогда, когда собственные значения лежат в непрерывном спектре и Ψ не нормируемо. Только в параграфах, посвященных математическим вопросам, мы будем проявлять большую осторожность в выборе терминологии.

Набор переменных α представляет собой любой набор квантовых чисел, необходимый для снятия вырождения. Полноту этой системы состояний можно выразить в виде следующего разложения единицы¹⁾:

$$1 = \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dE \Psi_0(E, \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E, \alpha). \quad (6.37)$$

Тогда из (6.36) следует, что $\Omega\Psi_0(E, \alpha)$ является собственным состоянием гамильтониана H , соответствующим тому же собственному значению E :

$$H\Omega\Psi_0(E, \alpha) = \Omega H_0\Psi_0(E, \alpha) = E\Omega\Psi_0(E, \alpha),$$

т. е.

$$\Omega\Psi_0(E, \alpha) = \Psi(E, \alpha).$$

Поэтому, умножая (6.37) слева на Ω , получаем разложение волновых операторов в виде

$$\Omega = \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dE \Psi(E, \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E, \alpha). \quad (6.37a)$$

Далее, если

$$(\Psi_0(E, \alpha), \Psi_0(E', \alpha')) = \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'},$$

то, согласно (6.35), имеем

$$\begin{aligned} (\Psi(E, \alpha), \Psi(E', \alpha')) &= (\Psi_0(E, \alpha), \Omega^{\dagger}\Omega\Psi_0(E', \alpha')) = \\ &= \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'}. \end{aligned}$$

Таким образом, состояния $\Psi(E, \alpha)$ имеют правильную нормировку. (С дальнейшими подробностями по этому вопросу можно ознакомиться в гл. 7, § 2, п. 1.)

Вставляя соотношение (6.37) между сомножителями произведения $\Omega\Omega^{\dagger}$, получаем

$$\begin{aligned} \Omega\Omega^{\dagger} &= \Omega \int_0^{\infty} dE \sum_{\alpha} \Psi_0(E, \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E, \alpha) \Omega^{\dagger} = \\ &= \int_0^{\infty} dE \sum_{\alpha} \Psi(E, \alpha) \Psi^{\dagger}(E, \alpha) = \\ &= 1 - \Lambda. \end{aligned} \quad (6.38)$$

При этом оператор Λ называется *дефектом унитарности* оператора Ω . Из полноты системы связанных состояний вместе с состояниями рассеяния

¹⁾ Здесь мы используем обозначения, в которых произведения типа $\Phi\Psi^{\dagger}$ всегда понимаются как *диадные* произведения векторов. Если Φ находится в гильбертовом пространстве \mathcal{H} , то Φ^{\dagger} является соответствующим состоянием в дуальном ему пространстве \mathcal{H}^{\dagger} . Конечно, принимаемое соответствие является произвольным, но оно установлено раз и навсегда и таково, что если Φ^{\dagger} соответствует вектору Φ , то $C^*\Phi^{\dagger}$ соответствует вектору $C\Phi$. В этом случае эрмитово скалярное произведение в \mathcal{H} -пространстве можно рассматривать как евклидово скалярное произведение векторов, взятых из пространств \mathcal{H} и \mathcal{H}^{\dagger} . В дираковских обозначениях векторам Φ соответствуют *кет*-векторы

$$\Phi = |\cdot\rangle,$$

а векторам Φ^{\dagger} — *бра*-векторы

$$\Phi^{\dagger} = \langle \cdot |.$$

гамильтониана H следует, что

$$\Lambda = \sum_n \Psi_{\text{св}}^{(n)} \Psi_{\text{св}}^{(n)\dagger}, \quad (6.39)$$

т. е. Λ является оператором проектирования на подпространство связанных состояний оператора H . Если H не имеет связанных состояний, то операторы $\Omega^{(+)}$ и $\Omega^{(-)}$ унитарны.

Из эрмитовости операторов H и H_0 следует, что соотношение, эрмитово сопряженное с (6.36), имеет вид

$$H_0 \Omega^\dagger = \Omega^\dagger H. \quad (6.36a)$$

Поэтому

$$H_0 \Omega^\dagger \Psi(E, \alpha) = E \Omega^\dagger \Psi(E, \alpha);$$

отсюда вытекает, что если E принадлежит спектру оператора H , но не принадлежит спектру оператора H_0 , то

$$\Omega^\dagger \Psi(E, \alpha) = 0. \quad (6.40)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\Omega^\dagger \Lambda = 0. \quad (6.40a)$$

Далее, умножая (6.38) слева на Ω^\dagger , приходим к выводу о том, что (6.40a) не противоречит формуле (6.35).

Область значений операторов $\Omega^{(\pm)}$ не совпадает со всем гильбертовым пространством¹⁾. Операторы $\Omega^{(\pm)}$ отображают все пространство на подпространство, занимаемое состояниями одного непрерывного спектра оператора H . Эти операторы не могут отображать состояния на подпространство связанных состояний H . Последнее означает, что нельзя ввести операторы, обратные данным, для всего пространства. Наиболее близкими к таким обратным операторам являются операторы $\Omega^{(\pm)\dagger}$. На подпространстве состояний рассеяния оператора H они являются обратными операторами соответственно для $\Omega^{(\pm)}$, а действуя в подпространстве связанных состояний, они дают нуль.

§ 4. S-МАТРИЦА

Соотношения (6.34) и (6.23) можно использовать для того, чтобы выразить аут-состояние для данного вектора состояний через его ин-состояние:

$$\Psi_{\text{аут}}(t) = \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} \Psi_{\text{ин}}(t). \quad (6.41)$$

Главная задача теории рассеяния состоит в следующем. Если в далеком прошлом состояние системы определялось вектором $\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t) = \Psi_0(\alpha, t)$, т. е. развитие системы во времени описывается вектором $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$, то какова вероятность найти систему в конечном состоянии $\Psi_0(\beta, t)$ в отдаленном будущем. Согласно (6.41), амплитуда этой вероятности, очевидно, равна

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\Psi_0(\beta, t), \Psi^{(+)}(\alpha, t)) &= (\Psi_0(\beta, t), \Psi_{\text{аут}}(t)) = \\ &= (\Psi_0(\beta, t), \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)} \Psi_{\text{ин}}(t)) = \\ &= (\Psi_0(\beta, t), S \Psi_0(\alpha, t)), \end{aligned} \quad (6.42)$$

где введен оператор рассеяния

$$S \equiv \Omega^{(-)\dagger} \Omega^{(+)}. \quad (6.43)$$

¹⁾ Область значений оператора A есть пространство всех векторов Φ , для которых существует такой вектор Ψ , что $\Phi = A\Psi$. Это пространство, на которое оператор A отображает область своего определения.

Матрица S , определенная на базисе состояний свободных частиц, называется S -матрицей. Поскольку из (6.36) и (6.36а) следует, что

$$\Omega^{(-)\dagger}\Omega^{(+)}H_0 = \Omega^{(-)\dagger}H_0\Omega^{(+)} = H_0\Omega^{(-)\dagger}\Omega^{(+)},$$

то оператор рассеяния коммутирует с H_0 :

$$[S, H_0] = 0. \quad (6.44)$$

Следовательно, скалярное произведение в правой части (6.42), называемое матрицей $S_{\beta\alpha}$, не зависит от времени.

Основную задачу теории рассеяния можно также сформулировать несколько иным способом, который не содержит явно предельного процесса. Если система описывается вектором состояния $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$, причем известно, что в далеком прошлом он совпадал с вектором состояния $\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t)$, то какова вероятность найти систему в состоянии $\Psi^{(-)}(\beta, t)$, которое в отдаленном будущем переходит в состояние $\Psi_{\text{аут}}(\beta, t)$? Амплитуда такой вероятности равна

$$\begin{aligned} (\Psi^{(-)}(\beta, t), \Psi^{(+)}(\alpha, t)) &= (\Omega^{(-)}\Psi_{\text{аут}}(\beta, t), \Omega^{(+)}\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t)) = \\ &= (\Psi_{\text{аут}}(\beta, t), \Omega^{(-)\dagger}\Omega^{(+)}\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t)) = \\ &= (\Psi_{\text{аут}}(\beta, t), S\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t)) = \\ &= (\Psi_0(\beta, 0), S\Psi_0(\alpha, 0)). \end{aligned} \quad (6.45)$$

Таким образом, результат, конечно, тот же самый.

Вместо того чтобы подставлять (6.23) в (6.34), равным образом можно подставить (6.28) в (6.33), тогда получаем

$$\Psi_{\text{ин}}(t) = \Omega^{(+)\dagger}\Omega^{(-)}\Psi_{\text{аут}}(t) = S^\dagger\Psi_{\text{аут}}(t).$$

Так как наборы состояний $\{\Psi_{\text{ин}}\}$ и $\{\Psi_{\text{аут}}\}$ предполагаются полными, то отсюда можно сделать вывод, что матрица S унитарна:

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1. \quad (6.46)$$

Отметим, что этот вывод не зависит от того, унитарны операторы $\Omega^{(\pm)}$ или нет¹⁾.

Оператор реакции. Для представления оператора S часто бывает удобно использовать преобразование Кели, определив оператор реакции K согласно соотношению

$$K \equiv i(1 - S)(1 + S)^{-1}$$

или

$$S = (1 + iK)(1 - iK)^{-1}. \quad (6.47)$$

Из унитарности S следует, что оператор K эрмитов. Уравнение (6.47) можно также переписать как уравнение для S , считая эрмитов оператор K известным:

$$S - 1 = 2iK + iK(S - 1). \quad (6.47a)$$

Последнее уравнение известно под названием *интегрального уравнения Гайтлера* [375].

¹⁾ Это утверждение не является непосредственно очевидным. Как показано в [469], можно привести примеры, когда волновые операторы существуют, но оператор S не унитарен. Однако такие исключительные случаи возможны только тогда, когда области значений операторов $\Omega^{(+)}$ и $\Omega^{(-)}$ не совпадают друг с другом. Чтобы исключить такую возможность, достаточно использовать инвариантность относительно обращения времени. См., в частности, следствие теоремы 3.1 на стр. 439 работы Курода [507].

Оператор S' . Путем установления связи между функциями $\Psi^{(+)}$ и $\Psi^{(-)}$, отвечающими одним и тем же квантовым числам, т. е. связи между состояниями, которые переходят в $\Psi_0(\alpha, t)$ соответственно при $t \rightarrow -\infty$ и $t \rightarrow +\infty$, можно естественным образом ввести модифицированный оператор рассеяния S' . Согласно (6.23), (6.28), (6.21) и (6.22), имеем

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)}(\alpha, t) &= S' \Psi^{(-)}(\alpha, t), \\ \Psi^{(-)}(\alpha, t) &= S'^{\dagger} \Psi^{(+)}(\alpha, t), \end{aligned} \quad (6.48)$$

где

$$S' = \Omega^{(+)} \Omega^{(-)\dagger}. \quad (6.49)$$

Оператор S' в общем случае *не* унитарен. Используя (6.35) и (6.38), находим

$$S'^{\dagger} S' = S' S'^{\dagger} = \mathbf{1} - \Lambda. \quad (6.50)$$

Согласно (6.39), Λ — оператор проектирования на подпространство связанных состояний оператора H . В отличие от (6.44) S' коммутирует с H . Из (6.36) вытекает, что

$$[S', H] = 0. \quad (6.51)$$

Оператор S' можно использовать вместо оператора S для ответа на основной вопрос задачи рассеяния. Действительно, согласно (6.45) и (6.51), имеем

$$\begin{aligned} (\Psi^{(-)}(\beta, t), \Psi^{(+)}(\alpha, t)) &= (\Psi^{(-)}(\beta, 0), S' \Psi^{(-)}(\alpha, 0)) = \\ &= (\Psi^{(+)}(\beta, 0), S' \Psi^{(+)}(\alpha, 0)). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Отличие от предыдущих формул состоит в том, что матричные элементы матрицы S' нужно вычислять не между состояниями свободных частиц, а между точными состояниями *полной* системы взаимодействующих частиц, что значительно менее удобно.

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Введем зависящий от времени волновой оператор посредством унитарного преобразования

$$\mathbf{\Omega}(t) \equiv e^{iH_0 t} \Omega e^{-iH_0 t}. \quad (6.53)$$

Здесь под Ω понимается $\Omega^{(-)}$ или $\Omega^{(+)}$. Согласно (6.36), оператор $\mathbf{\Omega}(t)$ можно также представить в виде

$$\mathbf{\Omega}(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} \Omega. \quad (6.54)$$

С учетом (6.36) находим, что оператор $\mathbf{\Omega}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{\Omega}(t) = e^{iH_0 t} [\Omega, H_0] e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} H' \Omega e^{-iH_0 t}.$$

Если ввести оператор

$$\mathbf{H}'(t) \equiv e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t}, \quad (6.55)$$

то уравнение для $\mathbf{\Omega}(t)$ примет вид

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{H}'(t) \mathbf{\Omega}(t). \quad (6.56)$$

Операторы \mathbf{H}' и $\mathbf{\Omega}$ представляют собой примеры операторов в *представлении взаимодействия*, которое является промежуточным между

представлениями Шредингера и Гейзенберга. При этом мы исходим из представления Шредингера, в котором вся зависимость от времени (кроме явной) содержится в векторах состояний, а не в операторах. Если O — оператор в представлении Шредингера, то соответствующий оператор в представлении взаимодействия определяется формулой

$$O(t) \equiv e^{iH_0 t} O e^{-iH_0 t}. \quad (6.57)$$

Вектор состояния в представлении взаимодействия определяется через вектор состояния в представлении Шредингера посредством соотношения

$$\Psi(t) \equiv e^{iH_0 t} \Psi_S(t), \quad (6.58)$$

так что

$$(\Psi_1, O\Psi_2) = (\Psi_1, O\Psi_2).$$

При этом операторы удовлетворяют уравнению движения Гейзенберга со свободным гамильтонианом

$$i \frac{d}{dt} O = [O, H_0], \quad (6.59)$$

в котором H_0 , конечно, равно H_0 . Векторы состояния подчиняются уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi = e^{iH_0 t} (H - H_0) \Psi = H' \Psi, \quad (6.60)$$

в которое входит только взаимодействие (в виде оператора в представлении взаимодействия).

Мы хотим найти решение дифференциального уравнения (6.56) для Ω в символической форме. Для этого нужны граничные условия. Подставляя (6.27) в (6.35) и используя (6.54), находим, что граничным условием для (6.56) является

$$\Omega^{(+)}(-\infty) = 1. \quad (6.61)$$

Теперь легко найти решение (6.56). Единственное, о чем нужно помнить, — это некоммутативность операторов $H'(t_1)$ и $H'(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$ друг с другом. Формально решение можно записать просто в виде

$$\Omega^{(+)}(t) = \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^t dt' H'(t') \right] \right\}_+, \quad (6.62)$$

где знак « $\{ \}$ » указывает на то, что операторы должны быть упорядочены по времени, т. е. их порядок должен определяться теми значениями времени, к которым они относятся, причем операторы, соответствующие более ранним моментам времени, всегда должны стоять справа от операторов, соответствующих более поздним моментам времени. Смысл выражения в правой части (6.62) определяется разложением экспоненты в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \Omega^{(+)}(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^t dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{t_1} dt_1 [H'(t_n) \dots H'(t_1)]_+ = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^t dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 H'(t_n) \dots H'(t_1). \end{aligned} \quad (6.63)$$

Формула (6.62) является по существу сокращенной формой записи выражения (6.63).

Подставим теперь снова (6.31) и (6.43) в (6.54). Получаем, что в то время как при $t = -\infty$ в представлении взаимодействия волновой опера-

тор $\Omega^{(+)}$ равен единичному оператору, при $t = +\infty$ он совпадает с оператором рассеяния:

$$\Omega^{(+)}(\infty) = S. \quad (6.64)$$

Вследствие этого формула (6.62) дает символическое выражение для оператора S :

$$S = \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{H}'(t) \right] \right\}_+, \quad (6.65)$$

или в представлении Шредингера

$$S = \left\{ \exp \left[-i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} \right] \right\}_+. \quad (6.66)$$

Последнее выражение следует понимать как сокращенную запись бесконечного ряда, получающегося из (6.63):

$$S = \mathbf{1} + \sum_1^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \int_{-\infty}^{t_n} dt_{n-1} \dots \times \\ \times \int_{-\infty}^{t_2} dt_1 e^{iH_0 t_n} H' e^{iH_0(t_{n-1}-t_n)} H' \dots H' e^{-iH_0 t_1}. \quad (6.67)$$

С помощью (6.5) оператор S можно также записать в виде

$$S = \mathbf{1} - i \sum_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \times \\ \times e^{iH_0 t_n} H' G^+(t_n - t_{n-1}) H' \dots G^+(t_2 - t_1) H' e^{-iH_0 t_1}. \quad (6.67a)$$

Последний способ записи позволяет дать физическую интерпретацию, аналогичную интерпретации решения уравнения (6.15), полученного методом итераций. Согласно этой интерпретации, оператор рассеяния является суммой членов, каждый из которых соответствует тому, что частицы испытывают n последовательных рассеяний, между которыми они движутся как свободные. Сравнивая последнее выражение с решением уравнения (6.8), полученным методом итераций, находим, что

$$S = \mathbf{1} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{iH_0 t} H' \mathcal{G}^+(t-t') H' e^{-iH_0 t'} = \\ = \mathbf{1} - i \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iH_0 t} H' e^{-iH_0 t} - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' e^{iH_0 t} H' e^{-iH(t-t')} H' e^{-iH_0 t'}. \quad (6.676)$$

§ 6. ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В гейзенберговском представлении вся зависимость от времени включена в динамические переменные, а векторы состояния от времени не зависят. Операторы \mathbf{A} подчиняются уравнению движения Гейзенберга

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{A}(t) = [\mathbf{A}(t), \mathbf{H}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}. \quad (6.68)$$

Для решения последнего уравнения можно использовать непосредственно пропагаторы \mathcal{G} :

$$\mathbf{A}(t) = \mathcal{G}^{+\dagger}(t-t') \mathbf{A}(t') \mathcal{G}^+(t-t') = e^{i\mathbf{H}(t-t')} \mathbf{A}(t') e^{-i\mathbf{H}(t-t')}, \quad t \geq t'. \quad (6.69)$$

Это соотношение выражает тот факт, что оператор изменяется во времени, согласно однозначному непрерывному преобразованию подобия, совершенно аналогично представлениям о характере изменения во времени динамических переменных в классической теории контактных преобразований.

Далее, чтобы вычислить вероятность обнаружения значения α при измерении динамической переменной \mathbf{A} в момент времени t , необходимо знать соответствующее собственное состояние $\psi(\alpha)$. Этот вектор *зависит от времени* в силу того, что он является собственным состоянием оператора $\mathbf{A}(t)$, который зависит от времени. Следовательно, зависимость этого вектора от времени можно непосредственно определить, зная оператор $\mathbf{A}(t)$. С помощью формул (6.69), (6.12a) и (6.11a) получаем

$$\psi(\alpha, t) = i\mathcal{G}^+(t-t')\psi(\alpha, t'). \quad (6.70)$$

Заметим, что хотя последнее соотношение имеет точно такой же вид, как и (6.10a), оно имеет совершенно другой смысл. Соотношение (6.10a) относится к развитию во времени вектора состояния системы в представлении Шредингера; в представлении же Гейзенберга этот вектор состояния постоянен. Формула (6.70), наоборот, описывает развитие во времени собственного состояния изменяющегося оператора $\mathbf{A}(t)$ в представлении Гейзенберга; в представлении же Шредингера этот оператор и его собственные значения постоянны.

При этом изменение во времени оператора

$$\mathbf{A}_0(t) = e^{iH_0(t-t')}e^{-iH(t-t')}\mathbf{A}(t)e^{iH(t-t')}e^{-iH_0(t-t')} \quad (6.71)$$

определяется свободным гамильтонианом¹⁾

$$i\frac{d}{dt}\mathbf{A}_0(t) = [\mathbf{A}_0(t), H_0]; \quad (6.72)$$

в момент времени t' он должен быть равен оператору $\mathbf{A}(t')$ полной системы в гейзенберговском представлении.

Если устремить t к $\pm\infty$, то (6.71) примет вид²⁾

$$\mathbf{A}_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Omega^{(+)\dagger}\mathbf{A}(t)\Omega^{(+)} \equiv \mathbf{A}_{\text{ин}}(t), \quad (6.73)$$

$$\mathbf{A}_0(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \Omega^{(-)\dagger}\mathbf{A}(t)\Omega^{(-)} \equiv \mathbf{A}_{\text{аут}}(t). \quad (6.74)$$

Можно записать также обратные соотношения

$$\mathbf{A}(t) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \Omega^{(+)}\mathbf{A}_0(t)\Omega^{(+)\dagger} \quad (6.75)$$

и

$$\mathbf{A}(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \Omega^{(-)}\mathbf{A}_0(t)\Omega^{(-)\dagger}. \quad (6.76)$$

¹⁾ Здесь оператор H_0 взят в шредингеровском представлении. В гейзенберговском представлении H_0 обычно зависит от времени. Полный гамильтониан H в обоих представлениях одинаков. Можно установить соответствие между представлениями Шредингера и Гейзенберга, потребовав, чтобы при $t = t'$ все операторы в обоих представлениях были одинаковы. Тогда (6.71) будет эквивалентно (6.57). Как видно из (6.72), $\mathbf{A}_0(t)$ является, очевидно, оператором, взятым в представлении взаимодействия.

²⁾ Согласно (6.59) и (6.36), $\mathbf{A}_{\text{ин}}$ и $\mathbf{A}_{\text{аут}}$ также являются операторами в представлении взаимодействия, но они «соответствуют» гейзенберговскому оператору \mathbf{A} не в том смысле, в каком оператор \mathbf{A}_0 соответствует \mathbf{A} . Заметим, что $\mathbf{A}_{\text{ин}}$ и $\mathbf{A}_{\text{аут}}$ получаются при, вообще говоря, неунитарном преобразовании оператора \mathbf{A} . Из $\mathbf{A}_{\text{ин}}$ и $\mathbf{A}_{\text{аут}}$ исключена та часть оператора \mathbf{A} , которая определена на связанных состояниях гамильтониана H , или, другими словами, которая производит отображение на пространство связанных состояний. Согласно (6.38) и (6.73) и (6.74), имеем $\Omega^{(+)}\mathbf{A}_{\text{ин}}\Omega^{(+)\dagger} = \Omega^{(-)}\mathbf{A}_{\text{аут}}\Omega^{(-)\dagger} = (1 - \Lambda)\mathbf{A}(1 - \Lambda)$.

Если оператор A_0 коммутирует с H_0 , то он является константой¹⁾ и (6.75) и (6.76) переходят просто в

$$A(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \Omega^{(+)} A_0 \Omega^{(+)\dagger}, \quad (6.77)$$

$$A(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \Omega^{(-)} A_0 \Omega^{(-)\dagger}. \quad (6.78)$$

Для описания идеализированного эксперимента по рассеянию, в котором все начальные и конечные квантовые числа являются интегралами движения свободных частиц, можно использовать только такие операторы. Примером подобного оператора является $A(t) = H$. При этом из (6.73), (6.74), (6.35) и (6.36) следует, что

$$H_{\text{ин}} = H_{\text{аут}} = H_0. \quad (6.79)$$

В соответствии с физическими требованиями ин- и аут-операторы полного гамильтониана совпадают с гамильтонианом свободных частиц (в шредингеровском представлении). Это выражает тот факт, что при $t \rightarrow \pm \infty$ частицы движутся как свободные.

Теперь основную задачу теории рассеяния можно сформулировать следующим образом: какова амплитуда вероятности того, что при $t \rightarrow +\infty$ система будет найдена в состоянии $\Psi^{(-)}(\beta)$, являющемся собственным состоянием оператора $B(\infty)$, если при $t \rightarrow -\infty$ она находилась в состоянии $\Psi^{(+)}(\alpha)$, являющемся собственным состоянием оператора $A(-\infty)$?

Так как первое из этих состояний определяется через собственные состояния Ψ_0 оператора B_0

$$\Psi^{(-)}(\beta) = \Omega^{(-)} \Psi_0(\beta), \quad (6.80)$$

а второе — через собственные состояния оператора A_0

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = \Omega^{(+)} \Psi_0(\alpha), \quad (6.80a)$$

то так же, как и в представлении Шредингера, соответствующая амплитуда вероятности, очевидно, равна

$$(\Psi^{(-)}(\beta), \Psi^{(+)}(\alpha)) = (\Psi_0(\beta), S\Psi_0(\alpha)). \quad (6.81)$$

§ 7. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Теперь следует несколько более тщательно рассмотреть ряд математических вопросов, которым до сих пор было уделено очень мало внимания. В предыдущих параграфах совершенно не рассматривался вопрос о том, что подразумевается под предельными значениями операторов и векторов в гильбертовом пространстве, скажем, при $t \rightarrow \pm \infty$, а также в каком смысле такие пределы существуют или не существуют. Строгая формулировка этих вопросов тесно связана с тем, какого рода состояния следует использовать при разработке формального математического аппарата теории.

Рассмотрим, например, формулу (6.14). Если вектор состояния $\Psi(t')$ является точной собственной функцией гамильтониана²⁾, то его зависимость от времени имеет вид $e^{-iEt'}$. Соответственно скалярное произведение правой

¹⁾ Введем на время зависимость A_0 от t' в явном виде: $A_0 = A_0(t, t')$. Тогда из условия $[A_0(t, t'), H_0] = 0$ не следует, что при $t' \neq t''$ имеет место $[A_0(t, t''), H_0] = 0$. Однако из принятого в примечании на стр. 160 соответствия между шредингеровским и гейзенберговским представлениями при $t = t'$ вытекает, что H_0 является гейзенберговским оператором $H_0(t')$ и равенство $[A_0(t, t'), H_0(t')] = 0$ эквивалентно соотношению $[A_0(t, t''), H_0(t'')] = 0$ при $t'' \neq t'$.

²⁾ Здесь термин «точная собственная функция» употребляется в том смысле, в каком это принято у физиков; если E принадлежит непрерывному спектру, то вектор Ψ не нормируем.

части (6.14) и собственной функции гамильтониана H_0 , соответствующей собственному значению E' , равно

$$e^{-iE'(t-t')-iEt'} (\Psi_0(E', 0), \Psi(E, 0))$$

и предел этого выражения при $t' \rightarrow -\infty$, конечно, не существует. То, что ни один из векторов не является здесь нормируемым, далеко не исчерпывает всех трудностей.

1. Сходимость векторов

В первую очередь следует установить, что имеется два типа сходимости векторов состояния. Рассмотрим, например, зависимость квадратично интегрируемой функции переменного x

$$f_k(x) = f(x) e^{ikhx}$$

от параметра k при $k \rightarrow \infty$. Эта функция, конечно, не стремится к нулю, так же как не стремится к нулю и выражение

$$\|f_k\|^2 = \int dx f_k^*(x) f_k(x) = \int dx |f_0(x)|^2.$$

Однако если взять любую другую квадратично интегрируемую функцию $g(x)$, то, согласно лемме Римана—Лебега,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int dx g^*(x) f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (g, f_k) = 0.$$

В подобных случаях говорят, что функция f_k как вектор гильбертова пространства¹⁾ L^2 слабо сходится к нулю:

$$f_k \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

если для всех фиксированных векторов g

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (g, f_k) = 0.$$

С другой стороны, говорят, что f_k сильно сходится к нулю:

$$f_k \Rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, f_k) = 0.$$

При этом из неравенства Шварца немедленно следует, что если имеет место сильная сходимость, то имеет место и слабая сходимость²⁾.

Что касается сходимости одного вектора к другому, то говорят, что

$$f_k \rightarrow f \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

если

$$f_k - f \rightarrow 0,$$

и что

$$f_k \Rightarrow f \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

если

$$f_k - f \Rightarrow 0.$$

Можно сразу же доказать следующую полезную лемму³⁾.

¹⁾ Символ L^2 означает пространство квадратично интегрируемых функций.

²⁾ Ввиду того что $\|\Phi\| = \sup |(\Psi\Phi)| / \|\Psi\|$, сильную сходимость можно также называть равномерной слабой сходимостью (символ \sup означает точную верхнюю грань).

³⁾ Чтобы излишне не усложнять обозначений, мы используем простую стрелку также для обозначения пределов обычных числовых последовательностей.

Если $f_k \rightarrow f$ и $\|f_k\|^2 \rightarrow \|f\|^2$, то $f_k \Rightarrow f$.

Доказательство является очень простым:

$$\begin{aligned} \|f_k - f\|^2 &= \|f_k\|^2 + \|f\|^2 - (f_k, f) - (f, f_k) \rightarrow \\ &\rightarrow \|f_k\|^2 - \|f\|^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из этой леммы следует, что если $\|f_k\|^2 \equiv 1$ и если $f_k \rightarrow f$, то $f_k \Rightarrow f$ тогда и только тогда, когда $\|f\|^2 = 1$.

Здесь уместно вспомнить, что по определению гильбертово \mathcal{H} -пространство является *полным*. Это означает, что любая последовательность $\{f_n\}$, подчиняющаяся сильному условию Коши, т. е. $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$, является в этом пространстве сильно сходящейся. Однако гильбертово пространство обладает полнотой также и в слабом смысле (1947], т. 1, стр. 71). Множество векторов называется *компактным*, если во всякой принадлежащей ему последовательности содержится сильно сходящаяся подпоследовательность; множество векторов называется *слабо компактным*, если из каждой последовательности, входящей в это множество, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность. Часто оказывается полезным то обстоятельство, что любое ограниченное (в сильном смысле) множество в гильбертовом пространстве является слабо компактным ([1947], стр. 79). Это утверждение — «слабый» аналог теоремы Больцано — Вейерштрасса, которая не справедлива для гильбертова пространства в сильном смысле. Верно и обратное утверждение: каждая слабо сходящаяся последовательность является ограниченной в сильном смысле ([1947], стр. 71).

Дифференцируемость и аналитичность. После того как дано определение сходимости, можно ввести понятие *производной* векторной функции переменного k . Вначале следовало бы ввести определения слабой и сильной производных соответственно как слабого и сильного предела:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(k + \Delta) - f(k)}{\Delta}.$$

Примечательно, однако, что оба эти определения эквивалентны ([824], стр. 205). Другими словами, имеется только *одна* производная векторной функции. Следовательно, в единственном смысле можно говорить и об *аналитической* векторной функции комплексного переменного. (Используемое при этом определение *непрерывности* всегда понимается в сильном смысле.)

2. Сходимость операторов

Понятие сходимости последовательности операторов или операторных функций основывается на понятии сходимости векторов. Говорят, что оператор $A(t)$ *слабо* сходится к нулю при $t \rightarrow \infty$:

$$A(t) \rightarrow 0,$$

если для всех векторов в гильбертовом пространстве

$$A(t) \Psi \rightarrow 0,$$

т. е. если для любых двух векторов Ψ и Φ

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi, A(t) \Psi) = 0.$$

Это означает, что в пределе все матричные элементы¹⁾ оператора обращаются в нуль.

¹⁾ Под «матричными элементами» здесь подразумеваются матричные элементы оператора «между элементами гильбертова пространства», или, другими словами, между нормируемыми состояниями.

С другой стороны, говорят, что оператор *сильно* сходится к нулю:

$$A(t) \Rightarrow 0,$$

если для всех векторов

$$A(t) \Psi \Rightarrow 0,$$

т. е. если для всех векторов

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle A^\dagger(t) \Psi, A(t) \Psi \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle A^\dagger(t) A(t) \rangle = 0.$$

Чтобы лучше уяснить различие между сильной и слабой сходимостью операторов, рассмотрим этот вопрос более подробно. Ясно, что из условия $A(t) \rightarrow 0$ следует, что $A^\dagger(t) \rightarrow 0$, поскольку матричные элементы оператора $A^\dagger(t)$ являются комплексно сопряженными матричным элементам оператора $A(t)$. Но условие $A(t) \Rightarrow 0$ *не означает*, что $A^\dagger(t) \Rightarrow 0$.

Из неравенства Шварца следует, что

$$|(\Phi, A^\dagger A \Psi)|^2 \leq (\Phi, A^\dagger A \Phi) (\Psi, A^\dagger A \Psi),$$

и поэтому условие $A(t) \Rightarrow 0$ означает, что $A^\dagger(t) A(t) \rightarrow 0$. Действительно, эти два утверждения эквивалентны друг другу, так как требование стремления к нулю *всех* матричных элементов оператора $A^\dagger(t) A(t)$ включает в себя и требование стремления к нулю диагональных матричных элементов. Однако отметим, что условие $A(t) \Rightarrow 0$ *не означает*, что $A^\dagger(t) A(t) \Rightarrow 0$.

При рассмотрении пределов произведения операторов нужно проявлять бóльшую осторожность, чем при рассмотрении пределов произведения операторов. Из слабой сходимости операторов A и B не следует слабая сходимость оператора AB ; чтобы убедиться в этом, достаточно, например, положить $A = \dots B^\dagger$ и считать, что A и B не обладают сильной сходимостью. Равным образом, сильная сходимость операторов A и B не означает сильной сходимости оператора AB ; из нее не следует даже слабая сходимость произведения AB . Однако, используя неравенство Шварца, можно показать, что сильная сходимость операторов A^\dagger и B означает слабую сходимость оператора AB .

Причина, по которой из сходимости двух операторов нельзя сделать вывода о сходимости их произведения, состоит в том, что эти сходимости могут быть неравномерными по отношению к выбору различных векторов в пространстве. Например, сильная сходимость оператора $A(t)$ означает, что для любых $\varepsilon > 0$ и Ψ существует такое число T , что для всех $t > T$

$$\|A(t) \Psi\| < \varepsilon.$$

Но величина T зависит от Ψ , поэтому может существовать некоторая последовательность (нормированных) векторов Ψ_n , такая, что при $n \rightarrow \infty$ необходимое значение T стремится к бесконечности. Из этого видно, что даже сильная сходимость последовательности операторов не является столь сильным условием, как этого иногда хотелось бы. Фактически имеется сходимость третьего рода, называемая *сходимостью по норме*:

$$A(t) \rightarrow 0,$$

которая означает, что

$$\lim \|A(t)\| = 0,$$

где норма оператора определяется выражением ¹⁾

$$\|A\| \equiv \sup \frac{\|A\Psi\|}{\|\Psi\|}$$

при любом выборе ²⁾ нормируемых векторов Ψ . Следовательно, сходимость по норме является сильной *равномерной* сходимостью ³⁾.

Так как

$$\|AB\Psi\| \leq \|A\| \|B\Psi\| \leq \|A\| \|B\| \|\Psi\|,$$

то норма оператора подчиняется неравенству Шварца

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Отсюда следует, что сходимость по норме двух операторов означает, что имеет место и сходимость по норме их произведения. Поэтому ясно, что из условия $\|A(t)\| \rightarrow 0$ вытекает $\|A^\dagger(t)\| \rightarrow 0$.

Аналогичным образом определяется сходимость оператора $A(t)$ к A . Говорят, что оператор $A(t)$ слабо сходится к A :

$$A(t) \rightarrow A,$$

если разность $A(t) - A$ слабо сходится к нулю:

$$A(t) - A \rightarrow 0.$$

Оператор $A(t)$ сильно сходится к A :

$$A(t) \Rightarrow A,$$

если их разность сильно сходится к нулю:

$$A(t) - A \Rightarrow 0.$$

Оператор $A(t)$ сходится к A по норме

$$A(t) \rightarrow A,$$

если

$$A(t) - A \rightarrow 0.$$

Можно сразу сформулировать одну полезную *лемму*, эквивалентную лемме § 7, п. 1. Если $U^\dagger(t)U(t) = 1$ для всех конечных t и $U(t) \rightarrow U$, то $U(t) \Rightarrow U$ тогда и только тогда, когда $U^\dagger U = 1$.

Отметим, что требуется только *изометрия* операторов $U(t)$ и U , а не унитарность. Даже если оператор $U(t)$ унитарен для всех конечных t , то для того, чтобы выполнялось условие $U(t) \Rightarrow U$, нужно только, чтобы оператор U был *изометрическим*.

¹⁾ В этом выражении \sup означает точную верхнюю грань.

²⁾ Так как, согласно неравенству Шварца,

$$|(\Phi, A\Psi)| \leq \|\Phi\| \|A\Psi\|,$$

причем знак равенства достигается при $\Phi = A\Psi$, то для любого выбора нормируемых векторов Φ и Ψ норма также определяется выражением

$$\|A\| = \sup \frac{|(\Phi, A\Psi)|}{\|\Phi\| \|\Psi\|}.$$

³⁾ Слабая сходимость операторов зависит от выбора обоих фиксированных векторов в матричном элементе. Сильная сходимость оператора $A(t)$ означает равномерность относительно выбора левого вектора состояния в матричном элементе, а сильная сходимость оператора $A^\dagger(t)$ — равномерность относительно выбора соответствующего правого сомножителя. Сходимость по норме соответствует равномерности относительно выбора обоих сомножителей.

Доказательство основано на том факте, что из условия $U(t) \rightarrow U$ следует, что $U^\dagger(t) \rightarrow U^\dagger$. При этом получаем

$$(\Psi, [U(t) - U]^\dagger [U(t) - U] \Psi) = (\Psi, \Psi) - (\Psi, U^\dagger U \Psi) - \\ - (U \Psi, U(t) \Psi) - (\Psi, U^\dagger(t) U \Psi) \rightarrow (\Psi, \Psi) - (\Psi, U^\dagger U \Psi) \rightarrow 0.$$

Итак, приходим к выводу, что если оператор $U(t)$ унитарен для всех конечных t и сильно сходится к пределу U , являющемуся изометрическим, но не унитарным оператором, то $U^\dagger(t) \not\rightarrow U^\dagger$. Другими словами, если оператор $U(t)$ унитарен и $U(t) \Rightarrow U$ и если $U^\dagger(t) \Rightarrow U^\dagger$, то оператор U должен быть унитарным. Эти выводы вытекают из того, что унитарность оператора U эквивалентна изометрии как U , так и U^\dagger .

Из сходимости по норме

$$U(t) \rightarrow U,$$

конечно, следует, как то, что $U^\dagger(t) \rightarrow U^\dagger$, так и то, что если оператор $U(t)$ является изометрическим или унитарным, то такими же свойствами обладает и оператор U .

Дифференцируемость и аналитичность. Производная операторной функции $A(t)$ определяется через производную векторной функции $A(t)\Psi$. Следовательно, определения сильной и слабой производных операторной функции эквивалентны друг другу (§ 7, п. 1). Более того, они эквивалентны также тому, что следовало бы назвать «производной по норме», т. е. производной, определяемой как предел по норме выражения $[A(t + \Delta) - A(t)]/\Delta$ при $\Delta \rightarrow 0$ (1824), стр. 206). Таким образом, существует только одна производная операторной функции.

Понятие аналитичности операторной функции комплексного переменного можно ввести теперь как однозначное обобщение аналогичного понятия для обычной функции комплексного переменного. Требуемое при этом свойство непрерывности всегда понимается как непрерывность по норме, т. е. непрерывность, равномерная относительно выбора векторов, на которые действуют операторы.

3. Сходимость в шредингеровском представлении

Рассмотрим теперь сходимость выражений (6.14) или (6.19). Мы уже видели, что если $\Psi_{\text{ин}}(t')$ соответствует заданному значению энергии, то никакой сходимости не может быть. Один из способов избавиться от этого неудобства состоит в следующем. Предположим, что взаимодействие H' содержит в себе множитель $e^{-\varepsilon|t|}$ ($\varepsilon > 0$), так что при $t \rightarrow \pm\infty$ оно обращается в нуль; тогда, конечно, все интересующие нас пределы существуют. В результате ε полагают равным нулю. Этот процесс медленного включения и выключения взаимодействия называется *адиабатическим включением и выключением взаимодействия*. Тот факт, что для достаточно малых ε собственные состояния оператора H_0 таким путем превращаются в собственные состояния оператора H , соответствует тем же собственным значениям, называется *адиабатической теоремой*.

Приведенная схема является в ряде случаев удобным методом исключения трудностей, связанных с использованием плоских волн или стационарных состояний. Однако подобный подход не имеет глубокого физического содержания.

Без адиабатического включения и выключения взаимодействия мы должны использовать волновые пакеты. Если, например, волновая функция $\Psi(\mathbf{r}, t)$ отличается от свободной волновой функции

$$\Psi_{\text{ин}}(\mathbf{r}, t) = \int dE g(E) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

и имеет вид

$$\int dE g(E) e^{i(hr - Et)} f(E, \mathbf{r}),$$

то при $t \rightarrow -\infty$ разность между ними стремится к нулю. Однако этого недостаточно. Прежде всего в этом пределе функция $\Psi_{\text{ин}}(\mathbf{r}, t)$ сама также стремится к нулю, но не равномерно относительно \mathbf{r} . В то же время если $g(E)$ имеет максимум при $E = E_0$, то из соображений, используемых в методе стационарной фазы (гл. 1, § 3, п. 1 и гл. 11, § 2, п. 2), следует, что $|\Psi_{\text{ин}}(\mathbf{r}, t)|$ максимально в точке \mathbf{r} , положение которой изменяется во времени согласно соотношению

$$\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} \frac{dk}{dE} \Big|_{E=E_0} = t.$$

Более того, если $F(\mathbf{r})$ — квадратично интегрируемая функция, то интеграл

$$\int d\mathbf{r} F(\mathbf{r}) \int dE g(E) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - Et)}$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \pm \infty$. Другими словами, сама по себе функция $\Psi_{\text{ин}}$ стремится к нулю в слабом смысле. Следовательно, утверждение о том, что

$$\Psi(t) - \Psi_{\text{ин}}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty,$$

не представляет особого интереса. С другой стороны, норма $\|\Psi_{\text{ин}}\|^2$ не зависит от времени и соответственно *не стремится* сильно к нулю. Поэтому мы должны потребовать, чтобы

$$\Psi(t) - \Psi_{\text{ин}}(t) \Rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow -\infty$$

и аналогично

$$\Psi(t) - \Psi_{\text{аут}}(t) \Rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t'} \Psi(t') &= e^{iH_0 t'} [\Psi(t') - \Psi_{\text{ин}}(t')] + \Psi_{\text{ин}}(0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Psi_{\text{ин}}(0) \quad \text{при } t' \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

и, таким образом, необходимо, чтобы все пределы в (6.14), (6.16) и (6.19) представляли собой пределы в смысле *сильной* сходимости.

Таким же образом можно исследовать сходимость оператора $e^{-iHt} e^{iH_0 t}$. Из (6.19), согласно (6.27) и (6.23), следует, что

$$e^{iHt'} e^{-iH_0 t'} \Psi_{\text{ин}}(0) \Big|_{t' \rightarrow -\infty} \Rightarrow \Psi(0) \equiv \Omega^{(+)} \Psi_{\text{ин}}(0).$$

Поскольку по предположению векторы $\Psi_{\text{ин}}(0)$ образуют полный набор, то нужно, чтобы пределы в (6.27) и аналогично в (6.31) представляли собой пределы последовательностей операторов в *сильном* смысле. Такой же вывод следует и из того обстоятельства, что операторы $\Omega^{(\pm)}$ являются изометрическими, и такими же свойствами обладает оператор $e^{-iHt} e^{iH_0 t}$. Однако оператор $e^{iH_0 t} e^{-iHt}$ также является изометрическим, поэтому из

$$e^{-iHt} e^{iH_0 t} \rightarrow \Omega^{(\pm)} \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty$$

следует

$$e^{-iH_0 t} e^{iHt} \rightarrow \Omega^{(\pm)\dagger} \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty.$$

Но если H имеет связанные состояния, то операторы $\Omega^{(\pm)}$ не унитарны. Следовательно, согласно лемме § 7, п. 2, мы имеем в общем случае

$$e^{-iHt} e^{iH_0 t} \Rightarrow \Omega^{(\pm)} \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty \quad (6.82)$$

и

$$e^{-iH_0 t} e^{iHt} \rightarrow \Omega^{(\pm)\dagger} \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty, \quad (6.83)$$

в то время как соотношение

$$e^{-iH_0 t} e^{iHt} \Rightarrow \Omega^{(\pm)\dagger} \quad \text{при } t \rightarrow \pm \infty$$

выполняется *тогда и только тогда, когда H не имеет связанных состояний*.

Конечно, ответ на вопрос о том, существуют ли на самом деле свободные ин- и аут-состояния, которые являются пределами $\Psi(t)$ в смысле сильной сходимости, или, что то же самое, выполняются ли соотношения (6.82) и (6.83), зависит от характера физической системы, т. е. от вида гамильтониана. Такие системы можно назвать *системами рассеяния*. Мы не будем здесь строго исследовать математический вопрос о том, при каких условиях H является гамильтонианом системы рассеяния.

Следует ясно понимать, что если вектор $\Psi(t')$ в (6.14) или (6.16) соответствует связанному состоянию гамильтониана H , то, согласно (6.40), пределы в смысле сильной сходимости равны нулю. Пределы в (6.19) никогда не обращаются в нуль.

4. Предельный переход в представлении взаимодействия

Соотношения для оператора

$$\Omega(t) = e^{iH_0 t} e^{-iHt} \Omega^{(+)} = e^{iH_0 t} \Omega^{(+)} e^{-iH_0 t}$$

несколько отличаются от (6.83). Здесь множитель, стоящий справа от $\Omega^{(+)}$, исключает подпространство связанных состояний гамильтониана H . При $t \rightarrow -\infty$ оператор $\Omega(t)$ стремится к единице, а при $t \rightarrow +\infty$ $\Omega(t)$ стремится к S . Так как оператор $\Omega(t)$ является изометрическим для всех конечных t и поскольку таким же свойством обладают оба его предела при $t \rightarrow \pm\infty$, то из леммы § 7, п. 2 следует, что как (6.61), так и (6.64) представляют собой пределы оператора в смысле *сильной сходимости*,

$$\Omega^{(+)}(t) \Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ S & \text{при } t \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (6.84)$$

Вопрос о сходимости рядов в (6.63), (6.67) и (6.67а) является несколько более трудным. Соответствующие ряды, полученные при решении уравнения (6.8) методом итераций, сходятся по норме, если H' — ограниченный оператор: $\|H'\| < \infty$ ¹⁾. В этом легко убедиться, если учесть то обстоятельство, что интегрирование производится только от t' до t и что в области интегрирования оператор G является унитарным²⁾.

Кроме того, мы обращали внимание на расходимости в (6.63) при $t \rightarrow -\infty$ и в (6.67), (6.67а) и (6.67б) при $t \rightarrow +\infty$. Так как, например,

$$\begin{aligned} e^{iH_0 t} H' e^{-iHt} &= e^{iH_0 t} e^{-iHt} H - H_0 e^{iH_0 t} e^{-iHt} = \\ &= (e^{iH_0 t} e^{-iHt} - \Omega^{(-)\dagger}) H - H_0 (e^{iH_0 t} e^{-iHt} - \Omega^{(-)\dagger}) \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то сходимость второго интеграла в (6.67б) зависит от того, *насколько быстро* происходит приближение к предельным значениям (6.82) и (6.83). Самое простое, что можно сделать, это ввести под интеграл в (6.67б) фактор сходимости $e^{-\epsilon|t|}$, что эквивалентно *адиабатическому включению и выключению взаимо-*

¹⁾ Оператор называется *ограниченным*, если его норма конечна. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения доказать, что оператор A является *непрерывным* тогда (и только тогда), когда он ограничен. Это означает, что оператор осуществляет непрерывное отображение, или на языке формул: из $\Psi_n \Rightarrow \Psi$ следует $A\Psi_n \Rightarrow A\Psi$.

²⁾ Доказательство данного утверждения мы предоставляем читателю в качестве задачи.

действия. Тогда из соотношений (6.32) видно, что сходимость этих выражений зависит от того, *каким именно образом* происходит приближение к пределу в (6.32). Но даже если ряд (6.67б) сходится, ряды в (6.67а) и (6.67) могут не сходиться к сумме ряда (6.67б). Ниже мы рассмотрим этот вопрос с несколько иной точки зрения. Однако независимо от ответа на этот вопрос, выражение (6.67) всегда сводится к *борновскому ряду* для S , т. е. к ряду по степеням взаимодействия. Умножив взаимодействие H' на γ , мы получим ряд по степеням γ . Вообще говоря, как будет видно из дальнейшего, этот ряд сходится по крайней мере для *достаточно малых* γ .

5. Предельные переходы в гейзенберговском представлении

Если пределы в (6.77) и (6.78) существуют в смысле слабой сходимости, то для произвольных матричных элементов в пределе $t \rightarrow \pm\infty$ получаем

$$\langle [A(t) - \Omega A_0 \Omega^\dagger]^\dagger [A(t) - \Omega A_0 \Omega^\dagger] \rangle \rightarrow \langle A(t)^\dagger A(t) - \Omega A_0^\dagger A_0 \Omega^\dagger \rangle \rightarrow \langle (e^{iHt} e^{-iH_0 t} - \Omega) A_0^\dagger A_0 (e^{iHt} e^{-iH_0 t} - \Omega)^\dagger \rangle.$$

Поскольку предел в (6.83) понимается *не в сильном смысле*, то в общем случае последнее выражение в пределе не обращается в нуль. Следовательно, пределы в (6.75) и (6.78) являются *слабыми*, за исключением случая, когда H не имеет связанных состояний. С другой стороны, в (6.73) и (6.74) порядок операторов Ω и Ω^\dagger является обратным и, следовательно, согласно (6.82), пределы имеют там место в *сильном* смысле:

$$A_{\text{ин}}(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} A_0, \tag{6.85}$$

$$A_{\text{аут}}(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} A_0, \tag{6.86}$$

если A_0 — ограниченный оператор.

КОММЕНТАРИИ

Соответствие между движением классических частиц и распространением квантовомеханических волновых пакетов в наиболее явном виде выражается теоремой Эренфеста [238], формулировку которой можно найти в большинстве стандартных книг по квантовой механике: см., например, [750], стр. 39. Некоторые обобщения этой теоремы приведены недавно в статьях [326, 540].

Классическими работами по временной теории рассеяния являются работы Липпмана и Швингера [541], а также Гелл-Манна и Гольдбергера [321]. Превосходный общий обзор написали Брениг и Хааг [112]. Он приведен в книге Росса [734]. В этой книге также изложено содержание статей [321, 541]. Из других общих обзоров укажем на [215, 361, 547].

Из других общих работ отметим [437], гл. 7, 8; [760], гл. 11 и [927], гл. 4. Можно рекомендовать также следующие статьи: [554, 165, 809, 231, 232, 862, 863, 438]. Рассеяние волновых пакетов специально рассмотрено в [222].

Более поздние результаты по распространению теории на релятивистскую область можно найти в [282, 446, 704].

О связи между временной и стационарной теориями рассеяния см. [49].

К § 3. Волновые операторы Меллера впервые были введены Меллером в работах [609, 610]. Первая из этих статей перепечатана в книге Росса [734]. Цитированные статьи являются одними из важных ранних работ по современной теории рассеяния. Из других работ, посвященных волновым операторам, см. [230, 305, 363].

К § 4. S -матрица была введена независимо Уилером [900] и Гейзенбергом [372, 373]. Среди ранних работ по использованию S -матрицы в теории поля укажем работы Штюкельберга [804—806], Швингера [763], Фейнмана [261] и Дайсона [228]; см. также статьи Меллера [609, 610]. Эквивалентности различных определений S -матрицы посвящена работа Фубини [305].

К § 5. Представление взаимодействия тесно связано с зависящими от времени дираковскими амплитудами в методе вариации постоянных, предложенном Дираком [218,

219]. Оно оказалось чрезвычайно полезным при формулировке релятивистски ковариантной квантовой теории поля и было использовано для этой цели в работах Томонаги [846] и Швингера [764]. В связи с вопросами упорядочения по времени, используемом в формальных выражениях для волнового оператора и S -оператора, см. работы Дайсона [228], Фейнмана [262] и Фудзивары [309].

К § 7. Следует отметить, что в настоящем параграфе основное внимание направлено не на строгое доказательство результатов, полученных в предыдущих параграфах для некоторого класса гамильтонианов, а на то, чтобы постараться указать, какие понятия нужно ввести при строгом рассмотрении проблемы и на какие тонкости при этом следует обращать внимание, а также отметить, что необходимо для полного доказательства правильности общей теории. Читателю, интересующемуся строгими доказательствами, мы особенно рекомендуем работу [168]. Имеются также другие работы, в которых теория рассеяния, зависящая от времени, рассматривается с использованием строгого математического аппарата [296, 435, 469, 315, 507, 510, 353, 444, 1006, 118, 224, 698, 740, 917].

Дополнительные ссылки на работы математического характера приведены в гл. 7, § 3.

К § 7, п. 3. Использованию адиабатической теоремы в теории рассеяния посвящены следующие работы: [783, 256, 811, 618].

Строгое изложение метода стационарной фазы можно найти в работах [858, 859, 244, 101].

ЗАДАЧИ

1. Показать, что S — унитарный оператор, исходя непосредственно из (6.43) и свойств волновых операторов.

2. Допустим, что последовательность векторов в гильбертовом пространстве сходится к нулю слабо, а не сильно. Показать, что в этом случае она не может сходиться в сильном смысле.

3. Обязательно ли предел последовательности эрмитовых операторов в смысле слабой сходимости будет эрмитовым?

4. Показать, что из условия $A(t) \rightarrow A$ следует $\|A(t)\| \rightarrow \|A\|$.

5. Может ли последовательность неограниченных операторов сходиться по норме к ограниченному оператору?

6. Какой является сходимость оператора $\Omega^{(+)\dagger}(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$ — сильной или слабой?

7. Доказать соотношения (6.85) и (6.86).

8. Доказать, что если H' — ограниченный оператор, то уравнение (6.8) вольтерровского типа имеет решение, получающееся методом итераций.

9. Доказать, что оператор является непрерывным тогда и только тогда, когда он ограничен.

10. Показать, что если $\{\Psi_n\}$ — бесконечное множество ортонормированных векторов, то $\Psi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Стационарный формализм теории рассеяния

Хотя нестационарная теория рассеяния имеет большие математические и физические преимущества по сравнению с теорией, базирующейся на стационарном уравнении Шредингера, а также более легко поддается интерпретации, для целей практических вычислений, по крайней мере в нерелятивистской области, она не очень удобна. Конкретные расчеты наиболее удобно проводить при фиксированной энергии.

В нестационарной теории, как уже было отмечено в предыдущей главе, многие этапы необходимых математических расчетов требуют использования *волновых пакетов* для обеспечения сходимости соответствующих выражений. В стационарной теории невозможно использовать волновые пакеты, не вводя сложных весовых функций и очень громоздких интегрирований по энергии. Без этого же в стационарной теории неизбежны трудности, связанные с вопросами сходимости.

Одним из следствий использования волновых функций моноэнергетических пучков является необходимость введения обобщенных функций, таких, как δ -функция Дирака ¹⁾. В большинстве случаев использование этих функций не встречает, конечно, каких-либо затруднений. Тот факт, что выражения, содержащие подобные распределения, имеют смысл, только если производится интегрирование их с соответствующей весовой или пробной функцией, отражает просто то, что для придания этим выражениям однозначного смысла следует образовать волновые пакеты. Однако имеются случаи, когда появление δ -функции в стационарной теории приводит к серьезным трудностям, преодолеть которые значительно сложнее.

§ 1. ФУНКЦИИ ГРИНА И ВЕКТОРЫ СОСТОЯНИЙ

1. Функции Грина

Произведем разложение функций Грина, определенных в гл. 6, § 2, в интеграл Фурье и введем фурье-компоненты

$$\begin{aligned} G^{\pm}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt} G^{\pm}(t), \\ \mathcal{G}^{\pm}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt} \mathcal{G}^{\pm}(t). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Интегралам (7.1) следует придать определенный смысл. Так как для G^+ и \mathcal{G}^+ интегрирование производится в действительности от $t = 0$ до $t = +\infty$,

¹⁾ Простое и четкое введение в математическую теорию δ -функций Дирака содержится в книге Лайтхилла [534].

то для обеспечения сходимости необходим множитель $e^{-\epsilon t}$, $\epsilon > 0$. Если этот множитель ввести под знак интеграла, то использование символических выражений (6.5) и (6.6) сразу приводит к символическим выражениям для фурье-компонент

$$\begin{aligned} G^+(E) &= (E + i\epsilon - H_0)^{-1}, \\ \mathcal{G}^+(E) &= (E + i\epsilon - H)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Аналогичным образом в интегралы для G^- и \mathcal{G}^- необходимо вводить множитель сходимости $e^{\epsilon t}$, так как в них интегрирование ведется от 0 до $t = -\infty$. В результате имеем

$$\begin{aligned} G^-(E) &= (E - i\epsilon - H_0)^{-1}, \\ \mathcal{G}^-(E) &= (E - i\epsilon - H)^{-1}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В (7.2) и (7.3) подразумевается, что параметр ϵ стремится к нулю; его можно рассматривать как часть комплексной переменной E . Операторы

$$G(E) = (E - H_0)^{-1} \quad (7.4)$$

и

$$\mathcal{G}(E) = (E - H)^{-1} \quad (7.5)$$

можно рассматривать как функции комплексной переменной E . В этом случае их называют *резольвентами* операторов H_0 и H . Полюсы резольвент определяют энергетический спектр.

Там, где у $\mathcal{G}(E)$ простые полюсы, H имеет дискретные собственные значения (§ 3). То обстоятельство, что как H , так и H_0 имеют непрерывный спектр, простирающийся от $E = 0$ до $E = \infty$, приводит к тому, что $G(E)$ и $\mathcal{G}(E)$ в этой области имеют *разрезы* (гл. 9, § 4). Другими словами, так как H_0 не имеет никаких других собственных значений, кроме собственных значений, принадлежащих непрерывному спектру, простирающемуся от $E = 0$ до $E = \infty$, то $G(E)$ является аналитической функцией E , регулярной всюду в любой конечной области плоскости E с разрезом от $E = 0$ до $E = \infty$. Если H не имеет связанных состояний, то такими же свойствами обладает и $\mathcal{G}(E)$; если H имеет связанные состояния с энергиями E_n , то при $E = E_n$ функция $\mathcal{G}(E)$ имеет простые полюсы (§ 3). Поскольку как $G(E)$, так и $\mathcal{G}(E)$ имеют разрезы от $E = 0$ до $E = \infty$, то их значения на положительной части действительной оси E различны в зависимости от того, откуда мы подходим к действительной оси — сверху или снизу. В первом случае мы находимся на верхнем, а во втором случае — на нижнем берегу разреза. Эти два различных предельных значения равны $G^+(E)$ и $G^-(E)$ или $\mathcal{G}^+(E)$ и $\mathcal{G}^-(E)$. Таким образом, для $\text{Im } E = 0$ и $\text{Re } E > 0$ имеем

$$\begin{aligned} G^+(E) &= \lim G(E) && \text{при } \text{Im } E \rightarrow 0+, \\ G^-(E) &= \lim G(E) && \text{при } \text{Im } E \rightarrow 0-, \\ \mathcal{G}^+(E) &= \lim \mathcal{G}(E) && \text{при } \text{Im } E \rightarrow 0+, \\ \mathcal{G}^-(E) &= \lim \mathcal{G}(E) && \text{при } \text{Im } E \rightarrow 0-. \end{aligned} \quad (7.6)$$

В связи с (7.6) становится понятен смысл параметра ϵ , введенного в (7.2) и (7.3).

Разность между $G^-(E)$ и $G^+(E)$ можно представить в символической форме, записывая общее соотношение

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = \frac{\mathcal{P}}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0), \quad (7.7)$$

где \mathcal{P} —главное значение интеграла в смысле Коши. Из (7.7) следует, что если x_0 входит в интервал интегрирования, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int dx f(x) (x - x_0 \pm i\varepsilon)^{-1} = \mathcal{P} \int dx f(x) (x - x_0)^{-1} \mp i\pi f(x_0).$$

В справедливости формулы (7.7) нетрудно убедиться, если учесть, что предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x - x_0 + i\varepsilon} + \frac{1}{x - x_0 - i\varepsilon} \right)$$

является одним из определений главного значения, а выражение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}$$

—одним из стандартных представлений функции $\delta(x)$.

Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} G^\pm(E) &= G^P(E) \mp i\pi\delta(E - H_0), \\ \mathcal{G}^\pm(E) &= \mathcal{G}^P(E) \mp i\pi\delta(E - H). \end{aligned} \tag{7.8}$$

В этой символической записи G^P и \mathcal{G}^P суть функции Грина, соответствующие главным значениям:

$$\begin{aligned} G^P(E) &= \frac{\mathcal{P}}{E - H_0}, \\ \mathcal{G}^P(E) &= \frac{\mathcal{P}}{E - H}, \end{aligned}$$

а операторные δ -функции имеют очевидный смысл:

$$\begin{aligned} \delta(E - H_0) \Psi_0(E') &= \delta(E - E') \Psi_0(E'), \\ \delta(E - H) \Psi(E') &= \delta(E - E') \Psi(E'), \end{aligned}$$

если $\Psi_0(E')$ и $\Psi(E')$ —собственные состояния соответственно операторов H_0 и H с собственными значениями E' .

Поскольку операторы H и H_0 эрмитовы, то

$$\begin{aligned} G^-(E) &= G^{+\dagger}(E), \\ \mathcal{G}^-(E) &= \mathcal{G}^{+\dagger}(E). \end{aligned} \tag{7.9}$$

Функции Грина $G^P(E)$ и \mathcal{G}^P , соответствующие главным значениям, суть эрмитовы части функций G^\pm и \mathcal{G}^\pm , в то время как величины $\mp i\pi\delta(E - H_0)$ и $\mp i\pi\delta(E - H)$ —их антиэрмитовы части:

$$G^{P\dagger}(E) = G^P(E), \quad \mathcal{G}^{P\dagger}(E) = \mathcal{G}^P(E). \tag{7.10}$$

Отметим, что в то время как операторы \mathcal{G}^\pm подчиняются интегральным уравнениям¹⁾, получающимся из (6.8) и (6.8a),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\pm(E) &= G^\pm(E) + \mathcal{G}^\pm(E) H' G^\pm(E) = \\ &= G^\pm(E) + G^\pm(E) H' \mathcal{G}^\pm(E), \end{aligned} \tag{7.11}$$

Функции Грина, соответствующие главным значениям, не подчиняются аналогичным уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^P(E) &\neq G^P(E) + \mathcal{G}^P(E) H' G^P(E) \neq \\ &\neq G^P(E) + G^P(E) H' \mathcal{G}^P(E). \end{aligned} \tag{7.12}$$

¹⁾ Уравнения (7.11) обычно называют уравнениями Липпмана—Швингера [541].

Функции Грина удовлетворяют операторным уравнениям

$$\begin{aligned}(E - H_0)G^\pm(E) &= 1, \\ (E - H)G^\pm(E) &= 1,\end{aligned}\tag{7.13}$$

которые, конечно, представляют собой просто другую форму записи соотношений (7.2) и (7.3). С точки зрения этих уравнений неопределенность в выборе функций со знаком плюс или минус или в выборе параметров $\pm i\epsilon$ или $-i\epsilon$ отражает тот факт, что для действительных положительных E однородные уравнения имеют нетривиальные решения. Следовательно, решение соответствующего неоднородного уравнения не может быть единственным. Хотя решения однородного уравнения ненормируемы, тем не менее обратные операторы *существуют*, т. е. неоднородные уравнения *имеют* решения (более строгое рассмотрение проведено в § 3).

2. Векторы состояний

Введем далее фурье-образы шредингеровских векторов состояний:

$$\begin{aligned}\Psi(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt} \Psi(t), \\ \Psi_{\text{ин, аут}}(E) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{iEt} \Psi_{\text{ин, аут}}(t).\end{aligned}\tag{7.14}$$

Умножение (6.15) и (6.17) на e^{iEt} и интегрирование по t дает интегральное уравнение для $\Psi(E)$

$$\begin{aligned}\Psi(E) &= \Psi_{\text{ин}}(E) + G^+(E) H' \Psi(E) = \\ &= \Psi_{\text{аут}}(E) + G^-(E) H' \Psi(E).\end{aligned}$$

Аналогичным образом из (6.20) и (6.20а) находим его решения

$$\begin{aligned}\Psi(E) &= \Psi_{\text{ин}}(E) + \mathcal{G}^+(E) H' \Psi_{\text{ин}}(E) = \\ &= \Psi_{\text{аут}}(E) + \mathcal{G}^-(E) H' \Psi_{\text{аут}}(E).\end{aligned}$$

Как было подробно объяснено в гл. 6, § 2, имеются состояния Ψ двух типов. Одно из них есть $\Psi^{(+)}$; для него заданным является его ин-состояние, которое приготавливается как собственное состояние некоторого коммутирующего с H_0 оператора A с собственным значением α . Согласно (6.21) имеем¹⁾

$$\begin{aligned}\Psi^{(+)}(E, \alpha) &= \Psi_0(E, \alpha) + G^+(E) H' \Psi^{(+)}(E, \alpha) = \\ &= \Psi_0(E, \alpha) + \mathcal{G}^+(E) H' \Psi_0(E, \alpha).\end{aligned}\tag{7.15}$$

Здесь индекс «ин» заменен на 0, так как $\Psi_{\text{ин}}(E, \alpha)$ является просто вектором состояния свободных частиц с квантовыми числами E и α . Характер связи этого вектора с $\Psi^{(+)}$ указывает на то, что $\Psi_0(E, \alpha)$ является здесь ин-состоянием. Вектор состояния $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$ также удовлетворяет аналогичным уравнениям, содержащим G^- и $\Psi_{\text{аут}}$, но последний вектор не может быть задан; он не известен до тех пор, пока не решена задача рассеяния.

Другое интересующее нас состояние есть $\Psi^{(-)}$, для которого задано его *аут-состояние*. Согласно (6.22) и (6.20а) имеем

$$\begin{aligned}\Psi^{(-)}(E, \alpha) &= \Psi_0(E, \alpha) + G^-(E) H' \Psi^{(-)}(E, \alpha) = \\ &= \Psi_0(E, \alpha) + \mathcal{G}^-(E) H' \Psi_0(E, \alpha).\end{aligned}\tag{7.15а}$$

¹⁾ Уравнения (7.15) и (7.15а) тоже называют *уравнениями Липпмана — Швингера*.

Здесь состояние $\Psi_0(E, \alpha)$ — то же, что и в (7.15), но по отношению к $\Psi^{(-)}$ оно является аут-состоянием. Отметим, что параметр α в записи $\Psi^{(\pm)}(E, \alpha)$ *вовсе не указывает*, что эти состояния соответствуют просто собственному значению α оператора A , который коммутирует с H и, следовательно, является интегралом движения. В $\Psi^{(+)}$ величина α обозначает набор квантовых чисел ин-состояния, а в $\Psi^{(-)}$ она обозначает набор квантовых чисел аут-состояния. В обоих случаях α является только индексом того состояния, которое входит в неоднородный член интегрального уравнения, в то время как знаки (\pm) характеризуют свойства функции Грина.

«Дифференциальные» уравнения, которым удовлетворяют не зависящие от времени векторы состояний, получаются путем подстановки фурье-компонент (7.14) во временные уравнения Шредингера (6.1) и (6.9). При этом получаются уравнения Шредингера, не зависящие от времени:

$$H_0 \Psi_0(E) = E \Psi_0(E), \quad (7.16)$$

$$H \Psi(E) = E \Psi(E), \quad (7.17)$$

из которых следует, что $\Psi(E)$ — собственное состояние полного гамильтониана H (принадлежащее собственному значению E), а $\Psi_0(E)$ — собственное состояние гамильтониана свободных частиц H_0 (принадлежащее собственному значению E).

Граничные условия. Чтобы однозначно определить решения приведенных уравнений, их необходимо дополнить граничными условиями. В первую очередь следовало бы потребовать, чтобы решения были нормируемыми. Однако это невозможно, если E принадлежит непрерывному спектру. Ввиду эрмитовости операторов H и H_0 различные собственные состояния автоматически ортогональны в том смысле, что

$$(\Psi_0(E), \Psi_0(E')) = \text{const } \delta(E - E'),$$

$$(\Psi(E), \Psi(E')) = \text{const } \delta(E - E').$$

Однако точного задания констант в этих выражениях недостаточно для единственности решения. Когда значения энергии лежат в непрерывном спектре, т. е. соответствуют состояниям рассеяния, то в действительности для каждого значения E имеется бесконечно много различных решений и граничные условия должны помочь отобрать лишь одно из них.

Из всех решений уравнения (7.16) для свободных частиц нас интересует главным образом один класс решений, а именно те решения, которые соответствуют коллимированным пучкам, распространяющимся в заданных направлениях. Это означает, что Ψ_0 является собственным состоянием импульсов налетающих частиц. Указанное условие может, однако, не приводить к полному снятию вырождения; могут существовать дополнительные степени свободы, соответствующие спину и изотопическому спину, их компонентам или другим квантовым числам. Если последнее имеет место, то для снятия вырождения нужно ввести достаточно большой набор наблюдаемых переменных, коммутирующих с нулевым гамильтонианом. Ниже все собственные значения этих переменных, включая собственные значения импульсов, мы будем обозначать одним символом α . Другим классом решений уравнения (7.16), который понадобится в дальнейшем, являются собственные состояния угловых моментов налетающих частиц, а не импульсов. При необходимости из таких решений с учетом дополнительных квантовых чисел можно также образовать полный набор.

Полным состояниям Ψ сопоставляют те же квантовые числа, что и для Ψ_0 , но эти квантовые числа *не обязательно* являются собственными значениями операторов, которые коммутируют с H . Смысл данных квантовых чисел для состояния Ψ следует из интегральных уравнений (7.15) или (7.15а): эти

числа задают граничные условия. Очевидно, далее, что Ψ имеет дополнительную степень свободы, которой нет у состояния Ψ_0 . А именно, вектор состояния $\Psi_0(E, \alpha)$ может служить для вектора состояния $\Psi(E, \alpha)$ как ин-, так и аут-состоянием. В первом случае состояние $\Psi(E, \alpha)$ называют состоянием $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$, во втором — состоянием $\Psi^{(-)}(E, \alpha)$. Однако это не означает, что для данной энергии имеется вдвое больше решений уравнения с полным гамильтонианом, чем для уравнения для свободных частиц. Каждый вектор состояния $\Psi^{(-)}(E, \alpha)$ является линейной комбинацией различных векторов состояний $\Psi^{(+)}(E, \alpha')$ для одного и того же значения энергии, и наоборот. Последний вывод вытекает из (6.48) с учетом того факта, что S' коммутирует с H [см. (6.51)]. Ниже это будет явным образом видно из формулы (7.65).

Зададим наконец нормировку векторов состояний. Для этой цели достаточно задать только нормировку Ψ_0 . После этого интегральные уравнения будут однозначно определять $\Psi^{(\pm)}$. Будем считать, что вектор Ψ_0 имеет следующую нормировку:

$$(\Psi_0(E, \alpha), \Psi_0(E', \alpha')) = \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (7.18)$$

где в случае непрерывных квантовых чисел символ Кронекера δ следует заменять на δ -функцию. Тогда нормировка состояний полного гамильтониана, определяемых интегральным уравнением (7.15) или (7.15а), автоматически будет такой же, т. е. если значения E и E' лежат в непрерывном спектре, то

$$(\Psi^{(+)}(E, \alpha), \Psi^{(+)}(E', \alpha')) = \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'} \quad (7.19)$$

и

$$(\Psi^{(-)}(E, \alpha), \Psi^{(-)}(E', \alpha')) = \delta(E - E') \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (7.19a)$$

Это уже было подтверждено в гл. 6, § 3. Конечно, состояния, нормированные таким образом, не являются фурье-компонентами нормированных волновых пакетов, как в случае (7.14). Прежде чем образовывать из них такие пакеты, нужно ввести подходящие весовые функции, так чтобы

$$\Psi_0(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dE f(E) e^{-iEt} \Psi_0(E, \alpha).$$

Стоячие волны или векторы состояний, соответствующие главным значениям. Другим представляющим интерес вектором состояний является решение интегрального уравнения

$$\Psi^{(P)}(E, \alpha) = \Psi_0(E, \alpha) + G^P(E) H' \Psi^{(P)}(E, \alpha), \quad (7.20)$$

где G^P — главное значение функции Грина (7.8). Используя интегральные уравнения (7.15) и (7.8) и записывая $\Psi^{(P)}(E, \alpha)$ в виде

$$\Psi^{(P)}(E, \alpha) = \Psi^{(+)}(E, \alpha) + \Delta\Psi(E, \alpha),$$

получаем

$$\Delta\Psi(E, \alpha) = i\pi\delta(E - H_0) H' \Psi^{(+)}(E, \alpha) + G^P(E) H' \Delta\Psi(E, \alpha).$$

Разложим операторную δ -функцию по векторам состояний Ψ_0 :

$$\delta(E - H_0) = \sum_{\beta} \Psi_0(E, \beta) \Psi_0^{\dagger}(E, \beta),$$

тогда

$$\Delta\Psi(E, \alpha) = i\pi \sum_{\beta} \Psi_0(E, \beta) \mathfrak{X}_{\beta\alpha}(E) + G^P(E) H' \Delta\Psi(E, \alpha),$$

где

$$\mathfrak{X}_{\beta\alpha}(E) = (\Psi_0(E, \beta), H' \Psi^{(+)}(E, \alpha)).$$

Отсюда можно сделать вывод, что

$$\Delta\Psi(E, \alpha) = i\pi \sum_{\beta} \Psi^{(P)}(E, \beta) \mathfrak{Z}_{\beta\alpha}(E),$$

т. е.

$$\Psi^{(+)}(E, \alpha) = \Psi^{(P)}(E, \alpha) - i\pi \sum_{\beta} \Psi^{(P)}(E, \beta) \mathfrak{Z}_{\beta\alpha}(E). \quad (7.21)$$

Физический смысл $\mathfrak{Z}_{\beta\alpha}$ будет ясен из формулы (7.40). Аналогичным образом получаем

$$\Psi^{(-)}(E, \alpha) = \Psi^{(P)}(E, \alpha) + i\pi \sum_{\beta} \mathfrak{Z}_{\alpha\beta}^*(E) \Psi^{(P)}(E, \beta). \quad (7.22)$$

3. Разложение функций Грина

Из предположения о полноте системы собственных состояний оператора H_0 сразу же следует разложение функций Грина. Если подействовать оператором $G(E)$ на (6.37), то для резольвенты получим

$$G(E) = \int_0^{\infty} dE' \frac{\sum_{\alpha} \Psi_0(E', \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E', \alpha)}{E - E'}. \quad (7.23)$$

Считая здесь E стремящейся к действительной оси соответственно сверху или снизу, приходим к следующим выражениям для $G^{\pm}(E)$:

$$G^{\pm}(E) = \int_0^{\infty} dE' \frac{\sum_{\alpha} \Psi_0(E', \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E', \alpha)}{E - E' \pm i\varepsilon} \quad (7.24)$$

и аналогично для $G^P(E)$:

$$G^P(E) = \mathcal{P} \int_0^{\infty} dE' \frac{\sum_{\alpha} \Psi_0(E', \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E', \alpha)}{E - E'}. \quad (7.24a)$$

Таким же способом можно разложить точные функции Грина по полному набору собственных состояний оператора H . Допустим, что состояния $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$ вместе со связанными состояниями образуют полный набор

$$1 = \sum_n \Psi_n \Psi_n^* + \int_0^{\infty} dE' \sum_{\alpha} \Psi^{(+)}(E', \alpha) \Psi^{(+)\dagger}(E', \alpha). \quad (7.25)$$

Тогда получим

$$\mathcal{G}^{\pm}(E) = \sum_n \frac{\Psi_n \Psi_n^{\dagger}}{E - E_n} + \int_0^{\infty} dE' \frac{\sum_{\alpha} \Psi^{(+)}(E', \alpha) \Psi^{(+)\dagger}(E', \alpha)}{E - E' \pm i\varepsilon}, \quad (7.26)$$

$$\mathcal{G}^P(E) = \sum_n \frac{\Psi_n \Psi_n^{\dagger}}{E - E_n} + \mathcal{P} \int_0^{\infty} dE' \frac{\sum_{\alpha} \Psi^{(+)}(E', \alpha) \Psi^{(+)\dagger}(E', \alpha)}{E - E'}. \quad (7.26a)$$

То, что для данного представления нормировка векторов $\Psi^{(+)}$, определяемых интегральным уравнением (7.15), является правильной, уже было доказано с помощью (7.19). Другая возможность состоит в использовании векторов $\Psi^{(-)}$.

Учитывая приведенное ниже соотношение (7.65), а также то, что S -матрица унитарна, получаем

$$\sum_{\alpha} \Psi^{(+)}(E, \alpha) \Psi^{(+)\dagger}(E, \alpha) = \sum_{\alpha} \Psi^{(-)}(E, \alpha) \Psi^{(-)\dagger}(E, \alpha). \quad (7.27)$$

С другой стороны, векторы $\Psi^{(P)}$ так просто использовать здесь *нельзя*. Согласно приведенному ниже соотношению (7.64) имеем

$$\sum_{\alpha} \Psi^{(+)}(E, \alpha) \Psi^{(+)\dagger}(E, \alpha) = \sum_{\alpha, \beta} \Psi^{(P)}(E, \alpha) [(1 + K^2)^{-1}]_{\alpha\beta} \Psi^{(P)\dagger}(E, \beta), \quad (7.28)$$

откуда видно, что $\Psi^{(P)}$ не имеют необходимой нормировки. Подходящую нормировку мы получаем, вводя векторы

$$\Psi^{(P)'}(E, \alpha) \equiv \sum_{\beta} [(1 + K^2)^{-1/2}]_{\beta\alpha} \Psi^{(P)}(E, \beta), \quad (7.29)$$

которые полностью определены, поскольку K — эрмитова матрица и, следовательно, K^2 положительно полуопределено.

§ 2. ВОЛНОВОЙ ОПЕРАТОР И S -МАТРИЦА

1. Операторы, Ω , S и S'

Так как волновые операторы $\Omega^{(\pm)}$ не зависят от времени, то можно подставить (6.23) и (6.28) непосредственно в преобразования Фурье (7.14). В результате получим

$$\Psi^{(\pm)}(E, \alpha) = \Omega^{(\pm)} \Psi_0(E, \alpha), \quad (7.30)$$

где операторы $\Omega^{(\pm)}$ не зависят от E (так же, как и от α). Согласно замечанию, сделанному после формулы (6.37), эти операторы переводят состояния свободных частиц прямо в соответствующие состояния полного гамильтониана. Из изометрии операторов $\Omega^{(\pm)}$ следует также, что

$$\Psi_0(E, \alpha) = \Omega^{(\pm)\dagger} \Psi^{(\pm)}(E, \alpha). \quad (7.31)$$

Поэтому преобразования Фурье соотношений (6.41) и (6.48) имеют вид

$$\Psi^{(+)}(E, \alpha) = S' \Psi^{(-)}(E, \alpha), \quad (7.32)$$

$$\Psi_{\text{аут}}(E) = S \Psi_{\text{ин}}(E). \quad (7.33)$$

Первая формула связывает состояние с квантовыми числами α , задание которого будет производиться в отдаленном *будущем*, с состоянием, которое было приготовлено в далеком прошлом с такими же квантовыми числами. Второе соотношение связывает состояние (свободных частиц), в которое перейдет в будущем данное точное состояние, с состоянием (свободных частиц), из которого точное состояние образовалось в далеком прошлом. Мы не можем не указывать непосредственно квантовые числа этих состояний. Если полное состояние есть $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$, то состоянием $\Psi_{\text{ин}}$ в (7.33) будет $\Psi_0(E, \alpha)$, но тогда состояние $\Psi_{\text{аут}}$ в левой части (7.33) не будет простым. Если полное состояние есть $\Psi^{(-)}(E, \alpha)$, то состоянием $\Psi_{\text{аут}}$ в (7.33) будет $\Psi_0(E, \alpha)$, но тогда не будет простым состояние $\Psi_{\text{ин}}$ в правой части (7.33).

Используя (7.30), разложение (6.37а) можно переписать более подробно:

$$\Omega^{(\pm)} = \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dE \Psi^{(\pm)}(E, \alpha) \Psi_0^{\dagger}(E, \alpha). \quad (7.34)$$

Если последнюю формулу подставить в (6.49), то получим разложение

$$S' = \sum_{\alpha} \int_0^{\infty} dE \Psi^{(+)}(E, \alpha) \Psi^{(-)\dagger}(E, \alpha). \quad (7.35)$$

Для практически более полезного оператора S аналогичного простого разложения не существует.

2. T-матрица

Из формул (6.42) и (6.45), видно, что ответ на основной вопрос задачи рассеяния дают матричные элементы S -матрицы. Если в качестве $\Psi^{(-)}$ и $\Psi^{(+)}$ выбрать моноэнергетические состояния, то на базе состояний свободных частиц получим

$$(\Psi^{(-)}(E_{\beta}, \beta), \Psi^{(+)}(E_{\alpha}, \alpha)) = (\Psi_0(E_{\beta}, \beta), S\Psi_0(E_{\alpha}, \alpha)). \quad (7.36)$$

Однако так как S коммутирует с H_0 , то последнее выражение пропорционально $\delta(E_{\beta} - E_{\alpha})$. Кроме того, поскольку при $H = H_0$ имеем $S = 1$ и рассеяние отсутствует, то удобно ввести следующее определение¹⁾:

$$(\Psi_0(E_{\beta}, \beta), S\Psi_0(E_{\alpha}, \alpha)) = (\Psi_0(E_{\beta}, \beta), \Psi_0(E_{\alpha}, \alpha)) - 2\pi i \delta(E_{\beta} - E_{\alpha}) \mathfrak{S}_{\beta\alpha}(E). \quad (7.37)$$

Теперь можно сразу получить практически полезную формулу для $\mathfrak{S}_{\beta\alpha}(E)$, если использовать (7.15) и (7.15а) для отыскания разности между $\Psi^{(+)}$ и $\Psi^{(-)}$. Согласно (7.8), имеем

$$\Psi^{(+)}(E, \alpha) - \Psi^{(-)}(E, \alpha) = -2\pi i \delta(E - H) H' \Psi_0(E, \alpha). \quad (7.38)$$

Подставляя последнее выражение в (7.36), получаем

$$\begin{aligned} (\Psi_0(E_{\beta}, \beta), S\Psi_0(E_{\alpha}, \alpha)) &= (\Psi^{(+)}(E_{\beta}, \beta), \Psi^{(+)}(E_{\alpha}, \alpha)) - \\ &\quad - 2\pi i \delta(E_{\beta} - E_{\alpha}) (\Psi_0(E_{\alpha}, \beta), H' \Psi^{(+)}(E_{\alpha}, \alpha)) = \\ &= (\Psi^{(-)}(E_{\beta}, \beta), \Psi^{(-)}(E_{\alpha}, \alpha)) - \\ &\quad - 2\pi i \delta(E_{\beta} - E_{\alpha}) (\Psi^{(-)}(E_{\alpha}, \beta), H' \Psi_0(E_{\alpha}, \alpha)). \end{aligned} \quad (7.39)$$

В силу (7.30) и изометрии операторов $\Omega^{(\pm)}$ (6.35) первые члены в правых частях обоих равенств (7.39) равны $(\Psi_0(E_{\beta}, \beta), \Psi_0(E_{\alpha}, \alpha))$. Поэтому из сравнения (7.39) и (7.37) следует, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\beta\alpha}(E) &= (\Psi_0(E, \beta), H' \Psi^{(+)}(E, \alpha)) = \\ &= (\Psi^{(-)}(E, \beta), H' \Psi_0(E, \alpha)). \end{aligned} \quad (7.40)$$

Приведенные формулы наиболее часто используют при вычислении элементов S -матрицы и амплитуд рассеяния. Подстановка (7.15) и (7.15а) в (7.40) и использование формулы (7.9) позволяет убедиться в том, что правые части равенств (7.40) действительно равны друг другу и что

$$\mathfrak{S}_{\beta\alpha}(E) = (\Psi_0(E, \beta), [H' + H' \mathcal{G}^+(E) H'] \Psi_0(E, \alpha)). \quad (7.41)$$

Такой же результат непосредственно следует и из формулы (6.676), которая является основной при выводе соотношения (7.41) в представлении взаимодействия. В представлении Гейзенберга то же самое соотношение следует из (6.81).

Учтем теперь явно различие между случаем, когда частица рассеивается на неподвижной мишени, и случаем, когда две частицы рассеиваются друг

¹⁾ Существует значительная путаница в используемых в литературе обозначениях T-матрицы. Некоторые авторы используют T-матрицы, которые отличаются от T-матрицы, используемой в настоящей книге, знаком либо множителями 2π или π .

на друге (независимо от того, происходит ли реакция и образуются ли при столкновении новые частицы). В первом случае можно использовать формулу (7.40) или прямо (7.41); во втором случае гамильтониан обладает свойством трансляционной инвариантности, вследствие чего сохраняется полный импульс частиц \mathbf{P} . Будем использовать в качестве одного из квантовых чисел векторов состояний в явном виде полный импульс \mathbf{P} , помимо энергии и остальных квантовых чисел α . Тогда вместо (7.18) удобно выбрать следующую нормировку:

$$(\Psi_0(E, \mathbf{P}, \alpha), \Psi_0(E', \mathbf{P}', \alpha)) = \delta(E - E') \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta(\alpha - \alpha'), \quad (7.42)$$

где последняя δ -функция может представлять собой произведение δ -функций и δ -символов Кронекера, если среди квантовых чисел α имеются дискретные квантовые числа. Конечно, соответственно следует изменить и условия нормировки (7.19) и (7.19а). Теперь \mathbf{T} -матрица должна содержать трехмерную δ -функцию от импульсов, которая выражает собой закон сохранения полного импульса

$$\mathfrak{T}_{\beta\alpha}(E) = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') T_{\beta\alpha}(E). \quad (7.43)$$

Векторы состояний $\Psi_0(E, \mathbf{P}, \alpha)$ являются прямым произведением собственных векторов оператора импульса \mathbf{P} и собственных векторов остальных операторов, которые хотя и зависят от $|\mathbf{P}|$, но вследствие инвариантности относительно пространственных вращений могут быть выбраны не зависящими от направления вектора \mathbf{P} :

$$\Psi_0(E, \mathbf{P}, \alpha) = \Psi_0(\mathbf{P}) \times \Psi_0(E, |\mathbf{P}|, \alpha).$$

То же самое верно и для $\Psi^{(\pm)}$. Поэтому из (7.40) получаем

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}(E, |\mathbf{P}|) &= (\Psi_0(E, |\mathbf{P}|, \beta), H' \Psi^{(+)}(E, |\mathbf{P}|, \alpha)) = \\ &= (\Psi^{(-)}(E, |\mathbf{P}|, \beta), H' \Psi_0(E, |\mathbf{P}|, \alpha)). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Аналогичная формула получается из (7.41). Обычно после выделения δ -функции зависимость \mathbf{T} -матрицы от полного импульса в явном виде не указывают. Она определяется выбором системы отсчета. В системе центра масс, конечно, $\mathbf{P} = 0$. В дальнейшем, говоря о \mathbf{T} -матрице в случае столкновения двух частиц, мы будем иметь в виду формулу (7.44), а в случае рассеяния частицы на неподвижной мишени — выражение (7.40), а готическую букву \mathfrak{T} больше использовать не будем.

Два различных способа вычисления \mathbf{T} -матрицы, представленные в (7.44), связаны с двумя различными, но одинаково разумными физическими картинками процесса рассеяния. В первом случае мы считаем, что полный вектор состояния был задан в далеком прошлом как состояние свободных частиц с квантовыми числами α ; это вектор $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$. Как будет видно при рассмотрении координатного представления, сказанное означает, что $\Psi^{(+)}$ есть состояние, часть которого, представляющую *сходящуюся* волну, специально *приготавливают* или задают тем или иным способом. Та его часть, которая представляет *расходящуюся* волну, или поведение $\Psi^{(+)}$ в отдаленном будущем, не задается, а определяется взаимодействием в процессе рассеяния. При $t \rightarrow \infty$ производят измерение с целью определить, какую долю составляет в состоянии Ψ^+ свободное состояние β , а именно устанавливают счетчики, чтобы найти, сколько частиц рассеивается в каждом направлении. В случае второго варианта формулы (7.44) мы считаем, что полное физическое состояние в отдаленном будущем переходит в состояние, описывающее заданный пучок. Как будет видно ниже, это означает, что та часть состояния $\Psi^{(+)}$, которая представляет собой *расходящуюся* волну, задается и считается известной, в то время как часть, представляющая *сходящуюся* волну, или его поведение в далеком прошлом, неизвестны; это должно быть такое сложное состояние, которое

при $t \rightarrow \infty$ оказывается простым. При $t \rightarrow -\infty$ производят измерение с целью определить, какую долю фактически составляло в прошлом такое состояние в свободном состоянии $\Psi_0(E, \alpha)$. Первый вариант в большей степени импонирует нашей физической интуиции, особенно в отношении понятия причинности, однако оба варианта в равной мере правильно описывают процесс рассеяния.

Продолжение вне энергетической поверхности. Согласно определению (7.37) матрицы $T_{\beta\alpha}(E)$, она относится только к одной энергии. Это просто выражение факта сохранения энергии. Тем не менее выражения в правых частях формулы (7.40) и (7.44) можно вычислять и для двух различных значений энергии

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^{(+)} &\equiv (\Psi_0(E_\beta, \beta), H' \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)), \\ T_{\beta\alpha}^{(-)} &\equiv (\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), H' \Psi_0(E_\alpha, \alpha)). \end{aligned} \quad (7.45)$$

Соотношения (7.45) называют *продолжениями T-матрицы вне энергетической поверхности* в противоположность формулам (7.40) или (7.44), которые определяют T-матрицу *на энергетической поверхности*. При этом

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^{(+)} &\rightarrow T_{\beta\alpha} && \text{при } E_\beta \rightarrow E_\alpha, \\ T_{\beta\alpha}^{(-)} &\rightarrow T_{\beta\alpha} && \text{при } E_\beta \rightarrow E_\alpha. \end{aligned}$$

Конечно, имеется бесконечно много других продолжений T-матрицы вне энергетической поверхности, но указанные два обычно наиболее удобны. Единственной функцией, имеющей физический смысл, является матрица $T_{\beta\alpha}(E)$, заданная *на энергетической поверхности*.

Из (7.41) видно, что $T_{\beta\alpha}(E)$ представляет собой матричный элемент оператора

$$T(E) = H' + H' \mathcal{G}^+(E) H', \quad (7.46)$$

вычисленный с помощью собственных состояний свободных частиц с энергией E . Подстановка в (7.46) интегрального уравнения (7.11) [для \mathcal{G}^+ дает интегральное уравнение для оператора T

$$\begin{aligned} T(E) &= H' + T(E) G^+(E) H' = \\ &= H' + H' G^+(E) T(E). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^{(+)} &= (\Psi_0(E_\beta, \beta), T(E_\alpha) \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) \\ T_{\beta\alpha}^{(-)} &= (\Psi_0(E_\beta, \beta), T(E_\beta) \Psi_0(E_\alpha, \alpha)) = \\ &= [T^\dagger]_{\alpha\beta}^{+*}, \end{aligned} \quad (7.48)$$

то операторные уравнения для $T(E)$ можно заменить уравнениями для матриц $T_{\beta\alpha}^{(+)}$ и $T_{\beta\alpha}^{(-)}$:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^{(+)} &= H'_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \int \frac{dE_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} H'_{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}^{(+)}, \\ T_{\beta\alpha}^{(-)} &= H'_{\beta\alpha} + \sum_\gamma \int \frac{dE_\gamma}{E_\beta - E_\gamma + i\epsilon} T_{\beta\gamma}^{(-)} H'_{\gamma\alpha}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

которые получаются путем введения полного набора состояний свободных частиц между операторами T и G в формуле (7.47). Вследствие того что необходимо вводить полный набор состояний, для T-матрицы на энергетической поверхности аналогичных уравнений не существует. Последнюю матрицу можно получить *после* решения любого из уравнений (7.49), положив $E_\alpha = E_\beta$.

Иногда удобно пользоваться более общим продолжением T -матрицы вне энергетической поверхности, рассматривая матричные элементы $T(E)$, вычисленные между состояниями, ни одно из которых не относится к значению энергии E :

$$T_{\beta\alpha}(E_\beta, E_\alpha; E) = (\Psi_0(E_\beta, \beta), T(E) \Psi_0(E_\alpha, \alpha)). \quad (7.48a)$$

При этом, конечно, имеем

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}^{(+)}(E_\beta, E_\alpha) &= T_{\beta\alpha}(E_\beta, E_\alpha; E_\alpha), \\ T_{\beta\alpha}^{(-)}(E_\beta, E_\alpha) &= T_{\beta\alpha}(E_\beta, E_\alpha; E_\beta). \end{aligned}$$

Отметим, что, согласно (7.46),

$$[T(E + i\varepsilon)]^\dagger = T(E - i\varepsilon), \quad (7.50)$$

так что

$$T_{\beta\alpha}^{(-)}(E_\beta + i\varepsilon, E_\alpha) = T_{\alpha\beta}^{(+)}(E_\alpha, E_\beta - i\varepsilon). \quad (7.51)$$

Обобщенная оптическая теорема. Другой набор уравнений можно получить, вычисляя матричные элементы от (7.46) между состояниями свободных частиц $\Psi_0(E_\alpha, \alpha)$, $\Psi_0(E_\beta, \beta)$ при $E_\beta = E$ и используя разложение \mathcal{G} по полному набору собственных состояний гамильтониана H , включая связанные состояния. В итоге получаем

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(+)} &= H'_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma} \int_0^{\infty} dE_\gamma \frac{T_{\alpha\gamma}^{(+)} T_{\beta\gamma}^{(+)*}}{E_\beta - E_\gamma + i\varepsilon} + \\ &+ \sum_n (E_\alpha - E_n) (\Psi_0(E_\alpha, \alpha), \Psi_n) (\Psi_n, \Psi_0(E_\beta, \beta)), \quad (7.52) \end{aligned}$$

поскольку имеет место, например, соотношение

$$(\Psi_0(E_\alpha, \alpha), H' \Psi_n) = (E_n - E_\alpha) (\Psi_0(E_\alpha, \alpha), \Psi_n).$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(-)} &= H'_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma} \int_0^{\infty} dE_\gamma \frac{T_{\alpha\gamma}^{(-)*} T_{\beta\gamma}^{(-)}}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} + \\ &+ \sum_n (E_\beta - E_n) (\Psi_0(E_\alpha, \alpha), \Psi_n) (\Psi_n, \Psi_0(E_\beta, \beta)). \quad (7.52a) \end{aligned}$$

Переставляя в выражении (7.52) α и β , выполняя комплексное сопряжение и вычитая результат из (7.52) с использованием эрмитовости H' , получаем

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(+)} - T_{\beta\alpha}^{(+)*} &= \sum_{\gamma} \int_0^{\infty} dE_\gamma T_{\alpha\gamma}^{(+)} T_{\beta\gamma}^{(+)*} \left(\frac{1}{E_\beta - E_\gamma + i\varepsilon} - \frac{1}{E_\alpha - E_\gamma - i\varepsilon} \right) + \\ &+ (E_\alpha - E_\beta) \sum_n (\Psi_0(E_\alpha, \alpha), \Psi_n) (\Psi_n, \Psi_0(E_\beta, \beta)), \quad (7.53) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta}^{(-)} - T_{\beta\alpha}^{(-)*} &= \sum_{\gamma} \int_0^{\infty} dE_\gamma T_{\alpha\gamma}^{(-)*} T_{\beta\gamma}^{(-)} \left(\frac{1}{E_\alpha - E_\gamma + i\varepsilon} - \frac{1}{E_\beta - E_\gamma - i\varepsilon} \right) + \\ &+ (E_\beta - E_\alpha) \sum_n (\Psi_0(E_\alpha, \alpha), \Psi_n) (\Psi_n, \Psi_0(E_\beta, \beta)). \quad (7.53a) \end{aligned}$$

Далее, если положить $E_\alpha = E_\beta$, то все матричные элементы \mathbf{T} -матрицы будут на энергетической поверхности и в итоге

$$T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}^* = -2\pi i \sum_{\gamma} T_{\alpha\gamma} T_{\beta\gamma}^*. \quad (7.54)$$

Соотношение (7.54) представляет формальную запись *обобщенной оптической теоремы*, выведенной в теории рассеяния электромагнитных волн (гл. 2, § 3, п. 4). Оптическая теорема (выведенная для случая рассеяния электромагнитных волн в гл. 1, § 3, п. 9) получается из (7.54) при $\alpha = \beta$:

$$\text{Im} T_{\alpha\alpha} = -\pi \sum_{\gamma} |T_{\alpha\gamma}|^2. \quad (7.55)$$

Соотношения (7.53) и (7.53а), являющиеся обобщением оптической теоремы на случай, когда \mathbf{T} -матрица задана вне энергетической поверхности, известны также под названием *уравнений Лоу* (впервые получены в работе Лоу [546]).

3. К-матрица

По аналогии с (7.40) можно определить *матрицу реакций* через главное значение вектора состояния (7.20):

$$K_{\beta\alpha}(E) = -\pi (\Psi_0(E, \beta), H' \Psi^{(P)}(E, \alpha)). \quad (7.56)$$

Из (7.40) и (7.21) получаем следующее соотношение между \mathbf{T} - и \mathbf{K} -матрицами:

$$\pi T_{\beta\alpha}(E) = -K_{\beta\alpha}(E) + i\pi \sum_{\gamma} K_{\beta\gamma}(E) T_{\gamma\alpha}(E),$$

которое представляет собой запись интегрального уравнения Гайтлера (6.47а) на энергетической поверхности. В матричной форме оно имеет вид

$$\pi \mathbf{T} = -\mathbf{K} (\mathbf{1} - i\mathbf{K})^{-1} \quad (7.57)$$

или, если записать \mathbf{S} -матрицу на энергетической поверхности, получим

$$\mathbf{S} = \mathbf{1} - 2\pi i \mathbf{T}, \quad (7.58)$$

$$\mathbf{S} = (\mathbf{1} + i\mathbf{K}) (\mathbf{1} - i\mathbf{K})^{-1}. \quad (7.59)$$

Следует отметить, что в отличие от (7.49) последние соотношения имеют место на энергетической поверхности.

Используя второе равенство (7.40) и формулу (7.20), легко убедиться, что матрицу \mathbf{K} можно также записать в виде

$$K_{\beta\alpha}(E) = -\pi (\Psi^{(P)}(E, \beta), H' \Psi_0(E, \alpha)), \quad (7.56a)$$

в котором явно выражено свойство эрмитовости матрицы реакции

$$\mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}. \quad (7.60)$$

Формулы (7.56) и (7.56а) дают «естественное» продолжение \mathbf{K} -матрицы в область вне энергетической поверхности:

$$\begin{aligned} K_{\beta\alpha}^{(+)} &\equiv -\pi (\Psi_0(E_\beta, \beta), H' \Psi^{(P)}(E_\alpha, \alpha)), \\ K_{\beta\alpha}^{(-)} &\equiv -\pi (\Psi^{(P)}(E_\beta, \beta), H' \Psi_0(E_\alpha, \alpha)). \end{aligned} \quad (7.61)$$

Используя в (7.61) интегральное уравнение (7.20) для $\Psi^{(P)}$, получаем уравнения, аналогичные (7.49),

$$\begin{aligned} K_{\beta\alpha}^{(+)} &= -\pi H'_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma} \mathcal{P} \int \frac{dE_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma} H'_{\beta\gamma} K_{\gamma\alpha}, \\ K_{\beta\alpha}^{(-)} &= -\pi H'_{\beta\alpha} + \sum_{\gamma} \mathcal{P} \int \frac{dE_\gamma}{E_\beta - E_\gamma} K_{\beta\gamma}^{(-)} H'_{\gamma\alpha}. \end{aligned} \quad (7.62)$$

Оба продолжения матрицы реакций вне энергетической поверхности (7.61) связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{K}^{(+)\dagger} = \mathbf{K}^{(-)}, \quad (7.63)$$

которое на энергетической поверхности переходит в (7.60).

Теперь (7.21) и (7.22) можно представить в матричной форме и заменить \mathbf{T} -матрицу согласно (7.57). При этом получим

$$\begin{aligned} \Psi^{(P)}(E, \alpha) &= \sum_{\beta} \Psi^{(+)}(E, \beta) (1 - i\mathbf{K})_{\beta\alpha} = \\ &= \sum_{\beta} \Psi^{(-)}(E, \beta) (1 + i\mathbf{K})_{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (7.64)$$

и, следовательно, согласно (7.59) и (7.60),

$$\Psi^{(+)}(E, \alpha) = \sum_{\beta} \Psi^{(-)}(E, \beta) S_{\beta\alpha}(E), \quad (7.65)$$

$$\Psi^{(-)}(E, \alpha) = \sum_{\beta} \Psi^{(+)}(E, \beta) S_{\alpha\beta}^*(E). \quad (7.65a)$$

Последние соотношения не следует путать с (7.32); в (7.32) S' — оператор, который переводит $\Psi^{(-)}(E, \alpha)$ в $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$. Величины $S_{\beta\alpha}$ в (7.65) суть набор числовых коэффициентов, определяющих линейную комбинацию различных векторов $\Psi^{(-)}(E, \beta)$, через которую выражается вектор $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$.

4. Унитарность и обратимость

Из соотношений (7.65) и (7.65a), которые являются следствием (7.59), с учетом эрмитовости \mathbf{K} -матрицы (7.60) следует, что

$$\mathbf{S}(E) \mathbf{S}^{\dagger}(E) = \mathbf{S}^{\dagger}(E) \mathbf{S}(E) = \mathbf{1}; \quad (7.66)$$

это, конечно, является следствием унитарности оператора S . Для \mathbf{T} -матрицы, связанной с S -матрицей соотношением (7.58), свойство унитарности можно записать в виде

$$\frac{1}{2} i (\mathbf{T}^{\dagger} - \mathbf{T}) = -\pi \mathbf{T} \mathbf{T}^{\dagger} = -\pi \mathbf{T}^{\dagger} \mathbf{T}. \quad (7.67)$$

Таким образом, антиэрмитова часть \mathbf{T} -матрицы является неположительно определенной. Соотношение (7.67) представляет собой формальное выражение обобщенной оптической теоремы (7.54). При его доказательстве существенно эрмитовость гамильтониана. Если по каким-либо причинам от эрмитовости гамильтониана приходится отказываться, то соотношения (7.66) и (7.67) перестают выполняться. При этом, если антиэрмитова часть \mathbf{T} -матрицы *меньше*, чем $-\pi \mathbf{T} \mathbf{T}^{\dagger}$ (в том смысле, что матрица

$$\frac{1}{2} i (\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\dagger}) - \pi \mathbf{T} \mathbf{T}^{\dagger}$$

является неотрицательно определенной), то мы будем называть такую систему *поглощающей*. Как было показано в гл. 2, § 3, п. 1, для случая рассеяния электромагнитных волн это означает, что поток, уходящий от рассеивающего центра, меньше потока, падающего на него.

Подразумевается, что уравнение (7.67) записано на энергетической поверхности. Если не накладывать такого ограничения на матричные элементы, то (7.67) нужно записать более подробно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} i [T_{\beta\alpha}^*(E) - T_{\alpha\beta}(E)] &= -\pi \sum_{\gamma} \delta(E - E_{\gamma}) T_{\alpha\gamma}(E) T_{\beta\gamma}^*(E) = \\ &= -\pi \sum_{\gamma} \delta(E - E_{\gamma}) T_{\gamma\alpha}^*(E) T_{\gamma\beta}(E). \end{aligned} \quad (7.67a)$$

В такой форме условие унитарности можно продолжить вне энергетической поверхности.

Свойство унитарности можно также сразу включить в запись T -матрицы, если выразить последнюю через K -матрицу соответственно формуле (7.57), которую можно переписать в виде

$$\pi T = -K - K(\pi T + i)K. \quad (7.68)$$

Если соотношение (7.68) требуется продолжить вне энергетической поверхности, то, конечно, нужно явно ввести соответствующие δ -функции так же, как и в (7.67а),

$$\begin{aligned} \pi T_{\alpha\beta}(E) = & -K_{\alpha\beta}(E) - \sum_{\gamma\sigma} K_{\alpha\gamma}(E) \delta(E - E_\gamma) \times \\ & \times [\pi T_{\gamma\sigma}(E) + i\delta_{\gamma\sigma}] \delta(E - E_\sigma) K_{\sigma\beta}(E). \end{aligned}$$

В такой форме это соотношение можно продолжить вне энергетической поверхности. Однако из-за наличия δ -функций T -матрица в правой части равенства остается на энергетической поверхности. Ее можно выразить через K -матрицу на энергетической поверхности. При этом получим

$$\begin{aligned} \pi T_{\alpha\beta}(E_\alpha, E_\beta; E) = & -K_{\alpha\beta}(E_\alpha, E_\beta; E) - \\ & - i \sum_{\gamma\sigma} K_{\alpha\gamma}(E_\alpha, E; E) \{[1 - iK(E)^{-1}]_{\gamma\sigma}\} K_{\sigma\beta}(E, E_\beta; E), \end{aligned} \quad (7.69)$$

где K -матрица в квадратных скобках берется на энергетической поверхности.

Если гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, то S - и T -матрицы должны удовлетворять еще одному условию. Пусть ϕ — антиунитарный¹⁾ оператор обращения времени, который обладает следующим свойством:

$$(\phi\Psi_1, \phi\Psi_2) = (\Psi_2, \Psi_1). \quad (7.70)$$

Так как оператор H_0 инвариантен относительно обращения времени, т. е.

$$[\phi, H_0] = 0,$$

то оператор ϕ переводит состояние свободных частиц с данной энергией в линейные комбинации состояний свободных частиц с той же энергией. Допустим, что квантовые числа α выбраны таким образом, что

$$\phi\Psi_0(E, \alpha) = \varphi_\alpha\Psi_0(E, \alpha'), \quad (7.71)$$

где φ_α — просто фазовый множитель. (Это уравнение определяет квантовые числа α' , характеризующие «обращенное по времени» состояние частиц.) Если точный гамильтониан H также инвариантен относительно замены t на $-t$:

$$[\phi, H] = 0,$$

то, поскольку обращение времени приводит к замене граничных условий при $t \rightarrow -\infty$ граничными условиями при $t \rightarrow +\infty$, и наоборот, получаем

$$\phi\Psi^{(+)}(E, \alpha) = \varphi_\alpha\Psi^{(-)}(E, \alpha'). \quad (7.71a)$$

¹⁾ Антиунитарный оператор является частным случаем антилинейного оператора, обладающего тем свойством, что $AC\Phi = C^*A\Phi$, где C — скаляр. Общее рассмотрение таких операторов содержится в работе Вигнера [913].

Поэтому имеем

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\beta}(E) &= (\Psi_0(E, \alpha), H' \Psi^{(+)}(E, \beta)) = \\
 &= (\theta H' \Psi^{(+)}(E, \beta), \theta \Psi_0(E, \alpha)) = \\
 &= (\Psi^{(-)}(E, \beta'), H' \Psi_0(E, \alpha')) \varphi_\alpha \varphi_\beta^* = \\
 &= \varphi_\alpha \varphi_\beta^* T_{\beta'\alpha'},
 \end{aligned} \tag{7.72}$$

откуда, в частности, следует, что

$$|T_{\alpha\beta}|^2 = |T_{\beta'\alpha'}|^2. \tag{7.73}$$

Это соотношение называется свойством *обратимости* T - или S -матрицы. В некотором особом представлении обратимость может выражаться в том, что S -матрица в этом представлении симметрична. Однако это имеет место только при специальном соглашении о выборе фаз волновых функций (гл. 15, § 1, п. 3).

5. Аддитивные взаимодействия

Вычисление векторов состояний или амплитуд рассеяния необязательно производить, используя в качестве невозмущенного гамильтониана кинетическую энергию частиц. Пусть гамильтониан имеет вид

$$H = H_0 + H'_1 + H'_2.$$

Тогда можно сначала найти собственные состояния, функции Грина и т. д. для гамильтониана

$$H_1 = H_0 + H'_1;$$

все соответствующие величины мы будем снабжать индексом 1, например:

$$\mathcal{G}_1^\pm(E) = (E - H_1 \pm i\epsilon)^{-1}.$$

Затем можно перейти к вычислению полных векторов состояний, функций Грина и т. д. для полного гамильтониана H , используя в качестве нулевого приближения соответствующие величины для гамильтониана H_1 . Имеем

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}^\pm(E) &= \mathcal{G}_1^\pm(E) + \mathcal{G}_1^\pm(E) H'_2 \mathcal{G}^\pm(E) = \\
 &= \mathcal{G}_1^\pm(E) + \mathcal{G}^\pm(E) H'_2 \mathcal{G}_1^\pm(E)
 \end{aligned} \tag{7.74}$$

и

$$\begin{aligned}
 \Psi^{(\pm)}(E, \alpha) &= \Psi_1^{(\pm)}(E, \alpha) + \mathcal{G}_1^\pm(E) H'_2 \Psi^{(\pm)}(E, \alpha) = \\
 &= \Psi_1^{(\pm)}(E, \alpha) + \mathcal{G}^\pm(E) H'_2 \Psi_1^{(\pm)}(E, \alpha).
 \end{aligned} \tag{7.75}$$

Отметим, что в этом случае неоднородные члены в уравнениях имеют индексы \pm ; таким образом, кроме плоской волны (если квантовые числа α соответствуют плоской волне), эти члены уже содержат расходящиеся или сходящиеся волны. Подставим теперь (7.75) в (7.36):

$$\begin{aligned}
 \{\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)\} &= \{\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)\} + \\
 &+ \{\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta), H'_2 \mathcal{G}^+(E_\beta) \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)\} = \\
 &= \{\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi_1^{(+)}(E_\alpha, \alpha)\} + \\
 &+ \{\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta), \mathcal{G}_1^+(E_\alpha) H'_2 \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)\} + \\
 &+ \{\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta), H'_2 \mathcal{G}^+(E_\beta) \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)\}.
 \end{aligned}$$

Во втором слагаемом функцию $\mathcal{G}^+(E_\alpha)$ можно заменить на $1/(E_\alpha - E_\beta + i\varepsilon)$, а в третьем слагаемом $\mathcal{G}^+(E_\beta)$ — на $1/(E_\beta - E_\alpha + i\varepsilon)$. Так как, согласно (7.7),

$$\frac{1}{E_\alpha - E_\beta + i\varepsilon} + \frac{1}{E_\beta - E_\alpha + i\varepsilon} = -2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha),$$

то

$$\begin{aligned} (\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) &= (\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi_1^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) - \\ &\quad - 2\pi i \delta(E_\beta - E_\alpha) (\Psi_1^{(-)}(E_\alpha, \beta), H_2' \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) \end{aligned}$$

или

$$T_{\beta\alpha}(E) = T_{1\beta\alpha}(E) + (\Psi_1^{(-)}(E, \beta), H_2' \Psi^{(+)}(E, \alpha)). \quad (7.76)$$

Аналогичным образом находим

$$T_{\beta\alpha}(E) = T_{1\beta\alpha}(E) + (\Psi^{(-)}(E, \beta), H_2' \Psi_1^{(+)}(E, \alpha)). \quad (7.76a)$$

Соотношения (7.76) и (7.76a) можно также записать в симметричной форме, подставив в них (7.75),

$$T_{\beta\alpha}(E) = T_{1\beta\alpha}(E) + (\Psi_1^{(-)}(E, \beta), [H_2' + H_2' \mathcal{G}^+(E) H_2'] \Psi_1^{(+)}(E, \alpha)). \quad (7.76b)$$

Простым случаем, в котором полезно использовать последние соотношения, является рассеяние заряженных частиц, испытывающих дополнительные некулоновские взаимодействия, например рассеяние протонов. Если в качестве H_1' взять кулоновское взаимодействие, а в качестве H_2' — ядерное взаимодействие, то матрицу T_1 , а также кулоновские волновые функции можно вычислить точно.

В качестве другого примера использования соотношений (7.76) — (7.76b) рассмотрим две частицы, взаимодействие которых с внешним полем описывается потенциалами V_a и V_b , а их взаимодействие друг с другом — потенциалом V_{ab} . Пусть в начальном состоянии частица b налетает на частицу a , находящуюся в связанном состоянии во внешнем поле V_a , а в конечном состоянии частица b находится в связанном состоянии во внешнем поле V_b , частица же a движется как свободная. Такой процесс называется *столкновением с перестройкой* (более подробно столкновения с перестройкой будут рассмотрены в гл. 16 и 17). Выберем в качестве H_1' и H_2'

$$H_1' = V_a + V_b,$$

$$H_2' = V_{ab}.$$

Тогда собственные состояния оператора H_1 являются *прямыми произведениями* собственных состояний операторов $H_{0a} + V_a$ и $H_{0b} + V_b$. Начальное собственное состояние оператора H_1 в явном виде определяется формулой

$$\Psi_1^{(+)}(E_\alpha, \alpha) = \Psi_\alpha^{(cb)} \times \Psi_b^{(+)}(E_\alpha - E_a^{(cb)}, \alpha), \quad (7.77)$$

а конечное собственное состояние оператора H_1 имеет вид

$$\Psi_1^{(-)}(E_\beta, \beta) = \Psi_a^{(-)}(E_\beta - E_b^{(cb)}, \beta) \times \Psi_b^{(cb)}. \quad (7.77a)$$

Поскольку векторы связанных состояний ортогональны состояниям непрерывного спектра, то матричные элементы T -матрицы в нулевом приближении обращаются в нуль:

$$T_{1\beta\alpha} = 0. \quad (7.78)$$

Мы остановимся на двух внешне различных формах записи элементов соответствующей T -матрицы:

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}(E) &= (\Psi_\alpha^{(-)}(E - E_b^{(cb)}, \beta) \times \Psi_b^{(cb)}, V_{ab} \Psi^{(+)}(E, \alpha)) = \\ &= (\Psi^{(-)}(E, \beta), V_{ab} \Psi_a^{(cb)} \times \Psi_b^{(+)}(E - E_a^{(cb)}, \alpha)). \end{aligned} \quad (7.79)$$

Оба эти результата естественным образом приводят к *борновскому приближению метода искаженных волн* (гл. 9, § 1, п. 2). Следует отметить, что первые члены в (7.76) и (7.76а) в данном случае отсутствуют, т. е. равенство (7.78) справедливо только тогда, когда взаимодействия V_a и V_b являются взаимодействиями с *внешним полем*, т. е. с третьей частицей бесконечно большой массы. В противном случае связанные состояния и состояния непрерывного спектра в (7.77) и (7.77а) относятся к различным системам координат и возникает эффект отдачи.

Метод функций Грина. Если гамильтониан взаимодействия имеет вид суммы

$$H' = \sum_i H'_i \quad (7.80)$$

и если известны решения, функции Грина и т. д., соответствующие отдельным членам этой суммы:

$$\mathcal{G}_i^\pm(E) = G^\pm(E) + \mathcal{G}_i^\pm(E) H'_i G^\pm(E), \quad (7.81)$$

$$T_i(E) = H'_i + H'_i \mathcal{G}_i^+(E) H'_i, \quad (7.82)$$

то можно применить следующий метод. Отметим прежде всего, что каждая функция \mathcal{G}_i включает *всю* кинетическую энергию и лишь одно из взаимодействий. Мы хотим вычислить полную **T**-матрицу, которая, согласно (7.47), удовлетворяет уравнению

$$T(E) = \sum_i H'_i + \sum_i H'_i G^+(E) T(E). \quad (7.83)$$

Введем вспомогательный оператор

$$T'_i(E) = H'_i + H'_i G^+(E) T(E), \quad (7.84)$$

так чтобы

$$T(E) = \sum_i T'_i(E). \quad (7.85)$$

Подставляя (7.81) в (7.84) и используя затем (7.83), получаем

$$\begin{aligned} T'_i &= H'_i + H'_i \mathcal{G}_i^+ T - H'_i \mathcal{G}_i^+ H'_i G^+ T = \\ &= H'_i + \sum_j H'_i \mathcal{G}_i^+ H'_j + \sum_{j \neq i} H'_i \mathcal{G}_i^+ H'_j G^+ T = \\ &= T_i + \sum_{j \neq i} H'_i \mathcal{G}_i^+ T'_j. \end{aligned}$$

Сравнение формулы (7.82) с интегральным уравнением

$$T_i = H'_i + T_i G^+ H'_i$$

показывает, что

$$H'_i \mathcal{G}_i^+(E) = T_i(E) G^+(E). \quad (7.86)$$

Следовательно, для вспомогательных операторов $T'_i(E)$ получаем систему связанных уравнений [1012—1014]

$$T'_i(E) = T_i(E) + \sum_{j \neq i} T_j(E) G^+(E) T'_j(E). \quad (7.87)$$

Другой подход состоит в использовании функции Грина вместо оператора T . Можно ввести функцию

$$L_i(E) = \mathcal{G}_i^+(E) - G^+(E), \quad (7.88)$$

так что, согласно (7.81) и (7.86), будем иметь

$$\begin{aligned} L_i(E) &= \mathcal{G}_i^+(E) H_i^+ G^+(E) = \\ &= G^+(E) H_i^+ \mathcal{G}_i^+(E) = \\ &= G^+(E) T_i(E) G^+(E). \end{aligned} \quad (7.89)$$

Тогда точная функция Грина запишется в виде

$$\mathcal{G}^+(E) = G^+(E) + \sum_i L_i(E) + C(E); \quad (7.90)$$

последнее соотношение служит определением величины $C(E)$. Чтобы найти выражение для $C(E)$, подставим точную функцию Грина $\mathcal{G}^+(E)$, выраженную через парциальные функции Грина

$$\mathcal{G}^+ = \mathcal{G}_i^+ + \sum_{j \neq i} \mathcal{G}_j^+ H_j^+ \mathcal{G}^+,$$

в выражение для \mathcal{G}^+ через G^+

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^+ &= G^+ + \sum_i G^+ H_i^+ \mathcal{G}^+ = \\ &= G^+ + \sum_i G^+ H_i^+ \mathcal{G}^+ + \sum_{i \neq j} G^+ H_i^+ \mathcal{G}_j^+ H_j^+ \mathcal{G}^+. \end{aligned}$$

Из сравнения (7.89) и (7.90) видно, что

$$C(E) = \sum_{i \neq j} L_i H_j^+ \mathcal{G}^+. \quad (7.91)$$

Подставляя, наконец, (7.90) в (7.91), получаем уравнение для $C(E)$ ([893], § 3 и [412])

$$C(E) = B(E) + \sum_{i \neq j} L_i(E) H_j^+ C(E), \quad (7.92)$$

где

$$\begin{aligned} B(E) &= \sum_{i \neq j} L_i(E) H_j^+ [G^+(E) + \sum_k L_k(E)] = \\ &= \sum_{i \neq j} L_i H_j^+ \mathcal{G}_j^+ + \sum_{\substack{i \neq j \\ k \neq j}} L_i H_j^+ L_k = \\ &= \sum_{i \neq j} L_i T_j G^+ + \sum_{\substack{i \neq j \\ k \neq j}} L_i H_j^+ L_k = \\ &= \sum_{i \neq j} G^+ T_i G^+ T_j G^+ + \sum_{\substack{i \neq j \\ k \neq j}} G^+ T_i G^+ H_j^+ G^+ T_k G^+. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Важные преимущества, заключающиеся в применении уравнений (7.87) и (7.92) при рассмотрении задач рассеяния с участием более чем двух частиц, будут изложены в гл. 17, § 4.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

Рассмотрим математическую структуру резольвенты оператора K , определяемой выражением¹⁾

$$(\alpha - K)^{-1}.$$

Если в качестве оператора K брать H_0 или H и полагать $E = \alpha$, то настоящее рассмотрение применимо соответственно к функциям Грина $G(E)$ и $\mathcal{G}(E)$.

¹⁾ Строго говоря, нужно было бы записывать $\alpha - K$ в виде $\alpha 1 - K$, но мы не будем в этом пункте очень педантичными. Отметим, что в теории интегральных уравнений величина $\alpha K (\alpha - K)^{-1}$ также называется резольвентой оператора K .

Оно относится также к уравнению Липпмана—Швингера, если при фиксированной энергии положить

$$K = GH',$$

при этом (7.15) записывается в виде $(1 - K) \Psi = \Psi_0$.

Первое замечание касается области определения (или кратко просто области) наших операторов. Вообще говоря, мы не можем рассматривать только ограниченные¹⁾, или непрерывные, операторы. Но мы будем считать, что все операторы, с которыми мы имеем дело, по меньшей мере являются замкнутыми²⁾, а их область определения является плотной в гильбертовом пространстве³⁾. Последнее предположение является нетривиальным, так как неограниченный замкнутый оператор не может быть определен всюду⁴⁾. Например, кинетическая энергия является дифференциальным оператором в координатном представлении или оператором умножения на p^2 в импульсном представлении, причем ни в одном из этих представлений оператор кинетической энергии не переводит все функции из L^2 -пространства в функции из того же пространства⁵⁾.

Каждую функцию из L^2 -пространства можно сколь угодно точно аппроксимировать (по норме) функцией $f(\mathbf{r})$ или функцией $h(\mathbf{p})$, для которой соответственно функция $\nabla^2 f(\mathbf{r})$ или функция $p^2 h(\mathbf{p})$ принадлежит L^2 -пространству. Следовательно, хотя областью определения оператора кинетической энергии является не все L^2 -пространство, эта область всюду плотна в этом пространстве.

1. Спектр

При данном значении α имеются четыре различные возможности для оператора $\alpha - K$.

а) Оператор $\alpha - K$ осуществляет взаимно однозначное отображение гильбертова пространства \mathcal{H} на все пространство либо на подпространство, являющееся всюду плотным в нем. Кроме того, не существует ни одной последовательности векторов $\{\Psi_n\}$, каждый из которых нормирован на единицу⁶⁾, такой, что

$$(\alpha - K) \Psi_n \Rightarrow 0. \quad (7.94)$$

В этом случае существует вполне определенный ограниченный обратный оператор $(\alpha - K)^{-1}$, причем говорят, что α представляет резольвентное множество оператора K . Если областью значений⁷⁾ оператора $\alpha - K$ является не все \mathcal{H} -пространство, а всюду плотное в нем подпространство, то априори оператор $(\alpha - K)^{-1}$ определен только на этом подпространстве, хотя (для замкнутого оператора K) область определения можно немедленно расширить, включив в нее его предельные точки и потребовав, чтобы при выполнении условия

$$(\alpha - K)^{-1} \Psi_n \Rightarrow \Phi \quad \text{при} \quad \Psi_n \Rightarrow \Psi$$

¹⁾ Ограниченным оператором является оператор, имеющий конечную норму. См. примечание на стр. 168.

²⁾ Оператор S называется замкнутым, если из $\Psi_n \Rightarrow \Psi$ и сильной сходимости $S\Psi_n$ следует $S\Psi_n \Rightarrow S\Psi$.

³⁾ Мы будем также считать, что рассматриваемое гильбертово пространство является сепарабельным. Это означает, что в этом пространстве существует счетное множество векторов, образующих базис.

⁴⁾ Указанное свойство известно под названием «теоремы замкнутых графов» (см. [824], стр. 181).

⁵⁾ Определение L^2 -пространства дано в примечании на стр. 162.

⁶⁾ В этом пункте мы будем придерживаться более точной терминологии. Все элементы гильбертова пространства имеют конечную норму. Поэтому всякий раз, когда мы будем говорить о векторе, он должен быть нормируемым. Чтобы читатель помнил об этом, мы обычно будем помещать в скобках слово нормируемый.

⁷⁾ Определение области значений оператора дано в примечании на стр. 155.

имело место

$$(\alpha - K)^{-1} \Psi = \Phi.$$

б) Оператор $\alpha - K$ не дает взаимно однозначного отображения пространства, т. е. для некоторого вектора Ψ_0 существует более одного вектора Ψ , удовлетворяющего условию

$$(\alpha - K) \Psi = \Psi_0. \quad (7.95)$$

В этом случае действие оператора $\alpha - K$ на разность двух таких векторов должно давать нуль и существует (нормируемый) вектор Φ , такой, что

$$K\Phi = \alpha\Phi. \quad (7.95a)$$

В описанном случае не существует оператора $(\alpha - K)^{-1}$ и α принадлежит *точечному спектру* оператора K .

в) Оператор $\alpha - K$ осуществляет взаимно однозначное отображение; областью его значений является \mathcal{H} -пространство (или она является плотной всюду в данном пространстве), но существует последовательность нормируемых векторов Ψ_n , для которой справедливо (7.94), т. е., скажем, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой вектор Φ_ε , что

$$\|(\alpha - K) \Phi_\varepsilon\| < \varepsilon \|\Phi_\varepsilon\|.$$

Тогда оператор $(\alpha - K)^{-1}$ полностью определен, но не ограничен и говорят, что значения α принадлежат *непрерывному спектру*¹⁾ оператора K .

г) Оператор $\alpha - K$ осуществляет взаимно однозначное отображение, но областью значений оператора $\alpha - K$ является некоторое подпространство \mathcal{H} -пространства, которое не является всюду плотным в этом пространстве. В этом случае оператор $(\alpha - K)^{-1}$ определен не всюду; он отображает некоторое подпространство \mathcal{H} -пространства, не плотное в нем, на все \mathcal{H} -пространство. Тогда α принадлежит *остаточному спектру* оператора K и должен существовать (нормируемый) вектор Φ , который ортогонален любому вектору из области значений оператора $\alpha - K$, так что для любого Ψ имеет место

$$(\Phi, (\alpha - K) \Psi) = 0.$$

Следовательно,

$$K^\dagger \Phi = \alpha^* \Phi,$$

т. е. значения α принадлежат остаточному спектру оператора K тогда и только тогда, когда они не принадлежат его точечному спектру, но α^* в то же время принадлежит точечному спектру оператора K^\dagger .

Между прочим, следует отметить, что «непрерывный спектр» не обязательно образует непрерывное множество, так же как «точечный спектр» не обязательно состоит из изолированных точек. Изолированные точки могут появляться и в непрерывном спектре, а точечный спектр может представлять непрерывное множество (см. задачу 5).

Множество всех точек из трех видов спектра называется *спектром* оператора K . Поэтому каждое комплексное число α принадлежит либо резольвентному множеству, либо спектру. Резольвентное множество является *открытым*, и, следовательно, спектр является замкнутым (1824], стр. 257), так что

¹⁾ В математической литературе точечный и непрерывный спектры иногда объединяют в *аппроксимативный спектр* [293]. Он состоит из всех значений α , для которых выполняется (7.94). Кроме того, иногда в литературе вводят такое подразделение спектра, что некоторая точка может принадлежать как непрерывному, так и точечному спектру. Это можно сделать простым включением в последний спектр из первого тех точек, для которых существует последовательность Ψ_n , каждый член которой ортогонален всем (нормируемым) собственным векторам оператора K , принадлежащим собственному значению α , и для которых выполняется (7.94).

он включает в себя все свои конечные предельные точки. В математических определениях, которых мы придерживаемся в данном пункте, *собственными значениями* называются только значения точечного спектра.

Левый и правый обратные операторы. Несколько слов стоит сказать относительно левого и правого обратных операторов. Прежде всего нас интересует только *левый* обратный оператор

$$L_{\alpha}(\alpha - K) = 1,$$

который позволяет записать решение уравнения (7.95) в виде

$$\Psi = L_{\alpha}\Psi_0.$$

Если областью значений оператора $\alpha - K$ является все \mathcal{H} -пространство (или если она является плотной в этом пространстве), то также имеем

$$(\alpha - K)L_{\alpha} = 1.$$

Следовательно, в случае «а» оператор $(\alpha - K)^{-1}$ является одновременно и левым, и правым обратным оператором. В случае «б» левого обратного оператора не может существовать. Однако не исключено, что может существовать правый обратный оператор

$$(\alpha - K)R_{\alpha} = 1.$$

Это означает, что

$$R_{\alpha}^{\dagger}(\alpha^* - K^{\dagger}) = 1$$

и, следовательно, α^* не могут принадлежать точечному спектру оператора K^{\dagger} ; в этом случае α^* должно принадлежать остаточному спектру оператора K^{\dagger} . Таким образом, если α принадлежит точечному спектру оператора K , а α^* — точечному спектру оператора K^{\dagger} , то не могут существовать ни правый и ни левый операторы, обратные оператору $\alpha - K$. Если α^* принадлежит остаточному спектру оператора K^{\dagger} , то для оператора $\alpha - K$ существует правый обратный оператор, но область значений такого обратного оператора не может быть все \mathcal{H} -пространство.

В случае «в» равным образом существуют как правый, так и левый обратные операторы. В случае «г» существует левый обратный оператор L_{α} , но он определен только в области значений оператора $\alpha - K$. В этом случае оператор $\alpha - K$ не может иметь правого обратного оператора, так как его существование означало бы, что область значений оператора $\alpha - K$ является все \mathcal{H} -пространство.

Полезно рассмотреть эти вопросы также с точки зрения *существования* решения Ψ уравнения (7.95). В случае «б», когда α принадлежит точечному спектру оператора K , не исключено, что уравнение (7.95) может иметь решение, хотя последнее и не будет единственным. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы вектор Ψ_0 лежал в области значений оператора $\alpha - K$. Но любой вектор из области значений оператора $\alpha - K$ ортогонален любому вектору из нуль-пространства ¹⁾ сопряженного ему оператора, а любой вектор, ортогональный любому вектору из области значений данного оператора, принадлежит нуль-пространству сопряженного ему оператора. Поэтому если область значений оператора $\alpha - K$ является замкнутой, то она является ортогональным дополнением ²⁾ к нуль-пространству оператора $\alpha^* - K^{\dagger}$. Следовательно, в этом случае необходимое и достаточное условие

¹⁾ Нуль-пространством некоторого оператора называется пространство всех векторов, при действии на которые он дает нуль.

²⁾ Ортогональным дополнением к некоторому множеству \mathcal{S} векторов является множество всех векторов, которые ортогональны всем членам множества \mathcal{S} ; оно представляет собой замкнутое подпространство.

существования решения уравнения (7.95) состоит в том, чтобы вектор Ψ_0 был ортогонален всем собственным векторам оператора K^\dagger , принадлежащим собственному значению α^* , если такие векторы существуют. Далее, решение можно сделать единственным, потребовав, чтобы оно было ортогонально всем собственным векторам оператора K , принадлежащим собственному значению α .

Нормальный оператор N определяется требованием, чтобы

$$[N, N^\dagger] = 0.$$

Это означает, что нормальный оператор не может иметь остаточного спектра. Последнее следует из того, что если

$$(N^\dagger - \alpha^*) \Phi = 0,$$

то

$$\|(N - \alpha) \Phi\|^2 = (\Phi, (N^\dagger - \alpha^*) (N - \alpha) \Phi) = 0,$$

и поэтому

$$(N - \alpha) \Phi = 0.$$

Таким образом, если α^* принадлежит точечному спектру оператора N^\dagger , то α принадлежит точечному спектру оператора N (при тех же самых собственных векторах). Конечно, если K — самосопряженный оператор, то он обязательно является нормальным оператором, и вследствие этого по условию самосопряженный оператор не имеет остаточного спектра. Более того, пусть N — нормальный оператор; тогда если существует оператор $(\alpha - N)^{-1}$, то он является как левым, так и правым обратным оператором и обратного левого оператора не существует тогда и только тогда, когда не существует обратного правого оператора. Что касается решения уравнения (7.95), то, если K — нормальный оператор (и если область значений оператора $\alpha - K$ является замкнутой), решение существует тогда и только тогда, когда вектор Ψ_0 ортогонален всем собственным векторам оператора K , соответствующим собственному значению α .

2. Вполне непрерывные операторы

Операторами, которые обладают свойствами, наиболее сходными со свойствами операторов в векторном пространстве конечной размерности, являются вполне непрерывные, или компактные, операторы. Оператор S называется вполне непрерывным, если для каждой ограниченной последовательности векторов Ψ_n последовательность $S\Psi_n$ содержит сильно сходящуюся подпоследовательность. Такой оператор обязательно является непрерывным, или ограниченным, так как если бы он был неограниченным, то должна была бы существовать последовательность нормированных векторов Ψ_N , такая, что

$$\|S\Psi_N\| > N,$$

и эта последовательность не могла бы содержать сходящейся подпоследовательности. Достаточное условие того, чтобы оператор S был вполне непрерывным, состоит в его принадлежности к классу операторов Гильберта — Шмидта¹⁾, т. е.

$$\text{Sp } SS^\dagger < \infty.$$

Приведем без доказательства некоторые общие сведения о вполне непрерывных операторах.

1) Оператор является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда он отображает любое ограниченное множество векторов в компактное множество ([947], стр. 89).

¹⁾ Этот класс операторов известен также под названием L^2 -класса или класса Фредгольма.

2) Оператор является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда он преобразует любую слабо сходящуюся последовательность векторов в сильно сходящуюся последовательность, т. е. если последовательность $\{\Psi_n\}$ сходится слабо, то последовательность $\{C\Psi_n\}$ сходится сильно [711].

3) Оператор является вполне непрерывным тогда и только тогда, когда последовательность $(\Psi_n, C\Phi_n)$ сходится к $(\Psi, C\Phi)$, если $\Psi_n \rightarrow \Psi$ и $\Phi_n \rightarrow \Phi$ [711].

4) Оператор, сопряженный вполне непрерывному оператору, является вполне непрерывным ([824], стр. 275). Вполне непрерывными являются также произведения вполне непрерывного и ограниченного операторов ([824], стр. 285).

5) Предел по норме последовательности вполне непрерывных операторов является вполне непрерывным оператором ([947], стр. 90).

6) Вполне непрерывный оператор можно сколь угодно точно аппроксимировать (по норме) оператором конечного ранга ¹⁾. В частности, если $\{\Psi_n\}$ есть ортонормированный базис в \mathcal{H} -пространстве, то

$$C_N \equiv \sum_{n,m=1}^N (\Psi_n, C\Psi_m) \Psi_n \Psi_m^\dagger \rightarrow C \quad \text{при } N \rightarrow \infty$$

Как следует из свойства 5, это верно *только* для вполне непрерывных операторов.

7) Если C — ограниченный, а $C^\dagger C$ — вполне непрерывный операторы, то C — вполне непрерывный оператор ([947], стр. 88).

8) Если C — вполне непрерывный оператор и α — собственное значение, отличное от нуля, то α^* — собственное значение оператора C^\dagger , имеющее ту же степень вырождения ([947], стр. 180, 182).

Одним из важных спектральных свойств вполне непрерывных операторов является то, что, за исключением, быть может, точки $\alpha = 0$, они имеют *только точечный спектр*. Кроме того, спектр вполне непрерывного оператора представляет собой счетное множество, которое в качестве единственной возможной точки сгущения имеет нуль ([824], стр. 281), а степень вырождения каждого собственного значения, за исключением собственного значения, равного нулю, конечна ([824], стр. 278). Если оператор $C \neq 0$ является самосопряженным и в то же время вполне непрерывным, то спектр должен содержать по крайней мере одну точку, отличную от нуля ([947], стр. 182).

То, что вполне непрерывный оператор не может иметь остаточного спектра, сразу же следует из свойства 8. Отсутствие непрерывного спектра вытекает из следующего факта: если для каждого n существует нормированный вектор Ψ_n , такой, что

$$\|(C - \alpha) \Psi_n\| < \frac{1}{n}, \quad (7.94a)$$

и если C — вполне непрерывный оператор, то должна существовать подпоследовательность векторов $\{\Psi_m\}$, такая, что $C\Psi_m \Rightarrow \Psi$ и, следовательно, согласно (7.94a), $\Psi_n \Rightarrow \Psi' = \alpha^{-1}\Psi$. Однако так как оператор C является непрерывным, то $C\Psi' = \Psi$. Таким образом, α принадлежит точечному спектру.

Из сказанного следует, что вполне непрерывный оператор либо имеет конечное число собственных значений, либо нуль является их точкой сгущения. Если область определения оператора C имеет бесконечную размерность, то нуль *должен* принадлежать спектру этого оператора ([824], стр. 286, задача 9). Последнее означает, что оператор C^{-1} не может быть определен всюду

¹⁾ Оператором конечного ранга называется оператор, область значений которого имеет конечную размерность [711].

и областью значений оператора C не может быть все гильбертово пространство ¹⁾. Другими словами, уравнение

$$C\Psi = \Psi_0,$$

которое в теории интегральных уравнений называется *интегральным уравнением первого рода*, не может иметь решения при всех Ψ_0 .

Если C — вполне непрерывный оператор, то область значений оператора $\alpha - C$ является *замкнутой* ([824], стр. 279) ²⁾. Следовательно, область значений оператора $\alpha - C$ и нуль-пространство оператора $\alpha^* - C^\dagger$ являются ортогональными дополнениями друг для друга. Это означает, что для вполне непрерывного оператора K и любого заданного числа α либо уравнение (7.95) имеет единственное решение, либо имеет решение соответствующее ему однородное уравнение (7.95а) ³⁾. Далее, если уравнение (7.95а) имеет n линейно независимых решений, то столько же решений имеет сопряженное уравнение, причем необходимое и достаточное условие существования решений уравнения (7.95) состоит в том, чтобы вектор Ψ_0 был ортогонален всем решениям уравнения, сопряженного уравнению (7.95а). Если потребовать, чтобы вектор Ψ был ортогонален всем решениям уравнения (7.95а), то он будет единственным.

Часто для определения того, является ли данный оператор вполне непрерывным, оказывается полезной следующая простая лемма. Она кажется правдоподобной уже из интуитивных соображений, основанных на том, что коммутирующие операторы можно одновременно привести к диагональному виду (если только их вообще можно привести к диагональному виду).

Лемма. Пусть A — унитарный (или самосопряженный), а C — вполне непрерывный операторы, и пусть они коммутируют друг с другом: $[A, C] = 0$. Тогда нуль-пространство оператора C должно включать в себя подпространство, натянутое на непрерывную часть спектра оператора A .

Отметим, что данная лемма относится к «непрерывной части» спектра оператора A , а не к непрерывному спектру. Это означает, что C может не обращаться в нуль самое большее в «дискретных» точках спектра оператора A . Если весь спектр оператора A является непрерывным, то оператор C должен равняться нулю. Другими словами, *ни один ненулевой вполне непрерывный оператор не может коммутировать с унитарным оператором, спектр которого состоит только из непрерывного множества точек.*

Доказательство этой леммы дано в приложении к данной главе, так как при доказательстве используются методы, изложенные в следующем пункте.

3. Эрмитовость и унитарность операторов

Эрмитовыми операторами называются такие операторы, которые обладают следующим свойством: для любых векторов Ψ и Φ из области определения оператора A , которая считается плотной в \mathcal{H} -пространстве, имеет место равенство

$$(\Psi, A\Phi) = (A\Psi, \Phi).$$

Такие операторы хорошо знакомы всем, кто имел дело с квантовой механикой, так что здесь достаточно ограничиться кратким рассмотрением их свойств. Если области определения операторов A и A^\dagger совпадают, то оператор A называется *самосопряженным* и можно просто писать

$$A^\dagger = A.$$

¹⁾ Отметим, что так как оператор C является замкнутым, то оператор C^{-1} тоже замкнутый ([824], стр. 177).

²⁾ В данном пункте мы считаем, что $\alpha \neq 0$.

³⁾ В теории интегральных уравнений с ядрами Гильберта — Шмидта данное утверждение называется *альтернативой Фредгольма*.

В большинстве случаев ниже мы можем не различать самосопряженные и эрмитовы операторы.

Собственные значения λ оператора A действительны и лежат в области ¹⁾

$$\inf_{\|\Psi\|=1} (\Psi, A\Psi) = m(A) < \lambda < M(A) = \sup_{\|\Psi\|=1} (\Psi, A\Psi).$$

Большее из двух чисел $|M|$ и $|m|$ является нормой оператора A . Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, *взаимно ортогональны*:

$$(\Psi_\lambda, \Psi_\beta) = 0,$$

если

$$A\Psi_\lambda = \lambda\Psi_\lambda, \quad A\Psi_\beta = \beta\Psi_\beta, \quad \lambda \neq \beta.$$

Доказательство этих свойств хорошо известно и настолько просто, что нет необходимости приводить его здесь. Все средние значения, или диагональные матричные элементы эрмитова оператора, конечно, действительны.

Спектр ограниченного самосопряженного оператора расположен на интервале действительной оси между точками $m(A)$ и $M(A)$ и включает в себя концевые точки m и M ([824], стр. 330). Как уже известно, спектр такого оператора состоит только из точечного спектра и непрерывного спектра (один из них может быть пустым).

Математическая формулировка основной *спектральной теоремы* Гильберта для эрмитовых операторов использует ортогональную проектирующую операторную функцию ²⁾ $P(\lambda)$, определенную при всех действительных λ так, что для любых λ_1 и λ_2

$$[P(\lambda_1), P(\lambda_2)] = 0$$

и

$$[P(\lambda), A] = 0.$$

Она монотонно *возрастает* от 0 до 1 в том смысле, что если λ возрастает, то пространство, на которое проектирует оператор $P(\lambda)$, становится все больше и больше, начиная от нулевого вектора и кончая всем \mathcal{H} -пространством. Это означает, что если $\lambda_1 \leq \lambda_2$, то

$$P(\lambda_1)P(\lambda_2) = P(\lambda_1),$$

а также если $\lambda \leq m(A)$, то $P(\lambda) = 0$, и если $\lambda > M(A)$, то $P(\lambda) = 1$. Кроме того, оператор $P(\lambda)$ обладает сильной сходимостью слева, но необязательно справа

$$P(\lambda_1) \Rightarrow P(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda_1 \rightarrow \lambda +.$$

Такая проектирующая операторная функция $P(\lambda)$ называется *спектральным разложением единицы*, или *спектральной функцией*. Спектральная теорема ([824], стр. 349) утверждает, что такая функция существует и она обладает следующим свойством: для любой непрерывной функции f имеет место соотношение

$$f(A) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda) dP(\lambda), \quad (7.96)$$

¹⁾ Символ \inf означает «точную нижнюю грань».

²⁾ Напомним, что оператор P является *проектирующим*, если он *идемпотентный*: $P^2 = P$. Областью его значений является подпространство, на которое он осуществляет проектирование. Такой оператор называется *ортогональным проектирующим*, если он эрмитов.

где правая часть представляет интеграл Стильтьеса и, кроме того, $\alpha < m(A)$, $\beta > M(A)$. Если, в частности, f — постоянная, то получаем

$$1 = \int_{\alpha}^{\beta} dP(\lambda). \tag{7.96a}$$

Оператор $P(\lambda)$ осуществляет проектирование на подпространство всех векторов Φ , для которых $(\Phi, A\Phi)/\|\Phi\|^2 \leq \lambda$.

Действительная часть резольвентного множества оператора A состоит из тех точек, в правой и левой окрестности которых функция $P(\lambda)$ постоянна; точечный спектр состоит из тех точек, в которых $P(\lambda)$ терпит скачки; непрерывный спектр состоит из тех точек, которые не принадлежат резольвентному множеству и в которых $P(\lambda)$ непрерывно (1824], стр. 352, 353). Из сказанного следует, что изолированные точки спектра самосопряженного оператора являются собственными значениями, т. е. принадлежат точечному спектру. Те точки непрерывного множества, которые являются собственными значениями, изолированы друг от друга; они образуют часть точечного спектра, будучи «уполены в непрерывном спектре». Остальные точки непрерывного множества принадлежат непрерывному спектру. Конечные предельные точки собственных значений могут находиться в любой части спектра.

Интеграл Стильтьеса является пределом соответствующих сумм; при действии оператора A на некоторый вектор Ψ

$$A\Psi \approx \sum_n \lambda (P_n\Psi - P_{n-1}\Psi).$$

Допустим теперь, что вектор Ψ выбран так, что

$$P_n\Psi = \begin{cases} 0 & \text{при } n < N, \\ \Psi & \text{при } n \geq N. \end{cases}$$

Тогда сумма принимает вид

$$A\Psi \approx \lambda_N\Psi;$$

последнее означает, что Ψ приблизительно является собственным вектором оператора A , принадлежащим собственному значению $\lambda = \lambda_N$. Если P имеет разрыв в точке λ_N , то можно делать интервалы все меньше и меньше; тогда будет существовать вектор, такой, что $A\Psi = \lambda\Psi$. Однако если функция P непрерывна, то по мере уменьшения разности $\lambda_n - \lambda_{n-1}$ приближенные собственные векторы должны смещаться. В этом случае не существует вектора в рассматриваемом пространстве, такого, что $A\Psi = \lambda\Psi$, и, значит, λ принадлежит непрерывному спектру. О пределе такой последовательности мы можем говорить, только вводя в рассмотрение ненормируемые векторы γ . Тогда, выразив $dP/d\lambda$ в виде

$$\frac{dP}{d\lambda} = \sum_m \chi_m(\lambda) \chi_m(\lambda)^\dagger,$$

можно написать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Psi &= \int_{\alpha}^{\beta} d\lambda \frac{dP}{d\lambda} \Psi + \sum_n \Psi_n (\Psi_n, \Psi) = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\lambda \sum_m \chi_m(\lambda) (\chi_m(\lambda), \Psi) + \sum_n \Psi_n (\Psi_n, \Psi), \end{aligned}$$

которое представляет собой разложение единицы, обычно используемое в физической литературе. Последнее соотношение можно записать в символической форме

$$1 = \int_{\alpha}^{\beta} d\lambda \sum_m \chi_m(\lambda) \chi_m(\lambda)^\dagger + \sum_n \Psi_n \Psi_n^\dagger. \quad (7.97)$$

То, что разложение единицы распадается на непрерывную и дискретную части, соответствует определению всюду непрерывной функции $P_c(\lambda)$ путем вычитания из $P(\lambda)$ ее скачков. При этом (7.97) можно представить в виде

$$1 = P_c + \sum_n P_n, \quad P_c = \int_{\alpha}^{\beta} dP_c(\lambda), \quad (7.97a)$$

где P_n — оператор ортогонального проектирования на n -е пространство собственных векторов оператора A . Оператор P_c осуществляет проектирование на подпространство непрерывной части спектра.

Резольвенту эрмитова оператора можно записать через функцию $P(\lambda)$:

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dP(\lambda')}{\lambda - \lambda'}. \quad (7.98)$$

Те точки λ_n , в которых $P(\lambda')$ претерпевает скачки, дают вклад вида $Q_n/(\lambda_n - \lambda)$. Таким образом, резольвента имеет *простые полюсы* в точечном спектре. Там, где $P(\lambda')$ непрерывна (но не постоянна), интеграл удобнее всего представить в виде

$$\int \frac{dP}{d\lambda'} (\lambda' - \lambda)^{-1} d\lambda'.$$

Последний интеграл имеет одну или более *линий вставки* вдоль непрерывного спектра.

Если самосопряженный оператор A неограничен, как это почти всегда имеет место для гамильтонианов физических систем, то интегралы по λ являются несобственными, причем нижний предел интегрирования обычно является конечным, а верхний — бесконечным. Это приводит к дополнительным трудностям в вопросах сходимости, которых можно избежать, рассматривая *унитарное* преобразование Кели оператора A :

$$U = (1 + iA)(1 - iA)^{-1}.$$

Спектральная теория унитарных операторов по существу тождественна спектральной теории эрмитовых операторов, за исключением того, что спектр теперь лежит на окружности единичного радиуса. Поскольку унитарный оператор нормален, то его спектр также состоит только из точечного и непрерывного спектров (один из них может быть пустым). Существует разложение единицы $P(\lambda)$, такое, что для любой непрерывной функции f , определенной на единичной окружности, можно написать (1824), стр. 358)

$$f(U) = \int_0^{2\pi} dP(\lambda) f(e^{i\lambda}).$$

Если в качестве f выбрать

$$f(z) = -i \ln z,$$

то выражение

$$A = \int_0^{2\pi} dP(\lambda) \lambda$$

будет определять ограниченный эрмитов оператор с $m=0$ и $M=2\pi$, такой, что

$$U = e^{iA}.$$

Кроме того, любая непрерывная однопараметрическая группа $U(t)$ унитарных преобразований, такая, что

$$U(0) = 1, \quad U(s+t) = U(s)U(t),$$

допускает спектральное представление в виде

$$U(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dP(\lambda) e^{i\lambda t}.$$

В этом состоит *теорема Стоуна* [711].

4. Аналитичность резольвенты

Оператор резольвенты $(\alpha - K)^{-1}$ замкнутого оператора K является аналитической (операторной) функцией комплексной переменной α , регулярной во всех точках α в резольвентном множестве ([931], стр. 291). Понятие аналитической операторной функции было введено в гл. 6, § 7, п. 2. Если K — вполне непрерывный оператор, то оператор $(\alpha - K)^{-1}$ аналитичен всюду в комплексной α -плоскости, за исключением изолированных полюсов конечного порядка, которые все заключены в конечной области и которые не могут иметь каких-либо точек сгущения, кроме точки $\alpha = 0$.

Допустим, что при $\alpha = \alpha_0$ оператор резольвенты $(\alpha - K)^{-1}$ имеет полюс конечного порядка $M \neq 0$. Тогда можно записать разложение

$$(\alpha - K)^{-1} = \sum_{n=-M}^{\infty} A_n (\alpha - \alpha_0)^n. \quad (7.99)$$

Умножение обеих сторон равенства на $\alpha - K$ должно дать единичный оператор. Последовательное сравнение членов суммы приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= (K - \alpha_0) A_n = A_n (K - \alpha_0) \quad \text{для } n \neq 0, \\ A_{-1} - 1 &= (K - \alpha_0) A_0 = A_0 (K - \alpha_0), \\ (K - \alpha_0) A_{-M} &= A_{-M} (K - \alpha_0) = 0. \end{aligned} \quad (7.100)$$

Из первой системы уравнений следует, что для $m > 0$

$$A_{-(m+1)} = (K - \alpha_0)^m A_{-1} = A_{-1} (K - \alpha_0)^m, \quad (7.101)$$

$$A_0 = (K - \alpha_0) A_1 = (K - \alpha_0)^m A_m = A_m (K - \alpha_0)^m. \quad (7.102)$$

Подстановка (7.102) во второе равенство (7.100) дает

$$A_{-1} - 1 = A_{m-1} (K - \alpha_0)^m = (K - \alpha_0)^m A_{m-1}. \quad (7.103)$$

Но так как $A_{-M-1} = 0$, то из (7.101) следует, что

$$A_{-1} (K - \alpha_0)^M = (K - \alpha_0)^M A_{-1} = 0, \quad (7.104)$$

и поэтому, согласно (7.103), для $m = M$ имеем

$$(A_{-1} - 1) A_{-1} = 0. \quad (7.105)$$

Следовательно, α_0 принадлежит точечному спектру оператора K . Оператор вычета A_{-1} является проектирующим оператором, область значений которого

совпадает¹⁾ с нуль-пространством оператора $(K - \alpha_0)^M$, а нуль-пространство которого (или область значений оператора $1 - A_{-1}$) равно области значений оператора $(K - \alpha_0)^M$. Тогда $A_m \neq 0$ для всех $m \neq 0$, таких, что $m \geq -M$, поскольку в силу (7.100) из равенства $A_m = 0$ следует, что и $A_n = 0$ для всех $n \leq m$. Следовательно, согласно (7.101), для $m < M$ нуль-пространство оператора $(K - \alpha_0)^m$ строго меньше области значений оператора A_{-1} , а область его значений строго больше, чем нуль-пространство оператора A_{-1} . Для $m \geq M$ нуль-пространства и области значений операторов $(K - \alpha_0)^m$ остаются такими же, как и у оператора A_{-1} . Другими словами, *верхний* и *нижний* индексы оператора $K - \alpha_0$ равны M ²⁾. Так как область значений и нуль-пространство оператора проектирования являются взаимно дополнительными, то такими же являются область значений и нуль-пространство оператора $(K - \alpha_0)^M$.

Предположение (7.99) означает, что

$$(\alpha - K^\dagger)^{-1} = \sum_{n=-M}^{\infty} A_n^\dagger (\alpha - \alpha_0^*)^n$$

и, следовательно, α_0^* принадлежит точечному спектру оператора K^\dagger , причем A_{-1}^\dagger является проектирующим оператором на пространство собственных векторов оператора K^\dagger , принадлежащих собственному значению α_0^* . Далее, если K — *нормальный* оператор, то пространства собственных векторов операторов K и K^\dagger для собственных значений соответственно α_0 и α_0^* одинаковы, а следовательно, одинаковы и области значений операторов A_{-1} и A_{-1}^\dagger . Однако область значений проектирующего оператора A_{-1} дополнительна по отношению к его нуль-пространству, а область значений оператора A_{-1}^\dagger ортогональна нуль-пространству оператора A_{-1} . Следовательно, если K — нормальный оператор, то область значений и нуль-пространство оператора A_{-1} , а поэтому также и область значений и нуль-пространство оператора $(\alpha_0 - K)^M$ являются взаимно *ортогональными дополнениями*. Это означает, что уравнение

$$(\alpha_0 - K)^M \Psi = \Psi_0$$

имеет решение тогда и только тогда, когда вектор Ψ_0 ортогонален нуль-пространству оператора $(\alpha_0 - K)^M$. Теперь оператор вычета A_{-1} является *ортогональным проектирующим*:

$$A_{-1} = A_{-1}^\dagger.$$

Если ортонормированный набор векторов $\{\Psi_n\}$ образует базис в области значений оператора A_{-1} , т. е. в нуль-пространстве оператора $(\alpha_0 - K)^M$, то можно написать

$$A_{-1} = \sum_n \Psi_n \Psi_n^\dagger.$$

Если K — нормальный оператор, то верхний индекс оператора $\alpha_0 - K$ равен либо 0, либо 1. Этот результат обусловлен тем, что нуль-пространства операторов $\alpha_0 - K$ и $\alpha_0^* - K^\dagger$ одинаковы и, следовательно, область значений

¹⁾ Из (7.104) следует, что область значений оператора A_{-1} лежит внутри нуль-пространства оператора $(K - \alpha_0)^M$, а из (7.103) — что нуль-пространство оператора $(K - \alpha_0)^M$ лежит внутри области значений оператора A_{-1} .

²⁾ Верхний индекс оператора B есть наименьшее целое число M , такое, что нуль-пространства операторов B^M и B^{M+1} равны; его нижним индексом является наименьшее целое число N , такое, что области значений операторов B^N и B^{N+1} равны. Если оператор B определен всюду и если его верхний и нижний индексы конечны, то последние равны друг другу ([824], стр. 273). Если, кроме того, B — вполне непрерывный оператор и $\alpha \neq 0$, то верхний и нижний индексы оператора $\alpha - B$ конечны и, следовательно, одинаковы ([824], стр. 279).

и нуль-пространство оператора $\alpha_0 - K$ ортогональны друг другу. Следовательно, оператор $\alpha_0 - K$ не может отображать какое-либо пространство на свое собственное нуль-пространство и нуль-пространства операторов $\alpha_0 - K$ и $(\alpha_0 - K)^2$ должны быть одинаковы. Поэтому для нормального оператора K оператор $(\alpha - K)^{-1}$ не может иметь полюса конечного порядка, большего единицы.

Обратимся теперь к общей теории операторов $(\alpha - K)^{-1}$. Может оказаться, что $(\alpha - K)^{-1}$ имеет «полюс бесконечного порядка», т. е. ряд Лорана (7.99) не обрывается при конечном отрицательном n . В таком случае при $\alpha = \alpha_0$ оператор $\alpha - K$ имеет *изолированную существенно особую точку*.

Обратное утверждение здесь доказываться не будет (см. [824], стр. 310). Допустим, что существует целое число n , такое, что область значений и нуль-пространство оператора $(\alpha_0 - K)^n$ являются взаимно дополнительными, а область значений оператора $(\alpha_0 - K)^n$ замкнута, и пусть $m \geq 1$ — наименьшее из таких целых чисел. Тогда оператор резольвенты $(\alpha - K)^{-1}$ имеет в точке α_0 полюс порядка m . Если областью определения оператора K является все \mathcal{H} -пространство и K — вполне непрерывный оператор, то каждая ненулевая точка спектра является полюсом ([824], стр. 311). По существу этот результат вытекает из факта конечности верхнего и нижнего индексов вполне непрерывного оператора.

Полезно сопоставить понятие верхнего индекса оператора и появление полюсов более высокого порядка у оператора резольвенты со свойством, на возможность существования которого иногда не обращают внимания. Допустим, что верхний индекс оператора $K - \alpha$ больше единицы. Тогда существует вектор Φ_α , который принадлежит как области значений, так и нуль-пространству оператора $K - \alpha$:

$$\Phi_\alpha = (K - \alpha) \Psi_\alpha, \quad (K - \alpha) \Phi_\alpha = 0.$$

Другими словами, если подействовать оператором $K - \alpha$ на Ψ_α , то результат будет отличен от нуля, но результат действия оператором $(K - \alpha)^2$ на Ψ_α равен нулю. Пусть $\bar{\Phi}_{\alpha^*}$ — некоторый собственный вектор оператора K^\dagger , принадлежащий собственному значению α^* . Тогда

$$(\bar{\Phi}_{\alpha^*}, \Phi_\alpha) = (\bar{\Phi}_{\alpha^*}, (K - \alpha) \Psi_\alpha) = 0.$$

Таким образом, собственный вектор Φ_α оператора K , принадлежащий собственному значению α , ортогонален всем собственным векторам $\bar{\Phi}_{\alpha^*}$ оператора K^\dagger , принадлежащим собственному значению α^* . Аналогичным образом существует собственный вектор $\bar{\Phi}_{\alpha^*}$ оператора K^\dagger , принадлежащий собственному значению α^* , который ортогонален всем собственным векторам Φ_α оператора K , принадлежащим собственному значению α . Такое положение связано с тем, что верхний индекс оператора $K - \alpha$ больше единицы, а также с тем, что полюс резольвенты оператора K имеет порядок, больший единицы. Конечно, если K — нормальный оператор, то это не может иметь места.

Справедливо и обратное утверждение. Допустим, что $(\alpha - K)^{-1}$ имеет простой полюс в точке $\alpha - \beta$. Тогда мы знаем, что нуль-пространство и область значений оператора $K - \beta$ являются взаимно дополнительными, т. е. любой вектор Ψ можно записать как линейную комбинацию, составленную из вектора Φ_β из нуль-пространства и вектора из области значений оператора $K - \beta$:

$$\Psi = \Phi_\beta + (K - \beta) \Phi.$$

Составим теперь скалярное произведение вектора Ψ и собственного вектора $\bar{\Phi}_{\beta^*}$ оператора K^\dagger , принадлежащего собственному значению β^* ,

$$(\bar{\Phi}_{\beta^*}, \Psi) = (\bar{\Phi}_{\beta^*}, \Phi_\beta).$$

Поскольку вектор $\overline{\Phi}_{\beta^*}$ не может быть ортогонален *всем* векторам Ψ , то из этого следует, что скалярное произведение в правой части не может обращаться в нуль для всех Φ_{β} . Таким образом, существует собственный вектор $\overline{\Phi}_{\beta^*}$ оператора K^{\dagger} , принадлежащий собственному значению β^* , который ортогонален всем собственным векторам оператора K , принадлежащим собственному значению β , и существует собственный вектор Φ_{β} оператора K , принадлежащий собственному значению β , который ортогонален всем собственным векторам оператора K^{\dagger} , принадлежащим собственному значению β^* . Такие векторы существуют *тогда и только тогда*, когда при $\alpha = \beta$ оператор резольвенты $(\alpha - K)^{-1}$ имеет полюс порядка больше единицы.

Связь с условием полноты. Допустим, что ограниченный оператор K имеет только точечный спектр $\{\alpha_n\}$, и пусть верхний и нижний индексы оператора $K - \alpha_n$ равны M_n . Кроме того, допустим, что оператор резольвенты $(\alpha - K)^{-1}$ можно разложить в ряд Миттаг-Леффлера:

$$(\alpha - K)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-M_n}^{-1} A_m^{(n)} (\alpha - \alpha_n)^m. \quad (7.106)$$

Тогда, полагая, что $|\alpha| \rightarrow \infty$, немедленно получаем, что

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{-1}^{(n)}, \quad (7.107)$$

и, следовательно, спектр является полным в обобщенном смысле, т. е. прямая сумма нуль-пространств операторов $(K - \alpha_n)^{M_n}$ представляет собой все гильбертово пространство. Другими словами, для получения полного базиса нужно для каждого α_n взять множество векторов, которое образует базис в нуль-пространстве оператора $(K - \alpha_n)^{M_n}$, а не только в нуль-пространстве оператора $K - \alpha_n$. Лишь в том случае, когда каждый полюс оператора резольвенты является простым, множество собственных векторов оператора K может образовать полный набор.

Конечно, операторы вычетов $A_{-1}^{(n)}$, вообще говоря, не являются ни *ортогональными* проектирующими, ни *взаимно ортогональными*. Однако если для каждого n множество $\{\Psi_i^{(n)}\}$ представляет набор линейно независимых векторов, которые образуют базис в нуль-пространстве оператора $(K - \alpha_n)^{M_n}$, то для каждого n также можно построить набор линейно независимых векторов $\{\Phi_i^{(n)}\}$, которые образуют базис в нуль-пространстве оператора $(K^{\dagger} - \alpha_n^*)^{M_n}$ и для которого

$$(\Phi_i^{(n)}, \Psi_j^{(m)}) = \delta_{ij} \delta_{nm}.$$

Эти два базиса называются *биортогональными* множествами, и в диадных обозначениях мы имеем

$$A_{-1}^{(n)} = \sum \Psi_i^{(n)} \Phi_i^{(n)\dagger}.$$

При этом для любого вектора Ψ из гильбертова¹⁾ пространства условие полноты (7.107) принимает вид

$$\Psi = \sum_{in} a_{in} \Psi_i^{(n)}, \quad a_{in} = (\Phi_i^{(n)}, \Psi).$$

¹⁾ Следует отметить, что приведенные рассуждения носят эвристический характер. Мы не уделяли здесь какого-либо внимания вопросам сходимости. Более подробное изложение можно найти, например, в книге [711].

Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ § 3, П. 2

Пусть $P_c(\lambda)$ — спектральная функция непрерывной части спектра оператора A в том смысле, что выполняется соотношение (7.97а), так что $P_c(\lambda)$ непрерывно возрастает от $P_c(\lambda_1) = 0$. Пусть $\alpha \neq 0$ есть собственное значение оператора $C^\dagger C$, M — верхний индекс оператора $(C^\dagger C - \alpha)$ и Q — ортогональный проектирующий оператор на нуль-пространство оператора $(C^\dagger C - \alpha)^M$. Тогда $[Q, P_c(\lambda)] = 0$ для всех λ и, следовательно, оператор $R(\lambda) \equiv QP_c(\lambda)$ также является ортогональным проектирующим. Так как $C^\dagger C$ — вполне непрерывный оператор, то область значений оператора Q имеет конечную размерность и таким же свойством обладает область значений оператора $R(\lambda)$. Кроме того, $R(\lambda)$ является монотонно возрастающей функцией λ , которая при $\lambda = \lambda_1$ обращается в нуль. Введем теперь базис в области значений оператора $R(\lambda_2)$ и вычислим $\text{Sp } R(\lambda) = n(\lambda) < \infty$ для $\lambda \leq \lambda_2$. При этом $n(\lambda)$ должно быть непрерывным и целым. Поскольку $R(\lambda_1) = 0$, то для всех λ величина n обращается в нуль.

Из приведенных рассуждений следует, что в области значений оператора P_c оператор $C^\dagger C$ не может иметь каких-либо собственных значений, отличных от нуля. Но $C^\dagger C$ является самосопряженным и вполне непрерывным оператором. Следовательно, при действии на векторы из области значений оператора P_c оператор $C^\dagger C$ должен давать нуль.

КОММЕНТАРИИ

Общее рассмотрение стационарной теории рассеяния можно найти в книгах [628, 376, 437, 927], а также в большинстве современных книг по квантовой механике. Следует указать дополнительно общие обзоры по формальной теории [215, 112, 547, 361]; см. также важные работы Меллера [609, 610].

Из других статей по формальной стационарной теории рассеяния отметим [251, 340, 341, 362, 240, 216, 715, 268, 322, 323, 747], а также статьи Уиллера [900], Гейзенберга [372, 373], Липпмана и Швингера [541], а также Гелл-Манна и Гольдбергера [321]. Соотношение между нестационарной и стационарной теориями рассеяния обсуждается в работе [49].

К § 1, п. 1. Одними из первых работ по использованию метода функций Грина для решения задач рассеяния являются статьи Зоммерфельда [784—786] и Мейснера [592—594]. Работа [758] специально посвящена применению резольвенты, или функции Грина.

К § 2, п. 1. Литературу к этому разделу можно найти в примечаниях на стр. 169.

К § 2, п. 2. Обсуждение вопроса о возможности рассмотрения сходящейся волны в качестве конечного состояния, а расходящейся — в качестве начального можно найти в работах [16, 108].

Так называемая *оптическая теорема* в квантовой механике была открыта Феенбергом [250]. Иногда ее неоправданно называют соотношением Бора — Пайерлса — Плачека [86]. Относительно истории этой теоремы в электромагнитной теории, где она фактически была получена впервые, см. примечание на стр. 38.

Обменные эффекты специально рассматривались в работе [573].

К § 2, п. 4. Соотношение (7.69) впервые получено в работе [545].

Подробное обсуждение операции обращения времени можно найти в книге Вигнера [912], гл. 26. Обратимость и ее связь с *принципом детального равновесия* рассмотрены, например, в работах [914] и [77], гл. 10, 2Г и Д. См. также [161, 883].

К § 2, п. 5. Вывод и обсуждение соотношений (7.76), (7.76а) и (7.79) даны в работе [200].

Уравнение (7.87) получено Фаддеевым [1012, 1014] а уравнение (7.92) — Вейнбергом [893], разд. III; см. также статью Уицкера [412].

К § 3. По математическим вопросам, затронутым в этом параграфе, можно рекомендовать следующие книги: [875, 711, 293, 386, 824, 227, 297, 947, 391]. Из указанных книг

наиболее доступной для нематематиков является, пожалуй, книга Тэйлора [824]. Полезно также ознакомиться со статьей [893] (особенно с приложением А).

Читателю, не знакомому с теорией векторных пространств, настоятельно рекомендуем прежде, чем изучать теорию гильбертова пространства, ознакомиться с книгой [370].

Важной работой, посвященной самосопряженной природе гамильтониана, является статья Като [465].

Изменение непрерывных спектров под действием возмущений рассматривается в следующих математических статьях: [295, 467, 468, 731, 27, 981, 508, 509]. См. также [997, 998]. Строгому рассмотрению стационарной теории рассеяния посвящены также работы [492, 493, 418, 590, 444, 1015, 50, 602].

Замечания о связи разложения Миттаг-Леффлера для резольвенты с полнотой сделаны на основании работы Фонда и др. [275].

ЗАДАЧИ

1. В координатном представлении векторы состояния $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$ и $\Psi^{(-)}(E, \alpha)$ описывают бегущие волны в асимптотической области (т. е. когда частицы находятся далеко друг от друга), причем первый вектор описывает расходящиеся сферические волны, а второй — сходящиеся. Как нужно выбрать Ψ_0 , чтобы вектор $\Psi^{(P)}$, определяемый формулой (7.20), в асимптотической области описывал *стоячую волну*? Достаточно ли потребовать, чтобы рассеянная волна в асимптотической области была чисто расходящейся, сходящейся или стоячей для однозначного определения соответственно векторов $\Psi^{(+)}$, $\Psi^{(-)}$ или $\Psi^{(P)}$ (отвлекаясь от нормировочного множителя)?

2. Записать продолжение $T_{\beta\alpha}$ вне энергетической поверхности в дополнение к (7.45) для случая, когда все три энергии различны.

3. Допустим, что только относительно небольшая часть H'_2 оператора взаимодействия в гамильтониане не обладает инвариантностью при обращении времени. Вычислить T -матрицу с помощью теории возмущений по оператору H'_2 . Будет ли неинвариантность по отношению к обращению времени проявляться в первом порядке теории возмущений? Обсудить получившийся результат.

4. После формулы (7.79) было отмечено, что (7.78) выполняется только тогда, когда третья частица имеет бесконечную массу. Вычислить поправку первого порядка на отдачу, считая третью частицу обладающей очень большой, но конечной массой.

5. Пусть $\{\Psi_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, есть полный набор ортонормированных векторов. Введем оператор a согласно уравнениям $a\Psi_0 = 0$, $a\Psi_n = \Psi_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. а) Указать область определения и область значений оператора a . Найти спектр оператора a , указав по отдельности точечный, непрерывный и остаточный спектры. Является ли a изометрическим оператором? Имеет ли он левый или правый обратный оператор? Если да, то каковы эти операторы? Является ли a ограниченным оператором? Является ли он вполне непрерывным оператором? Является ли он нормальным оператором? Чему равны его верхний и нижний индексы? Найти область аналитичности оператора резольвенты $(z - a)^{-1}$. Для каких значений γ и для каких Ψ' уравнение $\Psi = \Psi' + \gamma a\Psi$ имеет решение? Когда оно единственно? б) Дать ответ на те же самые вопросы для оператора $b = a^\dagger$.

6. Пусть $\{\Psi_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, есть полный набор ортонормированных векторов, и пусть оператор a определяется уравнениями: $a\Psi_0 = 0$, $a\Psi_n = n^{-1/2}\Psi_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. а) Дать ответы на вопросы, поставленные в задаче 5, а. б) Дать ответы на те же самые вопросы для оператора $b \equiv a^\dagger$. в) Ответить на те же вопросы для эрмитовых операторов aa^\dagger и $a^\dagger a$.

7. Может ли вполне непрерывный оператор S в гильбертовом пространстве иметь конечное число различных собственных значений? Если да, то привести пример. Пусть S — эрмитов оператор. Какую размерность имеет его нуль-пространство?

8. Показать, что если область определения оператора A является плотной в гильбертовом пространстве, то нуль-пространство сопряженного ему оператора является ортогональным дополнением к области значений оператора A .

9. Показать, что оператор, все собственные значения которого действительны, эрмитов.

10. Пусть V — нормальный оператор. Показать, что любые два его собственных вектора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны друг другу.

Показать также, что его «спектр является полным» в том же смысле, что и спектр эрмитова оператора (свести доказательство к доказательству полноты для эрмитова оператора).

11. Показать, что оператор конечного ранга является вполне непрерывным.

12. Используя свойство 6 из § 3, п. 2, показать, что любое число из спектра вполне непрерывного оператора, отличное от нуля, является собственным значением (т. е. принадлежит точечному спектру) и имеет конечное вырождение. Показать также, что нуль является единственной возможной предельной точкой спектра такого оператора.

13. Используя свойства 5 и 6 из § 3, п. 2, показать, что если $\text{Sp } CC^\dagger < \infty$, то C — вполне непрерывный оператор.

14. Пусть $\{\Psi_n\}$ — полный ортонормированный набор, и пусть $C = \sum_1^\infty n^{-2} \Psi_n \Psi_n^\dagger$.

Доказать, что C — вполне непрерывный оператор, т. е. что область его значений является плотной в гильбертовом пространстве и что нуль принадлежит непрерывному спектру.

Сечения рассеяния

§ 1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ

1. Скорость перехода

Исходя из установленных свойств, не зависящих от времени стационарных состояний $\Psi(E, \alpha)$, проследим изменение во времени точного вектора состояния $\Psi(\alpha, t)$. Образует из векторов $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$, нормированных согласно (7.19), волновой пакет путем интегрирования с соответствующей весовой функцией $f(E)$. В реальных случаях квантовые числа α обычно образуют непрерывный спектр (в α входит, например, квантовое число, отвечающее направлению импульса). Следовательно, в условии нормировки (7.19) вектора $\Psi^{(+)}(E, \alpha)$ δ -символ Кронекера нужно заменить δ -функцией Дирака. Поэтому для получения волнового пакета нужно интегрировать также и по α . Если только мы не рассматриваем случай рассеяния частицы на неподвижной мишени, то, согласно рассмотрению гл. 7, § 2, п. 2, в качестве индексов у векторов состояний нужно помимо полной энергии E брать также полный импульс частицы \mathbf{P} . *Остальные* квантовые числа обозначим через α . Тогда выражение для произвольного волнового пакета запишется в виде

$$\Psi^{(+)}(t) = \int d\alpha \int_0^{\infty} dE \int d\mathbf{P} e^{-iEt} f(E, \mathbf{P}, \alpha) \Psi^{(+)}(E, \mathbf{P}, \alpha). \quad (8.1)$$

Здесь подразумевается, что волновой пакет не содержит вклада от связанных состояний оператора H . Последние не могут получаться из состояний свободных частиц.

Подставим теперь уравнение Липпмана — Швингера (7.15) в (8.1) и используем разложение функции Грина (7.24):

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)}(t) &= \Psi_0(t) + \Psi_{\text{расс}}(t), \\ \Psi_{\text{расс}}(t) &= \int d\beta \int_0^{\infty} dE_{\beta} \int d\mathbf{P}_{\beta} \Psi_0(E_{\beta}, \mathbf{P}_{\beta}, \beta) \int d\alpha \times \\ &\quad \times \int_0^{\infty} dE_{\alpha} f(E_{\alpha}, \mathbf{P}_{\beta}, \alpha) \frac{e^{-iE_{\alpha}t} T_{\beta\alpha}^{(+)}}{E_{\alpha} - E_{\beta} + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь $T_{\beta\alpha}^{(+)}$ есть T -матрица, продолженная вне энергетической поверхности, согласно (7.45). В выражении (8.2) изменен порядок интегрирования. Это оправдывается тем, что весовая функция f по предположению быстро убывает. Кроме того, в (8.2) использована содержащаяся в (7.43) δ -функция, соответствующая сохранению импульса.

Из (8.2) следует, что амплитуда вероятности того, что среди рассеянных частиц будет найдена свободная частица с энергией E_{β} , полным импульсом \mathbf{P}_{β}

и остальными квантовыми числами β , равна

$$\begin{aligned} (\Psi_0(E_\beta, \mathbf{P}_\beta, \beta) e^{-iE_\beta t}, \Psi_{\text{расс}}(t)) = \\ = \int d\alpha \int_0^\infty dE_\alpha f(E_\alpha, \mathbf{P}_\beta, \alpha) T_{\beta\alpha}^{(+)} \frac{e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t}}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} = \\ = -i \int d\alpha \int_0^\infty dE_\alpha f(E_\alpha, \mathbf{P}_\beta, \alpha) T_{\beta\alpha}^{(+)} \int_{-\infty}^\infty dt' e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t'}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Производная по времени от этой амплитуды имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Psi_0(E_\beta, \mathbf{P}_\beta, \beta) e^{-iE_\beta t}, \Psi_{\text{расс}}(t)) = \\ = -i \int d\alpha \int_0^\infty dE_\alpha f(E_\alpha, \mathbf{P}_\beta, \alpha) T_{\beta\alpha}^{(+)} e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Следовательно, вероятность перехода в единицу времени в состояние с энергией и импульсом в интервале $dE d\mathbf{P}$ вблизи энергии E_β и импульса \mathbf{P} , а также с квантовыми числами в интервале от β до $\beta + d\beta$, т. е. скорость, с которой увеличивается число частиц в состояниях с квантовыми числами в указанных интервалах, равна

$$\begin{aligned} \omega_\beta dE d\mathbf{P} d\beta = \frac{d}{dt} |(\Psi_0(E_\beta, \mathbf{P}_\beta, \beta) e^{-iE_\beta t}, \Psi_{\text{расс}}(t))|^2 dE d\mathbf{P} d\beta = \\ = -i \int d\alpha \int d\alpha' \int_0^\infty dE_\alpha \int_0^\infty dE_{\alpha'} f(E_\alpha, \mathbf{P}_\beta, \alpha) f^*(E_{\alpha'}, \mathbf{P}_\beta, \alpha') \times \\ \times T_{\beta\alpha}^{(+)} T_{\beta\alpha'}^{(+)*} e^{i(E_{\alpha'} - E_\alpha)t} \left(\frac{1}{E_{\alpha'} - E_\beta - i\epsilon} - \frac{1}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} \right) dE d\mathbf{P} d\beta. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, при $t \rightarrow \infty$ эта вероятность стремится к нулю, так как поскольку волновой пакет описывает конечное число частиц, то скорость перехода должна убывать. Для получения постоянной скорости перехода нужно перейти к идеализированному случаю, когда в начальном состоянии весовая функция имеет *острый максимум*, т. е. когда начальное состояние является моноэнергетическим и имеет квантовые числа α_i . Конечно, в этом случае мы имеем уже дело не с волновым пакетом, а с бесконечным пучком. Именно потому, что получающееся состояние является стационарным, существует постоянная вероятность перехода. Таким образом, заменяя f на

$$f(E_\alpha, \mathbf{P}, \alpha) \rightarrow \delta(\alpha - \alpha_i) \delta(E_\alpha - E_i) g(\mathbf{P}),$$

при $\epsilon \rightarrow 0$ сразу же получаем выражение

$$\omega_{fi} dE_f d\mathbf{P}_f d\alpha_f = 2\pi\delta(E_f - E_i) |T_{fi}|^2 |g(\mathbf{P}_f)|^2 dE_f d\mathbf{P}_f d\alpha_f, \quad (8.5)$$

которое содержит только \mathbf{T} -матрицу на энергетической поверхности. В (8.5) δ -функция выражает просто закон сохранения энергии. Она обеспечивает возможность переходов только в состояния, энергия которых равна сумме энергий частиц исходного пучка и мишени. Матричный элемент T_{fi} зависит от полной энергии и импульса, которые одинаковы в начальном и конечном состояниях, и от остальных переменных, которые необходимы для полного задания начального и конечного состояний. В конечном состоянии этим переменным соответствует набор квантовых чисел α_f .

Выражение (8.5) дает вероятность перехода для случая рассеяния *пары* частиц либо описывает изменение движения центра масс системы и ее внутрен-

него состояния при рассеянии. Для получения вероятности перехода, не зависящей от величины полного конечного импульса, нужно проинтегрировать по всем \mathbf{P}_f . Если функция $g(\mathbf{P})$ резко изменяется на интервале импульсов, малом по сравнению с интервалом, на котором происходит значительное изменение функции T_{fi} , то последнюю можно вынести из-под знака интеграла в точке, соответствующей начальному значению импульса \mathbf{P} . При этом получим следующий интеграл:

$$\int d\mathbf{P}_f |g(\mathbf{P}_f)|^2 = \int d\mathbf{R} (2\pi)^{-3} \left| \int d\mathbf{P} e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}} g(\mathbf{P}) \right|^2.$$

Ясно, что записанная в таком виде скорость перехода есть вероятность, проинтегрированная по всем *положениям* центра масс. Теперь можно далее рассматривать идеализированный пучок, который соответствует *одному значению* полного импульса, т. е.

$$g(\mathbf{P}) = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}_i).$$

Скорость перехода, отнесенная к единице объема, просто равна выражению (8.5), умноженному на $(2\pi)^{-3}$, а дифференциальное сечение (по отношению к α) определяется выражением

$$\int dE_f \omega_{fi} (2\pi)^{-3} = (2\pi)^{-2} |T_{fi}|^2, \quad (8.6)$$

деленным на величину F , представляющую произведение падающего потока на плотность мишени.

Конечно, в случае столкновения одной частицы с неподвижной мишенью δ -функция, описывающая сохранение импульса, отсутствует и мы получаем скорость перехода для частицы непосредственно из (8.5) как величину

$$\int dE_f \omega_{fi} = 2\pi |T_{fi}|^2, \quad (8.6a)$$

деленную на F .

2. Произведение потока на плотность мишени

Рассмотрим сначала случай, когда частица рассеивается на неподвижной мишени. Тогда нормировке вида (7.19), где α включает в себя *направление импульса* и, возможно, другие (дискретные) квантовые числа, такие, как спин и т. д. (обозначим их через a), в координатном представлении соответствует выбор

$$\Psi(\mathbf{p}, a; \mathbf{r}) = \frac{(mp)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \chi_a e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}, \quad (8.7)$$

где χ_a — нормированный собственный вектор, отвечающий остальным квантовым числам. Запишем условие нормировки в явном виде

$$\int d\mathbf{r} \Psi^*(\mathbf{p}, a; \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{p}', a'; \mathbf{r}) = \delta(E - E') \delta_\Omega(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}') \delta_{aa'}, \quad (8.8)$$

где δ_Ω есть δ -функция телесного угла, введенная по формуле (2.15). Условие нормировки можно записать в таком виде, поскольку

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{\delta(E - E') \delta_\Omega(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}')}{mp}. \quad (8.9)$$

Так как волновая функция (8.7) соответствует плотности частиц $mp/(2\pi)^3$ в единице объема, то плотность потока определяется выражением

$$\frac{mp}{(2\pi)^3} v = \frac{p^2}{(2\pi)^3},$$

где v — скорость частицы. Поскольку волновая функция неподвижной мишени равна единице, то равна единице и плотность мишени, поэтому

$$F = \frac{p^2}{(2\pi)^3}. \quad (8.10)$$

В случае столкновения двух частиц имеем

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_2 &= C e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \chi_{a_1} \chi_{a_2} = \\ &= C e^{i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} \chi_{a_1} \chi_{a_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\mathbf{p}_2 m_1 - \mathbf{p}_1 m_2}{m_1 + m_2}, & \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, & \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{r}_1 m_1 + \mathbf{r}_2 m_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Множитель

$$(2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}$$

необходим из-за наличия δ -функции в (7.43). Все остальные сомножители, т. е. волновую функцию в системе центра масс, в которой $\mathbf{P} = 0$, можно нормировать так, чтобы они имели вид

$$\psi(\mathbf{p}, a_1, a_2; \mathbf{r}) = \frac{(\mu p)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \chi_{a_1} \chi_{a_2} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (8.12)$$

где

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

— приведенная масса.

Так как энергия в системе центра масс равна $E = p^2/2\mu$, то

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \frac{\delta(E - E') \delta_{\Omega}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}'})}{\mu p}$$

и условие нормировки функции (8.12) принимает вид, аналогичный (8.8). Произведение плотностей частиц, соответствующих волновым функциям (8.12) и $(2\pi)^{-3/2} e^{-i\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}$,

$$\psi(\mathbf{p}_1, a_1; \mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{p}_2, a_2; \mathbf{r}_2) = (2\pi)^{-3/2} (\mu p)^{-1/2} (2\pi)^{-3/2} \chi_{a_1} \chi_{a_2} e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}_2)},$$

равно

$$\rho_1 \rho_2 = (\mu p) (2\pi)^{-6}.$$

Следовательно, произведение потока на плотность имеет вид

$$F = (\mu p) (2\pi)^{-6} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = p^2 (2\pi)^{-6}. \quad (8.13)$$

Таким образом, получается тот же результат, что и в лабораторной системе отсчета. Мы получили для потока в пучке выражение (8.10), но для получения δ -функции, описывающей закон сохранения импульса, в качестве волновой функции мишени в данном случае нужно взять $(2\pi)^{-3/2}$, а не единицу.

Эти результаты нетрудно обобщить на релятивистский случай. Формулы (8.11) сохраняются, за исключением того, что m_1 и m_2 всюду заменяются соответственно на W_1/c^2 и W_2/c^2 . Вместо (8.12) нужно взять следующую волновую функцию:

$$\psi(\mathbf{p}, a_1, a_2; \mathbf{r}) = \frac{(pW_1W_2)^{1/2}}{cW^{1/2}(2\pi)^{3/2}} \chi_{a_1} \chi_{a_2} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}. \quad (8.14)$$

Чтобы убедиться в справедливости для нее нормировки (8.8), достаточно использовать лишь то, что в системе центра масс

$$\frac{W}{c} = (p^2 + m_1^2 c^2)^{1/2} + (p^2 + m_2^2 c^2)^{1/2},$$

благодаря чему

$$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \delta(W - W') \delta_{\Omega}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}') \frac{W c^2}{p W_1 W_2}.$$

Поток, соответствующий волновой функции (8.14), равен

$$\frac{p W_1 W_2}{W c^2 (2\pi)^3} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|.$$

Но так как

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \frac{p W c^2}{W_1 W_2},$$

то произведение потока на плотность опять определяется формулой (8.13).

Аналогично в случае столкновения с неподвижной мишенью, или в лабораторной системе отсчета, имеем

$$\psi = \frac{(W p)^{1/2}}{c (2\pi)^{3/2}} \chi_a e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (8.15)$$

где W — полная энергия только нелетающей частицы, *не включающая* энергию покоя мишени. Поток, соответствующий волновой функции (8.15), равен $p^2/(2\pi)^3$, и мы опять получаем для случая столкновения частицы с неподвижной мишенью формулу (8.10), а для случая столкновения двух частиц в лабораторной системе отсчета формулу (8.13).

3. Дифференциальное сечение

Дифференциальное сечение для рассеяния частицы на неподвижной мишени можно теперь получить при помощи формул (8.6а) и (8.10), а для рассеяния двух частиц друг на друге — при помощи (8.6) и (8.13). В обоих случаях

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4}{p_i^2} |T_{fi}|^2, \quad (8.16)$$

где T_{fi} вычисляется по формулам (7.40) или (7.44) с использованием волновых функций, имеющих такую же нормировку, как и функция (8.7). Если вместо этого вычислять T -матрицу при помощи волновых функций, нормированных согласно

$$\psi(\mathbf{p}, a; \mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} \chi_a e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}, \quad (8.17)$$

так что взамен (8.8)

$$(\Psi(\mathbf{p}), \Psi(\mathbf{p}')) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

то выражение для сечения принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 m_i m_f \frac{p_f}{p_i} |T_{fi}|^2 \quad (8.18)$$

и в случае упругого рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 m^2 |T_{fi}|^2. \quad (8.18a)$$

При рассеянии двух частиц друг на друге массы m заменяются на приведенные массы. Для релятивистских частиц в обоих случаях массы просто заме-

няются на релятивистские энергии, деленные на c^2 ,

192

$$m \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \frac{W_1 W_2}{W_1 + W_2} c^{-2}.$$

Если при реакции возникает более двух частиц, то дифференциальное сечение определяется выражением

$$d\sigma = (2\pi)^4 \frac{m_i}{p_i} |T_{ji}|^2 \left[\prod_f dp_f' \right] \delta(E' - E_i) \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}_i), \quad (8.19)$$

где T_{ji} вычисляется с помощью волновых функций, нормированных для каждой частицы так же, как и в (8.17); E' — полная конечная энергия, \mathbf{P}' — полный конечный импульс. Член

$$\left[\prod_f dp_f' \right] \delta(E' - E) \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$$

обычно называют *множителем объема фазового пространства*. В релятивистском случае он принимает вид

$$\left[\prod_f d^4 p_f' \delta(W_f'^2 + m_f'^2 c^4 - p_f'^2 c^2) 2W_f' c \right] \delta^4(\mathbf{P}' - \mathbf{P}).$$

Дифференциальные сечения, определяемые формулами (8.16) — (8.19), относятся к пучку, полностью поляризованному в определенном направлении. Если падающий пучок неполяризован, то нужно *усреднить* по направлениям начального спина (и по значениям других начальных квантовых чисел); если в конечном состоянии не измеряют спины (или значения других квантовых чисел), т. е. производится счет всех частиц, то нужно *просуммировать* по всем конечным спинам и т. д. (более подробное рассмотрение проведено в § 3, п. 3).

Аналогичным образом, если некоторые частицы в конечном состоянии не наблюдаются, то (8.19) нужно проинтегрировать по их импульсам (а также просуммировать по значениям их дискретных квантовых чисел). Если считать, что T_{ji} не зависит от этих переменных, то получающийся интеграл по некоторой области в пространстве импульсов можно вычислить и в результате получить некоторую функцию от энергии наблюдаемых частиц. Эта функция содержит информацию о кинематике реакции. *Динамические* эффекты проявляются при сравнении интеграла, который содержит $|T_{ji}|^2$, с интегралом без $|T_{ji}|^2$. Так как кинематика сама по себе приводит к энергетической зависимости (обусловленной самой «формой» энергетического спектра сталкивающихся частиц), то резонансы или другие динамические эффекты можно надежно наблюдать только при таком сравнении¹⁾.

§ 2. ЛОРЕНЦЕВСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

Если пучок, имеющий плотность ρ_2 и скорость \mathbf{v}_2 , падает на неподвижную мишень, плотность которой равна ρ_1 частиц в единице объема, то число частиц, рассеянных в данный элемент телесного угла $d\Omega$ в единицу времени

¹⁾ При другом методе получения формул для сечения вида (8.16)—(8.19) используется «золотое правило» нестационарной теории возмущений (см., например, книгу Шиффа [755], стр. 231, формула (29.12)). Согласно этому правилу, физическую систему нужно заключить в ящик конечного размера, имеющий объем V , с тем чтобы заменить непрерывный спектр гамильтониана дискретным. Затем нужно вычислить *плотность конечных состояний* в пределе $V \rightarrow \infty$. Последняя совпадает с множителем объема фазового пространства, и зависимость от V в конечном результате исчезает. Подробное обсуждение процедуры перехода от дискретного спектра к непрерывному при $V \rightarrow \infty$ можно найти в работах [217, 310, 424].

В целом метод рассмотрения систем конечных размеров следует считать неестественным для теории рассеяния. Он несет на себе отпечаток исторически сложившейся в прошлом ситуации, когда в основном в квантовой механике занимались проблемами связанных состояний и систем с дискретным спектром.

и на единицу объема (мишени), равно

$$dN = d\sigma F, \quad (8.20)$$

где $d\sigma$ — дифференциальное сечение и

$$F = \rho_1 \rho_2 v_2.$$

Вследствие лоренцевского сокращения плотность пучка ρ_2 выражается через плотность пучка $\rho_2^{(0)}$ в системе отсчета, в который пучок покоится,

$$\rho_2 = \rho_2^{(0)} \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Поэтому

$$F = \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2 \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{\rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} p_2}{m_2}. \quad (8.21)$$

Если процесс рассеяния рассматривать в другой системе отсчета, движущейся относительно первой с постоянной скоростью, то dN не изменяется. Это есть число частиц, регистрируемых в единице объема четырехмерного пространства, а элемент объема в четырехмерном пространстве остается инвариантным при преобразованиях Лоренца. Допустим, что новая система отсчета движется относительно старой со скоростью \mathbf{v}_1 , параллельной \mathbf{v}_2 , так что в этой системе отсчета мишень имеет скорость $-\mathbf{v}_1$. Тогда в новой системе отсчета сечение $d\sigma'$ определится выражением

$$dN = d\sigma' F',$$

где

$$F' = \rho_1' \rho_2' (v_1 + v_2') = \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} (v_1 + v_2') \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{v_2'^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Но скорость пучка v_2' в новой системе отсчета связана со скоростью в старой системе отсчета соотношением

$$v_2' = \frac{v_2 - v_1}{1 - (v_1 v_2 / c^2)}.$$

Подставляя это значение в выражение для F' , получаем

$$F' = \rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} v_2 \left(1 - \frac{v_2^2}{c^2}\right)^{-1/2} = F.$$

Таким образом, величина F инвариантна относительно преобразований Лоренца при переходе к любым системам отсчета, в которых направления движения пучка и мишени коллинеарны. Следовательно, дифференциальные сечения также инвариантны относительно таких преобразований.

Если процесс рассеяния рассматривают в системе отсчета, в которой первоначальные направления движения сталкивающихся частиц неколлинеарны, то априори не ясно, как определять сечение. Ввиду инвариантности сечения относительно преобразований Лоренца, при которых первоначальные импульсы частиц остаются коллинеарными, обычно сечение определяют, чтобы оно было инвариантным относительно *любоых* преобразований Лоренца. Для этого необходимо только сделать инвариантной величину F . Но инвариантная функция, значение которой в системе отсчета с $\mathbf{p}_1 = 0$ совпадает с (8.21), имеет вид

$$F = \frac{\rho_1^{(0)} \rho_2^{(0)} [(p_\mu^{(1)} p_\mu^{(2)})^2 - m_1^2 m_2^2 c^4]^{1/2}}{m_1 m_2 c}$$

(здесь принято обычное правило суммирования по повторяющимся индексам). Если эту функцию подставить в (8.20), то получим релятивистски инвариантное *определение* сечения

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{dN}{F}.$$

§ 3. РАССЕЯНИЕ НЕКОГЕРЕНТНЫХ ПУЧКОВ

1. Матрица плотности

До сих пор мы рассматривали только рассеяние частиц, описываемых волновой функцией, т. е. частиц, находящихся в *чистых состояниях*. Кроме энергии и импульса, состояние частиц характеризовалось определенными квантовыми числами, как-то: спином, изотопическим спином, их проекциями на заданное направление и т. д. Экспериментально приготовленный пучок необязательно таков. Вместо этого данные квантовые числа α для пучка могут быть распределены с некоторой вероятностью. При этом нужно различать случаи, когда смесь этих квантовых состояний является когерентной или некогерентной. Оба случая описываются с помощью *матрицы плотности*.

Пусть система описывается квантовыми числами α , т. е. мы используем α -представление. Если система находится в чистом состоянии, то она характеризуется вектором

$$\Psi = \int d\alpha f(\alpha) \Psi_\alpha, \quad \|\Psi\|^2 = \int d\alpha |f(\alpha)|^2 = 1$$

в предположении, что

$$(\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = \delta(\alpha - \beta).$$

Тогда среднее значение любого оператора A получаем по формуле

$$\langle A \rangle = (\Psi, A\Psi) = \int d\alpha \int d\alpha' f^*(\alpha) f(\alpha') A_{\alpha\alpha'},$$

где

$$A_{\alpha\alpha'} = (\Psi_\alpha, A\Psi_{\alpha'}).$$

Конечно, вектор Ψ описывает не одну систему, а целый ансамбль. Утверждение, что ансамбль находится в чистом состоянии или характеризуется вектором состояния, эквивалентно утверждению, будто все системы в ансамбле приготовлены одинаковыми с той степенью тщательности, которая только возможна. Другими словами, наши знания об ансамбле являются *максимально полными*¹⁾.

Если наши знания об ансамбле являются неполными, то мы можем сказать лишь, что ансамбль состоит из смеси подансамблей, каждый из которых характеризуется отдельным вектором состояния

$$\Psi_n = \int d\alpha f_n(\alpha) \Psi_\alpha, \quad (8.22)$$

где

$$\|\Psi_n\|^2 = \int d\alpha |f_n(\alpha)|^2 = 1, \quad |(\Psi_n, \Psi_m)| < 1, \quad n \neq m, \quad (8.23)$$

¹⁾ Здесь нет какого-либо элемента субъективности. Используемое в квантовой механике ввиду удобства слово *знание* часто неправильно истолковывалось философами. Значительно более определенным было бы всегда говорить о *приготовлении* состояния физической системы. Чистое состояние готовится с максимальной тщательностью в том смысле, что в нем все значения «коммутирующих» переменных из полного набора фиксированы. В этом случае наши знания о каждой системе ансамбля являются настолько полными, насколько позволяет их знать квантовая механика, и ансамбль описывается *единственным вектором состояния*.

причем доля такого подансамбля во всем ансамбле равна P_n . Таким образом, P_n есть вероятность найти n -й подансамбль из всего ансамбля систем. Следовательно, числа P_n должны удовлетворять условиям

$$0 \leq P_n \leq 1, \quad \sum_n P_n = 1.$$

Отметим, что здесь не делается предположения о взаимной ортогональности векторов состояний Ψ_n . Формула (8.23) означает только то, что любые два из них линейно независимы. В этом смысле состояния Ψ_n являются *различными*.

Среднее значение переменной A теперь определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_n P_n (\Psi_n, A \Psi_n) = \\ &= \sum_n P_n \int d\alpha \int d\alpha' f_n^*(\alpha) f_n(\alpha') A_{\alpha\alpha'}. \end{aligned}$$

Его удобно выразить с помощью *оператора плотности*

$$\rho = \sum_n P_n Q_n, \quad (8.24)$$

где величина

$$Q_n = \Psi_n \Psi_n^\dagger = \int d\alpha \int d\alpha' f_n^*(\alpha) f_n(\alpha') \Psi_{\alpha'} \Psi_{\alpha}^\dagger \quad (8.25)$$

есть проектирующий оператор на состояние n -го подансамбля. Используя ρ , запишем среднее значение в виде

$$\langle A \rangle = \text{Sp } \rho A. \quad (8.26)$$

Поскольку

$$\text{Sp } Q_n = \int d\alpha |f_n(\alpha)|^2 = 1,$$

то

$$\text{Sp } \rho = 1. \quad (8.27)$$

Вычисление следа можно провести в α -представлении

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha, \alpha'} \rho_{\alpha\alpha'} A_{\alpha'\alpha}, \quad (8.26a)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\alpha'} &= (\Psi_{\alpha}, \rho \Psi_{\alpha'}) = \\ &= \sum_n P_n f_n(\alpha) f_n^*(\alpha') \end{aligned} \quad (8.28)$$

есть *матрица плотности*. Поскольку след инвариантен относительно преобразований базиса, то его можно равным образом вычислять и в любом другом представлении. Матрица плотности является эрмитовой и неотрицательно определенной, так что ее всегда можно привести к диагональному виду при помощи унитарного преобразования. Все ее собственные значения неотрицательны.

Аналогичным образом, используя нормированный собственный вектор Φ_b оператора B , принадлежащий собственному значению b , можно определить вероятность того, что при измерении динамической переменной B будет обнаружено значение b :

$$\begin{aligned} P_b &= \sum_n P_n |\langle \Phi_b, \Psi_n \rangle|^2 = \\ &= \sum_n P_n (\Phi_b, \Psi_n) (\Psi_n, \Phi_b) = \\ &= (\Phi_b, \rho \Phi_b) = \langle \rho \rangle_b. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Из этого равенства вытекает формула (8.26), поскольку в силу (8.29) среднее значение переменной B равно

$$\langle B \rangle = \sum_b b P_b = \sum_b (\Phi_b, \rho B \Phi_b) = \text{Sp } \rho B.$$

В шредингеровском представлении векторы состояний подансамблей зависят от времени, поэтому оператор плотности также зависит от времени. Уравнение движения для ρ сразу же получается из уравнения Шредингера для Ψ_n :

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{\partial}{\partial t} \rho + i [\rho, H], \quad (8.30)$$

где частная производная соответствует тому, что вероятности P_n могут зависеть от времени:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum Q_n \frac{\partial P_n}{\partial t}.$$

Далее, согласно неравенству Шварца, имеем

$$\text{Sp } Q_n Q_m = \left| \int d\alpha f_n^*(\alpha) f_m(\alpha) \right|^2 \leq \int d\alpha |f_n(\alpha)|^2 \int d\alpha' |f_m(\alpha')|^2 = 1.$$

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда

$$f_m(\alpha) = C f_n(\alpha).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Sp } Q_n Q_m &< 1, & n \neq m, \\ \text{Sp } Q_n^2 &= 1. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Поэтому

$$\text{Sp } \rho^2 = \sum_{n, m} P_n P_m \text{Sp } Q_n Q_m \leq \sum_{n, m} P_n P_m = 1,$$

и мы находим, что соотношение

$$\text{Sp } \rho^2 = 1 \quad (8.32)$$

имеет место тогда и только тогда, когда все P_n , кроме одного, равны нулю. Это случай *чистого состояния*. Если ансамбль находится в *смешанном состоянии*, то

$$\text{Sp } \rho^2 < 1. \quad (8.32a)$$

Если векторы состояния различных подансамблей взаимно ортогональны, то $Q_n Q_m = 0$ при $n \neq m$ и доказательство можно упростить.

Пучки частиц. Пучок частиц можно рассматривать как статистический ансамбль. Следовательно, наиболее компактно он описывается оператором плотности. Если предположить сначала, что для описания пучка не требуется никаких квантовых чисел, кроме энергии, то в фиксированный момент времени $t = 0$ оператор плотности для пучка можно представить в виде

$$\rho = \sum_n P_n \int_0^\infty dE \int_0^\infty dE' f_n(E) f_n^*(E') \Psi(E) \Psi^\dagger(E')$$

и, следовательно, в произвольный момент времени t имеем

$$\rho(t) = \sum_n P_n \int_0^\infty dE \int_0^\infty dE' f_n(E) f_n^*(E') e^{-i(E-E')t} \Psi(E) \Psi^\dagger(E'). \quad (8.33)$$

Функции $f(E)$ могут учитывать то обстоятельство, что частицы были испущены системой с конечным временем жизни, и потому они не являются моноэнергетическими. Однако это необязательно приводит к образованию смешанного состояния. Наиболее общий метод получения частиц в смешанном состоянии состоит в совместном рождении частиц или введении между ними корреляция. Допустим, что *две частицы* находятся в чистом состоянии с данной энергией. Тогда оператор плотности данной пары определяется выражением

$$\rho_{12} = \int_0^{\infty} dE' \int_0^{\infty} dE'' f(E') f^*(E'') [\Psi_1(E') \Psi_1^\dagger(E'')] [\Psi_2(E-E') \Psi_2^\dagger(E-E'')].$$

Если теперь измерения производить только над частицей 1, не касаясь частицы 2, которая может в действительности находиться далеко от частицы 1, то все следы операторов частицы 1 и средние значения по состояниям частицы 1 будут исключать часть ρ_{12} , которая относится к частице 2. Соответственно эффективный оператор плотности частицы 1 равен частичному следу ρ_{12} по состояниям частицы 2:

$$\rho_1 = \text{Sp}_2 \rho_{12} = \int_0^E dE' |f(E')|^2 \Psi_1(E') \Psi_1^\dagger(E'),$$

поскольку векторы Ψ_2 , относящиеся к различным значениям энергии, взаимно ортогональны. Теперь оператор плотности частицы 1 является уже оператором плотности смешанного состояния. Этот результат обусловлен потерей информации в силу исключения из рассмотрения частицы 2.

Простым примером является испускание частиц в процессе распада. Если источник закреплен, то испускаемая частица может находиться в чистом состоянии, даже если ее энергия не определена точно. Однако если источник испытывает *отдачу*, то испускаемая частица в отдельности обязательно будет находиться в смешанном состоянии, даже если частица и источник вместе находятся в чистом состоянии. Электроны, испускаемые при β -распаде, всегда находятся в смешанных состояниях, даже если считать, что испускающее их ядро имеет бесконечно большую массу. Такое положение обусловлено одновременным испусканием нейтрино.

Для того чтобы испускаемые частицы находились в чистом состоянии, необходимо, конечно, чтобы сам источник находился в чистом состоянии. В общем случае (например, при обычном излучении света атомом или при испускании ядром α -частицы) это не имеет места. Только когда атомы находятся в кристаллической решетке и их фазы коррелированы, возможно описание с помощью волновой функции. Важным примером такого рода является лазер.

Пучок частиц, находящихся в чистом состоянии, также называется *когерентным*; пучок частиц, находящихся в смешанном состоянии, называется *некогерентным*. Ясно, что можно говорить о различной степени некогерентности. Если вероятность P_n для одного значения n близка к единице, а для других — мала, то пучок является почти когерентным. Если вероятность P_n одинаково мала для всех n (и все Ψ_n взаимно ортогональны), то пучок является настолько некогерентным, насколько это вообще возможно. В качестве меры некогерентности можно принять величину $\text{Sp} \rho^2$, хотя в зависимости от квантовых чисел она не обязательно равна нулю в случае, когда некогерентность максимальна.

Если, кроме энергии и импульса, состояние характеризуется другими квантовыми числами, то матрица плотности может быть дискретной и может оказаться, что ее нужно использовать даже для описания моноэнергетических пучков. Особенно важным случаем являются пучки частиц со *спином*.

2. Частицы со спином

Допустим, что рассматриваемые частицы имеют спин s , так что χ_v — их спиновые функции, удовлетворяющие уравнениям

$$S^2 \chi_v = s(s+1) \chi_v, \quad (8.34)$$

$$S_z \chi_v = v \chi_v, \quad (8.35)$$

где S — оператор спина. Если покоящаяся частица описывается функцией χ , то существует система координат \mathcal{S}_0 , такая, что χ является собственной функцией z -компоненты спина, принадлежащей собственному значению $v \geq 0$,

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_v^{(0)}, \\ S_z^{(0)} \chi_v^{(0)} &= v \chi_v^{(0)}. \end{aligned}$$

Направление оси z этой системы координат и называют *направлением спина* частицы. В любой другой системе координат \mathcal{S} , в которой частица покоится (или движется медленно), компоненты оператора спина выражаются через компоненты оператора спина в системе координат \mathcal{S}_0 посредством

$$S_i = \sum_j T_{ij} S_j^{(0)}, \quad (8.36)$$

где T_{ij} — матрица поворота в трехмерном пространстве, связывающая \mathcal{S} и \mathcal{S}_0 . Следовательно, среднее значение оператора S_i в состоянии χ равно

$$\langle S_i \rangle = (\chi, S_i \chi) = \sum_j T_{ij} (\chi_v^{(0)}, S_j^{(0)} \chi_v^{(0)}) = v T_{i3},$$

поскольку

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}, \quad S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i} \quad (8.37)$$

и

$$S_{\pm} \chi_v = [s(s+1) - v(v \pm 1)]^{1/2} \chi_{v \pm 1}. \quad (8.38)$$

В результате находим, что если частица находится в чистом состоянии, то

$$\mathbf{n} \equiv \frac{\langle \mathbf{S} \rangle}{v} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), \quad (8.39)$$

где φ и θ — полярные углы оси z системы координат \mathcal{S}_0 в системе координат \mathcal{S} . Таким образом, единичный вектор \mathbf{n} есть вектор *направления спина* частицы.

Пусть теперь в произвольной системе координат, в которой частица покоится, функция χ разложена по собственным функциям оператора $S_3 = S_z$:

$$\chi = \sum_{\mu} a_{\mu} \chi_{\mu}, \quad \sum_{\mu} |a_{\mu}|^2 = 1. \quad (8.40)$$

В этой системе координат

$$\langle S_z \rangle = \sum_{\mu} \mu |a_{\mu}|^2, \quad (8.41)$$

$$\langle S_+ \rangle = \sum_{\mu} a_{\mu}^* a_{\mu+1} (s - \mu)^{1/2} (s + \mu + 1)^{1/2} = \langle S_- \rangle^*. \quad (8.42)$$

При этом направление спина вычисляется по формулам

$$\cos \theta = \langle S_z \rangle [|\langle S_z \rangle|^2 + |\langle S_+ \rangle|^2]^{-1/2}, \quad (8.43)$$

$$e^{2i\varphi} = \frac{\langle S_+ \rangle}{\langle S_- \rangle}. \quad (8.44)$$

При вычислении выражений в правых частях формул (8.43) и (8.44) необязательно, чтобы a_{μ} было нормировано на единицу. Задание направления спина (θ, φ) и собственного значения компоненты спина по этому направлению однозначно определяет спиновое состояние частицы (с известным значением спина).

Для частицы со спином $1/2$ можно написать

$$\chi = \begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}, \quad |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1;$$

тогда

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} (|a_+|^2 - |a_-|^2), \quad (8.45)$$

$$\langle S_+ \rangle = a_-^* a_+ \quad (8.46)$$

и, конечно,

$$|\langle S_z \rangle|^2 + |\langle S_+ \rangle|^2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, имеем

$$\cos \theta = |a_+|^2 - |a_-|^2, \quad (8.47)$$

$$e^{2i\varphi} = \frac{a_+ / a_-^*}{a_- / a_+^*}. \quad (8.48)$$

Таким образом, φ есть разность фаз a_+ и a_- .

В представлении, в котором оператор $S_3^{(0)} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ диагонален, матрица плотности определяется выражением

$$\rho_{\nu\nu'} = P_{\nu} \delta_{\nu\nu'},$$

где P_{ν} — вероятность собственного значения ν оператора $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$. Оператор плотности имеет вид

$$\rho = \sum_{\nu=-s}^s P_{\nu} \chi_{\nu} \chi_{\nu}^{\dagger}. \quad (8.49)$$

Если подействовать оператором

$$\prod_{\nu' \neq \nu} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} - \nu')$$

на левую и правую части соотношения

$$\sum_{\nu=-s}^s \chi_{\nu} \chi_{\nu}^{\dagger} = 1,$$

выражающего условие полноты, то получим

$$\prod_{\nu' \neq \nu} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} - \nu') = \prod_{\nu' \neq \nu} (\nu - \nu') \chi_{\nu} \chi_{\nu}^{\dagger}.$$

Следовательно, оператор плотности можно выразить через оператор $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$:

$$\rho = \sum_{\nu=-s}^s P_{\nu} \prod_{\nu' \neq \nu} \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} - \nu'}{\nu - \nu'}. \quad (8.50)$$

Итак, находим, что если состояние является смешанным, то среднее значение оператора S равно

$$\langle S \rangle = \text{Sp } \rho S = \sum_{\nu} P_{\nu} \nu n. \quad (8.51)$$

Для полного определения матрицы плотности, кроме направления спина \mathbf{n} , необходимо задать $2s + 1$ положительных чисел P_ν , удовлетворяющих условию

$$\sum_{\nu=-s}^s P_\nu = 1. \quad (8.52)$$

Это можно сделать, измерив $2s$ величин:

$$s^{(m)} = \langle (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^m \rangle = \sum_{\nu=-s}^s P_\nu \nu^m, \quad m = 1, \dots, 2s. \quad (8.53)$$

Зная значения $s^{(m)}$, всегда можно разрешить $2s + 1$ уравнений (8.52) и (8.53) относительно $2s + 1$ неизвестных P_ν .

Частицы со спином $1/2$. Простейшим нетривиальным примером является случай частиц со спином $1/2$. В этом случае необходимо знать только одну величину

$$s^{(1)} = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{2} (P_{-1/2} - P_{1/2})$$

и оператор плотности, согласно (8.50), определяется выражением

$$\rho = P_{1/2} \left(\frac{1}{2} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \right) + P_{-1/2} \left(\frac{1}{2} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \right),$$

или

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (8.54)$$

В последнем выражении величина

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{S}$$

представляет совокупность спиновых матриц Паули, а вектор

$$\mathbf{P} = 2s^{(1)}\mathbf{n} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{P_{1/2} - P_{-1/2}}{P_{1/2} + P_{-1/2}} \mathbf{n} \quad (8.55)$$

есть *вектор поляризации*, длина которого представляет степень поляризации, а его направление указывает направление поляризации. Из формулы (8.54) следует, что степень поляризации $P = |\mathbf{P}|$ непосредственно связана с матрицей плотности соотношением

$$\rho^2 - \rho = \frac{1}{4} (P^2 - 1) 1. \quad (8.56)$$

Последнее означает, что собственные значения оператора ρ равны

$$\rho' = \frac{1}{2} (1 \pm P)$$

и, следовательно,

$$\det \rho = \frac{1}{4} (1 - P^2).$$

Таким образом, степень поляризации можно найти по формуле

$$P^2 = 1 - 4 \det \rho. \quad (8.57)$$

Кроме того, из соотношения (8.56) явно виден смысл величины $\text{Sp} \rho^2$, которая оказывается связанной со степенью поляризации формулой

$$\text{Sp} \rho^2 = \frac{1}{2} (1 + P^2). \quad (8.58)$$

Частицы со спином 1. Следующим простым примером является случай частиц со спином 1. Из (8.50) после некоторых упрощений следует, что

$$\rho = P_0 [1 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2] + \frac{1}{2} (1 - P_0) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2} (P_1 - P_{-1}) \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \quad (8.59)$$

и вероятности, согласно (8.53), определяются выражениями

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} \langle (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2 + \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \rangle, \\ P_{-1} &= \frac{1}{2} \langle (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2 - \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \rangle, \\ P_0 &= \langle 1 - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})^2 \rangle. \end{aligned} \quad (8.60)$$

В частном случае *поперечной поляризации*, т. е. когда исключается состояние, в котором проекция спина на направление движения $v=0$, формула (8.59) сводится к

$$\rho = \frac{1}{2} (1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}), \quad (8.61)$$

где

$$\mathbf{P} = \frac{P_1 - P_{-1}}{P_1 + P_{-1}} \mathbf{n} \quad (8.62)$$

есть вектор поляризации, который имеет тот же смысл, что и в случае частиц со спином $1/2$, но с ограничением на возможные направления вектора \mathbf{n} . Сохраняются и соотношения (8.56) — (8.58), первые два из которых были уже получены ранее в (1.45) и (1.47).

Пример перехода от чистого состояния двух частиц к смешанному состоянию одной частицы. В качестве примера перехода от чистого состояния двух частиц к смешанному состоянию одной частицы можно рассмотреть ситуацию, когда две частицы со спином $1/2$ образуются в чистом состоянии с полным спином, равным нулю. Двухчастичная спиновая волновая функция, соответствующая спину нуль (синглетное состояние), имеет вид

$$\chi_0 = 2^{-1/2} (\chi_-^{(1)} \chi_+^{(2)} - \chi_+^{(1)} \chi_-^{(2)}).$$

Следовательно, оператор спиновой плотности для двух частиц равен

$$\begin{aligned} \rho_{12} = \frac{1}{2} [& (\chi_-^{(1)} \chi_-^{(1)\dagger}) (\chi_+^{(2)} \chi_+^{(2)\dagger}) + (\chi_+^{(1)} \chi_+^{(1)\dagger}) (\chi_-^{(2)} \chi_-^{(2)\dagger}) - \\ & - (\chi_-^{(1)} \chi_+^{(1)\dagger}) (\chi_+^{(2)} \chi_-^{(2)\dagger}) - (\chi_+^{(1)} \chi_-^{(1)\dagger}) (\chi_-^{(2)} \chi_+^{(2)\dagger})]. \end{aligned}$$

Если не интересоваться состоянием частицы 2, то нужен оператор плотности только для частицы 1, который получается, если взять след по состояниям частицы 2:

$$\rho_1 = \frac{1}{2} (\chi_- \chi_-^\dagger + \chi_+ \chi_+^\dagger) = \frac{1}{2} \mathbf{1}.$$

Полученный таким образом пучок частиц 1 является полностью неполяризованным или некогерентным. То же самое оказывается справедливым и в ситуации, когда пара частиц образуется в некогерентном триплетном состоянии с одинаковыми вероятностями для всех трех проекций спина.

3. Сечение и матрица плотности рассеянной волны

Если в эксперименте по рассеянию падающий пучок находится в смешанном состоянии, описываемом матрицей плотности $\rho_{\text{пад}}$, то из (8.29) следует, что выражение (8.5) для вероятности перехода в единицу времени принимает вид

$$\omega_{fi} = 2\pi \langle T \rho_{\text{пад}} T^\dagger \rangle_f, \quad (8.63)$$

где среднее вычисляется по конечному состоянию. В то же время (8.63) означает, что матрица плотности рассеянной волны определяется формулой

$$\rho_{\text{расс}} = \frac{T \rho_{\text{пад}} T^\dagger}{\text{Sp}' \langle T \rho_{\text{пад}} T^\dagger \rangle_f}. \quad (8.64)$$

След в знаменателе вычисляется не по всем состояниям, а лишь по части из них, поскольку конечное направление движения частиц считается фиксированным. Только в таком случае можно говорить о пучке, рассеянном в данном направлении, матрица плотности которого имеет вид (8.64). Данное обстоятельство отмечено штрихом у символа следа.

Согласно (8.16), величина

$$\sigma = \frac{(2\pi)^4}{p_i^2} \text{Sp}' \langle T \rho_{\text{пад}} T^\dagger \rangle_f \quad (8.65)$$

является полным дифференциальным сечением рассеяния пучка, описываемого матрицей плотности $\rho_{\text{пад}}$, в направлении, указанном индексом f , т. е. это есть сечение, просуммированное по всем направлениям спина и по всем другим квантовым числам.

Если исходный пучок является когерентным, так что все собственные значения оператора $\rho_{\text{пад}}$, кроме одного, равны нулю, то

$$\begin{aligned} \text{Sp}' \langle T \rho_{\text{пад}} T^\dagger T \rho_{\text{пад}} T^\dagger \rangle &= \sum_{\alpha} |T_{\alpha i}|^2 \sum_{\beta} |T_{\beta i}|^2 = \\ &= (\text{Sp}' \langle T \rho_{\text{пад}} T^\dagger \rangle_f)^2. \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (8.64), имеем

$$\text{Sp} \rho_{\text{расс}}^2 = 1$$

и рассеянная волна также является когерентной. Рассеяние не может приводить к деполяризации частиц. Конечно, это не означает, что пучок поляризованных частиц нельзя деполяризовать путем рассеяния на неполяризованной мишени. Более того, как было отмечено выше, смешанное состояние одной (или более) рассеянных частиц может возникать в результате того, что игнорируется поведение других частиц.

Однако обратное неверно. Если для данного направления все элементы T -матрицы, кроме одного, равны нулю, то

$$\text{Sp} \rho_{\text{расс}}^2 = 1$$

и рассеянная волна является когерентной, или полностью поляризованной независимо от степени некогерентности падающего пучка. Хорошо известным примером (рассмотренным в гл. 3, § 1) является поляризация некогерентного света, рассеянного под прямым углом на частицах небольшого размера.

Если падающий пучок является неполяризованным, или некогерентным, то $\rho_{\text{пад}}$ пропорциональна единичной матрице. Следовательно, в данном случае

$$\rho_{\text{расс}} = \frac{TT^\dagger}{\text{Sp}' \langle TT^\dagger \rangle_f}. \quad (8.64a)$$

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Обсуждение вопросов, затронутых в данном параграфе, можно найти в работах [609, 437, 541, 321, 112, 760]. Интегралы по фазовому пространству рассмотрены в работе [505].

К § 2. Впервые вопросы лоренцевской инвариантности сечений рассеяния рассмотрены Меллером [609]. Общий обзор релятивистской кинематики частиц дал Хагедорн [364].

К § 3, п. 1. Матрица плотности была введена Нейманом [877]. Подробный обзор и обширную библиографию можно найти в работах [248, 564, 830].

Последними работами, посвященными вопросам когерентности в квантовой механике, особенно в связи с исследованиями излучения лазера, являются [335—337, 567, 807, 841, 842].

К § 3, п. 2. Спин и поляризация электронов рассмотрены в книге [720] и более подробно в статье [844]. Более общий метод, применимый к другим значениям спина, можно найти в работе [562].

Ковариантная матрица поляризации для частиц со спином 1 была рассмотрена в [940]; см. также [867].

ЗАДАЧИ

1. Доказать утверждение, содержащееся во втором предложении абзаца с формулой (8.14).

2. Показать, что для случая двух частиц выражение (8.19) сводится к (8.18). Вычислить множитель объема фазового пространства при рассеянии релятивистских частиц для случая, когда масса одной частицы нуль, а другой m .

3. Сравнить множитель объема фазового пространства для случая испускания двух нерелятивистских частиц с аналогичной величиной для случая испускания трех частиц, когда наблюдение над третьей частицей не производится. Считать, что элементы T -матрицы не зависят от энергии испускаемых частиц.

4. а) Допустим, что возбужденный атом, имеющий бесконечно большую массу и находящийся в состоянии с нулевым угловым моментом, испускает фотон. Будет ли состояние фотона чистым, если атом первоначально находился в чистом состоянии? Зависит ли состояние фотона от того, производится ли измерение углового момента атома после испускания фотона или нет? Зависит ли от этого состояние полной системы атом + фотон? б) Допустим, что атом находится в состоянии, в котором его угловой момент равен единице, и что он полностью «поляризован» магнитным полем. В процессе перехода в основное состояние с нулевым угловым моментом он испускает фотон. Будет ли состояние фотона чистым? Ответ обосновать и обсудить полученный результат.

5. Пусть система имеет N возможных состояний. Чему равно значение $S_p \rho^2$, если состояние системы является настолько некогерентным, насколько это вообще возможно? Выразить затем степень поляризации такой системы через значение $S_p \rho^2$. Результат сравнить с (8.58).

6. Доказать формулу (8.38).

7. Допустим, что две частицы со спином $1/2$ одновременно образуются в чистом триплетном состоянии. Чему равна спиновая матрица плотности для одной из частиц в отдельности?

8. В полностью поляризованном пучке, состоящем из частиц со спином $1/2$, каждая частица распадается на две частицы со спином 1 и $1/2$. Чему равны спиновые матрицы плотности для каждой из образующихся частиц в отдельности?

ГЛАВА 9

Формальные методы решения и приближения

Рассмотрим теперь формально несколько стандартных методов решения задачи рассеяния. Они сводятся к построению полной функции Грина либо резольвенты. Хотя в принципе данные методы являются точными, именно они естественно приводят к приближенным методам.

§ 1. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

1. Борновский ряд

Для целей настоящего изложения удобно ввести некоторый параметр γ , на который умножается оператор взаимодействия H' . Параметр γ соответственно имеет смысл интенсивности взаимодействия или *константы связи*. При этом уравнение Липпмана — Швингера принимает вид

$$\Psi = \Psi_0 + \gamma G H' \Psi \quad (9.1)$$

или

$$(1 - \gamma K) \Psi = \Psi_0,$$

где ядро определяется выражением

$$K = G H'. \quad (9.2)$$

Аналогично для оператора T имеем

$$T(1 - \gamma K) = \gamma H'.$$

Решение уравнения (9.1) эквивалентно, таким образом, построению оператора

$$(1 - \gamma K)^{-1}.$$

Простейший способ построения этого оператора состоит в разложении его в *степенной ряд* по γ :

$$(1 - \gamma K)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n K^n. \quad (9.3)$$

При $\gamma = 1$ это разложение представляет *борновский ряд*¹⁾. Исследуем, при каких условиях такое разложение законно.

Необходимо сразу же подчеркнуть, что при исследовании сходимости ряда (9.3) нельзя ограничиться действительными значениями γ , несмотря на то что физический смысл могут иметь только действительные γ . Сходимость разложения функции в степенной ряд по некоторой действительной пере-

¹⁾ Борновский ряд также называют *рядом Неймана*.

менной существенным образом зависит от аналитических свойств этой функции при комплексных значениях переменной. Далее отметим, что замена γ на $1/\alpha$ переводит оператор $(1 - \gamma K)^{-1}$ в резольвенту оператора K , поведение которой как функции α было довольно подробно рассмотрено в гл. 7, § 3.

Если K — ограниченный оператор, то его спектр обязательно заключен в конечной области комплексной α -плоскости. Определим

$$r_\sigma(K) = \sup |\alpha| \leq \|K\| \quad (9.4)$$

при α , пробегаящих весь спектр оператора K . Положительное число $r_\sigma(K)$ называется *спектральным радиусом* оператора K . Из рассмотрения, проведенного в гл. 7, § 3, следует, что оператор $(1 - \gamma K)^{-1}$ является аналитической функцией γ для всех $|\gamma| < 1/r_\sigma(K)$ и может быть представлен в виде ряда (9.3), который сходится при всех $|\gamma| < 1/r_\sigma(K)$ ([824], стр. 262). Это утверждение означает, что остаточные члены в разложении аналитической операторной функции стремятся к нулю *по норме*. Другими словами, данное разложение сходится *равномерно* относительно выбора различных (нормированных) векторов, на которые действует оператор. Таким образом, если используются нормированные базисные функции (в противоположность функциям непрерывного спектра), то сходимость является равномерной относительно выбора различных матричных элементов. При $|\gamma| > 1/r_\sigma(K)$ ряд расходится.

Рассмотрение проводится наиболее просто, если допустить, что K — *вполне непрерывный* оператор. В этом случае радиус сходимости ряда (9.3) определяется наибольшими по величине собственными значениями оператора K , т. е. наименьшими по величине характеристическими значениями. (В противоположность собственным значениям величина γ называется *характеристическим* значением интегрального ядра K , если существует такой нормируемый вектор Φ , что $\gamma K\Phi = \Phi$.) Число таких значений (одинаковых по величине) всегда конечно. Ситуацию, когда имеется несколько одинаковых собственных значений, можно, вообще говоря, рассматривать как исключение. Поскольку радиус r_σ конечен (так как K — вполне непрерывный оператор, то он обязательно ограничен), то радиус сходимости ряда (9.3) всегда отличен от нуля, т. е. ряд сходится, если только $|\gamma|$ достаточно мало. С другой стороны, если ряд (9.3) сходится при всех конечных γ , то он является целой аналитической функцией γ и спектр оператора K (этот спектр не может быть пустым, если K ограничен и всюду определен; см. [824], стр. 261) состоит только из точки $\alpha = 0$.

Модифицированные ядра. В конкретных случаях, которые нам предстоит рассмотреть более подробно ниже, оператор K , определенный согласно (9.2), не является вполне непрерывным, но можно получить вполне непрерывное ядро, если вместо (9.1) исследовать уравнение

$$\Phi = \Phi_0 + \gamma \mathfrak{K}\Phi, \quad (9.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= H'^{1/2}\Psi, \\ \mathfrak{K} &= H'^{1/2}G(E)H'^{1/2} = H'^{1/2}KH'^{-1/2}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Квадратный корень из оператора взаимодействия не полностью определен, если оператор H' не является положительно определенным. Однако это обстоятельство не приводит к серьезным трудностям. Если H' не является положительно определенным, то все же *существует* оператор $H'^{1/2}$, такой, что

$$H'^{1/2}H'^{1/2} = H',$$

и мы просто можем взять один из таких операторов. (Конечно, мы считаем, что H' — эрмитов оператор; однако оператор $H'^{1/2}$ является эрмитовым,

только если оператор H' положительно определен.) Во многих важных конкретных задачах оператор \mathfrak{K} относится к классу операторов Гильберта — Шмидта (определение которых дано в гл. 7, § 3; [824], стр. 261), тогда как оператор K не принадлежит к этому классу. Если как H' , так и H'^{-1} — ограниченные операторы, то спектры операторов K и \mathfrak{K} , конечно, совпадают. Теперь мы будем просто рассматривать оператор K , но всегда, когда это необходимо, рассмотрение можно легко свести к исследованию оператора \mathfrak{K} .

Простым примером использования выражений (9.5) и (9.6) является случай, когда H' — локальный потенциал:

$$H' = V(\mathbf{r}) = |V(\mathbf{r})| v(\mathbf{r}),$$

где $v(\mathbf{r})$ — множитель, равный $+1$ в области $V > 0$ и -1 в области $V < 0$. В этом случае K является «полярным» ядром. Умножим Ψ на $|V(\mathbf{r})|^{1/2}$ и введем новое ядро

$$\mathfrak{K} = |V|^{1/2} G |V|^{1/2} v. \quad (9.6a)$$

Оно обладает всеми преимуществами ядра \mathfrak{K} и, кроме того, избавляет нас от неопределенности, возникающей при изменении знака V , которая имела место для оператора $H'^{1/2}$. К тому же математическая теория полярных ядер хорошо разработана и ее можно использовать для изучения свойств оператора \mathfrak{K} [590].

Вполне непрерывные ядра и их собственные значения. Если теперь предположить, что K — вполне непрерывный оператор, то радиус сходимости ряда (9.3) просто равен наименьшему по величине характеристическому значению оператора K . Поскольку ядро $K = G(E) H'$ зависит от энергии E , то, вообще говоря, от энергии будет зависеть и каждое из его характеристических и собственных значений. Каждое собственное значение $\alpha(E)$ ядра K в то же время отвечает полюсу резольвенты $(E - H_0 - \gamma H')^{-1}$ оператора $H_0 + \gamma H'$ при $\gamma = 1/\alpha$. Если E изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, то точки, соответствующие каждому собственному значению (и каждому характеристическому значению), описывают «траектории» в комплексной α -плоскости. Поскольку

$$G(E) = (E - H_0)^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad E \rightarrow -\infty, \quad (9.7)$$

то каждое собственное значение оператора $K(E)$ в этом пределе стремится, и причем равномерно, к нулю. Далее, если энергия E отрицательна, то оператор $-G$ положительно определен и ограничен и собственные значения оператора K совпадают с собственными значениями эрмитова оператора:

$$\begin{aligned} K &= -(-G)^{1/2} H' (-G)^{1/2} = \\ &= -(-G)^{-1/2} K (-G)^{1/2}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Таким образом, при $E < 0$ все собственные значения оператора K действительны. Продифференцируем уравнение

$$(\Phi(E), [(E - H_0) \alpha(E) - H'] \Phi(E)) = 0 \quad (9.9)$$

по E . Здесь $\Phi(E)$ — собственный вектор оператора K , принадлежащий собственному значению $\alpha(E)$. В результате находим

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dE} = \frac{1}{\langle H_0 - E \rangle} > 0, \quad (9.10)$$

где среднее в правой части вычисляется по состоянию $\Phi(E)$. Из этого следует, что, когда энергия возрастает от $-\infty$ до 0, каждое положительное собственное значение $\alpha(E)$ движется вправо, а каждое отрицательное собственное значение — влево. Если оператор H' является неотрицательно определенным

(т. е. взаимодействие всюду соответствует силам отталкивания), то оператор $-K$ при $E < 0$ также является неотрицательно определенным; таким образом, каждое отличное от нуля собственное значение $\alpha(E)$ должно быть отрицательным и должно перемещаться влево при увеличении E . Наоборот, если неотрицательно определенным является оператор $-H'$ (т. е. взаимодействие всюду соответствует силам притяжения), то оператор K при $E < 0$ является также неотрицательно определенным; таким образом, каждое отличное от нуля собственное значение $\alpha(E)$ должно быть положительным и перемещаться вправо. Конечно, эти утверждения просто по-своему отражают тот физически очевидный факт, что взаимодействие, соответствующее всюду силам отталкивания, не может приводить к связанным состояниям, а в случае взаимодействия, соответствующего во всем пространстве силам притяжения, по мере увеличения интенсивности взаимодействия увеличивается энергия связи. (Напомним, что интенсивность взаимодействия равна $\gamma = 1/\alpha$.) Следовательно, отрицательные собственные значения оператора K (для $E < 0$) можно назвать отталкивательными, а положительные — притягивательными. Если оператор H' не является ни неотрицательно, ни неположительно определенным, то ядро K может иметь как отталкивательные, так и притягивательные собственные значения.

Если при некоторой энергии $-|E_0|$ одно из собственных значений $\alpha(E)$ равно единице, то гамильтониан $H = H_0 + H'$ имеет связанное состояние с энергией связи $|E_0|$. По мере возрастания E точка $\alpha(E)$ отодвигается вправо. Таким образом, число собственных значений $\alpha(0)$ оператора K , величина которых при $E = 0$ превышает единицу, равно числу связанных состояний оператора $H = H_0 + H'$. В то же время число собственных значений $\alpha(0)$, величина которых при $E = 0$ меньше -1 , равно числу связанных состояний гамильтониана $H = H_0 - H'$.

Когда значение энергии E проходит через нуль, собственные значения $\alpha(E)$ уходят с действительной оси. Поскольку при $E = 0$ оператор $G(E)$ имеет точку ветвления, то эта точка также является и точкой ветвления функции $\alpha(E)$; ее нужно обходить особенно осторожно. Из (9.10) следует, что когда значения E уходят с отрицательной действительной полуоси в верхнюю полуплоскость, то, если точка α находится справа от нуля, она перемещается в верхнюю полуплоскость, а если она находится слева, — в нижнюю полуплоскость. Как только величина E становится комплексной, неравенство (9.10) перестает выполняться, но при этом α не может быть действительным, поскольку при действительных α оператор $H' + \alpha H_0$ эрмитов и не может иметь комплексных собственных значений αE . Соответственно, если значения E обходят точку ветвления $E = 0$ через верхнюю полуплоскость комплексной E -плоскости, то точки, соответствующие положительным собственным значениям α , смещаются в верхнюю полуплоскость, а точки, соответствующие отрицательным собственным значениям, смещаются в нижнюю полуплоскость.

Это должно оставаться верным и тогда, когда E достигает положительной действительной полуоси, так что мы оказываемся на верхнем берегу разреза $G(E)$ при $K = G^+(E)H'$. Возможно, что некоторое собственное значение α при положительных энергиях движется к действительной оси. Но пока величина E остается действительной, α не может пересечь действительную ось, поскольку любое собственное значение α , находящееся вне «естественного» листа полуплоскости, должно было бы обратно пересекать действительную ось, возвращаясь назад в свою «естественную» полуплоскость, как только E изменяется на $E + i\epsilon$.

Допустим, что при $E = 0$ собственное значение α подходит к единице слева и по мере увеличения E еще продолжает двигаться вправо. Тогда эта траектория будет проходить вблизи точки $\alpha = 1$, несколько выше ее в комплексной плоскости. Другими словами, когда действительная часть величины α равна единице, ее мнимая часть положительна и мала по величине. При этом можно

ожидать, что, добавляя к E соответствующую небольшую мнимую величину, можно сместить $\alpha(E)$ к единице. Необходимая для этого мнимая добавка к E должна быть отрицательной, так как если бы она была положительна, то эрмитов оператор H имел бы комплексное собственное значение.

Если, с другой стороны, $\text{Im } E < 0$, то значения E должны двигаться через разрез для функции $(E - H_0 - \gamma H')^{-1}$, который проходит «по области непрерывного спектра». На соответствующем втором листе римановой поверхности полюсы аналитически продолженной резольвенты, или собственные значения $\alpha(E)$ оператора K , не имеют смысла связанных состояний гамильтониана $H_0 + \gamma H'$. Вместо этого, как будет подробно показано в гл. 16, § 5, такие полюсы на втором листе (если они лежат достаточно близко к действительной оси) приводят к появлению резонансов при рассеянии. Следовательно, физический смысл того, что значение $\alpha(E)$ проходит вблизи единицы, или пересекает окружность единичного радиуса, и при этом имеет малую мнимую часть, состоит в появлении резонансов. Конечно, резонансы будут появляться всякий раз, когда $\alpha(0)$ почти равно единице, а точка $\alpha(E)$ при возрастании энергии продолжает смещаться вправо.

Ниже мы увидим (гл. 12, § 2), что при рассеянии двух частиц, взаимодействие которых описывается «достаточно хорошим» сферически симметричным потенциалом, точка $\alpha(E)$ продолжает смещаться вправо, когда E проходит через нуль, если $\alpha(E)$ является собственным значением оператора K , соответствующим угловому моменту, отличному от нуля. Но если собственное значение соответствует нулевому угловому моменту, то точка $\alpha(E)$ переходит в комплексную плоскость под прямым углом к действительной оси. Следовательно, можно ожидать, что если имеется «почти связанное» состояние с угловым моментом, равным единице или более, то будет наблюдаться низкочастотный резонанс; если же имеется «почти связанное» s -состояние, то никакого низкочастотного резонанса наблюдаться не будет.

Этому хорошо известному факту нетрудно дать физическое объяснение. Он обусловлен тем, что сочетание потенциала сил притяжения с потенциалом центробежных сил, связанных с угловым моментом, приводит к образованию потенциального барьера, который может обеспечить существование неустойчивого состояния, распадающегося только путем туннельного эффекта. В s -состоянии потенциальный барьер, обусловленный центробежными силами, отсутствует, и поэтому неустойчивое состояние не может образоваться.

На вопрос о том, в каком направлении движется точка $\alpha(E)$ при возрастании энергии до $+\infty$, в общем случае нельзя дать простого ответа. Если считать, что фаза E отлична от нуля, и $\arg E \geq \epsilon > 0$, то, конечно, $\|K(E)\| \rightarrow 0$ при $|E| \rightarrow \infty$, и, следовательно, в этом пределе все собственные значения $\alpha(E)$ оператора K должны равномерно стремиться к началу координат. Однако при $\epsilon \rightarrow 0$ траектория α , например, может все больше и больше прижиматься к мнимой оси и в пределе может «оборваться» при конечном мнимом значении. При общем рассмотрении мы не можем исключить такую возможность. Ниже мы увидим, что в случае локального сферически симметричного потенциала, поведение которого является достаточно хорошим, такие траектории появляться не могут и все собственные значения $\alpha(E)$ при $|E| \rightarrow \infty$ стремятся к нулю. Тогда при изменении E от $-\infty$ до $+\infty$ траектории собственных значений $\alpha(E)$ будут замкнутыми. Более того, они равномерно стремятся к нулю и при $E \rightarrow +\infty$ спектральный радиус обращается в нуль.

Сходимость борновского ряда. Вопрос о сходимости борновского ряда для функции Грина $\mathcal{G}(E)$ при фиксированной энергии E может быть теперь решен просто в зависимости от того, имеет ли оператор $K(E)$ какие-либо собственные значения $\alpha(E)$ вне круга единичного радиуса. Если нет, то радиус сходимости ряда (9.3) больше единицы и борновский ряд сходится. Если вне круга единичного радиуса есть собственные значения α , то радиус сходимости

ряда (9.3) меньше единицы и борновский ряд расходится. Число таких собственных значений с $|\alpha| > 1$ всегда конечно. Когда энергия отрицательна, приведенный критерий просто совпадает с критерием существования связанных состояний. При энергии $E < 0$ любое собственное значение $\alpha(E)$, абсолютная величина которого больше единицы, при уменьшении энергии должно проходить через $+1$ или -1 . Следовательно, при $E_0 < 0$ борновский ряд для функции Грина \mathcal{G} сходится тогда и только тогда, когда ни $H_0 + H'$, ни $H_0 - H'$ не имеют связанных состояний при $E < E_0$. Если операторы $H_0 + H'$ и $H_0 - H'$ вообще не имеют связанных состояний, то борновский ряд сходится вплоть до энергии, равной нулю, и даже несколько далее.

При положительной энергии ситуация сложнее, так как собственные значения $\alpha(E)$ оператора K могут выходить из единичного круга и возвращаться в него. Конечно, если $H_0 + H'$ или $H_0 - H'$ имеет связанные состояния, то должна существовать область энергий, больших нуля (включая точку $E = 0$), в которой борновский ряд расходится. Аналогичным образом, если $H_0 + H'$ или $H_0 - H'$ приводит к появлению острого резонанса при $E_0 > 0$, то должна быть область энергий вблизи $E = E_0$ (обычно выше точки E_0), в которой борновский ряд расходится. В этом случае одинаково важны как отрицательные, так и положительные собственные значения, и нужно исследовать, имеются ли «резонансы» (в том числе и широкие) у обоих операторов $H_0 + H'$ и $H_0 - H'$.

Подчеркнем, что нет никаких «экспериментальных» способов, при помощи которых можно было бы ответить на вопрос о сходимости, т. е. путем простого отыскания связанных состояний и резонансов оператора H нельзя решить вопрос о сходимости ряда. Даже если H не имеет ни связанных состояний, ни резонансов, борновский ряд может расходиться. Последнее может происходить либо потому, что точка α при своем движении пересекает единичную окружность слишком далеко от действительной оси, чтобы мог появиться наблюдаемый резонанс, либо потому, что связанные состояния или резонансы имеет экспериментально ненаблюдаемый гамильтониан $H_0 - H'$.

Если при $E \rightarrow \infty$ собственные значения $\alpha(E)$ равномерно стремятся к нулю, то должно существовать значение энергии, выше которого борновский ряд равномерно сходится. Как было отмечено выше, такой случай имеет место для локальных сферически симметричных потенциалов, имеющих достаточно хорошее поведение.

Ответ на вопрос о том, сходится ли борновский ряд равномерно для всех значений энергии, можно дать, если установить, выходит или нет траектория какого-либо собственного значения α за пределы единичного круга. Сходимость является равномерной по E при энергиях в интервале от $E = -\infty$ до $E = +\infty$ тогда и только тогда, когда ни одна из указанных траекторий не выходит за пределы единичного круга. В гл. 10, § 3 будет выведено простое достаточное условие равномерной сходимости борновского ряда для локального сферически симметричного потенциала $V(r)$, состоящее в том, что потенциал $-|V|$ не должен приводить к появлению связанных s -состояний (и s -резонансов с нулевой энергией). Если потенциал во всем пространстве либо всюду положителен, либо всюду отрицателен, то это условие, конечно, является также и необходимым. Пока не ясно, как данное условие связано с условием равномерной сходимости, выраженным через поведение траекторий собственных значений α . Однако можно высказать предположение (до сих пор еще строго не доказанное), что в случае локального сферически симметричного потенциала ни одна из траекторий $\alpha(E)$, соответствующих угловому моменту больше нуля, не может пересекать «ведущей» s -траектории.

Если $E < 0$, то оператор K , определяемый формулой (9.8), эрмитов и для всех целых $N \geq 2$ мы имеем следующее правило сумм:

$$\sum_n [\alpha_n(E)]^N = \text{Sp} [K(E)]^N = \text{Sp} [K(E)]^N. \quad (9.11)$$

Поскольку предполагается, что след $\text{Sp } KK^\dagger$ конечен, то выражение в правой части (9.11) также конечно. Его можно аналитически продолжить в комплексную E -плоскость, до положительных значений E на верхнем берегу разреза функции G . Таким образом, (9.11) остается справедливым и в области положительных энергий. Данное правило сумм иногда оказывается полезным для оценки величины некоторых собственных значений $\alpha(E)$.

Аналитичность функции $\alpha(E)$. В предыдущем рассмотрении считалось само собой разумеющимся, что собственное значение $\alpha(E)$ аналитической операторной функции $K(E)$ также является аналитической функцией, регулярной при всех E , при которых регулярна функция $K(E)$, т. е. всюду, за исключением положительной действительной полуоси. В действительности это необязательно так. Чтобы установить, имеет ли $\alpha(E)$ конечную производную при некотором комплексном значении E или нет, умножим скалярно вектор $\bar{\Phi}_{\alpha^*}$, удовлетворяющий уравнению

$$(\alpha^* - K^\dagger) \bar{\Phi}_{\alpha^*} = 0,$$

на уравнение

$$(\alpha - K) \Phi_\alpha = 0.$$

Такое скалярное произведение является функцией только от E , а не от действительной и мнимой частей E по отдельности. Это следует из того факта, что для действительных отрицательных E

$$K^\dagger = G^{-1} K G \quad (9.12)$$

в силу принципа симметрии Шварца, согласно которому на первом листе римановой поверхности выполняется соотношение

$$K^\dagger(E^*) = G^{-1}(E) K(E) G(E), \quad (9.13)$$

а также из факта существования ветви функции $\alpha(E)$, для которой

$$\alpha^*(E) = \alpha(E^*). \quad (9.14)$$

Если

$$K(E^*) \Phi_\alpha(E^*) = \alpha^* \Phi_\alpha(E^*),$$

то, согласно (9.12), также имеем

$$G^\dagger(E) \bar{\Phi}_{\alpha^*}(E) = \Phi_\alpha(E^*). \quad (9.15)$$

Следовательно,

$$\bar{\Phi}_{\alpha^*}^\dagger(E) = \Phi_\alpha^\dagger(E^*) G^{-1}(E).$$

Дифференцируя теперь по E выражение

$$(\bar{\Phi}_{\alpha^*}, (\alpha - K) \Phi_\alpha) = 0,$$

получаем

$$\frac{d\alpha}{dE} (\bar{\Phi}_{\alpha^*}, \Phi_\alpha) = -(\bar{\Phi}_{\alpha^*}, (E - H_0)^{-2} H' \Phi_\alpha). \quad (9.16)$$

Выражение в правой части всегда конечно (для комплексных E), но нет никакой гарантии того, что скалярное произведение в левой части не может обращаться в нуль. Там, где вектор $\bar{\Phi}_{\alpha^*}$ ортогонален Φ_α , аналитичность функции $\alpha(E)$ может нарушаться.

В конце гл. 7, § 3, п. 3 было показано, что ортогональность векторов Φ_α и $\bar{\Phi}_{\alpha^*}$ имеет место там, где оператор $(K - \alpha)^{-1}$ имеет *двукратный* полюс. Так как для отрицательных значений E оператор $K(E)$ эрмитов, то при

таких E полюсы функции $(K - \alpha)^{-1}$ должны быть простыми. Следовательно, можно предполагать, что полюсы остаются простыми и для других значений E , кроме случайных исключений. Такими случайными исключениями, очевидно, являются точки, в которых при данном значении энергии происходит слияние двух полюсов, так что возникает двукратный полюс¹⁾. Другими словами, высказанное утверждение означает, что $\alpha(E)$ является аналитической функцией E , за исключением тех точек, где две траектории пересекаются (при одном и том же значении энергии). Обсуждение этого вопроса с точки зрения свойств определителей Фредгольма дано в гл. 9, § 3.

Как было показано выше, функция $\alpha(E)$ обладает следующими свойствами:

1. Для отрицательных E она действительна.
2. Когда $\text{Im } E > 0$ (< 0), то $\text{Im } \alpha > 0$ (< 0), если α — «притягивательное» собственное значение, и $\text{Im } \alpha < 0$ (> 0), если α — «отталкивательное» собственное значение.
3. Если $|E| \rightarrow \infty$, причём $\varepsilon \leq \arg E \leq 2\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то имеем

$$E\alpha(E) \rightarrow \text{const} = C.$$

Свойство 3 вытекает из того обстоятельства, что если считать H' ограниченным оператором, то в этом пределе

$$\|E(E - H_0)^{-1}\| \rightarrow 1.$$

Если теперь принять дополнительное предположение, согласно которому:

4. Если функция $\alpha(E)$ является аналитической при любых конечных значениях E в плоскости с разрезом вдоль положительной действительной полуоси, то для нее можно написать спектральное представление или дисперсионное соотношение

$$\alpha(E) = \int_0^{\infty} \frac{d\eta(E')}{E' - E}. \quad (9.17)$$

Здесь $\eta(E')$ — действительная ограниченная неубывающая функция. Для действительных положительных E в пределе, когда $\text{Im } E \rightarrow 0+$, из этого соотношения получаем

$$2 \text{Im } \alpha(E) = \alpha(E + i0) - \alpha(E - i0) = A(E) = 2\pi \frac{d\eta(E)}{dE} \geq 0.$$

Кроме того, нам известно, что

5. $\alpha(E \pm i0)$ — непрерывная функция.

Следовательно, мы можем написать

$$\alpha(E) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dE' A(E')}{E' - E}. \quad (9.17a)$$

Если энергия E отрицательна, то оператор G эрмитов, и поэтому оператор K , определяемый формулой (9.8), также эрмитов. Ортонормированные собственные векторы Ψ_α оператора K

$$(\Psi_\alpha, \Psi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$$

¹⁾ Выражаясь более точно, возможна следующая ситуация: если две траектории пересекаются в точке $E = E_0$, то либо собственное значение α_0 оператора $K(E_0)$ является невырожденным и функция $(K - \alpha)^{-1}$ имеет двукратный полюс при $\alpha = \alpha_0$, либо собственное значение α_0 оператора $K(E_0)$ является дважды вырожденным и функция $(K - \alpha)^{-1}$ имеет простой полюс в точке $\alpha = \alpha_0$. В первом случае функция $\alpha(E)$ имеет точку ветвления при $E = E_0$ и нет никакого однозначного способа продолжить траекторию за точку пересечения. Во втором случае точки ветвления нет; каждую траекторию можно идентифицировать по ее собственным векторам, поскольку последние не совпадают в точке $E = E_0$.

отличаются от собственных векторов Φ_α оператора K . При этом между ними имеется следующая связь:

$$\Phi_\alpha = (-G)^{1/2} \Psi_\alpha.$$

Поскольку Φ_α есть собственный вектор оператора GH' , то

$$(E - H_0) \Phi_\alpha = \frac{1}{\alpha} H' \Phi_\alpha \quad (9.18)$$

и отсюда

$$(\Phi_\alpha, H' \Phi_\beta) = -\alpha \delta_{\alpha\beta}. \quad (9.19)$$

Векторы Ψ_α образуют полный набор¹⁾:

$$\sum_\alpha \Psi_\alpha \Psi_\alpha^\dagger = 1,$$

и, следовательно, векторы Φ_α также образуют полный набор. Из (9.18) и (9.19) получаем

$$\sum_\alpha \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger = -G \quad (9.20)$$

и, согласно (9.15),

$$\sum_\alpha \Phi_\alpha \bar{\Phi}_\alpha^\dagger = -1. \quad (9.21)$$

То обстоятельство, что

$$\mathcal{G} = (1 - K)^{-1} G,$$

позволяет сразу получить с помощью (9.20) представление также и для полной функции Грина:

$$\mathcal{G} = - \sum_\alpha \frac{\Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger}{1 - \alpha} = G - \sum_\alpha \frac{\alpha}{1 - \alpha} \Phi_\alpha \Phi_\alpha^\dagger. \quad (9.22)$$

Как мы видели выше, оба вектора $\Phi_\alpha(E)$ и $\bar{\Phi}_\alpha(E)$ можно аналитически продолжить с отрицательной действительной полуоси E . Конечно, то же самое справедливо и для $\Phi_\alpha^\dagger(E)$. Допустим, что оператор H инвариантен относительно обращения времени, так что он подобно оператору H_0 коммутирует с оператором обращения времени ϑ :

$$[\vartheta, H] = 0.$$

Тогда для отрицательных E имеем

$$(K - \alpha) \vartheta \Phi_\alpha = 0.$$

Если вырождение отсутствует, то

$$\vartheta \Phi_\alpha = \varphi_\alpha \Phi_\alpha, \quad (9.23)$$

где φ_α — фазовый множитель, который можно принять равным единице²⁾; если вырождение имеет место, то можно выбрать базис в вырожденном подпространстве, такой, чтобы

$$\vartheta \Phi_{\alpha i} = \Phi_{\alpha j}. \quad (9.23a)$$

¹⁾ Мы используем сокращенные обозначения. Здесь суммирование производится по всем α_n , где n пробегает все значения от 1 до ∞ .

²⁾ Если $\varphi_\alpha = e^{2i\epsilon}$, то, умножая обе части равенства (9.23) на $e^{-i\epsilon}$ и пользуясь соотношением $e^{-i\epsilon} \vartheta = \vartheta e^{i\epsilon}$, получаем, что функция $e^{i\epsilon} \Phi_\alpha = \Phi'_\alpha$ подчиняется уравнению

$$\vartheta \Phi'_\alpha = \Phi'_\alpha.$$

Однако из свойства (7.70) оператора ϑ вытекает, что

$$\vartheta\Psi = U\Psi^\dagger, \quad (9.24)$$

где U — унитарный оператор и, следовательно,

$$\Phi_\alpha^\dagger = U^\dagger\Phi_\alpha. \quad (9.25)$$

Оператор U можно выбрать так, чтобы он не зависел от энергии [1912], стр. 329).

Таким образом, аналитическое продолжение Φ_α определяет аналитическое продолжение вектора Φ_α^\dagger , так что выражения (9.20) — (9.22) можно продолжить в комплексную E -плоскость вокруг точки $E = 0$ и на действительные значения E , лежащие на верхнем или нижнем берегах разреза. Формулу (9.22) можно далее использовать для записи \mathbf{T} -матрицы

$$T_{\gamma\beta} = (\Psi_{0\gamma}, H'\Psi_{0\beta}) - \sum_{\alpha} \frac{(\Psi_{0\gamma}, H'\Phi_\alpha)(\vartheta\Psi_{0\beta}, H'\Phi_\alpha)}{1-\alpha}, \quad (9.26)$$

здесь все величины вычисляются в точках $E + i\epsilon$, $E > 0$. Напомним, что все собственные значения α также зависят от E .

Аналитическое продолжение условия полноты основано на предположении, что

$$\frac{1}{\alpha} (\Phi_\alpha(E^*), H'\Phi_\alpha(E)) = (\bar{\Phi}_{\alpha^*}, \Phi_\alpha) \neq 0. \quad (9.27)$$

Как мы видели выше, аналитичность нарушается при такой энергии, при которой перестает выполняться (9.27). То, что это действительно должно быть так, ясно также из аналитического продолжения соотношения (9.21). Если бы (9.27) не выполнялось, то умножение равенства (9.21) слева на Φ_α дало бы $\Phi_\alpha = 0$.

Дальнейшие детали, относящиеся к локальному потенциалу, рассмотрены в гл. 11.

2. Борновское приближение

Борновский ряд естественно приводит к построению приближений. Если оставить только первый член по γ , то получим так называемое *первое борновское приближение*, или просто *борновское приближение*. Если положить γ равным единице, то это приближение для \mathbf{T} -матрицы дает

$$T_{\beta\alpha}(E) \approx (\Psi_0(E, \beta), H'\Psi_0(E, \alpha)). \quad (9.28)$$

Вопрос о том, является ли первый член борновского ряда хорошим приближением или нет, конечно, тесно связан с вопросом о сходимости ряда, но не эквивалентен ему. Может иметь место не только такая ситуация, когда ряд сходится, а первый член далеко не совпадает со всей суммой, но и такая, когда ряд расходится, но тем не менее первый член (или сумма нескольких первых членов) дает хорошее приближение. Вообще говоря, соответствующий критерий, очевидно, должен быть связан со *слабостью* взаимодействия. В координатном представлении первый борновский член всегда содержит лишь интеграл от взаимодействия. Следовательно, он представляет собой произведение величины, характеризующей некоторую *область* R , на некоторое усредненное значение взаимодействия \bar{H}' . Кроме того, если $\|K(E)\|$ стремится к нулю при $E \rightarrow \pm\infty$ (это имеет место во многих важных случаях), то независимо от *величины* \bar{H}' борновское приближение будет хорошим при условии, что энергия достаточно высока. В этом смысле оно по своей природе является *высокоэнергетическим* приближением.

Из соображений размерности можно ожидать, что в итоге общим критерием справедливости борновского приближения будет условие вида

$$\frac{\hbar R}{\hbar v} \approx \frac{\hbar R p}{E \hbar} \ll 1, \quad (9.9)$$

где p — импульс частицы и v — ее скорость ¹⁾. В простых случаях данное условие действительно подтверждается и ниже оно будет обосновано для локальных потенциалов. Однако универсального правила не существует, так что каждый конкретный случай нужно исследовать отдельно. Простой практической проверкой является оценка величины второго борновского приближения по сравнению с первым, но даже такой способ недостаточно надежен.

Из рассматриваемых случаев одним из самых важных является случай кулоновского потенциала. Удивительно, что для него борновское приближение для сечения рассеяния оказывается вообще точным. Второе борновское приближение для амплитуды рассеяния фактически изменяет только ее фазу. Однако из простых вычислений это не очевидно, и если данный результат использовать прямо для вычисления сечения, то можно сделать серьезную ошибку. Дальнейшее обсуждение рассеяния в кулоновском поле приведено в гл. 14, § 6.

3. Борновское приближение в методе искаженных волн

Построение функции Грина, T-матрицы или вектора состояния при помощи разложения в степенной ряд необязательно начинать с решения уравнения при полном отсутствии взаимодействия. Если, так же как и в гл. 7, § 2, п. 5, гамильтониан распадается на слагаемые

$$H = H_0 + H'_1 + \gamma H'_2$$

и Ψ_1 есть соответствующее решение уравнения

$$(H_0 + H'_1) \Psi_1 = E \Psi_1,$$

а функция \mathcal{S}_1 равна

$$\mathcal{S}_1 = (E - H_0 - H'_1)^{-1},$$

то вместо (9.1) можно написать

$$\Psi = \Psi_1 + \gamma \mathcal{S}_1 H'_2 \Psi \quad (9.30)$$

или

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \gamma \mathcal{S}_1 H'_2 \mathcal{S}. \quad (9.31)$$

Здесь мы имеем дело с разложением оператора

$$(1 - \gamma K)^{-1}$$

в степенной ряд по γ , причем теперь ядро равно

$$K = \mathcal{S}_1 H'_2.$$

Если предположить, что взаимодействие H'_1 таково, что функцию \mathcal{S}_1 можно найти точно, то разложение по степеням H'_2 оказывается столь же полезным, как и борновский ряд. Если, кроме того, H'_1 включает в себя «почти» все взаимодействие, так что взаимодействие H'_2 является слабым, то это разложение, конечно, сходится значительно быстрее, чем борновский ряд.

Допустим, однако, что взаимодействие H'_1 приводит к появлению связанных состояний. Тогда должна существовать область энергий, в которой новый

¹⁾ Грубо говоря, условие (9.29) означает, что время R/v , которое частица проводит в области действия потенциала, должно быть мало по сравнению с временем \hbar/\bar{H}' , необходимым для того, чтобы взаимодействие оказало значительное влияние на частицу.

ряд расходится. Расходимость обусловлена тем, что при энергии, соответствующей связанному состоянию, функция Грина \mathcal{G}_1 , а также оператор K обращаются в бесконечность. В этой области энергий данный ряд может фактически оказаться хуже, чем борновский ряд даже для слабого взаимодействия H'_2 .

Если ряд по степеням H'_2 оборвать на первом члене, то получающийся результат известен под названием *борновского приближения в методе искаженных волн*. Из формулы (7.76б) следует, что соответствующая T -матрица равна

$$T_{\beta\alpha} \approx T_{1\beta\alpha} + (\Psi_{1\beta}^-, H'_2 \Psi_{1\alpha}^+). \quad (9.32)$$

Данный метод оказывается особенно полезным при рассеянии медленных заряженных частиц. В этом случае в качестве H'_1 можно взять кулоновское взаимодействие, а в качестве H'_2 — остальную часть взаимодействия. Если последняя мала, то T -матрица с хорошим приближением равна T -матрице для кулоновского поля плюс матричный элемент добавочного взаимодействия, вычисленный между векторами состояний, полученными с учетом кулоновского поля. Такое видоизменение борновского приближения особенно важно потому, что влияние кулоновского поля на рассеяние очень велико при малых относительных скоростях. Следует помнить, что в качестве начального состояния требуется брать состояния с расходящимися волнами, а в качестве конечного состояния — состояния со сходящимися волнами.

4. Связанные состояния и борновское приближение

То обстоятельство, что борновский ряд для оператора T начинает расходиться, когда энергия проходит через значение, соответствующее первому связанному состоянию, можно использовать для вычисления энергии связи. Рассмотрим борновское разложение для T -матрицы

$$T_{\beta\alpha} = \sum_n (T_{\beta\alpha})_n, \quad (9.33)$$

где

$$(T_{\beta\alpha})_n = (\Psi_0(\beta), H' K^n \Psi_0(\alpha)). \quad (9.34)$$

Здесь Ψ_0 — векторы состояний свободных частиц для того же самого значения E , при котором берется оператор K . Если энергия меньше энергии наинизшего связанного состояния, то ряд (9.33) сходится. Следовательно, согласно признаку сходимости ряда, должно выполняться неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(T_{\beta\alpha})_{n+1}|}{|(T_{\beta\alpha})_n|} < 1. \quad (9.35)$$

Когда энергия проходит через значение, соответствующее связанному состоянию, этот критерий должен нарушаться, а при энергии, равной самой энергии связи, должно иметь место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(T_{\beta\alpha})_{n+1}}{(T_{\beta\alpha})_n} = 1, \quad (9.36)$$

поскольку при такой энергии сумма ряда должна стремиться к бесконечности.

Можно утверждать, что при значениях энергии, превышающих энергию связанного состояния, не для всех матричных элементов оператора T борновский ряд расходится. Действительно, если только нет вырождения, то подпространство, на котором T имеет полюс и, следовательно, в котором ряд расходится, является одномерным. Однако какой-либо из векторов состояния свободной частицы Ψ_0 , используемый для вычисления T -матрицы, только случайно может оказаться ортогональным собственному вектору связанного состояния. Поэтому можно ожидать, что для всех искомым матричных элемен-

тов борновское разложение расходится. Конечно, если вычисляются матричные элементы между состояниями с фиксированным угловым моментом, то существенны только связанные состояния с тем же самым угловым моментом.

Очевидно, что в наинишем приближении (9.36) эквивалентно

$$(T_{\beta\alpha})_1 = (T_{\beta\alpha})_0$$

или более подробно

$$(\Psi_0(\beta, E), H'\Psi_0(\alpha, E)) - (\Psi_0(\beta, E), H'G(E)H'\Psi_0(\alpha, E)) = 0. \quad (9.37)$$

Поскольку значение энергии, являющееся решением уравнения (9.37), отрицательно, то нет необходимости соблюдать различие между G^+ и G^- . Кроме того, если только векторы состояний Ψ_0 не ортогональны собственному вектору связанного состояния, их характер совершенно несуществен. В частности, необязательно, чтобы они зависели от энергии. Действительно, если в качестве этих векторов выбрать собственные функции, сходные с волновыми функциями связанного состояния, то можно ожидать, что тем самым приближение только улучшится.

Легко усмотреть, что уравнение (9.37) представляет просто другую форму точного уравнения

$$(\Psi, (K-1)\Phi) = 0$$

для собственного вектора Φ связанного состояния. Если в качестве Ψ выбрать $H'\Phi$, то это уравнение является стационарным по отношению к малым вариациям вектора Φ :

$$\delta(\Phi, H'(K-1)\Phi) = 0 \quad \text{при} \quad (K-1)\Phi = 0,$$

поскольку тогда

$$K^\dagger H'\Phi = H'\Phi.$$

Следовательно, разрешив уравнение (9.37) относительно E с помощью семейства пробных функций

$$\Psi_0(\alpha) = \Psi_0(\beta) = \Phi,$$

собственный вектор связанного состояния можно аппроксимировать, выбрав такую пробную функцию, для которой уравнение (9.37) является стационарным. Таким образом, использование наинишего приближения вместо точного соотношения (9.36) отличается от обычного вариационного метода только заменой $H - E$ на $H'(K-1)$. Детальная методика уточнения приближения в обоих методах, конечно, различна.

§ 2. МЕТОД ШМИДТА (МЕТОД КВАЗИЧАСТИЦ)

Если существует собственное значение α ядра K , определяемого формулой (9.2), величина которого больше единицы, то, как мы знаем, борновский ряд расходится. Ниже мы обсудим способ преодоления этой трудности.

Общей основой данного способа является свойство «в» вполне непрерывных операторов, приведенное в гл. 7, § 3, п. 2. Согласно этому свойству, если K — вполне непрерывный оператор и ε — любое заданное положительное число, то существует оператор K' конечного ранга, такой, что $K = K' + M$ и $\|M\| < \varepsilon$. Следовательно, с помощью резольвенты оператора K' (которую можно найти в явном виде алгебраическими методами) можно построить выражение для резольвенты оператора K в виде сходящегося ряда по степеням M , если, так же как и в «борновском приближении в методе искаженных волн», воспользоваться тождеством

$$(1 - \gamma K)^{-1} = (1 - \gamma K')^{-1} [1 - \gamma M (1 - \gamma K')^{-1}]^{-1}.$$

Ниже мы проведем соответствующие выкладки подробно.

Переход к взаимодействию, состоящему из двух отдельных членов. Допустим, что взаимодействие H' заменено другим, которое с использованием диадных обозначений можно записать в виде

$$H'' = H' - H' \Phi \Psi^\dagger H'. \quad (9.38)$$

При этом

$$H'' \Phi = \rho H' \Phi, \quad \Psi^\dagger H'' = \rho \Psi^\dagger H', \quad (9.39)$$

где

$$\rho = 1 - (\Psi, H' \Phi). \quad (9.40)$$

Выразим исходный оператор T , удовлетворяющий уравнению

$$T = H' + TGH',$$

через новый оператор T' , который подчиняется уравнению

$$T' = H'' + T'GH''. \quad (9.41)$$

Подстановка выражения (9.38), являющегося определением оператора H'' , в уравнение для T дает

$$T = H'' + TGH'' + T \Phi \Psi^\dagger H'.$$

Переносим второй член в правой части равенства в левую часть и используя определение (9.41) оператора T' , а также формулы (9.39), получаем

$$T = T' + \frac{1}{\rho} T \Phi \Psi^\dagger T'.$$

Действуя левой и правой частями этого уравнения на вектор Φ

$$T \Phi = \frac{\rho}{c} T' \Phi,$$

где

$$c = \rho - (\Psi, T' \Phi), \quad (9.42)$$

имеем

$$T = T' + \frac{1}{c} T' \Phi \Psi^\dagger T'. \quad (9.43)$$

Полученный компактный результат имеет смысл представить ниже в несколько более длинной записи. Это обусловлено тем, что, как будет видно ниже, нас особенно интересует случай, когда ρ и c малы. Подстановка выражения (9.41) для T' в формулу (9.42) дает

$$c = \rho - \rho(1 - \rho) - \rho(\Psi, T'GH'\Phi) = \rho^2 c'.$$

Аналогичным образом получаем

$$T' \Phi \Psi^\dagger T' = \rho^2 B_2 \Phi \Psi^\dagger B_1,$$

где

$$c' = 1 - (\Psi, B_1GH'\Phi) = 1 - (\Psi, H'GB_2\Phi), \quad (9.44)$$

$$B_1 = H'(1 + GT'), \quad B_2 = (1 + T'G)H'. \quad (9.45)$$

В итоге имеем

$$T = T' + \frac{1}{c'} B_2 \Phi \Psi^\dagger B_1. \quad (9.46)$$

Последнее выражение можно использовать даже в том случае, когда $\rho = 0$.

Аналогичным путем можно выразить функцию Грина $\mathcal{G}(E)$ через новую функцию Грина

$$\mathcal{G}'(E) = (E - H_0 - H'')^{-1},$$

а именно

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \frac{1}{\Delta} \mathcal{G}' H' \Phi \Psi^\dagger H' \mathcal{G}', \quad (9.47)$$

где

$$\Delta = 1 - (\Psi, H' \mathcal{G}' H' \Phi) = c'. \quad (9.48)$$

Подстановка (9.47) дает другое выражение:

$$\frac{1}{\Delta} = 1 + (\Psi, H' \mathcal{G}' H' \Phi). \quad (9.49)$$

Изменение гамильтониана на оператор конечного ранга. Полученные результаты легко обобщаются на случай, когда разность H'' и H' является оператором конечного ранга, т. е. когда в выражение вида (9.38) входит конечная сумма сепарабельных операторов:

$$H'' = H' - \sum_i H' \Phi_i \Psi_i^\dagger H'. \quad (9.38a)$$

В этом случае вместо (9.39) имеем

$$H'' \Phi_j = \sum_i H' \Phi_i \rho_{ij}, \quad \Psi_j^\dagger H'' = \sum_i \rho_{ji} \Psi_i^\dagger H', \quad (9.39a)$$

где

$$(\Psi_i, H' \Phi_j) = \delta_{ij} - \rho_{ij}. \quad (9.40a)$$

Уравнение (9.43) заменяется уравнением

$$T = T' + T' \left[\sum_{ij} \Phi_i (c^{-1})_{ij} \Psi_j^\dagger \right] T', \quad (9.43a)$$

где

$$c_{ji} = \rho_{ji} - (\Psi_j, T' \Phi_i), \quad (9.42a)$$

а вместо (9.46) имеем

$$T = T' + B_2 \left[\sum_{ij} \Phi_i (c^{-1})_{ij} \Psi_j^\dagger \right] B_1, \quad (9.46a)$$

где

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= \delta_{ij} - (\Psi_j, B_1 G H' \Phi_i) = \\ &= \delta_{ij} - (\Psi_j, H' G B_2 \Phi_i), \end{aligned} \quad (9.44a)$$

$$c'_{ji} = \delta_{ji} - (\Psi_j, H' \mathcal{G}' H' \Phi_i) = \Delta_{ij}. \quad (9.48a)$$

Аналогично для функции Грина получаем

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}' + \mathcal{G}' H' \left[\sum_{ij} \Phi_i (\Delta^{-1})_{ij} \Psi_j^\dagger \right] H' \mathcal{G}', \quad (9.47a)$$

где

$$(\Delta^{-1})_{ij} = \delta_{ij} + (\Psi_i, H' \mathcal{G}' H' \Phi_j). \quad (9.49a)$$

Сдвиг собственных значений. Мы должны теперь соответствующим образом выбрать векторы Φ и Ψ . Пусть α — собственное значение оператора $K = GH'$, а α^* — собственное значение оператора K^\dagger . В качестве Φ и Ψ выберем следующие векторы:

$$\Phi = \Phi_\alpha(E), \quad K(E) \Phi_\alpha(E) = \alpha(E) \Phi_\alpha(E), \quad (9.50)$$

$$\Psi = b \Phi_\alpha(E^*), \quad K(E^*) \Phi_\alpha(E^*) = \alpha(E^*) \Phi_\alpha(E^*). \quad (9.51)$$

Согласно (9.15), получаем

$$H'\Psi = \alpha^* b \bar{\Phi}_{\alpha^*}(E). \quad (9.52)$$

При этом имеет место следующее условие ортогональности:

$$b^* \alpha (\bar{\Phi}_{\alpha^*}, \Phi_\beta) = (\Psi, H'\Phi_\beta) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (9.53)$$

и, согласно (9.40),

$$\rho = 1 - b^* (\Phi_\alpha(E^*), H'\Phi_\alpha(E)) = 1 - b^* \alpha (\bar{\Phi}_{\alpha^*}, \Phi_\alpha). \quad (9.53a)$$

Если K — вполне непрерывный, а H' — ограниченный операторы, то новое ядро

$$K' = K - K(\Phi\Psi^\dagger H' = K[1 - \Phi\Psi^\dagger H'] \quad (9.54)$$

также является вполне непрерывным оператором. Оно имеет те же собственные значения, что и оператор K , за исключением собственного значения α . В этом очень легко убедиться. Пусть K' действует на собственный вектор Φ_β оператора K при $\beta \neq \alpha$. Тогда, согласно (9.53), получаем

$$K'\Phi_\beta = K\Phi_\beta = \beta\Phi_\beta,$$

так что β является собственным значением также и оператора K' . Пусть далее β есть собственное значение оператора K' , но не оператора K , так что

$$K'\chi = \beta\chi.$$

Тогда из (9.54) следует, что

$$(K - \beta)\chi = \alpha(\Psi, H'\chi)\Phi, \quad (9.55)$$

и поскольку β не принадлежит спектру оператора K , получаем

$$\chi = \alpha(\Psi, H'\chi)(K - \beta)^{-1}\Phi = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(\Psi, H'\chi)\Phi.$$

Подействуем на этот вектор оператором H' и умножим скалярно на Ψ

$$(\Psi, H'\chi)(\alpha - \beta) = \alpha(1 - \rho)(\Psi, H'\chi).$$

Поскольку β по предположению не принадлежит спектру оператора K , то из (9.55) вытекает, что $(\Psi, H'\chi) \neq 0$. Следовательно,

$$\beta = \alpha\rho.$$

Остается единственная возможность: K' также имеет собственное значение α . Полагая $\beta = \alpha$, действуя оператором H' на правую и левую части равенства (9.55) и умножая скалярно обе части получившегося равенства на Ψ , имеем, согласно (9.51) и (9.53),

$$0 = (\Psi, H'\chi)\alpha(1 - \rho).$$

Отсюда можно сделать вывод, что либо $\rho = 1$, т. е.

$$(\Psi, H'\Phi_\alpha) = 0,$$

либо же $(\Psi, H'\chi) = 0$. В последнем случае из (9.55) следует, что χ является собственным вектором оператора K , принадлежащим собственному значению α (вектор χ может совпадать, а может и не совпадать с вектором Φ_α), и что он ортогонален собственному вектору оператора K^\dagger , принадлежащему собственному значению α^* . Согласно результатам гл. 7, § 3, п. 3, данный факт может быть обусловлен только полюсом резольвенты $(K - \alpha)^{-1}$, имеющим порядок больше единицы.

Подводя итог вышеизложенному, можно сказать следующее. Оператор K' имеет точно такой же спектр, как и оператор K , за исключением собственного значения α , которое переходит в $\alpha\rho$. Доказательство теряет силу, если резольвента $(K - \alpha)^{-1}$ имеет полюс, порядок которого больше единицы. Последнюю возможность можно рассматривать как случайную, и в дальнейшем мы не будем ее учитывать.

Метод обеспечения сходимости борновского ряда. Если теперь все собственные значения оператора $K = GH'$ по величине меньше единицы, кроме одного собственного значения α , величина которого превышает единицу, то его собственные векторы можно выбрать для замены оператора H' по формулам (9.38), (9.50) и (9.51). Значение величины ρ можно контролировать при помощи числа b [если только $\alpha(E)$ не окажется точкой пересечения двух траекторий], причем можно сделать так, чтобы величина $|\alpha\rho|$ была меньше единицы, $|\alpha\rho| < 1$. При этом борновский ряд для T' или \mathcal{G}' будет сходиться и формулы (9.43) или (9.46) будут определять T через T' , а формула (9.47) — \mathcal{G} через \mathcal{G}' . Ясно, что в каком-то смысле «оптимальный» выбор параметра ρ соответствует значению $\rho = 0$. Можно ожидать, что при таком ρ борновский ряд будет сходиться быстрее всего, поскольку в этом случае «величина» H'' будет «наименьшей». При этом для T нужно использовать выражение (9.46), а не (9.43).

Если воспользоваться формулами (9.49), (9.50) и (9.53), то выражение (9.48) для s' или Δ можно упростить:

$$\frac{1}{\Delta} = 1 + (\Psi, H' (1 - K)^{-1} K\Phi) = \frac{1 - \alpha\rho}{1 - \alpha}. \quad (9.56)$$

Замена (9.38) в гамильтониане приводит к потере ровно одного полюса в функции Грина \mathcal{G} . Если заменить H' на $\gamma H'$ и H'' на $\gamma H''$, то легко видеть, что \mathcal{G} имеет полюс при $\gamma = 1/\alpha$, тогда как \mathcal{G}' в этой точке полюса не имеет. Следовательно, из (9.47) вытекает, что функция Δ в этой точке должна иметь нуль. Если теперь ввести параметр интенсивности взаимодействия γ , то (9.56) перейдет в выражение

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1 - \alpha\gamma\rho}{1 - \alpha\gamma}, \quad (9.57)$$

из которого в явном виде следует, что $\Delta = 0$, когда $\gamma = 1/\alpha$. Более того, \mathcal{G}' имеет полюс при $\gamma = 1/\alpha\rho$, а \mathcal{G} в этой точке полюса не имеет. Из (9.57) следует, что в данной точке $1/\Delta = 0$. Это приводит к замене кажущегося полюса второго порядка в (9.47) простым полюсом, который в свою очередь компенсируется первым членом.

Если вне круга единичного радиуса имеется более одного собственного значения α , то методика должна основываться на соотношениях (9.38а) — (9.48а). Поскольку мы знаем, что при каждом значении энергии число собственных значений α вне единичного круга является конечным, то борновский ряд всегда можно сделать сходящимся путем конечного числа соответствующих операций. Если $|K(E)| \rightarrow 0$ при $E \rightarrow +\infty$, то фактически это число является *равномерно* ограниченным. Более того, в этом случае для каждого E_0 число собственных значений $\alpha(E)$, которые при $E < E_0$ расположены вне единичного круга, равномерно ограничено. Следовательно, путем конечного числа операций борновский ряд можно сделать *равномерно* сходящимся для всех энергий.

Ускорение сходимости. Ту же процедуру можно использовать для ускорения сходимости борновского ряда, если только он вообще сходится. Если вблизи окружности единичного радиуса имеется лишь небольшое число собственных значений α , то можно сместить их к началу координат, причем следует ожидать, что остающийся ряд будет сходиться более быстро. Действительно, мы можем перейти к пределу, когда *все* собственные значения сдвигаются

к нулю. Если $E < 0$, то оператор K в формуле (9.8) эрмитов и векторы Φ_α образуют полный набор, т. е. имеет место соотношение, аналогичное (9.21),

$$\sum_i \Phi_i \Psi_i H' = 1, \quad (9.58)$$

при условии, что Φ_α нормированы так же, как и в (9.19). Каждое число b нужно выбрать так, чтобы $\rho = 0$. Тогда из (9.38а) будет следовать, что $H'' = 0$ и $j' = G$. Выражение (9.47а) принимает просто вид

$$\mathcal{G} = G + GH' \left[\sum_{ij} \Phi_i (\Delta^{-1})_{ij} \Psi_j^\dagger \right] H'G = G - \sum_{ij} \alpha_i \Phi_i (\Delta^{-1})_{ij} \Phi_j^\dagger. \quad (9.59)$$

Конечно, матрица Δ теперь имеет бесконечную размерность. Далее, так же как и в гл. 9, § 1, можно осуществить аналитическое продолжение соотношения (9.58) на положительные значения энергии.

Используя формулы (9.49а), (9.50) и (9.40а), получаем выражение, аналогичное (9.56),

$$(\Delta^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij} - \alpha_j \rho_{ij}}{1 - \alpha_j}, \quad (9.60)$$

или, вводя интенсивность взаимодействия γ , находим

$$(\Delta^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij} - \gamma \alpha_j \rho_{ij}}{1 - \gamma \alpha_j}. \quad (9.60a)$$

Но поскольку $\rho_{ij} = 0$, то

$$(\Delta^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{1 - \gamma \alpha_i} \quad (9.61)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{G} = G - \sum_i \frac{\gamma \alpha_i \Phi_i \Phi_i^\dagger}{1 - \gamma \alpha_i}. \quad (9.62)$$

Последнее выражение в точности совпадает с формулой (9.22), полученной ранее.

Физическая интерпретация. Физическая интерпретация полученных результатов основана на том, что функции Грина имеют смысл функций распространения или *пропагаторов*, а их полюсы соответствуют связанным состояниям или состояниям свободных частиц. Вспомним, к примеру, интерпретацию решения уравнения (6.15а), полученного методом итераций. Например, полный пропагатор для двух частиц в (9.47) или (9.47а) представлен в виде суммы двух членов; первый член представляет редуцированный пропагатор. Второй член разумно интерпретировать следующим образом. Сначала происходит распространение частиц, описываемое «редуцированным» пропагатором, после которого следует «вертекс» $\Psi^\dagger H'$, соответствующий испусканию двух частиц и образованию квазисвязанного состояния или квазичастицы. Движение последней описывается «пропагатором» $1/\Delta$. Ее последующий «распад» описывается вертексом $H'\Phi$, а распространение испускаемой пары частиц — функцией Грина \mathcal{G}' . На основании указанной физической интерпретации рассматриваемый метод называют также *методом квазичастиц*.

Использование метода квазичастиц для построения приближений. Очевидно, что в данном случае точный путь решения также позволяет естественным образом строить приближения. Можно ожидать, что если исключены все собственные значения α оператора K , кроме тех, величина которых мала по сравнению с единицей, то оставшийся борновский ряд для \mathcal{G}' или T' сходится быстро. С практической точки зрения главная проблема состоит в том, каким

образом построить собственные векторы Φ_α и Φ_{α^*} оператора K . Однако эту задачу также необязательно решать точно. Для использования формулы (9.38) необходимо знать лишь *приближенные* решения уравнений (9.50) и (9.51). Если имеется только одно «большое» собственное значение α , то причина, по которой взаимодействие H'' является слабым в отличие от взаимодействия H' , состоит в том, что, в то время как действие оператора GH' на Φ_α дает большую величину, действие GH'' на Φ_α дает малую величину. Но того же результата можно достичь, если в качестве векторов Φ и $H'\Psi$ выбрать *приближенные* собственные векторы оператора GH' . При таком выборе метод Шмидта превращается в практический метод построения приближений. Возможности применения этого метода зависят не столько от *интенсивности* взаимодействия H' , сколько от того, как много векторов в гильбертовом пространстве «чувствуют» интенсивность взаимодействия H' . Если H' велико только на одном векторе, а на других мало (в некотором не строгом, но очевидном смысле), то ряд, получающийся в методе квазичастиц, будет очень быстро сходиться. Однако если H' велико на значительном подпространстве всего гильбертова пространства, то данный метод является громоздким и непрактичным.

Связанные состояния. Метод Шмидта можно также использовать для определения связанных состояний. Если взаимодействие H' приводит к появлению одного связанного состояния, то при отрицательных значениях энергии \mathcal{E} имеет один полюс вне единичного круга. Его положение определяется уравнением

$$\Delta = 0,$$

где Δ дается формулой (9.48). В низшем приближении из этого уравнения следует

$$(\Psi, H'G(E)H'\Phi) = 1. \quad (9.63)$$

Векторы Ψ и Φ являются пробными функциями, нормированными оптимальным образом, так чтобы $\rho = 0$, или, согласно (9.40),

$$(\Psi, H'\Phi) = 1. \quad (9.64)$$

Легко видеть, что оба уравнения (9.63) и (9.64) идентичны уравнениям (9.37). В низшем порядке аппроксимация связанных состояний, основанная на методе Шмидта, совпадает с приближением, получаемым с помощью борновского ряда.

§ 3. МЕТОД ФРЕДГОЛЬМА

Метод Фредгольма является способом построения оператора, обратного оператору

$$M = 1 - \gamma K = 1 - \gamma GH',$$

который непосредственно обобщает способ, используемый в случае, когда K есть матрица конечной размерности. В этом случае M^{-1} является матрицей N , элементы которой после транспонирования равны алгебраическим дополнениям матрицы M , деленным на ее детерминант,

$$NM = MN = 1\Delta, \quad \Delta = \det M. \quad (9.65)$$

Как Δ , так и N можно разложить в ряды по степеням γ (которые в случае матриц конечной размерности сводятся к полиномам):

$$\begin{aligned} N &= \sum_n \gamma^n N_n, & N_0 &= \mathbf{1}; \\ \Delta &= \sum_n \gamma^n \Delta_n, & \Delta_0 &= 1. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Используя известное правило дифференцирования детерминанта, получаем

$$\frac{d\Delta}{d\gamma} = \text{Sp } N \frac{dM}{d\gamma} = -\text{Sp } NK. \quad (9.67)$$

Левую часть этого равенства можно вычислить с помощью (9.65):

$$-\mathbf{1} \text{Sp } NK = -KN + M \frac{dN}{d\gamma} = -NK + \frac{dN}{d\gamma} M.$$

Подставляя сюда разложения (9.66) и сравнивая почленно выражения в левой и правой частях, находим следующее рекуррентное соотношение:

$$N_n = KN_{n-1} - \frac{1}{n} \mathbf{1} \text{Sp } KN_{n-1} = N_{n-1}K - \frac{1}{n} \mathbf{1} \text{Sp } KN_{n-1}, \quad n \geq 1. \quad (9.68)$$

В то же время подстановка (9.66) в (9.67) дает

$$\Delta = \mathbf{1} - \sum_1^{\infty} \frac{\gamma^n}{n} \text{Sp } KN_{n-1}. \quad (9.69)$$

Соотношения (9.66), (9.68) и (9.69) теперь можно использовать для построения обратного оператора:

$$M^{-1} = \frac{N}{\Delta}. \quad (9.70)$$

Иногда более удобна следующая запись:

$$M^{-1} = \mathbf{1} + \frac{Y}{\Delta}, \quad (9.71)$$

где

$$\begin{aligned} Y &= KN = \sum_0^{\infty} \gamma^n Y_n, \\ Y_n &= KY_{n-1} + K\Delta_n = \\ &= Y_{n-1}K + K\Delta_n, \quad n \geq 1, \\ Y_0 &= K, \end{aligned} \quad (9.72)$$

$$\Delta = \sum_0^{\infty} \gamma^n \Delta_n, \quad \Delta_n = -\frac{1}{n} \text{Sp } Y_{n-1}, \quad \Delta_0 = \mathbf{1}. \quad (9.73)$$

Величина Δ называется *определителем Фредгольма*, а Y — *первым минором определителя Фредгольма*.

Если K — оператор или матрица, имеющая бесконечную размерность, то необходимо принять, что все следы

$$\text{Sp } K^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

конечны. Кроме того, нужно показать, что ряд по степеням γ сходится.

Доказательство сходимости ряда. Для доказательства сходимости выражений (9.72) и (9.73) удобно найти функции Y_n из рекуррентных соотношений (9.72). Предполагая гильбертово пространство сепарабельным, введем ортонормированный базис. Тогда решение уравнений (9.72) будет иметь вид

$$\begin{aligned} (Y_n)_{\alpha\beta} &= \frac{(-1)^n}{n!} (\varkappa_n)_{\alpha\beta}, \\ (\varkappa_n)_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \begin{vmatrix} K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\alpha_1} & \dots & K_{\alpha\alpha_n} \\ K_{\alpha_1\beta} & K_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & K_{\alpha_1\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_n\beta} & K_{\alpha_n\alpha_1} & \dots & K_{\alpha_n\alpha_n} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (9.74)$$

То, что (9.74) действительно является решением уравнений (9.72), можно показать, разлагая определитель по элементам первой строки,

$$\begin{aligned}
 (\kappa_n)_{\alpha\beta} &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \left(K_{\alpha\beta} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & K_{\alpha_1\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_n\alpha_1} & \dots & K_{\alpha_n\alpha_n} \end{vmatrix} - K_{\alpha\alpha_1} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\beta} & K_{\alpha_1\alpha_2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_n\beta} & \dots & \dots \end{vmatrix} + \dots \right) = \\
 &= K_{\alpha\beta} \text{Sp } \kappa_{n-1} - n (K\kappa_{n-1})_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, величины Y_n , определяемые формулой (9.74), удовлетворяют рекуррентным соотношениям (9.72).

Для доказательства сходимости рядов в (9.72) и (9.73) оценим величину (9.74) с помощью неравенства Адамара, согласно которому, если все элементы a_{nm} детерминанта размерности p по абсолютной величине меньше единицы, то

$$|\det(a_{nm})| \leq p^{1/2p}.$$

Если данное неравенство применить для оценки (9.74), то из него следует: когда f_α и f_β таковы, что

$$|K_{\alpha\beta}| \leq f_\alpha f_\beta, \tag{9.75}$$

то, согласно формуле Стирлинга,

$$\begin{aligned}
 |(Y_n)_{\alpha\beta}| &\leq \frac{1}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} f_\alpha f_\beta f_{\alpha_1}^2 \dots f_{\alpha_n}^2 (n+1)^{1/2(n+1)} \approx \\
 &\approx (2\pi)^{-1/2} f_\alpha f_\beta \left(\sum_{\sigma} f_\sigma^2 \right)^n e^{-1/2n \ln n + n + 1/2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\sum |K_{\alpha\alpha}| < \sum f_\alpha^2 < \infty \tag{9.75a}$$

ряды в (9.72) и (9.73) сходятся независимо от величины γ . Поэтому оба ряда представляют собой целые аналитические функции γ .

Подстановка (9.74) в (9.73) дает выражение для определителя Фредгольма в более подробном виде

$$\Delta = 1 + \sum_1^\infty \frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \begin{vmatrix} K_{\alpha_1\alpha_1} & \dots & K_{\alpha_1\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_n\alpha_1} & \dots & K_{\alpha_n\alpha_n} \end{vmatrix}. \tag{9.76}$$

Изложенный метод в равной мере применим и тогда, когда индексы принимают не дискретный ряд значений, а изменяются непрерывно в некоторой области, т. е. когда мы решаем интегральное уравнение. В этом случае условие (9.75a), конечно, принимает вид

$$\int dx |K(x)| \leq \int dx f^2(x) < \infty. \tag{9.756}$$

Кроме того, данный метод применим и тогда, когда «индексы» представляют собой наборы переменных, некоторые из которых являются дискретными, а остальные — непрерывными, т. е. когда мы имеем дело с системой интегральных уравнений. В таком случае трудно записать выражение, аналогичное (9.74), но формулы (9.72) и (9.73) остаются неизменными.

Другие выражения для определителя Фредгольма. Формулу (9.73) для определителя Фредгольма Δ можно переписать в другом виде, подставляя

в нее выражение (9.72). Повторное применение (9.72) дает для $n \geq 1$

$$(n+1)\Delta_{n+1} + \sum_{m=0}^n \Delta_m \kappa_{n+1-m} = 0, \quad (9.77)$$

где

$$\kappa_p = \text{Sp } K^p.$$

Если теперь ввести обозначение

$$\Delta = e^{-g},$$

так что

$$\frac{d\Delta}{d\gamma} + \Delta \frac{dg}{d\gamma} = 0,$$

то n -кратное дифференцирование по γ дает¹⁾

$$\sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} g^{(m+1)} \Delta^{(n-m)} + \Delta^{(n+1)} = 0. \quad (9.78)$$

Произведем теперь разложение

$$g = \sum_1^{\infty} \gamma^n C_n, \quad C_n = \frac{1}{n!} g^{(n)}|_{\gamma=0}$$

и положим в (9.78) $\gamma = 0$:

$$\sum_{m=0}^n (m+1) C_{m+1} \Delta_{n-m} + (n+1) \Delta_{n+1} = 0.$$

Из сравнения с (9.76) видно, что

$$C_m = \frac{\kappa_m}{m}$$

или

$$\Delta = \exp \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^n}{n} \kappa_n \right). \quad (9.79)$$

Этот же результат можно получить из (9.67), т. е. из равенства

$$\frac{d}{d\gamma} \ln \det M = \text{Sp } M^{-1} \frac{d}{d\gamma} M$$

путем интегрирования

$$\Delta = \exp \left[- \int_0^{\gamma} d\gamma' \text{Sp } K (1 - \gamma' K)^{-1} \right] = \exp [\text{Sp } \ln (1 - \gamma K)] \quad (9.79a)$$

и последующего разложения по γ .

При сравнении (9.79) с (9.73) следует помнить, что, хотя выражение (9.79) записано в более подробном виде и кажется более полезным, однако ряд в (9.79) сходится при более жестких условиях, чем в (9.73). Действительно, ряд (9.79) расходится, как только γ становится по величине больше наименьшего нуля функции $\Delta(\gamma)$, в то время как сходимость ряда (9.73) не зависит от величины γ . Если учесть замечания, которые сделаны ниже относительно смысла нулей функции Δ , то из сказанного выше следует, что ряд (9.79) сходится тогда и только тогда, когда сходится борновский ряд для M .

¹⁾ Здесь используются обозначения $\Delta^{(m)} = d^m \Delta / d\gamma^m$ и т. д.

Рекуррентные соотношения (9.77) позволяют представить определитель Фредгольма в другой полезной форме. Если рассматривать соотношения (9.77) как уравнения, то они допускают решение, которое можно выразить через следы степеней оператора K :

$$\Delta_n = \frac{(-1)^n}{n!} \begin{vmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \kappa_2 & \kappa_1 & 2 & 0 & \dots \\ \kappa_3 & \kappa_2 & \kappa_1 & 3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & n-1 \\ \kappa_n & \kappa_{n-1} & \kappa_{n-2} & \kappa_{n-3} & \kappa_1 \end{vmatrix}. \quad (9.80)$$

Аналогичное выражение для κ_n имеет вид

$$\kappa_n = \begin{vmatrix} \kappa_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \kappa_2 & \kappa_1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_n & \kappa_{n-1} & \kappa_{n-2} & \dots & \kappa_1 & n \\ K^{n+1} & K^n & K^{n-1} & \dots & K^2 & K \end{vmatrix}. \quad (9.80a)$$

Соотношения (9.68) — (9.70) или (9.71) — (9.73) дают представление операторной функции $(1 - \gamma K)^{-1}$ переменной γ в виде *целой* аналитической операторной функции, деленной на целую обычную неоператорную, комплекснозначную функцию. Следовательно, все особенности функции $(1 - \gamma K)^{-1}$ должны быть обусловлены нулями знаменателя $\Delta(\gamma)$. Таким образом, нули функции $\Delta(\gamma)$ являются характеристическими значениями оператора K . Если выполнено условие (9.75a), то оператор K принадлежит к классу Гильберта — Шмидта:

$$\text{Sp } K^\dagger K < \infty,$$

и является вполне непрерывным оператором. Но известно, что спектр такого оператора является точечным, представляющим счетное множество, а у оператора $(1 - \gamma K)^{-1}$ имеются только полюсы, которые не имеют точек сгущения, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки. Функция $\Delta(\gamma)$ является целой функцией, нули которой и есть полюсы оператора $(1 - \gamma K)^{-1}$.

Выражение спектра через нули функции Δ . Тот факт, что полюсы резольвенты $(K - \alpha)^{-1}$ совпадают с нулями функции $\Delta(\gamma)$ при $\gamma = 1/\alpha$, позволяет исследовать спектр оператора K , рассматривая нули функции Δ . Каков смысл появления *кратного* нуля функции Δ при $\gamma = \gamma_0$? Появление кратного нуля может указывать либо на то, что имеет место вырождение либо на то, что полюс оператора $(K - \alpha)^{-1}$ не является простым. В случае операторов конечной размерности доказательство спектральной теоремы состоит как раз в доказательстве того, что для эрмитовых операторов *алгебраическая кратность* (кратность нулей функции Δ) совпадает с геометрической кратностью (с вырождением). То же самое справедливо и для случая операторов бесконечной размерности. Для эрмитовых операторов нуль функции Δ порядка n указывает на n -кратное вырождение соответствующего собственного значения (или характеристического значения). Числитель резольвенты в той же самой точке имеет нуль порядка $n - 1$, так что результирующий полюс является простым. В более общем случае алгебраическая кратность может отличаться от геометрической. При этом n -кратный нуль функции Δ может указывать либо на вырождение, либо на то, что верхний индекс оператора $K - \alpha$ больше единицы [т. е. полюс оператора $(K - \alpha)^{-1}$ имеет порядок больше единицы], либо на то и на другое.

С помощью функции Δ можно также рассмотреть аналитические свойства функции, описывающей зависимость положения полюсов оператора $(K\gamma - 1)^{-1}$

от энергии E . Определитель Фредгольма Δ является регулярной аналитической функцией как γ , так и E для всех γ и всех E на физическом листе E -плоскости. Следовательно, уравнение

$$\Delta(\gamma, E) = 0$$

определяет функцию $\gamma(E)$, аналитическую всюду, кроме тех точек, в которых Δ как функция γ имеет двукратный нуль. Но нули функции Δ почти всюду являются простыми, поскольку только такие нули возможны на отрицательной действительной полуоси \bar{E} . (В случае когда имеет место значительное вырождение, функцию Δ для всех E можно разложить на множители и временно рассматривать эти множители по отдельности.) Следовательно, появление двукратных нулей можно ожидать там, где при одной и той же энергии происходит пересечение двух траекторий, описывающих положение нулей функции Δ . Такие пересечения являются необходимым, но не достаточным условием нарушения аналитичности функции $\gamma(E)$, поскольку может оказаться, что в той же самой точке $\partial\Delta/\partial E = 0$ (см. также примечание на стр. 230).

Если K — оператор конечного ранга D , то Y и Δ — полиномы от переменной γ степени $D - 1$ и D соответственно. Кроме того, очевидно, что

$$\Delta(0) = 1.$$

Следовательно, полином $\Delta(\gamma)$ должен иметь вид произведения

$$\Delta(\gamma) = \prod_{i=1}^D (1 - \gamma\alpha_i), \quad (9.81)$$

где α_i суть D собственных значений оператора K . Сравнение (9.71) и (9.62) показывает, что

$$Y = \sum_i \prod_{j \neq i} (1 - \gamma\alpha_j) |\alpha_i|^2 \Phi_i \Psi_i^\dagger, \quad (9.82)$$

где Φ_i и Ψ_i определяются формулами (9.50) и (9.51) и условием нормировки

$$(\Psi_i, H' \Phi_i) = 1. \quad (9.83)$$

Эти результаты можно обобщить на случай, когда K является оператором бесконечного ранга при условии, что произведение в (9.81) сходится. Необходимое и достаточное условие того, чтобы его сходимость была абсолютной, имеет вид

$$\sum_i |\alpha_i| < \infty.$$

Если этот критерий выполнен, то как оператор K , так и оператор $K^\dagger K$ имеют конечный след. Таким образом, в этом случае не только оператор K принадлежит к классу Гильберта — Шмидта, но, кроме того, все члены в разложениях (9.72) и (9.73) конечны. Если, наоборот, след оператора K бесконечен, то определитель (9.73) не существует вовсе. Следовательно, можно ожидать, что всякий раз, когда определение (9.73) имеет смысл, имеет место

$$\Delta(\gamma) = \prod_i (1 - \gamma\alpha_i). \quad (9.81a)$$

«Метод вытаскивания ядовитого зуба». Если диагональные матричные элементы оператора K не определены или бесконечны, или если не существует $\text{Sp } K$, то простую формулу Фредгольма (9.74) необходимо видоизменить. Это видоизменение состоит в замене «опасных» элементов на главной диагонали детерминанта нулями:

$$(\mathcal{K}'_n)_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \begin{vmatrix} K_{\alpha\beta} & K_{\alpha\alpha_1} & \dots & K_{\alpha\alpha_n} \\ K_{\alpha_1\beta} & 0 & \dots & K_{\alpha_1\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_n\beta} & K_{\alpha_n\alpha_1} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (9.84)$$

Аналогичным образом поступают и с детерминантом

$$\Delta' = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \begin{vmatrix} 0 & K_{\alpha_1 \alpha_2} & \dots & K_{\alpha_1 \alpha_n} \\ K_{\alpha_2 \alpha_1} & 0 & \dots & K_{\alpha_2 \alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{\alpha_n \alpha_1} & K_{\alpha_n \alpha_2} & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (9.85)$$

Выражения, аналогичные (9.80) и (9.80а), можно получить, если заменить в них κ_1 на нуль. Видоизмененная матрица

$$Y' = K + \sum_1^{\infty} \frac{(-\gamma^n)}{n!} \kappa'_n$$

отличается от исходной множителем, который является целой неоператорной функцией переменной γ , не имеющей нулей:

$$Y' = Y \text{ev Sp } K. \quad (9.86)$$

То же самое относится и к детерминанту

$$\Delta' = \Delta \text{ev Sp } K. \quad (9.87)$$

Следовательно, Y' и Δ' пригодны для использования в (9.71) вместо Y и Δ . Поскольку формулы (9.84) и (9.85) не содержат $\text{Sp } K$, то они применимы даже тогда, когда $\text{Sp } K$ не существует. При этом доказательство сходимости, конечно, должно быть проведено в другой форме, но здесь мы этого делать не будем.

Доказательство формулы (9.86) состоит в повторном применении соотношения

$$\kappa_n^{(m+1)} = \kappa_n^{(m)} - C \kappa_{n-1}^{(m)}, \quad (9.88)$$

где под $\kappa_n^{(m)}$ подразумевается сумма детерминантов, определяемых формулой (9.74), за исключением того, что m элементов на главной диагонали, кроме первого, заменены нулями, а

$$C = \text{Sp } K.$$

Соотношение (9.88) легко вывести. Для $\kappa_n^{(m)}$ имеем

$$\kappa_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{m} \kappa_k (-C)^{n-k},$$

где

$$\binom{k}{m} = \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

— биномиальный коэффициент. Поскольку $\kappa'_n = \kappa_n^{(m)}$, то в результате получим

$$\begin{aligned} Y' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \kappa'_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \kappa_k \gamma^n}{k! (n-k)!} C^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\gamma)^k \kappa_k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\gamma C)^{n-k}}{(n-k)!} Y \text{ev } C. \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно вывести формулу (9.87).

Итерации. Если $\text{Sp } K$ не существует, но существует $\text{Sp } K^{\dagger}K$, то методом Фредгольма можно воспользоваться по-другому, а именно итерируя один раз уравнение

$$(1 - K)^{-1} = 1 + K(1 - K)^{-1}, \quad (9.89)$$

получаем

$$(1 - K)^{-1} = 1 + K + K^2(1 - K)^{-1}.$$

Последнее равносильно записи оператора $(1 - K)^{-1}$ в виде

$$(1 - K)^{-1} = (1 + K)(1 - K^2)^{-1} \quad (9.89a)$$

и построению затем оператора $(1 - K^2)^{-1}$ с помощью стандартного метода Фредгольма. Доказательство сходимости теперь непосредственно будет применяться к операторам Гильберта — Шмидта.

Небольшое затруднение может возникнуть тогда, когда операторы K и $-K$ имеют собственное значение $1/\gamma$:

$$\det(1 - \gamma^2 K^2) = 0.$$

Однако, как показал Пуанкаре [693], нули детерминанта $\det(1 - \gamma^2 K^2)$ соответствующие собственным значениям оператора $-K$, уничтожаются с нулями знаменателя резольвенты, так что первая часть равенства (9.89a) имеет как раз такие полюсы, какие она должна иметь в соответствии с выражением в левой части равенства.

Разумеется, возможно обобщение данного метода, когда существует $\text{Sp } K^n$, но не существует $\text{Sp } K^m$, $m < n$:

$$(1 - K)^{-1} = (1 + K + \dots + K^{n-1})(1 - K^n)^{-1}. \quad (9.90)$$

§ 4. ОСОБЕННОСТИ ОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА

Допустим, что $F(z)$ — матрица конечной размерности, являющаяся аналитической матричной функцией переменной z . Тогда обратная матрица $[F(z)]^{-1}$ обязательно является мероморфной функцией z . Единственными особенностями этой функции могут быть полюсы при таких значениях z , при которых $\det F = 0$. Но это неверно, если $F(z)$ — операторная функция в гильбертовом пространстве, таком, как L^2 -пространство.

Пусть, например, $F(z)$ — интегральное ядро вида

$$F(z; x, x') = g(z, x) \delta(x - x') + H(x, x') \quad (9.91)$$

на интервале $0 \leq x < \infty$, где H — оператор вида Гильберта — Шмидта. Тогда оператор $G(z; x, x')$, обратный оператору F , как функция z будет иметь *точки ветвления* при таких значениях z_0 переменной z , при которых

$$g(z_0, 0) = 0, \quad g(z_0, \infty) = 0. \quad (9.92)$$

Точки ветвления соединены друг с другом линиями разреза, естественное положение которых совпадает с кривыми C , определяемыми уравнениями

$$g(z, x) = 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (9.93)$$

Для доказательства этого вычислим скачок функции G при переходе через одну из линий разреза C . Пусть точка z лежит на линии C , и пусть g как функция x имеет простой нуль в точке $x_0(z)$. Произведем разложение

$$\frac{1}{g(z, x)} = \frac{R(z)}{x - x_0(z)} + \dots \quad (9.94)$$

Тогда если

$$\frac{dx_0(z)}{dz} = - \frac{\partial g / \partial z}{\partial g / \partial x} \Big|_{x=x_0} \neq 0,$$

то при смещении z под прямым углом к C значение x_0 будет изменяться на чисто мнимую величину

$$x_0(z) \rightarrow x_0(z) \pm i\varepsilon.$$

Следовательно, разность значений функции $1/g$ на двух берегах разреза C равна

$$\Delta g^{-1} = 2\pi i \delta(x - x_0) R. \quad (9.95)$$

Введем теперь два обратных оператора

$$N^{(L)} = (1 + g^{-1}H)^{-1}, \quad N^{(R)} = (1 + Hg^{-1})^{-1}, \quad (9.96)$$

которые удовлетворяют интегральным уравнениям

$$N^{(L)} = 1 - N^{(L)}g^{-1}H, \quad N^{(R)} = 1 - Hg^{-1}N^{(R)}. \quad (9.96a)$$

С помощью этих операторов можно вычислить скачок функции $G = N^{(L)}g^{-1}$ при переходе через линию разреза C . В результате простых алгебраических преобразований получаем

$$\Delta G = N_+^{(L)}\Delta g^{-1}N_-^{(R)} = N_-^{(L)}\Delta g^{-1}N_+^{(R)}, \quad (9.97)$$

где индексы «+» и «-» относятся к значениям соответственно на верхнем и нижнем берегах разреза. В явном виде это означает, что

$$\Delta G(z; x, x') = 2\pi i N_{\pm}^{(L)}(z; x, x_0) R(z) N_{\mp}^{(R)}(z; x_0, x'). \quad (9.97a)$$

Из формулы (9.97a) следует не только то, что линия C является обычно линией разреза функции G , но также и то, что скачок G при переходе через линию разреза *состоит из двух сомножителей*, один из которых зависит только от x , а другой — только от x' . Конкретный характер точек ветвления (9.92) на концах разреза зависит, конечно, от поведения функций g и H вблизи концов интервала интегрирования. Кроме того, получаем

$$\int_0^{\infty} dx' F(z; x, x') N^{(L)}(z; x', x_0) = 0 \quad (9.98)$$

и

$$\int_0^{\infty} dx' N^{(R)}(z; x_0, x') F(z; x', x) = 0, \quad (9.98a)$$

так что $N^{(L)}(z; x, x_0)$ и $N^{(R)}(z; x_0, x)$ [при фиксированных z и $x_0(z)$] являются «векторами», которые при умножении на $F(z)$ соответственно справа и слева дают нуль. Однако эти векторы обычно не нормируемы и, следовательно, не являются элементами гильбертова пространства.

Выражение (9.97) можно записать и в другом виде

$$\Delta G = \Delta g^{-1} - G_{\pm} H \Delta g^{-1} - \Delta g^{-1} H G_{\mp} + G_{\pm} H \Delta g^{-1} H G_{\mp}. \quad (9.97b)$$

После подстановки сюда (9.95) становится видно, что первые три члена содержат δ -функции от x или x' . Как вид (9.95) отражает вид формулы (9.94), так же и эти δ -функции указывают на то, что $G(z; x, x')$ имеет на разрезах полюсы, положение которых зависит от x и x' . Кроме того, G может иметь фиксированные

(т. е. не зависящие от x и x') полюсы в точках, в которых определитель Фредгольма для F обращается в нуль.

Простые примеры представляют резольвенты интегральных операторов. Например, пусть z есть энергия E и в импульсном представлении

$$F = E - \frac{p^2}{2m} - V(p, p').$$

Тогда

$$g = E - \frac{p^2}{2m}$$

и мы приходим к выводу, что резольвента

$$\mathcal{G} = \left(E - \frac{p^2}{2m} - V \right)^{-1}$$

имеет разрез в E -плоскости, простирающийся от точки $E=0$ до $E=\infty$. Из уравнения (9.98) следует, что $N^{(L)}(E; p, p_0)$ является *собственным вектором, принадлежащим непрерывному спектру*. Таким образом, результат (9.97) совпадает с обычным представлением функции Грина, а (9.96а) совпадает с уравнением Липпмана—Швингера.

КОММЕНТАРИИ

К § 1, п. 1. Оригинальной работой, в которой были введены *борновский ряд* и *борновское приближение*, является статья Борна [91]. Последними работами, посвященными исследованию условий их сходимости и аналитичности, являются [462, 463, 496, 497, 486, 937, 1, 197, 410, 590, 738, 891, 892, 162, 545, 752, 823].

Идея использования ядра (9.6) вместо K была предложена Швингером [769], а для рассматриваемых здесь задач — Скадромом и Вейнбергом [751]. Она тесно связана с методами, предложенными в работе [590], в которой использовалась теория полярных ядер, и [164]. Первыми работами по математическому анализу *полярных ядер* являются [384] и [319].

Проведенное здесь рассмотрение поведения собственных значений $\alpha(E)$ ядра $K(E)$ как функций энергии E основано на работах [892, 893], хотя приведенное в настоящей книге исследование аналитических свойств $\alpha(E)$ несколько выходит за рамки результатов, приведенных в указанных работах. Аналитическое продолжение соотношения полиоты является обобщением результата, полученного в [590].

Исследование поведения собственных значений $\alpha(E)$ вариационным методом проведено в работах [923] и [365], приложение С.

Перестройке борновского ряда для улучшения его сходимости посвящены работы [738, 897, 894].

Соотношение (9.17) иногда называют теоремой Герглотца [379]. Функции, которые можно записать в такой форме, называются *функциями Герглотца*. Они тесно связаны с R -функциями Вигнера [908—910, 915].

К § 1, п. 2. Члены борновского ряда более высоких порядков рассмотрены в статье [193]. Второе борновское приближение для рассеяния релятивистских частиц в кулоновском поле рассмотрено в работе [561]. Исследование борновского приближения при низких энергиях проведено в [815]; см. также [132].

К § 1, п. 3. Борновское приближение в методе искаженных волн и его применения рассмотрены, например, в работах [583, 44, 723]. Другие приближения в методе искаженных волн можно найти в [813, 814, 816, 29]. В последней работе приведена библиография.

К § 1, п. 4. Идея метода, изложенного в данном пункте, принадлежит Мазо (J. M a z o, 1964, не опубликовано).

К § 2. Рассмотрение, проведенное в данном параграфе, основано на работах Вейнберга [891—894], который воспринял метод Шмидта и по изложенным выше физическим причинам назвал его *методом квазичастиц*. Некоторые применения данного метода содержатся в работе [752]. Рассмотрение математических вопросов, относящихся к данному параграфу, можно найти, например, в книге Куранта и Гильберта [182].

К § 3. Изложение метода Фредгольма можно найти в любой книге по интегральным уравнениям, например в книге Уиттекера и Ватсона [903], гл. 11; Куранта и Гильберта [182], гл. 3; Морса и Фешбаха [615], гл. 8 и 9, и Смифса [782].

К задаче рассеяния метод Фредгольма впервые применили Йост и Пайс [453].

Впервые рекуррентные соотношения для членов разложения Фредгольма подобного рода с использованием подобных следов операторов были выведены в работе [691]. В настоящем изложении мы следуем работе Ньютона [647].

Доказательство неравенства Адамара можно найти в большинстве указанных книг по интегральным уравнениям. Здесь оно используется в форме, приведенной в книге Смифиса [782]. Видоизменение формулы Фредгольма, сводящееся к замене элементов главной диагонали нулями, было предложено Келлоггом [479]. Формулы (9.84) и (9.85) приписывают математику Хаскинсу. Весь метод в целом был назван Гильбертом «методом вытаскивания ядовитого зуба» из определителя Фредгольма (R. J o s t, частное сообщение). Укажем на некоторые другие математические статьи, касающиеся уравнений Фредгольма и их решений: [822, 387—389].

Применение метода Фредгольма к итерированному уравнению Липпмана — Швингера описано в работе Кури [482]; см. также [767, 30, 572].

К § 4. Содержание этого параграфа основано на работе Ньютона [652].

ЗАДАЧИ

1. Для каких значений γ ряд $\sum_0^{\infty} \gamma^n K^n$ сходится абсолютно, если K является: а) оператором a задачи 5 гл. 7; б) оператором a задачи 6 гл. 7; в) оператором aa^\dagger задачи 6 гл. 7; г) оператором $a^\dagger a$ задачи 6 гл. 7?

2. Показать, что если K — вполне непрерывный эрмитов оператор, определенный во всем гильбертовом пространстве, то ряд $\sum \gamma^n K^n$ должен иметь конечный радиус сходимости, т. е. если $|\gamma|$ выбрать достаточно большим, то ряд должен расходиться.

3. Показать, что если только H' не является неотрицательно определенным оператором, то гамильтониан $H = H_0 + \gamma H'$ должен приводить по меньшей мере к одному связанному состоянию, если γ выбрано достаточно большим (положительным). Если H' — неположительно определенный оператор, то означает ли это, что путем увеличения γ можно получить больше одного связанного состояния?

4. Вычислить первое борновское приближение для дифференциального сечения рассеяния в системе центра масс и в лабораторной системе отсчета для следующих потенциалов: а) потенциала Юкавы $V(r) = \gamma e^{-\mu r}/r$; б) экспоненциального потенциала $V(r) = \gamma e^{-\mu r}$; в) прямоугольной ямы (или барьера) $V(r) = \gamma$ ($r < R$), 0 ($r > R$); г) δ -функции $V(r) = \gamma \delta(r - r_0)$; д) $V(r) = \gamma e^{-\mu r} r^{-3/2}$; е) $V(r) = \gamma e^{-\mu^2 r^2}/r$; ж) гауссовского потенциала $V(r) = \gamma e^{-\mu^2 r^2}$; з) кулоновского потенциала $V(r) = \gamma r^{-1}$. Начертить диаграмму полюсов. Вычислить первое борновское приближение для полного сечения рассеяния для тех же потенциалов. Оценить в каждом случае, при каких энергиях можно ожидать, что эти приближения будут хорошими.

5. Можно попытаться вычислить приближенные значения энергии связанного состояния, вычисляя определитель Фредгольма первого порядка $\Delta \approx \gamma \text{Sp} K$, а затем приравнивая его нулю. Однако результат может оказаться очень плохим, поскольку если $\gamma \text{Sp} K \approx 1$, то можно ожидать, что разложение будет сходиться медленно. Тем не менее этот метод является простым, а иногда и надежным. Найти простое условие, при котором этот метод может давать хорошие результаты. [У к а з а н и е: рассмотреть формулу (9.81а).]

Можно ли применять этот метод, например, для вычисления энергии связанных состояний для потенциалов, таких, как в задаче 4? Если нет, то предложите простое видоизменение этого метода. Согласуется ли оно с (9.37)?

6. Допустим, что оператор взаимодействия двух частиц содержит часть $H_1(\mathbf{p})$, которая зависит только от *относительного* импульса \mathbf{p} . Будет ли непрерывный спектр оператора H (в системе центра масс) оставаться таким же, как и спектр оператора H_0 , или изменится? Если изменится, то каким образом?

7. Доказать, что если

$$\text{Sp} [G(E) H']^4 > \text{Sp} [G(E) H']^2$$

для данной энергии $E \leq 0$, то гамильтониан $H = H_0 + H'$ имеет по меньшей мере одно связанное состояние с энергией, меньшей E .

Одноканальное рассеяние. Трехмерный случай в конкретных представлениях

§ 1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОЧАСТИЧНОГО РАССЕЯНИЯ

1. Предварительные замечания

Рассмотрение интегральных уравнений для векторов состояний системы рассеяния вновь проще всего начать, используя нестационарную теорию. Нас главным образом интересуют интегральные уравнения (6.15) и (6.17) или (6.21) и (6.22). Как было показано в гл. 6, § 3, эти уравнения эквивалентны уравнениям (6.33) и (6.34):

$$\Psi_{\text{ин}}(t) = \Omega^{(\pm)\dagger} \Psi(t).$$

Кроме того, там же было показано, что действие оператора Ω^\dagger на собственные векторы связанных состояний гамильтониана H дает нуль [см. (6.40)]. Если воспользоваться формулами (6.24) или (6.29) для $\Omega^{(+)}$ и $\Omega^{(-)}$, то это утверждение можно представить в виде интегрального уравнения для собственных векторов связанных состояний гамильтониана H :

$$\Psi_{\text{св}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G^{(\pm)}(t-t') H' \Psi_{\text{св}}(t'). \quad (10.1)$$

Поэтому если H имеет связанные состояния, то однородные аналоги уравнений (6.15) и (6.17) имеют нетривиальные решения и, следовательно, решения неоднородных уравнений, если они существуют, конечно, не будут единственными. Как же сделать их единственными?

Поскольку зависимость собственных векторов связанных состояний гамильтониана H от времени имеет чисто осциллирующий характер:

$$\Psi_{\text{св}}(t) = \Psi_{\text{св}}(E) e^{-iEt},$$

то интеграл

$$\int_{-\infty}^t dt' e^{-iH_0(t-t')} H' \Psi_{\text{св}}(t'),$$

конечно, не будет сходиться абсолютно. Следовательно, интегральному уравнению (10.1) в лучшем случае можно придать лишь некоторый формальный смысл. Так как «достаточно хороший» гамильтониан H имеет только конечное число связанных состояний¹⁾, то соответствующие им собственные векторы нельзя использовать для построения волновых пакетов, которые стремятся

¹⁾ Более точный критерий существования у H только конечного числа связанных состояний приведен в гл. 12. Кулоновское взаимодействие в этом смысле, конечно, не является «достаточно хорошим». Медленно убывающий кулоновский потенциал приводит к бесконечному числу связанных состояний.

к нулю в слабом смысле ¹⁾ при $t \rightarrow \pm \infty$. Действительно, в гл. 6, § 7, п. 3 было показано, что разность между $\Psi^{(+)}$ и $\Psi_{\text{ин}}$ и разность между $\Psi^{(-)}$ и $\Psi_{\text{аут}}$ должна стремиться к нулю в *сильном* смысле соответственно при $t \rightarrow \pm \infty$. Одним из способов, обеспечивающих сходимость интеграла, является адиабатическое включение и выключение взаимодействия. Если взаимодействие H' достаточно сильно локализовано (строгий смысл этого утверждения рассмотрен ниже) и $\Psi_{\text{ин}}$ и $\Psi_{\text{аут}}$ — волновые пакеты, то адиабатическое включение и выключение взаимодействия использовать необязательно. Тогда существуют решения уравнений (6.15) и (6.17), для которых

$$\Psi^{(+)}(t) - \Psi_{\text{ин}}(t) \underset{t \rightarrow -\infty}{\Rightarrow} 0,$$

$$\Psi^{(-)}(t) - \Psi_{\text{аут}}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\Rightarrow} 0.$$

Поскольку $\Psi_{\text{ин}}$ и $\Psi_{\text{аут}}$ сходятся к нулю в слабом смысле, а вектор $\Psi_{\text{св}}(t)$ осциллирует во времени, то эти условия достаточны для однозначного определения решений уравнений (6.15) и (6.17). Однородные уравнения не имеют никаких других решений, кроме тех, которые соответствуют связанным состояниям гамильтониана H . В противном случае оператор Ω^\dagger при действии на другие векторы состояний давал бы нуль и оператор Ω не мог бы быть изометрическим.

Произведем теперь преобразование Фурье уравнений, зависящих от времени, и перейдем к уравнениям Липпмана — Швингера (7.15) и (7.15а). Ситуация здесь является несколько иной, поскольку энергия фиксирована. Связанные состояния оператора H , вызывающие некоторые затруднения, могут иметь энергии, не совпадающие со значениями энергии, при которых требуется решать уравнение. Поскольку рассматривается случай, когда одна частица рассеивается на неподвижной мишени или во внешнем поле сил, то спектр, соответствующий состояниям рассеяния, или непрерывный спектр, четко отделен от дискретного спектра, или спектра связанных состояний. Нас интересует решение уравнения (7.15) при $E > 0$, в то время как связанные состояния лежат в области $E < 0$. Поэтому не возникает никаких серьезных затруднений в вопросе о существовании и единственности решений уравнения (7.15) [или уравнения (7.11) для функции Грина] либо уравнения (7.47) для оператора T . Более подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

2. Координатное представление

Рассмотрим сначала векторы состояний свободных частиц и функции Грина в координатном представлении. Для свободной частицы с массой m и спином нуль вектор состояния, являющийся одновременно собственным вектором оператора кинетической энергии H_0 и оператора импульса \mathbf{p} , имеет вид

$$\psi_0(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{(mk)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (10.2)$$

где \mathbf{k} — собственное значение оператора \mathbf{p} . Энергия и импульс \mathbf{k} связаны, очевидно, соотношением

$$E = \frac{k^2}{2m}.$$

Если частица имеет спин s и z -компонента спина равна ν , то

$$\psi_0(\mathbf{k}\nu, \mathbf{r}) = \frac{(mk)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \chi_\nu^s e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (10.2a)$$

¹⁾ Определение слабой и сильной сходимости дано в гл. 6, § 7.

где χ — соответствующая нормированная спиновая функция. Нормировка этих волновых функций свободных частиц такая же, как и в (8.8):

$$\int d\mathbf{r} \psi_0^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}) \cdot \psi_0(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{r}) = \delta(E - E') \delta_\Omega(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') \delta_{ss'} \delta_{vv'}, \quad (10.3)$$

где δ_Ω — функция телесного угла, определяемая формулой (2.15), а точка означает скалярное произведение в спиновом пространстве. Переменные $\mathbf{k}sv$ играют роль тех параметров, совокупность которых ранее обозначалась через α . Волновые функции свободных частиц образуют полный набор

$$\sum_{sv} \int_0^\infty dE \int d\Omega_h \psi_0(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.4)$$

На практике сюда необязательно входит суммирование по s , поскольку обычно интересуются разложением волновых функций с определенным спином (но с различными проекциями спина).

Из условия полноты (10.4) непосредственно вытекает координатное представление зависящих от времени функций Грина (6.5) для частицы со спином s . Для $t > 0$

$$\begin{aligned} G_s^+(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -i \sum_v \int_0^\infty dE e^{-iEt} \int d\Omega_h \psi_0(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}') = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_v \int_{-\infty}^\infty dk k \exp \left[-i \left(\frac{k^2 t}{2m} - k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right) \right] \chi_v^s \chi_v^{s*} = \\ &= \frac{m^{3/2} (1-i)}{4\pi^{3/2} t^{3/2}} \sum_v \exp \left(i \frac{m |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{2t} \right) \chi_v^s \chi_v^{s*} \end{aligned} \quad (10.5)$$

и для $t < 0$

$$\begin{aligned} G_s^-(t; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= i \sum_v \int_0^\infty dE e^{-iEt} \int d\Omega_h \psi_0(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}') = \\ &= \frac{m^{3/2} (1+i)}{4\pi^{3/2} |t|^{3/2}} \sum_v \exp \left(-i \frac{m |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{2|t|} \right) \chi_v^s \chi_v^{s*}. \end{aligned} \quad (10.5a)$$

Из выражений (10.5) и (10.5a) видно, что в координатном представлении не существует пределов функций $G^{(\pm)}$ при $t \rightarrow \pm 0$.

Аналогичным образом получаются выражения для независящих от времени функций Грина

$$\begin{aligned} G_s^\pm(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \sum_v \int_0^\infty dE' \int d\Omega_h \frac{\psi_0(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{r}')}{E - E' \pm i\epsilon} = \\ &= -\frac{m}{2\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sum_v \chi_v^s \chi_v^{s*}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{1}{2m} \nabla^2 + E \right) G_s^\pm(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (10.7)$$

и граничным условиям, которые определяются асимптотическим поведением при $r \rightarrow \infty$, а именно

$$G_s^+(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -\frac{e^{ikh'r}}{r} \left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{1/2} \sum_{\nu} \chi_{\nu}^s \psi_0^*(\mathbf{k}''s\nu, \mathbf{r}'), \quad (10.8)$$

$$G_s^-(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx -\frac{e^{-ikh'r}}{r} \left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{1/2} \sum_{\nu} \psi_0(\mathbf{k}''s\nu, \mathbf{r}') \chi_{\nu}^{s*}, \quad (10.8a)$$

где $\mathbf{k}'' = \hat{\mathbf{r}}k$. Асимптотическое поведение позволяет установить, какой физический смысл с точки зрения стационарной теории имеют верхние индексы « \pm ». Функция Грина G^+ — это такая волна, созданная «единичным источником»¹⁾, которая на больших расстояниях содержит только *расходящиеся* сферические волны, в то время как G^- на больших расстояниях содержит только *сходящиеся* сферические волны.

Вывод асимптотических выражений (10.8) и (10.8a) основан на том, что в показателе экспоненты сделано приближение

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} k(r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' r^{-1} + \dots) = kr - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}' + \dots,$$

а в знаменателе положено $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$. Сохранение только записанных членов является хорошим приближением при условии, что

$$r \gg r' \quad (10.9)$$

и, кроме того,

$$kr \gg (kr')^2. \quad (10.9a)$$

Первое неравенство нужно для законности сделанного приближения в знаменателе, второе — в показателе экспоненты.

Следует отметить, что в координатном представлении функции Грина зависят только от *разности* $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. С точки зрения теории операторов это обусловлено тем, что оператор H_0 , а следовательно, и оператор $(E - H_0)^{-1}$ коммутируют с оператором импульса, который является оператором сдвига в пространстве. Применительно к дифференциальному уравнению, которому подчиняется функция G , это обусловлено тем фактом, что дифференциальный оператор в левой части уравнения (10.7) не содержит r в явном виде, неоднородность в правой части содержит только $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, а также видом наложенных граничных условий при $r \rightarrow \infty$.

Амплитуда рассеяния. Рассмотрим теперь интегральное уравнение Липпмана — Швингера (7.15) в координатном представлении

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) = & \psi_0(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) + \\ & + \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' G_s^+(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}'') (\mathbf{r}'' | H' | \mathbf{r}') \psi^{(+)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}'), \end{aligned} \quad (10.10)$$

где $(\mathbf{r}'' | H' | \mathbf{r}')$ — матричный элемент взаимодействия (возможно, зависящего от спина) в координатном представлении. Оставляя на время в стороне вопрос о существовании и единственности решений уравнения (10.10), найдем асимптотическое поведение $\psi^{(+)}$ при $r \rightarrow \infty$ из асимптотического поведения функции G^+ .

¹⁾ Мы здесь воспользовались языком теории электромагнитных волн. Волновая функция не имеет, конечно, никаких «источников».

Согласно (10.8) и (10.2a) имеем

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) \approx \sum_{\mathbf{v}'} \frac{(mk)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \chi_{\mathbf{v}'}^s [\delta_{\mathbf{v}\mathbf{v}'} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + r^{-1} e^{ikr} A(\mathbf{k}'\mathbf{v}', kv)]. \quad (10.11)$$

где $\mathbf{k}' = k\mathbf{r}'/r$ и

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}'\mathbf{v}', kv) &= -\frac{(2\pi)^2}{k} \int dr' dr \psi_0^*(\mathbf{k}'s\mathbf{v}'; \mathbf{r}') (r' | H' | \mathbf{r}) \psi^{(+)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) = \\ &= -\frac{(2\pi)^2}{k} T(\mathbf{k}'\mathbf{v}', kv). \end{aligned} \quad (10.12)$$

Принимая во внимание неравенства (10.9) и (10.9a), асимптотическую формулу (10.11) можно рассматривать как хорошее приближение при условии, что r велико по сравнению с размером области взаимодействия D и велико по сравнению с D , умноженным на отношение D к длине волны λ :

$$r \gg D, \quad r \gg \frac{D^2}{\lambda}. \quad (10.13)$$

При низких энергиях, когда $kD \ll 1$, имеет значение только первое неравенство (10.13). При всех остальных энергиях из (10.13) следует, что

$$r \gg \lambda, \quad (10.13a)$$

а при высоких энергиях, когда $kD \gg 1$, второе неравенство (10.13) становится более сильным, чем неравенство (10.13a).

Из формулы (10.11) легко виден физический смысл верхнего индекса «+» у функции ψ с точки зрения стационарной теории. Функция $\psi^{(+)}$ отличается от ψ_0 на больших расстояниях только наличием *расходящейся сферической волны*. Это соответствует ее физическому смыслу и смыслу индекса «+» с точки зрения нестационарной теории. Волновая функция свободной частицы ψ_0 описывает специально приоткрытый коллимированный пучок, посланный в данном направлении. Точная волновая функция отличается от нее на больших расстояниях только наличием *расходящейся сферической волны*. Далее, сферическую волну на большом расстоянии r от мишени можно рассматривать как «локально плоскую», и из (10.11) следует, что отношение рассеянного потока частиц с проекцией спина \mathbf{v}' к падающему потоку равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A(\mathbf{k}'\mathbf{v}', kv)|^2, \quad (10.14)$$

если в падающем потоке частицы имеют волновой вектор \mathbf{k} и проекцию спина \mathbf{v} . Явная запись (10.12) и (10.14) согласуется с (8.16) и (7.44).

Теперь можно установить связь с нестационарной теорией, если из функций (10.10) образовать волновые пакеты и рассмотреть предел $t \rightarrow \pm \infty$. Соответствующее доказательство аналогично изложенному в гл. 1, § 3, п. 1.

Стоит записать в явном виде выражения для простого случая частиц со спином нуль и локального взаимодействия. Если использовать волновую функцию, которая удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \mathcal{V}(\mathbf{r}') \psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') \quad (10.10a)$$

и, следовательно, асимптотическое поведение которой при больших r имеет вид

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \approx e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + r^{-1} e^{ikr} A(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (10.11a)$$

то получим

$$A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \mathcal{V}(\mathbf{r}) \psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (10.12a)$$

Функция $\mathcal{V}'(\mathbf{r})$ связана с гамильтонианом взаимодействия соотношением

$$\mathcal{V}'(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 2m(\mathbf{r} | H' | \mathbf{r}').$$

Отметим, что из совпадения двух вариантов формулы (7.40), а также из того факта, что для частиц со спином нуль имеет место соотношение $\psi^{(-)*}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \psi^{(+)}(-\mathbf{k}, \mathbf{r})$, следует специальная форма теоремы взаимности

$$A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = A(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}'). \quad (10.15)$$

В случае когда частица обладает отличным от нуля спином, можно также записать амплитуду рассеяния в виде спиновой матрицы. Для этой цели проще всего использовать формулу (7.41) и записать матрицу амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{m}{2\pi} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} (\mathbf{r}' | T | \mathbf{r}) = \\ &= -(2\pi)^2 m (\mathbf{k}' | T | \mathbf{k}) \equiv -(2\pi)^2 m T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где

$$T = H' + H'G^+H' = H' + H'G^+H' + H'G^+H'G^+H' + \dots$$

Сечение рассеяния для неполяризованного пучка с учетом всех конечных направлений поляризации определяется выражением

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \frac{(2\pi)^4 m^2 \text{Sp}(\mathbf{k}' | T | \mathbf{k})(\mathbf{k} | T^\dagger | \mathbf{k}')}{2s+1} = \\ &= \frac{(2\pi)^4 m^2 \text{Sp} T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*}{2s+1}, \end{aligned} \quad (10.17)$$

где s — начальный спин, а след берется только по спиновым индексам. При этом используется условие полноты спиновых функций

$$\sum_{\nu} \chi_{\nu} \chi_{\nu}^{\dagger} = \mathbf{1}.$$

Если исходный пучок полностью или частично поляризован, то под знак следа необходимо ввести матрицу плотности (8.49)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 m^2 \text{Sp} T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \rho T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*. \quad (10.18)$$

Наконец, если измеряются спины испускающихся частиц, то сечение для данного конкретного направления спина или для данного значения квантового числа проекции спина получается путем введения под знак следа соответствующей матрицы проектирования P' :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = (2\pi)^4 m^2 \text{Sp} P' T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \rho T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*.$$

Из сказанного следует, что матрица плотности рассеянного пучка в направлении \mathbf{k}' определяется выражением

$$\rho' = \frac{\sum_{\nu} P_{\nu} \text{Sp} P_{\nu} T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \rho T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*}{\text{Sp} T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} \rho T_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^*}, \quad (10.19)$$

где $P_{\nu} = \chi_{\nu} \chi_{\nu}^{\dagger}$ — матрицы проектирования для различных значений квантовых чисел проекции спина.

Сечения двукратного рассеяния нетрудно вычислить непосредственно из (10.16). Если две мишени находятся достаточно далеко друг от друга, так что выполняются неравенства (10.13), и вектор \mathbf{k}'' направлен от первой мишени ко второй, то сечение двукратного рассеяния для неполяризованного пучка определится формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}', \mathbf{k}'', \mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^8 m^4 \text{Sp} T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(2)} T_{\mathbf{k}''\mathbf{k}}^{(1)} T_{\mathbf{k}'\mathbf{k}''}^{(2)*} T_{\mathbf{k}\mathbf{k}''}^{(1)*}}{2s+1}. \quad (10.20)$$

Здесь верхние индексы указывают номер мишени, поскольку мишени обязательно одинаковы. Если первое рассеяние приводит к появлению поперечной поляризации, то с помощью второго рассеяния можно определить ее, наблюдая азимутальную асимметрию рассеянного пучка ¹⁾.

3. Импульсное представление

В импульсном представлении состояние свободной частицы, обладающей спином (s, ν) и импульсом \mathbf{k} , описывается волновой функцией

$$\psi_0(\mathbf{k}sv; \mathbf{p}) = (mk)^{1/2} \chi_\nu^s \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \quad (10.21)$$

Она нормирована согласно (8.8):

$$\int d\mathbf{p} \psi_0^*(\mathbf{k}sv; \mathbf{p}) \psi_0(\mathbf{k}'s'\nu'; \mathbf{p}) = \delta(E - E') \delta_\Omega(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}') \delta_{ss'} \delta_{\nu\nu'}, \quad (10.22)$$

что можно проверить, используя (8.9). Волновые функции (10.21) образуют полный набор:

$$\sum_{sv} \int_0^\infty dE \int d\Omega_k \psi_0(\mathbf{k}sv; \mathbf{p}) \psi_0^*(\mathbf{k}sv; \mathbf{p}') = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.23)$$

Выражения для функций Грина легко получить с помощью (6.5) и (10.23). Для $t > 0$

$$\begin{aligned} G_s^+(t; \mathbf{p}, \mathbf{p}') &= -i \sum_\nu \int_0^\infty dE e^{-iEt} \int d\Omega_k \psi_0(\mathbf{k}sv; \mathbf{p}) \psi_0^*(\mathbf{k}sv; \mathbf{p}') = \\ &= -i \sum_\nu \chi_\nu^s \chi_\nu^{s*} e^{-iEt} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \end{aligned} \quad (10.24)$$

где, конечно, $E = p^2/2m$. Аналогично для $t < 0$

$$G_s^-(t; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = i \sum_\nu \chi_\nu^s \chi_\nu^{s*} e^{-iEt} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.24a)$$

Подобным же образом можно найти выражение для функций Грина, зависящих от времени,

$$\begin{aligned} G_s^\pm(E; \mathbf{p}, \mathbf{p}') &= \\ &= \sum_\nu \int_0^\infty dE' \int d\Omega_{k'} \frac{\psi_0(\mathbf{k}'sv; \mathbf{p}) \psi_0^*(\mathbf{k}'sv; \mathbf{p}')}{E - E' \pm i\varepsilon} = \\ &= \frac{\sum_\nu \chi_\nu^s \chi_\nu^{s*} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{E - (p^2/2m) \pm i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (10.25)$$

Как и должно быть, функции Грина диагональны по индексу \mathbf{p} , поскольку оператор импульса коммутирует с H_0 .

¹⁾ Поляризация в направлении, перпендикулярном плоскости рассеяния, может возникать даже в том случае, когда мишень сферически симметрична. Простой пример этого — рассеяние быстрых электронов сферически симметричным электрическим полем (скажем, кулоновским полем). Движущиеся электроны чувствуют эффективное магнитное поле, которое взаимодействует с их магнитным моментом и приводит к появлению в гамильтониане члена, пропорционального $\sigma \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ (спин-орбитальное взаимодействие). В результате возникает поляризация [625, 627].

Уравнение Липпмана—Швингера в импульсном представлении имеет вид

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}; \mathbf{p}) = (mk)^{1/2} \chi_v^s \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + \sum_{v'} \int d\mathbf{p}' \chi_{v'}^s \chi_{v'}^{s*} 2m \frac{(\mathbf{p} | H' | \mathbf{p}')}{k^2 - p'^2 + i\epsilon} \psi^{(+)}(\mathbf{k}; \mathbf{p}'). \quad (10.26)$$

Матричные элементы оператора взаимодействия в импульсном пространстве связаны с матричными элементами в координатном пространстве посредством преобразования Фурье

$$(\mathbf{p} | H' | \mathbf{p}') = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{i(\mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})} (\mathbf{r} | H' | \mathbf{r}'). \quad (10.27)$$

Если H' — локальный потенциал

$$(\mathbf{r} | H' | \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

то

$$(\mathbf{p} | H' | \mathbf{p}') = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) = \bar{V}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (10.28)$$

Последнее выражение зависит только от $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$. Это обусловлено просто тем, что H' коммутирует с оператором координаты, который является оператором смещения в импульсном пространстве.

4. Сепарабельные взаимодействия

Если взаимодействие является *сепарабельным*, т. е.

$$(\mathbf{p} | H' | \mathbf{p}') = -f(\mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}'), \quad (10.29)$$

то уравнение (10.26) можно решить точно. [Поскольку выражение (10.29) является неположительно определенным, то оператор H' соответствует силам притяжения; чтобы получить выражение, соответствующее силам отталкивания, нужно знак минус в (10.29) заменить на плюс.] Допустим для простоты, что спин равен нулю (или что H' не зависит от спина). Тогда простой расчет показывает, что уравнение (10.26) имеет следующее решение:

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}; \mathbf{p}) = (mk)^{1/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) - \frac{2m^{3/2} k^{1/2}}{k^2 - p^2 + i\epsilon} \frac{f(\mathbf{p}) f^*(\mathbf{k})}{1 + \int d\mathbf{p}' \frac{2m |f(\mathbf{p}')|^2}{k^2 - p'^2 + i\epsilon}}. \quad (10.30)$$

Аналогичным образом можно записать в явном виде выражения для точных функций Грина

$$\mathcal{G}^{\pm}(E; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{E - (p^2/2m) \pm i\epsilon} - \frac{f(\mathbf{p}) f^*(\mathbf{p}')}{[(E - (p^2/2m) \pm i\epsilon) [E - (p'^2/2m) \pm i\epsilon] \Delta^{\pm}(E)}, \quad (10.31)$$

$$\Delta^{\pm}(E) = 1 + \int d\mathbf{p} \frac{|f(\mathbf{p})|^2}{E - (p^2/2m) \pm i\epsilon}. \quad (10.32)$$

Согласно (7.41), для T -матрицы получаем

$$T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{-mpf(\mathbf{p}') f^*(\mathbf{p})}{\Delta^+(E)}. \quad (10.33)$$

Отметим, что T -матрица, а следовательно, и дифференциальное сечение отличаются от соответствующих величин в первом борновском приближении множителем, не зависящим от угла. Если функция $f(\mathbf{p})$ инвариантна при повороте, то T не зависит от угла между \mathbf{p} и \mathbf{p}' и сечение рассеяния изотропно.

Формулы (10.30) и (10.33), записанные явно, можно использовать для иллюстрации ряда общих результатов. Например, борновский ряд получается путем разложения величины $1/\Delta^+(E)$ в ряд по степеням входящего в Δ^+ инте-

грала. Нетрудно показать в явном виде с помощью (9.79а), что Δ^+ представляет определитель Фредгольма ядра уравнения Липпмана — Швингера. Поскольку функция $\Delta(E)$ монотонно уменьшается от единицы при $E = -\infty$ до значения

$$\Delta(0) = 1 - 2m \int d\mathbf{p} p^{-2} |f(\mathbf{p})|^2$$

при $E=0$, то в этой области она может иметь самое большое один нуль. Таким образом, если $\Delta(0) \leq 0$, т. е.

$$2m \int d\mathbf{p} p^{-2} |f(\mathbf{p})|^2 \geq 1,$$

то сепарабельное взаимодействие, соответствующее силам притяжения, приводит в точности к одному связанному состоянию. Если предыдущее неравенство не выполняется, то связанных состояний нет.

Более общие виды взаимодействия. Приведенные простые результаты легко обобщаются на случай взаимодействий, которые представляют собой сумму сепарабельных взаимодействий,

$$\langle \mathbf{p} | H' | \mathbf{p}' \rangle = \sum_n \iota_n f_n(\mathbf{p}) f_n^*(\mathbf{p}'), \quad (10.34)$$

где $\iota_n = \pm 1$. Можно показать, что волновая функция имеет при этом вид

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}; \mathbf{p}) = (mk)^{1/2} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) + 2m^{3/2} k^{1/2} \frac{\sum_n \iota_n f_n(\mathbf{p}) [(\Delta^+)^{-1}]_{nm} f_m^*(\mathbf{k})}{k^2 - p^2 \pm i\epsilon}, \quad (10.35)$$

где Δ^\pm есть матрица вида

$$\Delta_{nm}^\pm = \delta_{nm} - \int d\mathbf{p} \frac{f_n^*(\mathbf{p}) f_m(\mathbf{p})}{E - (p^2/2m) \pm i\epsilon} \iota_m. \quad (10.36)$$

Точная функция Грина определяется формулой

$$\mathcal{G}^\pm(E; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{E - (p^2/2m) \pm i\epsilon} \frac{\sum_{nm} \iota_n f_n(\mathbf{p}) [(\Delta^\pm)^{-1}]_{nm} f_m^*(\mathbf{p}')}{[E - (p^2/2m) \pm i\epsilon][E - (p'^2/2m) \pm i\epsilon]}, \quad (10.37)$$

а выражение для **T**-матрицы имеет вид

$$T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = mp \sum_{nm} \iota_n f_n(\mathbf{p}') [(\Delta^+)^{-1}]_{nm} f_m^*(\mathbf{p}). \quad (10.38)$$

Определитель Фредгольма ядра уравнения Липпмана — Швингера теперь равен

$$\Delta^+(E) = \det \Delta^+(E).$$

В качестве простой иллюстрации рассмотрим взаимодействие

$$\langle \mathbf{p} | H' | \mathbf{p}' \rangle = -f(p) f^*(p') \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}', \quad (10.39)$$

в котором $f(p)$ — функция только от модуля импульса \mathbf{p} , так что гамильтониан инвариантен относительно вращений. В этом случае из (10.36) следует, что

$$\Delta^\pm = 1 \Delta^\pm, \quad \Delta^\pm = 1 + 4\pi \int_0^\infty dp \frac{p^2 |f(p)|^2}{E - (p^2/2m) \pm i\epsilon}, \quad (10.40)$$

где $\mathbf{1}$ — единичная 3×3 -матрица; **T**-матрица равна

$$T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{-m p \mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} f(p') f^*(p)}{\Delta^+(E)}. \quad (10.41)$$

Получающееся сечение пропорционально квадрату косинуса угла между \mathbf{p} и \mathbf{p}' . Аналогичным образом нетрудно построить \mathbf{T} -матрицу для взаимодействий, зависящих другим способом от углов.

§ 2. УРАВНЕНИЯ РАССЕЯНИЯ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ ЧАСТИЦ (ИСКЛЮЧЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС)

Если рассмотреть физически реальный случай столкновения двух взаимодействующих друг с другом частиц (при отсутствии внешних сил) и попытаться применить метод, аналогичный изложенному в гл. 10, § 1, п. 1 для рассеяния одной частицы во внешнем поле, то мы сразу столкнемся с трудностями, которые типичны для всех случаев, когда имеется не одна, а несколько взаимодействующих частиц. Если имеется связанное состояние с энергией $E_{\text{св}}$ в системе отсчета, связанной с центром масс, то оно будет проявляться в любой системе отсчета при всех энергиях E , превышающих $E_{\text{св}}$, поскольку разность $E - E_{\text{св}}$ может быть просто равна кинетической энергии связанной системы. Из этого следует, что в стационарной теории, фиксируя полную энергию таким образом, чтобы она отличалась от $E_{\text{св}}$, теперь более невозможно считать связанные состояния «безвредными», как в случае рассеяния одной частицы. Для всех энергий $E > E_{\text{св}}$ однородное уравнение Липпмана — Швингера теперь имеет решение и, следовательно, решение неоднородного уравнения определено неоднозначно.

Другой более общий способ выявления возникающих трудностей основан на том очевидном факте, что если имеется только взаимодействие между частицами, то *полный* гамильтониан, так же как и отдельно оператор кинетической энергии, инвариантен относительно смещения системы как целого. Вследствие этого как H_0 , так и H должны коммутировать с оператором смещения, т. е. с оператором полного импульса \mathbf{P}

$$[H_0, \mathbf{P}] = 0, \quad [H, \mathbf{P}] = 0 \quad (10.42)$$

и аналогичным образом с \mathbf{P} должно коммутировать ядро уравнения Липпмана — Швингера

$$[K(E), \mathbf{P}] = [(E - H_0 + i\epsilon)^{-1} H', \mathbf{P}] = 0. \quad (10.43)$$

Тогда из леммы гл. 7, § 3, п. 2 сразу же следует, что $K(E)$ не может быть вполне непрерывным оператором. Или выражаясь более конкретно, из формулы (10.43) вытекает, что матричные элементы оператора K содержат δ -функцию от полного импульса

$$(\mathbf{P} \dots | K | \mathbf{P}' \dots) = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') (\dots | K | \dots). \quad (10.44)$$

Конечно, это утверждение соответствует лишь тому физическому факту, что при таком взаимодействии *сохраняется полный импульс*. Ядро, содержащее δ -функцию, не может быть вполне непрерывным, и создается впечатление, что использование уравнения Липпмана — Швингера становится затруднительным.

Однако соотношение (10.44) позволяет очень просто исправить положение. Оба члена в правой части уравнения для функции Грина

$$\mathcal{G} = G + K\mathcal{G},$$

а также сама функция \mathcal{G} содержат δ -функцию, соответствующую сохранению импульса. Поэтому ее можно выделить в виде множителя

$$\mathcal{G} = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \mathcal{G}_R, \\ G = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') G_R, \quad K = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') K_R$$

и получить уравнение для приведенной функции Грина

$$\mathcal{G}_R = G_R + K_R \mathcal{G}_R,$$

в котором полный импульс *фиксирован* и доставляющая неприятности δ -функция отсутствует. Таким же образом можно поступить с другими уравнениями рассеяния, для вектора состояния и для T -матрицы. Особым является случай, когда фиксированный полный импульс принимается равным нулю. При этом рассмотрение проводится в системе отсчета, связанной с *центром масс*, или в системе *центра тяжести*.

Итак, мы видим, что трудности, присущие уравнениям рассеяния для случая столкновения двух частиц, можно обойти весьма тривиальным образом. Причина, по которой мы провели здесь эти рассуждения, а не перешли прямо в систему отсчета, связанную с центром масс, состоит в том, что указанные выше трудности имеют то же происхождение, что и возникающие в случае, когда в столкновении участвует более двух частиц. Однако, как будет показано в гл. 17, § 4, в последнем случае возникающие проблемы столь же просто решить не удается.

Координаты центра масс. Введем явным образом координату центра масс в качестве одной из координат. Если две частицы имеют массы m_1 и m_2 и координаты \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , то в качестве новых координат выберем координату центра масс \mathbf{R} и координату относительного расположения частиц \mathbf{r} , явный вид которых определяется формулой (8.11). Якобиан такого преобразования равен

$$\frac{\partial(\mathbf{R}, \mathbf{r})}{\partial(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)} = 1. \quad (10.45)$$

Оператор кинетической энергии в координатном представлении принимает вид

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{1}{2m_1} \nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2} \nabla_2^2 = \\ &= -\frac{1}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{1}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2, \end{aligned} \quad (10.46)$$

где операторы Лапласа имеют очевидный смысл, и

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (10.47)$$

Волновую функцию свободной частицы со спином нуль можно теперь записать в координатном представлении как

$$\psi_0(\mathbf{K}, \mathbf{k}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R})} \psi_0(\mathbf{k}; \mathbf{r}), \quad (10.48)$$

где \mathbf{k} и \mathbf{K} — импульсы, которые в (8.11) обозначались посредством \mathbf{p} и \mathbf{P} . Полная энергия выражается через \mathbf{K} и \mathbf{k} согласно

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{цм}} + E_{12} = \frac{K^2}{2M} + \frac{k^2}{2\mu}. \quad (10.49)$$

Функция (10.48) нормирована следующим образом:

$$\int d\mathbf{R} d\mathbf{r} \psi_0^*(\mathbf{K}, \mathbf{k}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{K}', \mathbf{k}'; \mathbf{R}, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \delta(E_{12} - E'_{12}) \delta_{\Omega}(\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}'), \quad (10.50)$$

$$\int d\mathbf{K} \int_0^{\infty} dE_{12} \int d\Omega_{\mathbf{k}} \psi_0(\mathbf{K}, \mathbf{k}; \mathbf{R}, \mathbf{r}) \psi_0^*(\mathbf{K}, \mathbf{k}; \mathbf{R}', \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (10.51)$$

поскольку

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{k}_1 + \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{k}_2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{K} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}$$

и

$$d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 = d\mathbf{K} d\mathbf{k},$$

$$d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = d\mathbf{R} d\mathbf{r}.$$

Как было отмечено после формулы (8.11), множитель $(2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}}$ как раз и приводит к появлению δ -функции, выражающей сохранение импульса. Величину $|\mathbf{K}|$, или $E_{\text{цм}}$, можно фиксировать и удобно положить ее просто равной нулю. Тогда мы будем иметь дело с системой отсчета, связанной с центром масс. В этой системе отсчета гамильтониан выглядит точно так же, как и в случае одной частицы, за исключением того, что масса m частицы всюду заменена приведенной массой μ . Координата \mathbf{r} теперь имеет смысл расстояния между частицами, \mathbf{k} — импульс одной из двух частиц.

Если частицы имеют спины s_1 и s_2 , то (10.48) нужно умножить на скалярное произведение двух спиновых функций $\chi_{v_1}^{s_1} \chi_{v_2}^{s_2}$. Последнее можно затем разложить по собственным состояниям оператора полного спина при помощи коэффициентов Клебша — Гордана

$$\chi_{v_1}^{s_1} \chi_{v_2}^{s_2} = \sum_{sv} C(s_1 s_2 s, v_1 v_2 v) \chi_v^{ss_1 s_2}, \quad (10.52)$$

где s пробегает значения от $|s_1 - s_2|$ до $s_1 + s_2$, а v — от $-s$ до s . Функции $\chi_v^{ss_1 s_2}$ являются собственными векторами состояния операторов спина отдельных частиц

$$\mathbf{S}_1^2 \chi_v^{ss_1 s_2} = s_1(s_1 + 1) \chi_v^{ss_1 s_2}, \quad \mathbf{S}_2^2 \chi_v^{ss_1 s_2} = s_2(s_2 + 1) \chi_v^{ss_1 s_2}, \quad (10.53)$$

оператора полного спина

$$\mathbf{S}^2 \chi_v^{ss_1 s_2} = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2)^2 \chi_v^{ss_1 s_2} = s(s + 1) \chi_v^{ss_1 s_2} \quad (10.54)$$

и оператора z -компоненты полного спина

$$S_z \chi_v^{ss_1 s_2} = (S_{1z} + S_{2z}) \chi_v^{ss_1 s_2} = v \chi_v^{ss_1 s_2}. \quad (10.55)$$

Волновая функция свободных частиц в системе центра масс теперь характеризуется следующими квантовыми числами:

$$\psi_0(\mathbf{k}; s_1, s_2, s, v; \mathbf{r}).$$

Таковыми же квантовыми числами характеризуется и полная волновая функция. В простейшем случае упругого рассеяния частиц квантовые числа s_1 и s_2 сохраняются и могут быть опущены. Однако если взаимодействие зависит от спина, то как s , так и v могут изменяться в процессе рассеяния. Две частицы со спином $1/2$, первоначально находившиеся в синглетном состоянии ($s = 0$), после рассеяния могут разлетаться в триплетном состоянии ($s = 1$).

Подобный подход применим и к другим внутренним степеням свободы рассеиваемых частиц, таким, как *изотопический спин*, *странность* и т. д.

Таким образом, мы привели формулы для случая рассеяния одной частицы и для случая рассеяния двух частиц друг на друге формально к одинаковому виду, когда в рассмотрение входит только одна координата. Единственное существенное различие состоит в том, что в данном случае полный спин может изменяться, в то время как в случае рассеяния на фиксированном центре он обычно изменяться не может. Метод расчета, изложенный в п. 2—4, теперь можно незамедлительно перенести и на случай рассеяния двух частиц.

Выражения (10.11) и (10.12) следует заменить на

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) \approx \sum_{s'v'} \frac{(\mu k)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \chi_{v'}^{s'} [\delta_{ss'} \delta_{vv'} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + r^{-1} e^{ikr} A(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv)] \quad (10.56)$$

и

$$A(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv) = -\frac{(2\pi)^2}{k} \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \psi_0^*(\mathbf{k}'s'v'; \mathbf{r}') \times \\ \times (\mathbf{r}' | H' | \mathbf{r}) \psi^{(+)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) = -\frac{(2\pi)^2}{k} T(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv). \quad (10.57)$$

После сказанного выше мы можем перейти к подробному рассмотрению рассеяния на сферически симметричных потенциалах.

§ 3. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ РАССЕЯНИЕ (ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

Обратимся к уравнению Липпмана — Швингера (10.10) и допустим, что взаимодействие описывается локальным потенциалом, не зависящим от спина

$$(\mathbf{r} | H' | \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}').$$

В этом случае нет необходимости сохранять у волновой функции спиновые индексы и можно просто написать

$$\psi^{(+)}(\mathbf{k}; \mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{k}; \mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' K(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi^{(+)}(\mathbf{k}; \mathbf{r}'), \quad (10.58)$$

где, согласно (10.6),

$$K(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}').$$

Решение этого уравнения, конечно, является также решением трехмерного уравнения Шредингера

$$-\nabla^2 \Psi + 2\mu V(\mathbf{r}) \Psi = k^2 \Psi, \quad (10.59)$$

так что при рассмотрении свойств $\psi^{(+)}$ можно было бы исходить из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Однако значительно проще иметь дело непосредственно с интегральным уравнением (10.58), которое включает также граничные условия.

1. Борновский ряд и ряд Фредгольма

Для решения уравнения (10.58) можно применить весь аппарат, изложенный в гл. 9. Сначала установим, принадлежит ли ядро K классу Гильберта — Шмидта или нет:

$$\text{Sp } K^\dagger K = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{-2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \text{Im } k}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} |V(\mathbf{r})|^2 = \\ = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{r} |V(\mathbf{r})|^2 \int d\mathbf{r}' r'^{-2} e^{-2r' \text{Im } k}. \quad (10.60)$$

В (10.60) произведено смещение начала отсчета переменной интегрирования \mathbf{r}' . Таким образом, при выполнении условия

$$\int d\mathbf{r} |V(\mathbf{r})|^2 < \infty \quad (10.61)$$

ядро принадлежит классу L^2 , пока энергия комплексна, поэтому применима вся теория, изложенная ранее. Мы должны специально считать, что $\text{Im } k > 0$, т. е. значения энергии $E = k^2/2\mu$ остаются на плоскости, имеющей разрез

вдоль положительной действительной полуоси, или на первом листе римановой поверхности, определяемой отображением $E = k^2/2\mu$, которое переводит верхнюю полуплоскость комплексной k -плоскости на E -плоскость с разрезом от $E = 0$ до $E = +\infty$. Это так называемый *физический лист*. Однако, когда k приближается к действительной оси или когда E приближается к разрезу, след $\text{Sp } K^\dagger K$ стремится к бесконечности независимо от того, насколько хорошим является поведение потенциала и насколько слабым является взаимодействие. В соответствии с результатами гл. 9 имеется ряд способов обойти эту трудность.

Первый из них состоит в том, чтобы умножить (10.58) на $|V(\mathbf{r})|^{1/2}$ и написать (в упрощенном виде)

$$V^{1/2}\psi^{(+)} = V^{1/2}\psi_0 + \int d\mathbf{r}' \mathfrak{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V^{1/2}(\mathbf{r}') \psi^{(+)}(\mathbf{r}'),$$

где

$$\mathfrak{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi} V^{1/2}(\mathbf{r}) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V^{1/2}(\mathbf{r}').$$

Последний подход, однако, несколько осложняется тем обстоятельством, что если $V(\mathbf{r})$ изменяет знак, то квадратный корень не определен однозначно. Как было отмечено в гл. 9, § 1, это не вызывает серьезных трудностей, но имеется другой простой метод, свободный от указанного недостатка. Запишем выражение, предшествующее формуле (9.6a),

$$V(\mathbf{r}) = |V(\mathbf{r})| v(\mathbf{r}), \quad (10.62)$$

где $v(\mathbf{r})$ — знаковый множитель, равный $+1$ в области $V > 0$ и -1 в области $V < 0$. Умножая (10.60) на $|V|^{1/2}$ и переходя к интегральному уравнению с ядром

$$\mathfrak{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{2\pi} |V(\mathbf{r})|^{1/2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} |V(\mathbf{r}')|^{1/2} v(\mathbf{r}') = -\overline{\mathfrak{K}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') v(\mathbf{r}'), \quad (10.63)$$

для которого при $\text{Im } k \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} \text{Sp } \mathfrak{K}^\dagger \mathfrak{K} &= \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' |V(\mathbf{r})| |V(\mathbf{r}')| \frac{e^{-2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\text{Im } k}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \leq \\ &\leq \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' |V(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}')| |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-2}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Ясно, что эта величина конечна даже при $\text{Im } k = 0$, если выполняются условия

$$\int d\mathbf{r} |V(\mathbf{r})| < \infty$$

и

$$\int d\mathbf{r}' |V(\mathbf{r}'-\mathbf{r})| r'^{-2} \leq M < \infty, \quad (10.65)$$

где константа M не зависит от \mathbf{r} . Однако эти условия являются лишь достаточными, но не необходимыми. Во всяком случае, существует широкий класс потенциалов, для которых \mathfrak{K} принадлежит классу Гильберта — Шмидта и для которых применима теория, изложенная в гл. 9.

Если взаимодействие является достаточно слабым, так что оператор $\mathfrak{K}(E)$ не имеет ни одного собственного значения $\alpha(E)$ вне единичного круга, то борновский ряд

$$(1 - \mathfrak{K})^{-1} = 1 + \mathfrak{K} + \mathfrak{K}^2 + \dots$$

сходится. Для того чтобы применить результаты гл. 9, § 1, п. 1, рассмотрим сначала ядро \mathfrak{K} при отрицательных значениях энергии ($k = i|k|$). При этом

оператор $\overline{\mathcal{K}}$ эрмитов и неотрицательно определен. Если ϕ_α — собственная функция оператора \mathcal{K} , принадлежащая собственному значению α , то

$$\int dr' \mathcal{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi_\alpha(\mathbf{r}') = \alpha \phi_\alpha(\mathbf{r})$$

и умножение на $\phi_\beta^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r})$ с последующим интегрированием показывает, что векторы ϕ_α ортогональны в несколько видоизмененном смысле и могут быть нормированы следующим образом:

$$\int dr \phi_\beta^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \phi_\alpha(\mathbf{r}) = -\delta_{\alpha\beta} \operatorname{sgn} \alpha, \quad (10.66)$$

где $\operatorname{sgn} \alpha$ означает алгебраический знак собственного значения α . Функции ϕ_α образуют полный набор

$$-\sum_\alpha \operatorname{sgn} \alpha \phi_\alpha(\mathbf{r}) \phi_\alpha^*(\mathbf{r}') = v(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.67)$$

Благодаря инвариантности относительно обращения времени оператор $\overline{\mathcal{K}}$ является действительным и симметричным. Следовательно, функции ϕ_α можно выбрать так, чтобы они были действительными:

$$-\sum_\alpha \operatorname{sgn} \alpha \phi_\alpha(\mathbf{r}) \phi_\alpha(\mathbf{r}') = v(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.67a)$$

Если теперь допустить комплексные значения E , обойти вокруг точки $E = 0$ и подойти к положительной действительной полуоси, то оператор $\overline{\mathcal{K}}$ больше не будет эрмитовым. Поэтому, так же как и в гл. 9, § 1, мы должны дополнительно рассмотреть собственные функции оператора $\overline{\mathcal{K}}^\dagger v$, или в операторной записи

$$v \overline{\mathcal{K}}^\dagger v \overline{\phi}_{\alpha*} = \overline{\mathcal{K}}^\dagger v \overline{\phi}_{\alpha*} = \alpha^* \overline{\phi}_{\alpha*}.$$

Поскольку $\overline{\mathcal{K}}$ — симметричный оператор, то функции $\overline{\phi}_{\alpha*}$ можно выбрать, чтобы они были просто комплексно сопряженными для функций ϕ_α :

$$\overline{\phi}_{\alpha*}(\mathbf{r}) = \phi_\alpha^*(\mathbf{r}).$$

Функции $\phi_{\alpha*}^*$ ортогональны (в новом смысле) исходным собственным функциям

$$\int dr \phi_{\alpha*}^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \phi_\beta(\mathbf{r}) = \int dr \phi_\alpha(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \phi_\beta(\mathbf{r}) = 0, \quad \alpha \neq \beta, \quad (10.68)$$

и их можно нормировать следующим образом:

$$\int dr \phi_\alpha^2(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) = \begin{cases} -1 & \text{для притягивательных } \alpha, \\ +1 & \text{для отталкивательных } \alpha, \end{cases} \quad (10.68a)$$

где использовано деление собственных значений α на отталкивательные и притягивательные соответственно тому, являются ли они отрицательными или положительными при $E < 0$ (гл. 9, § 1, п. 1). Нормировку (10.68) можно обеспечить при условии, что исключаются энергии, при которых

$$\int dr \phi_\alpha^2(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) = 0. \quad (10.69)$$

Мы знаем, что при такой энергии не удастся произвести аналитическое продолжение функций $\alpha(E)$ и $\phi_\alpha(E)$ и, следовательно, невозможно и аналитическое продолжение условия (10.66). Далее имеем

$$\mathcal{K}(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \mathcal{K}^*(E^*; \mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

следовательно,

$$\alpha(E) = \alpha^*(E^*) \quad (10.70)$$

и

$$\phi_\alpha(E; \mathbf{r}) = \phi_\alpha^*(E^*; \mathbf{r}), \quad (10.71)$$

поскольку для отрицательных действительных E собственные функции выбраны действительными. Левую часть условия полноты (10.67а) для отрицательных действительных E нужно теперь разбить на две суммы, соответствующие притягивательным и отталкивательным собственным значениям. Соотношение (10.67а) теперь можно аналитически продолжить на комплексные значения E и затем с помощью обхода вокруг точки $E = 0$ на положительную действительную полуось

$$\left(\sum_{\text{отталк.}} - \sum_{\text{притяг.}} \right) \phi_\alpha(E; \mathbf{r}) \phi_\alpha(E; \mathbf{r}') = v(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (10.67б)$$

Если $\alpha(E)$ и $\phi_\alpha(E; \mathbf{r})$ — собственное значение и собственная функция оператора $\mathcal{K}(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$, то

$$\iint \phi_\alpha^*(E) \mathcal{K}(E) \phi_\alpha(E) = \alpha(E) \iint |\phi_\alpha(E)|^2.$$

Однако из (10.63) при положительной энергии следует, что

$$\overline{\mathcal{K}}(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \leq \overline{\mathcal{K}}(0; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (10.72)$$

и поэтому

$$\left| \iint \phi_\alpha^*(E) \mathcal{K}(E) \phi_\alpha(E) \right| \leq \iint |\phi_\alpha(E)| \overline{\mathcal{K}}(0) |\phi_\alpha(E)|.$$

Разложим теперь $|\phi_\alpha(E)|$ по базису собственных функций $\phi_\beta(0)$ оператора $\overline{\mathcal{K}}(0)$, т. е. оператора, который получается из $\mathcal{K}(0)$ при замене потенциала V на $-|V|$:

$$|\phi_\alpha(E)| = \sum_{\beta'(0)} C_\beta \phi_\beta(0),$$

где коэффициенты

$$C_\beta = \int \phi_\beta(0) |\phi_\alpha(E)|$$

действительны. Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint |\phi_\alpha(E)| \overline{\mathcal{K}}(0) |\phi_\alpha(E)| &= \sum_{\beta'(0)} C_\beta^2 \beta'(0) \leq \\ &\leq \beta'(0)_{\text{макс}} \sum_{\beta'(0)} C_\beta^2 = \beta'(0)_{\text{макс}} \iint |\phi_\alpha(E)|^2 \end{aligned}$$

и можно сделать вывод о том, что

$$|\alpha(E)| \leq \beta'(0)_{\text{макс}}, \quad (10.73)$$

т. е. ни одно собственное значение оператора $K(E)$, соответствующего потенциалу V , не может превосходить по величине ведущее собственное значение оператора $K'(0)$, соответствующего потенциалу $-|V|$. Из этого утверждения сразу же следует, что для равномерной сходимости борновского ряда по степеням потенциала V при всех значениях энергии достаточно, чтобы потенциал $-|V|$ не давал ни одного связанного состояния. Если потенциал V нигде не меняет знака, то это условие, очевидно, будет также и необходимым.

Высокоэнергетический предел. Исследуем далее поведение ядра \mathcal{K} в пределе высоких энергий. Рассмотрим выражение

$$\mathcal{K}^2(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 |V(\mathbf{s})V(\mathbf{t})|^{1/2} v(\mathbf{t}) \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \frac{e^{ik(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|+|\mathbf{r}-\mathbf{t}|)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}||\mathbf{r}-\mathbf{t}|}.$$

Используя в интеграле эллиптические координаты

$$\xi = \frac{1}{2} (|\mathbf{r}-\mathbf{s}| + |\mathbf{r}-\mathbf{t}|),$$

$$a\eta = \frac{1}{2} (|\mathbf{r}-\mathbf{s}| - |\mathbf{r}-\mathbf{t}|), \quad a = |\mathbf{s}-\mathbf{t}|,$$

φ = азимутальный угол относительно вектора $\mathbf{s}-\mathbf{t}$,

для которых
$$\frac{d\mathbf{r}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}||\mathbf{r}-\mathbf{t}|} = d\xi d\eta d\varphi,$$

получаем

$$\mathcal{K}^2(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 |V(\mathbf{s})V(\mathbf{t})|^{1/2} v(\mathbf{t}) \int_a^\infty d\xi \int_{-1}^1 d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi e^{2ih\xi} V.$$

Согласно лемме Римана — Лебега, при $k \rightarrow \infty$ интеграл по \mathbf{r} стремится к нулю. Кроме того, он стремится к нулю равномерно как по \mathbf{s} , так и по \mathbf{t} . Вместо того чтобы доказывать это в самом общем случае, мы можем допустить, что V — дифференцируемая функция, и произвести интегрирование по частям. (Подробный вывод мы предоставляем читателю ¹.) В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Sp } \mathcal{K}^2 \mathcal{K}^{2\dagger} &= \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^4 \int ds \int dt |V(\mathbf{s})V(\mathbf{t})| \left| \int d\xi d\eta d\varphi e^{2ih\xi} V \right|^2 \rightarrow \\ &\rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (10.74)$$

Если теперь применить неравенство Шварца к шестикратному интегралу, содержащемуся в выражении для следа, то для каждого интегрального ядра A имеем ²)

$$\|A\|^2 \leq \text{Sp } AA^\dagger. \quad (10.75)$$

Полагая $A = \mathcal{K}^2$, находим, что

$$\|\mathcal{K}^2\| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (10.76)$$

Из полученного результата вытекает, что все собственные значения оператора \mathcal{K}^2 и, следовательно, все собственные значения $\alpha(E)$ оператора K должны равномерно стремиться к нулю при $E \rightarrow +\infty$. Следовательно, существует энергия E_0 , выше которой борновский ряд равномерно сходится; более того, если энергия E достаточно велика, то первое борновское приближение должно быть хорошим.

В комплексной k -плоскости ситуация, конечно, значительно проще. Если $\text{Im } k > 0$, т. е. если мы находимся на физическом листе плоскости E , то оператор K принадлежит классу Гильберта — Шмидта. Из формулы (10.64) следует, что

$$\text{Sp } K^\dagger K \rightarrow 0 \quad \text{при } \text{Im } k \rightarrow +\infty$$

и поэтому, согласно (10.75), имеем

$$\|K\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \text{Im } K \rightarrow +\infty. \quad (10.77)$$

¹) См. [937], приложение и гл. 4, а также [482], приложение.

²) Здесь $\|A\|$ означает норму оператора, определенную в гл. 6, § 7, п. 2.

Ясно, что условие (10.76) выполняется также и для $\text{Im } k > 0$ при $\text{Re } k \rightarrow \infty$. Оно справедливо для любых направлений в верхней полуплоскости k -плоскости. Следовательно, всюду на физическом листе, включая границу, т. е. и на разрезе, имеем

$$\mathcal{G}(E) \rightarrow G(E) \text{ при } |E| \rightarrow \infty. \quad (10.78)$$

Теория Фредгольма. Обратимся теперь к применению теории Фредгольма. В своей первоначальной форме метод Фредгольма не применим, поскольку оператор K (и \mathcal{K}) на главной диагонали, т. е. при $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, обращается в бесконечность. Как показано в гл. 9, § 3, эту трудность можно обойти либо путем «вытаскивания ядовитого зуба», либо итерируя оператор K . В первом случае мы строим ядро резольвенты, используя (9.84) и (9.85). Во втором случае с помощью первоначального метода Фредгольма мы строим оператор $(1 - K^2)^{-1}$. Однако поскольку оператор $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ не ограничен при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$, то в любом случае для доказательства сходимости ряда, полученного первым методом, нужно использовать ряд, полученный вторым методом. Запишем оператор \mathcal{K}^2 в виде

$$\mathcal{K}^2(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = |V(\mathbf{s})V(\mathbf{t})s^{-1}t^{-1}|^{1/2} e^{ih|s-t|} \mathcal{A}(\mathbf{s}, \mathbf{t}), \quad (10.79)$$

где

$$\mathcal{A}(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 v(\mathbf{t})(st)^{1/2} \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}) \frac{e^{ih(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|+|\mathbf{r}-\mathbf{t}|-|s-t|)}}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}||\mathbf{r}-\mathbf{t}|}.$$

Поскольку

$$|\mathbf{r}-\mathbf{s}|+|\mathbf{r}-\mathbf{t}| \geq |s-t|,$$

то для всех k при условии $\text{Im } k \geq 0$ имеем

$$|\mathcal{A}(\mathbf{s}, \mathbf{t})| \leq \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 (st)^{1/2} \int d\mathbf{r} \frac{|V(\mathbf{r})|}{|\mathbf{r}-\mathbf{s}||\mathbf{r}-\mathbf{t}|}.$$

Правая часть этого неравенства *равномерно ограничена* при весьма общих условиях на потенциал

$$|\mathcal{A}(\mathbf{s}, \mathbf{t})| \leq N < \infty. \quad (10.80)$$

Строгое доказательство этого утверждения в предположении, что

$$\int_0^\infty dr r^{-1} |V(\mathbf{r})| < \infty \quad (10.81)$$

и что

$$r^2 |V(\mathbf{r})| \leq M < \infty, \quad (10.81a)$$

можно найти в работе [453], приложение III. Если в формуле (9.75) использовать соотношения (10.79) и (10.80), то можно будет применить общее доказательство сходимости ряда Фредгольма для оператора \mathcal{K}^2 . Таким образом, проитерированное один раз ядро \mathcal{K}^2 имеет вполне определенный детерминант Фредгольма и резольвенту, если только не выполняется равенство

$$\det(1 - \gamma \mathcal{K}^2) = \det(1 - \gamma K^2) = 0.$$

Если последнее равенство имеет место при $\gamma = 1$, то это означает появление связанного состояния. Таким образом, используя метод Фредгольма, всегда можно построить точную функцию Грина в виде

$$|V|^{1/2} \mathcal{G} = (1 - \mathcal{K}^2)^{-1} (1 + \mathcal{K}) |V|^{1/2} G$$

для любых энергий на физическом листе, включая границу области $E > 0$. Кроме того, как было показано выше, при $|E| \rightarrow \infty$ функция \mathcal{G} сходится к G по норме [см. (10.78)].

2. Аналитичность T-матрицы (дисперсионные соотношения)

Обсудим теперь поведение T-матрицы как функции энергии на физическом листе, а также на положительной действительной полуоси. При рассмотрении поведения функции $\mathcal{G}(E)$ никаких трудностей не возникает. К осложнениям приводит дополнительная зависимость матричных элементов от энергии на энергетической поверхности. Согласно (10.13), (10.2) и (7.46), амплитуда рассеяния определяется интегралами

$$-\frac{(2\pi)^2}{k} T(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) - \\ - \frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')} V(\mathbf{r}') \mathcal{G}(E; \mathbf{r}', \mathbf{r}) V(\mathbf{r}), \quad (10.82)$$

где

$$k^2 = \mathbf{k}'^2 = k^2 = 2\mu E.$$

Если считать, что E может принимать комплексные значения, то функция \mathcal{G} обладает вполне определенным аналитическим продолжением. Однако если потенциал не обращается в нуль за пределами конечной области, то экспоненциальный рост подынтегральных функций $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ и $e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'}$ может вызывать некоторые затруднения.

Будем считать, что потенциал является сферически симметричным, т. е. зависит только от модуля вектора \mathbf{r} :

$$V(\mathbf{r}) = V(r).$$

Тогда амплитуда A является функцией E и угла рассеяния θ между векторами \mathbf{k}' и \mathbf{k} . Однако ввиду отмеченных выше трудностей, связанных с экспоненциальным ростом подынтегральных функций, неудобно считать θ фиксированным и одновременно считать, что E может принимать комплексные значения. Вместо этого введем передаваемый импульс при рассеянии

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad (10.83)$$

абсолютная величина которого равна

$$\tau = 2k \sin \frac{1}{2} \theta. \quad (10.84)$$

Амплитуду A можно рассматривать как функцию E и τ , и при этом можно считать, что E комплексна, а τ фиксирован и действителен. Однако в этом случае нельзя пользоваться соотношением $k = \hat{k}k$ и считать, что как \hat{k} , так и τ фиксированы, поскольку

$$\hat{k} \cdot \boldsymbol{\tau} = -2k \sin^2 \frac{1}{2} \theta = -\frac{\tau^2}{2k}.$$

Поэтому вместо вектора \mathbf{k} в качестве второго вектора будем использовать вектор

$$\boldsymbol{\pi} = \frac{1}{2} (\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad \pi^2 = k^2 - \frac{1}{4} \tau^2. \quad (10.85)$$

Вектор $\boldsymbol{\pi}$ всегда ортогонален $\boldsymbol{\tau}$:

$$\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0. \quad (10.86)$$

Теперь векторы $\boldsymbol{\tau}$ и $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ можно считать постоянными, а E и π^2 — одновременно принимающими комплексные значения.

Запишем амплитуду рассеяния в виде

$$A(E, \tau) = -\frac{\mu}{2\pi} \int dr e^{-i\tau \cdot r} V(r) - \\ -\frac{\mu}{2\pi} \int dr' \int dr |V(r') V(r)|^{1/2} v(r) v(r') \times \\ \times e^{-1/2i\tau \cdot (r+r')} \mathfrak{G}(E, \pi; \mathbf{r}', \mathbf{r}), \quad (10.87)$$

где $v(r)$ — знаковый множитель для потенциала V , определенный в (10.62), а функция Грина равна

$$\mathfrak{G}(E, \pi; \mathbf{r}', \mathbf{r}) = |V(r) V(r')|^{1/2} e^{i\pi \cdot (r-r')} \mathfrak{G}(E; \mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (10.88)$$

Новая функция Грина \mathfrak{G} удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \mathfrak{G}_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) + \int dr'' \mathfrak{G}_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') v(\mathbf{r}'') \mathfrak{G}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}), \quad (10.89)$$

где

$$\mathfrak{G}_0(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\frac{\mu}{2\pi} |V(r) V(r')|^{1/2} \frac{e^{i[k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + \pi \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (10.90)$$

Проинтегрировав один раз уравнение (10.89), получим

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{L} + \mathfrak{K}\mathfrak{G}, \quad (10.89a)$$

где

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{K}$$

и

$$\mathfrak{K}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = |V(r) V(r') r^{-1} r'^{-1}|^{1/2} \mathcal{A}(\mathbf{r}', \mathbf{r}) e^{i[k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| + \pi \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')]} \quad (10.91)$$

Определение ядра \mathcal{A} дано после формулы (10.79). При выполнении условий (10.81) и (10.81a) ядро \mathcal{A} является аналитической операторной функцией переменной k , регулярной в полуплоскости $\text{Im } k > 0$ и непрерывной всюду в этой области, включая границу $\text{Im } k = 0$. Что касается экспоненты, то функция

$$h(k) = k + \xi \left(k^2 - \frac{1}{4} \tau^2 \right)^{1/2}, \quad -1 \leq \xi \leq 1,$$

где $\xi = \tau \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}') / \tau |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, является аналитической в k -плоскости, имеющей разрез от $k = -1/2\tau$ до $k = +1/2\tau$. Граничные точки этого разреза являются ее точками ветвления. Однако для всех $\text{Im } k \geq 0$ имеем

$$\text{Im} \left(k^2 - \frac{1}{4} \tau^2 \right)^{1/2} = 2^{-1/2} \left(\left| k^2 - \frac{1}{4} \tau^2 \right| - \text{Re } k^2 + \frac{1}{4} \tau^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq 2^{-1/2} \left(|k|^2 - \text{Re } k^2 + \frac{1}{2} \tau^2 \right)^{1/2} \leq \text{Im } k + \frac{1}{2} \tau$$

и, следовательно,

$$\text{Im } h(k) \geq -\frac{1}{2} \tau.$$

Поэтому если считать, что кроме (10.81) и (10.81a) для некоторого $\alpha > 0$ выполняется неравенство

$$\int_0^\infty dr r^2 e^{\alpha r} |V(r)| < \infty, \quad (10.92)$$

то при условии, что

$$\tau \leq 2\alpha, \quad (10.93)$$

оператор \mathfrak{K} будет аналитической (операторной) функцией переменной k , регулярной при $\text{Im } k > 0$ и непрерывной в области $\text{Im } k \geq 0$. Доказательство данного утверждения основано на применении соотношений (10.80) и (10.75) как к оператору \mathfrak{K} , так и к его производной по k . То обстоятельство, что в (10.92) необходимо ввести множитель r^2 , обусловлено тем, что производная по k приводит к появлению дополнительных множителей r и r' .

Теперь с помощью метода Фредгольма построим функцию Грина \mathfrak{G} согласно (10.89a). Метод Фредгольма одинаково хорошо применим для определения как функции \mathfrak{G} , так и функции \mathfrak{G}_0 . Поэтому можно сделать вывод, что если условие (10.93) выполнено, то \mathfrak{G} является аналитической (операторной) функцией переменного k , регулярной в верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ (за исключением точек, соответствующих связанным состояниям, в которых она имеет простые полюсы) и непрерывной в области $\text{Im } k \geq 0$. (Относительно дополнительных полюсов, обусловленных связанными состояниями потенциала $-V$, см. замечание в конце гл. 9, § 3.)

Кроме того, аналогично доказательству соотношения (10.76) можно доказать, что для всех k в области $\text{Im } k \geq 0$

$$\|\mathfrak{K}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |k| \rightarrow \infty. \quad (10.94)$$

Используя (10.94) и (10.78), получаем, что

$$\mathfrak{G}(E, \pi) \rightarrow \mathfrak{G}_0(E, \pi) \quad \text{при} \quad |E| \rightarrow \infty \quad (10.95)$$

на физическом листе, включая его границу $E > 0$.

Рассмотрим теперь поведение амплитуды рассеяния (10.87). Если потенциал подчиняется условию (10.92), то второй интеграл (10.87) представляет собой матричный элемент оператора \mathfrak{G} , вычисленный между нормируемыми состояниями. Следовательно, данный матричный элемент является аналитической функцией переменного E , регулярной в той же области, в которой регулярен оператор \mathfrak{G} . Согласно (10.95), при $|E| \rightarrow \infty$ этот матричный элемент стремится к соответствующему матричному элементу оператора \mathfrak{G}_0 . Поэтому, согласно лемме Римана — Лебега, этот интеграл в пределе обращается в нуль. Первый член в (10.87), представляющий борновское приближение для амплитуды рассеяния, конечно, не зависит от E .

Выводы. Сформулируем вкратце полученные результаты. Если потенциал подчиняется условиям (10.81), (10.81a) и (10.92), то при $\tau < 2\alpha$ величина

$$B(E, \tau) \equiv A(E, \tau) + \frac{\mu}{2\pi} \int dr e^{-i\tau \cdot r} V(r)$$

является аналитической функцией переменной E , регулярной на физическом листе в открытой области, $\text{Im } k > 0$, и непрерывной в этой области, включая границу $E > 0$, за исключением точек на отрицательной действительной полуоси, соответствующих связанным состояниям, в которых рассматриваемая величина имеет простые полюсы. При $|E| \rightarrow \infty$ по любому направлению в разрезанной E -плоскости B стремится к нулю.

Дисперсионные соотношения. Указанные свойства функции $B(E, \tau)$ можно использовать для вычисления интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dE' \frac{B(E', \tau)}{E' - E}.$$

Контур интегрирования проходит по нижнему берегу разреза от $E' = \infty$ до $E' = 0$, затем вокруг точки $E' = 0$ и далее по верхнему берегу разреза до $E' = \infty$. Контур замкнут на бесконечности. Обход контура совершается

против часовой стрелки. Здесь энергия E действительна. Используя теорему Коши, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dE' \frac{B(E', \tau)}{E' - E} = \sum_n \frac{R_n(\tau)}{E_n - E},$$

где E_n — энергии связанных состояний и R_n — соответствующие вычеты функции B . Часть интеграла по контуру на бесконечности обращается в нуль. Для вычисления другой части интеграла можно воспользоваться тем обстоятельством, что вследствие действительности и инвариантности V относительно вращений имеем

$$\begin{aligned} A(E^*, \tau) &= A^*(E, \tau), \\ B(E^*, \tau) &= B^*(E, \tau). \end{aligned} \quad (10.96)$$

Поэтому получаем

$$\int_0^\infty dE' \frac{B(E' + i\varepsilon, \tau)}{E' - E + i\varepsilon} - \int_0^\infty dE' \frac{B(E' - i\varepsilon, \tau)}{E' - E - i\varepsilon} = -2\pi i \operatorname{Re} B(E, \tau) + 2i \mathfrak{P} \int_0^\infty dE' \frac{\operatorname{Im} B(E', \tau)}{E' - E},$$

где \mathfrak{P} — символ главного значения по Коши. При выводе этого соотношения была использована формула (7.7), а также то обстоятельство, что физическая амплитуда должна вычисляться с помощью функции Грина *расходящейся волны*, т. е. на верхнем берегу разреза. Из полученного результата следует, что

$$\operatorname{Re} B(E, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dE' \frac{\operatorname{Im} B(E', \tau)}{E' - E} + \sum_n \frac{R_n(\tau)}{E - E_n}.$$

Поскольку в борновском приближении (БП) амплитуда рассеяния

$$\begin{aligned} A_{\text{БП}}(\tau) &= -\frac{\mu}{2\pi} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau}} V(r) = \\ &= -\frac{2\mu}{\tau} \int_0^\infty dr r \sin r\tau V(r) \end{aligned} \quad (10.97)$$

действительна, то

$$\operatorname{Re} A(E, \tau) = A_{\text{БП}}(\tau) + \sum_n \frac{R_n(\tau)}{E - E_n} + \frac{1}{\pi} \mathfrak{P} \int_0^\infty dE' \frac{\operatorname{Im} A(E', \tau)}{E' - E}. \quad (10.98)$$

Поскольку (10.98) имеет вид, аналогичный соответствующему соотношению для рассеяния электромагнитных волн (гл. 4, § 2), то его обычно называют *дисперсионным соотношением*. Как и в случае рассеяния электромагнитных волн, дисперсионное соотношение имеет наибольшее физическое содержание, когда угол рассеяния равен нулю, т. е. *для рассеяния вперед*. Обратимся теперь к оптической теореме (7.55). Из (10.82) следует, что с помощью амплитуды рассеяния A оптическую теорему можно записать в виде

$$\operatorname{Im} A(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = \frac{k}{4\pi} \int d\Omega_{\mathbf{k}'} |A(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 = \frac{k}{4\pi} \sigma_{\text{полн}}(\mathbf{k}). \quad (10.99)$$

Вследствие сферической симметрии потенциала сечение $\sigma_{\text{полн}}$ не зависит от направления падающего пучка, т. е. от направления вектора \mathbf{k} . Таким образом, дисперсионные соотношения для рассеяния вперед имеют вид

$$\operatorname{Re} A(E, 0) = A_{\text{БП}}(0) + \sum_n \frac{R_n(0)}{E - E_n} + \frac{1}{4\pi^2} \mathfrak{P} \int_0^\infty dE' \frac{k' \sigma_{\text{полн}}(E')}{E' - E}, \quad (10.100)$$

где

$$A_{\text{БП}}(0) = -2\mu \int_0^{\infty} dr r^2 V(r). \quad (10.97a)$$

Таким образом, если известна зависимость полного сечения от энергии, то можно вычислить амплитуду рассеяния вперед. Соотношение (10.100) полезно сопоставить с (4.35).

На практике дисперсионное соотношение (10.98) для рассеяния под углом, отличным от нуля, значительно менее полезно, чем (10.100), по двум причинам. Во-первых, с точки зрения экспериментального определения или отыскания каким-либо другим способом правая часть (10.98) известна ничуть не лучше, чем левая. К тому же для рассеяния под углом не существует оптической теоремы, которая позволила бы упростить это соотношение. Во-вторых, и это более важно, интеграл в правой части содержит «нефизическую область». Из (10.84) следует, что для сохранения действительных значений угла рассеяния необходимо, чтобы

$$\tau \leq 2k.$$

Очевидно, что ни при каком упругом рассеянии импульс частицы не может измениться на величину, превышающую его удвоенное начальное значение. Следовательно, для того чтобы амплитуда рассеяния описывала физически возможный процесс, энергия при данном τ должна превышать величину

$$E_{\text{мин}} = \frac{\tau^2}{8\mu}.$$

Следует также подчеркнуть, что, в то время как соотношение (10.100) выполняется для таких потенциалов, которые, помимо условий (10.81) и (10.81a), удовлетворяют относительно слабому условию (10.92) с $\alpha = 0$:

$$\int_0^{\infty} dr r^2 |V(r)| < \infty,$$

для выполнения соотношения (10.98) необходимо, чтобы потенциал удовлетворял более жестким требованиям (10.92) и (10.93). Если асимптотически потенциал убывает не быстрее, чем *любая* экспонента (например, по гауссовскому закону), то обычно существует предельное значение передаваемого импульса, за которым любые дисперсионные соотношения перестают быть правильными.

3. Пример (потенциал Юкавы)

Если не считать кулоновских сил, которые будут рассмотрены в гл. 14, § 6, то не известно ни одного локального потенциала, для которого полное уравнение Шредингера допускало бы точное решение в замкнутой форме. Однако в целях иллюстрации можно исследовать некоторые приближения для специального случая потенциала Юкавы.

Итак, пусть

$$V(r) = \gamma r^{-1} e^{-r/R} \quad (10.101)$$

или в импульсном представлении

$$(\mathbf{p} | V | \mathbf{p}') = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r} e^{i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}} V(r) = \frac{\gamma}{2\pi^2 [R^{-2} + (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2]}. \quad (10.102)$$

Тогда, согласно (10.97), амплитуда рассеяния в борновском приближении имеет вид

$$A_{\text{БП}}(\tau) = -\frac{2\mu\gamma}{R^{-2} + \tau^2}. \quad (10.103)$$

Получить второе борновское приближение сложнее. Согласно (10.25) и (10.102), оно определяется интегралом вида

$$A_2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{2\mu^2\gamma^2}{\pi^2} \int d\mathbf{p}'' \{ [R^{-2} + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2] [R^{-2} + (\mathbf{p} - \mathbf{p}'')^2] (p^2 + i\epsilon - p''^2) \}^{-1}.$$

Здесь $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = k$. Интегрирование по углам можно выполнить по способу Фейнмана, а именно воспользовавшись тождеством

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\alpha \left(a \frac{1+\alpha}{2} + b \frac{1-\alpha}{2} \right)^{-2}.$$

Полагая

$$a = R^{-2} + (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')^2, \quad b = R^{-2} + (\mathbf{p} - \mathbf{p}'')^2,$$

для интеграла в выражении для A_2 получаем

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\alpha \int d\mathbf{p}'' (R^{-2} + k^2 + p''^2 - 2\mathbf{p}'' \cdot \mathbf{P})^{-2} (k^2 + i\epsilon - p''^2)^{-1},$$

где

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} \frac{1-\alpha}{2} + \mathbf{p}' \frac{1+\alpha}{2}.$$

Теперь нетрудно вычислить интеграл по $d\Omega_{\mathbf{p}''}$. Результат имеет вид

$$\pi \int_{-1}^1 d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} dp'' p''^2 [(k^2 - p''^2 + i\epsilon)(p''^2 + R^{-2} + k^2 - 2p''P) \times \\ \times (p''^2 + R^{-2} + k^2 + 2p''P)]^{-1}.$$

Замкнем контур интегрирования в верхней полуплоскости p'' -плоскости полукругом большого радиуса и выполним интегрирование с помощью теоремы о вычетах:

$$-2i\pi^2 k \int_0^1 d\alpha (f^2 - k^2\tau^2\alpha^2)^{-1} - 2\pi^2 R^{-2} \int_0^1 d\alpha (4R^{-2} + \tau^2 - \alpha^2\tau^2)^{-1/2} \times \\ \times (f^2 - k^2\tau^2\alpha^2)^{-1},$$

где

$$f^2 = R^{-4} + 4R^{-2}k^2 + k^2\tau^2. \quad (10.104)$$

Интеграл по α легко вычисляется; в результате имеем

$$A_2(E, \tau) = \frac{2\mu^2\gamma^2}{\tau f} \left(2 \operatorname{arctg} \frac{\tau}{2fR} + i \ln \frac{f+k\tau}{f-k\tau} \right). \quad (10.105)$$

Второе приближение для сечения рассеяния, порядка γ^3 , получается из перекрестного члена между $A_{\text{БП}}$ и A_2 , возникающего при вычислении $|A|^2$. Поскольку амплитуда $A_{\text{БП}}$ действительна, то вклад в сечение дает только действительная часть амплитуды A_2

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\mu^2\gamma^2}{(R^{-2} + \tau^2)^2} + \frac{16\mu^3\gamma^3}{(R^{-2} + \tau^2)\tau f} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{2fR} + \dots \quad (10.106)$$

Здесь функция f определяется формулой (10.104). Допустим, что передаваемый импульс имеет фиксированное не слишком малое значение. Тогда, если длина волны мала по сравнению с радиусом действия потенциала, т. е.

$$\frac{1}{k} \ll R, \quad (10.107)$$

то арктангенс можно заменить его аргументом и отношение второго борновского приближения к первому будет равно

$$\frac{2\mu\gamma}{k^2 R} \frac{R^{-2} + \tau^2}{4R^{-2} + \tau^2} \approx \frac{\gamma}{RE}. \quad (10.108)$$

Грубо говоря, величина γ/R является мерой интенсивности потенциала Юкавы в энергетических единицах. Как и следовало ожидать, при высоких энергиях преобладает борновское приближение, а формулы (10.107) и (10.108) вместе представляют более точную формулировку условия (9.29) для данного случая. Если передаваемый импульс мал по сравнению с обратным радиусом действия потенциала

$$\tau \ll R^{-1}, \quad (10.107a)$$

то для рассеяния почти вперед условие (10.107) не является необходимым. Если рассеяние происходит в конус, раствор которого становится все меньше и меньше с ростом энергии, то сечение имеет постоянную величину

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx 4\mu^2\gamma^2 R^4 + \frac{8\mu^3\gamma^3 R^5}{1 - 4k^2 R^2} + \dots \quad (10.106a)$$

Это выражение соответствует *дифракционному максимуму* в направлении вперед, ширина которого определяется соотношением (10.107a).

Рассмотрим поведение A_2 в зависимости от энергии для комплексных значений E при фиксированном τ . Формула (10.105), казалось бы, указывает на то, что при $f = \pm k\tau$, т. е. в точке

$$k = \pm i \frac{1}{2} R^{-1},$$

амплитуда A_2 имеет сингулярность.

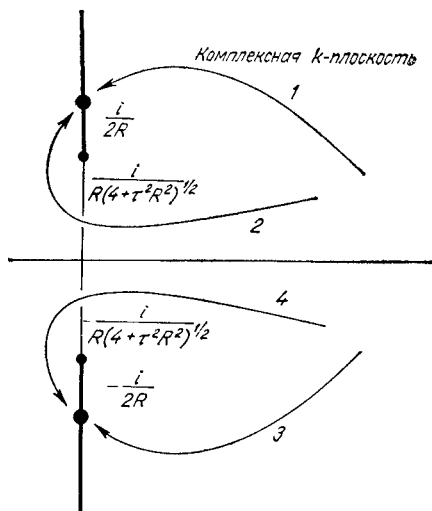
Однако в сущности это не совсем так. Одна из сингулярностей, имеющих в втором члене формулы (10.105), компенсируется сингулярностью, содержащейся в первом члене.

Это легко видеть, если записать два члена в скобках в правой части (10.105) в виде единого выражения

$$\ln \frac{(f + k\tau)(2f - i\tau R^{-1})}{(f - k\tau)(2f + i\tau R^{-1})}.$$

Функция f (определенная так, чтобы она была положительна для положительных k) при стремлении k к $+i/2R$ по кривой 1 фиг. 10.1 обращается в $+i\tau/2R$. Если же k приближается к $+i/2R$ по кривой 2, то f стремится к $-i\tau/2R$. В результате нули в числителе и знаменателе логарифма (оба нуля простые) сокращаются для обоих путей 1 и 2, показанных на фиг. 10.1. Однако если k стремится к $-i/2R$ по кривой 3, то f обращается в $-i\tau/2R$. Если же k приближается к $-i/2R$ по кривой 4, то f стремится к $+i\tau/2R$. В этих случаях нули не сокращаются и логарифм действительно имеет сингулярность.

Амплитуда A_2 может еще иметь сингулярность только при $f = 0$. Однако и здесь сингулярности на самом деле нет, так как если записать оба члена в виде одного логарифма, то в этой точке логарифм обращается в нуль. Таким образом, вопреки первому впечатлению A_2 является аналитической функцией переменной E , регулярной всюду на физическом листе ($\text{Im } k > 0$), что



Фиг. 10.1. Сингулярности амплитуды рассеяния на потенциале Юкавы во втором борновском приближении [см. (10.105)].

находится в соответствии с общими требованиями к амплитуде рассеяния, изложенными в § 3, п. 2. Конечно, полюсы, соответствующие связанным состояниям, не появляются ни в каком порядке теории возмущений. Наличие связанных состояний в то же время проявляется в том, что борновский ряд не сходится.

На втором листе римановой поверхности энергий ($\text{Im } k < 0$) A_2 регулярна не всюду. Проведенное выше предварительное рассмотрение показывает, что на этом листе A_2 имеет логарифмическую особенность в точке $k = -i/2R$. Поэтому на втором листе имеется разрез от точки $E = -1/8\mu R^2$ до бесконечности, который удобно направить вдоль отрицательной действительной полуоси.

Здесь уместно предварительно сказать несколько слов о результатах гл. 12. Как там будет показано, парциальные амплитуды для потенциала Юкавы на первом листе поверхности E имеют «левый разрез». Сейчас мы покажем, что полная амплитуда *не имеет такого разреза*. Для амплитуды во втором порядке это будет показано в явном виде, а более общее рассмотрение было проведено в § 3, п. 2 настоящей главы. Данное обстоятельство служит предупреждением против поспешных выводов из дисперсионных соотношений.

Мы можем также вычислить первые члены определителя Фредгольма Δ' для потенциала Юкавы. Согласно (9.85) имеем

$$\begin{aligned} \Delta' &= 1 - \text{Sp } GVG + \dots = \\ &= 1 - \frac{\gamma^2 \mu^2}{\pi^4} \int dp dp' (k^2 - p^2 + i\epsilon)^{-1} (k^2 - p'^2 + i\epsilon)^{-1} [R^{-2} + (p - p')^2]^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Интегралы легко вычисляются: в результате получаем

$$\Delta' = 1 + \frac{2\mu^2 \gamma^2 R^2}{2ikR - 1} + \dots \quad (10.109)$$

Как и следовало ожидать, Δ' является регулярной аналитической функцией для всех k , расположенных в верхней полуплоскости k -плоскости, т. е. на физическом листе. На втором листе Δ' имеет *полюс* при $k = -1/2iR^{-1}$.

Связанные состояния. Теперь можно использовать (10.109) для отыскания приближенного значения γ_0 интенсивности взаимодействия, которое необходимо для появления связанных состояний. При энергии, соответствующей связанному состоянию, определитель Фредгольма должен обращаться в нуль. Если интенсивность взаимодействия равна γ_0 , то это должно иметь место при энергии, равной нулю. Тогда из (10.109) следует, что

$$2\mu\gamma_0 R \approx \sqrt{2} = 1,41 \dots \quad (10.110)$$

В то же время известно «точное» значение этой величины ([76], формула (4.5Y))

$$2\mu\gamma_0 R \approx 1,68 \dots$$

Согласие является поразительно хорошим.

Если связанное состояние существует, то его энергию связи $E_{\text{св}}$ можно вычислить с помощью (10.109):

$$|k_{\text{св}}| R \approx (\mu\gamma R)^2 - \frac{1}{2}, \quad E_{\text{св}} = \frac{k_{\text{св}}^2}{2\mu} \quad (10.111)$$

Ясно, что это приближение ухудшается с ростом γ . Можно ожидать, что оно является хорошим только для очень малых энергий связи. Уже при $\mu\gamma_0 R = 1$ приближенное значение $|k_{\text{св}}| R \approx 0,5$ значительно превышает точное значение $|k_{\text{св}}| R = 0,2$ [743].

При $R \rightarrow \infty$ потенциал Юкавы переходит в кулоновский потенциал. В этом случае первое борновское приближение (10.103) для амплитуды рассея-

ния принимает вид

$$A_{\text{БП}} = -\frac{2\mu\gamma}{\tau^2}, \quad (10.112)$$

а соответствующее сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\gamma}{4E \sin^2(\theta/2)} \right]^2 \quad (10.113)$$

становится равным резерфордскому сечению при $\gamma = eZ$.

Рассмотрим, однако, второе борновское приближение. Действительная часть стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, но, поскольку при этом $f \rightarrow kt$, мнимая часть обращается в бесконечность. Как будет показано в гл. 14, § 6, этот факт объясняется тем, что вследствие медленного убывания кулоновского потенциала при $r \rightarrow \infty$ амплитуда рассеяния не может быть определена обычным образом. Ее фаза была бы бесконечной. Однако ее модуль конечен, причем он оказывается в точности равным значению амплитуды в первом борновском приближении. Если с помощью борновского ряда разложить абсолютную величину амплитуды рассеяния и ее фазу по степеням γ , то будет видно, что к трудностям приводит именно разложение фазы, которое не дает вклада в сечение. Определитель Фредгольма (10.109) при $R \rightarrow \infty$ стремится к бесконечности.

КОММЕНТАРИИ

К § 2. Отмеченные здесь специфические трудности, с которыми встречаются при использовании уравнения Липпмана — Швингера для случая, когда изучают рассеяние двух и более частиц, рассмотрены в работе Фолди и Тобокмана [268]. Подробное рассмотрение коэффициентов Клебша — Гордана можно найти в работах [718, 237, 912].

К § 3. К настоящему параграфу относится и большинство работ общего характера, указанных в гл. 9.

К § 3, п. 1. Метод использования выражения (10.63) для полярных ядер принадлежит Гарбе [319]. Применением этого метода посвящена работа Меетца [590]. Метод, изложенный в настоящем параграфе, в некоторой степени основан на этой работе. В частности, Меетцу принадлежит аналитическое продолжение условия полноты. Однако произведенное им обобщение формулы (10.73) и сделанные на основе этого выводы неправильны. Достаточное условие равномерной сходимости борновского ряда, приведенное после формулы (10.73), является незначительным обобщением условия, впервые доказанного несколько другим путем Дэвисом [197]. См. также статьи [398, 399]; в последней из них показано, что приведенное достаточное условие сходимости борновского ряда для всех значений энергии, вообще говоря, не является необходимым.

В работе Земаха и Клейна [937] показано, что при достаточно высокой энергии борновский ряд всегда сходится. Им по существу принадлежит и рассуждение, ведущее к формуле (10.74).

Использованию теории Фредгольма в задачах рассеяния посвящена фундаментальная работа Иоста и Пайса [453]; см. также работу Кури [482].

К § 3, п. 2. В этом пункте приведен упрощенный вариант доказательства, предложенного в работе Кури [482], который первым доказал дисперсионное соотношение (10.98) при указанных условиях. Дисперсионным соотношениям и свойствам аналитичности для нерелятивистского потенциального рассеяния посвящены также работы [1010, 490, 97, 98, 73, 489, 410, 356, 355, 264, 53, 51, 818, 433, 12]. Митра [603] рассмотрел случай, когда потенциал является сепарабельным. Обобщение на релятивистское потенциальное рассеяние дано в работах [320, 484]; см. также [385]. Связь с принципом причинности рассмотрена в работе [865].

К § 3, п. 3. Потенциал Юкавы впервые был введен им в работе [933] в качестве модели нуклон-нуклонного взаимодействия. Он получается в первом приближении, если считать, что нуклон-нуклонное взаимодействие обусловлено обменом мезонами массы $(cR)^{-1}$ (c — скорость света) по аналогии с электромагнитным взаимодействием, которое обусловлено обменом фотонами.

Расчет и обсуждение высших приближений для рассеяния на потенциалах Юкавы даны в работе [193]; см. также [453, 892].

В литературе по химической физике потенциал Юкавы известен под названием потенциала Дебая — Хюккеля.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что если взаимодействие представляет собой сумму N сепарабельных членов, то гамильтониан имеет самое большое N связанных состояний.

2. Если в одном из представлений оператор является сепарабельным, то он такой же и во всех других представлениях. Доказать это важное свойство такого оператора, не прибегая к конкретному представлению.

3. Допустим, что взаимодействие является сепарабельным. Найти волновую функцию в координатном представлении и выразить через нее амплитуду рассеяния.

4. Вычислить амплитуду рассеяния для взаимодействия вида

$$(\mathbf{r} | H' | \mathbf{r}') = \gamma f(r) f^*(r') \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'.$$

5. Вычислить амплитуду рассеяния для взаимодействия вида

$$(\mathbf{p} | H' | \mathbf{p}') = \gamma f(p) f^*(p') P_n(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}').$$

(P_n — полином Лежандра порядка n .)

6. Как выглядит взаимодействие задачи 5 в координатном представлении?

7. Поток частиц в точке \mathbf{r} определяется выражением

$$S = -\frac{i\hbar}{m} [\psi^*(\mathbf{r}) \nabla \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r}) \nabla \psi^*(\mathbf{r})].$$

Используя асимптотическое выражение (10.11а) волновой функции на больших расстояниях, выразить рассеянный поток через амплитуду рассеяния A .

8. Вывести выражение для элемента объема в эллиптических координатах, приведенное после формулы (10.73).

9. Произвести подробный вывод формулы (10.74).

10. Дать подробное доказательство неравенства (10.75).

11. Рассмотреть вывод дисперсионных соотношений для электромагнитного излучения, приведенный в гл. 4, § 2 и основанный на принципе причинности. Применит ли он для случая рассеяния квантовых частиц? Если нет, то почему?

12. В § 3, п. 2 (или для специального случая потенциала Юкавы в § 3, п. 3) дан вывод дисперсионных соотношений и исследованы аналитические свойства амплитуды рассеяния. Означают ли полученные там результаты, что $\int_{-1}^1 d\cos\theta A(E, \cos\theta)$ является аналитической функцией E на физическом листе? Если нет, то почему?

Одноканальное рассеяние бесспиновых частиц. I

§ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПАРЦИАЛЬНЫМ ВОЛНАМ

1. S-матрица и бегущие волны

Будем считать, что взаимодействие является локальным и сферически симметричным, т. е. описывается потенциалом, зависящим только от $r = |\mathbf{r}|$,

$$V(\mathbf{r}) = V(r).$$

Предположим далее, что у частицы (или частиц, если речь идет о потенциальном взаимодействии двух частиц) нет собственного углового момента. В этом случае большую пользу приносит разложение волновой функции и амплитуды рассеяния по базису из сферических гармоник.

Начнем с разложения свободной функции Грина¹⁾

$$G^\pm(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu \sum_{l,m} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') r^{-1} r'^{-1} G_l^\pm(k; r, r'), \quad (11.1)$$

где

$$G_l^\pm(k; r, r') = -e^{\mp i\pi l} k^{-1} u_l(kr_<) \omega_l^\pm(kr_>). \quad (11.2)$$

Функции Риккати — Бесселя u_l и ω_l^\pm определяются формулами (2.58) и (2.60). Обозначения выбраны так, что $r_<$ соответствует меньшей, а $r_>$ большей из величин r и r' . От квантового числа l функции G_l^\pm не зависят; это отражает то обстоятельство, что из всех величин, задающих направления \mathbf{r} и \mathbf{r}' , в функции Грина G^\pm входит явно лишь угол между этими векторами. Учитывая (2.18), разложение (11.1) можно записать также в виде

$$G^\pm = \frac{\mu}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}') r^{-1} r'^{-1} G_l^\pm(k; r, r'). \quad (11.1a)$$

Обе парциальные функции Грина G_l^\pm удовлетворяют обычному дифференциальному уравнению

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - k^2 \right] G_l^\pm(k; r, r') = -\delta(r-r'). \quad (11.3)$$

Согласно граничному условию, в точке $r=0$ (при фиксированном r') эти функции равны нулю, а при $r \rightarrow \infty$ они содержат только *расходящиеся* волны, т. е. не содержат вкладов типа e^{-ikr} . Более конкретно, при $r \rightarrow \infty$ асимптотическое выражение функций Грина радиального уравнения Шредингера имеет вид

$$G_l^\pm(k; r, r') \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -e^{\mp 1/2 i\pi l} k^{-1} u_l(kr') e^{\pm ikr}. \quad (11.4)$$

Они симметричны относительно перестановки переменных r и r' .

¹⁾ Напомним, что μ — приведенная масса частиц.

Аналогично разлагается свободная волновая функция. Учитывая формулу (2.57), ее можно представить в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned}\psi_0(\mathbf{k}; \mathbf{r}) &= \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_{l, m} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) i^l u_l(kr) = \\ &= \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (4\pi kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) u_l(kr).\end{aligned}\quad (11.5)$$

Тем же способом можно разложить и полную волновую функцию. Вследствие инвариантности потенциала V (и оператора ∇^2) относительно пространственных вращений она также может зависеть только от угла между вектором \mathbf{r} и направлением падающего пучка, т. е. вектором \mathbf{k} . Следовательно, ее можно записать в виде

$$\begin{aligned}\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}; \mathbf{r}) &= \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (4\pi kr)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \psi_l^{(\pm)}(k, r) = \\ &= \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_{l, m} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) i^l \psi_l^{(\pm)}(k, r),\end{aligned}\quad (11.6)$$

куда входят некоторые неизвестные коэффициенты $\psi_l^{(\pm)}(k, r)$.

Подставив все эти разложения в интегральное уравнение Липпмана — Швингера (10.58), воспользуемся ортогональностью сферических функций и инвариантностью потенциала V относительно пространственных вращений. Сравнивая почленно ряды, возникающие в левой и правой частях, для $\psi_l^{(\pm)}$ получаем линейное интегральное уравнение

$$\psi_l^{(\pm)}(k, r) = u_l(kr) + 2\mu \int_0^{\infty} dr' G_l^{\pm}(k; r, r') V(r') \psi_l^{(\pm)}(k, r').\quad (11.7)$$

Используя (11.3), легко показать, что ψ_l удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + 2\mu V(r)\right] \psi_l(k, r) = k^2 \psi_l(k, r).\quad (11.8)$$

Кроме того, зная поведение u_l и G_l , можно сделать вывод, что в точке $r = 0$ функция $\psi_l^{(\pm)}$ обращается в нуль, а при $r \rightarrow \infty$ она содержит сходящуюся волну только в первом слагаемом u_l . При достаточно сильных условиях на потенциал, которые более точно будут сформулированы несколько ниже, последнее означает, что при $r \rightarrow \infty$

$$\psi_l^{(\pm)}(k, r) \approx \frac{1}{2} e^{i1} e^{i\pi(l+1)} (e^{-ikr} - e^{-i\pi l} S_l e^{ikr}),\quad (11.9)$$

где S_l — некоторая неизвестная постоянная (зависящая от k , но не от r).

Разумеется, необходимо четко представлять себе физические явления, которые описываются парциальными функциями $\psi_l^{(\pm)}(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$, соответствующими угловым моментам l . В асимптотической области они содержат бегущие волны, распространяющиеся вдоль радиуса в положительном и отрицательном направлениях. Амплитуда сходящейся волны определяется интенсивностью пучка, а амплитуда расходящейся волны — свойствами рассеивателя. Кроме того, эти волны имеют вполне определенную угловую зависимость; она меняется с изменением величин l и m . При $l = 0$ волны изотропны. При более высоких значениях l имеются *стоячие* волны по углу θ ; узловыми поверхностями этих волн являются l фиксированных в пространстве конусов, оси которых направлены вдоль вектора \mathbf{k} . Наконец, азимутальной зависимости

соответствует некоторая волна, *распространяющаяся* вокруг вектора \mathbf{k} ; узловыми поверхностями волны являются l плоскостей, проходящих через вектор \mathbf{k} и вращающихся вокруг него.

Физический смысл величины l состоит в том, что сферические гармоники представляют собственные функции оператора орбитального углового момента [см. уравнения (2.16а) и (2.17)]. Поэтому, задавая l , мы фиксируем угловой момент частиц, так что слагаемое $l(l+1)/r^2$, входящее в уравнение (11.8), служит квантовомеханическим аналогом потенциала центробежных сил, фигурирующего в классических уравнениях движения. Физическое требование, чтобы волновая функция обладала хорошим поведением по *всем* направлениям \mathbf{r} , приводит к тому, что число l должно принимать только *целые* значения ¹⁾.

Амплитуда. Подобным образом по базису сферических функций можно разложить не только волновую функцию, но и амплитуду рассеяния $A(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. Благодаря инвариантности потенциала взаимодействия относительно пространственных вращений вся угловая зависимость амплитуды рассеяния описывается только углом между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' . Амплитуду можно представить в виде следующего ряда:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(k) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}') = \\ &= 4\pi \sum_{l,m} Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) a_l(k). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Коэффициенты a_l можно определить следующим образом. Сначала разложим слагаемые с плоской волной и амплитудой рассеяния, входящие в асимптотическое выражение (10.11) для волновой функции, с помощью формул (2.57) и (11.10). Затем левую часть (10.11) запишем в виде разложения (11.6), в которое подставим асимптотическое значение (11.9) функций $\psi_l^{(+)}(k, r)$. Сравнивая получающиеся таким способом ряды, находим

$$a_l = \frac{S_l - 1}{2ik}. \quad (11.11)$$

S-матрица и фазовые сдвиги. Подставим разложение (11.10) в соотношение (10.12), связывающее T-матрицу с амплитудой рассеяния. Полученный результат подставим в формулу (7.58), выражающую S-матрицу через T-матрицу. Используя (11.11), приходим к ряду для элемента S-матрицы:

$$S(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{l,m} Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}') S_l(k) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (11.12)$$

Этот ряд позволяет понять важность введения рассматриваемых величин S_l . Благодаря симметрии гамильтониана относительно пространственных вращений S-матрица в представлении угловых моментов диагональна, что отражает сохранение этих величин в процессе рассеяния. Числа S_l как раз и являются собственными значениями S-матрицы. Далее, в гл. 7, § 2, п. 4 мы видели, что в силу сохранения потока, обусловленного эрмитовостью гамильтониана, S-матрица должна быть унитарной. Поэтому ее собственные значения по модулю должны быть равны единице:

$$|S_l| = 1. \quad (11.13)$$

Следовательно, можно ввести в рассмотрение некоторый действительный фазовый угол δ_l , определенный с точностью до слагаемого, кратного π , такой, что

$$S_l = e^{2i\delta_l}. \quad (11.14)$$

¹⁾ Напомним общепринятую терминологию, происходящую от обозначений линий в атомных спектрах: $l = 0$, s-волна; $l = 1$, p-волна; $l = 2$, d-волна и т. д.

Смысл величин δ_l можно уяснить, если подставить (11.4) в формулу (11.9) и определенным образом скомбинировать возникающие экспоненты. В результате асимптотика волновой функции $\psi_l^{(+)}$ принимает следующий вид:

$$\psi_l^{(+)} \approx e^{i\delta_l} \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l \right). \quad (11.15)$$

Сравним ее с асимптотическим выражением для волновой функции свободной частицы в отсутствие рассеивателя:

$$u_l \approx \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l \right).$$

Единственное различие в волновых функциях при наличии и в отсутствие рассеивателя заключается в появлении в первом случае *фазового сдвига* δ_l . Полное решение представляет суперпозицию бесконечного числа сферических волн указанного вида; как показывает (11.15), каждая из них сдвинута по фазе и, кроме того, содержит соответствующий фазовый множитель. На больших расстояниях полное решение отличается от падающей плоской волны только наличием расходящихся, рассеянных сферических волн.

Теперь отвлечемся от того, что рассматриваемый анализ парциальных волн фактически связан с реальной трехмерной картиной рассеяния. Тогда рассеяние можно представлять себе как процесс, происходящий при фиксированном значении углового момента так, словно по направлению к источнику посылается сходящаяся сферическая волна, мультипольность которой равна $2l$. При этом элемент S_l матрицы S в соответствии с формулой (11.9) будет описывать влияние рассеивателя на сдвиг фазы возникающей расходящейся сферической волны по отношению к ее фазе в отсутствие рассеивателя. Равенство модуля величины S_l единице непосредственно выражает факт отсутствия поглощения и испускания. В соответствии с описываемой новой физической картиной (которая экспериментально, конечно, не реализуется) расчет величин S_l или δ_l можно полностью провести только на основе дифференциального уравнения (11.8).

Разложение сечений. Когда известны фазовые сдвиги, для вычисления амплитуды рассеяния можно использовать ряд (11.10), или в явной форме разложение

$$\begin{aligned} A(k, \cos \theta) &= (2ik)^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\cos \theta) = \\ &= k^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \end{aligned} \quad (11.10a)$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния будет определяться, согласно формуле (8.16), как квадрат модуля амплитуды A . Если сечение записать в виде ряда по полиномам Лежандра $P_l(\cos \theta)$, то результат получится довольно сложным [1903], часть 2, стр. 152, задача 11). Однако для полного сечения имеет место простое разложение. Используя второе равенство в формуле (11.10), сразу получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{полн}} &= \int d\Omega_{k'} \frac{d\sigma(k', \mathbf{k})}{d\Omega} = \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |a_l|^2 = 4\pi k^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Величины

$$\sigma_l = 4\pi (2l+1) k^{-2} \sin^2 \delta_l \quad (11.17)$$

обычно называются *парциальными* сечениями, причем полное сечение рассеяния равно их сумме. В силу условия унитарности S -матрицы, из которого вытекает требование действительности фазовых сдвигов δ_l , мы получаем ограничения сверху на величины отдельных парциальных сечений, соответствующих заданным угловым моментам и фиксированной энергии. Иногда говорят об этих ограничениях как о соответствующих *унитарных пределах* парциальных сечений, причем очевидно, что своего верхнего предела парциальное сечение достигает при значении фазового сдвига, равном $1/2\pi$ (по модулю π). Если максимальное сечение выразить через дебройлевскую длину волны частицы, то получим

$$\sigma_l^{\text{макс}} = 4\pi (2l + 1) k^{-2} = \frac{(2l + 1)\lambda^2}{\pi}. \quad (11.18)$$

За счет того, что верхний предел суммирования в разложении (11.16) равен бесконечности, наличие унитарных пределов (11.18) не приводит к какому-либо ограничению на величину полного сечения рассеяния.

Оптическая теорема. Сравнивая второе равенство (11.10а) с формулой (11.16), мы сразу же получаем простой вывод оптической теоремы (10.99) для нашего частного случая:

$$4\pi k^{-1} \text{Im } A(0) = \sigma_{\text{полн}},$$

где $A(0)$ — амплитуда рассеяния вперед.

Интегральное представление. Прежде чем продолжить наше рассмотрение, отметим, что выражение (10.12) для амплитуды рассеяния дает возможность записать интегральное представление для элемента S_l матрицы S . Подставляя разложения (11.5) и (11.6) в (10.12) и сравнивая получающийся результат с (11.10а), находим

$$S_l = 1 - 4ik^{-1}\mu \int_0^{\infty} dr u_l(kr) V(r) \psi_l^{(+)}(k, r). \quad (11.19)$$

2. K -матрица и стоячие волны

K -матрицу, введенную в гл. 7, § 2, п. 3, также легко выразить через фазовый сдвиг. Благодаря диагональности S -матрицы в представлении угловых моментов этим же свойством обладает и K -матрица. Соотношение (7.59) позволяет сразу же записать ее собственные значения через фазы, определяемые (11.14),

$$K_l = \text{tg } \delta_l; \quad (11.20)$$

K -матрица эрмитова, вследствие чего ее собственные значения K_l действительны.

Как мы видели в гл. 7 [соотношение (7.56)], K -матрицу можно вычислить, зная волновую функцию $\psi^{(P)}$, соответствующую главному значению, которая удовлетворяет интегральному уравнению (7.20). Функцию Грина, соответствующую главному значению, можно разложить так же, как это было сделано для G^+ [см. (11.1)]:

$$G^P(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu \sum_{l, m} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{r}}') r^{-1} r'^{-1} G_l^P(k; r, r'). \quad (11.21)$$

Тогда функция Грина, соответствующая главному значению, для радиального уравнения Шредингера получится из (7.8), (11.21) и (2.66):

$$G_l^P(k; r, r') = k^{-1} u_l(kr_{<}) v_l(kr_{>}), \quad (11.22)$$

где функция v_l определяется равенством (2.65). Функция G_l^P действительна и симметрична и удовлетворяет уравнению (11.3). На бесконечности она

ведет себя как

$$G_l^P(k; r, r') \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -k^{-1} u_l(kr') \cos\left(kr - \frac{1}{2} \pi l\right). \quad (11.23)$$

Аналогичным образом разложим волновую функцию, соответствующую главному значению:

$$\psi^{(P)}(\mathbf{k}; \mathbf{r}) = \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_{l, m} Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}) i^l \psi_l^{(P)}(k, r). \quad (11.24)$$

В соответствии с (7.20) оказывается, что радиальные функции, соответствующие главному значению, удовлетворяют интегральному уравнению

$$\psi_l^{(P)}(k, r) = u_l(kr) + 2\mu \int_0^\infty dr' G_l^P(k; r, r') V(r') \psi_l^{(P)}(k, r'). \quad (11.25)$$

Они подчиняются также радиальному уравнению Шредингера (11.8) и обращаются в нуль в точке $r=0$. На больших расстояниях эти функции ведут себя как

$$\psi_l^{(P)}(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \sin\left(kr - \frac{1}{2} \pi l\right) + K_l \cos\left(kr - \frac{1}{2} \pi l\right) = \frac{\sin(kr - 1/2 \pi l + \delta_l)}{\cos \delta_l}, \quad (11.26)$$

где

$$K_l = -2\mu k^{-1} \int_0^\infty dr u_l(kr) V(r) \psi_l^{(P)}(k, r). \quad (11.27)$$

Радиальная функция $\psi_l^{(P)}$, соответствующая главному значению, действительна. Поэтому при умножении ее на e^{-iEt} мы получаем волну, узлы которой неподвижны в пространстве. Следовательно, в противоположность решениям $\Psi_l^{(\pm)}$, которые (по крайней мере на больших расстояниях) представляют комбинацию из сходящейся и расходящейся сферических волн типа $e^{\mp ikr - iEt}$, функция $\psi_l^{(P)}$ представляет стоячую волну. Хотя ввиду ее действительности мы имеем некоторое упрощение вычислений, но с физической точки зрения для задач рассеяния функция $\psi_l^{(P)}$ неприемлема, так как она является решением уравнения (11.8), имеющим вид стоячей волны. По самой природе этих задач в них входят волны, распространяющиеся в положительном или отрицательном направлениях.

§ 2. ЭВРИСТИЧЕСКОЕ РАССМОТРЕНИЕ ФАЗОВЫХ СДВИГОВ

1. Общие свойства

Прежде чем переходить к более строгому анализу, рассмотрим некоторые общие свойства фазовых сдвигов, пользуясь одним эвристическим методом.

Прежде всего запишем радиальное уравнение Шредингера в виде

$$\frac{\Psi_l''}{\Psi_l} = W(r) - k^2,$$

$$W(r) = 2\mu V + l(l+1)r^{-2}.$$

При тех расстояниях, при которых k^2 больше величины $W(r)$, кривизна отрицательна и волновая функция выпукла вверх; в области, где k^2 меньше $W(r)$, имеет место обратная ситуация. По сравнению со случаем $V=0$ потенциал притяжения (отрицательный) уменьшает величину W , и, таким образом, если в данной области величина k^2 больше $l(l+1)r^{-2}$, то с ростом V кривизна графика функции ψ_l будет увеличиваться, т. е. «локальная» длина волны

должна уменьшаться. В результате волна «сжимается». Наоборот, отталкивательный (положительный) потенциал «растягивает» волну. Несмотря на малость величины k^2 , она все же почти везде превышает член $l(l+1)r^{-2}$. Поэтому можно ожидать, что «в большинстве случаев» потенциал притяжения приводит к *положительным*, а отталкивательный потенциал — к *отрицательным* фазовым сдвигам.

По мере возрастания углового момента потенциал играет все меньшую роль; это справедливо также в случае, когда увеличивается не угловой момент, а энергия. Поэтому можно считать, что при $l \rightarrow \infty$ (фиксированная энергия) и при $E \rightarrow \infty$ (фиксированное l) фазовые сдвиги будут стремиться к нулю. Из выражения (11.19) следует также ожидать, что $S_l \rightarrow 1$ при $E \rightarrow \infty$. Так как одновременный рост энергии и углового момента до некоторой степени взаимно компенсируются (благодаря тому что в ψ_l'/ψ_l эти величины входят с противоположными знаками), то следует ожидать, что значение энергии, при котором фазовые сдвиги становятся «пренебрежимо малыми», с возрастанием l будет увеличиваться.

Сказать, что $\delta_l \rightarrow 0$ — это, конечно, до некоторой степени условность, так как соотношением (11.14) фазы определены не однозначно, а только с точностью до слагаемого, кратного π . Исходя из приведенного выше рассмотрения, можно ожидать, что как при $l \rightarrow \infty$, так и при $E \rightarrow \infty$ справедливо $S_l \rightarrow 1$. Обычно полагают *по определению*, что

$$\lim_{E \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \quad (11.28)$$

Если потребовать непрерывности фазы $\delta_l(E)$ по переменной E , то при каждом значении l она будет теперь определена однозначно. (Остается доказать, конечно, что величина S_l непрерывна и, следовательно, фазу δ_l можно определить так, чтобы она тоже была непрерывной функцией.) Впоследствии нужно будет показать, что при фиксированной энергии E и при $l \rightarrow \infty$ так определенная фаза будет стремиться не просто к числу, кратному π , а к *нулю*.

2. Анализ поведения фазовых сдвигов при низких энергиях

Рассмотрим теперь область низких энергий. В соответствии с (2.64) при $k \rightarrow 0$ функция $u_l(kr)$ пропорциональна k^{l+1} . Как видно из соотношений (2.66) и (2.67), функции Грина имеют в этом случае конечный действительный предел

$$G_l^\pm(0; r, r') = G_l^P(0; r, r') = \frac{-r^{l+1}r'^{-1}}{2l+1}. \quad (11.29)$$

Поэтому из интегрального уравнения (11.7) следует, что также и функция $\psi_l^{(\pm)}$ действительна и что при $k \rightarrow 0$ она пропорциональна k^{l+1} . Из уравнения (11.25) вытекает аналогичный вывод в отношении функции $\psi_l^{(P)}$. Следовательно, согласно интегральному представлению (11.19) для матричного элемента S_l , при низких энергиях он будет иметь следующее поведение:

$$S_l = e^{2i\delta_l} \approx 1 + 2ic_l k^{2l+1} \quad (11.30)$$

или

$$a_l \approx ic_l k^{2l},$$

или

$$K_l = \text{tg } \delta_l \approx -c_l k^{2l+1},$$

где константа c_l действительна; эти соотношения справедливы лишь для потенциалов, которые не приводят к бесконечным значениям коэффициента c_l . Из (11.30) следует прежде всего, что диагональные элементы S-матрицы при нулевой энергии стремятся к единице; при этом остаточный член убывает по k не медленнее, чем по линейному закону. Разложение (11.10а) показывает,

что такое поведение является необходимым условием конечности сечения рассеяния в низкоэнергетическом пределе. Более того, из (11.30) следует, что при увеличении l парциальные амплитуды a_l как функции k вблизи нулевого значения энергии растут все медленнее. Другими словами, при данной малой величине энергии от нуля отличаются заметно лишь несколько амплитуд, причем их число тем меньше, чем ниже энергия. В пределе нулевой энергии все амплитуды, кроме соответствующей s -волне, обращаются в нуль. Благодаря этому обстоятельству парциальный анализ приносит особенно большую пользу именно при изучении *низкоэнергетического* рассеяния. Очевидно, что если в сумму (11.10) дают вклад много различных членов, то это разложение становится неэффективным. Вместе с тем следует учитывать, что всегда имеется такая энергетическая область, в которой уже несколько членов рядов (11.10а) и (11.16) дают достаточно хорошее приближение. При возрастании энергии число этих членов увеличивается. Таким образом, парциальный анализ является важным дополнением к борновскому приближению, которое хорошо работает, наоборот, в области высоких энергий.

Физическое пояснение. Физическую причину, по которой при низких энергиях основной вклад в рассеяние дают волны с малыми значениями угловых моментов, понять достаточно просто. Чем больше величины углового момента, тем выше становится эффективный барьер, создаваемый центробежными силами, и тем труднее частицам проникнуть в центральную область, в которой сконцентрирована в основном потенциальная энергия. Таким образом, чтобы «почувствовать» потенциал, частицам с большими угловыми моментами нужно иметь более высокую кинетическую энергию, чем в случае малых моментов. Отсюда ясно, что при очень медленном спадании потенциала на бесконечности, когда значительная часть рассеяния обусловлена как раз его длинным хвостом, центробежный барьер будет менее эффективным и асимптотика (11.30) может не иметь места. В дальнейшем в результате более строгого анализа мы убедимся, что это действительно так [см. (12.160)].

То, что в разложении (11.10) доминируют несколько первых членов, с физической точки зрения можно объяснить и по-другому, исходя из аналогии с рассеянием электромагнитных волн на малых объектах. Если длина волны велика по сравнению с размерами мишени, которые в нашем случае соответствуют «размерам» потенциала, то волна не «увидит» подробностей структуры рассеивателя, так что рассеяние будет *простым, насколько только это возможно*. В случае электромагнитных волн оно описывается формулой Релея (3.6), угловая зависимость в которой целиком обусловлена спином фотона; в рассматриваемом случае рассеяние будет изотропным. Чем меньше длина волны по сравнению с размерами мишени, тем рассеяние сложнее. Естественно ожидать, что критерием, при выполнении которого p -волной можно будет пренебречь по сравнению с s -волной, является неравенство

$$(kR)^2 \ll 1. \quad (11.31)$$

Здесь R — в каком-то смысле радиус действия потенциала.

Длина рассеяния. Если в амплитуду (11.10) подставить асимптотику (11.30) и положить энергию равной нулю, то для полного сечения получим

$$\sigma_{\text{полн}}(0) = 4\pi c_0^2; \quad (11.32)$$

величина c_0 называется *длиной рассеяния* (s -волны).

Для сравнения вычислим амплитуду рассеяния в простом случае твердой сферы радиусом R . Так как при $r = R$ потенциал равен $+\infty$, то радиальное уравнение Шредингера нужно решать с граничным условием $\psi_l = 0$ при $r = R$; когда $r > R$, потенциал $V = 0$. Это сразу же приводит к следующему решению:

$$\psi_l = c [u_l(kr) v_l(kR) - u_l(kR) v_l(kr)] \quad \text{при } r > R.$$

Сравнивая это решение с (11.26) и с асимптотическими выражениями (2.59) и (2.68) для u_l и v_l , получаем

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{u_l(kR)}{v_l(kR)}. \quad (11.33)$$

В пределе нулевой энергии воспользуемся формулами (2.64) и (2.67); это дает¹⁾

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx -\frac{(kR)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!}, \quad (11.34)$$

что подтверждает как асимптотику (11.30), так и критерий (11.31). Следовательно, длина рассеяния (s -волны) просто равна радиусу, т. е. $c_0 = R$. Отсюда можно сделать вывод, что в пределе нулевой энергии рассеяние происходит так, будто мишень является твердой сферой, радиус которой равен длине рассеяния.

На первый взгляд кажется удивительным, что твердая сфера радиусом R имеет эффективное сечение, в 4 раза превышающее ее геометрическое поперечное сечение. Вспомним, однако, что область больших длин волн относится к области квантовой механики и не может рассматриваться в классическом пределе геометрической оптики. К нему мы еще вернемся в гл. 18, а здесь отметим только, что твердая сфера не принадлежит классу рассеивателей, обладающих «хорошим поведением» в истинном смысле этого слова. В пределе высоких энергий формула (11.33) превращается в формулу

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx -\operatorname{tg} \left(kR - \frac{1}{2} \pi l \right), \quad (11.35)$$

так что при $k \rightarrow \infty$ фазовые сдвиги стремятся не к нулю, а к *бесконечности*.

Приближение эффективного радиуса. Отметим, что большую пользу приносит анализ низкоэнергетического рассеяния s -волны, основанный на следующем приеме. Умножим радиальное уравнение Шредингера для функции $\psi(k, r)$ на $\psi(0, r)$ и вычтем из него уравнение для функции $\psi(0, r)$, умноженное на $\psi(k, r)$ (для простоты индекс l у волновой функции мы здесь опускаем; в рассматриваемом случае $l = 0$); получаем

$$\frac{d}{dr} W[\psi(k, r), \psi(0, r)] = k^2 \psi(k, r) \psi(0, r),$$

где выражение

$$W(F, G) = FG' - F'G \quad (11.36)$$

является *вронскианом*. Далее, асимптотика $\psi(k, r)$ при больших r с необходимостью имеет вид

$$\psi(k, r) \approx C \sin(kr + \delta) \equiv \varphi(k, r), \quad (11.37)$$

причем φ удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера с $V = 0$. Поэтому

$$\frac{d}{dr} W[\varphi(k, r), \varphi(0, r)] = k^2 \varphi(k, r) \varphi(0, r).$$

Если положить $C = 1/\sin \delta$, то

$$\varphi(0, r) = 1 - \frac{r}{c_0}. \quad (11.38)$$

Составим разность двух уравнений для вронскианов и проинтегрируем ее от нуля до бесконечности. Так как

$$W[\varphi(k, r), \varphi(0, r)]_{r=0} = -\frac{1}{c_0} - k \operatorname{ctg} \delta,$$

¹⁾ $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1) \dots 3 \cdot 1 = \Gamma(2l+2)/2^l \Gamma(l+1)$.

то

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) = -\frac{1}{c_0} + k^2 \int_0^{\infty} dr [\varphi(k, r) \varphi(0, r) - \psi(k, r) \psi(0, r)]. \quad (11.39)$$

Чтобы перейти к низкоэнергетическому приближению, положим в интеграле $k = 0$; тогда

$$k \operatorname{ctg} \delta(k) \approx -\frac{1}{c_0} + \frac{1}{2} k^2 r_0, \quad (11.40)$$

где

$$r_0 = 2 \int_0^{\infty} dr [\varphi^2(0, r) - \psi^2(0, r)]. \quad (11.41)$$

Соотношение (11.40) можно записать всегда и говорить по этому поводу почти нечего. То, что величина $k \operatorname{ctg} \delta$ является четной функцией k , а значит, не содержит члена, линейного по этой переменной, следует из равенства $\delta(-k) = -\delta(k)$, которое будет еще обсуждаться ниже. Понять физический смысл приведенных соотношений помогает следующая простая интерпретация окончательной формулы (11.41). Предположим, что при $r > R$ потенциал равен нулю. Тогда для всех $r > R$ будем иметь $\psi = \varphi$, так что в интеграле r_0 нужно интегрировать только до R . Графиком функции $\varphi(0, r)$ является прямая, отсекающая от оси ординат единичный отрезок и пересекающая ось абсцисс в точке $r = c_0$; при $r > R$ функция ψ равна φ , но при $r = 0$ ее график проходит через начало координат. Поэтому можно ожидать, что интеграл, входящий в выражение для r_0 , приблизительно равен половине радиуса действия потенциала. Следовательно, величину r_0 можно назвать *эффективным радиусом* действия потенциала, а формулу (11.40) — *приближением эффективного радиуса*¹⁾. Оно особенно полезно в том случае, когда взаимодействие является *сильным*, так что интеграл (11.41) почти нечувствителен к изменению k до тех пор, пока эта величина не станет сравнимой с интенсивностью взаимодействия. Поэтому можно ожидать, что при энергиях, малых по сравнению с потенциалом, (11.40) будет хорошим приближением. По этой причине формула для эффективного радиуса особенно полезна в задаче рассеяния нейтронов на протонах.

Приближение эффективного радиуса можно, конечно, обобщить на более высокие угловые моменты. В этом случае мы будем использовать разложение

$$k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l = -\frac{1}{c_l} + \frac{1}{2} r_l k^2 + \dots \quad (11.40a)$$

Имеются, однако, две причины, по которым приближение (11.40a) приносит значительно меньшую пользу. Во-первых, если становятся заметными волны с высокими угловыми моментами, то энергия должна быть столь высокой, что формула (11.40) перестает служить хорошим приближением для фазы s -волны. Поэтому в первую очередь ее нужно улучшить, но при этом в ней следующие члены будут зависеть уже от *формы* потенциала. Во-вторых, если φ вводить с помощью определения, аналогичного (11.37), но соответствующего другим значениям угловых моментов, то благодаря наличию центробежного барьера интеграл, аналогичный фигурирующему в (11.39), уже не будет обращаться в нуль вне области взаимодействия. С другой стороны, если принять, что φ совпадает с волновой функцией, являющейся точным решением во внешней области, т. е. соответствующей комбинацией регулярной и нерегулярной функций Риккати — Бесселя, то при $r \rightarrow 0$ она будет стремиться к бесконечности

¹⁾ Так как это приближение определяется точно шириной и глубиной потенциала, то его иногда также называют приближением, не зависящим от формы потенциала.

для $l > 0$. Следовательно, тогда в качестве нижнего предела рассматриваемого интеграла нельзя будет брать $r = 0$. Другими словами, хотя разложение (11.40а) справедливо в той же степени, как и (11.40), входящий в него параметр r_l в случае $l > 0$ уже не допускает такой простой интерпретации, как r_0 .

Уточнение характера поведения фазовых сдвигов при низких энергиях. Теперь выясним более подробно, как ведут себя фазовые сдвиги в низкоэнергетической области. В частности, ответим на вопрос, означает ли соотношение (11.30), согласно которому (почти во всех случаях) при нулевой энергии S -матрица стремится к единице, что при $k = 0$ фазовые сдвиги равны нулю. Поскольку фазы определены так, что при бесконечном значении энергии они должны обращаться в нуль и (насколько это возможно) являются непрерывными функциями, то мы не вправе при $k = 0$ просто *положить* их равными нулю.

Чтобы получить общее качественное представление о виде фазовых сдвигов в области низких энергий, обратимся к простой модели, а именно рассмотрим потенциал в форме *прямоугольной ямы*:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases} \quad (11.42)$$

В этом случае уравнение Шредингера решается просто. Внутри потенциальной ямы имеем

$$\psi_l = C_l u_l(Kr), \quad K^2 = k^2 + K_0^2, \quad K_0^2 = 2\mu V_0, \quad (11.43)$$

а вне ее

$$\psi_l = A_l u_l(kr) + B_l v_l(kr). \quad (11.43a)$$

Так как в точке $r = R$ функция ψ_l и ее производная должны быть непрерывны, то коэффициенты A_l , B_l определяются путем сшивания логарифмических производных:

$$k \frac{A_l u_l'(kR) + B_l v_l'(kR)}{A_l u_l(kR) + B_l v_l(kR)} = \beta_l. \quad (11.44)$$

Здесь штрих означает дифференцирование функций по их аргументу kR , а

$$\beta_l = \frac{K u_l'(KR)}{u_l(KR)} \quad (11.45)$$

есть значение логарифмической производной внутренней волновой функции в точке $r = R$. Используя (11.26) и асимптотические выражения (2.59) и (2.68), получаем

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{A_l}{B_l} = \frac{u_l}{v_l} \frac{\beta_l - k(u_l'/u_l)}{\beta_l - k(v_l'/v_l)}, \quad (11.46)$$

где все бесселевы функции вычисляются при значении аргумента, равном kR . Рассмотрим сначала s -волну. При $l = 0$ имеем

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{k \operatorname{tg} KR - K \operatorname{tg} kR}{K + k \operatorname{tg} kR \cdot \operatorname{tg} KR} \quad (11.47)$$

или

$$\delta_0 = \arctg \left(\frac{k}{K} \operatorname{tg} KR \right) - kR. \quad (11.47a)$$

При $K/k \approx 1$ (в том смысле, что $|K - k| R \ll 1$) фазовый сдвиг мал, а в случае $KR \ll 1$ и одновременно $kR \ll 1$ малым является $\operatorname{tg} \delta_0$. Когда потенциал слабый, т. е. $|K_0| R \ll 1$, эти две области будут перекрываться, так что сам фазовый сдвиг должен всюду оставаться небольшим. Тогда заведомо при $k \rightarrow 0$ величина δ_0 также стремится к нулю.

Предположим теперь, что потенциал, который считается здесь притягательным, умножается на γ , т. е. что его интенсивность *увеличивается*. Тогда фазовый сдвиг возрастет. В низкоэнергетической области, когда $kR \ll 1$, для него можно написать следующее приближенное выражение:

$$\delta_0 \approx kR \left(\frac{\text{tg } KR}{KR} - 1 \right). \quad (11.48)$$

Если величина KR немного меньше, чем $1/2\pi$, то функция, заключенная в скобки, будет иметь большие положительные значения. Но когда KR превысит $1/2\pi$, приближение (11.48) станет непригодным; график фазового сдвига резко изменится и δ_0 начнет уменьшаться. Если $K_0R = 1/2\pi$, то при нулевой энергии фазовый сдвиг принимает аномальное значение $1/2\pi$. Если же K_0R несколько больше, чем $1/2\pi$, то фазовый сдвиг проходит через значение $1/2\pi$ и при уменьшении энергии продолжает возрастать до величины π . В этом случае приближение (11.48) нужно заменить на следующее:

$$\delta_0 \approx \pi - kR \left(1 - \frac{\text{tg } KR}{KR} \right). \quad (11.48a)$$

На фиг. 11.1 указано поведение фазового сдвига в низкоэнергетической области.

Далее, $1/2\pi$ в точности равно минимальному значению величины K_0R , при котором возникает *связанное состояние*. В этом легко убедиться, рассматривая уравнение для энергии связанного состояния $E = -|k|^2/2\mu$:

$$K \text{ctg } KR = -|k|.$$

Поэтому можно сделать вывод, что если связанного состояния не существует, то при нулевой энергии фазовый сдвиг равен *нулю*, если же имеется связанное состояние, то фазовый сдвиг равен π . При промежуточном значении интенсивности потенциала фазовый сдвиг s -волны при $E = 0$ принимает значение $1/2\pi$; в этом случае $e^{2i\delta_0} = -1$ и сечение становится бесконечным ¹⁾.

Изложенный анализ допускает обобщение, в результате которого мы получим, что появление каждого нового связанного состояния увеличивает фазовый сдвиг при нулевой энергии на величину π . Поэтому

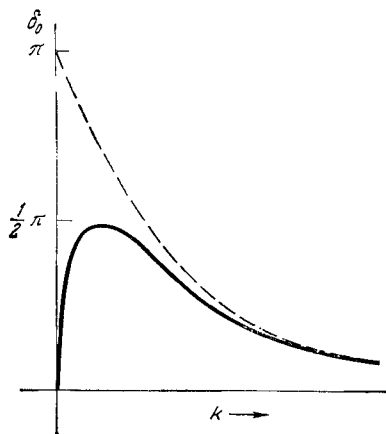
$$\delta_0(0) = m\pi, \quad (11.49)$$

где m — число связанных состояний в s -волне. Исключение представляет случай «промежуточной» интенсивности потенциала, когда

$$\delta_0(0) = \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi; \quad (11.49a)$$

все эти утверждения носят название *теоремы Левинсона*.

Отметим, что если потенциал не связывает частицу полностью ²⁾, то фазовый сдвиг не дойдет до значения $1/2\pi$ и парциальное сечение не достигнет свое-



Фиг. 11.1. Сплошная кривая соответствует низкоэнергетическому фазовому сдвигу s -волны в случае, когда интенсивность потенциала недостаточна для создания связанного состояния; пунктир — потенциалу, который создает одно связанное состояние с энергией, близкой к нулю.

¹⁾ В гл. 12, § 1, п. 2, мы увидим, что при таком промежуточном значении интенсивности потенциала в случае $l = 0$ обычно *не возникает* связанное состояние с нулевой энергией связи; без всяких физических оснований эту ситуацию иногда называют резонансом при нулевой энергии.

²⁾ При $l = 0$ в этом случае обычно говорят, что имеется *виртуальное состояние*.

го предела, определяемого условием унитарности. Если потенциал создает связанное состояние с очень малой энергией связи, то фазовый сдвиг в низкоэнергетической области будет проходить через значение $1/2\pi$ и сечение станет максимальным. Этот случай *не следует* смешивать с резонансом. Ниже мы увидим, что резонанс связан с появлением пика в сечении, причем в соответствующей точке фазовый сдвиг проходит через $1/2\pi$, *возрастая* при этом.

Существование или отсутствие в s -волне связанного состояния отражается на свойствах длины рассеяния. Если связанного состояния нет, то при $k = 0$ фаза δ_0 *растет* и длина рассеяния *отрицательна*. В случае потенциала, для которого $\delta_0 = 1/2\pi$, длина рассеяния бесконечна. Если имеется связанное состояние с малой энергией связи, то $c_0 > 0$. Далее, прежде чем потенциал возрастет настолько, что появится второе связанное состояние, длина рассеяния пройдет через нуль и изменит свой знак. Вблизи каждого связанного состояния она становится большой, а при появлении нового связанного состояния обращается в бесконечность. Если потенциал является (в основном) отталкивательным, то длина рассеяния всегда положительна.

Высшие угловые моменты. Применим теперь развитые соображения к случаю высших угловых моментов. Разложим логарифмическую производную β_l , определяемую формулой (11.45), в ряд в окрестности точки $k = 0$:

$$R\beta_l(k) = b_l - e_l(Rk)^2 + \dots \quad (11.50)$$

Тогда при низких энергиях соотношение (11.46) дает

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx \frac{(Rk)^{2l+1}}{(2l+1)!!(2l-1)!!} \frac{b_l - l - 1}{(b_l + l) - (Rk)^2 [e_l + 1/(2l-1)]}. \quad (11.51)$$

Если $Rk \ll 1$, то ни один из фазовых сдвигов не даст вкладов, больших по сравнению с вкладом от $l = 0$, за исключением случая, когда при некотором l знаменатель дроби (11.51) обращается в нуль. Тогда соответствующий фазовый сдвиг проходит через $1/2\pi$ (по модулю π) и сечение становится *максимальным*. Необходимым условием для этого является, очевидно (при низких энергиях), следующее:

$$|b_l + l| \ll 1,$$

т. е. в соответствии с формулой (11.45) и соотношениями (2.69) должно быть

$$\left| \frac{K_0 R u_{l-1}(K_0 R)}{u_l(K_0 R)} \right| \ll 1. \quad (11.52)$$

Если интенсивность потенциала такова, что функция $u_{l-1}(K_0 R)$ имеет значение, близкое к одному из своих нулей, то при низких энергиях $\operatorname{tg} \delta_0$ принимает бесконечное значение, но в нуль не обращается. Следовательно, при уменьшении энергии E фазовый сдвиг сначала возрастает, проходя через $1/2\pi$ (необязательно при низкой энергии), потом несколько ниже значения π он достигает максимума, а затем резко уменьшается до нуля, еще раз проходя через значение $1/2\pi$. С увеличением потенциала пик сдвигается влево и возрастает по величине. При такой интенсивности потенциала, когда имеет место точное равенство

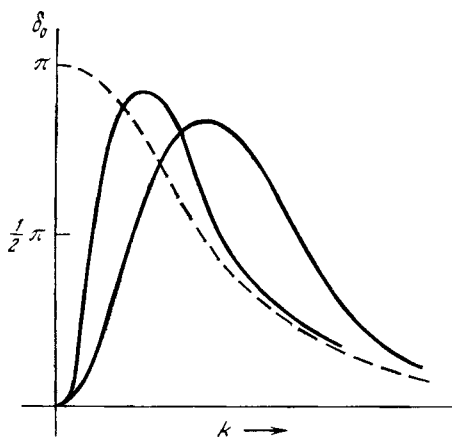
$$u_{l-1}(K_0 R) = 0, \quad (11.53)$$

фазовый сдвиг при нулевой энергии принимает значение, равное π . Соотношение (11.53) и является условием образования связанного состояния с угловым моментом l . Таким образом, при $l > 0$ фазовый сдвиг ведет себя так, как показано на фиг. 11.2.

Из того, что каждое только что появившееся связанное состояние увеличивает значение фазового сдвига при нулевой энергии на π , мы, как и в случае s -волны, можем сделать вывод о справедливости теоремы Левинсона (11.49).

Но специфическое отклонение (11.49а), возникающее при промежуточной интенсивности потенциала ¹⁾, характерно лишь для случая $l = 0$. При разумных потенциалах (которые более точно определяются ниже) фазовые сдвиги при нулевой энергии, соответствующие высшим угловым моментам, всегда кратны π .

Резонансы. Если интенсивность потенциала такова, что ее почти достаточно для образования нового связанного состояния с угловым моментом l , то в противоположность случаю s -волны парциальное сечение для $l > 0$ при низких энергиях будет достигать своего предела, определяемого условием унитарности. Так как в такой ситуации все другие парциальные сечения малы, то будет наблюдаться очень интересное явление. В узкой энергетической области, включающей значение энергии, при которой фазовый сдвиг проходит через $1/2\pi$, резко возрастая при этом, сечение рассеяния будет большим, причем его угловая зависимость будет в основном определяться угловым распределением, характерным для момента l . В соответствии с разложением (11.10а) и выражением для фазы (11.51) получаем



Ф и г. 11.2. Низкоэнергетическое поведение фазового сдвига в случае $l > 0$. Две сплошные кривые соответствуют «почти» связанному состоянию; пунктир — связанному состоянию с энергией, близкой к нулю.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \lambda^2 (2l + 1)^2 [P_l(\cos \theta)]^2 \frac{1/4 \Gamma^2}{(E - E_0)^2 + 1/4 \Gamma^2}, \quad (11.54)$$

где

$$E_0 = \frac{(b_l + l)(2l - 1)}{2\mu R^2 [e_l(2l - 1) + 1]} = \frac{k_0^2}{2\mu},$$

$$\Gamma = \frac{2E_0 (Rk_0)^{2l+1}}{(2l + 1)!! (2l - 1)!!} \left(\frac{2l + 1}{b_l + l} - 1 \right). \quad (11.55)$$

График зависимости сечения от энергии приведен на фиг. 3.2. Он имеет резкий максимум при энергии $E = E_0$, полуширина которого равна $1/2\Gamma$. На таком расстоянии от точки, соответствующей максимуму, сечение уменьшается вдвое по сравнению со своей максимальной величиной. Формула, описывающая энергетическую зависимость типа (11.54), обычно называется *формулой Брейта — Вигнера*.

Описываемое явление представляет собой *резонанс*. Для него характерно не только появление резкого пика в сечении, но и возрастание фазового сдвига при *увеличении* энергии, когда он проходит через значение $1/2\pi$ (по модулю π). Чтобы осознать всю важность этих свойств, мы должны вернуться к нестационарной постановке задачи рассеяния.

Время запаздывания. Рассмотрим более подробно аргументацию гл. 1, § 3, п. 1, основанную на методе стационарной фазы. На больших расстояниях от мишени волновой пакет с импульсом k_0 описывается функцией

$$\int dk f(k) e^{i(k \cdot r - Et)} + \int dk f(k) r^{-1} e^{i(kr - Et)} A(k', k),$$

причем мы считаем, что функция f имеет резкий максимум в точке $k = k_0$. В гл. 1, § 3, п. 1, было выяснено, что при больших временах t второй член дает

¹⁾ В случае $l > 0$ «промежуточная» интенсивность потенциала приведет к образованию истинного связанного состояния с нулевой энергией связи (гл. 12, § 2).

вклад только на таких расстояниях, при которых фаза экспоненты стационарна вблизи точки k_0 . В рассматриваемом случае это означает, что

$$r \approx \frac{k_0}{\mu} t = v_0 t,$$

где v_0 — радиальная составляющая скорости частицы. Однако нужно принимать во внимание и фазу φ амплитуды рассеяния A . Тогда мы получим, что рассеянный пакет сконцентрирован на расстоянии

$$r \approx v_0 t - \left. \frac{d\varphi}{dk} \right|_{k=k_0}. \quad (11.56)$$

Следовательно, если фаза амплитуды с ростом k резко *возрастает*, то вылет рассеянных частиц происходит с существенной задержкой. С другой стороны, если с ростом энергии фаза φ *уменьшается*, то вылет рассеянных частиц происходит с *опережением*. На основании принципа причинности можно утверждать, что возможность такого опережения ограничена размерами рассеивателя.

Если «размер» мишени (его в нашем случае можно приблизительно принимать равным радиусу действия потенциала) обозначить через D , то опережение

$$t_0 > \frac{D}{v_0} = \frac{D\mu}{k_0}$$

означало бы, что рассеянная волна начинает двигаться от мишени прежде, чем ее достигает падающая волна. По принципу причинности это невозможно. Поэтому мы требуем, чтобы всегда

$$\frac{d\varphi}{dk} \gtrsim -D.$$

Это означает, что вблизи острого максимума отдельного парциального сечения значение производной соответствующего фазового сдвига ограничено неравенством

$$\frac{d\delta_l}{dk} \gtrsim -D. \quad (11.57)$$

Истинное физическое резонансное явление обусловлено захватом падающих частиц рассеивателем аналогично классическому случаю *закручивания* (см. гл. 5, § 4). Его квантовомеханическое объяснение основано на том, что при определенных длинах волн в области мишени могут возникать почти стоячие волны, так что резонанс тесно связан со случаем, возникающим в теории электромагнетизма и обсуждавшимся в гл. 3, § 3, п. 1. То обстоятельство, что падающие частицы почти полностью захватываются, указывает не существенную роль, которую играет в рассматриваемом явлении *запаздывание* их появления в качестве рассеянных частиц. Несмотря на то что в эксперименте обычно наблюдается только пик, для явления в целом время запаздывания столь же существенно, как и большая величина сечения. По причинам практического порядка в соответствующих экспериментах время появления рассеянных частиц обычно не измеряется и часто считается, что наличие любого резкого максимума в сечении служит на самом деле доказательством существования резонанса. Но это предположение оправдывается только в том случае, когда пик имеет ширину, меньшую той, которую было бы разумно ожидать на основе принципа причинности при уменьшении фазы. В последнем случае ширина пика равна приблизительно размерам энергетической области, в которой фазовый сдвиг изменяется на π ; поэтому

$$\Gamma \approx \frac{\pi}{\left| \frac{d\delta_l}{dE} \right|_{E=E_0}}.$$

Таким образом, если появление пика обусловлено уменьшением фазового сдвига, то в соответствии с неравенством (11.57) можно ожидать, что его ширина будет равна по меньшей мере

$$\Gamma_{\text{мин}} \approx \frac{\pi k_0}{\mu D} = E_0 \frac{\lambda_0}{D}. \quad (11.58)$$

Если известны размеры D мишени, а экспериментально наблюдаются резонансные пики с шириной, гораздо меньшей $\Gamma_{\text{мин}}$, то без всякого измерения зависимости потока от времени можно с уверенностью сказать, что фазовый сдвиг должен *возрастать* и что пик представляет собой подлинный резонанс.

Итак, мы видим, что говорить о резонансе можно лишь в том случае, когда, проходя через значение $1/2\pi$ (по модулю π), фазовый сдвиг резко *возрастает*. Таким образом, в случае угловых моментов, отличных от нуля, всякое «почти» связанное состояние будет приводить к резонансу, но при $l = 0$ это утверждение несправедливо. Легко понять физическую причину этого. Заменим временно центробежный барьер, создаваемый угловым моментом, идеализированной бесконечно высокой стенкой, окружающей рассеивающий центр. Внутри этой области при некоторых определенных значениях энергии могут существовать стоячие волны, т. е. связанные состояния. Пусть далее центробежный барьер имеет конечную высоту. Тогда в результате туннельного эффекта частицы смогут проникать во внутреннюю область, а если они там уже находились, — то просачиваться наружу. Благодаря этому энергии *связанных состояний* не будут иметь строго определенных значений, так что соответствующие состояния будут обладать конечным временем жизни. Именно эти свойства связанных состояний обуславливают возможность захвата частиц на длительное время с их последующим испусканием.

Если увеличить глубину потенциальной ямы, то энергии резонансов сместятся ниже, в область более широкого центробежного барьера. В результате времена жизни резонансов возрастут, что приведет к уменьшению их ширин. Это ясно видно из формул (11.55). В конце концов при определенной глубине потенциальной ямы энергия резонанса приблизится к нулевому значению и далее станет отрицательной. Конечно, в этом случае никакого «просачивания» происходить не может, так что мы будем иметь истинное связанное состояние. Такова причина того, что низкоэнергетические резонансы ассоциируются со связанными состояниями. В случае s -волн центробежный барьер отсутствует, чем и объясняется то, что низкоэнергетические резонансы не появляются. Тем не менее не следует забывать, что при наличии в потенциале соответствующего нецентробежного барьера низкоэнергетические резонансы могут возникнуть и в s -волне.

В соответствии с соотношением (11.56) время запаздывания, обусловленное наличием в амплитуде рассеяния быстро меняющегося члена $e^{2i\delta_l}$, дается формулой

$$t_D = 2 \frac{d\delta_l}{dk} \Big|_{k=k_0} \frac{\mu}{k_0}; \quad (11.59)$$

гейзенберговское соотношение неопределенностей приводит к тому, что ширина линии Γ будет равна

$$\Gamma \approx \frac{1}{t_D}.$$

Вычисленная таким способом ширина согласуется с формулой (11.55). Тем не менее, как будет подробно показано в гл. 19, выражение (11.59) для времени запаздывания не следует считать дающим хорошие количественные результаты.

Резонансные явления полезно описать также с помощью элементов S -матрицы, связанных с фазовыми сдвигами соотношением (11.14). Если вблизи точки

$k = k_0$ величина δ_l резко возрастает на π , проходя при k_0 через значение $1/2\pi$ (по модулю π), так что основная энергетическая зависимость описывается формулой

$$\operatorname{tg} \delta_l \approx \frac{k_1}{k_0 - k}, \quad k_1 > 0, \quad (11.60)$$

то элемент S_l имеет вид

$$S_l = e^{2i\delta_l} \approx \frac{k - k_0 - ik_1}{k - k_0 + ik_1}. \quad (11.61)$$

Таким образом, при $k = k_0 - ik_1$ элемент S -матрицы имеет *полюс*, расположенный вблизи действительной оси в нижней полуплоскости комплексного переменного k . Отсюда следует, что так же, как в формуле (11.54), вблизи точки $k = k_0$

$$\sin^2 \delta_l = \frac{1}{4} |S_l - 1|^2 \approx \frac{k_1^2}{(k - k_0)^2 + k_1^2} \approx \frac{1/4 \Gamma^2}{(E - E_0)^2 + 1/4 \Gamma^2}, \quad (11.62)$$

где

$$E_0 = \frac{k_0^2}{2\mu}, \quad \Gamma = \frac{4k_0^2 k_1^2}{\mu^2}.$$

Из асимптотического поведения (11.9) волновой функции видно, что если величина S_l имеет полюс при $k = k_0 - ik_1$, то существуют только расходящиеся сферические волны, т. е. мы имеем «источник» потока. Конечно, энергия является комплексной величиной, и поэтому представить себе этот источник физически невозможно; в самом деле, волновая функция источника на бесконечности экспоненциально растет. Резонансные явления обусловлены тем, что при (физически возможной) действительной энергии $k_0^2/2\mu$ мы находимся «вблизи» ситуации с источником, и следует ожидать поэтому, что в данной области волновая функция особенно чувствительна к малым изменениям энергии. Конечно, выражение (11.61) говорит о том, что при $k = k_0 + ik_1$ мы находимся вблизи *нуля* величины S_l , где волновая функция содержит только сходящиеся волны. Но при $r \rightarrow \infty$ она тоже экспоненциально растет, увеличивая тем самым чувствительность волны к малым изменениям энергии вблизи k_0 .

Если бы k_1 было отрицательным, то величина S_l имела бы полюс в *верхней* полуплоскости и волновая функция экспоненциально *затухала* бы. Таким образом, мы имели бы *связанное состояние*. Так как его энергия действительна, то нужно, чтобы $k_0 = 0$. Поэтому следует ожидать, что при $k = i(2\mu E_0)^{1/2} = ik_{\text{св}}$ (E_0 — энергия связи связанного состояния) величина S_l будет иметь полюс. Далее,

$$e^{2i\delta_l} = \frac{\operatorname{ctg} \delta_l + i}{\operatorname{ctg} \delta_l - i},$$

благодаря чему мы ожидаем, что при $k = ik_{\text{св}}$

$$\operatorname{ctg} \delta_l = i. \quad (11.63)$$

Предположим теперь, что энергия связи мала по сравнению с глубиной потенциальной ямы. Тогда будет, по-видимому, справедливо приближение эффективного радиуса (11.40), даже если энергии отрицательны. Следовательно, в соответствии с (11.63)

$$-k_{\text{св}} \approx -\frac{1}{c_0} - \frac{1}{2} k_{\text{св}}^2 r_0$$

или

$$r_0 \approx 2k_{\text{св}}^{-1} - 2k_{\text{св}}^{-2} c_0. \quad (11.64)$$

Таким образом, если известна длина рассеяния, то энергия связи будет определять величину эффективного радиуса.

Пример, в котором все эти приближения хорошо оправдываются экспериментально, дает нам дейтрон. Однако не следует забывать, что изложенные приближенные методы основаны на ряде предположений, которые выполняются отнюдь не всегда. Одним из предположений является, в частности, гипотеза о том, что элемент S -матрицы допускает аналитическое продолжение в комплексную k -плоскость и что, кроме полюса связанного состояния, не существует других близко расположенных сингулярностей. Как мы увидим в гл. 12, это, конечно, не всегда так.

§ 3. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

1. Введение

Вариационные оценки служат для упрощения приближенных расчетов. Даже если считать, что мы знаем силы взаимодействия, вектор состояния или волновая функция почти никогда нам точно не известны. Поэтому амплитуда рассеяния, T -матрица, фазовые сдвиги и вообще все величины, необходимые для предсказания результатов определенного эксперимента, практически всегда даются какими-то приближенными выражениями. Некоторые из приближенных методов, которые основаны на обрывании бесконечных рядов, уже обсуждались нами. Вместе с тем имеется метод, который часто оказывается более практичным и который более просто приводит к достаточно надежным результатам; он состоит в том, что сразу берется некоторая приближенная волновая функция, вид которой определяется из физических соображений. Если подставить ее, например, в соотношение типа (7.40), то мы непосредственно получим приближенное выражение для амплитуды рассеяния. Конечно, хорошо известно применение подобного метода при расчетах энергий связи.

Когда применяется процедура, подобная той, которая используется при расчетах дискретных энергетических уровней, то при выполнении конкретных вычислений очень удобно иметь формулу, *стационарную* по отношению к бесконечно малым вариациям волновой функции в окрестности точной ее формы. Тогда можно ожидать, что окончательные результаты будут в малой степени чувствительны к точному виду волновой функции, так что использование достаточно разумной пробной функции приведет к хорошему приближению.

Существует множество способов, с помощью которых можно добиться требуемой стационарности; преимущества каждого из них по сравнению с другими определяются конкретными обстоятельствами. Мы рассмотрим лишь некоторые из этих методов; для ознакомления с другими мы отсылаем читателя к соответствующей литературе.

Существует, однако, еще один способ использования стационарной формулы. Можно взять целое *семейство* пробных функций, которые зависят от одного или большего числа параметров. Если известно, что вычисляемая величина стационарна в окрестности точной волновой функции, то обычно предполагается, что приближение является оптимальным при выборе таких значений параметров, вблизи которых полученный результат стационарен по отношению к малым вариациям. Задача, таким образом, обычно сводится к задаче отыскания экстремума функции нескольких переменных. Описываемая процедура также хорошо известна; она применялась и применяется главным образом в расчетах связанных состояний (метод Релея — Ритца). Однако для получения таким способом разумных результатов одной *стационарности* применяемых уравнений в действительности недостаточно.

Предположим, например, что некоторая величина A является функционалом от волновой функции

$$A = f[\psi],$$

который стационарен, когда ψ удовлетворяет точному уравнению Шредингера. Вычислим величины A_α , используя семейство волновых функций ψ_α , которое пусть не содержит точного решения:

$$A_\alpha = f[\psi_\alpha].$$

Тогда наибольшая из величин A_α будет наилучшим приближением значения функционала A для точного решения только в том случае, когда мы знаем не только то, что для точного решения $\delta A/\delta\psi = 0$, но и что для любой пробной функции ψ_α соответствующие значения функционала A_α всегда *меньше*, чем значение A для точного решения. В противном случае максимальная из величин A_α может приближать A наихудшим образом по сравнению с другими членами семейства функций ψ_α .

Сопшемся на пример, хорошо известный из расчетов, касающихся связанных состояний. Если мы хотим вычислить энергию первого возбужденного состояния и если нам действительно не известно, что энергия, вычисленная с помощью отдельного представителя семейства пробных функций, всегда *больше* искомой, то выбор ее экстремального значения нам ничего не дает. Гарантированные результаты будут получаться лишь в том случае, когда рассматриваемые пробные функции ортогональны волновой функции основного состояния. Вот почему нам всегда необходимо нечто большее, чем просто локальное свойство стационарности. Нам нужен настоящий *принцип минимума* или *максимума*.

Помимо того что подобные принципы действительно необходимы по только что изложенной причине, ясно, что они, кроме всего прочего, несут важную информацию, дополняющую приближенный расчет. Если определенно известно, что некоторая приближенная формула приводит к результату, который лежит всегда выше (или ниже) точного решения, то надежность вычислений по этой формуле резко возрастает, по крайней мере становится точно известным направление возможных отклонений от истины. Отмечаемый факт хорошо известен в случае расчетов связанных состояний, проводимых на основе теоремы Релея — Ритца. В дальнейшем мы рассмотрим один из принципов минимума.

2. T-матрица, K-матрица и функция Грина

T-матрица рассеяния определяется соотношением (7.40):

$$T_{\beta\alpha} = (\Psi_{0\beta}, H'\Psi_\alpha^{(+)}) = (\Psi_\beta^{(-)}, H'\Psi_{0\alpha}), \quad (11.65)$$

где H' — гамильтониан взаимодействия, $\Psi_{0\beta}$ — «невозмущенное» состояние (обычно плоская волна) и $\Psi_\alpha^{(+)}$ — полное состояние, определяемое из уравнения

$$\Psi_\alpha^{(\pm)} = \Psi_{0\alpha} + G^\pm H'\Psi_\alpha^{(\pm)}. \quad (11.66)$$

Состояния $\Psi_{0\beta}$ или $\Psi_{0\alpha}$ и гамильтониан взаимодействия H' считаются известными. Если вычислять матричный элемент $T_{\beta\alpha}$ путем подстановки в (11.65) приближенных выражений для $\Psi_\alpha^{(+)}$ или $\Psi_\beta^{(-)}$, то ошибки от незнания этих состояний приводят к ошибке в определении $T_{\beta\alpha}$, имеющей, вообще говоря, «соизмеримую с ними величину»¹⁾. Мы постараемся найти такое выражение для $T_{\beta\alpha}$, которое стационарно по отношению к малым вариациям $\Psi_\alpha^{(+)}$ или $\Psi_\beta^{(-)}$ вблизи точных состояний²⁾.

Подставляя (11.66) в (11.65) и используя (7.9), получаем

$$T_{\beta\alpha} = (\Psi_\beta^{(-)}, H'\Psi_\alpha^{(+)}) - (\Psi_\beta^{(-)}, H'G + H'\Psi_\alpha^{(+)}). \quad (11.67)$$

¹⁾ Если волновая функция отклоняется от истинного решения на бесконечно малую величину $\delta\psi$, то ошибка в $T_{\beta\alpha}$ является линейным функционалом от $\delta\psi$.

²⁾ Следовательно, ошибка, возникающая в $T_{\beta\alpha}$, будет иметь порядок $(\delta\psi)^2$.

Вычитая это соотношение из соотношения

$$2T_{\beta\alpha} = (\Psi_{0\beta}, H'\Psi_{\alpha}^{(+)}) + (\Psi_{\beta}^{(-)}, H'\Psi_{0\alpha}),$$

получаем

$$T_{\beta\alpha} = (\Psi_{0\beta}, H'\Psi_{\alpha}^{(+)}) + (\Psi_{\beta}^{(-)}, H'\Psi_{0\alpha}) - \\ - (\Psi_{\beta}^{(-)}, H'\Psi_{\alpha}^{(+)}) + (\Psi_{\beta}^{(-)}, H'G + H'\Psi_{\alpha}^{(+)}). \quad (11.68)$$

Вычислим теперь первую вариацию левой части этого равенства, обусловленную малыми изменениями состояний $\Psi_{\alpha}^{(+)}$ и $\Psi_{\beta}^{(-)}$:

$$\delta T_{\beta\alpha} = (\delta\Psi_{\beta}^{(-)}, H'(\Psi_{0\alpha} - \Psi_{\alpha}^{(+)} + G + H'\Psi_{\alpha}^{(+)})) + \\ + ((\Psi_{0\beta} - \Psi_{\beta}^{(-)} + G - H'\Psi_{\beta}^{(-)}), H'\delta\Psi_{\alpha}^{(+)}) = 0$$

[здесь учтено уравнение (11.66)]. Следовательно, выражение (11.68) для матричного элемента $T_{\beta\alpha}$ стационарно по отношению к малым вариациям полного вектора состояния в окрестности истинного решения; поэтому при приближенных расчетах оно более полезно, чем исходное выражение (11.65).

С теми же соотношениями (11.65) и (11.67) можно поступить и по-другому. Деля выражение

$$(T_{\beta\alpha})^2 = (\Psi_{0\beta}, H'\Psi_{\alpha}^{(+)})(\Psi_{\beta}^{(-)}, H'\Psi_{0\alpha})$$

на выражение (11.67), получаем

$$T_{\beta\alpha} = \frac{(\Psi_{0\beta}, H'\Psi_{\alpha}^{(+)})(\Psi_{\beta}^{(-)}, H'\Psi_{0\alpha})}{(\Psi_{\beta}^{(-)}, H'\Psi_{\alpha}^{(+)} - (\Psi_{\beta}^{(-)}, H'G + H'\Psi_{\alpha}^{(+)}))}. \quad (11.69)$$

Легко проверить, что это выражение также стационарно. Оно имеет то преимущество перед (11.68), что не зависит от нормировки векторов состояния $\Psi_{\alpha}^{(+)}$ и $\Psi_{\beta}^{(-)}$.

В случае упругого рассеяния бесспиновых частиц мы должны использовать импульсы в качестве индексов, указывающих состояния; в таком случае в координатном представлении $\Psi^{(-)*}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Psi^{(+)}(-\mathbf{k}, \mathbf{r})$. Следовательно, при учете соотношения (10.12a) выражение (11.69) перейдет в следующее:

$$A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) =$$

$$= \frac{\int d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \mathcal{T}^{\circ}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}') \int d\mathbf{r} \psi(-\mathbf{k}', \mathbf{r}) \mathcal{T}^{\circ}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{4\pi \int d\mathbf{r} \psi(-\mathbf{k}', \mathbf{r}) \mathcal{T}^{\circ}(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi(-\mathbf{k}', \mathbf{r}) \mathcal{T}^{\circ}(\mathbf{r}) \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathcal{T}^{\circ}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}')}, \quad (11.69a)$$

причем подразумевается, что $\psi = \psi^{(+1)}$.

Аналогичные выражения легко получить для \mathbf{K} -матрицы, определяемой соотношениями (7.56) и (7.56a) с помощью векторов состояний (7.20), соответствующих главному значению. Одно из них имеет вид

$$K_{\beta\alpha} = -\pi \frac{(\Psi_{0\beta}, H'\Psi_{(\alpha)}^{(P)})(\Psi_{\beta}^{(P)}, H'\Psi_{0\alpha})}{(\Psi_{\beta}^{(P)}, H'\Psi_{\alpha}^{(P)}) - (\Psi_{\beta}^{(P)}, H'G^{(P)}H'\Psi_{\alpha}^{(P)})}. \quad (11.70)$$

Заметим, что приближенная \mathbf{K} -матрица, получаемая из этого стационарного выражения, автоматически эрмитова.

Функция Грина. Подобную методику можно использовать и для вычисления функций Грина. Подставляя соотношение

$$\mathcal{G} - G = G H' \mathcal{G} \quad (11.71)$$

в соотношение

$$\mathcal{G} - G = \mathcal{G} H' G, \quad (11.71a)$$

¹ Следует отметить, что T -матрица или амплитуда рассеяния, вычисленные с помощью любого из соотношений (11.68), (11.69) и (11.69a), удовлетворяют автоматически теореме взаимности.

получаем нелинейное уравнение

$$\mathcal{G} - G = \mathcal{G}H'\mathcal{G} - \mathcal{G}H'GH'\mathcal{G}. \quad (11.72)$$

Вычитая его из суммы двух приведенных соотношений, получаем

$$\mathcal{G} = G + GH'\mathcal{G} + \mathcal{G}H'G - \mathcal{G}H'\mathcal{G} + \mathcal{G}H'GH'\mathcal{G}. \quad (11.73)$$

Первая вариация левой части этого равенства, обусловленная малыми изменениями функции G , входящей в правую часть, равна

$$\delta\mathcal{G} = (G - \mathcal{G} + \mathcal{G}H'G)H'\delta\mathcal{G} + \delta\mathcal{G}H'(G - \mathcal{G} + GH'\mathcal{G}) = 0,$$

причем равенство нулю является следствием (11.71) и (11.71a). Таким образом, если исходить из пробной функции Грина и подставить ее в правую часть равенства (11.73), то, проводя вычисления, мы таким способом получим намного лучшую функцию \mathcal{G} . Конечно, опять можно исключить зависимость от всех коэффициентов, *поделив* произведение уравнений (11.71) и (11.71a) на уравнение (11.72) (деление понимается не в операторном смысле, а как операция с функциями, заданными в определенном представлении).

Оператор T . С помощью той же методики уравнение Липпмана — Швингера (7.47) для оператора T

$$T = H' + TG^+H' = H' + H'G^+T$$

можно заменить стационарными уравнениями

$$T = H' + TG^+H' + H'G^+T - TG^+T + TG^+H'G^+T \quad (11.74)$$

или

$$T_{\beta\alpha} = H'_{\beta\alpha} + \frac{(TG^+H')_{\beta\alpha}(H'G^+T)_{\beta\alpha}}{[T(G^+ - G^+H'G^+)T]_{\beta\alpha}}. \quad (11.75)$$

Последнее не зависит от нормировки оператора T , который подставляется в правую часть¹⁾.

3. Вариационные формулы для фазового сдвига

При использовании частичного разложения необходимо вычислять фазовые сдвиги. Если асимптотика регулярной радиальной волновой функции имеет вид

$$\varphi \approx a \cos\left(kr - \frac{1}{2}\pi l\right) + k^{-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l\right), \quad (11.76)$$

то фазовый сдвиг дается формулой

$$\operatorname{tg} \delta_l = ak. \quad (11.77)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty dr \varphi_1 (\mathcal{H} - k^2) \varphi_2, \quad \mathcal{H} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mathcal{V}(r). \quad (11.78)$$

Если функция $\varphi_2(r)$ удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера, с угловым моментом l и потенциалом $\mathcal{V}(r)$, то этот интеграл обращается в нуль. Предположим, однако, что φ_1 и φ_2 — произвольные функции переменной r , на которые наложено лишь условие регулярности в начале координат

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$$

¹⁾ Обычная плата за получение стационарного уравнения — появление в нем нелинейности; очевидно, что этого никак нельзя избежать.

и условие нормировки (11.76) (с произвольной константой a). Если φ_1 и φ_2 выходят на асимптотику (11.76) достаточно быстро и если потенциал $\mathcal{V}(r)$ является абсолютно интегрируемой функцией, то интеграл I существует и мы можем выполнить интегрирование по частям:

$$\int_0^{\infty} dr \varphi_1 (\mathcal{H} - k^2) \varphi_2 - \int_0^{\infty} dr \varphi_2 (\mathcal{H} - k^2) \varphi_1 = [\varphi_1' \varphi_2 - \varphi_2' \varphi_1] \Big|_0^{\infty} = a_2 - a_1. \quad (11.79)$$

Если $\delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — бесконечно малая величина, а $\varphi_1 = \varphi$ — точное решение уравнения Шредингера, то это равенство означает, что

$$\delta \int_0^{\infty} dr \varphi (\mathcal{H} - k^2) \varphi = \delta a.$$

Другими словами, первая вариация величины

$$a - \int_0^{\infty} dr \varphi (\mathcal{H} + k^2) \varphi$$

обращается в нуль.

Таким образом, мы выбираем пробную функцию, обращающуюся в нуль в начале координат и нормированную условием того, чтобы на бесконечности она вела себя как (11.76), а затем вычисляем для нее фазовый сдвиг по формуле

$$k^{-1} \operatorname{tg} \delta_l = a - \int_0^{\infty} dr \varphi (\mathcal{H} - k^2) \varphi. \quad (11.80)$$

Если функция, стоящая под знаком интеграла и определяющая константу a , является точным решением уравнения Шредингера, то интеграл обращается в нуль и формула (11.80) будет давать нам точное значение фазового сдвига. Если пробная функция является достаточно хорошим приближением к точному решению, то вследствие стационарности правой части (11.80) в окрестности истинного значения эта формула для истинного фазового сдвига будет давать лучшее приближение, чем формула (11.77).

4. Длина рассеяния s -волны

Описанные вычисления можно провести в случае $l = 0$ и при нулевой энергии. Тогда величина $-a$ будет длиной рассеяния c , соответствующей угловому моменту $l = 0$. Следовательно, стационарная формула для длины рассеяния имеет вид

$$c = -a + \int_0^{\infty} dr \varphi \mathcal{H} \varphi, \quad (11.81)$$

где пробная функция имеет асимптотику

$$\varphi \approx a + r \quad (11.82)$$

и обращается в нуль в точке $r = 0$. Заметим, что теперь для существования интеграла необходимо потребовать, чтобы функция $r^2 V(r)$ была интегрируемой.

Вместо (11.81) легко получить другую формулу, которая является не только стационарной, но и удовлетворяет принципу минимума. Пусть φ — точная волновая функция

$$\mathcal{H}\varphi = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi \approx -c + r, \quad (11.83)$$

φ_l — пробная функция, на которую наложены только граничные условия

$$\varphi_l(0) = 0, \quad \varphi_l \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} a + r, \quad (11.84)$$

и $u \equiv \varphi - \varphi_l$. Тогда из (11.80) следует, что точное значение длины рассеяния дается выражением

$$c = -a + \int_0^{\infty} dr \varphi_l \mathcal{H} \varphi_l - \int_0^{\infty} dr u \mathcal{H} u. \quad (11.85)$$

В противоположность (11.81) эта формула справедлива при *любом выборе* функции φ_l , удовлетворяющей условиям (11.84).

Если гамильтониан \mathcal{H} не имеет связанных состояний, то он является неотрицательно определенным оператором. Если бы функция u не имела асимптотику

$$u \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -(c + a),$$

т. е. была бы квадратично интегрируемой, то мы сразу же получили бы, что всегда

$$\int_0^{\infty} dr u \mathcal{H} u \geq 0. \quad (11.86)$$

Соотношению (11.86) должны удовлетворять также и наши функции u , если аппроксимировать их с помощью последовательности квадратично интегрируемых функций. Поэтому из (11.85) следует, что

$$c \leq -a + \int_a^{\infty} dr \varphi_l \mathcal{H} \varphi_l \quad (11.87)$$

(при условии, что потенциал не имеет связанных состояний). Следовательно, можно с уверенностью сказать, что из всех пробных функций, удовлетворяющих условиям (11.84), наилучшее приближение будет давать та, которая минимизирует правую часть соотношения (11.81). Более того, из (11.87) видно, какой знак имеет ошибка.

Случай связанных состояний. Приведенное рассуждение легко распространить на случай, когда потенциал имеет связанные состояния. Будем считать сначала, что существует только одно связанное состояние (при $l = 0$), энергия которого $E_0 < 0$. Тогда гамильтониан \mathcal{H} уже не является больше неотрицательно определенным оператором; однако для всех функций u , ортогональных (нормированной) волновой функции ψ_b связанного состояния, неравенство (11.86) все же остается справедливым. Используя для простоты обычное обозначение скалярного произведения, запишем

$$u = \varphi - (\psi_b, \varphi) \psi_b.$$

Если это выражение для u подставить в (11.86), то для произвольных функций φ будем иметь

$$(\varphi, \mathcal{H} \varphi) \geq (\psi_b, \varphi) (\varphi, \mathcal{H} \psi_b) = \frac{|(\psi_b, \mathcal{H} \varphi)|^2}{(\psi_b, \mathcal{H} \psi_b)}.$$

Возникающая при этом трудность заключается в том, что точная волновая функция ψ_b связанного состояния, а значит и правая часть приведенного неравенства, обычно не известна.

Предположим теперь, что φ — произвольная (нормированная) «пробная» функция связанного состояния, которая достаточно хорошо его аппроксимирует и которая для математического ожидания гамильтониана \mathcal{H} дает отрицатель-

ную величину

$$(\psi, \mathcal{H}\psi) < 0.$$

Мы утверждаем, что в этом случае по-прежнему имеет место неравенство

$$(\varphi, \mathcal{H}\varphi) \geq \frac{|(\psi, \mathcal{H}\varphi)|^2}{(\psi, \mathcal{H}\psi)}, \quad (11.88)$$

где функция φ совершенно произвольна. Доказательство основано на следующей алгебраической теореме (иногда называемой *теоремой Хиллерааса — Ундгейма*)¹⁾.

Пусть M' — эрмитова матрица, которая получается из матрицы M , если у нее удалить одну строку и один столбец. Тогда собственные значения матриц M и M' будут чередоваться, т. е. если $\{\lambda'_n\}$ — собственные значения M' , а $\{\lambda_n\}$ — собственные значения M , то их можно занумеровать так, что

$$\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda'_{N-1} \leq \lambda_N. \quad (11.89)$$

Эта теорема означает, что ни одна из (эрмитовых) субматриц данной эрмитовой матрицы M не может иметь больше отрицательных (или положительных) собственных значений, чем сама матрица M . Если известно, что матрица M имеет в точности *одно* отрицательное собственное значение, то никакая квадратная субматрица второго порядка не будет иметь двух отрицательных собственных значений. Пусть M_{11} — отрицательный диагональный элемент (одномерная субматрица, являющаяся собственным значением $\lambda'_1 = M_{11} < 0$). Возьмем двумерную субматрицу M' , содержащую этот элемент. Из теоремы следует, что собственные значения матрицы M' обладают свойством

$$\lambda'_1 \leq \lambda''_1 \leq \lambda'_2.$$

Поэтому $\lambda'_1 \leq 0$, $\lambda'_2 \geq 0$ и, следовательно,

$$M_{11}M_{22} - |M_{12}|^2 = \det M' = \lambda'_1 \lambda'_2 \leq 0$$

или

$$M_{22} \geq \frac{|M_{12}|^2}{M_{11}}.$$

Так как базис произволен и необязательно ортогонален, то это неравенство является не чем иным, как соотношением (11.88).

Так как $\mathcal{H}u = -\mathcal{H}\varphi_l$, то подстановка (11.88) в (11.85) приводит к неравенству

$$c \leq -a + \int_0^\infty dr \varphi_l \mathcal{H} \varphi_l - \frac{\left(\int_0^\infty dr \psi \mathcal{H} \varphi_l \right)^2}{\int_0^\infty dr \psi \mathcal{H} \psi}. \quad (11.90)$$

На функцию ψ накладывается единственное требование, чтобы

$$\int_0^\infty dr \psi \mathcal{H} \psi < 0.$$

Фиксируем ψ и из семейства пробных функций φ_l выберем такую функцию, которая минимизирует правую часть неравенства (11.90); она даст нам наилучшее приближение к точному значению длины рассеяния c . Если функция φ_l является точным решением, то содержащие ее интегралы, которые входят в (11.90), обращаются в нуль и неравенство превращается в строгое равенство.

¹⁾ Доказательство приведено в приложении.

Несколько связанных состояний. Проведенное рассуждение допускает непосредственное обобщение на случай более чем одного связанного состояния. Пусть их имеется N . Тогда нужно подобрать N таких ортогональных состояний $\{\psi_n\}$, чтобы матрица \mathfrak{H} с элементами

$$\mathcal{H}_{nm} = \int_0^{\infty} dr \psi_n \mathcal{H} \psi_m$$

была диагональной и отрицательно определенной. Добавим к ним другой, линейно независимый (но необязательно ортогональный к состояниям $\{\psi_n\}$) вектор φ и расширим матрицу \mathfrak{H} до квадратной матрицы \mathfrak{H}' $(N + 1)$ -го порядка. Она должна иметь N отрицательных и одно положительное собственное значение, так что

$$\frac{\det \mathfrak{H}'}{\det \mathfrak{H}} > 0.$$

Но из конструкции матрицы \mathfrak{H}' видно, что

$$\frac{\det \mathfrak{H}'}{\det \mathfrak{H}} = \mathcal{H}_{N+1, N+1} - \sum_{n=1}^N \frac{|\mathcal{H}_{n, N+1}|^2}{\mathcal{H}_{nn}}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{H}_{N+1, N+1} \geq \sum_{n=1}^N \frac{|\mathcal{H}_{n, N+1}|^2}{\mathcal{H}_{nn}}.$$

Другими словами, для произвольного вектора φ

$$(\varphi, \mathcal{H} \varphi) \geq \sum_{n=1}^N \frac{|\langle \psi_n, \mathcal{H} \varphi \rangle|^2}{\langle \psi_n, \mathcal{H} \psi_n \rangle}, \quad (11.91)$$

при условии что ψ_n удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \langle \psi_n, \mathcal{H} \psi_m \rangle &= 0 \quad \text{при } n \neq m, \\ \langle \psi_n, \mathcal{H} \psi_n \rangle &< 0 \quad \text{при } n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (11.92)$$

Легко видеть, что если функция φ линейно зависит от $\{\psi_n\}$, то в (11.91) будет стоять знак равенства.

Итак, в случае N связанных состояний имеет место неравенство

$$c \leq -a + \int_0^{\infty} dr \varphi_t \mathcal{H} \varphi_t - \sum_{n=1}^N \frac{\left(\int_0^{\infty} dr \psi_n \mathcal{H} \varphi_t \right)^2}{\int_0^{\infty} dr \psi_n \mathcal{H} \psi_n}. \quad (11.93)$$

Единственное, что требуется от функций ψ_n , это чтобы они были взаимно ортогональными и удовлетворяли условиям (11.92).

Следует подчеркнуть, что полученные ограничения на длину рассеяния не зависят от каких-либо предположений о локальной природе взаимодействия, так как их вывод основан только на свойстве спектральности. Обобщение на случай ненулевых энергий и на многоканальные процессы можно найти в литературе (см., в частности, работы [367, 368]). Применения изложенных соображений в ядерной физике и в задаче низкоэнергетического рассеяния электронов на атомах рассматриваются во многих работах (см. комментарии к настоящей главе).

Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ХИЛЛЕРААСА — УНДГЕЙМА

Введем базис (необязательно ортогональный), в котором матрица M' имеет диагональный вид и расположена на главной диагонали матрицы M . Это можно сделать, не затрагивая дополнительную строку и столбец, которыми квадратная матрица M порядка N отличается от M' . Без ограничения общности можно считать, что эти строка и столбец стоят на последнем месте. Тогда легко видеть, что детерминант секулярного уравнения для матрицы M равен

$$f(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} \lambda'_1 - \lambda & & \dots & M_{1N} \\ & \lambda'_2 - \lambda & & M_{2N} \\ & & \dots & \\ & & & \dots \\ M_{N1} & M_{N2} & \dots & M_{NN} - \lambda \end{vmatrix} = \\ = (M_{NN} - \lambda) \prod_{n=1}^{N-1} (\lambda'_n - \lambda) - \sum_{m=1}^{N-1} |M_{mN}|^2 \prod_{n \neq m} (\lambda'_n - \lambda).$$

Вычислим этот детерминант при $\lambda = \lambda'_k$. Если базис выбран так, что собственные значения матрицы M' расположены в последовательности

$$\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda'_{N-1},$$

то

$$f(\lambda'_k) = \det(M - \lambda'_k I) = -|M_{kN}|^2 \prod_{n \neq k} (\lambda'_n - \lambda'_k) \begin{cases} \leq 0 & \text{при } k \text{ нечетном,} \\ \geq 0 & \text{при } k \text{ четном.} \end{cases}$$

Следовательно, при $\lambda \rightarrow -\infty$ $f(\lambda)$ стремится к $+\infty$; при $\lambda \rightarrow +\infty$, $f(\lambda)$ стремится к $(-1)^N$ и между любыми двумя последовательными собственными значениями матрицы M' детерминант имеет нечетное число нулей. Так как детерминант должен иметь в точности N (действительных) значений λ_n , при которых он обращается в нуль, то отсюда сразу следуют неравенства (11.89).

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам в квантовой механике было впервые использовано Факсеном и Хольцмарком [249]. Конечно, это было сделано после применения аналогичных разложений в теории звука и в теории электромагнитных волн.

К § 2, п. 2. Теория эффективного радиуса развита в работе Швингера [762] и в его неопубликованных лекциях (см. [76]). Метод, изложенный в этой книге, предложен Бете [60] (см. также статью Джексона и Блатта [427]).

То обстоятельство, что появление нового связанного состояния приводит к бесконечному значению длины рассеяния, Ши и Шварц [754] использовали для численных расчетов таких параметров интенсивностей потенциала, при которых возникают новые связанные состояния с различными угловыми моментами. Они рассматривали потенциалы Юкавы и потенциалы Вуда — Саксона. Исследованиям низкоэнергетического поведения амплитуды рассеяния в случае дальнего действующего потенциала, когда теория эффективного радиуса непригодна, посвящены работы [794, 795, 531].

Уравнение Шредингера для потенциала, имеющего форму прямоугольной ямы, наиболее подробно изучено Нуссенцвейгом [660].

Хотя теорема Левинсона отдельным авторам была известна и до него, ее первое строгое доказательство было предложено Левинсоном [529].

Резонансная формула Брейта — Вигнера является квантовомеханическим аналогом электромагнитной резонансной формулы Лоренца; в обоих случаях форма линии одинокова. Первой работой по этому вопросу была статья Брейта и Вигнера [109].

Нижний предел для производной фазового сдвига, к которому приводят рассуждения, основанные на принципе причинности [см. неравенство (11.57)], впервые указал Вигнер [911].

Парциальное разложение в релятивистски инвариантной форме обсуждалось Мучеком [631].

К § 3. Вариационная формула теории рассеяния независимо предложена Хюльте-ном [402—404] и Швингером [761, 762, 765, 541]. Общий метод, основанный на использовании интегральных уравнений [таковыми являются, в частности, уравнения (11.68) и (11.70)] развит Швингером. В методике Хюльтена используются дифференциальные уравнения. Эта методика изложена в § 3, п. 3; см. также следующие работы: [1005, 1006, 74, 494, 495, 76, 397, 869, 405, 464, 587, 429, 849, 617, 620, 93, 852, 99, 606, 442, 443]. Аналогичные методы применяются в задачах диффузии нейтронов [574, 199] и в электромагнитных задачах [524, 525, 456].

Ограничения (или экстремальные принципы), которым удовлетворяют параметры рассеяния, начал исследовать Като [466]. Соответствующие вопросы получили значительное развитие в работах [487, 712, 681, 682, 791—793, 796—798, 729, 41, 366—368, 365, 725].

Стационарную формулу (11.80) предложил Кон [494]. В рассуждении, приводящем к ограничениям (11.87), (11.90) и (11.93) на длину рассеяния, мы следовали работе [367].

Теорема Хиллерааса — Ундгейма доказана ими в работе [415]. Теорема находится в тесной связи с хорошо известными в алгебре фактами, которые рассмотрены в этой статье. При изложении ее доказательства мы следовали Макдональду [555].

ЗАДАЧИ

1. Чем конкретно плоха волновая функция $u_l(kr)r^{-1}Y_l^m(\theta, \varphi)$, если число m не является целым? Если l не является целым?

2. Объяснить, почему амплитуда рассеяния в случае сферически симметричного потенциала для бесспиновых частиц должна обладать аксиальной симметрией относительно направления падающего потока, даже если есть волновые функции, которые этого свойства не имеют.

3. Пусть потенциал таков, что при определенной энергии все фазовые сдвиги для угловых моментов $l > L$ обращаются в нуль. Какое максимальное значение может иметь сечение рассеяния?

4. Может ли парциальное сечение достигать своего предельного значения (11.18), определяемого условием унитарности, если взаимодействие является *абсорптивным*? Предположим, что в l -й парциальной волне оно полностью абсорптивно, т. е. $\text{Im} \delta_l = \infty$. Какова величина l -го парциального сечения? Сравните полученный результат с формулами (11.32) и (3.47). Каково значение дифференциального сечения, если взаимодействие полностью абсорптивно во всех парциальных волнах?

5. Выражение (11.15) можно рассматривать как определение фазового сдвига δ_l . Отметим, что в него явно входит величина $k = (2\mu E/\hbar^2)^{1/2}$, а значит, и энергия. Как это согласовать с тем, что с физической точки зрения энергия определена с точностью до аддитивной постоянной? Фиксировано ли в теории рассеяния нулевое значение энергии; если да, то чем?

6. Вычислить длину рассеяния и эффективный радиус для потенциала, имеющего форму прямоугольной ямы радиусом R и глубиной V_0 . Вычислить следующий член разложения фазового сдвига s -волны по степеням k^2 . Оценить, при каких значениях энергии приближение эффективного радиуса будет хорошим. Применить его для расчета энергии связи связанного состояния. Является ли приближение хорошим?

7. Рассмотрим потенциал, имеющий вид сферической «оболочки», который равен V_0 в области между $r = R_1$ и $r = R_2$ и нулю вне ее. Вычислить фазовый сдвиг s -волны и показать, что при больших V_0 (по сравнению с чем?) резонансы будут появляться приблизительно при таких энергиях, которые имели бы связанные состояния, если бы V_0 равнялось бесконечности. Путем простого сшивания волновой функции на границах вычислить *вероятность просачивания*, считая ее малой. Показать, что рассчитанное таким способом время жизни согласуется с результатом, который получается из ширины резонанса.

8. Вычислить приближенно длину рассеяния в случае экспоненциального потенциала $V = \gamma e^{-\mu r}$, используя в качестве пробной функции

$$\varphi_l = \begin{cases} r + a & r > -a \quad (a < 0), \\ -\frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi r}{a}, & r < -a. \end{cases}$$

Оптимизировать результат путем минимизации полученной длины рассеяния.

9. Провести те же вычисления, что и в задаче 8, в случае прямоугольного барьера

$$V(r) = \begin{cases} \gamma, & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

10. Провести те же вычисления, что и в задаче 8, в случае осцилляторного потенциала

$$V(r) = \begin{cases} \gamma(r^2 - R^2), & r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

11. В случае потенциала задачи 10 вычислить приближенно фазовый сдвиг, соответствующий угловому моменту $l=0$, при величине импульса k . В качестве пробной функции взять

$$\Psi_l = \begin{cases} a \cos kr + k^{-1} \sin kr, & r > r_0, \\ c \sin Kr, & r < r_0. \end{cases}$$

Как нужно выбрать параметры a , c и K , чтобы оптимизировать полученный результат?

12. Провести те же вычисления, что и в задаче 11, в случае экспоненциального потенциала $V = \gamma e^{-\mu r}$.

13. Две частицы массы $3 \cdot 10^{-25}$ г взаимодействуют друг с другом, причем радиус действия сил равен 10^{-12} см. Эксперимент по рассеянию проводится при энергии в системе центра масс, равной 200 кэв. Если дифференциальное сечение измеряется с точностью в несколько процентов, то каким будет общий вид угловой зависимости?

14. Предположим, что в сечении нуклон-нуклонного рассеяния при энергии в системе центра масс, равной 500 Мэв, обнаружен пик, размеры и угловая зависимость которого дают «насыщение» унитарного предела в одной из парциальных волн. Если ширина пика равна примерно 5 Мэв, то правильным ли будет считать, что это резонанс? Ответить на тот же вопрос, если ширина равна 200 Мэв.

15. Две частицы с массами 1500 и 1800 Мэв взаимодействуют посредством потенциала притяжения, имеющего вид прямоугольной ямы глубиной 8,23 Мэв и радиусом $5,2 \cdot 10^{-13}$ см. При какой энергии в системе центра масс они имеют резонанс в p -волне? Какова его ширина? При какой энергии они имеют резонанс в d -волне, если он вообще существует? Какова его ширина?

Одноканальное рассеяние бесспиновых частиц. II

§ 1. СТРОГАЯ ТЕОРИЯ S-РАССЕЯНИЯ

1. Регулярные и нерегулярные решения

Рассмотрим снова радиальное уравнение Шредингера и более строго исследуем свойства радиальных волновых функций и элементов S-матрицы как функций импульса k и константы взаимодействия γ . Для простоты рассмотрим сначала случай $l = 0$.

Дифференциальное уравнение, которое требуется решить, имеет вид (после проведения выкладок мы положим $\gamma = 1$)

$$-\psi'' + \gamma \tilde{\gamma} \psi = k^2 \psi, \quad (12.1)$$

где $\tilde{\gamma} = 2\mu V$. При условии, что потенциал в точке $r = 0$ является функцией менее сингулярной, чем r^{-2} , т. е.

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \tilde{\gamma} = 0,$$

точка $r = 0$ будет «регулярной» в смысле теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и при $r = 0$ можно задавать произвольные граничные условия. Решения, которые обращаются в нуль при $r = 0$, обычно называют *регулярными* решениями; те же, которые не обращаются, — *нерегулярными*. Только регулярные решения имеют физический смысл. Соображения в пользу такого утверждения очевидны, когда $l \geq 1$, однако при $l = 0$ необходимо найти какие-то дополнительные аргументы, так как при этом недостаточно использовать обычное требование квадратичной интегрируемости физической волновой функции.

Положим сначала для простоты $\tilde{\gamma} = 0$. Функция $\cos kr$ не является «приемлемым» решением уравнения (12.1), поскольку соответствующая трехмерная волновая функция $\psi(\mathbf{r}) = r^{-1} \cos kr$, хотя и будет квадратично интегрируемой в любой конечной области пространства, но удовлетворяет *не* уравнению Шредингера

$$-\nabla^2 \psi = k^2 \psi,$$

а неоднородному уравнению

$$(\nabla^2 + k^2) \psi = -4\pi \delta(\mathbf{r}).$$

Трудность возникает потому, что обыкновенное дифференциальное уравнение (12.1) имеет точку $r = 0$ в качестве своей граничной точки, причем мы требуем, чтобы форма уравнения и его решение в точке $r = 0$ являлись соответствующими пределами при $r \rightarrow 0$. Это исключает появление δ -функции при $r = 0$. С точки зрения трехмерного уравнения точка $\mathbf{r} = 0$ ничем не отличается от любой другой и δ -функция $\delta(\mathbf{r})$ при $\mathbf{r} = 0$ может появиться.

В точности такие же соображения, конечно, можно развить и в случае $\tilde{\gamma} \neq 0$. Существенно, что если $r \geq 0$, то $\nabla^2 r^{-1} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$, тогда как при $r > 0$ можно считать, что $\nabla^2 r^{-1} = 0$.

Регулярное решение. Определим теперь регулярное решение $\varphi(k, r)$ как такое, которое в точке $r = 0$ удовлетворяет граничным условиям

$$\varphi(k, 0) = 0, \quad \varphi'(k, 0) = 1; \quad (12.2)$$

здесь штрих означает производную по r , которая вычисляется в точке $r = 0$. Заметим, что φ отличается от «физической» волновой функции в (11.6), которая определяется как удовлетворяющая смешанным граничным условиям — одному при $r = 0$ (требование регулярности) и другому при $r = \infty$ [см. (11.15)]. Наша функция φ имеет более простые свойства, поскольку она удовлетворяет более простым граничным условиям.

Дифференциальное уравнение (12.1) с граничными условиями (12.2) эквивалентно некоторому интегральному уравнению. Так как граничные условия оба относятся к точке $r = 0$, то соответствующая функция Грина *не* совпадает с функцией Грина (11.2), отличаясь от последней слагаемым, которое является решением однородного уравнения (12.1). Нам нужно, чтобы функция Грина была равна

$$\mathcal{G}(k; r, r') = 0 \quad \text{при } r' > r.$$

Следовательно, при $r' < r$ она должна равняться

$$\mathcal{G}(k; r, r') = k^{-1} \sin k(r - r'). \quad (12.3)$$

Таким образом, интегральное уравнение, эквивалентное задаче (12.1) и (12.2), имеет вид

$$\varphi(k, r) = k^{-1} \sin kr + \gamma k^{-1} \int_0^r dr' \sin k(r - r') \mathcal{V}'(r') \varphi(k, r'). \quad (12.4)$$

Если интеграл равномерно сходится и, следовательно, дифференцирование можно внести под знак интеграла, то легко проверить, что решение приведенного интегрального уравнения удовлетворяет как уравнению (12.1), так и граничным условиям (12.2).

Существенным здесь является то, что уравнение (12.4) оказывается интегральным уравнением Вольтерра и, следовательно, его можно решать методом итераций при очень общих условиях, лишь бы эти условия не зависели от константы γ . В рамках теории Фредгольма это объясняется «треугольностью» ядра. [Такое ядро — обобщение понятия треугольной матрицы $K(x, x') = 0$ при $x' < x$.] В силу «треугольности» определитель Фредгольма тождественно равен единице. Следовательно, резольвента должна быть целой аналитической функцией γ . Заметим, что для ядра

$$K = \mathcal{G}\mathcal{V}'$$

имеем

$$\text{Sp } KK^\dagger = 0.$$

Для установления точных условий сходимости ряда последовательных приближений к решению уравнения (12.4) рассмотрим итерационное решение этого интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \varphi^{(n)}, \\ \varphi^{(0)} &= k^{-1} \sin kr, \\ \varphi^{(n)} &= k^{-1} \int_0^r dr' \sin k(r - r') \mathcal{V}'(r') \varphi^{(n-1)}(r'), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Легко видеть, что существует такая постоянная C , что для всех значений k и для всех действительных $r \geq 0$

$$|\sin kr| \leq C e^{v|r} \frac{|k|r}{1+|k|r}, \quad (12.6)$$

а для всех k и всех действительных $r \geq r' \geq 0$

$$|\sin k(r-r')| \leq C e^{v|(r-r')} \frac{|k|r}{1+|k|r}, \quad (12.7)$$

где введено обозначение $\text{Im } k = v$. Эти неравенства следуют из непрерывности функций, стоящих слева, и характера поведения этих функций на бесконечности и в нуле. Учитывая приведенные неравенства и вводя новые величины

$$|\varphi^{(n)}(r)| \equiv e^{v|r} \frac{r}{1+|k|r} \Psi^{(n)}(r),$$

получаем

$$\begin{aligned} \Psi^{(n)}(r) &\leq C \int_0^r dr' |\mathcal{F}'(r')| \frac{r'}{1+|k|r'} \Psi^{(n-1)}(r) \leq \\ &\leq C^{n+1} \int_0^r dr_n \dots \int_0^{r_2} dr_1 |\mathcal{F}'(r_1)| \dots |\mathcal{F}'(r_n)| \times \\ &\times \frac{r_1}{1+|k|r_1} \dots \frac{r_n}{1+|k|r_n} = \\ &= C^{n+1} \frac{1}{n!} \left[\int_0^r dr' |\mathcal{F}'(r')| \frac{r'}{1+|k|r'} \right]^n \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} |\varphi(k, r)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma|^n |\varphi^{(n)}| = e^{v|r} \frac{r}{1+|k|r} \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma|^n \Psi^{(n)} \leq \\ &\leq C e^{v|r} \frac{r}{1+|k|r} \exp \left[|\gamma| C \int_0^r dr' |\mathcal{F}'(r')| \frac{r'}{1+|k|r'} \right]. \quad (12.8) \end{aligned}$$

Таким образом, при условии

$$\int_0^{\infty} dr |\mathcal{F}'(r)| < \infty \quad (12.9)$$

ряд по степеням γ для $\varphi(k, r)$ абсолютно сходится при всех значениях γ и k и при всех действительных $r \geq 0$. Более того, в каждой замкнутой области комплексной k -плоскости и на каждом замкнутом интервале действительной оси r сходимостью этого ряда является *равномерной*. Каждый член ряда — целая аналитическая функция k . Поэтому при любых фиксированных k и r функция φ является целой аналитической функцией переменной γ , а при любых фиксированных γ и r — целой аналитической функцией k . Аналитичность φ как функции k связана с независимостью граничных условий (12.2) от k и может служить иллюстрацией известной общей теоремы Пуанкаре¹⁾. Заметим, что для простоты мы положили верхний предел в интеграле (12.9) равным бесконечности. Однако из (12.4) ясно, что $\varphi(k, r)$ зависит от $\mathcal{F}'(r')$ только в области $0 \leq r' \leq r$ и совершенно не зависит от величины $\mathcal{F}'(r)$ в области $r' > r$. Вместе с тем следует подчеркнуть, что общие свойства функции φ определяются именно

¹⁾ Упомянутая теорема была доказана Халбом [383], хотя она была задолго до этого известна Пуанкаре [692].

«глобальными» характеристиками потенциала, такими, например, как (12.9), и не чувствительны к непрерывности, дифференцируемости и другим подобным локальным свойствам потенциала \mathcal{T} .

Интуитивно ясно, что условие (12.9) эквивалентно требованию того, чтобы в нуле потенциал был менее сингулярным, чем r^{-2} , а на бесконечности стремился к нулю быстрее, чем r^{-2} . Однако последнее требование не есть необходимое условие существования φ при любом конечном значении r . Если не требовать, чтобы потенциал стремился к нулю на бесконечности быстрее r^{-2} , то поведение φ может стать очень плохим на больших расстояниях r . Вместе с тем формула (12.8) показывает, что даже если это и имеет место, то такое поведение может наблюдаться только при малых значениях k . До тех пор пока мы ограничиваемся рассмотрением случая $k \neq 0$, условие

$$\int_0^{\infty} dr |\mathcal{T}(r)| < \infty \quad (12.10)$$

оказывается вполне достаточным, чтобы при $r \rightarrow \infty$ функция φ вела себя не хуже, чем $\varphi^{(0)}$. Класс потенциалов, удовлетворяющих условию (12.10), включает потенциалы, которые на бесконечности ведут себя почти как r^{-1} . В случае кулоновского потенциала и потенциалов, убывающих еще медленнее, возникают трудности при $r \rightarrow \infty$ независимо от величины k (гл. 14, § 6).

Теперь можно подставить неравенство (12.8) в интегральное уравнение (12.4). Учитывая (12.7) и (12.9), находим, что при $|\gamma| < \gamma_0$

$$|\varphi - k^{-1} \sin kr| \leq |\gamma| C' e^{|\nu|r} \frac{r}{1+|k|r} \int_0^r dr' |\mathcal{T}(r')| \frac{r'}{1+|k|r'}. \quad (12.11)$$

Разбивая область интегрирования на две части от 0 до a и от a до ∞ , убеждаемся, что

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} dr \frac{r}{1+|k|r} |\mathcal{T}(r)| = 0,$$

если только выполняется неравенство (12.9). Следовательно, правая часть (12.11) есть ¹⁾ $o(|k|^{-1} e^{|\nu|r})$ при $|k| \rightarrow \infty$, или

$$\varphi(k, r) = k^{-1} \sin kr + o(|k|^{-1} e^{|\nu|r}). \quad (12.12)$$

Таким образом, φ стремится к своему «невозмущенному» значению $\varphi^{(0)}$ при $|k| \rightarrow \infty$ по любому направлению на комплексной плоскости; разность $\varphi - \varphi^{(0)}$ стремится к нулю быстрее, чем величина $\varphi^{(0)}$. Из (12.11) ясно, что если функция $\mathcal{T}(r)$ абсолютно интегрируема всюду, включая точку $r = 0$, то разность между φ и $\varphi^{(0)}$ есть $O(|k|^{-2} e^{|\nu|r})$. Кроме того, оценка (12.8) показывает, что φ стремится к $\varphi^{(0)}$ неравномерно относительно константы взаимодействия γ . Чем больше $|\gamma|$, тем больше C' в (12.11) и, следовательно, тем большее значение $|k|$ необходимо, чтобы $|\varphi - \varphi^{(0)}|$ было меньше любого наперед заданного числа. Заметим также, что в интеграле (12.9) верхний предел необязательно устремлять в бесконечность; условия (12.10) достаточно для того, чтобы соотношение (12.12) выполнялось равномерно по r .

Поскольку дифференциальное уравнение (12.1) зависит от k только через k^2 , а граничное условие (12.2) вообще не зависит от k , то можно утверждать, что φ является всюду регулярной функцией k^2 :

$$\varphi(-k, r) = \varphi(k, r). \quad (12.13)$$

Кроме того, для действительных k^2 и действительных γ как (12.1), так и (12.2) действительны; отсюда φ также действительна. Из принципа симметрии Шварца

¹⁾ Напомним, что по определению $f(x) = o[g(x)]$ при $x \rightarrow 0$ (или ∞), если $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$ (или ∞); $f(x) = O[g(x)]$ при $x \rightarrow 0$ (или ∞), если $|f(x)/g(x)|$ есть величина ограниченная.

следует, что аналитическое продолжение φ на комплексную плоскость k удовлетворяет соотношению

$$\varphi^*(k^*, r) = \varphi(k, r), \quad (12.14)$$

при условии что γ — действительное число. При комплексных γ имеем

$$\varphi^*(\gamma^*, k^*; r) = \varphi(\gamma, k; r) \quad (12.14a)$$

Если, наконец, сделать более сильное предположение, что потенциал допускает аналитическое продолжение в комплексную r -плоскость и что там (12.9) также имеет место, то из (12.5) следует возможность аналитического продолжения φ в ту же самую область комплексной r -плоскости.

Нерегулярные решения. Ввиду того что S -матрица и фазовые сдвиги определяются поведением φ на больших расстояниях, удобно ввести в рассмотрение другие решения уравнения (12.1), удовлетворяющие определенным граничным условиям на бесконечности. Вообще говоря, эти решения не регулярны в точке $r \rightarrow 0$. Точка $r = \infty$ является нерегулярной особой точкой дифференциального уравнения (12.1) и при определении асимптотического поведения решения в окрестности этой точки нужно сохранять член с k^2 . Таким образом, граничное условие в точке $r = \infty$ неизбежно должно зависеть от k . Зная решения уравнения (12.1) при $\mathcal{V}' = 0$, мы приходим к следующему выводу: вообще говоря, самое большее, что можно сделать, это потребовать, чтобы ¹⁾

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\mp ikr} f_{\pm}(k, r) = 1. \quad (12.15)$$

Конечно, необходимо еще выяснить, существуют ли решения f_{\pm} уравнения (12.1), удовлетворяющие граничным условиям (12.15) и однозначно ли они ими определяются. Если f_+ и f_- существуют, то они линейно независимы, за исключением случая $k = 0$.

Преобразуем опять (12.1) и (12.15) в интегральное уравнение. На этот раз соответствующая функция Грина при $r' < r$ равна нулю. Следовательно, в области $r' > r$ она имеет вид

$$\mathcal{G}(k; r, r') = -k \sin k(r - r').$$

Разность между данной функцией Грина и функцией Грина, определяемой формулой (12.3), есть решение однородного уравнения (12.1) во всей области $0 < r < \infty$. Итак, функции f_{\pm} удовлетворяют интегральным уравнениям

$$f_{\pm}(k, r) = e^{\pm ikr} - \gamma k^{-1} \int_r^{\infty} dr' \sin k(r - r') \mathcal{V}'(r') f_{\pm}(k, r'). \quad (12.16)$$

Предполагая опять, что интеграл сходится равномерно относительно r , легко проверить, что соответствующие решения этих интегральных уравнений удовлетворяют как (12.1), так и (12.15).

Поскольку (12.16) также являются уравнениями Вольтерра, то мы можем решать их методом итераций:

$$\begin{aligned} f_{\pm} &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n f_{\pm}^{(n)}, \\ f_{\pm}^{(0)} &= e^{\pm ikr}, \\ f_{\pm}^{(n)} &= -k^{-1} \int_r^{\infty} dr' \sin k(r - r') \mathcal{V}'(r') f_{\pm}^{(n-1)}(r'), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (12.17)$$

¹⁾ Мы изменяем здесь ставшее уже привычным определение, первоначально данное Иостом. Значительно удобнее все время иметь в виду *верхнюю* полуплоскость k при рассмотрении как *физического листа*, так и функции $f(k, l)$. Надеемся, что это не введет в заблуждение читателя; нужно лишь помнить, что наша функция $f_+(k, r) = f(k, r)$ обычно обозначается в литературе через $f(-k, r)$.

Вводя в рассмотрение функции

$$h_{\pm}^{(n)}(r) \equiv f_{\pm}^{(n)}(r) e^{\mp ikr},$$

находим с помощью (12.7) аналогично тому, как мы получили (12.8), что

$$|f_{\pm}(k, r)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma|^n |f_{\pm}^{(n)}| \leq \leq C e^{\mp \nu r} \exp \left\{ |\gamma| C \int_0^{\infty} dr' |\mathcal{V}'(r')| \frac{r'}{|\Gamma_{\mp}| k |r'|} e^{(|\nu| \mp \nu)(r'-r)} \right\}. \quad (12.18)$$

Следовательно, решения f_{\pm} существуют при всех k и r и могут быть записаны в виде абсолютно сходящихся рядов по степеням γ при условии конечности величин

$$\alpha_{\pm} \equiv \int_0^{\infty} dr |\mathcal{V}'(r)| e^{(|\nu| \mp \nu)r}. \quad (12.19)$$

Для действительных k это требование эквивалентно (12.9). Если выполняется (12.9), то величины α_+ и α_- будут, во всяком случае, конечными соответственно при $\nu = \text{Im } k \geq 0$ и $\nu \leq 0$. Таким образом, f_+ всегда определена в верхней полуплоскости k , а f_- — в нижней. Относительно существования f_+ в нижней и f_- в верхней полуплоскостях ничего сказать нельзя, пока на потенциал не наложены более определенные условия. Например, если потенциал \mathcal{V}' убывает экспоненциально на бесконечности, так что при некотором $a > 0$

$$\int_0^{\infty} dr |\mathcal{V}'(r)| e^{2ar} < \infty, \quad (12.20)$$

то величина α_- конечна для положительных ν вплоть до $\nu = a$, а величина α_+ конечна для отрицательных ν вплоть до $\nu = -a$. В этом случае f_+ всегда определена также и в нижней полуплоскости k при $\text{Im } k \geq -a$, а f_- — также и в верхней полуплоскости при $\text{Im } k \leq +a$. Заметим, что, как и в случае φ , пока $k \neq 0$ и действительно, на бесконечности достаточно требовать (12.10). Только при $k = 0$ мы вынуждены накладывать более сильное условие (12.9) при $r \rightarrow \infty$. В отличие от φ , функции $f_{\pm}(k, r)$ не зависят от значений потенциала $\mathcal{V}'(r')$ в области $r' < r$. Отсюда следует, что если только $r \neq 0$, то требовать выполнения условия (12.9) в точке $r = 0$ не нужно. Оно оказывается существенным только при описании поведения функций f_{\pm} при $r = 0$.

То, что при обычных условиях f_+ определена только при $\text{Im } k \geq 0$, а f_- — только при $\text{Im } k \leq 0$, не должно вызывать удивления. Из граничного условия (12.15) видно, что если $\text{Im } k \geq 0$, то функция f_- имеет такую же величину или большую, чем f_+ при $r \rightarrow \infty$, и, следовательно, любая примесь f_- исключается из f_+ благодаря граничному условию для f_+ . Но при $\text{Im } k < 0$ функция f_- асимптотически мала по сравнению с f_+ и граничное условие (12.15) не может служить для выделения единственного решения f_+ . То же можно утверждать и в отношении f_- в области $\text{Im } k > 0$. Тем не менее при достаточно сильных ограничениях на потенциал интегральные уравнения дают нам возможность остаться в пределах той области, в которой граничные условия достаточны для выделения однозначного решения.

Хотелось бы заключить (как мы это сделали выше в отношении функций φ), что f_{\pm} являются аналитическими функциями k . Однако вследствие того, что в (12.17) фигурируют несобственные интегралы, мы не можем столь же непосредственно прийти к такому заключению. Вместо этого продифференцируем (12.16) по k и опять обратимся к итерационной процедуре. Дифференциро-

вание под знаком интеграла допустимо, поскольку интеграл в (12.16) равномерно сходится относительно k в каждой замкнутой области плоскости k , расположенной в пределах «разрешенной» полуплоскости. Все рассуждения в отношении продифференцированных уравнений для f_{\pm} проводятся в точности так же, как и для самих уравнений для f_{\pm} . Разница состоит лишь в том, что теперь от дифференцирования по k под знаком интегралов появляются дополнительные множители r' . Поэтому для обеспечения непрерывности производных f_{\pm} по k при действительных k требуется выполнение не только условия (12.10), но также и условия (12.9). Если же рассматривать также и точку $k = 0$, то возникнет дополнительное условие

$$\int_0^{\infty} dr r^2 |\mathcal{Y}'(r)| < \infty. \quad (12.21)$$

Таким образом, если выполняются (12.9) и (12.21), то $f_+(k, r)$ при любом r является аналитической функцией k , не имеющей особенностей при $\text{Im } k > 0$ и непрерывной вместе со своей производной по k при $\text{Im } k \geq 0$. Если потенциал удовлетворяет условию (12.20), то функция f_+ аналитична в большей области, а именно при $\text{Im } k > -a$. Более того, если потенциал имеет конечный радиус (в том смысле, что за пределами некоторого конечного расстояния он тождественно обращается в нуль), то функция f_+ будет *целой* аналитической функцией k . Аналогичные утверждения после внесения *необходимых изменений* справедливы также и в отношении f_- .

Если потенциал подчиняется условию (12.20) при некотором a_0 , но перестает ему подчиняться при $a > a_0$, то из приведенных утверждений нельзя заключить, что величина $\text{Im } k = a_0$ с необходимостью является естественной границей области аналитичности f_+ как функции k . В самом деле, нам хорошо известно, что путем использования итерационной процедуры часто очень легко расширить область, относительно которой известно, что в ней функция f_+ не имеет сингулярностей. Допустим, например, что при $r > R$ потенциал равен

$$\mathcal{V}'(r) = e^{-ar},$$

а при $r < R$ он задается произвольной функцией, не считая условия (12.9). Тогда при $r > R$

$$h_+^{(1)}(r) = -\frac{1}{2} ik^{-1} \int_r^{\infty} dr' e^{-ar'} (e^{2ik(r'-r)} - 1) = \frac{e^{-ar}}{a(a-2ik)},$$

а при $r < R$

$$h_+^{(1)}(r) = -\frac{1}{2} ik^{-1} \int_r^R dr' \mathcal{V}'(r') (e^{2ik(r'-r)} - 1) + \frac{e^{-aR}}{a(a-2ik)}.$$

Полученную функцию можно аналитически продолжить в область $\text{Im } k < < -\frac{1}{2}a$ с простым полюсом в точке $k = -\frac{1}{2}ia$. К тому же в выражении для $h_+^{(1)}(r)$ имеется дополнительный множитель сходимости e^{-ar} . Поэтому можно продолжать итерацию, воспользовавшись тем обстоятельством, что для каждого ι существует такая постоянная C , что

$$|h_+^{(1)}(r)| \leq C e^{-ar}$$

при всех r и всех $|k - \frac{1}{2}ia| > \iota$. Это позволяет расширить область, где остаток ряда аналитичен, до области $\text{Im } k > -a$, если не считать полюса в точке $k = -\frac{1}{2}ia$. Точно так же можно поступить с $h_+^{(2)}$ и т. д. Мы находим, что h_+ и, следовательно, f_+ не имеют сингулярностей в нижней полуплоскости, за исключением простых полюсов в точках $k = -\frac{1}{2}ian$, $n = 1, 2, \dots$ (см. также гл. 14, § 3).

Совершенно ясно, что область применимости использованного метода не ограничивается рассмотренным примером. Фактически метод применим для весьма широкого класса потенциалов с определенным асимптотическим поведением. Заметим, что положение сингулярностей и их характер крайне чувствительны к точной форме «хвоста» потенциала. Так, если обрезать экспоненциально убывающий потенциал на каком-нибудь расстоянии, то независимо от величины этого расстояния все рассмотренные полюсы функции f_+ исчезнут.

Пример, когда сингулярности функции f_+ не являются полюсами, можно построить, взяв потенциал $\mathcal{V}(r)$ в виде непрерывной суперпозиции экспоненциальных функций, т. е. приняв, что его можно записать в виде преобразования Лапласа

$$\mathcal{V}(r) = \int_{a_0}^{\infty} da \rho(a) e^{-ar}. \quad (12.22)$$

Для этого потенциала получим

$$h_+^{(1)} = \int_{a_0}^{\infty} da \frac{\rho(a) e^{-ar}}{a(a-2ik)}.$$

В общем случае такого типа интеграл имеет при $k = -1/2 ia_0$ точку ветвления с «естественным» положением разреза вдоль положительной мнимой полуоси, где должны были бы лежать отдельные полюсы, если бы интеграл (12.22) был заменен дискретной суммой. Предполагая только, что $\rho(a)$ убывает достаточно быстро при $a \rightarrow \infty$, мы можем повторить приведенные выше рассуждения и показать, что функция $f_+(k, r)$ регулярна на всей k -плоскости с разрезом от $k = -1/2 ia_0$ до $-i\infty$.

Частным случаем потенциала (12.22) является потенциал Юкавы, который получается, если в (12.22) положить $\rho(a) = \text{const}$. При этом

$$\mathcal{V}(r) = \text{const} \frac{e^{-\sigma r}}{r}.$$

В случае потенциала Юкавы функция f_+ имеет при $k = -1/2 ia_0$ логарифмическую точку ветвления. Вследствие физической важности потенциалов Юкавы с точки зрения теории поля потенциалы вида (12.22) часто записывают также в виде суперпозиции потенциалов Юкавы. Если предположить, что $\rho(a)$ — дифференцируемая функция и $\rho(a_0) = 0$, то, интегрируя (12.22) по частям, получаем

$$\mathcal{V}(r) = \int_{a_0}^{\infty} da \rho'(a) \frac{e^{-ar}}{r}. \quad (12.22a)$$

Аналитические потенциалы. Область аналитичности функции $f(k, r)$ можно в общем виде расширить для потенциалов, которые допускают аналитическое продолжение в комплексную r -плоскость. Допустим, что потенциал $\mathcal{V}(r)$ регулярен в области

$$-\frac{1}{2}\pi \leq -\sigma < \arg r < \sigma \leq \frac{1}{2}\pi$$

и что при действительных x и при $|\varphi| < \sigma$ комплексная функция

$$\mathcal{V}_{\varphi}(x) = e^{2i\varphi} \mathcal{V}(xe^{i\varphi})$$

удовлетворяет условиям (12.9) и (12.21). Будем называть такие потенциалы *аналитическими* (с индексом σ). Положим $r = xe^{i\varphi}$, $k = Ke^{-i\varphi}$ и пусть

$$f_{\varphi}(K, x) = f(Ke^{-i\varphi}, xe^{i\varphi}).$$

Тогда можно показать, что функция f_φ удовлетворяет дифференциальному уравнению (12.1) с комплексным потенциалом \mathcal{V}'_φ и подчиняется граничному условию (12.15). При этом x и K играют роль переменных r и k соответственно. Далее, функцию $f_\varphi(K, x)$ можно изучить точно так же, как $f(k, r)$, и прийти к заключению, что при действительных x функция $f_\varphi(K, x)$ является аналитической функцией K , регулярной в верхней полуплоскости K . Но при наших условиях, которые накладываются на потенциал, из рассмотрения интегрального уравнения (12.16) следует, что x может также быть комплексным, если только для него $|\arg x| < \sigma$. Следовательно, функция $f_\varphi(K, x)$ регулярна в верхней полуплоскости K также и при $x = |x|e^{-i\varphi}$, $|\varphi| < \sigma$. Следовательно, при действительных r функция

$$f(k, r) = f_\varphi(ke^{i\varphi}, re^{-i\varphi})$$

является регулярной функцией k , если

$$-\sigma < \arg k < \sigma + \pi.$$

Таким образом, все сингулярности функции $f(k, r)$ заключены внутри угловой области

$$\sigma - \pi < \arg k < -\sigma.$$

В частности, если потенциал \mathcal{V}' можно аналитически продолжить вплоть до мнимой оси и он удовлетворяет условиям (12.9) и (12.21) по всем лучам, углы которых с положительной осью меньше $1/2\pi$, то функция f может иметь особенности только на отрицательной мнимой полуоси.

В предположении, что весовая функция ρ ведет себя достаточно хорошо при $a \rightarrow \infty$, потенциалы (12.22) или (12.22а) являются «аналитическими» с индексом $\sigma = 1/2\pi$. Поэтому в случае таких непрерывных суперпозиций потенциалов Юкавы с $\sigma = 1/2\pi$ функция f регулярна всюду в плоскости k , за исключением отрицательной мнимой полуоси. Более того, поскольку (12.20) выполняется при $2a < a_0$, сингулярности на мнимой оси впервые появляются лишь при $\text{Im } k = -1/2ia_0$. В общем случае потенциала такого вида вдоль мнимой оси от точки $k = -1/2ia_0$ до $-i\infty$ идет разрез, что согласуется с нашими прежними выводами. Этот разрез обычно называется *разрезом Юкавы*.

Связь между f_+ и f_- . Теперь мы можем связать функции f_+ и f_- друг с другом, обращаясь к аналитическому продолжению. Функцию $f_+(k, r)$ для значений k , находящихся на положительной действительной полуоси, можно продолжить через верхнюю полуплоскость до функции $f_+(-k, r)$ для значений k на отрицательной действительной полуоси; при этом функция $f_+(-k, r)$ удовлетворяет такому же граничному условию, что и функция $f_-(k, r)$. Отсюда заключаем, что при $k > 0$

$$f_-(k, r) = f_+(ke^{+i\pi}, r). \quad (12.23)$$

Поскольку тем самым f_+ и f_- оказываются связанными посредством аналитического продолжения, то иногда мы будем опускать индекс «+» и вместо $f_+(k, r)$ будем просто писать $f(k, r)$. Если при *некотором* a условие (12.20) выполняется, то в этом случае, конечно, нам не нужно заботиться о выборе направления, по которому k обходит начало координат в (12.23). Далее, из граничного условия (12.15) и действительности уравнения (12.1) вытекает, что при вещественных k и γ

$$f_-(k, r) = f_+^*(k, r). \quad (12.24)$$

Следовательно, если функцию f_+ с действительной оси можно аналитически продолжить на некоторую область в нижней полуплоскости, то в этой области

$$f_-(k, r) = f_+^*(k^*, r) \quad (12.24a)$$

при действительных γ и

$$f_-(\gamma, k; r) = f_+^*(\gamma^*, k^*, r) \quad (12.246)$$

при комплексных γ .

Поведение f при больших $|k|$. Поведение f при больших значениях $|k|$ можно исследовать, подставив (12.18) обратно в интегральное уравнение (12.16). Так мы получим неравенство

$$|f(k, r) - e^{ihr}| \ll |\gamma| C e^{-\nu r} e^{|\gamma| C \alpha_+} \int_r^\infty dr' |\bar{\gamma}'(r') e^{(|\nu| - \nu)(r' - r)} \frac{r'}{1 + |k|r'}. \quad (12.25)$$

Рассуждая, как при выводе формулы (12.12), находим, что если $|k| \rightarrow \infty$ в пределах области $\text{Im } k \geq 0$, то интеграл в правой части (12.25) стремится к нулю, если только выполняется условие (12.9) [или если условие (12.9) выполняется в окрестности нуля, а условие (12.10) — на бесконечности]. Следовательно, при $|k| \rightarrow \infty$ в случае $\text{Im } k \geq 0$

$$f(k, r) = e^{ihr} + o(e^{-\nu r}). \quad (12.26)$$

Опять, как и в (12.12), асимптотика в (12.26) неравномерна относительно γ . Чем больше потенциал, тем большие значения $|k|$ необходимо брать для того, чтобы разность между $f(k, r)$ и e^{ihr} по модулю не превосходила заданную величину. Асимптотика в (12.26) равномерна по r при любых $r \geq 0$. Если потенциал удовлетворяет условию (12.10) с нижним пределом интегрирования, равным нулю, то $o(e^{-\nu r})$ можно заменить на $O(|k|^{-1} e^{-\nu r})$. Следует также отметить, что (12.26) справедливо, вообще говоря, только в области $\text{Im } k \geq 0$, даже когда потенциал допускает аналитическое продолжение решения f в область $\text{Im } k < 0$.

2. Функция Иоста и полная функция Грина

Так как оба решения f_+ и f_- дифференциального уравнения второго порядка (12.1) линейно независимы, то любое решение этого уравнения можно выразить в виде линейной комбинации f_+ и f_- . В частности, регулярное решение φ можно записать в виде

$$\varphi = a f_+ + b f_-.$$

Коэффициенты a и b проще всего найти, вычисляя вронскианы для функций φ , f_+ и φ , f_- . Очевидно, что¹⁾

$$W(f_+, \varphi) = b W(f_+, f_-)$$

и

$$W(f_-, \varphi) = a W(f_-, f_+).$$

Вронскиан для функций f_+ и f_- легко вычисляется. Поскольку он не зависит от r , то его можно найти, рассматривая предельный случай $r \rightarrow \infty$ и используя граничные условия (12.15). Получаем

$$W(f_+, f_-) = -2ik. \quad (12.27)$$

Следовательно, если положить

$$\tilde{f}_\pm(k) = W(f_\pm, \varphi), \quad (12.28)$$

¹⁾ Напомним определение вронскиана: $W(f, g) = fg' - f'g$. Если каждая из функций f и g является решением одного и того же радиального уравнения Шредингера, то вронскиан есть постоянная, т. е. он не зависит от r .

то

$$\varphi(k, r) = \frac{1}{2ik} [\bar{f}_- f_+(k, r) - \bar{f}_+ f_-(k, r)]. \quad (12.29)$$

Функция $\bar{f} = \bar{f}_+$ называется *функцией Йоста*¹⁾. Из соотношения (12.28), а также из (12.23) и (12.13) следует

$$\bar{f}_-(k) = \bar{f}(ke^{i\pi}). \quad (12.30)$$

Если вронскиан (12.28) вычислить в точке $r=0$, то с использованием граничного условия (12.2) получаем, что

$$\bar{f}(k) = f(k, 0). \quad (12.31)$$

Отсюда, зная разложение функции f в ряд по степеням γ , легко получить разложение для \bar{f} , а также перенести заключение об аналитичности f на \bar{f} . Функция \bar{f} при любом фиксированном k является целой аналитической функцией γ , а при любом фиксированном γ — аналитической функцией k , регулярной в области $\text{Im } k > 0$ и непрерывной вместе со своей производной в области $\text{Im } k \geq 0$. Для того чтобы эти утверждения были справедливы, потенциал обязательно должен удовлетворять условиям (12.9) и (12.21). Если, кроме того, выполняется условие (12.20), то функция \bar{f} аналитична также и в области $0 \geq \text{Im } k > -a$. Рассмотрение возможностей расширения области аналитичности функции f , приведенное в п. 1, полностью переносится на \bar{f} .

Так как φ — четная функция k , действительная на действительной оси, то [это можно видеть также из (12.31)] функция Йоста обладает такими же свойствами симметрии, как и f . Из (12.24) при вещественных k и γ получаем

$$\bar{f}_+^*(k) = \bar{f}_-(k); \quad (12.32)$$

при действительных γ и комплексных k

$$\bar{f}_+^*(k^*) = \bar{f}_-(k); \quad (12.32a)$$

при комплексных γ и k

$$\bar{f}_+^*(\gamma^*, k^*) = \bar{f}_-(\gamma, k). \quad (12.32b)$$

Поведение функции Йоста \bar{f} при высоких энергиях непосредственно следует из асимптотического равенства (12.26), которое выполняется равномерно относительно r . Таким образом, при $\text{Im } k \geq 0$

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \bar{f}(k) = 1, \quad (12.33)$$

причем стремление к пределу неравномерно по γ .

Воспользовавшись интегральным уравнением (12.16), можно найти интегральное представление функции \bar{f} :

$$\bar{f}(k) = 1 + \gamma k^{-1} \int_0^{\infty} dr \sin kr \mathcal{Y}^*(r) f(k, r). \quad (12.34)$$

Если потенциал аналитичен (с индексом $\sigma = 1/2\pi$), то с помощью рассуждений, приведенных после формулы (12.22a), представление (12.34) можно аналитически продолжить на верхнюю полуплоскость k . Используя далее аналитическое продолжение выражения (12.26) на комплексные k и r , можно показать, что равенство (12.33) справедливо также и в нижней полуплоскости, за исключением, быть может, линии разреза.

¹⁾ Замечание, содержащееся в предыдущем примечании, в равной степени относится и к функции $\bar{f}(k)$.

Из (12.26) и (12.34) следует (на основании леммы Римана — Лебега), что при $|k| \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости k и на действительной оси

$$\tilde{f}(k) = 1 - (2ik)^{-1} \int_0^{\infty} dr \mathcal{V}^*(r) + o(|k|^{-1}), \quad (12.33a)$$

если только интеграл в (12.33a) существует. Для потенциалов, обращающихся в нуль при $r > R$, с помощью (12.25) получаем

$$|\tilde{f}(k) - 1| e^{-2ikR} = o(1) \text{ при } |k| \rightarrow \infty \quad (12.33б)$$

в нижней полуплоскости k .

Еще одно интегральное представление получается с использованием асимптотического поведения φ при $r \rightarrow \infty$. Согласно (12.29) и (12.15), имеем

$$\varphi(k, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2ik} (\tilde{f}_- e^{ikr} - \tilde{f}_+ e^{-ikr}). \quad (12.35)$$

Полагая, далее, $r \rightarrow \infty$ в интегральном уравнении (12.4) для φ ; выделяя отдельно члены в правой части этого уравнения, связанные соответственно с расходящимися и сходящимися волнами, и сравнивая полученные выражения с (12.35), получаем

$$\tilde{f}(k) = 1 + \gamma \int_0^{\infty} dr e^{ikr} \mathcal{V}^*(r) \varphi(k, r). \quad (12.36)$$

Физическая волновая функция. Асимптотическую формулу для φ (12.35) можно сравнить с асимптотикой (11.9) для физической волновой функции ψ^+ при $l=0$. Сравнение показывает, что

$$\psi^{(+)}(k, r) = \frac{k\varphi(k, r)}{\tilde{f}(k)}. \quad (12.37)$$

Таким образом, обратная величина квадрата модуля \tilde{f} является мерой вероятности нахождения частицы вблизи точки $r=0$, отнесенной к этой же вероятности при отсутствии сил взаимодействия.

Заметим, что в отличие от φ физическая волновая функция ψ не является всюду аналитической функцией k . Даже в верхней полуплоскости k она имеет полюсы в точках, в которых функция Йоста \tilde{f} обращается в нуль.

Волновая функция главного значения. Волновая функция главного значения (11.25) и (11.26) связана с функцией φ формулой

$$\psi^{(P)}(k, r) = \frac{2k\varphi(k, r)}{\tilde{f}_+(k) + \tilde{f}_-(k)}. \quad (12.37a)$$

В силу (12.32) функция $\psi^{(P)}(k, r)$ действительна (как это и должно быть) при действительных k .

Функция Грина. Функцию Йоста совместно с решениями f и φ можно использовать для построения полных функций Грина, удовлетворяющих неоднородному уравнению

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \mathcal{V}^*(r) - k^2 \right] \mathcal{G} = -\delta(r-r') \quad (12.38)$$

и различным граничным условиям. Из уравнения (12.38) видно, что при $r \neq r'$ функция $\mathcal{G}(r, r')$ подчиняется однородному уравнению (12.1). При $r = r'$ функция Грина непрерывна, но ее производная терпит разрыв:

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{G}(r, r') \Big|_{r=r'+0}^{r=r'-0} = 1. \quad (12.39)$$

Поскольку желательнее, чтобы функция \mathcal{G} была регулярной в точке $r=0$, то берем ее в форме

$$\mathcal{G}(r, r') = \varphi(k, r) h_1(r') \quad \text{при } r < r'.$$

Предполагая, что функция \mathcal{G} при $r \rightarrow \infty$ содержит только расходящиеся волны, построим функцию

$$\mathcal{G}^+(r, r') = f(k, r) h_2(r') \quad \text{при } r > r'.$$

Как неизвестная функция h_1 , так и функция h_2 вычисляются путем использования условия непрерывности функции Грина и условия (12.39):

$$h_1(r) = -\frac{f(k, r)}{\dot{f}(k)}, \quad h_2(r) = -\frac{\varphi(k, r)}{\dot{f}(k)}.$$

Таким образом, в обозначениях (11.2), имеем

$$\mathcal{G}^+(k; r, r') = -\frac{\varphi(k, r_{<}) f(k, r_{>})}{\dot{f}(k)}. \quad (12.40)$$

При $\gamma=0$ последнее выражение, конечно, сводится к (11.2). Мы можем также выразить функцию Грина \mathcal{G}^+ через физическую волновую функцию. Согласно (12.37), имеем

$$\mathcal{G}^+(k; r, r') = -k^{-1} \psi^{(+)}(k, r_{<}) f(k, r_{>}). \quad (12.40a)$$

Функция Грина \mathcal{G}^+ позволяет записать решение $\psi^{(+)}$ интегрального уравнения (11.7) в виде

$$\psi^{(+)}(k, r) = \sin kr + \int_0^{\infty} dr' \mathcal{G}^+(k; r, r') \mathcal{T}^{\circ}(r') \sin kr. \quad (12.41)$$

Построив функцию Грина \mathcal{G}^+ , легко определить и другие функции Грина, добавляя к \mathcal{G}^+ решения уравнения (12.1). Например, функция Грина, равная нулю при $r' > r$, при $r' < r$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(r, r') &= \frac{\varphi(k, r) f(k, r') - \varphi(k, r') f(k, r)}{\dot{f}(k)} = \\ &= \frac{f_{-}(k, r') f_{+}(k, r) - f_{-}(k, r) f_{+}(k, r')}{2ik}. \end{aligned} \quad (12.42)$$

Определитель Фредгольма. Теперь мы покажем, что функция Иоста \dot{f} совпадает с определителем Фредгольма радиального интегрального уравнения (11.7). Чтобы упростить формальные выкладки, воспользуемся простыми операторными обозначениями.

Дифференцируя уравнение (12.4) по γ , приходим к интегральному уравнению

$$\Phi_{\gamma} = G \mathcal{T}' \Phi + \gamma G \mathcal{T}^{\circ} \Phi_{\gamma},$$

где $\Phi_{\gamma} \equiv d\Phi/d\gamma$. Решение этого уравнения, очевидно, есть

$$\Phi_{\gamma} = \mathcal{G} \mathcal{T}' \Phi,$$

поскольку

$$\mathcal{G} = G + \gamma G \mathcal{T}^{\circ} \mathcal{G}.$$

Дифференцируя теперь по γ интегральное представление (12.36), получаем

$$\dot{f}_{\gamma} = \int f^{(0)} \mathcal{T}' \Phi + \int \gamma f^{(0)} \mathcal{T}^{\circ} \Phi_{\gamma} = \int (f^{(0)} + f^{(0)} \mathcal{T}^{\circ} \mathcal{G}) \mathcal{T}' \Phi.$$

Согласно (12.16), выражение в круглых скобках равно \dot{f} . Следовательно,

$$\frac{d\dot{f}}{d\gamma} = \int \dot{f} \mathcal{T}' \Phi.$$

Сравнение с явным выражением (12.40) для полной функции Грина показывает, что

$$\frac{df/d\gamma}{\bar{f}} = \frac{d \ln \bar{f}}{d\gamma} = -\text{Sp } \mathcal{G}^+ \mathcal{G}'.$$

Кроме того, нам известно, что $\bar{f} = 1_-$ при $\gamma = 0$. Поэтому, обращаясь к формуле (9.79а), получаем

$$\Delta k = \bar{f}(k), \tag{12.43}$$

так как

$$\mathcal{G}^+ = (1 - \gamma G^+ \mathcal{G}')^{-1} G^+$$

и $G^+ \mathcal{G}'$ — ядро уравнения (11.7).

Тождество (12.43) позволяет получить другие представления для функции Иоста, основанные на соответствующих представлениях для Δ , приведенных в гл. 9, § 3. Запишем ядро уравнения Липпмана—Швингера (11.7) при $l=0$ в явном виде

$$K(r, r') = G^+(r, r') \mathcal{G}'(r') = -k^{-1} \sin kr_{<} e^{ikr_{>} \mathcal{G}'(r') \tag{12.44}$$

и вычислим определитель Фредгольма так же, как и (9.73):

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \Delta_n, \\ \Delta_n &= -\frac{1}{n} \int_0^{\infty} dr Y_{n-1}(r, r), \quad \Delta_0 = 1; \\ Y_n(r, r') &= \int_0^{\infty} dr'' Y_{n-1}(r, r'') K(r'', r') + \Delta_n K(r, r'), \\ Y_0(r, r') &= K(r, r'). \end{aligned} \tag{12.45}$$

Используя, далее, (9.76) или фактически (9.80), получаем

$$\bar{f} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{(-\gamma)^n}{n!} \int_0^{\infty} dr_1 \dots \int_0^{\infty} dr_n \left| \frac{K(r_1, r_1) \dots K(r_1, r_n)}{K(r_n, r_1) \dots K(r_n, r_n)} \right|. \tag{12.46}$$

Другое представление получается из формулы (9.79):

$$\ln \bar{f} = - \sum_1^{\infty} \frac{\gamma^n}{n} \int_0^{\infty} dr [K^n](r, r). \tag{12.47}$$

Наконец, еще одно представление функции \bar{f} основывается на формуле (9.81а) и связывает ее с собственными значениями α_n ядра K , определяемого выражением (12.44):

$$\bar{f} = \prod_n (1 - \alpha_n), \tag{12.48}$$

или, если перед потенциалом ввести множитель γ , то

$$\bar{f} = \prod_n (1 - \gamma \alpha_n). \tag{12.48а}$$

Собственные значения α_n , конечно, зависят от k .

Нули функции Иоста. Тождественность функции Иоста и определителя Фредгольма говорит о том, что характеристические значения ядра $G^+ \mathcal{G}'$, или при $\gamma = 1$ связанные состояния потенциала \mathcal{V}' , являются нулями функции \bar{f} .

расположенными в *верхней полуплоскости* k . Только здесь, в верхней полуплоскости k , нули \dot{f} имеют смысл связанных состояний, потому что с энергетической точки зрения верхняя полуплоскость является *физическим листом* для Δ . То, что нули \dot{f} имеют именно такой смысл, непосредственно видно, например, из (12.31) или (12.28). В верхней полуплоскости $\text{Im } k > 0$ и функция $f(k, r)$ экспоненциально убывает при $r \rightarrow \infty$. Если в верхней полуплоскости $k \dot{f}(k_0) = 0$, то функция $f(k_0, r)$ оказывается также регулярной в начале координат. Поэтому мы имеем регулярную и квадратично интегрируемую функцию и, следовательно, она соответствует некоторому собственному значению. Решения f и φ должны быть, при этом пропорциональными одно другому:

$$f(k_0, r) = c\varphi(k_0, r). \quad (12.49)$$

Итак, мы получили, что при действительных γ нули функции \dot{f} , лежащие в верхней полуплоскости, должны располагаться на мнимой оси, чтобы энергия связи была действительной величиной¹⁾.

Если точка $-k_0 = -i |k_0|$ находится в области, на которую функцию $\dot{f}(k, r)$ можно аналитически продолжить, то c легко найти с помощью (12.29):

$$c = -\frac{2|k_0|}{\dot{f}(-i|k_0|)}. \quad (12.50)$$

Нули \dot{f} в нижней полуплоскости не соответствуют связанным состояниям, потому что там f экспоненциально *возрастает* с ростом r . Нули $\Delta(E)$ на втором листе нельзя интерпретировать как собственные значения. Поэтому отпадает причина, по которой они должны находиться на мнимой оси. Если нули не лежат на мнимой оси, то свойство симметрии (12.32а) заставляет их (при действительных γ) появляться парами симметрично относительно мнимой оси.

Нули $\dot{f}(k)$ в верхней полуплоскости с необходимостью должны быть простыми. Это можно доказать следующим образом. Легко показать, что вронскиан, составленный из двух решений радиального уравнения Шредингера, взятых при различных энергиях, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} W[f(k, r), \varphi(k', r)] = (k^2 - k'^2) f(k, r) \varphi(k', r). \quad (12.51)$$

Аналогичное уравнение имеет место для любой другой пары решений. Продифференцируем уравнение (12.51) по k (производная будет обозначаться точкой) и положим затем $k' = k = k_0$, где k_0 удовлетворяет уравнению $\dot{f}(k_0) = 0$. Воспользовавшись (12.49) и (12.28), получим

$$\begin{aligned} \ddot{f}(k_0) &= c^{-1} W[\dot{f}(k_0, r), f(k_0, r)] + c W[\varphi(k_0, r), \dot{\varphi}(k_0, r)] = \\ &= -2k_0 \left[c \int_0^r dr' \varphi^2(k_0, r') + c^{-1} \int_r^\infty dr' f^2(k_0, r') \right] = \\ &= -2k_0 c \int_0^\infty dr \varphi^2(k_0, r). \end{aligned} \quad (12.52)$$

Мы знаем, что k_0 — чисто мнимое число при действительных γ и, следовательно, функция $\varphi(k_0, r)$ — действительная. Кроме того, c не может равняться нулю, потому что это противоречило бы граничному условию (12.15). Отсюда получается, что правая часть в (12.52) не может равняться нулю при $\text{Im } k_0 > 0$ и, следовательно, $\ddot{f}(k_0) \neq 0$. Таким образом, нули $\dot{f}(k_0)$ должны быть простыми.

То, что нули функции $\Delta(k)$ простые, в случае связанных состояний означает, что собственные значения *радиального* уравнения Шредингера с $l = 0$

¹⁾ Конечно, это также легко доказать в данном контексте.

не могут быть вырожденными. Случайное вырождение может произойти только между различными значениями l .

Точка $k = 0$ есть единственная точка на действительной оси, в которой функция \bar{f} может равняться нулю при действительных γ . Причина этого в том, что из равенства $\bar{f}(k) = 0$ при действительных k вытекает в соответствии с (12.32) также равенство $\bar{f}(-k) = 0$. Но, согласно (12.29), одновременное обращение в нуль \bar{f}_+ и \bar{f}_- при $k \neq 0$ приводит к тождеству $\varphi \equiv 0$ при любых r , что противоречит граничному условию (12.2). В противоположность случаю $\text{Im } k > 0$ равенство $\bar{f}(0) = 0$ не означает, что мы имеем дело со связанным состоянием¹⁾. Функция $f(0, r)$ для $k = 0$ обращается в нуль в начале координат, а на бесконечности стремится к единице. В § 2 мы увидим, что в случае $l > 0$ это не так.

При $\bar{f}(0) = 0$ кратность нуля требует особого рассмотрения. Можно показать [645], что если (при $l = 0$) k стремится к нулю, оставаясь в верхней полуплоскости, то одновременно имеют место два асимптотических соотношения

$$\begin{aligned} \bar{f}(k) &= O(k), \\ \frac{1}{\bar{f}(k)} &= O(k^{-1}). \end{aligned} \quad (12.53)$$

Другими словами, $\bar{f}(k)$ стремится к нулю, точно как k . Если функция $\bar{f}(k)$ аналитична в точке $k = 0$ и если $\bar{f}(0) = 0$, то это означает, конечно, что мы имеем простой нуль. Кроме того, в этом случае из (12.30) и (12.32) следует, что в (12.53) множитель перед k в асимптотике чисто мнимый.

При выполнении наложенных на потенциал условий (12.9) и (12.21) число нулей функции $\bar{f}(k)$ в верхней полуплоскости k должно быть конечным. В противном случае множество нулей должно было бы иметь точку сгущения либо на бесконечности, либо при некотором конечном значении $k \neq 0$ или при $k = 0$. Первая из этих возможностей находится в противоречии с (12.33); вторая противоречит регулярности \bar{f} при $\text{Im } k > 0$, а третья — асимптотическим оценкам (12.53). Следовательно, число всех связанных состояний с $l = 0$ должно быть конечным.

Дисперсионные соотношения для функции Иоста. Факт аналитичности функции $\bar{f}(k)$ совместно с условием (12.33) можно выразить в виде дисперсионного соотношения. Будем рассуждать так же, как в гл. 4, § 2, п. 2. Так как²⁾

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{f(k') - 1}{k' - k} = f(k) - 1 \quad (12.54)$$

при $\text{Im } k > 0$, то действительная и мнимая части функции $\bar{f} - 1$ связаны преобразованием Гильберта (см. [838]). При действительных k

$$\text{Re } \bar{f}(k) = 1 + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\text{Im } f(k')}{k' - k}, \quad (12.55)$$

где \mathcal{P} символизирует главное значение интеграла в смысле Коши. Полезность уравнения (12.55) невелика, поскольку ни действительная, ни мнимая части \bar{f} не доступны для экспериментального измерения.

В случае потенциалов типа потенциала Юкавы (12.22а) функцию \bar{f} можно аналитически продолжить во всю нижнюю полуплоскость, за исключением

¹⁾ Для «неразумных» потенциалов в смысле § (12.9) и (12.21) равенство $\bar{f}(0) = 0$ может указывать на наличие связанного состояния с $l = 0$. В гл. 14, § 7, п. 1 приведен соответствующий пример.

²⁾ Мы замыкаем контур в верхней полуплоскости полуокружностью большого радиуса и вычисляем интеграл с помощью теоремы о вычетах.

разреза Юкавы от точки $k = -1/2ia_0$ до $-i\infty$. Кроме того, соотношение (12.33) также выполняется в нижней полуплоскости. Исходя из этого, в (12.54) можно деформировать путь интегрирования так, чтобы, обходя разрез, на левом берегу его он шел вверх, а возвращался вниз по правому берегу. Получаем

$$\tilde{f}(k) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{-ia_0/2} dk' \frac{\Delta \tilde{f}(k')}{k' - k}, \quad (12.56)$$

где через $\Delta \tilde{f}(k')$ обозначена величина скачка функции \tilde{f} на разрезе Юкавы:

$$\Delta \tilde{f}(k') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [\tilde{f}(k' - \varepsilon) - \tilde{f}(k' + \varepsilon)]_i \quad (12.57)$$

при $ik' = |k'| > 1/2a_0$. Согласно (12.32а), скачок $\Delta \tilde{f}(k')$ — чисто мнимая величина:

$$\Delta \tilde{f}(k') = -2i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \text{Im} \tilde{f}(k' + \varepsilon) = -2ih(|k'|), \quad (12.58)$$

так что

$$\tilde{f}(k) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{1/2a_0}^{\infty} dK \frac{h(K)}{K - ik}. \quad (12.59)$$

Теперь переменная k может принимать любые значения на k -плоскости с разрезом.

Более полезным дисперсионным соотношением оказывается аналог соотношения (12.54) для $\text{In} \tilde{f}(k)$. Предположим сначала, что \tilde{f} не имеет нулей в верхней полуплоскости, т. е. что нет связанных состояний. Тогда функция $\text{In} \tilde{f}$ регулярна в верхней полуплоскости и стремится к нулю при $|k| \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\text{Re} \ln \tilde{f}(k) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\text{Im} \ln \tilde{f}(k')}{k' - k}. \quad (12.60)$$

Представим теперь $\tilde{f}(k)$ в форме

$$\tilde{f}(k) = |\tilde{f}(k)| e^{-i\delta(k)}.$$

Как мы увидим ниже, в п. 3, фаза δ функции $\tilde{f}(k)$ — это *фазовый сдвиг* для s -волны. Таким образом, дисперсионное соотношение (12.60) принимает вид

$$|\tilde{f}(k)| = \exp \left[\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\delta(k')}{k - k'} \right], \quad (12.61)$$

или с учетом (12.32)

$$|\tilde{f}(k)| = \exp \left[\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} dE' \frac{\delta(E')}{E - E'} \right]. \quad (12.61a)$$

В области $\text{Im} k > 0$ функцию $\tilde{f}(k)$ можно представить также в форме

$$\tilde{f}(k) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\delta(k')}{k - k'} \right] = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dE' \frac{\delta(E')}{E - E'} \right]. \quad (12.62)$$

Введенные соотношения справедливы только тогда, когда функция \tilde{f} не имеет нулей в верхней полуплоскости. Допустим теперь противное, т. е. что имеются связанные состояния с энергиями $E_n = -K_n^2/2\mu$. Как мы знаем, в этом случае функция $\tilde{f}(k)$ имеет простые нули в точках $k = iK_n$. Положим

$$\tilde{f}_{\text{привед}}(k) = \prod_n \frac{k + iK_n}{k - iK_n} \tilde{f}(k). \quad (12.63)$$

Тогда функция $f^{\text{привед}}(k)$ обладает всеми свойствами $f(k)$, только у $f^{\text{привед}}(k)$ отсутствуют нули, соответствующие указанным выше связанным состояниям. Следовательно, $f^{\text{привед}}(k)$ можно представить в виде

$$f^{\text{привед}}(k) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\delta^{\text{привед}}(k')}{k - k'} \right].$$

Поскольку, однако,

$$\delta^{\text{привед}}(k) = \delta(k) + 2 \sum_n \operatorname{arccotg} \frac{k}{K_n},$$

то окончательно получаем при $\operatorname{Im} k \geq 0$

$$f(k) = \prod_n \left(1 - \frac{E_n}{E} \right) \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \delta(k')}{k - k'} \right]. \quad (12.64)$$

Соотношение (12.64) позволяет явно выразить функцию $f(k)$ через ее фазу на действительной оси и через энергии связанных состояний.

Другой подход. Фазовый сдвиг δ можно непосредственно получить, если известна абсолютная величина $|f(k, r)|$ функции $f(k, r)$. Положим

$$f(k, r) = h(k, r) e^{-ik\delta(k, r)}, \quad (12.65)$$

где подразумевается, что функции h и δ действительны. Подстановка $f(k, r)$ в указанном виде в радиальное уравнение Шредингера и раздельное приравнивание нулю действительной и мнимой частей приводит к двум уравнениям

$$h'' - \mathcal{V}h + k^2(1 - \delta'^2)h = 0, \quad (12.66)$$

$$\delta''h + 2\delta'h' = 0. \quad (12.67)$$

Вследствие (12.15) граничными условиями будут

$$\delta \approx -r, \quad h \approx 1 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty.$$

Второе уравнение (12.67) легко решается. Используя граничные условия, получаем

$$\delta' = -h^{-2}$$

и следовательно,

$$\delta(k, r) = \int_r^{\infty} dr' (h^{-2} - 1) - r. \quad (12.68)$$

Далее из (12.31) вытекает, что $k\delta(k, 0)$ является фазой функции $f^*(k)$ и, следовательно, фазовым сдвигом s -волны. Отсюда находим, что фазовый сдвиг определяется выражением

$$\delta(k) = k \int_0^{\infty} dr [|f(k, r)|^{-2} - 1] = -k \int_0^{\infty} dr r \frac{d}{dr} |f|^{-2}, \quad (12.69)$$

причем для $h = |f|$ имеем нелинейное уравнение

$$-h'' + \mathcal{V}h + k^2(h^{-4} - 1)h = 0. \quad (12.70)$$

То обстоятельство, что в (12.69) и (12.70) присутствуют члены h^{-2} и h^{-4} , не вызывает никаких затруднений. При действительных $k \neq 0$ функция f не может обращаться в нуль. Это следует из формулы для решения φ уравнения Шредингера для s -волны с граничными условиями $\varphi(r_0) = 0$, $\varphi'(r_0) = 1$, с помощью которой оно выражается через функции f_+ и f_- . Соотношение (12.24) исключает возможность равенства $f(k, r_0) = 0$, а также и возможность $f = 0$.

Достоинство уравнения (12.70) в сочетании с (12.69) заключается главным образом в его пригодности для численных расчетов.

3. S-матрица

Элемент S-матрицы при $l = 0$ легко выразить через функцию Юста f , если сравнить (12.35) с (11.9); при этом получаем

$$S(k) = \frac{f_-(k)}{f_+(k)}. \quad (12.71)$$

Унитарность этого элемента при действительных γ и k сразу следует из (12.32):

$$S^*(k) = \frac{1}{S(k)}. \quad (12.72)$$

Мы приходим, таким образом, к выводу, что фазовый сдвиг δ есть фаза комплексной функции f_- . При действительных k и γ

$$f_- = |f| e^{i\delta}. \quad (12.73)$$

Кроме того, формула (12.30), устанавливающая связь через верхнюю полу-плоскость функций на положительной и отрицательной действительных полуосях k , приводит к соотношению

$$S(-k) = S^*(k) = \frac{1}{S(k)}. \quad (12.74)$$

Однако такого рода соотношения в значительной степени представляют собой определения, поскольку при отсутствии сильных ограничений на потенциал (12.9) и (12.21) функцию $S(k)$, вообще говоря, невозможно аналитически продолжить с действительной оси в комплексную плоскость, и поэтому не существует аналитического продолжения функции от положительных значений k к отрицательным. Для того чтобы быть уверенным в возможности продолжения функции $S(k)$ в комплексную плоскость k , на потенциал достаточно наложить условие (12.20) хотя бы со сколь угодно малым a .

Условие унитарности (12.72) обеспечивает, конечно, действительность фазового сдвига δ . Соотношение (12.74) показывает, что $\delta(k)$ можно выбрать в виде *нечетной* функции от k :

$$\delta(-k) = -\delta(k). \quad (12.75)$$

Рассматривая S-матрицу при положительных энергиях, мы обычно подразумеваем, что k также принимает положительные значения. Отсюда следует, что E нужно брать на *верхнем* берегу правого разреза, идущего вдоль действительной оси от точки $E = 0$ до $E = \infty$, в соответствии с тем, что S-матрица должна вычисляться с помощью функции Грина G^+ , отвечающей *расходящимся* волнам.

Интегральное представление S. Из интегральных представлений (12.34) и (12.36) получается интегральное представление для S , которое совпадает по виду с (11.19) и, если воспользоваться (12.41), принимает вид

$$S = 1 - 2ik^{-1} \int_0^{\infty} dr \sin^2 kr \mathcal{Y}^-(r) - \\ - 2ik^{-1} \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' \sin kr \mathcal{Y}^-(r) \mathcal{Y}^+(k; r, r') \mathcal{Y}^-(r') \sin kr'; \quad (12.76)$$

это аналог формулы (7.46) для случая $l = 0$.

Ряд по степеням γ , получаемый подстановкой в (12.76) соответствующего ряда для \mathcal{Y}^+ , т. е. *борновский ряд* для S , необязательно сходится при всех значениях k при заданном значении γ . Из соотношения (12.71) видно, почему это происходит. Чтобы разложение $1/f$ сходилось при данном значении k и $\gamma = 1$, функция f не должна иметь нулей при $|\gamma| < 1$. Для борновского разложения

фазового сдвига условие сходимости еще более жесткое: ни \hat{f}_+ , ни \hat{f}_- не должны иметь нулей при $|\gamma| < 1$. Если последнее условие выполняется, то, используя (12.47), получаем простой ряд для фазового сдвига ¹⁾:

$$\delta = \sum_1^{\infty} \frac{\gamma^n}{n} \int_0^{\infty} dr \operatorname{Im} K^n(r, r), \quad (12.77)$$

где ядро K дается формулой (12.44).

Еще одно представление фазового сдвига, а именно представление через собственные значения α_n ядра K , основывается на формуле (12.48). Если положить

$$\delta^{(n)} = \arg(1 - \alpha_n), \quad (12.78)$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \delta^{(n)} = \frac{\operatorname{Im} \alpha_n}{1 - \operatorname{Re} \alpha_n}, \quad (12.78a)$$

то фазовый сдвиг выразится, очевидно, в виде суммы отдельных $\delta^{(n)}$:

$$\delta = \sum_n \delta^{(n)}. \quad (12.79)$$

Согласно рассуждению, приведенному в гл. 9, § 1, все α при $E < 0$ делятся в зависимости от их алгебраического знака на две группы собственных значений, соответствующих отталкиванию и притяжению. При этом для первых *всегда* выполняется неравенство

$$0 \leq \delta_{-}^{(n)} \leq \pi, \quad (12.80)$$

а для последних — неравенство

$$-\pi \leq \delta^{(n)} \leq 0. \quad (12.80a)$$

Из этих неравенств сразу видно, что для потенциалов, всюду являющихся потенциалами притяжения, или для отрицательно определенных взаимодействий, даже если они не локальны, фазовый сдвиг всегда положителен. Для потенциалов, всюду являющихся потенциалами отталкивания, фазовый сдвиг отрицателен. Также видно, что фазовый сдвиг, по величине больший π , имеет «коллективную» природу. Ни одно отдельное собственное значение ядра K не может дать вклад в δ , больший π . В действительности, однако, собственные значения, близкие к нулю, дают очень малый вклад в сумму.

Поведение при высоких энергиях. Характер поведения S при высоких энергиях можно вывести непосредственно из (12.33):

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} S(k) = 1. \quad (12.81)$$

Как уже отмечалось в связи с (12.33), чем «сильнее» потенциал, тем большие значения должно иметь k , чтобы разность между S и единицей не превосходила по модулю заданной величины. Больше того, эта разность есть величина $O(|k|^{-1})$ только в том случае, когда потенциал — интегрируемая на бесконечности функция [см. (12.10)].

¹⁾ В развернутом виде

$$K^{(n)}(r, r) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} dr_1 \dots dr_n K(r, r_1) K(r_1, r_2) \dots K(r_n, r).$$

Из выражения (12.81) с учетом (12.33а) получаем

$$\delta = -\frac{1}{2} k^{-1} \int_0^{\infty} dr \mathcal{V}(r) + o(|k|^{-1}). \quad (12.82)$$

Заметим, что из (12.82) опять видно, что при высоких энергиях первый член борновского приближения доминирует и что потенциал притяжения ведет к положительному фазовому сдвигу.

Аналитичность. Из спектральной теории операторов известно, что $\mathcal{G} = (E - H)^{-1}$ является аналитической операторной функцией E , регулярной всюду в плоскости с правым разрезом, за исключением точек, соответствующих связанным состояниям. Спрашивается, почему же тогда S не регулярна с необходимостью там, где регулярна \mathcal{G} ? Это различное поведение \mathcal{G} и S на физическом листе обуславливается тем, что матричные элементы S вычисляются для зависящих от энергии волновых функций, которые при комплексных значениях энергии не могут быть нормируемыми. Именно это обстоятельство ответственно за возможное отсутствие регулярности функции S там, где функция \mathcal{G} регулярна, а равно и за возможное появление кратных полюсов у S в точках, в которых функция \mathcal{G} должна иметь только простые полюсы. Более того, поскольку соответствующий матричный элемент от вычета функции \mathcal{G} может обращаться в нуль, то функция $S(k)$ необязательно должна иметь полюсы в точках полюсов для \mathcal{G} . Поэтому исследование \mathcal{G} как операторной функции E намного проще исследования S -матрицы. В случае \mathcal{G} можно привлечь общий и хорошо разработанный операторный формализм; S -матрицу же удобнее исследовать методами, которые используются в настоящей главе.

Если известно, что потенциал удовлетворяет более жестким условиям, чем (12.9) и (12.21), то элементы S -матрицы можно аналитически продолжить на комплексные значения энергии. Если потенциал удовлетворяет условию (12.20), то функцию $S(k)$ можно аналитически продолжить на полосу $|\operatorname{Im} k| < a$ в k -плоскости, или, что то же самое, на область внутри параболы

$$(\operatorname{Im} E)^2 = \frac{2a^2}{\mu} \operatorname{Re} E + \frac{a^4}{\mu^2}, \quad (12.83)$$

как на физическом, так и на втором листах E -плоскости. В области на *физическом листе* функция S имеет простые полюсы как раз в точках, соответствующих связанным состояниям, и нигде больше. Вычет функции S в полюсе в точке $k = iK_n$, соответствующей связанному состоянию, легко вычислить, если обратиться к (12.71), (12.52), (12.50) и (12.37) и связать его со значением аналитически продолженной физической волновой функции $\psi^{(+)}$.

$$\operatorname{res}_n = \operatorname{res} S = \lim_{k \rightarrow iK_n} (k - iK_n) S(k) = \frac{i}{4 \int_0^{\infty} dr [\psi^{(+)}(-iK_n, r)]^2}. \quad (12.84)$$

Поскольку функция φ действительна и, согласно (12.32а), функция \dagger также действительна, то функция $\psi^{(+)}(-iK_n, r)$ — чисто мнимая и, следовательно,

$$i \operatorname{res}_n > 0. \quad (12.85)$$

На втором листе, в области внутри параболы, элемент S -матрицы всюду регулярен, за исключением тех точек, в которых он имеет полюсы. Допустим, что такой полюс имеется в точке $k = k_1 - ik_2$ в нижней полуплоскости k и расположен вблизи действительной оси. Тогда элемент S -матрицы в окрестности такого полюса должен иметь вид

$$S(k) \approx \frac{k - k_1 - ik_2}{k - k_1 + ik_2} \quad (12.86)$$

или

$$\delta \approx \text{const} + \text{arctg} \frac{k_2}{k_1 - k}. \quad (12.87)$$

Если другие полюсы находятся далеко от рассматриваемого полюса, а сам полюс расположен близко к действительной оси, то фазовый сдвиг будет резко *возрастать* на величину π в интервале импульсов около точки k_1 , ширина которого приблизительно равна k_2 . При этом фазовый сдвиг должен пройти через точку $1/2\pi$ (по модулю π). Согласно рассуждению, приведенному в гл. 11, § 2, п. 2, указанное явление обладает обеими характерными чертами *резонанса*: амплитуда парциальной волны достигает своего унитарного предела, а поток вылетающих частиц запаздывает. Точный критерий того, что полюс S , расположенный на втором листе (или в нижней полуплоскости k), действительно соответствует резонансу такого типа, определяется рядом обстоятельств, как, например, существованием и близостью других полюсов. Тем не менее часто резонансными полюсами называют вообще *все* полюсы S . Нужно помнить, однако, что не все резонансы в этом смысле обязательно наблюдаемы экспериментально.

Фазовый сдвиг, который имеет вид, подобный (12.87), и резко возрастает в некотором интервале энергий на величину π , теперь должен при этом пройти не только через точку $1/2\pi$, но и через точку π (по модулю π). При такой энергии амплитуда парциальной волны обращается *в нуль*. Другими словами, резкий резонансный пик будет сопровождаться почти полным обращением в нуль амплитуды парциальной волны (эффект Рамзауэра — Таунсенда). Однако обычно этот дополнительный эффект наблюдать трудно, поскольку он легко может быть замаскирован эффектами от других фазовых сдвигов. Из фиг. 11.2 видно, что для типичного низкоэнергетического резонанса при $l > 0$ до появления связанного состояния такой эффект дополнительных сателлитов отсутствует.

Соответственно собственным значениям α ядра K и формуле (12.79) причиной резонанса является то обстоятельство, что какое-нибудь отдельное собственное значение α_n ядра K начинает принимать значения, близкие к единице. Тогда фаза $\delta^{(n)}$ резко возрастает на величину π , вызывая тем самым появление пика в амплитуде и запаздывание потока. Если фазовый сдвиг проходит точку $1/2\pi$ (по модулю π) вследствие коллективного эффекта от нескольких α , то маловероятно, чтобы это изменение было очень быстрым, если его рассматривать в функции от энергии. В данном случае парциальное сечение имеет пик, но отсутствие большого запаздывания не позволяет связать этот пик с настоящим резонансом.

Заметим, что с любым полюсным членом, таким, как (12.86), связано как увеличение, так и уменьшение фазового сдвига. Если фаза δ , возрастая, проходит через точку $1/2\pi$ (по модулю π), то где-то она должна пройти через эту же точку, убывая. В этой последней точке мы также имеем большое парциальное сечение. Однако, поскольку уменьшение фазового сдвига связано с опережением, а не с запаздыванием потока, эту точку и пик нельзя интерпретировать как резонанс. Опираясь на рассуждения, в которых используется принцип причинности (гл. 11, § 2, п. 2), мы можем ожидать, что величина наклона на спадающем участке кривой фазы ограничена, если только потенциал имеет конечный радиус действия. То, что это именно так, можно увидеть также из следующего рассуждения.

Продифференцируем (12.51) по k' , затем положим $k = k'$ и проинтегрируем полученный результат от нуля до r . Пусть $\mathcal{V} = 0$ при $r > R$. Тогда при $r > R$, согласно (12.28) и (12.35),

$$\dot{f}(k) = -2k \int_0^r dr' f(k, r') \varphi(k, r') + ir \bar{f}(k) - ik^{-1} e^{ikr} \sin(kr + \delta),$$

где точкой обозначено дифференцирование по k . Следовательно, согласно (12.29) и (12.37),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \ln S(k) &= 2i\dot{\delta}(k) = \frac{\dot{f}_-}{f_-} - \frac{\dot{f}_+}{f_+} = \\ &= 4ik^2 \int_0^r \frac{dr' \varphi^2(k, r')}{|f(k)|^2} - 2ir + ik^{-1} \sin 2(kr + \delta) = \\ &= 4i \int_0^r dr' |\psi^{(+)}(k, r')|^2 - 2ir - ik^{-1} \sin 2(kr + \delta). \end{aligned} \quad (12.88)$$

Отсюда следует, что при $r > R$

$$|\psi_{\text{вне}}^{(+)}(k, r)|^2 \equiv |\psi^{(+)}(k, r)|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} k^{-1} \cos 2(kr + \delta)$$

и поэтому

$$\frac{d}{dk} \delta(k) = 2 \int_0^{\infty} dr [|\psi^{(+)}(k, r)|^2 - |\psi_{\text{вне}}^{(+)}(k, r)|^2] + \frac{1}{2} k^{-1} \sin 2\delta. \quad (12.89)$$

Функция $\psi_{\text{вне}}^{(+)}$ обозначает функцию, в точности совпадающую с функцией $\psi^{(+)}$ во внешней области $r > R$ и равную ее аналитическому продолжению во внутренней области $r < R$.

Из уравнения (12.89) непосредственно виден физический смысл резкого возрастания фазового сдвига. Правая часть (12.89) показывает, что появление резкого возрастания фазового сдвига означает наличие большой вероятности нахождения частицы внутри области взаимодействия. В то же время из (12.8) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{dk} &= 2 \int_0^R dr |\psi^{(+)}(k, r)|^2 - R + \frac{1}{2} k^{-1} \sin 2(kR + \delta) > \\ &> -R + \frac{1}{2} k^{-1} \sin 2(kR + \delta) > \\ &> -\left(R + \frac{1}{2} k^{-1}\right); \end{aligned} \quad (12.90)$$

это точная формулировка для данного случая неравенства (11.57).

Если потенциал «аналитический» (с индексом $\sigma = 1/2\pi$), т. е. является, например, суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22а), то S можно аналитически продолжить на весь первый и второй лист римановой поверхности, за исключением линий *разрезов Юкавы* на обоих листах, которые идут вдоль действительной оси от точки $E = -a_0^2/8\mu$ до $-\infty$. Эта линия разреза на физическом листе обычно называется *левым разрезом*. Помимо этого, S , конечно, может иметь (и обычно имеет) полюсы на втором листе. В полюсах на физическом листе, соответствующих связанным состояниям, функция S обязательно имеет отрицательные мнимые вычеты, если таковые расположены до начала левого разреза, т. е. если $E_{\text{св}} < a_0^2/8\mu$. В противном случае из (12.32а) нельзя вывести, что f — действительная функция и, следовательно, $\psi^{(+)}$ не должна быть чисто мнимой.

Дисперсионные соотношения. Ввиду отсутствия должных свойств аналитичности $S(k)$, вообще говоря, может не удовлетворять какому-либо дисперсионному соотношению, даже когда потенциал оказывается суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22а) или суперпозицией экспоненциальных потенциалов (12.22). В этой связи уместно напомнить результаты гл. 10, § 3, п. 2 и 3. В случае упомянутых потенциалов для полной амплитуды, вообще говоря,

имеет место дисперсионное соотношение. Амплитуды же парциальных волн никаким дисперсионным соотношениям не удовлетворяют. Вопреки первому впечатлению из дисперсионного соотношения для полной амплитуды не следуют дисперсионные соотношения для амплитуд отдельных угловых моментов. Необходимо также учесть, что если, в частности, функция $S(E)$ аналитична всюду на первом листе, то из (12.74) следует, что она должна быть мероморфной функцией на втором листе. Пример потенциала Юкавы показывает, что это неверно в отношении полной амплитуды. Для потенциала, являющегося суперпозицией экспоненциальных потенциалов (12.22) или потенциалов Юкавы (12.22a), можно вывести с помощью (12.56) аналог дисперсионного соотношения. Поскольку функция \bar{f} не имеет разреза в верхней полуплоскости, то

$$\bar{f}(k) = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{i a_0/2}^{i\infty} dk' \frac{\bar{f}(k') \Delta S(k')}{k' + k}, \quad (12.91)$$

где ΔS обозначает скачок функции S на разрезе Юкавы, для которого $-ik = |k| > 1/2 a_0$, т. е.

$$\Delta S(k) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} [S(k + \epsilon) - S(k - \epsilon)].$$

Согласно (12.74), функция $\Delta S(k)$ чисто мнимая. Соотношение (12.91) можно рассматривать как неоднородное линейное интегральное уравнение для функции \bar{f} , заданной на разрезе Юкавы; с другой стороны, оно дает явное представление функции \bar{f} на всей плоскости k . Если

$$\int_{1/2 i a_0}^{i\infty} dk k^{-1} |\Delta S(k)| < \infty,$$

то ядро интегрального уравнения (12.91) является ядром Гильберта — Шмидта — и мы можем воспользоваться методом Фредгольма, чтобы найти решение \bar{f} . Процедура построения полной амплитуды, т. е. $S(k)$ по известному скачку последней на левом разрезе с помощью (12.91) и (12.71) обычно называется *N/D-методом*. Получаемое решение, конечно, не всегда возможно построить методом итераций.

Если потенциал обращается в нуль при $r > R$, то из (12.33) и (12.33б) следует, что

$$\lim_{|E| \rightarrow \infty} (S - 1) e^{2ikR} = 0. \quad (12.92)$$

Кроме того, из (12.33) и (12.33б) вытекает также, что функция S регулярна всюду на физическом листе, за исключением простых полюсов, соответствующих связанным состояниям. Поэтому для функции $(S - 1) e^{2ikR}$ имеет место дисперсионное соотношение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ [S(E) - 1] e^{-2ikR} \} = \sum_n \frac{(E_n/K_n) \operatorname{res}_n e^{-2K_n R}}{E - E_n} + \\ + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} dE' \frac{\operatorname{Im} \{ [S(E') - 1] e^{2ik'R} \}}{E' - E} \end{aligned} \quad (12.93)$$

где $E_n = -K_n^2/2\mu$ — энергии связанных состояний, а res_n обозначает вычеты функций S в точках $k = iK_n$.

Теорема Левинсона. Установим теперь связь между величиной фазового сдвига при нулевой энергии и числом связанных состояний.

Так как функция $\bar{f}(k)$ аналитична в верхней полуплоскости k , то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C d \ln \bar{f}(k) = n. \quad (12.94)$$

где n — число нулей функции f , заключенных внутри контура C . В качестве контура C возьмем путь, идущий вдоль действительной оси от $-\infty$ до $+\infty$, обходящий начало координат по полуокружности малого радиуса ε и замыкающийся в верхней полуплоскости полуокружностью большого радиуса R . Как мы знаем, каждому дискретному собственному значению задачи соответствует простой нуль функции f в верхней полуплоскости. Следовательно, n есть число связанных состояний с угловым моментом, равным нулю.

Вследствие (12.33) вклад в интегрирование от большой полуокружности обращается в нуль при $R \rightarrow \infty$. Вблизи точки $k = 0$ мы можем воспользоваться асимптотической оценкой (12.53) и вычислить вклад в интеграл от малой полуокружности при $\varepsilon \rightarrow 0$; имеем

$$\int d \ln f \rightarrow q \int d \ln k = i\pi q,$$

где $q = 0$, если $f(0) \neq 0$, и $q = 1$, если $f(0) = 0$. Таким образом из (12.94) с учетом (12.73) получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\delta(R) \cdot \delta(\varepsilon) - \delta(-\varepsilon) \cdot \delta(-R) \right. \\ \left. + i \ln \left| \frac{f(-R)}{f(R)} \cdot \frac{f(\varepsilon)}{f(-\varepsilon)} \right| \right] = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} q \right).$$

Мнимая часть обращается здесь в нуль вследствие (12.32). Используя (12.75) и то обстоятельство, что по определению $\delta(\infty) = 0$, мы приходим к *теореме Левинсона*

$$\delta(0) = \begin{cases} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) & \text{при } f(0) = 0, \\ \pi n & \text{при } f(0) \neq 0. \end{cases} \quad (12.95)$$

Теорема справедлива при весьма общих условиях (12.9) и (12.21) на потенциал.

4. Полюсы S -матрицы

Как мы только что видели, полюсы S -матрицы играют особую роль. Если на потенциал наложить достаточно сильные требования, чтобы все полюсы функции S на физическом листе определялись только нулями функции f , то эти полюсы обозначают связанные состояния. Полюсы на втором листе функции S , если они расположены достаточно близко к положительной действительной полуоси, могут интерпретироваться как наблюдаемые резонансы. Оставшиеся полюсы функции S на втором листе, если они находятся на отрицательной действительной полуоси, иногда называют *виртуальными*, или же *антисвязанными, состояниями*. Согласно (12.74), каждому полюсу S на втором листе соответствует свой *нуль* функции S на первом листе. Поэтому, вообще говоря, можно ограничиться изучением функции S , заданной только на физическом листе, обращая при этом, конечно, внимание и на ее полюсы, и на нули. Допуская, что константа взаимодействия γ может принимать комплексные значения, видим, что нули функции f являются характеристическими значениями ядра радиального уравнения Липпмана — Швингера и, следовательно, они определяют свойства сходимости борновского ряда для S .

В силу сказанного важно иметь возможно более полную общую информацию о полюсах S или нулях f на k -плоскости (или на римановой поверхности E) как функции от γ , а также на γ -плоскости как функции от k .

Полюсы, соответствующие связанным состояниям. Рассмотрим соответствующие *связанным состояниям* полюсы S или нули функции f , расположенные в верхней полуплоскости k . Введем новый потенциал

$$U = \begin{cases} -\mathcal{V}', & \text{когда } \mathcal{V}' < 0, \\ 0 & \text{когда } \mathcal{V}' \geq 0. \end{cases}$$

Количество полюсов или нулей, конечно, не уменьшится, если \mathcal{V}' заменить на $-U$. Число связанных состояний для потенциала $-U$ равно числу m тех собственных значений α ядра K радиального уравнения Липпмана — Швингера (с потенциалом $-U$), которые при $E = 0$ находятся вне единичного круга (гл. 9, § 1, п. 1). Это обусловлено тем, что при уменьшении энергии, начиная с $E = 0$, полюсы должны двигаться влево вдоль действительной оси и при некоторой энергии пройти через точку $\alpha = 1$. Каждое такое прохождение соответствует одному связанному состоянию.

Вместо ядра $K = -GU$ рассмотрим ядро (9.6)

$$\mathfrak{K} = -U^{1/2}GU^{1/2};$$

функция Грина при $E = 0$ есть

$$G(r, r') = -r \delta,$$

отсюда

$$\sum \alpha = \text{Sp } \mathfrak{K} = \int_0^{\infty} dr r U(r).$$

Далее, каждое значение α положительно, поскольку $-U$ всюду является потенциалом притяжения. Следовательно, при $E = 0$

$$\sum \alpha \geq m.$$

Таким образом, число связанных состояний n с моментом $l = 0$ для потенциала \mathcal{V} удовлетворяет неравенству

$$n \leq \int_0^{\infty} dr r U(r). \quad (12.96)$$

Предположим теперь, что потенциал умножен на константу взаимодействия γ , которая уменьшается, оставаясь положительной. Тогда нули функции \mathfrak{f} должны двигаться вниз по положительной мнимой полуоси и один за другим уходить из верхней полуплоскости, проходя через точку $k = 0$. Если потенциал \mathcal{V} таков, что функция \mathfrak{f} аналитична в окрестности точки $k = 0$, то из (12.53) следует, что, когда ее нуль проходит через начало координат, он все еще остается простым нулем. Этот нуль должен оставаться на отрицательной мнимой полуоси до тех пор, пока он не сойдет с нее, «столкнувшись» с другим нулем, причем в соответствии с (12.32a) оба нуля «отскакивают» симметрично в третий и четвертый квадранты. Таким образом, по мере того как константа взаимодействия *увеличивается*, связанное состояние с $l = 0$, перед тем как стать связанным состоянием, должно быть *виртуальным* состоянием (если, конечно, функция \mathfrak{f} аналитическая в окрестности точки $k = 0$). Так как нуль не подходит близко к действительной оси положительных энергий, то с ним не связан какой-либо низкоэнергетический резонанс. Это согласуется с результатами эвристического рассмотрения в гл. 11, § 2, п. 2. Ниже, в § 2, мы увидим, почему при $l \neq 0$ имеет место иная ситуация.

То обстоятельство, что нуль функции \mathfrak{f} в точке $k = 0$ является простым, позволяет нам также исследовать поведение собственных значений α ядра K как функций от k . Если опять ввести множитель γ перед потенциалом и рассматривать \mathfrak{f} как функцию двух переменных γ и k , то уравнение

$$\mathfrak{f}(\gamma, k) = 0$$

при заданном значении k определит функцию $\alpha(k) = 1/\gamma(k)$. Далее, в области, где \mathfrak{f} является аналитической функцией обеих переменных и где ее нуль простой, функция $\alpha(k)$ регулярна и дает некоторое конформное отображение. Поэтому если точка k движется по положительной мнимой полуоси, достигает

начала координат и переходит на положительную действительную полуось, то точки α также должны двигаться по траекториям, изменяющим где-то свое направление под прямым углом. Так мы приходим к выводу, что траектории точек α должны покидать действительную ось *под прямым углом*, когда энергия становится положительной. С точки зрения рассматриваемых собственных значений такое поведение траекторий объясняет, почему почти связанное s -состояние не соответствует низкоэнергетическому резонансу. Те α , которые покидают действительную ось в непосредственной окрестности слева от единицы, в общем случае не пересекают единичной окружности. В § 2 мы увидим, почему ситуация при $l > 0$ отличается от описанной.

Виртуальные состояния. Если не требовать, чтобы потенциал удовлетворял более жестким условиям, чем (12.9) и (12.21), то мы ничего не сможем сказать о распределении нулей функции \bar{f} в нижней полуплоскости k . Если потребовать, чтобы потенциал удовлетворял более сильному условию (12.20), то станет доступной полоса шириной a . Допустим, что потенциал убывает даже быстрее, чем *любая* экспонента, так что \bar{f} будет регулярной на всей k -плоскости. Из представления (9.22) полной функции Грина через собственные значения α_n ядра K радиального уравнения Липпмана — Швингера можно немедленно получить информацию относительно виртуальных состояний. Используя представление функции Грина (9.22) и уравнение (9.18), получаем следующее решение интегрального уравнения (11.7) (здесь мы используем смешанные обозначения, рассматривая как абстрактные векторы состояний, так и радиальные волновые функции в координатном представлении);

$$\psi^{(+)} = \sum_{\alpha} \frac{\Phi_{\alpha}(\Phi_{\alpha}, \mathcal{V}^{\circ}\psi_0)}{\alpha(\gamma\alpha - 1)},$$

где для отрицательных энергий на физическом листе

$$\psi_0 = \sin kr = i \operatorname{sh} Kr, \quad K > 0.$$

Подставляя полученное выражение для $\psi^{(+)}$ в (11.19), находим

$$S = 1 + \frac{i2\gamma}{K} \sum_{\alpha} \frac{1(\Phi_{\alpha}, \mathcal{V}^{\circ}\psi_0)^2}{\alpha(\gamma\alpha - 1)}. \quad (12.97)$$

Допустим сначала, что потенциал \mathcal{V} всюду *положителен*. Тогда все α должны быть отрицательными и из (12.97) следует, что S не может иметь нулей при $\gamma > 0$. Таким образом, в случае когда потенциал является всюду положительным (отталкивательным), отсутствуют не только связанные состояния, но также и *виртуальные состояния*.

Рассмотрим теперь матричный элемент S , определяемый формулой (12.97), в виде функции от $1/\gamma$ при фиксированной (отрицательной) энергии. Если потенциал всюду отрицателен, так что все значения α положительны, то S является всюду возрастающей функцией от $1/\gamma$, имеющей полюсы в точках $\alpha_n = 1/\gamma$. Поэтому между каждыми двумя соседними полюсами должен лежать только один нуль функции S . Если обозначить через $\bar{\gamma}_n$ те константы взаимодействия, при которых для данного потенциала имеются виртуальные состояния (при данном отрицательном значении энергии), то должны выполняться условия

$$\frac{1}{\alpha_{n-1}} < \bar{\gamma}_n \equiv \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{\alpha_n}.$$

Так как $S \rightarrow 1$, когда $1/\gamma \rightarrow \infty$, и $S \rightarrow -\infty$, когда $1/\gamma$ приближается к наибольшему значению α справа, то должен существовать только один нуль, расположенный справа от всех полюсов. Таким образом, по мере того как γ увеличивается от нуля, сначала появляется виртуальное состояние, а затем связанные и виртуальные состояния, чередующиеся друг с другом. Если

потенциал \mathcal{V} не является ни всюду положительным, ни всюду отрицательным, так что ядро K имеет и притягивательные, и отталкивательные собственные значения, то S в (12.97) не обязательно будет монотонной функцией от $1/\gamma$. Отсюда вытекает, что S может иметь любое *нечетное* число нулей между двумя любыми соседними полюсами и всего должно быть нечетное число нулей. Это утверждение справедливо как для положительных, так и для отрицательных γ .

Рассмотрим теперь порядок следования точек α_n и $\bar{\alpha}_n$, когда энергия возрастает и приближается к нулю. При этом точки, соответствующие положительным α_n , движутся монотонно вправо, а точки, соответствующие отрицательным значениям α , — влево. Следовательно, подобным образом должны вести себя в среднем и точки $\bar{\alpha}_n$. При такой энергии, при которой точка α проходит через $+1$ (или -1), у потенциала $+\mathcal{V}$ (или $-\mathcal{V}$) появляется связанное состояние; соответственно потенциал $+\mathcal{V}$ (или $-\mathcal{V}$) будет иметь виртуальное состояние при такой энергии, при которой точка α проходит через $+1$ (или -1). Это означает, что между любыми двумя значениями энергии, при которых у данного потенциала появляются связанные состояния, должно находиться *нечетное* число значений энергии, соответствующих виртуальным состояниям. Поскольку при изменении энергии движение точек, соответствующих виртуальным состояниям, происходит необязательно монотонно, то между двумя последовательными связанными состояниями может находиться больше одного виртуального состояния, даже когда потенциал \mathcal{V} всюду отрицателен. Более того, априори возможно любое число виртуальных состояний между порогом и первым связанным состоянием. Ведущее состояние, т. е. состояние с наибольшим значением $-E$, должно быть виртуальным.

Чтобы получить полное представление о движении точек, соответствующих связанным и виртуальным состояниям, на поверхности E , необходимо заметить, что связанное и виртуальное состояния никогда не могут совпадать друг с другом. Это следует из того, что, согласно (12.29), одновременное обращение в нуль $f(k)$ и $f(-k)$ означало бы, что функция $\varphi(k, r)$ тождественно равна нулю. Но последнее противоречит граничному условию для $\varphi(k, r)$. Более того, так как f является аналитической функцией обеих переменных k и γ , то новые нули на мнимой оси могут появиться только в результате либо слияния на ней двух симметрично расположенных комплексных нулей, либо же новые нули могут приходить из бесконечно удаленной точки $E = -\infty$. Поскольку нам известно, что при возрастании γ связанные s -состояния до своего появления являются виртуальными состояниями, то мы должны описывать движение виртуальных состояний и связанных состояний с $l = 0$ следующим образом (предполагается, что потенциал в некоторой области отрицательный и что γ положительно).

Если γ достаточно мало, то вообще нет ни связанных, ни виртуальных состояний. При возрастании γ либо появляются по одному виртуальные состояния в $-\infty$, либо же образуются пары виртуальных состояний в результате слияния двух симметрично расположенных комплексных полюсов функции S в точках на отрицательной оси E (либо происходит и то и другое). В первом случае новое виртуальное состояние должно появиться на $-\infty$ при том значении γ , при котором рассматриваемое виртуальное состояние проходит через порог и обращается в связанное состояние. Во втором случае одно из двух виртуальных состояний становится связанным, а другое остается виртуальным. Поэтому слева от любого связанного состояния должно всегда находиться нечетное число виртуальных состояний. По мере дальнейшего возрастания γ пара комплексных полюсов функции S сливается справа от связанного состояния, порождая пару виртуальных состояний. Одно из них затем становится связанным, а другое остается заключенным между двумя связанными состояниями. Этот процесс будет продолжаться с возможным дополнительным образованием пар виртуальных состояний и их последующей аннигиляцией

между соседними связанными состояниями. Как мы увидим ниже, при $l \geq 1$ «пары» состояний образуются непосредственно в точке $k = 0$, причем одно из состояний каждой пары затем становится виртуальным, а другое связанным. Таким образом, при $l = 0$ число виртуальных состояний между наименее связанным состоянием и порогом четно, а при $l \geq 1$ нечетно.

Следует помнить, что все эти выводы, вообще говоря, справедливы только в том случае, когда потенциал убывает быстрее *любой* экспоненты. Например, если \tilde{V} является суперпозицией потенциалов Юкавы, то все наши выводы могут оказаться неверными из-за появления левого разреза. Например, если пара симметричных комплексных полюсов на втором листе движется к левому разрезу, то либо они должны *пересечь* линию разреза, либо же они оба должны двигаться вдоль нее параллельно друг другу, а не в противоположных направлениях. Когда полюсы достигнут конца разреза, то один из них может двигаться вдоль действительной оси на первом листе, а другой должен уйти за разрез на другой лист или же оба они плавно исчезнут в непрерывном спектре. Однако для связанных и виртуальных состояний, расположенных справа от левого разреза, все полученные нами результаты остаются в силе.

Резонансные полюсы. Чтобы легче понять особенности неупругих, или абсорптивных процессов, которые более детально рассмотрены ниже, рассмотрим пару комплексных полюсов S -матрицы, расположенных не точно симметрично относительно мнимой оси k -плоскости, т. е. рассмотрим S -матрицу вида

$$S' = \frac{k + K - i\varepsilon}{k - K + i\varepsilon} \frac{k - K^* + i\varepsilon}{k + K^* - i\varepsilon} \dots,$$

где $k > 0$, $K_1 = \text{Re } K > 0$, $K_2 = \text{Im } K < 0$. При малых ε имеем

$$|S'|^2 = 1 + \frac{8\varepsilon K_1 K_2 k}{|k - K|^2 |k + K|^2},$$

так что S' при $\varepsilon > 0$ описывает абсорптивный процесс. Если устремить K_1 к нулю в том случае, когда матрица S' унитарна, т. е. $\varepsilon = 0$, то два симметричных полюса сливаются и невозможно установить, какой из них после этого движется вверх по мнимой оси и становится связанным, а какой движется вниз. Однако при $\varepsilon > 0$ полюсы остаются разделенными и никогда не сливаются, если только допустить, что полюс, расположенный *слева* от мнимой оси, движется *вверх*, а полюс, расположенный *справа* от мнимой оси, движется *вниз*. Но это означает, что тот полюс, который в конечном счете дает связанное состояние, *не есть* полюс, ответственный за наблюдаемые резонансы. Наблюдаемые резонансы в конечном счете обусловлены полюсами, расположенными в четвертом квадранте вблизи положительной действительной полуоси, т. е. непосредственно под *верхним* берегом правого разреза. Другими словами, если мы рассматриваем S -матрицу упругого рассеяния как предельный случай S -матрицы неупругого рассеяния и уменьшаем константу взаимодействия, то полюсы, соответствующие связанным состояниям, переходят в *верхнюю* полуплоскость второго листа поверхности E и, следовательно, не могут интерпретироваться как резонансы. Последние вызываются теми полюсами, которые при больших значениях константы взаимодействия соответствуют *виртуальным* состояниям.

Если потенциал имеет конечный радиус действия R , т. е. $\mathcal{V} = 0$ при $r > R$, то можно получить дополнительные общие результаты, касающиеся нулей функции \tilde{f} . Из соотношений (12.36) и (12.12) следует, что при $\text{Im } k \rightarrow -\infty$

$$\tilde{f}(k) \approx \frac{1}{2ik} e^{2ikR} \int_0^R dr \mathcal{V}(r) e^{2ik(r-R)},$$

Пусть далее вблизи точки $r = R$ первый член асимптотического разложения потенциала имеет вид

$$\mathcal{V}^*(r) = c(R-r)^\sigma, \quad \sigma > 0. \quad (12.98)$$

Тогда при $\text{Im } k \rightarrow -\infty$ получаем

$$f(k) \approx \text{const} \cdot |k|^{-\sigma-2} e^{2ikR}.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g(k^2) = f(k) f(-k);$$

это целая аналитическая функция от k^2 ; на бесконечности она ведет себя следующим образом:

$$g(k^2) \begin{cases} \approx \text{const} \cdot |k|^{-6-2} e^{2ikR} & \text{при } \text{Im } k \rightarrow -\infty, \\ \rightarrow 1 & \text{при } \text{Re } k \rightarrow \pm \infty \text{ и фиксированном } \text{Im } k. \end{cases} \quad (12.99)$$

Следовательно, g имеет порядок¹⁾ $\rho = 1/2$. Целая функция дробного порядка обязательно имеет бесконечное число нулей ([84], стр. 24). Из формулы (12.99) следует, однако, что только конечное число из этих нулей может находиться на мнимой оси. Таким образом, функция g должна иметь бесконечное число комплексных нулей, расположенных симметрично по отношению как к действительной, так и к мнимой оси. Нули в верхней полуплоскости должны быть нулями функции $f(-k)$, а нули в нижней полуплоскости — нулями функции $f(k)$.

По той же причине, по которой функция f не имеет бесконечного числа нулей на мнимой оси, функция \bar{f} не может иметь бесконечного числа нулей, расположенных ниже любого луча, проходящего через начало координат, поскольку в этой области выражение в правой части формулы (12.99) не имеет нулей. Кроме того, из нижнего равенства в (12.99) следует, что в любой полосе, расположенной ниже действительной оси, число нулей функции \bar{f} конечно. Другими словами, хотя полное число нулей рассматриваемой функции бесконечно, но при любых заданных положительных μ и ν имеется только конечное число таких нулей, мнимая часть которых превосходит $-\nu$ или у которых отношение величины мнимой части к вещественной больше μ . Если $\{k_n\}$ — последовательность нулей функции $\bar{f}(k)$, то при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\text{Im } k_n \rightarrow -\infty, \quad \frac{\text{Im } k_n}{\text{Re } k_n} \rightarrow 0. \quad (12.100)$$

Из нижней части формулы (12.99) также вытекает, что

$$\int_1^\infty dk k^{-2} \ln g(k^2) < \infty.$$

Поэтому ([84], стр. 134)

$$\sum_n |\text{Im}(k_n^{-1})| < \infty$$

и, согласно (12.100), получаем

$$\sum_n \frac{|\text{Im } k_n|}{(\text{Re } k_n)^2} < \infty. \quad (12.101)$$

1) По определению порядок ρ целой функции равен

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r},$$

где $M(r)$ — максимум модуля функции при $|z| = r$.

Можно показать ([406], стр. 45, и [706]), что распределение нулей k_n в правой полуплоскости таково, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} k_n &= \frac{n\pi}{R} + O(1), \\ \operatorname{Im} k_n &= \frac{\sigma + 2}{2R} \ln n + O(1), \end{aligned} \quad (12.102)$$

где σ определяется формулой (12.98).

Здесь следует заметить, что полученные выше общие результаты для обрезанных потенциалов не позволяют сделать какие бы то ни было выводы о ситуации, имеющей место в случае, когда радиус, на котором производится обрезание потенциала, устремляется в бесконечность (т. е. когда радиус действия потенциала обращается в бесконечность). Поясним это более подробно. Мы должны ожидать, что в общем случае структура особенностей \mathbf{S} -матрицы при любом заданном потенциале с бесконечным радиусом действия должна существенно отличаться от структуры ее особенностей при соответствующем обрезанном потенциале в пределе, когда радиус, на котором производится обрезание, стремится к бесконечности. Действительно, для потенциала с конечным радиусом действия R не может быть полюсов у функции Йоста, каким бы большим ни был радиус R . Однако функция Йоста, соответствующая обрезанному потенциалу, радиус действия которого устремлен к бесконечности, обычно имеет полюсы в нижней полуплоскости, причем фактически в общем случае их имеется даже бесконечное множество. Можно ожидать, что подобная ситуация имеет место не только для резко обрезаемых потенциалов, но также и в более общем случае. Например, сказанное в равной мере относится к случаю экранированного кулоновского поля, когда радиус экранирования неограниченно возрастает [255]. Математическая причина такого положения заключается в том, что операции предельных переходов $R \rightarrow \infty$ и $|k| \rightarrow \infty$ неравномерны и их нельзя менять местами.

Представления с использованием полюсов (для потенциалов с конечным радиусом действия). Целую функцию $\mathfrak{f}(k)$ можно представить в виде бесконечного произведения. Если считать, что $\mathfrak{f}(0) \neq 0$, то, согласно теореме о факторизации Вейерштрасса ¹⁾ в форме Адамара,

$$\mathfrak{f}(k) = \mathfrak{f}(0) e^{ick} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right) e^{k/k_n}. \quad (12.103)$$

Постоянную c можно вычислить с помощью теоремы Пфлюгера ([690], теорема 6B), согласно которой асимптотическое поведение выражения (12.103) для функции $\mathfrak{f}(k)$ на мнимой оси, т. е. при $k = \pm i|k|$ при больших значениях $|k|$ определяется формулой

$$|k|^{-1} \operatorname{Im} \left| \frac{\mathfrak{f}(k)}{\mathfrak{f}(0)} \right| = A \mp \sum \operatorname{Im} k_n^{-1} \mp c + o(1).$$

Сравнивая это выражение с (12.99) и (12.33), видим, что его левая часть равна $2R$ при $k = i|k|$ и равна нулю при $k = -i|k|$. Отсюда вытекает, что

$$c - i \sum k_n^{-1} = R$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{f}(k) = \mathfrak{f}(0) e^{ikR} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right). \quad (12.104)$$

¹⁾ См., например, [84], стр. 22. Для простоты мы считаем, что $\mathfrak{f}(0) \neq 0$. В противном случае необходимо заменить $\mathfrak{f}(0)$ на $\operatorname{const} \cdot k$.

Пусть имеется N' виртуальных и N связанных состояний, а также некоторое число «резонансных» состояний. Обозначим нули функции $f(k)$, отвечающие виртуальным, связанным и «резонансным» состояниям, соответственно через $-i\kappa_n$, iK_n и k_n ($\text{Re } k_n > 0$). Тогда

$$f(k) = f(0) e^{ikR} \prod_1^{N'} \left(1 - i \frac{k}{\kappa_n}\right) \prod_1^N \left(1 + i \frac{k}{K_n}\right) \prod_1^\infty \left(1 + \frac{2ik \text{Im } k_n - k^2}{|k_n|^2}\right). \quad (12.104a)$$

Таким образом, фазовый сдвиг и его производную по k можно представить в виде ряда

$$\delta(k) = -kR - \sum_{n=1}^N \text{arctg} \frac{k}{K_n} + \sum_{n=1}^{N'} \text{arctg} \frac{k}{\kappa_n} + \sum_{n=1}^\infty \text{arctg} \frac{2k \text{Im } k_n}{|k_n|^2 - k^2} \quad (12.105)$$

и

$$\frac{d\delta}{dk} = -R - \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{k^2 + K_n^2} + \sum_{n=1}^{N'} \frac{\kappa_n}{k^2 + \kappa_n^2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{2 \text{Im } k_n (k^2 + |k_n|^2)}{(k^2 - |k_n|^2)^2 + 2k^2 (\text{Im } k_n)^2}. \quad (12.106)$$

Из этих разложений ясно видно, какой величины *положительный* вклад дает каждый резонансный полюс в производную фазового сдвига; видно также, что результирующая величина производной главным образом определяется величиной радиуса R (см. гл. 11, § 2, п. 2, где проведено эвристическое рассмотрение этого вопроса). При $k \rightarrow \infty$ правая часть в формуле (12.106) стремится к нулю вследствие компенсации первого члена ($-R$) последней суммой.

Несмотря на то что в выражении (12.105) появляется бесконечно много «резонансных» членов, имеется только конечное число значений энергии, при которых $\sin \delta = 1$. В этом можно убедиться, воспользовавшись аналитичностью функции $f(k)$ на действительной оси и соотношением (12.33). Таким образом, *всегда существует некоторое значение энергии, выше которого резонансов нет*. Кроме того, из формулы (12.100) вытекает, что при больших k максимальный вклад от ряда в (12.106) возникает при $k \approx \text{Re } k_n$ и убывает как $2/\text{Im } k_n$. Следовательно, существует некоторое значение энергии, такое, что при энергиях, превосходящих его, фазовый сдвиг является монотонной функцией¹⁾.

Воспользовавшись (12.104), представим элемент S -матрицы в виде бесконечного произведения

$$S(k) = e^{-2ikR} \prod_1^\infty \frac{k_n + k}{k_n - k}, \quad (12.107)$$

или, как в (12.104a), более детально,

$$S(k) = e^{-2ikR} \prod_1^{N'} \frac{\kappa_n + ik}{\kappa_n - ik} \prod_1^N \frac{K_n - ik}{K_n + ik} \prod_1^\infty \frac{|k_n|^2 - k^2 - 2ik \text{Im } k_n}{|k_n|^2 - k^2 + 2ik \text{Im } k_n}. \quad (12.107a)$$

где подразумевается, что $\kappa_n > 0$, $K_n > 0$, $\text{Re } k_n > 0$. Эти представления в явном виде выражают свойство унитарности S при действительных значениях k .

Имеется другое представление функции $S(k)$, когда $\mathcal{V} = 0$ при $r > R$, в котором используется разложение Миттаг-Леффлера (см., например, [136], стр. 215). Чтобы получить его, необходимо оценить вычеты функции S в точках $k = k_n$,

¹⁾ Следует помнить, что здесь везде потенциал по предположению имеет конечный радиус действия. Для конечности числа точек, в которых $\sin^2 \delta = 1$, достаточно предположить, что потенциал убывает экспоненциально.

в которых $\dot{f}(k_n) \neq 0$. Обращаясь к (12.34), как это мы делали при выводе (12.33а), а также к соотношениям (12.100), получаем ведущие члены асимптотического разложения функции $\dot{f}(k)$ в окрестности любой точки k_n при $n \rightarrow \infty$:

$$\dot{f}(k) = 1 + (2ik)^{-1} \int_0^R dr \mathcal{Y}'(r) e^{2ikr} + O(k_n^{-1})$$

и

$$\dot{\dot{f}}(k) = k^{-1} \int_0^R dr r \mathcal{Y}'(r) e^{2ikr} + O(k_n^{-1}).$$

Предполагая, как и ранее, что имеет место (12.98), находим

$$\dot{\dot{f}}(k) = 2iR [\dot{f}(k) - 1] + O(k_n^{-1}),$$

так как при больших значениях k существенный вклад в интеграл дает только окрестность точки $r=R$. Отсюда

$$\dot{\dot{f}}(k_n) = -2iR + O(k_n^{-1}). \quad (12.108)$$

Следовательно, вычет функции $S(k)$ в точке $k=k_n$ равен

$$R_n = \frac{\dot{f}(-k_n)}{\dot{\dot{f}}(k_n)} = \frac{i}{2R} + O(k_n^{-1}). \quad (12.109)$$

Таким образом, элемент S -матрицы можно представить в виде

$$S(k) = 1 + kP(k) + k \left[\sum_1^{N'} \frac{iR'_n}{\varkappa_n(k + i\varkappa_n)} - \sum_1^N \frac{i \operatorname{res}_n}{K_n(k - iK_n)} + \sum_1^\infty \left(\frac{R_n/k_n}{k - k_n} + \frac{R_n^*/k_n^*}{k + k_n^*} \right) \right], \quad (12.110)$$

где $\varkappa_n > 0$, $K_n > 0$, $|\operatorname{Re} k_n| > 0$, $P(k)$ — целая функция переменной k и R'_n — вычеты в полюсах, соответствующих виртуальным состояниям. Так как, согласно (12.109) и (12.100), отдельные члены в выражении (12.110) при больших n ведут себя как

$$\frac{R_n}{k_n^2} - \frac{R_n^*}{k_n^{*2}} \approx \frac{i}{2R} \left(\frac{1}{k_n^2} + \frac{1}{k_n^{*2}} \right) \approx \frac{i}{R} \frac{1}{(\operatorname{Re} k_n)^2},$$

то из неравенства (12.101) следует, что разложение Миттаг-Леффлера (12.110) сходится.

В принципе вычеты в разложении (12.110) можно связать с расположением полюсов. Согласно формуле (12.107а), имеем

$$iR'_n = -2\varkappa_n e^{-2\varkappa_n R} \prod_{m \neq n} \frac{\varkappa_m + \varkappa_n}{\varkappa_m - \varkappa_n} \prod_p \frac{K_p - \varkappa_n}{K_p + \varkappa_n} \prod_s \frac{|k_s|^2 + \varkappa_n^2 + 2\varkappa_n \operatorname{Im} k_s}{|k_s|^2 + \varkappa_n^2 - 2\varkappa_n \operatorname{Im} k_s}, \quad (12.111)$$

$$i \operatorname{res}_n = 2K_n e^{2K_n R} \prod_m \frac{\varkappa_m - K_n}{\varkappa_m + K_n} \prod_{p \neq n} \frac{K_p + K_n}{K_p - K_n} \prod_s \frac{|k_s|^2 + K_n^2 - 2K_n \operatorname{Im} k_s}{|k_s|^2 + K_n^2 + 2K_n \operatorname{Im} k_s}. \quad (12.111а)$$

Полное число полюсов, соответствующих как виртуальным, так и связанным состояниям, расположенных справа от любого полюса, соответствующего связанному состоянию, есть четное число, а справа от полюса, соответствующего виртуальному состоянию, — нечетное. Поэтому каждая из величин $i \operatorname{res}_n$ и iR'_n положительна [положительность первой величины находится в согла-

сии с неравенством (12.85)]. Кроме того, имеем

$$R_n = 2ik_n \frac{\text{Im } k_n}{\text{Re } k_n} e^{-2ih_n R} \prod_m \frac{\kappa_m + ik_n}{\kappa_m - ik_n} \times \\ \times \prod_p \frac{K_p - ik_n}{K_p + ik_n} \prod_{s \neq n} \frac{|k_s|^2 - k_n^2 - 2ik_n \text{Im } k_s}{|k_s|^2 - k_n^2 + 2ik_n \text{Im } k_s}. \quad (12.116)$$

Представлением (12.110) можно воспользоваться, чтобы написать выражение для синуса фазового сдвига. Принимая во внимание (12.85), получаем

$$2 \sin^2 \delta(k) = \text{Re} [1 - S(k)] = \\ = EQ(E) + E \sum_1^N \frac{A_n}{E + |E_n^{\text{CB}}|} - E \sum_1^{N'} \frac{B_n}{E + |E_n^{\text{ВирТ}}|} + \\ + E \sum_1^\infty \frac{C_n(E - E_n) + 1/2 D_n \Gamma_n}{(E - E_n)^2 + 1/4 \Gamma_n^2}, \quad (12.112)$$

где

$$A_n = \frac{i \text{res}_n}{K_n} > 0, \\ B_n = \frac{iR'_n}{\kappa_n} > 0, \\ C_n - iD_n = \frac{2R_n}{k_n}, \\ E_n + \frac{1}{2} i\Gamma_n = \frac{k_n^2}{2\mu}, \quad (12.113)$$

причем

$$Q(E) = \frac{1/2 [P(-k) - P(k)] k}{E}$$

есть целая функция от E . Установить связь между $P(k)$ и полюсами функции S очень трудно, и до сих пор не известно ни одного простого соотношения. Преимущество выражений (12.110) и (12.112) по сравнению с (12.107) заключается в том, что вклады от отдельных резонансов в первые входят *аддитивно*. Вместе с тем из (12.110) и (12.112) нелегко убедиться в наличии свойства унитарности.

В заключение еще раз подчеркнем, что все полученные соотношения, начиная с (12.98), выведены и, вообще говоря, справедливы только в предположении о конечности радиуса действия потенциала R .

Аналитические потенциалы. Допустим теперь, что потенциал является суперпозицией экспонент (12.22) или суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22а). В этом случае можно обратиться к методу, описанному непосредственно след за формулой (12.22а), в которой используется замена переменных $r = xe^{i\varphi}$ и $k = Ke^{-i\varphi}$. С помощью стандартного метода нахождения вронскиана из радиального уравнения Шредингера получаем

$$\frac{1}{2i} \frac{d}{dx} W(f_\Phi^*, f_\Phi) = |f_\Phi|^2 (\text{Im } \gamma \mathcal{Y}_\Phi - \text{Im } K^2), \quad (12.114)$$

где используются те же обозначения, что и в рассуждении после формулы (12.22а) (перед потенциалом \mathcal{Y} мы введем множитель γ — константу взаимодействия). Пусть $\dot{f} = 0$. Величину r можно сделать комплексной, положив $r = xe^{i\varphi}$ (x — действительное число). При этом вронскиан, дающий по опреде-

лению функцию \bar{f} . остается равным нулю. Поэтому функция

$$f_{\varphi}(ke^{i\varphi}, x) = f(k, xe^{i\varphi})$$

должна экспоненциально убывать на бесконечности, если $\text{Im } ke^{i\varphi} > 0$, и должна обращаться в нуль в точке $r=0$. Следовательно, соотношение (12.114) можно проинтегрировать:

$$\int_0^{\infty} dx |f_{\varphi}|^2 A(x, \varphi, k) = 0, \quad (12.115)$$

где

$$A = \text{Im } \gamma \mathcal{Y}_{\varphi} - \text{Im } k^2 e^{2i\varphi}.$$

Аналогично, складывая радиальное уравнение Шредингера для f_{φ} , помноженное на f_{φ}^* , с комплексно сопряженным уравнением, помноженным на f_{φ} , получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{x} |f_{\varphi}|^2 - \frac{d}{dx} |f_{\varphi}|^2 \right] + \left| f'_{\varphi} - \frac{1}{2x} f_{\varphi} \right|^2 + |f_{\varphi}|^2 B(x, \varphi, k) = 0,$$

где

$$B = \text{Re } \gamma \mathcal{Y}_{\varphi} - \text{Re } k^2 e^{2i\varphi} + \frac{1}{4} x^{-2}.$$

После интегрирования последнего уравнения имеем

$$\int_0^{\infty} dx |f_{\varphi}|^2 B = - \int_0^{\infty} dx \left| f'_{\varphi} - (2x)^{-1} f_{\varphi} \right|^2. \quad (12.116)$$

Помножим равенства (12.116) и (12.115) соответственно на $\cos \beta$ и $\sin \beta$, где $0 \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi$, и сложим их. Получающееся в результате соотношение можно удовлетворить только в том случае, когда для некоторого значения x выполняется неравенство

$$\frac{1}{4} x^{-2} \cos \beta + \cos \beta \text{Re } \gamma \mathcal{Y}_{\varphi} + \sin \beta \text{Im } \gamma \mathcal{Y}_{\varphi} - \text{Re } [k^2 e^{i(2\varphi-\beta)}] < 0. \quad (12.117)$$

Пусть потенциал можно аналитически продолжить на мнимую ось ($\varphi = \pm \frac{1}{2}\pi$), и пусть существует такая постоянная M , что

$$|\mathcal{Y}_{\frac{1}{2}\pi}(x)| = |\mathcal{Y}(ix)| \leq Mx^{-1}. \quad (12.118)$$

Тогда из (12.117) следует, что при $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ должно выполняться неравенство

$$\frac{1}{4} x^{-2} \cos \beta + \text{Re } k^2 e^{-i\beta} < \sqrt{2} |\gamma| Mx^{-1},$$

а значит и неравенство

$$\cos \beta \text{Re } k^2 e^{-i\beta} < 4 |\gamma|^2 M^2,$$

поскольку

$$AB \leq \frac{1}{2} (A+B)^2.$$

Другими словами, каждому нулю функции \bar{f} должно соответствовать такое значение энергии $E = E_1 + iE_2$, что

$$E_1 \cos \beta + E_2 \sin \beta < \frac{2 |\gamma|^2 M^2}{\mu \cos \beta}$$

при всяком β , выбранном между нулем и $\frac{1}{2}\pi$. Следовательно, точка E должна находиться в области, ограниченной *огibaющей* указанного семейства кривых, которая представляет собой параболу

$$E_2 = \frac{8 |\gamma|^2 M^2}{\mu} \left(\frac{2 |\gamma|^2 M^2}{\mu} - E_1 \right). \quad (12.119)$$

Все полюсы функции S , расположенные на втором листе, заключены в этой области, если потенциал «аналитический» с индексом $\sigma = 1/2\pi$ и удовлетворяет условию (12.118). (Потенциалы Юкавы относятся к этому классу, а потенциалы, тождественно равные нулю за пределами некоторой конечной области пространства, к этому классу не принадлежат.) Все резонансные полюсы заведомо должны быть расположены при энергиях, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re} E < \frac{2|\gamma|^2 M^2}{\mu}. \quad (12.120)$$

Рассуждения, подобные приведенным, можно использовать, чтобы определить, каким ограничениям должны удовлетворять собственные значения $\alpha = 1/\gamma$ ядра $G\mathcal{U}$ радиального уравнения Липпмана — Швингера. При положительной энергии в силу (12.120) имеем

$$|\alpha| < 2Mk^{-1}. \quad (12.121)$$

Из этого неравенства непосредственно следует, что при $E \rightarrow +\infty$ все α равномерно стремятся к нулю и, следовательно, борновский ряд должен сходиться при

$$k^2 > 4M^2. \quad (12.122)$$

5. Полнота

Теперь у нас имеется все необходимое для доказательства полноты системы волновых функций связанных состояний и состояний рассеяния. Такое доказательство можно выполнить в рамках математического аппарата абстрактного векторного пространства. Именно в этой теории (в гл. 7, § 3, п. 3) нами была сформулирована без доказательства спектральная теорема. Приведем здесь ее доказательство с использованием методов теории функций комплексного переменного. Очень поучительно проследить, как аналитические свойства, обсуждавшиеся нами ранее, можно использовать в данном случае. Единственными предположениями относительно потенциала будут условия (12.9) и (12.21).

Основная идея доказательства базируется на изучении интеграла

$$\int dE \mathcal{G}(E; r, r'),$$

который берется по замкнутому контуру, идущему вдоль обоих берегов правого разреза на физическом листе поверхности \tilde{E} и замыкаемому на бесконечности дугой окружности большого радиуса. Этот интеграл мы запишем ниже в виде суммы различных вкладов, которые вычисляются с помощью теоремы Коши о вычетах, причем вычеты берутся в точках полюсов на действительной оси, соответствующих связанным состояниям. Вся процедура оказывается несколько проще в комплексной плоскости k .

Рассмотрим интеграл

$$I(r) = \int_C dk k \int_0^\infty dr' h(r') \mathcal{G}(k; r, r'),$$

где $h(r)$ — квадратично интегрируемая функция, а \mathcal{G} определяется формулой (12.40). Контур C идет вдоль действительной оси k от $-\infty$ до $+\infty$, обходя начало координат в верхней полуплоскости по полуокружности малого радиуса ε , и далее замыкается в верхней полуплоскости полуокружностью большого радиуса R . Разобьем этот интеграл на две части:

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = - \int_C dk k \int_0^r dr' h(r') \frac{\varphi(k, r') f(k, r)}{\bar{f}(k)},$$

$$I_2 = - \int_C dk k \int_r^\infty dr' h(r') \frac{j(k, r') \varphi(k, r)}{\bar{f}(k)}.$$

Вычислим сначала I_1 .

Обозначим дискретные собственные значения оператора H через $-K_n^2/2\mu$ ($K_n > 0$). Тогда по определению

$$\varphi^{(n)}(r) \equiv \varphi(iK_n, r),$$

$$f^{(n)}(r) \equiv f(iK_n, r),$$

$$C_n = \dot{f}(iK_n).$$

Поскольку функции φ , f и \bar{f} регулярны в верхней полуплоскости k и функция \dot{f} имеет простые нули только в точках $k = iK_n$, то интеграл I_1 легко вычисляется с помощью теоремы о вычетах. Если ввести обозначение

$$N_n^2 \equiv \int_0^\infty dr [\varphi^{(n)}(r)]^2$$

и воспользоваться соотношениями (12.52) и (12.49), то получим

$$I_1 = -2\pi i \sum_n \int_0^r dr' h(r') \varphi^{(n)}(r') f^{(n)}(r) \frac{iK_n}{C_n} =$$

$$= i\pi \sum_n \int_0^r dr' h(r') \varphi^{(n)}(r') \varphi^{(n)}(r) N_n^{-2} \quad (12.123)$$

С другой стороны, интеграл I_1 можно вычислить непосредственно. Легко видеть, что вклад $I_{1\varepsilon}$ от интегрирования по полуокружности малого радиуса стремится к нулю при стремлении к нулю радиуса этой полуокружности, если исключить возможный случай, когда $\bar{f}(0) = 0$. Однако вследствие (12.53) вклад $I_{1\varepsilon}$ равен нулю также и при $\bar{f}(0) = 0$. Вклад I_{1R} в интеграл I_1 от интегрирования по большой полуокружности вычисляется с помощью асимптотических формул (12.12), (12.26) и (12.33) для соответствующих функций при больших $|k|$:

$$I_{1R} \underset{R \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{1}{2} i \int_0^r dr' h(r') \int_C dk (e^{ih(r-r')} - e^{ih(r+r')}) \approx$$

$$\underset{R \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2} h(r) \int_C dk k^{-1} = \frac{1}{2} \pi i h(r). \quad (12.124)$$

Остальной вклад в I_1 дается интегралом I_{1E} по действительной оси. При вычислении последнего мы воспользуемся соотношениями (12.29) и (12.32), а также тем, что φ — четная функция k :

$$I_{1E} = - \int_0^r dr' h(r') \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{\infty} \right) dk k \frac{\varphi(k, r') f(k, r)}{\bar{f}(k)} =$$

$$= -2i \int_0^r dr' h(r') \int_{+\varepsilon}^{\infty} dk k^2 \frac{\varphi(k, r') \varphi(k, r)}{|\bar{f}(k)|^2}. \quad (12.125)$$

Полагая теперь $\varepsilon \rightarrow 0$, сложим интегралы (12.124) и (12.125) и приравняем сумму выражению, стоящему в правой части формулы (12.123). В результате получим, что

$$h(r) = 2 \int_0^r dr' h(r') \left[2 \int_0^\infty dk k^2 \frac{\varphi(k, r') \varphi(k, r)}{\pi |f(k)|^2} + \sum_n \frac{\varphi^{(n)}(r') \varphi^{(n)}(r)}{N_n^2} \right]. \quad (12.126)$$

Аналогичным образом можно вычислить интеграл I_2 , в котором верхний предел интегрирования по r' мы заменим на $r + \mu$, где $\mu > 0$. Результат имеет вид

$$h(r) = 2 \int_r^{r+\mu} dr' h(r') [\quad], \quad (12.127)$$

где в квадратных скобках стоит точно такое же выражение, как и в (12.126). Сложим теперь (12.126) и (12.127) и положим $\mu \rightarrow \infty$. Если функция $h(r)$ квадратично интегрируема, то возникающий при этом несобственный интеграл сходится.

Результат можно записать с помощью δ -функции

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\varphi(k, r) \varphi(k, r')}{|f(k)|^2} + \sum_n \frac{\varphi^{(n)}(r) \varphi^{(n)}(r')}{N_n^2} = \delta(r - r'). \quad (12.128)$$

Из формулы (12.128) следует, что система волновых функций, отвечающих дискретному и непрерывному спектру, является полной. Кроме того, эта формула дает в явном виде соответствующие весовые функции.

Определим *спектральную функцию* $\rho(E)$ соотношением

$$\frac{d\rho}{dE} = \begin{cases} \frac{2\mu k}{\pi |f(k)|^2}, & E > 0, \\ \sum_n \frac{\delta(E - E_n)}{N_n^2}, & E < 0, \end{cases} \quad (12.129)$$

потребовав одновременно выполнения граничного условия $\rho(-\infty) = 0$. Тогда свойство полноты системы волновых функций (12.128) можно записать с помощью интеграла Стильтьеса

$$\int d\rho(E) \varphi(k, r) \varphi(k, r') = \delta(r - r'). \quad (12.128a)$$

Условие полноты можно также выразить через физические волновые функции (11.6), используя в качестве волновых функций, соответствующих состояниям рассеяния в (11.6), формулу (12.37). В качестве волновых функций связанных состояний возьмем функции

$$\psi^{(n)}(r) = \frac{\varphi^{(n)}}{N_n},$$

которые нормированы на единицу. Тогда имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk \psi^{(+)}(k, r) \psi^{(+)*}(k, r') + \sum_n \psi^{(n)}(r) \psi^{(n)}(r') = \delta(r - r'). \quad (12.128б)$$

Функция Грина. Соотношениями (12.128) — (12.128б) можно непосредственно воспользоваться, чтобы получить представления для полной функции

Грина \mathcal{G} или для резольвенты (12.40). Очевидно, что

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(E; r, r') &= \frac{1}{2\mu} \int d\rho(E') \frac{\varphi(k', r) \varphi(k', r')}{E - E'} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dk' \frac{\psi^{(+)}(k', r) \psi^{(+)*}(k', r')}{k^2 - k'^2} + \sum_n \frac{\psi^{(n)}(r) \psi^{(n)}(r')}{k^2 + k_n^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \psi^{(+)}(k', r) \psi^{(+)*}(k', r')}{k - k'} + \sum_n \frac{\psi^{(n)}(r) \psi^{(n)}(r')}{k^2 + k_n^2}. \end{aligned} \quad (12.130)$$

Предел функции \mathcal{G} при приближении k (сверху) к положительной действительной полуоси, или при приближении E сверху к правому разрезу, равен \mathcal{G}^+ . Предел \mathcal{G} при стремлении k (сверху) к отрицательной действительной полуоси, или при стремлении E снизу к правому разрезу, равен \mathcal{G}^- .

§ 2. ВЫСШИЕ УГЛОВЫЕ МОМЕНТЫ

Здесь мы обобщим результаты § 1 на случай угловых моментов, отличных от нуля. Однако мы не будем повторять все рассуждения, а вместо этого просто укажем, что в данном случае необходимо изменить и как это сделать. Поскольку в следующей главе нам встретятся нецелочисленные значения угловых моментов, то мы не ограничимся здесь рассмотрением обязательно целых l . Однако специфические вопросы, возникающие только при нецелочисленных l , будут рассматриваться ниже, в гл. 12, § 3 и гл. 13.

Регулярное решение. Методы, использованные в § 1, п. 1 и 2, можно распространить на случай $l > 0$. (В действительности они применимы при значениях l , для которых ¹⁾ $\text{Re } l > -1/2$.) Регулярное решение радиального уравнения Шредингера

$$-\psi'' + l(l+1)r^{-2}\psi + \gamma \mathcal{Y}'\psi = k^2\psi \quad (12.131)$$

однозначно определяется граничным условием

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-l-1} \varphi_l(k, r) = 1, \quad (12.132)$$

заменяющим условие (12.2). Условие (12.132) обязательно должно содержать l по причине, полностью аналогичной той, по которой условие (12.15) для $f(k, r)$ зависит от k . Когда $l \neq 0$, $r = 0$ является регулярной особой точкой дифференциального уравнения второго порядка (12.131), причем член наивысшей сингулярности содержит множителем $l(l+1)$. Именно это обстоятельство определяет зависимость φ_l от l . К этому вопросу мы вернемся в гл. 13. До тех пор пока l фиксировано (и $l > -1/2$), его значение не влияет на общий характер зависимости φ_l от k .

Уравнение (12.131) совместно с граничным условием (12.132), как и прежде, проще всего заменить интегральным уравнением Вольтерра

$$\varphi_l(k, r) = \varphi_l^{(0)}(k, r) + \gamma \int_0^r dr' g_l(k; r, r') \mathcal{Y}'(r') \varphi_l(k, r'). \quad (12.133)$$

Неоднородный член уравнения, или функция нулевого приближения, приобретает вид

$$\varphi_l^{(0)}(k, r) = (2l+1)!! k^{-l-1} u_l(kr) = r^{1/2} \left(\frac{1}{2} k\right)^{-l-1/2} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) J_{l+1/2}(kr), \quad (12.134)$$

¹⁾ Причина этого ограничения разъясняется в § 3.

а функция Грина при $r' < r$ дается выражением

$$\begin{aligned} g_l(k; r, r') &= k^{-1} [u_l(kr') v_l(kr) - u_l(kr) v_l(kr')] = \\ &= i e^{-i\pi l} (2k)^{-1} [\omega_l^{(+)}(kr') \omega_l^{(-)}(kr) - \omega_l^{(+)}(kr) \omega_l^{(-)}(kr')] = \\ &= \frac{1/2\pi (rr')^{1/2} [J_{l+1/2}(kr) J_{l-1/2}(kr') - J_{l+1/2}(kr') J_{l-1/2}(kr)]}{\cos \pi l}. \end{aligned} \quad (12.135)$$

В формулах (12.134) и (12.135) J_λ — функции Бесселя, а u_l , v_l и $\omega_l^{(\pm)}$ определены в гл. 2, § 2, п. 1. Функции $\varphi_l^{(0)}$ и g_l удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\begin{aligned} |\varphi_l^{(0)}(k, r)| &\leq C e^{l\nu} |r| |k|^{-l-1} [L(|k|r)]^{l+1}, \\ |g_l(k; r, r')| &\leq C e^{l\nu} |(r-r')| |k|^{-1} [L(|k|r)]^{l+1} [L(|k|r')]^{-l}, \end{aligned} \quad (12.136)$$

которые выполняются равномерно относительно k и r при всех комплексных k , всех $r > 0$, $0 < r' \leq r$ и для всех фиксированных значений l .

Аналогично

$$|\omega_l^{(+)}(kr)| \leq C e^{\nu r} [L(|k|r)]^{-l}, \quad (12.136a)$$

где

$$L(x) = \frac{x}{1+x}$$

и $\nu = \text{Im } k$. [При комплексных значениях l мы должны всюду в (12.136) и (12.136a) заменить l на $\text{Re } l$.] Ряд последовательных приближений для (12.133) сходится при тех же самых ограничениях на \mathcal{V} , что и в случае $l = 0$, а φ_l как функция от k и r обладает теми свойствами симметрии и аналитичности, которые были указаны в § 1, п. 1. Поведение функции φ_l при больших $|k|$ теперь вместо (12.12) определяется формулой

$$\varphi_l(k, r) = (2l+1)!! k^{-l-1} \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l\right) + o(|k|^{-l-1} e^{l\nu} r). \quad (12.137)$$

Нерегулярные решения. Нерегулярные решения $f_{l\pm}(k, r)$ по-прежнему определяются граничными условиями (12.15). Они удовлетворяют интегральному уравнению

$$f_{l\pm}(k, r) = f_{l\pm}^{(0)}(k, r) - \gamma \int_r^\infty dr' g_l(k; r, r') \mathcal{V}(r') f_{l\pm}(k, r'), \quad (12.138)$$

где

$$f_{l\pm}^{(0)}(k, r) = \omega_l^{(\pm)}(k, r) e^{-i1/2\pi l} \quad (12.139)$$

выражается с помощью формулы (2.60) через функции Ганкеля. Функция Грина g_l та же, что и в (12.135). Ряд последовательных приближений для (12.138) сходится при тех же условиях, что и в случае (12.16), а свойства симметрии и аналитические свойства $f_{l\pm}$ как функций от k такие же, что и у f_\pm , за исключением точки $k = 0$. В этой точке функции $f_{l\pm}$ имеют полюсы порядка l (если потенциал недостаточно хороший, так что функции $k^l f_{l\pm}(k, r)$ не аналитические в окрестности точки $k = 0$, то они все же в этой окрестности непрерывны). Рассуждения, основанные на аналитичности потенциала, и в частности те, в которых используются выражения (12.22) или (12.22a), остаются без изменений. Асимптотика (12.26) для больших $|k|$ при $\text{Im } k \geq 0$ также сохраняется.

Функция Иоста. Функции Иоста $\mathcal{F}_{l\pm}(k)$ определяются так же, как и в (12.28), так что формула (12.29) остается справедливой. Поэтому, как и ранее, функции Иоста обладают свойством (12.30) и свойствами симметрии (12.32) — (12.32б) (при действительном l). Но соотношение (12.31), конечно,

теперь не выполняется. Вместо него имеем

$$\mathcal{F}_l(k) = (2l+1) \lim_{r \rightarrow 0} r^l f_l(k, r). \quad (12.140)$$

Не выполняется также предельное равенство (12.33) для больших k . Вместо него, согласно (12.137) и (12.26), при $\text{Im } k \geq 0$ теперь имеем

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} k^l \mathcal{F}_l(k) = (2l+1)!! e^{-i/2\pi l}. \quad (12.141)$$

Поэтому функцию Иоста удобно определить немного иначе:

$$\tilde{f}_{l+}(k) = \tilde{f}_l(k) \equiv \frac{k^l e^{-i/2\pi l} \mathcal{F}_l(k)}{(2l+1)!!} = \frac{k^l e^{-i/2\pi l} W(f_l, \varphi_l)}{(2l+1)!!}. \quad (12.142)$$

Определенная таким образом функция Иоста стремится к единице при больших $|k|$ и непрерывна в точке $k=0$. Если, кроме того, ввести функцию

$$\tilde{f}_{l-}(k) \equiv \frac{k^l e^{i/2\pi l} \mathcal{F}_{l-}(k)}{(2l+1)!!} = \frac{k^l e^{i/2\pi l} W(f_{l-}, \varphi_l)}{(2l+1)!!}, \quad (12.142a)$$

то \tilde{f}_{l-} — оказывается связанной с \tilde{f}_{l+} соотношением (12.30). Функция \tilde{f}_l (при действительном l) обладает свойствами симметрии (12.32) — (12.32б).

В случае $l \neq 0$ можно написать интегральные представления, аналогичные (12.34) и (12.36). Подстановка выражений (12.133) и (12.138) в (12.142) и вычисление вронскиана в точках $r=0$ или $r=\infty$ приводит к формулам

$$\tilde{f}_l(k) = 1 + \gamma k^{-1} e^{-i/2\pi l} \int_0^{\infty} dr u_l(kr) \mathcal{Y}(r) f_l(k, r) \quad (12.143)$$

и

$$\tilde{f}_l(k) = 1 + \frac{\gamma k^l e^{-i\pi l}}{(2l+1)!!} \int_0^{\infty} dr \omega_l^{(+)}(kr) \mathcal{Y}(r) \varphi_l(k, r). \quad (12.144)$$

Представления (12.143) и (12.144) можно использовать для получения более полной информации о поведении \tilde{f}_l при высоких энергиях. При этом оказывается, что асимптотические соотношения (12.33а) и (12.33б) сохраняются также и в рассматриваемом случае и, следовательно, поведение фазовых сдвигов при высоких энергиях по-прежнему определяется формулой (12.82) (см. приведенное ниже соотношение (12.154), связывающее функцию Иоста с S -матрицей). Однако еще необходимо проверить, выполняются ли эти формулы равномерно относительно l . Несмотря на то что каждый фазовый сдвиг в конечном счете стремится к нулю так, как это следует из формулы (12.82), может оказаться, что чем больше значение l , тем выше должна быть энергия, при которой (12.82) будет выполняться с заданной степенью точности (см. § 3).

Физическая волновая функция. Связь физической волновой функции $\psi_l^{(+)}$ с функцией φ_l можно установить путем сравнения асимптотического поведения функции φ_l , определяемого формулой (12.35), в которой вместо \tilde{f}_{\pm} следует подставить функции $\mathcal{F}_{l\pm}$, с выражением (11.9). В результате такого сравнения получаем

$$\psi_l^{(+)}(k, r) = \frac{k \varphi_l(k, r) e^{i/2\pi l}}{\mathcal{F}_l(k)} = \frac{k^{l+1} \varphi_l(k, r)}{\tilde{f}_l(k) (2l+1)!!}. \quad (12.145)$$

Функция Грина. Полная функция Грина строится так же, как и в § 1, п. 2. В результате получаем формулу, аналогичную (12.40),

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_l^+(k; r, r') &= - \frac{\varphi_l(k, r_{<}) f_l(k, r_{>})}{\mathcal{F}_l(k)} = \\ &= - k^{-1} \psi_l^{(+)}(k, r_{<}) f_l(k, r_{>}) e^{-1/2i\pi l}. \end{aligned} \quad (12.146)$$

Эта функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + \mathcal{V}(r) - k^2 \right] \mathcal{G}_l^+(k; r, r') = -\delta(r-r') \quad (12.147)$$

и граничному условию, которое состоит в том, что на бесконечности мы должны иметь расходящиеся волны. Выражения для других функций Грина легко получить по аналогии с (12.42).

Определитель Фредгольма. Доказательство того, что функция Иоста тождественно равна определителю Фредгольма уравнения (11.7), проводится точно так же, как и раньше. Определитель Фредгольма, разумеется, должен совпадать с функцией Иоста \mathfrak{f}_l , а не с \mathcal{F}_l :

$$\mathfrak{f}_l(k) = \Delta_l(k), \quad (12.148)$$

так как $\mathfrak{f}_l = 1$, когда $\gamma = 0$. Аналогично (12.44) ядро радиального уравнения Липпмана—Швингера теперь дается формулой

$$\begin{aligned} K_l(r, r') &= G_l^+(r, r') \mathcal{V}(r') = \\ &= -e^{-i\pi l} k^{-1} u_l(kr_{<}) \omega_l^{(+)}(kr_{>}) \mathcal{V}(r'). \end{aligned} \quad (12.149)$$

Все остальные формулы (12.45)—(12.48а) остаются в силе, если только учесть, что входящее в них ядро теперь имеет вид (12.149).

Связанные состояния. Рассмотрение связанных состояний и нулей функции \mathfrak{f}_l , расположенных в верхней полуплоскости, проведенное в § 1, п. 2, полностью переносится на случай $l > 0$. Вместо (12.50) теперь мы имеем

$$c_l = \frac{-2|k_0|}{\mathcal{F}_l(-i|k_0|)}, \quad (12.150)$$

где $\mathcal{F}_l(i|k_0|) = 0$. Следовательно,

$$\mathfrak{f}_l(k_0, r) = c_l \varphi_l(k_0, r). \quad (12.151)$$

Опять можно утверждать, что нули функции \mathcal{F}_l , соответствующие связанным состояниям, должны быть *простыми*. Можно также получить формулу (12.52), в левой части которой теперь будет стоять $\mathcal{F}_l(k_0)$. Аналогично тому, как это имело место для \mathfrak{f}_+ и \mathfrak{f}_- , функции \mathcal{F}_{l+} и \mathcal{F}_{l-} не могут одновременно обращаться в нуль нигде, кроме точки $k = 0$. А это опять-таки исключает появление нулей у \mathfrak{f}_l где-либо на действительной оси, кроме начала координат.

Точка $k = 0$. Ситуация с точкой $k = 0$ оказывается несколько иной. Если $\mathfrak{f}_l(0) = 0$, то из (12.142) следует, что при $k \rightarrow 0$ функция $\varphi_l(0, r)$ пропорциональна величине $\lim_{k \rightarrow 0} k^l \mathfrak{f}_l(k, r)$. Из-за множителя k^l указанная величина на больших расстояниях стремится не к единице, а к *нулю*. В самом деле, из аналогичной (12.18) формулы легко видеть, что при $r \rightarrow \infty$

$$\lim_{k \rightarrow 0} k^l \mathfrak{f}_l(k, r) = O(r^{-l}). \quad (12.152)$$

Поэтому равенство $\mathfrak{f}_l(0) = 0$ означает, что при $l > 1/2$ в нуле имеется связанное состояние с нулевой энергией связи. Следовательно, функция $\varphi_l(0, r)$ квадратично интегрируема. Однако в противоположность остальным волновым функциям связанных состояний с положительными энергиями связи эта функция не убывает экспоненциально.

При $\mathfrak{f}_l(0) = 0$ кратность нуля при $l \neq 0$ отличается от кратности соответствующего нуля при $l = 0$. Если k стремится к нулю, оставаясь в верхней полуплоскости, то можно показать, что при $l \geq 1$

$$\mathfrak{f}_l(k) = O(k^2)$$

и

$$\frac{1}{\mathfrak{f}_l(k)} = O(k^{-2}). \quad (12.153)$$

Таким образом, \tilde{f}_l при стремлении к нулю имеет порядок k^2 . Когда функция \tilde{f}_l аналитична в окрестности точки $k = 0$, то это означает, что в точке $k = 0$ имеется *двукратный* нуль.

Дисперсионные соотношения. Дисперсионные соотношения (12.54) — (12.64) справедливы также и при $l > 0$. Так как функция \mathcal{F}_l не непрерывна в точке $k = 0$ и не стремится к единице при $|k| \rightarrow \infty$, то все эти соотношения должны относиться к функции \tilde{f}_l .

S-матрица. Элемент S-матрицы при $l \neq 0$ находится путем сравнения формулы, аналогичной (12.35), с (11.9). Таким образом, используя (12.142) и (12.142а), находим

$$S_l(k) = \frac{e^{i\pi l} \mathcal{F}_{l-}(k)}{\mathcal{F}_{l+}(k)} = \frac{\tilde{f}_{l-}(k)}{\tilde{f}_{l+}(k)}. \quad (12.154)$$

Свойства симметрии (12.72) и (12.74) сохраняются для функции $S_l(k)$, а фазовые сдвиги δ_l и $-\delta_l$ являются фазами соответственно функций \tilde{f}_{l-} и \tilde{f}_{l+} . Поскольку интегральное представление S-матрицы (12.76) есть не что иное, как другая форма записи выражения (11.19) совместно с решением уравнения (11.7) с помощью функции Грина \mathcal{G}_l^+ , то нет необходимости выписывать его обобщение на случай $l \neq 0$.

Вычеты функции $S_l(k)$ в полюсах, соответствующих связанным состояниям, так же как и в (12.84), можно выразить через $\psi_l^{(+)}$. Однако из соотношения (12.145) следует, что функция $\psi_l^{(+)}$ при $k = iK_n$ не всегда является чисто мнимой. Действительно, вместо (12.85) мы получаем

$$ie^{i\pi l} \text{res}_n > 0. \quad (12.155)$$

Условие (12.90), которому должна удовлетворять производная фазового сдвига по k , можно обобщить и на случай $l > 0$, но оно уже не будет иметь такого прозрачного смысла, как раньше. Поэтому мы не будем записывать здесь это условие и просто отошлем читателя к соответствующей литературе [911, 550, 645].

Дисперсионные соотношения и N/D-метод [см. (12.91) — (12.93)] справедливы также при $l > 0$, если вместо \tilde{f} всюду подставлять функцию \tilde{f}_l .

Теорема Левинсона и ограничения на число связанных состояний. Теорема Левинсона при $l \neq 0$ доказывается точно так же, как и при $l = 0$, за исключением рассмотрения нуля $\tilde{f}_l(0) = 0$. В последнем случае вместо асимптотических оценок (12.53) следует воспользоваться соответствующими оценками (12.153). Это дает значение $q = 2$ в соотношении, приведенном перед формулой (12.95). В результате имеем

$$\delta_l(0) = \pi n_l, \quad (12.156)$$

где n_l — число связанных состояний с угловым моментом l , включая связанные состояния с нулевой энергией связи. Это находится в соответствии с тем, что при $l \geq 1$ последние действительно нормируемы, в то время как при $l = 0$ волновые функции связанных состояний с нулевой энергией связи нормировать нельзя.

Полное число связанных состояний с угловым моментом l ограничено неравенством, аналогичным неравенству (12.96). Доказательство проводится так же, как и раньше, за исключением того что теперь нужно учесть следующее: функция Грина при нулевой энергии имеет вид

$$G(r, r') = - \frac{r^{l+1} r'^{-l}}{2l+1},$$

так что

$$\text{Sp } \mathfrak{R} = \frac{\int_0^{\infty} dr r U(r)}{2l+1}$$

и, следовательно,

$$n_l \leq \frac{\int_0^{\infty} dr r U(r)}{2l+1}. \quad (12.157)$$

Функция $U(r)$ определена так же, как и аналогичная функция в (12.96). Из неравенства (12.157) следует, что если входящий в него интеграл сходится, то всегда существует такое максимальное значение l , ниже которого данный потенциал еще может иметь связанные состояния:

$$2l_{\text{макс}} \leq \int_0^{\infty} dr r U(r) - 1. \quad (12.158)$$

Таким образом, *полное* число связанных состояний конечно.

Поведение при низких энергиях. Наиболее важные изменения результатов § 1 для $l=0$, происходящие при переходе к случаю ненулевых угловых моментов, касаются поведения S -матрицы при низких энергиях. Это и не удивительно, если обратиться к результатам гл. 11, § 2, п. 2. Центробежный барьер начинает ощущаться в первую очередь именно при низких энергиях.

Подставим неравенство (12.136а) и неравенство, являющееся аналогом неравенства (12.8) для случая $l > 0$, в представление (11.19) для функции $S_l(k)$ и используем соотношение (12.145). В результате получим, что при фиксированном l

$$|S_l(k) - 1| \leq \frac{C_l |k|^{2l+1} \int_0^{\infty} dr |\mathcal{Y}^{\circ}(r)| \left(\frac{r}{1+|k|r} \right)^{2l+2}}{|f_l(k)|}. \quad (12.159)$$

Если $f_l(0) \neq 0$ и если

$$\int_0^{\infty} dr r^{2l+2} |\mathcal{Y}^{\circ}(r)| < \infty, \quad (12.160)$$

то можно прийти к выводу, что в согласии с (11.30) при $k \rightarrow 0$

$$S_l(k) - 1 = 2ie^{i\delta_l} \sin \delta_l = O(k^{2l+1}). \quad (12.161)$$

Вообще говоря, можно ожидать, что для тех значений l , для которых нарушается неравенство (12.160), также перестает выполняться и соотношение (12.161). Если $f_l(0) = 0$, то из (12.153) и (12.159) следует, что для $l \geq 1$ и при $k \rightarrow 0$

$$S_l(k) - 1 = O(k^{2l-1}). \quad (12.161a)$$

Соотношение (12.161) показывает, что, пока $f_l(0) \neq 0$, при $k \rightarrow 0$ мы имеем

$$K_l |k| = O(k^{2l+1}). \quad (12.161b)$$

Поэтому удобно ввести в рассмотрение приведенную матрицу K

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_l(k) &= (-1)^{l+1} k^{-2l-1} K_l(k) = \\ &= i (-1)^l k^{-2l-1} \frac{S_l(k) - 1}{S_l(k) + 1}, \end{aligned} \quad (12.162)$$

так что

$$S_l(k) = \frac{1 + (-1)^{l+1} i k^{2l+1} \mathfrak{K}_l}{1 - (-1)^{l+1} i k^{2l+1} \mathfrak{K}_l}. \quad (12.162a)$$

Из (12.74) следует, что функция \mathfrak{K}_l является *четной* функцией от k :

$$\mathfrak{K}_l(-k) = \mathfrak{K}_l(k). \quad (12.163)$$

Поэтому она не имеет правого разреза на E -плоскости. Самый простой способ представления унитарной S -матрицы через функцию \mathfrak{K}_l , не имеющую правого разреза, по-видимому, заключается во введении новой функции \mathfrak{M}_l согласно соотношению

$$S_l = 1 - k^{2l+1} \mathfrak{M}_l. \quad (12.164)$$

Тогда имеем

$$\mathfrak{M}_l^{-1} = \frac{1}{2} k^{2l+1} + \frac{1}{2} i (-1)^{l+1} \mathfrak{K}_l^{-1}. \quad (12.165)$$

Движение полюсов функции S_l . Различие в низкоэнергетическом поведении функции f_l , когда $f_l(0) = 0$, в двух случаях $l = 0$ и $l \geq 1$ существенным образом сказывается на движении ее нулей при изменении константы взаимодействия γ . Когда $l = 0$, нуль функции f_l , проходя через начало координат, остается простым. Следовательно, новое связанное состояние, перед тем как стать связанным, является *виртуальным* состоянием. Когда $l \geq 1$, из (12.153) следует, что если нуль f_l оказывается в точке $k = 0$, то он должен быть *двукратным*. Это означает, что при соответствующем значении γ два нуля функции f_l сливаются в один. Слияние двух симметричных комплексных нулей функции f_l , которое в случае $l = 0$ может иметь место в любой точке на отрицательной мнимой полуоси, при $l \geq 1$ происходит точно в начале координат. Если взаимодействие не настолько сильное, чтобы могло образоваться связанное состояние, то на втором листе (при условии, что потенциал позволяет осуществить аналитическое продолжение функции S_l) функция S_l имеет *два* комплексных полюса, расположенных очень близко к началу координат и имеющих очень малую мнимую часть. Эти полюсы ответственны за появление низкоэнергетического резонанса, который рассматривался в гл. 11, § 2, п. 2.

Тот факт, что резонанс оказывается тем острее, чем ниже энергия, при которой он возникает, чисто математически объясняется следующим образом. Два нуля функции \mathcal{F}_l движутся по направлению к началу координат по траекториям, идущим *под прямым углом* к мнимой оси, в соответствии с тем, что нуль \mathcal{F}_l в функции от γ является точкой ветвления второго порядка. Следовательно, траектории нулей $k_l(\gamma)$ *касаются* действительной оси k в точке $k = 0$. Таким образом, при уменьшении γ величина $\text{Im } k_l$ убывает быстрее, чем $\text{Re } k_l$. В справедливости приведенных замечаний, разумеется, можно непосредственно убедиться на примере потенциала в виде прямоугольной ямы, который был рассмотрен в гл. 11, § 2, п. 2.

Движение полюсов функции S_l равным образом можно рассматривать с точки зрения поведения собственных значений α ядра радиального уравнения Липпмана — Швингера. Уравнение

$$\tilde{f}_l(\gamma, k) = 0$$

определяет значения функций $\alpha(k) = 1/\gamma(k)$ для данного значения k . Далее, поскольку при $l \geq 1$ в точке $k = 0$ функция \tilde{f}_l (как функция k) имеет *двукратный* нуль, то в этой точке

$$\frac{d\gamma}{dk} = 0(k).$$

Если считать, что потенциал подчиняется условию (12.160), то поведение мнимой части f_l при $k \rightarrow 0+$ описывается асимптотической формулой

$$\text{Im } f_l(k) = O(k^{2l+1}).$$

Так как

$$\frac{d\alpha}{dk} = \frac{\partial f_l / \partial k}{\partial f_l / \partial \alpha},$$

то, согласно соотношению

$$\frac{\text{Im } \alpha(k)}{\text{Re} [\alpha(k) - \alpha(0)]} = O(k^{2l-1}), \quad (12.166)$$

траектории α покидают действительную ось под нулевым углом. При этом точки $\alpha(E)$ продолжают двигаться в *прямом* направлении, т. е. в том, в котором они двигались при $E < 0$. С этой точки зрения становится понятным, почему «почти связанное» состояние с $l \geq 1$ приводит к появлению острого резонанса в области низких энергий. Собственное значение α при $E = 0$ почти достигает точек $+1$ или -1 . При возрастании E точка α пересекает единичную окружность при низких энергиях в точке, находящейся на малом расстоянии от действительной оси. В случае $l = 0$ это не так, ибо точки α покидают действительную ось под прямым углом.

Распределение полюсов. Исследование распределения нулей функции $f(k)$, приведенное в § 1, п. 4, без изменений переносится на случай функции $f_l(k)$. Следовательно, представления (12.104) — (12.107) и разложения на элементарные дроби (12.110) — (12.112) справедливы и в данном случае.

При $l = 0$ ограничения на область, расположенную в k -плоскости, в которой функция f может иметь нули, для аналитического потенциала также остаются почти без изменений. Пока l — действительное число, величина A в (12.115) такая же, как и раньше, но B в формуле (12.116) теперь имеет вид

$$B = \text{Re } \gamma \mathcal{T}_\varphi - \text{Re } k^2 e^{2i\varphi} + x^{-2} \left(l + \frac{1}{2} \right)^2.$$

В результате вместо параболы (12.119) имеем

$$E_2^2 = 4\xi(\xi - E_1), \quad (12.167)$$

где $E = E_1 + iE_2$ и

$$\xi = \frac{2|\gamma|^2 M^2}{\mu(2l+1)^2}. \quad (12.168)$$

Если потенциал аналитический (с индексом $\sigma = 1/2\pi$) и удовлетворяет на мнимой оси условию (12.118), то полюсы функции S_l , расположенные на втором листе, заключены внутри параболы (12.167). Таким образом, чем больше угловой момент, тем в более узкой области вблизи действительной оси E расположены полюсы. Кроме того, из (12.167) следует, что все резонансные полюсы расположены в области энергий

$$\text{Re } E < \frac{2|\gamma|^2 M^2}{(2l+1)^2 \mu}. \quad (12.169)$$

Чем больше l , тем меньше эта область.

Подобным же образом следует видоизменить неравенство (12.121). А именно, при $E > 0$ все собственные значения α ядра уравнения Липпмана—Швингера должны подчиняться неравенству

$$|\alpha| < \frac{2M}{(2l+1)k}. \quad (12.170)$$

Таким образом, чем больше l , тем меньшее значение E необходимо взять для того, чтобы все $|\alpha|$ были меньше заданного числа. Борновский ряд

должен сходиться, когда $|\alpha| < 1$, т. е. при

$$k^2 > \frac{4M^2}{(2l+1)^2}. \quad (12.171)$$

Чем больше l , тем слабее ограничение на k , накладываемое неравенством (12.171).

Полнота. Доказательство полноты проводится так же, как и в случае $l = 0$, за исключением того, что теперь для полной функции Грина следует воспользоваться выражением (12.146). Если $f_l(0) = 0$, то в отношении окрестности точки $k = 0$ ситуация несколько изменяется и нужно принимать во внимание соотношения (12.153). В результате оказывается, что формула (12.128а) по-прежнему остается в силе, но производная от спектральной функции теперь имеет вид

$$\frac{d\rho}{dE} = \begin{cases} \frac{2\mu k^{2l+1}}{\pi |f_l(k)|^2}, & E > 0, \\ \sum_n \frac{\delta(E - E_n)}{N_n^2}, & E \leq 0. \end{cases} \quad (12.172)$$

Соотношения (12.128б) и (12.130) остаются неизменными. Они, так же как и (12.172), справедливы фактически для всех действительных $l > -1/2$. Для комплексных l , для которых $\text{Re } l > -1/2$, и для комплексных γ нужно ввести единственное изменение, которое состоит в том, что $|f_l(k)|^2$ в (12.172) следует заменить на $f_{l+}(k) f_{l-}(k)$, а величины φ_l , E_n и N_n теперь могут быть комплексными.

§ 3. НЕПРЕРЫВНО ИЗМЕНЯЮЩИЕСЯ УГЛОВЫЕ МОМЕНТЫ

Несмотря на то что в квантовой механике угловые моменты частиц или групп частиц могут равняться только целому или полуцелому числу, кратному \hbar , для более ясного понимания математических свойств амплитуды рассеяния целесообразно снять это ограничение. С математической точки зрения введение квантования орбитального углового момента l связано с использованием разложений по парциальным волнам. При этом существенное значение имеют свойства сферических гармоник, которые в случае нецелочисленных l как функции переменного $\cos \theta$ при $|\cos \theta| = 1$ не обладают достаточно хорошим поведением. Условие целочисленности углового момента l вытекает из требования «регулярности» трехмерной волновой функции по всем направлениям.

При разложении по парциальным волнам мы приходим к радиальному уравнению Шредингера (11.8), в котором l фигурирует в качестве параметра при центробежном члене r^{-2} . Если забыть о том, что это уравнение получилось из полного уравнения Шредингера, то нет никаких оснований считать, что в нем l может принимать только целочисленные значения. Однако поскольку для вычисления амплитуды рассеяния нам необходимы матричные элементы S -матрицы и фазовые сдвиги только с целочисленными значениями l , то может показаться, что в равной степени нет никаких оснований рассматривать другие значения l . Тем не менее нетрудно убедиться, что иногда имеет смысл считать l непрерывной (и даже комплексной) переменной.

Предположение о сферической симметрии рассеивателя является основным предположением в методе парциальных волн. (То обстоятельство, что метод парциальных волн можно эффективно обобщить на случай, когда требование сферической симметрии до некоторой степени ослаблено, как, например, в гл. 15, существенно не меняет дела.) Применение этого метода позволяет свести вычисление амплитуды рассеяния к задаче нахождения амплитуд рассеяния для отдельных парциальных волн. При вычислении амплитуд рассеяния парциальных волн или при исследовании их свойств для фиксированного

значения l обычно не используют то важное обстоятельство, что потенциал в радиальном уравнении Шредингера один и тот же для любого углового момента. Вообще говоря, в методе парциальных волн мы могли бы произвольно брать разные потенциалы в уравнениях для различных физических значений l . То обстоятельство, что в радиальных уравнениях Шредингера фигурирует один и тот же потенциал, должно, конечно, приводить к сильной корреляции между различными элементами S -матрицы или различными фазовыми сдвигами. Эту корреляцию легче всего исследовать, если считать, что l может *непрерывно* изменяться от одного целого значения к другому. Как мы увидим в гл. 13, весьма разумно считать, что величина l может принимать *комплексные значения*.

Важность существования корреляции между различными амплитудами рассеяния парциальных волн можно оценить, обращаясь к дисперсионным соотношениям для полной амплитуды рассеяния. Допустим, что потенциал экспоненциально убывает на бесконечности. В гл. 10, § 3, п. 2 мы видели, что в этом случае амплитуда рассеяния вперед является аналитической функцией от E , регулярной на физическом листе всюду, за исключением простых полюсов, соответствующих связанным состояниям. Следовательно, она должна удовлетворять некоторому дисперсионному соотношению. Но эта же самая амплитуда является суммой амплитуд парциальных волн, каждая из которых может иметь и в общем случае имеет, бесконечное множество сингулярностей на физическом листе. Поэтому должна иметь место очень сильная корреляция между положениями точек сингулярностей различных элементов S -матрицы и значениями вычетов в них, чтобы в амплитуде рассеяния вперед эти сингулярности взаимно скомпенсировались. Более того, поскольку дисперсионное соотношение существует также и в случае, когда передаваемый импульс не равен нулю, то сингулярности должны также компенсировать друг друга и в амплитудах рассеяния по любому направлению (вплоть до некоторого конечного значения передаваемого импульса). Это, очевидно, означает, что сингулярности должны сильно зависеть друг от друга.

В данном параграфе мы исследуем зависимость элементов $S_l(k)$ S -матрицы от углового момента l , который будем считать непрерывным (действительным) параметром. Как было отмечено в § 2, полученные там результаты справедливы также при нецелочисленных значениях l . Необходимо только, чтобы выполнялось неравенство $l > -1/2$. Указанное ограничение возникает вследствие наличия граничного условия (12.132), накладываемого на регулярное решение. Ситуация здесь аналогична той, которая имеет место для функции $f(k, r)$, рассматриваемой как функция переменного k . Мы знаем, что нерегулярное решение в точке $r = 0$ ведет себя как r^{-l} . Когда $l > -1/2$, функция r^{-l} больше функции r^{l+1} . Следовательно, в этом случае граничное условие (12.132) позволяет однозначно выделить регулярное решение. С другой стороны, если $l < -1/2$, то r^{l+1} больше r^{-l} и с помощью граничного условия (12.132) нельзя однозначно выделить регулярное решение, так как нельзя исключить произвольную примесь второго решения.

Рассмотрим сначала поведение элементов S -матрицы при больших значениях l . В этом случае положение осложняется тем, что асимптотическое поведение при больших значениях l является неравномерным по энергии. Такое поведение аналогично неравномерному поведению функций Бесселя относительно их порядка и независимой переменной и является его следствием. Действительно, функция $h(\lambda, z) = \lambda J_\lambda(z)$ стремится к нулю как при $\lambda \rightarrow \infty$ и фиксированном z , так и при $z \rightarrow \infty$ и фиксированном λ . Однако эта функция имеет максимум в окрестности точки $z \approx \lambda$, который не исчезает с ростом z и λ . Поэтому h не стремится к нулю равномерно относительно λ при $z \rightarrow \infty$.

Чтобы оценить S_l при больших значениях l , воспользуемся неравенством, полученным Мартином [579, 580],

$$|J_{l+1/2}(x_<) H_{l+1/2}^{(v)}(x_>)| < 2 [\pi (2l+1)]^{-1/2}, \quad (12.173)$$

где x , x' и l — действительные числа. Из (12.173) вытекает, что при действительных k и l функция Грина (11.2) равномерно ограничена

$$|G_l^+(k; r, r')| \leq \left(\frac{\pi r r'}{2l+1} \right)^{1/2}. \quad (12.174)$$

Подставляя (12.174) в интегральное уравнение (11.7), получаем

$$|\psi_l^{(+)}(k, r)| \leq |u_l(kr)| + \left(\frac{\pi r}{2l+1} \right)^{1/2} \int_0^\infty dr' r'^{1/2} |\mathcal{Y}^+(r')| |\psi_l^{(+)}(k, r')|.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty dr r^{1/2} |\mathcal{Y}^+(r)| |\psi_l^{(+)}(k, r)| \leq \frac{\int_0^\infty dr r^{1/2} |\mathcal{Y}^+(r)| |u_l(kr)|}{1 - (2l+1)^{-1/2} A} \leq \frac{(2k)^{1/2} A}{1 - (2l+1)^{-1/2} A}, \quad (12.175)$$

где

$$A = \pi^{1/2} \int_0^\infty dr r |\mathcal{Y}^+(r)|.$$

При получении приведенного выше неравенства было использовано то, что, как следует из рассмотрения интеграла Бесселя (см., например, [903], т. 2, стр. 197), функция $J_\lambda(x)$ равномерно ограничена числом 2, и поэтому при действительных k и l выполняется неравенство

$$|u_l(kr)| \leq (2\pi kr)^{1/2}. \quad (12.176)$$

Подставляя (12.174) и (12.175) в (11.7), получаем

$$|\psi_l^{(+)}(k, r) - u_l(kr)| \leq \frac{(2\pi kr)^{1/2} A}{(2l+1)^{1/2} - A}. \quad (12.177)$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\left| (2ik)^{-1} \int_0^\infty dr u_l(kr) \mathcal{Y}^+(r) [\psi_l^{(+)}(k, r) - u_l(kr)] \right| \leq \frac{\pi^{1/2} A^2}{(2l+1)^{1/2} - A}. \quad (12.178)$$

Воспользовавшись теперь неравенством (12.178) в представлении (11.19) для $S_l(k)$, получаем

$$\left| S_l(k) - 1 + 2ik^{-1} \int_0^\infty dr \mathcal{Y}^+(r) [u_l(kr)]^2 \right| \leq \frac{\pi^{1/2} A^2}{(2l+1)^{1/2} - A}. \quad (12.179)$$

При $l \rightarrow \infty$ правая часть неравенства (12.179) стремится к нулю равномерно относительно k . Следовательно, для $l \gg 1$ функция S_l мажорируется своим борновским приближением, причем разность между ними при $l \rightarrow \infty$ можно сделать сколь угодно малой независимо от значения k

$$S_l(k) - 1 = -i\pi \int_0^\infty dr r \mathcal{Y}^+(r) |J_{l+1/2}(kr)|^2 + O(l^{-1/2}). \quad (12.180)$$

Если считать, что потенциал является суперпозицией функций Юкавы (12.22а), то S_l в первом борновском приближении можно вычислить [885], и мы получаем

$$S_l - 1 = -ik^{-1} \int_{a_0}^\infty da \rho'(a) Q_l \left(1 + \frac{a^2}{2k^2} \right) + O(l^{-1/2}), \quad (12.181)$$

где $Q_l(x)$ — функция Лежандра второго рода. Воспользовавшись асимптотикой функции $Q_l(x)$ при $l \rightarrow \infty$ ([242], т. I, стр. 138, формула (44)), находим оценку интеграла I , в формуле (12.181),

$$I = O(l^{-1/2}c^{-2l}) \quad \text{при } l \rightarrow \infty, \quad (12.182)$$

где

$$c = \frac{a_0}{2k} + \left(1 + \frac{a_0^2}{4k^2}\right)^{1/2}.$$

Оценка (12.182) справедлива при условии, что интеграл

$$\int_0^\infty dr r \mathcal{Y}^*(r) = \int_{a_0}^\infty da \rho'(a) a^{-1}$$

сходится. Таким образом, при $l \rightarrow \infty$ имеем оценку

$$S_l - 1 = O(l^{-1/2}), \quad (12.182a)$$

равномерную по k при $|k| \geq k_0 > 0$.

Из соотношения (12.81) и аналогичного ему соотношения для $l > 0$, полученного в § 2, следует, что для каждого l функция $S_l(k)$ стремится к единице при $k \rightarrow \pm \infty$. Отсюда с учетом (12.82) можем сделать вывод, что предел

$$\lim_{k \rightarrow \pm \infty} S_l(k) = 1 \quad (12.183)$$

является *равномерным* по l . Действительно, выберем некоторое значение ε и затем найдем такое L , чтобы для всех $l > L$ выполнялось неравенство $|S_l - 1| < \varepsilon$. Число L не зависит от k в силу равномерности оценки (12.182). Далее, найдем такое K , чтобы для всех $k > K$ и всех $l < L$ имело место $|S_l(k) - 1| < \varepsilon$. Это можно сделать, поскольку стремление S_l к единице при больших k должно быть равномерным по l из интервала $0 \leq l \leq L$, если только оно равномерно для каждого l .

Зависимость фазового сдвига от l . Если потребовать, чтобы при $k > 0$ и $l > -1/2$ фаза $2\delta_l(k)$ функции $S_l(k)$ была непрерывной относительно обоих своих аргументов k и l , и затем определить ее таким образом, чтобы она стремилась к нулю при $k \rightarrow \infty$ хотя бы при одном значении l , то вследствие равномерности предельного перехода в (12.183) она должна стремиться к нулю при $k \rightarrow \infty$ для всех $l > -1/2$. Если включить в рассмотрение также значения $k < 0$, то в силу теоремы Левинсона придется, конечно, отказаться от непрерывности в точке $k = 0$. Может показаться, что было бы проще определить δ_l так, чтобы $\delta_l(0) = 0$, независимо от того, имеются или нет связанные состояния. Однако такое определение было бы несовместимо с требованием непрерывности δ_l как функции от l и равномерности предельного перехода (12.183).

Элемент S -матрицы можно рассматривать как функцию *трех* переменных: l , k и константы взаимодействия γ . Из неравенства (12.179), а также из выражения (12.180) видно, что (как и следовало ожидать) $S_l(k)$ стремится к единице *не* равномерно по γ , если γ растет до бесконечности. Но в любом интервале $0 \leq \gamma \leq \gamma_0 < \infty$ этот предельный переход осуществляется равномерно. В частности, фазовый сдвиг, определяемый условием $\delta_0(\infty) = 0$ и условием непрерывности по k и l , непрерывен относительно γ и при $\gamma \rightarrow 0$ стремится к нулю для всех $l > -1/2$ и всех $k > 0$. Конечно, в точке $k = 0$ фазовый сдвиг не непрерывен и претерпевает скачок каждый раз, когда появляется новое связанное состояние.

Рассмотрим теперь фазовый сдвиг $\delta_l(k)$ при действительных k и l . Продифференцируем по l радиальное уравнение Шредингера (11.8) для регулярного решения φ_l , умножим результат на φ_l и вычтем из него уравнение для φ_l ,

умноженное на $\partial\varphi_l/\partial l$. При этом получим

$$\frac{d}{dr} W \left(\varphi_l, \frac{\partial\varphi_l}{\partial l} \right) = (2l + 1) r^{-2} \varphi_l^2,$$

где W — вронскиан. Интегрирование этого соотношения по r от $r=0$ до $r=\infty$ с учетом (12.29) дает

$$-k^{-1} |\mathcal{F}_l|^2 \frac{\partial\delta_l'}{\partial l} = (2l + 1) \int_0^\infty dr r^{-2} [\varphi_l(k, r)]^2 > 0. \quad (12.184)$$

Здесь через δ_l' обозначена фаза функции \mathcal{F}_l , которая, согласно (12.142) и (12.73), выражается через фазовый сдвиг δ_l :

$$\delta_l' = \delta_l - \frac{1}{2} \pi l.$$

Поэтому

$$\frac{\partial\delta_l(k)}{\partial l} < \frac{1}{2} \pi \quad (12.185)$$

и, следовательно,

$$\delta_{l+1}(k) - \delta_l(k) < \frac{1}{2} \pi. \quad (12.186)$$

С классической точки зрения неравенство (12.185) не является неожиданным. Как мы увидим в гл. 18, фазовый сдвиг в квазиклассическом приближении связан с классической функцией угла отклонения (5.4) соотношением

$$\Theta = 2 \frac{\partial\delta_l}{\partial l}.$$

Следовательно, в квазиклассическом приближении неравенство (12.185) просто выражает тот факт [очевидный из (5.4)], что $\Theta < \pi$.

Фазовый сдвиг для фиксированного значения l определен только по модулю π . Поэтому неравенство (12.186) вообще не накладывает ограничений на последовательные значения фаз δ_l при фиксированном k . Из неравенства (12.186) можно получить какую-то информацию только в том случае, если оно используется совместно с требованием непрерывности каждого δ_l как функции от k .

Итак, будем теперь считать, что $\delta_l(\infty) = 0$ при всех l . Тогда из (12.186) при $k \rightarrow 0$ и теоремы Левинсона (12.156) следует, что

$$n_{l+1} < n_l + \frac{1}{2},$$

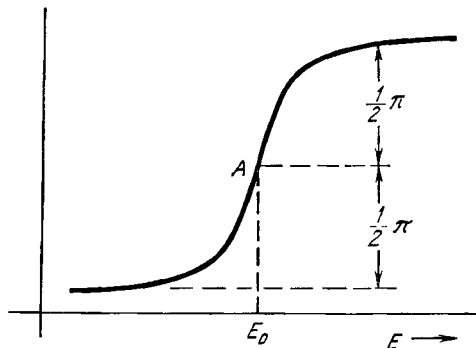
откуда

$$n_{l+1} \leq n_l, \quad (12.187)$$

где n_l — число связанных состояний с угловым моментом l . Тот факт, что число связанных состояний не увеличивается с ростом отталкивающего центробежного потенциала, конечно, физически очевиден и может быть доказан несколькими способами. Однако здесь мы можем получить такого же рода результат, рассматривая неравенство (12.186) при *положительных* энергиях.

Предположим, что для p -волны наблюдается резко выраженный резонанс при некоторой энергии E_0 , а s - и d -волны в окрестности E_0 суть плавно изменяющиеся функции E . Кроме того, допустим, что при $E < E_0$ фазовый сдвиг положителен. Тогда зависимость фазового сдвига p -волны от E выглядит примерно так, как это схематически изображено на фиг. 12.1. Из неравенства (12.186) для $l = 0$ при энергии, расположенной непосредственно выше $E = E_0$, следует, что $\delta_0(E_0) > A > \frac{1}{2}\pi$. Поэтому либо имеется связанное s -состояние,

либо должен существовать s -резонанс при более низких энергиях. Под «резонансом» здесь подразумевается экспериментально наблюдаемый максимум сечения рассеяния, а не полюс (возможно, ненаблюдаемый) функции S в комплексной плоскости.



Ф и г. 12.1. Схематическое изображение фазового сдвига p -волны как функции энергии вблизи острого резонанса.

Движение полюсов S -матрицы. Исследуем теперь движение нулей функции $f_l(k)$ при изменении углового момента l . При каждом фиксированном значении l уравнение

$$f_l(k) = 0 \tag{12.188}$$

имеет корни $k(l)$. Если $\text{Im } k > 0$, то мы имеем дело с движением нулей, соответствующих связанным состояниям при изменении l ; если $\text{Im } k < 0$, то это будут нули, соответствующие виртуальным состояниям, или резонансам. [Мы накладываем достаточно сильные ограничения на потенциал, чтобы функцию $S_l(k)$ можно было аналитически продолжить в комплексную k -плоскость.] Таким образом, уравнение (12.188) определяет вид траекторий нулей функции f_l или траекторий полюсов функции S_l в комплексной k -плоскости или на E -поверхности.

Рассмотрим сначала случай $\text{Im } k > 0$. Выберем какой-нибудь нуль уравнения (12.188). Тогда k^2 для него будет функцией l . Продифференцировав радиальное уравнение Шредингера по l , после стандартных преобразований находим уравнение для вронскиана

$$\frac{d}{dr} W \left(\frac{\partial f_l}{\partial l}, f_l \right) = \left(\frac{dk^2}{dl} - \frac{2l+1}{r^2} \right) f_l^2,$$

которое можно проинтегрировать от нуля до бесконечности. Вследствие (12.188) и предположения о том, что $\text{Im } k > 0$, левая часть последнего уравнения равна нулю. Поэтому имеем

$$\frac{dk^2}{dl} = (2l+1) \frac{\int_0^\infty dr f_l^2 r^{-2}}{\int_0^\infty dr f_l^2} = (2l+1) \langle r^{-2} \rangle. \tag{12.189}$$

[Усреднение в правой части (12.189) следует, конечно, производить при тех же самых значениях энергии и углового момента, которые рассматриваются слева.] Так как f_l действительна на положительной мнимой полуоси, то правая часть равенства (12.189) вещественна и *положительна*. Поэтому, как и следовало ожидать из физических соображений, энергия связанного состояния возрастает, а энергия связи соответственно *уменьшается* с ростом углового момента. Чем больше центробежный барьер, тем меньше энергия связи.

Таким образом, если вначале полюс функции S_l , соответствующий связанному состоянию, расположен на первом листе, то при возрастании l он движется вправо. В конце концов этот полюс должен пересечь порог $E = 0$, так как нам известно, что существует максимальное значение l , выше которого не может быть связанных состояний. Что происходит с нулем функции $f_l(k)$, когда он, пройдя через точку $k = 0$, попадает из верхней в нижнюю полуплоскость, зависит от того, при каком значении l_0 момента l совершается этот переход.

Остановимся немного на зависимости $f_l(k)$ от k . Как видно из формулы (12.144), эта зависимость определяется произведением $k^l \omega_l^{(+)}(kr) \varphi_l(k, r)$. Функция $\omega_l^{(+)}$, отличающаяся от функции Ганкеля только множителем $(kr)^{1/2}$, содержит как k^{-l} , так и k^{l+1} , помноженные на некоторые аналитические функции k^2 , а φ_l — аналитическая функция от k^2 . Следовательно, в окрестности точки $k = 0$ функцию f_l можно представить рядом

$$f_l(k) = a_0 + a_1 k^2 + \dots + b_1 k^{2l+1} + b_2 k^{2l+2} + \dots \quad (12.190)$$

При нецелочисленных значениях l функция $f_l(k)$ обязательно имеет точку ветвления $k=0$. Мы будем считать, что соответствующий разрез идет по отрицательной мнимой полуоси. Далее, если $f_l(0) = 0$, то a_0 должно равняться нулю. При $l < 1/2$ и $l > 1/2$ ведущими членами в разложении (12.190) будут соответственно k^{2l+1} и k^2 . Следовательно, имеем

$$f_l(k) - f_l(0) = \begin{cases} O(k^{2l+1}) & \text{при } l < \frac{1}{2}, \\ O(k^2) & \text{при } l > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (12.190a)$$

что находится в соответствии с асимптотическими формулами (12.53) и (12.153), полученными для целых l .

Предположим, что нуль функции $f_l(k)$ проходит через точку $k=0$ при $l = l_0$. Тогда, если $-1/2 < l_0 < 1/2$, то из (12.190) получаем, что при $l \rightarrow l_0 -$,

$$k \approx a i (l_0 - l)^{1/(1+2l_0)}, \quad (12.191)$$

где $a > 0$. Если $l_0 \neq 0$, то функция (12.191) имеет точку ветвления при $l_0 = l$. Если же l_0 — иррациональное число, то эта функция имеет бесконечное множество ветвей. При $l > l_0$ на первом листе имеем

$$k \approx a (l - l_0)^{1/(1+2l_0)} \left(\pm \sin \frac{2\pi l_0}{1+2l_0} - i \cos \frac{2\pi l_0}{1+2l_0} \right). \quad (12.192)$$

Знак действительной части в (12.192) зависит от направления обхода точки l вокруг точки l_0 . Кроме того, имеется бесконечное множество других нулей на других листах. Их мы не рассматриваем. Когда нуль функции f_l движется вниз вдоль мнимой оси и проходит точку $k = 0$ при $l = l_0$, то в этот момент он сливается с бесконечным множеством других нулей, приходящих с других листов. Это явление приводит к тому, что при $l > l_0$ на первом листе теперь имеется два нуля, расположенные симметрично относительно мнимой оси. Их траектории составляют угол $2\pi l_0 / (1 + 2l_0)$ с отрицательной мнимой полуосью. Когда $l_0 \rightarrow 0$, разрез «сшивается» и нуль движется прямо по мнимой оси. При $l_0 \rightarrow 1/2$ траектории обоих нулей касаются действительной оси и остаются на ней при $l_0 > 1/2$. Если $-1/2 < l_0 < 0$, то нуль, соответствующий связанному состоянию, уходит за разрез и не появляется на первом листе ни при каком $l > l_0$.

Когда нуль функции f_l , соответствующий связанному состоянию, сдвигается в нижнюю полуплоскость, он превращается в пару комплексных нулей. Если l — целое число, то эта пара нулей может находиться близко от действительной оси. В этом случае появляется наблюдаемый резонанс с данным углом

вым моментом. Согласно условию (12.32), коэффициенты a_n в разложении (12.190) должны быть действительными. Поэтому при $l_0 > 1/2$ мнимая часть нуля, расположенного в полуплоскости $\text{Im } k < 0$, обусловлена членом k^{2l+1} . Таким образом, мы приходим к выводу, что

$$\text{Im } E_r = \text{const} \cdot (\text{Re } E_r)^{l_0+1/2}, \quad (12.193)$$

где E_r — полюс функции S_l , соответствующий низкоэнергетическому резонансу. Формула (12.193) согласуется с (11.55). Из изложенного ясно, почему низкоэнергетический резонанс становится более резким с увеличением l_0 : траектории полюсов касаются действительной оси в точке $k = 0$, причем угол между траекторией и действительной осью вблизи точки касания тем меньше, чем больше значение l , при котором полюсы пересекают порог, после чего состояния становятся связанными.

По мере дальнейшего увеличения l нули в нижней полуплоскости движутся по траекториям, о детальном поведении которых известно мало. Однако если потенциал аналитический (с индексом $\sigma = 1/2\pi$) (§ 1, п. 1) и подчиняется условию (12.118), то траектории должны удовлетворять некоторым ограничениям. В этом случае резонансные полюсы функции S_l должны находиться внутри области, ограниченной кривой (12.165), т. е.

$$|\text{Re } k| < \frac{2|\gamma|M}{2l+1}. \quad (12.194)$$

Следовательно, при $l \rightarrow \infty$ каждая траектория должна стремиться к отрицательной мнимой полуоси k . Более того, все траектории стремятся к отрицательной мнимой полуоси равномерно. Конечно, такой предельный переход не равномерен по γ . Чем больше $|\gamma|$, тем большее значение l приходится брать, чтобы расстояния всех резонансных полюсов от мнимой оси k не превосходили наперед заданную величину.

Представление о движении полюсов функции S_l по траекториям на k -плоскости или на E -поверхности при непрерывном изменении l физически весьма привлекательно. Если различные связанные состояния и резонансы расположены на одной траектории, то мы можем считать, что они все обусловлены одной «причиной». Например, мы можем начать с глубоко лежащего связанного s -состояния (если такое имеется) и увеличивать l . Если при этом полюс S -матрицы остается на первом листе, даже когда $l = 1$, то возникает связанное p -состояние. Таким образом, можно сказать, что оба связанных состояния в действительности являются следствиями одной и той же причины, а именно они связаны с движениями одного полюса по E -поверхности.

При возрастании l полюс может вести к появлению других связанных состояний с более высокими значениями l , но в конце концов полюс, конечно, должен пересечь порог. Если только полюс не пересекает порог точно при $l = 0$, то после прохождения порога он превращается в пару симметрично расположенных комплексных полюсов на втором листе E -поверхности. При этом второй член пары приходит с другого листа через «кинематический» левый разрез, который имеется только при нецелых l . Мы следим только за нижним полюсом, который находится «вблизи» верхнего берега правого разреза. Если пороговое значение l больше, чем $1/2$, то траектория этого полюса касается разреза. Если при следующем целом значении l полюс все еще находится близко от действительной оси E , то должен наблюдаться резонанс с соответствующим угловым моментом. Можно сказать, что этот резонанс обусловлен той же самой причиной, что и связанное состояние и т. д. В конечном счете полюс поворачивает влево и исчезает, прижимаясь все больше и больше к отрицательной действительной полуоси E на втором листе. Каждый полюс функции S_l должен двигаться по такого рода траектории. Но, конечно, при $l = 0$ не все полюсы начинают свое движение на первом листе и даже не из области вблизи правого разреза.

Циклические соотношения. Так как функция Ганкеля удовлетворяет следующему циклическому соотношению ([242], т. 2, стр. 91, 92):

$$H_{\lambda}^{(1)}(ze^{2\pi i}) = -H_{\lambda}^{(1)}(z) + 2 \cos \pi \lambda H_{\lambda}^{(1)}(ze^{i\pi}), \quad (12.195)$$

то функция $f_l(k, r)$ удовлетворяет аналогичному соотношению

$$f_l(ke^{2\pi i}, r) = f_l(k, r) - 2i \sin \pi l f_l(ke^{-i\pi}, r); \quad (12.196)$$

его можно получить из интегрального уравнения для $f_l(k, r)$. Как следствие (12.196) функция \mathcal{F}_l удовлетворяет такому же циклическому соотношению, что и $f_l(k, r)$, а функция \mathfrak{f}_l — соотношению

$$\mathfrak{f}_{l+}(ke^{2\pi i}) = e^{2\pi i l} \mathfrak{f}_{l+}(k) + (1 - e^{2\pi i l}) \mathfrak{f}_{l-}(k), \quad (12.197)$$

если только нет мешающих разрезов. Так, например, в случае потенциала, являющегося суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22а), абсолютная величина k в (12.197) должна быть меньше $1/2 a_0$. Соответствующее циклическое соотношение для S_l имеет вид

$$S_l(ke^{i\pi}) = e^{2\pi i l} S_l^{-1}(k) + 1 - e^{2\pi i l}; \quad (12.198)$$

при целом l формула (12.198) переходит в (12.74).

По аналогии с (12.162) определим элемент K -матрицы для произвольного значения l выражением

$$\mathfrak{K}_l(k) = e^{i\pi(l+1/2)} k^{-2l-1} \frac{S_l(k) - 1}{S_l(k) + e^{2\pi i l}}, \quad (12.199)$$

так что

$$S_l(k) = \frac{1 - i \mathfrak{K}_l k^{2l+1} e^{i\pi l}}{1 + i \mathfrak{K}_l k^{2l+1} e^{-i\pi l}}. \quad (12.199a)$$

Из (12.199) и (12.198) следует простое соотношение для \mathfrak{K}_l

$$\mathfrak{K}_l(ke^{i\pi}) = \mathfrak{K}_l(k). \quad (12.200)$$

Таким образом, функция \mathfrak{K}_l как функция E не только не имеет правого разреза, но также не имеет и левого кинематического разреза при произвольных значениях l . Соотношения

$$S_l = 1 - k^{2l+1} e^{2\pi i l} \mathfrak{M}_l \quad (12.201)$$

и

$$\mathfrak{M}_l^{-1} = \frac{1}{2} k^{2l+1} - \frac{1}{2} i e^{i\pi l} \mathfrak{K}_l^{-1} \quad (12.202)$$

являются обобщениями (12.164) и (12.165) на произвольные значения l .

Траектории собственных значений α . Чтобы установить свойства сходимости борновского ряда для S_l при заданной энергии в функции от l , рассмотрим зависимость от l собственных значений α_l ядра (12.149) радиального уравнения Липпмана — Швингера. С изменением l собственные значения α_l движутся по некоторым траекториям в комплексной α -плоскости. При значениях l , для которых все собственные значения α находятся внутри единичного круга, борновский ряд для функции S_l сходится. Если при данной энергии ни одна из траекторий α не выходит за пределы единичного круга, то борновский ряд для любого S_l сходится. Предположим, что потенциал аналитичен (с индексом $\sigma = 1/2\pi$) и подчиняется условию (12.118). Тогда, согласно неравенству (12.170), всегда существует конечный угловой момент

$$L = Mk^{-1} - \frac{1}{2}, \quad (12.203)$$

такой, что при $l > L$ все α_l находятся внутри единичного круга. Если

$$k > 2M, \quad (12.204)$$

то ни одна из траекторий α не может выйти за пределы единичного круга и, следовательно, борновский ряд для полной амплитуды рассеяния сходится; это обусловлено тем, что спектр ядра полного трехмерного уравнения Липпмана — Швингера оказывается суммой спектров ядер радиальных уравнений Липпмана — Швингера.

§ 4. СИНГУЛЯРНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

1. Трудности теории

До сих пор мы ограничивались рассмотрением потенциалов, подчиняющихся условию (12.9); грубо говоря, это означает, что рассматривались потенциалы, менее сингулярные в начале координат, чем r^{-2} . Применительно к радиальному уравнению Шредингера потенциалы, которые при $r = 0$ ведут себя как r^{-2} , являются граничными для двух классов потенциалов с совершенно различными свойствами. Если величина $r^2 \mathcal{U}$ ограничена, то точка $r = 0$ есть *регулярная особая* точка дифференциального уравнения второго порядка (при $l \neq 0$). Если же $r^2 \mathcal{U}$ неограниченно возрастает при $r \rightarrow 0$, то начало координат является *нерегулярной особой* точкой. В последнем случае ситуация совершенно аналогична той, которая, как нам уже известно, имеет место при $r \rightarrow \infty$. Подытожим в связи с этим здесь результат для особой точки $r \rightarrow \infty$.

Если в радиальное уравнение Шредингера вместо r ввести новую переменную $z = r^{-1}$, то получим уравнение того же вида, но только перед k^2 будет стоять множитель z^{-4} . Таким образом, точка $r = \infty$ является нерегулярной особой точкой. Вследствие этого любое решение уравнения имеет существенную особенность на бесконечности. Для нас более важно то, что поведение решений качественно зависит от знака сингулярного члена уравнения с k^2 . Если k^2 отрицательно, то на бесконечности одно решение быстро стремится к нулю (оно регулярное), а другое неограниченно возрастает (оно нерегулярное). Если k^2 положительно, то оба решения осциллируют на бесконечности и невозможно провести различия между регулярным и нерегулярным решениями.

Все сказанное справедливо и в отношении точки $r = 0$, когда потенциал в этой точке более сингулярен, чем r^{-2} . В этом случае решение как функция от r не может вести себя как степенная функция, что непосредственно видно, если подставить в уравнение обычное разложение

$$\psi = \sum_n a_n r^{\sigma + n}.$$

Если попытаться составить уравнение для σ , то мы придем к противоречию. Так как операция двукратного дифференцирования понижает показатель степени на 2, то не может возникнуть члена со степенью, которая была бы равна степени r в члене с потенциалом. Пожалуй, это более отчетливо видно из уравнения, которое получается, если радиальную волновую функцию представить в форме ¹⁾

$$\psi = G^{-1/4} e^{i \int_0^r dr' G^{1/2}}, \quad (12.205)$$

где G удовлетворяет уравнению

$$G + \frac{1}{4} \frac{G''}{G} - \frac{5}{16} \left(\frac{G'}{G} \right)^2 = F \quad (12.206)$$

¹⁾ Соотношение (12.205) следует рассматривать как определение функции G . Оно не накладывает никаких ограничений на вид ψ . Записью ψ в виде (12.205) мы воспользуемся снова, когда будем рассматривать ВКБ-приближение [см. (18.2) и (18.3)].

и где в свою очередь

$$F = k^2 - \mathcal{V}' - l(l+1)r^{-2}.$$

Если G ведет себя как r^σ , то второй и третий члены в левой части (12.206) имеют порядок r^{-2} . Поэтому если потенциал \mathcal{V}' более сингулярен, чем r^{-2} , то его следует компенсировать только членом G в левой части (12.206). Другими словами, функция G должна вести себя как F , или

$$G \underset{r \rightarrow 0}{\approx} -\mathcal{V}'. \quad (12.207)$$

Последнее соотношение остается справедливым и для потенциала \mathcal{V}' , более сингулярного, чем r^{-2} , но не имеющего вида степенной функции.

При $r \rightarrow 0$ интеграл в показателе экспоненты в (12.205) должен таким образом расходиться. Этот интеграл будет либо мнимым, либо действительным, если потенциал \mathcal{V}' соответственно положительный или отрицательный. Следовательно, если потенциал отвечает притяжению, то функция ψ бесконечно быстро осциллирует и за счет предэкспоненциального множителя $G^{-1/4}$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Это должно быть справедливо для *обоих* решений уравнения, поскольку они являются комплексно сопряженными друг к другу. Однако если потенциал вблизи начала координат соответствует отталкиванию, то интеграл в (12.205) стремится к $\pm i\infty$. При этом одно решение будет очень быстро стремиться к нулю, тогда как другое будет быстро возрастать до бесконечности. Сравнительно медленно стремящийся к нулю предэкспоненциальный множитель не может повлиять при этом на характер решений.

Сильно сингулярный потенциал, соответствующий отталкиванию, не вызывает, согласно сказанному, затруднений¹⁾. С другой стороны, для сильно сингулярного потенциала, соответствующего притяжению, возникает трудность с двумя линейно независимыми решениями радиального уравнения Шредингера, каждое из которых одинаково приемлемо физически. Оба решения квадратично интегрируемы в окрестности начала координат, и, следовательно, невозможно из физических соображений выбрать одно из них. Мы можем рассмотреть линейные комбинации указанных решений и получить действительные функции. Тогда неопределенность будет заключена в произвольности выбора *фазы* бесконечно быстро осциллирующих решений, или, что то же самое, в выборе r_0 в выражении

$$\psi = G^{-1/4} \cos \int_{r_0}^r dr' G^{1/2}(r'). \quad (12.205a)$$

Отсутствие критерия регулярности решения в точке $r = 0$ делает невозможным постановку задачи об отыскании спектра. Невозможно определить ни связанные состояния, ни фазовые сдвиги. Конечно, задание фазы, или значения r_0 , эквивалентно заданию определенного граничного условия в точке $r = 0$. В этом случае спектр²⁾, фазовый сдвиг, а также соответствующая система ортогональных волновых функций [138] вполне определены. Однако при этом нет абсолютно никаких *физических* оснований для однозначного выбора фазы: из физических соображений невозможно однозначно определить спектр и фазовый сдвиг.

Совершенно другая ситуация возникает, если обратиться к трехмерному уравнению Шредингера. Она аналогична той, которая имеет место для второго решения уравнения для s -волны с достаточно хорошим потенциалом и которая была рассмотрена в начале п. 1 § 1. Напомним существо вопроса. Несмотря

¹⁾ Если не обращать внимания на то, что отсутствует степенная зависимость волновой функции от r . Последнее обстоятельство в действительности не существенно.

²⁾ Спектр будет неограниченным снизу. Это важное обстоятельство, но с точки зрения теории рассеяния оно не существенно.

на то что неравная нулю постоянная удовлетворяет радиальному уравнению

$$\psi'' = 0,$$

соответствующая трехмерная волновая функция cr^{-1} не является решением однородного трехмерного уравнения, т. е.

$$\nabla^2 cr^{-1} \neq 0.$$

Эта трехмерная волновая функция подчиняется неоднородному уравнению

$$\nabla^2 cr^{-1} = -4\pi c \delta(\mathbf{r}).$$

Аналогичный результат имеет место для любой функции от r^{-1} :

$$\nabla^2 f(r^{-1}) = r^{-4} f''(r^{-1}) - 4\pi \delta(\mathbf{r}) f'(r^{-1}). \quad (12.208)$$

Второго члена в правой части (12.208) не должно быть в радиальном уравнении, имеющем точку $r = 0$ граничной точкой, при стремлении к которой требуется непрерывность решения. Другими словами, если произведение r^{-1} на решение радиального уравнения Шредингера есть функция от r^{-1} , производная от которой не равна нулю при $r = 0$ ¹⁾, то эта функция не удовлетворяет соответствующему трехмерному уравнению Шредингера. Одного этого, как представляется, уже достаточно для того, чтобы все нерегулярные решения радиальных уравнений считать неприемлемыми, не вдаваясь в вопрос об их квадратичной интегрируемости. Поэтому в случае потенциалов, соответствующих притяжению, с сингулярностью вида r^{-4} или еще более сильной при $r \rightarrow 0$ вообще не существует решений радиальных уравнений²⁾, удовлетворяющих полному трехмерному уравнению Шредингера. Последнее для таких потенциалов просто не имеет решения³⁾.

Следует отметить, что трудности с сингулярным потенциалом, соответствующим притяжению, не имеют классической аналогии. Если потенциал притяжения более сингулярен в нуле, чем r^{-2} , то, как было показано в гл. 5, § 5, классическая частица проходит начало координат с бесконечно большой скоростью. Это, однако, все же не мешает частице изменять в точке $r = 0$ направление своего движения, т. е. она может отклоняться в начале координат на конечный угол. Только при одном частном значении углового момента (или прицельного параметра) может происходить закручивание частицы. В результате сечение может стать равным бесконечности, а если это происходит, то такое явление сохранится и после обрезания потенциала в окрестности нуля. Ввиду отсутствия каких-либо новых физических идей можно думать, что квантовая механика здесь терпит неудачу. Кажется, что она не может справиться с отчетливо поставленной задачей, которую классическая механика разрешает. Тот факт, что результаты, полученные в рамках нерелятивистской квантовой теории с локальным взаимодействием, не имеют физического смысла во внутренней области сингулярного потенциала притяжения, в известном отношении спасает положение. Это означает, что практически такой случай встретиться не может. Однако в принципе общее положение остается неудовлетворительным⁴⁾.

¹⁾ То есть если $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 d(r^{-1}\psi)/dr \neq 0$, где ψ — радиальная волновая функция.

²⁾ При этом подразумевается, конечно, что решение радиального уравнения умножится на соответствующую функцию угловых переменных.

³⁾ Строго говоря, возможно, мы здесь делаем поспешное заключение. Радиальное уравнение можно было бы соответствующим образом видоизменить, включив члены с δ -функцией, так чтобы решение этого видоизмененного уравнения удовлетворяло правильному трехмерному уравнению. Однако, как представляется, даже измененное таким образом радиальное уравнение не имеет решения, кроме случая хорошего потенциала, когда регулярное решение обращает в нуль член с δ -функцией. Этот вопрос требует дальнейшего математического исследования. Заметим также, что для потенциалов с сингулярностью между r^{-2} и r^{-4} вопрос об эффективности члена с δ -функцией зависит от произвола в выборе пробных функций.

⁴⁾ Как в классической, так и в квантовой механике случай потенциалов с сингулярностями между r^{-2} до r^{-4} связан с неоднозначностями.

Предельный случай потенциала, который в окрестности начала координат ведет себя в точности как r^{-2} , требует специального рассмотрения. Такой потенциал можно объединить с центробежным потенциалом. Допустим, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \mathcal{V}'(r) = a. \quad (12.209)$$

Запишем сумму потенциалов ar^{-2} и $l(l+1)r^{-2}$ в виде $(b^2 - 1/4)r^{-2}$, где

$$b^2 = a + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Как известно, существует два линейно независимых решения, которые в начале координат ведут себя как $r^{1/2+b}$. Если b^2 больше нуля, то одно из этих решений регулярное, а второе нерегулярное¹⁾. Очевидно, b^2 положительно, если $a > 0$ т. е. когда потенциал \mathcal{V}' в окрестности начала координат соответствует отталкиванию. Кроме того, $b^2 > 0$, если $a < 0$, но $-a < (l + 1/2)^2$, т. е. когда потенциал \mathcal{V}' соответствует довольно слабому притяжению. Однако если притяжение становится достаточно сильным в том смысле, что начинает выполняться неравенство $-a > (l + 1/2)^2$, то b будет мнимым и оба решения будут вести себя как $r^{1/2} \exp(\pm i |b| \ln r)$. Оба эти решения осциллируют, и не существует никакого физического критерия, позволяющего предпочесть одно решение другому. Более того, оба решения радиального уравнения ведут к решениям трехмерного уравнения Шредингера.

Трудности, встречающиеся в только что рассмотренном специальном примере, имеют место и в классическом случае. В гл. 5, § 6²⁾ было показано, что если потенциал обладает свойством (12.209) и $-a > J^2$, то классическая частица будет по спиральной траектории двигаться к началу координат и ее угол рассеяния будет равен бесконечности. При этом сечение рассеяния можно определить только для «обедненного» пучка частиц, в котором отсутствуют частицы с угловыми моментами $J < \sqrt{-a}$. При формальной замене J на $l + 1/2$ мы приходим к квантовомеханическому случаю.

2. Сингулярные потенциалы отталкивания

Если потенциал в окрестности начала координат более сингулярен, чем r^{-2} , но положителен, то, как мы уже видели, регулярное решение радиального уравнения Шредингера существует и оно удовлетворяет трехмерному уравнению. Тем не менее обычный метод построения этого решения становится несостоятельным; кроме того решение теряет многие свои прежние свойства. Например, интегральное уравнение (12.4), хотя и сохраняется в рассматриваемом случае, но оказывается теперь бесполезным. Его нельзя решить методом итераций, даже если оно фредгольмовского типа. Свойства решения, функции Йоста и элементов S-матрицы (как функций от k) совершенно меняются. Кроме того, граничные условия начинают зависеть от потенциала. В предыдущем пункте было показано, что два решения радиального уравнения в окрестности начала координат имеют вид

$$\psi \approx \mathcal{V}^{-1/4} \exp\left(\pm \int^r dr' \mathcal{V}'^{1/2}\right). \quad (12.210)$$

Потому относительно простой метод их рассмотрения состоит в следующем.

Сначала мы должны решить парциальное уравнение для l s-волны при нулевой энергии:

$$\psi_0'' = \mathcal{V}' \psi_0. \quad (12.211)$$

¹⁾ Если $b \leq 1/2$, то второе решение нерегулярно в том смысле, что оно доминирует над первым решением. В этом случае нерегулярное решение квадратично интегрируемо и удовлетворяет трехмерному уравнению.

²⁾ При сравнении следует помнить, что $\mathcal{V}' = 2mV$.

При этом фактически его необходимо решить только в области $r \leq r_0$, где r_0 — некоторое положительное число. Допустим, что оба решения уравнения (12.211) нами найдены; построим с их помощью функцию Грина

$$G(r, r') = \begin{cases} \psi_{01}(r) \psi_{02}(r') - \psi_{01}(r') \psi_{02}(r), & r' < r, \\ 0, & r' > r, \end{cases} \quad (12.212)$$

где ψ_{01} и ψ_{02} — регулярное и нерегулярное решения уравнения (12.211). Эти решения определим таким образом, чтобы их вронскиан равнялся единице:

$$\psi'_{01}(r) \psi_{02}(r) - \psi_{01}(r) \psi'_{02}(r) = 1. \quad (12.213)$$

Регулярное решение радиального уравнения, соответствующего угловому моменту l , при произвольной энергии в области $r < r_0$ можно определить как решение интегрального уравнения

$$\varphi_l(k, r) = \psi_{01}(r) + \int_0^r dr' G(r, r') [l(l+1)r'^{-2} - k^2] \varphi_l(k, r'). \quad (12.214)$$

В отличие от несингулярного случая это можно сделать, так как, согласно (12.210), произведение регулярного и нерегулярного решений в окрестности точки $r=0$ ведет себя как

$$\psi_{01} \psi_{02} \approx \text{const} \cdot |\mathcal{V}'|^{-1/2}.$$

Следовательно, интеграл в (12.214) сходится, если только потенциал \mathcal{V}' в окрестности нуля¹⁾ более сингулярен, чем $r^{-2-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$. Решение уравнения (12.214) можно получить методом итераций и использовать его в дальнейшем так же, как функцию $\varphi_l(k, r)$ в несингулярном случае. Ясно, что решение уравнения (12.214) — целая функция k^2 и $(l + 1/2)^2$. Решение ψ_{01} определено с точностью до постоянного множителя. Однако поскольку этот множитель не зависит от l и k , то это не существенно. В выражение для S -матрицы этот множитель не входит.

Нерегулярные решения радиального уравнения Шредингера $f_{l\pm}(k, r)$ можно определить точно так же, как и в несингулярном случае, ибо для интегрального уравнения (12.138) не существенно поведение \mathcal{V}' при малых r . Фактически мы должны решить уравнение (12.138) только в области $r \geq r_0$. После того, как решения $\varphi_l(k, r)$ и $f_{l\pm}(k, r)$ найдены, функции Иоста $\mathcal{F}_{l\pm}(k)$ и $\tilde{f}_{l\pm}(k)$ определяются, как и раньше, с помощью вронскиана (12.28) от φ_l и $f_{l\pm}$. Вронскиан можно взять в точке r_0 . Конечно, интегральные представления (12.143) и (12.144) теперь не имеют места, так как интегральные уравнения для φ_l и f_l существенно отличаются друг от друга; S -матрица выражается через функции Иоста так же, как прежде. Из изложенного ясно, что все предыдущие утверждения, касающиеся аналитичности функций Иоста и S -матрицы в любой конечной области k -плоскости (или E -поверхности), справедливы и в сингулярном случае. Изменяется только поведение функции Иоста при больших k , и становится невозможно разложить ее в ряд по степеням константы взаимодействия. Изменение поведения функции Иоста при больших k имеет место вследствие того, что теперь $\varphi_l(k, r)$ не стремится к своему невозмущенному значению при $k \rightarrow \infty$. Уравнение (12.214) показывает, что поведение $\varphi_l(k, r)$ при высоких энергиях зависит от вида потенциала и его трудно изучать. Фазовый сдвиг с ростом энергии не стремится к величине, кратной $\pi/2$.

¹⁾ Результат можно усилить, однако этого не стоит делать.

²⁾ Как и в случае отталкивающего потенциала типа твердой сферы, который будет рассмотрен в гл. 14, § 2, фазовый сдвиг, вообще говоря, стремится к $-\infty$. Следовательно, сингулярный потенциал отталкивания должен иметь бесконечное число пиков в парциальных сечениях. Однако, поскольку фазовый сдвиг уменьшается с ростом энергии, ни один из этих пиков не будет резонансом.

Функцию Иоста нельзя разложить по константе взаимодействия γ вследствие того, что ψ_{01} невозможно разложить в ряд по степеням γ , не нарушив при этом регулярности волновой функции в нуле, которая существенна для сходимости интеграла в уравнении (12.214). Если все же попытаться получить разложение ψ_{01} по степеням γ , то отдельные члены ряда будут обращаться в бесконечность.

Как мы увидим в гл. 18, § 2, п. 1, волновая функция в предельном случае большой константы взаимодействия описывается ВКБ-приближением. Волновая функция в ВКБ-приближении правильно ведет себя в окрестности точки $r = 0$ даже в случае сингулярного потенциала. В этом легко убедиться, сравнивая выражения (18.2) и (12.210). Следовательно, выражение для фазового сдвига в ВКБ-приближении остается справедливым и в предельном случае большой константы взаимодействия.

Другое представление. Подход (12.65) — (12.70) оказывается особенно полезным, когда потенциал сингулярный, так как формула (12.69) выражает фазовый сдвиг непосредственно через $|f(k, r)|$. Функцию $f(k, r)$ даже в сингулярном случае можно получить, решая уравнение (12.16) (итерациями) или (12.70). Поступая немного по-другому, определим

$$S(k, r) \equiv e^{2ik\delta(k, r)},$$

так что, согласно (12.65) и (12.68),

$$S' = -2ikf^{-2}.$$

Решением последнего уравнения является функция

$$S(k, r) = e^{-2ikr} + 2ik \int_r^{\infty} dr' [f(k, r')^{-2} - e^{-2ikr'}].$$

Таким образом, элемент S -матрицы, соответствующий s -волне, имеет вид

$$S(k) = 1 + 2ik \int_0^{\infty} dr [f(k, r)^{-2} - e^{-2ikr}]. \quad (12.215)$$

3. Пример

Рассмотрим семейство сильно сингулярных потенциалов

$$\mathcal{V}^*(r) = a^2 (b^2 + c^2 e^{\alpha r}) r^{-4}, \quad \alpha > 0.$$

При замене переменной $r = 1/z$ уравнение (12.211) преобразуется к виду

$$\frac{d^2}{dz^2} (z\psi_0) = a^2 (e^{\alpha z} c^2 + b^2) (z\psi_0).$$

Полагая далее

$$x = \frac{2iac}{\alpha} e^{\alpha z/2} = \frac{2iac}{\alpha} e^{\alpha \cdot 2r}, \quad z\psi = h,$$

получаем уравнение Бесселя

$$\frac{d^2}{dx^2} h + x^{-1} \frac{d}{dx} h + \left[1 - \left(\frac{2ab}{\alpha} \right)^2 x^{-2} \right] h = 0.$$

Таким образом, решения $\psi_{01,2}$ имеют вид

$$\psi_{01,2} = r H_{\nu}^{(1),(2)}(x), \quad \nu = \frac{2ab}{\alpha}.$$

Величина x стремится к $+i\infty$, когда $r \rightarrow 0$; функция Ганкеля первого рода регулярна в точке $r = 0$, а функция Ганкеля второго рода нерегулярна.

Асимптотику регулярного решения при $r \rightarrow \infty$ найдем с помощью разложения

$$H_v^{(1)} \left[\frac{2iac}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{2r} + \dots \right) \right] = H_v^{(1)} \left(\frac{2iac}{\alpha} \right) + \frac{ia}{r} H_v^{(1)'} \left(\frac{2iac}{\alpha} \right) + \dots$$

Следовательно,

$$\psi_{01} \approx r H_v^{(1)} \left(\frac{2iac}{\alpha} \right) + ia H_v^{(1)'} \left(\frac{2iac}{\alpha} \right) + \dots,$$

т. е. длина рассеяния s -волны определяется выражением [см. (11.40)]

$$-\frac{ia H_v^{(1)'}(2iac/\alpha)}{H_v^{(1)}(2iac/\alpha)}.$$

Если a мнимо, то мы имеем дело с потенциалом *притяжения*. Тогда переменная x действительна (ее можно считать положительной) и решения ψ_0 в окрестности точки $r = 0$, как и следует ожидать, быстро осциллируют. Оба решения ψ_0 стремятся к нулю одинаково быстро и, следовательно, регулярны с точки зрения радиального уравнения. Соответствующие трехмерные волновые функции $H_v^{(1),(2)}(x)$, как видно из (12.208), не удовлетворяют уравнению Шредингера.

Если $c = 0$, то потенциал пропорционален r^{-4} . Радиальное уравнение Шредингера при произвольных l и k можно свести к уравнению Матье и его решение записать через функции Матье [876, 789]. Как классическое, так и квантовомеханическое сечения оказываются обратно пропорциональными скорости частицы.

КОММЕНТАРИИ

К § 1, п. 1. Проблема граничных условий для радиальных волновых функций с $l = 0$ рассматривалась в работе [22]. Рассуждения, приведенные в этом пункте, по существу совпадают с рассуждениями Дирака [220].

Определение регулярной и нерегулярной функций граничными условиями (12.2) и (12.15) и исследование их свойств посредством решения соответствующих интегральных уравнений методом итераций принадлежит Иосту [448] и Левинсону [529].

Доказательство возможности расширения области аналитичности функции $f(k, r)$, приведенное после формулы (12.21), принадлежит Редже [707]; другое доказательство с использованием аналитического потенциала дано в работах Редже [708, 709], а также Боттино и др. [95].

К § 1, п. 2. Впервые функция $f(k)$ была введена Иостом [448]. Обобщения функции Иоста рассмотрены в работах [621, 686—688, 201]. Относительно преобразования Гильберта см. книгу Титчмарша [839].

Связь определителя Фредгольма с функцией Иоста недавно рассматривалась Маннингом [571].

Дисперсионное соотношение для f вида (12.55) было получено в работе [330].

Формула (12.64) в несколько более явной форме связывает f с фазовым сдвигом δ , чем аналогичное выражение, полученное Иостом и Коном [450]. Более общее доказательство дано Онесом [668].

Метод, изложенный ниже формулы (12.65), иногда называют *фазово-амплитудным методом*. Впервые он был использован Милном [599]; см. также работы Уилсона [918], Янга [932] и Уилера [901].

С другим методом, использующим нелинейные уравнения, можно ознакомиться по работам [667, 290, 123, 196, 531, 134, 141]. Обобщения на случай частиц со спином и на случай связанных каналов, когда преимущества численных методов могут быть значительными, даны в работах [511, 934, 205, 186, 185, 948].

Функция Иоста для потенциала гармонического осциллятора рассматривалась в работе [13].

К § 1, п. 3. Формула (12.85) для вычета элемента S -матрицы в полюсе, соответствующем связанному состоянию, получена Крамерсом [502], как это было отмечено в работе Иоста [448], и независимо от него Меллером [610] и Гейзенбергом [374]. Более подробный вывод соотношения (12.84) имеется в работе Меллера [610]; см. также работы Тер-Хаара [829] и Иоста [447].

Неравенство (12.90) впервые получено Вигнером [911]; см. также [550, 575, 139]. N/D -метод разработан Чью и Мандельштамом [154]. Дисперсионное соотношение вида (12.93) было получено, например, в работе [171].

Теорема Левинсона впервые была доказана в работе [529]. Приведенное доказательство этой теоремы аналогично доказательству Левинсона. Более общее доказательство теоремы Левинсона имеется в работе [434]; см. также [694, 576, 416, 476, 498, 868, 183, 881, 327, 157, 146, 922].

К § 1, п. 4. Неравенство (12.96), накладывающее ограничение на число связанных состояний с нулевым угловым моментом и его обобщение (12.157) на остальные значения l , получено Баргманом [37]. Приведенное доказательство принадлежит Швингеру [769]. Обобщения см. в работах [328, 125, 126, 129]; см. также [1008 и 958].

Детальное рассмотрение траекторий собственных значений α как функций от k при фиксированном значении l проведено в работе [634].

Представление (12.97) и основанные на нем рассуждения взяты из работы [158].

То замечательное обстоятельство, что за связанное состояние ответствен не резонансный, а «другой» полюс, было отмечено рядом исследователей, список работ которых приведен в комментарии к гл. 17, § 1.

Тот факт, что каждый элемент S -матрицы в случае потенциала конечного радиуса действия имеет бесконечно много полюсов, был установлен Эмбле [406] и независимо Роллником [715]. Более общее доказательство, приведенное здесь, а также последующие рассуждения относительно распределения полюсов, когда потенциал имеет конечный радиус действия, принадлежат Редже [706]. Распространение результатов на случай потенциалов, убывающих быстрее экспоненты, но не обращающихся в нуль тождественно, дано в работе [746].

Факторизация (12.104) впервые была установлена Редже [706].

Теория целых аналитических функций изложена в книге [84].

Представление $S(k)$ в виде произведения (12.107) впервые приведено без доказательства в [396]. Формулу (12.107) при условиях, сформулированных в настоящем пункте, первым доказал Редже [706].

Разложение Миттаг-Леффлера функции $S(k)$ также впервые было дано без доказательства в [396]. Первым его доказал Эмбле [406]. Приведенное доказательство является упрощенным и менее строгим вариантом доказательства Эмбле.

Рассуждения, в результате которых мы приходим к ограничениям (12.119) и (12.120) на положения полюсов функции $S(k)$, в случае аналитических потенциалов принадлежат Редже [709] и Боттино и Лонгони [95].

К § 1, п. 5. Приведенное доказательство полноты аналогично доказательству Титчмарша [840]; частично мы следуем работе Июста и Кона [450].

К § 2. Неравенства (12.136) получены Левинсоном [529]. Неравенство (12.136а) выводится аналогичным образом, и оно впервые было доказано Ньютоном [657].

Замечания, касающиеся неравенства (12.155), см. в комментарии к § 1, п. 3 (первый абзац). Относительно (12.156) и (12.157) см. комментарии к § 1, п. 3 и 4.

Первое строгое доказательство формулы (12.161) при условии (12.160) было дано в [137]. Представление (12.165) получено Ньютоном [645], а также Мэттьюзом и Саламом [588].

Ссылки, данные в отношении (12.119) и (12.120), в равной мере относятся и к (12.167).

Формулы для разностей между фазовыми сдвигами с различными угловыми моментами можно найти в работах [834, 133, 287].

К § 3. Идея рассматривать угловой момент как непрерывно изменяющийся и даже комплексный параметр принадлежит Редже [708].

Общее и весьма полезное описание свойств многих трансцендентных функций содержится в книге Бейтмена и Эрдейн [242].

Неравенства (12.185) и (12.186) для фазовых сдвигов как функций от l получены Редже [708].

К § 4. Первое общее рассмотрение сингулярных потенциалов в квантовой механике содержится в работе [138]; см. также статью [876], где решено радиальное уравнение с потенциалом r^{-4} , причем детально рассмотрен как классический, так и квантовомеханический случай. Решение уравнения Шредингера с отталкивательным потенциалом r^{-4} позже, но независимо, было получено в [789].

В последнее время проблема рассеяния на сингулярных потенциалах привлекает к себе большое внимание главным образом вследствие ее близости с некоторыми аспектами взаимодействия частиц в релятивистской теории поля. Этот вопрос рассматривался в работах целого ряда авторов: [753, 833, 697, 535—537, 46, 55, 57, 174, 175, 945, 946, 178—180, 483, 836, 674, 675, 924, 331, 124, 127, 128, 591, 147, 17, 18, 130, 131, 206, 307, 225, 11, 425, 176, 835, 432].

Формула (12.215) выведена Калоджеро [128]. Он же обратил внимание на ее полезность в сингулярном случае.

К гл. 12. Можно рекомендовать следующие обзорные работы, касающиеся материала данной главы: [646, 710, 580, 662].

Другой подход развит в работах [378, 123, 196].

Амплитуда парциальной волны как функция константы взаимодействия γ в комплексной плоскости γ рассматривалась в [499, 543].

Комплексные потенциалы рассматривались Мартином [576].

ЗАДАЧИ

1. В предположении, что при $r < r_0$ потенциал имеет вид $\mathcal{V}^\circ = \gamma r^m$, где $m \geq -2$, разложить $f_l(k, r)$ в ряд в окрестности точки $r = 0$ и найти рекуррентные соотношения для коэффициентов этого ряда. Найти наиболее близкое по форме аналогичное разложение для нерегулярного решения.

2. Пусть при $r > r_0$ потенциал имеет вид $\mathcal{V}^\circ = \gamma r^{-m}$, где $m > 2$. Разложить $f_l(k, r) e^{-i l r}$ в ряд в окрестности точки $r = \infty$ и найти рекуррентные соотношения для коэффициентов этого ряда.

3. Пусть потенциал комплексный: $\mathcal{V}^\circ = U(r) + iW(r)$, где U и W — функции, удовлетворяющие условиям (12.9) и (12.21). Чем в этом случае отличаются свойства \mathcal{F} , f , функции Йоста и S -матрицы от их свойств при действительном потенциале? Перечислить как можно больше изменившихся и оставшихся неизменными свойств этих функций.

4. Пусть ядро K уравнения Липпмана — Швингера имеет конечное число не равных нулю собственных значений α_i . Каков характер взаимодействия?

5. Пусть потенциал такой, что интеграл

$$\int_0^\infty dr e^{\alpha r} |V(r)|$$

расходится при $\alpha > a$ и сходится при $\alpha < a$, где $a > 0$. Что можно сказать относительно сингулярностей S -матрицы (например, при $l = 0$) в комплексной плоскости? Рассмотреть два случая: $|\operatorname{Im} k| \leq 1/2a$ и $|\operatorname{Im} k| \geq 1/2a$, и установить различие между видами сингулярностей, которые *не могут*, *могут* и *должны* иметь место. Привести примеры.

6. Обобщить вывод (12.88)—(12.90) на случай p -волны.

7. Регулярное решение $\mathcal{F}(k, r)$ радиального уравнения, соответствующего s -волне удовлетворяет уравнению Вольтерра

$$\mathcal{F}(k, r) = r + \int_0^r dr' (r-r') [\mathcal{V}^\circ(r') - k^2] \mathcal{F}(k, r').$$

Исследовать с помощью этого уравнения свойства \mathcal{F} . Указать преимущества и недостатки данного уравнения по сравнению с уравнением (12.4). Написать аналогичное уравнение при $l \neq 0$.

8. Нерегулярное решение $f_l(k, r)$ удовлетворяет уравнению

$$f_l(k, r) = e^{i l r} - k^{-1} \int_r^\infty dr' \sin k(r-r') [\mathcal{V}^\circ(r') + l(l+1)r'^{-2}] f_l(k, r').$$

Указать преимущества и недостатки данного уравнения по сравнению с уравнением (12.138).

9. Найти решение, функцию Йоста и S -матрицу для уравнения Шредингера, соответствующего s -волне в случае нелокального взаимодействия,

$$(r | H' | r') = \delta_\Omega(\hat{r}, \hat{r}') \gamma A(r) A^*(r'),$$

и рассмотреть их свойства.

10. Сделать то же самое, что и в задаче 9, в случае нелокального взаимодействия вида

$$(r | H' | r') = \delta_\Omega(\hat{r}, \hat{r}') \sum_{i=1}^N \gamma_i A_i(r) A_i^*(r').$$

11. Показать, что уравнение (12.119) определяет огибающую семейства кривых, задаваемых предшествующим ему неравенством.

12. Пусть две (бесспиновые) частицы с массой 10^{-27} г притягиваются друг к другу с силой, такой, что

$$\int_0^{\infty} dr r V(r) = 6 \cdot 10^{-21} \text{ Мэв} \cdot \text{см}^2.$$

Какое наибольшее число связанных состояний может иметь данная двухчастичная система? Сколько связанных состояний может иметь система, если частицы тождественны?

13. Частицы с массой 170 Мэв разгоняются до скорости 10^9 см/сек и рассеиваются на первоначально покоящихся частицах с массой 285 Мэв . Взаимодействие описывается потенциалом Юкавы $V = \gamma r^{-1} e^{-r/r_0}$, где $\gamma = 10^{-13} \text{ Мэв} \cdot \text{см}$. Можно ли ожидать, что первое борновское приближение для амплитуды рассеяния будет хорошим? Сходится ли борновский ряд? Что будет, если скорость частиц в пучке 10^8 см/сек ?

14. Вычислить длину рассеяния s-волны при потенциале

$$V = a^2 (b^2 + c^2 e^{-\alpha/r}) r^{-4}, \quad \alpha > 0.$$

15. Взаимодействие двух частиц с массами $2 \cdot 10^{-24}$ г и $3 \cdot 10^{-24}$ г описывается потенциалом

$$V = -\gamma r^{-4} e^{-\alpha/r},$$

где $\alpha = 10^{-10} \text{ см}$, $\gamma = 5 \cdot 10^{-44} \text{ Мэв} \cdot \text{см}^4$. Сколько связанных s-состояний может иметь система?

16. Решить при нулевой энергии и любых угловых моментах уравнение Шредингера с сингулярным потенциалом

$$V(r) = \gamma r^{-s}, \quad s > 2.$$

Воспользоваться методом задачи 18 из гл. 14. Проанализировать результат.

Метод Ватсона — Редже (комплексный угловой момент)

§ 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВАТСОНА

Представление мультипольного разложения электромагнитной амплитуды в виде контурного интеграла по методу Ватсона уже разбиралось в гл. 3, § 8. Здесь мы рассмотрим аналогичное представление в квантовомеханическом случае.

Отправным пунктом нам послужит разложение по парциальным волнам (11.10а), которое можно также записать в виде

$$A = -ik^{-1} \sum_{l=0} \left(l + \frac{1}{2} \right) (-1)^l (S_l - 1) P_l(-z),$$

где $z = \cos \theta$. Заменяем ряд интегралом в λ -плоскости ($\lambda = l + 1/2$) по некоторому контуру C , подобному показанному на фиг. 3.7, с единственным отличием, что теперь он пересекает действительную ось в точке между $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Тогда при условии, что бесконечному множеству чисел S_l ($l = 0, 1, \dots$) можно сопоставить определенную аналитическую функцию переменной $\lambda = l + 1/2$, регулярную в окрестности действительной оси, получаем выражение для A , аналогичное (3.99),

$$A = \frac{1}{2k} \oint_C d\lambda \lambda [S(\lambda) - 1] P_{\lambda-1/2}(-z) \sec \pi \lambda. \quad (13.1)$$

Полиномы Лежандра в (13.1) продолжены на комплексные значения λ обычным образом с помощью (3.100)

Допустим, что функции в подынтегральном выражении в (13.1) ведут себя достаточно хорошо при $|\lambda| \rightarrow \infty$. В таком случае можно дополнить контур C в первом и четвертом квадрантах двумя дугами большой окружности и деформировать контур так, чтобы он располагался вдоль мнимой оси. Кроме интеграла, мы получим сумму членов, возникающих от вычетов в полюсах подынтегрального выражения в первом и четвертом квадрантах. Если у подынтегрального выражения есть точки ветвления, то дополнительно возникнет сумма интегралов от скачков на соответствующих разрезах на комплексной плоскости.

В случае упругого рассеяния двух частиц, взаимодействующих посредством «разумного» потенциала, как мы увидим ниже, аналитическое продолжение чисел S_l в рассматриваемой области имеет лишь полюсы, например, при $l = \alpha_n$ с вычетами в них, равными β_n . Таким образом, выражение для амплитуды A можно преобразовать к виду

$$A(k, z) = \frac{1}{2k} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda' \lambda' \frac{[S(i\lambda', k) - 1] P_{i\lambda'-1/2}(-z)}{\operatorname{ch} \pi \lambda'} + \\ + i\pi k^{-1} \sum_n \frac{(\alpha_n + 1/2) \beta_n P_{\alpha_n}(-z)}{\sin \pi \alpha_n}. \quad (13.2)$$

Полюсы функции S в комплексной l -плоскости обычно называются *полюсами Редже*.

Интерполяция функций Лежандра. Стандартная интерполяция (3.100) полиномов Лежандра $P_\nu(z)$, получаемая путем простого продолжения дифференциального уравнения Лежандра, для каждого фиксированного z является целой аналитической функцией ν . При фиксированном z и $|\nu| \rightarrow \infty$ ($\text{Re } \nu \gg 0$) функция $P_\nu(z)$ имеет следующее асимптотическое поведение ([242], т. 1, стр. 143, формула (21)):

$$P_\nu(z) \approx (2\pi)^{-1/2} \nu^{-1/2} (z^2 - 1)^{-1/4} e^{\xi}, \quad (13.3)$$

где для ξ имеем

$$e^{\xi} = 2^{-1/2} 2^{-\nu} \{ [(z+1)^{1/2} + (z-1)^{1/2}]^{2\nu+1} + i [(z+1)^{1/2} - (z-1)^{1/2}]^{2\nu+1} \}. \quad (13.4)$$

Следовательно, при действительных z и $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ имеем

$$\xi = \begin{cases} (2\nu_1 - 1) \ln [2^{-1/2} (z+1)^{1/2} + 2^{-1/2} (z-1)^{1/2}] & \text{при } z > 1, \\ 2 |\nu_2| \arctg \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^{1/2} & \text{при } z^2 < 1. \end{cases} \quad (13.4a)$$

С другой стороны, при фиксированном ν $P_\nu(z)$ — аналитическая функция z , регулярная всюду в любой конечной области плоскости z с разрезом от $z = -\infty$ до $z = -1$, причем при $\text{Re } \lambda \geq 0$ и $|z| \rightarrow \infty$ имеет место асимптотика ([242], т. 1, стр. 130, формула (23)):

$$P_{\lambda-1/2} \approx \frac{\pi^{-1/2} (2z)^\lambda \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda+1/2)}. \quad (13.5)$$

Интерполяция амплитуд парциальных волн и эллипс Лемана. Вопрос о законности преобразования Ватсона сводится, таким образом, к вопросу о нахождении подходящей интерполяции элементов S -матрицы S_l , которая обладала бы требуемыми свойствами. В гл. 12, § 3 уже была рассмотрена интерполяция, основывающаяся на простом расширении области задания радиального уравнения Шредингера. Такая интерполяция полностью аналогична обычному продолжению полиномов Лежандра, которое основывается на соответствующем обобщении дифференциального уравнения Лежандра. Подобная процедура отличается как математической простотой, так и физической наглядностью, поскольку она основывается непосредственно на рассмотрении уравнения, содержащего всю информацию о динамике процесса рассеяния. Однако, как было отмечено в гл. 3, § 8, такая интерполяция не единственна и «правильность» ее выбора должна в конечном счете оправдываться получающимися результатами. Рассматриваемый в гл. 12, § 3 метод продолжения действительно приводит к полезным выводам; по этой причине мы будем его здесь придерживаться. Разумеется, раз уж выбрана определенная интерполяция на действительные нецелые l , как в гл. 12, § 3, то аналитическое продолжения на *комплексные* значения l перестает быть произвольным.

Преимущество рассмотрения формулы (13.2) по сравнению с рядом (11.10a) состоит в том, что в этом случае удается гораздо проще изучить свойства амплитуды рассеяния как функции от $z = \cos \theta$ или от передаваемого импульса t , определенного согласно формуле (10.84), т. е.

$$t = 2^{1/2} k (1 - z)^{1/2}.$$

Удобно ввести величину, являющуюся квадратом передаваемого импульса с обратным знаком и обычно обозначаемую через t ,

$$t = -\tau^2 = 2k^2 (z - 1) \quad (13.6)$$

и рассматривать амплитуду рассеяния как функцию E и t .

Для потенциала, являющегося суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22a), асимптотическое поведение S при $\text{Re } l \rightarrow \infty$ описывается формулой

(12.182). После подстановки выражений (12.182) и (13.3) в (13.1) убеждаемся, что интеграл в (13.1) абсолютно сходится при значениях z , удовлетворяющих неравенствам

$$|(z-1)^{1/2} \pm (z-1)^{1/2}| < 2^{1/2}C, \quad (13.7)$$

где

$$C = \left| \frac{a_0}{2k} + \left(1 + \frac{a_0^2}{4k^2} \right)^{1/2} \right|.$$

Согласно (13.7), границей области абсолютной сходимости интеграла (13.1) на комплексной z -плоскости будет эллипс, который называется *эллипсом Лемана*. Фокусы эллипса помещаются в точках $z = \pm 1$, а его большая полуось равна

$$z_0 = \frac{1}{2}(C^2 + C^{-2}). \quad (13.8)$$

При действительных значениях k , т. е. при положительных энергиях, выражение (13.8) упрощается и мы получаем

$$z_0 = 1 + \frac{a_0^2}{2k^2}. \quad (13.8a)$$

Малая полуось эллипса в этом случае равна

$$z_1 = \frac{a_0}{k} \left(1 + \frac{a_0^2}{4k^2} \right)^{1/2}.$$

Итак, разложение амплитуды по парциальным волнам абсолютно сходится и амплитуда рассеяния A есть аналитическая функция t в эллипсе Лемана на комплексной плоскости t . Фокусы эллипса Лемана находятся в точках $t = 0$ и $t = -4k^2$, а его центр — в точке $t = -2k^2$. При действительных k большая и малая полуоси эллипса равны соответственно $a_0^2 + 2k^2$ и $a_0 (a_0^2 + 4k^2)^{1/2}$. Из формулы (13.1) для амплитуды A на первый взгляд может показаться, что амплитуда A аналитична во всей плоскости z с разрезом от 1 до $+\infty$, так как функция $P_{\lambda-1/2}(-z)$ определена именно в такой области при нецелом $\lambda = 1/2$. Тем не менее амплитуда A не имеет указанного разреза. Это ясно видно из исходного ряда (11.10a), который содержит только *полиномы Лежандра*; кроме того, это можно показать и непосредственно, рассматривая формулу (13.1) (см., например, [653], стр. 7). Следует иметь в виду, однако, что при $z > z_0$ исходный ряд для A расходится и им нельзя пользоваться.

Переход от выражения (13.1) к (13.2) оправдан, если потенциал представляет собой суперпозицию потенциалов Юкавы (12.22a). Можно показать (см., например, [653], гл. 6), что в этом случае при $\text{Im } \lambda \rightarrow \pm \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула¹⁾:

$$S - 1 = O(|\lambda|^{-1/2}). \quad (13.9)$$

Отсюда, а также из (12.182) и (13.3) следует, что, когда z лежит внутри эллипса Лемана, интегралы по дугам большой окружности в (13.1) бесконечно малы и, действительно, от (13.1) можно перейти к (13.2). Поскольку, согласно (13.3), при $\text{Im } \lambda \rightarrow \pm \infty$ функция $P_\nu(z)$ возрастает не быстрее, чем $\exp(|\text{Im } \lambda| |\arg z|)$, то «фонный» интеграл в (13.2) абсолютно сходится для всех z , не лежащих на действительной оси между точками $z = 1$ и $z = \infty$. В дальнейшем мы убедимся, что для некоторого довольно широкого класса потенциалов сумма в (13.2) содержит только конечное число членов. Таким образом, выражение (13.2) можно аналитически продолжить и использовать даже при тех значениях z или t , при которых нарушается сходимость в (11.10a) или в (13.1).

Асимптотическое поведение амплитуды A при больших $|t|$. Представление амплитуды A в форме (13.2) позволяет очень просто найти ее асимптотическое поведение как функции t при больших $|t|$. Согласно (13.5), при $|z| \rightarrow \infty$

¹⁾ Определение символа O дано в примечании на стр. 311.

слагаемое с «фоновым» интегралом в (13.2) имеет порядок $z^{-1/2}$. Предположим, что сумма от полюсов в (13.2) содержит только конечное число членов. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$ ведущим в этой сумме будет член, соответствующий полюсу с наибольшей действительной частью. Пусть «ведущий» полюс находится в точке $l = \alpha$. Тогда из (13.2) и (13.5) следует, что

$$A(k, z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\approx} F(k) z^{\alpha(k)}, \quad (13.10)$$

где $F(k)$ — функция только от k . Разумеется, положение полюса $\alpha(k)$, вообще говоря, зависит от k . Переходя к передаваемому импульсу t , получаем

$$A \underset{|t| \rightarrow \infty}{\approx} G(E) t^{\alpha_R(E)} e^{i\alpha_I(E) \ln t}, \quad (13.10a)$$

где $\alpha = \alpha_R + i\alpha_I$.

Дисперсионные соотношения по передаваемому импульсу. Согласно выражению (13.2), при фиксированном значении E амплитуда, соответствующая потенциалу Юкавы (12.22a), будет аналитической функцией t , регулярной всюду в любой конечной области t -плоскости с разрезом от точки $t = t_0 = a_0^2$ до бесконечности. Согласно формуле (13.10a), асимптотически при больших $|t|$ амплитуда растет не быстрее, чем t в степени $n - \varepsilon$, где $n > \alpha_R$, $\varepsilon > 0$. Поэтому амплитуда A должна удовлетворять *дисперсионному соотношению по передаваемому импульсу* с «вычитанием». Взяв произвольно n точек z_i , не лежащих на разрезе, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C dt' \frac{A(t')}{t' - t} \prod_{i=1}^n \frac{t - t_i}{t' - t_i} = A(t) - \sum_{j=1}^n A(t_j) \prod_{i \neq j} \frac{t - t_i}{t_j - t_i},$$

если контур C обходит линию разреза по часовой стрелке и далее замыкается дугой бесконечно большой окружности. Поэтому, если обозначить скачок амплитуды $A(t)$ при переходе через разрез посредством

$$\Delta A(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} [A(t + i\varepsilon) - A(t - i\varepsilon)],$$

то получим

$$A(t) = \sum_{j=1}^n A(t_j) \prod_{i \neq j} \frac{t - t_i}{t_j - t_i} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a_0^2}^{\infty} dt' \frac{\Delta A(t')}{t' - t} \prod_{i=1}^n \frac{t - t_i}{t' - t_i}. \quad (13.11)$$

Зависимость от энергии в формуле (13.11) в явном виде не указана. Хотя точки t_i можно выбрать не зависящими от E , их число n должно зависеть от энергии, так как α_R зависит от E . Однако если действительная часть α_R ведущего полюса на комплексной плоскости λ остается ограниченной при $E \rightarrow \infty$, то существует конечное целое число n , большее возможного максимального значения α_R . Если это число n использовать в соотношении (13.11), то последнее будет иметь место при любой энергии E .

Конечно, следует всегда иметь в виду, что в интеграл в правой части (13.11) входят исключительно нефизические значения амплитуды рассеяния; согласно (13.6), физическая область значений t лежит между $-4k^2$ и нулем. Только этому интервалу соответствуют физически возможные значения угла рассеяния, приводящие к указанным передаваемым импульсам. Тем не менее соотношение типа (13.11) не лишено физического интереса, особенно в том случае, когда требуется производить небольшое число вычитаний (см. § 4, п. «Двойное дисперсионное соотношение»).

Резонансы. С помощью формулы (13.2) можно восстановить представление «физических» элементов S -матрицы в виде интеграла

$$a_l = \frac{S_l - 1}{2ik} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz A(k, z) P_l(z); \quad (13.12)$$

при этом мы используем то обстоятельство ([242], стр. 171, формула (7)), что для целых значений l имеет место соотношение

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z) P_\alpha(-z) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin \pi \alpha}{(l-\alpha)(l+\alpha+1)}. \quad (13.13)$$

Таким образом, член в (13.2), возникающий от n -го полюса, дает следующий вклад в элемент S -матрицы:

$$S_l^{(n)} - 1 = \frac{\beta_n (2\alpha_n + 1)}{(l - \alpha_n)(l + \alpha_n + 1)}. \quad (13.14)$$

Если значение α_n близко к целому числу l , то следует ожидать, что в основном зависимость S_l от энергии будет определяться (13.14). Возникает *резонанс*. Разлагая $\alpha_n(E)$ в ряд вблизи энергии E_0 , для которой $\text{Re } \alpha_n = l$, получаем

$$[l - \alpha_n(E)]^{-1} \approx (\alpha_n')^{-1} \left(E - E_0 + \Delta E + \frac{1}{2} i\Gamma \right)^{-1}, \quad (13.15)$$

где

$$\Delta E = \frac{\text{Im } \alpha_n \text{Im } \alpha_n'}{(\text{Re } \alpha_n')^2 + (\text{Im } \alpha_n')^2}, \quad (13.16)$$

$$\Gamma = \frac{2 \text{Im } \alpha_n \text{Re } \alpha_n'}{(\text{Re } \alpha_n')^2 + (\text{Im } \alpha_n')^2}.$$

Штрих у α_n обозначает производную по E , которая вычисляется в точке $E = E_0$. Подстановка (13.15), (13.16) в (13.14) приводит к обычной формуле Брейта — Вигнера (11.54), описывающей зависимость сечения рассеяния от энергии в окрестности E_0 . Величина ΔE характеризует сдвиг действительной части резонансной энергии E по отношению к соответствующему значению E_0 на плоскости E , при котором действительная часть положения полюса совпадает с физическим угловым моментом l ; Γ — ширина резонанса. «Резонанс» действительно будет проявляться в виде пика в сечении рассеяния только в том случае, если ширина Γ мала по сравнению с характерным масштабом энергии, на котором заметно изменяются другие величины, связанные с амплитудой рассеяния. Кроме того, чтобы полученный результат имел смысл, необходима малость величины ΔE . Если величина ΔE не мала, то никакого резонанса не будет вблизи E_0 , а при $E_0 - \Delta E$ существенную роль начнут играть те члены в разложении (13.15), которые нами были опущены.

Ниже, в § 2, будет показано, что $\text{Im } \alpha_n > 0$. Поэтому ширина резонанса в (13.15) положительна, если с ростом энергии полюс движется вправо, и отрицательна, если он движется влево. Поскольку ширина Γ должна быть положительной, чтобы фаза S -матрицы *увеличивалась* вблизи E_0 , то к истинным резонансам приводят только полюсы, движущиеся вправо на l -плоскости. При движении влево от целого значения l самое большее происходит обратное прохождение сдвига фазы через значение $1/2\pi$.

Траектории Редже. Кривые, описываемые полюсами Редже на плоскости комплексного углового момента при изменении энергии, называются *траекториями Редже*. Траектории Редже позволяют нам установить связь между различными связанными состояниями и резонансами при разных значениях l , подобную получаемой из рассмотрения траекторий, по которым движутся полюсы S -матрицы на k -плоскости при изменении l . Как будет показано в следующем параграфе, при отрицательных энергиях полюсы Редже в области $\text{Re } l > -1/2$ должны лежать на действительной оси l . Когда полюс проходит через точку, соответствующую целому значению l , S обращается в бесконечность и возникает *связанное состояние*. (Мы считаем, что потенциал ведет себя

достаточно хорошо, так что полюсы функции S являются нулями функции f_l .) Одной и той же траектории Редже может соответствовать несколько связанных состояний, которые, таким образом, все обусловлены одним и тем же движущимся полюсом. С возрастанием энергии, когда она становится положительной, полюс, как будет показано ниже, должен сойти с действительной оси l и стать комплексным. При значениях энергии, при которых полюс проходит недалеко от действительной оси вблизи точек, соответствующих целым значениям l , весьма вероятно появление резонансов. Следовательно, одному и тому же полюсу могут соответствовать несколько резонансов и связанных состояний. Можно считать, что появление всех этих резонансов и связанных состояний обусловлено одной и той же причиной.

Описанная картина в такой же степени опирается на нашу интуицию, как и картина, рассматривавшаяся в гл. 12, § 3, и между ними нет, конечно, никакого противоречия. Бессмысленно ставить вопрос о том, движется ли «реально» резонансный полюс в плоскости E при изменении l или в плоскости l при изменении E . В обоих случаях мы имеем дело с различными математическими описаниями одного и того же явления. Функция $S_l(E)$, рассматриваемая как функция двух комплексных переменных E и l , обладает некоторой *поверхностью сингулярностей*. Траектории полюса на E -плоскости (при изменении l) являются линиями пересечения этой поверхности сингулярностей с гиперплоскостью $\text{Im } l = 0$, спроектированными на комплексную плоскость E . Траектории полюса на l -плоскости являются проекциями на комплексную плоскость l линий пересечения поверхности сингулярностей с гиперплоскостью $\text{Im } E = 0$.

При возрастании энергии любой полюс на l -плоскости движется, все время удаляясь от действительной оси. В случае потенциала Юкавы (12.22а) каждая траектория в конце концов обязательно поворачивает, пересекает положительную мнимую полуось λ и, так сказать, исчезает из поля зрения. В случае потенциалов с конечным радиусом действия, например в случае прямоугольной ямы, все может быть иначе. Действительно, в данном случае преобразование Ватсона незаконно. Такие «неаналитические» потенциалы оказываются «неразумными» с принятой точки зрения.

§ 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Прежде чем приступить к доказательству некоторых важных свойств полюсов Редже, рассмотрим кратко вопрос о единственности интерполяции физических элементов S -матрицы с целочисленными моментами S_l .

Как уже отмечалось в гл. 3, § 8, если каким-либо способом построена аналитическая функция, принимающая заданные значения S_l , когда l принимает целые значения, то существует одновременно и бесконечное множество подобных функций. Рассмотренный в гл. 12, § 3 способ, основанный на «кочевидной» интерполяции радиального уравнения Шредингера, — один из таких способов интерполяции. Единственный ли он?

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Карлсона (см. [839],):

Если функция $f(z)$ регулярна в правой полуплоскости $\text{Re } z > 0$ и имеет там порядок $O(e^{k|z|})$ при $|z| \rightarrow \infty$, где $k < \pi$, и если $f(z) = 0$ при $z = 0, 1, 2, \dots$, то $f(z) \equiv 0$.

Отсюда следует, что любые две интерполяции S с достаточно хорошим поведением на бесконечности (позволяющим выполнять преобразования Ватсона), которые имеют в области $\text{Re } \lambda \geq 0$ единственными сингулярностями только конечное число полюсов, тождественно совпадают. Чтобы убедиться в этом, нужно только применить теорему Карлсона к разности различных интерполяций, помноженной на полином, обращающийся в нуль в полюсах каждой из этих интерполяций. Иными словами, хотя может существовать сколь угодно много интерполяций для S_l , но такая интерполяция, которая

допускает преобразование Ватсона, является, если она существует, единственной.

В некоторых интересных случаях «правильную» интерполяцию можно получить, рассматривая непосредственно амплитуды парциальных волн. Заманчиво воспользоваться с этой целью формулой (13.12), подставив в ее правую часть стандартную интерполяцию P_l . Легко, однако, видеть, что так поступать нельзя. Действительно, интеграл справа в формуле (13.12) сходится при всех конечных действительных значениях k , так как подынтегральное выражение ограничено и область интегрирования конечна. Следовательно, из формулы (13.12) нельзя получить полюсов Редже. Имеется, однако, другой способ представления a_l через A . Вводя в рассмотрение функции Лежандра второго рода и выбирая контур C так, чтобы он обходил точки -1 и $+1$ в положительном направлении, находим, что ¹⁾

$$a_l = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz A(z) Q_l(z). \quad (13.17)$$

Допустим теперь, что амплитуда $A(z)$ асимптотически стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$ по крайней мере как $|z|^{-1/2}$ и что она обладает другими свойствами амплитуды, соответствующей потенциалу Юкавы (12.22а). В этом случае амплитуда A удовлетворяет дисперсионному соотношению по передаваемому импульсу без вычитаний вида (13.11), т. е.

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^{\infty} dz' \frac{\Delta A(z')}{z' - z}. \quad (13.18)$$

Подставляя (13.18) в (13.17) и изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} a_l &= \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^{\infty} dz \Delta A(z) Q_l(z) = \\ &= \frac{1}{4\pi i k^2} \int_{a_0^2}^{\infty} dt \Delta A(t) Q_l \left(1 + \frac{t}{2k^2} \right); \end{aligned} \quad (13.19)$$

в полученном соотношении (13.19) l можно считать нецелым и воспользоваться стандартным аналитическим продолжением функции Лежандра.

То, что с помощью формулы (13.19) мы получаем «правильную» интерполяцию, следует из асимптотического поведения Q_l при $|z| \rightarrow \infty$, которое ведет себя как

$$Q_l(z) = O(z^{-l-1}). \quad (13.20)$$

Следовательно, интеграл в (13.19) абсолютно сходится при $\text{Re } l > -1/2$ и a_l не имеет сингулярностей при $\text{Re } l > -1/2$. Более того, асимптотическое поведение Q_l в правой полуплоскости при $|l| \rightarrow \infty$ таково, что a_l стремится к нулю при $|l| \rightarrow \infty$. Поэтому можно провести преобразование Ватсона и из теоремы Карлсона следует, что формула (13.19) дает в ланном случае единственную подходящую интерполяцию.

Приведенные выше рассуждения можно распространить на случай, когда амплитуда $A(z)$ имеет асимптотику $O(|z|^\delta)$ и удовлетворяет дисперсионному соотношению по передаваемому импульсу с вычитаниями. Тогда из формулы (13.19) также получаем правильную интерполяцию, но только теперь при $\text{Re } l > \delta$. При некотором значении l , для которого $\text{Re } l = \delta$, (13.19) имеет полюс. В области $\text{Re } l < \delta$ функцию a_l можно найти, только строя аналитическое продолжение (13.19). Из теоремы Карлсона в рассматриваемом случае опять следует, что таким образом мы получим единственное аналитическое

¹⁾ См. [903], т. 2, стр. 138; Q_l — функции Лежандра второго рода.

продолжение, допускающее преобразование Ватсона. Однако поскольку преобразование Ватсона зависит теперь только от амплитуд парциальных волн a_l при целых $l > \delta$, то нет гарантии, что a_l при целых $l < \delta$, полученные с помощью рассматриваемого аналитического продолжения из a_l при $l > \delta$, действительно совпадают с первоначально заданными a_l при $l < \delta$. Если такое совпадение не имеет места, то вообще не существует аналитического продолжения для *всех* a_l , которое допускало бы преобразование Ватсона. Вместе с тем все же не исключено, что существует дисперсионное соотношение по передаваемому импульсу с конечным числом вычитаний для соответствующей амплитуды рассеяния. Дисперсионное соотношение может существовать, но его нельзя получить с помощью преобразования Ватсона.

В качестве примера рассмотрим набор значений $\{a_l\}$, соответствующих потенциалу Юкавы. Изменение одного-единственного из этих значений, скажем a_L , на Δa_L , приводит к изменению амплитуды на величину $\Delta a_L P_L(z)$. Изменение амплитуды $\Delta a_L P_L(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ асимптотически ведет себя как $|z|^L$. Следовательно, амплитуда рассеяния будет теперь удовлетворять дисперсионному соотношению по передаваемому импульсу с конечным числом вычитаний. Однако провести преобразование Ватсона в указанном случае невозможно. В гл. 20, § 3 мы увидим, что все же существует некоторый локальный потенциал, который соответствует новому набору $\{a'_l\}$; этот потенциал, однако, не обладает свойствами потенциала Юкавы. Мы приходим, таким образом, к выводу, что *требование выполнимости преобразования Ватсона является более сильным условием, чем требование существования дисперсионного соотношения по l .*

§ 3. ПОЛЮСЫ РЕДЖЕ

В предположении, что потенциал ведет себя достаточно хорошо, из (12.154) следует, что полюсы $S_l(k)$ на комплексной l -плоскости отвечают нулям функции $\tilde{f}_l(k)$. Рассуждения, приведенные в гл. 12, § 2 и 3, легко распространить на случай комплексных значений l . Согласно этим рассуждениям, при фиксированных k и r функции $f_l(k, r)$ и $\varphi_l(k, r)$ будут аналитическими функциями l . Так как граничное условие (12.15) не зависит от l , то f_l должна быть регулярной во всей комплексной плоскости l . По причине, указанной после (12.132) и в гл. 12, § 3, граничное условие для φ_l с необходимостью зависит от l таким образом, что функция φ_l должна быть регулярной только в области $\text{Re } l > -1/2$. При весьма общих ограничениях на потенциал существует аналитическое продолжение функции φ_l в область $\text{Re } l < -1/2$, которое имеет только простые полюсы при отрицательных целых и полуцелых значениях l ([650] и [653], гл. 4). Поскольку, однако, для преобразования Ватсона необходима только область $\text{Re } l > -1/2$, то мы не будем здесь касаться аналитического продолжения в область $\text{Re } l < -1/2$.

Так как функции f_l и φ_l являются аналитическими относительно переменной l , то функция Иоста $\tilde{f}_l(k)$, определяемая выражением (12.142), также аналитическая относительно l . Поэтому уравнение

$$\tilde{f}_l(k) = 0 \quad (13.21)$$

определяет $l(k)$ как аналитическую функцию k , пока значения l конечны и лежат в полуплоскости $\text{Re } l > -1/2$. В отличие от траекторий, рассмотренных в гл. 12, § 3, при получении траекторий Редже в (13.21) следует приписывать k положительные действительные (для положительных энергий) или положительные мнимые (для отрицательных энергий) значения и затем при фиксированном k искать l из уравнения (13.21).

При действительном k^2 вронскиан легко вычисляется обычным способом с помощью радиального уравнения Шредингера. Так как $l(l+1) = \lambda^2 - 1/4$

при $\lambda = l + 1/2$, то

$$\frac{d}{dr} W(\varphi_l^*, \varphi_l) = 2i \operatorname{Im} \lambda^2 r^{-2} |\varphi_l|^2.$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$2i \operatorname{Im} \lambda^2 \int_0^\infty dr r^{-2} |\varphi_l|^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} W(\varphi_l^*, \varphi_l). \quad (13.22)$$

Отрицательные энергии. Допустим сначала, что k — положительное мнимое число и что l — корень уравнения (13.21). Функция φ_l должна экспоненциально обращаться в нуль на бесконечности. Следовательно, правая часть соотношения (13.22) равна нулю. Так как интеграл, входящий в левую часть соотношения, не равен нулю, то $\operatorname{Im} \lambda^2 = 0$. Поэтому $\operatorname{Im} \lambda = 0$, если $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Для отрицательных энергий полюсы Редже (расположенные в полуплоскости $\operatorname{Re} l > -1/2$) должны лежать на действительной оси l . Кроме того, эти полюсы должны быть *простыми*. Последнее утверждение можно доказать в точности так же, как с помощью (12.52) доказывалось то, что полюсы, соответствующие связанным состояниям, должны быть простыми как функции от k . Далее, из (12.189) видно, что полюсы Редже при возрастании энергии *должны* двигаться вправо.

Положительные энергии. Положим теперь, что $E > 0$, т. е. что $k > 0$, и будем рассматривать только верхний берег правого разреза, т. е. физическую область. Из (13.22) и (12.29) следует, что

$$8k \operatorname{Re} \lambda \operatorname{Im} \lambda \int_0^\infty dr r^{-2} |\varphi_l|^2 = |\mathcal{F}_{l-}|^2 - |\mathcal{F}_{l+}|^2. \quad (13.23)$$

Так как интеграл в (13.23) положителен, то \mathcal{F}_{l+} может равняться нулю в области $\operatorname{Re} \lambda > 0$ только при $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Когда $E = 0$, траектории Редже покидают действительную ось l и уходят в первый квадрант комплексной λ -плоскости. При положительной энергии траектории никогда не могут пересечь положительную действительную ось и тем самым перейти из первого в четвертый квадрант.

Поведение траекторий вблизи порога $E = 0$. Вид траекторий вблизи порога, когда они покидают действительную ось, можно найти аналогично тому, как было найдено выражение (12.192) ([653], гл. 9). При $E \rightarrow 0+$ получаем

$$\frac{d}{dE} \operatorname{Re} l = \begin{cases} a & \text{при } l_0 > 1/2, \\ aE^{l_0-1/2} \sin \pi l_0 & \text{при } -1/2 < l_0 < 1/2, \end{cases} \quad (13.24)$$

где l_0 — пороговое значение l и $a > 0$. Угол γ , под которым траектория отрывается от действительной оси,

$$\operatorname{ctg} \gamma = \frac{d \operatorname{Re} l / dE}{d \operatorname{Im} l / dE}$$

определяется выражением

$$\operatorname{ctg} \gamma = \begin{cases} O(E^{1/2-l_0}) & \text{при } l_0 > 1/2, \\ O(1) & \text{при } -1/2 < l_0 < 1/2, \end{cases} \quad (13.25)$$

где $E \rightarrow 0+$. Следовательно, при $-1/2 < l_0 < 0$ траектория отрывается от действительной оси, двигаясь под конечным углом влево, при $0 < l_0 < 1/2$ она движется под конечным углом вправо. При $1/2 < l_0$ траектория тем теснее прижимается к действительной оси, чем больше значение l_0 . Отсюда сразу можно объяснить, почему связанному s -состоянию не соответствует никакого

низкоэнергетического резонанса, а связанному состоянию с $l > 0$ обязательно соответствует резонанс и почему резонанс тем острее, чем больше значение l . Траектория вблизи порога $E = 0$ задается уравнением

$$\text{Im}(l - l_0) = c \text{Re}(l - l_0)^{l_0 + 1/2}. \quad (13.26)$$

Из (13.26) и (13.16) легко найти ширину низкоэнергетического резонанса:

$$\Gamma = O(E^{l_0 + 1/2}), \quad (13.27)$$

если E — значение энергии, при котором он возникает. Это заключение (13.27) согласуется с ранее полученными результатами (12.193) и (11.55). Следует отметить, что значение l_0 (нецелое) в формулах (13.27) и (12.193) представляет собой не резонансное, а пороговое значение l . Однако наши результаты применимы только тогда, когда эти два значения l почти совпадают.

Поворот траекторий. При дальнейшем возрастании энергии траектории могут либо повернуть обратно налево, либо нет. Для прямоугольного потенциала или других потенциалов с конечным радиусом действия траектории обычно обратно не поворачивают. Но если потенциал аналитический ¹⁾ (с индексом $\sigma = \pi/2$) и удовлетворяет условию (12.118), то можно поступить так, как сказано после (12.114) в гл. 12, § 1. Здесь мы только предполагаем, что k положительно, а l комплексно. Тогда функции A и B , входящие соответственно в (12.115) и (12.116), имеют вид

$$\begin{aligned} A &= \text{Im} \gamma \mathcal{Y}'_{\varphi} - k^2 \sin 2\varphi + x^{-2} \text{Im} \lambda^2, \\ B &= \text{Re} \gamma \mathcal{Y}'_{\varphi} - k^2 \cos 2\varphi + x^2 \text{Re} \lambda^2. \end{aligned}$$

Результат, получающийся с помощью таких же рассуждений, как и при выводе (12.119), состоит в том, что если $l = \lambda(k) - 1/2$ есть положение полюса Редже, соответствующее импульсу k , то

$$\text{Re} \lambda(k) < |\gamma| M k^{-1}, \quad (13.28)$$

где постоянная M определяется формулой (12.118).

Согласно неравенству (13.28), каждая траектория должна обязательно повернуться в обратную сторону. Более того, неравенство (13.28) накладывает ограничения на действительные части всех полюсов Редже при положительных значениях энергии. При возрастании энергии каждая траектория должна приближаться к положительной мнимой полуоси λ . В случае потенциала, являющегося суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22а), можно показать (1653], стр. 58), что каждый полюс в действительности пересекает эту полуось и таким образом «исчезает из поля зрения». Из неравенства (13.28) следует, что поворот и исчезновение полюса неравномерны относительно γ : чем сильнее взаимодействие, тем позже полюс уходит из правой полуплоскости.

Итак, нами доказано все относительно преобразования Ватсона и дисперсионного соотношения по l , что требовалось для целей § 1 настоящей главы.

§ 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАНДЕЛЬСТАМА

Методом Ватсона — Редже мы получили доказательство дисперсионного соотношения по передаваемому импульсу (13.11). Объединим теперь это соотношение с ранее выведенным энергетическим дисперсионным соотношением (10.98).

¹⁾ Определение аналитического потенциала дано в гл. 12, § 1, п. 1, после формулы (12.22а).

Двойное дисперсионное соотношение. Допустим, что потенциал является суперпозицией юкавских потенциалов (12.22). Тогда соотношение (10.98) справедливо, если $-t^2$ фиксировано и $t > -4a_0^2$. Напомним, что

$$2i \operatorname{Im} A(E, t) = A(E + i\varepsilon, t) - A(E - i\varepsilon, t)$$

в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, и представим временно, что это выражение снова подставлено в (10.98). Прежде всего как $A(E + i\varepsilon, t)$, так и $A(E - i\varepsilon, t)$ — аналитические функции t , регулярные на всей комплексной плоскости t с разрезом от $t = -a_0^2$ до бесконечности. Далее, согласно (13.10а), обе эти функции асимптотически возрастают (при больших $|t|$) не быстрее, чем $t^{m-\nu}$, где $m > \alpha_R$, $\nu > 0$. В гл. 13, § 2 было показано, что при слабых дополнительных ограничениях на потенциал, каждая из величин α_R равномерно ограничена по энергии в интервале от нуля до бесконечности. Следовательно, обе величины $A(E + i\varepsilon, t)$, $A(E - i\varepsilon, t)$ и их разность равномерно ограничены величиной $|t|^m$. Поэтому можно написать дисперсионное соотношение для $\operatorname{Im} A(E, t)$, аналогичное дисперсионному соотношению по передаваемому импульсу (13.11). Положим для простоты, что все $t_i > 0$. Тогда

$$\operatorname{Im} A(E', t) = \sum_{j=1}^m t^j g_j(E') + \frac{t^m}{\pi} \int_{a_0^2}^{\infty} dt' \frac{\rho(E', t')}{t'^m (t-t')}, \quad (13.29)$$

где

$$g_j(E') = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} \operatorname{Im} A(E', t) |_{t=0}.$$

Подставляя (13.29) в формулу (10.98), находим

$$\begin{aligned} A(E, t) = & A_{\text{БП}}(t) + \sum_n \frac{R_n(t)}{E - E_n} + \\ & + \sum_{j=1}^m t^j \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dE' \frac{g_j(E')}{E' - E - i\varepsilon} + \\ & + \frac{1}{\pi^2} t^m \int_0^{\infty} dE' \int_{a_0^2}^{\infty} dt' \frac{\rho(E', t')}{t'^m (t'-t)(E' - E - i\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (13.30)$$

Последнее соотношение теперь можно, конечно, аналитически продолжить на всю разрезанную плоскость t . Соотношение (13.30) называется *двойным дисперсионным соотношением*, или *представлением Мандельштама*. Так как мы предположили, что потенциал имеет вид (12.22), то для борновского члена имеем простое выражение

$$A_{\text{БП}}(t) = \int_{a_0^2}^{\infty} da \frac{\rho(a)}{t - a^2}. \quad (13.31)$$

Если отсутствуют связанные состояния и если не требуется вычитаний в дисперсионном соотношении по t , то (13.30) принимает более простой вид

$$A(E, t) = \int_{a_0^2}^{\infty} da \frac{\rho(a)}{t - a^2} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} dE' \int_{a_0^2}^{\infty} dt' \frac{\rho(E', t')}{(t'-t)(E' - E - i\varepsilon)}. \quad (13.30а)$$

Унитарность. Рассмотрим теперь двойное дисперсионное соотношение вместе с условием унитарности. Согласно обобщенной оптической теореме (7.54), имеем

$$4\pi k^{-1} \operatorname{Im} A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \int d\Omega_{k'} A^*(\mathbf{k}'', \mathbf{k}') A(\mathbf{k}'', \mathbf{k}), \quad (13.32)$$

где A — амплитуда рассеяния. Подстановка (13.30а) в правую часть (13.32) приводит к интегралам следующего общего вида¹⁾:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4} \int d\Omega_{k''} (c_1 - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k})^{-1} (c_2 - \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k}')^{-1} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int d\Omega_{k''} \{c_1(1-u) + c_2(1+u) - \mathbf{k}'' \cdot [\mathbf{k}(1-u) + \mathbf{k}'(1+u)]\}^{-2} = \\ &= \pi s^{-1} \int_{-1}^1 du (1-u^2)^{-1} (v - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}')^{-1}, \\ vs &= \frac{1}{2} \left[c_1 \left(\frac{1-u}{1+u} \right)^{1/2} + c_2 \left(\frac{1+u}{1-u} \right)^{1/2} \right]^2 - s^2 \frac{1+u^2}{1-u^2}, \end{aligned}$$

где $s = k^2 = 2\mu E$. Если ввести новую переменную интегрирования v , для которой

$$\frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \frac{dv s}{[(vs - c_1 c_2)^2 - (c_1^2 - s^2)(c_2^2 - s^2)]^{1/2}},$$

то получим

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_{v_0}^{\infty} \frac{dv}{v - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'} \frac{1}{[(vs - c_1 c_2)^2 - (c_1^2 - s^2)(c_2^2 - s^2)]^{1/2}}, \\ v_0 s &= c_1 c_2 + [(c_1^2 - s^2)(c_2^2 - s^2)]^{1/2}. \end{aligned}$$

Положим теперь

$$t_1 = 2(c_1 - s), \quad t_2 = 2(c_2 - s), \quad t' = 2(v - s)$$

и выразим I через t :

$$\begin{aligned} I &= \int d\Omega_{k''} [t_1 + (\mathbf{k}'' - \mathbf{k})^2]^{-1} [t_2 + (\mathbf{k}'' - \mathbf{k}')^2]^{-1} = \\ &= 4s^{-1/2} \int_0^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} F(t', s; t_1, t_2), \end{aligned} \quad (13.33)$$

где

$$F(t, s; t_1, t_2) \begin{cases} \frac{1}{2} \pi [s(t_1 + t_2 - t)^2 - t_1 t_2 (4s + t)]^{-1/2}, & t > T, \\ 0, & t < T \end{cases} \quad (13.34)$$

и

$$2sT(s; t_1, t_2) = 2s(t_1 + t_2) + t_1 t_2 + [t_1 t_2 (4s + t_1)(4s + t_2)]^{1/2}.$$

Воспользуемся теперь найденным результатом для раскрытия выражения в правой части обобщенной оптической теоремы (13.32) и сравним получающуюся формулу с формулой двойного дисперсионного соотношения без вычитаний (13.30а). Опуская интеграл по t , получаем для плотности $\rho(s, t)$:

$$\begin{aligned} \rho(s, t) &= \int da' \int da'' \rho(a) \rho(a') F(t, s; a^2, a'^2) - \\ &- \frac{2}{\pi^2} \mathcal{P} \int \frac{ds'}{s' - s} \int dt' \int da \rho(a) \rho(s', t') F(t, s; a^2, t') + \\ &+ \frac{1}{\pi^4} \int \frac{ds'}{s' - s - i\epsilon} \int \frac{ds''}{s'' - s + i\epsilon} \int dt' \int dt'' \rho(s', t') \rho(s'', t'') F(t, s; t', t''). \end{aligned} \quad (13.35)$$

¹⁾ Вторая строка представляет собой преобразование интеграла к виду, удобному для вычисления методом Фейнмана; см. также гл. 10, § 3, п. 3.

Так как $F(t, s; t_1, t_2) = 0$ при $t < T(s; t_1, t_2)$, где T — монотонно возрастающая функция от t_1 и t_2 , то из (13.35) сразу вытекает, что $\rho(s, t) \equiv 0$ при $t < T_0(s; a_0^2, a_0^2) = 4a_0^2 + a_0^4/s$. Если использовать этот результат во втором и третьем слагаемом в (13.35), то легко убедиться, что второй член в выражении (13.35) не дает никакого вклада при $t < T_1(s) = T(s; a_0^2, 4a_0^2)$, а третий член равен нулю при всех $t < T(s; 4a_0^2, 4a_0^2)$. Следовательно, граничная кривая, ниже которой плотность $\rho(s, t)$ равна нулю, определяется уравнением $t = T_0(s)$. Между граничной кривой и кривой $t = T_1(s)$ функция $\rho(s, t)$ равна первому члену в выражении (13.35). Второй член в (13.35) начинает играть роль только при $t = T_1(s)$. Между $t = T_1(s)$ и $t = T_2(s) = T(s; a_0^2, 9a_0^2)$ вклад второго члена в точности равен получаемому при подстановке первого члена для функции $\rho(s', t')$ в выражение

$$-\frac{2}{\pi^2} \mathcal{P} \int \frac{ds'}{s' - s} \int_{T_0(s')}^{T_1(s')} dt' \int da\rho(a) \rho(s', t') F(t, s; a^2, t')$$

и т. д. Таким образом, вся (s, t) -плоскость разбивается на ряд областей, в каждой из которых $\rho(s, t)$ можно записать в замкнутой форме через $\rho(a)$. Чем больше t (при заданном s), тем более сложными становятся все эти выражения, т. е. тем более высокие «степени» $\rho(a)$ в них появляются. Другими словами, при любых фиксированных значениях s и t функция $\rho(s, t)$ точно выражается в виде некоторого конечного полинома по константе взаимодействия γ [которой пропорциональна функция $\rho(a)$]. Именно в этом обстоятельстве заключены основные преимущества представления Мандельстама при необходимости проведения конкретных вычислений. Если необходимо учитывать вычитания или связанные состояния, то схема расчета остается той же, но только все усложняется. Читателя, интересующегося данным вопросом, мы отсылаем к соответствующей литературе [73].

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Метод Ватсона в квантовой теории рассеяния первым использовал Редже [708] (см., однако, работу Фогта и Ванье [876]). В последние годы метод широко и успешно применялся и ему посвящена обширная литература. Полную библиографию, а также более детальное, чем здесь, изложение можно найти в книге Ньютона [653]; см. также [292, 671, 799]. Рассматривание в рамках теории R -матрицы дано недавно в работе [733].

Аналитические свойства амплитуды рассеяния как функции передаваемого импульса или угла рассеяния исследовались Леманом [520]. Эллипс, большая полуось которого определяется формулой (13.8), — это меньший из двух эллипсов, введенных Леманом [520].

Другой метод, предложенный Гильбертом и Шихом [332], позволяет непосредственно связать поведение разложения по парциальным волнам с поведением соответствующего степенного ряда.

Асимптотика (13.10) или (13.10а) для амплитуды при больших $\cos \theta$ или больших t впервые была найдена Редже [708].

Исследование S как функции двух комплексных переменных l и E проведено в работе Боттино и Лонгонни [95].

К § 2. Соотношение (13.19), которое можно использовать для построения правильного аналитического продолжения амплитуд парциальных волн, известно как формула Фруассара — Грибова (см. [967]). Первоначальная работа Фруассара не опубликована.

К § 3. Рассуждения, излагаемые в § 3, принадлежат в основном Редже [708, 709]; см. также [96].

Аналитическое продолжение регулярного решения Φ_l в левую полуплоскость l и исследование его свойств было выполнено Ньютоном [650]. Поведение траекторий вблизи порога впервые было рассмотрено Ньютоном [650] и независимо Барутом и Цвандигером [42].

Рассуждения, в которых используется аналитичность потенциала, принадлежат Редже [709]; см. также [96].

Теорема Мавинсона рассматривалась с точки зрения метода Ватсона — Редже в работе [157].

К § 4. Двойное дисперсионное соотношение впервые было написано в релятивистской теории Мандельштамом [569] и нашло там много полезных приложений. В нерелятивистской теории оно впервые было получено в работах [73] и [489]; см. также [58, 100, 708]. Наше изложение следует в основном работе [73]. Остальные работы по этому вопросу перечислены в комментарии к гл. 10, § 3, п. 2.

Обобщения для амплитуды вне энергетической поверхности см. в статье [263]. Обобщение на случай двухканальных процессов дано в работах [281, 853, 854].

ЗАДАЧИ

1. Показать, что область в комплексной z -плоскости, задаваемая неравенством (13.7), ограничена эллипсом, фокусы которого находятся в точках $z = \pm 1$, а большая полуось задается формулой (13.8). Какова малая полуось эллипса?

2. Предположение о том, что формула (13.10а), полученная по методу Ватсона — Редже, справедлива также и в релятивистской области, равносильно утверждению, что (13.10а) допускает экспериментальную проверку. Такая возможность появляется благодаря свойству «перекрестной симметрии» (или правилу перестановок), которое имеет место в релятивистской теории поля. Согласно этому свойству, если амплитуда $A(s, t)$ описывает процесс рассеяния $A + B \rightarrow A + B$, то с точностью до простых коэффициентов, зависящих от спинов и т. д., $A(t, s)$ описывает реакцию $A + \bar{A} \rightarrow B + \bar{B}$. Здесь переменная s — полная релятивистская энергия. Сделать соответствующую перестановку в (13.10а) и рассмотреть поведение сечения при высоких энергиях и малых передаваемых импульсах. Сравнить результаты с результатами, соответствующими обычному дифракционному рассеянию.

3. Воспользоваться результатами гл. 14, § 6 и рассмотреть траектории Редже для кулоновского потенциала. Что в них необычного и по какой причине? Какой вид будут иметь траектории Редже для потенциала Юкавы?

4. Допустим, что S -матрица $S(l, k)$ имеет только конечное число полюсов Редже, одинаковое при всех k . Совместимо ли такое предположение со всеми известными общими свойствами функции $S(l, k)$? Если нет, то какое свойство нарушается?

Частные виды потенциалов

В данной главе мы рассмотрим для иллюстрации ряд конкретных потенциалов, для которых общие результаты, полученные в предыдущих главах, могут быть выведены и рассмотрены непосредственно. Особый интерес для нас представляют потенциалы, для которых решение уравнения Шредингера можно найти в явном виде с помощью известных функций. Существует широкий класс потенциалов, для которых известно решение уравнения (11.8) при некотором фиксированном l и любых значениях энергии. Но по существу имеется только четыре вида потенциалов, для которых решение радиального уравнения Шредингера можно найти в явном виде при всех l и всех E . Это прямоугольная яма, потенциал гармонического осциллятора, кулоновский потенциал и потенциал вида r^{-4} . Вообще говоря, было бы желательно по многим причинам найти побольше таких потенциалов. Разумеется, любое уравнение Шредингера (11.8) при необходимости можно решить так или иначе численно с использованием электронной вычислительной машины. Однако при исследовании общих свойств амплитуды рассеяния очень полезно иметь в распоряжении набор задач, которые решаются до конца в явном виде. Кроме всего прочего, решения этих задач можно использовать в качестве нулевых приближений для расчетов по теории возмущений.

В данной главе основное внимание мы уделим построению в замкнутой форме решений радиального уравнения Шредингера при любом фиксированном значении l . Потенциал прямоугольной формы уже рассматривался в гл. 11, и мы не будем здесь его касаться. Рассматриваемые вначале два примера потенциалов, которые никак не могут считаться «разумными», иногда оказываются тем не менее полезными при построении разнообразных моделей.

§ 1. ПОТЕНЦИАЛ С НУЛЕВЫМ РАДИУСОМ ДЕЙСТВИЯ

Пусть вне сферы радиусом R потенциал равен нулю. В этом случае волновую функцию во внешней области можно определить, приравнявая ее логарифмическую производную в точке $r = R$ логарифмической производной волновой функции во внутренней области. Обозначим через c значение логарифмической производной при $r = R$. Чем меньше R , тем слабее c зависит от энергии. Поэтому в пределе $R \rightarrow 0$ мы получаем заданную при любом $r > 0$ волновую функцию $\varphi(k, r)$, которая является решением уравнения Шредингера и удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi'(k, r)}{\varphi(k, r)} = c, \quad (14.1)$$

где c не зависит от k . Однако граничное условие (14.1) работает только при $l = 0$. В случае $l > 0$ при $R \rightarrow 0$ величина c должна стремиться к нулю и полу-

чаемые волновые функции с высшими угловыми моментами просто совпадают с соответствующими волновыми функциями свободной частицы.

Волновая функция для $l = 0$, удовлетворяющая граничному условию (14.1), имеет вид

$$\varphi(k, r) = \text{const} \cdot \sin(kr + \delta),$$

где

$$\text{tg } \delta = \frac{k}{c}.$$

Таким образом, когда энергия стремится к бесконечности, фазовый сдвиг δ не стремится к нулю. Если считать, что $\delta(0) = 0$, то $\delta(\infty) = \pm 1/2\pi$ в зависимости от знака c . Величина $1/c$ является длиной рассеяния (гл. 11, § 2, п. 2).

Нерегулярное решение для $l = 0$ имеет простой вид

$$f(k, r) = e^{ikr},$$

и функцию Йоста можно найти с помощью соотношения (12.28):

$$f(k) = e^{-i\delta};$$

при этом постоянную в выражении для φ мы положили равной k^{-1} . Отметим, что функция Йоста не стремится к единице при $k \rightarrow \pm \infty$. Матрица S при $l = 0$ определяется выражением

$$S = e^{2i\delta} = \frac{c + ik}{c - ik},$$

так что

$$S(\infty) = -1.$$

Если $c < 0$, то функция S имеет полюс в верхней полуплоскости k , расположенный в точке

$$k = i|c|;$$

этому полюсу соответствует связанное состояние с энергией связи $c^2/2\mu$. Если $c > 0$, то полюс функции S лежит в нижней полуплоскости k , или на втором листе плоскости E . Следовательно, в этом случае имеется виртуальное состояние с энергией $E = c^2/2\mu$.

Причина отмеченного аномального поведения амплитуды рассеяния заключается в том, что предельный переход к нулевому радиусу взаимодействия не является равномерным относительно k . Пока радиус R конечен,

$$\text{tg } \delta = \frac{k \text{ ctg } kR - c}{k + c \text{ ctg } kR}.$$

Если же $k \rightarrow \infty$ при фиксированном значении R , то c должно стремиться к величине $k \text{ ctg } kR$, соответствующей свободной частице, а $\text{tg } \delta \rightarrow 0$. Совершив предельный переход по k , можно затем устремить R к нулю; при этом, однако, ничего не изменится. Но если сначала устремить R к нулю, считая c фиксированным, то величина c оказывается независимой от k , и поэтому $\text{tg } \delta = k/c$. Совершая теперь предельный переход $k \rightarrow \infty$, приходим к аномальному результату $\text{tg } \delta = \infty$.

§ 2. ОТТАЛКИВАТЕЛЬНОЕ ЯДРО

Непроницаемая сфера радиусом R_c описывается потенциалом, который равен $+\infty$ при $r \leq R_c$. Условие непроницаемости сферы можно выразить граничным условием, налагаемым на волновую функцию:

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{r}| = R_c.$$

Данное граничное условие должно выполняться при любом значении углового момента. Следовательно, мы можем определить решения φ_l так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям

$$\varphi_l(k, R_c) = 0, \quad \varphi_l'(k, R_c) = 1. \quad (14.2)$$

Решения f_l при $r > R_c$, конечно, не «чувствуют» того, имеется ли или нет при $r < R_c$ непроницаемая сфера. Следовательно, аналитические свойства f_l такие же, как если бы непроницаемой сферы не было вовсе. Функция Иоста по-прежнему определяется выражением (12.142), но вместо формулы (12.140) мы получаем

$$\tilde{f}_l(k) = \frac{k^l e^{-i l/2 \pi l} f_l(k, R_c)}{(2l+1)!}. \quad (14.3)$$

Таким образом, при $|k| \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$ имеем

$$\tilde{f}_l(k) \approx \frac{k^l e^{-i l/2 \pi l} e^{i h R_c}}{(2l+1)!}. \quad (14.4)$$

Соответствующие элементы S-матрицы имеют вид

$$S_l(k) = \frac{e^{i \pi l} f_{l-}(k, R_c)}{f_{l+}(k, R_c)}. \quad (14.5)$$

Поэтому при $k \rightarrow \pm \infty$ асимптотическое поведение фазового сдвига определяется выражением

$$\delta_l(k) \approx -k R_c + \frac{1}{2} \pi l.$$

Таким образом, фазовый сдвиг больше не стремится к кратному 2π ; он стремится к бесконечности. Отметим, что сечение рассеяния при возрастании энергии имеет бесконечное множество острых максимумов. Но, поскольку фазовый сдвиг уменьшается, эти максимумы *нельзя* интерпретировать как резонансы.

При наличии *только* потенциала непроницаемой сферы, т. е. в отсутствие каких-либо дополнительных сил, функция \tilde{f}_l просто заменяется на $\omega^{(+)}$. Тогда, например, при $l = 0, 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned} S_0(k) &= e^{-2i h R_c}, \\ S_1(k) &= -e^{-2i h R_c} \frac{k - i R_c^{-1}}{k + i R_c^{-1}}, \\ S_2(k) &= e^{-2i h R_c} \frac{(k R_c)^2 - 3i k R_c - 3}{(k R_c)^2 + 3i k R_c - 3}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Из (14.6) видно, что при $l > 0$ потенциал непроницаемой сферы приводит как к виртуальным (например, при $l = 1$), так и к резонансным (например, при $l = 2$) состояниям. Конечно, резонансы не являются острыми.

В случае потенциалов типа потенциала непроницаемой сферы теорема Левинсона (12.156) не имеет места. Однако можно доказать аналогичную теорему для разности между фактическим фазовым сдвигом и фазовым сдвигом, соответствующим одному потенциалу непроницаемой сферы при одинаковом радиусе.

§ 3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Если потенциал имеет вид

$$\mathcal{V}(r) = -\mathcal{V}_0 e^{-r/a}, \quad (14.7)$$

то, используя подстановку $x = e^{-r/2a}$, для этого потенциала можно найти в явной форме решение радиального уравнения Шредингера при $l = 0$.

В результате получаем

$$f(k, r) = e^{iak \ln(a^2 \mathcal{Y}'_0)} \Gamma(1 - 2iak) J_{-2iak}(2a \mathcal{Y}'_0^{1/2} e^{-r/2a}). \quad (14.8)$$

Соответственно функция Иоста определяется выражением

$$\mathfrak{f}(k) = e^{iak \ln(a^2 \mathcal{Y}'_0)} \Gamma(1 - 2iak) J_{-2iak}(2a \mathcal{Y}'_0^{1/2}). \quad (14.9)$$

Из формулы (14.9) непосредственно видно, что \mathfrak{f} имеет полюсы в нижней полуплоскости k в точках $k = -in/2a$, $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, соответствующий элемент S -матрицы S_0 имеет бесконечное множество полюсов на *главном листе* поверхности E в точках $E = -n^2/8\mu a^2$, где $n = 1, 2, \dots$, причем эти полюсы не соответствуют связанным состояниям. В случае непрерывной суперпозиции экспоненциальных потенциалов, определяемой формулой вида (12.22), подобные полюсы превращаются в левый разрез.

Связанные состояния, виртуальные состояния и резонансы отвечают таким значениям k , для которых

$$J_{-2iak}(2a \mathcal{Y}'_0^{1/2}) = 0 \quad (14.10)$$

и соответственно $\text{Im } k > 0$ (связанные состояния) или $\text{Im } k < 0$. Значения величин a и \mathcal{Y}'_0 , при которых появляются новые связанные состояния, определяются из уравнения

$$J_0(2a \mathcal{Y}'_0^{1/2}) = 0. \quad (14.11)$$

Обобщение. Появление у функции $f(k, r)$ бесконечного множества полюсов в точках $k = -in/2a$, где $n = 1, 2, \dots$, является общей особенностью потенциалов ¹⁾, асимптотически ведущих себя на бесконечности как $e^{-r/a}$. Это легко показать в случае, когда при $r > R$ потенциал совпадает с потенциалом (14.7), а при $r < R$ как-то отличается от него. Действительно, нам нужно вычислить «внутреннюю» функцию $\varphi(k, r)$. «Внешняя» функция $f(k, r)$ определяется выражением (14.8). Для функции Иоста имеется формула (12.28), и ее можно найти, зная φ и f в точке $r = R$. Поскольку функция f содержит множитель $\Gamma(1 - 2iak)$, то функция Иоста \mathfrak{f} в общем случае также будет содержать этот множитель. В исключительных случаях, конечно, некоторые (или даже все) из рассматриваемых полюсов могут отсутствовать.

Можно ожидать, что, вообще говоря, подобные бесконечные последовательности полюсов появятся также и в случае высших угловых моментов. Действительно, воспользуемся формулой (14.8) для $f(k, r)$ и найдем $f_l(k, r)$, обращаясь к интегральному уравнению

$$f_l(k, r) = f(k, r) + l(l+1) \int_r^\infty dr' \mathcal{G}(k; r, r') r'^{-2} f_l(k, r'); \quad (14.12)$$

входящая сюда функция Грина дается формулами (12.42) и (14.8). Из первого равенства (12.42) вытекает, что функция Грина не имеет особенностей в точках $k = -in/2a$, так как функция φ всюду регулярна. Поэтому решение уравнения (14.12) будет содержать ту же самую функцию Γ , что и f , и, следовательно, будет иметь те же самые полюсы.

Приведенное рассмотрение можно полностью обобщить на случай, когда потенциал представляется конечной суммой экспонент. Например, если потенциал представляет собой сумму экспонент $e^{-r/a}$ и $e^{-r/b}$, то полюсы появляются в точках $k = -i(n/2a + m/2b)$. Такой потенциал оказывается осциллирующим, если a и b комплексные.

¹⁾ Как видно из рассмотрения примера, приведенного в § 7, п. 1, это *не всегда* так.

§ 4. ПОТЕНЦИАЛЫ ХЮЛЬТЕНА

Предположим теперь, что потенциал имеет вид

$$\mathcal{V}(r) = \frac{\mathcal{V}_0 e^{-r/a}}{1 - e^{-r/a}}; \quad (14.13)$$

на больших расстояниях этот потенциал ведет себя как $\mathcal{V}_0 e^{-r/a}$, а в нуле — как $a\mathcal{V}_0 r^{-1}$. Потенциал (14.13) является частным случаем *потенциала Эккарта*

$$\mathcal{V}(r) = \mathcal{V}_1 \frac{e^{-r/a}}{1 + ce^{-r/a}} + \mathcal{V}_2 \frac{e^{-r/a}}{(1 + ce^{-r/a})^2}, \quad (14.14)$$

для которого парциальное уравнение Шредингера, соответствующее s -волне, допускает точное решение. Уравнение Шредингера с потенциалом (14.13) можно решить, сделав подстановку $x = e^{-r/a}$, $f(k, r) = e^{ikr} g(k, r)$. При этом задача сводится к решению гипергеометрического уравнения и мы получаем ([242], т. 1, стр. 67)

$$f(k, r) = e^{ikr} F(A, B, C; e^{-r/a}), \quad (14.15)$$

где

$$\begin{aligned} A &= -iak + ia(k^2 + \mathcal{V}_0)^{1/2}, \\ B &= -iak - ia(k^2 + \mathcal{V}_0)^{1/2}, \\ C &= 1 - 2iak. \end{aligned}$$

Следовательно, ([242], т. 1, стр. 112 и 113),

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}(k) &= F(A, B, C; 1) = \frac{\Gamma(1 - 2iak) \Gamma(1)}{\Gamma(1 + B) \Gamma(1 + A)} = \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{a^2 \mathcal{V}_0}{n(n - 2iak)} \right]. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Таким образом, функция Йоста \mathfrak{f} в нижней полуплоскости k имеет полюсы в точках

$$k = -\frac{in}{2a}, \text{ где } n = 1, 2, \dots$$

Соответственно возникает бесконечное множество виртуальных состояний, положение которых не зависит от величины взаимодействия. Если потенциал соответствует притяжению ($\mathcal{V}_0 < 0$) и если $a^2 |\mathcal{V}_0| > 1$, то имеются связанные состояния в точках

$$k = k_n = \frac{i(a^2 |\mathcal{V}_0| - n^2)}{2an}, \text{ где } n = 1, 2, \dots, \text{ причем } n < a |\mathcal{V}_0|^{1/2}.$$

Собственные значения ядра радиального уравнения Липпмана—Швингера для s -волны имеют вид

$$\alpha_n = \frac{a^2 \mathcal{V}_0}{n(2iak - n)}, \text{ где } n = 1, 2, \dots$$

Если (при действительных k) выполняется неравенство

$$a^2 |\mathcal{V}_0| < (1 + 4a^2 k^2)^{1/2},$$

то все рассматриваемые собственные значения находятся внутри единичного круга и при энергии $k^2/2\mu$ борновский ряд сходится. Следовательно, в случае потенциала (14.13) необходимое и достаточное условие сходимости борновского ряда для s -волны при любой энергии заключается в отсутствии связанных s -состояний для потенциала (14.13), соответствующего притяжению.

§ 5. ПОТЕНЦИАЛЫ ЮКАВЫ

Если потенциал имеет вид (12.22), т. е.

$$\mathcal{V}(r) = \int da \rho(a) e^{-ar}, \quad (14.17)$$

где

$$\rho(a) = 0 \quad \text{при} \quad a < a_0,$$

или имеет вид (12.22а), то решение уравнения Шредингера невозможно представить в замкнутой форме. Многие важные свойства решений, функций Иоста и \mathbf{S} -матриц для потенциалов вида (14.17) уже были рассмотрены раньше. Здесь мы подробно опишем один метод вычисления элементов \mathbf{S} -матрицы в случае потенциала (14.17). Ниже мы будем считать, что $l = 0$. Читателя, интересующегося случаем $l > 0$, мы отсылаем к соответствующей литературе [578, 266].

В соответствии с предположением о форме потенциала [см. (14.17)], естественно попытаться записать решение $f(k, r)$ в виде

$$f(k, r) = \left[1 + \int da \xi(a, k) e^{-ar} \right] e^{ikr}, \quad (14.18)$$

причем следует ожидать, что $\xi(a, k) = 0$ при $a < a_0$. Подставляя (14.17) и (14.18) в уравнение Шредингера для s -волны, получаем уравнение для $\xi(a, k)$:

$$a(a - 2ik) \xi(a, k) = \rho(a) + \int da' \rho(a - a') \xi(a', k). \quad (14.19)$$

Прежде всего отсюда мы видим, что уравнение (14.19) не противоречит предположению о том, что $\xi(a, k) \equiv 0$ при $a < a_0$. Действительно, при этом интегрирование в (14.19) ведется от $a' = a_0$ до $a' = a - a_0$. При $a \leq 2a_0$ интеграл в (14.19) равен нулю. Таким образом, уравнение (14.19) фактически не является интегральным уравнением; его решение в явном виде можно найти при любом заданном значении a . Например, при $a_0 < a < 2a_0$

$$\xi(a, k) = \frac{\rho(a)}{a(a - 2ik)}, \quad (14.20)$$

а при $2a_0 < a < 3a_0$

$$\xi(a, k) = \frac{\rho(a)}{a(a - 2ik)} + \int_{a_0}^{a - a_0} da' \frac{\rho(a - a') \rho(a')}{a(a - 2ik) a' (a' - 2ik)}. \quad (14.20a)$$

Ситуация здесь совершенно аналогична той, которая возникает при рассмотрении представления Мандельштама и условия унитарности (гл. 13, § 4).

Функция Иоста определяется теперь выражением

$$\mathfrak{f}(k) = 1 + \int_{a_0}^{\infty} da \xi(a, k). \quad (14.21)$$

Конечно, чтобы ее найти, необходимо знать ξ при *всех* значениях a , а для этого требуется сделать бесконечно много итераций в уравнении (14.19). После подстановки выражений (14.20), (14.20а) и т. д. в соотношение (14.21) сразу получаем, что функция $\mathfrak{f}(k)$ имеет точку ветвления при $k = -ia_0/2$, возникающую от того, что полюс $\xi(a, k)$ (как функции от a) совпадает с точкой, являющейся пределом интегрирования. От этой точки ветвления начинается левый разрез. Только в случае, когда $\rho(a)$ не обычная, а обобщенная функция (δ -функция), т. е. когда потенциал \mathcal{V} содержит отдельную экспоненту или сумму их, эта точка ветвления может стать полюсом.

Наконец, остается еще вопрос о сходимости интеграла в соотношении (14.21). Нетрудно показать [577], что если величина $|\rho(a)|$ равномерно ограничена, то интеграл сходится абсолютно и равномерно относительно k . Кроме того, функция $f_-(k)$ стремится к единице, когда $|k| \rightarrow \infty$ даже в верхней полуплоскости и даже вблизи мнимой оси. Более точно [577]

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} f(k) = 1$$

при условии, что

$$|\operatorname{Re} k| > c (\operatorname{Im} k)^{-n},$$

где n — произвольное положительное число. Следовательно, $S(k)$ стремится на бесконечности к единице всюду на физическом листе плоскости E .

§ 6. КУЛОНОВСКИЙ ПОТЕНЦИАЛ

1. Чисто кулоновский потенциал

Случай кулоновского потенциала является в известном смысле аномальным. Вследствие медленного убывания этого потенциала на бесконечности (как r^{-1}) он не принадлежит к классу достаточно хороших потенциалов, рассматриваемых в этой книге. Тем не менее мы рассмотрим здесь кулоновский потенциал, поскольку он играет исключительно важную роль. Кроме того, в случае кулоновского потенциала можно в явном виде найти решение уравнения Шредингера при любом l и любых k .

Параболические координаты. Запишем полное уравнение Шредингера в параболических координатах

$$\xi = r - z, \quad \zeta = r + z, \quad \varphi$$

(φ — угол поворота вокруг оси z). Уравнение Шредингера примет вид

$$\left[-\frac{4}{\xi + \zeta} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) - \frac{1}{\xi \zeta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{nk}{\xi + \zeta} \right] \psi = k^2 \psi, \quad (14.22)$$

где

$$n = \frac{Z_1 Z_2 e^2 \mu}{k} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{v},$$

$Z_1 e$ и $Z_2 e$ — заряды двух частиц, v — их относительная скорость, ось z выбрана в направлении падающего пучка.

В отсутствие поля искомое решение имеет вид e^{ikhz} . Будем искать решение, отличающееся от e^{ikhz} только наличием дополнительной *расходящейся* сферической волны, т. е. решение вида

$$\psi = e^{ikhz} f(\xi).$$

При этом мы ожидаем, что удастся выбрать функцию f такой, чтобы она асимптотически отличалась от единицы на величину вида $e^{ikh\xi} = e^{ih(r-z)}$. После подстановки ψ в уравнение (14.22) получаем конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение для функции f :

$$\xi f'' + (1 - ik\xi) f' - nkf = 0. \quad (14.23)$$

Регулярное решение уравнения (14.23) имеет вид ¹⁾

$$f(\xi) = c\Phi(-in, 1; ik\xi),$$

где Φ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция

$$\Phi(a, b; x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+s) \Gamma(b)}{\Gamma(b+s) \Gamma(a)} \frac{x^s}{s!}. \quad (14.24)$$

¹⁾ См. [242], стр. 241; здесь мы пользуемся обозначениями из этой книги.

При больших x функцию Φ можно представить в виде ([242], стр. 266)

$$\Phi(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)} e^{-a \ln(-x)} \left[1 + \frac{a(a+1-b)}{x} + \dots \right] + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{x+(a-b) \ln x} \left[1 + \frac{(1-a)(b-a)}{x} + \dots \right]. \quad (14.25)$$

Следовательно, асимптотика волновой функции ψ имеет вид

$$\psi^{(+)} \approx \frac{ce^{1/2\pi n}}{\Gamma(1+in)} \left\{ e^{i[kz+n \ln k(r-z)]} \left[1 - \frac{n^2}{ik(r-z)} + \dots \right] + A_c(\theta) r^{-1} e^{i[kr-n \ln 2kr]} \left[1 - \frac{(1+in)^2}{ik(r-z)} + \dots \right] \right\}, \quad (14.26)$$

где

$$A_c(\theta) = -\frac{n}{2k \sin^2 1/2\theta} e^{-ni \ln \sin^2 1/2\theta + 2i\eta_0} \quad (14.27)$$

и

$$\eta_0 = \arg \Gamma(1+in). \quad (14.28)$$

Для того чтобы ведущие члены в обеих квадратных скобках в (14.26) были действительно главными, необходимо предположить, что выполняется неравенство

$$\left| \frac{n^2}{k(r-z)} \right| \ll 1. \quad (14.29)$$

Для выполнения (14.29) требуется не только, чтобы r было велико, но также и то, чтобы не рассматривалось рассеяние на слишком малые углы. Однако чем больше расстояние от рассеивающего центра, тем меньшим можно взять угол рассеяния. Поскольку в эксперименте kr всегда очень велико, то исключаемые углы слишком малы, чтобы при них можно было проводить измерения.

Сечение. В отличие от поведения волновой функции (10.11), соответствующей хорошему потенциалу, волновая функция в случае медленно убывающего кулоновского потенциала содержит логарифмически осциллирующие фазовые вклады. Другими словами, кулоновский потенциал никогда полностью не «выключается». Следовательно, необходимо дать новое определение сечения рассеяния. Из формулы (14.26) видно, что если соблюдать надлежащие предосторожности и не рассматривать рассеяния вперед, то отношение потока в расходящейся сферической волне к потоку в падающей плоской волне равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_c(\theta)|^2 = \frac{n^2}{4k^2 \sin^4 1/2\theta} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2 1/2\theta} \right)^2; \quad (14.30)$$

это формула Резерфорда для сечения рассеяния. Сравнивая выражение (14.30) с (5.16), видим, что формула (14.30) совпадает с соответствующей классической формулой. Заметим, что формула Резерфорда справедлива независимо от знаков зарядов, т. е. от того, притягиваются или отталкиваются заряды. Однако фаза кулоновской амплитуды $A_c(\theta)$ от этого, конечно, зависит, и эта зависимость особенно сильна для рассеяния вперед при низких энергиях.

Различие между классическим и квантовомеханическим результатами проявляется тогда, когда две сталкивающиеся частицы тождественны. В классическом случае результирующий поток в некотором направлении складывается из потока налетающих частиц и из потока тех отраженных частиц, которые отлетают при рассеянии налетающих частиц в противоположном направлении:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0(\theta)}{d\Omega} + \frac{d\sigma_0(\pi-\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E} \right)^2 \left(\operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2} \theta + \sec^4 \frac{1}{2} \theta \right), \quad (14.31)$$

тогда как в квантовом случае следует складывать только соответствующие амплитуды

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A_c(\theta) + A_c(\pi - \theta)|^2 = \left(\frac{Z^2 e^2}{4E}\right)^2 \left[\operatorname{cosec}^4 \frac{1}{2} \theta + \sec^4 \frac{1}{2} \theta + 8 \operatorname{cosec}^2 \theta \cos \left(n \ln \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \theta \right) \right]. \quad (14.32)$$

Появляющийся в (14.32) дополнительный член называется *обменным* вкладом, так как он возникает вследствие неразличимости частиц. Формула (14.32) обычно называется формулой *Мотта* для сечения рассеяния. Если явно ввести постоянную Планка, то получим

$$n = \frac{Z^2 e^2}{\hbar v}.$$

Когда $\hbar v \ll Z^2 e^2$, обменный член как функция угла рассеяния очень быстро осциллирует и, следовательно, не дает вклада в экспериментально наблюдаемое сечение. Отметим, что для кулоновского потенциала классический результат получается в пределе *малых* скоростей, т. е. *больших* длин волн, в то время как обычно переход от квантовой механики к классической аналогичен переходу от физической оптики к геометрической, т. е. классические результаты соответствуют *коротковолновому* пределу (гл. 18).

Следует сказать несколько слов о борновском приближении. Из соотношения (14.27) видно, что абсолютная величина амплитуды A_c пропорциональна e^2 . Следовательно, абсолютная величина амплитуды в точности совпадает со своим первым борновским приближением. Напротив, фаза амплитуды A_c не дается борновским приближением. Кроме того, асимптотическая формула (14.26) для волновой функции содержит дополнительные множители вида $\exp(-in \ln 2kr)$. Допустим теперь, что нам удалось построить борновский ряд для $\psi^{(+)}$ и определить по нему асимптотический вид $\psi^{(+)}$, предполагая, что он определяется обычной формулой (10.11). Тогда в амплитуду должен войти множитель $\exp(-in \ln 2kr)$, т. е. фаза должна обращаться в бесконечность в пределе $r \rightarrow \infty$. Этим объясняется, почему амплитуда, вычисленная стандартным способом, содержит бесконечный фазовый множитель. Более того, так как абсолютная величина амплитуды совпадает со своим первым борновским приближением, бесконечность появится, только начиная со *второго* борновского приближения, которое содержит величину $-in \ln 2kr$, возникающую при разложении в ряд фазового множителя.

Множитель Гамова. Согласно формуле (14.26), кулоновскую волновую функцию можно нормировать на единичный падающий поток, полагая

$$c = e^{-1/2n\pi} \Gamma(1 + in) v^{1/2}. \quad (14.33)$$

Тогда функция примет вид

$$\psi_c^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = v^{-1/2} e^{-1/2n\pi} \Gamma(1 + in) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Phi[-in, 1; i(kr - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \quad (14.34)$$

Поскольку имеет место соотношение

$$\frac{\Gamma(1 + in)}{\Gamma(1 - in)} = \frac{in\pi}{\sin in\pi} = \frac{2n\pi}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}},$$

то квадрат модуля волновой функции при $\mathbf{r} = 0$ равен

$$|\psi_c^{(+)}(\mathbf{k}, 0)|^2 = v^{-1} \frac{2n\pi}{e^{2n\pi} - 1}. \quad (14.35)$$

При очень малых скоростях квадрат модуля волновой функции для потенциала, отвечающего *притяжению* ($n < 0$), становится равным

$$\frac{2\pi Z^2 e^2}{v^2};$$

соответственно при *отталкивательном* потенциале он равен

$$2\pi Z^2 e^2 v^{-2} e^{-2\pi Z^2 e^2 / v}.$$

Несмотря на то что сечение не зависит от того, имеют ли заряды одинаковые или противоположные знаки, физически очевидно, что от этого зависит детальное поведение частиц и, в частности, вероятность нахождения частиц вблизи друг друга. Множитель, показывающий, во сколько раз отличается плотность частиц в точке $r=0$ в этих двух случаях, т. е. величина

$$e^{-2\pi Z^2 e^2 / v},$$

называется *множителем Гамова*.

Парциальные волны. Обратимся к рассмотрению парциальных волн. Радиальное уравнение Шредингера содержит потенциал

$$\mathcal{V}^r(r) = 2nkr^{-1}.$$

Подстановкой

$$\varphi_l^{(c)}(k, r) = r^{l+1} e^{ikr} g_l$$

это уравнение Шредингера можно свести к конфлюэнтному гипергеометрическому уравнению для функции g_l :

$$r g_l'' + 2(l+1+ikr) g_l' + 2[ik(l+1) - nk] g_l = 0.$$

Используя граничное условие (12.132) и (14.23) и применяя преобразование Куммера ([242], стр. 241), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_l^{(c)}(k, r) &= r^{l+1} e^{ikr} \Phi(l+1+in, 2l+2; -2ikr) = \\ &= r^{l+1} e^{-ikr} \Phi(l+1-in, 2l+2; 2ikr). \end{aligned} \quad (14.36)$$

Таким образом, функцию $\varphi_l^{(c)}(k, r)$ можно выразить через *функцию Уиттекера* ([242], стр. 251):

$$\varphi_l^{(c)}(k, r) = (2ik)^{-l-1} M_{in, l+1/2}(2ikr) = (-2ik)^{-l-1} M_{-in, l+1/2}(-2ikr). \quad (14.36a)$$

Функцию $\varphi_l^{(c)}(k, r)$ можно также выразить через *функции Лагерра* ([242], стр. 256):

$$\varphi_l^{(c)}(k, r) = r^{l+1} e^{ikr} \Gamma(-in-l) L_{-in-l-1}^{(2l+1)}(-2ikr). \quad (14.36b)$$

Когда $in-l$ равно целому положительному числу m , функции Лагерра с точностью до множителя обращаются в *полиномы Лагерра*¹⁾

$$L_m^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1+m)} L_m^\alpha.$$

Аналогично можно найти нерегулярное решение $f_l(k, r)$, но теперь нельзя пользоваться граничным условием (12.15). Из вида радиального уравнения Шредингера ясно, что проще всего определить нерегулярное решение, потре-

¹⁾ Мы пользуемся обозначениями книги [242], где определение полиномов Лагерра L_m^α дано в т. 2, стр. 188. Иногда в литературе используются полиномы Лагерра \mathcal{Q}_m , определяемые с помощью производящей функции

$$(1-s)^{-1} e^{xs(s-1)^{-1}} = \sum \frac{s^m \mathcal{Q}_m(x)}{m!},$$

и присоединенные полиномы Лагерра, определяемые соотношением

$$\mathcal{Q}_m^n = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{Q}_m.$$

Присоединенные полиномы \mathcal{Q}_m^n связаны с полиномами Лагерра L_{m-n}^α формулой

$$\mathcal{Q}_m^n = m! (-1)^n L_{m-n}^\alpha.$$

бывав, чтобы оно удовлетворяло условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-i(kr - n \ln 2kr)} f_l^{(c)}(k, r) = 1. \quad (14.37)$$

Логарифмический член в (14.37) — это аналог соответствующего члена из формулы (14.26), имеющегося для сферической волны. Следовательно, решение $f_l^{(c)}$ имеет вид

$$f_l^{(c)}(k, r) = -(2kr)^{l+1} i e^{i(kr - 1/2\pi l)} e^{1/2\pi n} \Psi(l+1+in, 2l+2; -2ikr), \quad (14.38)$$

где Ψ — нерегулярная конфлюэнтная гипергеометрическая функция, определяемая выражением ([242], стр. 245)

$$\Psi(a, b; x) = \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} \Phi(a, b; x) + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} x^{1-b} \Phi(a-b+1, 2-b; x). \quad (14.39)$$

Поскольку асимптотика функции Ψ имеет вид ([242], стр. 266)

$$\Psi(a, b; x) \approx x^{-a},$$

то легко видеть, что правая часть выражения (14.38) удовлетворяет граничному условию (14.37). Таким образом, $f_l^{(c)}$ является тоже функцией Уиттекера, но уже другой ([242], стр. 251):

$$f_l^{(c)}(k, r) = W_{-in, l+1/2}(-2ikr). \quad (14.38a)$$

Функцию $\varphi_l^{(c)}$ теперь можно выразить через функции $f_{l+}^{(c)}$ и $f_{l-}^{(c)}$. При $\text{Re } k > 0$ имеем ([242], стр. 247)

$$\varphi_l^{(c)}(k, r) = e^{1/2\pi n} (2k)^{-l-1} \left[\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-in)} e^{-i/2\pi(l+1)} f_{l+}^{(c)}(k, r) + \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1+in)} e^{i/2\pi(l+1)} f_{l-}^{(c)}(k, r) \right]. \quad (14.40)$$

На основании (14.40) мы приходим к заключению, что соответствующим аналогом функций Иоста будут функции

$$\mathcal{F}_{l\pm}^{(c)}(k) = \frac{(2k)^{-l} e^{1/2\pi n \pm i/2\pi l} \Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1 \pm in)}, \quad (14.41)$$

а функции $\tilde{f}_{l\pm}^{(c)}$, определяемые выражениями (12.142) и (12.142a), имеют вид

$$\tilde{f}_{l\pm}^{(c)}(k) = \frac{e^{1/2\pi n} \Gamma(l+1)}{\Gamma(l+1 \pm in)}. \quad (14.41a)$$

Пользуясь (12.154), найдем кулоновскую S -матрицу

$$S_l^{(c)} = \frac{\Gamma(l+1+in)}{\Gamma(l+1-in)}. \quad (14.42)$$

Отметим, что $\tilde{f}_l^{(c)}$ стремится к единице при $k \rightarrow \pm \infty$. Однако при $k=0$ функция $f_l^{(c)}$ сильно сингулярна как из-за наличия Γ -функции, так и из-за множителя $e^{1/2\pi n}$.

Асимптотика функции $\varphi_l^{(c)}$ при $r \rightarrow \infty$, очевидно, определяется выражением

$$\varphi_l^{(c)}(k, r) \approx 2 (2k)^{-l-1} e^{1/2\pi n} \frac{\Gamma(2l+2)}{|\Gamma(l+1+in)|} \times \sin\left(kr - n \ln 2kr - \frac{1}{2} \pi l + \eta_l\right), \quad (14.43)$$

¹⁾ Напомним, что n содержит k^{-1} .

где

$$\eta_l = \arg \Gamma(l + 1 + in). \quad (14.44)$$

Мы видим, что и здесь появилась логарифмическая фаза, так что фазовый сдвиг следует определять не формулой (11.15), а как-то иначе. Из соотношений (14.42) и (14.44) следует, что

$$S_l^{(c)} = e^{2in\eta_l}. \quad (14.45)$$

Физическую волновую функцию, связанную с трехмерной волновой функцией $\psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ соотношением (11.6), находим, сравнивая (14.43) с (11.9)¹⁾:

$$\begin{aligned} \psi_l^{(c)(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} (2k)^{l+1} e^{-1/2\pi n} \frac{\Gamma(l+1+in)}{(2l+1)!} \varphi_l^{(c)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \\ &= \frac{1}{2} (2kr)^{l+1} e^{-1/2\pi n} \frac{\Gamma(l+1+in)}{(2l+1)!} e^{ikr} \Phi(l+1+in, 2l+2; -2ikr). \end{aligned} \quad (14.46)$$

Иногда при вычислениях с использованием кулоновских волновых функций бывает полезно следующее интегральное представление ([242], стр. 243):

$$\psi_l^{(c)(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{(2kr)^{l+1} e^{-1/2\pi n}}{2\Gamma(l+1-in)} \int_0^1 du e^{ikr(1-2u)} u^{l+in} (1-u)^{l-in}. \quad (14.47)$$

Связанные состояния. Согласно формуле (14.42), полюсы функции $S_l^{(c)}$ совпадают с полюсами Γ -функции, определяемыми уравнением

$$\frac{1}{\Gamma(l+1+in)} = 0. \quad (14.48)$$

Из него следует, что если $Z_1 Z_2 < 0$, то связанные состояния возникают при

$$k_m = i \frac{Z_1 Z_2 e^2 \mu}{m+l+1}, \quad \text{где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (14.49)$$

Согласно (14.36б), волновые функции связанных состояний можно выразить через обобщенные полиномы Лагерра L_m^{2l+1} .

Вследствие медленного спада кулоновского поля на больших расстояниях для каждого фиксированного углового момента существует бесконечное множество связанных состояний, причем основному состоянию отвечает энергия связи

$$E_0 = \frac{1}{2} (Z_1 Z_2 e^2)^2 \mu = \frac{1}{2} (Z_1 Z_2)^2 \alpha^2 \mu c^2,$$

где $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ — постоянная тонкой структуры. Последовательность связанных состояний k_m имеет точку сгущения $k \rightarrow 0$. Появление точки сгущения в данном случае оказалось возможным вследствие того, что функция $f_l^{(c)}$ имеет в нуле существенно особую точку. Кроме того, так как энергия зависит только от комбинации целых чисел $N = m + l + 1$, то имеет место N -кратное вырождение (в дополнение к вырождению вследствие инвариантности относительно вращений).

Траектории полюсов. Для траекторий Редже имеем

$$l = -i Z_1 Z_2 e^2 \mu k^{-1} - m - 1, \quad m = 0, 1, \dots$$

Для притягивательного потенциала траектории Редже начинаются при значении энергии $E = -\infty$ в точках $l = -m - 1$ на l -плоскости. Когда $E \rightarrow 0$, траектории уходят на бесконечность $l = +\infty$. При увеличении энергии от $E = 0$ до $E = +\infty$ траектории идут сверху вниз, параллельно мнимой оси

¹⁾ Здесь $\psi_l^{(+)}$ нормирована не на единичный падающий поток, а согласно (10.11).

и заканчиваются в точках $-m - 1$ при $E \rightarrow +\infty$. Для отталкивательного потенциала траектории Редже идут влево к $l = -\infty$, а при $E \rightarrow +\infty$ заканчиваются также в точках $-m - 1$.

На k -плоскости каждый полюс, соответствующий определенному связанному состоянию, при изменении l движется из своего исходного положения при $l = 0$ к началу координат при $l \rightarrow \infty$. Других полюсов, кроме тех, которые соответствуют связанным состояниям, в этом случае нет. В случае отталкивательного потенциала имеются только виртуальные состояния; траектории соответствующих им полюсов идут по мнимой оси и оканчиваются в точке $k = 0$.

Траектории собственных значений α ядра радиального уравнения Липмана — Швингера описываются уравнением

$$\alpha = \frac{-iZ_1Z_2e^2\mu}{(m+l+1)k}.$$

В случае сил притяжения траектории начинаются в нуле при значении $E = -\infty$. Когда E , возрастая, стремится к 0 , каждая траектория α уходит на $+\infty$. При дальнейшем увеличении E от нуля траектории идут вниз вдоль положительной мнимой полуоси и оканчиваются в начале координат, когда $E \rightarrow +\infty$. Если выполняется неравенство

$$\left| \frac{k}{\mu} \right| > Z_1Z_2e^2,$$

то все собственные значения α находятся внутри единичного круга. Однако это не означает, что в данном случае борновский ряд сходится. Ядро GV теперь не является ядром Гильберта — Шмидта, поэтому по причинам, которые уже были рассмотрены выше, борновский ряд не сходится.

Кулоновская функция Грина. Теперь можно в явном виде построить полную кулоновскую функцию Грина. Согласно (12.146), (14.36), (14.38) и (14.41), имеем

$$G_l^{(c)+}(r, r') = i(-1)^l (4k^2rr')^{l+1} e^{ik(r+r')} \frac{\Gamma(l+1+in)}{(2l+1)!} \times \\ \times \Phi(l+1+in, 2l+2; -2ikr_<) \Psi(l+1+in, 2l+2; -2ikr_>). \quad (14.50)$$

Пользуясь интегральным представлением (14.47) и соответствующим представлением функции Ψ ([242], стр. 243), получаем

$$G_l^{(c)+}(r, r') = i(-1)^l (4k^2rr')^{l+1} |\Gamma(l+1+in)|^{-2} \times \\ \times \int_0^1 du \int_0^\infty dv e^{ikr_<(1-2u) - ikr_>(1+2v)} (uv)^{l+in} [(1-u)(1+v)]^{l-in}. \quad (14.51)$$

2. Суперпозиция кулоновского и добавочного потенциалов

Поскольку при добавлении кулоновского потенциала к любому реализующемуся физически потенциалу мы получаем суммарный потенциал, убывающий на бесконечности так же медленно, как и кулоновский потенциал, то рассеяние частиц с электрическими зарядами, которые взаимодействуют также посредством неэлектростатических сил, нельзя рассматривать, применяя методы, разработанные для нейтральных частиц. Мы должны отделять кулоновское взаимодействие от остальных взаимодействий, т. е. записывать H' в виде

$$H' = H'_1 + H'_2,$$

где H'_1 — чисто электростатическое взаимодействие. С формальной точки зрения подходящим для данного случая методом рассмотрения является

использование соотношений (7.76) или (7.67а), т. е. разбиения \mathbf{T} -матрицы на сумму чисто кулоновской \mathbf{T} -матрицы и матрицы, подобной матрице \mathbf{T} , но отличающейся от нее тем, что в этом случае волновая функция свободной частицы заменяется на кулоновскую волновую функцию. При этом как первый член этой суммы, так и волновая функция $\Psi_1^{(-)}$ нам известны в явном виде, и мы всегда можем в принципе любым стандартным методом вычислить второй член. Если $\Psi^{(+)}$ заменить кулоновской волновой функцией, то в результате мы получим так называемое *борновское приближение в методе искаженных волн*.

Если оператор H'_2 сферически симметричен, то второй член в формуле (7.76) можно разложить по парциальным волнам. Так как первый член нам известен в явном виде, то нет необходимости в его разложении. Другими словами, амплитуду рассеяния можно записать в виде

$$A(k, \theta) = A_c(k, \theta) + A'(k, \theta), \quad (14.52)$$

где A_c определяется формулой (14.27), а A' мы разложим так же, как в формуле (11.10) или (11.10а).

Сечение будет содержать теперь интерференционный член между A_c и A' . Поскольку фаза амплитуды A_c существенно зависит от того, одинаковы или противоположны знаки зарядов рассеивающихся частиц, то столь же существенно от этого должен зависеть интерференционный член, особенно для рассеяния вперед при низких энергиях. То, что это должно быть именно так, ясно и из физических соображений. Если частицы движутся медленно и отталкиваются, то они не могут проникнуть в область, где велики некулоновские силы. Однако если частицы имеют противоположные заряды, то они могут проникнуть в эту внутреннюю область.

При вычислении A' все «свободные» волновые функции, такие, как (11.5), которые прежде содержались в соответствующих выражениях, теперь нужно заменить кулоновскими волновыми функциями: $u_l(kr)$ заменяется на функцию $\varphi_l^{(c)}$, определяемую формулой (14.36), а $\omega_l^{(+)}(kr)$ — на $f_l^{(c)}$, определяемую формулой (14.38). Полную волновую функцию можно найти, решив интегральное уравнение (11.7), в котором u_l заменено на $\varphi_l^{(c)}$, а функция Грина G_l^\pm заменена на кулоновскую функцию Грина $G_l^{(c)\pm}$, определяемую выражением (14.50); V в данном случае обозначает *добавочный* потенциал. Асимптотически радиальная волновая функция, соответствующая угловому моменту l , пропорциональна

$$\sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l - n \ln 2kr + \eta_l + \delta_l\right),$$

где η_l — кулоновский фазовый сдвиг, определенный по формуле (14.44). Приведенная выше асимптотическая формула для радиальной волновой функции фактически дает определение *добавочного* фазового сдвига δ_l . Используя фазы δ_l , добавочную амплитуду A' можно записать в виде разложения

$$A'(k, \theta) = k^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i(2\eta_l + \delta_l)} \sin \delta_l P_l(\cos \theta). \quad (14.53)$$

Функции φ_l и f_l могут быть определены так же, как в гл. 12, только u_l и $\omega_l^{(\pm)}$ нужно заменить на соответствующие кулоновские функции, а граничное условие (12.15) — на граничное условие (14.37). Так как формула (12.27) по-прежнему справедлива, то функция Иоста \mathcal{F}_l определяется, как и раньше, выражением (12.28), а функция φ_l связана с f_l соотношением (12.29). Следовательно, элемент \mathbf{S} -матрицы по-прежнему выражается через \mathcal{F}_l формулой (12.154). В наших новых обозначениях S_l имеет вид

$$S_l = e^{2i(\eta_l + \delta_l)}.$$

Для функции Юста, воспользовавшись интегральными уравнениями для функций f_l и φ_l , а также представлением функции Грина (12.146), можно получить теперь вместо (12.143) и (12.144) интегральные представления

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(k) &= \mathcal{F}_l^{(c)}(k) + \int_0^\infty dr \varphi_l^{(c)}(k, r) \mathcal{V}^*(r) f_l(k, r) = \\ &= \mathcal{F}_l^{(c)}(k) + \int_0^\infty dr f_l^{(c)}(k, r) \mathcal{V}^*(r) \varphi_l(k, r), \end{aligned} \quad (14.54)$$

где \mathcal{V}^* — добавочный потенциал к потенциалу кулоновского поля.

§ 7. ПОТЕНЦИАЛЫ БАРГМАНА И ИХ ОБОБЩЕНИЯ

1. Общий метод

Рассмотрим теперь весьма широкий класс потенциалов, для которых можно найти в явном виде решение радиального уравнения Шредингера при каком-нибудь фиксированном значении l для любых энергий.

Допустим, что при заданном значении l решения $\varphi_l^{(0)}$ и $f_l^{(0)}$ радиального уравнения Шредингера с потенциалом $\mathcal{V}^{(0)}$ известны. Допустим также, что известны соответствующие элементы S -матрицы $S_l^{(0)}$. Потенциал $\mathcal{V}^{(0)}$ может быть, например, кулоновским потенциалом или вообще равняться нулю. Мы хотим найти такой потенциал $\Delta\mathcal{V}$, что если его добавить к $\mathcal{V}^{(0)}$, то элементы S -матрицы S_l будут отличаться от $S_l^{(0)}$ множителем вида $R(-k)/R(k)$, т. е.

$$S_l(k) = S_l^{(0)}(k) \frac{R(-k)}{R(k)}, \quad (14.55)$$

где $R(k)$ — рациональная функция, которая имеет N простых полюсов в точках $k = \beta_n$ ($\text{Im} \beta_n < 0$), N простых нулей в точках $k = \alpha_n$ и на бесконечности стремится к единице¹⁾, т. е.

$$R(k) = \prod \frac{k - \alpha}{k - \beta}. \quad (14.56)$$

Будем обозначать через κ ($\text{Im} \kappa > 0$) и γ ($\text{Im} \gamma < 0$) те значения α , которые расположены соответственно в верхней или нижней полуплоскостях;

$$S_l(k) = S_l^{(0)}(k) \prod \frac{k + \gamma}{k - \gamma} \frac{k + \kappa}{k - \kappa} \frac{k - \beta}{k + \beta}, \quad (14.55a)$$

где число значений β равно числу значений γ и κ , вместе взятых. Фаза функции $R(-k)/R(k)$ при $k = \infty$ отличается от ее фазы в точке $k = 0$ на величину $2m\pi$, где m равно разности между числом полюсов и числом нулей этой функции, расположенных в верхней полуплоскости. Число m совпадает с числом значений κ . Следовательно, согласно теореме Левинсона, число связанных состояний с угловым моментом l в новой системе, описываемой матричным элементом S_l , равно их числу в системе, описываемой матричным элементом $S_l^{(0)}$, плюс число значений κ (если только новый потенциал является достаточно хорошим). Таким образом, мы подбираем потенциал, который дополнительно к связанным состояниям потенциала $\mathcal{V}^{(0)}$ имеет связанные состояния с энергиями $E = -\kappa^2/2\mu$.

¹⁾ Здесь мы пользуемся упрощенными обозначениями: в суммах и произведениях по α , β и т. д. опущены индексы.

Рассмотрим следующие вронскианы:

$$\begin{aligned} x_{\beta}(k, r) &\equiv \frac{W[\varphi_l^{(0)}(\beta, r), f_l^{(0)}(k, r)]}{\beta^2 - k^2} = \\ &= \int_0^r dr' \varphi_l^{(0)}(\beta, r') f_l^{(0)}(k, r') + \mathcal{F}_l^{(0)}(k) (k^2 - \beta^2)^{-1}, \end{aligned} \quad (14.57)$$

$$\begin{aligned} y_{\beta}(k, r) &\equiv \frac{W[\varphi_l^{(0)}(\beta, r), \varphi_l^{(0)}(k, r)]}{\beta^2 - k^2} = \\ &= \int_0^r dr' \varphi_l^{(0)}(\beta, r') \varphi_l^{(0)}(k, r'), \end{aligned} \quad (14.58)$$

причем при составлении интегралов в (14.57) и (14.58) мы воспользовались уравнением Шредингера, граничными условиями и формулой (12.28). Кроме того, введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} x_{\gamma\beta}(r) &\equiv x_{\beta}(-\gamma, r), \\ x_{\kappa\beta}(r) &\equiv x_{\beta}(-\kappa, r) - C_{\kappa} y_{\beta}(\kappa, r), \end{aligned} \quad (14.59)$$

где C_{κ} — произвольные действительные постоянные, имеющие тот же алгебраический знак, что и функция $\mathcal{F}_l^{(0)}(\kappa)$.

Найдем теперь N функций $K_{\beta}(r)$, решив следующую систему N линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{\beta} x_{\gamma\beta}(r) K_{\beta}(r) &= -f_l^{(0)}(-\gamma, r), \\ \sum_{\beta} x_{\kappa\beta}(r) K_{\beta}(r) &= -f_l^{(0)}(-\kappa, r) + C_{\kappa} \varphi_l^{(0)}(\kappa, r). \end{aligned} \quad (14.60)$$

Вследствие произвольности чисел γ , κ и C_{κ} отдельные уравнения в (14.60), вообще говоря, линейно независимы, т. е.

$$\det [x_{\alpha\beta}(r)] \neq 0. \quad (14.61)$$

Поэтому решение системы существует и мы можем найти K_{β} .

Мы утверждаем, что если к потенциалу $\mathcal{V}^{(0)}$ добавить потенциал

$$\Delta \mathcal{V}(r) \equiv 2 \frac{d}{dr} \sum_{\beta} K_{\beta}(r) \varphi_l^{(0)}(\beta, r), \quad (14.62)$$

то элемент S -матрицы $S_l(k)$ будет иметь вид (14.55) и в дополнение к связанным состояниям, соответствующим потенциалу $\mathcal{V}^{(0)}$, появятся связанные состояния с энергиями $-\kappa^2/2\mu$.

С помощью простых алгебраических преобразований можно показать, что функции

$$\begin{aligned} h(k, r) &\equiv f_l^{(0)}(k, r) + \sum_{\beta} K_{\beta}(r) x_{\beta}(k, r), \\ g(k, r) &\equiv \varphi_l^{(0)}(k, r) + \sum_{\beta} K_{\beta}(r) y_{\beta}(k, r) \end{aligned} \quad (14.63)$$

удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$-h'' + [l(l+1)r^{-2} + \mathcal{V}^{(0)} + \Delta \mathcal{V} - k^2] h = \sum_{\beta} \rho_{\beta}(r) x_{\beta}(k, r) \quad (14.64)$$

и

$$-g'' + [l(l+1)r^{-2} + \mathcal{V}^{(0)} + \Delta \mathcal{V} - k^2] g = \sum_{\beta} \rho_{\beta}(r) y_{\beta}(k, r), \quad (14.65)$$

где

$$\rho_\beta(r) \equiv -K_\beta'' + [l(l+1)r^{-2} + \mathcal{V}^{(0)} + \Delta\mathcal{V} - \beta^2] K_\beta. \quad (14.66)$$

Далее, согласно формулам (14.63) и (14.60), имеют место соотношения

$$h(-\gamma, r) = 0, \quad h(-\kappa, r) - C_\kappa g(\kappa, r) = 0. \quad (14.67)$$

Подставляя соотношения (14.67) в уравнения (14.64) и (14.65), находим, что при всех α

$$\sum_\beta x_{\alpha\beta}(r) \rho_\beta(r) = 0.$$

Поскольку выполняется условие (14.61), то из последнего соотношения следует, что $\rho_\beta(r) = 0$ при всех β . Таким образом, функции h и g удовлетворяют радиальному уравнению Шредингера с потенциалом $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(0)} + \Delta\mathcal{V}$.

Рассмотрим теперь граничные значения. При $r \rightarrow \infty$ имеем

$$x_\beta(k, r) \approx -\frac{\mathcal{F}_{l-}^{(0)}(\beta)}{2\beta(k+\beta)} e^{i(k+\beta)r},$$

$$y_\beta(\kappa, r) \approx \frac{i\mathcal{F}_{l-}^{(0)}(\beta)\mathcal{F}_{l+}^{(0)}(\kappa)}{4\beta\kappa(\kappa-\beta)} e^{i(\beta-\kappa)r}.$$

Следовательно, при больших значениях r уравнение (14.60) для функций $K_\beta(r)$ принимает вид

$$\sum_\beta \frac{K_\beta(r) e^{ir\beta} \mathcal{F}_{l-}^{(0)}(\beta)}{2\beta(\alpha-\beta)} = -1.$$

Отсюда следует, что существует набор из N постоянных a_β , таких, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{K_\beta(r) e^{ir\beta} \mathcal{F}_{l-}^{(0)}(\beta)}{2\beta} = -a_\beta \quad (14.68)$$

и

$$1 - \sum_\beta \frac{a_\beta}{\alpha - \beta} = 0 \quad (14.69)$$

для всех α . Из этого можно сделать вывод, что имеет место соотношение

$$R(k) = 1 - \sum_\beta \frac{a_\beta}{k - \beta}, \quad (14.70)$$

причем обе стороны этого равенства представляют собой рациональные функции от k , имеющие одни и те же нули и полюсы и обе равные единице на бесконечности.

Теперь мы установили, что асимптотика функции $h(k, r)$ при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$h(k, r) \approx e^{ikr} R(-k).$$

Следовательно, в случае потенциала $\mathcal{V}(r)$ имеет место равенство

$$f_l(k, r) = \frac{h(k, r)}{R(-k)}. \quad (14.71)$$

С другой стороны, $g(k, r)$ — регулярное решение и из формул (14.58), (14.60) и (14.63) видно, что оно удовлетворяет тому же самому граничному условию (12.132) при $r \approx 0$, что и функция $\phi_l^{(0)}$. Поэтому

$$\phi_l(k, r) = g(k, r). \quad (14.72)$$

Кроме того, подставляя (12.35) в (14.58) и пользуясь формулами (14.68) и (14.69), получаем, что при $r \rightarrow \infty$

$$g(k, r) \approx \frac{1}{2ik} [\mathcal{F}_l^{(0)} R(-k) e^{ikr} - \mathcal{F}_l^{(0)} R(k) e^{-ikr}]. \quad (14.73)$$

Это подтверждает, что $S_l(k)$ в формуле (14.55) является элементом S -матрицы, соответствующим потенциалу \mathcal{V} . Более того, сравнивая (14.73) с (12.35), находим связь между \mathcal{F}_l и $\mathcal{F}_l^{(0)}$:

$$\mathcal{F}_l(k) = \mathcal{F}_l^{(0)}(k) R(k). \quad (14.74)$$

Чтобы выяснить, действительно ли величина $-\kappa^2/2\mu$ является энергией связанного состояния, в формуле (14.71) положим $k = \kappa$. При этом, согласно (14.67) и (14.72), имеем

$$f_l(\kappa, r) = C_\kappa \prod_{\alpha} \frac{\kappa + \beta}{\kappa - \alpha} \varphi_l(\kappa, r), \quad (14.75)$$

т. е. $f_l(\kappa, r)$ — регулярная функция, экспоненциально убывающая на бесконечности. Можно даже вычислить для нее соответствующий нормировочный интеграл. Воспользовавшись соотношениями (12.49) и (12.52), получим

$$\int_0^\infty dr |\varphi_l(\kappa, r)|^2 = \frac{\prod_{\alpha \neq \kappa} (\alpha^2 + |\kappa|^2)}{\prod_{\beta} (\beta^2 + |\kappa|^2)} \frac{\mathcal{F}_l^{(0)}(\kappa)}{C_\kappa}. \quad (14.76)$$

Заметим, что если при потенциале $\mathcal{V}^{(0)}$ были связанные состояния с определенными значениями энергий, то в случае потенциала \mathcal{V} имеются также связанные состояния с теми же самыми значениями энергий. Действительно, функция \mathcal{F}_l обращается в нуль в тех же точках в верхней полуплоскости, что и функция $\mathcal{F}_l^{(0)}$. [Если мы хотим уничтожить связанное состояние потенциала $\mathcal{V}^{(0)}$, то мы должны выбрать некоторое β лежащим в *верхней* полуплоскости и потребовать, чтобы энергия уничтожаемого связанного состояния равнялась $-\beta^2/2\mu$.]

Выражение (14.62) для добавочного потенциала можно упростить. Введем функции

$$F_\gamma(r) \equiv f_l^{(0)}(-\gamma, r), \\ F_\kappa(r) \equiv f_l^{(0)}(-\kappa, r) - C_\kappa \varphi_l^{(0)}(\kappa, r).$$

Тогда решение уравнения (14.60) примет вид

$$K_\beta(r) = - \sum_{\alpha} [x^{-1}(r)]_{\beta\alpha} F_\alpha(r), \quad (14.77)$$

где $(x^{-1})_{\beta\alpha}$ — элементы матрицы, обратной матрице $x_{\alpha\beta}$. Из вторых равенств (14.57) и (14.58) вытекает соотношение

$$F_\alpha(r) \varphi_l^{(0)}(\beta, r) = \frac{d}{dr} x_{\alpha\beta}(r).$$

Следовательно, подставляя (14.77) в (14.62), получаем¹⁾

$$\Delta \mathcal{V}(r) = -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \det [x_{\alpha\beta}(r)]. \quad (14.78)$$

Краткие выводы. Перечислим полученные нами результаты. Если потенциал имеет вид $\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(0)} + \Delta \mathcal{V}$, где $\Delta \mathcal{V}$ определено выражением (14.78), то решение радиального уравнения Шредингера с угловым моментом l можн

¹⁾ При записи выражения (14.78) мы воспользовались известным правилом дифференцирования определителей:

$$(\det M)' = \text{Sp } M' M^{-1} \det M.$$

найти в явной форме. При этом регулярное и нерегулярное решения даются соответственно выражениями (14.72) и (14.71); энергии связанных состояний равны $-\kappa^2/2\mu$; волновыми функциями связанных состояний являются функции $\varphi_l(\kappa, r)$, нормированные согласно (14.76). Функция Иоста выражается формулой (14.74), а элемент S -матрицы — формулой (14.55). Результаты сохраняются даже в том случае, когда $\Delta\mathcal{U}$ — комплексный потенциал и матричный элемент S_l не унитарен. Для того чтобы матричный элемент S_l был унитарным, мы должны брать все κ чисто мнимыми, а γ и β либо чисто мнимыми, либо в виде пар комплексных чисел, симметрично расположенных относительно мнимой оси. В этом случае потенциал будет действительным. Ничто не мешает нам выбрать какое-то γ равным какому-то $-\kappa$. Если мы выберем такое γ , то в точке, соответствующей связанному состоянию, функция S_l не будет иметь полюса, но функция \mathcal{F}_l в этой точке все еще будет обращаться в нуль.

Потенциалы Баргмана. Если положить $S_l^{(0)}$ равным единице, т. е. считать $\mathcal{U}^{(0)} = 0$, то получающиеся в результате потенциалы будут так называемыми потенциалами Баргмана. Эти потенциалы обладают тем свойством, что при некотором *одном* значении l_0 углового момента l соответствующий им элемент S -матрицы является рациональной функцией от k . Разумеется, при других значениях углового момента элементы S -матрицы не являются рациональными функциями от k и решение уравнения Шредингера невозможно найти в явном виде. Если $l_0 = 0$, то функции, входящие в выражение для потенциала \mathcal{V} , являются экспонентами (умноженными на синусы и косинусы, если β и γ выбраны комплексными). Поэтому, как правило, потенциалы Баргмана, соответствующие s -волне, оказываются экспоненциальными на больших расстояниях. (Ниже на ряде примеров мы увидим, что встречаются случаи, когда это не так.) Отсюда сразу следует, что экспоненциальная асимптотическая форма потенциала *необязательно* приводит к появлению у каждого матричного элемента S_l бесконечного множества полюсов, расположенных в верхней полуплоскости, хотя, как мы видели в § 3, в общем случае такой результат может иметь место.

Если $l \neq 0$, то потенциалы Баргмана строятся с помощью сферических функций Бесселя и, следовательно, они содержат обратные степени r . В результате они в общем случае имеют асимптотическое поведение вида r^{-n} , где $n \geq 3$. Как было показано Фултоном¹⁾ и Ньютоном [642], для того чтобы баргмановский потенциал имел экспоненциальное поведение, достаточно, чтобы при $k \rightarrow 0$ функция $f_l(k)$ имела вид $f_l(k) = f_l^{(0)} + O(k^{2l})$.

2. Частные случаи

Два полюса; связанные состояния отсутствуют. Рассмотрим простейший частный случай, когда $l_0 = 0$ и

$$\mathcal{F}_0(k) = R(k) = \frac{k + ia}{k + ib}, \quad (14.79)$$

т. е. когда имеется одно γ ($\gamma = ia$) и одно β ($\beta = ib$), причем $a \geq 0$, $b \geq 0$. Для фазового сдвига s -волны имеем

$$k \operatorname{ctg} \delta_0 = \frac{ab}{b-a} + \frac{k^2}{b-a}. \quad (14.80)$$

Таким образом, в этом случае приближение эффективного радиуса совпадает с точным решением. Потенциал, приводящий к фазовому сдвигу (14.80), является частным случаем потенциала Экарта (14.14); он имеет вид

$$\mathcal{V}(r) = -8b^2\beta \frac{e^{-2br}}{(1 + \beta e^{-2br})^2}, \quad (14.81)$$

¹⁾ T. Ful ton, не опубликовано.

где

$$\beta = \frac{b-a}{b+a}.$$

Асимптотически при $r \rightarrow \infty$

$$\mathcal{V}^*(r) \approx -8b^2\beta e^{-2br}.$$

Регулярное решение для такого потенциала, соответствующее s -волне, имеет вид

$$\varphi_0(k, r) = \frac{\sin kr}{k} + \frac{b^2 - a^2}{k(k^2 + b^2)} \frac{k \operatorname{sh} br \cos kr - b \operatorname{ch} br \sin kr}{b \operatorname{ch} br + a \operatorname{sh} br}. \quad (14.82)$$

Случай вырождения. Если положить $a = 0$, то при нулевой энергии появится резонанс и мы будем иметь

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{b}{k};$$

к такому фазовому сдвигу приводит потенциал

$$\mathcal{V}^*(r) = -2b^2 \operatorname{sech}^2 br. \quad (14.83)$$

Можно, далее, положить $b = 0$. Соответствующий потенциал имеет вид

$$\mathcal{V}^*(r) = 2a^2(1 + ar)^{-2} \quad (14.84)$$

и не имеет ни второго, ни первого абсолютного момента вследствие того, что соответствующие интегралы расходятся на бесконечности. В результате функция Йоста имеет *полюс* в точке $k = 0$; фазовый сдвиг определяется выражением

$$\operatorname{tg} \delta_0 = -\frac{a}{k},$$

и теорема Левинсона нарушается, так как $\delta_0(0) = -1/2\pi$.

Одно связанное состояние. Если в соотношении (14.79) заменить a на $-\kappa$ ($\kappa > 0$), то приближение эффективного радиуса все еще дает точное решение, но теперь появляется связанное состояние с энергией связи $\kappa^2/2\mu$. Можно теперь указать однопараметрическое семейство различных потенциалов, которые все приводят к одному и тому же фазовому сдвигу и одному и тому же связанному состоянию; эти потенциалы имеют вид

$$\mathcal{V}^*_c(r) = -4\kappa \frac{d}{dr} \left[\operatorname{sh} br \frac{g_c(\kappa, r)}{g_c(\kappa + b, r) - g_c(\kappa - b, r)} \right], \quad (14.85)$$

где

$$g_c(k, r) = k^{-1} (e^{-hr} + c \operatorname{sh} kr).$$

Нормированная волновая функция связанного состояния имеет вид

$$\phi_c(r) = 2 \left(\frac{c\kappa}{b^2 - \kappa^2} \right)^{1/2} \frac{\operatorname{sh} br}{g_c(\kappa + b, r) - g_c(\kappa - b, r)}. \quad (14.86)$$

Чем больше положительное число c , тем сильнее локализована волновая функция связанного состояния вблизи начала координат. Действительно, легко видеть, что

$$\lim_{c \rightarrow 0} \langle r^2 \rangle_c = 0, \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \langle r^2 \rangle_c = \infty.$$

Все потенциалы (14.85), за исключением случая $c = 2$, убывают на бесконечности как $e^{-2\kappa r}$. В случае $c = 2$ потенциал убывает более быстро. В этом состоит общее свойство потенциалов, приводящих к одному и тому же фазовому сдвигу и заданным связанным состояниям с минимальной и максимальной энергиями связи, равными соответственно $\kappa_1^2/2\mu$ и $\kappa_2^2/2\mu$. Если один из них

асимптотически убывает быстрее, чем $e^{-2\kappa_2 r}$, то это свойство присуще только ему; если же один из потенциалов асимптотически убывает медленнее, чем $e^{-2\kappa_1 r}$, то таким свойством обладают все потенциалы (гл. 20, § 2, п. 2).

Рассмотрение семейства потенциалов (14.85) оказывается полезным, например, при нахождении эффективного радиуса и энергии связи нейтрон-протонной модели дейтрона. В этом случае следует положить

$$|\kappa|^{-1} = 4,31 \cdot 10^{-13} \text{ см}, \quad b = 0,944 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-1}.$$

Тогда экспериментальное значение сечения фотораспада дейтрона указывает на то, что c должно равняться 2, т. е. тому единственному значению, которому соответствует наиболее быстро спадающий потенциал [643, 527].

Случай вырождения. Интересный частный случай возникает, если в выражении (14.85) положить $b \rightarrow 0$, $\kappa \rightarrow 0$, а величину $\kappa^2 c = -3N^2$ считать фиксированной. В результате получим потенциалы вида

$$\mathcal{V}'(r) = -6r \frac{2N^2 - r^3}{(N^2 + r^3)^2}. \quad (14.87)$$

Потенциалы (14.87) не приводят к рассеянию s -волны ни при каких энергиях, т. е.

$$S_0(k) = 1,$$

однако они имеют одно связанное состояние при нулевой энергии с нормированной волновой функцией

$$\varphi(r) = \frac{\sqrt{3}Nr}{N^2 + r^3}. \quad (14.88)$$

На бесконечности потенциалы (14.87) ведут себя как r^{-2} , так что в этом смысле они «неразумны». В данном случае в отличие от потенциалов с конечными первым и вторым моментами волновая функция связанного s -состояния с нулевой энергией нормируема. Теорема Левинсона здесь, конечно, неверна. Регулярное решение, соответствующее s -волне, при положительных энергиях имеет вид

$$\varphi_0(k, r) = k^{-1} \sin kr - \frac{3rk^{-3}}{N^2 + r^3} (\sin kr - kr \cos kr). \quad (14.89)$$

Из (14.89) непосредственно вытекает, что $\delta_0(k) \equiv 0$.

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Потенциал с нулевым радиусом действия впервые рассматривался Бете и Пайерлсом [62].

К § 3. Экспоненциальные потенциалы впервые были рассмотрены Бете и Бечером [61], где были получены решения соответствующего уравнения Шредингера (см. там, в частности, стр. 110); см. также работу Юоста [448]. Общее доказательство того, что потенциалы с экспоненциальным поведением на бесконечности $e^{-r/a}$ приводят к полюсам в точках $k = in/2a$, $n = 1, 2, \dots$, дано Пайерлсом [680]. Потенциалы в виде конечной суммы экспонент изучались Мартином [577].

В работе [919] приведены некоторые численные значения фазовых сдвигов при низкой энергии и дано сравнение различных приближений для экспоненциального, гауссовского и юкавского потенциалов.

К § 4. Впервые потенциалы вида (14.14) были рассмотрены Экартом [229], который получил решение соответствующего уравнения Шредингера. Специальный случай потенциала (14.13) рассматривался Хьюлтенем [401]; см. также [453].

К § 5. Используемый в этом параграфе метод разработан Мартином [577]; он же дал обобщение на случай $l > 0$ [578]; см. также работу Фивеля и Клейна [266], в которой развита другая техника.

К § 6. Впервые квантовомеханическим способом формула Резерфорда была получена в борновском приближении как предельный случай экранированного кулоновского поля Венцелем [899], а позже непосредственно для кулоновского поля без экранирования Опленгеймером [672]. Впервые *точно* решение уравнения Шредингера с использованием разложения по парциальным волнам, а также в параболических координатах получено Гордоном [351].

Симметричная формула для сечения рассеяния (14.32) выведена Моттом [626]. Высшие борновские приближения в кулоновском случае рассмотрены Далицем [193]. Фактор Гамова введен в теорию Гамовым [317], а также Герни и Кондоном [360]. Очень подробно кулоновские волновые функции рассмотрены в работах [65, 400, 191, 984].

Кулоновские функции Грина рассматривались в работах [904, 395, 394, 770], а в релятивистском случае — в работах [720, 812, 965, 289]; см. также [380].

Недавно появилась интересная работа [255], в которой рассматривается распределение полюсов S -матрицы в случае экранированного кулоновского потенциала в пределе больших радиусов экранирования. В этой работе показано, что предельное распределение полюсов не совпадает с распределением полюсов кулоновской S -матрицы, определяемым выражением (14.42). В настоящее время не ясно, в какой степени это зависит от характера экранирования. Экранированный кулоновский потенциал рассматривался также в работах [286, 392].

Нестационарная теория рассеяния была распространена на кулоновский случай Доллардом [224].

Релятивистское кулоновское рассеяние рассматривалось, например, в работе [339].

Аналитические свойства парциальных амплитуд рассеяния заряженных частиц детально рассматривались в [177, 991—994].

К § 7. В настоящем параграфе в более общей форме изложены результаты работы [731]. Потенциалы Баргмана впервые рассмотрены (в более ограниченной форме) в работе [36]. Там же рассмотрен специальный случай, описанный в § 7, п. 2. Потенциал (14.85) рассматривался Ньютоном [643] в качестве простой модели дейтрона; см. в этой связи работу [78]. Такие аномальные случаи, как (14.87) и другие, рассмотрены в [622].

К гл. 14. Другие потенциалы, для которых можно в явном виде найти решение уравнения Шредингера, рассматривались в [876, 789]. В этих работах изучался потенциал вида r^{-4} , для которого можно решить уравнение Шредингера при всех k и всех l . Более широкие классы потенциалов рассмотрены в [67, 94, 19].

ЗАДАЧИ

1. Допустим, что взаимодействие двух частиц описывается потенциалом $V(r)$, включающим в себя отталкивательный потенциал непроницаемой сферы. Вывести интегральные уравнения для регулярного и нерегулярного решений и рассмотреть свойства функции Иоста, S -матрицы и фазового сдвига. Доказать теорему Левинсона для разности между фазовым сдвигом, соответствующим данному потенциалу, и фазовым сдвигом, соответствующим потенциалу непроницаемой сферы.

2. Найти функцию Грина для уравнения (14.12) в случае экспоненциального потенциала.

3. Найти функцию Иоста при $l = 0$ для потенциала

$$\mathcal{V}^0 = \begin{cases} -\mathcal{V}_0^0, & r \leq R, \\ -\mathcal{V}_0^0 e^{-(R-r)/a}, & r \geq R, \mathcal{V}_0^0 > 0. \end{cases}$$

Исследовать ее свойства.

4. Найти функцию Иоста, соответствующую s -волне, в случае потенциала

$$\mathcal{V}^0 = \begin{cases} -\mathcal{V}_0^0 e^{-r/a}, & r \leq R, \\ 0, & r \geq R. \end{cases}$$

Рассмотреть ее свойства, особенно в пределе $R \rightarrow \infty$.

5. Рассмотреть функцию Иоста, соответствующую потенциалу Хюльтена, в пределе, когда $a \rightarrow \infty$, $\mathcal{V}_0^0 \rightarrow 0$, но число $\mathcal{V}_0^0 a = c$ фиксировано. Исследовать поведение сингулярностей при таком предельном переходе.

6. Решить уравнение Шредингера для s -волны в случае потенциала Эккарта, поступающая, как и в случае потенциала Хюльтена. Рассмотреть предельный случай: $c = -1$, $a \rightarrow \infty$, $a^2 \mathcal{V}_0^0 = b$, $a^2 \mathcal{V}_0^2 = \alpha$. Исследовать частный случай $c = 0$.

7. Записать потенциалы Эккарта в виде суперпозиции потенциалов Юкавы и найти соответствующие весовые функции.

8. Решить уравнение Шредингера при $k = 0$ и произвольном угловом моменте в случае потенциала

$$V(r) = \frac{\gamma r^{b-2}}{(C + r^b)^2}.$$

Найти регулярное решение и вычислить длину рассеяния. (У к а з а н и е. Сделать подстановку $z = \ln r$; см. [148].)

9. Рассмотреть поведение кулоновского фазового сдвига η_l , определяемого формулой (14.44), в пределе малых энергий. В чем состоит в данном случае критерий малости энергий?

10. Доказать теорему, аналогичную теореме Левинсона, для фазового сдвига δ_l , определяемого формулой (14.53).

11. Пусть S -матрица, соответствующая s -волне, имеет вид

$$S(k) = \frac{k + \gamma \quad k - \gamma^* \quad k - \beta \quad k + \beta^*}{k + \gamma^* \quad k - \gamma \quad k - \beta^* \quad k + \beta},$$

где $\text{Im} \beta < 0$, $\text{Im} \gamma < 0$. Найти потенциал. Рассмотреть отдельно частные случаи: $\text{Re} \gamma \rightarrow 0$, $\text{Re} \beta \rightarrow 0$, $\text{Im} \gamma \rightarrow 0$, $\text{Im} \beta \rightarrow 0$. Обсудить результаты.

12. Исследовать поведение потенциала при изменении γ в выражении для $S(k)$ в задаче 11. Пусть γ становится чисто мнимым, а затем принимает такие значения, при которых появляется соответственно виртуальное и связанное состояния. Результат сравнить с выводами, сделанными в гл. 12, § 1, п. 4. Что происходит, когда виртуальное и связанное состояния совпадают друг с другом?

13. Две бесспиновые частицы с массами 1,4 и 2 Гэв взаимодействуют таким образом, что в сечении рассеяния при энергии в системе центра масс 100 Мэв имеется s -резонанс шириной 1 Мэв. Построить семейство возможных потенциалов взаимодействия, предполагая, что связанные состояния отсутствуют. Начертить график по крайней мере одного из этих потенциалов.

14. Воспользовавшись потенциалом (14.85), показать, что для связанного состояния величина $\langle r^2 \rangle$ стремится к нулю, когда $c \rightarrow 0$, и стремится к бесконечности, когда $c \rightarrow \infty$.

15. Допустим, что взаимодействие двух частиц описывается потенциалом V_0 и связанные состояния отсутствуют. Построить семейство потенциалов, которые приводят к связанному состоянию с энергией $-\kappa^2/2\mu$ и такому же фазовому сдвигу s -волны, что и V_0 . Являются ли эти потенциалы достаточно хорошими? Обсудить результат.

16. Пусть фазовый сдвиг s -волны равен нулю при всех энергиях и имеется одно связанное s -состояние с энергией связи E_0 . Найти соответствующее семейство потенциалов и функцию Йоста, а также волновые функции связанных состояний и состояний рассеяния. Обсудить результат.

17. С помощью подстановки

$$r = x^2, \quad \psi(r) = x^{1/2} \varphi(x)$$

свести радиальное уравнение Шредингера с кулоновским потенциалом к уравнению с другим известным потенциалом, для которого решение также можно найти в явном виде [265]. Обсудить результат.

18. С помощью подстановки

$$r = x^n, \quad \psi(r) = x^m \varphi(x), \quad n = \frac{2}{2-s}, \quad m = \frac{s}{2(2-s)}$$

свести радиальное уравнение Шредингера при $E=0$ с потенциалом

$$V(r) = \gamma r^{-s}$$

к другому известному уравнению. Вычислить таким образом для данного класса потенциалов длины рассеяния при всех угловых моментах и воспользоваться ими для нахождения значений константы взаимодействия, при которых появляются новые связанные состояния. Существуют ли ограничения на величину s ? Если да, то какие? Обсудить результат.

Упругое рассеяние частиц со спином

§ 1. МЕТОД ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

1. Разложение по собственным функциям полного углового момента j и спина s

В гл. 10, § 1, п. 2 мы записали волновую функцию и функцию Грина для свободных частиц с произвольным спином. Теперь мы разложим их на парциальные волны аналогично тому, как это было сделано в гл. 11, § 1, п. 1 в случае частиц с нулевым спином. С этой целью полезно ввести обобщенные сферические функции, подобные векторным сферическим функциям в электромагнитной теории.

Базисные функции. Пусть χ_v^s — нормированные собственные векторы оператора спина, рассмотренные в гл. 8, § 3, п. 2, а $C(lsJ, mvM)$ — коэффициенты Клебша — Гордана (гл. 2, § 1, п. 4). Положим

$$\mathcal{Y}_{jls}^M(\hat{\mathbf{r}}) = \sum_{mv} C(lsJ, mvM) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \chi_v^s. \quad (15.1)$$

Определенные таким образом функции $\mathcal{Y}_{jls}^M(\hat{\mathbf{r}})$ являются собственными функциями оператора квадрата полного углового момента

$$\mathbf{J}^2 \mathcal{Y}_{jls}^M = j(j+1) \mathcal{Y}_{jls}^M \quad (15.2)$$

и его проекции на заданную ось z

$$J_z \mathcal{Y}_{jls}^M = M \mathcal{Y}_{jls}^M. \quad (15.3)$$

Кроме того, они являются собственными функциями оператора квадрата орбитального углового момента (2.16)

$$\mathbf{L}^2 \mathcal{Y}_{jls}^M = l(l+1) \mathcal{Y}_{jls}^M, \quad (15.4)$$

а также квадрата оператора спина

$$\mathbf{S}^2 \mathcal{Y}_{jls}^M = s(s+1) \mathcal{Y}_{jls}^M. \quad (15.5)$$

Введем также вспомогательные функции

$$\mathcal{Y}_j^M(lsv; \hat{\mathbf{k}}) = \sum_{m=-l}^l C(lsJ, mvM) i^{-l} Y_l^m(\hat{\mathbf{k}}) = i^{-l} \chi_v^{s\dagger} \cdot \mathcal{Y}_{jls}^M(\hat{\mathbf{k}}); \quad (15.6)$$

здесь точкой обозначено скалярное произведение в спиновом пространстве.

Разложение вектора состояния и функции Грина. Плоскую волну, например (10.2а), можно разложить в ряд, воспользовавшись соотношением (2.57) и условием полноты коэффициентов Клебша — Гордана [719],

$$\sum_{mv} C(lsJ, mvM) C(lsJ', mvM') = \delta_{jj'} \delta_{MM'}. \quad (15.7)$$

При этом вместо (11.5) получаем

$$\psi_0(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) = \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_{jMl} u_l(kr) \mathcal{Y}_{jl's}^M(\hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{\mathbf{k}}), \quad (15.8)$$

где μ — масса частицы.

В случае двух частиц со спинами s_1 и s_2 , рассматриваемых в системе центра масс, прежде всего нужно построить полные спиновые функции, такие, как в (10.52). В этом случае волновая функция свободных частиц, описывающая их относительное движение, кроме индекса s , имеет индексы s_1 и s_2 [как в выражении, приведенном ниже формулы (10.55)]. Но поскольку s_1 и s_2 сохраняются при рассеянии, то эти индексы можно опустить. Другими словами функция χ_v^s в (15.1) — фактически функция $\chi_v^{s_1 s_2}$ [см. (10.52)], только теперь μ — приведенная масса.

Аналогично разложим функцию Грина. Вместо (11.1) имеем

$$G^\pm(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu \sum_{jMl's} \mathcal{Y}_{jl's}^M(\hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_{jl's}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}') r^{-1} r'^{-1} G_l^\pm(k; r, r'), \quad (15.9)$$

где G_l^\pm определяется выражением (11.2).

Мы предполагаем, что гамильтониан инвариантен относительно вращений. Это означает, что он коммутирует с операторами пространственных вращений, которые представляют собой компоненты оператора полного углового момента, т. е.

$$[J_x, H] = [J_y, H] = [J_z, H] = 0. \quad (15.10)$$

Следовательно, гамильтониан коммутирует также с \mathbf{J}^2

$$[\mathbf{J}^2, H] = 0. \quad (15.11)$$

Таким образом, j и M сохраняются, т. е. являются точными квантовыми числами; наоборот, l и s необязательно должны сохраняться. Таким образом, полную волновую функцию можно записать в виде

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{k}sv; \mathbf{r}) = \left(\frac{2\mu k}{\pi}\right)^{1/2} (kr)^{-1} \sum_{jMl's'} \Psi_{l's', l's}^{j(\pm)}(k, r) \mathcal{Y}_{jl's'}^M(\hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{\mathbf{k}}). \quad (15.12)$$

Коэффициенты $\Psi_{l's', l's}^{j(\pm)}$ не должны обязательно равняться нулю при $l \neq l'$ и $s \neq s'$. Это является следствием того, что спин и орбитальный угловой момент в отдельности не сохраняются. Вследствие инвариантности относительно пространственных вращений коэффициенты $\Psi_{l's', l's}^{j(\pm)}$ не зависят от M , а \mathcal{Y} и \mathcal{Y} в (15.12) имеют один и тот же индекс j (теорема Вигнера — Экарта; см., например, [719], стр. 85).

Радиальные уравнения. После подстановки приведенных выше разложений в уравнение Липпмана — Швингера (10.58) мы приходим к системе интегральных уравнений относительно радиальных функций

$$\begin{aligned} \Psi_{l's', l's}^{j(\pm)}(k, r) = u_l(kr) \delta_{ll'} \delta_{ss'} + \sum_{l''s''} \int_0^\infty dr' G_l^\pm(k; r, r') \times \\ \times \mathcal{Y}_{l's', l''s''}^j(r') \Psi_{l''s'', l's}^{j(\pm)}(k, r'), \end{aligned} \quad (15.13)$$

где

$$\mathcal{Y}_{l's', l''s''}^j(r) = 2\mu \int d\Omega \mathcal{Y}_{jl's'}^{M*}(\hat{\mathbf{r}}) H'(\hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_{jl''s''}^M(\hat{\mathbf{r}}); \quad (15.14)$$

взаимодействие H' , вообще говоря, зависит от спина. Независимость потенциала \mathcal{Y} от M и равенство индексов j у обеих функций \mathcal{Y} в (15.14) есть следствие инвариантности оператора H' относительно пространственных вращений.

ний. Так как в конечном счете M не входит в (15.13), мы еще раз убеждаемся, что ψ не зависит от M в согласии со сказанным выше.

Из (15.12) и (15.13) видно, какой физический смысл имеют индексы у функции ψ . Индексы l', s' указывают, что данная компонента функции ψ соответствует определенному орбитальному и спиновому угловым моментам, т. е. дает амплитуду вероятности обнаружить частицы с данными угловыми моментами. Индексы l, s указывают значения угловых моментов частиц в падающем пучке, т. е. характеризуют граничное условие. Другими словами, l и s представляют значения угловых моментов при $t \rightarrow -\infty$.

Решение системы интегральных уравнений (15.13) удовлетворяет системе уравнений Шредингера

$$-\frac{d^2}{dr^2} \psi_{l's', ls}^j + \sum_{l''s''} \mathcal{V}_{l's', l''s''}^j \psi_{l''s'', ls}^j + \frac{l'(l'+1)}{r^2} \psi_{l's', ls}^j = k^2 \psi_{l's', ls}^j. \quad (15.15)$$

При заданном j значения l и l' подчиняются ограничениям, обусловленным коэффициентами Клебша — Гордана, которые входят в уравнения (15.13) и (15.15) через $\mathcal{V}_{l's', ls}^j$, и допустимыми значениями спинов s и s' . Последние в свою очередь ограничены значениями спинов s_1 и s_2 сталкивающихся частиц. Если оператор H' инвариантен относительно пространственного зеркального отражения и, следовательно, сохраняется четность, то появляются дополнительные ограничения.

Пусть, например, имеются две частицы со спинами $1/2$. Тогда s и s' могут принимать только значения 0 или 1. При $s = 0$ мы будем иметь $l = j$; при $s = 1$ l может принимать значения $l = j$ и $l = j \pm 1$. Если для оператора H' сохраняется четность, то матричные элементы \mathcal{V}' отличны от нуля только для состояний с одинаковой четностью. Следовательно, состояния с четностью $(-1)^j$ не могут быть связаны с состояниями с четностью $(-1)^{j+1}$. Для первых $l = l' = j$, а s и s' равны либо 0, либо 1; для вторых $l = j \pm 1$, $l' = j \pm 1$ и $s = s' = 1$. Все другие комбинации не связаны с перечисленными выше и не представляют интереса; соответствующие матричные элементы равны нулю.

Амплитуды рассеяния. Асимптотическое поведение компонент волновой функции можно найти с помощью (15.13) и (11.4):

$$\psi_{l's', ls}^{j(+)}(k, r) \approx \frac{1}{2} e^{i1/2\pi(l'+1)} (e^{-ikr} \delta_{ll'} \delta_{ss'} - S_{l's', ls}^j e^{-i\pi l'} e^{ikr}), \quad (15.16)$$

где

$$S_{l's', ls}^j = \delta_{ll'} \delta_{ss'} - 2ik^{-1} \sum_{l''s''} \int_0^\infty dr u_{l''}(kr) \mathcal{V}_{l's', l''s''}^j(r) \psi_{l''s'', ls}^{j(+)}(kr). \quad (15.17)$$

С другой стороны, поведение полной волновой функции $\psi^{(+)}(\mathbf{k}sv, r)$ на больших расстояниях определяет амплитуду рассеяния (10.56). Если разложить (10.57) в ряд, то получим

$$A(\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', \mathbf{k}sv) = 4\pi \sum_{jMl'l'} \mathfrak{Y}_j^M(l's'\mathbf{v}', \hat{\mathbf{k}}') a_{l's', ls}^j(k) \mathfrak{Y}_j^{M*}(lsv, \hat{\mathbf{k}}), \quad (15.18)$$

где амплитуды парциальных волн $a_{l's', ls}^j$ равны

$$a_{l's', ls}^j = \frac{S_{l's', ls}^j - \delta_{ll'} \delta_{ss'}}{2ik}. \quad (15.19)$$

Согласно (15.6), можно также написать

$$A(\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', \mathbf{k}sv) = \chi_{\mathbf{v}'}^{s'+} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{k}'s', \mathbf{k}s) \cdot \chi_{\mathbf{v}}^s, \quad (15.20)$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}'s', \mathbf{k}s) = 4\pi \sum_{jMl'l'} i^{l-l'} \mathcal{Y}_{jl's'}^M(\hat{\mathbf{k}}') a_{l's', ls}^j \mathcal{Y}_{jls}^{M\dagger}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (15.21)$$

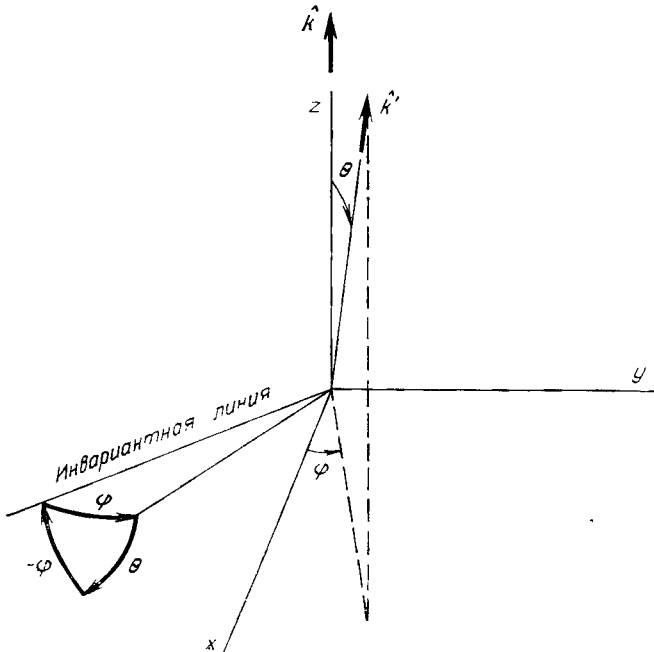
Функции \mathcal{Y}_{jls}^M являются векторными в спиновом пространстве, и их произведение в (15.21) следует понимать как *прямое* произведение; \mathcal{A} — спиновый оператор, или матрица. Мы приходим к выражению, аналогичному выражению (11.12) для матрицы

$$S(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv) = \sum_{jMl'l'} \mathcal{Y}_j^M(l's'v', \hat{\mathbf{k}}') S_{l's', ls}^j \mathcal{Y}_{jls}^{M*}(lsv, \hat{\mathbf{k}}); \quad (15.22)$$

для спиновой матрицы имеем

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}'s', \mathbf{k}s) = \sum_{jMl'l'} \mathcal{Y}_{j'l's'}^M(\hat{\mathbf{k}}') S_{l's', ls}^j \mathcal{Y}_{jls}^{M\dagger}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (15.22a)$$

Спиральные амплитуды. Более удобное выражение, чем (15.21), получается следующим образом. Использованные нами функции $\mathcal{Y}_{j'l's'}^M(\hat{\mathbf{k}}')$ относятся к той же системе координат \mathcal{S} , что и функции $\mathcal{Y}_{jls}^M(\hat{\mathbf{k}})$. Они связаны



Ф и г. 15.1. Преобразование путем поворота системы координат, связанной с начальным импульсом \mathbf{k} , в систему координат, связанную с конечным импульсом \mathbf{k}' .

с функциями $[\mathcal{Y}_{jls}^M]'$ в новой системе координат \mathcal{S}' соотношением

$$\mathcal{Y}_{j'l's'}^M(\hat{\mathbf{k}}') = \sum_{M'} [\mathcal{Y}_{j'l's'}^{M'}(\hat{\mathbf{k}})]' D_{M'M}^j(\mathcal{R}), \quad (15.23)$$

где \mathcal{R} — пространственное вращение, преобразующее \mathcal{S}' в \mathcal{S} , а $D_{M'M}^j$ — матрица неприводимого представления группы вращений размерности $2j + 1$. Вращение \mathcal{R} удобнее всего задавать эйлеровыми углами, которые определяются следующим образом.

При переходе от старой системы координат к новой, ось z которой имеет полярные углы θ и φ в старой системе координат и в которой ось z старой системы координат имеет полярные углы θ' и φ' , мы будем поступать следующим образом: 1) старую систему координат повернем вокруг ее оси z на угол φ ; 2) затем полученную систему координат повернем на угол θ вокруг ее оси y

и, наконец, 3) систему координат, полученную в результате двух первых поворотов, повернем на угол $\varphi' - \pi$ вокруг ее (новой) оси z . Все вращения производятся в положительном направлении (по правилу буравчика).

Пусть вектор \mathbf{k} направлен вдоль оси z в системе координат \mathcal{S} , а вектор \mathbf{k}' — вдоль оси z' в системе координат \mathcal{S}' . Наиболее простой способ совместить направления векторов \mathbf{k} и \mathbf{k}' состоит в повороте системы координат \mathcal{S} на угол рассеяния θ вокруг нормали $\mathbf{n} = \mathbf{k}' \times \mathbf{k}$ к плоскости рассеяния. Это означает, что линия пересечения плоскостей xy и $x'y'$ остается инвариантной, и так как первое вращение оставляет на месте ось y , то первый и третий эйлеровы углы равны по величине и противоположны по знаку (фиг. 15.1). Таким образом, если направление вектора \mathbf{k}' в системе координат \mathcal{S} задано полярными углами θ и φ , то система координат \mathcal{S}' должна быть такой, чтобы направление вектора \mathbf{k} задавалось в ней углами θ и $\varphi' = \pi - \varphi$. Другими словами, данное вращение от \mathbf{k}' к \mathbf{k} соответствует преобразованию

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = (\varphi, \theta, -\varphi). \quad (15.24)$$

Вращение, переводящее вектор \mathbf{k} в \mathbf{k}' , должно иметь вид

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = (\varphi', \theta, -\varphi') = (\pi - \varphi, \theta, \varphi - \pi). \quad (15.24a)$$

Теперь возьмем выражения для функций \mathcal{Y} в системах координат \mathcal{S} и \mathcal{S}' :

$$\mathcal{Y}_{js}^M(\hat{\mathbf{k}}) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} i^l C(ls j, 0MM) \chi_M^s, \quad (15.25)$$

$$\mathcal{Y}_{j's'}^M(\hat{\mathbf{k}}') = \sum_{M'} D_{M'M}^j(\mathcal{R}) \left(\frac{2l'+1}{4\pi}\right)^{1/2} i^{l'} C(l's' j, 0M'M') [\chi_{M'}^{s'}]'. \quad (15.25a)$$

Соотношение (15.21) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{k}'s', \mathbf{k}s) = \sum_{jMM'u'} D_{M'M}^j(\mathcal{R}) [(2l'+1)(2l+1)]^{1/2} a_{l's', ls}^j \times \\ \times C(l's' j, 0M'M') C(ls j, 0MM) [\chi_{M'}^{s'}]' \chi_M^s, \end{aligned} \quad (15.26)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} A^h(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv) = A^h(\theta, \varphi; s'v', sv) = \sum_j (2j+1) a^j(s'v', sv) D_{v'v}^j(\varphi, \theta, -\varphi) = \\ = e^{i(v-v')\varphi} \sum_j (2j+1) a^j(s'v', sv) d_{v'v}^j(\theta), \end{aligned} \quad (15.27)$$

где $a^j(s'v', sv)$ — новые амплитуды парциальных волн:

$$\begin{aligned} a^j(s'v', sv) = \sum_{l'} \frac{[(2l+1)(2l'+1)]^{1/2}}{2j+1} C(l's' j, 0v'v') a_{l's', ls}^j C(ls l, 0vv) = \\ = (-1)^{s+s'+v+v'} \sum_{l'} C(js'l', -v'v'0) a_{l's', ls}^j C(jsl, -vv0). \end{aligned} \quad (15.28)$$

Здесь проекции спинов, как для сходящегося, так и для расходящегося пучков берутся на направление вперед. Эти проекции спинов называются *спиральностями*; именно поэтому мы поставили индекс h^1 у амплитуды A . Ось x , относительно которой измеряется угол φ , направлена произвольно, лишь бы она была перпендикулярна к вектору \mathbf{k} . Однако ее направление фиксировано раз и навсегда каким-то определенным образом. Выше [см. текст перед формулой (15.24)] мы уже фиксировали направление оси x , относительно которой измерялись фазы спинов в расходящемся пучке.

¹⁾ От английского helicity. — Прим ред.

Функции $d_{v'v}^j(\theta)$ — упрощенные вигнеровские матрицы для группы вращений. При $v' \geq v$ они имеют вид

$$d_{v'v}^j(\theta) = \left[\frac{(j+v')!(j-v)!}{(j+v)!(j-v')!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left(\cos \frac{1}{2}\theta \right)^{v'+v} \left(\sin \frac{1}{2}\theta \right)^{v'-v} P_{j-v'}^{(v'-v, v'+v)}(\cos \theta) = (-1)^{v'-v} d_{vv'}^j(\theta). \quad (15.29)$$

Здесь $P_n^{(\alpha, \beta)}$ — полиномы Якоби, представляющие собой частный случай гипергеометрической функции ([242], т. 2, стр. 170). При $\alpha = \beta = 0$ они превращаются в полиномы Лежандра

$$P_n = P_n^{(0, 0)}.$$

Ниже мы приводим выражения для нескольких наиболее часто встречающихся матриц $d_{v'v}^j$ через полиномы Лежандра¹⁾:

$$\begin{aligned} d_{00}^j &= P_j, \\ d_{1/2, 1/2}^j &= d_{-1/2, -1/2}^j = \frac{1}{2} \sec \frac{1}{2}\theta (P_{j-1/2} + P_{j+1/2}), \\ d_{-1/2, 1/2}^j &= -d_{1/2, -1/2}^j = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{1}{2}\theta (P_{j-1/2} - P_{j+1/2}), \\ d_{01}^j &= -d_{10}^j = d_{-10}^j = -d_{0-1}^j = [j(j+1)]^{1/2} \sin \theta \pi_j, \\ d_{11}^j &= d_{-1-1}^j = \pi_j + \tau_j, \\ d_{-1+1}^j &= d_{+1-1}^j = \pi_j - \tau_j; \end{aligned} \quad (15.30)$$

входящие сюда функции π_j и τ_j определены в (2.56). Далее, при целых значениях j имеем²⁾

$$d_{v'0}^j = (-1)^v \left[\frac{(j-v)!}{(j+v)!} \right]^{1/2} P_j^v, \quad (15.31)$$

где P_j^v — присоединенные функции Лежандра, определяемые выражением (2.6).

Разложение (15.27) служит, очевидно, простейшим обобщением стандартного разложения для частиц с нулевым спином [см. первую строку формулы (11.10)]. Оно отличается от последнего только тем, что полиномы Лежандра заменены функциями $D_{v'v}^j(\varphi, \theta, -\varphi)$, зависимость которых от θ выражается с помощью полиномов Якоби. Заметим, что физически функции $D_{v'v}^j$ являются собственными функциями уравнения Шредингера для *симметричного волчка*. Число j оказывается при этом квантовым числом углового момента, а v и v' — квантовыми числами проекций углового момента соответственно на фиксированную ось в пространстве и на ось, связанную с волчком.

Если в начальном пучке направление спинов частиц отличается от их направления в рассеянном пучке и задано собственное значение проекции спина, то пучок описывается спиновой функцией, аналогичной (8.40). Амплитуда рассеяния тогда имеет вид

$$a_{v'}^j = A^h(\mathbf{k}'s'v') = \sum_v A^h(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv) a_v. \quad (15.32)$$

Ориентацию спинов частиц в пучке, рассеянном в направлении \mathbf{k}' , можно теперь найти с помощью (8.43) и (8.44), подставив выражение для $a_{v'}^j$ из (8.41) и (8.42). Нормировать амплитуды a необязательно.

¹⁾ См. [242], стр. 175, и рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра.

²⁾ Это следует из (2.7) и соотношения (10) из [242], стр. 171.

2. Амплитуды рассеяния для отдельных спинов

Не всегда разумно рассматривать амплитуды рассеяния, характеризуемые индексами, используемыми в (15.18). Вместо этого бывает необходимо рассматривать амплитуды рассеяния при заданных z -компонентах спинов отдельных частиц. Раскроем сначала выражение (15.18), подставив в него явное выражение (15.6) для \mathcal{Y} и изменив порядок суммирования:

$$A(\mathbf{k}'s'v', \mathbf{k}sv) = 4\pi \sum_{l'mm'} i^{l-l'} Y_{l'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}') a(l'm's'v', lmsv) Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (15.33)$$

где $a(l'm's'v', lmsv)$ — новые амплитуды парциальных волн, для которых

$$a(l'm's'v', lmsv) = \sum_{jM} C(l's'j, m'v'M) a_{l's'}^j C(ls'j, mvM). \quad (15.34)$$

Функции $a(l'm's'v', lmsv)$, очевидно, дают амплитуды вероятности обнаружить частицы в состоянии с угловыми моментами $l'm's'v'$, если первоначально они находились в состоянии с угловыми моментами $lmsv$. Следовательно, амплитуду вероятности найти систему в состоянии с угловыми моментами $l'm'v'_1v'_2$, если первоначально система находилась в состоянии lmv_1v_2 , можно записать в виде

$$a(l'm'v'_1v'_2, lmv_1v_2) = \sum_{jMv'v's's'} C(s_1s_2s', v'_1v'_2v) C(l's'j, m'v'M) \times \\ \times a_{l's'}^j C(ls'j, mvM) C(s_1s_2s, v_1v_2v). \quad (15.35)$$

Амплитуда вероятности (15.35) не равна нулю только при

$$m + v_1 + v_2 = m' + v'_1 + v'_2.$$

Поэтому суммирование по M , v и v' , конечно, легко выполнить, поскольку

$$v' = v'_1 + v'_2, \quad v = v_1 + v_2, \quad M = v_1 + v_2 + m = v'_1 + v'_2 + m'.$$

Введем обозначение

$$a^M(l'v'_1v'_2, lv_1v_2) = a(l'm'v'_1v'_2, lmv_1v_2). \quad (15.36)$$

Тогда для амплитуды рассеяния будем иметь

$$A(\mathbf{k}'v'_1v'_2, \mathbf{k}v_1v_2) = 4\pi \sum_{l'l'} Y_{l'}^{M-v'_1-v'_2}(\hat{\mathbf{k}}') i^{l-l'} \times \\ \times a^M(l'v'_1v'_2, lv_1v_2) Y_l^{M-v_1-v_2}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (15.37)$$

Спиральные амплитуды. Чтобы выразить проекции спинов через их проекции на направление движения, сначала подставим (15.35) в (15.37). При этом получим

$$A(\mathbf{k}'v'_1v'_2, \mathbf{k}v_1v_2) = \chi_{v'_1}^{s'_1} \chi_{v'_2}^{s'_2} \cdot \mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \cdot \chi_{v_1}^{s_1} \chi_{v_2}^{s_2}, \quad (15.38)$$

где

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 4\pi \sum_{jMl'l's's'} i^{l-l'} y_{jl's'}^M(\hat{\mathbf{k}}') a_{l's'}^j y_{jl's}^{Mj}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (15.39)$$

Последнее соотношение отличается от (15.21) только наличием дополнительных суммирований по s и s' . Мы можем воспользоваться формулами (15.25) и (15.25а) и затем исключить спиновые функции аналогично тому, как это было сделано при переходе от (15.26) к (15.27). В результате получим амплитуду рассеяния, в которой индексы проекций как начального, так и конечного спинов обозначают их проекции на направление относительного движения. Для того чтобы от полученной амплитуды рассеяния перейти к спиральной

амплитуде рассеяния, нужно просто изменить знаки у ν_2 и ν'_2 . В исходной амплитуде рассеяния индексы ν_1 и ν_2 (а также ν'_1 и ν'_2) обозначают проекции спина на одну и ту же ось. В спиральной амплитуде рассеяния в системе центра масс индексы ν_1 и ν_2 (а также ν'_1 и ν'_2) обозначают проекции спинов на оси, имеющие *противоположные* направления, так как в этой системе отсчета обе частицы движутся в противоположных направлениях. В результате имеем

$$A^h(\mathbf{k}', \nu'_1\nu'_2, \mathbf{k}\nu_1\nu_2) = A^h(\theta, \varphi; \nu'_1\nu'_2, \nu_1\nu_2) = e^{i(\mathbf{v}-\mathbf{v}')\varphi} \sum_j (2j+1) d_{\nu'\nu}^j(\theta) a^j(\nu'_1\nu'_2, \nu_1\nu_2), \quad (15.40)$$

где амплитуды парциальных волн имеют вид

$$\begin{aligned} a^j(\nu'_1\nu'_2, \nu_1\nu_2) &= \sum_{ll'} \frac{[(2l+1)(2l'+1)]^{1/2}}{2j+1} \sum_{ss'} C(l's'j, 0\nu'\nu') \times \\ &\times C(s_1s_2s', \nu'_1-\nu'_2\nu') a_{l's'}^j C(lsj, 0\nu\nu) C(s_1s_2s, \nu_1-\nu_2\nu) = \\ &= (-1)^{\nu_1+\nu_2-\nu'_1-\nu'_2} \sum_{ll'ss'} C(js'l', -\nu'\nu'0) C(s_2s_1s', -\nu'_2\nu'_1\nu') \times \\ &\times a_{l's'}^j C(s_2s_2s, -\nu_2\nu_1\nu) C(jsl, -\nu\nu0) = \\ &= \sum_{ss'} C(s_1s_2s', \nu'_1-\nu'_2\nu') a^j(s'\nu', s\nu) C(s_1s_2s, \nu_1-\nu_2\nu), \quad (15.41) \end{aligned}$$

причем $\nu = \nu_1 - \nu_2$, $\nu' = \nu'_1 - \nu'_2$

Соотношение (15.40) остается верным и в релятивистском случае [430]. Но при этом оказывается невозможным делить j на l и s , и поэтому формула (15.41) не справедлива.

В наиболее важном интересующем нас случае частицы обладают спином $1/2$. Поэтому ниже мы приводим таблицу коэффициентов Клебша — Гордана для случая, когда $s_2 = 1/2$.

Таблица 15.1
КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА $C(lsj, m\nu M)$
при $s = 1/2$

	$\nu = 1/2$	$\nu = -1/2$
$j = l + 1/2$	$\left(\frac{j+M}{2j}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j-M}{2j}\right)^{1/2}$
$j = l - 1/2$	$-\left(\frac{j+1-M}{2j+2}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j+1+M}{2j+2}\right)^{1/2}$

В частности, согласно приведенной таблице, имеем

$$\begin{aligned} C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0\right) &= C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1, -\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0\right) = C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 0\right) = \\ &= -C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0, -\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0\right) = 2^{-1/2}; \quad (15.42) \end{aligned}$$

$$C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1, \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1\right) = C\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} -1\right) = 1.$$

3. Унитарность, взаимность, инвариантность по отношению к обращению времени и сохранение четности

Как было уже показано в гл. 7, § 2, п. 4, сохранение потока, являющееся следствием эрмитовости гамильтониана, ведет к унитарности S -матрицы. Из свойств ортогональности и полноты системы функций \mathcal{U} вытекает, что при каждом значении j матрица $S_{l's', l's''}^j$ должна быть унитарной, т. е.

$$\sum_{l''s''} S_{l's', l''s''}^j S_{l''s'', l's''}^{j*} = \delta_{l'l'} \delta_{s's'}. \quad (15.43)$$

Допустим теперь, что оператор H' инвариантен относительно *обращения времени*, следовательно, он должен коммутировать с антиунитарным оператором обращения времени ϑ , введенным в гл. 7, § 2, п. 4, т. е.

$$[\vartheta, H'] = 0. \quad (15.44)$$

Выбор фаз. Удобно условиться выбирать фазы волновых функций следующим образом. В случае спина $1/2$ будем пользоваться спиновыми функциями

$$\chi_{+1/2}^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-1/2}^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (15.45)$$

и оператором обращения времени

$$\vartheta = i\sigma_y K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K, \quad (15.46)$$

где K (антиунитарный) оператор комплексного сопряжения. Тогда

$$\vartheta \chi_v^{1/2} = (-1)^{1/2+v} \chi_{-v}^{1/2}.$$

В случае спина 0 мы будем использовать в качестве спиновой функции $\chi_0^0 = 1$, а в случае спина 1 — спиновые функции (2.20). В том и другом случае для оператора обращения времени имеем простое выражение

$$\vartheta = K. \quad (15.46a)$$

Согласно (2.20), во всех трех случаях (спин 0, $1/2$ и 1) имеем

$$\vartheta \chi_v^0 = (-1)^{s+v} \chi_{-v}^s. \quad (15.47)$$

В случае более высоких спинов мы будем поступать аналогичным образом, так что соотношение (15.47) будет всегда справедливым.

Если построить спиновые функции χ для двух частиц, комбинируя, как в (10.52), две одночастичные спиновые функции [пользуясь коэффициентами Клебша — Гордана с условием выбора фаз, принятым, например, в [719], так что эти коэффициенты подчиняются условию (2.45)], то двухчастичные спиновые функции будут удовлетворять соотношению (15.47), конечно, при условии, что мы используем соответствующий оператор обращения времени. Например, в случае двух частиц со спином $1/2$ мы имеем

$$\vartheta = (i\sigma_y^{(1)}) (i\sigma_y^{(2)}) K$$

и т. д.

Далее, согласно (15.1), в полную волновую функцию входит комбинация спиновых функций со сферическими функциями, которые удовлетворяют уравнению (2.12). Из этого следует, что

$$\vartheta \mathcal{Y}_{jls}^M = (-1)^{j+M} \mathcal{Y}_{jls}^{-M}. \quad (15.48)$$

Более того, мы имеем

$$\mathcal{Y}_j^{M*}(ls\nu, \hat{\mathbf{k}}) = (-1)^{s+v-j-M} \mathcal{Y}_j^{-M}(ls-\nu, -\hat{\mathbf{k}}). \quad (15.49)$$

Следовательно, согласно (15.8), имеем

$$\theta\psi_0(\mathbf{k}\mathbf{s}\mathbf{v}; \mathbf{r}) = (-1)^{s+\nu}\psi_0(-\mathbf{k}\mathbf{s}-\mathbf{v}; \mathbf{r}), \quad (15.50)$$

а отсюда с помощью (10.10) и (15.44) получаем

$$\theta\psi^{(+)}(\mathbf{k}\mathbf{s}\mathbf{v}; \mathbf{r}) = (-1)^{s+\nu}\psi^{(-)}(-\mathbf{k}\mathbf{s}-\mathbf{v}; \mathbf{r}), \quad (15.51)$$

поскольку имеет место соотношение

$$G^{+*} = G^-. \quad (15.52)$$

Взаимность. Воспользуемся теперь свойством (7.70) оператора обращения времени (10.57), а также соотношениями (15.50), (15.51) и (7.44). Тогда получим, что вследствие инвариантности относительно обращения времени (15.44) амплитуда рассеяния обладает свойством симметрии

$$A(\mathbf{k}'\mathbf{s}'\mathbf{v}', \mathbf{k}\mathbf{s}\mathbf{v}) = (-1)^{s+s'+\nu+\nu'}A(-\mathbf{k}\mathbf{s}-\mathbf{v}, -\mathbf{k}'\mathbf{s}'-\mathbf{v}'), \quad (15.53)$$

которое обычно называется *теоремой взаимности* (см. также гл. 7, § 2, п. 4).

Рассматривая выражение (15.14) вместе с (7.70) и (15.48), находим, что в силу инвариантности по отношению к обращению времени совместно с эрмитовостью и инвариантностью относительно пространственных вращений оператора H' матрица потенциалов (15.14) должна быть *симметрична*, т. е.

$$\mathcal{T}^j_{l's', l_s}(r) = \mathcal{T}^j_{l_s, l's'}(r). \quad (15.54)$$

Поскольку эта матрица эрмитова, то она *действительна*. Согласно (15.18) и (15.49), соотношение взаимности эквивалентно требованию *симметрии* амплитуд парциальных волн, а также S -матрицы

$$S^j_{l's', l_s} = S^j_{l_s, l's'}. \quad (15.55)$$

Для спиральных амплитуд рассеяния существует несколько иное соотношение, чем (15.53). Если гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, то, используя соответствующую симметрию амплитуд парциальных волн $a^j_{l's', l's'}$ и свойства матриц вращений ([719], стр. 53)

$$d^j_{\nu\nu'}(\theta) = d^j_{\nu'\nu}(-\theta) = (-1)^{\nu'-\nu}d^j_{\nu'\nu}(\theta), \quad (15.56)$$

можно получить следующее соотношение взаимности:

$$A^h(\theta, \varphi; s'\mathbf{v}', s\mathbf{v}) = A^h(\theta, \pi - \varphi; s\mathbf{v}, s'\mathbf{v}'), \quad (15.57)$$

а это, согласно (15.24а), означает, что

$$A^h(\mathbf{k}'\mathbf{s}'\mathbf{v}', \mathbf{k}\mathbf{s}\mathbf{v}) = A^h(\mathbf{k}\mathbf{s}\mathbf{v}, \mathbf{k}'\mathbf{s}'\mathbf{v}'). \quad (15.57а)$$

Таким образом, спиральные амплитуды рассеяния (в выбранной нами системе координат) удовлетворяют соотношению взаимности более простого вида, чем (15.53).

Аналогичные соотношения взаимности имеют место для амплитуд (15.41) и (15.40). Из инвариантности по отношению к обращению времени следует, что

$$a^j(\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = a^j(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2) \quad (15.58)$$

и

$$A^h(\theta, \varphi; \mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = A^h(\theta, \pi - \varphi; \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2) \quad (15.59)$$

или, учитывая (15.24а),

$$A^h(\mathbf{k}'\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{k}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = A^h(\mathbf{k}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{k}'\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2). \quad (15.59а)$$

Сохранение четности. В большинстве физических задач гамильтониан инвариантен относительно преобразования отражения пространства, вследствие чего *четность* сохраняется. Таким образом, матрица потенциалов $\mathcal{T}^j_{l's', l's'}$

(15.14) связывает состояния только с теми значениями l , которые отличаются друг от друга на четное число. Поэтому таким свойством будет обладать S -матрица. Так как, согласно (12.13) и (15.6),

$$\mathfrak{Y}_j^M(lsv; -\hat{\mathbf{k}}) = (-1)^l \mathfrak{Y}_j^M(lsv; \hat{\mathbf{k}}), \quad (15.60)$$

то для амплитуды рассеяния (15.18) имеем

$$A(-\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', -\mathbf{k}sv) = A(\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', \mathbf{k}sv). \quad (15.61)$$

В результате теорема взаимности приобретает более простой вид

$$A(\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', \mathbf{k}sv) = (-1)^{s+s'+v+v'} A(\mathbf{k}s-\mathbf{v}, \mathbf{k}'s'-\mathbf{v}'). \quad (15.62)$$

В случае спиральной амплитуды рассеяния (15.27) мы воспользуемся тем, что ([719], стр. 38 и 54)

$$d_{-\mathbf{v}-\mathbf{v}'}^j = (-1)^{v'-v} d_{\mathbf{v}\mathbf{v}'}^j \quad (15.63)$$

и

$$C(lsj, -m-\mathbf{v}-M) = (-1)^{l+s-j} C(lsj, m\mathbf{v}M). \quad (15.64)$$

Тогда в силу сохранения четности получаем соотношение

$$A^h(\theta, \varphi; s'-\mathbf{v}', s-\mathbf{v}) = (-1)^{s-s'} A^h(\theta, \pi-\varphi; s'\mathbf{v}', s\mathbf{v}) \quad (15.65)$$

или

$$A^h(\mathbf{k}'s'-\mathbf{v}', \mathbf{k}s-\mathbf{v}) = (-1)^{s-s'} A^h(\mathbf{k}s'\mathbf{v}', \mathbf{k}'s\mathbf{v}). \quad (15.65a)$$

Следует отметить, что $s-s'$ всегда целое число.

Аналогичным образом для (15.41) и (15.40) в силу закона сохранения четности получаем соотношение симметрии

$$a^j(-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2, -\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) = a^j(\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2), \quad (15.66)$$

$$A^h(\theta, \varphi; -\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2, -\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) = A^h(\theta, \pi-\varphi; \mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2), \quad (15.67)$$

$$A^h(\mathbf{k}'-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2, \mathbf{k}-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) = A^h(\mathbf{k}\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{k}'\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2). \quad (15.67a)$$

Из соотношений (15.57a), (15.65), (15.59a) и (15.67a) с учетом инвариантности по отношению к обращению времени следует, что

$$A^h(\mathbf{k}'s'-\mathbf{v}', \mathbf{k}s-\mathbf{v}) = (-1)^{s-s'} A^h(\mathbf{k}'s\mathbf{v}, \mathbf{k}s'\mathbf{v}'), \quad (15.68)$$

$$A^h(\mathbf{k}'-\mathbf{v}'_1-\mathbf{v}'_2, \mathbf{k}-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2) = A^h(\mathbf{k}'\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{k}\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2). \quad (15.69)$$

Обобщенная оптическая теорема. Условие унитарности, являющееся следствием сохранения потока, было записано в виде (7.67) с помощью T -матрицы. С помощью (10.57) его можно записать через амплитуды рассеяния

$$\begin{aligned} & -2\pi i k^{-1} [A(\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', \mathbf{k}sv) - A^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{k}'s'\mathbf{v}')] = \\ & = \sum_{s''\mathbf{v}''} \int d\Omega_r A(\mathbf{k}'s'\mathbf{v}', \mathbf{k}''s''\mathbf{v}'') A^*(\mathbf{k}sv, \mathbf{k}''s''\mathbf{v}'') = \\ & = \sum_{s''\mathbf{v}''} \int d\Omega_r A^*(\mathbf{k}''s''\mathbf{v}'', \mathbf{k}'s'\mathbf{v}') A(\mathbf{k}''s''\mathbf{v}'', \mathbf{k}sv). \end{aligned} \quad (15.70)$$

В случае спиральной амплитуды рассеяния мы находим, что условие унитарности (15.43) выражается прежде всего в силу (15.41) в форме ([77], стр. 614, формула (5.10))

$$\sum_{\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2} a^{j*}(\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2) a^j(\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = \frac{1}{ik} [a^j(\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) - a^{j*}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2)]. \quad (15.71)$$

Далее воспользуемся тем обстоятельством, что матрицы вращений дают представление группы вращений. Таким образом, если через \mathcal{R}_{ij} обозначить

вращение, переводящее систему координат \mathcal{S}_j в систему \mathcal{S}_i , то

$$D_{\nu\nu'}^j(\mathcal{R}_{20}) = D_{\nu\nu'}^j(\mathcal{R}_{21}\mathcal{R}_{10}) = \sum_{\mu} D_{\nu\mu}^j(\mathcal{R}_{21}) D_{\mu\nu'}^j(\mathcal{R}_{10}),$$

и поскольку матрицы вращений унитарны, то

$$D_{\nu\nu'}^j(\mathcal{R}) = D_{\nu'\nu}^{j*}(\mathcal{R}^{-1}). \quad (15.72)$$

Кроме того, пользуясь разложением Клебша—Гордана ([719], стр. 54 и 58, формула (4.10))

$$d_{\nu\nu'}^j d_{\mu\mu'}^{j'} = \sum_{J\lambda\lambda'} (-1)^{\mu-\mu'} C(jj'J, \nu-\mu\lambda) C(jj'J, \nu'-\mu'\lambda') d_{\lambda\lambda'}^J \quad (15.73)$$

и значением интеграла ([719], стр. 74)

$$\int_{-1}^1 d \cos \theta d_{\nu\nu}^j(\theta) d_{\mu\mu}^{j'}(\theta) = \frac{2}{2j+1} \delta_{jj'}, \quad (15.74)$$

находим, что

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \theta D_{\nu\nu'}^j(\varphi, \theta, -\varphi) D_{\mu\mu'}^{j*}(\varphi, \theta, -\varphi) = \frac{2\pi}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{\nu\mu} \delta_{\nu'\mu'}. \quad (15.75)$$

В результате мы получаем следующую форму условия унитарности для спиральной амплитуды рассеяния:

$$\begin{aligned} -2\pi i k^{-1} [A^h(\mathbf{k}'\nu_1'\nu_2', \mathbf{k}\nu_1\nu_2) - A^{h*}(\mathbf{k}\nu_1\nu_2, \mathbf{k}'\nu_1'\nu_2')] = \\ = \sum_{\nu_1''\nu_2''} \int d\Omega_h A^{h*}(\mathbf{k}''\nu_1''\nu_2'', \mathbf{k}'\nu_1'\nu_2') A^h(\mathbf{k}''\nu_1''\nu_2'', \mathbf{k}\nu_1\nu_2). \end{aligned} \quad (15.70a)$$

Если гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, то с помощью (15.59a) соотношение (15.70a) можно записать в более простом виде

$$4\pi k^{-1} \text{Im} A^h(\mathbf{k}'\nu_1'\nu_2', \mathbf{k}\nu_1\nu_2) = \sum_{\nu_1''\nu_2''} \int d\Omega_h A^{h*}(\mathbf{k}''\nu_1''\nu_2'', \mathbf{k}'\nu_1'\nu_2') A^h(\mathbf{k}''\nu_1''\nu_2'', \mathbf{k}\nu_1\nu_2). \quad (15.70b)$$

Положим $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ и $\nu_1' = \nu_1$, $\nu_2' = \nu_2$ или $s = s'$, $\nu' = \nu$; тогда соотношения (15.70) и (15.70a) служат выражением обычной оптической теоремы; инвариантности по отношению к обращению времени при этом не требуется.

Собственные фазовые сдвиги. Из условия унитарности (15.43) и условия симметрии (15.55) S -матрицы следует, что ее можно диагонализировать с помощью ортогональной действительной матрицы B :

$$S_{l's', l's}^j = \sum_{\alpha} B_{l's, \alpha}^j \alpha e^{2i\delta_{\alpha}^j} B_{l's', \alpha}^j, \quad (15.76)$$

где δ_{α}^j —(действительные) *собственные фазовые сдвиги*. Углы в матрице B называются *параметрами смешивания*.

Физический смысл собственных фазовых сдвигов легко выяснить после перехода к новой системе волновых функций

$$\psi_{l's, \alpha}^{j(+)}(k, r) = \sum_{l's'} \psi_{l's', l's'}^{j(+)}(k, r) B_{l's', \alpha}^j, \quad (15.77)$$

которые также удовлетворяют системе уравнения (15.15) и граничным условиям, требующим, чтобы на бесконечности мы имели расходящиеся волны. В то время как функция $\psi_{l's, \alpha}^j$ содержит только сходящуюся волну с угловыми моментами l' , s' , функция $\psi_{l's, \alpha}^j$ содержит сходящиеся волны со всеми угловыми моментами, которые возможны при данном значении j . Однако

асимптотика $\psi_{ls,\alpha}^{j(+)}$, согласно (15.16) и (15.76), имеет вид

$$\psi_{ls,\alpha}^{j(+)} \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} B_{ls,\alpha}^j e^{i\delta_\alpha^j} \sin \left(kr - \frac{1}{2} \pi l + \delta_\alpha^j \right), \quad (15.78)$$

поэтому характерная особенность этой волновой функции заключается в том, что все ее компоненты имеют одинаковые фазовые сдвиги δ_α^j . Как δ_α^j , так и $B_{ls,\alpha}^j$, вообще говоря, зависят от энергии.

4. Частные случаи

Частицы со спинами 0 и $1/2$. Запишем в явном виде амплитуды рассеяния для наиболее важных частных случаев. Сначала рассмотрим случай двух частиц, спин одной из которых равен $1/2$, а спин другой равен 0. Тогда полный спин s должен равняться $1/2$ и при данном j l может принимать только два значения $j \pm 1/2$. Если гамильтониан сохраняет четность, то не может существовать амплитуд, связывающих состояния с $l = j + 1/2$ и состояния с $l = j - 1/2$; другими словами, отличны от нуля только амплитуды рассеяния с $l = l'$. В этом случае амплитуды будут иметь вид

$$\begin{aligned} A_{++}^h &= A_{--}^h = \frac{1}{4} \sec \frac{1}{2} \theta \sum_{j=1/2}^{\infty} (2j+1) (a_-^j + a_+^j) (P_{j-1/2} + P_{j+1/2}), \\ A_{\mp\pm}^h &= \pm \frac{1}{4} e^{\pm i\varphi} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \theta \sum_{j=1/2}^{\infty} (2j+1) (a_-^j - a_+^j) (P_{j-1/2} - P_{j+1/2}). \end{aligned} \quad (15.79)$$

Нижние индексы у амплитуд A^h соответствуют направлению спина по направлению (+) и против направления (—) движения; индексы у a^j соответствуют $l = j + 1/2$ (+) и $l = j - 1/2$ (—). Если взаимодействие не зависит от спинов, то a^j зависит только от l , и $a_-^j = a_+^{j-1}$. В этом случае выражение для амплитуд (15.79) сводится к выражениям (11.10) с учетом дополнительного множителя, возникающего в связи с вероятностью обнаружить в конечном состоянии спин, ориентированный по направлению движения (или против него) при условии, что первоначально спин был ориентирован по направлению исходного движения (или против него).

Две частицы со спинами $1/2$. В физически важном случае двух частиц с одинаковыми спинами $1/2$ возникают специфические особенности. Однако при этом имеются также следующие упрощающие ограничения.

Два спина могут находиться в синглетном ($s = 0$) или триплетном ($s = 1$) состояниях. Четность синглетного состояния должна быть равна $(-1)^j$, так как $l = j$. Для триплетного состояния $l = j$ или $l = j \pm 1$; следовательно, имеется состояние с четностью $(-1)^j$ и два состояния с четностью $(-1)^{j \pm 1}$. Если четность сохраняется, то матрица $a_{s',ls}^j$ распадается на две независимые матрицы: на 2×2 -матрицу для триплетного состояния четности $(-1)^{j+1}$ и на 2×2 -матрицу для синглетного состояния, триплетного состояния с четностью $(-1)^j$ и соответствующих синглет-триплетных переходов. Если, кроме того, предположить, что обе рассматриваемые частицы *тождественные*, то члены, соответствующие синглет-триплетным переходам, будут равны нулю; это происходит потому, что синглетная спиновая функция антисимметрична, а триплетная — симметрична относительно перестановки частиц [см. (15.42)]. Поскольку вследствие сохранения четности начальный и конечный угловые моменты должны быть одинаковы, если начальное состояние является синглетным (то триплетное состояние, в которое система может перейти из синглетного состояния без нарушения четности, должно быть антисимметричным по отношению к перестановке частиц. [Напомним, что при перестановке пространственных координат частиц появляется фактор $(-1)^l$.]

Если к тому же гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, то 2×2 -матрица для триплетного состояния четности $(-1)^{j+1}$ оказывается симметричной.

В случае тождественных частиц, взаимодействующих друг с другом с сохранением четности, амплитуды парциальных волн (15.41) можно подразделить на пять классов: 1) те, для которых спиральности обеих частиц одинаковы и не изменяются, 2) те, для которых спиральности частиц противоположны и не изменяются, 3) те, для которых изменяется спиральность одной из частиц, 4) те, для которых спиральности обеих частиц одинаковы и обе изменяются, и 5) те, для которых спиральности частиц противоположны и обе изменяются. Обозначим указанные амплитуды парциальных волн через a_{00}^j , a_{e0}^j , a_1^j , a_{o2}^j и a_{e2}^j (аналогично будем обозначать соответствующие полные амплитуды). Мы находим, что

$$\begin{aligned} a_{00}^j &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{11}^j + b^j), \\ a_{e0}^j &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{22}^j + a_1^j), \\ a_{o2}^j &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{11}^j - b^j), \\ a_{e2}^j &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{22}^j - a_1^j), \\ a_1^j &= \frac{1}{2} [j(j+1)]^{1/2} \bar{a}_{12}^j, \end{aligned} \quad (15.80)$$

где a_s^j — амплитуда синглетного состояния, b^j — амплитуда триплетного состояния с четностью $(-1)^j$, а \bar{a}_{mn}^j — преобразованные амплитуды триплетных состояний с четностью $(-1)^{j+1}$. Пусть a^j — матрица, составленная из элементов $a_{j-1, j-1}^j = a_{--}^j$ и т. д., т. е.

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{--}^j & a_{-+}^j \\ a_{-+}^j & a_{++}^j \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем

$$\bar{a}^j = U_j a^j U_j^{-1}, \quad (15.81)$$

где

$$U_j = U_j^{-1} = (2j+1)^{-1/2} \begin{pmatrix} (j+1)^{1/2} & j^{1/2} \\ j^{1/2} & -(j+1)^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (15.82)$$

В явном виде

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11}^j &= \frac{(j+1)a_{--}^j + ja_{++}^j + 2[j(j+1)]^{1/2} a_{-+}^j}{2j+1}, \\ \bar{a}_{22}^j &= \frac{ja_{--}^j + (j+1)a_{++}^j - 2[j(j+1)]^{1/2} a_{-+}^j}{2j+1}, \\ \bar{a}_{12}^j &= \bar{a}_{21}^j = [j(j+1)]^{1/2} \frac{a_{--}^j - a_{++}^j - [j(j+1)]^{1/2} a_{-+}^j}{2j+1}. \end{aligned} \quad (15.82a)$$

В согласии с (15.40) и (15.30) для полных амплитуд имеем

$$\begin{aligned} A_{00}^h &= \sum_j (2j+1) a_{00}^j (\pi_j + \tau_j), \\ A_{e0}^h &= \sum_j (2j+1) a_{e0}^j P_j, \\ A_{o2}^h &= \sum_j (2j+1) a_{o2}^j (\pi_j - \tau_j), \\ A_{e2}^h &= \sum_j (2j+1) a_{e2}^j P_j, \\ A_1^h &= \sin \theta \sum_j (2j+1) [j(j+1)]^{1/2} a_1^j \pi_j. \end{aligned} \quad (15.83)$$

Амплитуды процессов с изменением спиральности одной из частиц и спиральности обеих частиц (имеющих противоположные спиральности) отмечены штрихом, поскольку амплитуды, принадлежащие к этим двум классам, в различных случаях имеют разные фазы, а именно

$$\begin{aligned}
 A^h(+, -, -) &= e^{-2i\varphi} A_{02}^{h'}, \\
 A^h(-, +, +) &= e^{2i\varphi} A_{02}^{h'}, \\
 A^h(+, -, +) &= A^h(+, -, -) = A^h(+, +, -) = \\
 &= A^h(-, -, -) = e^{-i\varphi} A_1^{h'}, \\
 A^h(-, +, +) &= A^h(+, +, +) = A^h(-, -, +) = \\
 &= A^h(-, +, -) = -e^{i\varphi} A_1^{h'}.
 \end{aligned} \tag{15.84}$$

Указанные фазы, конечно, не играют роли при вычислении сечений, но они существенны при определении ориентации спинов.

5. Сечения

Чтобы найти дифференциальные сечения, нужно возвести в квадрат абсолютные величины соответствующих амплитуд. Получающуюся зависимость сечения от угла рассеяния можно представить в виде разложения по функциям d^j , воспользовавшись разложением Клебша — Гордана (15.73). Углы всех трех функций d^j , появляющихся в этом разложении, одинаковы; суммирование по λ и λ' производится элементарно. Поскольку нас интересует только случай, когда $\mu = \nu$ и $\mu' = \nu'$, то для него имеем

$$d_{\nu\nu}^j d_{\nu'\nu'}^{j'} = (-1)^{\nu-\nu'} \sum_j C(jj'J, \nu-\nu) C(jj'J, \nu'-\nu') P_j, \tag{15.85}$$

так что получается разложение непосредственно по полиномам Лежандра.

Матрицу плотности рассеянного пучка и поляризацию пучка можно теперь вычислить методами, изложенными в гл. 8, § 3, п. 3 и 2.

Полные сечения найдем, проводя интегрирование по углам и учитывая, что ¹⁾

$$\int_{-1}^1 d \cos \theta d_{\nu\nu}^j(\theta) d_{\nu'\nu'}^{j'}(\theta) = \frac{2}{2j+1} \delta_{jj'}. \tag{15.86}$$

Из (15.40) получаем полные сечения при заданных спиральностях

$$\sigma(\nu_1' \nu_2', \nu_1 \nu_2) = \pi \sum_j (2j+1) |a^j(\nu_1' \nu_2', \nu_1 \nu_2)|^2. \tag{15.87}$$

Для неполяризованного падающего пучка полное сечение имеет вид

$$\sigma = (2s_1+1)^{-1} (2s_2+1)^{-1} \pi \sum_{j\nu_1\nu_2\nu_1'\nu_2'} (2j+1) |a^j(\nu_1' \nu_2', \nu_1 \nu_2)|^2. \tag{15.88}$$

Предельный случай нулевой энергии. В пределе низких энергий из-за наличия центробежного барьера при $l \neq 0$ оказываются допустимыми только значения $l = l' = 0$. Из соотношения (15.41) при этом следует, что

$$a^j(\nu_1' \nu_2', \nu_1 \nu_2) = \frac{2}{|2j+1|} C(s_1 s_2 j, \nu_1' - \nu_2' \nu') a_{0j, 0j}^j C(s_1 s_2 j, \nu_1 - \nu_2 \nu). \tag{15.89}$$

Поэтому полное сечение при нулевой энергии имеет вид

$$\sigma = \frac{4\pi}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_s \frac{|a_{0s, 0s}^s|^2}{2s+1}, \tag{15.90}$$

¹⁾ Данное соотношение следует из (15.85) и работы [719], стр. 38.

где s пробегает все значения, которые может принимать полный спин при заданных s_1 и s_2 . Например, при $s_1 = s_2 = 1/2$ полное сечение при нулевой энергии равно

$$\sigma = \pi \left(|a_{00, 00}^0|^2 + \frac{1}{3} |a_{01, 01}^1|^2 \right).$$

Но теперь сечение при нулевой энергии не обязательно должно быть изотропным. Когда $l = 0$, j не обязательно должно равняться нулю, поэтому в сечение могут входить полиномы Лежандра высших порядков.

6. Двукратное рассеяние

Если два последовательных рассеяния происходят на двух центрах, расстояние между которыми велико по сравнению с длиной волны k^{-1} , то амплитуда двукратного рассеяния имеет вид

$$A(\mathbf{k}'\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{k}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2) = \sum_{\mathbf{v}''_1\mathbf{v}''_2} A_2(\mathbf{k}'\mathbf{v}'_1\mathbf{v}'_2, \mathbf{k}''\mathbf{v}''_1\mathbf{v}''_2) A_1(\mathbf{k}''\mathbf{v}''_1\mathbf{v}''_2, \mathbf{k}\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2), \quad (15.91)$$

где \mathbf{k}'' — вектор, направленный от первого центра ко второму. Аналогичная формула имеет место для амплитуд, характеризующихся индексами s, v вместо v_1, v_2 .

Следует отметить, что поскольку зависимость от φ в (15.40) содержится только в общем фазовом множителе, то сечение обычного однократного рассеяния для неполяризованных частиц (или для продольно поляризованных частиц) не может зависеть от азимутального угла. В выражении для сечения двукратного рассеяния, которое получается, если возвести в квадрат модуль амплитуды (15.91), азимутальный угол φ не исчезает и, как правило, сечение двукратного рассеяния от азимутального угла зависит. Этому, разумеется, можно дать простое физическое объяснение. Если нет поперечной поляризации падающего пучка, то при обычном однократном рассеянии не существует никакого выделенного поперечного направления; следовательно, сечение должно быть инвариантным относительно вращения вдоль направления падающего пучка. При двукратном рассеянии плоскость первого рассеяния задает некоторое направление, не совпадающее с направлением падения пучка на вторую мишень (если только, конечно, обе мишени расположены не коллинеарно с направлением падающего пучка); следовательно, при втором рассеянии должна появиться азимутальная зависимость сечения от угла относительно соединяющей мишени линии. Все это возможно только в том случае, когда частицы обладают ненулевым спином и если первый рассеиватель вызывает поперечную поляризацию. В противном случае переносчик информации о положении плоскости первого рассеяния для второй мишени отсутствует. Таким образом, эксперименты с двукратным рассеянием позволяют изучить поперечную поляризацию, возникающую в результате первого рассеяния.

§ 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

1. Матричные уравнения

Остановимся теперь на вычислении амплитуд рассеяния парциальных волн, исходя из решения системы связанных радиальных уравнений Шредингера (15.15). При этом будет удобным воспользоваться матричными обозначениями, в которых $\Psi_{l's_1s_2}^j$ и $\mathcal{V}_{l's_1s_2}^j$ [см. (15.14)] представляются соответственно элементами квадратных матриц Ψ_j и V_j . Размерность этих матриц определяется числом допустимых значений l и s при заданных значениях j и s_1, s_2 . Размерность можно понизить, учитывая законы сохранения. Например, если оператор H' сохраняет четность, то V_j может связывать только значения l

с одинаковой четностью. При этом рассматриваемая система уравнений распадается на две независимые системы: в одной из них $j - l$ и $j - l'$ четные числа, в другой — нечетные; каждую из этих систем уравнений можно решать независимо. Для тождественных частиц могут появиться дополнительные ограничения (по этому вопросу см. гл. 15, § 1, п. 4).

Итак, система связанных уравнений Шредингера представляет собой матричное уравнение

$$-\Psi_j'' + L(L+1)r^{-2}\Psi_j + V_j\Psi_j = k^2\Psi_j, \quad (15.92)$$

где L — диагональная матрица с различными l на главной диагонали. Каждый столбец квадратной матрицы Ψ_j удовлетворяет (15.92), однако разные столбцы подчиняются разным граничным условиям. Согласно (15.16), вторые индексы матричных элементов $\Psi_{j's',ls}^j$ указывают угловые моменты сходящихся волн на больших расстояниях.

В качестве примера рассмотрим две тождественные частицы со спинами $1/2$, взаимодействующие друг с другом с сохранением четности, причем пусть имеет место инвариантность по отношению к обращению времени. (В дальнейшем мы будем ссылаться на этот пример просто как на *нейтрон-протонный случай*.) Чтобы сделать взаимодействие по возможности более локальным и в то же время сохранить зависимость от спинов, допустим, что

$$2\mu H' = \mathcal{T}_c(r) + \mathcal{T}_\sigma(r) \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \mathcal{T}_t(r) S_{12}, \quad (15.93)$$

где $1/2\sigma_1$ и $1/2\sigma_2$ — операторы спинов двух частиц, а S_{12} — *тензорный оператор*;

$$S_{12} = 3\sigma_1 \cdot \hat{r} \sigma_2 \cdot \hat{r} - \sigma_1 \cdot \sigma_2. \quad (15.94)$$

Как уже отмечалось в § 1, п. 4, матрица потенциалов V_j в этом случае распадается на три «блока»: два диагональных элемента, соответствующих синглетному состоянию и триплетному состоянию четности $(-1)^j$, и 2×2 -блок для взаимодействующих триплетных состояний четности $(-1)^{j+1}$. После отделения первых двух уравнений каждое из них можно решить методами, изложенными в гл. 12. Более интересно рассмотреть систему уравнений для триплетных состояний четности $(-1)^{j+1}$. Так как орбитальные моменты равны $j - 1$ и $j + 1$, то имеем

$$L(j) = \begin{pmatrix} j-1 & 0 \\ 0 & j+1 \end{pmatrix}. \quad (15.95)$$

Матрицу потенциалов можно найти, воспользовавшись выражением (15.14) При этом получаем

$$V_j = \frac{1}{2j+1} \begin{pmatrix} (2j+1)\mathcal{T}_a - 2(j-1)\mathcal{T}_t & 6[j(j+1)]^{1/2}\mathcal{T}_t \\ 6[j(j+1)]^{1/2}\mathcal{T}_t & (2j+1)\mathcal{T}_a - 2(j+1)\mathcal{T}_t \end{pmatrix}, \quad (15.96)$$

где

$$\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_c + \mathcal{T}_\sigma.$$

В приложениях к теории ядра важно, кроме того, дополнительно рассматривать спин-орбитальное взаимодействие

$$V_{LS} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} V_0(r), \quad (15.97)$$

где \mathbf{L} и \mathbf{S} — орбитальный и спиновый угловые моменты соответственно. Подстановка (15.97) в (15.14) ведет к дополнительному вкладу в матрицу потенциалов

$$V_j = \begin{pmatrix} j-1 & 0 \\ 0 & -j-2 \end{pmatrix} \mathcal{T}_0(r), \quad (15.98)$$

где $\mathcal{V}_0 = 2\mu V_0$. Следует отметить, что матрица (15.98) диагональна, но вклады от дополнительного взаимодействия для двух состояний с разными орбитальными угловыми моментами имеют противоположные знаки.

Состояния с $j = 0$ следует рассматривать отдельно. В этом случае компонента с $l = j - 1$ является бессмысленной и не представляет физического интереса. Поскольку при $j = 0$ недиагональные элементы в (15.95) обращаются в нуль, то уравнения разделяются и необходимо рассматривать только уравнение для состояния с $l = j + 1$, которое можно решить с помощью методов, изложенных в гл. 12.

2. Решения

Регулярное решение. Матричное дифференциальное уравнение (15.92) решается методами гл. 12. Единственное имеющееся при этом незначительное затруднение состоит в том, что в систему уравнений входят неодинаковые центробежные члены; данное обстоятельство приводит к тому, что решения по-разному ведут себя в точке $r = 0$. Вследствие этого прежде всего не существует простого способа выделить регулярное решение с помощью задания граничного условия в нуле. Для триплетного состояния двух частиц со спинами $1/2$ с четностью $(-1)^{j+1}$ главным членом одного регулярного решения-столбца является первый член, имеющий порядок r^j . В других решениях-столбцах ведущим является второй член, имеющий порядок r^{j+2} . Все остальные элементы матрицы имеют порядки между r^j и r^{j+2} , и они зависят от потенциала. Таким образом, невозможно выделить первое решение-столбец с помощью граничного условия так, чтобы исключить произвольную примесь второго решения-столбца.

То, что в данном случае ситуация в точке $r = 0$ является иной, можно также увидеть на примере потенциала прямоугольной формы, разлагая решение для него в ряд по степеням r . При этом по известной теории Фукса найдем, что все регулярные решения-столбцы, кроме одного, содержат логарифмические члены.

Отсутствие простого граничного условия для выделения регулярного решения не является вместе с тем непреодолимым препятствием. Мы можем просто сразу написать интегральное уравнение, которое является очевидным аналогом уравнения (12.133). В нейтрон-протонном случае решение в нулевом приближении следует взять в виде

$$\Phi_j^{(0)}(k, r) = \begin{pmatrix} (2j-1)!!k^{-j}u_{j-1}(kr) & 0 \\ 0 & (2j+3)!!k^{-j-2}u_{j+1}(kr) \end{pmatrix}, \quad (15.99)$$

а функцию Грина при $r' < r$ — в виде

$$\mathfrak{G}_j(k; r, r') = \begin{pmatrix} g_{j-1}(k; r, r') & 0 \\ 0 & g_{j+1}(k; r, r') \end{pmatrix}, \quad (15.100)$$

где g_l определяется выражением (12.135). Совершенно ясно, какими должны быть эти функции в более общих случаях. Диагональную матрицу L , введенную в (15.92), можно теперь использовать для записи (15.99) и (15.100) в очевидной символической форме. Получим

$$\Phi_j^{(0)}(k, r) = (2L + 1)!!k^{-L}u_L(kr), \quad (15.99a)$$

$$\mathfrak{G}_j(k; r, r') = g_L(k; r, r'). \quad (15.100a)$$

Ниже мы везде будем пользоваться матрицей L .

Если теперь попытаться записать аналог интегрального уравнения (12.133) для регулярного решения Φ_j просто в виде

$$\Phi_j(k, r) = \Phi_j^{(0)}(k, r) + \int_0^r dr' \mathfrak{G}_j(k; r, r') V_j(r') \Phi_j(k, r'),$$

то нетрудно убедиться, что такая запись законна только тогда, когда недиагональные элементы матрицы V_j в сильном смысле стремятся к нулю. Трудность состоит в том, что в произведение матриц в подинтегральном выражении входит регулярное решение с одним орбитальным угловым моментом, помноженное на нерегулярное решение с некоторым более высоким орбитальным угловым моментом (от функции Грина). Поэтому, если не делать достаточно сильных предположений относительно элементов матрицы потенциалов, то рассматриваемый интеграл будет расходиться на нижнем пределе $r = 0$.

Один из способов преодоления данной трудности состоит в видоизменении неоднородного члена $\Phi_j^{(0)}$ в интегральном уравнении путем замены его разумно выбранной (постоянной) матрицей, пропорциональной $\Phi_j^{(0)}$. Так, в нейтрон-протонном случае вместо $\Phi_j^{(0)}$ возьмем матрицу

$$\Phi_j^{(0)} \left[1 - (2j + 3)^{-1} \int_0^{R_0} dr' r'^{-1} V_j^{\text{OFF}}(r') \right],$$

где

$$V_j^{\text{OFF}} = V_{j-1, j+1}^j \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а R_0 — произвольное фиксированное число; его можно, например, положить равным бесконечности. Разбивая интеграл на две части

$$\int_0^{R_0} = \int_0^r + \int_r^{R_0},$$

запишем наше интегральное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \Phi_j(k, r) = & \Phi_j^{(0)}(k, r) \left[1 + (2j + 3)^{-1} \int_{R_0}^r dr' r'^{-1} V_j^{\text{OFF}}(r') \right] + \\ & + \int_0^r dr' \left[\mathcal{G}_j(k; r, r') V_j(r') \Phi_j(k, r') - (2j + 3)^{-1} \Phi_j^{(0)}(k, r) V_j^{\text{OFF}}(r') r'^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (15.101)$$

Теперь нам уже не нужно предполагать, что интеграл

$$\int_0^r dr r^{-1} V_j^{\text{OFF}}$$

существует. Вызвавший затруднения член компенсируется, и на матрицу потенциалов V_j не требуется накладывать более сильные ограничения, чем в гл. 12. Ряд последовательных приближений, представляющий решение уравнения (15.101), сходится абсолютно при тех же самых условиях, что и ряд для ϕ_l . Функция Φ_j обладает такими же аналитическими свойствами, как и функция ϕ_l .

В более общем случае подобное введение контрчленов для обеспечения сходимости также приводит к положительному результату. Конечно, в случаях, когда разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями l , соответствующими одному и тому же j , больше, контрчлены должны иметь более сложный вид.

Нерегулярные решения. Нерегулярные решения $F_{j\pm}$, которые являются аналогом решений $f_{l\pm}$, легко определить, вводя в рассмотрение граничное условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} l^{\mp ik} F_{j\pm}(k, r) = 1 \quad (15.102)$$

или обращаясь к интегральному уравнению

$$F_{j\pm}(k, r) = F_{j\pm}^{(0)}(k, r) - \int_r^{\infty} dr' \mathcal{G}_j(k; r, r') V_j(r') F_{j\pm}(k, r'), \quad (15.103)$$

в котором

$$F_{j\pm}^{(0)}(k, r) = e^{-i1/2\pi L \omega_L^{\pm}}(k, r). \quad (15.104)$$

Решение интегрального уравнения (15.103) можно построить методом последовательных приближений при тех же условиях, что и в случае уравнения (12.138); функция F_j обладает такими же аналитическими свойствами, как и функция f_l .

3. Матрица Иоста и S-матрица

Следующим этапом будет определение матричных функций Иоста $\mathcal{F}_{j\pm}$ по аналогии с (12.28). Однако теперь вронскиан нужно определять следующим образом ¹⁾:

$$W(F, \Phi) \equiv \tilde{F}\Phi' - \tilde{F}'\Phi. \quad (15.105)$$

Использовать транспонированные матрицы необходимо для того, чтобы вронскиан от двух различных матричных решений одного и того же дифференциального уравнения (с симметричной матрицей потенциалов) был постоянной. Опираясь на указанное определение вронскиана, определим матричные функции Иоста

$$\tilde{\mathcal{F}}_{j\pm}(k) = W(F_{j\pm}, \Phi_j), \quad (15.106)$$

так что решение Φ_j можно представить в форме

$$\Phi_j(k, r) = \frac{1}{2ik} (F_{j+} \tilde{\mathcal{F}}_{j-} - F_{j-} \tilde{\mathcal{F}}_{j+}). \quad (15.107)$$

Сравнивая (15.107) с (15.16) и (15.102), приходим к выражению для S-матрицы:

$$S^j = e^{i\pi L} \tilde{\mathcal{F}}_{j-} \tilde{\mathcal{F}}_{j+}^{-1}. \quad (15.108)$$

Диагональная матрица $e^{i\pi L}$ коммутирует с матрицей S^j при условии сохранения четности, так как при этом между собой связываются только такие l , которые отличаются друг от друга на целое четное число. В рассматриваемом нейтрон-протонном случае можно написать $e^{i\pi L} = -e^{i\pi j}$.

Свойство симметрии матрицы S^j можно вывести, воспользовавшись соотношением

$$W(\Phi_j, \Phi_j) = 0, \quad (15.109)$$

являющимся следствием интегрального уравнения (15.101). После подстановки в (15.109) выражения (15.107) получаем

$$\tilde{\mathcal{F}}_{j-} \tilde{\mathcal{F}}_{j+} = \tilde{\mathcal{F}}_{j+} \tilde{\mathcal{F}}_{j-}$$

и, следовательно, в силу (15.108)

$$\tilde{S}^j = S^j. \quad (15.110)$$

Опять убеждаемся, что вследствие наличия инвариантности относительно обращения времени и при нашем выборе фаз S-матрица должна быть симметричной. Эта инвариантность относительно обращения времени требует симметрии, а следовательно, действительности матрицы потенциалов, входящей в (15.92); без этого соотношение (15.110) не было бы справедливо.

¹⁾ Тильдой мы обозначаем операцию транспонирования матриц.

Конечно, S -матрица при действительных k также удовлетворяет соотношению

$$S^j(-k) = S^{j*}(k) = S^j(k)^{-1}, \quad (15.111)$$

подобному (12.74); следовательно, S -матрица унитарна, как это и должно быть.

Асимптотическое поведение физической волновой функции (15.13) дается (15.16). Сравнивая (15.16) с (15.107), заключаем, что

$$\Psi^{j(+)} = k\Phi_j \mathcal{F}_{j+}^{-1} e^{i1/2\pi L}. \quad (15.112)$$

Матричные функции Иоста, аналогичные функциям Иоста (12.142) и (12.142а), теперь определяются выражениями

$$\mathfrak{f}_{j\pm}(k) = \mathcal{F}_{j\pm}(k) [(2L+1)!!]^{-1} k^L e^{\mp i1/2\pi L}; \quad (15.113)$$

для матричной функции \mathfrak{f}_j имеется интегральное представление, подобное (12.144), хотя и несколько более сложное из-за наличия контрчленов в (15.101). В нейтрон-протонном случае имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_j(k) = 1 + \int_0^\infty dr \{ e^{-i1/2\pi L \omega_L^{(+)}(kr)} V_j(r) \Phi_j(k, r) e^{-i1/2\pi L} [(2L+1)!!]^{-1} k^L + \\ + (2j+1) V_j^{\text{OFF}}(r) (r^{-1} k^{-2}) \} \end{aligned} \quad (15.114)$$

при условии, что R_0 в (15.101) берется равным бесконечности. Нетрудно убедиться в том, что имеющийся в (15.114) контрчлен должен компенсировать расходимость в нуле. Легко видеть, что выражение (15.114) приводит к (15.17). Аналог выражения (12.143) является более сложным, и мы его здесь приводить не будем.

Пределы высоких и низких энергий. В предельном случае высоких энергий для матрицы \mathfrak{f}_j при $\text{Im } k \geq 0$ имеем

$$\mathfrak{f}_j(k) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 1. \quad (15.115)$$

Так как, кроме того, в силу (15.108) и (15.113) выполняется соотношение

$$S^j = \mathfrak{f}_j - \mathfrak{f}_{j+}^{-1}, \quad (15.116)$$

то для действительных значений k будет выполняться предельное соотношение

$$S^i \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 1, \quad (15.117)$$

так что собственные фазовые сдвиги δ_α^j , входящие в (15.76), можно определить так, чтобы они стремились к нулю при бесконечно больших энергиях.

Выражение, описывающее поведение S -матрицы при низких энергиях, находим так же, как было найдено выражение (12.161). При $k \rightarrow 0$ теперь имеем

$$S_{ll'}^j(k) - \delta_{ll'} = O(k^{l+l'+1}) \quad (15.118)$$

при условии, что для всех l, l' и l'' , связанных с данным j , выполняется неравенство

$$\int_0^\infty dr r^{2l+2} |V_{l'l''}^j| < \infty \quad (15.119)$$

и при условии, что $\det \mathcal{F}_j(0) \neq 0$.

Ситуация становится сложнее, когда $\det \mathcal{F}_j(0) = 0$. Мы отсылаем читателя к специальной литературе, посвященной этому особому случаю [641].

К-матрица. Из соотношения (15.118) следует, что вблизи нулевой энергии К-матрица имеет порядок $O(k^{l+l'+1})$. Поэтому удобно рассматривать вместо нее приведенную К-матрицу по аналогии с (12.162), определяемую выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^j &= i(-ik)^{-L-1/2} K^j (-ik)^{-L-1/2} = \\ &= (-ik)^{-L-1/2} (S^j - 1)(S^j + 1)^{-1} (-ik)^{-L-1/2}. \end{aligned} \quad (15.120)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S^j &= [1 + (-ik)^{L+1/2} \mathcal{K}^j (-ik)^{L+1/2}] [1 - (-ik)^{L+1/2} \mathcal{K}^j (-ik)^{L+1/2}]^{-1} = \\ &= (-ik)^{L+1/2} [(-ik)^{2L+1} + \mathcal{K}^j] [(-ik)^{2L+1} - \mathcal{K}^j]^{-1} (-ik)^{-L-1/2}. \end{aligned} \quad (15.120a)$$

Матрица \mathcal{K}^j действительна (при действительных k), симметрична и вследствие (15.111) является четной функцией от k . По аналогии с (12.164) определим симметричную матрицу \mathfrak{M}^j соотношением

$$S^j = 1 - k^{L+1/2} \mathfrak{M}^j k^{L+1/2}, \quad (15.121)$$

так что

$$(\mathfrak{M}^j)^{-1} = \frac{1}{z} k^{2L+1} - \frac{1}{2} i^{L+1/2} (\mathcal{K}^j)^{-1} i^{L+1/2}. \quad (15.122)$$

Собственные фазовые сдвиги и определитель Фредгольма. Иногда удобно рассматривать просто определитель S-матрицы. Согласно (15.76), его можно выразить как сумму собственных фазовых сдвигов. Имеем

$$\det S^j = e^{2i\delta^j}, \quad (15.123)$$

где

$$\delta^j = \sum_{\alpha} \delta_{\alpha}^j. \quad (15.124)$$

Согласно (15.116), этот определитель можно также записать в виде

$$\det S^j = \frac{\Delta_j^j}{\Delta_j^j}, \quad (15.125)$$

где

$$\Delta_j^j = \Delta^j = \det \mathfrak{f}_j; \quad (15.126)$$

последний определитель — это определитель Фредгольма для системы связанных интегральных уравнений (15.13). [В этом можно убедиться точно так же, как в справедливости соотношения (12.143).]

Формулу для полной функции Грина можно получить таким же способом, как были получены формулы (12.40) и (12.146). Сначала рассмотрим вспомогательное матричное решение $\Lambda(k, r)$ уравнения (15.92), которое определяется с помощью граничных условий

$$\Lambda_j(k, r_0) = 0, \quad \Lambda_j^+(k, r_0) = 1, \quad (15.127)$$

заданных в произвольной точке $r_0 \neq 0$. Это решение легко выразить через функции $F_{j\pm}$:

$$\Lambda_j = \frac{1}{2ik} (F_{j+} a_{j-} - F_{j-} a_{j+}), \quad (15.128)$$

где

$$a_{j\pm} = W(F_{j\pm}, \Lambda_j).$$

Приведенный вронскиан можно вычислить в точке $r = r_0$, используя граничные условия (15.127):

$$a_{j\pm} = \tilde{F}_{j\pm}(k, r_0). \quad (15.129)$$

Подставляя далее (15.129) в (15.128) и еще раз пользуясь граничными условиями (15.127), находим, что

$$F_{j+}\tilde{F}_{j-} - F_{j-}\tilde{F}_{j+} = 0, \quad (15.130)$$

$$F'_{j+}\tilde{F}_{j-} - F'_{j-}\tilde{F}_{j+} = 2ik1; \quad (15.130a)$$

так как r_0 может принимать любые положительные значения, то соотношения (15.130) и (15.130a) должны выполняться при всех значениях r . Теперь воспользуемся соотношениями (15.130) и (15.130a), чтобы убедиться в том, что функция

$$\mathcal{G}_j^\pm(k; r, r') = \begin{cases} -\Phi_j(k, r) \mathcal{F}_{j+}^{-1}(k) \tilde{F}_{j+}(k, r'), & r < r', \\ -F_{j+}(j, r) \mathcal{F}_{j+}^{-1}(k) \tilde{\Phi}_j(k, r'), & r > r', \end{cases} \quad (15.131)$$

обладает всеми требуемыми свойствами функции Грина. Согласно (15.112), выражение (15.131) можно также переписать в виде

$$\mathcal{G}_j^\pm(k; r, r') = \begin{cases} -k^{-1}\Psi^{j(+)}(k, r) e^{-i1/2\pi L} \tilde{F}_{j+}(k, r'), & r < r', \\ -k^{-1}F_{j+}(k, r) e^{-i1/2\pi L} \tilde{\Psi}^{j(+)}(k, r'), & r > r'. \end{cases} \quad (15.131a)$$

Диагонализация матрицы потенциалов. Прежде чем переходить к рассмотрению связанных состояний, следует разобрать некоторые важные случаи, когда оказывается возможным диагонализировать матрицу потенциалов V_j с помощью преобразования, не зависящего от r . Например, в нейтрон-протонном случае при отсутствии спин-орбитального взаимодействия (15.97) матрицу V_j (15.96) можно диагонализировать с помощью матрицы U_j , определяемой выражением (15.82):

$$W(r) = U_j V_j U_j^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}'_d + 2\mathcal{V}'_t & 0 \\ 0 & \mathcal{V}'_d - 4\mathcal{V}'_t \end{pmatrix}. \quad (15.132)$$

Отметим, что W не зависит от j . Указанное преобразование можно вообще применить к уравнению (15.92) или к соответствующей системе интегральных уравнений. При этом получаем, что после преобразования связь между уравнениями будет определяться только центробежным членом, поскольку

$$U_j L(L+1) U_j^{-1} = \begin{pmatrix} \beta^2 & -2\beta \\ -2\beta & \beta^2 + 2 \end{pmatrix}, \quad (15.133)$$

где $\beta^2 = j(j+1)$. Новые решения преобразованного уравнения можно построить согласно формулам

$$\begin{aligned} \bar{F}_{j\pm} &= U_j F_{j\pm} U_j^{-1}, \\ \bar{\Phi}_j &= U_j \Phi_j U_j^{-1}; \end{aligned} \quad (15.134)$$

для новой функции Иоста имеем соотношение

$$\bar{\mathcal{F}}_{j\pm} = U_j \mathcal{F}_{j\pm} U_j^{-1} = W(\bar{F}_{j\pm}, \bar{\Phi}_j), \quad (15.135)$$

поскольку $\tilde{U}_j = U_j = U_j^{-1}$. Интересно отметить, что преобразованная S -матрица

$$\bar{S}_j = U_j S_j U_j^{-1} = e^{i\pi L} \bar{\mathcal{F}}_{j-} \bar{\mathcal{F}}_{j+}^{-1} \quad (15.136)$$

является в точности такой, какая требуется для непосредственного вычисления спиральных амплитуд, как это видно из (15.80), (15.81) и (15.83). При учете спин-орбитального взаимодействия мы, конечно, можем опять воспользоваться преобразованием U_j , но оно уже не будет диагонализировать матрицу потенциалов. Более того, преобразованная матрица потенциалов теперь будет зависеть от j .

Умножая слева вторую строку в (15.143) на такой вектор \tilde{a} , для которого $\tilde{a}A_0 = 0$, получаем $\tilde{a}A_1B_{-n} = 0$. Согласно первой строке в (15.143), матрица B_{-n} такова, что при умножении матрицы A_0 на нее справа получается нуль. Но тогда вследствие (15.142) она сама должна равняться нулю: $B_{-n} = 0$. Аналогичным образом можно показать, что $B_{-n+1} = 0$ и т. д.; все B равны нулю, кроме B_{-1} . Тогда из последней строки (15.143) следует, что

$$\tilde{a}A_1B_{-1} = \tilde{a}.$$

Рассмотрим опять функцию $\mathcal{F}_j^{-1}(k)$. Из того обстоятельства, что она имеет однократный полюс в точке $k = k_0$, не следует обязательно, что отсутствует вырождение. Если нет вырождения и $\mathcal{F}_j^{-1}c$ имеет полюс в точке k_0 , то не должно существовать ни одного такого вектора d , ортогонального к вектору c , для которого функция $\mathcal{F}_j^{-1}d$ также имела бы полюс в этой точке. Это означает, что вычеты функций, получаемых умножением B_{-1} на все векторы, ортогональные к c , должны обращаться в нуль и, следовательно, матрицу B_{-1} можно записать в виде прямого произведения

$$B_{-1} = c'\tilde{c}.$$

Согласно последней строке (15.143), имеем

$$\tilde{a} = \tilde{a}A_1B_{-1} = (\tilde{a}A_1c')\tilde{c},$$

так что

$$\lim_{k \rightarrow k_0} (k - k_0) \mathcal{F}_j^{-1}(k) = a'\tilde{a}.$$

В результате получаем, что вычет функции S^j в полюсе, соответствующем связанному состоянию (если только функцию \mathcal{F}_j можно аналитически продолжить в окрестность этого полюса), факторизуется в том смысле, что

$$\lim_{k \rightarrow k_0} (k - k_0) S^j(k) = a\tilde{a}, \quad (15.144)$$

где вектор a определяется соотношением (15.138) и смысл которого раскрывается формулой (15.140); мы воспользовались симметрией матрицы S^j .

Если есть вырождение, то полюс продолжает оставаться однократным, но теперь существует несколько ортогональных векторов a_n , удовлетворяющих соотношению (15.138). В этом случае вычет функции S^j имеет вид суммы $\sum_n a_n \tilde{a}_n$.

Из (15.131) видно, что однократность полюсов функции \mathcal{F}_j^{-1} , соответствующих связанным состояниям, означает, что полюсы резольвенты $(E - H)^{-1}$ также являются однократными. Конечно, как следует из гл. 7, так оно и должно быть. Поскольку гамильтониан H эрмитов, то резольвента обязательно имеет *однократные* полюсы в точках, соответствующих собственным значениям.

Теорема Левинсона. Наметим теперь доказательство теоремы Левинсона. Определитель $\Delta^j(k)$, входящий в (15.126), обладает такими же свойствами, что и функция \tilde{f}_l в случае нулевого спина, и для него можно провести рассуждения, подобные тем, которые ведут к (12.95). Поскольку полюс функции \tilde{f}_j^{-1} , соответствующий связанному состоянию, является однократным, то кратность нуля определителя $\Delta^j(k)$ равна кратности вырождения связанного состояния. Поэтому можно утверждать, что число нулей n_j определителя $\Delta^j(k)$, расположенных в верхней полуплоскости k , просто равно числу связанных состояний при условии, что каждый нуль и каждое связанное состояние считаются столько раз, какова их кратность и степень вырождения соответственно. Единственное осложнение возникает в случае $k = 0$. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к соответствующей литературе [641].

Допустим далее, что $\Delta^j(0) \neq 0$. Тогда имеем аналог формулы (12.156):

$$\delta^j(0) = \pi \eta_j. \quad (15.145)$$

Следует напомнить, что, согласно (15.124), величина δ^j представляет собой сумму собственных фазовых сдвигов, соответствующих угловому моменту j .

Здесь уместно спросить, существует ли, кроме условия (15.145), еще какое-либо общее условие, которому должны удовлетворять отдельные собственные фазовые сдвиги? Мы знаем, что, согласно соотношению (15.117), каждый собственный фазовый сдвиг можно определить таким образом, чтобы при бесконечной энергии он равнялся нулю. Кроме того, согласно (15.118), при нулевой энергии каждый собственный фазовый сдвиг должен быть кратным π . Однако никаких общих условий относительно степени кратности отдельных собственных фазовых сдвигов неизвестно, кроме приведенного ограничения (15.145) на сумму собственных фазовых сдвигов. Некоторые из δ_α^j могут быть даже отрицательными. Следует отметить, что, вообще говоря, собственные значения матрицы S^j необязательно будут собственными значениями матрицы \hat{f}_j . Единственный вывод, который можно сделать на основании соотношений (15.116), (15.110) и (15.111), состоит в том, что матрицу \hat{f}_j можно представить в виде

$$\hat{f}_j = B^j e^{-i\Lambda^j} N^j, \quad (15.146)$$

где B^j — действительная ортогональная матрица, диагонализующая матрицу S^j [см. 15.76)]; Λ^j — диагональная матрица собственных фазовых сдвигов; N^j — некоторая действительная (при действительных k) матрица.

Связанные состояния для $j=1$ при отсутствии связанных состояний для $j=0$. Сделаем ряд дополнительных замечаний относительно связанных состояний. Для частиц с нулевым спином из существования связанного состояния с единичным угловым моментом следует существование по крайней мере одного связанного состояния с нулевым угловым моментом. Если частицы имеют спины, отличные от нуля, то это уже не так. Легче всего в этом убедиться, считая, что угловой момент изменяется непрерывно. Например, в нейтрон-протонном случае при уменьшении j от единицы до нуля мы должны получить связанное состояние либо с $l = j + 1$, либо с $l = j - 1$. Первое состояние имеет физический смысл, второе бессмысленно и физически не реально. Следовательно, теперь может существовать связанное состояние с $j = 1$ и при этом не будет связанного состояния с $j = 0$.

5. Дополнительные замечания

Представимость S-матрицы через функцию \hat{f} . Ограничения на вид S-матрицы, возникающие в том случае, когда она определяется достаточно хорошей матрицей потенциалов, не исчерпываются условиями унитарности, симметрии, теоремой Левинсона (15.145) и условием сравнительно быстрого стремления S-матрицы к единичной матрице при возрастании энергии; в случае частиц с нулевым спином ограничения сводились к перечисленным выше. Любую функцию на действительной оси, по модулю равную единице, можно представить с помощью функции \hat{f} согласно (12.71), если она достаточно регулярна и достаточно хорошо ведет себя при высоких и низких энергиях. Единственно возможный вид функции \hat{f}_+ дается при этом выражением (12.64). В матричном случае задача построения \hat{f}_j из соотношения (15.116) значительно сложнее; рассмотрение этого вопроса можно найти в соответствующей литературе [657]. В ходе решения указанной задачи оказывается, что не любую матричную функцию, удовлетворяющую упомянутым выше условиям, можно представить данным способом. При этом до сих пор не найдены общие критерии, которые

позволили бы заранее сказать, возможно это сделать или нет.

***N/D*-метод.** *N/D*-метод (12.91) нетрудно обобщить на матричный случай. Конечно, мы будем иметь тогда матричное уравнение. Например, если рассматривается матрица потенциалов юкавского типа (12.22а), то это уравнение имеет вид

$$f_j(k) = \mathbf{1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ia_0/2}^{i\infty} dk' \frac{\Delta S^j(k') f_j(k')}{k' + k}, \quad (15.147)$$

где ΔS^j — скачок на левом разрезе, определение которого дано после (12.91).

Решения в замкнутом виде. Наконец, можно рассмотреть матрицы потенциалов, допускающие представление решения уравнения (15.92) в явном виде (при любых энергиях). Пока что единственными известными матрицами такого рода являются матрицы обобщенных потенциалов Баргмана. Читателя, интересующегося этим вопросом, мы отсылаем к соответствующей литературе [313]. Следует отметить, что *невозможно* в явном виде найти решения уравнения (15.92) в случае, когда V_j есть матрица потенциалов прямоугольной формы (если только она не содержит членов, связывающих состояния с различными орбитальными угловыми моментами).

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Свойства коэффициентов Клебша — Гордана рассмотрены в [766, 719, 237, 912], а также в приложении А к [77]. Наша система обозначений и определение фазы совпадают с приведенными в книге [719]. Относительно полиномов Якоби см. книгу Морса и Фешбаха [615], т. 2.

Амплитуды рассеяния (и реакции) для частиц со спином с учетом поляризации рассмотрены в следующих работах: [763, 929, 920, 921, 82, 75, 779, 778, 1024, 1018—1023, 430]. Это не исчерпывающий перечень работ, но он позволит изучающему данный вопрос достаточно свободно ориентироваться в литературе.

Рассеяние на потенциале Дирака рассмотрено в [289].

К § 2. Для первого ознакомления с подробным рассмотрением *тензорных сил* см. статью Рариты и Швингера [701]. Изложение теории Фукса можно найти у Айнса [420], стр. 491. Зацепляющиеся уравнения и соответствующие им матрицы Юста и S-матрица рассмотрены в [657]; в частности, случай связанных орбитальных угловых моментов путем введения контрчлена рассмотрен в [641]; см. также [646].

Потенциалы Баргмана в случае связанных угловых моментов рассматривались в [313]; их применение к задаче нейтрон-протонного рассеяния дано в [656].

Обобщение метода Редже на случай двух частиц со спином $1/2$ см. в [214], а также в [653], гл. 16.

Аннотированную литературу по вопросам, касающимся задачи рассеяния позитрона, можно найти в [454].

ЗАДАЧИ

1. Выразить матрицу плотности спиновых состояний рассеянного пучка частиц через матрицу плотности спиновых состояний падающего пучка (используя понятие спиральности) в случае рассеяния частиц со спином $1/2$ на частицах с нулевым спином. Предполагая, что падающий пучок не поляризован, и учитывая вклады в амплитуду рассеяния только от состояний с $l = 0$ и $l = 1$, найти поляризацию как функцию угла рассеяния.

2. Частицы *A* со спином $1/2$ рассеиваются частицами *B* со спином $1/2$. Допустим, что все частицы первоначально не поляризованы и их энергия настолько мала, что вклад в амплитуду рассеяния дают только *s*-, *p*- и *d*-волны. Вычислить матрицу плотности спиновых состояний для частиц *A* как функцию угла рассеяния (используя понятие спиральности).

3. Допустим, что при условиях, аналогичных условиям задачи 2, производится регистрация рассеянных частиц *A* и *B* по схеме совпадений, причем регистрируются только такие частицы *B*, которые имеют положительную спиральность. Какой вид имеет спиновая матрица плотности рассеянных частиц *A*? Каковы степень и направление их поляризации как функции угла рассеяния?

4. неполяризованные частицы A рассеиваются на первоначально покоящихся неполяризованных частицах B . а) Частицы отдачи B не регистрируются. Каково направление поляризации (если она возникает) рассеянных частиц? б) Допустим, что производятся измерения по схеме совпадений и таким образом измеряются моменты рассеянных частиц и частиц отдачи. Каково направление поляризации тех рассеянных частиц, для которых частицы отдачи движутся в заданном направлении? в) Допустим, что, кроме того, измеряется ориентация спинов частиц отдачи. Каково направление поляризации тех рассеянных частиц, для которых частицы отдачи имеют положительную спиральность?

5. Какова возможная угловая зависимость дифференциального сечения рассеяния в случае рассеяния частиц со спином s_1 на частицах со спином s_2 в пределе низких энергий? Какова эта зависимость, если падающие частицы не поляризованы? Какой вид имеет угловая зависимость дифференциального сечения, если частицы мишени не поляризованы, а частицы в пучке поляризованы?

6. Пусть частицы со спином $1/2$ рассеиваются на мишени, причем их взаимодействие описывается гамильтонианом

$$H' = V_1(r) + \sigma \cdot r \times p V_2(r) + V_2(r) \sigma \cdot r \times p.$$

В Борновском приближении вычислить поляризацию рассеянного пучка как функцию угла рассеяния, если падающий пучок: а) не поляризован, б) имеет положительную спиральность.

7. Для частиц, описанных в задаче 6, вычислить (в борновском приближении) сечение двукратного рассеяния двумя мишенями. Прямая, соединяющая мишени, составляет заданный угол с направлением падающего пучка. Считать, что падающие частицы не поляризованы и спины в конечном состоянии не измеряются.

8. а) Выразить элементы 2×2 -матрицы S через собственные фазовые сдвиги и параметр смешивания. б) Сделать то же самое для 3×3 -матрицы S . Сколько параметров смешивания имеется в данном случае?

9. Доказать соотношения (15.96) и (15.98).

10. Считая, что потенциалы \mathcal{V}_d и \mathcal{V}_t в выражении (15.96) постоянны при $r < r_0$, найти регулярное матричное решение Φ_1 для $j = 1$ путем разложения в окрестности точки $r = 0$. Аналогичным образом найти линейно независимое нерегулярное решение.

11. Показать, что уравнение (15.101) имеет смысл всякий раз, когда у всех элементов матрицы потенциалов существуют первый и второй абсолютные моменты.

12. Доказать соотношение (15.118), считая, что выполняется условие (15.119).

13. Показать, что $\det f_j$ — определитель Фредгольма системы связанных интегральных уравнений.

14. Показать, что выражение (15.131) определяет функцию Грина.

15. Исходя из (15.116), доказать, что в нейтрон-протонном случае при четности $(-1)^{j+1}$ поведение собственных фазовых сдвигов при низкой энергии должно определяться асимптотическими выражениями

$$e^{2i\delta_1^j} - 1 = O(k^{2j-1}), \quad e^{2i\delta_2^j} - 1 = O(k^{2j+3}),$$

а асимптотическое поведение угла смешивания — выражением $\sin 2\theta = O(k^2)$.

16. В нейтрон-протонном случае с $j = 1$ написать в явном виде такую 2×2 -матрицу S , которая удовлетворяла бы условиям унитарности, симметрии, соотношениям (15.117), (15.118) и теореме Левинсона об отсутствии связанных состояний с $j = 1$ и, кроме того, чтобы каждый элемент данной матрицы был рациональной функцией от k .

Неупругое рассеяние и реакции (многоканальная теория). I

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Чтобы получить общее представление о разбираемом вопросе и легче понять возникающие здесь трудности, рассмотрим сначала для простоты систему трех взаимодействующих частиц, которые могут образовывать связанные состояния. Условно такую систему можно представить себе как атом водорода, взаимодействующий с электроном. Однако на самом деле мы должны считать, что силы взаимодействия более короткодействующие, чем кулоновские, а также, что оба «электрона» могут притягиваться друг к другу, так что они тоже могут образовывать связанные состояния. Кроме того, «электроны» обязательно являются тождественными. «Электроны» мы будем называть частицами 1 и 2, а «ядро» — частицей 3.

Когда частица 1 налетает на связанное состояние (2,3), возможно несколько различных процессов. Пусть первоначально система (2,3) находилась в основном состоянии, и пусть ее энергия связи больше возможных энергий связи связанных состояний (1,3) и (1,2). Тогда обязательно должен существовать интервал энергий, в котором возможно только упругое рассеяние 1 на (2,3). Далее, при увеличении энергии падающего пучка можно достигнуть такого ее значения, выше которого становится возможным переход системы (2,3) в возбужденное состояние, в то время как частица 1 будет терять соответствующее количество кинетической энергии. Мы оказываемся, таким образом, на пороге неупругого процесса. Говорят, что при этом открывается новый канал рассеяния. Начиная с этого значения энергии, упругое и неупругое рассеяния конкурируют друг с другом и падающий поток распределяется между обоими процессами.

Если система (2,3) имеет, кроме того, другие связанные состояния, которые могут возбуждаться, то при дальнейшем увеличении энергии падающего пучка становятся возможными другие подобные неупругие процессы. С другой стороны, если система (1,2) также имеет связанные состояния, то дополнительно могут возникнуть неупругие процессы другого рода. Частица 1 может захватить частицу 2, и конечное состояние будет представлять собой разлетающиеся частицу 3 и систему (1,2). Это *столкновение с перераспределением частиц*. Возможны также и другие каналы столкновений с перераспределением, в которых появляются частица 2 и система (1,3). Разумеется, конечные состояния (1,2) и (1,3) обязательно должны быть основными. Различные каналы отличаются друг от друга внутренними энергиями обоих фрагментов в конечном состоянии (если пренебречь случайными совпадениями). Кроме того, столкновения с перераспределением различаются характером обоих возникающих фрагментов.

Наконец, если кинетическая энергия падающего пучка достаточно велика, «атом» может быть «ионизован». Другими словами, энергия системы (2,3) будет лежать в своем непрерывном спектре, и в конечном состоянии мы будем иметь

три частицы, разлетающиеся в разных направлениях. При более низких энергиях потеря кинетической энергии каждым фрагментом в конечном состоянии (по сравнению с кинетической энергией налетающих частиц, скажем, в системе центра масс) является величиной, принимающей фиксированные дискретные значения, зависящие от энергии связи соответствующих связанных состояний. Выше порога «ионизации» при каждом фиксированном значении полной энергии возможно непрерывное распределение энергии между тремя частицами. Это значительно усложняет ситуацию по сравнению с той, которая имеет место при малых энергиях. Поэтому обычно разумно просто отвлечься от такого рода вопросов, игнорируя возможность ионизации. Другими словами, считают, что связанные системы как бы имеют несколько возбужденных состояний, но они не могут диссоциировать (хотя это, разумеется, противоречит самой возможности столкновений с перераспределением). Возникающая после этого упрощения задача обычно называется *многоканальной задачей рассеяния*. Отмеченный способ вполне удовлетворителен, когда энергия намного ниже порога ионизации; тогда даже виртуальными переходами в область выше порога можно пренебречь. Когда, однако, порог ионизации достигается, указанный способ становится непригодным.

Резонансы и связанные состояния, утопленные в непрерывном спектре.

Рассмотрим теперь трехчастичные связанные состояния системы (1,2,3). Предположим сначала, что частицы 1 и 2 не взаимодействуют друг с другом. Тогда частицы 1 и 2 связываются с частицей 3 при тех же значениях энергии, что и при образовании связанных состояний (1,3) и (2,3) по отдельности. Например, в отсутствие взаимодействия электрона с μ -мезоном энергетические уровни мезоатома гелия можно просто составить из энергетических уровней двух соответствующих ионов. При этом следует учитывать и такие высоковозбужденные уровни 1 и 2, когда их общей энергии достаточно, чтобы частица 1 имела возможность ионизоваться за счет энергии частицы 2; последняя при этом перейдет на более низкий энергетический уровень. Следовательно, такие комбинированные возбужденные состояния попадают в область энергий непрерывного спектра, когда частица 1 свободна, а частица 2 связана более сильно. Говорят, что такие связанные состояния *утоплены в непрерывном спектре*. Хотя диссоциация рассматриваемых возбужденных состояний энергетически возможна, система в таких состояниях совершенно стабильна, поскольку мы предположили, что отсутствует какое-либо взаимодействие между частицами 1 и 2. Два канала, отличающиеся энергией связи частицы 2, не связаны никак друг с другом.

Пусть теперь «включено» слабое взаимодействие между частицами 1 и 2. Тогда следует ожидать, что переход из возбужденного комбинированного связанного состояния в состояние, в котором частица 1 свободна, а частица 2 связана более сильно, действительно «происходит». Состояние, до этого бывшее стационарным, будет иметь в результате *конечное время жизни*. Таким образом, оно уже не будет больше связанным состоянием. Чем слабее взаимодействие, или, другими словами, чем слабее связь между каналами, тем больше должно быть время жизни. В атомной физике описанное явление называется *эффектом Оже*, в молекулярной физике — *преддиссоциацией*, в атомно-ядерных процессах — *внутренней конверсией*.

Изменим теперь направление времени. Если частица 1 первоначально находилась в связанном состоянии и затем вылетела как свободная с определенной энергией E_0 , зависящей от того, на какой энергетический уровень переходит при этом частица 2, то мы будем иметь свободную частицу 1 с энергией E_0 , налетающую на систему (2,3), находящуюся в соответствующем связанном состоянии. При этом возможен захват налетающей частицы 1 в почти связанное состояние с одновременным возбуждением частицы 2. Конечно, в конце концов снова должно произойти испускание частицы 1 в свободное

состояние. То обстоятельство, что она длительное время проводит в связанном состоянии, приводит к большому сечению рассеяния, а также к большой задержке выходящего потока по отношению к падающему. И то и другое характерно для *резонанса* (гл. 11, § 2, п. 2). Поскольку почти связанное состояние имеет конечное время жизни τ , то, согласно принципу неопределенности, его энергия определена с точностью до $\Delta E \approx 1/\tau$. Следовательно, явление резонанса должно наблюдаться в интервале энергии шириной $\Gamma \approx 1/\tau$. Можно ожидать, что чем слабее связь между каналами, тем более резким будет резонанс.

Что же происходит по мере того, как взаимодействие между частицами 1 и 2, или связь между каналами, увеличивается? Конечно, можно ожидать, что при сильном взаимодействии между каналами (независимо от того, какой точный смысл в это вкладывать) первоначально узкие резонансы будут настолько широкими, что их станет невозможно наблюдать. Однако это не всегда будет так. В действительности вполне может случиться, что реальное стационарное состояние, утопленное в непрерывном спектре, будет существовать даже при наличии сильной связи между каналами. Возражения против этого, сводящиеся к тому, что при наличии взаимодействия связанная частица с конечной вероятностью должна «просочиться» в свободное состояние, не всегда справедливы. Матричный элемент, квадрат абсолютной величины которого определяет вероятность перехода, просто может быть равным нулю *при энергии*, равной энергии связанного состояния. Тем не менее такое связанное состояние, погруженное в непрерывный спектр (при наличии взаимодействия), все же неустойчиво. Если на данное состояние действуют малые возмущения (например, от других частиц, находящихся на некотором расстоянии от данных), то эти возмущения, вообще говоря, нарушают те искусственно созданные условия, благодаря которым рассматриваемое состояние устойчиво, и его время жизни становится конечным. Для таких состояний, в отличие от других, почти устойчивых состояний, характерно то, что их время жизни полностью определяется окружающей средой.

Нас интересует главным образом не столько вопрос о возможности существования связанных состояний, утопленных в непрерывном спектре, сколько следующий результат: если *они* могут образоваться при наличии сильного взаимодействия, то тогда заведомо должны существовать и резко выраженные резонансы. Другими словами, мы хотим здесь подчеркнуть, что появление острого резонанса необязательно следует связывать со слабостью взаимодействия. Единственное, что требуется,— это чтобы возмущение гамильтониана, которое преобразует его в гамильтониан, имеющий связанное состояние, утопленное в непрерывном спектре, было малым. При слабой связи между каналами это возмущение может заключаться просто в «выключении» взаимодействия между каналами. Если каналы связаны сильно, то возмущение должно иметь более сложный характер.

§ 2. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

1. Шредингеровское представление

Попытаемся описать столкновение между частицей и связанным состоянием или между двумя связанными состояниями в рамках нестационарной теории, изложенной в гл. 6. Ясно, что разбиение гамильтониана на сумму двух операторов с включением в H_0 только кинетической энергии не принесет никакой пользы. В бесконечно далеком прошлом система состояла из нескольких частиц в связанном состоянии; только «бомбардирующая» частица была свободной. Разобьем поэтому гамильтониан на две части следующим образом: первая из них H_a представляет собой часть полного гамильтониана, который остается, когда оба исходных фрагмента удалены друг от друга;

оставшуюся часть гамильтониана обозначим через H'_a . Пусть \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 — радиусы-векторы центров масс частиц, входящих соответственно в фрагменты 1 и 2. Тогда в координатном представлении операторы H_a и H'_a можно определить следующим образом:

$$H_a \equiv \lim_{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \rightarrow \infty} H \quad (16.1)$$

и

$$H = H_a + H'_a. \quad (16.2)$$

Подразумевается, что переход к пределу в (16.1) совершается таким образом, что координаты всех частиц в фрагментах 1 и 2 фиксированы *относительно* положений центров масс \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 соответственно.

Можно повторить теперь все рассуждения относительно построения волновой функции $\Psi(t)$ из волновой функции $\Psi_{\text{ин}}(t)$, проведенные в гл. 6. Однако, когда мы переходим к рассмотрению поведения волновой функции в отдаленном будущем, возникает дополнительная трудность.

Если возможно перераспределение частиц, то «нулевой» гамильтониан, описывающий эволюцию интересующего нас состояния при $t \rightarrow +\infty$, *не совпадает* с гамильтонианом, описывающим эволюцию начального состояния при $t \rightarrow -\infty$. Следовательно, мы должны различать начальный нулевой гамильтониан и возможные конечные нулевые гамильтонианы. Мы будем обозначать последние разными нижними индексами, а возможные процессы с перестройкой, соответствующие разным конечным гамильтонианам, будем называть *каналами реакции*:

$$H = H_a + H'_a = H_b + H'_b. \quad (16.3)$$

Каждый канал реакции может объединять по несколько каналов рассеяния в обычном смысле, отличающихся друг от друга разными возбуждениями их фрагментов. Функции Грина определяются как решения уравнения

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_a\right) G_a^\pm(t) = i\delta(t), \quad (16.4)$$

удовлетворяющие граничным условиям (6.4).

Некоторые каналы реакции могут содержать, однако, более чем два фрагмента. Тогда нужно считать, что центры отдельных групп частиц уходят на бесконечность относительно друг друга. При условии, что получившиеся в результате части системы находятся в некоторых связанных состояниях, мы таким способом приходим к определению каналов реакции для более чем двух фрагментов. Другими словами, n частиц, описываемых полным гамильтонианом H , мы распределяем по m группам и затем независимо устремляем к бесконечности состояния между их центрами масс. Возникающий из H предельный гамильтониан обозначим через H_a . Гамильтониан H_a представляет собой сумму m парциальных гамильтонианов, каждый из которых описывает внутренние состояния частиц одной из m групп частиц. Пусть каждый из парциальных гамильтонианов имеет по крайней мере одно связанное состояние для описываемой им группы частиц. Тогда прямая сумма всех состояний, каждое из которых представляет связанное состояние соответствующей группы частиц, определяет состояние m -фрагментного канала реакции. Если какой-то один или несколько парциальных гамильтонианов, входящих в H_a , не имеют связанного состояния для соответствующей ему группы частиц, то гамильтониан H_a не определяет канала реакции. Если какой-то один или несколько гамильтонианов, входящих в H_a , имеют по несколько возбужденных состояний для соответствующей группы частиц, то канал реакции a будет объединять несколько каналов рассеяния в обычном смысле, отличающихся друг от друга возбуждением их фрагментов.

Пусть \mathcal{H}_a — пространство состояний канала реакции a . Если канал a имеет m фрагментов, то каждое состояние из пространства \mathcal{H}_a имеет m групп

связанных частиц. Пространство \mathcal{H}_a является полным гильбертовым пространством только в том случае, когда a есть n -фрагментный канал реакции. В остальных случаях собственные состояния оператора H_a , являющиеся состояниями ионизации, мы отбрасываем. Так как каждое из пространств \mathcal{H}_a характеризует состояния разных нулевых гамильтонианов H_a , то эти пространства, вообще говоря, не ортогональны друг другу.

Удобно рассматривать операторы проектирования P_a на пространства каналов \mathcal{H}_a . Для операторов P_a выполняются соотношения

$$P_a^2 = P_a, \quad P_a^\dagger = P_a, \quad P_a \mathcal{H}_a = \mathcal{H}_a; \quad (16.5)$$

оператор P_a переводит в нуль-пространство собственные векторы оператора H_a , соответствующие состояниям ионизации. Данное определение оператора P_a не годится только для n -фрагментного канала, для которого $H_a = H_0$ и все n частиц свободны; мы пока не будем давать определения оператора P_a для этого случая.

Ин- и аут-состояния. Аналогично тому, как это было сделано в гл. 6, § 2, положим по определению

$$\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t) \equiv \lim_{t' \rightarrow -\infty} iG_a^+(t-t') \Psi^{(+)}(\alpha, t'), \quad (16.6)$$

так что

$$\begin{aligned} \Psi^{(+)}(\alpha, t) &= \Psi_a(\alpha, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_a^+(t-t') H'_a \Psi^{(+)}(\alpha, t') = \\ &= \Psi_a(\alpha, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}^+(t-t') H'_a \Psi_a(\alpha, t'). \end{aligned} \quad (16.7)$$

Функция Ψ_a такова, что $\Psi_{\text{ин}}(\alpha, t) = \Psi_a(\alpha, t)$; уравнение

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_a\right) \Psi_a(\alpha, t) = 0 \quad (16.8)$$

описывает движение независимых фрагментов. Элемент из пространства \mathcal{H}_a , подчиняющийся уравнению (16.8), будем называть *состоянием*. Индекс α содержит всю необходимую дополнительную информацию о канале реакции a . Аут-состояние для функции $\Psi^{(+)}$ теперь нельзя определить с помощью соотношения, аналогичного (16.6), но в этом и нет необходимости.

С другой стороны, аут-состояние является «нулевым» для состояния $\Psi^{(-)}(\alpha, t)$, так что

$$\Psi_{\text{аут}}(\alpha, t) = \lim_{t' \rightarrow \infty} -iG_a^-(t-t') \Psi^{(-)}(\alpha, t), \quad (16.9)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_a\right) \Psi_{\text{аут}}(\alpha, t) = 0 \quad (16.10)$$

и

$$\begin{aligned} \Psi^{(-)}(\alpha, t) &= \Psi_a(\alpha, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_a^-(t-t') H'_a \Psi^{(-)}(\alpha, t') = \\ &= \Psi_a(\alpha, t) + \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mathcal{G}^-(t-t') H'_a \Psi_a(\alpha, t'). \end{aligned} \quad (16.11)$$

Для $\Psi^{(-)}$ ин-состояние не является «нулевым» и его невозможно определить согласно (16.6).

Волновые операторы и S-операторы. Волновые операторы определяются как операторы отображения

$$\Psi^{(\pm)}(\alpha, t) = \Omega_a^{(\pm)} \Psi_a(\alpha, t), \quad (16.12)$$

которые связывают $\Psi^{(+)}$ с его ин-состоянием: $\Psi_{\text{ин}} = \Psi_a$, а $\Psi^{(-)}$ с его аут-состоянием: $\Psi_{\text{аут}} = \Psi_a$. Следует заметить, однако, что в формулу (16.12) входят только те состояния Ψ_a , которые принадлежат пространству канала \mathcal{H}_a ; на ортогональном дополнении к пространству \mathcal{H}_a (т. е. на ионизированных собственных состояниях оператора H_a) мы полагаем $\Omega_a^{(\pm)}$ равным нулю:

$$\Omega_a^{(\pm)} P_a = \Omega_a^{(\pm)}.$$

Из (16.6) следует, что на пространстве \mathcal{H}_a

$$\Omega_a^{(+)} = P_a + K_a^{(+)}, \quad (16.13)$$

$$K_a^{(+)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{G}^+(-t) H'_a G_a^-(t) P_a = -i \int_{-\infty}^0 dt e^{iHt} H'_a e^{-iH_a t} P_a \quad (16.14)$$

или

$$\Omega_a^{(+)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iHt} e^{-iH_a t} P_a. \quad (16.15)$$

Аналогично на пространстве \mathcal{H}_a

$$\Omega_a^{(-)} = P_a + K_a^{(-)}, \quad (16.13a)$$

$$K_a^{(-)} = i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{G}^-(t) H'_a G_a^+(t) P_a = i \int_0^{\infty} dt e^{iHt} H'_a e^{-iH_a t} P_a, \quad (16.14a)$$

или

$$\Omega_a^{(-)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{iHt} e^{-iH_a t} P_a. \quad (16.15a)$$

Областью значений оператора $\Omega_a^{(+)}$ (или $\Omega_a^{(-)}$) является пространство всех состояний полного гамильтониана, которые развиваются с течением времени из состояний (или в состоянии) канала реакции a . Обозначим эту область значений через $\mathcal{H}_a^{(+)}$ (или $\mathcal{H}_a^{(-)}$), а оператор проектирования на нее — через $Q_a^{(+)}$ (или $Q_a^{(-)}$). Волновые операторы $\Omega_a^{(\pm)}$ отображают пространство \mathcal{H}_a на пространства $\mathcal{H}_a^{(\pm)}$. Из соотношений (16.7) и (16.11) вытекает, что на пространстве $\mathcal{H}_a^{(+)}$ (или соответственно на пространстве $\mathcal{H}_a^{(-)}$) мы имеем

$$\begin{aligned} \Psi_a(\alpha, t) &= \Psi_{\text{ин}}(\alpha, t) = \Omega_a^{(+)\dagger} \Psi^{(+)}(\alpha, t) = \\ &= \Psi_{\text{аут}}(\alpha, t) = \Omega_a^{(-)\dagger} \Psi^{(-)}(\alpha, t). \end{aligned} \quad (16.16)$$

Из этого следует, что поскольку $\Psi_a(\alpha, t)$ образует полную систему состояний в пространстве \mathcal{H}_a , то

$$\Omega_a^{(\pm)\dagger} \Omega_a^{(\pm)} = P_a. \quad (16.17)$$

Когда операторы $\Omega_a^{(\pm)}$ удовлетворяют соотношению (16.17), то говорят, что операторы $\Omega_a^{(\pm)}$ — *частично изометрические* (в пространстве \mathcal{H}_a). Наоборот, операторы $\Omega_a^{(\pm)\dagger}$ являются частично изометрическими в области значений $\mathcal{H}_a^{(\pm)}$ операторов $\Omega_a^{(\pm)}$:

$$\Omega_a^{(\pm)\dagger} \Omega_a^{(\pm)\dagger} = Q_a^{(\pm)}. \quad (16.18)$$

Далее, полные состояния, развивающиеся из состояний (или в состоянии) одного канала реакции, ортогональны к полным состояниям, развиваю-

щимся из состояний (или в состоянии) другого канала. Это можно показать, вычисляя величину

$$(\Psi^{(+)}(\beta, t), \Psi^{(+)}(\alpha, t)) = (\Psi^{(+)}(\beta, t'), \Psi^{(+)}(\alpha, t'))$$

в пределе $t' \rightarrow -\infty$. Если оба канала реакции действительно различны, то должна существовать по крайней мере одна частица, для которой «перекрывание» обоих состояний должно быть пренебрежимо малым в далеком прошлом, поскольку она относилась к различным фрагментам. Следовательно, рассматриваемое скалярное произведение должно равняться нулю в любой момент времени. Поэтому различные пространства $\mathcal{H}_a^{(+)}$ (или $\mathcal{H}_a^{(-)}$) взаимно ортогональны¹⁾:

$$Q_a^{\pm} Q_b^{\pm} = 0, \quad a \neq b, \quad (16.19)$$

и, следовательно, согласно (16.17),

$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Omega_a^{(\pm)\dagger} \Omega_b^{(\pm)} = P_a \delta_{ab}. \quad (16.17a)$$

Точно так же можно показать, что скалярное произведение $(\Psi_b(\beta, t), \Psi_a(\alpha, t))$ стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, когда $a \neq b$. Но поскольку $H_a \neq H_b$, данное скалярное произведение зависит от времени и, следовательно, в общем случае не равно нулю при конечных значениях t . Таким образом, в общем случае $P_a P_b \neq 0$.

Пусть, далее, Λ — оператор проектирования на пространство (n частицных) связанных состояний оператора H . (Мы могли бы отнести это пространство к однофрагментному каналу реакции.) Конечно, при всех a имеем

$$Q_a^{(\pm)} \Lambda = 0. \quad (16.20)$$

Любое несвязанное состояние можно разложить на состояния, которые развиваются из состояний (или в состоянии) одного из каналов реакции. Поэтому, рассуждая точно так же, как при выводе (6.38), получаем

$$\sum_a Q_a^{(\pm)} = 1 - \Lambda. \quad (16.21)$$

Сумма в (16.21) содержит также n -фрагментный канал реакции, в котором все частицы были (или будут) свободными; сумму (16.21) следует рассматривать как *определение* $Q_a^{(\pm)}$ для указанного канала реакции. Волновые операторы для n -фрагментного канала реакции определяются соотношением

$$\Omega_a^{(\pm)\dagger} Q_a^{(\pm)} \Psi^{(\pm)}(\alpha, t) = \Psi_a(\alpha, t); \quad (16.21a)$$

пространство \mathcal{H}_a определяется как область значений оператора $\Omega_a^{(\pm)\dagger}$. Наконец, оператором проектирования P_a для n -фрагментного канала реакции является оператор проектирования на пространство \mathcal{H}_a .

Из уравнения Шредингера следует, что для каждого канала реакции

$$H \Omega_a^{(\pm)} = \Omega_a^{(\pm)} H_a. \quad (16.22)$$

Далее можно построить состояние

$$\Psi_{b, \text{в.т.}}(\alpha, t) = S_{ba} \Psi_a(\alpha, t), \quad (16.23)$$

где

$$S_{ba} \equiv \Omega_b^{(-)\dagger} \Omega_a^{(+)}. \quad (16.24)$$

Смысл введенного состояния заключается, очевидно, в том, что оно является состоянием b , в которое состояние $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$ переходит в отдаленном буду-

¹⁾ В приложении к данной главе приводится более строгое доказательство.

щем; согласно (16.22), имеем

$$S_{ba}H_a = H_b S_{ba}. \quad (16.25)$$

Следует отметить, что в этом смысле $\Psi^{(+)}(\alpha, t)$, вообще говоря, является линейной комбинацией большого числа различных состояний такого рода.

Рассмотрим теперь постановку задачи рассеяния. Точно так же, как при выводе формулы (6.45), из (16.24) получаем

$$\begin{aligned} (\Psi^{(-)}(\beta, t), \Psi^{(+)}(\alpha, t)) &= (\Psi_{\text{аут}}^{(-)}(\beta, t), \Omega_b^{(-)\dagger} \Omega_a^{(+)} \Psi_{\text{ин}}^{(+)}(\alpha, t)) = \\ &= (\Psi_b(\beta, t), S_{ba} \Psi_a(\alpha, t)) = \\ &= (\Psi_b(\beta, 0), S_{ba} \Psi_a(\alpha, 0)). \end{aligned} \quad (16.26)$$

Последнее равенство в (16.26) следует из (16.25).

Проверим выполнение условия унитарности. Пользуясь формулами (16.24), (16.20), (16.21) и (16.17а), получаем

$$\begin{aligned} \sum_b S_{ab} S_{cb}^\dagger &= \Omega_a^{(-)\dagger} (1 - \Lambda) \Omega_c^{(-)} = \Omega_a^{(-)\dagger} \Omega_c^{(-)} = P_a \delta_{ac}, \\ \sum_b S_{ba}^\dagger S_{bc} &= \Omega_a^{(+)\dagger} (1 - \Lambda) \Omega_c^{(+)} = \Omega_a^{(+)\dagger} \Omega_c^{(+)} = P_a \delta_{ac}, \end{aligned} \quad (16.27)$$

из которых следует, что S -матрица унитарна.

Таким образом, в рассматриваемом случае мы получаем, что S -матрица соответствует не одному оператору S , а целой системе операторов S_{ba} . Для разных переходов от одного какого-либо канала реакции к другому нужно брать свой оператор рассеяния; поэтому состояния, по базису которых вычисляется S -матрица, очень удобны. Эти состояния представляют собой собственные функции гамильтонианов, описывающие связанные состояния всех фрагментов, помноженные на плоские волны, описывающие относительное движение фрагментов.

2. Гейзенберговское представление

Для каждого канала реакции имеется свое гейзенберговское представление. Прежде всего введем в рассмотрение операторы, которые равны нулю на состояниях из ортогонального дополнения к пространству \mathcal{H}_a и областью значений которых является \mathcal{H}_a ,

$$A_{0,a} = P_a A_{0,a} P_a; \quad (16.28)$$

изменение этих состояний во времени описывается нулевым гамильтонианом H_a :

$$i \frac{d}{dt} A_{0,a}(t) = [A_{0,a}(t), H_a]. \quad (16.29)$$

Назовем введенные операторы *a-операторами*.

Полный гейзенберговский оператор $A_a(t)$, совпадающий с оператором $A_{0,a}(t_0)$ при $t=t_0$, можно связать с соответствующим *a-оператором*, взятым в тот же момент времени t :

$$A_a(t) = e^{iH(t-t_0)} e^{-iH_a(t-t_0)} A_{0,a}(t) e^{iH_a(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}. \quad (16.30)$$

Для больших отрицательных времен

$$A_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} \Omega_a^{(+)} A_{0,a}(t) \Omega_a^{(+)\dagger}; \quad (16.31)$$

для больших положительных времен

$$A_a(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} \Omega_a^{(-)} A_{0,a}(t) \Omega_a^{(-)\dagger}. \quad (16.32)$$

В идеализированной задаче рассеяния операторы, используемые для приготовления начального и детектирования конечных состояний, коммутируют

с гамильтонианами соответствующих каналов, так что $\mathbf{A}_{0,a}$ не зависит от времени

$$\mathbf{A}_a(\mp \infty) = \Omega_a^{(\pm)} \mathbf{A}_{0,a} \Omega_a^{(\pm)\dagger}. \quad (16.33)$$

Постановка задачи рассеяния теперь заключается в следующем. Система готовится в отдаленном прошлом как собственное состояние $\Psi(\alpha)$ некоторого оператора $\mathbf{A}_a(-\infty)$; следовательно, она находится в состоянии

$$\Psi(\alpha) = \Omega_a^{(+)} \Psi_a(\alpha),$$

где $\Psi_a(\alpha)$ — собственное состояние оператора $\mathbf{A}_{0,a}$. Спрашивается, какова амплитуда вероятности нахождения системы в отдаленном будущем в собственном состоянии $\Psi(\beta)$ оператора $\mathbf{B}_b(+\infty)$, т. е. в состоянии

$$\Psi(\beta) = \Omega_b^{(-)} \Psi_b(\beta),$$

где $\Psi_b(\beta)$ — собственное состояние оператора $\mathbf{B}_{0,b}$? Ответ на поставленный вопрос дает, очевидно, величина

$$(\Psi(\beta), \Psi(\alpha)) = (\Psi_b(\beta), \Omega_b^{(-)\dagger} \Omega_a^{(+)} \Psi_a(\alpha)), \quad (16.34)$$

аналогичная (16.26).

§ 3. СТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ

1. Формальная теория

Теперь аналогично тому, как это было сделано в гл. 7, мы можем перейти от временного описания к описанию, не зависящему от времени. То обстоятельство, что нулевой гамильтониан H_a в каждом канале реакции теперь включает в себя часть взаимодействия частиц, не существенно.

Соотношения (7.15) и (7.15а) принимают теперь вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(\pm)}(E, \alpha) &= \Psi_a(E, \alpha) + G_a^\pm(E) H_a' \Psi^{(\pm)}(E, \alpha) = \\ &= \Psi_a(E, \alpha) + \mathcal{G}^\pm(E) H_a' \Psi_a(E, \alpha), \end{aligned} \quad (16.35)$$

и мы можем непосредственно перейти к (7.39). Нашим исходным соотношением будет теперь (16.26), т. е. соотношение

$$(\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) = (\Psi_b(E_\beta, \beta), S_{ba} \Psi_a(E_\alpha, \alpha)). \quad (16.36)$$

Из второго соотношения (16.35) получаем

$$\Psi^{(+)}(E, \alpha) - \Psi^{(-)}(E, \alpha) = -2\pi i \delta(E - H) H_a' \Psi_a(E, \alpha), \quad (16.37)$$

так что

$$\begin{aligned} (\Psi_b(E_\beta, \beta), S_{ba} \Psi_a(E_\alpha, \alpha)) &= (\Psi^{(+)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) - \\ &= -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) (\Psi_b(E_\alpha, \beta), H_b' \Psi^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) = \\ &= (\Psi^{(-)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(-)}(E_\alpha, \alpha)) - \\ &= -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) (\Psi^{(-)}(E_\alpha, \beta), H_a' \Psi_a(E_\alpha, \alpha)). \end{aligned} \quad (16.38)$$

Согласно (16.19) и условию нормировки a -состояния, имеем далее

$$(\Psi^{(\pm)}(E_\beta, \beta), \Psi^{(\pm)}(E_\alpha, \alpha)) = \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta(E_\alpha - E_\beta); \quad (16.39)$$

для непрерывных переменных символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ следует заменять δ -функцией, поэтому обозначение $\delta_{\alpha\beta}$ нужно понимать как условное.

Теперь, как и в гл. 7, § 2, п. 2, определим \mathbf{T} -матрицу согласно соотношению

$$(\Psi_b(E_\beta, \beta), S_{ba} \Psi_a(E_\alpha, \alpha)) = \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \delta(E_\alpha - E_\beta) - 2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \mathfrak{T}_{\beta\alpha}(E), \quad (16.40)$$

где

$$\mathfrak{S}_{\beta\alpha}(E) = (\Psi_b(E, \beta), H'_b \Psi^{(+)}(E, \alpha)) = (\Psi^{(-)}(E, \beta), H'_a \Psi_a(E, \alpha)). \quad (16.41)$$

Наконец, следует избавиться также от δ -функции, описывающей сохранение полного импульса, так же как это было сделано в (7.43). В результате получим выражение, аналогичное (16.41), с изменениями такого же рода, как и в (7.44). Другими словами, $T_{\beta\alpha}(E)$ определяется точно таким же выражением (16.41), что и $\mathfrak{S}_{\beta\alpha}(E)$, но входящие в (16.41) соответствующие состояния берутся при фиксированном значении полного импульса (одном и том же в начальном и конечном состояниях). В системе центра масс полный импульс равен нулю. В дальнейшем мы будем всегда рассматривать только матрицу $T_{\beta\alpha}$.

T-операторы. Соотношение (16.41) можно записать в другом виде:

$$T_{\beta\alpha}(E) = (\Psi_b(E, \beta), [H'_b + H'_b \mathcal{G}^+(E) H'_a] \Psi_a(E, \beta)),$$

откуда видно, что $T_{\beta\alpha}$ являются матричными элементами оператора

$$T_{\underline{ba}}(E) = H'_b + H'_b \mathcal{G}^+(E) H'_a, \quad (16.42)$$

или оператора

$$T_{\underline{ba}}(E) = H'_a + H'_b \mathcal{G}^+(E) H'_a = T_{\underline{ba}} + H'_a - H'_b, \quad (16.42a)$$

которые берутся между свободными состояниями нулевых гамильтонианов H_a и H_b . Оба оператора $T_{\underline{ba}}$ и $T_{\underline{ba}}$ имеют одинаковые нулевые матричные элементы между состояниями с одинаковыми энергиями.

Подстановка различных интегральных соотношений для \mathcal{G}^+ в формулы (16.42) и (16.42a) дает нам не только «интегральные уравнения» для $T_{\underline{ba}}$ и $T_{\underline{ba}}$

$$\begin{aligned} T_{\underline{ba}}(E) &= H'_b + T_{\underline{ba}}(E) G_a^+(E) H'_a, \\ T_{\underline{ba}}(E) &= H'_a + H'_b G_b^+(E) T_{\underline{ba}}(E), \end{aligned} \quad (16.43)$$

но также уравнения, которые определяют $T_{\underline{ba}}$ и $T_{\underline{ba}}$ через обычные T -операторы T_{aa} и T_{bb} :

$$\begin{aligned} T_{\underline{ba}}(E) &= H'_b + H'_b G_a^+(E) T_{aa}(E) = \\ &= H'_b + T_{bb}(E) G_b^+(E) H'_a; \end{aligned} \quad (16.44)$$

аналогичные соотношения имеют место и для $T_{\underline{ba}}$.

С точки зрения T -операторов также можно понять, почему не существует единого оператора рассеяния. Конечно, всегда можно определить $T \equiv H' + H' \mathcal{G}^+ H'$ через оператор полного взаимодействия H' . Затем можно попытаться представить T -матрицу как совокупность матричных элементов оператора T между собственными состояниями оператора H_0 даже для процессов с перераспределением, вместо того чтобы пользоваться матричными элементами операторов T_{ba} между состояниями Ψ_a и Ψ_b . В результате мы могли бы выразить операторы T_{ba} через оператор T . Однако для того, чтобы выразить Ψ_a и Ψ_b через Ψ_0 или наоборот, требуются формальные преобразования с использованием уравнений Липпмана — Швингера. Но как раз для тех состояний, которыми мы интересуемся (т. е. для «парциальных» связанных состояний), таких уравнений не существует! Не существует состояния Ψ_0 с (приблизленно) фиксированной энергией, из которого (или в котором) развиваются состояния Ψ_a или Ψ_b .

2. Метод искаженных волн в теории столкновений с перераспределением

Теорию искаженных волн, изложенную в гл. 7, § 2, п. 5, можно почти без изменений перенести на теорию столкновений с перераспределением частиц. В ней предполагается, что в H_a и H_b включена часть взаимодействия между фрагментами. По-прежнему можно определить каналы реакции, но фрагменты в каналах не будут двигаться независимо. Например, фрагменты могут иметь заряды, как в случае рассеяния ионов на ионах; тогда в операторы H_a и H_b следует включить эффективное кулоновское взаимодействие между фрагментами.

Мы поступим, как в гл. 7, § 2, п. 5, и функцию Ψ_a в (16.35) заменим соответственно на $\Psi_a^{(\pm)}$. При наличии взаимодействия между фрагментами функция $\Psi_a^{(\pm)}(E, \alpha)$ связана с $\Psi_0(E, \alpha)$ уравнением Липпмана — Швингера

$$\Psi_a^{(\pm)}(E, \alpha) = \Psi_0(E, \alpha) + G^\pm H_a' \Psi_a^{(\pm)}(E, \alpha), \quad (16.45)$$

в котором $H_a' = H_a - H_0$. Далее находим соотношения, аналогичные (7.76) и (7.76а),

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}(E) &= (\Psi_0(E, \beta), T(E) \Psi_0(E, \alpha)) = \\ &= (\Psi_b^{(-)}(E, \beta), T_{ba}(E) \Psi_a^{(+)}(E, \alpha)) + (\Psi_b^{(-)}(E, \beta), H_b' \Psi_0(E, \alpha)) = \\ &= (\Psi_b^{(-)}(E, \beta), T_{ba}(E) \Psi_a^{(+)}(E, \alpha)) + (\Psi_0(E, \beta), H_a' \Psi_a^{(+)}(E, \alpha)), \end{aligned} \quad (16.46)$$

где T_{ba} и T_{ab} определяются формулами (16.42) и (16.42а). Совпадают друг с другом H_a и H_b или нет, теперь неважно.

Следует отметить, что при включении взаимодействия между фрагментами нужно соблюдать известную осторожность при определении каналов реакции. Например, в задаче трех тел получается четкое определение каналов реакции, если положить, скажем,

$$\begin{aligned} H_a &= H_0 + V_{13}, & H_a' &= V_{23} + V_{12}, \\ H_b &= H_0 + V_{23}, & H_b' &= V_{12} + V_{13}; \end{aligned}$$

так можно описать столкновение частицы 1 со связанным состоянием (2,3) с образованием свободной частицы 2 и связанного состояния (1,3). Фрагменты 1 и (2,3) при этом совсем не взаимодействуют в начальном состоянии, а фрагменты 2 и (1,3) — в конечном состоянии. С использованием теории искаженных волн нужно поступить иначе и положить, например,

$$H_a = H_0 + V_{13} + V_{23}, \quad H_a' = V_{12}.$$

Теперь начальное и конечное состояния фрагментов 1 и (2,3) и фрагментов 2 и (1,3) соответственно являются собственными состояниями одного гамильтониана H_a , содержащего «взаимодействие фрагментов» V_{13} в начальном и V_{23} в конечном состоянии. Гамильтонианы *обоих каналов совпадают друг с другом*, и можно использовать (7.76) и (16.46). Следует отметить, что теперь пространства *обоих* этих каналов ортогональны друг другу.

В оператор H_a можно включить, однако, только часть взаимодействия между частицами 2 и 3, например только электростатическое взаимодействие, и положить

$$\begin{aligned} H_a &= H_0 + V_{13}^{(1)} + V_{13}^{(2)} + V_{23}^{(1)}, & H_a' &= V_{12} + V_{23}^{(2)}, \\ H_b &= H_0 + V_{23}^{(1)} + V_{23}^{(2)} + V_{13}^{(1)}, & H_b' &= V_{12} + V_{13}^{(2)}. \end{aligned}$$

Гамильтонианы каналов *a* и *b* *не будут* совпадать друг с другом; соотношение (16.46) остается, однако, справедливым.

3. Тожественные частицы

Если некоторые частицы, участвующие в столкновении, тождественны, то векторы начального и конечного состояний следует симметризовать или антисимметризовать относительно перестановки координат данных частиц в зависимости от того, являются ли эти частицы бозонами или фермионами. Тогда разумно требовать, чтобы разбиения частиц на фрагменты, отличающиеся друг от друга только перестановкой тождественных частиц, описывались одним и тем же гамильтонианом канала. Так, в задаче трех тел, если частицы 1 и 2 тождественны, необходимо провести симметризацию и положить

$$H_a = H_0 + V_{23} + V_{13}, \quad H'_a = V_{12},$$

так чтобы фрагменты 1 и (2,3) описывались тем же гамильтонианом канала, что и фрагменты 2 и (1,3). Так как теперь H_a и H'_a симметричны относительно перестановки частиц 1 и 2, то нет необходимости явно симметризовать или антисимметризовать начальное и конечное состояния. Если одно из них сделать симметричным или антисимметричным, то матричный элемент оператора S_{aa} будет автоматически отбирать только симметричную или антисимметричную часть другого состояния; следует только помнить о соответствующем нормирующем множителе.

Описанный метод учета тождественности частиц не является единственным. Изложенный метод не является достаточно эффективным, например, в задаче трех тел, когда все частицы тождественны. Конечно, можно рассмотреть решение такого уравнения, как (16.35), не обращая сначала внимания на то, что частицы неразличимы, и только в конце выполнить симметризацию или антисимметризацию. Обозначим через $\bar{\Psi}$ симметризованное или антисимметризованное состояния; например,

$$\bar{\varphi}(1, 2) = 2^{-1/2} [\varphi(1, 2) \pm \varphi(2, 1)],$$

где выбор знака определяется статистикой частиц. Тогда (16.36) нужно заменить соотношением

$$(\bar{\Psi}^{(-)}(E_\beta, \beta), \bar{\Psi}^{(+)}(E_\alpha, \alpha)) = \frac{1}{n!} \sum_{ij} (\Psi_{b_i}(E_\beta, \beta), S_{b_i a_j} \Psi_{a_j}(E_\alpha, \alpha)) \zeta_i \zeta_j, \quad (16.47)$$

где суммирование проводится по всем перестановкам тождественных частиц, а ζ_i — соответствующие знаковые множители. Для T-матрицы вместо (16.41) следует писать

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha} &= (n!)^{-1/2} \sum_i \zeta_i (\Psi_{b_i}(\beta), H'_{b_i} \bar{\Psi}^{(+)}(\alpha)) = \\ &= (n!)^{-1/2} \sum_i \zeta_i (\bar{\Psi}^{(-)}(\beta), H'_{a_i} \Psi_{a_i}(\alpha)); \end{aligned} \quad (16.48)$$

в (16.48) в явном виде не указана зависимость от энергии. Далее, так как выражения

$$\sum_i \zeta_i H'_{a_i} \Psi_{a_i} \quad \text{и} \quad \sum_i \zeta_i H'_{b_i} \Psi_{b_i}$$

симметричны (или антисимметричны) относительно тождественных частиц, то векторы $\Psi^{(+)}$ и $\Psi^{(-)}$, входящие в (16.48), необязательно симметризовать (или антисимметризовать). Каждый из $n!$ членов в (16.48) приводит к одному и тому же результату. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha} &= \sum_i \zeta_i (\Psi_{b_i}(\beta), H'_{b_i} \Psi^{(+)}(\alpha)) = \\ &= \sum_i \zeta_i (\Psi^{(-)}(\beta), H'_{a_i} \Psi_{a_i}(\alpha)). \end{aligned} \quad (16.49)$$

Если имеется несколько групп тождественных частиц, то нормировочный множитель будет, конечно, отличаться от $(n!)^{-1/2}$. Однако, окончательный результат (16.49), не зависящий от нормировки, останется прежним.

4. Поведение волновой функции на больших расстояниях

Сосредоточим наше внимание на фиксированном канале реакции a , в котором имеется два фрагмента, с внутренними гамильтонианами $H_1^{\text{внутр}}$ и $H_2^{\text{внутр}}$. В этом случае гамильтониан канала будет иметь вид

$$H_a = H_1^{\text{внутр}} + H_2^{\text{внутр}} + H_{0a}, \quad (16.50)$$

где H_{0a} — кинетическая энергия центров масс двух фрагментов. Мы считаем, что все рассмотрение проводится в системе центра масс системы, так что гамильтониан H_{0a} описывает изменение относительно координат \mathbf{r} обоих центров масс.

Пусть $\Phi_1(\epsilon_1, s_1, v_1)$ и $\Phi_2(\epsilon_2, s_2, v_2)$ — собственные значения внутренних гамильтонианов; нас интересует только случай, когда Φ_1 и Φ_2 относятся к *связанным* состояниям, которые мы полагаем нормированными. Индексы s и v обозначают соответственно спины фрагментов и их проекции на ось z . Под спинами фрагментов подразумеваются их полные угловые моменты, слагающиеся частично из орбитальных моментов, а частично из спиновых в зависимости от конкретных условий. Индекс ϵ обозначает внутренние энергии. Из рассматриваемых векторов состояний фрагментов построим полный вектор состояния двух фрагментов

$$\Phi_a(\alpha) = \Phi_a(\epsilon_\alpha, s_1 s_2 s v) = \sum_{v_1 v_2} C(s_1 s_2 s, v_1 v_2 v) \Phi_1(\epsilon_1 s_1 v_1) \Phi_2(\epsilon_2 s_2 v_2), \quad (16.51)$$

где $\epsilon_\alpha = \epsilon_1 + \epsilon_2$ и произведение следует понимать как *прямое* произведение. Состояния (16.51) мы теперь используем вместо состояний χ_{ν}^s из гл. 15, § 1, п. 1. Состояния $\Phi_a(\alpha)$ образуют полную систему состояний в пространстве внутренних координат фрагментов канала реакции a при условии, что мы включаем все состояния, в том числе соответствующие непрерывному спектру, т. е. даже такие состояния, в которых отдельные фрагменты диссоциированы. Таким образом, сумма

$$\sum_{\alpha} \Phi_a(\alpha) \Phi_a^{\dagger}(\alpha) = \mathbf{1}_0 \quad (16.52)$$

включает в себя интеграл по непрерывному спектру; $\mathbf{1}_0$ — оператор проектирования на подпространство, соответствующее тому положению, когда оба фрагмента покоятся.

Функции Грина G_a^{\pm} определяются в полной аналогии с (10.6):

$$G_a^{\pm}(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu_a}{2\pi} \sum_{\alpha} \frac{e^{\pm i k_{\alpha} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Phi_a(\alpha) \Phi_a^{\dagger}(\alpha), \quad (16.53)$$

где

$$k_{\alpha} = [2\mu_a (E - \epsilon_{\alpha})]^{1/2} \quad (16.54)$$

есть волновое число канала, μ_a — приведенная масса фрагментов. При больших r асимптотическое поведение функции G_a^{\pm} аналогично (10.8):

$$G_a^{\pm}(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') \approx - \sum_{\alpha} \frac{e^{i k_{\alpha} r}}{r} \left(\frac{2\pi\mu_a}{k_{\alpha}} \right)^{1/2} \Phi_a(\alpha) \Psi_a^{\pm}(k_{\alpha} \alpha, \mathbf{r}'), \quad (16.55)$$

где Ψ_{α} — плоская волна (описывающая относительное движение центров масс фрагментов) в координатном представлении; функция Ψ_{α} удовлетворяет

уравнению Шредингера

$$(H_a - E) \Psi_a = 0.$$

Направление вектора \mathbf{k}'' совпадает с направлением вектора \mathbf{r} ; его длина равна k_α . В явном виде имеем

$$\Psi_a(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) = \frac{(\mu_a k_\alpha)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\alpha \cdot \mathbf{r}} \Phi_a(\alpha). \quad (16.56)$$

Функция Ψ_a нормирована так же, как функция (8.7), т. е. имеет нормировку, аналогичную (8.8) и (10.4).

Амплитуды реакций. Запишем теперь уравнение Липпмана—Швингера для $\Psi^{(+)}(\alpha)$ в координатном представлении

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) = \Psi_a(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' G_a^+(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') H'_a(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}''). \quad (16.57)$$

При больших значениях r (подробности см. в гл. 10, § 6) из (16.55) получаем

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) \approx \sum_{\alpha'} \frac{(\mu_a k_{\alpha'})^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \Phi_a(\alpha') [\delta_{\alpha\alpha'} e^{i\mathbf{k}\alpha \cdot \mathbf{r}} + r^{-1} e^{i\mathbf{k}\alpha' \cdot \mathbf{r}} \bar{A}(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha)], \quad (16.58)$$

где $\hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{r}}$, $k'_\alpha = k_{\alpha'}$, и

$$\begin{aligned} \bar{A}(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha) &= -(2\pi)^2 (k_\alpha k'_\alpha)^{-1/2} \times \\ &\times \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \Psi_a^\dagger(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{r}') (\mathbf{r}' | H'_a | \mathbf{r}) \Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) = \\ &= -(2\pi)^2 (k_\alpha k'_\alpha)^{-1/2} T(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha). \end{aligned} \quad (16.59)$$

Дифференциальное сечение дается формулой (8.16); оно равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k'_\alpha}{k_\alpha} |\bar{A}(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha)|^2. \quad (16.60)$$

Столкновения с перераспределением. В случае столкновений с перераспределением мы уже не можем так просто разделять координаты на внутренние координаты фрагментов и координаты относительного движения фрагментов. Смысл относительного расстояния между фрагментами \mathbf{r} различен в начальных и конечных конфигурациях; оно является расстоянием между центрами масс различных групп частиц. Волновая функция состояния, первоначально полностью принадлежавшего каналу a , должна удовлетворять уравнению (16.57), в котором \mathbf{r} — расстояние между фрагментами в канале a . Теперь можно представить эту же волновую функцию как функцию внутренних координат фрагментов в канале реакции b и расстояния \mathbf{r}_b между фрагментами в этом канале b , т. е.

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) = \Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}_b). \quad (16.61)$$

В отношении зависимости от \mathbf{r}_b функция (16.61) не удовлетворяет простому интегральному уравнению, подобному (16.57). Однако, так как из уравнений Липпмана—Швингера легко непосредственно найти, что

$$\Psi^{(+)}(\alpha) = [1 - G_b^+(E - H_b)] \Psi_a(\alpha) + G_b^+ H_b \Psi^{(+)}(\alpha), \quad (16.62)$$

то асимптотически при больших $|\mathbf{r}_b|$ имеем

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}_b) \approx \zeta + \sum_{\beta} \frac{(\mu_a k_\alpha)^{1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \Phi_b(\beta) r^{-1} e^{i\mathbf{k}\beta \cdot \mathbf{r}_b} \bar{A}(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha), \quad (16.62a)$$

где $\hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{r}}_b$, ζ — первое слагаемое в (16.62), ортогональное к *связанным* состояниям фрагментов канала b . Для \bar{A} имеем следующее выражение:

$$\bar{A}(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha) = -c \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_b \Psi_b^\dagger(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{r}_b) (\mathbf{r}_b | H_b' | \mathbf{r}) \Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) = -cT(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha), \quad (16.63)$$

в котором

$$c = (2\pi)^2 \left(\frac{\mu_b}{\mu_a k_\alpha k_\beta} \right)^{1/2}.$$

Дифференциальное сечение дается формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mu_a k_\beta}{\mu_b k_\alpha} |\bar{A}(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha)|^2. \quad (16.64)$$

Амплитуды рассеяния, определенные по-новому. Ввиду (16.60) и (16.63) разумно определить амплитуды рассеяния как в случае столкновений с перераспределением, так и для столкновений без перераспределения по-новому, а именно выражением

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha) &= \left(\frac{\mu_a k_\beta}{\mu_b k_\alpha} \right)^{1/2} \bar{A}(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha) = \\ &= -(2\pi)^2 k_\alpha^{-1} T(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha) = \\ &= -(2\pi)^2 \left(\frac{\mu_a \mu_b k_\beta}{k_\alpha} \right)^{1/2} T'(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha), \end{aligned} \quad (16.65)$$

где T' — элемент T -матрицы между векторами состояний, нормированными согласно (8.17). Тогда для сечения имеем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha)|^2. \quad (16.66)$$

Легко видеть, что множитель $\mu_a k_\beta / \mu_b k_\alpha$ равен отношению *относительных скоростей* падающего и рассеянного пучков; он возникает, конечно, из отношения потоков в сечении рассеяния.

Суммируем полученные нами результаты. Согласно (16.56), (16.59) и (16.65) амплитуду рассеяния можно выразить в виде следующего интеграла:

$$A(\mathbf{k}'\beta, \mathbf{k}\alpha) = -\frac{\mu_a}{2\pi} \left(\frac{k_\beta}{k_\alpha} \right)^{1/2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}_b \Phi_b^\dagger(\beta) e^{-i\mathbf{k}_\beta \cdot \mathbf{r}_b} (\mathbf{r}_b | H_b' | \mathbf{r}) \Psi^{(+)}(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}), \quad (16.67)$$

где $\Psi^{(+)}$ — точное решение, нормированное таким образом, что его часть, соответствующая плоской волне, равна $\Phi_a(\alpha) \exp(i\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r})$; здесь использованы смешанные обозначения: скалярное произведение в отношении внутренних координат явно не раскрыто.

§ 4. МЕТОД ПАРЦИАЛЬНЫХ ВОЛН

1. Система связанных уравнений

Соответствующие собственные функции оператора полного углового момента и внутреннего гамилтониана в канале реакции a , необходимые для данного рассмотрения, имеют вид

$$\mathcal{Y}_{jls}^M(a, \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha; \hat{\mathbf{r}}) = \sum_{mv} C(ls, j, mv, M) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) \Phi_a(\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha, s_1 s_2 s v). \quad (16.68)$$

Функции \mathcal{Y} определяются согласно (15.6). Вместо второй формулы в (15.6) теперь имеем

$$\mathcal{Y}_j^M(lsv; \hat{\mathbf{k}}) = i^{-l} \Phi_a^\dagger(\boldsymbol{\varepsilon}, s_1 s_2 s v) \cdot \mathcal{Y}_{jls}^M(a, \boldsymbol{\varepsilon}; \hat{\mathbf{k}}); \quad (16.69)$$

точкой обозначено скалярное произведение по внутренним координатам.

Собственная функция (16.56) гамильтониана H_α , соответствующая плоской волне и являющаяся аналогом функции (15.8), теперь представляется в виде

$$\Psi_\alpha(\mathbf{k}\alpha, \mathbf{r}) = \left(\frac{2\mu_\alpha k_\alpha}{\pi}\right)^{1/2} (k_\alpha r)^{-1} \sum_{jMl} u_l(k_\alpha r) \mathcal{Y}_{jls}^M(a, \epsilon_\alpha; \hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{\mathbf{k}}). \quad (16.70)$$

Для функции Грина имеем

$$G_\alpha^\pm(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 2\mu_\alpha \sum_{jMlse_\alpha} \mathcal{Y}_{jls}^M(a\epsilon_\alpha; \hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_{jls}^{M\dagger}(a, \epsilon_\alpha; \hat{\mathbf{r}}') r^{-1} r'^{-1} G_l^\pm(k_\alpha; r, r'), \quad (16.71)$$

где G_l^\pm даются формулой (11.2). Мы воспользовались здесь условием полноты (16.52) для пространства собственных функций, описывающих внутреннее состояние двух фрагментов. Суммирование в (16.71) фактически включает интегрирование по состояниям непрерывного спектра, соответствующим диссоциированным фрагментам. Но нас в основном интересует не эта часть функции G_α , и поэтому последнее интегрирование не указано явно в (16.71).

Предполагая, как и раньше, что полный гамильтониан инвариантен относительно пространственных вращений, мы можем написать формулу, аналогичную (15.12):

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}\alpha; \mathbf{r}) = \left(\frac{2\mu_\alpha k_\alpha}{\pi}\right)^{1/2} (k_\alpha r)^{-1} \times \sum_{jMl's'\epsilon'_\alpha} \Psi_{l's'\epsilon'_\alpha}^{j(\pm)}(E, r) \mathcal{Y}_{jls'}^M(a, \epsilon'_\alpha; \hat{\mathbf{r}}) \mathcal{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{\mathbf{k}}), \quad (16.72)$$

где индекс α включает всю необходимую информацию о начальном состоянии: канал реакции a , внутренние энергии фрагментов ϵ_α , их спины, полный спин и z -компоненту полного спина.

После подстановки выражения (16.72) в уравнение Липпмана—Швингера приходим к следующей системе связанных интегральных уравнений для радиальных функций:

$$\Psi_{l's'\epsilon'_\alpha, lse_\alpha}^{j(\pm)}(E, r) = u_l(k_\alpha r) \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{\epsilon_\alpha \epsilon'_\alpha} + \sum_{l''s''\epsilon''_\alpha} \int_0^\infty dr' G_l^\pm(k'_\alpha; r, r') \mathfrak{B}_{l's'\epsilon'_\alpha, l''s''\epsilon''_\alpha}^j(r') \Psi_{l''s''\epsilon''_\alpha, lse_\alpha}^{j(\pm)}(k, r), \quad (16.73)$$

где

$$\mathfrak{B}_{l's'\epsilon'_\alpha, l''s''\epsilon''_\alpha}^j(r) = 2\mu_\alpha \int d\Omega \mathcal{Y}_{jl's'}^{M\dagger}(a, \epsilon'_\alpha; \hat{\mathbf{r}}) H_\alpha \mathcal{Y}_{jls}^M(a, \epsilon_\alpha; \hat{\mathbf{r}}). \quad (16.74)$$

Уравнения (16.73) и (16.74) совершенно аналогичны уравнениям (15.13) и (15.14). Единственное отличие заключается в том, что в индексы теперь входят энергии возбуждения фрагментов, а спины отдельных фрагментов не фиксированы. Столкновение может перевести какой-либо один или оба фрагмента в возбужденные состояния с другими угловыми моментами.

Легко видеть, что решение системы уравнений (16.73) удовлетворяет системе связанных радиальных уравнений Шредингера

$$-\frac{d^2}{dr^2} \Psi_{l's'\epsilon'_\alpha, lse_\alpha}^j + \frac{l'(l'+1)}{r^2} \Psi_{l's'\epsilon'_\alpha, lse_\alpha}^j + \sum_{l''s''\epsilon''_\alpha} \mathfrak{B}_{l's'\epsilon'_\alpha, l''s''\epsilon''_\alpha}^j \Psi_{l''s''\epsilon''_\alpha, lse_\alpha}^j = k_\alpha'^2 \Psi_{l's'\epsilon'_\alpha, lse_\alpha}^j, \quad (16.75)$$

где k_α определено формулой (16.54).

Условная многоканальная задача. Итак, мы должны рассматривать бесконечные системы интегральных (16.73) или дифференциальных (16.75) уравнений. Фактически мы имеем *континуум* таких уравнений, так как энергии ε_α должны, по крайней мере частично, пробегать значения, принадлежащие непрерывному спектру. Однако это последнее обстоятельство обычно не принимают во внимание. Как уже говорилось выше, в условной многоканальной задаче мы имеем дело только с конечной системой уравнений (16.73) или (16.75), которая получается в результате «обрезания» состояний непрерывного спектра. Для упрощения записи и решения этих последних уравнений следует пользоваться матричными обозначениями, аналогичными введенным в гл. 15, § 2, п. 1. Для функций $\Psi_{l's'\varepsilon'_\alpha, l\varepsilon_\alpha}^j$ и $\mathfrak{B}_{l's'\varepsilon'_\alpha, l\varepsilon_\alpha}^j$ введем в рассмотрение соответствующие квадратные матрицы Ψ_j и V_j ; через L обозначим диагональную матрицу, приведенную после (15.92), через K — диагональную матрицу волновых чисел канала (16.54); матрица K совершенно аналогична матрице L из гл. 15, § 2, п. 1. В матричных обозначениях системы уравнений (16.73) и (16.75) принимают более простой вид

$$\Psi_j^{(\pm)}(E, r) = u_L(Kr) + \int_0^\infty dr' G_L^\pm(K; r, r') V_j(r') \Psi_j^{(\pm)}(E, r'), \quad (16.73a)$$

$$-\Psi_j'' + L(L+1)r^{-2}\Psi_j + V_j\Psi_j = K^2\Psi_j. \quad (16.75a)$$

2. S-матрица

Асимптотическое поведение радиальной волновой функции при больших r можно раскрыть, обращаясь к (16.73a) и (11.4),

$$\Psi_j^{(+)}(k, r) \approx \frac{1}{2} e^{iL/2\pi(L+1)} [e^{-iKr} - e^{iKr} e^{-i\pi L} \bar{S}^j], \quad (16.76)$$

где

$$\bar{S}^j = 1 - 2iK^{-1} \int_0^\infty dr u_L(Kr) V_j(r) \Psi_j^{(+)}(E, r). \quad (16.77)$$

В отличие от (15.16) положение множителя e^{iKr} в формуле (16.76) теперь имеет существенное значение; он должен стоять именно слева. С другой стороны, обращаясь к выражению (16.58), можно разложить его в ряд и найти аналог формулы (15.18)

$$\bar{A}(k'\alpha', k\alpha) = 4\pi \sum_{jMl'l'} \mathfrak{Y}_j^M(l's'v'; \hat{k}') \bar{a}_{l's'\varepsilon'_\alpha, l\varepsilon_\alpha}^j(E) \mathfrak{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{k}); \quad (16.78)$$

матрица \bar{a}^j выражается через матрицу \bar{S} по формуле

$$\bar{a}^j = (\bar{S}^j - 1)(2iK)^{-1}. \quad (16.79)$$

Однако в силу (16.64) более удобно иметь разложение непосредственно для амплитуды A (16.65). Матрицу коэффициентов в разложении амплитуды A , аналогичном (16.78), мы обозначим через a^j . Тогда получим

$$a^j = K^{1/2} \bar{a}^j K^{-1/2} = (S^j - 1)(2iK)^{-1}, \quad (16.80)$$

где

$$S^j = K^{1/2} \bar{S}^j K^{-1/2}, \quad (16.81)$$

мы не рассматриваем сейчас столкновение с перераспределением, и поэтому массы начального и конечного каналов равны между собой.

Соотношение взаимности и унитарность. Рассуждения, приведенные в гл. 15, § 1, п. 1—3, как и прежде, можно распространить на амплитуду \bar{A} ; только необходимо произвести соответствующую замену функций \mathcal{U} и выполнить суммирование по внутренним энергиям. В результате мы получим, в частности, что из инвариантности относительно обращения времени вытекает *симметрия* матрицы \bar{a}^j , а следовательно, и симметрия матрицы S^j , определяемой соотношением (16.81) (но *не* \bar{S}^j). Аналогично получаем, что матрица потенциалов V_j также должна быть симметричной. Единственное различие возникает в отношении сохранения четности. Так как спины отдельных фрагментов в начальном и конечном состояниях необязательно совпадают, то в правых частях формул (15.66)—(15.67а) появляется дополнительный множитель вида $(-1)^{s_1+s_2-s_1'-s_2'}$.

Вследствие различия между начальными и конечными импульсами при обращении к соотношению унитарности (15.70), выражающему закон сохранения потока, следует проявлять известную осторожность. При наличии инвариантности относительно обращения времени указанное соотношение унитарности выглядит наиболее просто для спиральных амплитуд рассеяния для отдельных спинов; так мы получаем аналог формулы (17.70б)

$$4\pi k_\alpha^{-1} \text{Im} A^h(k'\alpha', k\alpha) = \sum_{v_1'v_2'e_\alpha''} \int d\Omega_k A^{h*}(k''\alpha'', k'\alpha') A^h(k''\alpha'', k\alpha). \quad (16.82)$$

В выражение (16.82) входят амплитуды без черточек, определяемые (16.65); параметр α (помимо всех прочих квантовых чисел) должен включать в себя квантовые числа спиральностей отдельных фрагментов. Если в соотношение (16.82) подставить разложения амплитуд по парциальным волнам, то легко показать, что оно эквивалентно условию унитарности матрицы S^j (но *не* матрицы \bar{S}^j):

$$S^j S^{j*} = S^{j*} S^j = 1. \quad (16.83)$$

Следует помнить, что в соотношениях (16.83) производится *интегрирование* по «непрерывным» индексам, т. е. в областях энергий отдельных фрагментов, которые отвечают наличию двух фрагментов в конечном (или в начальном) состоянии.

3. Столкновения с перераспределением

Чтобы описать столкновение с перераспределением, нужно разложить функцию $\Psi^{(+)}(\alpha, \mathbf{r})$ по собственным функциям внутренних гамильтонианов в канале реакции b . Вместо разложения (16.72) функции (16.61) теперь имеем

$$\Psi^{(+)}(k\alpha, \mathbf{r}_b) = \left(\frac{2\mu_\alpha k_\alpha}{\pi}\right)^{1/2} (k_\alpha r_b)^{-1} \sum_{jMl's'e_\beta} \psi_{l's'e_\beta}^{j(+)}(E, r_b) \times \\ \times \mathcal{Y}_{l's'}^M(b, e_\beta; \hat{\mathbf{r}}_b) \mathcal{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{\mathbf{k}}); \quad (16.84)$$

радиальные функции $\psi^{j(+)}(E, r_b)$ не удовлетворяют каким-либо простым интегральным уравнениям; их можно вычислять только путем обращения разложения (16.84). Использование для этой цели разложения (16.72) приводит к столь сложному выражению, что оно не представляет реальной ценности.

Единственный осуществимый способ решения задачи состоит в непосредственном разложении соотношения (16.41) с помощью (16.70) и (16.72). В результате получаем

$$T_{b\alpha} = \sum_{jMl'} \mathcal{Y}_j^M(l's'v'; \hat{\mathbf{k}}') T_{l's'e_\beta, lse_\alpha}^j \mathcal{Y}_j^{M*}(lsv; \hat{\mathbf{k}}), \quad (16.85)$$

где

$$T_{l's'\epsilon_\beta, l\epsilon_\alpha}^j = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\mu_a \mu_b}{k_\alpha k_\beta} \right)^{1/2} \times \\ \times \sum_{l''s''\epsilon'_\alpha} [r_b^{-1} u_l(k_\beta r_b) \mathcal{Y}_{j'l's'}^M(b, \epsilon_\beta; \hat{r}_b), H'_b \psi_{l''s''\epsilon'_\alpha}^{j(+)} \mathcal{Y}_{j'l''s''}^M(a, \epsilon_\alpha; \hat{r}_\alpha)]; \quad (16.86)$$

квадратные скобки означают здесь скалярное произведение (в смешанных обозначениях). Следует отметить, что в левом сомножителе данного скалярного произведения в явном виде указана только координата r_b . В правом сомножителе в явном виде указана только координата r_a . Например, в задаче столкновения трех тел, когда в начальном состоянии имеется частица 1 и связанное состояние (2,3), а в конечном — частица 2 и связанное состояние (1,3), r_b есть расстояние от частицы 2 до центра масс системы (1,3); $H'_b = V_{12} + V_{32}$.

§ 5. ФОРМАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСОВ

Начнем с того, что напомним определение *канала*, используемое в данной книге. Каналы реакции определяются путем рассмотрения ситуации, когда координаты одной или нескольких частиц устремляются в бесконечность. Когда расстояние между двумя группами частиц (называемых фрагментами) стремится к бесконечности, гамильтониан системы переходит в «нулевой» гамильтониан канала, обозначаемый символом H_a . Обращающаяся в нуль часть гамильтониана определяется согласно

$$H = H_a + H'_a.$$

Аналогично определяются каналы реакции в случае более двух фрагментов, при этом необходимо разбивать гамильтониан на число частей, большее двух. Если до некоторой степени обобщить эту идею, то можно будет объединять во фрагмент любую частицу или любую группу частиц. При этом энергия внутренних взаимодействий этих частиц включается в H_a и определенный таким образом по-новому канал реакции объединяет два (или более) существовавших ранее каналов. Например, в задаче трех тел три канала реакции определялись следующим образом:

$$H_a = H_0 + V_{12}, \quad H_b = H_0 + V_{23}, \quad H_c = H_0 + V_{13}.$$

Однако первые два канала можно объединить в один новый, положив

$$H_a = H_0 + V_{12} + V_{23}.$$

В каждом канале реакции в новом смысле свойства, присущие разным каналам рассеяния, характеризуются внутренними энергиями фрагментов. Если в задаче трех частиц взаимодействие V_{12} приводит к появлению двух связанных состояний частиц 1 и 2, то канал реакции a состоит из двух отдельных каналов рассеяния. Состояния, в которых взаимодействующие посредством V_{12} частицы 1 и 2 не связаны, соответствуют континууму. Как правило, последние состояния в канал a явно не входят; мы рассматриваем их только в связи с новым каналом реакции, состоящим из трех фрагментов. В задаче трех частиц для этого последнего канала реакции следует считать $H_a = H_0$. При необходимости же учета *виртуальных*, или *промежуточных*, состояний не всегда удастся избежать включения непрерывного спектра в каналах перестройки.

При заданной полной энергии может оказаться возможным возбуждение некоторых внутренних энергетических уровней, причем после этого фрагменты все еще будут обладать некоторой (положительной) кинетической энергией.

В то же время возбуждение других, более высоких внутренних энергетических уровней при данной полной энергии оказывается невозможным. Говорят, что каналы, соответствующие второй группе уровней, *закрываются*. Энергия, при которой открывается некоторый канал, называется его *порогом*.

Эффективные гамильтонианы. Рассмотрим теперь фиксированный канал реакции из двух фрагментов с гамильтонианом

$$H = H_\alpha + H'_\beta.$$

Допустим, что в данном канале реакции имеется несколько каналов рассеяния, соответствующих разным возбуждениям фрагментов. Пусть P_α — оператор проектирования на *группу* каналов рассеяния α (которая может содержать один или несколько каналов). Такой оператор проектирования можно построить, например, из векторов внутренних состояний фрагментов (16.51). Все остальные каналы рассеяния объединяются в группу β , которой соответствует оператор проектирования P_β , такой, что

$$P_\alpha + P_\beta = 1. \quad (16.87)$$

С помощью введенных операторов проектирования можно определить другие операторы, например

$$\begin{aligned} V_\alpha &\equiv P_\alpha H'_\beta P_\alpha, & V_{\alpha\beta} &\equiv P_\alpha H'_\beta P_\beta, \\ H_\alpha &\equiv P_\alpha H P_\alpha, & H_{\alpha\beta} &\equiv P_\alpha H_\beta P_\alpha \end{aligned} \quad (16.88)$$

и т. д.

Далее, мы можем определить функции Грина для пространств этих групп каналов рассеяния посредством уравнений

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\alpha - H_\alpha) G_\alpha(\mathcal{E}_\alpha) &= P_\alpha, \\ (\mathcal{E}_\beta - H_\beta) G_\beta(\mathcal{E}_\beta) &= P_\beta \end{aligned} \quad (16.89)$$

с добавлением граничных условий расходящихся волн. Положим по определению

$$G(E) \equiv G_\alpha(E) + G_\beta(E). \quad (16.90)$$

Ни G_α , ни G_β не зависят от взаимодействия $V_{\alpha\beta}$ между обеими группами каналов рассеяния; следовательно, G также не зависит от $V_{\alpha\beta}$. Поскольку оба пространства, на которые проектируют операторы P_α и P_β , взаимно ортогональны, то G можно записать просто в виде

$$G(E) = (E - H_\alpha - H_\beta)^{-1}. \quad (16.91)$$

Полную функцию Грина

$$\mathcal{G} = (E - H)^{-1}, \quad (16.92)$$

удовлетворяющую граничному условию расходящихся волн, можно выразить через G с помощью уравнения

$$\mathcal{G} = G + G(V_{\alpha\beta} + V_{\beta\alpha})\mathcal{G}, \quad (16.93)$$

так что

$$\begin{aligned} P_\alpha \mathcal{G} &= G_\alpha + G_\alpha V_{\alpha\beta} P_\beta \mathcal{G}, \\ P_\beta \mathcal{G} &= G_\beta + G_\beta V_{\beta\alpha} P_\alpha \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (16.94)$$

Подставляя второе уравнение (16.94) в первое и умножая результат слева на G_α^{-1} , получаем

$$(\mathcal{E}_\alpha - H_\alpha - V_{\alpha\beta} G_\beta V_{\beta\alpha}) P_\alpha \mathcal{G} = P_\alpha + V_{\alpha\beta} G_\beta. \quad (16.95)$$

Определяя теперь псевдогамильтониан \mathcal{H}_α для группы каналов рассеяния α

$$\mathcal{H}_\alpha(\mathcal{E}_\beta) \equiv H_\alpha + V_{\alpha\beta} G_\beta(\mathcal{E}_\beta) V_{\beta\alpha} \quad (16.96)$$

и соответствующую функцию Грина \mathfrak{G}_α уравнением

$$[\mathfrak{E}_\alpha - \mathcal{H}_\alpha(\mathfrak{E}_\beta)] \mathfrak{G}_\alpha = P_\alpha \quad (16.97)$$

(с учетом граничного условия расходящихся волн), из (16.95) получаем

$$P_\alpha \mathcal{G} = \mathfrak{G}_\alpha + \mathfrak{G}_\alpha V_{\alpha\beta} G_\beta. \quad (16.98)$$

Подставим далее (16.98) в правую часть второго уравнения (16.94); получаем

$$P_\beta \mathcal{G} = G_\beta + G_\beta V_{\beta\alpha} \mathfrak{G}_\alpha + G_\beta V_{\beta\alpha} \mathfrak{G}_\alpha V_{\alpha\beta} G_\beta. \quad (16.99)$$

Складывая, наконец, (16.98) и (16.99), имеем

$$\mathcal{G} = G_\beta + (1 + G_\beta V_{\beta\alpha}) \mathfrak{G}_\alpha (V_{\alpha\beta} G_\beta + 1). \quad (16.100)$$

Из полученного результата [или из (16.98)] видно, что полная функция Грина \mathcal{G} на пространстве группы каналов рассеяния α в точности совпадает с \mathfrak{G}_α :

$$\mathcal{G}_\alpha \equiv P_\alpha \mathcal{G} P_\alpha = \mathfrak{G}_\alpha. \quad (16.101)$$

Из равенства (16.101) следует, что, пока рассматривается пространство группы каналов рассеяния α , все влияние взаимодействия с другими каналами учитывается путем замены исходного гамильтониана *зависящим от энергии* псевдогамильтонианом \mathcal{H}_α . Конечно, при вычислении $\mathcal{G}(E)$ обе энергии \mathfrak{E}_α и \mathfrak{E}_β в (16.97) следует положить равными полной энергии E . Физический смысл оператора \mathcal{H}_α довольно прост: кроме исходного гамильтониана H_α , в гамильтониан \mathcal{H}_α входит оператор, который, очевидно, описывает переход из группы каналов рассеяния α в группу каналов рассеяния β , распространение в группе каналов β в соответствии с полным гамильтонианом этой группы H_β с энергией $\mathfrak{E}_\beta (= E)$ и обратный переход в группы каналов рассеяния α .

Отметим, что, как видно из явного выражения для псевдогамильтониана \mathcal{H}_α , взаимодействие с закрытыми каналами *всегда* эквивалентно появлению в гамильтониане *притягивательного* потенциала. (Действительно, если энергия \mathfrak{E}_β меньше всех пороговых значений энергии каналов группы β , то G_β — отрицательно определенный оператор; кроме того, $V_{\beta\alpha} = V_{\alpha\beta}^\dagger$.) Следовательно, уровни энергии, соответствующие связанным состояниям, если только последние существуют в отсутствие взаимодействия с закрытыми каналами рассеяния, при включении такого взаимодействия могут только стать более *глубокими*. Связанные состояния, таким образом, не могут исчезнуть. Более того, весьма вероятно, что при включении такого взаимодействия возникнут новые связанные состояния, которых не было в его отсутствие.

Если какая-либо группа каналов рассеяния β открыта, то G_β и, следовательно, \mathcal{H}_α не являются эрмитовыми операторами. Неэрмитов характер этих операторов можно выразить в явном виде, обращаясь к следующему соотношению (при действительных значениях E):

$$\mathcal{H}_\alpha(E) = H_\alpha + V_{\alpha\beta} \mathcal{P}(E - H_\beta)^{-1} V_{\beta\alpha} - i\pi V_{\alpha\beta} \delta(E - H_\beta) V_{\beta\alpha}, \quad (16.102)$$

где \mathcal{P} означает *главное значение*. Из (16.102) видно, что антиэрмитова часть оператора $\mathcal{H}_\alpha(E)$ всегда неположительно определена; в этом явно выражается то обстоятельство, что в пространстве каналов рассеяния группы α проявляется *эффективное поглощение* за счет имеющегося потока в каналы рассеяния группы β . Если энергия E не переходит границы непрерывного спектра оператора H_β , то член с δ -функцией в (16.102) равен нулю. При этом все каналы рассеяния группы β закрыты и оператор \mathcal{H}_α эрмитов. Кроме того, всякий раз, когда $\text{Im } E > 0$ (или $\text{Im } E < 0$), антиэрмитова часть оператора \mathcal{H}_α является неположительно (или неотрицательно) определенной. Следовательно, операторная функция $\mathfrak{G}_\alpha(E)$ не может иметь никаких комплексных полюсов в согласии с тем фактом, что, поскольку H — эрмитов оператор, $\mathcal{G}(E)$ не должна иметь комплексных полюсов.

Резонансы и связанные состояния, утопленные в непрерывном спектре. Допустим теперь, что мы рассматриваем такой гамильтониан, что несмотря на неэрмитов характер оператора \mathcal{H}_α при вещественных значениях E , превышающих порог отдельных каналов рассеяния в группе каналов β , оператор $\mathcal{H}_\alpha(E_0)$ имеет дискретное собственное значение E_0 . Тогда операторная функция $\mathcal{G}_\alpha(E)$ имеет *полюс* в точке E_0 и, согласно (16.101), в этой же точке имеется полюс и у функции $\mathcal{S}(E)$. Это означает, что E_0 является энергией связанного состояния оператора H , которое *утоплено в непрерывном спектре*. Подобное состояние невозможно обнаружить при рассеянии; оно нормируемо, и, следовательно, его волновая функция асимптотически обращается в нуль.

Посмотрим теперь, что происходит, когда мы непрерывно изменяем гамильтониан, отправляясь от только что рассмотренной «случайной» ситуации. Например, мы можем считать, что перед оператором H_α стоит в качестве множителя параметр взаимодействия ξ , величину которого мы можем изменять. Если возможно аналитическое продолжение функции $\mathcal{G}_\alpha(E)$ в окрестность точки E_0 , то можно рассматривать изменение положения полюса функции $\mathcal{G}_\alpha(E)$ на комплексной плоскости при изменении ξ ; только при очень специальных условиях полюс будет оставаться на действительной оси. Как мы уже видели (при действительном ξ), полюс не может перейти в верхнюю полуплоскость, так как при $\text{Im } E > 0$ антиэрмитова часть оператора $\mathcal{H}_\alpha(E)$ неположительно определена. Следовательно, он должен *пересечь разрез*, который функция $\mathcal{G}_\alpha(E)$ имеет при значениях энергии, принадлежащих непрерывному спектру оператора H , а также разрез функции G_β , проходящий через точки непрерывного спектра оператора H_β . Вследствие граничного условия расходящихся волн для $\mathcal{G}_\alpha(E)$ и G_β значение энергии E , отвечающее полюсу, оказывается на верхних берегах обоих разрезов. Следовательно, если незначительное изменение гамильтониана способно привести к уничтожению реального связанного состояния и если $\mathcal{G}_\alpha(E)$ допускает аналитическое продолжение через свой разрез, то можно ожидать, что $\mathcal{G}_\alpha(E)$ имеет *полюс*, расположенный вблизи действительной оси.

Проблему можно также рассмотреть с точки зрения собственных значений оператора \mathcal{H}_α . Считая, что для некоторого значения параметра ξ оператор $\mathcal{H}_\alpha(E_0, \xi)$ имеет собственное значение $A = E_0$, т. е. что

$$[\mathcal{H}_\alpha(E_0, \xi) - A] u(\xi) = 0, \quad (16.103)$$

займемся аналитическим продолжением уравнения (16.103) при изменении ξ . Если функция $G_\beta(E)$ аналитична в окрестности точки E_0 , то $\mathcal{H}_\alpha(E, \xi)$ тоже аналитична в окрестности E_0 . Поэтому можно ожидать, что уравнение (16.103) удастся продолжить по крайней мере на небольшую область вблизи E_0 . При этом значение E_0 , конечно, изменится и, вообще говоря, оно уже не будет действительным. Но точка E_0 не может перейти с действительной оси в верхнюю полуплоскость, т. е. на «физический лист» функции G_β , так как в этом случае \mathcal{S} имела бы полюс на физическом листе, а оператор H имел бы комплексное собственное значение. Таким образом, точка E_0 должна перейти в нижнюю полуплоскость через разрез функции G_β и попасть на «второй лист». На этом втором листе G_β уже не является резольвентой, каковой она была на первом листе, и то, что продолженный таким способом оператор $\mathcal{H}_\alpha(E)$ имеет собственное значение E , не означает, что E также является собственным значением оператора H .

Таким образом, мы нашли (при условии, что все предположения относительно свойств аналитичности, определяемых гамильтонианом, оправданы), что так как сам псевдогамильтониан $\mathcal{H}_\alpha(E)$ имеет правый разрез, то полюс функции \mathcal{G}_α в точке E_0 на *втором листе*, который путем малых изменений гамильтониана H можно сместить на действительную ось (т. е. на верхний берег правого разреза), имеет смысл *собственного значения* A оператора \mathcal{H}_α , для которого $A(E_0) = E_0$. Вычет функции \mathcal{G}_α в точке E_0 , следовательно,

имеет вид (в диадных обозначениях)

$$\frac{uv^\dagger}{(v, u)}, \quad (16.104)$$

где v удовлетворяет уравнению

$$[\mathcal{H}_\alpha^\dagger - A^*]v = 0. \quad (16.103a)$$

Другими словами, согласно (16.100), вблизи точки $E = E_0$ имеем

$$\mathcal{G} = G_\beta + \frac{(1 + G_\beta V_{\beta\alpha}) uv^\dagger (V_{\alpha\beta} G_\beta + 1)}{(v, u) [E - A(E)]} + \dots, \quad (16.105)$$

где функция $A(E)$ такова, что

$$A(E_0) = E_0.$$

Если точка E_0 расположена вблизи действительной оси, то можно ожидать, что существует такое вещественное значение энергии E_1 , при котором

$$R \equiv \operatorname{Re} A(E_1) = E_1$$

и величина $I \equiv -\operatorname{Im} A(E_1)$ мала (по сравнению с энергией, характеризующей масштаб существенного изменения величин, входящих в \mathcal{U} или в T). Если такое значение энергии E_1 существует, то функцию $A(E)$ можно разложить в ряд в окрестности точки E_1

$$A(E) = R + iI + (E - E_1)(R' + iI') + \dots$$

Следовательно,

$$E - A(E) = \left(E - E_r + i\frac{1}{2}\Gamma\right) [1 - A'(E_1)] + \dots, \quad (16.106)$$

где

$$E_r = E_1 - \frac{II'}{(1 - R')^2 + I'^2}, \quad (16.107)$$

$$\Gamma = \frac{2(1 - R')I}{(1 - R')^2 + I'^2}.$$

Если $I = 0$, то также должно выполняться $I' = 0$, поскольку собственное значение не может пересечь действительную ось; поэтому можно ожидать, что I' должно быть мало, когда мало I . Отсюда, если только R' не близко к единице, получаем

$$E_r \approx E_1 - \frac{II'}{(1 - R')^2}, \quad \Gamma \approx \frac{2I}{1 - R'}, \quad (16.107a)$$

$$E - A(E) \approx (1 - R') \left(E - E_r + i\frac{1}{2}\Gamma\right). \quad (16.106a)$$

Формула Брейта—Вигнера. Воспользуемся полученными результатами и выведем приближенную формулу для T -матрицы. Запишем функции начального $\Psi_{\beta\alpha}^{(i)(\pm)}$ и конечного $\Psi_{\beta\alpha}^{(f)(\pm)}$ состояний нулевого гамильтониана H_α в виде

$$\Psi_{\beta}^{(f)(\pm)} = \Psi_0^{(f)} + G_\beta^\pm V_\beta \Psi_0^{(f)}, \quad (16.108)$$

где $\Psi_{\beta}^{(f)(\pm)}$ принадлежит группе каналов рассеяния β и т. д. После простых преобразований получаем (в окрестности точки $E = E_1$)

$$T_{fi} = (\Psi^{(f)}, [H'_\alpha + H'_\alpha G_\beta H'_\alpha] \Psi^{(i)}) + \frac{B_{fi}}{(v, u) (E - E_r + i\frac{1}{2}\Gamma)} + \dots \quad (16.109)$$

Коэффициенты B_{fi} имеют вид

$$B_{fi} = \frac{\bar{\gamma}^f \bar{\gamma}^i}{1 - R^i} \quad (16.110)$$

при условии, что начальное и конечное состояния принадлежат группе каналов рассеяния β . Величина $\bar{\gamma}^i$ в (16.110) определяется соотношением

$$\bar{\gamma}^i = (\Psi_{\beta}^{(i)(-)}, V_{\beta\alpha} u). \quad (16.111)$$

Если гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, то фазы всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\bar{\gamma}^i = (v, V_{\alpha\beta} \Psi_{\beta}^{(i)(+)}). \quad (16.111a)$$

Аналогичные выражения имеют место и для $\bar{\gamma}^j$. Если начальное или конечное состояния не принадлежат группе каналов рассеяния β , то коэффициенты B_{fi} содержат множителем $E - A$. Поэтому полюс в T_{fi} не проявляется. Однако при желании можно в любом данном интервале энергии включить в группу каналов β все открытые каналы рассеяния. Тогда каждый физический матричный элемент \mathbf{T} -матрицы будет вести себя так, как если бы он имел полюс при комплексной энергии

$$E = E_r - i \frac{1}{2} \Gamma.$$

Выражение (16.102) позволяет вычислить величину I . Считая, что u нормировано на единицу, и пользуясь полнотой системы собственных состояний оператора H_{β} , соответствующих расходящимся и сходящимся волнам, получаем

$$I = \pi \sum_f |\bar{\gamma}^f|^2. \quad (16.112)$$

Конечно, при взятии суммы в (16.112) подразумевается, что она, по крайней мере в какой-то своей части, содержит интегрирование по направлениям; энергия фиксирована, и по ней суммирование не проводится.

Наконец, очевидно, что если u и v нормированы на единицу, то всегда выполняется неравенство $|(v, u)|^2 \leq 1$. Если собственное значение A действительно, то v пропорционально u и поэтому $|(v, u)|^2 = 1$ (так как антиэрмитова часть оператора \mathcal{H}_{α} неотрицательно или неположительно определена). Следовательно, величина $|(u, v)|^2$ стационарна по отношению к малым изменениям гамильтониана около такого гамильтониана, который имеет собственным значением A . Таким образом, можно ожидать, что соотношение $|(v, u)| \approx 1$ будет достаточно хорошо выполняться, когда величина $\text{Im } A$ мала. В результате главная энергетическая зависимость T_{fi} вблизи $E = E_r$ описывается формулой

$$T_{fi} \approx \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma^f \bar{\gamma}^i}{E - E_r + i\Gamma/2} + \dots, \quad (16.113)$$

в которой

$$\begin{aligned} \gamma &= \bar{\gamma} \left(\frac{2\pi}{1 - R'} \right)^{1/2}, \\ \Gamma &= \sum_f |\gamma^f|^2. \end{aligned} \quad (16.114)$$

Формулу (16.113) обычно называют *формулой Брейта—Вигнера*; она выражает имеющуюся резкую зависимость амплитуды рассеяния от энергии вблизи резонанса. Согласно (16.113) и (16.114), полное сечение вблизи резонансной энергии, усредненное по всем направлениям поляризации падающего пучка и т. д., имеет вид

$$\sigma \sim \frac{1/4 \Gamma^2}{(E - E_r)^2 + 1/4 \Gamma^2}. \quad (16.115)$$

Такая форма зависимости сечения от энергии совпадает с лоренцевской формой зависимости сечения рассеяния электромагнитных волн (фиг. 3.2). Функ-

ция (16.115) достигает максимума в точке $E = E_r$, она симметрична в окрестности этой точки и имеет ширину Γ (последняя отсчитывается между точками, где значение функции равно половине ε значения в максимуме).

Другие формы зависимости σ от E . Следует иметь в виду, что при выводе формулы (16.115) делаются некоторые специальные предположения, которые, однако, не всегда выполняются. Наиболее важное из них состоит в том, что ширина Γ и «смещение» действительной части полюса от E_1 до E_r в (16.107) предполагаются малыми в масштабах энергии, в которых другие величины, входящие в амплитуду рассеяния, изменяются заметно. Если указанное смещение не мало, то нельзя больше пользоваться разложением (16.106) в окрестности точки E_r . Если ширина Γ не мала, то «фон», из которого выступает резонансный пик, изменится столь же быстро, как и сам резонансный пик, так что форма пика может быть полностью искажена; в действительности может случиться, что пик станет вообще незаметным.

Предположение о плавно изменяющемся фоне оказывается неверным в особом случае двух близко расположенных резонансов, расстояние между которыми сравнимо с их ширинами или меньше их ширин. При этом могут возникнуть значительные изменения формы каждого из резонансных пиков. Другим примером подобной ситуации может служить резонанс, появляющийся при низких энергиях или вблизи порога, где для амплитуды рассеяния имеется дополнительная резкая «естественная» зависимость от энергии (гл. 17, § 2).

Второе допущение, существенное для вывода формулы (16.115), состоит в том, что полюс функции Грина (16.105) считается *однократным*. Если гамильтониан, имеющий «почти» связанное состояние, утопленное в непрерывном спектре, является эрмитовым, то полюс *его* резольвенты, конечно, должен быть однократным. Однако даже в этом случае может оказаться, что два разных полюса резольвенты сливаются при смещении в комплексную плоскость. *Двукратный* полюс приводит к резонансной кривой, полностью отличающейся по форме от (16.115): она может иметь сильно сглаженную вершину или даже иметь два максимума. Приведенный пример можно рассматривать как предельный для случая двух «перекрывающихся» резонансов (к этому вопросу мы вернемся в гл. 19, § 3).

Факторизация вычета. Перейдем от рассмотрения полного сечения к рассмотрению сечения какой-либо конкретной реакции. Мы видим из формулы (16.113), что *каждая* не равная нулю (или «незапрещенная») при данной энергии амплитуда столкновения имеет резонанс при той же самой энергии и с точно такой же шириной, что и полное сечение. Если вблизи E_r некоторые γ более резко зависят от энергии, то в эксперименте это, конечно, трудно заметить. Отметим характерную факторизацию вычета в (16.113). Сечение для каждого отдельного процесса при резонансной энергии можно разложить на два множителя, один из которых зависит только от начального, а другой от конечного состояния. Кроме того, если гамильтониан инвариантен относительно пространственных вращений, то волновой функции связанного состояния u соответствует единственное значение полного углового момента (исключая случайное вырождение). Соотношение (16.111) показывает, что в результате этого резонансное поведение обнаруживают начальное и конечное состояния только с тем же значением углового момента. Угловое распределение фрагментов, образующихся при резонансной энергии, соответствует, следовательно, распределению при определенном угловом моменте. Сказанное справедливо в отношении других квантовых чисел, которые для данной реакции являются «хорошими». Если для некоторого гамильтониана смещение нескольких квантовых чисел может считаться случайным для связанного состояния, то их смещение будет случайным и в случае резонанса.

В свете описываемого механизма, приводящего к резонансу, вид соотношений (16.113) и (16.114) допускает простую физическую интерпретацию.

Из соотношения (16.111) видно, что числа $|\gamma|^2$ имеют смысл вероятностей перехода в единицу времени: $|\gamma^i|^2$ — вероятность перехода из свободного состояния в связанное, а $|\gamma'^i|^2$ — из связанного состояния в свободное. Множитель $(1 - R')^{1/2}$ в соотношении, связывающем γ и $\bar{\gamma}$, просто учитывает энергетическую зависимость u и v и смещение из E_0 в E_1 . Из соотношения (16.114) видно, что Γ является суммой всех указанных вероятностей перехода (которые будем называть *парциальными ширинами*) из связанного состояния. Следовательно, Γ — полная *вероятность перехода в единицу времени*, а ее обратная величина имеет смысл среднего времени жизни связанного состояния. Таким образом, (16.113) как раз приводит к результату, который можно было ожидать исходя из соотношения неопределенности Гейзенберга.

Временная задержка. В заключение мы должны выяснить, оправдано ли в действительности называть резонансом наблюдаемый в сечении рассеяния пик, описываемый формулой (16.113). Если указанный пик является резонансом, то он должен сопровождаться временной задержкой, обусловленной захватом частиц в связанное состояние. Как уже говорилось раньше, такая задержка в стационарной теории рассеяния проявляется как резкое возрастание фазы амплитуды рассеяния при увеличении энергии. Так как из выражения (16.113) вытекает, что вблизи энергии $E = E_r$ фаза функции T_{fi} имеет вид

$$\delta \approx \text{arctg} \frac{1/2\Gamma}{E_r - E},$$

то при *положительной* ширине Γ фаза δ должна резко возрасть, когда E при увеличении проходит через значение E_r . Значение I всегда положительно; таким образом, согласно (16.107а), знак Γ определяется знаком $1 - R'$.

Допустим, что наш гамильтониан таков, что при $E = E_0$ псевдогамильтониан $\mathcal{H}_\alpha(E)$ имеет *действительное* собственное значение A . Тогда из (16.102) следует, что производная от $A = R$ по E в точке $E = E_0$ равна

$$R' = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dE} \int \frac{dE' |h(E')|^2}{E - E'} \Big|_{E=E_0},$$

причем $|h(E_0)|^2 = I(E_0) = 0$. Очевидно, что эта производная неположительна. Следовательно, если имеется связанное состояние, утопленное в непрерывном спектре, то $R' \leq 0$ и $1 - R' \geq 1$. Тем не менее в случае узкого резонансного пика мы по предположению находимся «вблизи» такого связанного состояния и, следовательно, величина $1 - R'$, несомненно, неотрицательна.

Приложение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТНОШЕНИЯ (16.19)¹

Предположим, что $H_a \neq H_b$ в том смысле, что единственный вектор, для которого равенство

$$e^{iH_a t} \Phi = e^{iH_b t} \Phi \quad (16.116)$$

справедливо при всех t , оказывается нулевым вектором. Грубо говоря, это означает, что H_a и H_b не должны иметь общих собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному значению. Если это требование «случайно» нарушено, то для соответствующего состояния нет необходимости применять специальные методы теории столкновений с перераспределением; можно просто поступить так, как если бы H_a и H_b были одинаковы.

Рассмотрим оператор

$$W_t \equiv \Omega_t^{a\dagger} \Omega_t^b = P_a e^{iH_a t} e^{-iH_b t} P_b,$$

где

$$\Omega_t^a \equiv e^{iHt} e^{-iH_a t} P_a, \quad \Omega_t^b \equiv e^{iHt} e^{-iH_b t} P_b,$$

так что соотношения (16.15), (16.15a) и (6.82) принимают вид¹⁾

$$\Omega_t^a \Rightarrow \Omega_a^{(\pm)}, \quad \Omega_t^b \Rightarrow \Omega_b^{(\pm)} \quad (16.117)$$

при $t \rightarrow \mp \infty$. Тогда

$$W_t \rightarrow \Omega_a^{(\pm)\dagger} \Omega_b^{(\pm)} \quad (16.118)$$

при $t \rightarrow \mp \infty$; последнее соотношение вытекает из тождества

$$(\Psi, (W_t - \Omega_a^{(\pm)\dagger} \Omega_b^{(\pm)}) \Phi) = (\Omega_t^a \Psi, (\Omega_t^b - \Omega_b^{(\pm)}) \Phi) + ((\Omega_a^{(\pm)} - \Omega_t^a) \Psi, \Omega_b^{(\pm)} \Phi).$$

При $t \rightarrow \pm \infty$, согласно (16.117), второй член в правой части стремится к нулю; первый член стремится к нулю согласно (16.117) и неравенству Шварца.

В качестве следующего шага докажем, что при $t \rightarrow \pm \infty$

$$W_t \rightarrow 0. \quad (16.119)$$

Для этого воспользуемся специальными свойствами пространств каналов \mathcal{H}_a и \mathcal{H}_b . Разобьем оператор H_a на две части

$$H_a = H_a^{\text{кин}} + H_a^{\text{внутр}}.$$

Оператор $H_a^{\text{внутр}}$ действует на внутренние координаты всех тех фрагментов, которые в канале реакции a находятся в связанных состояниях; $H_a^{\text{кин}}$ соответствует кинетической энергии относительного движения фрагментов. Аналогичным образом можно разбить оператор H_b . Пусть, например, в задаче трех тел в канале a частицы 2 и 3 связаны, а частица 1 свободна. Тогда в системе центра масс имеем

$$\begin{aligned} H_a^{\text{внутр}} &= -\frac{1}{2\mu_{23}} \nabla^2 + V_{23}(\mathbf{r}), \\ H_a^{\text{кин}} &= -\frac{1}{2\mu_1} \nabla'^2, \\ \mu_{23} &= \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}, \quad \mu = \frac{m_1 (m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \end{aligned}$$

где \mathbf{r} — расстояние между частицами 2 и 3, а \mathbf{r}' — расстояние между частицей 1 и центром масс частиц 2 и 3. Определим пространство $\mathcal{H}_a^{(n)}$ как прямое произведение, составленное из вектора, соответствующего n -му *связанному состоянию* (собственного вектора состояния дискретного спектра) оператора $H_a^{\text{внутр}}$, и пространства нормированных волновых пакетов, образованных из «непрерывных собственных состояний»²⁾ оператора $H_a^{\text{кин}}$. Пусть оператор $P_a^{(n)}$ является оператором проектирования на пространство $\mathcal{H}_a^{(n)}$, тогда

$$H_a P_a^{(n)} = (E_{an}^{\text{внутр}} + H_a^{\text{кин}}) P_a^{(n)}, \quad (16.120)$$

где $E_{an}^{\text{внутр}}$ есть n -е (дискретное) собственное значение оператора $H_a^{\text{внутр}}$. Если $H_a^{\text{внутр}}$ — «достаточно хороший оператор», то можно считать, что число

¹⁾ Напомним, что двойная стрелка обозначает сильный предел, а обычная — слабый (гл. 6, § 7).

²⁾ Оператор $H_a^{\text{кин}}$, конечно, не имеет связанных состояний; мы имеем в виду гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций от координат, описывающих относительное положение центров масс фрагментов.

связанных состояний N у этого оператора конечно и

$$P_a = \sum_{n=1}^N P_a^{(n)}. \quad (16.121)$$

Так как *кинетические части* операторов H_a и H_b , безусловно, коммутируют:

$$[H_a^{\text{кин}}, H_b^{\text{кин}}] = 0, \quad (16.122)$$

то из (16.120) следует, что

$$P_a^{(n)} W_t P_b^{(m)} = P_a^{(n)} W_t^{nm} P_b^{(m)},$$

где

$$W_t^{nm} = \exp [i (E_{aa}^{\text{внутр}} + H_a^{\text{кин}} - E_{bm}^{\text{внутр}} - H_b^{\text{кин}}) t],$$

так что

$$W_t^{nm} W_s^{nm} = W_{t+s}^{nm}.$$

Следовательно, можно применить эргодическую теорему о среднем [878]

$$\lim_{T \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt (\Psi, P_a^{(n)} W_t P_b^{(m)} \Phi) = (P_a^{(n)} \Psi, P P_b^{(m)} \Phi), \quad (16.123)$$

где P — оператор проектирования на пространство собственных векторов оператора W_t , соответствующих собственному значению, равному единице,

$$W_t P = P$$

или

$$e^{iH_a t} P = e^{iH_b t} P.$$

Так как по предположению соотношение (16.116) выполняется только для $\Phi = 0$, то правая часть формулы (16.123) равна нулю. Но вследствие (16.118) левая часть формулы (16.123), очевидно, равна

$$(\Psi, P_a^{(n)} \Omega_a^{(\pm)\dagger} \Omega_b^{(\pm)} P_b^{(m)} \Phi).$$

Теперь из (16.121) вытекает (16.119). При получении данного результата было сделано только предположение о том, что выполняется соотношение (16.122), и предположение, что операторы $H_a^{\text{внутр}}$ и $H_b^{\text{внутр}}$ имеют конечное число связанных состояний. Первое всегда выполняется, а второе предположение в случае необходимости можно ослабить.

КОММЕНТАРИИ

К § 2. Некоторые вопросы нестационарной теории неупругих процессов, в частности процессов с перераспределением, рассмотрены в следующих работах [231, 436, 166, 810, 315, 352, 444]. См. также [112]. Метод, использованный в настоящем параграфе, имеет некоторое сходство с методом работы [810], хотя и развит независимо от последней.

К § 3. В дополнение к работам по общей формальной теории рассеяния, упомянутым в комментариях к гл. 9 и к § 2 настоящей главы, следует, в частности, указать на следующие статьи, в которых рассматривалась в основном стационарная теория неупругих процессов и столкновений с перераспределением: [673, 614, 47, 517, 925, 926, 173, 616, 15, 221, 539, 268, 241, 644, 322, 323, 607, 200, 87, 445, 605, 999, 443, 187, 523].

К § 3, п. 3. В некоторых из работ, перечисленных выше, в частности в статье Опенгеймера [673], рассматривается симметризация или антисимметризация состояний либо так или иначе учитывается принцип Паули при столкновениях. Можно также указать следующие работы, в которых затрагивался этот вопрос: [847, 821, 172, 521, 522].

К § 5. Теории резонансных реакций посвящено очень большое количество работ. К тому же существует ряд различных подходов к решению этой проблемы, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Метод, изложенный в данном параграфе, в основном опирается на работу [280].

Современный метод, основанный на аналитическом продолжении амплитуд парциальных волн с действительной энергетической оси в комплексную плоскость энергии, впервые был использован в работе [777].

Следующий перечень работ может дать общее представление о литературе по этой области: [109—111, 63, 455, 85, 59, 457, 103, 104, 106, 906, 914, 267, 825, 77 (гл. 8—10), 938, 715, 83, 114, 745, 512, 644, 257—259, 519, 680, 9, 271, 272, 732, 714, 538, 198, 407—409, 889, 866, 556, 441, 565, 187, 188, 566, 637, 311]. Эти статьи с их библиографическими ссылками, возможно, окажутся полезными для читателя, интересующегося более специальными вопросами.

Перекрывающиеся каналы рассматривались недавно в работе [700], а связанные состояния, утопленные в непрерывном спектре — в работе [274].

К приложению. Приведенное здесь доказательство является видоизменением доказательства, изложенного в работе [436], в соответствии с нашим методом.

К гл. 16. Имеется обширная литература, посвященная исследованию рассеяния электронов на атомах и молекулах, а также рассеянию ионов на атомах. Представление о ней дает следующий неполный список, по которому можно проследить остальные работы: [582, 584—586, 716, 717, 628, 744, 481, 34, 826—828, 423, 189, 759, 608, 771, 122, 121, 820, 996, 1003, 102, 557, 558, 333, 679, 968, 664, 629, 325, 312].

См. также статью [936] о рассеянии нейтронов молекулами.

ЗАДАЧИ

1. Доказать соотношения (16.53) и (16.55).
2. Доказать соотношения (16.73) и (16.75).
3. Доказать, что если начальные и конечные фрагменты имеют спины s_1, s_2, s'_1 и s'_2 , то в правых частях соотношений (15.66) и (15.67а) появляются множители вида $(-1)^{s_1+s_2-s'_1-s'_2}$.
4. Доказать соотношения (16.82) и (16.83).
5. Пусть в формуле (16.75а) $L = 0$, и пусть V_j при $r < R$ является постоянной действительной симметричной матрицей, а при $r > R$ $V_j = 0$. Решить матричное уравнение и найти элементы S-матрицы при $l = l' = 0$.
6. Допустим, что квадратная $N \times N$ -матрица потенциалов V_j не связывает состояния с различными орбитальными угловыми моментами и имеет специальный вид

$$V_j(r) = \sum_{n=1}^N v_n(r) M_n,$$

где $v_n(r)$ — числовые коэффициенты, зависящие от r , а M_n — N постоянных и коммутирующих друг с другом матриц. Кроме того, будем считать энергию настолько большой, что разницей между импульсами в различных каналах можно пренебречь. Вычислить собственные фазовые сдвиги и параметры смешивания.

7. Показать, что в случае двухканального рассеяния необходимое и достаточное условие того, чтобы матрица потенциалов имела вид, указанный в задаче 6, состоит в том, чтобы недиагональные элементы матрицы потенциалов были пропорциональны разности ее диагональных элементов.

8. Допустим, что матрица потенциалов V_j постоянна при $r < R$ и обращается в нуль при $r > R$. Найти регулярное решение уравнения (16.75а) путем разложения в ряд в окрестности точки $r = 0$.

9. Рассмотреть двухканальную задачу, считая, что V_j — неотрицательно определенная матрица при всех r . Следует ли отсюда, что фазы δ_{11}^j и δ_{22}^j двух диагональных элементов S-матрицы при заданном значении j отрицательны? В качестве примера взять модельную матрицу V_j из задачи 6 и выразить фазы через параметры смешивания и собственные фазовые сдвиги. Обсудить результат.

10. Доказать соотношения (16.110) — (16.112).

11. Показать, что если S-матрица имеет двукратный полюс, то резонансная кривая может состоять из двух пиков.

Неупругое рассеяние и реакции (многоканальная теория). II

§ 1. АНАЛИТИЧНОСТЬ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

1. Системы уравнений

Исследуем многоканальную задачу с точки зрения системы радиальных уравнений Шредингера (16.75) или (16.75а). Поскольку структура системы этих уравнений сходна со структурой системы уравнений (15.92), то метод ее решения во многом аналогичен методу, изложенному в гл. 15, § 2, п. 2. В задачах о рассеянии без перестройки основная трудность состоит в том, что в них оказываются связанными состояния с различными орбитальными угловыми моментами. Данная трудность имеется и в многоканальных задачах, так как при столкновении, вообще говоря, возможно возбуждение внутренних энергетических уровней с различными угловыми моментами (т. е. различных спинов фрагментов). Однако во многих практических случаях, когда спины фрагментов в действительности представляют собой их внутренние *орбитальные* угловые моменты, указанная трудность не очень серьезна.

Рассмотрим, например, рассеяние частицы 1 на связанном состоянии частиц 2 и 3 (все три частицы имеют нулевые спины). Допустим, что взаимодействие между частицами 1 и 2 описывается суперпозицией потенциалов Юкавы (12.22а), и пусть для простоты частица 3 обладает бесконечно большой массой и покоится в начале координат. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} 2\mu V_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) &= 2\mu \int da \rho'(a) \frac{e^{-a|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \\ &= -4\pi \int da \rho'(a) G(ia; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \end{aligned} \quad (17.1)$$

где G — (свободная) двухчастичная функция Грина (10.6), взятая при $k = ia$; ее можно разложить согласно (11.1), после чего будем иметь

$$V_{12} = 4\pi \int da \rho'(a) \sum_{LM} (-1)^L Y_L^M(\hat{\mathbf{r}}_1) Y_L^{M*}(\hat{\mathbf{r}}_2) \frac{u_L(iar_{<}) \omega_L^{(+)}(iar_{>})}{iar_1 r_2}. \quad (17.2)$$

Подставляя разложение (17.2) в (16.74), получаем, согласно (16.68), что

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{l's'\beta, ls\alpha}^j(r_1) &= -8\pi i \mu \sum_{LMmm'v'v''} (-1)^L C(l's'j, m'v'M) \times \\ &\times C(ls j, mvM) A_{l'v'L}^{m'mM} A_{s'v'L}^{v''vm*} \int da a^{-1} \rho'(a) B(a, r_1), \end{aligned} \quad (17.3)$$

где

$$B(a, r_1) = \int_0^\infty dr_2 r_1^{-1} r_2^{-1} u_L(iar_{<}) \omega_L^{(+)}(iar_{>}) \psi_s(r_2) \psi_s^*(r_2).$$

Здесь ψ_s и $\psi_{s'}$ — радиальные волновые функции связанных состояний; кроме того ([719], стр. 62, формула (4.34)),

$$A_{l'l}^{m'm} = \int d\Omega Y_{l'}^{m'*}(\hat{\mathbf{r}}) Y_l^m(\hat{\mathbf{r}}) Y_L^M(\hat{\mathbf{r}}) = \\ = \left[\frac{(2l+1)(2L+1)}{4\pi(2l'+1)} \right]^{1/2} C(lLl', mMm') C(lLl', 000) = 0, \quad (17.4)$$

если только не выполняется неравенство

$$|l-l'| \leq L \leq l+l'.$$

Входящий в (17.3) интеграл B разобьем на два интеграла:

$$B = r_1^{-1} u_L(iar_1) \int_{r_1}^{\infty} dr_2 r_2^{-1} \omega_E^{(+)}(iar_2) \psi_s \psi_{s'}^* + \\ + r_1^{-1} \omega_E^{(+)}(iar_1) \int_0^{r_1} dr_2 r_2^{-1} u_L(iar_2) \psi_s \psi_{s'}^*.$$

В первом интеграле подынтегральная функция при $r_2 \rightarrow 0$ имеет порядок $O(r_2^{|s'+1-L|})$. Из-за наличия второго множителя A в формуле (17.3) вклад в сумму дают только те члены, для которых $L \leq s+s'$. Следовательно, рассматриваемый первый интеграл сходится при $r_1 \rightarrow 0$ и первое слагаемое в приведенном выражении для B имеет порядок $O(r_1^L)$. Согласно (17.4), оно имеет порядок $O(r_1^{l-l'})$. Во втором интеграле приведенного выражения подынтегральная функция при $r_2 \rightarrow 0$ имеет порядок $O(r_2^{L+s+s'+2})$. Следовательно, второй интеграл при $r_1 \rightarrow 0$ имеет порядок $O(r_1^{L+s+s'+3})$ и поэтому все второе слагаемое в выражении для B имеет порядок $O(r_1^{|s'+2|})$. Теперь если только не выполняется неравенство $|l_1 - l_2| \leq s+s'$, то по крайней мере один из двух множителей A в (17.3) всегда равен нулю. Следовательно, при $r_1 \rightarrow 0$ в приведенном выражении для B преобладает первое слагаемое, и при $r \rightarrow 0$ мы имеем

$$\mathcal{F}_{l'l's'\beta, l\alpha}^{ij}(r) = O(r^{|l-l'|}). \quad (17.5)$$

Таким образом, в рассмотренном примере элементы матрицы потенциалов в уравнениях (16.75), связывающие состояния с различными угловыми моментами, при $r \rightarrow 0$ достаточно быстро стремятся к нулю, так что теперь нет никакой необходимости вводить контрчлены, как это делалось в гл. 15, § 2, п. 2. Можно ожидать, что так будет обстоять дело и при более общих условиях. Поэтому мы просто будем считать, что при $r \rightarrow 0$ матрица потенциалов V_j ведет себя достаточно хорошо, и не будем вводить в рассмотрение контрчлены.

Система уравнений (16.75) представляет собой систему бесконечного множества уравнений, фактически континуум уравнений, так как имеются интервалы внутренних энергий фрагментов, отвечающие состояниям, в которых фрагменты диссоциированы (реально или виртуально). Здесь, пренебрегая этим обстоятельством, мы «обрежем» данную бесконечную систему уравнений и будем рассматривать только систему конечного числа уравнений.

В случае столкновений с перераспределением исходную систему уравнений невозможно свести к простой системе радиальных уравнений вида (16.75); в этом случае не существует одной координаты r , характеризующей расстояния между фрагментами в начальном и конечном состояниях. Тем не менее иногда оказывается полезным исследовать эффекты, возникающие при столкновениях с перераспределением, в рамках модели, описываемой уравнениями, подобными (16.75а), с той разницей, что теперь приведенные массы в разных каналах считаются неодинаковыми. Вместо (16.75а) имеем уравнения

$$-\frac{1}{2} M^{-1} \bar{\Psi}_j'' + M^{-1} L(L+1) r^{-2} \bar{\Psi}_j + \bar{V}_j \bar{\Psi}_j = \mathcal{E} \bar{\Psi}_j, \quad (17.6)$$

где M — диагональная матрица приведенных масс каналов; \mathcal{E} — диагональная матрица кинетических энергий. Если ввести функции

$$\begin{aligned} \Psi_j &\equiv M^{-1/2} \bar{\Psi}_j, \\ V_j &\equiv 2M^{1/2} \bar{V}_j M^{1/2}, \end{aligned} \quad (17.7)$$

то матричные уравнения (17.6) приводятся к виду (16.75а); следовательно, мы можем ограничиться рассмотрением системы уравнений (16.75а).

Исследование, проведенное в гл. 15, § 2, п. 2 и 3, можно целиком повторить в данном случае. Необходимо только учесть, что теперь K есть (диагональная) матрица, и необходимо обращать внимание на ее положение в формулах.

Воспользуемся символическими обозначениями, аналогичными введенным в гл. 15, § 2, п. 2; только теперь мы будем использовать символические обозначения также и для матрицы волновых чисел. Запишем в этих обозначениях интегральные уравнения для регулярного и нерегулярного решения. Индекс j мы опустим, так как сейчас в первую очередь нас интересует не угловой момент; мы рассмотрим уравнения при некотором фиксированном значении j .

Для регулярного решения мы имеем интегральное уравнение

$$\Phi(K, r) = \Phi^{(0)}(K, r) + \int_0^r dr' \mathcal{G}(K; r, r') V(r') \Phi(K, r'), \quad (17.8)$$

а для нерегулярного — уравнение

$$F_{\pm}(K, r) = F_{\pm}^{(0)}(K, r) - \int_r^{\infty} dr' \mathcal{G}(K; r, r') V(r') F_{\pm}(K, r'). \quad (17.9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)}(K, r) &= (2L + 1)!! K^{-L-1} u_L(Kr), \\ F_{\pm}^{(0)}(K, r) &= e^{-i\pi/2} \pi L \omega_L^{(\pm)}(Kr), \\ \mathcal{G}(K; r, r') &= g_L(K; r, r'). \end{aligned} \quad (17.10)$$

Функции g_L определены в (12.135). Нерегулярное решение $F = F_{\pm}$ удовлетворяет граничному условию

$$F_{\alpha\beta}(K, r) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \delta_{\alpha\beta} e^{ih_{\beta} r}, \quad (17.11)$$

из которого следует, что на бесконечности столбец β описывает частицы, находящиеся только в канале β ; для них берутся только расходящиеся волны.

Интегральные уравнения (17.8) и (17.9) можно решить методом итераций при тех же условиях, какие мы накладывали на отдельные уравнения в гл. 12; здесь мы не будем ими заниматься. Как и в гл. 15, § 2, п. 3, матрицу Φ выразим через F_{+} и F_{-} при помощи матричного вронскиана (его определение дано в (15.105)):

$$\mathcal{F}_{\pm} = W(F_{\pm}, \Phi); \quad (17.12)$$

в результате получим

$$\Phi = \frac{1}{2} i [F_{-} K^{-1} \mathcal{F}_{+} - F_{+} K^{-1} \mathcal{F}_{-}]. \quad (17.13)$$

Сравнивая данное выражение с (17.11) и (16.76), мы видим, что

$$\bar{S} = e^{i\pi L} K^{-1} \mathcal{F}_{-} \mathcal{F}_{+}^{-1} K \quad (17.14)$$

и, следовательно, согласно (16.81)¹), имеем

$$S = e^{i\pi L} K^{-1/2} \mathcal{F}_- \mathcal{F}_+^{-1} K^{1/2}. \quad (17.15)$$

Как следствие равенства $W(\Phi, \Phi) = 0$ получаем соотношение

$$\tilde{\mathcal{F}}_+ K^{-1} \mathcal{F}_- = \tilde{\mathcal{F}}_- K^{-1} \mathcal{F}_+, \quad (17.16)$$

из которого следует, что S -матрица симметрична. (Предположение об инвариантности относительно обращения времени содержится в наших рассуждениях, так как мы предполагаем симметрию матрицы потенциалов; иначе вронский зависел бы от r .)

По аналогии с (15.113) введем другую матрицу Иоста

$$f_{\pm} = \mathcal{F}_{\pm} [(2L+1)!!]^{-1} K^L e^{\mp i\pi/2 \pi L}. \quad (17.17)$$

Учитывая закон сохранения четности²), матрицу S можно записать с помощью новой матрицы Иоста f_{\pm} в более простой форме

$$S = K^{-1/2} f_- f_+^{-1} K^{1/2}. \quad (17.18)$$

Для матрицы f_+ существуют следующие интегральные представления:

$$f_+ = 1 + \int_0^{\infty} dr e^{-i\pi/2 \pi L \omega_L^{(+)}(Kr)} V(r) \Phi(K, r) e^{-i\pi/2 \pi L K^L} [(2L+1)!!]^{-1}, \quad (17.19)$$

$$f_+ = 1 + \int_0^{\infty} dr \tilde{F}(K, r) V(r) u_L(Kr) K^{-1} e^{-i\pi/2 \pi L}. \quad (17.19a)$$

Из граничного условия (17.11) сразу вытекает, что матрица F обладает симметрией

$$F(-K, r) = F^*(K, r) \quad (17.20)$$

в случае действительных k и, следовательно, в общем случае

$$F(-K^*, r) = F^*(K, r). \quad (17.20a)$$

Аналогично имеем

$$\mathcal{F}(-K^*) = \mathcal{F}^*(K), \quad (17.21)$$

и

$$f(-K^*) = f^*(K). \quad (17.21a)$$

Кроме того,

$$f_-(K) = f_+(-K). \quad (17.22)$$

Следует отметить, что при заданной энергии необязательно все N каналов рассматриваемой задачи открыты. Вместе с тем матрица (17.15) является $N \times N$ -матрицей. Ее подматрица S_+ , относящаяся к открытым каналам, обычно называется S -матрицей. Матрица S_+ должна быть унитарной; очевидно, что матрица S в общем случае неунитарна.

С помощью соотношений (17.15) и (17.18) можно выразить матрицы S и S_+ через $N \times N$ -матрицы \mathcal{F} и f . Матрицу S_+ можно также выразить через

¹ Если исходные уравнения взять в виде (17.6), то, в силу (17.7), $\bar{S} = e^{i\pi L} M^{1/2} K^{-1} \mathcal{F}_- \mathcal{F}_+^{-1} K M^{-1/2}$. Однако, согласно (16.81), S -матрица и в этом случае будет определяться выражением (17.15); связанные с массами множители сокращаются. Поэтому выражение (17.15) остается справедливым независимо от того, одинаковы массы каналов или нет.

² Из сохранения четности следует, что связаны друг с другом могут быть состояния только с такими значениями l , которые соответствуют одинаковой четности; следовательно, $e^{i\pi L}$ коммутирует со всеми рассматриваемыми здесь матрицами.

матрицы, относящиеся только к открытым каналам. Это можно сделать следующим образом.

Помножим интегральное уравнение (17.8) справа на матрицу I , подобранную так, чтобы «приведенное» решение $\Phi^{(R)} \equiv \Phi I$ не содержало членов, экспоненциально возрастающих при больших r и возможных вследствие мнимости импульсов каналов k_α . Согласно (17.13), имеем очевидное условие на выбор I :

$$P\mathcal{F}I = 0, \quad (17.23)$$

где P — оператор проектирования на закрытые каналы,

$$P = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{K^2}{|K^2|} \right).$$

Можно положить

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{Y} (1 - P), \\ \mathcal{Y} &= [1 + P(\mathcal{F} - 1)]^{-1}. \end{aligned} \quad (17.24)$$

Тогда асимптотическое поведение $\Phi^{(R)}$ определяется выражением

$$\Phi^{(R)} \approx \frac{1}{2} i (1 - P) [e^{-iK^+r} K^{-1} \mathcal{F} \mathcal{Y} - e^{iK^+r} K^{-1} \mathcal{F} \mathcal{Y}] (1 - P) \quad (17.25)$$

и, следовательно, подматрица матрицы S , соответствующая открытым каналам, имеет вид

$$S_+ = e^{i\pi L} K^{-1/2} (\mathcal{F} \mathcal{Y})_+ (\mathcal{F} \mathcal{Y})_+^{-1} K^{1/2}. \quad (17.26)$$

Нижний индекс «+» всюду отмечает подматрицы, соответствующие открытым каналам¹⁾.

Заметим теперь, что из вида граничного условия (17.11) следует четность $F_{\alpha\beta}$ относительно всех k , кроме k_β . Отсюда, поскольку в вронскиан входит транспонированная матрица F , $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ — четная функция относительно всех k , кроме k_α . (Функция Φ — четная относительно всех k .) Следовательно, из (17.24) вытекает, что матрица \mathcal{Y} — четная функция всех импульсов открытых каналов. Вследствие (17.21) это означает, что при действительных энергиях (все k либо действительны, либо лежат на положительной мнимой полуоси) \mathcal{Y} — действительная матрица. Таким образом, из соотношения (17.21) совместно с условием симметрии матрицы S следует, что при действительных энергиях матрица S_+ унитарна, т. е.

$$S_+^\dagger = S_+^{-1}. \quad (17.27)$$

2. Альтернативный метод

Вместо того чтобы решать систему связанных уравнений (16.75а), как это было сделано в (17.8) и (17.9), можно начать с решения некоторой системы несвязанных уравнений. Такой подход дает особенно хорошие результаты, когда несвязанные уравнения можно решить точно, а связь рассматривать как возмущение. Примером может служить система заряженных частиц, для которой в диагональную часть матрицы потенциалов включено кулоновское поле.

Соответственно запишем V в виде

$$V = V_D + \bar{V}, \quad (17.28)$$

где V_D содержит только диагональные, а \bar{V} — только недиагональные элементы матрицы V . (Не очень существенно, чтобы матрица V_D содержала

¹⁾ Данный индекс «+» не следует смешивать с индексом «+» матрицы \mathcal{F} ; во избежание путаницы последний в соотношениях (17.25) и (17.26) вообще опущен.

полностью все диагональные элементы матрицы V ; матрица \bar{V} может иметь и диагональные элементы, матрица же V_D должна быть обязательно диагональной матрицей.) Пусть $\Phi^{(1)}(K, r)$ и $F_{\pm}^{(1)}(K, r)$ — соответствующие решения уравнений (17.8) и (17.9), в которых вместо матрицы V стоит матрица V_D (конечно, элементы этих диагональных матриц зависят только от волновых чисел своих каналов). Из решений $\Phi^{(1)}(K, r)$ и $F_{\pm}^{(1)}(K, r)$, согласно (17.12) и (17.17), строим функции Юста $\mathcal{F}^{(1)}$, $\mathfrak{f}^{(1)}$ и, согласно (12.42), — функцию Грина

$$\mathcal{G}^{(1)}(K; r, r') = [\Phi^{(1)}(K, r) F^{(1)}(K, r') - \Phi^{(1)}(K, r') F^{(1)}(K, r)] \mathcal{F}^{(1)-1}(K). \quad (17.29)$$

После того как найдены решения системы несвязанных уравнений, выразим через них решения системы связанных уравнений; вместо (17.8) и (17.9) теперь имеем уравнения

$$\Phi(K, r) = \Phi^{(1)}(K, r) + \int_0^r dr' \mathcal{G}^{(1)}(K; r, r') \bar{V}(r') \Phi(K, r') \quad (17.30)$$

и

$$F(K, r) = F^{(1)}(K, r) - \int_r^{\infty} dr' \mathcal{G}^{(1)}(K; r, r') \bar{V}(r') F(K, r'). \quad (17.31)$$

Матрицу Юста \mathcal{F} построим по формуле (17.12), подставляя в нее (17.30) и (17.31). Так мы получим [вместо представлений (17.19) и (17.19a)] следующие интегральные представления:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(K) &= \mathcal{F}^{(1)}(K) + \int_0^{\infty} dr F^{(1)}(K, r) \bar{V}(r) \Phi(K, r) = \\ &= \mathcal{F}^{(1)}(K) + \int_r^{\infty} dr \tilde{F}(K, r) \bar{V}(r) \Phi^{(1)}(K, r). \end{aligned} \quad (17.32)$$

Помножим первое из полученных соотношений слева на $\mathcal{F}^{(1)-1}$ и вычтем из него аналогичное соотношение для \mathcal{F} . Используя (17.13) и (17.15), находим

$$S = S^{(1)} - 2ie^{i\pi L} K^{1/2} \mathcal{F}^{(1)-1} \int_0^{\infty} dr \Phi^{(1)} \bar{V} \Phi \mathcal{F}^{-1} K^{1/2}. \quad (17.33)$$

Взаимодействие в конечном состоянии. В ряде конкретных случаев возникает необходимость учета недиагонального потенциала \bar{V} только в рамках теории возмущений. Тогда в первом приближении получим

$$S = S^{(1)} - 2ie^{i\pi L} K^{1/2} \mathcal{F}^{(1)-1} \int_0^{\infty} dr \Phi^{(1)} \bar{V} \Phi^{(1)} \mathcal{F}^{(1)-1} K^{1/2} + \dots$$

Следовательно, недиагональные элементы S -матрицы приближенно можно представить в виде

$$S_{\beta\alpha} \approx -2ie^{i\pi l} (k_{\alpha} k_{\beta})^{1/2} \int_0^{\infty} dr \frac{\Phi_{\beta}^{(1)}(k_{\beta}, r) V_{\beta\alpha} \Phi_{\alpha}^{(1)}(k_{\alpha}, r)}{\mathcal{F}_{\alpha}^{(1)}(k_{\alpha}) \mathcal{F}_{\beta}^{(1)}(k_{\beta})}; \quad (17.34)$$

следует обратить внимание на важное обстоятельство, что в знаменателе подынтегрального выражения в (17.34) стоят функции Юста для входного и выходного каналов.

Предположим, что конечные фрагменты, образовавшиеся в результате реакции, взаимодействуют друг с другом (например, посредством электростатических сил) таким образом, что это приводит к появлению *резонансов*. Тогда функция Иоста $\mathcal{F}_\beta^{(1)}$ должна иметь нуль в нижней полуплоскости k_β , расположенный вблизи действительной оси. Когда кинетическая энергия фрагментов в конечном состоянии близка к значению резонансной энергии, знаменатель в приближенном выражении (17.34) становится малой величиной. Следовательно, величина элемента S -матрицы начинает значительно превышать свое обычное значение, что ведет к увеличению сечения. Описываемый эффект называется *эффектом взаимодействия в конечном состоянии*. Из вида формулы (17.34) вытекает также, что наши рассуждения в равной мере применимы к входному каналу α . В этом случае мы будем говорить об *эффекте взаимодействия в начальном состоянии*.

Чтобы действительно можно было сделать вывод о том, что величина $S_{\beta\alpha}$ принимает большие значения, когда нуль функции Иоста находится вблизи действительной оси, мы также должны быть уверены, что при этом числитель подынтегрального выражения в (17.34) не мал. Если $|\mathcal{F}_+^{(1)}|$ — малая величина (при некоторой действительной энергии), то $|\mathcal{F}_-^{(1)}|$ — тоже малая величина, поскольку $|\mathcal{F}_-^{(1)}| = |\mathcal{F}_+^{(1)}|$; следовательно, почти для всех значений r функция Φ — тоже малая величина. Только в окрестности начала координат (при малых r) малость \mathcal{F} не влечет за собой малости Φ , так как величина Φ должна удовлетворять граничному условию при $r = 0$. Все это, конечно, отражает тот факт, что при резонансе волновая функция рассеяния «стягивается»: частицы при резонансе находятся близко друг от друга. Следовательно, можно заметить, что величина числителя в подынтегральном выражении в (17.34) не будет сильно изменяться, когда \mathcal{F} будет становиться малым, *если только* радиус действия потенциала $V_{\beta\alpha}$ мал (в области, в которой потенциал V_D оказывает существенное влияние на волновую функцию).

Если потенциал $V_{\beta\alpha}$ в достаточной степени короткодействующий, так что числитель в (17.34) при уменьшении $\mathcal{F}^{(1)}$ существенно не изменяется, то числитель также не зависит от энергии. Это связано с тем, что граничное условие для $\Phi^{(1)}$ не зависит от k . Таким образом, основная зависимость матричного элемента $S_{\beta\alpha}$ от энергии заключена в множителях, стоящих перед интегралом

$$S_{\beta\alpha} \approx \text{const} \cdot \frac{(k_\alpha k_\beta)^{1/2}}{\mathcal{F}_\alpha^{(1)}(k_\alpha) \mathcal{F}_\beta^{(1)}(k_\beta)}.$$

Более того, хорошее приближенное значение для интеграла мы получим, если просто подставим вместо $\Phi^{(1)}$ граничное значение r^{l+1} ; таким образом, интеграл нечувствителен к диагональной части потенциала. Диагональные элементы матрицы потенциала влияют на $S_{\beta\alpha}$ только посредством функций Иоста, входящих в выражение (17.34). Последние являются как бы «факторами прилипания», характеризующими вероятности нахождения фрагментов вблизи друг друга. (Напомним, что в этом и заключается физический смысл обратной величины квадрата модуля \mathcal{F} .)

Происхождение описываемых здесь эффектов нетрудно понять с физической точки зрения. Элементы $V_{\beta\alpha}$ матрицы потенциалов обуславливают неупругие процессы (реакции), и мы считаем, что они малы. Но до и после реакции силы взаимодействия соответственно между начальными и конечными фрагментами отнюдь не малы. Когда указанные взаимодействия могут приводить к появлению резонансов, фрагменты могут образовывать друг с другом почти связанные состояния и значительное время проводить в непосредственной близости друг от друга. Ясно, что это должно заметным образом отражаться на сечениях реакции, независимо от того, до или после столкновения происходит образование почти связанных состояний.

Эффекты взаимодействия в конечном или начальном состоянии наиболее значительны при малых относительных скоростях фрагментов в конечном

или начальном состоянии. Это обусловлено главным образом тем, что резонансы в *одноканальной задаче* обычно появляются в результате наличия центробежного барьера и, следовательно, проявляются лишь при низких энергиях. Поэтому можно ожидать, что нули функций $\mathcal{F}_\alpha^{(1)}$ и $\mathcal{F}_\beta^{(1)}$ вблизи действительной оси расположены только в небольшой окрестности начала координат¹⁾. Следует, однако, признать, что описываемая ситуация является вовсе не обязательной, и вполне возможно, что эффект будет иметь место в других областях энергии.

3. Аналитические свойства

Исследуем теперь аналитические свойства матриц Φ , F и \mathfrak{f} . Полезно начать рассмотрение со случая, когда все волновые числа каналов k_α являются независимыми комплексными переменными. Очевидно, что регулярное решение Φ есть четная функция всех k и целая аналитическая функция по каждой из этих переменных. Если каждое волновое число k_α связать с полной энергией соотношением

$$k_\alpha = [2\mu_\alpha (E - \Delta_\alpha)]^{1/2}, \quad (17.35)$$

где Δ_α — фиксированные числа (энергии возбуждения внутренних состояний фрагментов канала α), то решение Φ будет целой аналитической функцией E .

Нерегулярное решение F не имеет простых общих аналитических свойств. Возникающие здесь трудности легко увидеть, если положить $l = 0$ в (17.9) для всех каналов. При этом получим уравнение

$$F(K, r) = e^{iKr} - \int_r^\infty K^{-1} \sin K(r-r') V(r') F(K, r') dr', \quad (17.36)$$

из которого ясно, что все $F_{\alpha\beta}$ — аналитические функции от k_β , регулярные в верхней полуплоскости k_β (при столь же слабых предположениях, как и в гл. 12). Вместе с тем из-за экспоненциального возрастания функции $\sin K(r-r')$ мы не можем, вообще говоря, сделать любое другое k комплексным, не нарушив сходимости интеграла. Это означает, что если подставить в (17.36) вместо каждого k_α выражение для него по формуле (17.35), то энергию нельзя будет брать ниже наибольшего порогового значения, расположенного на действительной оси. В противном случае по крайней мере одно из k_α стало бы мнимым и все элементы матрицы F вообще перестали бы существовать.

Точно так же из выражения (17.19) при $l = 0$

$$\mathfrak{f} = \mathbf{1} + \int_0^\infty dr e^{iKr} V(r) \Phi(K, r) \quad (17.37)$$

вытекает, что $\mathfrak{f}_{\alpha\beta}$ — аналитические функции от k_α , регулярные в верхней полуплоскости. Однако при этом ни одно из оставшихся k нельзя считать комплексным.

Одна из возможностей обойти указанную трудность заключается в использовании метода, изложенного в гл. 16, § 5. Если в некотором интервале значений энергии группа каналов α состоит из всех открытых, а группа β — из всех закрытых каналов, то здесь можно ограничиться рассмотрением только группы каналов α , для которой выражение для эффективного гамильтониана \mathcal{H}_α дается (16.96). То, что данный гамильтониан содержит нелокальное взаимодействие, не имеет большого значения. Кроме того, так как \mathcal{E}_β не превышает порога в группе каналов β , функция G_β аналитична в окрестности действи-

¹⁾ Кроме того, чем больше относительная скорость, тем меньше должен быть радиус действия недиагональных элементов матриц потенциалов, для того чтобы интеграл в формуле (17.34) был постоянным и не зависел от $V^{\frac{1}{2}}$.

тельной оси. Тогда, как и прежде, можно ввести матрицы Φ , F и \mathcal{F} , причем теперь размерности этих матриц равны числу *открытых* каналов. Таким способом мы строим матрицу Иоста, непосредственно определенную в физической области. Единственный недостаток данного метода, существенный для аналитического продолжения, заключается в том, что всякий раз, когда энергия проходит через порог, указанную процедуру следует повторять и вводить новые матричные функции другой размерности. Поэтому не будем вдаваться в подробности такого подхода.

Выражение S-матрицы через определитель Фредгольма. Вместо описанного подхода используем другой и рассмотрим определитель матрицы Иоста (17.19). Как и в случае одного канала (см. гл. 12, § 1, п. 2), этот определитель (который в случае одного канала, разумеется, просто совпадает с функцией Иоста) тождествен определителю Фредгольма Δ радиального интегрального уравнения (16.73а). Доказательство аналогично доказательству соотношения (12.43), только теперь уравнение перед (12.43) должно быть записано в виде

$$\frac{d \ln \det f}{d\gamma} = \text{Sp } f^{-1} \frac{df}{d\gamma} = -\text{Sp } \mathcal{G}^{\dagger} \mathcal{F}.$$

В результате из соотношения (9.79а), которое применимо как к одному уравнению, так и к системе интегральных уравнений, следует, что

$$\det f(k) = \Delta(k). \quad (17.38)$$

Вернемся к гл. 9, § 3. Из вида разложения определителя Фредгольма замечаем, что он является аналитической функцией всех импульсов каналов k_{α} , регулярной на пересечении всех верхних комплексных полуплоскостей. Таким образом, из соотношения (17.38) следует, что, хотя матрица f в общем случае не обладает простыми свойствами регулярности при комплексных значениях импульсов каналов, ее определитель этими свойствами обладает. В частности, не возникает никаких трудностей при переходе того или иного порога, поскольку импульсы каналов, обращающиеся в нуль при пороговых значениях энергии, ниже порога становятся *положительными* мнимыми величинами.

Попытаемся теперь построить S-матрицу. Так как матрица f необязательно определена ниже любого порога, то в интервале энергий, где отдельные каналы закрыты, соотношение (17.18) дает определение S-матрицы только при очень сильных ограничениях на матрицу потенциалов. Поэтому важно убедиться в справедливости того замечательного обстоятельства, что все элементы S-матрицы, соответствующие открытым каналам, можно вычислить непосредственно с помощью определителя Фредгольма.

Запишем сначала соотношение (17.18) в виде

$$S = K^{-1/2-L} S' K^{1/2+L}, \quad S' = \frac{f' X}{\Delta}, \quad (17.39)$$

где

$$f' = K^L f K^{-L} \quad (17.40)$$

и где

$$X = f'^{-1} \Delta, \quad (17.41)$$

есть X-матрица, транспонированная по отношению к матрице, составленной из алгебраических дополнений для элементов матрицы f . Из соотношения (17.19) видно, что так как Φ —четная функция всех k , то $f'_{\alpha\beta}$ —четная функция всех k , за исключением k_{α} , т. е.

$$f'_{\alpha\beta}(\dots, -k_{\gamma}, \dots) = f'_{\alpha\beta}(\dots, k_{\gamma}, \dots)$$

при всех $\gamma \neq \alpha$. Из этого следует, что величины $X_{\alpha\beta}$ — четные функции от k_β .

Теперь получим из (17.39) в явном виде диагональные элементы S -матрицы и воспользуемся разложением детерминанта

$$S_{\alpha\alpha} = \frac{\sum_{\gamma} (\tilde{f}'_{\alpha\gamma}) X_{\gamma\alpha}}{\sum_{\gamma} \tilde{f}'_{\alpha\gamma} X_{\gamma\alpha}} = \frac{\sum_{\gamma} \tilde{f}_{\alpha\gamma}(\dots, -k_\alpha, \dots) X_{\gamma\alpha}(\dots, -k_\alpha, \dots)}{\sum_{\gamma} \tilde{f}'_{\alpha\gamma} X_{\gamma\alpha}} = \frac{\Delta(\dots, -k_\alpha, \dots)}{\Delta} = \frac{1}{S_{\alpha\alpha}(\dots, -k_\alpha, \dots)}. \quad (17.42)$$

Итак, зная определитель Фредгольма Δ как функцию от импульсов каналов, выступающих в качестве независимых переменных, можно найти все диагональные элементы матрицы S .

Чтобы получить аналогичный результат для недиагональных элементов S -матрицы, необходимо предварительно остановиться на ряде свойств симметрии S -матрицы. При $\alpha \neq \beta$ введем в рассмотрение функцию

$$h_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\gamma} (\tilde{f}'_{\alpha\gamma}) X_{\gamma\beta} k_\alpha^{-1-2l_\alpha}, \quad (17.43)$$

так что

$$S'_{\alpha\beta} = \frac{k_\alpha^{1+2l_\alpha} h_{\alpha\beta}}{\Delta}. \quad (17.44)$$

Соотношение

$$h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} \quad (17.45)$$

выражает симметрию матрицы S . Поскольку матричный элемент $X_{\gamma\beta}$ является четной функцией от k_β , а элемент $\tilde{f}'_{\alpha\gamma}$ — четной функцией от всех k , кроме k_α , то матричный элемент $h_{\alpha\beta}$ — четная функция от k_β . Так как $h_{\alpha\beta}$ равно $h_{\beta\alpha}$, то $h_{\alpha\beta}$ также является четной функцией k_α . Следовательно, пользуясь (17.42), имеем при $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} S_{\alpha\alpha} S'_{\beta\alpha}(\dots, -k_\alpha, \dots) &= S'_{\beta\alpha}, \\ S_{\alpha\alpha} S'_{\alpha\beta}(\dots, -k_\alpha, \dots) &= -S'_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (17.46)$$

Кроме того, при $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ можно вычислить выражение

$$[\tilde{f}'_{\alpha} X \Delta(\dots, -k_\alpha, \dots) - \tilde{f}'(\dots, -k_\alpha, \dots) X(\dots, -k_\alpha, \dots) \Delta]_{\beta\gamma}.$$

Для этого подставим в первое и второе слагаемые вместо Δ выражение

$$1\Delta = X\tilde{f}' = \tilde{f}'X$$

и воспользуемся свойствами четности функций \tilde{f} и X . В результате получим

$$\begin{aligned} []_{\beta\gamma} &= [\tilde{f}'_{\alpha} X(\dots, -k_\alpha, \dots) \tilde{f}'(\dots, -k_\alpha, \dots) X - \\ &\quad - \tilde{f}'(\dots, -k_\alpha, \dots) X(\dots, -k_\alpha, \dots) \tilde{f}'_{\alpha} X]_{\beta\gamma} = \\ &= (\tilde{f}'_{\alpha} X)_{\beta\alpha} (\tilde{f}'_{\alpha} X)_{\alpha\gamma} = h_{\beta\alpha} h_{\alpha\gamma} k_\beta^{1+2l_\beta} k_\alpha^{1+2l_\alpha}. \end{aligned}$$

Согласно (17.39), это означает, что

$$S'_{\beta\alpha}(\dots, -k_\alpha, \dots) S'_{\alpha\gamma} = S'_{\beta\gamma} - S'_{\beta\gamma}(\dots, -k_\alpha, \dots). \quad (17.47)$$

Собирая вместе соотношения (17.42), (17.46) и (17.47), получаем

$$S'P^{(\alpha)}S'(\dots, -k_\alpha, \dots) = P^{(\alpha)} - S'Q^{(\alpha)} + Q^{(\alpha)}S'(\dots, -k_\alpha, \dots), \quad (17.48)$$

где $P^{(\alpha)}$ — оператор проектирования для канала α и $Q^{(\alpha)} = 1 - P^{(\alpha)}$. В этом соотношении уже заложена возможность его обобщения. Обозначим через $P^{(\alpha\beta\dots)}$ оператор проектирования для каналов α, β, \dots . Тогда повторное

использование соотношения (17.48) дает

$$S'P^{(\alpha\beta\dots)}S'(\dots, -k_\alpha, -k_\beta, \dots) = P^{(\alpha\beta\dots)} - \\ - S'Q^{(\alpha\beta\dots)} + Q^{(\alpha\beta\dots)}S'(\dots, -k_\alpha, -k_\beta, \dots). \quad (17.49)$$

Наиболее важный частный случай соотношения (17.49) получается, если его помножить справа и слева на $P^{(\alpha\beta\dots)}$:

$$P^{(\alpha\beta\dots)}S'P^{(\alpha\beta\dots)}S'(\dots, -k_\alpha, -k_\beta, \dots)P^{(\alpha\beta\dots)} = P^{(\alpha\beta\dots)}. \quad (17.50)$$

Из формулы (17.50) видно, что подматрица (α, β, \dots) матрицы S' является обратной по отношению к подматрице (α, β, \dots) матрицы $S'(\dots, -k_\alpha, -k_\beta, \dots)$ ¹⁾. Если все каналы (α, β, \dots) открыты и других открытых каналов нет, то из соотношений (17.18), (17.21а), (17.39) и симметрии S -матрицы следует, что высказанное утверждение эквивалентно условию *унитарности* той части S -матрицы, которая соответствует открытым каналам.

Подставляя теперь (17.42) и (17.44) в соотношение (17.47), полагая $\beta = \gamma$ и пользуясь четностью величин $h_{\alpha\beta}$ как функций от k_α и k_β , находим

$$(h_{\alpha\beta})^2 k_\alpha^{1+2l} \alpha k_\beta^{1+2l} \beta = \Delta_\alpha \Delta_\beta - \Delta \Delta_{\alpha\beta}, \quad (17.51)$$

откуда следует, что

$$(S_{\alpha\beta})^2 = S_{\alpha\alpha} S_{\beta\beta} - \frac{\Delta_{\alpha\beta}}{\Delta}. \quad (17.51a)$$

В (17.51а) мы использовали сокращенные обозначения

$$\Delta_\alpha \equiv \Delta(\dots, -k_\alpha, \dots), \\ \Delta_{\alpha\beta} \equiv \Delta(\dots, -k_\alpha, -k_\beta, \dots) \text{ и т. д.} \quad (17.52)$$

С помощью (17.42) и (17.51а) можно полностью определить все элементы S -матрицы, зная детерминант Δ , заданный в виде функции импульсов каналов, выступающих в качестве независимых переменных.

Ограничения, накладываемые на определитель Фредгольма. Возникает естественный вопрос, можно ли функцию Δ задавать произвольным образом или на вид ее должны быть наложены некоторые ограничения? Покажем, что она не вполне произвольна. Из соотношения (17.47) при $\beta \neq \gamma$ следует, что

$$h_{\beta\gamma}(\dots, -k_\alpha, \dots) \Delta = h_{\beta\gamma} \Delta(\dots, -k_\alpha, \dots) - k_\alpha^{1+2l} \alpha h_{\alpha\beta} h_{\alpha\gamma}.$$

Последнее соотношение возведем в квадрат и подставим в него (17.51). В результате получим выражение для детерминанта Δ с измененными знаками трех импульсов k через детерминанты Δ , у которых изменены знаки у одного или у двух импульсов k :

$$\Delta^2 \Delta_{\alpha\beta\gamma} = \Delta (\Delta_\alpha \Delta_{\beta\gamma} + \Delta_\beta \Delta_{\alpha\gamma} + \Delta_\gamma \Delta_{\alpha\beta}) - 2 \Delta_\alpha \Delta_\beta \Delta_\gamma + \\ + 2 [(\Delta_\alpha \Delta_\beta - \Delta \Delta_{\alpha\beta}) (\Delta_\alpha \Delta_\gamma - \Delta \Delta_{\alpha\gamma}) (\Delta_\beta \Delta_\gamma - \Delta \Delta_{\beta\gamma})]^{1/2}; \quad (17.53)$$

это соотношение оказывается важным только при трех или большем числе каналов. Вместе с соотношениями (17.42) и (17.51) оно эквивалентно соотношению (17.49), а следовательно, и соотношению (17.50).

Остается выяснить вопрос об унитарности S -матрицы, построенной с помощью выражений (17.42) и (17.51а). Если S' -матрица для открытых каналов, построенная указанным выше способом, обладает свойством

$$S'(-K^*) = S'(K), \quad (17.54)$$

то она должна быть унитарной, так как она удовлетворяет соотношению (17.50). Теперь из (17.21а) следует, что таким же свойством должен обладать

¹⁾ Такой вариант условия унитарности впервые сформулировал Пайерлс [680].

и детерминант Δ

$$\Delta(-K^*) = \Delta^*(K). \quad (17.55)$$

С помощью (17.55) из (17.51) получаем

$$[h_{\alpha\beta}(-K^*)]^{2*} = [h_{\alpha\beta}(K)]^2. \quad (17.56)$$

Для справедливости соотношения (17.54) необходимо более сильное условие:

$$h_{\alpha\beta}^*(-K^*) = -h_{\alpha\beta}(K). \quad (17.57)$$

Пусть теперь k_α положительно, а все остальные k — либо положительные, либо положительные мнимые. Тогда из (17.42) следует, что для унитарности S -матрицы необходимо, чтобы определитель Δ удовлетворял неравенству

$$|\Delta_\alpha| = |\Delta(\dots, -k_\alpha, \dots)| \leq |\Delta|. \quad (17.58)$$

Допустим, что k_α и k_β — положительные, а все остальные k — положительные мнимые. В этом случае (17.51) с учетом (17.55) дает

$$(h_{\alpha\beta})^2 k_\alpha^{1+2l} k_\beta^{1+2l} = |\Delta_\alpha|^2 - |\Delta|^2. \quad (17.59)$$

Согласно (17.58), правая часть в (17.59) отрицательна. Поэтому $h_{\alpha\beta}$ являются чисто мнимыми величинами и удовлетворяют условию (17.57). Таким образом, из неравенства (17.58) вытекает условие (17.57), если k_α и k_β положительные, а все остальные k — положительные мнимые. Соотношение (17.57) теперь можно аналитически продолжить на другие, в частности на действительные, значения k (мы имеем в виду все $k \neq k_\alpha, k_\beta$). При этом (17.57) будет справедливо и для всех значений k и подматрица S -матрицы, соответствующая открытым каналам, будет унитарной.

Нам остается рассмотреть последнее свойство функции Δ , заключающееся в том, что если все $\text{Im } k_n \geq 0$, то

$$\lim_{|k_1|, \dots, |k_n| \rightarrow \infty} \Delta = 1. \quad (17.60)$$

Легко видеть, что (17.60) вытекает из определения определителя Фредгольма.

Перечисленные выше ограничения исчерпывают все условия, которым должна удовлетворять функция $\Delta(k_1, \dots, k_n)$. Соотношения (17.53), (17.55) и (17.58) вместе с требованиями регулярности Δ в верхних полуплоскостях являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы из (17.42) и (17.51a) следовали унитарность и симметрия S -матрицы. Соотношение (17.60) гарантирует стремление S -матрицы к единице при стремлении энергии к бесконечности.

С помощью (17.42) и (17.51a) можно построить, вообще говоря, только подматрицу S -матрицы, соответствующую открытым каналам. Другими словами, в общем случае элементы $S_{\alpha\alpha}$, $S_{\alpha\beta}$ и $S_{\beta\beta}$ непосредственно определены, только если k_α и k_β — действительные числа. Чтобы определить S в более широкой области, функцию Δ следовало бы продолжить на область, в которой некоторые k попадают в нижнюю полуплоскость. Однако поведение этой функции в указанной области совершенно неизвестно. Разумеется, если известно, что матрица потенциалов удовлетворяет более сильным условиям, чем рассматриваемые до сих пор, то функция Δ может быть регулярной в более широкой области. В этом случае с помощью соотношений (17.42) и (17.51a) можно определить также элементы S -матрицы, соответствующие закрытым каналам. Возникающая ситуация совершенно аналогична имеющей место в более простой задаче с одним каналом. Если, например, известно, что все элементы матрицы V равны нулю вне некоторой конечной области изменения r , то функция Δ должна быть регулярной при всех конечных значениях k .

4. Связанные состояния

Рассмотрим нерегулярное матричное решение системы уравнений (16.75а), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$H(K, r) = F^{(0)}(K, r) \Delta(K) + \int_0^{\infty} dr' G^+(K; r, r') V(r') H(K, r'), \quad (17.61)$$

где матрица $F^{(0)}$ определяется выражением (17.10) и G^+ — соответствующая расходящимся волнам функция Грина, использованная в (16.73а). Согласно (11.2), имеем

$$G^+(K; r, r') = -e^{-i\pi L} K^{-1} u_L(Kr_{<}) \omega_L^{(+)}(Kr_{>}).$$

Так как на бесконечности решение H содержит только расходящиеся волны, то оно должно быть правым кратным F , т. е.

$$H = FA;$$

матрица F умножена на A справа. Асимптотическое выражение для H при больших r имеет вид

$$H \approx e^{iKr} \left[\Delta \mathbf{1} - e^{-i1/2\pi L} K^{-1} \int_0^{\infty} dr' u_L(Kr') V(r') F(K, r') A \right] = e^{iKr} A.$$

Зная эту асимптотику, можно найти матрицу A . Используя (17.19), получаем

$$A = \Delta \tilde{F}^{-1} = K^L \tilde{X} K^{-L},$$

т. е.

$$H = FK^L \tilde{X} K^{-L}. \quad (17.62)$$

Предположим теперь, что все k либо действительны, либо расположены в верхней полуплоскости, т. е. $\text{Im } k \geq 0$. Пусть k_α расположено в верхней полуплоскости ($\text{Im } k_\alpha > 0$). Тогда из (17.62) следует, что $H_{\alpha\gamma}(K, r)$ на больших расстояниях экспоненциально стремится к нулю. С другой стороны, пусть k_β действительно. В этом случае, согласно (17.61) и (17.62), при больших r получаем

$$H_{\beta\gamma}(K, r) \approx e^{ik_\beta r} X_{\gamma\beta} k_\beta^{l_\beta} k_\gamma^{-l_\gamma} - \left[\int_r^{\infty} dr' g_L(K; r, r') V(r') H(K, r') \right]_{\beta\gamma}, \quad (17.63)$$

где g_L определено формулой (12.135).

Предположим далее, что для некоторых значений $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_n$ волновых чисел каналов k_α , которые либо положительны, либо расположены в первом квадранте, определитель Фредгольма Δ равен нулю:

$$\Delta(\mathcal{K}) = 0, \quad \text{Re } \mathcal{K}_\alpha \geq 0, \quad \text{Im } \mathcal{K}_\alpha \geq 0, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (17.64)$$

Тогда на основании (17.61) можно заключить, что функция $H(\mathcal{K}, r)$ регулярна в начале координат. Кроме того, из уравнения Шредингера обычным способом легко найти вронсиан H и H^* :

$$W[H(\mathcal{K}, r), H^*(\mathcal{K}, r)] = 2i \int_0^r dr' \tilde{H}(\mathcal{K}, r') \text{Im } \mathcal{K}^2 H^*(\mathcal{K}, r'). \quad (17.65)$$

Вместе с тем вронсиан от F и F^* в пределе больших r легко вычислить, обращаясь к граничному условию. Если $\text{Im } k_\alpha > 0$ при всех α , то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} W(F, F^*) = -2iK\mathcal{K}, \quad (17.66)$$

где \mathcal{R} — проекционная матрица на все те каналы, для которых $\text{Im } k_\alpha = 0$. После подстановки (17.62) и (17.66) в (17.65) получаем в пределе $r \rightarrow \infty$:

$$X \mathcal{R} \mathcal{K}^{2L+1} \tilde{X}^* = - \int_0^\infty dr \mathcal{K}^L \tilde{H} \text{Im } \mathcal{K}^2 H^* \mathcal{K}^{*L}.$$

Левая часть последнего равенства неотрицательно определена, тогда как его правая часть неположительно определена. Следовательно, выражения, стоящие в обеих сторонах равенства, должны быть равны нулю. Из равенства нулю правой части мы заключаем, что при каждом β либо $\text{Im } \mathcal{K}_\beta^2 = 0$, либо $H_{\beta\alpha}(\mathcal{K}, r) = 0$ при всех α и всех r . Согласно (17.62), это означает, что если $\text{Im } \mathcal{K}_\beta^2 \neq 0$, то при всех α должно быть $X_{\alpha\beta} = 0$. Равенство нулю выражения в левой части означает, что если $\text{Im } \mathcal{K}_\beta = 0$, т. е. если \mathcal{K}_β положительно, то $X_{\alpha\beta} = 0$ при всех α . Другими словами, из (17.63) следует, что

$$X_{\alpha\beta} = 0 \quad (17.67)$$

при всех α и всех β , кроме тех значений β , для которых \mathcal{K}_β — положительная мнимая величина.

Рассмотрим теперь формулу (17.63). Вследствие (17.67) в H исчезают все те члены, которые не обращались бы в нуль на больших расстояниях, когда одно из \mathcal{K}_β в (17.64) становится действительным. Следовательно, выполнение условия (17.64) означает не только то, что при $K = \mathcal{K}$ функция H регулярна в начале координат, но также и то, что на бесконечности она стремится к нулю и притом достаточно быстро, чтобы быть квадратично интегрируемой. Таким образом, мы имеем *связанное состояние*. Если ни одно из \mathcal{K}_β не является действительным числом, то это обычное связанное состояние и его волновая функция асимптотически экспоненциально убывает. Если какое либо из \mathcal{K}_β действительно, то мы имеем *связанное состояние, утопленное в непрерывном спектре*. Из формулы (17.63) видно, что в последнем случае волновая функция убывает в общем случае неэкспоненциально. Она может убывать как некоторая обратная степень r и определяется видом потенциала.

Определитель Фредгольма Δ не может обращаться в нуль при значениях энергии, для которых все каналы открыты. В этом нетрудно убедиться, рассуждая следующим образом. Когда все k действительны, полная S -матрица (17.15) унитарна. Поэтому из соотношения

$$e^{i\pi L} K^{-1/2} \mathcal{F}_- = S K^{-1/2} \mathcal{F}_+$$

видно, что если $\mathcal{F}_+ a = 0$, то $\mathcal{F}_- a = 0$. Следовательно, если $\det \mathcal{F} = 0$ для всех действительных k и, таким образом, существует вектор a , для которого $\mathcal{F}_+ a = 0$, то из (17.13) вытекает, что $\Phi a \equiv 0$ при всех r . Но это противоречит интегральному уравнению (17.8).

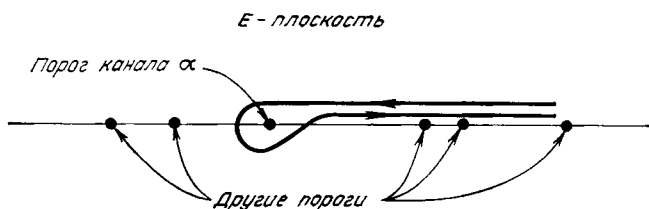
Может показаться неожиданным то обстоятельство, что в отличие от случая одного канала мы не можем теперь сделать вывода о том, что для связанного состояния необходимо, чтобы все \mathcal{K}^2 были действительными. То, что это не может быть общим требованием, непосредственно вытекает из рассмотрения частного случая, когда канал γ полностью не связан с остальными. Тогда для связанного состояния остальных каналов мы можем придать k_γ любое желаемое значение, причем связанное состояние сохранится. Однако, для того чтобы условие (17.64) характеризовало появление связанного состояния, по крайней мере *одна* из величин \mathcal{K} должна быть положительной чисто мнимой величиной. В противном случае *все* элементы матрицы X будут равны нулю, а следовательно, будут равны нулю и все элементы матрицы H . Если импульсы \mathcal{K} связаны законом сохранения энергии (17.35), то этого достаточно, чтобы все другие \mathcal{K} были также либо действительными, либо мнимыми, а энергия — действительной.

Обобщение теоремы Левинсона на случай многих каналов производится непосредственно. Вообще эта теорема справедлива только для суммы δ собственных фазовых сдвигов, как в (15.145). Если нужно, чтобы δ изменялось непрерывно, то среди связанных состояний появляются связанные состояния, утопленные в непрерывном спектре.

5. Риманова поверхность многоканальной S-матрицы

В предыдущих рассуждениях импульсы каналов рассматривались как независимые переменные. Предположим теперь, что силы взаимодействия между частицами самые «хорошие», так что решения уравнений (17.6) регулярны в максимально возможной области. Другими словами, будем считать, что все элементы S-матрицы (17.14) являются мероморфными функциями по всем импульсам каналов.

В действительности нас интересуют только функции, которые получаются, если каждый из импульсов каналов выразить через энергию согласно (17.35).



Ф и г. 17.1. Путь с верхнего на нижний берег разреза, соответствующего каналу α

Тогда любой элемент S-матрицы становится функцией от E ; эти функции имеют алгебраическую точку ветвления второго порядка при пороговом значении энергии $E = \Delta E_\alpha$ канала α , если только данный матричный элемент случайно не оказывается четной функцией k_α . Если все каналы взаимосвязаны, то любой элемент S-матрицы является, вообще говоря, функцией от всех k и, следовательно, обладает точками ветвления при каждом пороговом значении энергии. Вряд ли стоит говорить, что в многоканальном случае риманова поверхность имеет очень сложную структуру.

Вся «физика» связана с верхними берегами разрезов, проходящих вдоль действительной оси, начиная от каждой точки ветвления, соответствующей порогу, и до $+\infty$. Предположим, что мы движемся от некоторого действительного значения E влево, обходим точку ветвления, соответствующую порогу канала α , и движемся обратно, вправо, к точке E . Если при этом контур не захватывает других точек ветвления, соответствующих другим порогам (фиг. 17.1), то в результате такого движения мы попадаем на нижний берег разреза, начинающегося от точки ветвления канала α , но остаемся на верхних берегах всех других разрезов. Чтобы попасть на нижний берег не одного, а нескольких разрезов, контур должен захватывать точки ветвления, соответствующие этим разрезам; импульсы соответствующих каналов оказываются отрицательными. Когда мы проходим порог канала α (при уменьшении энергии), импульс k_α должен стать положительным, так что граничное условие, которое выше порога исключает сходящиеся сферические волны (во всех каналах, кроме входного), ниже порога обеспечивает отсутствие экспоненциально возрастающих членов. Поэтому «физический лист» римановой поверхности определяется требованием того, чтобы каждый из импульсов каналов имел положительную мнимую часть, а физическая граница этого листа — требованием, чтобы действительные импульсы каналов были положительными, а мнимые — положительными мнимыми.

В качестве примера, поясняющего значение нефизической границы физического листа, рассмотрим еще раз построение элементов S-матрицы для откры-

тых каналов с использованием определителя Фредгольма Δ . Соотношения (17.42) и (17.51a) после подстановки в них (17.35) относятся к значениям Δ , которые берутся на нижних берегах разрезов. Из (17.53) следует, что значения Δ на нижних берегах *трех* каких-либо разрезов определяются значениями Δ на нижних берегах одного и двух разрезов.

Как мы уже видели, нефизические листы римановой поверхности, на которые можно перейти посредством аналитического продолжения за различные разрезы, имеют важное значение для описания резонансов. Конечно, на нефизических листах возможны все виды сингулярностей, если только относительно сил взаимодействия не делается особых предположений, которые не определяются физическими соображениями. Тем не менее для простоты мы пренебрегаем такими усложнениями. К тому же следует сказать, что пока мы ограничиваемся рассмотрением упрощенной задачи с *конечным* числом каналов, поведение S -матрицы на других листах римановой поверхности вследствие свойства унитарности не может быть намного хуже ее поведения на физическом листе. Это непосредственно видно из соотношения (17.42). Если потребовать, чтобы диагональные матрицы были регулярными всюду на физическом листе (за исключением полюсов, соответствующих связанным состояниям), то определитель Δ не должен иметь сингулярностей на других листах. В результате из соотношения (17.42) следует, что диагональные элементы S -матрицы на других листах должны быть мероморфными функциями. Единственными сингулярностями их могут быть полюсы, соответствующие нулям определителя Δ . Из (17.51a) вытекает, что недиагональные элементы могут иметь, кроме того, точки ветвления.

Униформизация. Для параметризации и для построения феноменологических моделей очень удобно ввести вместо энергии другую переменную, относительно которой S -матрица будет *однозначной функцией*. Такая процедура называется *униформизацией*. Униформизация позволяет, так сказать, «развернуть» риманову поверхность, отобразив ее на комплексную плоскость. В одноканальном случае униформизация тривиальна. Простейшей переменной, с помощью которой можно осуществить параметризацию в этом случае, является импульс k . Связь

$$E = \frac{k^2}{2\mu}$$

отображает оба листа поверхности E на одну комплексную плоскость k .

В случае двух каналов униформизация тоже все еще сравнительно проста; ее можно провести следующим образом. Прежде всего рассмотрим элементы S -матрицы только как функции k_1 , воспользовавшись соотношениями

$$k_2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{1/2} (k_1^2 - \Delta^2)^{1/2}, \quad \Delta^2 \equiv 2\mu_1 (\Delta_2 - \Delta_1). \quad (17.68)$$

После подстановки выражения для k_2 по формуле (17.68) наша аналитическая функция от k_1 и k_2 , рассматриваемая теперь как функция от k_1 , будет иметь две точки ветвления при $k_1 = \pm \Delta$. Преобразование

$$u = \frac{k_1 - \Delta}{k_1 + \Delta}$$

переводит одну точку ветвления в начало координат, а другую в бесконечность. В результате имеем

$$k_1 = \Delta \frac{1+u}{1-u}, \quad k_2 = 2\Delta \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{1/2} \frac{u^{1/2}}{1-u}.$$

Новую риманову поверхность «развернем», положив $u = t^2$:

$$k_1 = \Delta \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad k_2 = 2\Delta \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{1/2} \frac{t}{1-t^2}. \quad (17.69)$$

Более симметричную формулу можно получить, если положить

$$z = \frac{1-t}{1+t};$$

при этом

$$\mu_1^{1/2}k_1 + \mu_2^{1/2}k_2 = \Delta\mu_2^{1/2}z, \quad \mu_1^{1/2}k_1 - \mu_2^{1/2}k_2 = \Delta\mu_2^{1/2}z^{-1}. \quad (17.69a)$$

Преобразование (17.69) отображает риманову энергетическую поверхность на комплексную плоскость t , и всюду аналитическая функция двух переменных k_1 и k_2 будет всюду аналитической функцией переменной t . Отображение проиллюстрировано на фиг. 17.2.

В случае трех или более каналов все становится намного сложнее. Основную трудность, возникающую при этом в случае трехканальной задачи, можно понять из фиг. 17.3. На фиг. 17.3 схематически проиллюстрирована только небольшая часть соответствующего общего преобразования, аналогичного приведенному на фиг. 17.2; изображены отдельные точки ветвления и указано, являются ли соответствующие им волновые числа каналов k_1 , k_2 , k_3 чисто действительными или чисто мнимыми, а также каковы знаки при этих волновых числах. Последнее становится понятным, если принять во внимание соотношения, существующие между волновыми числами. Обозначим через Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 пороговые значения энергии и предположим, что

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3;$$

пусть далее

$$z_\alpha = k_\alpha (2\mu_\alpha)^{-1/2}.$$

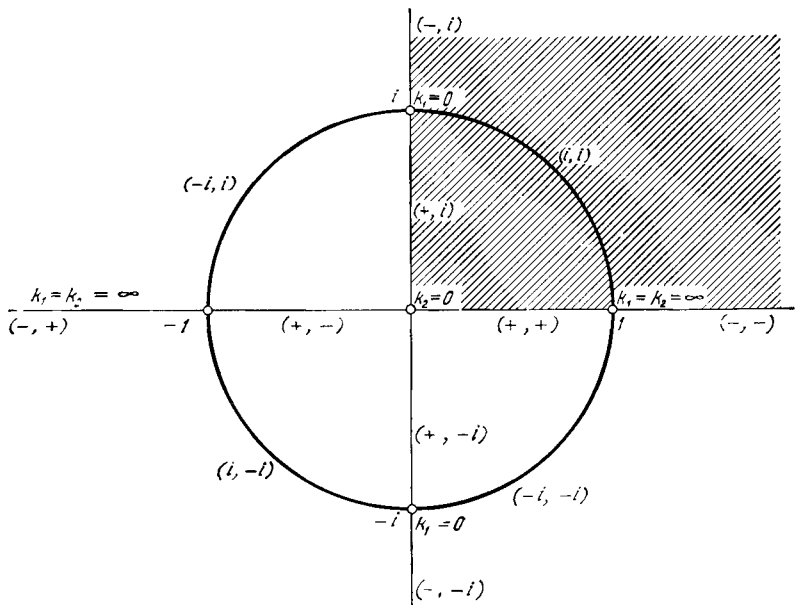
Тогда

$$\begin{aligned} z_1 &= [z_2^2 + (\Delta_2 - \Delta_1)]^{1/2} = [z_3^2 + (\Delta_3 - \Delta_1)]^{1/2}, \\ z_2 &= [z_1^2 - (\Delta_2 - \Delta_1)]^{1/2} = [z_3^2 + (\Delta_3 - \Delta_2)]^{1/2}, \\ z_3 &= [z_1^2 - (\Delta_3 - \Delta_1)]^{1/2} = [z_2^2 - (\Delta_3 - \Delta_2)]^{1/2}. \end{aligned}$$

При рассмотрении фиг. 17.3 необходимо иметь в виду, что две линии (—, —, —) следует соединить друг с другом; точно так же нужно поступить с парой линий (—, —, —i). Ясно, что такие соединения нельзя сделать на поверхности без самопересечений. Вместе с тем их легко сделать на поверхности тора. Отсюда ясно, что риманову поверхность трехканальной S-матрицы невозможно топологически отобразить на плоскость (или на сферу), но ее можно отобразить на тор. Риманову поверхность такого типа называют поверхностью, имеющей жанр, равный 1. Жанр римановой поверхности n -канальной S-матрицы равен $(n/2) - 1$ или $[(n+1)/2] - 1$, в зависимости от того, четное или нечетное число n [790].

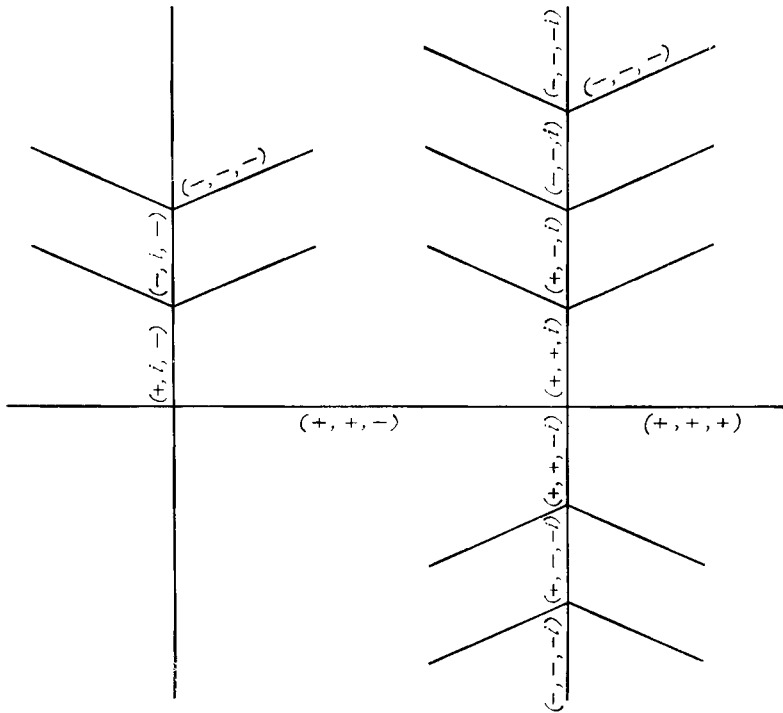
Движение резонансных полюсов. Посмотрим теперь, как движется резонансный полюс S-матрицы при непрерывном изменении гамильтониана. Прежде всего необходимо понять, что вследствие выполнения условия симметрии (17.21) S-матрица должна иметь несколько полюсов, расположенных симметрично относительно мнимых осей всех k , если только она вообще имеет полюсы, не находящиеся на мнимых осях k .

Рассмотрим трехканальную задачу (все угловые моменты для которой равны нулю). Будем считать, что канал 1 открыт, канал 3 закрыт и канал 2 открыт, но мы находимся вблизи порога этого канала. Допустим, что канал 3 не связан с каналами 1, 2 и что в нем имеется связанное состояние. Тогда S-матрица должна иметь полюс, расположенный на физическом листе канала 3, т. е. на положительной мнимой полуоси k_3 , и этот полюс имеется как на верхних, так и на нижних берегах разрезом, начинающихся от порогов



Ф и г. 17.2. Комплексная t -плоскость, на которую отображается риманова поверхность двухканальной S -матрицы.

В круглых скобках указано, каковы k_1 и k_2 : положительные, отрицательные, положительные мнимые или отрицательные мнимые соответственно. Заштрихованная площадь — образ физической области. Взято из работы [276], в которой имеется еще несколько примеров такого типа.



Ф и г. 17.3. Локальная униформизация римановой поверхности для трех каналов.

каналов 1 и 2. При увеличении потенциала $-V_{33}$ оба полюса, находящиеся на верхнем и на нижнем берегах разреза канала 2, движутся, сливаются при $k_2 = 0$, а затем расходятся; один из них попадает в верхнюю, а второй — в нижнюю полуплоскость (гл. 12, § 1, п. 4), т. е. соответственно на физический и нефизический листы.

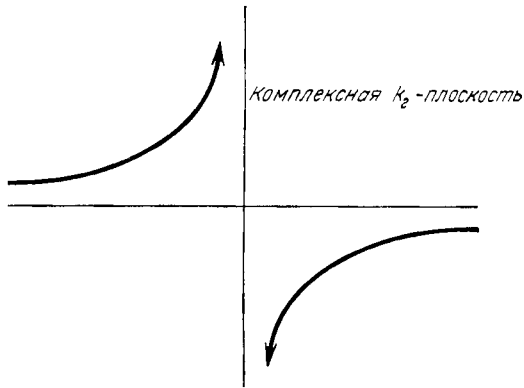
Пусть теперь имеется малая связь с каналом 3. Тогда при *положительном* k_1 (т. е. когда k_1 находится на верхнем берегу разреза канала 1) полюс, расположенный в верхней полуплоскости k_3 , должен двигаться *влево*, так как если

$$\frac{k_3}{(2\mu_3)^{1/2}} = ia - b, \quad \text{где } a > 0, b > 0 \text{ и } b \ll a,$$

то

$$\frac{k_2}{(2\mu_2)^{1/2}} = \pm (\Delta_{23} - a^2 - 2iab)^{1/2}. \quad (17.70)$$

Таким образом, полюс, расположенный вблизи верхнего берега разреза канала 2, должен находиться в нижней полуплоскости (т. е. на втором



Ф и г. 17.4. Движение полюса вблизи порога.

листе), как это и должно быть. Допустим, что $-V_{33}$ увеличивается, так что полюсы движутся ниже порога канала 2. При этом

$$\frac{k_2}{(2\mu_2)^{1/2}} = \pm i (a^2 - \Delta_{23} + 2iab)^{1/2}; \quad (17.71)$$

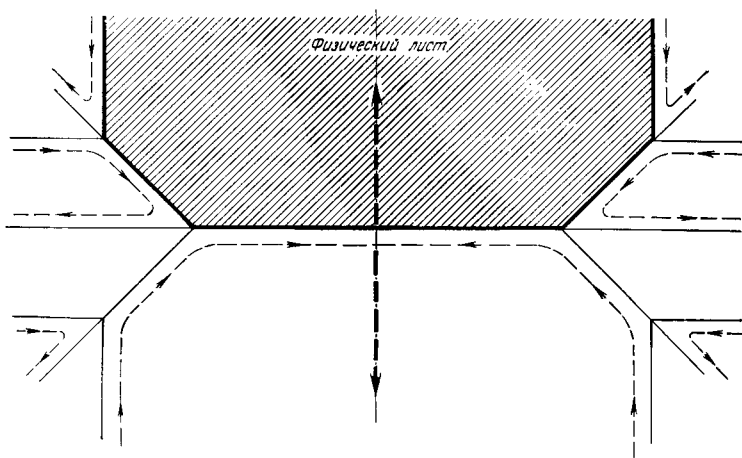
путь от точки (17.70) к точке (17.71) показан на фиг. 17.4. Действительно, если записать k_2 в виде

$$\frac{k_2^2}{2\mu_2} = \left| \frac{k_2^2}{2\mu_2} \right| e^{i\varphi},$$

то φ будет изменяться от $-\varepsilon$ до $-\pi + \varepsilon$, когда $\Delta_{23} - a^2$ меняет знак. Поэтому $^{1/2}\varphi$ изменяться от $^{-1/2}\varepsilon$ до $^{-1/2}\pi + ^{1/2}\varepsilon$.

Итак, полюс, «ответственный» за резонанс между порогами каналов 2 и 3, т. е. полюс, расположенный вблизи верхних берегов обоих разрезов, остается на нефизическом листе поверхности \bar{E} . В то же самое время имеется другой полюс, расположенный вблизи верхнего берега разреза канала 1 (на втором листе канала 1), который расположен вблизи *нижнего* берега разреза канала 2, на *первом* листе канала 2. Когда потенциал увеличивается, этот полюс также попадает в область выше порога канала 2. Он остается там и вызывает появление резонанса, расположенного в области между порогами

каналов 1 и 2. Совершенно ясно, что приведенное рассуждение легко обобщить. При этом вопреки ожиданию оказывается, что когда потенциал изменяется непрерывно и резонанс меняет свое положение, не всегда один и тот же полюс S



Ф и г. 17.5. Движение резонансных полюсов на локально униформизованной энергетической римановой поверхности при непрерывном возрастании константы взаимодействия.

«ответствен» за данный резонанс. Всякий раз, когда мы проходим через порог, в этой роли начинает выступать новый полюс, а прежний уходит далеко от физического листа. На фиг. 17.5 показана ситуация, возникающая в случае локальной униформизации.

§ 2. ПОРОГОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

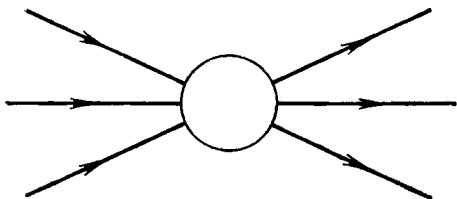
1. Пороговые точки ветвления

В § 1, п. 5 мы видели, каким образом на порогах новых реакций возникают точки ветвления S -матрицы. Однако соответствующий анализ относился к формулировке многоканальной задачи, определенным способом урезанной, — именно эта формулировка подробно рассматривалась выше. Чтобы углубить наши знания о пороговых явлениях, рассмотрим их снова с двух различных точек зрения. Оба подхода будут весьма существенно использовать унитарность. Первый из них будет касаться главным образом математических вопросов положения точки ветвления в зависимости от энергии; второй — связан с экспериментально *наблюдаемыми* эффектами, имеющими место на порогах каналов.

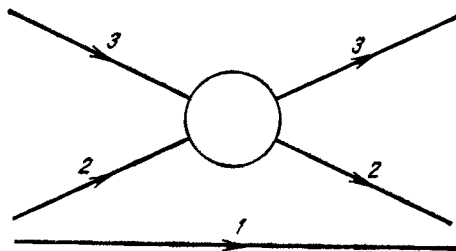
Многоканальное описание процессов рассеяния, в которых участвует более двух частиц, является полным лишь в том случае, когда никак не ограничено число возможных конечных состояний. Другими словами, для полного описания процесса следует в число каналов включить не только те, которые определяются дискретными внутренними возбуждениями фрагментов, но и те, в которых фрагменты *диссоциируют*. Поэтому если имеется более двух конечных частиц, то энергетическое распределение непрерывно и мы сталкиваемся, так сказать, с *континуумом каналов*. Если в описание, использующее единый оператор рассеяния, включаются непрерывные каналы, то такое описание будет полным и будет включать процессы перестройки. Конечно, последние в этой формулировке замаскированы и не выделяются столь просто, чтобы с ними можно было работать с помощью сколько-нибудь удобных мето-

дов. Тем не менее все же удастся проанализировать некоторые из проявлений подобных процессов перестройки.

Здесь уместно отметить, что матричная формулировка, приведенная в § 1, п. 1, не ограничена случаем дискретных каналов. Формально мы можем ввести в нее и непрерывные каналы, включая в совокупность матричных элементов взаимодействия (16.74), такие, которые берутся между состояниями рассеяния. Тогда в (16.75) будет входить *интеграл* по энергиям ϵ_α . Мы по-прежнему можем использовать матричные обозначения [как в (16.75a)], но следует помнить, что матрицы частично станут интегральными операторами (т. е. «непрерывными» матрицами). Однако это покупается дорогой ценой. Так, в § 4, п. 2 мы увидим, что учет полной области изменения всех промежуточных



Фиг. 17.6. Диаграмма, описывающая произвольный процесс трехчастичного рассеяния.



Фиг. 17.7. Несвязная диаграмма.

энергий выводит ядро интегрального уравнения, заменяющего (16.75), из класса ядер Гильберта — Шмидта. К счастью, в рассматриваемом пункте это не должно доставлять поводов для беспокойства, поскольку при приводимых ниже аргументах используются лишь открытые «непрерывные» каналы, так что возникающий энергетический интеграл будет всегда конечным.

Предположим теперь, что S -матрица уже вычислена. Свойство ее унитарности проще всего сформулировать с помощью K -матрицы, определяемой соотношением (7.59):

$$S = (1 + iK)(1 - iK)^{-1}.$$

Следовательно, мы должны вычислить оператор, обратный *интегральному оператору* $1 - iK$. Далее, K -матрица, так же как и S -матрица, имеет диагональную часть, описывающую те процессы, при которых некоторая частица (или частицы) не участвует во взаимодействии. Чтобы уяснить это обстоятельство, рассмотрим в качестве примера задачу трех тел.

Произвольный элемент S -матрицы описывает процесс, который схематически можно изобразить диаграммой, приведенной на фиг. 17.6. Она соответствует тому, что три частицы встречаются, взаимодействуют, а затем разлетаются. Среди этих процессов имеются такие, в которых одна из частиц, скажем частица 1, вообще не взаимодействует. Она просто свободно движется, в то время как частицы 2 и 3 взаимодействуют между собой. Если полное взаимодействие описывается трехчастичными силами, то соответствующая часть S -матрицы пренебрежимо мала. Однако на самом деле по крайней мере некоторые (а возможно, и все) межчастичные силы являются *парными*. Поэтому гамильтониан будет содержать члены, коммутирующие с одночастичными операторами. В результате «несвязные» диаграммы типа приведенной на фиг. 17.7 вносят в S -матрицу вклад, включающий δ -функцию от энергий невзаимодействующих фрагментов.

Предположим теперь, что для S -матрицы принята некоторая определенная параметризация, т. е. выбраны переменные, характеризующие «свободные» состояния, и взяты соответствующие матричные элементы оператора S —

собственно, это и позволяет нам говорить об S-матрице. Параметризацию можно провести множеством способов, но она *обязательно* включает непрерывные переменные типа характеристик распределения внутренней энергии между тремя частицами. Пусть параметризация выбрана так, что внутренняя энергия задается путем фиксирования энергии частицы 1. Если при этом задать полную энергию, то будет фиксирована и энергия системы (2,3). Тогда несвязная диаграмма фиг. 17.7 даст в K-матрицу вклад, содержащий множитель $\delta(E_1 - E'_1)$. Так как несвязная часть диаграммы описывает K-матрицу системы (2,3), то именно она должна выступать в качестве коэффициента пропорциональности.

Следовательно, структура интегрального оператора $1 - iK$ имеет вид

$$1 - iK = \delta(x - x') g(E, x) - M(E, x, x') \equiv F(E; x, x'). \quad (17.72)$$

Здесь x — энергия частицы 1 (определенная так, что непрерывный спектр начинается в точке $x = 0$), g — K-матрица системы (2,3), E — полная энергия, а M не содержит δ -образных вкладов по переменной x . (В действительности мы можем считать, что M является непрерывной функцией x .) Вообще говоря, функции g и M являются матрицами с невыписанными индексами.

Будем рассматривать оператор, обратный интегральному оператору типа $F(E; x, x')$ как функцию E . При некоторых значениях этой переменной, а именно в точках, где $g(E, 0)$ обращается в нуль [в более общем смысле, где $g^{-1}(E, 0)$ имеет полюсы], он будет иметь, вообще говоря, *точки ветвления*. «Естественные» положения разрывов описываются уравнением $g^{-1}(E, x) = \infty$ или

$$\det g(E, x) = 0, \quad x \geq 0, \quad (17.73)$$

как было показано в гл. 9, § 4. Выясним, что это означает.

Когда $x = 0$, система (2,3) приобретает всю энергию, т. е. E является *ее* энергией. Если в этой точке функция g^{-1} имеет полюс, то он же будет содержаться и в S-матрице изолированной системы (2,3). Следовательно, эта система имеет *связанное состояние*. (Мы считаем, что силы обладают достаточно хорошим поведением, так что все необходимые аналитические продолжения оправданы.) Таким образом, для выбранной параметризации при энергиях, равных энергиям связанных состояний системы (2,3), трехчастичная S-матрица имеет точки ветвления. Конечно, они являются как раз порогами новых каналов, которые определяются возбуждениями системы (2,3). Иными словами, у системы (2,3), переведенной на определенный возбужденный уровень, имеются минимальные значения энергии, но еще из-за относительного движения 1 и (2,3) остается и некоторая кинетическая энергия. Это и описывается несвязной диаграммой фиг. 17.7 — она ответственна за точки ветвления, возникающие при энергиях, равных энергиям связанных состояний системы (2,3).

Кроме того, имеются две другие несвязные диаграммы: в одной из них свободной является частица 2, в другой — частица 3. Однако для *принятой параметризации* они не приводят к точкам ветвления. Причина этого заключается в том, что если S-матрицу рассматривать как функцию переменных E и E_1 , то указанные диаграммы не будут содержать диагональных членов (если энергия частицы 2 фиксирована, то это еще не определяет энергию частицы 1). Поэтому можно сделать вывод, что ответ на вопрос, приводит ли или нет определенная диаграмма к точке ветвления S-матрицы, зависит от используемых переменных. Он определяется тем, какие из этих переменных *остаются фиксированными*, когда изменяется полная энергия. Диаграмма фиг. 17.7 ответственна за точку ветвления S-матрицы как функции E , когда *постоянным* считается E_1 . Но если при изменении E постоянным остается E_2 , а E_1 меняется, то подобные сингулярности не возникают.

Очевидно, что приведенные аргументы сохраняют свою силу и при обобщении задачи трех тел.

Нам осталось выяснить детали, связанные с точками ветвления оператора, обратного оператору F , который определяется соотношением (17.72). По этому вопросу мы отсылаем читателя к гл. 9, § 4.

На самом деле функция g зависит лишь от внутренней энергии E_{23} системы (2,3)¹⁾; в системе центра масс она связана с полной энергией E и энергией x частицы 1 линейным соотношением

$$g = g(E_{23}),$$

где

$$E_{23} = E - \frac{x}{\alpha}, \quad \alpha = \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Пусть в точке $E_{23} = E_B$ функция g^{-1} имеет простой полюс:

$$g^{-1} = \frac{R(E)}{x - (E - E_B)\alpha}. \quad (17.74)$$

Если принять во внимание другие переменные (угловой момент и т. д.), то мы увидим, что величина $R(E)$, рассматриваемая как матрица, вообще говоря, факторизуется [см. (15.144)]:

$$R_{ij} = R_i^{(L)} K_j^{(R)}. \quad (17.75)$$

Тогда формула (9.97a) для скачка функции $G \equiv F^{-1}$ может быть расписана более подробно

$$\Delta G(E; x, x')_{ij} = 2\pi i \left[\sum_k N_{\pm}^{(L)}(E; x, x_0)_{ik} R_k^{(L)}(E) \right] \times \\ \times \left[\sum_l R_l^{(R)}(E) N_{\mp}^{(R)}(E; x_0, x')_{lj} \right], \quad x_0 = \alpha(E - E_B). \quad (17.76)$$

Это равенство показывает, что условие (17.73) действительно определяет разрез. К тому же (17.76) обобщает результат, связанный с факторизацией вычета в полюсе.

Не следует забывать, что величина F^{-1} , рассматриваемая как функция переменной E , имеет не только разрезы, но и полюсы. Некоторые из них проявляются в виде δ -функций в скачке на разрезе и непосредственно входят в первые три члена формулы (9.79б). Эти полюсы явным образом зависят от x и x' . Но, кроме того, G имеет полюсы, не зависящие от этих переменных, — они соответствуют связанным состояниям трехчастичной системы и возникают при таких значениях E , когда детерминант Фредгольма обращается в нуль.

Эти соображения очевидным образом обобщаются на задачу, в которой имеется более трех частиц. Следующий отсюда основной вывод заключается в том, что большей частью унитарность приводит к наличию у элемента открытого канала n -частичной S -матрицы точек ветвления, которые соответствуют связанным состояниям систем менее чем из n -частиц. Ответ на вопрос о том, какие из этих связанных состояний в действительности приводят к точкам ветвления, зависит, помимо всего прочего, от принятой параметризации. Разрезы по E возникают лишь в том случае, когда при переменной полной энергии фиксирована энергия замкнутой подсистемы — к разрезам приводят связанные состояния подсистемы. Чтобы точки ветвления (разрезы) возникали от *всех* связанных состояний соответствующих подсистем, необходимо выбрать такую параметризацию S -матрицы, при которой в качестве переменных используются все парциальные энергии, т. е. энергии, вычисленные в собственных системах центра масс подсистем.

¹⁾ Для дальнейших рассуждений это обстоятельство несущественно, но оно позволяет несколько упростить их.

2. Физические пороговые явления; общие положения

Рассмотрим процесс неупругого рассеяния (иными словами, реакцию), протекающий при низкой кинетической энергии налетающих фрагментов, но при высокой внутренней энергии. Тогда возможна экзоэргическая ¹⁾ реакция, в которой кинетическая энергия образующихся фрагментов выше, чем у исходных. Если при вычислении соответствующего сечения используются достаточно хорошие волновые функции, то, согласно (16.65), оно будет содержать множитель k_α^{-1} , где k_α — относительный импульс двух начальных фрагментов. Учтем, что падающий поток является медленными, поэтому сечение экзоэргической реакции на ее пороге должно становиться бесконечно большим.

Рассмотрим теперь эндоэргическую реакцию. Благодаря множителю, характеризующему поток, зависимость ее сечения от конечного импульса k_β линейная. Если через Δ_β обозначить энергию внутреннего возбуждения, то этот импульс будет связан с энергией E падающих частиц соотношением (17.35):

$$k_\beta = [2\mu_\beta (E - \Delta_\beta)]^{1/2}.$$

Поэтому при пороговой энергии $E_T = \Delta_\beta$ его производная по E будет равна *бесконечности*. По этой причине эндоэргическое сечение, рассматриваемое как функция энергии падающих частиц, в начальной точке, т. е. на пороге реакции, будет иметь *бесконечно быстрый подъем*.

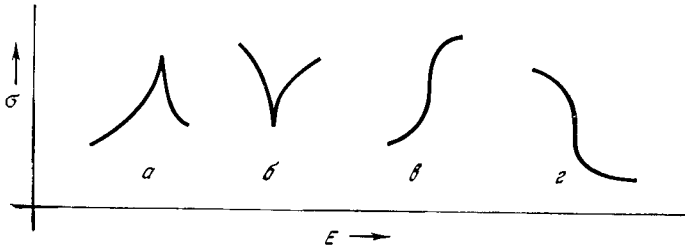
Бесконечный подъем сечения нового канала, который открывается при энергии E_T , с необходимостью должен оказывать влияние на энергетическую зависимость сечений «старых» реакций и упругого рассеяния. Ведь в конце концов все они «питаются» от одного и того же падающего потока. Если новое сечение начинает уменьшаться на пороге E_T имеющийся в распоряжении старых каналов поток в такой степени, что производная по энергии бесконечно велика, то следует ожидать уменьшения старых сечений, и тангенс угла наклона будет также бесконечным. Если ниже порога E_T открыт лишь один канал, то из приведенных выше аргументов совершенно строго следует, что при энергии E_T старое сечение будет иметь *бесконечно большой отрицательный наклон*. Однако если открыто несколько каналов, то может случиться так, что некоторые из сечений будут иметь положительный бесконечный наклон, а другие — отрицательный.

Данная аргументация, будучи основана исключительно на сохранении потока, является по существу классической. При квантовомеханическом подходе мы должны ожидать, что близость порога нового процесса скажется уже тогда, когда переходы в новый канал энергетически еще невозможны. Это происходит потому, что могут иметь место «виртуальные» переходы, влияние которых тем сильнее, чем меньше они нарушают сохранение энергии. Поэтому не следует удивляться, если на пороге наклон старых сечений как функций энергии будет бесконечен при приближении к порогу и сверху, и снизу. Таким образом, сечения могут обладать поведением типа «а», «б», «в» или «г» (фиг. 17.8). Первые два случая соответствуют появлению *пиков*, остальные — *сглаженных ступенек*.

Если сечение «нового» канала рассматривать на его собственном пороге, то вклад в это сечение будет давать по существу только s -волна. В зависимости от спинов образующихся частиц эта s -волна может появляться в виде составляющей некоторой совокупности полных угловых моментов, но она имеет фиксированную четность, которая равна произведению внутренних четностей

¹⁾ Термины *экзоэргический* и *эндоэргический* являются аналогами химических терминов *экзотермический* и *эндотермический*. Первый означает, что образующиеся фрагменты имеют более высокую кинетическую энергию, чем исходные; второй, наоборот, — меньшую.

новых частиц. Тогда благодаря законам сохранения момента и четности (если они применимы к данной реакции) новый поток будут питать не все, а лишь вполне определенные состояния из падающего пучка; они в свою очередь питают только часть конечных состояний, возникающих в старых каналах. Иными словами, пороговые аномалии (пики или сглаженные ступеньки) появляются явно лишь в тех парциальных сечениях, которые соответствуют моменту и четности новой s -волны. Следовательно, если известны четности



Фиг. 17.8. Пороговые аномалии: пики и сглаженные ступеньки.

старых фрагментов, то экспериментальный анализ состояний, для которых на новом пороге возникают аномалии, позволяет сделать заключение о четностях новых фрагментов. Таково одно из практических применений, к которому может привести изучение указанных пиков.

3. Детальный характер пороговых аномалий

С математической точки зрения пороговые аномалии обусловлены тем, что на порогах возникают точки ветвления S -матрицы (они обсуждались в п. 1). Однако здесь мы хотим, чтобы наш математический анализ более непосредственно основывался на физической аргументации, приведенной в предыдущем пункте.

Математическим выражением сохранения потока в реакции служит *унитарность* S -матрицы, так что качественные аргументы из п. 2, относящиеся к пороговым явлениям, следует перевести на язык количественных утверждений, существенно использующих это свойство. Условие унитарности и особенности поведения каждого элемента S -матрицы на его собственном пороге удобнее всего сформулировать на языке матрицы \mathfrak{M}^j , которая определяется равенством (15.121):

$$S_{\pm}^j = 1 - K^{L+1/2} \mathfrak{M}^j K^{L+1/2} \quad (17.77)$$

(заметим, что S_{\pm}^j относится лишь к *открытым* каналам). Ясно, что в этом случае число k должно быть заменено на (диагональную) матрицу K волновых чисел канала. Тогда условие унитарности можно представить в виде (15.122):

$$(\mathfrak{M}^j)^{-1} = \frac{1}{2} K^{2L+1} - \frac{1}{2} i^{L+1/2} (\mathfrak{K}^j)^{-1} i^{L+1/2}, \quad (17.78)$$

где \mathfrak{K}^j — действительная симметричная матрица (мы предполагаем, что имеет место инвариантность относительно обращения времени). Кроме того, как и в (15.122), матрица \mathfrak{K}^j является *четной функцией импульсов всех открытых каналов*. В этом можно убедиться, подставляя (17.26) в (17.78):

$$\mathfrak{K}^j = -i^{L+1/2} K^{-L-1} [(e^{i\pi L} \mathcal{F}_- - \mathcal{F}) \mathcal{Y}]_+ [(e^{i\pi L} \mathcal{F}_- + \mathcal{F}) \mathcal{Y}]_+^{-1} i^{L+1/2} K^{-L}, \quad (17.79)$$

и используя сохранение четности, четность \mathcal{Y} как функции импульсов открытых каналов и соотношение (17.22). Следовательно, можно ожидать, что все старые элементы матрицы \mathfrak{K}^j будут достаточно хорошими функциями энергии (для действительных E) и не будут содержать аномалий на новых порогах.

Обозначим через k_t импульс фрагмента в новом канале (порог которого лежит при $k_t = 0$). Чтобы вычислить линейный член разложения \mathfrak{M}^j по степеням k_t , продифференцируем (17.78) и положим $k_t = 0$. Так как матрица \mathcal{K}^j четна по k_t , она не даст никакого вклада и мы получим, что

$$\frac{d}{dk_t} (\mathfrak{M}^j)^{-1} \Big|_{k_t=0} = \frac{1}{2} P^{(t, 0)},$$

где $P^{(t, 0)}$ — проекция на часть t -канала, соответствующую моменту $l=0$. Следовательно,

$$\lim_{k_t \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial k_t} \mathfrak{M}^j = -\frac{1}{2} \mathfrak{M}^j P^{(t, 0)} \mathfrak{M}^j, \quad (17.80)$$

причем на пороге правая часть этого равенства обращается в нуль. Это означает, что непосредственно выше нового порога главным членом $\Delta \mathfrak{M}^j$ разности между матрицей \mathfrak{M}^j и ее пороговым значением является величина

$$\Delta \mathfrak{M}^j := -\frac{1}{2} \mathfrak{M}^j P^{(t, 0)} \mathfrak{M}^j k_t. \quad (17.81)$$

Рассмотрим теперь \mathfrak{M}^j как функцию энергии E падающих частиц. Эта энергия связана с k_t соотношением

$$k_t = [2\mu_t (E - E_t)]^{1/2},$$

так что

$$\frac{dk_t}{dE} = \frac{\mu_t}{k_t}. \quad (17.82)$$

При $E \rightarrow E_t$ эта величина стремится к бесконечности. Поэтому она в точности равна линейному члену (17.81), который обуславливает бесконечность производной от \mathfrak{M}^j на пороге.

Чтобы определить поведение некоторого старого сечения при стремлении энергии к порогу снизу, мы должны в эту область аналитически продолжить функцию (17.81). Так как здесь $E < E_t$, то импульс k_t становится чисто мнимым. Чтобы оказаться на физическом листе, мы должны, согласно § 1, п. 5, эту величину выбрать так, чтобы ее мнимая часть была *положительной*. Тогда соотношение (17.81) перейдет в

$$\Delta \mathfrak{M}^j = -\frac{1}{2} i \mathfrak{M}^j P^{(t, 0)} \mathfrak{M}^j |k_t|. \quad (17.83)$$

Уравнения (17.81) и (17.83) можно объединить в одно соотношение, если ввести символ $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, который указывает, находимся ли мы «выше или ниже порога»:

$$\Delta \mathfrak{M}^j = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} |k_t| \mathfrak{M}^j P^{(t, 0)} \mathfrak{M}^j.$$

Для парциальных амплитуд (16.80) имеем

$$\Delta a^j = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} |k_t| a^j P^{(t, 0)} a^j. \quad (17.84)$$

Рассмотрим теперь величину (16.78), вычисленную на пороге. Для эндоргической реакции это означает, что вклад дает лишь $l'=0$, и поэтому j должно быть равно s' :

$$A = (\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha) = (4\pi)^{1/2} \sum_l a_{0s't, l s \alpha}^s \mathfrak{Y}_{s'}^{v'*} (lsv, \hat{\mathbf{k}}) \equiv A_t (s'v', \mathbf{k}\alpha). \quad (17.85)$$

Для экзоэргической реакции вклад дает $l=0$, и поэтому $j=s$:

$$A(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha) = (4\pi)^{1/2} \sum_{l'} \mathfrak{Y}_s^y(l's'v', \hat{\mathbf{k}}') a_{l's'\epsilon'\alpha, 0\text{set}}^s \equiv A_t(\mathbf{k}'\alpha', sv). \quad (17.86)$$

В (17.85) парциальная амплитуда содержит множитель $k_t^{1/2}$, а в (17.86) — множитель $k_t^{-1/2}$. Таким образом, на пороге невозможно вычислить амплитуды (17.85) и (17.86) по отдельности — можно получить лишь их произведение. Если теперь подставить (17.84) в (16.78) и использовать (17.85) и (17.86), то для члена A , линейного по k_t вблизи нового порога, получим

$$\Delta A(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha) = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} |k_t| \sum_{s''v''} A_t(\mathbf{k}'\alpha', s''v'') A_t(s''v'', \mathbf{k}\alpha). \quad (17.87)$$

(Обозначения здесь смешанные. На пороге экзоэргическая амплитуда не зависит от угла падения, но спин налетающих фрагментов указан явно; амплитуда эндоэргической реакции не зависит от угла вылета, но спин образовавшихся фрагментов также указан явно.)

Сечения. Воспользуемся теперь соотношением (17.87), чтобы получить линейный по k_t член в сечении вблизи порога. Так как

$$\Delta\sigma = 2 \operatorname{Re}(A^* \Delta A),$$

то

$$\Delta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha) = -2 |k_t| \begin{pmatrix} \operatorname{Im} \\ \operatorname{Re} \end{pmatrix} A^*(\mathbf{k}'\alpha', \mathbf{k}\alpha) \times \sum_{s''v''} A_t(\mathbf{k}'\alpha', s''v'') A_t(s''v'', \mathbf{k}\alpha). \quad (17.88)$$

Линейный член полного сечения проще всего найти с помощью оптической теоремы

$$\Delta\sigma^{\text{полн}}(\mathbf{k}\alpha) = 4\pi |k_t| k_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \\ -\operatorname{Im} \end{pmatrix} \sum_{s''v''} A_t(\mathbf{k}\alpha, s''v'') A_t(s''v'', \mathbf{k}\alpha).$$

Если гамильтониан инвариантен относительно обращения времени, то матрица S^j симметрична и, согласно (16.80), a^j обладает свойством

$$\tilde{a}^j = K^{-1} a^j K.$$

Предположим, кроме того, что сохраняется четность. Тогда в зависимости от того, равны или противоположны внутренние четности двух фрагментов в канале α соответствующим четностям в пороговом канале, момент l в равенстве (17.85) будет принимать или только четные, или только нечетные значения. Если направить ось z вдоль вектора \mathbf{k} , то

$$\mathfrak{Y}_j^{M*}(lsv, \hat{\mathbf{k}}) = (-1)^l \mathfrak{Y}_j^M(lsv, \hat{\mathbf{k}}),$$

и обе части этого соотношения обратятся в нуль, если только не выполнится равенство $M=v$. Следовательно,

$$A_t(s'v', \mathbf{k}\alpha) = \pm A_t(\mathbf{k}\alpha, s'v') k_t k_\alpha^{-1}.$$

Верхний знак нужно брать, когда произведения четностей двух фрагментов в начальном и конечном каналах равны, а нижний — когда они противоположны. Следовательно, для линейного по k_t члена полного сечения в случае пучка, в котором проекция полного спина налетающих фрагментов на направление падения равна v , получаем

$$\Delta\sigma^{\text{полн}}(\alpha v) = \pm 4\pi \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \\ -\operatorname{Im} \end{pmatrix} \sum_{s''} [A_t(s''v, v)]^2 \quad (17.89)$$

(канал α в амплитуде явно не указан). Если падающий пучок не поляризован, то, конечно,

$$\Delta\sigma^{\text{полн}}(\alpha) = \pm \frac{4\pi}{2s+1} \begin{pmatrix} \text{Re} \\ -\text{Im} \end{pmatrix} \sum_{s''\nu} [A_t(s''\nu, \nu)]^2. \quad (17.89a)$$

Знак в (17.89) и (17.89a) зависит от того, равны или противоположны произведения внутренних четностей в начальном и в пороговом каналах. Далее,

$$\sum_{\nu} [A_t(s''\nu, \nu)]^2 = (2s''+1) \sum_l (-1)^l (a_{0s'', ls}^{s''})^2 = \pm (2s''+1) \sum_l (a_{0s'', ls}^{s''})^2$$

и сечение для неполяризованного в канале α пучка, соответствующее полному спину s'' в пороговом канале, равно

$$\sigma(ts'', \alpha) = 4\pi \frac{2s''+1}{2s''-1} \sum_l |a_{0s'', ls}^{s''}|^2. \quad (17.90)$$

Следовательно, (17.89) мы можем записать в виде

$$\Delta\sigma^{\text{полн}}(\alpha) = \sum_{s''} \sigma(ts'', \alpha) \begin{pmatrix} \text{Re} \\ -\text{Im} \end{pmatrix} \frac{\sum_l (a_{0s'', ls}^{s''})^2}{\sum_l |a_{0s'', ls}^{s''}|^2}. \quad (17.91)$$

Выражения (17.88) — (17.91) полезны тем, что они дают нам возможность экспериментально определить действительную и мнимую части пороговых амплитуд по отдельности. Для этого требуются отдельные измерения профиля аномалии выше и ниже порога.

Соотношение (17.84) можно применить также для отыскания сечений неупругих процессов, идущих в пороговом канале. Результат заключается в том, что около порога полное неупругое сечение, соответствующее переходу из α -канала, в котором спин фрагментов равен s , в пороговый канал, где полный спин фрагментов s' дается формулой

$$\sigma(ts', \alpha s) = c(k_t - c'k_t^2 + \dots). \quad (17.92)$$

Здесь

$$c = \lim_{k_t \rightarrow 0} k_t^{-1} \sigma(ts', \alpha s),$$

$$c' = \lim_{k_t \rightarrow 0} \frac{k_t \sigma^{\text{полн}}(ts')}{2\pi}.$$

Следовательно, детальное измерение энергетической зависимости сечения, соответствующего вновь открывающемуся каналу, дает возможность определить величину *полного* сечения нового канала на пороге.

Примеры. В качестве примера рассмотрим простой случай, когда оба фрагмента старого канала и оба фрагмента порогового канала имеют спин нуль. Если произведение внутренних четностей порогового канала не равно соответствующему произведению для входного канала, то никаких аномалий не возникает. Если они равны, то

$$A_t(t, \alpha) = \frac{1}{2} i k_t^{1/2} k_\alpha^{-1/2} \mathfrak{M}_{i\alpha}^0,$$

$$A_t(\alpha, t) = \frac{1}{2} i k_\alpha^{1/2} k_t^{-1/2} \mathfrak{M}_{i\alpha}^0,$$

$$\Delta \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}'\alpha, \mathbf{k}\alpha) = \frac{1}{2} |k_t| \begin{pmatrix} \text{Im} \\ \text{Re} \end{pmatrix} [e^{2i\varphi} |\mathfrak{M}_{i\alpha}^0|^2 A^*(\mathbf{k}'\alpha, \mathbf{k}\alpha)], \quad (17.93)$$

причем угол φ является фазой $\mathfrak{M}_{i\alpha}^0$:

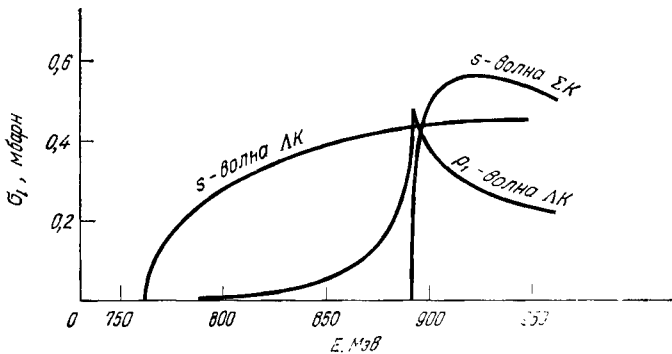
$$\varphi = \arg \mathfrak{M}_{i\alpha}^0.$$

Таким образом, тщательное измерение энергетической зависимости сечения упругого рассеяния выше и ниже порога позволяет определить как величину сечения неупругих процессов, идущих в новом канале, которую оно имеет на пороге, так и *амплитуду* упругого рассеяния с точностью до постоянной (т. е. не зависящей от углов) фазы φ . Последняя в принципе может быть найдена из формулы (17.91), если проведено дополнительное измерение аномалии полного сечения в α -канале:

$$\Delta\sigma^{\text{полн}}(\alpha) = \sigma(t, \alpha) \begin{pmatrix} -\cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \end{pmatrix}. \quad (17.94)$$

Более сложные примеры, когда спин отличен от нуля, можно найти в работах [645, 954] и в задачах к настоящей главе.

Экспериментально эффекты типа пороговых пиков наблюдать обычно весьма трудно. Это происходит потому, что «горб» или мал, или он лежит



Фиг. 17.9. Пример порогового явления, рассчитанного теоретически [276].

в узком интервале энергий, требуя тем самым очень хорошего разрешения. Тем не менее *в принципе* эффект необязательно должен быть малым. На фиг. 17.9 показан пороговый пик, вычисленный для простой трехканальной модели, в которой частицы имеют приведенные массы π -мезона и протона, причем Σ и K , а также Λ и K взаимодействуют посредством потенциалов в виде прямоугольной ямы. Радиус действия всех потенциалов одинаков и равен $0,7 \cdot 10^{-13}$ см., а глубина имеет следующие значения:

$$\begin{aligned} V(\pi p \rightarrow \pi p) &= -200 \text{ Мэв}, & V(\pi p \rightarrow \Lambda K) &= 40 \text{ Мэв}, \\ V(\pi p \rightarrow \Sigma K) &= 50 \text{ Мэв}, & V(\Lambda K \rightarrow \Lambda K) &= 100 \text{ Мэв}, \\ V(\Lambda K \rightarrow \Sigma K) &= -500 \text{ Мэв}, & V(\Sigma K \rightarrow \Sigma K) &= 50 \text{ Мэв}. \end{aligned}$$

Считается, что относительные $\Sigma\Lambda$ - и $\Lambda K p$ -четности положительны. Эта модель не претендует на то, чтобы иметь какое-либо отношение к реальной действительности; она предназначена лишь для иллюстрации. На фиг. 17.9 показан пик в P_1 -волне системы ΛK на пороге ΣK .

4. Пороговые аномалии в случае заряженных частиц

Выше считалось, что межчастичные силы обладают хорошим поведением. Это условие исключает из рассмотрения кулоновские силы. Легко понять, почему кулоновский потенциал притяжения приводит к существенным осложнениям в области порогов. В конечном счете каждый угловой момент создает бесконечно много связанных состояний, энергии которых сосредоточены в точке $E = 0$. Это означает, что здесь каждый элемент S -матрицы имеет точку сгущения полюсов. Будем рассматривать S -матрицу как функцию и энергии E ,

и произведения зарядов (т. е. константы связи). Перейдем теперь от отрицательных значений константы связи к положительным, выходя в комплексную плоскость. При этом хотя здесь и не будет связанных состояний, но существенная сингулярность останется.

Чтобы найти пороговую зависимость S -матрицы при наличии кулоновского поля, мы применим метод § 1, п. 2, дополненный соотношением (14.41), которое можно записать в матричной форме

$$\bar{\mathcal{F}}_{\pm}^{(c)} = (2K)^{-L} e^{(1/2)N\pi \pm i^{1/2}\pi L} \frac{\Gamma(2L+2)}{\Gamma(L+1 \pm iN)}, \quad (17.95)$$

где $N = AK^{-1}$, а матрица A дается формулой

$$A_{\alpha\beta} = (e^2 Z_{1\alpha} Z_{2\alpha} \mu_{\alpha}) \delta_{\alpha\beta}.$$

Функции, отмеченные индексом 1, теперь все являются кулоновскими функциями, и поэтому мы снабдим их индексом (c) . В соответствии с (17.32) можно написать, что

$$\bar{\mathcal{F}}' = \bar{\mathcal{F}}^{(c)-1} \bar{\mathcal{F}} = \mathbf{1} + \int_0^{\infty} dr \bar{\mathcal{F}}^{(c)-1} F^{(c)} \bar{V} \Phi, \quad (17.96)$$

а (17.33) перейдет в

$$e^{-i\eta_0} (S - S^{(c)}) e^{-i\eta_0} = -ie^{1/2i\pi L} (2K)^{1/2+L} \frac{\Gamma(L+1+iN) e^{-i\eta_0}}{\Gamma(2L+2)} \times \\ \times e^{-1/2\pi N} \mathfrak{M} (2K)^{1/2+L} e^{-1/2i\pi L} \frac{\Gamma(L+1+iN) e^{-i\eta_0}}{\Gamma(2L+2)} e^{-1/2\pi N}, \quad (17.97)$$

где

$$\mathfrak{M} = \int_0^{\infty} dr \Phi^{(c)} \bar{V} \Phi \bar{\mathcal{F}}'^{-1}. \quad (17.98)$$

Фазовые множители $e^{-i\eta_0}$, которые определены формулой (14.28), введены для удобства. Вклада в сечение они не дают.

В пределе $k \rightarrow 0+$ матрица \mathfrak{M} конечна. Это связано с тем, что в этой точке регулярные кулоновские функции $\Phi_i^{(c)}$ (14.36) конечны, в чем можно убедиться с помощью интегрального представления (14.47), взятого совместно с (14.46). Аналогично нерегулярная функция $f_i^{(c)}/\mathcal{F}_i^{(c)}$ также конечна. Это видно из интегрального представления ([242], ч. 1, стр. 261)

$$\frac{f_l^{(c)}(k, r)}{\mathcal{F}_l^{(c)}} = -ir^{l+1} (2k)^{2l+1} e^{ikr-i\pi l} \Psi(l+1+in, 2l+2; -2ikr) \frac{\Gamma(1+l+in)}{\Gamma(2l+2)} = \\ = \frac{-ir^{l+1} (2k)^{2l+1} e^{ikr-i\pi l}}{\Gamma(2l+2)} \int_0^{\infty} dt e^{2ikrt} t^l (1+t)^l e^{-in \ln(1+t^{-1})}. \quad (17.99)$$

При $k \rightarrow 0+$ интеграл имеет порядок $O(k^{-2l-1})$, так что левая часть этого равенства оказывается конечной. Следовательно, в пределе $k \rightarrow 0+$ кулоновская функция Грина также будет обладать хорошим поведением. Поэтому и Φ будет вести себя хорошо, а если \bar{V} убывает достаточно быстро, то это справедливо также для $\bar{\mathcal{F}}'$ и \mathfrak{M} . Если k стремится к нулю со стороны положительной мнимой полуоси, то получаются такие же результаты.

Итак, все пороговые эффекты и ниже, и выше порога, содержатся в крайних сомножителях правой части (17.97). Рассмотрим отдельный элемент соответствующей матрицы. Если опустить постоянный коэффициент, то он

будет иметь вид

$$\frac{e^{-i\eta_0} k^{l+1/2} e^{-1/2\pi n} \Gamma(l+1+in)}{i!} = e^{i(\eta_l - \eta_0)} \left(\frac{2\pi a}{e^{2\pi n} - 1} \right)^{1/2} \left\{ \left[k^2 + \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right] \dots \left[k^2 + \left(\frac{a}{1} \right)^2 \right] \right\}^{1/2} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow 0} \begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\pi n} a^{l+1/2} l}{i!} & \text{при } a > 0, \\ \frac{\sqrt{2\pi} |a|^{l+1/2} (-i)^l}{i!} & \text{при } a < 0, \\ k^{l+1/2} & \text{при } a = 0, \end{cases} \quad (17.100)$$

где a — элемент диагональной матрицы A . В полученных предельных выражениях содержатся все утверждения, касающиеся низкоэнергетических сечений упругих, экзоэргических и эндоэргических процессов вблизи порога в случае каналов как с одноименно и разноименно заряженными, так и с нейтральными частицами.

Заметим, что при кулоновском отталкивании ($a > 0$) пороговый множитель чрезвычайно быстро стремится к нулю¹⁾ и что он никогда не обращается в нуль в случае притяжения. Когда взаимодействуют разноименно заряженные частицы, все парциальные амплитуды на пороге начинаются с ненулевого значения. Однако так как в практически интересных задачах величина a является малой, то обычно все же доминирует состояние с $l = 0$.

Эффекты, связанные со старыми каналами. Теперь мы хотим исследовать поведение элемента S -матрицы вблизи порога *другого* канала. Так как крайние множители правой части (17.97) зависят только от импульсов того же самого канала, то эффект должен возникать из-за наличия матрицы \mathfrak{M} .

Вернемся к аргументам, приведенным в п. 2. В случае кулоновского отталкивания частицы, обладающие низкой энергией, расходятся так далеко друг от друга, что новое сечение будет оказывать чрезвычайно слабое влияние. На самом деле все его производные по энергии на пороге обращаются в нуль. Поэтому поток из других каналов будет изыматься очень медленно и *никакие пороговые аномалии в этом случае не появятся*. Однако в случае притяжения новое сечение имеет на пороге скачок, благодаря чему из других каналов будет внезапно изыматься некоторая конечная доля потока. Поэтому мы ожидаем, что в старых сечениях будут появляться не пики (или сглаженные ступеньки), а скачки. Этот результат в своих основных чертах подтверждается и математическим расчетом. Однако вопрос в значительной степени осложняется наличием бесконечного числа резонансов, обусловленных существованием кулоновских связанных состояний, которые сгущаются на пороге. Более подробный математический анализ этих явлений можно найти в литературе [277, 278]. Ниже они будут обсуждаться лишь качественно.

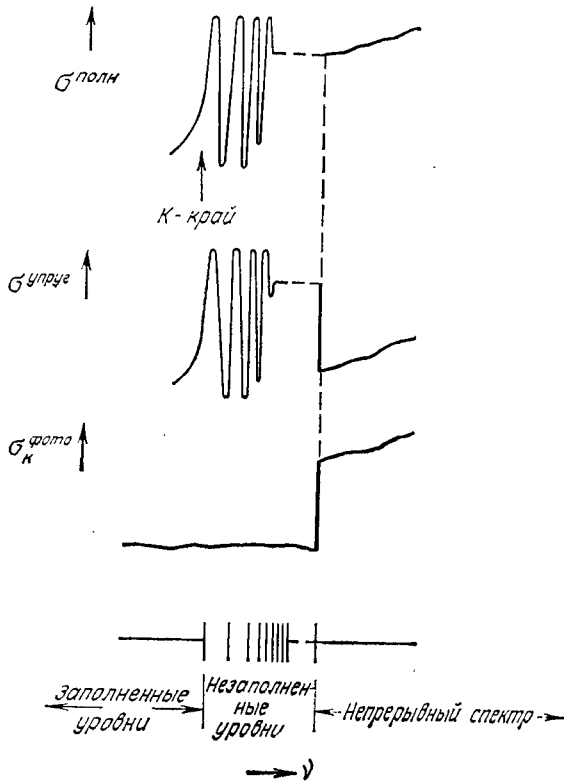
Совершенно ясно, что при экспериментальном измерении полного сечения доступно только его *среднее* по бесконечному множеству кулоновских резонансов. Установлено, что средние значения старых амплитуд непрерывны при переходе через новый порог. Поэтому из оптической теоремы вытекает, что полные сечения (усредненные по кулоновским резонансам) также непрерывны на пороге. Но если это так, то для компенсации разрывного вклада новых, неупругих сечений необходимо, чтобы и старые сечения имели скачки.

Рассеяние рентгеновских лучей. Висказанные выше утверждения экспериментально проявляются [278] при рассеянии атомом рентгеновских лучей вблизи порога фотоэффекта (т. е. ионизации). Полное сечение, а следовательно-

¹⁾ Напомним, что $n = a/k$.

но, и массовый коэффициент поглощения меняются на фотопороге непрерывно¹⁾. На частоте, соответствующей переходу атома в первое незанятое возбужденное состояние, появляется так называемый *край поглощения рентгеновских лучей*. За ним следует ряд тесно расположенных резонансов, соответствующих более высоким кулоновским связанным состояниям; они образуют «вторичную структуру» края поглощения в его коротковолновой области²⁾.

Сечение упругого рассеяния рентгеновских лучей атомом на фотопороге все же имеет разрыв. В разумном приближении можно получить, что внезапное включение фотосечения K -оболочки почти полностью компенсируется



Ф и г. 17.10. Схематическое изображение сечений рассеяния рентгеновских лучей на атомах [278].

таким же, но с противоположным знаком, разрывом, имеющимся в (усредненном) сечении упругого рассеяния рентгеновских лучей. Эта ситуация схематически изображена на фиг. 17.10.

С экспериментальной точки зрения все утверждения, касающиеся пороговых явлений для заряженных частиц, нужно рассматривать с известной осторожностью. Математический расчет показывает, что в случае отгалкивания никаких пиков нет, т. е. что производная старого сечения на новом

¹⁾ При измерении показателя преломления нужно различать два случая: 1) при прямом измерении, когда падающий пучок отклоняется призмой, получается непосредственно действительная часть амплитуды рассеяния вперед; 2) при использовании косвенного метода, основанного на определении угла полного отражения, получается квадратный корень этой амплитуды. При этих двух измерениях производятся различные усреднения по кулоновским резонансам, что приводит к различным результатам. На пороге угол преломления непрерывен, а угол полного отражения терпит разрыв.

²⁾ Следует подчеркнуть, что иногда возникновение края поглощения неправильно объясняется тем, что начинается фотоэффект.

пороге конечна. И все же ясно, что если рассмотреть медленно «включающуюся» кулоновское отталкивание, то имевшийся ранее большой пик мгновенно не исчезнет. Единственное, что в этом случае может произойти,— это сглаживание первоначально резкого пика; когда же кулоновский потенциал усилится, пик начнет постепенно размываться. То же самое будет происходить и в случае притяжения. Другими словами, ответ на вопрос, существуют ли нет пороговые явления, в которых наблюдаются особенности типа пиков (или сглаженных ступенек), зависит от соотношения величин кулоновского поля и более интенсивных сил, ответственных за появление порога. Что означает это утверждение точно, не ясно, т. е. его количественная формулировка не известна,— это связано с неопределенностью самого понятия «величина» пика. Можно, однако, считать, что размеры ΔE энергетической окрестности порога, в которой кулоновские эффекты играют важную роль, по порядку величины равны глубине основного состояния, возникающего в случае кулоновского притяжения. Эту энергию можно приблизительно вычислить, если умножить 27 эв на приведенные массы каналов, выраженные в $M\text{эв}$, и на квадрат произведения зарядов (в единицах заряда электрона). Если в пренебрежении кулоновскими силами ожидается появление наблюдаемых пороговых явлений, причем экспериментально энергии порядка ΔE разрешить нельзя, то эти же эффекты будут проявляться и в присутствии кулоновских сил.

§ 3. ПРИМЕРЫ

1. Прямоугольная яма

Рассмотрим простой случай произвольного числа каналов с $l = 0$, которые связаны друг с другом матрицей V , соответствующей прямоугольным потенциальным ямам одинаковой ширины r_0 ¹⁾. Тогда уравнение (16.75а) запишется в виде

$$\psi'' + A\psi = 0, \quad (17.101)$$

$$A = \begin{cases} K^2 - V & \text{при } r < r_0, \\ K^2 & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (17.102)$$

Диагонализуем действительную симметричную матрицу A в области $r < r_0$ с помощью действительной ортогональной матрицы T :

$$A = Ta^2T^{-1}, \quad (17.103)$$

так что a^2 является диагональной матрицей, образованной из собственных значений A . Решение $F(K, r)$ должно иметь вид:

$$F(K, r) = \begin{cases} T(e^{-ia^2r}B + e^{ia^2r}C) & \text{при } r < r_0, \\ e^{iKr} & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (17.104)$$

Постоянные матрицы B и C определяются из требования непрерывности F и ее первой производной:

$$F = [T \cos a(r - r_0)T^{-1} + iTa^{-1} \sin a(r - r_0)T^{-1}K] e^{iKr_0}, \quad (17.105)$$

и, следовательно, матрица Йоста имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= e^{iKr_0} [T \cos ar_0 \tilde{T} - iKTa^{-1} \sin ar_0 \tilde{T}] = \\ &= e^{iKr_0} [Ta \operatorname{ctg} ar_0 \tilde{T} - iK] Ta^{-1} \sin ar_0 \tilde{T}. \end{aligned} \quad (17.106)$$

¹⁾ Если параметры матричных элементов V , определяющие ширину ям, не одинаковы, то задача решается аналогичным способом, но алгебраические выкладки оказываются значительно более сложными.

Так как матрицы T и a являются четными функциями импульсов k , то из (17.15) следует, что

$$S = e^{-ikr_0} K^{-1/2} [Ta \operatorname{ctg} ar_0 \tilde{T} + iK] [Ta \operatorname{ctg} ar_0 \tilde{T} - iK]^{-1} K^{1/2} e^{-ikr_0}. \quad (17.107)$$

Детерминант Фредгольма получается в результате вычисления детерминанта матрицы \mathcal{F} :

$$\Delta = e^{ihr_0} \prod_n \left(\frac{\sin a_n r_0}{a_n} \right) \det [Ta \operatorname{ctg} ar_0 \tilde{T} - iK], \quad (17.108)$$

где $k = \sum_{\alpha} k_{\alpha}$.

Два канала. Возьмем случай двух каналов и положим

$$e_n = a_n r_0, \quad \rho_{\alpha} = k_{\alpha} r_0, \quad R_{\alpha} = A_{\alpha\alpha}^{1/2} r_0 = (\rho_{\alpha}^2 - V_{\alpha\alpha} r_0^2)^{1/2}.$$

Тогда

$$e_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (R_1^2 + R_2^2) \pm \frac{1}{2} [(R_1^2 - R_2^2)^2 + 4V_{12}^2]^{1/2}$$

и

$$\Delta(k_1, k_2) = \frac{e^{i(\rho_1 + \rho_2)}}{\alpha_2 - \alpha_1} \frac{\sin e_1}{e_1} \frac{\sin e_2}{e_2} g(\rho_1, \rho_2). \quad (17.109)$$

Здесь

$$g(\rho_1, \rho_2) = i\rho_1 (\mathcal{E}_1 \alpha_1 - \mathcal{E}_2 \alpha_2) + i\rho_2 (\mathcal{E}_2 \alpha_1 - \mathcal{E}_1 \alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2) (\rho_1 \rho_2 - \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2), \quad (17.110)$$

причем введены обозначения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= e_1^2 - R_1^2 = R_2^2 - e_2^2, & \alpha_2 &= e_2^2 - R_1^2 = R_2^2 - e_1^2, \\ \mathcal{E}_1 &= e_1 \operatorname{ctg} e_1, & \mathcal{E}_2 &= e_2 \operatorname{ctg} e_2. \end{aligned}$$

Таким образом, элементы S -матрицы можно вычислить из (17.42) и (17.51a):

$$S_{11} = \frac{g(-\rho_1, \rho_2)}{g(\rho_1, \rho_2)} e^{-2i\rho_1}, \quad S_{22} = \frac{g(\rho_1, -\rho_2)}{g(\rho_1, \rho_2)} e^{-2i\rho_2}, \quad (17.111)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{2(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)(\alpha_1 \alpha_2 \rho_1 \rho_2)^{1/2}}{g(\rho_1, \rho_2)} e^{-i(\rho_1 + \rho_2)}.$$

Пусть канал 2 имеет более высокий порог, чем канал 1. Возникает вопрос: при каких условиях будет существовать связанное состояние, утопленное в непрерывном спектре? Чтобы ответить на него, нужно найти нуль детерминанта Фредгольма Δ при положительном значении ρ_1 и мнимой части ρ_2 . Тогда числа R_1^2 и R_2^2 будут действительными; то же можно сказать и о $e_1, e_2, \alpha_1, \alpha_2, \mathcal{E}_1$ и \mathcal{E}_2 . Перепишем (17.110) в форме

$$i\rho_2 g = (i\rho_1 - i\rho_2) \{ (\mathcal{E}_1 - i\rho_2) \alpha_1 \mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}_2 - i\rho_2) \alpha_2 \mathcal{E}_1 \} - \\ - i\rho_1 (\alpha_1 - \alpha_2) (\mathcal{E}_1 - i\rho_2) (\mathcal{E}_2 - i\rho_2). \quad (17.110a)$$

Так как действительная и мнимая части этого равенства должны обращаться в нуль по отдельности, а для $V_{12} \neq 0$ всегда $\alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1 \neq 0$ и $\alpha_2 \neq 0$, то одновременно должны удовлетворяться следующие два уравнения:

$$\mathcal{E}_1 = i\rho_2, \quad \mathcal{E}_2 = i\rho_2.$$

Другими словами,

$$e_1 \operatorname{ctg} e_1 = -|\rho_2|, \quad e_2 \operatorname{ctg} e_2 = -|\rho_2|. \quad (17.112)$$

Необходимым условием выполнения этих соотношений является неравенство $e_2 > 1/2\pi$).

Чтобы показать, что существуют такие гамильтонианы, для которых система уравнений (17.112) имеет решения, выберем произвольно положитель-

¹⁾ В данном примере это означает, что элемент V_{22} сам по себе приводит к связанному состоянию, но данный факт является случайным и в общем случае не имеет места.

ные числа ρ_1 и $-i\rho_2$ и действительное число V_{12} . Решим затем два уравнения (17.112) с двумя числами e_1 и e_2 , такими, что $e_1^2 - e_2^2 > 2 |V_{12}|$. Всегда найдутся решения, причем их будет бесконечное множество. Далее определим R_1^2 и R_2^2 из формулы

$$R_{1,2}^2 = \frac{1}{2} (e_1^2 + e_2^2) \pm \frac{1}{2} [(e_1^2 - e_2^2)^2 - 4V_{12}^2]^{1/2}$$

и, наконец, V_{11} и V_{22} — из соотношений

$$V_{\alpha\alpha} r_0^2 = \rho_\alpha^2 - R_\alpha^2.$$

Следовательно, для каждого заданного положительного значения k_1 и $-ik_2$ и для каждой заданной величины V_{12} существует бесконечное множество элементов V_{11} и V_{22} , которые вместе с V_{12} создают связанное состояние, утопленное в непрерывном спектре.

Связанные состояния обычного типа находятся аналогичным способом путем определения нулей функции (17.110); только теперь считается, что и $i\rho_1$, и $i\rho_2$ отрицательны, так что g действительно:

$$g = |\rho_1| (\alpha_2 \mathcal{E}_2 - \alpha_1 \mathcal{E}_1) + |\rho_2| (\alpha_2 \mathcal{E}_1 - \alpha_1 \mathcal{E}_2) + (\alpha_2 - \alpha_1) (|\rho_1| |\rho_2| + \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2) = 0.$$

Легко убедиться в том, что если недиагональные члены матрицы V имеют достаточно большую величину, то независимо от значений ее диагональных элементов будут возникать связанные состояния (заметим, что в g входит лишь квадрат V_{12}). Фиксируем ρ_1 , ρ_2 , V_{11} и V_{22} , а V_{12} будем увеличивать. Тогда в конце концов e_2^2 станет отрицательным и $\mathcal{E}_2 \rightarrow |V_{12}|^{1/2}$, в то время как $\alpha_1 \rightarrow -\alpha_2 \rightarrow |V_{12}|$. Тем временем \mathcal{E}_1 продолжает двигаться из $+\infty$ к $-\infty$, и в каждом таком случае g должно проходить через нуль. Это подтверждает то обстоятельство, что подобный гамилтониан взаимодействия всегда соответствует *эффективному* притяжению. Если только величина недиагональных членов достаточно велика, то независимо от значений диагональных элементов составленная система из двух каналов будет всегда обладать связанным состоянием. Конечно, не существует никаких способов для идентификации того канала, в котором появляется связанное состояние. В определенном смысле оно относится по существу к обоим каналам.

2. Потенциалы юкавского типа

Предположим, что матрица потенциала является непрерывной суперпозицией юкавских функций или экспонент

$$V(r) = \int da \rho(a) e^{-ar}, \quad (17.113)$$

где $\rho(a)$ — матрица, для которой

$$\rho_{\alpha\beta}(a) = 0 \quad \text{при} \quad a \leq a_{0\alpha\beta}.$$

В этом случае уравнение Шредингера, конечно, не решается в замкнутом виде. Но в соответствии с результатами гл. 9, § 3 мы можем вычислить детерминант Фредгольма. Чтобы не путать ядро, которое там обозначалось через K , с матрицей волновых чисел, введем для него символ R . Тогда

$$R(K; r, r') = -K^{-1} \sin Kr \langle e^{iKr} \rangle \int da \rho(a) e^{-ar}. \quad (17.114)$$

Вычисления удобно проводить, совершив преобразование Фурье

$$\begin{aligned} R(K; k, k') &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr \int_0^\infty dr' e^{ikr - ik'r'} R(K; r, r') = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int da (K+k)^{-1} (k+ia-k')^{-1} (k'-K-ia)^{-1} \rho(a). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Sp } R(K) &= -\frac{1}{2\pi} \int da a^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dk \text{Sp } (k+K)^{-1} (k-K-ia)^{-1} \rho(a) = \\ &= -i \int da a^{-1} \text{Sp } (2K+ia)^{-1} \rho(a) = \\ &= -i \int da a^{-1} \sum_{\alpha} (2k_{\alpha}+ia)^{-1} \rho_{\alpha\alpha}(a). \quad (17.115) \end{aligned}$$

Символ Sp в правой части (17.115) означает, что след берется только по дискретным матричным индексам. Таким образом, если рассматривать выписанное выражение как функцию k_{α} , оно будет иметь разрез, идущий вдоль отрицательной части мнимой оси и начинающийся в точке $k_{\alpha} = -1/2ia_{0\alpha\alpha}$.

Обратимся теперь к R^2 :

$$\begin{aligned} R^2(k, k') &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int da \int da' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk''}{(k''-k-ia)(k'-k''-ia)} \times \\ &\times (k''-K-ia)^{-1} (k+K)^{-1} \rho(a) (k'-K-ia')^{-1} (k''+K)^{-1} \rho(a'). \end{aligned}$$

Все интегрирования в следе этой матрицы проводятся достаточно просто; в результате после некоторых алгебраических выкладок получим

$$\begin{aligned} \text{Sp } R^2(K) &= -2i \int da \int da' \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(a) \rho_{\beta\alpha}(a') \times \\ &\times \frac{k_{\alpha}+k_{\beta}+ia+ia'}{(a+a')(2k_{\alpha}+ia+ia')(2k_{\beta}+ia+ia')(k_{\alpha}+k_{\beta}+ia)(k_{\alpha}+k_{\beta}+ia')}. \quad (17.116) \end{aligned}$$

Единственный новый разрез возникает в том случае, когда

$$k_{\alpha}+k_{\beta}+ia=0, \quad (17.117)$$

или, что то же самое, при $a \rightarrow a'$. Он начинается в точке

$$k_{\beta}^{(0)} = -i(a_{0\alpha\beta}^2 + 2\mu_{\alpha}\Delta_{\alpha\beta}) \left\{ a_{0\alpha\beta} + \left(\frac{\mu_{\alpha}}{\mu_{\beta}}\right)^{1/2} [a_{0\alpha\beta}^2 - 2\Delta_{\alpha\beta}(\mu_{\beta}-\mu_{\alpha})]^{1/2} \right\}^{-1}, \quad (17.118)$$

где

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{k_{\alpha}^2}{2\mu_{\alpha}} - \frac{k_{\beta}^2}{2\mu_{\beta}}.$$

Если

$$a_{0\alpha\beta} > [2\Delta_{\alpha\beta}(\mu_{\beta}-\mu_{\alpha})]^{1/2}, \quad (17.119)$$

то точка ветвления лежит на отрицательной мнимой полуоси, и разрез можно провести так, чтобы он выходил из нее и шел в $-i\infty$. Однако если неравенство (17.119) нарушается, то точка ветвления будет лежать на действительной оси.

Появление разрезов вызвано просто совпадением сингулярностей в исходных подынтегральных выражениях матриц R и R^2 . Поэтому ясно, что $\text{Sp } R^2$ не будет содержать никаких сингулярностей, отличных от сингулярностей $\text{Sp } R^2$. Этот же результат справедлив и для n -го члена разложения детерминанта Фредгольма Δ . Мы можем сделать вывод, что если рассматривать Δ как сложную функцию k_{β} , т. е. считать, что все k выражены через эту переменную, и если неравенство (17.119) справедливо для всех $a_{0\alpha\beta}$, то Δ будет иметь разрез, идущий вдоль отрицательной части мнимой оси от точки $k_{\beta}^{(0)}$.

Помимо этого имеются, конечно, обычные пороговые точки ветвления, лежащие на действительной и мнимой осях¹⁾.

И наконец, обратив в Δ знак одного или двух k , мы получим элементы S -матрицы, так что они будут также иметь разрезы вдоль положительной части мнимой оси. Критерием того, что разрезы имеются только на мнимой оси, по-прежнему является неравенство (17.119).

Следовательно, мы получаем, что (17.119) является необходимым условием того, чтобы все разрезы, обусловленные юкавским потенциалом, были левосторонними. Если оно нарушается, то в дополнение к обычным пороговым разрезам появляются правосторонние разрезы.

3. Модель Вигнера — Вайскопфа

Простая, до конца решаемая модель неупругих процессов была впервые рассмотрена Вигнером и Вайскопфом. В этой модели имеется неподвижная частица с постоянной волновой функцией χ и другая частица — массы m с волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$. Эти частицы являются источниками друг для друга с *формфактором* $\Lambda(r)$. Постулируются следующие уравнения Шредингера:

$$\left(E + \frac{1}{2m} \nabla^2\right) \psi(\mathbf{r}, E) = \Lambda(r) \chi(E),$$

$$(E - E_0) \chi(E) = \int d\mathbf{r} \Lambda(r) \psi(\mathbf{r}, E).$$

Так как считается, что Λ зависит только от величины радиуса-вектора \mathbf{r} , то анализ парциальных волн сразу же показывает, что угловые моменты $l > 0$ с источником не связаны и он на них не оказывает влияния. Интерес представляют лишь уравнения для $l = 0$:

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dr^2}\right) \psi_0(k, r) = \lambda(r) \chi,$$

$$(k^2 - k_0^2) \chi = \int_0^\infty dr \lambda(r) \psi_0(k, r),$$

$$\lambda(r) = 2mr\Lambda(r).$$

В дальнейшем подразумевается, что $l = 0$, и индекс 0 у волновой функции мы будем опускать. Нерегулярное решение дается формулой

$$f(k, r) = e^{ikr} - \int_r^\infty dr' k^{-1} \sin k(r-r') \lambda(r') \chi$$

и, следовательно,

$$(k^2 - k_0^2) \chi = \int_0^\infty dr \lambda(r) e^{ikr} - \int_0^\infty dr \int_r^\infty dr' k^{-1} \sin k(r-r') \lambda(r) \lambda(r') \chi$$

или

$$\chi = \frac{\int_0^\infty dr \lambda(r) e^{ikr}}{k^2 - k_0^2 + \int_0^\infty dr \int_r^\infty dr' k^{-1} \sin k(r-r') \lambda(r) \lambda(r')}.$$

¹⁾ Обычно стараются выражать все k через волновое число или энергию канала, который открывается *первым*. Тогда все пороговые точки ветвления лежат на действительной оси.

Функция Иоста равна

$$\bar{f}(k) = 1 + \int_0^{\infty} dr k^{-1} \sin kr \lambda(r) \chi.$$

Простые вычисления показывают, что ее можно записать в виде

$$\bar{f}(k) = \frac{\bar{f}(k)}{k^2 - k_0^2 + \int_0^{\infty} dr \int_r^{\infty} dr' \lambda(r) \lambda(r') k^{-1} \sin k(r-r')},$$

$$\bar{f}(k) = k^2 - k_0^2 + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' \lambda(r) \lambda(r') k^{-1} e^{ihr} \sin kr <.$$

Так как знаменатель функции \bar{f} является четной функцией k , то собственное значение S -матрицы, соответствующее $l=0$, есть

$$S(k) = \frac{\bar{f}(-k)}{\bar{f}(k)} = \frac{k^2 - k_0^2 + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' \lambda(r) \lambda(r') e^{-ihr} \sin kr < / k}{k^2 - k_0^2 + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' \lambda(r) \lambda(r') e^{ihr} \sin kr < / k}.$$

При $k = i\kappa$, $\kappa > 0$,

$$\bar{f}(i\kappa) = -\kappa^2 - k_0^2 + \int_0^{\infty} dr \int_0^{\infty} dr' \lambda(r) \lambda(r') e^{-\kappa r} \frac{\text{sh } \kappa r <}{\kappa}.$$

Производная ядра с $e^{-\kappa r} > \text{sh } \kappa r < / \kappa$ по κ является отрицательно определенной. Следовательно, $\bar{f}(i\kappa)$ — монотонно убывающая функция κ . Поэтому она имеет самое большое один нуль. Если

$$\bar{f}(0) = -k_0^2 + 2 \int_0^{\infty} dr \int_0^r dr' \lambda(r) \lambda(r') r' > 0,$$

т. е. если

$$E_0 < 4m \int_0^{\infty} dr r \int_0^r dr' r'^2 \Lambda(r) \Lambda(r'),$$

то имеется один нуль, а значит, и связанное состояние. В противном случае связанного состояния нет.

В «локальном» случае, когда формфактор $\Lambda(r)$ сконцентрирован вблизи начала координат, можно считать, что

$$\lambda(r) = \begin{cases} \lambda, & r < R, \\ 0, & r > R, \end{cases}$$

и при $kR \ll 1$ получаем

$$\bar{f}(k) = k^2 - k_0^2 + \frac{1}{3} \lambda^2 R^3 + \frac{1}{4} i \lambda^2 k R^4 + \dots$$

Пусть теперь R стремится к нулю, а $\lambda \rightarrow \infty$, но так, что $\lambda R^2 = C = \text{const}$. Тогда

$$\bar{f}(k) = k^2 - k_0'^2 + \frac{1}{4} i k C^2,$$

где

$$k_0'^2 = k_0^2 - \frac{C^2}{3R}.$$

Конечно, в строго локальном пределе $k_0'^2 \rightarrow -\infty$.

В отсутствие взаимодействия \mathfrak{f} имеет нуль в точке $k = k_0$. Это отражает тот факт, что «стационарная» частица χ имеет энергию E_0 . Взаимодействие с ψ -частицей, которая может испускаться и поглощаться, приводит к сдвигу $-C^2/6mR$ энергии частицы χ , так что она становится равной E'_0 . Таким образом, энергия частицы χ «перенормировывается». Если $E'_0 < 0$, то имеется связанное состояние, т. е. «одетая» χ -частица стабильна. Если же

$$E'_0 > \frac{C^4}{128m},$$

то она нестабильна и при энергии

$$E = E'_0 - \frac{C^4}{64m} - i \frac{C^2}{8m} \left(2mE'_0 - \frac{C^4}{64} \right)^{1/2}$$

имеется резонансный полюс S-матрицы. Если $0 < E'_0 < C^4/128m$, то существует два виртуальных состояния.

§ 4. ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМУ ТРЕХ ТЕЛ

1. Амплитуды

Задача трех тел является сложной при любом способе рассмотрения. Это справедливо как в классической, так и в квантовой механике. Но она очень важна, и не только с точки зрения непосредственных приложений, а главным образом из-за того, что ей присущи, по-видимому, определенные черты, характерные для релятивистской механики и отсутствующие в задаче двух тел. Наиболее существенной из них является появление как в «промежуточных», так и в конечных состояниях более двух «свободных» частиц.

Данный пункт служит лишь введением в общую проблематику задачи трех тел и в описание методов, которые применяются при попытке ее разрешения. Более подробное изложение потребовало бы отдельной книги.

«Канонические» параметры для трех нерелятивистских частиц вводятся следующим образом. Обозначим массы через m_1, m_2, m_3 , радиусы-векторы — через $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ и импульсы — через $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$. В системе центра масс, где

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0,$$

нужно задать два вектора, определяющих²³ положение частиц: расстояние между частицами 2 и 3

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_3 = \frac{m_1}{m_3} \mathbf{R}_1 + \frac{m_2 + m_3}{m_3} \mathbf{R}_2 \quad (17.120)$$

и расстояние частицы 1 от центра масс системы (2,3)

$$\rho_1 = \mathbf{R}_1 - \frac{m_2 \mathbf{R}_2 + m_3 \mathbf{R}_3}{m_2 + m_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2 + m_3} \mathbf{R}_1. \quad (17.121)$$

Сопреженные им импульсы равны

$$\mathbf{k}_1 = \bar{\mu}_1 \frac{d\rho_1}{dt}, \quad \bar{\mu}_1 = \frac{m_1(m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad (17.122)$$

$$\mathbf{q}_1 = \frac{m_3 \mathbf{p}_2 - m_2 \mathbf{p}_3}{m_2 + m_3} = \mathbf{p}_2 + \frac{m_2}{m_2 + m_3} \mathbf{p}_1 = \mu_{23} \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \mu_{23} = \frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}. \quad (17.123)$$

В то время как \mathbf{k}_1 —импульс частицы 1 непосредственно в системе общего центра масс, \mathbf{q}_1 —импульс частицы 2 в системе центра масс пары (2,3). Кинетическая энергия дается выражением

$$E_{\text{кин}} = \frac{k_1^2}{2\bar{\mu}_1} + \frac{q_1^2}{2\mu_{23}}, \quad (17.124)$$

и уравнение Шредингера для трех частиц, взаимодействующих посредством только парных потенциалов, имеет вид

$$\left(\frac{\mathbf{k}_1^2}{2\mu_1} + \frac{q_1^2}{2\mu_{23}} + V_{12} + V_{23} + V_{13} \right) \psi = E\psi. \quad (17.125)$$

Только потенциал V_{23} является функцией одного расстояния и

$$V_{23} = V_{23}(\mathbf{r}_1),$$

в то время как

$$V_{12} = V_{12} \left(\rho_1 - \frac{\mu_{23}}{m_2} \mathbf{r}_1 \right),$$

$$V_{13} = V_{13} \left(\rho_1 + \frac{\mu_{23}}{m_3} \mathbf{r}_1 \right).$$

Эксперимент обычно ставится так, что начальное состояние системы всегда содержит одну частицу и связанную пару, скажем (2,3). Такое состояние мы будем обозначать символом 1 (2,3). Если в конечном состоянии имеются три свободные частицы, то мы сконцентрируем внимание на дифференциальном сечении процесса, при котором первый импульс лежит в интервале от \mathbf{k}_1 до $\mathbf{k}_1 + d\mathbf{k}_1$, а второй — в интервале от \mathbf{q}_1 до $\mathbf{q}_1 + d\mathbf{q}_1$. Если k_1 фиксирован, то $d\mathbf{q}_1 = d\mathbf{p}_2$; следовательно,

$$d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}_1 = d\Omega_1 d\Omega_2 dk_1 dq_1 k_1^2 q_1^2,$$

где $d\Omega_1$ и $d\Omega_2$ — элементы телесных углов, соответствующих направлениям движения частиц 1 и 2. Более удобно фиксировать *полную* энергию E и энергию

$$E_{23} = \frac{q_1^2}{2\mu_{23}}$$

пары (2,3) в ее собственной системе центра масс. Так как

$$E = E_{23} + \frac{k_1^2}{2\mu_1},$$

то

$$q_1^2 dq_1 = \frac{1}{2} q_1 dq_1^2 = q_1 \mu_{23} dE_{23} = \sqrt{2} \mu_{23}^{3/2} E_{23}^{1/2} dE_{23},$$

а если фиксирована E_{23} , то

$$k_1^2 dk_1 = \frac{1}{2} k_1 dk_1^2 = k_1 \bar{\mu}_1 dE = \sqrt{2} \bar{\mu}_1^{3/2} (E - E_{23})^{1/2} dE.$$

В результате

$$d\mathbf{k}_1 d\mathbf{q}_1 = 2 (\bar{\mu}_1 \mu_{23})^{3/2} E_{23}^{1/2} (E - E_{23})^{1/2} d\Omega_1 d\Omega_2 dE dE_{23}. \quad (17.126)$$

Выражение дифференциального сечения через \mathbf{T} -матрицу дает формула (8.19):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1 d\Omega_2 dE_{23}} = (2\pi)^4 \frac{\bar{\mu}_1}{p_1} \bar{\mu}_1 \mu_{23} k_1' q_1' |T_{fi}|^2 =$$

$$= 2 (2\pi)^4 \frac{\bar{\mu}_1}{p_1} \left(\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{3/2} E_{23}'^{1/2} (E - E_{23}')^{1/2} |T_{fi}|^2. \quad (17.127)$$

Здесь p_1 — начальный импульс частицы 1, а при вычислении T_{fi} используются волновые функции, которые для каждой частицы нормированы условием (8.17), т. е. решения, соответствующие плоской волне, берутся в виде

$$\psi_0(\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1, a_1, a_2, a_3; \rho_1, \mathbf{r}_1) = (2\pi)^{-3} \chi_{a_1} \chi_{a_2} \chi_{a_3} e^{i(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_1 \cdot \rho_1)},$$

где χ — спиновые функции трех частиц. Если же при вычислении T_{ji} используются волновые функции, нормированные условием (8.7), так что трехчастичные плоские волны записываются как

$$\psi_0 = \left(\frac{m_1 m_2 m_3 k_1 q_1}{m_1 + m_2 + m_3} \right)^{1/2} (2\pi)^{-3} \chi_{\sigma_1} \chi_{\sigma_2} \chi_{\sigma_3} e^{i(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_2)},$$

то

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1 d\Omega_2 dE_{23}} = \frac{(2\pi)^4}{p^2} |T_{ji}|^2 = |A_{fi}|^2. \quad (17.127a)$$

Спины будем складывать следующим образом. В двухчастичном канале полный спин s получается в результате сложения спинов двух отдельных частиц. В трехчастичном канале сначала складываем спины частиц 2 и 3 и получаем σ_1 , а затем комбинируем σ_1 с s_1 и получаем полный спин s . Аналогично полный орбитальный момент L получается в результате сложения орбитального момента λ_1 , соответствующего координате \mathbf{r}_1 , и орбитального момента l_1 , соответствующего координате \mathbf{r}_1 . Будем использовать следующие обозначения:

	Для двухчастичного канала	Для трехчастичного канала
$P =$	\mathbf{p}	$\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1$
$\Lambda =$	l	λ_1, l_1, L
$\Sigma =$	s_1, s_2, s	$s_1, s_2, s_3, \sigma_1, s$
$\mathbf{v} =$	$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

Чтобы упростить обозначения, мы сосредоточим внимание на указанном выше разбиении трех частиц в виде 1 (2,3) и индекс 1 у величин $\mathbf{k}, \mathbf{q}, \lambda, l$ и σ будем опускать. Собственные значения z -компоненты полного момента j обозначим через m , орбитальных моментов λ, l и L — через μ, m и M соответственно, z -компоненты σ — через ι , а z -компоненты полного спина s — через ν .

Угловые функции двухчастичных каналов определяются формулами (15.1) и (15.6); теперь мы их будем обозначать символами $\mathfrak{Y}_j^m(\Lambda s \nu; \mathbf{P})$ и $\mathfrak{Y}_{j\Lambda\Sigma}^m(\mathbf{P})$. Для трехчастичных состояний они имеют вид

$$\mathfrak{Y}_j^m(\Lambda s \nu; \mathbf{P}) = \sum_M C(Ls j, M \nu m) Y_\Lambda^M(\mathbf{P}) i^{-\lambda-l}, \quad (17.128)$$

$$\mathfrak{Y}_{j\Lambda\Sigma}^m(\mathbf{P}) = \sum_\nu i^{l+\lambda} \mathfrak{Y}_j^M(\Lambda s \nu; \mathbf{P}) \chi_\nu^\Sigma, \quad (17.129)$$

где

$$Y_\Lambda^M(\mathbf{P}) = \sum_{\mu m} C(\lambda l L, \mu m M) Y_\lambda^\mu(\hat{\mathbf{k}}) Y_l^m(\hat{\mathbf{q}}), \quad (17.130)$$

$$\chi_\nu^\Sigma = \sum_{s_1 s_2 s_3 \iota} C(s_2 s_3 \sigma, \nu_2 \nu_3 \iota) C(s_1 \sigma s, \nu_1 \iota \nu) \chi_{\nu_1}^{s_1} \chi_{\nu_2}^{s_2} \chi_{\nu_3}^{s_3}. \quad (17.131)$$

В начальном состоянии спин системы, которую там мы называли частицей 2, теперь представляет, конечно, сумму спина и орбитального момента связанной пары (2,3). Это означает просто, что в качестве спиновой функции этой «частицы» мы используем функцию $\Phi_a(\epsilon_a, s_2 s_3 \nu)$, определяемую формулой (16.51), как это делалось ранее в (16.68).

Разложение амплитуды по угловым моментам теперь будет следующим:

$$A(\mathbf{P}' \Sigma' \nu', \mathbf{P} \Sigma \nu) = \frac{2\pi}{i p} \sum_{jm\lambda'l'l'} \mathfrak{Y}_j^m(\Lambda' s' \nu', \mathbf{P}') s_{\Lambda' \Sigma'}^j s_{\Lambda \Sigma}^j(E_{23}, E) \mathfrak{Y}_j^{m*}(\Lambda s \nu, \mathbf{P}). \quad (17.132)$$

Оно является аналогом (15.18). Вместо $S^j - 1$ мы написали здесь прямо S^j , так как эти величины представляют амплитуды процессов с двумя начальными и тремя конечными фрагментами.

Полезнее рассмотреть сечения, в которых указаны отдельные компоненты спина;

$$\mathfrak{Y}_j^m(\Lambda \Sigma \mathbf{v}, \mathbf{P}) = \sum_{M \mathbf{v}_i} i^{-\lambda-l} C(s_2 s_3 \sigma, \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 l) C(s_1 \sigma s, \mathbf{v}_1 l \mathbf{v}) \times \\ \times C(Ls j, M \mathbf{v} m) Y_{\Lambda}^M(\mathbf{P}) = i^{-\lambda-l} (\chi_{\mathbf{v}_1}^{s_1 \dagger} \chi_{\mathbf{v}_2}^{s_2 \dagger} \chi_{\mathbf{v}_3}^{s_3 \dagger}) \cdot \mathfrak{Y}_{j \Lambda \Sigma}^m(\mathbf{P}). \quad (17.133)$$

Тогда соотношение (15.39), являющееся другой формой записи (15.38), будет иметь следующий аналог:

$$A(\mathbf{P}' \mathbf{v}', \mathbf{P} \mathbf{v}) = \frac{2\pi}{i\rho} \sum \mathfrak{Y}_j^m(\Lambda' \Sigma' \mathbf{v}', \mathbf{P}') S_{\Lambda' \Sigma'}^j S_{\Lambda \Sigma}^j \mathfrak{Y}_j^{m*}(\Lambda \Sigma \mathbf{v}, \mathbf{P}) = \\ = (\chi_{\mathbf{v}_1}^{s_1} \chi_{\mathbf{v}_2}^{s_2} \chi_{\mathbf{v}_3}^{s_3})^\dagger \cdot \mathcal{A}(\mathbf{P}', \mathbf{P}) \cdot (\chi_{\mathbf{v}_1}^{s_1} \chi_{\mathbf{v}_2}^{s_2}),$$

где

$$\mathcal{A}(\mathbf{P}', \mathbf{P}) = \frac{2\pi}{i\rho} \sum \mathfrak{Y}_{j \Lambda' \Sigma'}^m(\mathbf{P}') i^{l-\lambda'-l'} S_{\Lambda' \Sigma'}^j S_{\Lambda \Sigma}^j \mathfrak{Y}_{j \Lambda \Sigma}^{m*}(\mathbf{P}). \quad (17.134)$$

В обеих формулах суммирование ведется по $j, m, \lambda', l', l, \sigma', s'$ и s .

Спиральные амплитуды. Используем спиральности, возвращаясь тем самым для начального состояния к (15.25). Функции конечного состояния, соответствующие частице 1, записываются в системе координат с осью z по вектору \mathbf{k} , а функции частиц 2 и 3 — в системе координат с осью z по вектору \mathbf{q} . Вектор \mathbf{k} совпадает по направлению с импульсом частицы 1; в системе центра масс пары (2,3) \mathbf{q} направлен вдоль импульса частицы 2. Поэтому записать все спиральности в одной и той же системе координат невозможно. Спиновой осью z частицы 1 является ее импульс в системе координат общего центра масс. В то же время [как это видно в инерциальной системе, движущейся вместе с центром масс пары (2,3)] соответствующими осями для частиц 2 и 3 будут их собственные импульсы.

Исходя из этого мы и будем записывать \mathcal{Y} . Обозначим через f и \bar{f} угловые моменты, полученные в результате сложения l и σ , а также λ и s_1 соответственно, а через o и \bar{o} — z -компоненты этих моментов. Тогда

$$\mathfrak{Y}_{j \Lambda \Sigma}^m(\mathbf{P}) = \sum_{f \bar{f} o \bar{o}} \bar{\Gamma}_{j \Lambda \Sigma}^m(f \bar{f} o \bar{o}) \mathfrak{Y}_{f \lambda s_1}^{\bar{o}}(\hat{\mathbf{k}}) \mathfrak{Y}_{l \sigma}^o(\hat{\mathbf{q}}), \quad (17.135)$$

где

$$\bar{\Gamma}_{j \Lambda \Sigma}^m(f \bar{f} o \bar{o}) = \sum_{\mu m \mathbf{v}_1 M \mathbf{v}} C(\lambda l L, \mu m M) C(s_1 \sigma s, \mathbf{v}_1 l \mathbf{v}) \times \\ \times C(Ls j, M \mathbf{v} m) C(\lambda s_1 \bar{f}, \mu \mathbf{v}_1 \bar{o}) C(l \sigma f, m l o), \quad (17.136)$$

а две функции \mathfrak{Y} , стоящие под знаком суммы, относятся к системам координат, в которых векторы \mathbf{k} и \mathbf{q} направлены по осям z . В другой форме записи:

$$\mathfrak{Y}_{j \Lambda \Sigma}^m(\mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi} \sum B_{j \Lambda \Sigma}^m(f \bar{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2' \mathbf{v}_3' o \bar{o}) i^{\lambda+l} [(2\lambda+1)(2l+1)]^{1/2} \times \\ \times [\chi_{\mathbf{v}_1}^{s_1}]' [\chi_{\mathbf{v}_2}^{s_2} \chi_{\mathbf{v}_3}^{s_3}]'' D_{\mathbf{v}_1' o}^{\bar{f}}(\mathcal{R}_{\mathbf{k}}) D_{\mathbf{v}_3' o}^f(\mathcal{R}_{\mathbf{q}}). \quad (17.137)$$

Здесь

$$B_{j \Lambda \Sigma}^m(f \bar{f} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2' \mathbf{v}_3' o \bar{o}) = \bar{\Gamma}_{j \Lambda \Sigma}^m(f \bar{f} o \bar{o}) C(\lambda s_1 \bar{f}, 0 \mathbf{v}_1' \mathbf{v}_j') \times \\ \times C(l \sigma f, 0 \mathbf{v}' l) C(s_2 s_3 \sigma, \mathbf{v}_2' \mathbf{v}_3' l'), \quad (17.138)$$

а суммирование ведется по $f, \bar{f}, v'_1, v'_2, v'_3, o, \bar{o}$ и $v' = v'_2 + v'_3$. Чтобы получить (17.137), мы воспользовались соотношением (15.25).

Подстановка этих выражений в (17.134) дает нам спиральные амплитуды. Так как ниже будут браться проекции спинов начальной второй и конечной третьей частиц на направления импульсов $-\mathbf{p}_2$ и $-\mathbf{p}_3$, то мы должны изменить знаки v_2 и v_3 . Получаем

$$A^h(\mathbf{P}'\mathbf{v}', \mathbf{P}\mathbf{v}) = \sum_{j\bar{f}f\bar{o}o} (2j+1) D_{v'_1 o}^{\bar{f}}(\mathcal{R}_h) D_{v'_2 o}^f(\mathcal{R}_q) a^j(\bar{f}\bar{f}; \mathbf{v}'\mathbf{v}, o\bar{o}), \quad (17.139)$$

где парциальные амплитуды имеют вид

$$a^j(\bar{f}\bar{f}; \mathbf{v}'\mathbf{v}, o\bar{o}) = \sum_{\Lambda\Sigma} \frac{[(2l+1)(2\lambda+1)(2L+1)]^{1/2}}{2ip\sqrt{4\pi}(2j+1)} S_{\Lambda\Sigma}^j S_{\Lambda\Sigma} \times \\ \times B_{j\Lambda\Sigma}^y(\bar{f}\bar{f}v'_1v'_2 - v'_3o\bar{o}) C(ls_j, 0vv) C(s_1s_2s, v_1 - v_2v). \quad (17.140)$$

Здесь $v = v_1 - v_2, v' = v'_2 - v'_3$, а суммирование в (17.140) проводится по $\lambda', l', L', l, s', s, \sigma'$. Символы \mathcal{R}_h и \mathcal{R}_q обозначают углы Эйлера, соответствующие поворотам, которые совмещают векторы \mathbf{k}' и \mathbf{q}' соответственно с вектором \mathbf{p} [вокруг осей $\mathbf{k}' \times \mathbf{p}$ и $\mathbf{q}' \times \mathbf{p}$; см. обсуждение, непосредственно перед формулой (15.24)]. Напомним, что спиральности частиц 2 и 3 измеряются в системе центра масс пары (2,3), а спиральность частицы 1 — в системе общего центра масс.

Указанную выше параметризацию можно использовать для амплитуды любого процесса, в котором два фрагмента (частица и связанное состояние) переходят в три. Однако при вычислении парциальных амплитуд асимметрии, возникающая при рассмотрении трех частиц, представляет серьезные трудности. Выбранные параметры хорошо приспособлены для описания процессов, при которых в начале и в конце частицы 2 и 3 являются связанными или когда в конечном состоянии все три частицы свободны. Для описания же столкновений с перестройкой, в которых в начале связаны частицы 2 и 3, а в конце, скажем, частицы 1 и 2, эти параметры не пригодны, так что расчет указанных амплитуд по отдельности совершенно невозможен. Мы можем записать амплитуды, в которых смысл переменных, соответствующих начальным и конечным состояниям, различен, но, за исключением, быть может, борновского приближения, вычисления таким способом весьма сложны.

2. Несостоятельность многоканального метода

Несмотря на указанные отрицательные черты канонической параметризации, введенной в предыдущем пункте, в принципе ее можно использовать для того, чтобы попытаться решить проблему трех тел. Недостатки будут проявляться главным образом при описании процессов перестройки.

Трехчастичное уравнение Шредингера (17.125) можно рассматривать с помощью многоканального метода, как это делалось в гл. 16, § 4, п. 1 и в гл. 17, § 1 (в частности, в п. 1). Единственное различие между процедурой, проводимой там, и полным описанием заключается в том, что уравнения не следует обрезать. Тогда (как это обсуждалось в § 2, п. 1) они будут включать непрерывную область изменения внутренней энергии пары (2,3). Следовательно, мы имеем дело с бесконечной цепочкой связанных интегро-дифференциальных уравнений или, после введения функций Грина, с бесконечным множеством связанных интегральных уравнений с двумя переменными — состоянием и внутренней энергией. Они имеют вид (17.8) и (17.9), где переменная, соответствующая энергетической «матрице», явно не указана.

Возникает важный вопрос: принадлежит ли ядро этих уравнений к классу Гильберта — Шмидта? Прежде чем отвечать на него, мы временно возвратимся назад и исследуем исходное ядро полного уравнения Липпмана — Швингера,

не разложенного по парциальным волнам. Для этого нужно вспомнить содержание гл. 10, § 2. То обстоятельство, что интересующие нас бинарные потенциалы сохраняют полный импульс двух взаимодействующих частиц, приводит к появлению в ядре двухчастичного уравнения Липпмана — Швингера δ -функции (см. также лемму, приведенную в гл. 7, § 3, п. 2). Мы видели, что эта трудность легко устраняется путем выделения δ -функции, описывающей сохранение полного импульса. Оставшееся уравнение будет выглядеть так же, как и уравнение, описывающее рассеяние одной частицы на неподвижной мишени. Так как каждый бинарный потенциал, входящий в уравнение (17.125), сохраняет по отдельности импульс одной частицы и суммарный импульс двух других частиц в трехчастичной задаче (как и в более общем случае), возникает аналогичная трудность. Например, потенциал V_{23} сохраняет по отдельности и импульс \mathbf{q}_1 , и импульс \mathbf{k}_1 , так что в соответствующем импульсном представлении он будет содержать две отражающие это обстоятельство δ -функции. В других потенциалах эти δ -функции не возникают, и поэтому выделить их и отбросить, как это делается в случае сохранения *полного* импульса, невозможно. В результате след произведения ядра на сопряженную ему величину будет бесконечным, так что такое ядро не принадлежит классу Гильберта — Шмидта¹⁾. На этот раз устранить трудность каким-либо простым способом не удается.

Вернемся к ядру уравнений (17.8) и (17.9) и запишем его в более явной форме:

$$\mathfrak{K}_{\lambda' l' E'_{23}, \lambda l E_{23}}(E; r, r') = \begin{cases} g_{\lambda'}(E - E'_{23}; r, r') \bar{V}_{\lambda' l' E'_{23}, \lambda l E_{23}}(r') & \text{при } r' < r, \\ 0 & \text{при } r' > r. \end{cases} \quad (17.141)$$

За исключением того что \bar{V} определяется равенством (16.74), в которое вместо H_a входит $V_{12} + V_{13}$, обозначения соответствуют рассматриваемому случаю. Расстояние, которое в § 1, п. 1 и в (16.74) обозначалось через r , теперь мы будем обозначать через ρ . Полный угловой момент фиксирован и в (17.141) явно не указан. Вычислим следующую величину:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda l} \int dE_{23} \int_0^{\infty} dr (\mathfrak{K} \mathfrak{K}^\dagger)_{\lambda l E_{23}, \lambda l E_{23}}(E; r, r') &= \\ &= \sum_{\lambda l} \int dE_{23} \int_0^{\infty} dr \int_0^r dr' |g_{\lambda}(E - E_{23}; r, r')|^2 \times \\ &\times \sum_{\lambda' l'} \int dE'_{23} \bar{V}_{\lambda l E_{23}, \lambda' l' E'_{23}}(r') \bar{V}_{\lambda' l' E'_{23}, \lambda l E_{23}}(r') = \\ &= \sum_{\lambda l} \int dE_{23} \int_0^{\infty} dr \int_0^r dr' |g_{\lambda}(E - E_{23}; r, r')|^2 [\bar{V}^2]_{\lambda l E_{23}, \lambda l E_{23}}(r'). \end{aligned} \quad (17.142)$$

Заметим, что сумма по λ' , l' и интеграл по E'_{23} не включают суммирования по j' . Но закон сохранения углового момента позволяет добавить и это суммирование без какого бы то ни было изменения результата. Тогда «промежуточный» набор будет полным. След (17.142) отличается от соответствующего следа ядра Липпмана — Швингера в двух отношениях: момент j и его z -ком-

¹⁾ Если задача рассматривается в системе центра масс и полный импульс в число динамических переменных больше не входит, то V_{23} все же коммутирует с \mathbf{p}_1 и т. д. Поэтому в соответствии с леммой гл. 7, § 3, п. 2 V_{23} не будет вполне непрерывным оператором. Следовательно, полное ядро как сумма операторов такого типа не только не принадлежит классу Гильберта — Шмидта, но и не является вполне непрерывным.

понента фиксированы, и интегрирование по r' ведется только до r . Последнее обстоятельство в сущности и отличает уравнения Вольтерра от двухчастичного уравнения Липпмана — Швингера. В данном же случае избавиться от него нам не удастся. Если бы множитель $|g_\lambda|^2$ отсутствовал, то интегрирование по E_{23} приводило бы к бесконечности, так как

$$\int dE_{23} |\psi_l(E_{23}, r)|^2 = \infty.$$

Наличие $|g_\lambda|^2$ не может улучшить положение вещей, так как при больших E_{23} (когда разность $E - E_{23}$ становится отрицательной) этот множитель экспоненциально растет.

Итак, мы приходим к выводу, что интегрирование по всем промежуточным энергиям выводит ядра необрезанных уравнений (17.8) и (17.9) из класса ядер Гильберта — Шмидта, хотя по переменной r они и относятся к вольтеровскому типу. Это не означает, что подобные ядра вообще непригодны, но когда они возникают, выводы становятся сомнительными, а численные расчеты — ненадежными.

3. Метод Фаддеева

Основная причина непригодности интегральных уравнений Липпмана — Швингера (и уравнений, обсуждавшихся в предыдущем пункте) к задаче трех тел заключается в появлении несвязных диаграмм типа изображенной на фиг. 17.7. Они ответственны за возникновение δ -функций, которые приводят к плохому поведению интегральных ядер. Метод, описываемый уравнениями (7.80)—(7.87), не содержит этой фундаментальной трудности. Распространим его на рассматриваемый случай.

В задаче трех тел мы обязательно сталкиваемся с процессами перестройки. В соответствии с этим удобно пользоваться операторами T , обсуждавшимися в гл. 16, § 3, п. 1; уравнения для них имеют вид (16.43) и (16.44). В дальнейшем принимаются следующие условные обозначения. Пусть в начальном состоянии частица 1 падает на связанную пару (2,3). Перепишем гамильтониан, соответствующий этой конфигурации, следующим образом:

$$H = H_1 + H'_1,$$

$$H_1 = H_0 + V_{23}, \quad H'_1 = V_{12} + V_{13}.$$

Функция Грина «простого» гамильтониана H_1 дается выражением

$$\mathcal{G}_1(E) = (E - H_0 - V_{23})^{-1}.$$

Оператор T , описывающий столкновения, при которых конечной является снова конфигурация 1(2,3), обозначим через T_{11} . Матрица \mathbf{T} получается, если взять матричные элементы этого оператора между собственными состояниями гамильтониана H_1 [см. (7.766)]. Уравнение для T_{11} имеет вид

$$T_{11} = H'_1 + H'_1 \mathcal{G}_1^+ T_{11} = V_{12} + V_{13} + (V_{12} + V_{13}) \mathcal{G}_1^+ T_{11}. \quad (17.143)$$

Операторы, отвечающие процессам с перестройкой, при которых в конечном состоянии возникают конфигурации 2 (1,3) или 3 (2,1), обозначим через T_{21} и T_{31} соответственно. [Заметим, что теперь мы не подчеркиваем индекс, как это делалось в уравнениях (16.42)—(16.44). Так как здесь осуществляется выход за пределы энергетической поверхности, то ясно, что выбор такого индекса не будет однозначным.] В соответствии с (16.44) операторы T_{21} и T_{31} можно получить из оператора T_{11} с помощью уравнений

$$\begin{aligned} T_{21} &= H'_2 + H'_2 \mathcal{G}_1^+ T_{11} = V_{23} + V_{21} + (V_{23} + V_{21}) \mathcal{G}_1^+ T_{11}, \\ T_{31} &= H'_3 + H'_3 \mathcal{G}_1^+ T_{11} = V_{31} + V_{32} + (V_{31} + V_{32}) \mathcal{G}_1^+ T_{11}. \end{aligned} \quad (17.144)$$

Введем три вспомогательных оператора T

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{11} &\equiv V_{23}\mathfrak{G}_1^+T_{11}, & \mathfrak{L}_{21} &\equiv V_{13} + V_{13}\mathfrak{G}_1^+T_{11}, \\ \mathfrak{L}_{31} &\equiv V_{12} + V_{12}\mathfrak{G}_1^+T_{11},\end{aligned}\quad (17.145)$$

через которые исходные операторы T выражаются следующим образом:

$$T_{11} = \mathfrak{L}_{21} + \mathfrak{L}_{31}, \quad T_{21} = V_{23} + \mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{31}, \quad T_{31} = V_{23} + \mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{21}. \quad (17.146)$$

Далее, имеется оператор T , необходимый для вычисления амплитуд тех процессов, при которых образуются три свободные частицы. В этом случае мы положим

$$H'_0 = V_{12} + V_{13} + V_{23},$$

так что оператор T_{01} будет задаваться соотношением

$$T_{01} = H'_0 + H'_0\mathfrak{G}_1^+T_{11} = V_{23} + \mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{21} + \mathfrak{L}_{31}. \quad (17.147)$$

Напомним, что T -матрицей процесса $1(2,3) \rightarrow 2(1,3)$ является совокупность матричных элементов оператора T_{21} , соответствующих собственным состояниям гамильтонианов H_1 и H_2 ($H_2 = H_0 + V_{13}$); T -матрица процесса $1(2,3) \rightarrow 123$ получится, если взять матричные элементы оператора T_{01} между собственными состояниями H_1 и H_0 и т. д. Все необходимые нам операторы, т. е. T_{11} , T_{21} , T_{31} и T_{01} , можно получить из \mathfrak{L}_{11} , \mathfrak{L}_{21} и \mathfrak{L}_{31} .

Вывод уравнений для \mathfrak{L}_{i1} ($i = 1, 2, 3$) проводится так же, как и раньше [см. (7.80)—(7.87)], и результат получается почти таким же. Если отдельные двухчастичные операторы T обозначить через T_i , т. е.

$$T_1 = V_{23} + V_{23}\mathfrak{G}_1^+V_{23}$$

и т. д., то

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{11} &= T_1G^+(\mathfrak{L}_{21} + \mathfrak{L}_{31}), \\ \mathfrak{L}_{21} &= T_2 + T_2G^+(\mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{31}), \\ \mathfrak{L}_{31} &= T_3 + T_3G^+(\mathfrak{L}_{11} + \mathfrak{L}_{21}).\end{aligned}\quad (17.148)$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{L}_{11} \\ \mathfrak{L}_{21} \\ \mathfrak{L}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & T_1 & T_1 \\ T_2 & 0 & T_2 \\ T_3 & T_3 & 0 \end{pmatrix} G^+ \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_{11} \\ \mathfrak{L}_{21} \\ \mathfrak{L}_{31} \end{pmatrix}, \quad (17.148a)$$

где G^+ — свободная функция Грина:

$$G^+(E) = (E + i\varepsilon - H_0)^{-1}.$$

Эти уравнения отличаются от (7.87) лишь наличием нуля в неоднородном члене. Следует, однако, отметить, что в противоположность оператору T , входящему в (7.83), рассматриваемые здесь операторы можно использовать прямо для вычисления сечений процессов с перестройкой.

Чтобы описать все разрешенные процессы такого типа, необходимо ввести также операторы T , соответствующие начальным конфигурациям $2(1,3)$ и $3(1,2)$. Они удовлетворяют соотношениям, подобным (17.148a). образуем теперь квадратную матрицу \mathfrak{L}_{ij} , обозначаемую символом \mathfrak{L} , элементами которой являются все эти операторы. Если T_{ij} описывает процесс $i(\dots) \rightarrow j(\dots)$, то

$$T_{ij} = \mathfrak{L}_{ij} + \mathfrak{L}_{mj} + V_{kn} \quad (i \neq j, \quad l \neq m \neq i, \quad k \neq n \neq j)$$

и

$$T_{ii} = \mathfrak{L}_{li} + \mathfrak{L}_{mi} \quad (l \neq m \neq i).$$

Уравнение для матрицы \mathfrak{L} имеет вид

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{B} + \mathfrak{B}G^+\mathfrak{L}, \quad (17.149)$$

где

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & T_1 & T_1 \\ T_2 & 0 & T_2 \\ T_3 & T_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Основное достоинство уравнения (17.148а) или (17.149) заключается в том, что на главной диагонали матрицы \mathfrak{B} , соответствующей ядру, стоят нули. Поэтому итерации уравнения с помощью диаграммной техники не будут содержать несвязных графиков (исключение представляет лишь первый член). В этом легко убедиться на примере однократной итерации, для которой имеем

$$\mathfrak{K}^2 = \mathfrak{B}G^+\mathfrak{B}G^+ = \begin{pmatrix} T_1G^+(T_2+T_3) & T_1G^+T_3 & T_1G^+T_2 \\ T_2G^+T_3 & T_2G^+(T_1+T_3) & T_2G^+T_1 \\ T_3G^+T_2 & T_3G^+T_1 & T_3G^+(T_1+T_2) \end{pmatrix} G^+.$$

Единственная δ -функция, появляющаяся в \mathfrak{K}^2 , обусловлена сохранением полного импульса, а опасные члены, которые соответствуют частичному сохранению импульса, теперь не возникают. Поэтому уравнение (17.148а) много лучше, чем уравнение Липпмана — Швингера или уравнения, обсуждавшиеся в п. 2. Доказательства и анализ свойств уравнения (17.148а) можно найти в работах [1012—1015, 544, 545]¹⁾.

Столь же успешно метод Фаддеева может использоваться и при наличии в гамильтониане взаимодействия трехчастичного члена, который обозначим здесь через V_{123} . Конечно, предполагается, что V_{123} не содержит δ -функций, т. е. поведение этого оператора в пространстве трехчастичных состояний является достаточно хорошим. Таким образом, трехчастичный оператор T , обозначаемый далее как T_{123} , можно найти из уравнения Липпмана — Швингера

$$T_{123} = V_{123} + V_{123}G^+T_{123},$$

при решении которого не появляется никаких осложнений. Если имеется *только* взаимодействие V_{123} , то несвязные диаграммы не возникают.

В рассматриваемом случае в уравнениях (17.143)—(17.145) в дополнение к другим потенциалам появляется V_{123} , так что мы должны ввести в рассмотрение четвертый вспомогательный оператор T :

$$\mathfrak{S}_{01} \equiv V_{123} + V_{123}\mathfrak{S}_1^+T_{11}; \quad (17.145a)$$

он будет входить в правые части всех четырех уравнений (17.146), (17.147) в виде дополнительного слагаемого. В результате вместо трех связанных уравнений (17.148) получится *четыре* и матричное уравнение (17.149) превратится в четырехрядное матричное уравнение, в котором \mathfrak{S} является матрицей \mathfrak{S}_{ij} при $i, j = 0, 1, 2, 3$, а

$$\mathfrak{B} \equiv \begin{pmatrix} 0 & T_{123} & T_{123} & T_{123} \\ T_1 & 0 & T_1 & T_1 \\ T_2 & T_2 & 0 & T_2 \\ T_3 & T_3 & T_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В остальном уравнение (17.149) остается без изменений, что относится, в частности, и к его свойствам связности. Для простоты в дальнейшем будет считаться, что $V_{123} \equiv 0$.

¹⁾ Другой метод сведения задачи трех тел к интегральным уравнениям с вполне непрерывными ядрами был развит нами совсем недавно, и его не удалось включить в эту книгу; этот метод будет опубликован отдельно. В нем не используется система операторных уравнений, и он не обращается к двухчастичным потенциалам, а имеет дело лишь с двухчастичными операторами T ; соответствующую процедуру можно непосредственно обобщить на случай более трех частиц.

Конечно, расчет трехчастичных амплитуд фактически должен осуществляться после перехода от операторного уравнения (17.149) к соответствующему интегральному уравнению. Оператор T нужно заменить T -матрицей (рассматриваемой вне энергетической поверхности). Так как подобные T -матрицы по своей природе связаны со всевозможными процессами перестройки, то пользоваться асимметричными импульсами, введенными в п. 1, чрезвычайно неудобно. Вместо этого T -матрицу удобно параметризовать, как описано ниже.

Симметричная параметризация. В системе центра масс три импульса \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 образуют замкнутый треугольник, форма которого полностью определяется величинами p_1 , p_2 и p_3 . Его положение в пространстве можно задать при помощи углов Эйлера ψ , θ и φ , которые определяют ориентацию системы координат, «жестко связанной с телом»¹⁾, по отношению к «неподвижной» системе координат. Свяжем с треугольником правую систему координат, ось y которой перпендикулярна к его плоскости, а ось z направлена по одному из импульсов. Вместо величин импульсов можно ввести кинетические энергии

$$E_1 = \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad E_2 = \frac{p_2^2}{2m_2}, \quad E_3 = \frac{p_3^2}{2m_3},$$

совокупность которых обозначим через \mathfrak{E} . Задание шести параметров ψ , θ , φ , E_1 , E_2 , E_3 эквивалентно заданию шести компонент векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{q}_1 , использовавшихся в п. 1.

Прежде всего напомним, что функции Грина, а значит, и двухчастичные T -матрицы содержат *полную* кинетическую энергию всех трех частиц. Следовательно, в системе общего центра масс, например,

$$\begin{aligned} T_1(E) &= V_{23} + V_{23} \left(E - \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{p_3^2}{2m_3} - V_{23} \right)^{-1} V_{23} = \\ &= V_{23} + V_{23} \left(E - \frac{p_1^2}{2m_1} - \frac{(p_2 + p_3)^2}{2(m_2 + m_3)} - \frac{q_1^2}{2\mu_{23}} - V_{23} \right)^{-1} V_{23}. \end{aligned}$$

Рассматривая матричные элементы между собственными состояниями импульсов, убеждаемся, что это выражение переходит в следующее:

$$V_{23} + V_{23} \left(E - E_1 \frac{m_1}{\mu_1} - \frac{q_1^2}{2\mu_{23}} - V_{23} \right)^{-1} V_{23} = \hat{T}_1 \left(E - E_1 \frac{m_1}{\mu_1} \right); \quad (17.150)$$

под \hat{T}_1 здесь понимается двухчастичный оператор T в системе собственного центра масс.

Вспоминая принятое ранее соглашение о двух видах продолжения T в область вне энергетической поверхности, мы видим, что матрица \mathfrak{Z} относится к типу «плюс»; в то же время необходимо считать, что двухчастичные T -матрицы, входящие в ядро уравнения (17.149), лежат «полностью вне» многообразия, определяемого соотношением (7.48а). Величина E_1 , фигурирующая в (17.150), указывает на то, какой именно берется матричный элемент; так как оператор \hat{T}_1 диагонален по \mathbf{p}_1 , то его действие на функции в левой и в правой обкладках одинаково.

Теперь нам нужно рассмотреть углы. Оператор \hat{T}_1 является функцией угла, образуемого векторами \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}'_1 . Если ось z направить вдоль \mathbf{p} , то получим

$$\cos \theta_1 = \frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{q}_1)}{p_1 q_1} = \frac{(m_2 + m_3)(p_3^2 - p_2^2) + (m_2 - m_3)p_1^2}{2\{m_1 m_2 m_3 E_1 [(m_2 + m_3)(E_2 + E_3) - m_1 E_1]\}^{1/2}}, \quad (17.151)$$

что дает нам угол между \mathbf{q}_1 и \mathbf{p}_1 , выраженный через начальные энергии E_1 , E_2 , E_3 . Очевидно, что такое же соотношение имеется и между углом, обра-

¹⁾ Такую терминологию следует использовать с осторожностью, так как «тело», определяемое тремя импульсами, не является твердым.

зуемым векторами \mathbf{q}'_1 и \mathbf{p}'_1 , и конечными энергиями E'_1, E'_2, E'_3 . Угол рассеяния $\bar{\theta}_1$, от которого зависит \hat{T}_1 , дается формулой

$$\cos \bar{\theta}_1 = \cos \theta_1 \cos \theta'_1 + \sin \theta_1 \sin \theta'_1 \cos (\varphi - \varphi'). \quad (17.152)$$

Здесь φ и φ' — углы Эйлера, определяющие ориентацию начальной и конечной систем координат, жестко связанных с телом, по отношению к неподвижной системе.

Разложение по угловым моментам. Теперь мы проведем анализ угловых моментов, следуя Онесу [669]. С этой целью нам потребуется функция преобразования

$$(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 | 0 \mathfrak{E} j m m) = (\Psi (\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3), \Psi (0 \mathfrak{E} j m m)),$$

для которой полный импульс равен нулю ($\mathbf{P} = 0$), а m и m — собственные значения проекций углового момента на ось z неподвижной системы координат и системы, жестко связанной с телом, соответственно (для простоты будем предполагать, что частицы являются бесспиновыми). Эта функция должна иметь вид

$$(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 | 0 \mathfrak{E} j m m) = C_j \delta (\mathbf{P}') \delta (E_1 - E'_1) \delta (E_2 - E'_2) \delta (E_3 - E'_3) D_{m m}^{j*} (\mathcal{R}), \quad (17.153)$$

где $D_{m m}^j$ есть $(2j + 1)$ -мерная матрица, соответствующая вращению \mathcal{R} , углы Эйлера которого равны ψ, θ и φ . Константа C_j определяется условием нормировки, которое имеет вид

$$\begin{aligned} (\Psi (\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3), \Psi (\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3)) &= \delta (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \delta (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) \delta (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}'_3), \\ (\Psi (\mathbf{P}' \mathfrak{E}' j' m' m'), \Psi (\mathbf{P} \mathfrak{E} j m m)) &= \delta (\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta (E_1 - E'_1) \delta (E_2 - E'_2) \times \\ &\quad \times \delta (E_3 - E'_3) \delta_{j j'} \delta_{m m'} \delta_{m m'}. \end{aligned} \quad (17.154)$$

Для определения величины этой константы необходимо вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \int (0 \mathfrak{E} j m m | \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}'_3 (\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 | \mathbf{P}' \mathfrak{E}' j' m' m') = \\ = \int d\mathbf{p}''_1 d\mathbf{p}''_2 d\mathbf{p}''_3 | C_j |^2 \delta (\mathbf{P}'') \delta (\mathbf{P}') \delta (E_1 - E''_1) \dots \delta (E_3 - E''_3) D_{m m}^j (\mathcal{R}) D_{m' m'}^{j*} (\mathcal{R}). \end{aligned}$$

Направим ось z системы координат, связанной с телом, вдоль вектора \mathbf{p}''_1 . Чтобы отметить это обстоятельство, мы вместо m будем писать m_1 . При таком выборе оси z углы Эйлера θ и ψ являются полярными углами вектора \mathbf{p}''_1 в неподвижной системе координат; поэтому

$$d\mathbf{p}''_1 = p_1''^2 d\theta \sin \theta d\psi.$$

Так как ось x системы, связанной с телом, лежит в плоскости векторов \mathbf{p}''_1 и \mathbf{p}''_2 , угол φ есть азимутальный угол вектора \mathbf{p}''_2 . Угол между \mathbf{p}''_1 и \mathbf{p}''_2 дается формулой

$$\cos \theta_{12} = \frac{p_1''^2 + p_2''^2 - p_3''^2}{2p_1'' p_2''}, \quad (17.155)$$

так что

$$d \cos \theta_{12} = \frac{p_3'' d p_3''}{p_1'' p_2''}.$$

Выполним сначала интегрирование по \mathbf{p}''_3 , используя δ -функцию от \mathbf{P}'' . Тогда интегрирование по θ_{12} можно заменить интегрированием по p_3'' и мы получим

$$\begin{aligned} d\mathbf{p}''_1 d\mathbf{p}''_2 &= p_1'' p_2'' p_3'' d\mathbf{p}''_1 d\mathbf{p}''_2 d p_3'' d\mathcal{R} = \\ &= m_1 m_2 m_3 dE_1'' dE_2'' dE_3'' d\mathcal{R}, \\ d\mathcal{R} &= \sin \theta d\psi d\theta d\varphi; \end{aligned} \quad (17.156)$$

используя, наконец, ортогональность матриц вращения ([719], стр. 75), получаем

$$\int d\mathcal{R} D_{m\mu}^j(\mathcal{R}) D_{m'\mu'}^{j'*}(\mathcal{R}) = \delta_{jj'} \delta_{m\mu} \delta_{m'\mu'} \frac{8\pi^2}{2j+1}. \quad (17.157)$$

Сравнивая полученный результат с (17.154), приходим к выводу, что с точностью до несущественного фазового множителя

$$C_j = \frac{(2j+1)^{1/2}}{2\pi (2m_1 m_2 m_3)^{1/2}}. \quad (17.158)$$

В целях проверки полученного результата поучительно вычислить интеграл ($\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0$):

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{P} \int dE_1 dE_2 dE_3 \sum_{j\mu\mu'} (\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 | \mathcal{P} \mathcal{E} j\mu\mu') (\mathcal{P} \mathcal{E} j\mu\mu' | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) = \\ & = \delta(\mathbf{P}'') \frac{\delta(E'_1 - E''_1) \delta(E'_2 - E''_2) \delta(E'_3 - E''_3)}{8\pi^2 m_1 m_2 m_3} \sum_{j\mu\mu'} D_{m\mu}^{j*}(\mathcal{R}') D_{m\mu}^j(\mathcal{R}'') (2j+1). \end{aligned} \quad (17.159)$$

В силу унитарности матриц D имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j\mu\mu'} (2j+1) D_{m\mu}^{j*}(\mathcal{R}') D_{m\mu}^j(\mathcal{R}'') &= \sum_{j\mu\mu'} D_{m\mu}^j(\mathcal{R}'^{-1}) D_{m\mu}^j(\mathcal{R}'') (2j+1) = \\ &= \sum_j (2j+1) \chi^j(\mathcal{R}'^{-1} \mathcal{R}'') = \\ &= \sum_j \chi^{j*}(\mathbf{1}) \chi^j(\mathcal{R}'^{-1} \mathcal{R}''), \end{aligned}$$

где χ^j — след $D_{m\mu}^j$. т. е.

$$\chi^j = \sum_{\mu} D_{m\mu}^j.$$

Далее, в силу *теоремы о характерах групп*¹⁾ имеем

$$\sum_j \chi^j(\mathcal{R}_1) \chi^{j*}(\mathcal{R}_2) = 8\pi^2 \delta(\psi_1 - \psi_2) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \delta(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \quad (17.160)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j\mu\mu'} (2j+1) D_{m\mu}^{j*}(\mathcal{R}') D_{m\mu}^j(\mathcal{R}'') = 8\pi^2 \delta(\mathcal{R}' - \mathcal{R}''); \quad (17.161)$$

δ -символ в правой части этого равенства служит сокращенным обозначением произведения трех δ -функций, входящих в (17.160); соотношение (17.161) является обобщением формулы (2.14).

С помощью (17.161) правая часть (17.159) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \delta(\mathbf{P}'') (m_1 m_2 m_3)^{-1} \delta(E'_1 - E''_1) \delta(E'_2 - E''_2) \delta(E'_3 - E''_3) \delta(\psi' - \psi'') \delta(\varphi' - \varphi'') \times \\ & \quad \times \delta(\cos \theta' - \cos \theta'') = \delta(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \delta(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \end{aligned}$$

[см. (17.156)].

Теперь мы в состоянии вычислить матричные элементы двухчастичной T -матрицы на базисе функций угловых моментов:

$$\begin{aligned} & (0\mathcal{E}' j' m' \mu'_1 | T_1(E) | 0\mathcal{E} j\mu\mu_1) = C_j C'_j \int d\mathbf{p}''_1 \dots d\mathbf{p}''_3 \delta(\mathbf{P}'') \delta(\mathbf{P}''') \times \\ & \quad \times \delta(E'_1 - E''_1) \dots \delta(E'_3 - E''_3) D_{m'\mu'_1}^{j'}(\mathcal{R}'') D_{m\mu_1}^j(\mathcal{R}''') (\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 | T_1(E) | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3). \end{aligned}$$

¹⁾ Соотношение (17.160) для группы вращений является аналогом соотношения (3.15), приведенного в книге [837], стр. 26, в том же смысле, как соотношение (10.13), приведенное у Вигнера [912], стр. 123), аналогично его уравнению (9.33) (стр. 83).

Интегралы преобразуются описанным выше способом, и мы получаем

$$\frac{\{(2j+1)(2j'+1)\}^{1/2}}{8\pi^2} m_1 m_2 m_3 \int d\mathcal{R}'' d\mathcal{R}''' D_{m''m'''}^{j'}(\mathcal{R}'') D_{mm_1}^{j*}(\mathcal{R}''') (|T_1|).$$

Теперь, согласно (17.150), в системе общего центра масс

$$(\mathbf{p}_1'' \mathbf{p}_2'' \mathbf{p}_3'' | T_1(E) | \mathbf{p}_1''' \mathbf{p}_2''' \mathbf{p}_3''') = \delta(\mathbf{p}_1'' - \mathbf{p}_1''') \hat{T}_1 \left(\mathbf{p}_2'', \mathbf{p}_2'''; E - E \frac{m_1}{\mu_1} \right),$$

причем

$$\delta(\mathbf{p}_1'' - \mathbf{p}_1''') = \frac{\delta(E_1'' - E_1''') \delta(\psi'' - \psi''') \delta(\cos \theta'' - \cos \theta''')}{m_1 p_1}.$$

Выполним интегрирование по ψ'' и θ'' и воспользуемся формулой ([719], стр. 54)

$$D_{mm}^{j*}(\psi'', \theta'', \varphi'') = e^{im(\varphi'' - \varphi''')} D_{mm}^{j*}(\psi'', \theta'', \varphi'').$$

Так как T -матрица \hat{T}_1 зависит лишь от разности $\varphi'' - \varphi''' = \alpha$ [см. (17.152)], интегрирование по ψ'' , θ'' и φ'' можно провести с помощью (17.157):

$$\begin{aligned} (0\mathfrak{E}' j' m' m_1' | T_1(E) | 0\mathfrak{E} j m m_1) = \\ = \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{m_1 m_1'} \delta(E_1 - E_1') m_2 m_3 p_1^{-1} \mathcal{Y}_1^{m_1}(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}; E), \end{aligned} \quad (17.162)$$

где

$$\mathcal{Y}_1^{m_1}(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}; E) = \int_0^{2\pi} d\alpha e^{im_1 \alpha} \hat{T}_1 \left(E_2' E_3', E_2 E_3; \cos \bar{\theta}_1; E - E_1 \frac{m_1}{\mu_1} \right). \quad (17.163)$$

Здесь функция \hat{T}_1 в подынтегральном выражении — обычная T -матрица рассеяния частиц 2 и 3, рассматриваемая вне энергетической поверхности. Угол рассеяния $\bar{\theta}_1$, согласно (17.151) и (17.152), выражается через энергии E_1 , E_2 , E_2' , E_3 , E_3' и угол $\varphi - \varphi' = \alpha$.

Формулы (17.162) и (17.163) выведены нами при специфическом предположении, что ось z системы, жестко связанной с телом, направлена вдоль вектора \mathbf{p}_1 . Снимем теперь это ограничение. Обозначим через β_1 и β_1' углы, которые вектор \mathbf{p}_1 образует с осью z начальной и конечной систем координат, связанных с телом, причем в обоих случаях эта ось лежит в плоскости треугольников \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{p}_3 и \mathbf{p}_1' , \mathbf{p}_2' , \mathbf{p}_3' . Тогда

$$(j m_1 | j m) = d_{m_1 m}^j(\beta_1), \quad (j m' | j m_1) = \bar{d}_{m_1 m'}^{j*}(\beta_1')$$

и (17.162) превращается в формулу

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{E}' m', \mathfrak{E} m}^{j(1)}(E) = (0\mathfrak{E}' j m m' | T_1(E) | 0\mathfrak{E} j m m) = \\ = m_2 m_3 p_1^{-1} \delta(E_1 - E_1') \sum_{m''} d_{m'' m'}^{j*}(\beta_1') d_{m'' m}^j(\beta_1) \mathcal{Y}_1^{m''}(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}; E). \end{aligned} \quad (17.164)$$

Обладая инвариантностью относительно пространственных вращений, матрица (17.162) диагональна по m , m' , j и не зависит от m , так что мы получаем более простое выражение. Следовательно, усреднив предварительно правую часть по m , можно скомбинировать матрицы обоих вращений, в результате чего будем иметь

$$T_{\mathfrak{E}' m', \mathfrak{E} m}^{j(1)}(E) = m_1 m_2 m \int d\mathcal{R} D_{m'' m'}^{j*}(\mathcal{R}) (\mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' \mathbf{p}_3' | T_1(E) | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3); \quad (17.165)$$

здесь \mathcal{R} — вращение, переводящее систему координат, связанную с $\mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' \mathbf{p}_3'$, в систему, которая связана с $\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3$, а $d\mathcal{R}$ дается (17.156). С помощью

(17.161) полученное соотношение можно обратить:

$$(\mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 \mathbf{p}'_3 | T_1 | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3) = (8\pi^2 m_1 m_2 m_3)^{-1} \sum_{jmm'} D_{mm'}^j(\mathcal{R}) T_{\mathfrak{E}'m'}^{j(1)} \mathfrak{E}_m(E). \quad (17.166)$$

Соотношения (17.165) и (17.166) являются очевидными аналогами (11.10) и (13.12). При конкретных расчетах соотношение (17.164) несколько более удобно, чем (17.165).

Матричные элементы операторов T_2 и T_3 получаются по аналогии с (17.164):

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{E}'m', \mathfrak{E}_m}^{j(2)}(E) &\equiv (0\mathfrak{E}'jmm' | T_2(E) | 0\mathfrak{E}jmm) = \\ &= m_1 m_3 p_2^{-1} \delta(E_2 - E_2') \sum_{m''} d_{mm''}^{j*}(\beta_2') d_{m''m}^j(\beta_2) \mathcal{Y}_2^{m''}(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}; E), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{E}'m', \mathfrak{E}_m}^{j(3)}(E) &\equiv (0\mathfrak{E}'jmm' | T_3(E) | 0\mathfrak{E}jmm) = \\ &= m_1 m_2 p_3^{-1} \delta(E_3 - E_3') \sum_{m''} d_{mm''}^{j*}(\beta_3') d_{m''m}^j(\beta_3) \mathcal{Y}_3^{m''}(\mathfrak{E}', \mathfrak{E}; E). \end{aligned} \quad (17.164a)$$

Здесь β_2 , β_2' и β_3 , β_3' — углы между осью z , связанной с телом, и векторами \mathbf{p}_2 и \mathbf{p}_3 соответственно. Теперь мы должны фиксировать эту ось z по отношению к векторам \mathbf{p} . Например, ее всегда можно выбрать так, чтобы она совпала с направлением \mathbf{p}_1 . Тогда $\beta_1 = \beta_1' = 0$, а β_2 , β_2' , β_3 , β_3' будут определяться формулой (17.155) и ее очевидными аналогами.

Соотношения (17.164) и (17.164a) совместно с (17.151) дают возможность выразить и неоднородный член, и ядро уравнения Фаддеева (17.149) через энергетические переменные и переменные, связанные с угловыми моментами. Затем аналогичные матричные элементы определим и для операторов \mathfrak{S}_{hl} , обозначив их через $\mathfrak{S}_{\mathfrak{E}'m', \mathfrak{E}_m}^j(hl)$. Конечно, соотношения (17.164) и (17.165) будут справедливы также и в этом случае. В результате (17.148) превратится в уравнение

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\mathfrak{E}'m', \mathfrak{E}_m}^j &= \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}'m', \mathfrak{E}_m}^j + \sum_{m''=-j}^j \int dE_1'' dE_2'' dE_3'' \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}'m', \mathfrak{E}_m}^{j m''} \times \\ &\times \frac{1}{E + i\epsilon - E_1'' - E_2'' - E_3''} \mathfrak{S}_{\mathfrak{E}''m'', \mathfrak{E}_m}^j \quad (17.167) \end{aligned}$$

(величины $\mathfrak{S}^{(hl)}$ и $T^{(h)}$ здесь — снова трехрядные матрицы). Отметим, что интегрирование в (17.167) проводится в действительности лишь по двум переменным, но для разных элементов это разные переменные.

Предположим, что мы смогли найти для каждого j решение уравнения (17.167). Тогда, используя (17.153), мы получим матрицы \mathfrak{S}_{hl} в импульсном представлении. Соотношения (17.146) и их аналоги дадут нам матрицы T_{ij} . В конечном итоге нам необходимы матричные элементы этих операторов между состояниями, которые соответствуют одной свободной частице и двум связанными. Связанная пара частиц обладает заданным угловым моментом, при сложении которого с орбитальным угловым моментом свободной частицы получается полный момент j . Так как в свободной плоской волне имеется бесконечное число орбитальных угловых моментов, то расчет амплитуды столкновения с перестройкой при изменении спина связанного состояния требует в принципе вычисления T -матриц, соответствующих бесконечному набору значений j .

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Соотношение (17.5) впервые вывел Ньютон [651].

Рассматривать реакции с помощью изучения системы уравнений Шредингера впервые предложил Брейт [104].

В этой книге мы следуем в основном работе Ньютона [644] (см. также [748, 749]).

Теория взаимодействий в конечном состоянии создана Ватсоном [886]; она изложена также в [345], гл. 9, § 3.

Существование определенной функции, зная которую можно получить все элементы S -матрицы, в более частном случае установил Лекутэр [518]. То, что эта функция является детерминантом Фредгольма интегрального уравнения теории рассеяния, было показано Ньютоном [647]. Изложение § 1, п. 3 следует по существу этой работе. По этому поводу см. также [143, 144, 71, 808, 338].

Униформизация с математической точки зрения рассмотрена, например, Спрингером [790], стр. 7. Униформизацию (17.69) для двухканальной задачи предложили Кокс [183] и Като [461].

Аргументация, которая связана с фиг. 17.3 и касается невозможности отображения трехканальной римановой поверхности на плоскость (если не прибегать к двоякопериодическим функциям), развита Гебелем (C. Goebel, частное сообщение). См. также работу [889].

То обстоятельство, что при изменении сил полюсы, расположенные вблизи верхнего берега разреза и приводящие тем самым к резонансам, за порогом меняют свое положение, было независимо указано в работах [735, 236, 21, 195, 638]; см. также [882].

Обобщение двойных дисперсионных соотношений на случай многоканальных процессов предложено в работах [281, 853, 854]. Обобщение на многоканальные задачи N/D -метода и соответствующее исследование проведено в работах [69, 154, 302, 304, 800, 551, 632, 633, 33, 636, 31, 485].

К § 2. Рассуждения, приведенные в п. 1, предложены Ньютоном [651].

Среди работ, касающихся аналитического поведения S -матрицы вблизи порога, можно упомянуть статьи [234, 235]. На пороговую аномалию как наблюдаемое явление впервые указал Вигнер [907]; поэтому иногда ее называют *вигнеровским пиком*. Применение к конкретным задачам можно найти в работах [985] и [135], приложение В.

Общее рассмотрение пороговых аномалий можно найти в работах [359, 105, 106 (стр. 274), 949, 950, 644, 645, 953, 208, 269—271, 428, 639, 595, 596, 850]. Важность изучения пороговых явлений для получения информации о четностях подчеркнул Адейр [8]. Влияние кулоновского потенциала исследовали Фонда и Ньютон [277]; в работе [278] эти авторы применили соответствующие результаты к задаче рассеяния рентгеновских лучей.

Аналогичные пороговые явления в трехчастичных каналах были рассмотрены Фонда и Ньютоном [279] и Холлидеем [369]; см. также работы [266, 503, 733].

Если частицы в пороговом канале нестабильны, то пик, конечно, «размывается». Это обстоятельство было подчеркнуто в работах [951, 640, 273].

По поводу условия (17.78) можно сделать замечание, приведенное в комментарии к § 2, гл. 12, относительно уравнения (12.165).

Влияние наличия порога на резонансы рассмотрено в работах [239, 832, 950, 421, 39, 38, 890].

К § 3. Изложение п. 1 следует в основном работе [280, 648], а п. 2 — работе [648]; см. также [281].

Модель Вигнера — Вайскопфа была предложена в работе [916]; она изучалась также в работах [624, 896].

Бармановские потенциалы на случай связанных каналов обобщил Кокс [184].

Теория эффективного радиуса обобщена на многоканальные задачи в работах [207, 736, 737, 776, 635].

К § 4, п. 1. Релятивистский анализ трехчастичных состояний с определенными угловыми моментами можно найти у Широкова [1023] и Вика [905]; см. также работы [247, 194, 1000, 559].

К § 4, п. 3. Уравнения Фаддеева предложены в работах [1012, 1013, 1015]; см. также [722, 724, 544, 545, 669, 670, 893, 68, 412, 329, 192, 10, 43, 600, 601]. В п. 3 рассматривались несколько модифицированные уравнения Фаддеева — в форме, предложенной Лавлисом [544, 545]. Метод Фаддеева примыкает к более старому методу Ватсона [887, 888]. Видоизменения метода, необходимые при наличии трехчастичных сил, впервые были рассмотрены Ньютоном [654].

Переменные $\psi, \theta, \varphi, E_1, E_2, E_3$ в уравнении Фаддеева ввел Онес [669]; он же провел соответствующий анализ по угловым моментам. При изложении соответствующих вопросов мы следовали по существу указанной работе, исправив некоторые незначительные ошибки.

Задача трех тел рассматривалась также в следующих работах: [260, 159, 160, 869, 849, 587, 93, 99, 1001, 1002, 246, 209—213, 279, 167, 969, 40, 781, 20, 604, 382, 952, 142, 2—4, 66, 563, 156, 935, 32, 533, 819, 419, 570, 54, 14, 939, 381, 851, 316, 369, 733].

ЗАДАЧИ

1. Доказать соотношения (17.32) и (17.33).

2. Предположим, что частица A в поле бесконечно тяжелого ядра B имеет два связанных состояния с нулевыми угловыми моментами и с энергиями связи 10 и 11 $Mэв$, причем других связанных состояний эта система не имеет. Частица C , масса которой равна 818 $Mэв$, притягивается к ядру B , причем соответствующий потенциал имеет вид прямоугольной ямы глубиной 8,23 $Mэв$ и шириной $5,2 \cdot 10^{-13}$ см. Взаимодействие между частицами C и A — экспоненциальное: его радиус равен $0,5 \cdot 10^{-13}$ см, а интенсивность 100 $кэв$. Рассмотреть неупругое столкновение, при котором частицы C с энергией от 1 до 2 $Mэв$ падают на систему (A, B) , находящуюся в основном состоянии, и переводят ее в возбужденное состояние. При каких энергиях сечение неупругого процесса будет иметь пики? Сделав разумные приближения, вычислить сечение в соответствующей энергетической области. Построить график его зависимости от энергии.

3. Восполнить недостающие детали в доказательстве соотношения (17.38).

4. Вычислить пороговые аномалии дифференциального и полного сечений в случае нейтральных частиц, если во входном канале обе частицы имеют спин 0, а в пороговом канале спин одной из частиц равен J , а другой — или 0, или $1/2$.

5. Решить задачу 4 в случае, когда и во входном, и в пороговом каналах одна из частиц имеет спин 0, а другая — спин $1/2$.

6. Решить задачу 4 в случае, когда спины падающих частиц равны 0 и $1/2$, а спины частиц в пороговом канале имеют значения J и 0.

7. Решить задачу 4 в случае, когда во входном канале спины частиц равны 0 и 1, а в пороговом канале оба они равны 0.

8. Проверить соотношение (17.116).

9. Вывести уравнения (17.148).

10. Проверить формулу (17.151).

11. Предположим, что в примере из § 3, п. 1, в котором рассматривается прямоугольная $N \times N$ яма, последний порог возникает при очень высокой энергии E_N . Доказать, что в пределе при $E_N \rightarrow \infty$ в любой фиксированной энергетической области рассеяние определяется лишь той частью матрицы потенциала V , которая соответствует первым $N - 1$ каналам, т. е. состоит из $(N - 1) \times (N - 1)$ элементов. Другими словами, показать, что связью каналов с далекими по энергии порогами можно пренебречь.

Приближение коротких волн

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будут обсуждаться приближенные методы теории рассеяния, применимые в том случае, когда дебройлевская длина волны рассеиваемой частицы (или относительного движения двух частиц) мала. В § 2 и 3 имеется в виду, что она мала по сравнению с характерным расстоянием, на котором велико относительное изменение сил взаимодействия. В § 4, где рассматривается рассеяние частицы связанным состоянием, масштаб энергии задается энергией связи E_B . Если величину $(2mE_B)^{-1/2}$ назвать *размером* связанного состояния (в том же смысле, в котором говорят о размерах дейтрона), то можно сказать, что во всех случаях (§ 2—4) длина волны падающей частицы мала по сравнению с размерами рассеивателя. Следовательно, при заданных межчастичных потенциалах мы будем находиться в области высоких частот, или *высоких энергий*.

При данной энергии излагаемые методы применимы в том случае, когда пространственный масштаб сил, т. е. размеры рассеивателя, велик. Поэтому данная ситуация полностью аналогична той, которая возникает при рассеянии электромагнитных волн в пределе геометрической оптики (гл. 3, § 5).

Конечно, понятие *локальной длины волны* имеет смысл лишь в том случае, когда на длине волны кинетическая энергия меняется мало. Нам нужно требовать, чтобы во *всей* представляющей интерес пространственной области локальная длина волны изменялась слабо. При выполнении подобного условия в случае физической оптики мы имеем право ввести в рассмотрение *лучи* и перейти к предельному случаю геометрической оптики. Аналогично в квантовой физике можно говорить о *траекториях* и перейти к классической механике. Математическая природа этих двух явлений одна и та же, как это было объяснено в начале гл. 3, § 5.

Одной из характерных особенностей рассеяния при высоких энергиях является то, что оно имеет тенденцию концентрироваться в направлении вперед. Физически это очевидно. В этом же можно убедиться с помощью количественной оценки, если заметить, что угол отклонения классической частицы, имеющей импульс p , при передаче ей мишенью импульса Δp в хорошем приближении дается формулой

$$\theta \approx \frac{\Delta p}{p}.$$

Этот переданный импульс равен в свою очередь действующей силе, проинтегрированной по промежутку времени, в течение которого частица находилась в области взаимодействия радиусом R ,

$$\Delta p \approx \bar{V} \frac{R}{v} = \frac{\bar{V}}{v} R.$$

Поэтому

$$\theta \approx \frac{\bar{V}}{pv} \approx \frac{\bar{V}}{2E}$$

(при условии, что это отношение мало по сравнению с единицей).

Согласно квантовой механике, при прохождении частицы через рассеиватель ее положение в поперечном направлении определяется с точностью R , что приводит к неопределенности поперечного импульса

$$\delta p \approx \frac{\hbar}{R}.$$

Поэтому квантовомеханические эффекты вызывают появление неопределенности $\delta\theta$ в угле рассеяния:

$$\delta\theta \approx \frac{\hbar}{pR} = \frac{\lambda}{R}.$$

При малом угле θ эта неопределенность для них должна быть мала по сравнению с θ , если действительно можно говорить о траекториях; в противном случае необходимо, чтобы она была мала по сравнению с единицей. Таким образом, мы требуем, чтобы выполнялось

$$\lambda \ll R \quad \text{и} \quad \lambda \ll R \frac{E}{\bar{V}};$$

последнее неравенство можно переписать в виде

$$\frac{\hbar v}{\bar{V}R} \ll 1.$$

Поскольку длина волны связана с импульсом частицы соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p},$$

то переход к коротким волнам можно формально мыслить как предел $\hbar \rightarrow 0$ ¹⁾. С математической точки зрения рассматривать такой предел очень удобно; это, конечно, отражает то обстоятельство, что мы вступаем в классическую область, если величину постоянной Планка можно считать пренебрежимо малой (поэтому в § 2, п. 3 мы не будем пользоваться обычной системой единиц, в которой $\hbar = 1$). Можно ожидать, что в этом пределе уравнения классической механики возникают как следствие квантовомеханических уравнений, причем мы надеемся понять, в каком именно смысле это справедливо. С практической точки зрения более важным для читателя является то, что мы собираемся здесь кратко остановиться на рассмотрении строгого классического предела; это позволит использовать в области высоких энергий квантовомеханические приближения, аналогичные тем, которые описаны в гл. 3, § 2, 4 и 5. Таковыми являются метод ВКБ и приближение эйконала.

§ 2. МЕТОД ВКБ

Изложение будет состоять из ряда этапов, на первом из которых будет проводиться приближенное вычисление фазовых сдвигов, а на последующих — разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам и формулировка приемов, которые упрощают процедуру суммирования.

¹⁾ К задаче, которая будет рассматриваться в § 4, такой подход непригоден, если только не вводить в рассмотрение две различные постоянные Планка: одну для связанного состояния мишени, а другую для падающей частицы; делать этого, конечно, не следует.

1. Фазовые сдвиги в методе ВКБ

В предположении, что потенциал взаимодействия сферически симметричен (а частицы бесспиновые), l -я парциальная волна удовлетворяет следующему радиальному уравнению:

$$-\frac{\Psi''}{\Psi} = [2m(E - V) - \hbar^2 l(l + 1)r^{-2}] \hbar^{-2} \equiv F \hbar^{-2}, \quad (18.1)$$

так что $F^{1/2} \hbar^{-1}$ является локальным волновым числом. Выберем для функции ψ следующее представление:

$$\psi = \text{const} \cdot G(r)^{-1/4} \exp \left[i \hbar^{-1} \int^r dr' G^{1/2}(r') \right]. \quad (18.2)$$

Поскольку G может быть комплексной величиной, такая запись сама по себе еще ни о чем не говорит; выписанное соотношение является просто определением функции G . Так как в дальнейшем l считается фиксированным, то явную зависимость от него функций ψ , F и G мы указывать не будем.

Двукратное дифференцирование показывает, что G должна удовлетворять нелинейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$G + \frac{1}{4} \hbar^2 \frac{G''}{G} - \frac{5}{16} \hbar^2 \left(\frac{G'}{G} \right)^2 = F, \quad (18.3)$$

которое полностью эквивалентно (18.1). Можно попытаться решить уравнение (18.3) путем разложения в ряд по степеням \hbar^2 :

$$G = G_0 + G_1 \hbar^2 + G_2 \hbar^4 + \dots \quad (18.4)$$

Тогда получим

$$G_0 = F, \quad G_1 = \frac{5}{16} \left(\frac{F'}{F} \right)^2 - \frac{1}{4} \frac{F''}{F} \text{ и т. д.} \quad (18.4a)$$

Следовательно, в первом приближении, когда \hbar можно считать очень малым, волновая функция равна

$$\psi \approx \psi_{\text{ВКБ}} \equiv \text{const} \cdot F^{-1/4} \exp \left[i \hbar^{-1} \int^r dr' F^{1/2}(r') \right]. \quad (18.5)$$

Формула (18.4a) показывает, что если в некоторой области F мала, но F' и F'' таковыми не являются, то первое приближение не будет надежным. Так как при $r \rightarrow 0$ функция F стремится к $-\infty$, а при $r \rightarrow \infty$ — к $2mE$, то всегда найдется точка, в которой $F = 0$, а значит, приближение (18.5) и разложение (18.4) перестают быть справедливыми. Это происходит в классической точке поворота, где радиальная кинетическая энергия обращается в нуль. Однако то обстоятельство, что вблизи точки поворота формула (18.5) становится плохим приближением для волновой функции, на рассеяние никакого влияния не оказывает. При определении фазового сдвига нужно построить как можно более «гладкую» функцию ψ ; это означает, что от $r = 0$ до $r = \infty$ она должна быть непрерывной функцией с непрерывной производной и что в обеих областях, разделенных точкой поворота, (18.5) является для нее хорошим приближением. Вблизи точки поворота становятся важными члены с высшими степенями \hbar , так как разложение (18.4) расходится. Вместе с тем каждый член по отдельности должен быть сделан вблизи нее как можно более гладким, так что наша задача заключается в простом «продолжении» (18.5)¹⁾. Это делается следующим образом.

¹⁾ Из разложения (18.4) видно, что в тех точках, где потенциал или его первая производная терпят разрыв, функция G_0 также будет очень плохим приближением. Этого следует ожидать, так как необходимо, чтобы потенциальная энергия изменялась медленно.

Вблизи точки $r = 0$ в F доминирует центробежный член и величина F отрицательна (мы предполагаем, что потенциал V менее сингулярен, чем r^{-2}). Так как в этой области функция ψ должна быть регулярной, то в окрестности $r = 0$ нужно положить

$$\psi = (-F)^{-1/4} \exp \left[\hbar^{-1} \int_{r_0}^r dr' (-F)^{1/2} \right]. \quad (18.6)$$

Пусть r_0 соответствует классической точке поворота, т. е. это такое значение r , при котором $\dot{F} = 0$. Когда мы проходим через эту точку, $(-F)^{1/2}$ нужно заменить на $\pm iF^{1/2}$. Так как «внутренняя» волновая функция (18.6) действительна, то такой же должна быть и «внешняя» функция. Какой знак взять перед i , значения не имеет, но если в некоторое соотношение F входит дважды, то он должен быть одним и тем же. Примем, что $(-F)^{1/2} \rightarrow iF^{1/2}$, и поэтому $(-F)^{-1/4} \rightarrow F^{-1/4} e^{-i1/4\pi}$. Тогда так как при $r \rightarrow \infty$ функция F стремится к p^2 , то в области $r > r_0$ ¹⁾ имеем

$$\begin{aligned} \psi &= F^{-1/4} \operatorname{Re} \exp \left[i \left(\hbar^{-1} \int_{r_0}^r dr' F^{1/2} - \frac{1}{4} \pi \right) \right] = \\ &= F^{-1/4} \sin \left(\hbar^{-1} \int_{r_0}^r dr' F^{1/2} + \frac{1}{4} \pi \right) \approx \\ &\approx p^{-1/2} \sin \left[kr + \hbar^{-1} \int_{r_0}^{\infty} dr' (F^{1/2} - p) - kr_0 + \frac{1}{4} \pi \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, в приближении ВКБ фазовый сдвиг определяется формулой

$$\delta_l^{\text{ВКБ}} = \frac{1}{2} \pi \left(l + \frac{1}{2} \right) + \hbar^{-1} \int_{r_0}^{\infty} dr (F^{1/2} - p) - kr_0, \quad (18.7)$$

откуда после интегрирования по частям получаем

$$\delta_l^{\text{ВКБ}} = \frac{1}{2} \pi \left(l + \frac{1}{2} \right) - \hbar^{-1} \int_{r_0}^{\infty} dr r \frac{d}{dr} F^{1/2}. \quad (18.7a)$$

Исследование поведения функции (18.6) вблизи точки $r = 0$ позволяет несколько улучшить полученное выражение. Так как в этой области доминирует центробежный член, то

$$\psi \approx \text{const} \cdot r^{l+1/2} \exp \{ [l(l+1)]^{1/2} \ln r \}.$$

С другой стороны, известно, что волновая функция должна вести себя при $r = 0$ следующим образом:

$$\psi \approx \text{const} r^{l+1}.$$

Обе функции удастся согласовать, если в функции F заменить $l(l+1)$ на $(l + \frac{1}{2})^2$:

$$F = 2m(E - V) - \hbar^2 \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 r^{-2}. \quad (18.8)$$

¹⁾ Нужно сказать несколько слов о том, что мы установили вид внешней волновой функции, не прибегая, как обычно, к формулам «сшивания». Приведенные здесь рассуждения интуитивно очевидны и просты, но их нельзя, конечно, рассматривать как строгое доказательство. Для этого нужно было бы получить обычные формулы сшивания. Так как стандартный способ построения этих формул излагается в любом учебнике по квантовой механике (см., например, [755], стр. 213), то здесь мы предпочли обойтись без него и привели лишь эвристический вывод.

Именно эта величина F должна входить в (18.7) и (18.7a). Полагая

$$J = \hbar \left(l + \frac{1}{2} \right), \quad (18.9)$$

получаем

$$\delta_l^{\text{ВКБ}} = \hbar^{-1} \left(\frac{1}{2} \pi J - \int_{r_0}^{\infty} dr r \frac{d}{dr} F^{1/2} \right), \quad (18.10)$$

$$F = 2m(E - V) - J^2 r^{-2}.$$

Отметим, что если рассматривать J как угловой момент, то выражение, стоящее в круглых скобках в (18.10), будет содержать лишь такие величины, которые допускают классическую интерпретацию. От квантовой механики остается только множитель \hbar^{-1} . Так как в интересующей нас области энергий малые значения l играют незначительную роль, то следует сказать, что входящее в (18.9) слагаемое $1/2$ не имеет почти никакого значения. В случае $l = 0$ все приведенные рассуждения могут оказаться совершенно непригодными. В конечном счете это определяется тем, существует ли классическая точка поворота r_0 . Если при $r = 0$ потенциал не стремится к $+\infty$, то всегда найдется такое значение энергии, выше которой в случае $l = 0$ точки r_0 не существует. Так что s -волна не имеет истинного классического аналога.

Продифференцируем, наконец, (18.10) или (18.7) по l :

$$\frac{d\delta_l^{\text{ВКБ}}}{dl} = \frac{1}{2} \pi - J \int_{r_0}^{\infty} dr r^{-2} F^{-1/2}.$$

Сравнение этого равенства с (5.4) показывает, что фазовый сдвиг, вычисленный в приближении ВКБ, связан с классической функцией отклонения, соответствующей тому же угловому моменту, соотношением

$$\Theta = 2 \frac{d\delta_l^{\text{ВКБ}}}{dl}. \quad (18.11)$$

Возвращаясь к уравнению (18.3), сделаем еще одно замечание. При фиксированных значениях E и l с ростом потенциала или константы связи величина $|F|$ увеличивается. Благодаря этому первое слагаемое в левой части уравнения также возрастает; это, однако, не относится к двум последующим слагаемым. В результате приближение, в котором считается, что $G \approx F$ [см. (18.5)], в то же время является также и приближением *сильной связи*. Фазовый сдвиг, полученный по методу ВКБ и определяемый формулой (18.7a), одновременно является предельным значением фазы δ_l при больших значениях константы связи или большой величине потенциала. Из выражения для F видно, что в случае притяжения последнее утверждение справедливо равномерно по всем E , но необязательно равномерно по l ; для отталкивательного потенциала ситуация обратна. В общем случае равномерности может не быть ни по одной из этих переменных.

Если умножить E и V на γ , а l на $\gamma^{1/2}$, то это приведет к умножению функции F на γ . При $\gamma \rightarrow +\infty$ фазовый сдвиг, вычисленный по методу ВКБ, переходит в точное выражение, и в соответствии с (18.7a) он будет пропорционален $\gamma^{1/2}$. В этом случае S -матрица превратится в $e^{i\gamma\Theta}$, что объясняет природу возникновения существенной сингулярности для этой величины при сильной связи, при высоких энергиях и больших значениях угловых моментов.

2. Амплитуда рассеяния

При высоких энергиях (в смысле п. 1) основной вклад в амплитуду рассеяния на данный угол дают большие значения l . С точки зрения квантовой механики этот факт можно объяснить, исходя из аналогии с оптическим принципом локализации или используя то свойство бесселевых функций, которое обсуждалось в начале гл. 3, § 5. Если радиус взаимодействия есть R , то будут доминировать орбитальные моменты l , по порядку равные

$$l \approx kR.$$

Отметим, что в этой области фазовый сдвиг как функция l меняется сравнительно медленно. Тогда из (18.11) следует, что не существует какого-то единственного фазового сдвига (или их небольшого числа), который давал бы в рассеянии основной вклад. В результате, поскольку в разложении амплитуды по парциальным волнам основную роль играют высокие моменты, это разложение будет содержать множество сравнительно мало отличающихся друг от друга слагаемых.

По этой причине мы будем рассматривать разложение (11.10а) амплитуды по парциальным волнам так же, как это делалось в гл. 3, § 5. Первый член разложения (11.10а), т. е. его первая строка, обуславливает дифракционное рассеяние, которое сосредоточено в малой области углов в окрестности направления вперед. Размеры этой области зависят от радиуса взаимодействия R :

$$k\theta \leq R^{-1} \quad (18.12)$$

(см. гл. 3, § 5, п. 1). При больших углах мы учитываем лишь член $e^{2i\delta}$, а полиномы Лежандра заменяем их асимптотическими выражениями (3.73). Кроме того, как и в гл. 3, § 5, относительно слабая зависимость фазового сдвига от l позволяет заменить после подстановки члена $e^{2\pi i n l}$ (n — целое число) сумму интегралом. Это дает выражение, аналогичное (3.75):

$$A(\theta) \approx (ip)^{-1} (2\pi\hbar \sin\theta)^{-1} \int_0^{\infty} dJ J^{1/2} (e^{i\zeta_+} + e^{i\zeta_-}),$$

$$\zeta_{\pm} = \hbar^{-1} \left[2\hbar\delta_l^{\text{БКВ}} \pm J\theta \mp \frac{1}{4}\pi + 2\pi n \left(J - \frac{1}{2}\hbar \right) \right]. \quad (18.13)$$

Так как \hbar является малой величиной (как указывалось в п. 1), то эти интегралы можно вычислить методом стационарной фазы; при $\hbar \rightarrow 0$ результат переходит в точный. В соответствии с этим при заданном угле θ основной вклад в интегралы, содержащие ζ_{\pm} , дают такие значения J , при которых

$$2 \frac{d\delta_l^{\text{БКВ}}}{dl} \pm \theta + 2\pi n = 0.$$

Ввиду (18.11) это означает, что угол рассеяния θ связан с величиной J соотношением

$$\theta = \varepsilon \{ \Theta(J) + 2\pi n \}, \quad \varepsilon = \pm 1. \quad (18.14)$$

Таким образом, мы получили классический результат, согласно которому при заданном прицельном параметре (или угловом моменте) угол отклонения θ может принимать любое определенное значение, меньшее π . Знак в формуле (18.14) и целое число n нужно выбирать так, чтобы угол θ лежал в области $0 \leq \theta \leq \pi$.

Обозначим при заданном θ то значение J , при котором фаза ζ_{\pm} стационарна, через J_0 и разложим ζ_{\pm} в окрестности этой точки:

$$\begin{aligned} \zeta_{\pm} &= \zeta_{\pm 0} + \frac{1}{2} (J - J_0)^2 \zeta_0'' + \dots, \\ \zeta_{\pm 0} &= 2\delta_{l_0}^{\text{ВКБ}} - \epsilon l_0 \theta + \frac{1}{4} \pi \epsilon + 2\pi n l_0, \\ \zeta_0'' &= 2\hbar^{-2} \left. \frac{d^2 \delta_l}{dl^2} \right|_{l=l_0} = \hbar^{-1} \left. \frac{d\theta}{dJ} \right|_{J=J_0}. \end{aligned} \quad (18.15)$$

Чрезвычайно быстрые осцилляции подынтегрального выражения везде, кроме окрестности $J = J_0$, позволяют с малой погрешностью провести интегрирование от $-\infty$ до $+\infty$. Возникающие при этом интегралы гауссовского типа вычисляются просто, и мы получаем

$$A(\theta) \approx (ip)^{-1} e^{i\zeta_{\pm 0}} \left(\frac{J_0}{-i\hbar \zeta_0'' \sin \theta} \right)^{1/2}.$$

Какую из величин (ζ_{+0} или ζ_{-0}) нужно использовать, зависит от того, какая из фаз ζ стационарна, т. е. от выбранного в формуле (18.14) знака. Поэтому окончательно имеем

$$A(\theta) = |A(\theta)| e^{i\alpha},$$

где

$$|A(\theta)| = k^{-1} \left[\frac{l + 1/2}{2 |d^2 \delta_l^{\text{ВКБ}} / dl^2| \sin \theta} \right]^{1/2} = p^{-1} \left[\frac{J}{|d\theta/dJ| \sin \theta} \right]^{1/2} \quad (18.16)$$

и

$$\alpha = 2\delta_{l_0}^{\text{ВКБ}} - (2l + 1) \frac{d\delta_l}{dl} - \frac{1}{2} \pi (2n + s) + \frac{1}{4} \pi (\epsilon - 1). \quad (18.17)$$

Здесь s указывает знак производной функции отклонения:

$$s = \text{sgn} \frac{d^2 \delta_l}{dl^2} = \text{sgn} \frac{d\theta}{db}.$$

Очевидно, что величины l или J , входящие в (18.16) и (18.17), равны l_0 или J_0 соответственно. Дифференциальное сечение, которое получается из амплитуды (18.16), совпадает с классическим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b \operatorname{cosec} \theta}{|d\theta/db|}, \quad (18.18)$$

где b — прицельный параметр:

$$b = \frac{J}{p} + \frac{l + 1/2}{k}$$

[см. формулу (5.12)].

Интерференционные эффекты. Если при данном θ существует лишь одно значение J , при котором функции ζ_+ или ζ_- стационарны, то значение фазы α амплитуды рассеяния для нас несущественно. Но когда таких значений несколько, возникают не имеющие места в классической механике особые интерференционные эффекты. Будем отмечать различные стационарные точки своими индексами. Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \sum_{i < j} \left[\frac{d\sigma_i^{\text{КЛ}}}{d\Omega} \frac{d\sigma_j^{\text{КЛ}}}{d\Omega} \right]^{1/2} \cos(\alpha_i - \alpha_j) + \sum_i \frac{d\sigma_i^{\text{КЛ}}}{d\Omega}. \quad (18.19)$$

Здесь $d\sigma_i^{\text{КЛ}}/d\Omega$ — классические сечения, соответствующие различным прицельным параметрам, которые приводят к одному и тому же углу отклонения.

Так как полная фаза для нас несущественна, то фазовые углы (18.17) можно записать в виде

$$\alpha_i = k \left[\int_c^{b_i} db \Theta(b) - b_i \varepsilon_i \theta + 2\pi n_i b_i \right] - \pi n_i - \frac{1}{2} \pi s_i - \frac{1}{4} \pi (\varepsilon_i - 1). \quad (18.20)$$

Следовательно, мы получаем, что если функция отклонения Θ монотонно изменяется в зависимости от прицельного параметра b и ее значения заключены в пределах от $-\pi$ до π , так что данному θ соответствует лишь одно значение b , то независимо от малости длины волны сечение совпадает с классическим *не будет*. В этом случае возникают дополнительные интерференционные члены. Однако в реально изучаемом макроскопическом рассеянии энергии рассеянных частиц не будут *строго* одинаковыми. Другими словами, они имеют достаточно большой разброс, так что относительная неопределенность в длинах волн будет велика по сравнению с отношением длины волны к прицельному параметру:

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \gg \frac{\lambda}{b}.$$

Это приводит к необходимости усреднять фазовые углы α_i по области, размеры которой велики по сравнению с 2π , так что интерференционные члены на самом деле обращаются в нуль. В противоположность тому, что мы имеем для модуля амплитуды рассеяния, которая содержит только классические параметры, в ее фазу входит микроскопическая переменная k (или длина волны). При усреднении k по фазовым углам как раз и возникает *макроскопический* разброс в значениях энергии, что в конечном итоге приводит к чисто классическому результату.

Мы можем оценить здесь точность, с которой нужно измерять *углы*, чтобы интерференционные эффекты стали наблюдаемыми. Пусть функция Θ имеет, например, лишь один максимум, так что данному углу рассеяния соответствует два прицельных параметра b_1 и b_2 или два орбитальных момента l_1 и l_2 . Тогда величина сечения заключена в пределах

$$[(\sigma_1^{\text{кл}})^{1/2} + (\sigma_2^{\text{кл}})^{1/2}]^2 \text{ и } |(\sigma_1^{\text{кл}})^{1/2} - (\sigma_2^{\text{кл}})^{1/2}|^2.$$

Разность соответствующих двух фаз равна

$$\Delta\alpha = \int_{l_1}^{l_2} dl (\Theta - \theta) + \pi.$$

Мы хотим узнать, насколько должен измениться угол θ при наблюдении рассеяния, чтобы сечение вместо максимального приняло свое минимальное значение. При этом считается, что это изменение угла настолько мало, что имеет место постоянно каждого отдельного классического сечения. Так как при переходе от интерференционного максимума к минимуму фаза меняется на π , то необходимое изменение угла определяется формулой

$$\pi = \Delta\alpha - \Delta\alpha' = \int_{l_1}^{l_2} dl (\Theta - \theta) - \int_{l_1'}^{l_2'} dl (\Theta - \theta') \approx (l_2 - l_1) (\theta' - \theta),$$

так что

$$\Delta\theta \approx \frac{\pi}{l_2 - l_1} = \frac{1/2\lambda}{b_2 - b_1}. \quad (18.21)$$

Этот результат показывает, что угловые осцилляции, возникающие из-за интерференции, являются очень резкими. Их можно наблюдать лишь в случае, когда разность двух прицельных параметров, соответствующих одному и тому

же отклонению, является микроскопической величиной, т. е. сравнимой с длиной волны. Если эта разность имеет макроскопическую величину, то учет размеров прибора, с помощью которого измеряется угол отклонения в реальном эксперименте по рассеянию, приводит к усреднению по области углов, большой по сравнению с (18.21). Тогда, даже если энергия частиц имеет вполне определенное значение, интерференционные эффекты все же будут ненаблюдаемы.

Приведенные рассуждения показывают, что существуют, таким образом, две причины, по которым эксперимент по рассеянию, например, мелких камешков от булыжника хорошо описывается классической механикой. Но эти рассуждения говорят также и о том, что имеется широкая энергетическая область, в которой рассеяние микроскопических частиц не определяется просто классическим сечением, но хорошо описывается квазиклассическим приближением. Последнее имеет место всякий раз, когда классический угол отклонения не является монотонной функцией прицельного параметра (или не лежит в пределах от $-\pi$ до π), так что оказывается возможным наблюдать интерференционные эффекты. Как было указано в гл. 5, § 5, такая ситуация всегда имеет место, если, например, во всей области силы, действующие между частицами, являются силами притяжения. В противоположность высказываниям, которые часто можно встретить в литературе, следует подчеркнуть следующее: для того чтобы проявлялись интерференционные эффекты, потенциал необязательно должен быть «необычным». Примером, для которого рассмотренное приближение находит большое практическое применение, является задача рассеяния α -частиц на ядрах. Подробное рассмотрение этого примера, а также и других примеров можно найти в работе [285].

3. Радужное рассеяние

В гл. 5, § 5 было показано, что при углах, при которых функция отклонения Θ имеет экстремум по прицельному параметру b , т. е. когда

$$\frac{d\Theta}{db} = 0,$$

при рассеянии классических частиц проявляется явление, аналогичное радуге. Оно наблюдается всякий раз, когда угол отклонения имеет относительный максимум или относительный минимум. Если функция Θ имеет экстремум такого рода, то в сечении проявляются интерференционные эффекты, описанные в предыдущем пункте. Однако при угле, соответствующем радуге, фаза ζ_0 , определяемая соотношением (18.15), обращается в нуль. Поэтому аргументы, приведенные в п. 2, теряют свою силу и мы должны поступать так же, как и в гл. 3, § 6.

Если функцию $\Theta(J)$ разложить в ряд в окрестности значения J_r , соответствующего радуге, т. е. вблизи точки, в которой $\Theta' = 0$, то получим

$$\Theta(J) = \Theta_r + C(J - J_r)^2 \hbar^{-2} + \dots, \quad C = \frac{1}{2} \hbar^2 \left. \frac{d^2\Theta}{dJ^2} \right|_{J=J_r} = \frac{1}{2} k^{-2} \frac{d^2\Theta}{db^2}.$$

Тогда фазовый сдвиг примет вид

$$\hbar\delta = \hbar\delta_r + \frac{1}{2} \Theta_r (J - J_r) + \frac{1}{6} C (J - J_r)^3 \hbar^{-2} + \dots,$$

а для фаз ζ_{\pm} , определяемых (18.13), будем иметь

$$\zeta_{\pm} = \hbar^{-1} \left[2\hbar\delta_r + \Theta_r (J - J_r) + \frac{1}{3} \hbar^{-2} C (J - J_r)^3 \pm J\theta \mp \frac{1}{4} \pi + 2\pi n \left(J - \frac{1}{2} \hbar \right) \right].$$

Возникающий в этом случае интеграл будет иметь такой же вид, как и интеграл из гл. 3, § 6. Вычисляя его тем же способом, получаем

$$A(\theta) \approx |C|^{-1/3} (ik)^{-1} \left[\frac{2\pi(l_r + 1/2)}{\sin \theta} \right]^{1/2} e^{i\alpha + i\pi(0_r - \theta)(l_r + 1/2)} \text{Ai}(z), \quad (18.22)$$

где ε — то же, что и в равенстве (18.14), а α задается формулой

$$\alpha = 2\delta_r - \Theta_r \left(l_r + \frac{1}{2} \right) - \pi l + \frac{1}{4} \pi \varepsilon.$$

Явный вид функции Эйри Ai дается формулой (3.88); кроме того,

$$z = s\varepsilon (\theta_r - \theta) |C|^{-1/3}, \quad s = \operatorname{sgn} C. \quad (18.23)$$

Выражение (18.22) показывает, что, как и в случае рассеяния электромагнитных волн, угловая зависимость сечения вблизи угла, соответствующего радуге, определяется квадратом функции Эйри (эти вопросы подробно рассматривались в гл. 3, § 6). Какая из сторон радуги является темной, а какая светлой, зависит от знаков C и ε . Фаза амплитуды (18.22) оказывается важной лишь в том случае, когда в сечение рассеяния на некоторый угол θ функция отклонения дает вклад при нескольких значениях прицельного параметра.

Дифференциальное сечение в области вблизи угла, соответствующего радуге, можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx k^{1/3} \frac{2^{5/3} \pi b_r}{\sin \theta} \left| \frac{d^2\Theta}{db^2} \right|^{-2/3} [Ai(z)]^2. \quad (18.24)$$

Эта формула показывает, что в строгом классическом пределе сечение стремится к бесконечности как $\lambda^{-1/3}$. Отметим также, что

$$z = \frac{2^{1/3} k^{2/3} s\varepsilon (\theta_r - \theta)}{\left| d^2\Theta/db^2 \right|}, \quad (18.23a)$$

и поэтому расстояние между соседними максимумами будет стремиться к нулю как $\lambda^{2/3}$.

4. Глория

В гл. 5, § 5 было отмечено, что если рассеяние назад возможно и при отличных от нуля прицельных параметрах, то соответствующее классическое сечение становится бесконечным¹⁾. Это явление представляет аналог явления глории, наблюдаемого при рассеянии света, которое обсуждалось в гл. 3, § 7. Оно возникает всякий раз, когда Θ плавно проходит через нуль или принимает значения, кратные π .

Так как теперь нас будут интересовать малые величины $\sin \theta$, то при анализе разложения амплитуды по парциальным волнам для полиномов Лежандра следует использовать вместо асимптотического выражения (3.73) формулу (3.59). В остальном методика ничем не отличается от той, которая применялась нами в п. 2. Имеем

$$\begin{aligned} A(\theta) &\approx (2ik)^{-1} \sum_l (2l+1) e^{2i\delta_l} (-1)^l J_0 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right] \approx \\ &\approx (ik)^{-1} \int dl \left(l + \frac{1}{2} \right) e^{i\pi l + 2\pi i n l + 2i\delta_l} J_0 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right]. \end{aligned}$$

Разложим все величины в ряд в окрестности значения l_g , соответствующего глории,

$$\begin{aligned} \Theta(l) &= \Theta_g + a(l - l_g) + \dots, & \Theta_g &= m\pi, \\ a &= \left. \frac{d\Theta}{dl} \right|_{l=l_g} = \frac{1}{k} \left. \frac{d\Theta}{db} \right|_{l=l_g}, \\ \delta_l &= \delta_g + \frac{1}{2} \Theta_g (l - l_g) + \frac{1}{4} a (l - l_g)^2 + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Аналогичные результаты имеют место также и для рассеяния вперед, но в этом случае эффекты маскируются явлениями дифракции.

В результате получим

$$A(\theta) \approx (ik)^{-1} e^{2i\delta_g + i\pi(1+2n)l_g} \times \\ \times \int dl \left(l + \frac{1}{2} \right) e^{i(\Theta_g + \pi + 2\pi n)(l-l_g) + i^{1/2} \alpha (l-l_g)^2} J_0 \left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right] \approx \\ \approx \frac{1}{k} \frac{1+2l_g}{(2\pi|a|)^{1/2}} e^{i\alpha} J_0 \left[\left(l_g + \frac{1}{2} \right) \sin \theta \right], \quad (18.25)$$

где

$$\alpha = 2\delta_g - \pi m l_g - \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \pi \operatorname{sgn} a.$$

Таким образом, дифференциальное сечение рассеяния на углы, соответствующие направлению назад, дается формулой

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b_g^2}{\lambda |d\Theta/db|} [J_0(kb_g \sin \theta)]^2. \quad (18.26)$$

Здесь b_g — прицельный параметр, отвечающий рассеянию точно назад, причем производная, стоящая в знаменателе, берется как раз в этой точке.

Формула (18.26) указывает на существование угловых осцилляций вблизи угла, соответствующего направлению назад, которые обусловлены интерференцией двух обратных лучей в случае, когда функция Θ равна $m\pi$. В направлении назад имеется пик

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\sin \theta=0} \approx \frac{b_g^2}{\lambda |d\Theta/db|}, \quad (18.27)$$

который в строго классическом пределе становится бесконечным. Снова осцилляции будут тем более резкими, чем больше значения k .

Подобный эффект существует и при рассеянии вперед, но здесь имеет место, кроме того, дифракция Фраунгофера, которая подробно рассматривалась в гл. 3, § 5, п. 1. В соответствии с (3.61) дифракционный вклад в дифференциальное сечение рассеяния на угол $\theta = 0$ равен

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{дифр}} = \frac{1}{4} R^4 k^2 = \frac{\pi^2 R^4}{\lambda^2}, \quad (18.28)$$

где R — радиус действия потенциала. В классическом пределе вклад от дифракции стремится к бесконечности как λ^{-2} , так что в наблюдаемых эффектах он обычно маскирует явление глории.

5. Закручивание (спиральное рассеяние)

В гл. 5, § 4, мы показали, что если при некотором ненулевом значении модуля радиуса-вектора потенциал имеет относительный максимум V_0 , то для всех энергий $E > V_0$ при некоторых прицельных параметрах b_0 имеет место явление *закручивания*. Для прицельного параметра b_0 энергия в точности равна величине пика, возникающего при сложении внешнего потенциала с центробежным барьером, а угол отклонения равен бесконечности (фиг. 5.3). В результате этого дифференциальное сечение будет содержать бесконечно много вкладов — по одному от каждого оборота рассеиваемой частицы при движении ее вокруг силового центра. Такой же эффект возникает, когда потенциал монотонно растет с расстоянием (и во многих других случаях), а энергия E больше некоторого критического значения. Ясно, что в такой ситуации интерференционные эффекты должны проявляться особенно резко, и в квазиклассической области можно ожидать больших отклонений от классического результата (5.18). Они будут зависеть, конечно, от величины константы c , входящей в формулу (5.19). Соотношение (5.20) показывает, что если c гораздо меньше единицы, то в (5.18) в хорошем приближении можно

ограничиться одним или двумя первыми членами, так что в этом случае интерференция не имеет большого значения.

Однако существует еще одна проблема, требующая рассмотрения. Если Θ стремится к бесконечности, то в соответствии с (18.11) фазовый сдвиг, вычисленный в приближении ВКБ, будет сильно зависеть от l . Поэтому метод суммирования разложения по парциальным волнам, который применялся в п. 2 и основывался на предположении о слабой зависимости фазовых сдвигов от l , теперь становится непригодным. Таким образом, область значений угловых моментов, вблизи которой возникает закручивание, нужно рассматривать отдельно.

Спиральное рассеяние происходит при точном равенстве энергии рассеиваемой частицы максимуму эффективного потенциала. Поэтому ясно, что непосредственно выше такого потенциального барьера важную роль должны играть эффекты *барьерного проникновения* и родственные им интерференционные явления. Возникающие от этого сложного сочетания явления здесь детально рассматриваться не будут; по этому вопросу мы отсылаем читателя к работам [283, 284].

§ 3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЙКОНАЛА

Рассмотрим теперь вариант квазиклассического приближения, который является аналогом приближения Хюльста, предложенного в качестве обобщения теории рассеяния света Релея — Ганса. Будем считать, что частицы бесспиновые, и перепишем уравнение Липпмана — Швингера (10.11), используя явно соотношение (10.6) и вводя в рассмотрение функцию

$$\varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

В результате получим интегральное уравнение для φ

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= 1 - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{i[\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')]}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}') = \\ &= 1 - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r}'' \mathbf{r}''^{-1} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}'' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'')} V(\mathbf{r}-\mathbf{r}'') \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}-\mathbf{r}'') \end{aligned}$$

(здесь произведена замена переменных $\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$). При больших значениях k ($k \ll R$) экспонента в подынтегральном выражении быстро осциллирует во всей области, кроме тех точек, в которых фаза стационарна. Последнее имеет место при *рассеянии вперед*, т. е. там, где вектор \mathbf{r}'' параллелен вектору \mathbf{k} . Поэтому получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &\approx 1 - \frac{mi}{\hbar^2 k} \int_0^\infty dr' V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}-\mathbf{r}') (1 - e^{2ihr'}) \approx \\ &\approx 1 - \frac{ik}{2E} \int_0^\infty dr' V(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \varphi(\mathbf{k}, \mathbf{r}-\mathbf{r}'), \end{aligned}$$

где подразумевается, что $\mathbf{r}' = k\mathbf{r}'/k$. Разложим радиус-вектор на две компоненты:

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z,$$

где вектор \mathbf{b} (прицельный параметр) перпендикулярен \mathbf{k} . Тогда

$$\varphi(\mathbf{k}; \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z) \approx 1 - \frac{ik}{2E} \int_{-\infty}^z dz'' V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z'') \varphi(\mathbf{k}; \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z'')$$

(здесь произведена замена переменных $z'' = z - z'$). Это уравнение сразу решается:

$$\varphi(\mathbf{k}; \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z) \approx \exp \left[-\frac{i\hbar}{2E} \int_{-\infty}^z dz' V(\mathbf{b} + \mathbf{k}z') \right],$$

так что приближенная волновая функция имеет простой вид

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z) \approx \exp \left\{ ik \left[z - \int_{-\infty}^z dz' \frac{V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{k}}z')}{2E} \right] \right\}. \quad (18.29)$$

Выражение (18.29) допускает очень простую интерпретацию. Интеграл представляет собой сдвиг фазы для функции ψ вдоль прямолинейной траектории, идущей из $-\infty$ в точку r . Как мы видели в § 1, неравенство $V_1 E \ll 1$ является условием малости отклонения. Поэтому локальное волновое число равно

$$k(r) = \frac{[2m(E - V)]^{1/2}}{\hbar} \approx k \left(1 - \frac{V}{2E} \right),$$

так что фаза сдвигается на величину, фигурирующую в (18.29). Результат (18.29) подсказывает два способа улучшения приближения: 1) интегрирование не по прямолинейной траектории, а по траектории классической частицы, которая проходит через данную точку, и 2) замена $-kV/2E$ на $\{[2m(E - V)]^{1/2} - \rho\}/\hbar$. Но поскольку при подобных расчетах вычисления сильно усложняются, мы не будем их проводить.

Приближение можно несколько улучшить и более простым способом. Если нас интересует рассеяние в направлении вектора \mathbf{k}' , то в качестве контура интегрирования можно взять прямую, являющуюся биссектрисой угла между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' и направленную параллельно вектору

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\mathbf{k} + \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} + \mathbf{k}'|},$$

а вектор \mathbf{b} выбрать перпендикулярным к ней. Тогда

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{b} + \hat{\mathbf{K}}z) \approx \exp \left\{ i \left[\mathbf{k} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{K}}z - \frac{\hbar}{2E} \int_{-\infty}^z dz' V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{K}}z') \right] \right\}. \quad (18.30)$$

Нам нужно вычислить амплитуду

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \approx \\ &\approx -\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right) \int d\mathbf{b} dz V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{K}}z) \exp \left\{ i \left[(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{b} + \hat{\mathbf{K}}z) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\hbar}{2E} \int_{-\infty}^z dz' V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{K}}z') \right] \right\}, \end{aligned}$$

в которую входит двумерный интеграл по \mathbf{b} . Так как $k = k'$, то

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \hat{\mathbf{K}} = 0.$$

Если бы мы использовали первоначальное приближение (18.29), то нужно было бы считать, что величина $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{k}$ пренебрежимо мала (поскольку мал угол рассеяния), так что соответствующий член мы бы просто отбросили. Поэтому (18.30) и (18.29) в этом случае привели бы к одинаковым результатам. Но выражение (18.30), помимо того, что оно является более точным (что вполне естественно), не требует обязательно использовать указанное допол-

нительное приближение. Во всяком случае, теперь мы можем выполнить интегрирование по z

$$A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx \frac{-ik}{2\pi} \int db \exp(-i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{b}) \left\{ \exp \left[-\frac{ik}{2E} \int_{-\infty}^{\infty} dz V(\mathbf{b} + \hat{\mathbf{K}}z) \right] - 1 \right\}, \quad (18.31)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — передаваемый импульс:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad \tau = \sqrt{|\boldsymbol{\tau}|^2} = 2k \sin \frac{1}{2} \theta.$$

Он лежит в плоскости изменения вектора \mathbf{b} .

Если потенциал сферически симметричен, то можно выполнить интегрирование по углам, используя формулу ([903], часть 2, стр. 197)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\tau b \cos \varphi} = J_0(\tau b) = J_0 \left(2kb \sin \frac{1}{2} \theta \right).$$

В результате получаем

$$A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx -ik \int_0^{\infty} b db J_0 \left(2kb \sin \frac{1}{2} \theta \right) (e^{2i\chi(b)} - 1), \quad (18.32)$$

где

$$\chi(b) = -\frac{k}{2E} \int_0^{\infty} dz V[(b^2 + z^2)^{1/2}] = -\frac{k}{2E} \int_b^{\infty} \frac{r dr}{(r^2 - b^2)^{1/2}} V(r). \quad (18.33)$$

Формулу (18.32) можно рассмотреть также с точки зрения разложения амплитуды по парциальным волнам. Так как в квазиклассическом случае $kb = l + 1/2$, а $J_0[(l + 1/2)\theta]$ является приближенным выражением (3.59) для полиномов Лежандра l -го порядка при больших l и малых углах, то (18.32) представляет просто интеграл, заменяющий сумму

$$A(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \approx \frac{1}{2ik} \sum_l (2l+1) (e^{2i\chi_l} - 1) P_l(\cos \theta). \quad (18.34)$$

Возможность такой замены обоснована в п. 2. Следовательно, функция $\chi(b)$ является приближенным выражением фазового сдвига, соответствующего угловому моменту l . Его связь с фазовым сдвигом, вычисленным по методу ВКБ, определяется формулой (18.7). Если в ней разложить функцию F в ряд по степеням V/E и заменить нижний предел интегрирования r_0 на b , то в результате получим выражение (18.33). Поэтому для малых углов рассеяния приближение (18.32) эквивалентно такому приближению ВКБ, в котором интегрирование по прицельным параметрам с помощью метода стационарной фазы еще не проведено. Преимущества рассматриваемого приближения состоят в следующем: 1) простота выражения (18.33) по сравнению с (18.7); 2) так как при выводе (18.32) не использовался метод стационарной фазы, то можно ожидать некоторого расширения энергетической области, в которой справедлива формула, и 3) в форме (18.31) приближение применимо и к нецентральному силам. Основным недостатком рассматриваемого приближения состоит в том, что оно применимо, по-видимому, лишь в ограниченной области углов. Однако, как будет видно из дальнейшего, это не является существенным ограничением. Полное сечение

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 8\pi \int_0^{\infty} b db \sin^2 \chi(b), \quad (18.35)$$

полученное из (18.32) с помощью оптической теоремы, является хорошим приближением к точному результату. Конечно, при наличии поглощения формулу (18.35) нужно модифицировать:

$$\sigma_{\text{полн}} \approx 4\pi \int_0^{\infty} b db [1 - \text{Re } e^{2ix(b)}]. \quad (18.35a)$$

Обобщение. Простота выражений (18.31) [или (18.32)] и (18.33) объясняет, почему описанный метод несложно применять и почему он с легкостью допускает различные обобщения. Например, рассматриваемый метод столь же просто применять и в многоканальных задачах. В этом случае χ является эрмитовой матрицей и единственная возникающая трудность заключается в вычислении величины e^{2ix} . В случае двух каналов расчет легко провести до конца, если разложить χ по базису, образованному матрицами Паули,

$$\chi = c1 + a \cdot \sigma, \quad a = \text{Sp } \sigma \chi.$$

Тогда

$$e^{2ix} = e^{2ic} (\cos 2a + ia \cdot \sigma a^{-1} \sin 2a),$$

где

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

Эрмитовость требует действительности вектора a , а симметричность приводит к тому, что $a_2 = 0$. При наличии более двух каналов можно использовать аналогичный прием.

Связь с борновским приближением. Несмотря на то что функция χ зависит от потенциала линейно, она не совпадает с фазовым сдвигом ни в борновском приближении, ни в приближении высоких энергий. Однако если при заданном l величина k стремится к бесконечности, то $b \rightarrow 0$ и из (18.33) следует, что

$$\chi(0) = -m\hbar^{-1}p^{-1} \int_0^{\infty} dr V(r).$$

Сравнение этого выражения с (12.33a) с учетом замечаний, сделанных после формулы (12.144), показывает, что оно совпадает с l -м фазовым сдвигом, вычисленным в пределе высоких энергий ¹⁾.

Приближенный метод, рассматриваемый в этом пункте, можно распространить на случай взаимодействий, зависящих от времени, а также на задачу рассеяния частицы на связанном состоянии. По этим вопросам мы отсылаем читателя к литературе, где рассмотрены и конкретные примеры ²⁾.

Обобщение на случай произвольных энергий и углов. Если амплитуду рассеяния записать в виде *интеграла по прицельным параметрам*

$$A(k', k) = A(k, \cos \theta) = 2k^2 \int_0^{\infty} b db J_0 \left(2bk \sin \frac{1}{2} \theta \right) a(k, b) \quad (18.36)$$

в форме, аналогичной (18.32), то это выражение можно будет использовать при всех значениях энергии и углов. Подстановка в (18.36) разложения ³⁾

$$\sum_l (2l+1) J_{2l+1}(x) P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2} x J_0 \left(x \sin \frac{1}{2} \theta \right), \quad (18.37)$$

¹⁾ В гл. 12 величина $2m\hbar^{-2}V$ обозначалась через γ^{∞} .

²⁾ См., в частности, лекции Глаубера [334]. Обобщение на случай уравнения Дирака и спин-орбитальных сил можно найти у Шиффа [756, 757].

³⁾ Оно следует из формулы (1) в [242], т. 2, стр. 13.

изменение порядка суммирования и интегрирования и сравнение с разложением по парциальным волнам приводят к формуле

$$a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = 2k \int_0^\infty db a(k, b) J_{2l+1}(2bk). \quad (18.38)$$

Используя соотношение ортогональности ([242], т. 2, стр. 92, формула (32))

$$\int_0^\infty dx x^{-1} J_{2l+1}(x) J_{2l'+1}(x) = \frac{\delta_{ll'}}{2(2l+1)}, \quad (18.39)$$

это выражение в свою очередь можно обратить:

$$a(k, b) = \frac{1}{bk} \sum_l (2l+1) J_{2l+1}(2bk) a_l(k). \quad (18.40)$$

Наконец, если в этом разложении по парциальным волнам с помощью (13.12) заменить суммирование интегрированием, то величину $a(k, b)$ можно будет выразить непосредственно через амплитуду рассеяния. Меняя порядок суммирования и интегрирования и снова используя (18.37), получаем

$$a(k, b) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\theta \sin \theta A(k, \cos \theta) J_0\left(2bk \sin \frac{1}{2} \theta\right). \quad (18.41)$$

Полученные представления справедливы при всех значениях энергий и углов. Однако при высоких энергиях можно применить «оптический принцип локализации» (гл. 3, § 5). При $2bk \gg 1$ единственным членом ряда (18.40), который будет давать заметный вклад, является член с $2l+1 \approx 2bk$. Следовательно,

$$a(k, b) \approx \frac{a_l}{bk} \sum_l (2l+1) J_{2l+1}(2bk) = a_l(k), \quad l = bk - \frac{1}{2}.$$

Исходя из поведения фазовых сдвигов при высоких энергиях, можно сделать вывод, что малые значения b будут давать в (18.36) незначительный вклад. Таким образом, в пределе высоких энергий это выражение перейдет в следующее:

$$A(k', k) \approx -ik \int_0^\infty b db J_0\left(2bk \sin \frac{1}{2} \theta\right) (e^{2i\delta_l} - 1). \quad (18.42)$$

Если сюда подставить фазовые сдвиги, вычисленные по методу ВКБ, то мы получим улучшенный вариант выражения (18.32), отличающийся от него тем, что вместо $\chi(b)$ теперь будет стоять $\delta^{ВКБ}$. Приведенный вывод показывает, что формула (18.32) [или (18.42)] должна быть справедлива при всех значениях углов.

Основной помехой использования представления (18.36) при любых энергиях (по сравнению с разложением по парциальным волнам) является отсутствие взаимно однозначной связи между амплитудой рассеяния $A(k, \cos \theta)$ и амплитудой $a(k, b)$, соответствующей определенному значению прицельного параметра. Так как переменная $z = \cos \theta$ должна быть всегда больше минус единицы, то функция $a(k, b)$, определяемая соотношением (18.40) или (18.41), не является единственной функцией, которая при подстановке ее в (18.36) приводит к заданной амплитуде A . В действительности амплитуда, определяемая формулой (18.40) или (18.41), должна удовлетворять интегральному уравнению Каптейна, и если ее подставить в (18.36), то при $z < -1$ интеграл

обратится в нуль.] Кроме того, соотношение унитарности, записанное через величины $a(k, b)$, имеет гораздо менее прозрачный вид, чем в случае использования парциальных волн. Дальнейшее исследование соответствующих вопросов можно найти в литературе ¹⁾.

§ 4. ИМПУЛЬСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

При описании рассеяния частицы на связанном состоянии существует некоторая характерная энергия, которая отсутствовала в задачах, рассматривавшихся в других параграфах этой главы, — это энергия связи сложной системы. Импульсное приближение основано на предположении, что энергия падающих частиц велика по сравнению с этой энергией связи. В таком случае на частицы, входящие в состав связанной системы, можно смотреть по существу как на свободные. Такой подход, конечно, довольно обычен и сравнительно часто используется. Во многих экспериментах частицы рассеивателя в действительности не являются свободными. Но они связаны настолько слабо, что, за исключением случая чрезвычайно низких энергий, всегда считается, что их описание при помощи обычной теории рассеяния свободных частиц будет вносить очень малые погрешности. К рассматриваемому виду относится электрон-электронное рассеяние при высоких энергиях.

То же самое можно сформулировать и другим способом. Если в течение времени взаимодействия длина волны или импульс частицы, входящей в составную систему, за счет действия сил связи изменяется незначительно, то эту частицу можно рассматривать как свободную и считать, что она имеет определенный импульс. Тогда общая волновая функция падающей частицы и частицы рассеивателя записывается в виде соответствующей суперпозиции отдельных рассеянных волн, веса которых определяются амплитудами вероятности получить для импульса частицы, находящейся в связанном состоянии, данное значение. Сформулируем эти положения математически.

Волновая функция, описывающая рассеяние частицы 1 на частице 2, в произвольной системе координат имеет вид

$$\psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}, \quad (18.43)$$

где

$$R = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad (18.44)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{m_2 \mathbf{k}_1 - m_1 \mathbf{k}_2}{m_1 + m_2},$$

а $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ — рассеянная волна в системе центра масс. Она является решением интегрального уравнения

$$\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{r}' \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathcal{V}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}'),$$

где \mathcal{V} — потенциал взаимодействия между частицами 1 и 2. Предположим теперь, что импульс частицы 2 «размазан», так что вектору \mathbf{k}_2 сопоставляется некоторая амплитуда $f(\mathbf{k}_2)$. Тогда соответствующая двухчастичная волновая функция приближенно запишется в виде

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}_1; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) \psi(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (18.45)$$

¹⁾ См. в особенности [5—7, 696]. При сравнении различных статей следует иметь в виду, что величина $a(k, b)$, входящая в (18.36), может быть определена разными способами. В [696] вместо преобразования (18.41) используется преобразование Ганкеля

Выразим $f(\mathbf{k}_2)$ через волновую функцию $\phi(\mathbf{r}_2)$ связанного состояния, т. е. через функцию

$$\phi(\mathbf{r}_2) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2}.$$

Тогда

$$f(\mathbf{k}_2) = (2\pi)^{-3} \int d\mathbf{r}_2 \phi(\mathbf{r}_2) e^{-i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} \quad (18.46)$$

и, таким образом, $f(\mathbf{k}_2)$ является волновой функцией связанного состояния в импульсном пространстве.

Функция (18.45), конечно, не будет точным решением двухчастичного уравнения Шредингера, так как падающая частица, приближаясь к частице 2, изменяет распределение ее импульсов. Если при большом удалении частиц распределение описывалось функцией $f(\mathbf{k}_2)$, то при их взаимодействии это будет уже не так. Принимая приближение (18.45), мы замораживаем импульсное распределение во время взаимодействия.

На самом деле функция (18.45) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} H\phi(\mathbf{k}_1; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) \left[\frac{K^2}{2M} + \frac{k^2}{2\mu} + V_2(\mathbf{r}_2) \right] e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) \left[\frac{k_1^2}{2m_1} + \frac{k_2^2}{2m_2} + V_2(\mathbf{r}_2) \right] e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \end{aligned}$$

где

$$M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{M}.$$

Но если для всех векторов \mathbf{k}_2 , которые дают заметный вклад в интеграл, т. е. для которых функция $f(\mathbf{k}_2)$ не очень мала, выполняется условие $k_1 \gg k_2$, то в области взаимодействия $\psi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ будет изменяться незначительно и поэтому $k_2^2/2m_2 + V_2(\mathbf{r}_2)$ можно заменить на величину E_2 , являющуюся отрицательной энергией связи частицы 2. Тогда в хорошем приближении будем иметь

$$H\phi \approx (E_1 + E_2) \phi.$$

Функция, определяемая соотношением (18.45), конечно, удовлетворяет правильным граничным условиям. Когда расстояние \mathbf{r} между частицами стремится к бесконечности (или время стремится к $-\infty$), эта функция принимает вид

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{k}_1; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &\approx (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int d\mathbf{k}_2 f(\mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} = \phi(\mathbf{r}_2) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1}. \end{aligned}$$

Воспользуемся приближенной волновой функцией (18.45) для вычисления амплитуды упругого и неупругого рассеяний. Если в начале частица 2 находилась в связанном состоянии ϕ_1 , а в конце перешла в связанное состояние (или в непрерывный спектр, безразлично) ϕ_2 , то в соответствии с (16.67) точная амплитуда рассеяния или реакции дается формулой

$$A(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_1) = -\frac{m_1}{2\pi} \left(\frac{k'_1}{k_1} \right)^{1/2} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_1} \phi_2^*(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{k}_1; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

где $\psi(\mathbf{k}_1; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — точное решение двухчастичного уравнения Шредингера. Заменяя ψ приближенным выражением (18.45), получаем

$$\begin{aligned} A(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}_1) &\approx -m_1 (2\pi)^{-5/2} \left(\frac{k'_1}{k_1} \right)^{1/2} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r}_1} \phi_2^*(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}) f_1(\mathbf{k}_2) e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \\ &= -m_1 (2\pi)^{-4} \left(\frac{k'_1}{k_1} \right)^{1/2} \int d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}'_2 f_2^*(\mathbf{k}'_2) f_1(\mathbf{k}_2) \int d\mathbf{R} d\mathbf{r} e^{i\mathbf{t}(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \cdot \mathbf{R} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \\ &= \left(\frac{k'_1}{k_1} \right)^{1/2} \int d\mathbf{K} d\mathbf{K}' \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') f_2^*(\mathbf{K}' - \mathbf{k}'_1) f_1(\mathbf{K} - \mathbf{k}_1) t(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \end{aligned}$$

или окончательно

$$A(k'_1, k_1) \approx \left(\frac{k'_1}{k_1}\right)^{1/2} \int dK f_2^*(K - k'_1) f_1(K - k_1) t(k', k). \quad (18.47)$$

Здесь $t(k', k)$ — обычная двухчастичная амплитуда

$$t(k', k) = -\frac{m_1}{2\pi} \int dr e^{ik' \cdot r} V(r) \psi(k, r), \quad (18.48)$$

а

$$k = k_1 - \left(\frac{m_1}{M}\right) K, \quad k' = k'_1 - \left(\frac{m_1}{M}\right) K.$$

Отметим, однако, что $t(k', k)$ берется *вне энергетической поверхности*. Поэтому даже в случае упругого рассеяния ($k_1 = k'_1$) модули векторов k и k' равны лишь в незначительной части области интегрирования по K .

В некоторых случаях приближение (18.47) можно упростить еще более, вынося функцию $t(k', k)$ за знак интеграла. Это можно сделать тогда, когда она зависит приближенно лишь от передаваемого импульса $k' - k = k'_1 - k_1$. Если, например, потенциал V является достаточно слабым, так что $t(k', k)$ хорошо описывается первым борновским приближением, то зависимость всегда будет именно такой. Если рассматриваемый процесс представляет *диссоциацию* начального связанного состояния, то ϕ_2 является волновой функцией, принадлежащей непрерывному спектру, и соответствует импульсу k_2 вылетающей частицы 2. В этом случае $f_2(k_2)$ будет решением интегрального уравнения

$$f(k_2) = \delta(k_2 - k'_2) + \left(E_2 - \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m_2}\right)^{-1} \int dk_2'' (k_2 | U | k_2'') f(k_2''),$$

где U — потенциал, ответственный за образование начального связанного состояния частицы 2, а $E_2 = k_2'^2/2m_2$. Тем самым становится оправданным вычисление величины $t(k', k)$, входящей в (18.47), при значениях $K = k'_1 + k_2$ и вынесение ее за знак интеграла. В любом из двух рассмотренных случаев амплитуда $A(k'_1, k_1)$ превращается в *произведение* двух членов. При этом один из сомножителей зависит лишь от потенциала взаимодействия частиц 1 и 2, а другой — только от силы, которая действует на частицу 2, приводя к образованию ее связанного состояния.

Сечение. Квадрат модуля амплитуды (18.47) дает приближенное выражение для сечения рассеяния частицы 1 в направлении k'_1 , сопровождающегося переходом частицы 2 на определенный возбужденный уровень. Если нас не интересует возникающее при этом связанное состояние, то, чтобы получить сечение, нужно провести суммирование по конечным уровням. Затем можно использовать условие *полноты*, т. е.

$$\sum_n f_n(k_2) f_n^*(k_2') = \delta(k_2 - k_2'),$$

и в результате получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(k'_1, k_1) = \left(\frac{k'_1}{k_1}\right) \int dk_2 |f_1(k_2)|^2 |t(k', k)|^2 = \int dk_2 |f_1(k_2)|^2 \frac{d\sigma_0}{d\Omega}(k', k) \frac{k'_1 k}{k_1 k'}, \quad (18.49)$$

где

$$k = \frac{m_2 k_1 - m_1 k_2}{M}, \quad k' = k'_1 - k_1 + k.$$

Все интерференционные члены обращаются в нуль, и в результате получается просто сумма всевозможных сечений рассеяния на частицах мишени, имеющих различные импульсы, с весами, которые определяются вероятностями этих величин в начальном состоянии.

Дополнительные подробности, обобщения, другие формулировки и применения импульсного приближения (в частности, к задаче рассеяния быстрых нейтронов на дейтронах) можно найти в работах [149—151, 253, 772, 308, 153] (см. также работы, указанные в комментариях в § 4).

КОММЕНТАРИИ

К § 2. Оригинальными работами, в которых сформулирован метод ВКБ, являются статьи Джеффриса [440], Вентцеля [898], Крамерса [500] и Бриллюэна [113]. Поэтому более правильным было бы иногда применяемое название «метод ДжВКБ»; см. также работы Лангера [513, 514] и Фарри [314].

В теории рассеяния этот метод связан, конечно, с более старыми приближениями, которые использовались в электромагнитной теории (см. комментарии к гл. 3, § 5). Более подробно квазиклассическая теория рассеяния изложена Фордом и Уилером [284], которым мы в основном и следовали в этом параграфе. Некоторые новые результаты и подходы обсуждаются в работах [371, 245, 721, 303, 930, 741, 56]. Приложения к конкретным задачам имеются у Форда и Уилера [285].

Применение квазиклассического приближения к барьерам можно найти в любом учебнике по квантовой механике. Соответствующее подробное рассмотрение имеется у Гольдмана и Мигдала [964], а также у Форда и др. [283]. Фордом и Уилером [285] квазиклассические методы были использованы при изучении интерференционных эффектов, возникающих при явлении закручивания.

Дифракционная часть амплитуды рассеяния исследовалась Бете и Плачеком [64], а также Грайдером и Глассгольдом [354].

Способы суммирования парциальных волн при высоких энергиях исследовал Бриск [119]; поляризацию в классическом приближении рассмотрели Лю и др. [549].

К трехчастичной задаче метод ВКБ был применен в работе Везетти и Рубинова [875]; более общий случай неупругого рассеяния проанализирован в работе [45].

К § 3. Приближение эйконала и его обобщения изложены в работах [611—613, 254, 677, 54, 757, 750, 658, 334]. Мы рекомендуем читателю в особенности последнюю работу, одному из разделов которой мы в основном следовали в тексте.

См. также [72, 553, 417, 774, 775, 181, 5—7, 696]. Изложение последней части § 3 следует статьям [6, 7].

Другие подходы к построению приближений, применимым при высоких энергиях, содержатся в работах [676, 170, 870—874, 411].

К § 4. Импульсное приближение было предложено Ферми [252] и Чью [151]. См. также работы [155, 28, 152, 971, 722—724] и монографию Гольдбергера и Ватсона [345], стр. 612. Что касается формулировки импульсного приближения в рамках формальной теории рассеяния, то мы особенно рекомендуем читателю статьи Чью и Вика [155], а также Ашкина и Вика [28].

ЗАДАЧИ

1. Частицы массой 500 и 600 *Мэв* взаимодействуют посредством потенциала притяжения в виде прямоугольной ямы, глубина которой равна 100 *Мэв*, а ширина 10^{-11} *см*. Вычислить и построить график полного сечения в приближении эйконала при энергиях в системе центра масс, меняющихся в интервале от 1 до 50 *Мэв*. Можно ли ожидать, что в этой энергетической области приближение будет хорошим? При каких энергиях применимо борновское приближение?

2. Считать в задаче 1 потенциал комплексным

$$V = -(80 \text{ Мэв}) - i(50 \text{ Мэв})$$

при $r < 10^{-11}$ *см* и равным нулю вне этой области. Вычислить полное сечение в приближении эйконала.

3. Пусть частицы из задачи 1 взаимодействуют посредством гауссовского потенциала

$$V = -\gamma e^{-r^2/a^2},$$

где $\gamma = 120 \text{ Мэв}$, $a = 10^{-11}$ *см*. Вычислить и построить график полного сечения в приближении эйконала при тех же энергиях, что и в задаче 1. Сравнить эти два случая.

4. Пусть частицы из задачи 1 взаимодействуют посредством потенциала

$$V = -\gamma (c^2 + r^2)^{-3/2},$$

где $\gamma = 130 \text{ Мэв}$, $c = 10^{-11} \text{ см}$. Вычислить и построить график полного сечения в приближении эйконала при тех же энергиях, что и в задаче 1. Сравнить полученную кривую с результатами задач 1 и 3.

5. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния в приближении эйконала в случае экранированного кулоновского потенциала

$$V = \begin{cases} \frac{Ze^2}{r}, & r < R, \\ 0, & r > R \end{cases}$$

в пределе, когда расстояние R велико (точно сформулировать соответствующий критерий). Проанализировать полученный результат.

6. Предположим, что рассеяние частицы A на связанном состоянии частицы B с «ядром» происходит при достаточно высоких энергиях, так что при описании взаимодействия A с B можно использовать как импульсное, так и борновское приближения. (Сформулировать соответствующий такому случаю критерий.) Вычислить амплитуду неупругого рассеяния, сопровождающегося определенным возбуждением системы, состоящий из частицы B и ядра. Зависит ли оно только от передаваемого импульса? Если нет, то можно ли этого добиться каким-либо простым преобразованием? Какова величина сечения рассеяния вперед? Чему равно полное сечение?

Распад нестабильных состояний

§ 1. КАЧЕСТВЕННОЕ РАССМОТРЕНИЕ

Допустим, что эксперимент по рассеянию проводится при такой энергии, при которой у взаимодействующих фрагментов имеется острый резонанс. В гл. 11, § 2, п. 2 было показано, что в этом случае как при упругом, так и при неупругом рассеянии существует значительная задержка выходящего потока по отношению к падающему. В настоящей главе будет подробно исследована зависимость выходящего потока от времени.

Рассматриваемый вопрос имеет большое значение не столько потому, что эксперименты по рассеянию или по исследованию реакций обычно проводят так, что оказывается возможным измерять указанную задержку, — подобные эксперименты встречаются относительно редко — сколько потому, что мы сталкиваемся с данной ситуацией всякий раз, когда наблюдаем радиоактивный распад или распад любой другой нестабильной квантовомеханической системы, имеющей большое время жизни. Если задержка между падающим и выходящим потоками достаточно велика, то мишень можно вынуть из установки и наблюдать выход продуктов распада в таких условиях, при которых можно полностью забыть о том, как было приготовлено исходное резонансное состояние. Именно поэтому данный вопрос обычно рассматривают в рамках теории связанных состояний. Однако значительно более естественным было бы рассмотрение в рамках теории рассеяния. Известно, что только настоящее связанное состояние, имеющее бесконечное время жизни, действительно не зависит от того, каким образом оно было приготовлено. Распадные состояния нельзя представлять как связанные состояния, которые после своего образования были возмущены и поэтому стали нестабильными. Распадные состояния всегда представляют собой острые резонансы, поэтому наиболее надежным и наиболее осмысленным физически является их рассмотрение в рамках теории рассеяния или теории реакций при столкновениях.

Если допустить, что распадное состояние подобно связанному, то нетрудно найти зависимость потока испускаемых частиц от времени. Поскольку свойства излучающей системы постоянны во времени, скорость испускания частиц пропорциональна числу «компаунд-систем», имеющих в данный момент времени. Поэтому распад системы во времени обязательно будет происходить по экспоненциальному закону. Однако исходная предпосылка неправильна, и поэтому не верен и основывающийся на ней результат. Тем не менее составное состояние, имеющее большое время жизни, физически очень похоже на стабильное состояние, и в некоторых случаях их почти невозможно отличить друг от друга. Так, например, мы рассматриваем нейтрон как почти стабильную частицу, весьма напоминающую настоящую стабильную частицу, такую, как протон. И то обстоятельство, что нейтрон испытывает β -распад, не изменяет нашего представления о нем как о почти стабильной частице. Следовательно, нельзя говорить, что экспоненциальный закон распада вообще

является неправильным. Наоборот, в некоторых случаях экспоненциальный закон распада подтвержден экспериментально с удивительной степенью точности. При этом полученная точность значительно превышает степень точности, на которую мы имеем право рассчитывать, исходя из весьма шатких предположений, на которых основывается вывод данного закона. Поэтому возникает следующий вопрос: если экспоненциальный закон не является точным, то насколько сильно он отличается от правильной формы временной зависимости и от чего зависят такие отклонения?

Одну из причин, по которой экспоненциальная зависимость от времени не может быть точной, можно понять уже при классическом подходе. Рассмотрим систему, которая в момент времени $t = 0$ начинает испускать частицы в некотором направлении. Допустим, что поток частиц является не моноэнергетическим, а имеет некоторое распределение по скоростям $\rho(v)$ ¹⁾ и что его интенсивность убывает во времени по экспоненциальному закону $\exp(-t/\tau)$. В этом случае число частиц, проходящих через некоторую точку на расстоянии x от источника в единицу времени в момент времени t , равно

$$N(x, t) = \int_{x/t}^{\infty} dv \rho(v) \exp\left(-\frac{(t-x/v)}{\tau}\right).$$

При фиксированном x данная величина не является экспоненциальной функцией времени. При очень больших значениях t сильно сингулярный характер функции $\exp(x/v\tau)$ приводит к большим отклонениям от экспоненциального закона. Положив $y = t - x/v$, нетрудно получить асимптотическое значение при $t \rightarrow \infty$

$$N(x, t) \approx \rho(0) \frac{x}{\tau} \left(\frac{\tau}{t}\right)^2.$$

Если распределение $\rho(v)$ имеет острый максимум при $v = v_0$, то кривая распада в точке x весьма близка к экспоненте, начиная с момента времени t_F . Это время требуется, чтобы центр распределения достиг точки x . Пока величина

$$R = \rho(0) \frac{x}{\tau} \left(\frac{\tau}{t}\right)^2 e^{(t-t_F)/\tau}$$

остается очень малой, кривая сохраняет свою экспоненциальную форму. Отметим, что длина экспоненциальной части кривой распада зависит от расстояния x до распадающегося центра. Если наблюдение производить слишком далеко от источника, то экспоненциальный закон вообще не будет иметь места.

Физически неэкспоненциальный хвост обусловлен, конечно, тем, что медленные частицы позднее достигают точки наблюдения. В классическом случае медленно убывающий асимптотический хвост можно устранить, обрезав распределение по скоростям $\rho(v)$ при некотором минимальном значении $v_{\min} > 0$. В квантовом случае такое обрезание ничего бы не дало, поскольку оно обязательно привело бы к простирающемуся до бесконечности хвосту в конфигурационном пространстве. Действительно, уже тот факт, что в квантовом случае в нашем распоряжении нет всей области частот от минус бесконечности до плюс бесконечности, не позволяет произвести четкое обрезание сигнала. Обрезание неизбежно приводит к возбуждению окружающих систем, экспериментальные последствия которого незначительны. Но такое возбуждение является одной из причин невозможности экспоненциального асимптотического спада.

§ 2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПАДА И УСЛОВИЯ ЕГО ПРИМЕНИМОСТИ

Возвращаясь к качественному рассмотрению, попытаемся описать такую ситуацию, когда налетающая частица, ударяясь о мишень, образует с частицами мишени некоторое нестабильное состояние, которое затем распадается.

¹⁾ Здесь предполагается, что $\rho(v)$ нормировано на единицу.

причем образующиеся продукты могут совпадать, а могут и не совпадать с исходными частицами. Будем наблюдать выход продуктов на некотором расстоянии r от рассеивающего центра как функцию времени. Если весь процесс описывать в рамках нестационарной теории рассеяния, то никогда не возникает вопроса о точных начальных условиях.

В первую очередь необходимо сделать предположения, которые позволяют нам использовать теорию рассеяния. Согласно (10.13), эти предположения сводятся к тому, что расстояние r от детектора до центра распада велико по сравнению с размером D области взаимодействия

$$r \gg D \quad (19.1)$$

и, кроме того, что r велико по сравнению с D , умноженным на отношение D к длинам всех волн, которые дают значительный вклад в процесс

$$r \gg \frac{D^2}{\lambda}, \quad \text{т. е. } kr \gg (kD)^2. \quad (19.2)$$

На практике оба эти неравенства обычно выполняются очень хорошо.

Используя предположения (19.1) и (19.2), можно записать двухчастичную волновую функцию, описывающую состояние бомбардирующей частицы и частицы-мишени в системе центра масс, в асимптотической форме

$$\psi(k, r) \approx e^{ik \cdot r} + r^{-1} e^{ik'r} A(k', k).$$

Для простоты мы ограничимся случаями распада только на две частицы. Однако при этом рассеяние необязательно должно быть упругим. В случае неупругого рассеяния первый член в правой части приведенной выше формулы следует опустить и считать, что $k \neq k'$; во всяком случае $\hat{k} = \hat{r}$.

Допустим теперь, что амплитуда рассеяния имеет острый резонанс. Следует помнить, что из этого допущения вытекают два обстоятельства: величина амплитуды рассеяния имеет резкий максимум, и ее фаза при этом же значении энергии резко возрастает на π . Первое приводит к большому сечению, что и дает обычно единственный наблюдаемый эффект. Как было показано при обсуждении формулы (11.56), второй фактор ответствен за временную задержку, представляющую интегральную часть физического механизма, которому приписывают резонансный пик в сечении. В принципе оба эти эффекта совершенно независимы, и только когда они имеют место одновременно, можно говорить о резонансе. Вследствие этого правильная зависимость амплитуды рассеяния A от энергии вблизи брейт-вигнеровского резонанса в сечении, определяемом формулой

$$\sigma \sim \frac{1/4\Gamma^2}{(E - E_0)^2 + 1/4\Gamma^2}, \quad (19.3)$$

обязательно имеет вид

$$A \sim \frac{1/2\Gamma}{E - E_0 + 1/2i\Gamma}, \quad (19.4)$$

где $\Gamma > 0$. Использование конкретного выражения (19.3) для сечения рассеяния вблизи резонанса, конечно, является дополнительным предположением. Другие формы энергетической зависимости сечения рассеяния вблизи резонанса будут рассмотрены в следующем параграфе.

Допустим, что A имеет хорошо изолированный острый резонанс вида (19.4). Поскольку нас интересует детальная временная зависимость сигнала от распадающейся системы, то ясно, что правильный критерий остроты резонанса должен заключаться в следующем. Время задержки резонансного пика должно быть велико по сравнению с временами задержки для энергий, близких к резонансу. Другими словами, скорость изменения фазы ϕ амплитуды рассеяния при энергии E_0 должна быть значительно больше скорости изменения фазы при других энергиях, близких к E_0 . Поскольку, согласно (11.56)

или (11.59), для брейт-вигнеровского резонанса вида (19.4) время задержки равно

$$t_D = \left(\frac{d\varphi}{dE} \right)_{E=E_0} = \frac{2}{\Gamma},$$

то последнее утверждение означает, что всюду вблизи резонанса величина $2/\Gamma$ должна быть велика по сравнению с производной φ по энергии. Соответствующий критерий того, что резонанс можно считать изолированным, должен состоять в следующем. Чтобы резонанс был изолированным, необходимо, чтобы мы могли образовать волновой пакет, охватывающий такую область энергии, внутри которой имеется только одна линия резонанса. Можно ожидать, что это условие эквивалентно требованию того, чтобы следующая линия резонанса отстояла от данной по меньшей мере на расстояние, равное нескольким ширинам резонанса. Более точный критерий будет получен ниже.

Рассуждения относительно стационарности фазы, приведенные в гл. 11, § 2, п. 2, следует использовать с осторожностью. Если формулу (11.56) разрешить относительно времени, соответствующего максимуму расходящейся волны, то пока речь идет о первом члене r/v_0 , все рассуждения о стационарности фазы являются точными в пределе $r \rightarrow \infty$ и для практически встречающихся значений r они хорошо применимы. Однако член $d\varphi/dk$, описывающий временную задержку, не следует считать количественно точным. Действительное положение он описывает лишь качественно. Это обусловлено тем, что, когда $d\varphi/dk$ велико в резонансе, фактическое увеличение φ приблизительно равно лишь π , так что осцилляции не приводят к заметному уменьшению подинтегрального выражения. Кроме того, в этой же точке *абсолютная величина* подинтегральной функции имеет резкий максимум. Следовательно, из соображений стационарности фазы *нельзя* сделать вывод о том, что наблюдаемая активность должна быть максимальна спустя удвоенное время жизни после времени, равного времени пролета. Фактический максимум, конечно, будет достигаться в момент времени, близкий к времени пролета. Реальный смысл задержки заключен в экспоненциальном законе распада. При $\Gamma < 0$ такая задержка не имела бы места.

Необходимо также сказать несколько слов относительно формы возбуждающего волнового пакета. Физически очевидно, что самое лучшее, что можно сделать, это наложить два взаимно противоречивых условия. Для того чтобы возбуждающий сигнал не перекрывался с временной кривой распадающейся системы больше, чем это необходимо, он должен иметь небольшую длительность и должен быть резко обрезан. Для изоляции сигналов, обусловленных данным резонансом, от других сигналов, приходящих с задержкой (например, от других резонансов), нужно, чтобы возбуждающий сигнал охватывал узкую область энергий и также был резко обрезан по энергиям. Очевидно, что в предельном случае монохроматического пучка не происходит никакого распада, а имеется стационарное состояние. Обратный предельный случай, когда в пучке почти в равной мере присутствуют частицы с любыми положительными энергиями, будет возможен только при исключительных условиях чрезвычайно изолированной линии. Можно ожидать, что энергетическая ширина пакета должна быть больше ширины линии настолько, чтобы пакет хорошо перекрывал линию. Для того чтобы осуществить резкое обрезание как по времени, так и по энергии, мы выберем гауссовскую форму пакета (ограниченную физически допустимыми значениями энергии). Конечно, незначительные изменения формы пакета могут приводить к изменению некоторых деталей получающихся результатов. В частности, к таким изменениям чувствительно асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$. Именно поэтому мы будем избегать доказательств, основывающихся на точной форме асимптотического хвоста. Однако, как и во многих других случаях, можно ожидать, что наиболее существенные результаты, полученные путем тщательного ана-

лиза, при игнорировании незначительных случайных особенностей не будут зависеть от деталей формы волнового пакета.

Для придания результатам возможно более общего характера мы будем использовать релятивистскую кинематику в следующем виде. Если W — полная энергия, m_1 и m_2 — массы покоя двух испускающихся частиц, то импульс в системе центра масс определяется выражением

$$k^2 = \frac{(W^2 - m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4)^2 - 4m_1^2 m_2^2 c^8}{4W^2 c^2}. \quad (19.5)$$

Импульс k можно также выразить через конечную кинетическую энергию

$$E = W - (m_1 + m_2) c^2$$

или через ее относительное отклонение от центра пакета E_0 . Полагая $k = k_0 \zeta$ и $s = (E - E_0)/E_0$, получаем

$$\zeta = \left[(1 + s) \left(1 + \frac{sE_0}{E_0 + 2(m_1 + m_2)c^2} \right) \left(1 + \frac{sE_0}{E_0 + 2m_1 c^2} \right) \left(1 + \frac{sE_0}{E_0 + 2m_2 c^2} \right) \right]^{1/2} \times \\ \times \left(1 + \frac{sE_0}{E_0 + (m_1 + m_2)c^2} \right)^{-1}. \quad (19.6)$$

Для дальнейшего последнее выражение удобно разложить в ряд по степеням s . В результате найдем, что

$$\zeta = 1 + \rho_1 s - \rho_2 s^2 + O(s^3), \quad (19.7)$$

где коэффициенты имеют вид

$$\rho_1 = [(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) + \beta_1 \beta_2]^{-1}, \\ \rho_2 = \frac{1 + \beta_1 \beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2}{(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2)}, \quad (19.8) \\ \beta_1 = \frac{v_1}{c}, \quad \beta_2 = \frac{v_2}{c}, \quad \alpha_1 = (1 - \beta_1^2)^{1/2}, \quad \alpha_2 = (1 - \beta_2^2)^{1/2},$$

а v_1 и v_2 — скорости образовавшихся конечных частиц в центре распределения.

Падающая волна. Исследуем сначала изменение во времени волнового пакета гауссовской формы при отсутствии резонанса. Мы проведем рассмотрение таким методом, который затем можно применить к практически интересным случаям.

Зависимость от времени волнового пакета гауссовской формы, имеющего ширину Δ , определяется интегралом

$$I = \Delta^{-1} \int_A^\infty dW \exp \left[-\frac{(W - W_0)^2}{2\Delta^2} + i(kr - Wt) \right]. \quad (19.9)$$

Здесь нижний предел A равен либо $(m_1 + m_2) c^2$, либо энергии покоя падающих частиц $(m_1 + m_2)_{\text{пад}} c^2$, в зависимости от того, какая из этих величин больше. Запишем (19.9) в виде

$$I = \exp \left[i(k_0 r - W_0 t) - \frac{(1 - i\gamma)(t - t_F)^2}{2T^2} \right] (1 + i\gamma)^{-1/2} J. \quad (19.9a)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$J = (1 + i\gamma)^{1/2} \Delta^{-1} \int_4^\infty dW e^{i(z^2 + \xi)}, \\ T = \frac{(1 + \gamma^2)^{1/2}}{\Delta},$$

$$2z = \varepsilon \left(\frac{sE_0}{\Delta} - \frac{t-t_F}{T} \right) + i\varepsilon^{-1} \left(\frac{sE_0}{\Delta} + \frac{t-t_F}{T} \right),$$

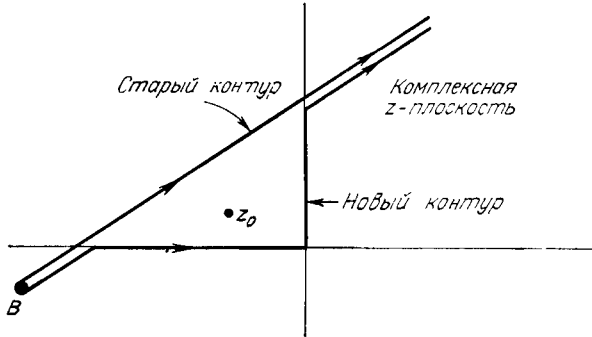
$$\gamma = 2\rho_2 \left(\frac{\Delta}{E_0} \right)^2 k_0 r,$$

$$\varepsilon = [(1 + \gamma^2)^{1/2} - \gamma]^{1/2},$$

$$\xi = k_0 r (\zeta - 1 - \rho_1 s + \rho_2 s^2),$$

$$t_F = \frac{r}{v_1 + v_2} = \frac{\rho_1 k_0 r}{E_0}.$$

Таким образом, здесь t_F — время пролета продуктов распада от центра масс до точки на расстоянии r . Используя z в качестве новой переменной инте-



Ф и г. 19.1. Схема деформации контура при вычислении интеграла I и I_R . z_0 — положение полюса в J_R при $(t - t_F)/\tau > T_1$.

грирования, получаем

$$J = (1 - i) \int_B dre^{i[z^2 + \xi(z)]}. \tag{19.10}$$

Теперь нижний предел интегрирования определяется выражением

$$B = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{E'_0}{\Delta} + \frac{t-t_F}{T} \right) \varepsilon + i \left(\frac{E'_0}{\Delta} - \frac{t-t_F}{T} \right) \varepsilon^{-1} \right],$$

где

$$E'_0 = \begin{cases} E_0 = W_0 - (m_1 + m_2) c^2, & \text{если } m_1 + m_2 > (m_1 + m_2)_{\text{пад}}. \\ E_{0\text{пад}} = W_0 - (m_1 + m_2)_{\text{пад}} c^2, & \text{если } m_1 + m_2 < (m_1 + m_2)_{\text{пад}}. \end{cases}$$

Интегрирование производится по «старому контуру», показанному на фиг. 19.1, т. е. по прямой линии, угол наклона которой к действительной оси равен

$$\delta = \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \arctg \gamma.$$

Деформируем теперь путь интегрирования так, чтобы он проходил по «новому контуру», показанному на фиг. 19.1, на котором всегда выполняется соотношение $\text{Im } z^2 \geq 0$. Рассмотрим функцию $\xi(z)$ на деформированной части контура.

Поскольку ξ было выбрано так, чтобы в разложении по степеням s оно имело порядок s^3 , то можно ожидать, что до тех пор, пока выполняется условие

$$k_0 r |s|^3 \leq 1,$$

будет иметь место неравенство $|\xi| \leq 1$. Наибольшее значение величины s на деформированном участке контура равно

$$|s| \approx \frac{\Delta}{E_0} \frac{t-t_F}{T},$$

а ее фаза заключена между 0 и $-\pi$. Следовательно, для того чтобы величина $i\xi$ всюду на этом участке контура не принимала больших значений, нужно

$$k_0 r \left(\frac{\Delta}{E_0} \right)^3 \left(\frac{t-t_F}{T} \right)^3 \ll 1,$$

или, другими словами,

$$\frac{t-t_F}{T} \ll \frac{(E_0/\Delta)}{(k_0 r)^{1/3}}. \quad (19.11)$$

Когда данное неравенство сильно нарушается, интеграл J быстро возрастает. Пока неравенство (19.11) выполняется, интеграл J имеет порядок единицы, если $\text{Im} B^2 > 0$. Последнее условие выполняется до тех пор, пока выполняется неравенство

$$\frac{t-t_F}{T} \ll \frac{E'_0}{\Delta}, \quad (19.12)$$

обычно значительно менее жесткое, чем (19.11).

Таким образом, мы нашли, что пока выполняются неравенства (19.11) и (19.12), временная зависимость величины $|I|^2$ определяется гауссовским множителем

$$e^{-(t-t_F)^2/T^2},$$

который в явном виде содержится в формуле (19.9а). Такое поведение отражает тот известный факт, что *фурье-образ* гауссовской функции также имеет гауссовскую форму. Отметим, что при $\gamma \ll 1$ среднее время жизни пакета равно $T \approx 1/\Delta$, но при $\gamma \gg 1$ оно равно

$$T \approx 2\rho_2 k_0 r \frac{\Delta}{E_0} \frac{1}{E_0}$$

и *увеличивается* с ростом Δ .

После нарушения условия (19.11) спад волнового пакета перестает иметь гауссовский характер. К этому времени его величина уменьшается в

$$e^{-(E_0/\Delta)^2/(k_0 r)^2/3}$$

раз [при условии, что $E'_0 \gg E_0/(k_0 r)^{1/3}$]. Следовательно, изменение пакета во времени в действительности никогда не будет иметь гауссовскую форму, если только не выполняется условие

$$\frac{E_0}{\Delta} \gg (k_0 r)^{1/3}. \quad (19.13)$$

Начиная с момента времени, при котором нарушается условие (19.11), детальное поведение хвоста зависит от условий проведения эксперимента. Точный вид асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ зависит, в частности, от конкретного способа обрезания при $E = 0$.

Рассеянная волна. Рассмотрим теперь рассеянную волну. Временная зависимость резонансного члена (19.4) определяется интегралом

$$I_R = \int_A^\infty dW \frac{1/2 \Gamma/\Delta}{W - W_0 + 1/2 i \Gamma} \exp \left[-\frac{(W - W_0)^2}{2\Delta^2} - i(kr - Wt) \right]. \quad (19.14)$$

Его вычисляют точно так же, как и интеграл I . Единственное отличие возникает при деформации контура. Теперь в точке

$$z = z_0 = \frac{1}{2} \varepsilon \left[\left(\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\Delta} \varepsilon^{-2} - \frac{t-t_F}{T} \right) - i \left(\frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\Delta} - \varepsilon^{-2} \frac{t-t_F}{T} \right) \right]$$

имеется полюс, причем если выполняется неравенство

$$\frac{t-t_F}{\tau} > T_1 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 \varepsilon^{-2} (1 + \gamma^2)^{1/2}, \quad (19.15)$$

где $\tau \equiv 1/\Gamma$, то точка z_0 лежит в четвертом квадранте. Следовательно, до тех пор пока выполняется условие (19.15) на времена, полюс расположен между старым и новым контурами и при деформации контура возникает вклад в I_R от вычета в точке полюса

$$I_R = I_{\text{выч}} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma}{\Delta} \exp \left[i(k_0 r - W_0 t) - \frac{(1-i\gamma)(t-t_F)^2}{2T^2} \right] J_R,$$

где

$$I_{\text{выч}} = -i\pi \frac{\Gamma}{\Delta} \exp \left[i(k_0 r - W_0 t) + \frac{1}{8} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 (1+i\gamma) - \frac{t-t_F}{2\tau} \right],$$

$$J_R = \int_B dz (z-z_0)^{-1} e^{i(z^2 + \frac{t-t_F}{\tau} z)}.$$

И в этом случае интеграл J_R принимает значения по порядку величины больше единицы только тогда, когда нарушается либо условие (19.11), либо (19.12). Другими словами, интеграл J_R по порядку величины равен единице, пока выполняются неравенства

$$\frac{t-t_F}{\tau} \lesssim \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{E_0}{\Delta} (1 + \gamma^2)^{1/2} (k_0 r)^{-1/3} \quad (19.11a)$$

и

$$\frac{t-t_F}{\tau} < \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{E'_0}{\Delta} (1 + \gamma^2)^{1/2}. \quad (19.12a)$$

Следовательно, при выполнении условий (19.11a) и (19.12a) величина I_R имеет вид

$$I_R = -i\pi \frac{\Gamma}{\Delta} \exp \left[i(k_0 r - W_0 t) + \frac{1}{8} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 (1+i\gamma) - \frac{t-t_F}{2\tau} \right] (1+R), \quad (19.16)$$

где

$$|R| \leq C e^{-1/2 Y},$$

$$Y = (1 + \gamma^2)^{-1} \left(\frac{\Delta}{\Gamma} \right)^2 \left(\frac{t-t_F}{\tau} \right)^2 - \frac{t-t_F}{\tau} - \frac{1}{4} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2.$$

Здесь C — константа порядка единицы. Таким образом, если $|R|$ мало по сравнению с единицей, то кривая распада имеет приблизительно экспоненциальную форму. Так, например, $Y = 16$ отвечает временам

$$\frac{t-t_F}{\tau} = T_2 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 (1 + \gamma^2)^{1/2} \left\{ (1 + \gamma^2)^{1/2} + \left[\gamma^2 + \left(\frac{8\Delta}{\Gamma} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \gg$$

$$\gg 4 \frac{\Gamma}{\Delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2. \quad (19.17)$$

При таких временах $|R|$ весьма мало ($e^{-8} \approx 1/3000$). Эта величина продолжает уменьшаться до тех пор, пока не нарушается одно из условий (19.11a) и (19.12a). Начиная с этого момента, J_R уменьшается очень медленно, скажем как $(t-t_F)^{-n}$. При этом

$$Y \approx \left(\frac{E_0}{\Delta} \right)^2 (k_0 r)^{-2/3} + 2n \ln \frac{t-t_F}{\tau} - \frac{t-t_F}{\tau}$$

и при таких временах, когда

$$\frac{t-t_F}{\tau} \gg T_3 \equiv \left(\frac{E_0}{\Delta} \right)^2 (k_0 r)^{-2/3} + 4n \ln \left[\frac{E_0}{\Delta} (k_0 r)^{-1/3} \right] \quad (19.18)$$

с учетом условия (19.13) Y становится отрицательным и в (19.16) преобладающим становится член с R . Число n зависит от условий эксперимента, но величина T_3 к ним относительно нечувствительна.

Теперь можно перейти к рассмотрению формы кривой распада на расстоянии r от источника при условии, что выполняется неравенство (19.13). Как будет видно из дальнейшего, нам нужно, чтобы имело место неравенство $\Delta \gg \Gamma$. Это означает, что необходимо предположить выполнение неравенства

$$k_0 r \ll \left(\frac{E_0}{\Gamma}\right)^3. \quad (19.13a)$$

При $(t - t_F)/\tau < T_1$ член, связанный с вычетом, отсутствует и кривая имеет приблизительно такую же форму, как и при отсутствии резонанса, т. е. гауссовскую. Начиная приблизительно с момента времени T_1 , общий характер закона распада становится экспоненциальным, т. е. уменьшение активности во времени является в целом экспоненциальным, хотя детальный ход зависимости необязательно близок к экспоненциальному. С момента времени T_2 распад почти точно происходит по экспоненциальному закону. Степень точности при таких временах равна приблизительно 0,1%. Распад по форме невозможно отличить от экспоненциального вплоть до момента времени T_3 , начиная с которого он становится более медленным.

Из общих соображений, основанных на соотношениях неопределенности, можно ожидать, что экспоненциальный закон

$$e^{-(t-t_F)/\tau},$$

описывающий уменьшение потока, или уменьшение величины $|I|^2$, во времени характеризуется средним временем распада¹⁾ τ , равным обратной ширине резонанса. В обычных единицах τ равно

$$\tau = \frac{\hbar}{\Gamma}.$$

Допустим сначала, что $\Delta \ll \Gamma$, т. е. ширина падающего пакета (или размер ошुлка детектора) меньше ширины резонанса. При этом величина T_2 будет большой и распад не будет происходить по чисто экспоненциальному закону до тех пор, пока большая часть активности не спадет до нуля. Из табл. 19.1 видно, что при таких условиях по мере уменьшения Δ возможность наблюдения экспоненциального закона распада резко ухудшается.

Таблица 19.1

Δ/Γ	T_1	T_2	$ I_R ^2 / I_R ^2_{\text{макс}}$
1	$1/2$	4,5	$\sim 1/50$
$2/3$	1	7	$\sim 1/500$
$1/2$	2	10	$\sim 1/10\,000$
$1/4$	8	24	$\sim 10^{-8}$

Δ/Γ — отношение ширины возбуждающего сигнала к ширине резонанса.

T_1 и T_2 — моменты времени, начиная с которых экспоненциальный закон выполняется соответственно грубо и почти точно. Оба времени измерены в единицах среднего времени распада и отсчитаны от времени пролета t_F .

$|I_R|^2 / |I_R|^2_{\text{макс}}$ — относительное уменьшение наблюдаемой активности к моменту времени T_2 . Предполагается, что $\gamma \ll 1$.

¹⁾ Иногда используют более точное определение, согласно которому время полу-распада равно $\tau \ln 2$. За это время активность уменьшается в 2 раза, а не в e раз. Мы не будем делать различий между этими двумя определениями.

Если γ не мало, то возможность наблюдения экспоненциального закона еще меньше. Ясно, что, для того чтобы за время, когда еще можно измерить активность, отчетливо наблюдался экспоненциальный распад, ширина возбуждающего сигнала Δ должна по крайней мере приблизительно равняться ширине линии Γ распадающегося состояния. Конечно, этого и следовало ожидать. Если пакет не перекрывает линию резонанса, то зависимость распада от времени не может определяться только резонансом. В подобном случае она должна существенно зависеть от формы возбуждающей волны.

Если $\Delta > \Gamma$ и $\gamma \ll 1$, то область, в которой грубо выполняется экспоненциальный закон, начинается при временах, отстоящих от момента времени появления максимума меньше чем на половину времени распада. При этом экспоненциальный закон становится почти точным приблизительно через время, равное времени пролета плюс среднее время жизни, умноженное на Γ/Δ . Форма кривой распада остается экспоненциальной в течение времени, равного приблизительно среднему времени распада, умноженному на $(E_0/\Delta)^2$ (в предположении, что $E_0 \gg \Gamma$). Следовательно, для того чтобы как можно дальше отодвинуть момент времени, начиная с которого кривая распада становится более пологой, чем экспоненциальная, нужно сделать Δ по возможности меньше.

Ниже будет показано, что чем шире возбуждающий сигнал (в импульсном пространстве), тем раньше начинает выполняться экспоненциальный закон, и чем уже возбуждающий сигнал, тем позже происходит нарушение этого закона. Физическая причина этого очевидна: для того чтобы экспоненциальный закон распада начинался рано, нужны кратковременность возбуждающего сигнала и резкая ограниченность его во времени. Чтобы экспоненциальный закон выполнялся в течение длительного времени, нужно свести к минимуму число медленных частиц, которые поздно достигают точки наблюдения. Для этого нужно, чтобы возбуждающий сигнал был по возможности моноэнергетическим. Можно ожидать, что в оптимальном случае Δ будет превышать Γ приблизительно в 1—10 раз. Однако во многих случаях наблюдаемые результаты могут оказаться совершенно нечувствительными к изменению величины Δ в сторону ее увеличения. Другими словами, кривая распада может оставаться экспоненциальной в течение всего времени, пока остающаяся активность еще позволяет производить наблюдение, даже если Δ очень велико по сравнению с Γ .

Представляет интерес рассмотреть зависимость характеристик кривой распада от расстояния между точкой наблюдения и центром распада. По мере увеличения расстояния величина γ возрастает и вступление в силу экспоненциального закона задерживается. Чем меньше ρ_2 , тем больше должно быть r , чтобы возникали значительные эффекты. Если начальная и конечная частицы движутся медленно, то

$$\rho_2 = \frac{1}{8}.$$

Если начальная и конечная частицы являются ультрарелятивистскими, то

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(1 - \beta_1) + \frac{1}{2}(1 - \beta_2).$$

Если одной из частиц является фотон, то

$$\rho_2 = \frac{\beta(1 - \beta)}{(1 + \beta)(1 + \alpha)} \approx \beta \text{ для } \beta \ll 1.$$

Поэтому закон распада наименее чувствителен к изменению расстояния до точки наблюдения в случае, когда одной из конечных частиц является фотон, а другие частицы либо испытывают очень слабую отдачу, либо в результате отдачи движутся очень быстро. Параметр γ становится сравнимым с единицей

или больше единицы при таких расстояниях до точки наблюдения, для которых

$$k_0 r \gtrsim \frac{(E_0/\Delta)^2}{2\rho_0}.$$

При больших расстояниях время T_2 начинает зависеть от r и растет с ростом r , так как в этом случае

$$T_2 \gtrsim 4\rho_2^2 \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 \left(\frac{\Delta}{E_0}\right)^4 (k_0 r)^2.$$

Если расстояние так велико, что T_2 и T_3 сравнимы между собой, то экспоненциальный закон распада не наблюдается вовсе. Это происходит в том случае, когда

$$k_0 r \gtrsim \left(\frac{E_0}{\Gamma}\right)^{9/4} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^{3/2} (2\rho_2)^{-3/4}. \quad (19.19)$$

Следовательно, данное условие зависит главным образом от относительной остроты линии резонанса, т. е. от соотношения между E_0 и Γ , с одной стороны, и Γ и Δ — с другой.

Ширина возбуждающего сигнала. Чему равна на практике ширина возбуждающего сигнала Δ ? В большинстве практически реализующихся случаев нестабильное состояние возбуждается за счет другого нестабильного состояния. В этом случае форма пакета во времени, конечно, будет не гауссовской, а скорее экспоненциальной, т. е. зависимость от энергии будет брейт-вигнеровской или лоренцевской. Мы не думаем, что это обстоятельство может привести к каким-либо серьезным последствиям в отношении порядка величины времен T_1 , T_2 и T_3 . Очевидно, что единственное возможное изменение может состоять в уменьшении величины T_3 , поскольку возбуждающий сигнал экспоненциальной формы имеет значительно медленнее спадающий хвост, чем сигнал гауссовской формы. В этом случае величина Δ имеет смысл *ширины материнского уровня*.

Смешанные состояния. Необходимо разобрать еще следующий вопрос. В действительности большинство нестабильных систем, испытывающих распад, находятся не в чистом состоянии, а в смешанном. Другими словами, возбуждение этих систем происходит *некогерентно* и их нельзя описать с помощью волновой функции. Более адекватным должно быть описание таких систем с применением матрицы плотности. Рассмотрим случай, когда нестабильное состояние образуется в результате распада нестабильного материнского уровня. Так как при распаде материнского состояния, помимо образования дочернего фрагмента, должна испускаться по меньшей мере еще одна частица и поскольку эти другие частицы улетают и «выходят из игры», то дочерний фрагмент может находиться в смешанном состоянии, даже если материнское состояние было чистым. Рассмотрим этот случай несколько подробнее.

Допустим на время, что материнское состояние является чистым и сильно локализовано по энергии. Пусть оно распадается на два фрагмента (как, например, при α - или γ -распаде), один из которых представляет рассматриваемый дочерний фрагмент. В таком случае дочернее состояние будет чистым ¹⁾ и также должно быть сильно локализовано по энергии, поскольку продукты распада с образованием двух частиц имеют вполне определенные значения энергии. С другой стороны, если материнское состояние распадается на три (или более) частицы (как, например, при β -распаде), то каждая из испускаемых частиц, рассматриваемая в отдельности, находится в смешанном состоянии, в кото-

¹⁾ Для простоты мы считаем, что дополнительные степени свободы, такие, как спин, отсутствуют. Их учет привел бы лишь к усложнению используемой терминологии.

ром содержатся различные компоненты, отвечающие резкой локализации по энергиям, с весами, соответствующими *спектру* распада.

Однако исходное допущение, разумеется, является неправильным. Нестабильное материнское состояние, конечно, не может быть резко локализовано по энергии, так как в противном случае оно не изменялось бы во времени. Если материнское состояние распадается приблизительно по экспоненциальному закону, то оно должно быть «размыто» по энергии. Это размытие описывается формулой Брейта — Вигнера с соответствующей шириной. Но если при этом материнское состояние все же является чистым и распадается на два фрагмента, то дочерний фрагмент также находится в чистом состоянии и в качестве Δ во всем предыдущем рассмотрении нужно использовать ширину материнского состояния. Если материнское состояние распадается на три фрагмента, то дочерний фрагмент находится в смешанном состоянии, каждая компонента которого размыта по энергии. В этом случае все предыдущее рассмотрение применимо к каждой компоненте смешанного состояния. Другими словами, и в этом случае Δ — ширина материнского уровня, а *не* ширина энергетического спектра распада. Ширина энергетического спектра распада дает вклад только в последующее *некогерентное* размытие по энергии в смешанном состоянии, но не имеет отношения к когерентным эффектам.

Такие же рассуждения применимы и к случаю, когда материнское состояние (имеющее как и в рассмотренном выше примере, когерентное размытие по энергии) является, кроме того, смешанным и имеет дополнительный энергетический спектр. При рассмотрении такие некогерентные эффекты можно игнорировать.

Другой важный метод создания систем в нестабильных состояниях состоит в *возбуждении при столкновении*. Примерами, иллюстрирующими этот метод, являются возбуждения атомов в газах и образование нестабильных частиц при нуклон-нуклонных столкновениях. Рассмотрим последний пример более подробно. Для простоты будем считать, что воображаемый эксперимент проводится на встречных протонных пучках в системе центра масс, и будем игнорировать степени свободы, связанные со спином. Если протоны образуются при одинаковых условиях и являются моноэнергетическими, то образующиеся нестабильные фрагменты, рассматриваемые не как пары, триплеты и т. д., а по отдельности, будут находиться в смешанных состояниях, состоящих из моноэнергетических состояний с весами, соответствующими энергетическому спектру распада. При этом для странных частиц экспоненциальный закон распада наблюдаться не будет. Действительно, поддающимися наблюдению являются здесь только стабильные частицы. Любое нестабильное состояние должно быть *когерентной* суперпозицией состояний с различной энергией. Нестабильные частицы могут образоваться только в том случае, когда когерентная ширина исходного пучка по энергии отлична от нуля. Конечно, любой пучок частиц, созданный в ускорителе, имеет такую ширину. Это следует уже из того, что пучок является импульсным. Однако из приведенного выше рассмотрения видно, что нестабильные состояния, ширина которых больше когерентной ширины исходного пучка, образоваться не могут; если все же они получены, то для них не будет наблюдаться четкий экспоненциальный закон распада.

Ввиду того что смешанные состояния встречаются часто, важно выяснить, нужно ли видоизменять результаты, полученные для чистых состояний, чтобы их можно было применять для смешанных состояний. Ответ на этот вопрос состоит в следующем: никакого существенного изменения результатов не происходит. Если смешанное состояние состоит из состояний, которые настолько сильно локализованы по энергии, что сами по себе не могут приводить к экспоненциальному закону распада, то смешивание этих состояний также не может приводить к такому закону. Точно так же смешивание состояний не может отодвинуть момент наступления неэкспоненциального спада, к которому

приводят чистые состояния. Если медленно убывающие члены уже преобладают над экспоненциальными в каждой компоненте смешанного состояния, то их смешивание не может привести к какой-либо компенсации этих преобладающих членов. Аналогичным образом, в промежутке времени, когда каждое состояние в смеси распадается почти точно экспоненциально, по такому же закону должно распадаться и смешанное состояние. Следовательно, вопрос об экспоненциальном распаде смешанного состояния всегда можно свести к вопросу о распаде каждой его составной части.

Примеры. Приведем несколько простых примеров. Рассмотрим случай перехода ядра с возбужденного уровня с испусканием γ -квантов. В качестве типичного примера можно взять энергию $E_0 \approx 200$ кэв и время жизни $\tau \approx 10^{-8}$ сек, так что $\Gamma/E_0 \approx 3 \cdot 10^{-13}$. При этом для точки наблюдения на расстоянии $r = 10$ см имеем $k_0 r \approx 10^{11}$. Допустим, что переход на возбужденный уровень произошел с материнского уровня, ширина которого в 2 раза больше ширины дочернего уровня. Тогда условие (19.13) очень хорошо выполняется и $\gamma \ll 1$. Кривая распада должна быть приблизительно экспоненциальной через промежуток времени, равный $\frac{1}{8}$ от среднего периода полураспада, после наблюдения максимума и почти точно экспоненциальной через промежуток времени, равный удвоенному периоду полураспада. Распад остается после этого экспоненциальным в течение промежутка времени, в 10^{17} раз превышающего период полураспада! Для того чтобы большая часть кривой распада была неэкспоненциальной, нужно было бы отодвинуть детектор на расстояние около 10^{22} км. Отметим, что не было бы заметного различия в наблюдаемых эффектах, даже если бы Δ было больше Γ , скажем, в 2000 раз. Экспоненциальный закон начинался бы значительно раньше, через промежуток времени, составляющий лишь малую долю от периода полураспада, и выполнялся бы в течение времени, превышающего период полураспада в 10^{11} раз.

Рассмотрим частицу типа K_1 -мезона с массой около 500 Мэв и временем жизни $\tau \approx 10^{-10}$ сек. Если рассматривать только распад на два π -мезона, то $E_0 \approx 220$ Мэв, $E_0/\Gamma \approx 4 \cdot 10^{13}$ и $k_0 \approx 10^{13}$ см $^{-1}$. Если ширина возбуждения равна $\Delta = 10^4 \Gamma$ и наблюдение производится на расстоянии 100 см, то экспоненциальный закон становится почти точным спустя время, меньшее одной тысячной времени полураспада, и остается таким в течение промежутка времени, приблизительно в 10^9 раз превышающего время полураспада.

§ 3. КРАТНЫЕ ПОЛЮСЫ S-МАТРИЦЫ

Рассмотрение, проведенное в предыдущем параграфе, было основано на предположении о том, что резонанс имеет брейт-вигнеровскую форму. Другими словами, амплитуда рассеяния имеет простой изолированный полюс вблизи действительной оси или по крайней мере ведет себя так, как если бы она имела подобный полюс при энергиях из единственно доступной физической области (а именно на действительной оси). В некоторых случаях происходит сближение двух или большего числа таких полюсов. Очевидно, что в общем случае это будет, с одной стороны, искажать форму линий, а с другой стороны, приводить к отклонениям кривых распада от экспоненциального закона ¹⁾.

Предельным случаем близко расположенных резонансов является случай кратных полюсов. В то время как полюсы S-матрицы, соответствующие связанным состояниям, должны быть простыми, не существует никаких общих запретов на появление кратных полюсов в комплексной плоскости, соответствующих резонансам. Первый наблюдаемый эффект, обусловленный появлением кратных полюсов, состоял бы в том, что изменилась бы форма соответ-

¹⁾Пример влияния двух близко расположенных резонансов подробно рассмотрен в работе [848].

ствующей спектральной линии, которая стала бы отличаться от лоренцевской. Второй эффект состоял бы в изменении центральной части кривой распада в сторону ее отклонения от экспоненциального закона.

Для того чтобы увидеть, к каким формам линии могут приводить кратные полюсы, рассмотрим, например, двойной полюс. Пусть разложение для амплитуды рассеяния (или для S -матрицы) имеет вид

$$A = \frac{-1/4\Gamma^2 a}{(E - E_0 + 1/2i\Gamma)^2} + \frac{i^{1/2}\Gamma b}{E - E_0 + 1/2i\Gamma} + \dots \quad (19.20)$$

При этом зависимость сечения от энергии вблизи $E = E_0$ определяется выражением

$$|A|^2 = \left[(E - E_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2 \right]^{-2} \left\{ \frac{1}{16}\Gamma^4 |a|^4 + \frac{1}{4}\Gamma^2 |b|^2 \left[(E - E_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2 \right] + \frac{1}{4}\Gamma^3 \operatorname{Re} \left[ab^* i \left(E - E_0 - \frac{1}{2}i\Gamma \right) \right] \right\}. \quad (19.21)$$

Если $b = 0$, то вся зависимость от энергии содержится в первом множителе, представляющем квадрат брейт-вигнеровского члена. Этот член по форме напоминает обычную линию, только имеет более плоскую вершину. Однако если $b \neq 0$, то энергетическая зависимость члена, заключенного в скобки, может совершенно изменить форму линии. Например, если только разность фаз a и b не равна 0 или π , то линия несимметрична. Более того, линия может иметь два разрешенных максимума и, таким образом, походить на линию, отвечающую двум близким расположенным обычным резонансам меньшей ширины.

Посмотрим теперь, какой вид имеют соответствующие кривые распада. Из рассуждений, приведенных в предыдущем параграфе, вытекает, что с математической точки зрения экспоненциальная зависимость от времени обязана своим происхождением вычету подынтегрального выражения в интеграле типа (19.14) в точке полюса. Если как в (19.20), амплитуда рассеяния имеет двойной полюс, то вклад от полюса будет состоять из двух членов, поскольку при умножении на экспоненту в (19.14) оба члена в (19.20) дают вычет. Отвлекаясь от несущественных множителей, найдем, что вклад от вычетов в амплитуду рассеяния имеет вид

$$\left\{ b + \frac{1}{2}a \left[(t - t_F)\tau^{-1} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 \right] \right\} e^{-1/2(t-t_F)/\tau}. \quad (19.22)$$

Из (19.22) видно, что вместо экспоненциального закона мы имеем линейную функцию времени (а в сечении — квадратичную функцию времени), умноженную на экспоненту. Аналогичным образом полюсы более высокого порядка приводят к временной зависимости в виде полинома более высокого порядка по t , умноженного на такую же экспоненту. Подобные видоизменения будут существенны, в частности, для больших времен. Времена, при которых они начинают приводить к наблюдаемым отклонениям от чисто экспоненциального закона, зависят, конечно, от соотношения между величинами a и b . Хотя линейный член в (19.22) в конце концов всегда будет преобладать, это произойдет тем позже, чем меньше a по сравнению с b .

Кривые распада вида (19.22) пока не обнаружены экспериментально. Однако хотя в некоторых случаях экспоненциальный закон был хорошо подтвержден экспериментально на протяжении промежутков времени, во много раз превышающих время жизни, он, несомненно, не был проверен во многих других случаях, в которых тем не менее предполагалось, что экспоненциальный закон выполняется. Не приходится ожидать, что этот закон будет часто нарушаться. Пока не найдено глубокой причины, которая приводила бы к тому, что полюсы, соответствующие некоторым отдельным резонансам, были бы не простыми; появление кратных полюсов следует рассматривать как чрезвычайно маловероятную случайность.

КОММЕНТАРИИ

К § 2. Впервые достаточно полное исследование задачи распада выполнено Вайс-конфом и Вигнером [895].

В следующих работах применяется метод *гашения излучения*: [377, 23—26].

Укажем другие работы по этому вопросу: [623, 972, 973, 391, 588, 689, 970, 532, 768, 548, 780, 506, 48, 661, 431, 647, 343, 345, 666].

Метод, изложенный в данной главе, основан на работе автора [647].

К § 3. Другие формы резонанса и их влияние на кривую распада рассмотрены в работе [280] и особенно в [344]; см. также [52].

ЗАДАЧИ

1. Волновой пакет гауссовской формы шириной 1 эв , имеющий центр при энергии 1 Мэв и состоящий из частиц массой 500 Мэв , посылают в направлении рассеивающего центра, имеющего бесконечную массу. Наблюдение производят на расстоянии 1 см от рассеивающего центра. Какой вид имеет зависимость измеряемого сигнала от времени, когда сигнал еще имеет достаточно большую величину? Изменится ли характер временной зависимости, если измерение производят на расстоянии 10 км ?

Допустим, что опыт проводят с другим волновым пакетом, имеющим вдвое большую ширину, чем первый. Какова длительность сигнала в этом случае по сравнению с первым, если наблюдение производят на расстоянии 10^{-2} см от рассеивающего центра? Какова длительность сигнала при расстоянии в 1 км ?

2. Резонанс шириной 1 кэв приводит к образованию нестабильной частицы с массой 500 Мэв и с временем жизни 10^{-12} сек , которая распадается на две частицы с массами 100 и 200 Мэв . Наблюдение продуктов распада производят на расстоянии 1 м . Приблизительно через какое время кривая распада становится экспоненциальной? В течение какого времени по сравнению с временем жизни кривая распада остается экспоненциальной? Ответить на те же вопросы для случая, когда расстояние до точки наблюдения равно 10 м ?

3. Допустим, что S -матрица имеет трехкратный полюс вблизи действительной оси. Какова форма линии резонанса? Какой вид имеет закон распада?

Обратная задача рассеяния

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В обычной постановке задачи теории рассеяния гамильтониан системы или взаимодействие между частицами считаются известными и требуется вычислить сечение, поляризацию и т. д. и затем сопоставить полученные результаты с экспериментальными данными. «Обратную» задачу рассеяния формулируют следующим образом: располагая определенной информацией, полученной более или менее непосредственно из экспериментов по рассеянию, определить закон взаимодействия между частицами. При этом предварительно нужно ответить на следующий вопрос: достаточно ли имеющегося в нашем распоряжении количества информации для однозначного определения сил взаимодействия? Если нет, то каков характер возникающей неопределенности?

Разумеется, конечная цель экспериментов по рассеянию всегда состоит в отыскании закона взаимодействия. В более традиционной постановке гамильтониан выбирают исходя из соображений простоты или из некоторого класса операторов. Выбор класса операторов, обладающих определенными свойствами, производится на основе какой-либо более фундаментальной теории либо же его подбирают, руководствуясь какими-либо другими критериями. После того как произведен выбор гамильтониана, вычисляют сечение. Если результат не согласуется с экспериментом, то от данного гамильтониана либо отказываются вовсе, либо его как-то видоизменяют. Нет необходимости говорить о том, что при таком подходе очень важны хорошая интуиция, даваемая опытом, и способность проникать в физическую сущность эффектов, возникающих в экспериментах по рассеянию и обусловленных определенными характеристическими особенностями сил взаимодействия между частицами. Именно при данном подходе особенно полезны такие простые приближения, как приближение эффективного радиуса, борновское приближение и др. С помощью физической интуиции из экспериментальных данных можно сделать разумные и достаточно надежные выводы о характере потенциала. Вместе с тем совершенно очевидно, что наиболее прямой путь получения искомых результатов состоит в разработке математического метода построения гамильтониана исходя из экспериментальных данных по рассеянию. Если гамильтониан невозможно определить однозначно, то такой метод должен устанавливать *класс* гамильтонианов, приводящих к одинаковым экспериментальным результатам.

Прежде всего возникает вопрос: какую информацию по рассеянию нужно использовать в качестве исходной? Характер информации должен определяться как экспериментальными возможностями, так и возможностями математических методов, применяемых для решения задачи. Как бы мы ни стремились перенести всю тяжесть проблемы на экспериментальное получение информации, в действительности мы неизбежно сталкиваемся с трудностями разработки математических методов. Любая наиболее легко доступная инфор-

мация не принесет никакой пользы, если у нас не хватит изобретательности построить метод определения гамильтониана, используя эту информацию. С другой стороны, так как единственный известный математический метод требует трудно доступной информации, то указанный подход к решению обратной задачи рассеяния во многом теряет свою привлекательность.

В принципе обратная задача рассеяния имеет решение, если о процессе рассеяния известно следующее: либо сдвиг фаз (т. е. известна S -матрица) для одного значения углового момента и для всех значений энергии; либо все сдвиги фаз (т. е. известна амплитуда рассеяния) для одной энергии; либо амплитуда рассеяния для некоторого интервала углов в направлении назад для всех энергий. Было бы весьма желательно иметь решения поставленной задачи и для других видов используемой информации, например для случая, когда известна зависимость полного сечения от энергии. Однако такие решения еще не найдены.

В тех случаях, когда обратная задача рассеяния в принципе была решена, данные, используемые в качестве отправного пункта при решении задачи, всегда на один этап отличались от той информации, которую можно получить непосредственно из опыта. Так, в качестве исходных данных используют амплитуду рассеяния или сдвиги фаз, а не сечения. При получении этих данных из сечения рассеяния всегда возникает неопределенность в фазе. На практике зависимость фазы амплитуды рассеяния от угла рассеяния и от энергии можно найти двумя способами. Первый способ применим, когда сталкивающиеся частицы заряжены. В этом случае интерференционные эффекты, возникающие между известной амплитудой, определяемой формулой Резерфорда, и дополнительным членом, позволяют получить информацию о фазе этого дополнительного члена.

Второй метод отыскания фазы амплитуды рассеяния состоит в следующем. Рассмотрение начинают с достаточно низких энергий, при которых не только имеется изотропия сечения, т. е. вклад в сечение дает лишь s -волна, но, кроме того, сдвиг фазы при $l = 0$ еще остается линейной функцией импульса. Поскольку при этом, согласно (11.11), амплитуда s -волны связана со сдвигом фаз соотношением

$$a_0(k) = \frac{\delta_0(k) - \delta_0(0)}{k}$$

и величину $|a_0(k)|^2$ наблюдают на опыте, то остается лишь неопределенность в знаке $a_0(k)$ и в величине $\delta_0(0)$. Эту неопределенность обычно устраняют с помощью теории, использующей понятие эффективного радиуса взаимодействия, с привлечением дополнительных сведений либо о знаке потенциала, либо о существовании связанных состояний, либо о том и другом вместе и т. д. После того как сделан выбор знака, можно осуществить «непрерывное» проследивание сдвига фазы s -волны с помощью измерений при нескольких больших энергиях. Когда в процессе начинает участвовать p -волна, это в первую очередь приводит к интерференции s -волны с p -волной. Поэтому в принципе можно однозначно выделить вклад, обусловленный p -волной, и проследить за его изменением с энергией. По мере того как в процесс последовательно вступают парциальные волны с более высокими угловыми моментами, обусловленный ими вклад также можно определить путем измерений. Ясно, что хотя таким способом *в принципе* можно определить сдвиги фаз или амплитуду рассеяния с точностью до общего знака, на практике это должно быть весьма непростым делом. Одна из главных причин возникающих трудностей состоит в том, что в данном методе существенным образом используются соображения непрерывности. Измерения же редко проводят при достаточно малых интервалах между энергиями.

Неоднозначность увеличивается, если сталкивающиеся частицы обладают спином. В таком случае для уменьшения неопределенности нужно использовать данные о поляризации частиц, измеренной с помощью двукратного

или трехкратного рассеяния. Наиболее важным из рассматриваемых случаев является нуклон-нуклонное рассеяние в широкой области энергий. Исторические сведения об определении сдвига фаз при нуклон-нуклонном рассеянии имеются в литературе ⁴⁾ и могут служить полезным примером.

Другой метод, позволяющий *в принципе* определить фазу амплитуды рассеяния (с точностью до константы, не зависящей от угла), состоит в использовании эффекта Хэнбери-Брауна и Твисса (описанного в гл. 4, § 3). Этот метод включает измерения по схеме совпадений рассеяния на два различных угла. Однако использование данного метода наталкивается на очень большие экспериментальные трудности и до сих пор еще не было осуществлено.

Несмотря на указанные практические трудности, начиная с данного момента, мы будем считать, что амплитуда рассеяния или сдвиги фаз известны из экспериментов.

Можно говорить об обратной задаче рассеяния несколько другого вида, если исходить из информации, совершенно недоступной экспериментальному определению, например считать известной T -матрицу [233, 163] вне энергетической поверхности или спектры в комплексной плоскости угловых моментов [120]. В этом случае решения известны. Однако хотя такая задача представляет математический интерес, ее практическая ценность сомнительна. В дальнейшем мы не будем рассматривать задачи такого типа.

После того как мы фиксировали наше внимание на обратной задаче рассеяния, исходящей из информации определенного вида, мы должны рассмотреть вопросы существования и единственности решения. С самого начала ясно, что нельзя рассчитывать на возможность однозначного построения гамильтониана для нелокального взаимодействия общего вида, используя в качестве исходной информации либо амплитуду рассеяния, либо сдвиги фаз. Как амплитуда рассеяния, так и сдвиги фаз являются функциями только одного параметра (если считать, что имеет место сферическая симметрия). В то же время нелокальный член в гамильтониане зависит по меньшей мере от двух параметров. Однако следует отметить один важный результат, вытекающий из решения обратной задачи рассеяния.

Этот результат состоит в том, что мы можем ограничиться рассмотрением *локальных потенциалов*. Другими словами, как будет видно из метода построения решения, независимо от вида выбранной зависимости сдвига фаз (для данного углового момента) от энергии (требуется лишь, чтобы она удовлетворяла весьма слабым условиям, накладываемым на характер убывания на бесконечности) всегда существует по меньшей мере один локальный не зависящий от энергии потенциал, который приводит к указанной зависимости. Аналогично независимо от свойств выбранного бесконечного набора фазовых сдвигов (удовлетворяющего лишь весьма слабым условиям, накладываемым на характер убывания фазовых сдвигов при больших значениях угловых моментов) всегда существует один локальный не зависящий от углового момента потенциал, соответствующий указанному набору при данной энергии.

В обоих случаях имеется одно небольшое ограничение: мы не можем гарантировать, что соответствующий потенциал будет «разумным» с физической точки зрения. Если отвлечься от сделанной выше оговорки, то из доказательства существования решения следует, что локальный характер потенциала не накладывает никаких ограничений на зависимость отдельных фазовых сдвигов от энергии или на дифференциальное сечение для одной энергии.

Вопрос о единственности решения более сложен. Как мы увидим ниже, каждый фазовый сдвиг данного углового момента, для которого нет связанных состояний, связан с *одним-единственным* локальным потенциалом.

⁴⁾ См., например, работу Брейта [107], в которой можно найти соответствующую библиографию, особенно на стр. 776. Самыми последними работами по данному вопросу являются [560, 659]; см. также [972].

Если имеется N связанных состояний с некоторым значением углового момента, то остается свобода в выборе их энергий, и поэтому существует N -параметрическое семейство «эквивалентных» потенциалов, каждый из которых соответствует заданному сдвигу фаз для всех энергий и набору связанных состояний. Другими словами, отвлекаясь от связи между фазовыми сдвигами и числом связанных состояний с тем же угловым моментом, которая следует из теоремы Левинсона, можно считать, что связанные состояния совершенно не зависят от характеристик рассеяния. В принципе невозможно получить информацию о связанных состояниях с помощью характеристик рассеяния, и наоборот¹⁾. Аналогично, как мы увидим ниже, каждому набору фазовых сдвигов для данной энергии соответствует однопараметрическое семейство потенциалов.

В связи с изложенными выше результатами возникает следующий вопрос. Если энергетическая зависимость одного фазового сдвига определяет потенциал (в пределах указанной выше неопределенности), то энергетическая зависимость двух или более фазовых сдвигов для различных угловых моментов в общем случае может оказаться несовместимой друг с другом и с предположением о существовании локального, не зависящего от l потенциала. Аналогично значения амплитуд рассеяния при двух различных энергиях необязательно совместимы друг с другом и с предположением о существовании локального, не зависящего от энергии потенциала. Большой интерес представляло бы получение простых *непосредственных* критериев непротиворечивости указанных значений и зависимостей.

Такие критерии возникают при решении обратной задачи отмеченной выше в третьей постановке [474], в которой исходят из амплитуды рассеяния, причем считают, что последняя известна для всех энергий. В этом случае нельзя с самого начала делать предположение о существовании локального потенциала. Лишь после решения задачи можно поставить вопрос о том, при каких условиях потенциал является локальным. К сожалению, получающиеся критерии являются весьма сложными и непрактичными.

В следующих параграфах будут достаточно подробно описаны методы решения обратной задачи рассеяния в первых двух постановках. По вопросам, касающимся обратной задачи третьего вида, мы отсылаем читателя к соответствующей литературе [470—474, 619].

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО ИЗВЕСТНОМУ СДВИГУ ФАЗ

1. Уравнение Гельфанда — Левитана

Рассмотрим упругое рассеяние бесспиновых частиц на сферически симметричном локальном потенциале. В этом случае задача состоит в отыскании потенциала в радиальном уравнении Шредингера при известной S -матрице или асимптотическом поведении регулярного решения для всех положительных значений энергии. Наиболее изящный способ решения поставленной задачи заключается в использовании интегрального уравнения. Мы проведем выкладки таким образом, чтобы их было особенно легко применить к рассмотрению вопросов, затронутых в § 3.

Решение задачи мы начнем с рассмотрения решений $\varphi_l(E, r)$ радиального уравнения Шредингера для углового момента l и произвольного потенциала \mathcal{V}_l (ведущего себя хорошо в смысле, рассмотренном в гл. 12):

$$D_l(r) \varphi_l(E, r) = -k^2 \varphi_l(E, r). \quad (20.1)$$

¹⁾ Это утверждение не противоречит результатам, полученным методом, использующим понятие эффективного радиуса взаимодействия. Здесь просто нарушается данное приближение.

Здесь $D_1(r)$ — дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$D_1(r) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \mathcal{T}_1(r), \quad (20.2)$$

а функция φ_1 должна удовлетворять граничному условию (12.132). Введем новую функцию $g(r, r')$ с помощью интеграла Стильтьеса:

$$g(r, r') = \int_{-\infty}^{\infty} dh(E) \varphi_1(E, r) \varphi_1(E_1, r'). \quad (20.3)$$

Будем пока считать функцию $h(E)$ совершенно произвольной. Ее вид будет установлен в дальнейшем. Ясно, что g удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$D_1(r) g(r, r') = D_1(r') g(r, r') \quad (20.4)$$

и граничным условиям

$$g(r, 0) = g(0, r') = 0. \quad (20.5)$$

Допустим теперь, что функция $K(r, r')$ представляет *единственное* решение линейного интегрального уравнения Гельфанда — Левитана

$$K(r, r') = g(r, r') - \int_0^r dr'' K(r, r'') g(r'', r'). \quad (20.6)$$

Другими словами, мы временно предполагаем, что интегральное уравнение (20.6) имеет решение и притом единственное. Справедливость данного предположения предстоит доказать в дальнейшем.

Введем функцию

$$\xi(r, r') \equiv D(r) K(r, r') - D_1(r') K(r, r'), \quad (20.7)$$

где $D(r)$ — дифференциальный оператор, определяемый соотношениями

$$D(r) = D_1(r) - \Delta \mathcal{T}(r), \quad \Delta \mathcal{T}(r) = -2 \frac{d}{dr} K(r, r). \quad (20.8)$$

Если в (20.7) выполнить дифференцирование, проинтегрировать по частям и использовать дифференциальное уравнение (20.4) совместно с граничными условиями (20.5), то нетрудно убедиться, что $\xi(r, r')$ удовлетворяет однородному интегральному уравнению, соответствующему уравнению (20.6). Поскольку мы предполагаем, что неоднородное уравнение (20.6) имеет единственное решение, то соответствующее однородное уравнение может иметь только тривиальное решение. Из этого можно сделать вывод, что $\xi(r, r') \equiv 0$. Другими словами, функция $K(r, r')$ подчиняется дифференциальному уравнению в частных производных

$$D(r) K(r, r') = D_1(r') K(r, r'). \quad (20.9)$$

Кроме того, из (20.5) следует, что функция $K(r, r')$ удовлетворяет граничным условиям

$$K(r, 0) = K(0, r') = 0. \quad (20.10)$$

Используя решение $K(r, r')$ интегрального уравнения (20.6), построим функцию

$$\varphi(E, r) \equiv \varphi_1(E, r) - \int_0^r dr' K(r, r') \varphi_1(E, r'). \quad (20.11)$$

Действуя на правую и левую части соотношения (20.11) дифференциальным оператором $D(r)$ и дважды интегрируя по частям с помощью (20.9) и (20.1),

получаем, что $\varphi(k, r)$ является решением дифференциального уравнения

$$D(r)\varphi(E, r) = -k^2\varphi(E, r). \quad (20.12)$$

Кроме того, из (20.10) следует, что φ — *регулярное* решение

$$\varphi(E, 0) = 0. \quad (20.13)$$

Отметим, что интегральное уравнение (20.6) представляет уравнение для $K(r, r')$ только в области $r' \leq r$. Но соотношения (20.8) и (20.11) определены как раз для значений r и r' , удовлетворяющих этому неравенству. Если функция $K(r, r')$ известна в области $r' \leq r$, то уравнение (20.6) также можно было бы использовать для построения явного выражения для $K(r, r')$ в области $r' > r$ через значения этой функции в области $r' \leq r$. Однако необходимости в такой операции никогда не возникает.

Итак, мы построили в явном виде регулярное решение (20.11) радиального уравнения Шредингера (20.12) с потенциалом

$$\mathcal{V}^*(r) = \mathcal{V}_1^*(r) + \Delta\mathcal{V}^*(r). \quad (20.14)$$

При этом мы исходили из соотношения (20.3), и теперь обязаны связать функцию $h(E)$ с $\varphi(E, r)$. Прежде чем приступить к этому, отметим, что выкладки можно было бы проделать в обратном порядке. Если потенциал (20.14) достаточно хороший, то рассмотрение можно было бы начать, исходя из функции вида (20.3), с той лишь разницей, что в (20.3) нужно было бы вместо $\varphi_1(E, r)$ использовать функцию $\varphi(E, r)$ и, возможно, другую функцию $h(E)$. Поэтому должна существовать такая новая функция $h(E)$, которая в результате указанной процедуры приводит к функции $\varphi_1(E, r)$. Другими словами, поскольку в общем случае соотношение (20.11) правильно, то должно существовать другое ядро $\bar{K}(r, r')$, такое, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi_1(E, r) = \varphi(E, r) + \int_0^r dr' \bar{K}(r, r') \varphi(E, r'). \quad (20.11a)$$

Отметим то замечательное обстоятельство, что ядра в (20.11) и (20.11a) не зависят от энергии.

Подставим теперь функцию (20.3) в (20.6). В результате получим, что $K(r, r')$ должно допускать представление в форме

$$K(r, r') = \int dh(E) \mathcal{K}(E, r) \varphi_1(E, r'),$$

где, кроме того, $\mathcal{K}(E, r)$ имеет вид

$$\mathcal{K}(E, r) = \varphi_1(E, r) - \int_0^r dr' K(r, r') \varphi_1(E, r').$$

Сравнивая данное представление с (20.11), видим, что $\mathcal{K}(E, r) = \varphi(E, r)$, так что имеем

$$K(r, r') = \int dh(E) \varphi(E, r) \varphi_1(E, r'). \quad (20.15)$$

Мы знаем, что функции $\varphi_1(E, r)$ образуют полный набор. Соотношение полноты (12.128a) содержит весовую функцию $\rho_1(E)$, которая определяется по формуле (12.172) через связанные состояния и функцию Йоста для потенциала \mathcal{V}_1^* . Если потенциал $\mathcal{V}^*(r)$ в (20.14) имеет конечные первый и второй абсолютные моменты, то функции $\varphi(E, r)$ также образуют полный набор, причем в качестве весовой функции выступает спектральная функция $\rho(E)$:

$$\begin{aligned} \int d\rho_1(E) \varphi_1(E, r) \varphi_1(E, r') &= \delta(r - r'), \\ \int d\rho(E) \varphi(E, r) \varphi(E, r') &= \delta(r - r'). \end{aligned} \quad (20.16)$$

Умножим соотношение (20.11) на $\varphi_1(E, r')$ и проинтегрируем с весом $d\rho_1$. Соответственно соотношение (20.11а) для функции $\varphi_1(E, r')$ умножим на $\varphi(E, r)$ и проинтегрируем с весом $d\rho$. Вычитая полученные результаты и используя (20.16), находим

$$\int d[\rho(E) - \rho_1(E)] \varphi(E, r) \varphi_1(E, r') = \begin{cases} K(r, r'), & r' < r, \\ \bar{K}(r', r), & r' \geq r. \end{cases} \quad (20.17)$$

Сравнивая (20.17) с (20.15), видим, что исходная функция $h(E)$ непосредственно связана с новой спектральной функцией $\rho(E)$ соотношением

$$h(E) = \rho(E) - \rho_1(E). \quad (20.18)$$

Таким образом, теперь можно построить потенциал \mathcal{V} , соответствующий данной спектральной функции $\rho(E)$. Метод построения заключается в следующем. Подставляем выражение (20.18) для $h(E)$ в формулу (20.3) и решаем интегральное уравнение (20.6). Затем по формулам (20.8) и (20.14) находим потенциал.

Единственность решения интегрального уравнения (20.6). В задаче пока остается недоказанной единственность решения интегрального уравнения (20.6). Допустим, что уравнение (20.6) имеет два решения. В этом случае соответствующее неоднородное уравнение имело бы нетривиальное решение; обозначим его через $\chi_r(r')$:

$$\chi_r(r') + \int_0^r dr'' g(r'', r') \chi_r(r'') = 0.$$

Согласно (20.3) и (20.18), имеем

$$\chi_r(r') + \int d[\rho(E) - \rho_1(E)] \varphi_1(E, r') \int_0^r dr'' \varphi_1(E, r'') \chi_r(r'') = 0.$$

Умножим последнее уравнение на $\chi_r(r')$ и проинтегрируем по r' :

$$\begin{aligned} \int_0^r dr' [\chi_r(r')]^2 + \int d\rho(E) \left[\int_0^r dr' \varphi_1(E, r') \chi_r(r') \right]^2 = \\ = \int d\rho_1(E) \left[\int_0^r dr' \varphi_1(E, r') \chi_r(r') \right]^2. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Но если применить соотношение полноты

$$\int_0^\infty dr [f(r)]^2 = \int d\rho_1(E) \left[\int_0^\infty dr f(r) \varphi_1(E, r) \right]^2$$

к функции

$$f(r') \equiv \begin{cases} \chi_r(r'), & r' < r, \\ 0, & r' > r, \end{cases}$$

то получим

$$\int_0^r dr [\chi_r(r')]^2 = \int d\rho_1(E) \left[\int_0^r dr' \varphi_1(E, r') \chi_r(r') \right]^2$$

и, следовательно, согласно (20.19),

$$\int d\rho(E) \left[\int_0^r dr' \varphi_1(E, r') \chi_r(r') \right]^2 = 0.$$

Поскольку $\rho(E)$ — монотонная функция, то из последнего соотношения следует, что функция $\chi_r(r')$ ортогональна всем функциям $\varphi_1(E, r')$. Поэтому $\chi_r(r')$ должна равняться нулю. Из этого вытекает, что если интегральное уравнение (20.6) имеет решение, приводящее к достаточно хорошему потенциалу (такому, чтобы система волновых функций для этого потенциала была полной), то это решение единственное.

Существование решения. Характер уравнения (20.6) зависит от того, как быстро функция $h(E)$ стремится к нулю при больших энергиях. Ядро определяется формулой

$$G_r(r', r'') = \begin{cases} g(r', r''), & r'' < r, \\ 0, & r'' > r. \end{cases}$$

и можно вычислить след оператора GG^+ . Поскольку из (20.16) следует, что

$$\int_0^{\infty} dr \varphi_1(E, r) \varphi_1(E', r) = \frac{\delta(E - E')}{d\rho_1/dE},$$

то

$$\text{Sp } G_r G_r^{\dagger} = \int_0^{\infty} dr' \int_0^r dr'' g^2(r', r'') = \int dE \frac{(d\rho/dE - d\rho_1/dE)^2}{d\rho/dE} \int_0^r dr' [\varphi_1(E, r')]^2. \quad (20.20)$$

Для разумных спектральных функций ρ и ρ_1 интеграл в (20.20) сходится, так что ядро уравнения (20.6) принадлежит классу Гильберта — Шмидта. Другими словами, уравнение (20.6) является *уравнением Фредгольма*. Поэтому, если показано, что соответствующее ему однородное уравнение не имеет ни одного нетривиального решения, то тем самым доказано существование решения неоднородного уравнения (20.6).

Определение спектральной функции из S-матрицы. Теперь остается лишь определить спектральную функцию из S-матрицы или из фазового сдвига. Эту проблему можно решить, воспользовавшись дисперсионным соотношением (12.64), которое позволяет вычислить значение функций Йоста из фазового сдвига и из значений энергий связанных состояний с тем же угловым моментом. Из выражения (12.172) для спектральной функции видно, что, помимо всего, в него входит один положительный параметр для каждого связанного состояния. Таким образом, для данного фазового сдвига и для данного набора N связанных состояний имеется N -параметрическое семейство соответствующих спектральных функций, а следовательно, и потенциалов.

По своему физическому смыслу указанные параметры представляют величины нормировочных интегралов от волновых функций связанных состояний, если эти волновые функции определены таким образом, чтобы они удовлетворяли фиксированному граничному условию (12.132). В отношении нормированных волновых функций связанных состояний указанные параметры определяют значение первой отличной от нуля производной в начале координат. Следовательно, они определяют величину «размытия» волновой функции или «размер» области локализации связанного состояния, т. е. величину квадратного корня из среднеквадратичного расстояния между частицами ¹⁾.

Изменения в нормировочных параметрах. Допустим, что в действительности спектральная функция ρ отличается от спектральной функции сравнения ρ_1 только значением одного из указанных нормировочных параметров:

$$\frac{d\rho}{dE} - \frac{d\rho_1}{dE} = \delta(E - E_0) C, \quad (20.21)$$

¹⁾ Конкретный пример рассмотрен в гл. 14, § 7, п. 1.

где величина

$$C = N^{-2} - N_1^{-2}$$

обозначает разность обратных значений двух нормировочных интегралов, определяемых выражением, приведенным после формулы (12.123). Будем искать потенциал \mathcal{V}' , приводящий к такому же фазовому сдвигу и к таким же связанным состояниям (с той же энергией связи), к каким приводит потенциал \mathcal{V}'_1 .

Если выполняется условие (20.21), то ядра g и $K(r, r')$ являются разделяющимися:

$$g(r, r') = C\varphi_0(r)\varphi_0(r'), \quad K(r, r') = C\varphi(r)\varphi_0(r'),$$

где $\varphi_0(r)$ — волновая функция того связанного состояния потенциала \mathcal{V}'_1 , нормировку которого нужно изменить, и $\varphi(r)$ — соответствующая новая волновая функция. Из соотношения (20.11) следует, что

$$\varphi(r) = \frac{\varphi_0(r)}{1 + C \int_0^r dr' \varphi_0^2(r')} \quad (20.22)$$

и поэтому

$$K(r, r') = \frac{C\varphi_0(r)\varphi_0(r')}{1 + C \int_0^r dr'' \varphi_0^2(r'')} \quad (20.23)$$

$$\Delta\mathcal{V}'(r) = -2 \frac{d^2}{dr^2} \ln \left[1 + C \int_0^r dr' \varphi_0^2(r') \right]. \quad (20.24)$$

Новые волновые функции состояний рассеяния определяются выражением

$$\varphi(E, r) = \varphi_1(E, r) - C\varphi_0(r) \frac{\int_0^r dr' \varphi_0(r') \varphi_1(E, r')}{1 + C \int_0^r dr \varphi_0^2(r')}. \quad (20.25)$$

Последний член в (20.25) при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю, поскольку $\varphi_0(r)$ — функция связанного состояния. Именно поэтому не происходит никакого изменения фазового сдвига. Непосредственной проверкой можно показать, что

$$\frac{1}{\int_0^\infty dr \varphi^2(r)} = C + \frac{1}{\int_0^\infty dr \varphi_0^2(r)}.$$

Из формулы (20.24) следует, что асимптотическое значение для изменения потенциала при больших r имеет вид

$$\Delta\mathcal{V}'(r) \approx \text{const} \cdot e^{-2Kr},$$

где K связано с энергией того связанного состояния, нормировка которого была изменена, соотношением $E = -K^2/2\mu$. Из сказанного следует, что если существует какой-либо потенциал, соответствующий данному фазовому сдвигу и данным энергиям связи E_n и обладающий следующим свойством:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{V}'(r) e^{2Kr} = 0, \quad K^2 = \max(2E_n\mu), \quad (20.26)$$

то такой потенциал должен быть единственным потенциалом, обладающим указанным свойством. Более того, из этого следует, что если существует

один потенциал с асимптотическим поведением:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{U}^{\circ}(r) e^{2Kr} = \infty, \quad K^2 = \min(2E_n \mu),$$

то таким же асимптотическим поведением будет обладать каждый потенциал, соответствующий такому же фазовому сдвигу и тем же связанным состояниям. Если имеется потенциал, обладающий первым из указанных свойств, то естественным образом возникает возможность выбора *единственного* потенциала из семейства потенциалов, эквивалентных как по сдвигу фаз, так и по энергиям связи.

Далее, как было показано в гл. 12, из свойства (20.26) вытекает, что существует S -матрица, аналитическая всюду в полосе шириной K , расположенной выше действительной оси k , за исключением полюсов на мнимой оси, соответствующих связанным состояниям. Поэтому *необходимым* условием существования *единственного* в смысле выполнения асимптотики (20.26) потенциала является требование того, чтобы S -матрица была аналитической всюду в полосе, расположенной выше действительной оси и охватывающей все связанные состояния, за исключением точек, соответствующих последним. Таким образом, все связанные состояния соответствуют полюсам S -матрицы и «лишних» полюсов нет. *Достаточные* критерии существования такого единственного потенциала в настоящее время не известны ¹⁾.

В связи со сказанным может возникнуть вопрос: можно ли, зная фазовый сдвиг для какой-либо конечной области энергий, сказать, каким будет асимптотическое убывание потенциала — экспоненциальным или менее быстрым? Ответ на этот вопрос, очевидно, должен быть отрицательным. Поскольку необходимым условием экспоненциального убывания сил является аналитичность S -матрицы в полосе конечной ширины, расположенной вдоль действительной оси k , то знания δ_l на любом конечном участке этой полосы недостаточно для утверждения об экспоненциальном убывании потенциала. Небольшого «отклонения» в фазовом сдвиге при высоких энергиях достаточно, чтобы радикальным образом изменить асимптотическое поведение потенциала ²⁾.

2. Бесконечно малые вариации

Изложенный выше метод можно применить для вычисления бесконечно малых изменений, которые возникают в потенциале при бесконечно малом изменении фазового сдвига (как функции энергии). В результате такого расчета мы получим вариационную производную от потенциала по фазовому сдвигу. Развиваемый ниже метод представляет эффективный способ обращения обычной теории возмущений.

Если происходит бесконечно малое изменение спектральной функции

$$\rho - \rho_1 = \delta\rho(E),$$

то из (20.18) и (20.3) следует, что

$$g(r, r') = \int d\delta\rho(E) \varphi_l(E, r) \varphi_l(E, r')$$

(мы опускаем здесь индекс l у исходных функций, а вместо него указываем угловой момент). При этом из уравнения (20.6) вытекает, что

$$K(r, r') = g(r, r'),$$

¹⁾ Известно, что для широкого класса потенциалов Баргмана достаточное условие экспоненциального асимптотического убывания потенциала при $r \rightarrow \infty$ состоит в том, чтобы функция Йоста $f_l(k)$ при $k \rightarrow 0$ стремилась к своему пределу по меньшей мере как $O(k^{2l})$. См. работу Ньютона [642], приложение. Ввиду (12.153) данное условие, конечно, не может быть достаточным.

²⁾ Исследованию вопроса о том, какую информацию об асимптотическом поведении потенциала можно получить из фазового сдвига, посвящена работа Йоста [449].

и поэтому, согласно (20.8), имеем

$$\delta \mathcal{F}'(r) = -2 \frac{d}{dr} \int \delta \rho(E) [\varphi_l(E, r)]^2. \quad (20.27)$$

Свяжем теперь бесконечно малое изменение в спектральной функции $\rho(E)$ с вызвавшим его изменением в фазовом сдвиге. Из дисперсионного соотношения (12.64) следует, что если происходит бесконечно малое изменение фазового сдвига на величину $\delta \delta_l(k)$, то вызываемое им изменение модуля функции Йоста равно

$$\frac{\delta |f_l(k)|}{|f_l(k)|} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk' \delta \delta_l(k')}{k' - k} = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{dE' \delta \delta_l(E')}{E' - E}. \quad (20.28)$$

Поэтому, согласно (12.172), вариация спектральной функции при $E > 0$ определяется формулой

$$\delta \frac{d\rho}{dE} = \frac{d\rho}{dE} \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{dE' \delta \delta_l(E')}{E' - E}. \quad (20.29)$$

Ясно, что при $E < 0$ вариация равна нулю. Таким образом, после изменения порядка интегрирования получаем

$$K(r, r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dE' \delta \delta_l(E') \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\rho(E)}{E' - E} \varphi_l(E, r) \varphi_l(E, r').$$

Однако второй интеграл представляет часть функции Грина. Действительно, согласно (12.130) и (11.22), имеем

$$2\mu \mathcal{G}_l^P(E'; r, r') = \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{d\rho(E)}{E' - E} \varphi_l(E, r) \varphi_l(E, r') + \sum_n \frac{\phi_n(r) \phi_n(r')}{E' + E_n},$$

где ϕ_n — нормированные волновые функции связанных состояний и E_n — (положительные) энергии связи. Ту же самую функцию Грина можно представить в виде, аналогичном (12.40),

$$\mathcal{G}_l^P(E; r, r') = \varphi_l(E, r_{<}) I_l(E, r_{>}), \quad (20.30)$$

где $I_l(E, r)$ — сингулярное решение радиального уравнения Шредингера, причем вронсиан функций $I_l(E, r)$ и $\varphi(E, r)$ равен единице,

$$2I(E, r) = -\frac{f_{l+}(k, r)}{f_{l+}(k)} - \frac{f_{l-}(k, r)}{f_{l-}(k)}. \quad (20.31)$$

Следовательно, для вариационной производной от потенциала по фазовому сдвигу, определяемой соотношением

$$\delta V(r) = \int_0^{\infty} dE \frac{\delta V(r)}{\delta \delta_l(E)} \delta \delta_l(E),$$

мы получаем следующее выражение:

$$\frac{\delta V(r)}{\delta \delta_l(E)} = -\frac{4}{\pi} \frac{d}{dr} \left[\varphi_l(E, r) I_l(E, r) - \frac{1}{2\mu} \sum_n \frac{\phi_n^2(r)}{E + E_n} \right]. \quad (20.32)$$

Аналогично, согласно (20.11), вариационная производная от волновой функции по фазовому сдвигу равна

$$\frac{\delta \varphi_l(E', r)}{\delta \delta_l(E)} = -\frac{2}{\pi} \int_0^r dr' \varphi_l(E', r') \left[2\mu \varphi_l(E, r') I_l(E, r) - \frac{\phi_n(r') \phi_n(r)}{E + E_n} \right]. \quad (20.33)$$

Поскольку выполняются соотношения

$$\varphi_l(E, r) I_l(E, r) = -\frac{1}{2k} \operatorname{Im} [S_l(k) f_l^2(k, r)] \quad (20.34)$$

и

$$2\mu \int_0^r dr' \varphi(E, r') \varphi(E', r') = \frac{W[\varphi(E, r), \varphi(E', r)]}{E - E'}, \quad (20.35)$$

то полученные выражения можно упростить:

$$\frac{\delta V(r)}{\delta \delta_l(E)} = \frac{4}{\pi} \frac{d}{dr} \left\{ k^{-1} \operatorname{Im} [S_l(k) f_l^2(k, r)] + \frac{1}{\mu} \sum_n \frac{\phi_n^2(r)}{E + E_n} \right\}, \quad (20.36)$$

$$\frac{\delta \varphi_l(E, r)}{\delta \delta_l(E')} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{W[\varphi_l(E, r), \varphi_l(E', r)]}{E' - E} I_l(E, r) + \frac{1}{2\mu} \sum_n \frac{W[\varphi_l(E, r), \phi_n(r)]}{(E + E_n)^2} \phi_n(r) \right\}, \quad (20.37)$$

где W — вронскиан, определенный в гл. 12, § 1, п. 2.

Применение развитого метода для отыскания потенциала в точке $r = 0$. Очень простые следствия вытекают из формулы (20.32), если устремить r к нулю. При этом, поскольку вронскиан равен единице:

$$W[\varphi_l(E, r), I_l(E, r)] = 1,$$

то

$$\varphi_l(E, r) I_l(E, r) \rightarrow -\frac{r}{2l+1}.$$

Следовательно, согласно (20.32), имеем

$$\frac{\delta V(0)}{\delta \delta_l(E)} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2l+1}. \quad (20.38)$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать. В итоге приходим к точному результату:

$$V(0) = \frac{4}{\pi(2l+1)} \int_0^\infty dE \delta_l(E) \quad (20.39)$$

при условии, что обе части получившегося равенства конечны, а связанные состояния отсутствуют. Другими словами, из полученного результата можно просто заключить, что

$$V(0) - V_0(0) = \frac{4}{\pi(2l+1)} \int_0^\infty dE [\delta_l(E) - \delta_l^{(0)}(E)],$$

где $V_0(r)$ — другой потенциал, соответствующий тем же связанным состояниям, которым отвечает потенциал $V(r)$ и для которого фазовый сдвиг имеет такое же асимптотическое значение, как и δ_l . Согласно (12.82), имеем¹⁾

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \delta_l(k) = -\mu \int_0^\infty dr V(r)$$

при условии, что выражения в обеих частях равенства существуют.

Теперь в качестве V_0 мы просто используем один из потенциалов Баргмана, введенных в гл. 14, § 7. Фазовый сдвиг

$$\delta_l^{(0)}(E) = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{k} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{k} + 2 \sum_n \operatorname{arctg} \frac{K_n}{k}$$

¹⁾ Напомним, что $\mathcal{V}^0(r) = 2\mu V(r)$.

относится к потенциалу, значение которого в точке $r=0$ равно

$$V_0(0) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{l + 1/2},$$

а связанные состояния имеют энергии $E_n^{(l)} = K_n^2/2\mu$; здесь α и β — положительные постоянные. Кроме того, имеем

$$4\pi^{-1} \int_0^\infty dk \left(k \operatorname{arctg} \frac{\beta}{k} - \beta \right) = -\beta^2.$$

Следовательно, выбирая α и β так, чтобы выполнялось соотношение

$$\beta - \alpha + 2 \sum_n K_n = -\mu \int_0^\infty dr V(r),$$

получаем точный результат:

$$V(0) = \frac{4}{\pi(2l+1)} \int_0^\infty dE \left[\delta_l(E) + k^{-1}\mu \int_0^\infty dr V(r) \right] + \frac{4}{2l+1} \sum_n E_n^{(l)}. \quad (20.40)$$

Значение потенциала в левой части соотношения (20.40) не зависит от l . Поэтому из (20.40) (при условии, что связанные состояния отсутствуют) следует, что при увеличении l разность между интегралом по энергиям от фазовых сдвигов и асимптотическими значениями фазовых сдвигов *растет* линейно по l , несмотря на то обстоятельство, что их величина при малых энергиях становится все меньше и меньше. Причина такого поведения состоит в том, что при увеличении l фазовые сдвиги достигают максимума при все больших и больших значениях энергии.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО ВСЕМ ФАЗОВЫМ СДВИГАМ ПРИ ОДНОЙ ЭНЕРГИИ

1. Метод расчета

Опять рассмотрим упругое рассеяние бесспиновых частиц на сферически симметричном локальном потенциале. Задача состоит в отыскании потенциала, который после подстановки в каждое радиальное уравнение Шредингера и решения последних приводит к наперед заданному набору фазовых сдвигов для всех угловых моментов при заданной энергии. Прежде чем переходить к фактическому построению метода, стоит сказать несколько слов о выборе энергии, при которой производится определение потенциала.

Физически ясно, что при очень низких энергиях частицы не подходят друг к другу настолько близко, чтобы четко проявилось поведение потенциала во внутренней области. Математически это обстоятельство находит отражение в очень сильной чувствительности результатов к экспериментальной информации, т. е. в необходимости практически недостижимой точности. Другими словами, *в принципе* для определения потенциала могут служить даже низкоэнергетические фазовые сдвиги. Однако при этом s -волна является настолько преобладающей, что фазовые сдвиги для других угловых моментов измерить просто невозможно. В то же время потенциал очень чувствителен к значениям последних фазовых сдвигов, даже если они малы. Соответственно практически необходимо работать при такой энергии, при которой в процессе реально участвуют все те фазовые сдвиги, которые могут принимать в какой-либо области достаточно большие значения.

Вплоть до определенного момента метод строится совершенно аналогично методу, изложенному в § 2, п. 1. В целях упрощения выражений мы будем

измерять расстояния в единицах длины волны де Бройля. Другими словами, мы будем считать, что $k = 1$. В отличие от ситуации, имевшей место в § 2, п. 1, здесь энергия фиксирована.

В данном методе нужно использовать дифференциальный оператор, определяемый выражением

$$D_1(r) = r^2 \left[\frac{d^2}{dr^2} + 1 - \mathcal{V}_1(r) \right], \quad (20.41)$$

где \mathcal{V}_1 опять представляет достаточно хороший потенциал «сравнения». Регулярные решения $\varphi_l^{(1)}(r)$ радиальных уравнений Шредингера

$$D_1(r) \varphi_l^{(1)}(r) = l(l+1) \varphi_l^{(1)}(r), \quad (20.42)$$

удовлетворяющие граничному условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_l^{(1)}(r) r^{-l-1} (2l+1)!! = 1,$$

считаются известными. [Приведенное выше граничное условие для настоящего рассмотрения более удобно, чем граничное условие (12.132).] Введем новую функцию, определив ее с помощью решений $\varphi_l^{(1)}(r)$ согласно соотношению

$$g(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \varphi_l^{(1)}(r) \varphi_l^{(1)}(r'), \quad (20.43)$$

где c_l — действительные коэффициенты, которые будут найдены позднее, а пока считаются произвольными. Функция g , очевидно, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных:

$$D_1(r) g(r, r') = D_1(r') g(r, r') \quad (20.44)$$

и граничным условиям

$$g(0, r') = g(r, 0) = 0. \quad (20.45)$$

Будем теперь считать, что функция $K(r, r')$ есть *единственное* решение линейного интегрального уравнения

$$K(r, r') = g(r, r') - \int_0^r dr'' r''^{-2} K(r, r'') g(r'', r'). \quad (20.46)$$

являющегося аналогом уравнения Гельфанда—Левитана. И здесь опять решающим является предположение о том, что уравнение (20.46) имеет единственное решение. Это предположение еще предстоит доказать. Введем далее функцию

$$\xi(r, r') \equiv D(r) K(r, r') - D_1(r') K(r, r'). \quad (20.47)$$

Дифференциальный оператор в (20.47) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} D(r) &= D_1(r) - \Delta \mathcal{V}'(r), \\ \Delta \mathcal{V}'(r) &= -2r^{-1} \frac{d}{dr} [r^{-1} K(r, r)]. \end{aligned} \quad (20.48)$$

Если в (20.47) выполнить дифференцирование, произвести интегрирование по частям и воспользоваться дифференциальным уравнением (20.44) совместно с граничными условиями (20.45), то нетрудно убедиться, что функция $\xi(r, r')$ удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему уравнению (20.46). Поскольку предполагается, что неоднородное уравнение имеет единственное решение, то можно сделать вывод, что $\xi(r, r') \equiv 0$. Другими словами, функция $K(r, r')$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$D(r) K(r, r') = D_1(r') K(r, r'). \quad (20.49)$$

Кроме того, из (20.46) следует, что

$$K(0, r') = K(r, 0) = 0. \quad (20.50)$$

Теперь с помощью решения $K(r, r')$ уравнения (20.46) определяем функции $\varphi_l(r)$ ¹⁾:

$$\varphi_l(r) \equiv \varphi_l^{(1)}(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') \varphi_l^{(1)}(r'). \quad (20.51)$$

Если подействовать оператором $D(r)$ на правую и левую части соотношения (20.51), произвести дважды интегрирование по частям и использовать уравнения (20.49) и (20.42), то найдем, что $\varphi_l(r)$ подчиняется дифференциальному уравнению

$$D(r) \varphi_l(r) = l(l+1) \varphi_l(r). \quad (20.52)$$

Кроме того, из (20.50) следует, что

$$\varphi_l(0) = 0. \quad (20.53)$$

Таким образом, решение $K(r, r')$ уравнения (20.46) позволило нам построить в явном виде [см. (20.51)] регулярные решения всех радиальных уравнений Шредингера (20.52) с потенциалом

$$\mathcal{V}(r) = \mathcal{V}_1(r) + \Delta \mathcal{V}(r). \quad (20.54)$$

Теперь $K(r, r')$ можно снова выразить через φ_l . Из (20.46) и (20.43) следует, что функция $K(r, r')$ должна допускать представление в виде

$$K(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} c_l K_l(r) \varphi_l^{(1)}(r'),$$

где

$$K_l(r) = \varphi_l^{(1)}(r) - \int_0^r dr' r'^{-2} K(r, r') \varphi_l^{(1)}(r').$$

Поэтому, сравнивая последнее соотношение с (20.51), мы видим, что $K_l(r) = \varphi_l(r)$, так что

$$K(r, r') = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \varphi_l(r) \varphi_l^{(1)}(r'). \quad (20.55)$$

Теперь необходимо связать исходные параметры, а именно набор констант c_l , с асимптотическими свойствами волновой функции $\varphi_l(r)$. В методике, изложенной в § 2, п. 1, такая операция была выполнена с помощью свойств ортогональности и полноты системы радиальных волновых функций для всех энергий. В данном случае такой метод применить нельзя. Здесь функции $\varphi_l^{(1)}$ не ортогональны. Поэтому необходимо поступить иначе.

Подставим (20.55) в (20.51) и поменяем порядок суммирования и интегрирования. В результате получим

$$\varphi_l(r) = \varphi_l^{(1)}(r) - \sum_{l'} L_{ll'}(r) c_{l'} \varphi_{l'}(r), \quad (20.56)$$

¹⁾ Мы должны предостеречь читателя от возможного неправильного вывода о том, что из независимости $K(r, r')$ от l следует, что отношения (20.51) можно просуммировать и что они должны быть справедливы также и для трехмерной волновой функции! Функции $\varphi_l(r)$ и $\varphi_l^{(1)}(r)$ отличаются от «физических» волновых функций, необходимых для выполнения такой процедуры, различными множителями, зависящими от l [см. (12.145)].

где

$$L_{ll'}(r) = \int_0^r dr' r'^{-2} \varphi_l^{(1)}(r') \varphi_{l'}^{(1)}(r'). \quad (20.57)$$

Умножим уравнение (20.42) для φ_l на $\varphi_{l'}$, а аналогичное уравнение для $\varphi_{l'}$ на φ_l и вычтем получившиеся соотношения одно из другого. Затем произведем интегрирование по r и воспользуемся граничными условиями. В итоге получим другое выражение для $L_{ll'}$:

$$L_{ll'} = \frac{\varphi_l^{(1)} \varphi_{l'}^{(1)'} - \varphi_{l'}^{(1)} \varphi_l^{(1)'}}{(l' - l)(l' + l + 1)}. \quad (20.57a)$$

Устремим теперь r к бесконечности и введем следующие обозначения асимптотических значений соответствующих функций:

$$\begin{aligned} \varphi_l(r) &\approx A_l \sin\left(r - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l\right) \equiv \varphi_l^\infty(r), \\ \varphi_l^{(1)}(r) &\approx A_l^{(1)} \sin\left(r - \frac{1}{2} \pi l + \delta_l^{(1)}\right) \equiv \varphi_l^{(1)\infty}(r), \end{aligned} \quad (20.58)$$

$$L_{ll'}(r) \approx L_{ll'}^\infty.$$

Подставляя асимптотическое выражение для $\varphi_l^{(1)}$ в (20.57), получаем, что при $l \neq l'$

$$L_{ll'}^\infty = A_l^{(1)} A_{l'}^{(1)} \frac{\sin\left[\frac{1}{2} \pi (l - l') + \delta_l^{(1)} - \delta_{l'}^{(1)}\right]}{(l' - l)(l' + l + 1)}. \quad (20.59)$$

При $l = l'$ для величины

$$L_{ll}^\infty = \int_0^\infty dr r^{-2} [\varphi_l^{(1)}(r)]^2$$

можно написать лишь выражение

$$L_{ll}^\infty = A_l^{(1)2} \frac{1/2\pi + d\delta_l^{(1)}/dl}{2l + 1},$$

полезность которого невелика.

Дальнейшее рассмотрение можно значительно упростить, если, начиная с данного момента, считать потенциал сравнения \mathcal{V}_1 равным нулю. В таком случае будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_l^{(1)}(r) &= u_l(r), \quad A_l^{(1)} = 1, \quad \delta_l^{(1)} = 0, \\ L_{ll'}^\infty &= \begin{cases} i^{l' - l - 1} M_{ll'}, & l \neq l', \\ \frac{1/2\pi}{2l + 1}, & l = l', \end{cases} \end{aligned} \quad (20.60)$$

где матрица $M_{ll'}$ определяется выражением

$$M_{ll'} = \begin{cases} [(l' - l)(l' + l + 1)]^{-1}, & l' - l \text{ нечетно.} \\ 0, & l' - l \text{ четно.} \end{cases} \quad (20.61)$$

Подставляя (20.58) в (20.56), получаем систему уравнений, связывающих асимптотические выражения функций φ_l для различных l ,

$$\varphi_l^\infty(r) = \varphi_l^{(1)\infty}(r) - \sum_{l'} L_{ll'}^\infty c_{l'} \varphi_{l'}^\infty(r).$$

Выразим теперь синусы через экспоненты, приравняем отдельно коэффициенты при e^{ir} и e^{-ir} и используем определение (20.61). В результате

получим уравнения

$$e^{i\delta_l} A_l = 1 - \frac{1}{2} \pi \frac{c_l A_l e^{i\delta_l}}{2l+1} - \sum_{l' \neq l} L_{ll'} i^{l-l'} c_{l'} e^{i\delta_{l'}} A_{l'} \quad (20.62)$$

и соответствующие комплексно сопряженные уравнения. Умножим далее уравнение (20.62) на $e^{-i\delta_l}$ и введем обозначения

$$b_l \equiv c_l A_l. \quad (20.63)$$

В итоге получим

$$A_l = e^{-i\delta_l} - \frac{1/2\pi b_l}{2l+1} + i \sum_{l'} M_{ll'} b_{l'} e^{i(\delta_{l'} - \delta_l)}. \quad (20.64)$$

Поскольку все числа A_l действительны, то, взяв от соотношения (20.64) действительную и мнимые части, найдем

$$\sin \delta_l = \sum_{l'} M_{ll'} b_{l'} \cos(\delta_{l'} - \delta_l), \quad (20.65)$$

$$A_l = \cos \delta_l - \frac{1/2\pi b_l}{2l+1} - \sum_{l'} M_{ll'} b_{l'} (\delta_{l'} - \delta_l). \quad (20.66)$$

Соотношение (20.65) позволяет несколько упростить формулу (20.66):

$$A_l = \sum_{l'} \operatorname{cosec} \delta_l M_{ll'} \cos \delta_{l'} b_{l'} - \frac{1/2\pi b_l}{2l+1}. \quad (20.66a)$$

Будем считать, что в качестве исходной информации служат фазовые сдвиги δ_l и что требуется определить коэффициенты c_l . Для определения c_l необходимо сначала решить бесконечную систему алгебраических уравнений относительно постоянных b_l . Затем, зная b_l , по формуле (20.66) определим A_l и из (20.63) найдем c_l .

Из сравнения выражений (20.58) с (12.154) и (12.35) видно, что при $k \neq 1$

$$A_l e^{-i\delta_l} = k^{-l-1} \mathfrak{f}_l(k)$$

(поскольку функции φ удовлетворяют разным граничным условиям). Таким образом, из уравнений (20.62) следует, что функции Иоста для различных значений l при одном и том же значении энергии связаны друг с другом соотношениями

$$\left[1 + \frac{1}{2} \pi \frac{c_l(k)}{2l+1} \right] \mathfrak{f}_l(k) = k^{l+1} - i \sum_{l'} M_{ll'} c_{l'}(k) k^{l-l'} \mathfrak{f}_{l'}(k). \quad (20.62a)$$

Соотношения (20.62a) накладывают определенные ограничения на функции Иоста, поскольку коэффициенты c_l действительны, а функции \mathfrak{f} комплексны. Эти ограничения вытекают уже из (20.66). Соотношения (20.65) и (20.66) выражают амплитуды всех функций Иоста через их фазы. Они выполняют такую же функцию по отношению к угловому моменту, какую дисперсионное соотношение (12.61) выполняет по отношению к энергии.

Остается выяснить два важных вопроса: 1) показать, что уравнение (20.46) имеет единственное решение, и 2) посмотреть, можно ли найти решение уравнения (20.65) для коэффициентов b_l и будет ли оно единственным.

Единственность решения уравнения (20.46). Рассмотрим сначала вопрос единственности решения уравнения (20.46). Допустим, что существует два решения. Тогда должно существовать нетривиальное решение $\chi(r, r')$ соответствующего однородного уравнения

$$\chi(r, r') = - \int_0^r dr'' \chi(r, r'') g(r'', r'). \quad (20.67)$$

Тогда из (20.43) следует, что $\chi(r, r')$ можно представить в виде

$$\chi(r, r') = \sum_l c_l \chi_l(r) u_l(r')$$

(в предположении, что $\bar{f}'_1 = 0$), где

$$\chi_l(r) = - \int_0^r dr' r'^{-2} \chi(r, r') u_l(r') = - \sum_{l'} L_{ll'}(r) c_{l'} \chi_{l'}(r).$$

Таким образом, $\chi_l(r)$ является решением однородной системы уравнений, соответствующих системе уравнений (20.56). Другими словами, бесконечная матрица $L_{ll'} c_{l'}$ имеет собственное значение, равное -1 . Однако это, конечно, не может быть справедливо для всех значений r , поскольку коэффициенты c_l постоянны, а матрица $L_{ll'}$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. Чтобы показать это более убедительно, мы можем извлечь квадратный корень из симметричной положительно определенной матрицы $L_{ll'}$, и если одно из собственных значений матрицы $L^{1/2} c L^{1/2}$ равно -1 , то мы будем иметь

$$\text{Sp} (L^{1/2} c L^{1/2})^2 > 1.$$

Однако при $r \rightarrow 0$

$$\text{Sp} (L^{1/2} c L^{1/2})^2 = \text{Sp} (Lc)^2 = \sum_{l'l''} L_{ll'}^2 c_l c_{l''} \rightarrow 0.$$

Отсюда с необходимостью следует вывод, что $\chi_l(r) \equiv 0$, и поэтому $\chi(r, r') \equiv 0$. Таким образом, единственным решением однородной системы уравнений, соответствующей неоднородной системе уравнений (20.46), является тривиальное решение.

Существование решения. Если ядро $r''^{-2} g(r'', r')$ интегрального уравнения (20.46) принадлежит классу Фредгольма, то из того факта, что соответствующее однородное уравнение не имеет решения, вытекает, что неоднородное уравнение (20.46) имеет решение. Для того чтобы уравнение (20.46) имело решение, достаточно, чтобы его ядро принадлежало классу Гильберта — Шмидта:

$$\int_0^\infty dr r^{-2} \int_0^r dr' r'^{-2} [g(r, r')]^2 = \sum_{l'l''} c_l c_{l''} L_{ll'}^\infty L_{l'l''}(r) < \infty. \quad (20.68)$$

Аналогичное условие, конечно, является достаточным для законности аргументов, используемых при доказательстве отсутствия решения соответствующего однородного уравнения. Последнее условие сводится к требованию, чтобы матрица $L_{ll'}(r) c_{l'}$ принадлежала классу Гильберта — Шмидта, т. е.

$$\sum_{l'l''} c_{l'}^2 [L_{ll'}(r)]^2 < \infty. \quad (20.68a)$$

Поскольку асимптотическое поведение функций Риккати — Бесселя при фиксированном r и больших l имеет вид [903]

$$u_l(r) \approx C e^{l+l \ln^{1/2} r - (l+1) \ln l},$$

то неравенства (20.68) и (20.68a) выполняются при условии, что коэффициенты c_l ограничены величиной, пропорциональной некоторой фиксированной степени l ,

$$|c_l| \leq C l^\mu. \quad (20.69)$$

Очевидно, что последнее неравенство представляет собой весьма слабое условие.

Существование и единственность решения системы уравнений (20.65). Таким образом, построение потенциала и волновых функций для всех значений углового момента, исходя из бесконечного набора коэффициентов $\{c_l\}$, сводится к отысканию решения уравнения Фредгольма (20.46) при условии, что выполняется неравенство (20.69). Остается рассмотреть вопрос о существовании и единственности набора коэффициентов $\{c_l\}$ для каждого заданного набора фазовых сдвигов, т. е. вопрос о единственности решения системы уравнений (20.65).

Запишем систему уравнений (20.65), используя следующие матричные обозначения: $\text{tg } \Delta$ — диагональная квадратная матрица, диагональные элементы которой равны $\text{tg } \delta_l$; M — квадратная матрица с элементами $M_{ll'}$, \mathbf{a} — матрица-столбец, матричные элементы которой равны $b_l \cos \delta_l$, и \mathbf{e} — матрица-столбец, все элементы которой равны единице. Тогда система уравнений (20.65) принимает вид

$$(M + \text{tg } \Delta M \text{tg } \Delta) \mathbf{a} = \text{tg } \Delta \mathbf{e} \quad (20.65a)$$

или

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} + R) \mathbf{a} &= M^{-1} \text{tg } \Delta \mathbf{e}, \\ \mathbf{a} &= (\mathbf{1} + R)^{-1} M^{-1} \text{tg } \Delta \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (20.70)$$

где

$$R = M^{-1} \text{tg } \Delta M \text{tg } \Delta. \quad (20.71)$$

Согласно (20.63) и (20.66a), коэффициенты c_l определяются соотношением

$$\frac{1}{c_l} = \frac{\sum_{l'} M_{ll'} a_{l'}}{a_l \text{tg } \delta_l} = \frac{1/2\pi}{2l+1}. \quad (20.72)$$

Если нам удастся построить матрицу M^{-1} (которая не зависит от фазовых сдвигов), то обратную матрицу $(\mathbf{1} + R)^{-1}$ можно найти, например, методом Фредгольма или путем разложения в степенной ряд. Выбор метода зависит лишь от того, насколько быстро фазовые сдвиги стремятся к нулю при $l \rightarrow \infty$. Если отлично от нуля лишь конечное число фазовых сдвигов (как это, очевидно, будет иметь место во многих практических случаях), то система уравнений (20.70) сведется к конечному набору p связанных уравнений и остающиеся элементы матрицы \mathbf{a} выразятся в явном виде через p первых элементов.

Явное выражение для матрицы правой и левой обратной к матрице M , было недавно построено в работе Сабатье [742]:

$$M^{-1} = -\mu M \mu, \quad (20.73)$$

где μ — диагональная матрица с элементами

$$\begin{aligned} \mu_{2n} &= \frac{2}{\pi} (4n+1) \left[\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)} \right]^2, \\ \mu_{2n+1} &= \frac{2}{\pi} (4n+3) \left[\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \right]^2 \end{aligned} \quad (20.74)$$

на главной диагонали.

Однако такая матрица не единственна. Существует ненормированный вектор (матрица-столбец), который при умножении на нее дает нуль. Элементы этого вектора равны

$$\nu_{2n} = \mu_{2n}, \quad \nu_{2n+1} = 0. \quad (20.75)$$

Из сказанного можно сделать вывод, что *решения системы неоднородных уравнений (20.65) существуют, но они не единственны*. Действительно, существует ненулевое решение уравнений в случае, когда все фазовые сдвиги равны нулю! Более того, поведение коэффициентов c_l при больших значениях l является достаточно хорошим, что оправдывает изложенную выше программу

решения обратной задачи рассеяния. Другими словами, для каждой энергии существует по меньшей мере однопараметрическое семейство потенциалов¹⁾, которые вообще не приводят к рассеянию. Как было показано в самое последнее время [742], такие «прозрачные» потенциалы асимптотически осциллируют и убывают по величине как $r^{-3/2}$. Если же ограничиться рассмотрением потенциалов, убывающих быстрее, чем $r^{-3/2}$, то развитый здесь метод решения обратной задачи рассеяния даст единственное решение.

Примеры, иллюстрирующие утверждение о существовании и неединственности решений, можно найти в соответствующей литературе [649, 705, 742].

2. Примеры

Простые примеры можно построить исходя из конечного набора коэффициентов c_l . При этом, с одной стороны, можно построить потенциал и волновые функции, а с другой, — найти фазовые сдвиги. Разумеется, равенство нулю всех коэффициентов c_l , кроме конечного их числа, не означает, что отлично от нуля лишь конечное число фазовых сдвигов δ_l .

Самым простым является случай, когда один из коэффициентов c_L задан как действительное число, а все остальные равны нулю, $c_l = 0$, $L \neq l$. В этом случае из (20.56) следует, что

$$\varphi_L(r) = \frac{u_L(r)}{1 + c_{LL} u_L(r)} \quad (20.76)$$

и для $l \neq L$

$$\varphi_l(r) = u_l(r) - \frac{c_{Ll} u_L(r)}{1 + c_{LL} u_L(r)}. \quad (20.77)$$

Согласно соотношениям (20.48) и (20.55), данные волновые функции являются решениями радиальных уравнений Шредингера с потенциалом

$$\mathcal{V}^n(r) = -2r^{-1} c_L \frac{d}{dr} \left\{ r^{-1} \frac{[u_L(r)]^2}{1 + c_{LL} u_L(r)} \right\}. \quad (20.78)$$

Конечно, с физической точки зрения такой потенциал не представляет большого интереса, поскольку он является осциллирующей функцией r . Единственный способ избежать таких осцилляций состоит в задании бесконечного числа отличных от нуля коэффициентов c_l .

Фазовые сдвиги находим из систем уравнений (20.65) и (20.66) с использованием определения (20.61). Из системы уравнений (20.65) следует, что $\sin \delta_l = 0$ при всех четных $l = L$, включая значение $l = L$. Поэтому из (20.66) получаем, что

$$A_L = \frac{1}{1 + [1/2\pi c_L / (2L + 1)]}$$

и, следовательно, согласно (20.63) и (20.65), для нечетных $l = L$ имеем

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{c_L}{1 + [1/2\pi c_L / (2L + 1)]} \frac{1}{(l - L)(l + L + 1)}. \quad (20.79)$$

Фазовые сдвиги (20.79) можно также найти прямо из формулы (20.77).

Отметим то замечательное обстоятельство, что выражение для амплитуды рассеяния, получающееся из указанных фазовых сдвигов, можно записать в замкнутой форме. Результат имеет вид [742]

$$A(0) = -\frac{1}{4} \pi a k^{-1} [P_b(\cos \theta) - (-1)^L P_b(-\cos \theta)], \quad (20.80)$$

¹⁾ Если $\{b_l\}$ — решение системы уравнений (20.65) при $\delta_l = 0$, то $\alpha \{b_l\}$ — также решение этой системы уравнений. Как следует из соотношения (20.66), это приводит к появлению однопараметрического семейства коэффициентов c_l .

где

$$a = A_L c_L,$$

$$b = \left[\left(L + \frac{1}{2} \right)^2 + ia \right]^{1/2}, \quad \operatorname{Re} b > 0.$$

Аналогичные методы можно использовать для построения других примеров, исходя из любого числа коэффициентов. Введем следующие обозначения: C — диагональная матрица с элементами c_l на диагонали, C' — аналогичная матрица, диагональные элементы которой равны $\pi c_l / 2 (2l + 1)$, $L(r)$ — матрица с элементами $L_{ll'}(r)$, $\Phi(r)$ и $u(r)$ — матрицы-столбцы, составленные соответственно из элементов $\varphi_l(r)$ и $u_l(r)$. Тогда из (20.56) получим

$$\Phi(r) = [1 + L(r)C]^{-1} u(r), \quad (20.81)$$

а из (20.48) и (20.55) следует, что

$$\mathcal{F}'(r) = -2r^{-1} \frac{d}{dr} \{ r^{-1} \bar{u}(r) C [1 + L(r)C]^{-1} u(r) \}. \quad (20.82)$$

Фазовый сдвиг находим из уравнений (20.64):

$$\operatorname{tg} \Delta e = \frac{M'(1 + M'^2)^{-1} e}{(1 + M'^2)^{-1} e}, \quad (20.83)$$

где

$$M' = MC(1 + C')^{-1}.$$

КОММЕНТАРИИ

К § 1. Конкретное обсуждение неопределенности, возникающей при нахождении амплитуды рассеяния по экспериментальным данным см. в работах [972, 880].

К § 2. Первые попытки решения обратной задачи рассеяния, рассмотренной в данном параграфе, были сделаны в работах Фрёберга [298—301] и Хиллерааса [413]. Баргман [35, 36] показал далее, что одного лишь знания фазового сдвига, вообще говоря, недостаточно для однозначного определения потенциала. Проблема единственности была решена Левинсоном [528, 529] и независимо от него Марченко [986] и Боргом [90] (см. также [89]). Работы Фрёберга и Хиллерааса были улучшены с использованием последних достижений Холмбергом [393]. Новые методы решения обратной задачи рассеяния были предложены затем Иостом и Коном [450, 451].

Гельфанд и Левитан [962, 963] ввели в рассмотрение для решения обратной задачи Штурма — Лиувилля уравнение, названное впоследствии уравнением Гельфанда — Левитана. К обратной задаче рассеяния это уравнение применили Иост и Кон [452] и Левинсон [530]. В то время данная проблема широко обсуждалась в советской математической литературе: В. А. Марченко [987, 988, 990], Ю. М. Березанский [955—957], А. Блох [959], М. Г. Крейн [973—980], М. Г. Нейгауз [995], Б. Я. Левин [982], Б. М. Левитан [983], Л. Д. Фаддеев [1007, 1009], З. С. Агранович и В. А. Марченко [941—943], И. С. Гохберг и М. Г. Крейн [966]. См. также [439, 190, 665, 449, 642, 293, 685, 78, 80, 81, 414, 678, 817].

Более общий подход, исходящий из обратной задачи отражения электромагнитных волн с последующим приложением к полному трехмерному уравнению Шредингера, можно найти в серии работ Кея и Мозеса [470—474, 619].

Обобщения метода Иоста — Кона (или Гельфанда — Левитана и Марченко) на случай связанных уравнений были даны Ньютоном и Иостом [657] и М. Г. Крейном [978]; на случай рассеяния частиц со спином $1/2$ на потенциале тензорных сил — Ньютоном [641], З. С. Аграновичем и В. А. Марченко [943] (см. также § 9 обзора Ньютона [646]); на случай уравнения Клейна — Гордона — Корнвальдеси [169]; на случай уравнения Дирака — Пратсом и Толлом [695]; на случай обоих указанных релятивистских уравнений — Верде [873]; на случай связанных каналов — Коксом [183] и на случай сепарабельных потенциалов — Болстерли и Маккензи [88].

Большую пользу может принести ознакомление со следующими обзорными статьями и монографиями: Л. Д. Фаддеев [1011]; З. С. Агранович и В. А. Марченко [944].

К § 2, п. 2. Содержание этого пункта основывается на статье Ньютона [642]; см. также [528]. Соотношение (20.40) представляет частный случай той информации, которая содержится в *моментах* фазового сдвига. Более общие формулы такого характера можно найти в работах [960, 961, 683, 684, 713].

К § 3. Задача отыскания потенциала, исходя из знания всех фазовых сдвигов при одной энергии, впервые была рассмотрена Уилером [902] в рамках ВКБ-приближения. Затем эту задачу решал Редже [708] путем продолжения угловых моментов в комплексную плоскость. Метод Мартина и Таргонского [581] применим только к суперпозиции потенциалов Юкавы. Впервые общее решение задачи было дано Ньютоном [649]. Этот параграф написан в основном по результатам указанной работы. Интересное математическое развитие теории предложено Редмондом [705]. В дальнейшем последняя работа была развита Сабатье [742], который получил в явном виде выражения (20.74), (20.75) и (20.80).

ЗАДАЧИ

1. Исследовать поведение дифференциального сечения для рассеяния неполяризованных частиц со спином $1/2$ на неполяризованных частицах со спином $1/2$ в области низких энергий. Обсудить неопределенность, возникающую при попытке определить амплитуды рассеяния исходя из сечения, для случая, когда не производится измерение поляризации. Насколько можно уменьшить эту неопределенность с помощью измерений поляризации и каким образом?

2. Допустим, что одна из констант N_n^2 в (12.129) отрицательна и что мы используем спектральную функцию (12.129) в формуле (20.18). Имеет ли в этом случае уравнение Гельфанда — Левитана единственное решение? Можно ли найти соответствующий потенциал? Каковы его свойства? Обсудить результат.

3. Допустим, что потенциал сравнения V_1 не имеет связанных состояний и что фазовый сдвиг s -волны для такого потенциала равен δ_1 . Пусть $\delta \equiv \delta_1$, но потенциал V имеет связанное состояние при $E = E_0$. Построить потенциал V . Является ли он достаточно хорошим? Обсудить результат.

4. Построить потенциал Баргмана, необходимый при выводе формулы (20.40).

5. Исходя из фазового сдвига (14.80), построить потенциал Баргмана (14.81) и волновую функцию (14.82) путем решения уравнения Гельфанда — Левитана.

6. Решить предыдущую задачу для случая, когда имеется связанное состояние, т. е. вывести формулы (14.85) и (14.86).

7. Исходя из формулы (14.55a) с $S_l^{(0)} \equiv 1$, найти общий класс потенциалов Баргмана, не имеющих связанных состояний, путем решения уравнения Гельфанда — Левитана. (У к а з а н и с. Заменить интегральное уравнение дифференциальным.)

8. Решить предыдущую задачу для случая, когда имеются связанные состояния.

9. Построить потенциалы, приводящие к связанному состоянию для s -волны с энергией связи E_0 , для которых $|f_0(k)| \equiv 1$. Найти волновые функции связанного состояния и состояний рассеяния и фазовый сдвиг.

10. Считая, что $c_l = 0$, $l \neq L$, вычислить функции Иоста для всех значений l . Какой должна быть зависимость c_l от k , чтобы функции f удовлетворяли одновременно соотношениям (12.32) и (12.30)? Могут ли эти функции Иоста обладать всеми аналитическими свойствами, согласующимися со свойствами достаточно хорошего потенциала?

11. Решить предыдущую задачу в предположении, что $c_l = 0$ при $l > L$.

ЛИТЕРАТУРА¹⁾

1. Aaron R., Klein A., Journ. Math. Phys., **1**, 131 (1960). (9.1.1)
2. Aaron R., Amado R. D., Yam Y. Y., Phys. Rev. Lett., **13**, 574, 701 (1964); Phys. Rev., **136B**, 650 (1964). (17.4.3)
3. Aaron R., Amado R. D., Yam Y. Y., Rev. Mod. Phys., **37**, 516 (1965); Phys. Rev., **140B**, 1291 (1965). (17.4.3)
4. Aaron R., Shanley P. E., Phys. Rev., **142**, 608 (1966). (17.4.3)
5. Adachi T., Progr. Theor. Phys., **35**, 463 (1966). (18.3)
6. Adachi T., Kotani T., Progr. Theor. Phys. Suppl., Extra № 316 (1965). (18.3)
7. Adachi T., Kotani T., Progr. Theor. Phys., **35**, 485 (1966). (18.3)
8. Adair R. K., Phys. Rev., **111**, 632 (1958). (17.2)
9. Agodi A., Eberle E., Nuovo Cimento, **18**, 718 (1960). (16.5)
10. Ahmadzadeh A., Tjon J. A., Phys. Rev., **139**, 1085 (1965). (17.4.3)
11. Ahmed M. A., Fairlie D. B., Nuovo Cimento, **38**, 547 (1965). (12.4)
12. Aks S. O., Nuovo Cimento, **38**, 1794 (1965). (10.3.2)
13. Alessandrini V. A., Giambiagi J. J., Nuovo Cimento, **29**, 1353 (1963). (12.1.2)
14. Alessandrini V. A., Omnes R. L., Phys. Rev., **139B**, 167 (1965). (17.4)
15. Altshuler S., Phys. Rev., **91**, 1167; **92**, 1157 (1953). (16.3)
16. Altshuler S., Nuovo Cimento, **3**, 246 (1956). (7.22)
17. Aly H. H., Riazuddin, Zimmerman A. H., Phys. Rev., **136B**, 1174 (1964). (12.4)
18. Aly H. H., Riazuddin, Zimmerman A. H., Nuovo Cimento, **35**, 324 (1965); Journ. Math. Phys., **6**, 1115 (1965). (12.4)
19. Aly H. H., Spector R. M., Nuovo Cimento, **38**, 149 (1965). (14)
20. Amado R. D., Phys. Rev., **132**, 485 (1963). (17.4.3)
21. Amati D., Phys. Lett., **7**, 290 (1963). (17.1)
22. Armstrong B. H., Power E. A., Am. Journ. Phys., **31**, 261 (1963). (12.1.1)
23. Arnous E., Helv. Phys. Acta, **25**, 631 (1952). (19.2)
24. Arnous E., Bleuler K., Helv. Phys. Acta, **25**, 581 (1952). (19.2)
25. Arnous E., Heitler W., Proc. Roy. Soc., **A220**, 290 (1953). (19.2)
26. Arnous E., Zienau S., Helv. Phys. Acta, **24**, 279 (1951). (19.2)
27. Aronszajn N., Am. Journ. Math., **79**, 597 (1957). (7.3)
28. Ashkin J., Wick G. C., Phys. Rev., **85**, 686 (1952). (18.4)
29. Austern N., Blair J. S., Ann. of Phys., **33**, 15 (1965). (9.1.3)
30. Baker M., Ann. of Phys., **4**, 271 (1958). (9.3)
31. Bali N., Munczek H., Pignotti A., Nuovo Cimento, **38**, 374 (1965). (17.1)
32. Bander M., Phys. Rev., **138B**, 322 (1965). (17.4)
33. Bander M., Coulter P. W., Shaw G. L., Phys. Rev. Lett., **14**, 270 (1965). (17.1)
34. Baranger E., Gerjuoy E., Phys. Rev., **106**, 1182 (1957). (16)
35. Bargmann V., Phys. Rev., **75**, 301 (1949). (20.2)
36. Bargmann V., Rev. Mod. Phys., **21**, 488 (1949). (14.7, 20.2)
37. Bargmann V., Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., **38**, 961 (1952). (12.1.4)
38. Barker F. C., Proc. Phys. Soc., **84**, 681 (1964). (17.2)
39. Barker F. C., Treacy P. B., Nucl. Phys., **38**, 33 (1962). (17.2)
40. Barsella B., Fabri E., Phys. Rev., **126**, 1561 (1962). (17.4)
41. Bartram R., Spruch L., Journ. Math. Phys., **36**, 287 (1962). (11.3)
42. Barut A. O., Zwanziger D., Phys. Rev., **127**, 974 (1962). (Имеется перевод в сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963, стр. 265.) (13.3)
43. Basdevant L., Phys. Rev., **138B**, 1198 (1965). (17.4.3)
44. Bessel R. H., Gerjuoy E., Phys. Rev., **117**, 749 (1960). (9.1.3)
45. Bassichis W. H., Dar A., Ann. of Phys., **36**, 130 (1966). (18.2)

¹⁾ После каждой работы сокращенно указано место [например, (17.4.3) — гл. 17, § 4, п. 3], где она упоминается.— *Прим. ред.*

46. Bastai A., Bertocchi L., Furlan G., Fubini S., Tonin M., Nuovo Cimento, **30**, 1512 (1963). (12.4)
47. Bates D. R., Fundaminsky A., Massey H. S. W., Trans. Roy. Soc., **243**, 93 (1951). (16.3)
48. Beck G., Nussenzevig H. M., Nuovo Cimento, **16**, 416 (1960). (19.2)
49. Belinfante F. J., Møller C., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **28** (6) (1953). (6.7)
50. Belinfante J. G., Journ. Math. Phys., **5**, 1070 (1964). (7.3)
51. Belinfante J. G., Unal B. C., Journ. Math. Phys., **4**, 372 (1963). (10.3.2)
52. Bell J. S., Goebel C. J., Phys. Rev., **138B**, 1198 (1965). (19.3)
53. Bell W. W., Nuovo Cimento, **29**, 644 (1963). (10.3.2)
54. Berman S. M., Jacob M., Phys. Rev., **139B**, 1023 (1965). (17.4)
55. Bertocchi L., Fubini S., Furlan G., Nuovo Cimento, **32**, 745 (1964). (12.4)
56. Bertocchi L., Fubini S., Furlan G., Nuovo Cimento, **35**, 599 (1965). (10.2)
57. Bertocchi L., Fubini S., Furlan G., Nuovo Cimento, **35**, 633 (1965). (12.4)
58. Bessis D., Journ. Math. Phys., **6**, 637 (1965). (13.4)
59. Bethe H. A., Rev. Mod. Phys., **9**, 69 (1937). (16.5)
60. Bethe H. A., Phys. Rev., **76**, 38 (1949). (11.2.2)
61. Bethe H. A., Bacher R., Rev. Mod. Phys., **8**, 82 (1936). (14.3)
62. Bethe H. A., Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., **148A**, 146 (1935). (14.1)
63. Bethe H. A., Płaczek G., Phys. Rev., **51**, 450 (1937). (16.5)
64. Bethe H. A., Płaczek G., Phys. Rev., **57**, 1075 (1940). (18.2)
65. Bethe H. A., Salpeter E. E., Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms, New York, 1957. (Имеется перевод: Г. Бете, Э. Салпегер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., 1960.) (14.6)
66. Bhattia A. K., Temkin A., Rev. Mod. Phys., **36**, 1050 (1964). (17.4.3)
67. Bhattacharjie A., Sudarshan E. C. G., Nuovo Cimento, **25**, 864 (1962). (14)
68. Bianchi L., Favella L., Nuovo Cimento, **34**, 1823 (1964). (17.4.3)
69. Bjorken D. J., Phys. Rev. Lett., **4**, 473 (1960). (17.1)
70. Blais N. C., Bunker D. L., Journ. Chem. Phys., **41**, 2377 (1964). (5)
71. Blankenbecler R., в книге Strong Interactions and High Energy Physics, ed. R. G. Moorhouse, Edinburgh, 1964, p. 411. (17.1)
72. Blankenbecler R., Goldberger M. L., Phys. Rev., **126**, 766 (1962). (18.3)
73. Blankenbecler R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Treiman S. V., Ann. of Phys., **10**, 62 (1970). (Имеется перевод в сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963, стр. 13.) (10.3.2, 13.4)
74. Blatt J. M., Phys. Rev., **74**, 92 (1948). (11.3)
75. Blatt J. M., Biedenharn L. C., Rev. Mod. Phys., **24**, 258 (1952). (15.1)
76. Blatt J. M., Jackson J. D., Phys. Rev., **76**, 18 (1949). (10.3.3, 11.2.2, 11.3)
77. Blatt J. M., Weisskopf V., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952. (Имеется перевод: Дж. Блатт, В. Вайскопф, Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954.) (2.1.3, 2.1.5, 7.2.4, 15.1, 16.5)
78. Blažek M., Czechoslov. Journ. Phys., **B12**, 249 (1962). (14.7)
79. Blažek M., Czechoslov. Journ. Phys., **B12**, 258, 497 (1962). (20.2)
80. Blažek M., Mateni.-Fys. Casopis SAV, **13**, 147 (1963). (20.2)
81. Blažek M., C. R. Acad. Bulgar. Sci., **17**, 1005 (1964). (20.2)
82. Blin-Stoyle R. J., Proc. Phys. Soc., **64A**, 700 (1951). (15.1)
83. Bloch C., Nucl. Phys., **4**, 503 (1957). (16.5)
84. Boas R. P., Entire Functions, New York, 1954. (12.1.4)
85. Bohr N., Kalckar F., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **14** (10) (1937). (16.5)
86. Bohr N., Peierls R. E., Płaczek G., Nature, **144**, 200 (1939). (7.2.2)
87. Bolsterli M., Phys. Rev., **131**, 883 (1963). (16.3)
88. Bolsterli M., MacKenzie J., Physics, **2**, 141 (1965). (20.2)
89. Borg G., Acta Math., **78**, 1 (1946). (20.2)
90. Borg G., Eleventh Congress of Scandinavian Mathematicians, Trondheim, 1949, p. 276. (20.2)
91. Born M., Zs. Phys., **38**, 803 (1926). (9.1)
92. Born M., Wolf E., Principles of Optics, New York, 1959. (1.2.3, 4.3)
93. Borowitz S., Friedman B., Phys. Rev., **89**, 441 (1953). (11.3, 17.4)
94. Bose A. K., Nuovo Cimento, **32**, 679 (1964). (14)
95. Bottino A., Longoni A. M., Nuovo Cimento, **24**, 353 (1962). (12.1.4, 13.1)
96. Bottino A., Longoni A. M., Regge T., Nuovo Cimento, **23**, 954 (1962). (Имеется перевод в сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963, стр. 66.) (12.1.1, 13.3)

97. Bowcock J., Martin A., Nuovo Cimento, **14**, 516 (1959). (10.3.2)
 98. Bowcock J., Walecka D., Nucl. Phys., **12**, 371 (1959). (10.3.2)
 99. Boyet H., Borowitz S., Phys. Rev., **93**, 1225 (1954). (11.3, 17.4)
 100. Brander O., Nuovo Cimento, **32**, 1059 (1964). (13.4)
 101. Braun G., Acta Phys. Austriaca, **10**, 8 (1956). (1.3, 6.7.3)
 102. Breene R. G., Proton and Electron Scattering by Diatomic Molecules, Centerville, Ohio, 1963. (17)
 103. Breit G., Phys. Rev., **58**, 506, 1069 (1940). (16.5)
 104. Breit G., Phys. Rev., **69**, 472 (1946). (16.5, 17.1)
 105. Breit G., Phys. Rev., **107**, 1612 (1957). (17.2)
 106. Breit G., в книге Handbuch der Physik, Bd. 41, Tl. 1, Berlin, 1959, S. 1. (16.5, 17.2)
 107. Breit G., Rev. Mod. Phys., **34**, 766 (1962). (20.1)
 108. Breit G., Bethe H. A., Phys. Rev., **93**, 888 (1954). (7.2.2)
 109. Breit G., Wigner E. P., Phys. Rev., **49**, 519 (1936). (11.2.2, 16.5)
 110. Breit G., Yost F. L., Phys. Rev., **48**, 203 (1935). (16.5)
 111. Brenig W., Nucl. Phys., **13**, 333 (1959). (16.5)
 112. Brenig W., Haag R., Fortschr. Phys., **7**, 183 (1959); см. также [734]. (6, 7, 8.1, 16.2)
 113. Brillouin L., Compt. Rend., **183**, 24 (1926). (18.2)
 114. Brown G. E., Proc. Phys. Soc., **A70**, 681 (1957). (16.5)
 115. Brown R. Hanbury, Twiss R. Q., Phil. Mag., **45**, 663 (1954). (4.3)
 116. Brown R. Hanbury, Nature, **117**, 27, 178, 1447 (1956). (4.3)
 117. Brown R. Hanbury, Proc. Roy. Soc., **242A**, 300; **243A**, 291 (1957). (4.3)
 118. Brownell F. H., Pacific Journ. Math., **12**, 47 (1962). (6.7)
 119. Brysk H., Journ. Math. Phys., **6**, 51 (1965). (18.2)
 120. Burdet G., Giffon M., Predazzi E., Nuovo Cimento, **36**, 1337 (1965). (20.1)
 121. Burke P. G., Schey H. M., Phys. Rev., **126**, 147 (1962). (16)
 122. Burke P. G., Smith K., Rev. Mod. Phys., **34**, 458 (1962). (16)
 123. Calogero F., Nuovo Cimento, **27**, 261, 1007 (1963); **28**, 66, 320, 761 (1963). (12.1.2)
 124. Calogero F., Phys. Rev., **135B**, 693 (1964). (12.4)
 125. Calogero F., Journ. Math. Phys., **6**, 161, 1105 (1965). (12.1.4)
 126. Calogero F., Nuovo Cimento, **36**, 199 (1965). (12.1.4)
 127. Calogero F., Phys. Rev., **139**, 602 (1965). (12.4)
 128. Calogero F., Nuovo Cimento, **37**, 756 (1965). (12.4)
 129. Calogero F., Comm. in Math. Phys., **1**, 80 (1965). (12.1.4)
 130. Calogero F., Cassandro M., Nuovo Cimento, **34**, 1712 (1964). (12.4)
 131. Calogero F., Cassandro M., Nuovo Cimento, **37**, 760 (1965). (12.4)
 132. Calogero F., Charap J. M., Ann. of Phys., **26**, 55 (1964). (9.1.2)
 133. Calogero F., Fradkin D. M., Nucl. Phys., **75**, 470 (1966). (12.2)
 134. Calogero F., Ravenhall D. G., Nuovo Cimento, **32**, 1755 (1964). (12.1.2)
 135. Capps R. H., Holladay W. G., Phys. Rev., **99**, 931 (1955). (17.2)
 136. Caratheodory C., Funktionentheorie I, Basel, 1950. (12.1)
 137. Carter D. S., Ph. D. thesis, Princeton University, 1952, не опубликовано. (12.2)
 138. Case K. M., Phys. Rev., **80**, 797 (1950). (12.4)
 139. Chadan K., Nuovo Cimento, **40**, 1194 (1965). (12.1.3)
 140. Chadan K., Nuovo Cimento, **41**, 115 (1966). (12.1.3)
 141. Chadan K., Guennéguès J. Y., Nuovo Cimento, **34**, 665 (1964). (12.1.2)
 142. Chakrabarti A., Ann. Inst. Henri Poincaré, **1A**, 301 (1964). (17.4)
 143. Chan Hong-Mo, Proc. Roy. Soc., **A261**, 329 (1961). (17.1)
 144. Chan Hong-Mo, Journ. Math. Phys., **4**, 1042 (1963). (17.1)
 145. Chandrasekhar S., Radiative Transfer, Fair Lawn, N. J., 1950. (Имеется перевод: С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1953.) (1.4)
 146. Charap J. M., Nuovo Cimento, **36**, 419 (1965). (12.1.3)
 147. Charap J. M., Dombey N., Phys. Lett., **9**, 210 (1964). (12.4)
 148. Cheng H., Phys. Rev., **144**, 1237 (1966). (14.7.1)
 149. Cheston W., Phys. Rev., **85**, 952 (1952). (18.4)
 150. Chew G. F., Phys. Rev., **74**, 809 (1948). (18.4)
 151. Chew G. F., Phys. Rev., **80**, 196 (1950). (18.4)
 152. Chew G. F., Goldberger M. L., Phys. Rev., **87**, 778 (1952). (18.4)
 153. Chew G. F., Lewis H. W., Phys. Rev., **84**, 779 (1951). (18.4)
 154. Chew G. F., Mandelstam S., Phys. Rev., **119**, 467 (1960). (Имеется перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960, стр. 249.) (12.1.3, 17.1)
 155. Chew G. F., Wick G. C., Phys. Rev., **85**, 636 (1952). (18.4)
 156. Choudhury M. H., Nuovo Cimento, **34**, 956 (1964); **35**, 339 (1964). (17.4)
 157. Ciafaloni M., Nuovo Cimento, **29**, 420 (1963). (12.1.3, 13.3)
 158. Ciafaloni M., Menotti P., Nuovo Cimento, **35**, 160 (1965). (12.1.4)

159. Clapp R., Phys. Rev., **76**, 873 (1949). (17.4.3)
 160. Clapp R., Ann. of Phys., **13**, 187 (1961). (17.4.3)
 161. Coester F., Phys. Rev., **89**, 619 (1953). (7.2.4)
 162. Coester F., Phys. Rev., **133B**, 1516 (1964). (9.1.1)
 163. Coester F., Lectures on the Quantum Theory of Scattering, Argonne National Laboratory, 1964, не опубликовано. (20.1)
 164. Coester F., Helv. Phys. Acta, **38**, 7 (1964). (6)
 165. Coester F., Hamermesh M., Tanaka K., Phys. Rev., **96**, 1142 (1954). (6)
 166. Coester F., Kümmel H., Nucl. Phys., **9**, 225 (1958). (16.2)
 167. Cohen S., Judd D. L., Riddell R. J., Phys. Rev., **119**, 384 (1960). (17.4)
 168. Cook J., Journ. Math. Phys., **36**, 82 (1957). (6.7)
 169. Corinaldesi E., Nuovo Cimento, **11**, 468 (1954); **12**, 469 (1954). (20.2)
 170. Corinaldesi E., Nuovo Cimento, **11**, 200 (1954); **12**, 438 (1954). (18.3)
 171. Corinaldesi E., Nucl. Phys., **2**, 420 (1956). (12.1.3)
 172. Corinaldesi E., Nuovo Cimento, **29**, 92 (1962). (16.3.3)
 173. Corinaldesi E., Trainor L., Ta-You Wu, Nuovo Cimento, **9**, 436 (1952). (16.3)
 174. Cornille H., Nuovo Cimento, **33**, 434 (1964). (12.4)
 175. Cornille H., Nuovo Cimento, **36**, 1316 (1965); **38**, 1243 (1965). (12.4)
 176. Cornille H., Burdet G., Giffon M., Nuovo Cimento, **38**, 647 (1965). (12.4)
 177. Cornille H., Martin A., Nuovo Cimento, **26**, 298 (1962). (14.6)
 178. Cornille H., Predazzi E., Phys. Lett., **10**, 149 (1964). (12.4)
 179. Cornille H., Predazzi E., Nuovo Cimento, **35**, 879 (1965). (12.4)
 180. Cornille H., Predazzi E., Journ. Math. Phys., **6**, 1730 (1965). (12.4)
 181. Cottingham W. N., Peierls R. F., Phys. Rev., **137B**, 147 (1965). (18.3)
 182. Courant R., Hilbert D., Methods of Mathematical Physics, New York, 1953. (Имеется перевод: П. Курянт, Д. Гильберт, Методы математической физики, М.—Л., 1951.) (9.2, 9.3)
 183. Cox J. R., Construction of Potentials from the Many-channel S-matrix, Ph. D. thesis, Indiana University, 1962, не опубликовано. (12.1.3, 17, 20.2)
 184. Cox J. R., Journ. Math. Phys., **5**, 1065 (1964). (17)
 185. Cox J. R., Nuovo Cimento, **37**, 474 (1965). (12.1.2)
 186. Cox J. R., Perlmutter A., Nuovo Cimento, **37**, 76 (1965). (12.1.2)
 187. Coz M., Nuovo Cimento, **35**, 492 (1965). (16.3, 16.5)
 188. Coz M., Ann. of Phys., **35**, 53 (1965). (16.5)
 189. Craggs J. D., Massey H. S. W., в книге Handbuch der Physik, Bd. 37/1, Berlin, 1959, S. 314. (16)
 190. Crum M. M., Quart. Journ. Math., **6**, 121 (1955). (20.2)
 191. Curtis A. R., Coulomb Wave Functions, Vol. 11, New York, 1964. (14.6)
 192. Cushing J. T., Nuovo Cimento, **36**, 586, 905 (1965); **38**, 463 (1965). (17.4.3)
 193. Dalitz R. H., Proc. Roy. Soc., **A206**, 509 (1951). (9.1.2, 10.3.3, 14.6)
 194. Dalitz R. H., Phys. Rev., **94**, 1046 (1954). (17.4)
 195. Dalitz R. H., Rajasekaran G., Phys. Lett., **7**, 373 (1963). (17.1)
 196. Dashen R. F., Journ. Math. Phys., **4**, 388 (1963). (12.1.2)
 197. Davies H., Nucl. Phys., **14**, 465 (1960). (9.1.1, 10.3.1)
 198. Davies K. T. D., Baranger M., Ann. of Phys., **19**, 383 (1962). (16.5)
 199. Davison B., Phys. Rev., **71**, 694 (1947). (11.3)
 200. Day T. B., Rodberg L. S., Snow G. A., Sucher J., Phys. Rev., **123**, 1051 (1961). (7.2.5, 16.3)
 201. De Alfaro V., Regge T., Rosetti C., Nuovo Cimento, **25**, 701 (1962); **26**, 1029 (1962). (12.1.2)
 202. Debye P., Ann. Phys., **30**, 57 (1909). (3.3, 3.5, 4.1.1)
 203. Debye P., Math. Ann., **67**, 535 (1909). (3. Пр.)
 204. Debye P., Abhandl. Akad. Wiss., München, Math.-phys. Kl., **5** (1910). (3. Пр.)
 205. Degasperis A., Nuovo Cimento, **34**, 1667 (1964). (12.1.2)
 206. Del Giudice E., Galzenati E., Nuovo Cimento, **38**, 443 (1964); **40**, 739 (1964). (12.4)
 207. Delves L. M., Nucl. Phys., **8**, 358 (1958). (17.3)
 208. Delves L. M., Nucl. Phys., **9**, 391 (1958—1959). (17.2)
 209. Delves L. M., Nucl. Phys., **20**, 275 (1960). (17.3.4)
 210. Derrick G. H., Nucl. Phys., **16**, 405 (1960); **18**, 303 (1960). (17.4.3)
 211. Derrick G. H., Nucl. Phys., **34**, 543 (1962). (17.4.3)
 212. Derrick G. H., Blatt J. M., Nucl. Phys., **8**, 310 (1958). (17.4.3)
 213. Derrick G. H., Blatt J. M., Nucl. Phys., **17**, 67 (1960). (17.4.3)
 214. Desai B. R., Newton R. G., Phys. Rev., **129**, 1437 (1963). (15.2)
 215. DeWitt B. S., The Operator Formalism in Quantum Scattering Theory, Univ. Calif. (Berkeley) Radiation Lab. UCRL-2884, 1955. (6, 7)
 216. DeWitt B. S., Phys. Rev., **100**, 905 (1955). (7)
 217. DeWitt B. S., Phys. Rev., **103**, 1565 (1956). (8.1.3)

218. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A112**, 661 (1926). (6.5)
 219. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A114**, 243 (1927). (6.5)
 220. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics, Oxford, Fair Lawn, N.J., 1947. (Имеется перевод: П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., 1960.) (12.1.1)
 221. Dirac P. A. M., Can. Journ. Phys., **33**, 709 (1955). (16.3)
 222. Dodd L. R., McCarthy I. E., Phys. Rev., **134A**, 1136 (1964). (6)
 223. Doetsch G., Handbuch der Laplace-Transformation, Basel, 1956. (5.9)
 224. Dollard J. D., Journ. Math. Phys., **5**, 729 (1964). (6, 14.6)
 225. Dombey N., Nuovo Cimento, **37**, 1743 (1965). (12.4)
 226. Dragt A. J., Karplus R., Nuovo Cimento, **26**, 168 (1962). (17.2)
 227. Dunford N., Schwartz J. T., Linear Operators, Vol. 1, 1958; Vol. 2, 1963, New York. (Имеется перевод: Н. Данфорд, Д. Шварц, Линейные операторы, т. 1 и 2, ИЛ, 1962.) (7.3)
 228. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486, 1736 (1949). (Имеется перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.) (6.4, 6.5)
 229. Eckart C., Phys. Rev., **35**, 1303 (1930). (14.4)
 230. Eckstein H., Phys. Rev., **94**, 1063 (1954). (6.3)
 231. Eckstein H., Phys. Rev., **101**, 880 (1956). (6, 16.2)
 232. Eckstein H., Nuovo Cimento, **4**, 1017 (1956). (6)
 233. Eckstein H., Phys. Rev., **117**, 1590 (1960). (20.1)
 234. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., **A199**, 256 (1949). (17.2)
 235. Eden R. J., Proc. Roy. Soc., **A210**, 388 (1952). (17.2)
 236. Eden R. J., Taylor J. R., Phys. Rev. Lett., **11**, 516 (1963). (17.1)
 237. Edmonds A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, N.J., 1957. (2.1.4, 15.1)
 238. Ehrenfest P., Zs. Phys., **45**, 455 (1927). (6)
 239. Ehrman J. B., Phys. Rev., **81**, 412 (1951). (17.2)
 240. Epstein S. T., Phys. Rev., **98**, 196 (1955). (7)
 241. Epstein S. T., Phys. Rev., **106**, 598 (1957). (16.3)
 242. Higher Transcendental Functions, ed. A. Erdelyi, New York, 1953. (Имеется перевод: Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, М., ч. 1, 1965; ч. 2, 1966; ч. 3, 1967.) (2.1.1, 2.2.1, 12.3, 13.1, 15.1.1, 17.2.4, 18.3)
 243. Erdelyi A., Tables of Integral Transforms, New York, 1954. (Имеется перевод: Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, т. 1, М. 1969.) (5.9, 18.3)
 244. Erdelyi A., Asymptotic Expansions, Dept. of Math., Cal. Inst. of Techn., 1955. (Имеется перевод: А. Эрдейи, Асимптотические разложения, М., 1962.) (1.3.1, 3.Пр., 6.7.3)
 245. Erdelyi A., Journ. Math. Phys., **1**, 16 (1960). (18.2)
 246. Eyges L., Phys. Rev., **115**, 1643 (1959). (17.4)
 247. Fabri E., Nuovo Cimento, **11**, 479 (1954). (17.4)
 248. Fano U., Rev. Mod. Phys., **29**, 74 (1957). (8.3.1)
 249. Faxen H., Holtsmark J., Zs. Phys., **45**, 307 (1927). (2.2.5, 11.1)
 250. Feenberg E., Phys. Rev., **40**, 40 (1932). (1.3, 7.2.2)
 251. Feenberg E., Phys. Rev., **74**, 664 (1948). (7)
 252. Fermi E., Ricerca Sci., **VII-II**, 13 (1936). (18.4)
 253. Fernbach S., Green T. A., Watson K. M., Phys. Rev., **82**, 980 (1951). (18.4)
 254. Fernbach S., Serber R., Taylor T., Phys. Rev., **75**, 1352 (1949). (18.3)
 255. Ferreira E. M., Teixeira A. F. F., Journ. Math. Phys., **7**, 1207 (1966). (14.6)
 256. Ferretti B., Nuovo Cimento, **8**, 108 (1951). (6.7.3)
 257. Feshbach H., Ann. of Phys., **5**, 357 (1958). (16.5)
 258. Feshbach H., Ann. of Phys., **19**, 287 (1962). (16.5)
 259. Feshbach H., Porter C. E., Weisskopf V. F., Phys. Rev., **96**, 448 (1954). (16.5)
 260. Feshbach H., Rarita W., Phys. Rev., **75**, 1384 (1949). (17.4.3)
 261. Feynman R. P., Phys. Rev., **76**, 749, 769 (1949). (Имеется перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954, стр. 138, 161.) (6.4)
 262. Feynman R. P., Phys. Rev., **84**, 108 (1951). (6.5)
 263. Fivel D. I., Nuovo Cimento, **22**, 326 (1961). (13.4)
 264. Fivel D. I., Phys. Rev., **125**, 1085 (1962). (10.3.2)
 265. Fivel D. I., Phys. Rev., **142**, 1219 (1966). (14.6)
 266. Fivel D. I., Klein A., Journ. Math. Phys., **1**, 274 (1960). (14.5)
 267. Flügge S., Zs. Naturforsch., **3a**, 97 (1948). (16.5)
 268. Foldy L., Toboeman W., Phys. Rev., **105**, 1099 (1957). (7, 10.2, 16.3)
 269. Fonda L., Nuovo Cimento, **13**, 956 (1959). (17.2)
 270. Fonda L., Nuovo Cimento, **20**, 116 (1961). (17.2)
 271. Fonda L., Ann. of Phys., **12**, 476 (1961). (16.5, 17.2)
 272. Fonda L., Ann. of Phys., **29**, 401 (1964). (16.5)

273. Fonda L., Ghirardi G. C., Nucl. Phys., **58**, 374 (1964). (17.2)
 274. Fonda L., Ghirardi G. C., Ann. of Phys., **26**, 240 (1964). (16.5)
 275. Fonda L., Ghirardi G. C., Weber T., Rimini A., Preprint (1966) (7.3)
 276. Fonda L., Newton R. G., Nuovo Cimento, **14**, 1027 (1959). (17.3.2)
 277. Fonda L., Newton R. G., Ann. of Phys., **7**, 133 (1959). (17.2)
 278. Fonda L., Newton R. G., Ann. of Phys., **9**, 416 (1960). (17.2.4)
 279. Fonda L., Newton R. G., Phys. Rev., **119**, 1394 (1960). (17.2, 17.4.3)
 280. Fonda L., Newton R. G., Ann. of Phys., **10**, 490 (1960). (16.5, 17.3, 19.3)
 281. Fonda L., Radicati L. A., Regge T., Ann. of Phys., **12**, 68 (1961). (13.4, 17.1, 17.3)
 282. Fong R., Sucher J., Journ. Math. Phys., **5**, 456 (1964). (6)
 283. Ford K. W., Hill D. L., Wakano M., Wheeler J. A., Ann. of Phys., **7**, 239 (1959). (18.2.5)
 284. Ford K. W., Wheeler J. A., Ann. of Phys., **7**, 259 (1959). (5.4, 18.2.5)
 285. Ford K. W., Wheeler J. A., Ann. of Phys., **7**, 287 (1959). (18.2)
 286. Ford W. F., Phys. Rev., **133B**, 1616 (1964). (14.6)
 287. Fradkin D. M., Calogero F., Nucl. Phys., **75**, 475 (1966). (12.2)
 288. Fradkin D. M., Hammer C. L., Weber T. A., Journ. Math. Phys., **5**, 1645 (1964). (15.1)
 289. Fradkin D. M., Weber T. A., Hammer C. L., Ann. of Phys., **24**, 338 (1964). (14.6)
 290. Franchetti S., Nuovo Cimento, **6**, 601 (1957). (12.1.2)
 291. Franz W., Zs. Naturforsch., **9a**, 705 (1954). (3.8)
 292. Frautschi S., Regge Poles, New York, 1963. (13.1)
 293. Friedman B., Principles and Techniques of Applied Mathematics, New York, 1957. (7.3)
 294. Friedman B., Mich. Math. Journ., **4**, 137 (1957). (20.2)
 295. Friedrichs K. O., Comm. Pure Appl. Math., **1**, 361 (1948). (7.3)
 296. Friedrichs K. O., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., **43**, (1952). (6.7)
 297. Friedrichs K. O., Spectral Theory of Operators in Hilbert Space, New York, 1960. (7.3)
 298. Fröberg C. E., Phys. Rev., **72**, 519 (1947). (20.2)
 299. Fröberg C. E., Arkiv Mat. Astron. Fys., **34A** (28) (1948). (20.2)
 300. Fröberg C. E., Arkiv Mat. Astron. Fys., **36A** (11) (1949). (20.2)
 301. Fröberg C. E., Arkiv Fys., **3** (1) (1951). (20.2)
 302. Froissart M., Nuovo Cimento, **22**, 191 (1961). (17.1)
 303. Fröman N., Fröman P. O., JWKB Approximation, Amsterdam, 1965. (Имеется перевод: Н. Фрёман, П. У. Фрёман, ВКБ-приближение, изд-во «Мир», 1967.) (18.2)
 304. Frye G., Warnock R., Phys. Rev., **130**, 478 (1963). (17.1)
 305. Fubini S., Nuovo Cimento, **9**, 846 (1952). (6.3)
 306. Fubini S., Atti Accad. Naz. Lincei, **12**, 298 (1952). (6.4)
 307. Fubini S., Strocchi R., Nuovo Cimento, **37**, 1812 (1965). (12.4)
 308. Fujimoto Y., Yamaguchi Y., Progr. Theor. Phys., **6**, 166 (1951). (18.4)
 309. Fujiwara I., Progr. Theor. Phys., **7**, 433 (1952). (6.5)
 310. Fukuda N., Newton R. G., Phys. Rev., **103**, 1558 (1956). (8.1.3)
 311. Fulco J. R., Shaw G. L., Wong D. Y., Phys. Rev., **137B**, 1242 (1965). (16.5)
 312. Fulton M. J., Middleman M. H., Ann. of Phys., **33**, 65 (1965). (16)
 313. Fulton T., Newton R. G., Nuovo Cimento, **3**, 677 (1956). (15.2)
 314. Furry W. H., Phys. Rev., **71**, 360 (1947). (18.2)
 315. Galindo Tixaire A., Helv. Phys. Acta, **32**, 412 (1959). (6.7, 16.2)
 316. Gallina V., Nata P., Bianchi L., Viano G., Preprint, (1965). (17.4)
 317. Gamow G., Zs. Phys., **51**, 204 (1928). (14.6)
 318. Gans R., Ann. Phys., **76**, 29 (1925). (3.1.2)
 319. Garbe E., Math. Ann., **76**, 527 (1915). (9.1.1, 10.3.1)
 320. Gasiorowicz S., Noyes H. P., Nuovo Cimento, **10**, 78 (1958). (10.3.2)
 321. Gell-Mann M., Goldberger M. L., Phys. Rev., **91**, 398 (1953); см. также [734]. (6, 8.1)
 322. Gerjuoy E., Ann. of Phys., **5**, 58 (1958). (7, 16.3)
 323. Gerjuoy E., Phys. Rev., **109**, 1806 (1958). (7, 16.3)
 324. Gerjuoy E., Ann. of Phys., **32**, 1 (1965). (4.2.1)
 325. Gerjuoy E., Phys. Today, **18** (5), 24 (1965). (16)
 326. Gerjuoy E., Journ. Math. Phys., **6**, 993 (1965). (6)
 327. Ghirardi G. C., Pauri M., Rimini A., Ann. of Phys., **21**, 401 (1963) (12.1.3)
 328. Ghirardi G. C., Rimini A., Journ. Math. Phys., **6**, 40 (1965). (12.1.4)
 329. Ghirardi G. C., Rimini A., Nuovo Cimento, **37**, 450 (1965). (17.4.3)
 330. Giambiagi J. J., Kibble T. W. B., Ann. of Phys., **7**, 39 (1959). (12.1.2)
 331. Giffon M., Predazzi E., Nuovo Cimento, **33**, 1374 (1964). (12.4)

332. Gilbert R. P., Shieh S. Y., Journ. Math. Phys., 7, 431 (1966). (13.1)
333. Glassgold A. E., Lebedeff S. A., Ann. of Phys., 28, 181 (1964). (16)
334. Glauber R. J., в книге Lectures in Theoretical Physics, ed. W. E. Brittin, L. G. Dunham, vol. 1, New York, 1959, p. 315. (18.3)
335. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett., 10, 84 (1963); Phys. Rev., 130, 2529 (1963); 131, 2766 (1963). (4.3, 8.3.1)
336. Glauber R. J., в книге Quantum Optics and Electronics (Les Houches Lectures 1964), ed. C. de Witt et al., New York, 1965. (Имеется перевод: Квантовая оптика и квантовая радиофизика, изд-во «Мир», 1966.) (4.3, 8.3.1)
337. Glauber R. J., в книге Proc. of the Physics of Quantum Electronics Conference (San Juan, Puerto Rico, 1965), ed. P. Kelley et al., New York, 1966. (4.3, 8.3.1)
338. Glöckle W., Zs. Phys., 190, 391 (1966). (17.1)
339. Gluckstern R. L., Lin S. R., Journ. Math. Phys., 5, 1594 (1964). (14.6)
340. Goldberger M. L., Phys. Rev., 82, 757 (1951). (7)
341. Goldberger M. L., Phys. Rev., 84, 929 (1951). (7)
342. Goldberger M. L., Lewis H. W., Watson K. M., Phys. Rev., 132, 2764 (1963). (4.3)
343. Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., 127, 2284 (1962). (19.2)
344. Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., 136B, 1472 (1964). (19.3)
345. Goldberger M. L., Watson K. M., Collision Theory, New York, 1964. (Имеется перевод: М. Гольдбергер, К. Ватсон, Теория столкновений, изд-во «Мир», 1967.) (17.1, 18.4, 19.2)
346. Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., 134B, 919 (1964). (4.3)
347. Goldberger M. L., Watson K. M., Phys. Rev., 137B, 1396 (1965); 140B, 500 (1965). (4.3)
348. Goldstein H., Classical Mechanics, Reading, Mass., 1957. (Имеется перевод: Г. Голдстейн, Классическая механика, М., 1957.) (5.1)
349. Goodrich R. F., Harrison B. A., Kleinman R. E., Senior T. B. A., Univ. Mich. Coll. Eng. Rept. 3648-I-T, 1961. (2.4)
350. Goodrich R. F., Kazarinoff N. D., Mich. Math. Journ., 10, 105 (1963); Proc. Cambr. Phil. Soc., 59, 167 (1963). (3.8)
351. Gordon W., Zs. Phys., 48, 180 (1928). (14.6)
352. Grawert G., Petzold J., Zs. Naturforsch., 15a, 311 (1960). (16.2)
353. Green T. A., Lanford O. E., Journ. Math. Phys., 1, 139 (1960). (6.7)
354. Greider K. R., Glassgold A. E., Ann. of Phys., 10, 100 (1960). (18.2)
355. Grossmann A., Journ. Math. Phys., 2, 714 (1961). (10.3.2)
356. Grossmann A., Wu T. T., Journ. Math. Phys., 2, 710 (1961). (10.3.2)
357. Gryninski M., Phys. Rev., 138A, 305, 322 (1965). (5.7)
358. Gryninski M., Phys. Rev., 138A, 336 (1965). (5)
359. Guier W. H., Hart R. W., Phys. Rev., 106, 296 (1957). (17.2)
360. Gurney R. W., Condon E. U., Phys. Rev., 33, 127 (1929). (14.6)
361. Haag R., в книге Lectures in Theoretical Physics, ed. W. E. Brittin et al., New York, 1961, p. 326. (6, 7)
362. Hack M. N., Phys. Rev., 96, 196 (1954). (7)
363. Hack M. N., Nuovo Cimento, 9, 731 (1958). (6.3)
364. Hagedorn R., Relativistic Kinematics, New York, 1963. (8.2)
365. Hahn Y., Phys. Rev., 139B, 212 (1965). (9.1.1, 11.3)
366. Hahn Y., O'Malley T., Spruch L., Phys. Rev., 128, 932 (1962). (11.3)
367. Hahn Y., O'Malley T., Spruch L., Phys. Rev., 130, 381 (1963). (11.3)
368. Hahn Y., O'Malley T., Spruch L., Phys. Rev., 134B, 397, 911 (1964). (11.3)
369. Halliday I. G., Nuovo Cimento, 42B, 38 (1966). (17.2, 17.4)
370. Halmos P. R., Finite Dimensional Vector Spaces, Princeton, N.J., 1942. (Имеется перевод: П. Р. Халмош, Конечномерные векторные пространства, М., 1963). (7.3)
371. Hecht C. E., Mayer J. E., Phys. Rev., 106, 1156 (1957). (18.2)
372. Heisenberg W., Zs. Phys., 120, 513, 673 (1943). (2.2.2, 6.4)
373. Heisenberg W., Zs. Phys., 123, 93 (1944). (6.4)
374. Heisenberg W., Zs. Naturforsch., 1, 608 (1946). (12.1.3)
375. Heitler W., Proc. Cambr. Phil. Soc., 37, 291 (1941). (6.4)
376. Heitler W., The Quantum Theory of Radiation, 3d ed., Fair Lawn, N.J., 1954. (Имеется перевод: В. Гейтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.) (7)
377. Heitler W., Ma S. T., Proc. Roy. Irish. Acad., 52, 109 (1949). (19.2)
378. Hellmann O., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., 32 (4) (1960). (12)
379. Herglotz A., Ber. Verhandl. K. Sächs. Ges. Wiss., Leipzig, Math.-phys. Kl., 63, 501 (1911). (9.1.1)
380. Hetherington J. H., Journ. Math. Phys., 4, 357 (1963). (14.6)
381. Hetherington J. H., Schick L. H., Phys. Rev., 137B, 935 (1965). (17.4.3)
382. Higgins J. R., Kinematic Analysis of Production Reactions, Ph. D. dissertation, Indiana University, 1963, не опубликовано. (17.4)
383. Hilb E., в книге Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 2, Tl. 2, Leipzig, 1915, S. 501. (12.1)

384. Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen' Leipzig, 1912. (9.1.1)
385. Hildevoord J., Dispersion Relations and Causal Description, Amsterdam, 1960. (4.2.1, 10.3.2)
386. Hille E., Phillips R. S., Functional Analysis and Semigroups, New York, 1957. (Имеется перевод: Э. Хилле, Р. С. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1962.)
387. Hille E., Tamarkin J., Ann. Math., **31**, 479 (1930). (9.3)
388. Hille E., Tamarkin J., Acta Math., **57**, 1 (1931). (9.3)
389. Hille E., Tamarkin J., Ann. Math., **35**, 445 (1934). (9.3)
390. Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., Bird R. B., Molecular Theory of Gases and Liquids, New York, 1954. (Имеется перевод: Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертис, Р. Берд, Молекулярная теория газов и жидкостей, ИЛ, 1961.) (5.4)
391. Höhler G., Zs. Phys., **152**, 542 (1958). (19.2)
392. Holdeman J. T., Thaler R. M., Phys. Rev., **139B**, 1186 (1965). (14.6)
393. Holmberg B., Nuovo Cimento, **9**, 597 (1952). (20.2)
394. Hostler L., Journ. Math. Phys., **5**, 591, 1235 (1964). (14.6)
395. Hostler L., Pratt R. H., Phys. Rev. Lett., **10**, 469 (1963). (14.6)
396. Hu N., Phys. Rev., **74**, 131 (1948). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», № 2, 1957, стр. 13.) (12.1.4)
397. Huang S., Phys. Rev., **75**, 980 (1949); **76**, 477, 866, 1878 (1949). (11.3)
398. Huby R., Nucl. Phys., **45**, 473 (1963). (10.3.1)
399. Huby R., Mines J. R., Nucl. Phys., **54**, 28 (1964). (10.3.1)
400. Hull M. H., Breit G., в кнже Handbuch der Physik, Bd. 41/1, Berlin, 1959, S. 408. (14.6)
401. Hulthén L., Arkiv Math. Astron. Fys., **28A** (5), **29B** (1) (1942). (14.4)
402. Hulthén L., Kgl. Fysiograf. Sällskap Lund. Förh., **14** (21) (1944); см. также Math. Rev., **6**, 111 (1945). (11.3)
403. Hulthén L., Compt. Rend. Dixième Congr.-Mat. Scandinaves (Copenhagen, 1946), Copenhagen, 1947, p. 201. (11.3)
404. Hulthén L., Arkiv Mat. Astron. Fys., **35A** (25) (1948). (11.3)
405. Hulthén L., Olsson P. O., Phys. Rev., **79**, 532 (1950). (11.3)
406. Humblet J., Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, **4**, 12 (1952). (12.1.4)
407. Humblet J., Nucl. Phys., **31**, 544 (1962). (16.5)
408. Humblet J., Nucl. Phys., **50**, 1 (1964); **57**, 386 (1964). (16.5)
409. Humblet J., Rosenfeld L., Nucl. Phys., **26**, 529 (1961). (16.5)
410. Hunziker W., Helv. Phys. Acta, **34**, 593 (1961). (9.1.1, 10.3.2)
411. Hunziker W., Helv. Phys. Acta, **36**, 838 (1963). (18.3)
412. Hunziker W., Phys. Rev., **135B**, 800 (1964). (7.2.5, 17.4.3)
413. Hylleraas E. A., Phys. Rev., **74**, 48 (1948). (20.2)
414. Hylleraas E. A., Nucl. Phys., **57**, 208 (1964). (20.2)
415. Hylleraas E. A., Undheim B., Zs. Phys., **65**, 759 (1930). (11.3)
416. Ida M., Progr. Theor. Phys., **21**, 625 (1959). (12.1.3)
417. Ida M., Progr. Theor. Phys., **28**, 943, 945 (1962). (18.3)
418. Ikebe T., Arch. Rat. Mech. Anal., **5**, 1 (1960). (7.3)
419. Immirzi G., Nuovo Cimento, **34**, 1361 (1965). (17.4)
420. Ince E. L., Ordinary Differential Equations, New York, 1927. (Имеется перевод: Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.) (15.2)
421. Inglis D. R., Nucl. Phys., **30**, 1 (1962). (17.2)
422. Integrals of Airy Functions, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., **52**, (1958). (3.6)
423. Iwash E. V., Phys. Rev., **112**, 155 (1958). (16)
424. Iwamoto F., Journ. Math. Phys., **4**, 809 (1963). (8.1.3)
425. Jabbur R. J., Phys. Rev., **138B**, 1525 (1965). (12.4)
426. Jackson J. D., Classical Electrodynamics, New York, 1962. (Имеется перевод: Дж. Джексон, Классическая электродинамика, изд-во «Мир», 1965.) (2.1.3, 2.1.5, 4.1.1, 4.1.2)
427. Jackson J. D., Blatt J. M., Rev. Mod. Phys., **22**, 77 (1950). (11.2.2)
428. Jackson J. D., Wylie H. W., Nuovo Cimento, **13**, 85 (1959). (17.2)
429. Jackson J. L., Phys. Rev., **83**, 301 (1951). (11.3)
430. Jacob M., Wick G. C., Ann. of Phys., **7**, 404 (1959). (15.1)
431. Jacob R., Sachs R. G., Phys. Rev., **121**, 350 (1961). (19.2)
432. Jakšić B., Limić N., Journ. Math. Phys., **7**, 88 (1966). (12.4)
433. Jameel M., Nucl. Phys., **56**, 353 (1964). (10.3.2)
434. Jauch J. M., Helv. Phys. Acta, **30**, 143 (1957). (12.1.3)
435. Jauch J. M., Helv. Phys. Acta, **31**, 127 (1958). (6.7)
436. Jauch J. M., Helv. Phys. Acta, **31**, 661 (1958). (16.2)
437. Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Reading, Mass., 1955. (6, 7, 8.1)
438. Jauch J. M., Zinnes I., Nuovo Cimento, **11**, 553 (1959). (6)
439. Jauch P., Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A, № 80 (1950). (20.2)

440. Jeffreys H., Proc. London Math. Soc., 23 (2), 428 (1923). (18.2)
 441. Jeukenne J. P., Nucl. Phys., 58, 1 (1964). (16.5)
 442. Joachain C., Nucl. Phys., 64, 529 (1965). (11.3)
 443. Joachain C., Nucl. Phys., 64, 548 (1965). (11.3, 16.3)
 444. Jordan T. F., Journ. Math. Phys., 3, 414, 429 (1962). (6.7, 7.3, 16.2)
 445. Jordan T. F., Journ. Math. Phys., 5, 1345 (1964). (16.2)
 446. Jordan T. F., Macfarlane A. J., Sudarshan E. C. G., Phys. Rev., 133B, 487 (1964). (6)
 447. Jost R., Physica, 12, 509 (1946). (12.1.3)
 448. Jost R., Helv. Phys. Acta, 20, 256 (1947). (12.1.1, 14.3)
 449. Jost R., Helv. Phys. Acta, 29, 410 (1956). (20.2)
 450. Jost R., Kohn W., Phys. Rev., 87, 977 (1952). (12.1.2, 12.1.5, 20.2)
 451. Jost R., Kohn W., Phys. Rev., 88, 382 (1952). (20.2)
 452. Jost R., Kohn W., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., 27 (9) (1953). (20.2)
 453. Jost R., Pais A., Phys. Rev., 82, 840 (1951). (9.3, 10.3.1, 14.4)
 454. Kaiser H. F., Annotated Bibliography on Positron Scattering, Washington, D.C., 1964. (15)
 455. Kalkar F., Oppenheimer J. R., Serber R., Phys. Rev., 52, 273, 279 (1937). (16.5)
 456. Kalikstein K., Spruch L., Journ. Math. Phys., 5, 1261 (1964). (11.3)
 457. Kapur P. L., Peierls R., Proc. Roy. Soc., A166, 277 (1938). (16.5)
 458. Karplus M., Porter R. N., Sharma R. D., Journ. Chem. Phys., 40, 2033 (1964). (5)
 459. Karplus M., Porter R. N., Sharma R. D., Journ. Chem. Phys., 43, 3259 (1965). (5)
 460. Karplus M., Raff L. M., Journ. Chem. Phys., 41, 1267 (1964). (5)
 461. Kato M., Ann. of Phys., 31, 130 (1965). (17.1)
 462. Kato T., Progr. Theor. Phys., 4, 514 (1949). (9.1.1)
 463. Kato T., Progr. Theor. Phys., 5, 207 (1950). (9.1.1)
 464. Kato T., Phys. Rev., 80, 475 (1950). (11.3)
 465. Kato T., Trans. Am. Math. Soc., 70, 195 (1951). (7.3)
 466. Kato T., Progr. Theor. Phys., 6, 295, 394 (1951). (11.3)
 467. Kato T., Journ. Math. Soc. Japan, 9, 239 (1957). (7.3)
 468. Kato T., Proc. Japan Acad., 33, 260 (1957). (7.3)
 469. Kato T., Kuroda S. T., Nuovo Cimento, 14, 1102 (1959). (6.4, 6.7)
 470. Kay I., Moses H. E., Nuovo Cimento, 2, 917 (1955). (20.2)
 471. Kay I., Moses H. E., Nuovo Cimento, 3, 66, 276 (1956). (20.2)
 472. Kay I., Moses H. E., Nuovo Cimento, Suppl., 5, 230 (1957). (20.2)
 473. Kay I., Moses H. E., Nuovo Cimento, 22, 689 (1961). (20.2)
 474. Kay I., Moses H. E., Comm. Pure Appl. Math., 14, 435 (1961). (20.2)
 475. Kazarinoff N. D., Ritt R. K., Ann. of Phys., 6, 277 (1959). (3.8)
 476. Kazes E., Nuovo Cimento, 13, 983 (1959). (12.1.3)
 477. Keller J. B., Kay I., Shmoys J., Phys. Rev., 102, 557 (1956). (5.9)
 478. Keller J. B., Rubinow S. I., Goldstein M., Journ. Math. Phys., 4, 829 (1963). (3.8)
 479. Kelllogg O., Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 165 (1902). (9.3)
 480. Electromagnetic Scattering, ed. M. Kerker, New York, 1963. (1.4)
 481. Kerner E. H., Phys. Rev., 91, 1174, 92, 1441 (1953). (16)
 482. Khuri N. N., Phys. Rev., 107, 1148 (1957). (9.3, 10.3.1)
 483. Khuri N. N., Pais A., Rev. Mod. Phys., 36, 590 (1964). (12.4)
 484. Khuri N. N., Treiman S. B., Phys. Rev., 109, 198 (1958). (10.3.2)
 485. Kikkawa K., Progr. Theor. Phys., 33, 1107 (1965). (17.1)
 486. Kikuta T., Progr. Theor. Phys., 10, 653 (1953). (9.1.1)
 487. Kikuta T., Progr. Theor. Phys., 12, 225 (1953). (11.3)
 488. King R. W. P., Wu T. T., The Scattering and Diffraction of Waves, Pt. I, Cambridge, Mass., 1959.
 489. Klein A., Journ. Math. Phys., 1, 41 (1960). (10.3.2, 13.4)
 490. Klein A., Zemach C., Ann. of Phys., 7, 440 (1959). (10.3.2)
 491. Kleinman R. E., Senior T. B. A., Univ. Mich. Coll. Eng. Rept. 3648-2-T (1963). (2.4)
 492. Kodeira K., Am. Journ. Math., 71, 921 (1949). (7.3)
 493. Kodeira K., Am. Journ. Math., 72, 502 (1950). (7.3)
 494. Kohn W., Phys. Rev., 74, 1763 (1948). (11.3)
 495. Kohn W., Phys. Rev., 84, 495 (1951). (11.3)
 496. Kohn W., Phys. Rev., 87, 539 (1952). (9.1.1)
 497. Kohn W., Rev. Mod. Phys., 26, 292 (1954). (9.1.1)
 498. Konisi G., Ogimoto T., Progr. Theor. Phys., 22, 807 (1959) (12.1.3)
 499. Konisi G., Ogimoto T., Progr. Theor. Phys., 29, 908 (1963). (12)
 500. Kramers H. A., Zs. Phys., 39, 828 (1926). (18.2)

501. Kramers H. A., Atti. Congr. Intern. Fisici, Como, **2**, 545, 1927; см. также H. A. Kramers, Collected Scientific Papers, Amsterdam, 1956, p. 333. (1.3, 4.2.1)
502. Kramers H. A., Hand-u. Jahrbuch der chemischer Physik, Bd. 1, 1938, S. 312 (12.1.3)
503. Kronfli N. S., Nuovo Cimento, **30**, 1465 (1963). (17.2)
504. Kronig R., Journ. Optical Soc. Am., **12**, 547 (1926). (4.2.1)
505. Krzywicki A., Journ. Math. Phys., **6**, 485 (1965). (8.1.3)
506. Krzywicki A., Szymanski J., Progr. Theor. Phys., **23**, 376 (1960). (19.2)
507. Kuroda S. T., Nuovo Cimento, **12**, 431 (1959). (6.7)
508. Kuroda S. T., Journ. Math. Soc. Japan, **11**, 247 (1959). (7.3)
509. Kuroda S. T., Journ. Math. Soc. Japan, **12**, 243 (1960). (7.3)
510. Kuroda S. T., Journ. Math. Phys., **3**, 933 (1962). (6.7)
511. Kynch G. J., Proc. Phys. Soc., **A65**, 83 (1952). (12.1.2)
512. Lane A. N., Thomas R. G., Rev. Mod. Phys., **30**, 257 (1958). (16.5)
513. Langer R. E., Trans. Am. Math. Soc., **34**, 447 (1932). (18.2)
514. Langer R. E., Phys. Rev., **51**, 669 (1937). (18.2)
515. Laporte O., Ann. Phys., **70**, 595 (1923). (3.8)
516. Lawson J. L., Uhlenbeck G. E., Threshold Signals, New York, 1950. (4.3)
517. Layzer D., Phys. Rev., **84**, 1221 (1951). (16.3)
518. LeCouteur K. J., Proc. Roy. Soc., **A256**, 115 (1960). (17.1)
519. Lee B. W., Klein A., Nuovo Cimento, **13**, 891 (1959). (16.5)
520. Lehmann H., Nuovo Cimento, **10**, 579 (1959). [Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», № 3, 57 (1959).] (13.1)
521. Levin F. S., Nucl. Phys., **46**, 275 (1963). (16.3.3)
522. Levin F. S., Phys. Rev., **140B**, 1099 (1965). (16.3.3)
523. Levin F. S., Phys. Rev., **141**, 858 (1966). (16.3.1)
524. Levine H., Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 958 (1948). (11.3)
525. Levine H., Schwinger J., Phys. Rev., **75**, 1423 (1949). (11.3)
526. Levine H., Schwinger J., в книге The Theory of Electromagnetic Waves, New York, 1951. (4.1.2)
527. Levinger J. S., Rustgi M. L., Phys. Rev., **106**, 607 (1957). (14.7)
528. Levinson N., Phys. Rev., **75**, 1445 (1949). (20.2, 20.2.2)
529. Levinson N., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **25** (9) (1949). (11.2.2, 12.1.1, 12.1.3, 12.2, 20.2)
530. Levinson N., Phys. Rev., **89**, 755 (1953). (20.2)
531. Levy B. R., Keller J. B., Journ. Math. Phys., **4**, 54 (1963). (11.2.2, 12.1.2)
532. Lévy M., Nuovo Cimento, **14**, 612 (1960). (19.2)
533. Lévy-Leblond J. M., Lévy-Nahas M., Journ. Math. Phys., **6**, 1372, 1571 (1965). (17.4)
534. Lighthill M. J., Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, New York, 1958. (7)
535. Limić N., Nuovo Cimento, **26**, 581 (1962). (12.4)
536. Limić N., Nuovo Cimento, **28**, 1066 (1963). (12.4)
537. Limić N., Nuovo Cimento, **36**, 100 (1965). (12.4)
538. Lipperheide R., Ann. of Phys., **17**, 114 (1962). (16.5)
539. Lippmann B. A., Phys. Rev., **102**, 264 (1956). (16.3)
540. Lippmann B. A., Phys. Rev. Lett., **15**, 11 (1965). (6)
541. Lippmann B. A., Schwinger J., Phys. Rev., **79**, 469 (1950); см. также [734]. (6, 7.1, 8.1, 11.3)
542. Ljunggren T., Arkiv Mat. Astron. Fysik, **36A** (14) (1948). (3.6)
543. Lomsadze Yu. M., Khimich I. V., Shuba J. M., Nucl. Phys., **67**, 631 (1965). (12)
544. Lovelace C., в книге Strong Interactions and High Energy Physics, ed. R. G. Moorhouse, London, 1964, p. 437. (17.4.3)
545. Lovelace C., Phys. Rev., **135B**, 1225 (1964). (7.2.4, 9.1.1, 17.4.3)
546. Low F. E., Phys. Rev., **97**, 1392 (1955). (7.2.2)
547. Low F. E., в книге Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Lecture Notes, 1959, p. 3. (6, 7)
548. Lozano J. M., Moshinsky M., Proc. Intern. Conf. on High Energy Physics (Rochester 1960), New York, 1960, p. 271. (19.2)
549. Lu P., Fradkin D. M., Good R. H., Nucl. Phys., **34**, 581 (1964). (18.2)
550. Lüders G., Zs. Naturforsch., **10a**, 581 (1955). (12.1.3, 12.2)
551. Luming M., Phys. Rev., **136B**, 1120 (1964). (17.1)
552. Luming M., Predazzi E., Preprint (1966). (14.6)
553. Lynch P. J., Carlson B. C., Journ. Math. Phys., **3**, 440 (1962). (18.3)
554. Ma S. R., Phys. Rev., **91**, 392 (1953). (6)
555. MacDonald J. K. L., Phys. Rev., **43**, 830 (1933). (11.3)
556. MacDonald W. M., Nucl. Phys., **54**, 393; **56**, 636, 647 (1964). (16.5)
557. McDowell M. R. C., Lectures on Ion-Atom Collisions, Natl. Bur. Standards Techn. Note 185, 1963. (16)

558. McDowell M.R.C., Atomic Collision Processes, Amsterdam, 1964. (16)
559. Macfarlane A. J., Nucl. Phys., **38**, 504 (1962). (17.4)
560. MacGregor M. H., Arndt R. A., Phys. Rev., **139B**, 362 (1965). (20.1)
561. McKinley W. A., Feshbach H., Phys. Rev., **74**, 1759 (1948). (9.1.2)
562. McMaster W. H., Rev. Mod. Phys., **33**, 8 (1961). (8.3.2)
563. McMillan M., Nuovo Cimento, **32**, 919 (1964). (17.4.3)
564. McWeeny R., Rev. Mod. Phys., **32**, 335 (1960). (8.3.1)
565. Mahaux C., Nucl. Phys., **68**, 481, **71**, 241 (1965). (16.5)
566. Mahaux C., Weidenmüller H. A., Ann. of Phys., **32**, 259 (1965). (16.5)
567. Mandel L., Wolf E., Phys. Rev. Lett., **10**, 276 (1963). (4.3, 8.3.1)
568. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965). (4.3)
569. Mandelstam S., Phys. Rev., **112**, 1344 (1958). (Имеется перевод в сб. «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960.) (13.4)
570. Mandelstam S., Phys. Rev., **140**, 375 (1965). (17.4.3)
571. Manning I., Journ. Math. Phys., **5**, 1223 (1964). (9.3, 12.1.2)
572. Manning I., Phys. Rev., **139**, 495; **142**, 1262 (1965). (9.1)
573. Mapleton R., Phys. Rev., **96**, 415 (1954). (7.2.2)
574. Marshak R. E., Phys. Rev., **71**, 688 (1947). (11.3)
575. Martin A., Compt. Rend., **243**, 22 (1956). (12.1.3)
576. Martin A., Nuovo Cimento, **7**, 607 (1958). (12.1.3)
577. Martin A., Nuovo Cimento, **14**, 403 (1959). (14.3)
578. Martin A., Nuovo Cimento, **15**, 99 (1960). (14.5)
579. Martin A., Nuovo Cimento, **23**, 641 (1962). (12.3)
580. Martin A., в книге Progress in Elementary Particle and Cosmic Ray Physics, ed. J. G. Wilson, S. A. Wouthuysen, vol. 8, New York, 1965, p. 1. (12.3)
581. Martin A., Targonski G., Nuovo Cimento, **20**, 1182 (1961). (20.3)
582. Massey H. S. W., Proc. Roy. Soc., **A129**, 616 (1930). (16)
583. Massey H. S. W., Rev. Mod. Phys., **28**, 199 (1956); см. также Handbuch der Physik, Bd. 36, Berlin, 1956, S. 285. (9.1.3)
584. Massey H. S. W., в книге Handbuch der Physik, Bd. 36, Berlin, 1956, S. 307. (16)
585. Massey H. S. W., Вурхор Е. H. S., Electronic and Ionic Impact Phenomena, Fair Lawn, N.J., 1952. (Имеется перевод: Г. Мессини, Е. Бархон, Электронные и ионные столкновения, ИЛ, 1958.) (16)
586. Massey H. S. W., Mohr C. B. S., Proc. Roy. Soc., **A135**, 258 (1932). (16)
587. Massey H. S. W., Moiseiwitch B. L., Proc. Roy. Soc., **A205**, 483 (1951). (11.3, 17.4)
588. Matthews P. T., Salam A., Phys. Rev., **115**, 1079 (1959). (19.2)
589. Matthews P. T., Salam A., Nuovo Cimento, **13**, 381 (1959). (12.2)
590. Meetz K., Journ. Math. Phys., **3**, 690 (1961). (7.3, 9.1.1, 10.3.1)
591. Meetz K., Nuovo Cimento, **34**, 690 (1964). (12.4)
592. Meixner J., Math. Zs., **36**, 677 (1933). (7.1.1)
593. Meixner J., Zs. Phys., **90**, 312 (1934). (7.1.1)
594. Meixner J., Ann. d. Phys., **29**, 97 (1937). (7.1.1)
595. Meyerhof W. E., Phys. Rev., **128**, 2312 (1962). (17.2)
596. Meyerhof W. E., Phys. Rev., **129**, 692 (1963). (17.2)
597. Mie G., Ann. Phys., **25**, 377 (1908). (2.4)
598. Miller J. C. P., The Airy Integral, Mathematical Tables, pt.-vol. B, New York, 1946. (3.6)
599. Milne W. E., Phys. Rev., **35**, 864 (1930). (12.1.2)
600. Mishima N., Progr. Theor. Phys., **34**, 74 (1965). (17.4.3)
601. Mishima N., Yamazaki M., Progr. Theor. Phys., **34**, 284 (1965). (17.4.3)
602. Misra B., Speiser D., Targonski G., Helv. Phys. Acta, **36**, 963 (1963). (7.3)
603. Mitra A. N., Phys. Rev., **123**, 1892 (1961). (10.3.2)
604. Mitra A. N., Bhasin V. S., Phys. Rev., **131**, 1265 (1963). (17.4)
605. Middleman M. H., Ann. of Phys., **28**, 430 (1964). (16.3)
606. Мое М., Saxon D. S., Phys. Rev., **111**, 950 (1958). (11.3)
607. Mohan G., Nuovo Cimento, **13**, 1065 (1959). (16.3)
608. Moiseiwitch B. L., в книге «Atomic and Molecular Processes», ed. D. R. Bates, New York, 1962. (Имеется перевод: Атомные и молекулярные процессы, под ред. Д. Бейтса, изд-во «Мир», 1964.)
609. Møller C., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **23** (1) (1945); см. также [734]. (6.3, 6.4, 7, 8.1, 8.2)
610. Møller C., Kgl. Danske Videnskab. Selskab, Mat.-fys. Medd., **22** (19) (1946). (6.3, 6.4, 7, 12.1.3)
611. Molière G., Zs. Naturforsch., **2a**, 133 (1947). (18.3)
612. Molière G., Zs. Naturforsch., **3a**, 78 (1948). (18.3)
613. Montroll E. W., Greenberg J. M., Proc. Symp. Appl. Math., **5**, 103 (1954) (18.3)
614. Morse P. M., Allis W. P., Phys. Rev., **44**, 269 (1933). (16.3)

615. Morse P. M., Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics*, New York, 1953. (Имеется перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 1, 2, ИЛ, 1958—1959.) (3. Пр., 4.1.2, 15.1)
616. Moses H. E., *Phys. Rev.*, **91**, 185 (1953). (16.3)
617. Moses H. E., *Phys. Rev.*, **92**, 817 (1953). (11.3)
618. Moses H. E., *Nuovo Cimento*, **1**, 103 (1955). (6.7.3)
619. Moses H. E., *Phys. Rev.*, **102**, 559 (1956). (20.2)
620. Moses H. E., *Nuovo Cimento Suppl.*, **5**, 120, 144 (1957). (11.3)
621. Moses H. E., *Journ. Math. Phys.*, **5**, 833 (1964). (12.1.2)
622. Moses H. E., Tuan S. F., *Nuovo Cimento*, **13**, 197 (1959). (14.7)
623. Moshinsky M., *Phys. Rev.*, **81**, 347 (1951). (17.3)
624. Moshinsky M., *Phys. Rev.*, **84**, 525 (1951). (19.2)
625. Mott N. F., *Proc. Roy. Soc.*, **A124**, 425 (1929). (10.1.2)
626. Mott N. F., *Proc. Roy. Soc.*, **A126**, 259 (1930). (14.6)
627. Mott N. F., *Proc. Roy. Soc.*, **A135**, 429 (1932). (10.1.2)
628. Mott N. F., Massey H. S. W., *The Theory of Atomic Collisions*, Oxford, 1949. (Имеется перевод 2-го изд.: Н. Мотт, Г. Мессси, *Теория атомных столкновений*, ИЛ, 1951; готовится перевод 3-го изд.) (7, 16)
629. Motz J. W., Olsen H., Koch H. W., *Rev. Mod. Phys.*, **36**, 88 (1964). (16)
630. Muldowney J. S., *Nuovo Cimento*, **35**, 1138 (1965). (13.1)
631. Munczek H., *Nuovo Cimento*, **29**, 1175 (1963). (11.1)
632. Munczek H., *Phys. Lett.*, **13**, 92 (1964). (17.1)
633. Munczek H., Pignotti A., *Phys. Lett.*, **16**, 198 (1965). (17.1)
634. Nataf R., Cornille H., *Journ. Phys. Radium*, **24**, 591 (1963). (12.1.4)
635. Nath P., Shaw G. L., *Phys. Rev.*, **138B**, 702 (1965). (17)
636. Nath P., Shaw G. L., *Phys. Rev.*, **137B**, 711 (1965). (17.1)
637. Nath P., Srivastava Y. N., *Phys. Rev.*, **138B**, 404 (1965). (16.5)
638. Nauenberg M., Nearing J. C., *Phys. Rev. Lett.*, **12**, 63 (1964). (17.1)
639. Nauenberg M., Pais A., *Phys. Rev.*, **123**, 1058 (1961). (17.2)
640. Nauenberg M., Pais A., *Phys. Rev.*, **126**, 360 (1962). (17.2)
641. Newton R. G., *Phys. Rev.*, **100**, 412 (1955). (12.2, 15.2, 20.2)
642. Newton R. G., *Phys. Rev.*, **101**, 1588 (1956). (14.7.1, 20.2, 20.2.2)
643. Newton R. G., *Phys. Rev.*, **105**, 763, **107**, 1025 (1957). (14.7)
644. Newton R. G., *Ann. of Phys.*, **4**, 29 (1958). (16.3, 16.5, 17.1, 17.2)
645. Newton R. G., *Phys. Rev.*, **114**, 1611 (1959). (12.2, 17.2.3)
646. Newton R. G., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 319 (1960); см. также [734]. (12.1, 12.2, 15.2, 20.2)
647. Newton R. G., *Journ. Math. Phys.*, **2**, 188 (1961). (9.3, 17.1, 17.3)
648. Newton R. G., *Ann. of Phys.*, **14**, 333 (1961). (19.2)
649. Newton R. G., *Journ. Math. Phys.*, **3**, 75 (1962). (20.3)
650. Newton R. G., *Journ. Math. Phys.*, **3**, 867, **4**, 1342 (1962). (13.3)
651. Newton R. G., *Nuovo Cimento*, **29**, 400 (1963). (17.1)
652. Newton R. G., *Phys. Lett.*, **4**, 11 (1963). (9.4, 17.2)
653. Newton R. G., *The Complex j -plane*, New York, 1964. (13.1, 15.2)
654. Newton R. G., в книге: 1965 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, New York, 1966. (17.4.3)
655. Newton R. G., Fonda L., *Ann. of Phys.*, **9**, 416 (1960). (17.2)
656. Newton R. G., Fulton T., *Phys. Rev.*, **107**, 1103 (1957). (15.2)
657. Newton R. G., Jost R., *Nuovo Cimento*, **1**, 590 (1955). (15.2, 20.2)
658. Nigam B. P., Sundaresan M. K., Ta-You Wu, *Phys. Rev.*, **115**, 491 (1959). (18.3)
659. Noyes H. P., Bailey D. S., Arndt R. A., MacGregor M. H., *Phys. Rev.*, **139B**, 380 (1965). (20.1)
660. Nussenzweig H. M., *Nucl. Phys.*, **11**, 499 (1959). (11.2.2)
661. Nussenzweig H. M., *Nuovo Cimento*, **20**, 694 (1961). (19.2)
662. Nussenzweig H. M., *Analytic Properties of Nonrelativistic Scattering Amplitudes*, Mexico, D.F., 1962. (12)
663. Nussenzweig H. M., *Ann. of Phys.*, **34**, 23 (1965). (3.8)
664. Nutt G. L., *Phys. Rev.*, **135A**, 345 (1964). (16)
665. Ohmura T., *Progr. Theor. Phys.*, **16**, 231 (1956). (20.2)
666. Ohmura T., *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **29**, 108 (1964). (19.2)
667. Olsson P. O., *Arkiv Fys.*, **4**, 217 (1952). (12.1.2)
668. Omnes R., *Nuovo Cimento*, **8**, 316 (1958). (12.1.2)
669. Omnes R., *Phys. Rev.*, **134B**, 1358 (1964). (17.4.3)
670. Omnes R., Alessandrini V. A., *Phys. Rev.*, **136B**, 1137 (1964). (17.4.3)
671. Omnes R., Froissart M., *Mandelstam Theory and Regge Poles*, New York, 1963. (13.1)
672. Oppenheimer J. R., *Zs. Phys.*, **43**, 413 (1927). (14.6)
673. Oppenheimer J. R., *Phys. Rev.*, **32**, 361 (1928). (16.3)
674. Pais A., Wu T. T., *Phys. Rev.*, **134B**, 1303 (1964). (12.4)

675. Pais A., Wu T. T., Journ. Math. Phys., **5**, 799 (1964). (12.4)
 676. Parzen G., Phys. Rev., **80**, 261, 355 (1950). (18.3)
 677. Parzen G., Phys. Rev., **81**, 808 (1951). (18.3)
 678. Pearce W. A., Progr. Theor. Phys., **32**, 180 (1964). (20.2)
 679. Peek J. M., Phys. Rev., **134A**, 877 (1964). (16)
 680. Peierls R. E., Proc. Roy. Soc., **A253**, 16 (1959). (14.3, 16.5, 17.1.3)
 681. Percival I. C., Proc. Phys. Soc., **A70**, 494 (1957). (11.3)
 682. Percival I. C., Phys. Rev., **119**, 159 (1960). (11.3)
 683. Percival I. C., Proc. Phys. Soc., **80**, 1290 (1962). (20.2.2)
 684. Percival I. C., Proc. Phys. Soc., **82**, 528 (1963). (20.2.2)
 685. Petráš M., Czechoslov. Journ. Phys., **B12**, 87 (1962). (20.2).
 686. Petráš M., Nuovo Cimento, **31**, 247 (1964). (12.1.2)
 687. Petráš M., Czechoslov. Journ. Phys., **B14**, 895 (1964). (12.1.2)
 688. Petráš M., Czechoslov. Journ. Phys., **B15**, 627 (1965). (12.1.2)
 689. Pflüger A., Comm. Math. Helv., **16**, 1 (1943). (12.1)
 690. Plemelj J., Monatsh. Math. Phys., **15**, 93 (1940). (9.3)
 691. Poincaré H., Acta Math., **4**, 201 (1884). (12.1)
 692. Poincaré H., Acta Math., **33**, 57 (1910); см. также H. Poincaré, Oeuvres, vol. 3, p. 556, Paris, 1934, однако дата там указана неправильно. (9.3)
 693. Polkinghorne J. C., Proc. Camb. Phil. Soc., **54**, 560 (1958). (12.1.3)
 694. Prats F., Toll J. S., Phys. Rev., **113**, 363 (1959). (20.2)
 695. Predazzi E., Ann. of Phys., **36**, 228, 250 (1966). (18.3)
 696. Predazzi E., Regge T., Nuovo Cimento, **24**, 518 (1962). (12.4)
 697. Prosser R. T., Journ. Math. Phys., **5**, 708 (1964). (6.7.3)
 698. Purcell E. M., Nature, **178**, 1449 (1956). (4.3)
 699. Rajaraman R., Susskind L., Nuovo Cimento, **38**, 1201 (1965). (16.5)
 700. Rarita W., Schwinger J., Phys. Rev., **59**, 436 (1941). (15.2)
 701. Rayleigh, Lord (J. W. Strutt), Phil. Mag., **41**, 107, 274, 447 (1871). (3.1)
 702. Rayleigh, Lord, Phil Mag., **12**, 81 (1881). (3.1.2)
 703. Rédei L. B., Journ. Math. Phys., **6**, 487 (1965), Arkiv Fys., **29**, 1, 11 (1965). (6)
 704. Redmond P. J., Journ. Math. Phys., **5**, 1547 (1964). (20.3)
 705. Regge T., Nuovo Cimento, **8**, 671 (1958). (12.1.4)
 706. Regge T., Nuovo Cimento, **9**, 295 (1958). (12.1.1)
 707. Regge T., Nuovo Cimento, **14**, 951 (1959). (12.1.1, 12.3, 13.3, 13.4, 20.3)
 708. Regge T., Nuovo Cimento, **18**, 947 (1960). (Имеется перевод в сб. «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963, стр. 55.) (12.1.1, 12.1.4, 13.3)
 709. Regge T., в книге Theoretical Physics, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963. (12)
 710. Riesz F., Sz Nagy B., Functional Analysis, Ungar, New York, 1955. (Имеется перевод: Ф. Рисс, Б. Секфальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, М., 1954.) (7.3)
 711. Risberg V., Arch. Mat. Naturvidenskab, **53**, 1 (1956). (11.3)
 712. Roberts M. J., Proc. Phys. Soc., **82**, 594 (1963). (20.2.2)
 713. Rodberg L. S., Phys. Rev., **124**, 210 (1961). (16.5)
 714. Rollnik H., Zs. Phys., **145**, 639, 654 (1956). (7, 12.1.4, 16.5)
 715. Roscoe R., Phil. Mag., **26**, 32 (1938). (16)
 716. Roscoe R., Phil. Mag., **31**, 349 (1941). (16)
 717. Rose M. E., Multipole Fields, New York, 1955. (Имеется перевод: М. Е. Роуз, Поля мультиполей, ИЛ, 1957.) (2.1.3, 2.1.4)
 718. Rose M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, New York, 1957. (2.1.4, 15.1, 17.4.3)
 719. Rose M. E., Relativistic Electron Theory, New York, 1961. (8.3.2, 14.6)
 720. Rosen M., Yennie D. R., Journ. Math. Phys., **5**, 1505 (1964). (18.2)
 721. Rosenberg L., Phys. Rev., **131**, 874 (1963). (17.4.3, 18.4)
 722. Rosenberg L., Phys. Rev., **134B**, 937 (1964). (9.1.3)
 723. Rosenberg L., Phys. Rev., **135B**, 715 (1964). (17.4.3, 18.4)
 724. Rosenberg L., Phys. Rev., **138B**, 1343 (1965). (11.3)
 725. Rosenberg L., Spruch L., Phys. Rev., **120**, 474 (1960). (11.3)
 726. Rosenberg L., Spruch L., Phys. Rev., **121**, 1720 (1961). (11.3)
 727. Rosenberg L., Spruch L., Phys. Rev., **125**, 1407 (1962). (11.3)
 728. Rosenberg L., Spruch L., O'Malley T. F., Phys. Rev., **118**, 184 (1960). (11.3)
 729. Rosenberg L., Spruch L., O'Malley T. F., Phys. Rev., **119**, 164 (1960). (11.3)
 730. Rosenblum M., Pacific Journ. Math., **7**, 997 (1957). (7.3)
 731. Rosenfeld L., Nucl. Phys., **26**, 594 (1961). (16.5)
 732. Roskies R., Ph. D. thesis, Princeton, Oak Ridge National Laboratory Report 3914, 1966. (13.1, 17.2, 17.4.3)
 733. Quantum Scattering Theory, ed. M. H. Ross, Bloomington, Ind., 1963. (6)

735. Ross M. H., Phys. Rev. Lett., **11**, 450, 567 (1963). (17.1)
 736. Ross M. H., Shaw G. L., Ann. of Phys., **9**, 391 (1960). (17.3)
 737. Ross M. H., Shaw G. L., Ann. of Phys., **13**, 147 (1961). (17.3)
 738. Rotenberg M., Ann. of Phys., **21**, 579 (1963). (9.1.1.)
 739. Rutherford E., Phill Mag., **21**, 669 (1911). (5.3)
 740. Rys F., Helv. Phys. Acta, **38**, 457 (1965). (6.7)
 741. Sabatier P. C., Nuovo Cimento, **37**, 1180 (1965). (18.2)
 742. Sabatier P. C., Journ. Math. Phys., 1966. (20.3.1)
 743. Sachs R. G., Goepfert-Mayer M., Phys. Rev., **53**, 991 (1938). (10.3.3)
 744. Salpeter E. E., Proc. Phys. Soc., **63A**, 1295 (1950). (16)
 745. Sano M., Yoshida S., Teresawa T., Nucl. Phys., **6**, 20 (1958). (16.5)
 746. Sartori L., Journ. Math. Phys., **4**, 1408 (1963). (12.1.4)
 747. Sasakawa T., Progr. Theor. Phys., Suppl., **27**, 1 (1963). (7)
 748. Sasakawa T., Progr. Theor. Phys., **31**, 787; **32**, 565 (1964). (17.1)
 749. Sasakawa T., Tsukamoto T., Progr. Theor. Phys., **34**, 442 (1965). (17.1)
 750. Saxon D. S., Schiff L. I., Nuovo Cimento, **6**, 614 (1957). (18.3)
 751. Scadron M., Weinberg S., Phys. Rev., **133B**, 1589 (1964). (9.2)
 752. Scadron M., Weinberg S., Wright J. A., Phys. Rev., **135B**, 202 (1964). (9.1.1)
 753. Scarf F. L., Phys. Rev., **109**, 2170 (1958). (12.4)
 754. Schey H. M., Schwartz J. L., Phys. Rev., **139B**, 1428 (1965). (11.2)
 755. Schiff L. I., Quantum Mechanics, 2d ed., New York, 1955. (Имеется перевод: Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957.) (6, 8.1.3, 18.2.1)
 756. Schiff L. I., Phys. Rev., **103**, 443 (1956). (18.3)
 757. Schiff L. I., Phys. Rev., **104**, 1481 (1956). (3.4, 18.3)
 758. Schönberg M., Nuovo Cimento, **8**, 651 (1951). (7.1.1)
 759. Schwartz J., Phys. Rev., **124**, 1468 (1961). (16)
 760. Schweber S. S., An Introduction to Quantum Field Theory, New York, 1961. (Имеется перевод: С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.) (6, 8.1)
 761. Schwinger J., Harvard University lectures, не опубликовано, 1947. (11.3)
 762. Schwinger J., Phys. Rev., **72**, 742 (1947). (11.2.2, 11.3)
 763. Schwinger J., Phys. Rev., **73**, 407 (1948). (15.1)
 764. Schwinger J., Phys. Rev., **74**, 1439 (1948). (Имеется перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.) (6.4, 6.5)
 765. Schwinger J., Phys. Rev., **78**, 135 (1950). (11.3)
 766. Schwinger J., U. S. Atomic Energy Commission Rept. NYO-3071, 1952; см. также Quantum Theory of Angular Momentum, eds. L. C. Biedenharn, H. van Dam, New York, 1965. (15.1)
 767. Schwinger J., Phys. Rev., **94**, 1362 (1954). (9.2)
 768. Schwinger J., Ann. of Phys., **9**, 169 (1960). (19.2)
 769. Schwinger J., Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., **47**, 122 (1961). (9.1.1, 12.1.4)
 770. Schwinger J., Journ. Math. Phys., **5**, 1606 (1964). (14.6)
 771. Seaton M. J., в книге «Atomic and Molecular Processes», ed. D. R. Bates, New York, 1962. (Имеется перевод: «Атомные и молекулярные процессы», под ред. Д. Бейтса, изд-во «Мир», 1964.) (16)
 772. Segall B., Phys. Rev., **83**, 1247 (1951). (18.4)
 773. Senior T. B. A., Goodrich R. F., Proc. Inst. Electr. Eng., **111**, 907 (1964). (3.8)
 774. Serber R., Phys. Rev. Lett., **10**, 357 (1963). (18.3)
 775. Serber R., Rev. Mod. Phys., **36**, 649 (1964). (18.3)
 776. Shaw G. L., Ross M. H., Phys. Rev., **126**, 806, 814 (1962). (17.3)
 777. Siegert A. J. F., Phys. Rev., **56**, 750 (1939). (16.5)
 778. Simon A., Phys. Rev., **92**, 1050; **93**, 1435 (1953). (15.1)
 779. Simon A., Welton T. A., Phys. Rev., **90**, 1036; **93**, 1435 (1953), (15.1)
 780. Smith F. T., Phys. Rev., **118**, 349; **119**, 2098 (1960). (19.2)
 781. Smith F. T., Journ. Math. Phys., **3**, 735 (1962). (17.4.3)
 782. Smithies F., Integral Equations, New York, 1958. (9.3)
 783. Snyder H. S., Phys. Rev., **83**, 1154 (1951). (6.7.3)
 784. Sommerfeld A., Phys. Zs., **11**, 1057 (1910). (4.1.2, 7.1.1)
 785. Sommerfeld A., Jahresber. deut. Math. Ver., **21**, 309 (1912). (4.1.2, 7.1.1)
 786. Sommerfeld A., Ann. Phys., **11**, 257 (1931). (7.1.1)
 787. Sommerfeld A., Atomic Structure and Spectral Lines, New York, 1933. (Имеется перевод: А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, М., 1956.) (5.3)
 788. Sommerfeld A., Partial Differential Equations of Physics, New York, 1949. (Имеется перевод: А. Зоммерфельд, Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1950.) (3.8, 4.1.2)
 789. Spector R. M., Journ. Math. Phys., **5**, 1185 (1964). (12.4, 14)
 790. Springer G., Introduction to Riemann Surfaces, Reading, Mass., 1957. (Имеется перевод: Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, 1960.) (17.1)

791. Spruch L., Phys. Rev., **109**, 2149 (1958). (11.3)
792. Spruch L., в книге Lectures in Theoretical Physics, ed. O. O. Brittin, W. E. Downs, O. O. Downs, vol. 4, New York, 1962. (11.3)
793. Spruch L., Kelly M., Phys. Rev., **109**, 2144 (1958). (11.3)
794. Spruch L., O'Malley T. F., Rosenberg L., Phys. Rev. Lett., **5**, 375 (1960). (11.2.2)
795. Spruch L., O'Malley T. F., Rosenberg L., Phys. Rev., **125**, 1300 (1962). (11.2.2)
796. Spruch L., Rosenberg L., Phys. Rev., **116**, 1034 (1959). (11.3)
797. Spruch L., Rosenberg L., Phys. Rev., **117**, 143, 1095 (1960). (11.3)
798. Spruch L., Rosenberg L., Journ. Appl. Phys., **31**, 2104 (1960). (11.3)
799. Squires E. J., Complex Angular Momenta and Particle Physics, New York, 1963. (13.1)
800. Squires E. J., Nuovo Cimento, **34**, 1751 (1964). (17.1)
801. Stokes G. C., Camb. Phil. Soc. Trans., **9**, 399 (1852). (1.2)
802. Stone J. M., Radiation and Optics, New York, 1963. (ч. 1)
803. Stratton J. A., Electromagnetic Theory, New York, 1941. (Имеется перевод: Дж. А. Стрэттон, Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.) (4.1.1)
804. Stueckelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, **17**, 3 (1943). (6.4)
805. Stueckelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, **18**, 195 (1945). (6.4)
806. Stueckelberg E. C. G., Helv. Phys. Acta, **19**, 242 (1946). (6.4)
807. Sudarshan E. C. G., Phys. Rev. Lett., **10**, 277 (1963). (4.3, 8.3.1)
808. Sugar R., Blankenbuecher R., Phys. Rev., **136B**, 472 (1965). (17.1)
809. Sunakawa S., Progr. Theor. Phys., **14**, 175 (1955). (6)
810. Sunakawa S., Progr. Theor. Phys., **24**, 963 (1960). (16.2)
811. Suura H., Mimura Y., Kimura T., Progr. Theor. Phys., **7**, 171 (1952). (6.7.3)
812. Swam N. V. V. J., Biedenharn L. C., Phys. Lett., **6**, 315 (1963). (14.6)
813. Swam P., Nature, **187**, 585 (1960); Nucl. Phys., **18**, 245 (1960); **21**, 233 (1960). (9.1.3)
814. Swam P., Nucl. Phys., **27**, 620 (1961). (9.1.3)
815. Swam P., Nucl. Phys., **42**, 134 (1963). (9.1.2)
816. Swam P., Australian Journ. Phys., **16**, 177 (1963). (9.1.3)
817. Swam P., Pearce W. A., Nucl. Phys., **79**, 77 (1966). (20.2)
818. Swift A. R., Nuovo Cimento, **33**, 1119 (1964). (10.3.2)
819. Tadic D., Tuan T. F., Nuovo Cimento, **36**, 463 (1965). (17.4)
820. Takayanagi K., Progr. Theor. Phys., Suppl., **25**, 1 (1963). (16)
821. Takeda G., Watson K. M., Phys. Rev., **97**, 1336 (1955). (16.3.3)
822. Tamarkin J., Ann. Math., **28**, 127 (1926). (9.3)
823. Tani S., Ann. of Phys., **37**, 411, 451 (1966). (9.1.1)
824. Taylor A. E., Introduction to Functional Analysis, Wiley, New York, 1958. (6.7.1, 6.7.2, 7.3)
825. Teichman T., Wigner E. P., Phys. Rev., **87**, 123 (1952). (16.5)
826. Temkin A., Phys. Rev., **107**, 1004 (1957). (16)
827. Temkin A., Phys. Rev., **116**, 358 (1959). (16)
828. Temkin A., Phys. Rev., **126**, 130 (1962). (16)
829. Ter Haar D., Physica, **12**, 500 (1946). (12.1.3)
830. Ter Haar D., в книге Reports on Progress in Physics, ed. A. C. Strickland, London, 1961. (8.3.1)
831. Theis W. R., Zs. Naturforsch., **11a**, 889 (1956). (14.7)
832. Thomas R. G., Phys. Rev., **88**, 1109 (1952). (17.2)
833. Tietz T., Nuovo Cimento, **11**, 126 (1959). (12.4)
834. Tietz T., Nucl. Phys., **44**, 633 (1963). (12.2)
835. Tiktopolous G., Phys. Rev., **138B**, 1550 (1965). (12.4)
836. Tiktopolous G., Treiman S. B., Phys. Rev., **134B**, 844 (1964). (12.4)
837. Tinkham M., Group Theory and Quantum Mechanics, New York, 1964. (17.4.3)
838. Titchmarsh E. C., Theory of Fourier Integrals, Fair Lawn, N.J., 1937. (Имеется перевод: Э. Ч. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.) (4.2.1)
839. Titchmarsh E. C., The Theory of Functions, 2d ed., Fair Lawn, N.J., 1939. (Имеется перевод: Э. Ч. Титчмарш, Теория функций, М., 1951.) (12.1.2, 13.2)
840. Titchmarsh E. C., Eigenfunction Expansion I, Fair Lawn, N.J., 1946. (Имеется перевод: Э. Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. 1, ИЛ, 1960.) (12.1.5)
841. Titulaer U. M., Glauber R. J., Phys. Rev., **140B**, 676 (1965). (4.3, 8.3.1)
842. Titulaer U. M., Glauber R. J., Phys. Rev., **145**, 1041 (1966). (4.3, 8.31)
843. Tobocean W., Phys. Rev., **136B**, 1825 (1965). (9.2)
844. Tolhoek H. A., Rev. Mod. Phys., **28**, 277 (1956). (8.3.2)
845. Toll J. S., Phys. Rev., **104**, 1760 (1956). (4.2.1)
846. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys., **1**, 27 (1946). (Имеется перевод в сб. «Новейшее развитие квантовой электродинамики», ИЛ, 1954.) (6.5)

847. Trainor L. E. H., Ta - You Wu, Phys. Rev., 89, 273 (1953). (16.3.3)
 848. Treiman S. B., Sachs R. G., Phys. Rev., 103, 1545 (1956). (19.3)
 849. Troesch A., Verde M., Helv. Phys. Acta, 24, 39 (1951). (11.3, 17.4)
 850. Tuan T. F., Proc. Roy. Soc., A276, 492 (1963). (17.2)
 851. Tucciarone A., Nuovo Cimento, 41, 204 (1966). (17.4.3)
 852. Turner J. S., Makinson R. E. R., Proc. Phys. Soc., A66, 857, 866 (1953). (11.3)
 853. Underhill J., Proc. Cambr. Phil. Soc., 58, 363 (1962). (13.4, 17.1)
 854. Underhill J., Proc. Cambr. Phil. Soc., 59, 161 (1963). (13.4, 17.1)
 855. Urban P., Wildermuth K., Zs. Naturforsch., 8a, 594 (1953). (9.1)
 856. van de Hulst H. C., Physica, 15, 740 (1949). (1.3)
 857. van de Hulst H. C., Light Scattering by Small Particles, New York, 1957. (Имеется перевод: Г. Хюльст, Рассеяние света малыми частицами, М., 1961.) (1.2, 2.1.5, 3.5, 3.6, 4.1.1)
 858. van der Corput J. G., Comp. Math., 1, 15 (1934). (1.3, 6.7.3)
 859. van der Corput J. G., Compt. Math., 3, 328 (1936). (1.3, 6.7.3)
 860. van der Pol B., Времмер H., Phil. Mag., 24, 141 (1937). (3.6)
 861. van der Waerden B. L., Appl. Sci. Research, B2, 33 (1951). (3. Пр.)
 862. van Hove L., Physica, 21, 901 (1955). (6)
 863. van Hove L., Physica, 22, 343 (1956). (6)
 864. van Каптрен N. G., Phys. Rev., 89, 1072 (1953). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», № 2, 28, 1957.) (4.2.1)
 865. van Каптрен N. G., Phys. Rev., 91, 1267 (1953). (Имеется перевод в сб. «Проблемы современной физики», № 2, 44, 1957.) (10.3.2)
 866. van Winter C., Nucl. Phys., 57, 134 (1964). (16.5)
 867. van Wuyck C. B., Nuovo Cimento, 9, 270 (1958). (8.3.2)
 868. Vaughn M. T., Aaron R., Amado R. D., Phys. Rev., 124, 1258 (1961). (12.1.3)
 869. Verde M., Helv. Phys. Acta, 22, 339 (1949) (11.3, 17.4)
 870. Verde M., Nuovo Cimento, 2, 1001 (1955). (18.3)
 871. Verde M., Nuovo Cimento, 6, 340 (1957). (18.3)
 872. Verde M., Nuovo Cimento, 8, 560 (1958). (18.3)
 873. Verde M., Nucl. Phys., 9, 255 (1958—1959). (20.2)
 874. Verde M., Nuovo Cimento, 28, 547 (1963). (18.3)
 875. Vezzetti D. J., Rubinow S. I., Ann. of Phys., 35, 373 (1965). (18.2)
 876. Vogt E., Wannier G. H., Phys. Rev., 95, 1190 (1954). (5.6, 12.4, 13.1, 14.7)
 877. von Neumann J., Nachr. deut. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., 245, 273 (1927). (8.3.1)
 878. von Neumann J., Proc. Natl. Acad. Sci. U.S., 18, 70 (1932). (16.Пр.)
 879. von Neumann J., Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton, N.J., 1955. (Имеется перевод: Дж. Нейман, Математические основы квантовой механики, М., 1964.) (7.3)
 880. von Wageningen R., Ann. of Phys., 31, 148 (1965). (20.1)
 881. Warnock R. L., Phys. Rev., 131, 1320 (1963). (12.1.3)
 882. Warnock R. L., Nuovo Cimento, 32, 255 (1964). (17.1)
 883. Watanabe S., Rev. Mod. Phys., 27, 26, 40, 179 (1955). (7.2.4)
 884. Watson G. N., Proc. Roy. Soc., A95, 83, 546 (1918). (3.8)
 885. Watson G. N., Bessel Functions, New York, 1958. (Имеется перевод: Дж. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.) (2.2.1, 1.2.3)
 886. Watson K. M., Phys. Rev., 88, 1163 (1952). (17.1)
 887. Watson K. M., Phys. Rev., 89, 575 (1953). (17.4)
 888. Watson K. M., Phys. Rev., 105, 1388 (1957). (17.4)
 889. Weidenmüller H. A., Ann. of Phys., 28, 60; 29, 378 (1964). (16.5, 17.1)
 890. Weidenmüller H. A., Nucl. Phys., 69, 113 (1965). (17.2)
 891. Weinberg S., Phys. Rev., 130, 776 (1963). (9.1.1, 9.2)
 892. Weinberg S., Phys. Rev., 131, 440 (1963). (9.1.1, 9.2, 10.3.3)
 893. Weinberg S., Phys. Rev., 133B, 232 (1964), (7.2.5, 7.3, 9.1.1, 9.2, 17.4.3)
 894. Weinberg S., Journ. Math. Phys., 5, 743 (1964). (9.1.1, 9.2)
 895. Weisskopf V. F., Wigner E. P., Zs. Phys., 63, 54; 65, 18 (1930). (19.2)
 896. Wellner M., Phys. Rev., 118, 875 (1960). (17.3)
 897. Wellner M., Phys. Rev., 132, 1848 (1963). (9.1.1)
 898. Wentzel G., Zs. Phys., 38, 518 (1926). (18.2)
 899. Wentzel G., Zs. Phys., 40, 590 (1926). (14.6)
 900. Wheeler J. A., Phys. Rev., 52, 1107 (1937). (2.2.2, 6.4)
 901. Wheeler J. A., Phys. Rev., 52, 1123 (1937). (12.1.2)
 902. Wheeler J. A., Phys. Rev., 99, 630 (1955). (20.3)
 903. Whittaker E. T., Watson G. N., A Course of Modern Analysis, New York, 1948. (Имеется перевод: Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 1 и 2, М., 1963.) (2.1.1, 11.1.1, 12.3, 13.2, 18.3, 20.3.1)
 904. Wichmann E. H., Woo C. H., Journ. Math. Phys., 2, 178 (1961). (14.6)

905. Wick G. C., *Ann. of Phys.*, **18**, 65 (1962). (17.4)
906. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **70**, 15, 606 (1946). (16.5)
907. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **73**, 1002 (1948). (17.2)
908. Wigner E. P., *Ann. Math.*, **53**, 36 (1951). (9.1.1)
909. Wigner E. P., *Ann. Math.*, **55**, 7 (1952). (9.1.1)
910. Wigner E. P., *Am. Math. Monthly*, **59**, 669 (1952). (9.1.1)
911. Wigner E. P., *Phys. Rev.*, **98**, 145 (1955). (11.2.2, 12.1.3, 12.2)
912. Wigner E. P., *Group Theory*, New York, 1959. (Имеется перевод: Е. Вигнер, Теория групп, ИЛ, 1961.) (2.1.4, 7.1.4, 7.2.4, 9.1.1, 15.1, 17.4.3)
913. Wigner E. P., *Journ. Math. Phys.*, **1**, 409, 414 (1960). (7.2)
914. Wigner E. P., Eisenbud L., *Phys. Rev.*, **72**, 29 (1947). (7.2.4, 16.5)
915. Wigner E. P., von Neumann J., *Ann. Math.*, **59**, 418 (1954). (9.1.1)
916. Wigner E. P., Weisskopf V. F., *Zs. Phys.*, **63**, 62 (1930). (17.3)
917. Wilcox C. H., *Journ. Math. Phys.*, **6**, 611 (1965). (6.7)
918. Wilson H. A., *Phys. Rev.*, **35**, 948 (1930). (12.1.2)
919. Wojtzak L., *Nucl. Phys.*, **48**, 325 (1963). (14.3)
920. Wolfenstein L., *Phys. Rev.*, **75**, 1664 (1949). (15.1)
921. Wolfenstein L., в книге «Annual Review of Nuclear Science», ed. J. G. Beekley, vol. 6, Palo Alto, Calif., 1956, p. 43. (15.1)
922. Wright J. A., *Phys. Rev.*, **139B**, 137 (1965). (12.1.3)
923. Wright J. A., Scadron M., *Nuovo Cimento*, **34**, 1571 (1964). (9.1.1)
924. Wu T. T., *Phys. Rev.*, **136B**, 1176 (1964). (12.4)
925. Wu T. Y., *Phys. Rev.*, **87**, 1012 (1952). (16.3)
926. Wu T. Y., *Can. Journ. Phys.*, **34**, 179 (1956). (16.3)
927. Wu T. Y., Ohmura T., *Quantum Theory of Scattering*, England Cliffs, N.J., 1962. (Имеется перевод: Т. Ю. Ву, Т. Ом ура, Квантовая теория рассеяния, М., 1969.) (6, 7)
928. Yang C. N., *Phys. Rev.*, **74**, 764 (1948). (15.1)
929. Yang C. N., *Elementary Particles*, Princeton, N.J., 1961. (Имеется перевод: Ч. Янг, Элементарные частицы, М., 1963.) (3.7)
930. Yennie D. R., Boos F. L., Ravenhall D. G., *Phys. Rev.*, **137B**, 882 (1965). (18.2)
931. Yosida K., *Functional Analysis*, Berlin, 1965. (Имеется перевод: К. Иосида, Функциональный анализ, изд-во «Мир», 1967.) (7.3)
932. Young L. A., *Phys. Rev.*, **38**, 1612 (1932). (12.1.2)
933. Yukawa H., *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan*, **17**, 48 (1935). (10.3.3)
934. Zetach C., *Nuovo Cimento*, **33**, 939 (1964). (12.1.2)
935. Zetach C., *Phys. Rev.*, **133B**, 1201 (1964). (17.4)
936. Zetach C., Glauber R. J., *Phys. Rev.*, **101**, 118 (1956). (16)
937. Zetach C., Klein A., *Nuovo Cimento*, **10**, 1078 (1958). (9.1.1, 10.3.1)
938. Zumino B., N. Y. Univ. Inst. Math. Sci. Research Rept. CX-23, 1956. (16.5)
939. Zupančič S., *Rev. Mod. Phys.*, **37**, 330 (1965). (17.4.3)
940. Zwanziger D., *Phys. Rev.*, **136B**, 558 (1964). (8.3.2)
941. Агранович З. С., Марченко В. А., *ДАН СССР*, **113**, 951 (1957). (20.2)
942. Агранович З. С., Марченко В. А., *Усп. матем. наук*, **12** (1), **73**, 143 (1957). (20.2)
943. Агранович З. С., Марченко В. А., *ДАН СССР*, **118**, 1055 (1958). (20.2)
944. Агранович З. С., Марченко В. А., *Обратная задача рассеяния*, М., 1963. (20.2)
945. Арбузов Б. А., Филиппов А. Т., *Phys. Lett.*, **13**, 95 (1965). (12.4)
946. Арбузов Б. А., Филиппов А. Т., Хрусталева О. А., *Phys. Lett.*, **8**, 205 (1964). (12.4)
947. Ахмезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, М.—Л., 1961. (7.3)
948. Бабиков В. В., *Ядерная физика*, **1**, 369 (1965). (12.1.2)
949. Базь А. И., *ЖЭТФ*, **33**, 923 (1957). (17.2)
950. Базь А. И., *Advances in Phys.* (Phyl. Mag. Suppl.), **8**, 349 (1959). (17.2)
951. Базь А. И., *ЖЭТФ*, **40**, 1511 (1961). (17.2)
952. Базь А. И., *Nucl. Phys.*, **51**, 145 (1964). (17.4.3)
953. Базь А. И., Окунь Л. Б., *ЖЭТФ*, **35**, 757 (1958). (17.2)
954. Базь А. И., Пузиков Л. Д., Смородинский Я. А., *ЖЭТФ*, **42**, 1249 (1962). (17.2.3)
955. Березанский Ю. М., *ДАН СССР*, **93**, 591 (1953). (20.2)
956. Березанский Ю. М., *ДАН СССР*, **105**, 197 (1955). (20.2)
957. Березанский Ю. М., *Труды Моск. матем. общества*, **7**, 2 (1958). (20.2)
958. Бирман М. Ш., *Вестник Ленингр. ун-в.*, **16**, 163 (1961). (12.1.4)
959. Блох А. Ш., *ДАН СССР*, **92**, 209 (1953). (20.2)
960. Буслаев В. С., *ДАН СССР*, **143**, 1067 (1962). (20.2.2)
961. Буслаев В. С., Фаддеев Л. Д., *ДАН СССР*, **132**, 13 (1960). (20.2.2)
962. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., *ДАН СССР*, **77**, 557 (1951). (20.2)

963. Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Изв. АН СССР, **15**, 309 (1951). (20.2)
 964. Гольдман И. И., Мигдал А. Б., ЖЭТФ, **28**, 394 (1954). (18.2, 18.3)
 965. Горшков В. Г., ЖЭТФ, **47**, 352, 1984 (1964). (14.6)
 966. Гохберг И. С., Крейн М. Г., Усп. матем. наук, **13** (2), 80 (1958). (20.2)
 967. Грибов В. Н., ЖЭТФ, **42**, 1260 (1962). (13.3)
 968. Дамбург Р. Я., Петеркоп Р. К., ЖЭТФ, **47**, 1602 (1964). (16)
 969. Данилов Г. С., ЖЭТФ, **40**, 498 (1961). (17.4)
 970. Зельдович Я. Б., ЖЭТФ, **39**, 779 (1960). (19.2)
 971. Иванов Г. К., Саясов Ю. С., ЖЭТФ, **45**, 1456 (1963). (18.4)
 972. Клепиков Н. П., ЖЭТФ, **41**, 1187 (1962). (20.1)
 973. Крейн М. Г., ДАН СССР, **88**, 405 (1953). (20.2)
 974. Крейн М. Г., ДАН СССР, **93**, 617 (1953). (20.2)
 975. Крейн М. Г., ДАН СССР, **94**, 987 (1953). (20.2)
 976. Крейн М. Г., ДАН СССР, **97**, 21 (1954). (20.2)
 977. Крейн М. Г., ДАН СССР, **105**, 433 (1955). (20.2)
 978. Крейн М. Г., ДАН СССР, **111**, 1167 (1956). (20.2)
 979. Крейн М. Г., ДАН СССР, **113**, 970 (1957). (20.2)
 980. Крейн М. Г., Усп. матем. наук, **13** (5), 83 (1958). (20.2)
 981. Ладженская О. А., Фаддеев Л. Д., ДАН СССР, **120**, 1187 (1958). (7.3)
 982. Левин Б. Я., ДАН СССР, **106**, 187 (1956). (20.2)
 983. Левитан Б. М., Усп. матем. наук, **11** (6), 72, 117 (1956). (20.2)
 984. Лукьянов А. В., Теплов И. В., Акимова М. К., Таблицы кулоновских волновых функций, М., 1965. (14.6)
 985. Мамаксалисов В. И., ЖЭТФ, **25**, 36 (1953). (17.2)
 986. Марченко В. А., ДАН СССР, **72**, 457 (1950). (20.2)
 987. Марченко В. А., Труды Моск. матем. общества, **1**, 327 (1952). (20.2)
 988. Марченко В. А., Труды Моск. матем. общества, **2**, 3 (1953). (20.2)
 989. Марченко В. А., ДАН СССР, **104**, 695 (1955). (20.2)
 990. Марченко В. А., Матем. сборник, **52**, 739 (1960). (20.2)
 991. Ментковский Ю. Л., Укр. физич. журн., **7**, 593, 966 (1962). (14.6)
 992. Ментковский Ю. Л., Укр. физич. журн., **8**, 17, 144 (1963). (14.6)
 993. Ментковский Ю. Л., Укр. физич. журн., **9**, 1169 (1964). (14.6)
 994. Ментковский Ю. Л., Nucl. Phys., **65**, 673 (1965). (14.6)
 995. Нейгауз М. Г., ДАН СССР, **102**, 25 (1955). (20.2)
 996. Очкур В. И., ЖЭТФ, **45**, 734 (1963). (16)
 997. Повзнер А. Я., Матем. сборник, **32** (74), 109 (1953). (7.3)
 998. Повзнер А. Я., ДАН СССР, **104**, 360 (1955). (7.3)
 999. Полуэктов И., Пресняков Л., Соболевман И., ЖЭТФ, **47**, 181 (1964). (16.3)
 1000. Ритус В. И., ЖЭТФ, **40**, 352 (1961), (17.4)
 1001. Скорняков Г. В., ЖЭТФ, **31**, 1046 (1956). (17.4.3)
 1002. Скорняков Г. В., Тер-Мартиросян К. А., ЖЭТФ, **31**, 775 (1956). (17.4.3)
 1003. Смирнов Б. М., ЖЭТФ, **45**, 155 (1963). (16)
 1004. Станкевич И. В., ДАН СССР, **144**, 279 (1962). (6.7)
 1005. Тамм И. Е., ЖЭТФ, **18**, 337 (1948). (11.3)
 1006. Тамм И. Е., ЖЭТФ, **19**, 74 (1949). (11.3)
 1007. Фаддеев Л. Д., Вестник Ленингр. ун-в., **11**, 126 (1956). (20.2)
 1008. Фаддеев Л. Д., Вестник Ленингр. ун-в., **12**, 164 (1957). (12.1.4)
 1009. Фаддеев Л. Д., ДАН СССР, **121**, 63 (1958). (20.2)
 1010. Фаддеев Л. Д., ЖЭТФ, **35**, 433 (1958). (10.3.2)
 1011. Фаддеев Л. Д., Усп. матем. наук, **14**, 57 (1959). (20.2)
 1012. Фаддеев Л. Д., ЖЭТФ, **39**, 1459 (1960). (7.2.5, 17.4.3)
 1013. Фаддеев Л. Д., ДАН СССР, **138**, 565 (1961). (7.2.5, 17.4.3)
 1014. Фаддеев Л. Д., ДАН СССР, **145**, 301 (1962). (7.2.5, 17.4.3)
 1015. Фаддеев Л. Д. в книге «Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц», Труды МИАН им. В. А. Стеклова, т. 69, Изд-во АН СССР, 1963. (7.3, 17.4.3)
 1016. Халфин Л. А., ЖЭТФ, **33**, 1371 (1957). (19.2)
 1017. Халфин Л. А., ДАН СССР, **132**, 1051 (1960). (19.2)
 1018. Чжоу Гуан-чжао, ЖЭТФ, **35**, 783 (1958). (15.1)
 1019. Чжоу Гуан-чжао, ЖЭТФ, **36**, 909 (1959). (15.1)
 1020. Чжоу Гуан-чжао, Широков М. И., ЖЭТФ, **34**, 1230 (1958). (15.1)
 1021. Широков М. И., ЖЭТФ, **32**, 1022 (1957). (15.1)
 1022. Широков М. И., ЖЭТФ, **36**, 1524 (1959). (15.1)
 1023. Широков М. И., ЖЭТФ, **40**, 1387 (1961). (17.4)
 1024. Широков Ю. М., ЖЭТФ, **35**, 1005 (1958). (15.1)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Адамара неравенство 243, 251
 Адиабатическая теорема 166
 Адиабатическое включение и выключение взаимодействия 166
 Альbedo 58, 73
 Альтернатива Фредгольма 195
 Амплитуда рассеяния 22, 42, 255, 282, 412
 — в методе ВКБ 526
 — реакций 451
 — спиральная 416, 508
 Аналитическое продолжение полиномов Лежандра 88
 — — условия полноты 232
 — — элементов S-матрицы 88
 Аналитичность S-матрицы 328
 — T-матрицы 270
 — собственных значений оператора 225
 Асимптотическое поведение волновых функций 256
 — — функций Грина 255
 Аут-оператор 161
 Аут-состояние 148, 442
- Бесконечно малые вариации 566
 Борновский ряд 223, 250, 264
 — — сходимость 227, 239
- Вектор** поляризации 219
 — состояния 144, 158, 171
 — — абстрактный 145
 — — нормируемый 163, 164
Вектора состояния аналитичность 163
 — — дифференцируемость 163
 — — непрерывность 163
 — — предельное значение 161
 — — сходимость сильная 162
 — — — слабая 162
- Вероятность перехода в единицу времени 207
 — просачивания 306
 Взаимность 257, 418, 419, 455
 Взаимодействие в конечном состоянии 472
 — — начальном состоянии 472
 — — сепарабельное 259
 — — спин-орбитальное 258
 Внутренняя конверсия 439
 Возбуждение при столкновении 553
 Возмущение непрерывного спектра 204
 Волновое число локальное 523
 Волновой пакет 143, 206
 — — гауссовской формы 546
 — — — — время жизни 548
- Время запаздывания 293, 545
 — когерентности 116
 — полураспада 550
 Вронскиан 317
 Вторичная структура края поглощения 498
 Высшие угловые моменты 292, 346
- Гамильтониан** эффективный 459
 Геометрическая оптика 75
 Главное значение интеграла в смысле Коши 173
 Глория 86, 530
 Граничные условия 175
- Двулучепреломление** 36
 Дельта-функция Дирака 173
 — — операторная 173
 Деполаризация при рассеянии 221
 Дефект унитарности волнового оператора 154
 Дисперсионное соотношение 330, 350
 — — в одноканальном рассеянии 273
 — — двойное 383
 — — для парциальных волн 111
 — — — — рассеяния вперед 107, 109, 273
 — — — — на угол, отличный от нуля 110
 — — — — собственных значений 230
 — — — — функции Иоста 323
 — — — элементов S-матрицы 330, 350
 — — по передаваемому импульсу с вычитанием 376
 — — с вычитанием 112
 Дисперсия поляризации 62
 — фазовой скорости 36
 Дифракция аномальная 75
 — Фраунгофера 75, 76
 Дифференцирование детерминанта 242
 Дихроизм 36
 Диэлектрическая проницаемость 15
 Длина рассеяния 287
 — — s-волны 301
- Естественная система единиц 145
- Задача** двухчастичного рассеяния 179
 — трех тел 505
 Закручивание 128, 294, 531
 Зацепляющиеся уравнения 412

- Изотопический спин 263
 Инвариантность дифференциальных сечений лоренцевская 211
 — относительно обращения времени 53, 418
 Ин-оператор 161
 Ин-состояние 148, 442
 Интеграл Бесселя 75
 — Соинна 74
 — Эйри 84
 Интегральное представление S-матрицы 326
 — — элементов S-матрицы 284
 — уравнение Гайтлера 156
 — — для функций Грина 146
 — — первого рода 195
 Интерполяция амплитуд парциальных волн 374
 — функций Лежандра 374
 Итерации ядра 248

 Канал закрытый 459
 — непрерывный 487
 — открытый 475, 487, 491
 — рассеяния 438
 — реакции 441
 Каналы перекрывающиеся 466
 Квазиклассическое приближение 522
 Константа связи 223
 Корреляция флуктуаций 112
 Коэффициент поглощения 36
 Коэффициенты Клебша — Гордана 41, 263, 272, 417
 — отражения Френеля 78
 Край поглощения рентгеновских лучей 498

 Лемана эллипс 374

 Магнитная проницаемость 15
 Максвелла уравнения 15
 Матрица Иоса 429
 — плотности 214
 — — рассеянной волны 26, 221
 — — электромагнитной волны 20
 — поляризации 222
 — потенциалов 432
 — рассеяния 156
 — реакций 183
 — — вне энергетической поверхности 183
 Матрицы вращения 516
 S-матрица 156, 169, 178, 182
 — для многоканальных процессов 454
 — при высоких и низких энергиях для частиц со спином 430
 — свойства симметрии 186, 430
 T-матрица 179
 — для взаимодействий конечного ранга 260
 — — задачи трех тел 517
 — — заряженных частиц 187
 — — неупругих процессов 455
 — — сепарабельных взаимодействий 259
 — на энергетической поверхности 181
 — продолжение вне энергетической поверхности 181
 Метод вариационный 297
 — Ватсона 87
 — Ватсона — Редже 373

 Метод ВКБ 522
 — «вытаскивания ядовитого зуба» 246, 269
 — гашения излучения 556
 — искаженных волн 233, 250, 448
 — квазичастиц 235, 240
 — перевала 97
 — Редея — Ритца 297
 — стационарной фазы 22
 — Фаддеева 511
 — фазово-амплитудный 369
 — Фредгольма 241, 269
 — Шмидта 235, 250
 N/D-метод 331
 Множество биортогональное 202
 — векторов компактное 163
 — — ограниченное 163
 — — слабо компактное 163
 — резольвентное 190
 Множитель Гамова 396
 Модель Вигнера — Вайскопфа 503

 Нейтрон-протонное рассеяние 426
 Неравенство Шварца 165
 Несвязные диаграммы 487

 Обратимости свойство S- и T-матриц 186
 — условие 54
 Обратная задача рассеяния 137, 557
 Обращение времени 185
 Оператора аналитичность 166
 — волнового свойства 151, 153—155
 — дифференцируемость 166
 — изометрия 153, 165, 166
 — индекс верхний 200
 — — нижний 200
 — непрерывность 166
 — норма 168
 — — нуль-пространство 192
 — область значений 155
 — — определения 190
 — обратного особенности 248
 — собственные значения 192
 — спектр 190, 191
 — — аппроксимативный 191
 — — замкнутый 191
 — — непрерывный 191
 — — остаточный 191
 — — точечный 191
 — спектральный радиус 224
 — сходимость в представлении взаимодействия 168
 — — — шредингеровском представлении 166
 — — по норме 164
 — — равномерная 165
 — — сильная 164
 — — слабая 163
 — унитарность 153, 165, 166
 — характеристическое значение 224
 Оператор антилинейный 185
 — антиунитарный 185
 — волновой меллеровский 151, 178, 443
 — вполне непрерывный 193
 — замкнутый 190
 — идемпотентный 196
 — из класса Гильберта — Шмидта 193

- Оператор из класса Фредгольма 193
 — — L^2 -класса 193
 — изометрический 153
 — компактный 193
 — конечного ранга 194
 — непрерывный 168
 — нормальный 193
 — обратный левый 192
 — — правый 192
 — обращения временн 185
 — ограниченный 192
 — ортогонально-проектирующий 196
 — плотности 214
 — проектирующий 196
 — рассеяния 156
 — — модифицированный 157
 — реакций 156
 — самосопряженный 193, 195
 — унитарный 198
 — частично изометрический 443
 Определитель Фредгольма 242, 243, 320, 349
 Оптическая теорема 29, 31, 284
 — — обобщенная 54, 182, 420
 Орел 86
 Ортогональная проектирующая операторная функция 196
 Ортогональное дополнение к множеству 192
 Основная спектральная теорема Гильберта 196

 Параболические координаты 393
 Параметризация S -матрицы 488
 — симметричная 514
 Передаваемый импульс 270
 Плоскость отсчета для поляризации 16, 17
 — — — поворот 20, 23
 — — — — проходящая через фиксированное направление 23, 32
 Плотность заряда 16
 — состояний 211
 Поверхностный заряд 16
 Показатель преломления 34
 Ползущая волна 91
 Полихромизм 62
 Полнота системы волновых функций 182, 202, 266, 343
 — спектра 202
 Полюсы S -матрицы 332
 — — кратные 554
 — Редже 373, 380
 — резонансные 336
 — соответствующие связанным состояниям 332
 — функции S_i 352, 353
 Поляризация 219, 222
 — электромагнитной волны круговая 17
 — — левовинтовая 18, 20
 — — — плоская 16
 — — — правовинтовая 18, 20
 — — — частичная 19
 — — — эллиптическая 18
 Порог реакции 459
 Пороговые аномалии 491, 495
 — точки ветвления 486
 — явления 490
 Потенциал Дебая — Хюккеля 278

 Потенциал кулоновский 252, 393, 399
 — — экранированный 408
 — локальный 225, 559
 — непроницаемой сферы 388
 — прямоугольной ямы 290
 — сингулярный 363
 — — отталкивания 366
 — — притяжения 369
 — с нулевым радиусом действия 387
 — сферически симметричный 264
 — центробежных сил 282
 — Эккарта 391
 — экспоненциальный 389
 — Юкавы 315, 392, 501
 Потенциалы аналитические 315, 341
 — Баргмана 401, 405
 — Вуда — Саксона 305
 — Дебая 101
 — Хюльтена 391
 Поток энергии 17
 Предиссоциация 439
 Представление взаимодействия 144, 157, 158
 — Гейзенберга 144, 159, 445
 — импульсное 258
 — координатное 253
 — Мандельстама 382
 — Шредингера 144, 145, 441
 Преобразование Ватсона 87
 — Ганкеля 537
 — Гильберта 107
 — Кели 156, 198
 — Эйлера 138
 Приближение борновское 105, 232, 250
 — — в методе искаженных волн 188, 233, 250, 440
 — — второе 275
 — импульсное 537
 — коротких волн 521
 — Релея — Ганса 63
 — сильной связи 525
 — Хюльста 71
 — эйконала 532
 — эффективного радиуса 288
 Приведенная масса фрагментов 450
 Приготовление состояния 180, 213
 Принцип детального равновесия 203
 — неопределенности 295
 — оптической локализации 76
 — симметрии Шварца 229
 Прицельный параметр 124
 — — представление 535
 Причинности требование 107
 Проводимость 15
 Пропагатор 147
 Пространство гильбертово полное 163
 — — сепарабельное 190
 — связанных состояний гамильтониана 168
 L^2 -пространство 162
 Псевдогамильтониан, зависящий от энергии 458
 Пучок когерентный 216
 — некогерентный 19
 — — частиц 215
 — — когерентный 216
 — — некогерентный 216
 — — со спином 217

- Разложение Миттаг-Леффлера для S -матрицы 339
 — по парциальным волнам 280, 410, 452
 — — угловым моментом 515
 — функции Грина 177
 — — — в интеграл Фурье 171
 Разрезы функций Грина 172
 Распад нестабильных состояний 542
 — — смешанных 552
 Рассеяние некогерентных пучков 213
 — низкоэнергетическое 287
 — одноканальное 252, 280, 308
 — потенциальное 264
 — рентгеновских лучей 497
 — тождественных частиц 136
 — — — неупругое 449
 — частиц многоканальное 438
 — — — неупругое 438
 — — ореольное 130
 — — по спирали 128, 531
 — — радужное 130
 — электромагнитных волн 22
 — — — вперед 27, 29
 — — — — в приближении Хюльста 66
 — — — двукратное 31
 — — — назад 27
 — — — на идеальном проводнике 70
 — — — — малые углы 74
 — — — — однородной сфере 55
 — — — радужное 83, 529
 — — — белое 85
 — — — резонансное 66
 — — — релеевское 60
 — — — теневое 30
 Рассеяния длина 287
 — плоскость 22
 — состояние 175
 — угол 135
 — электромагнитных волн амплитуда 22, 42
 Реакции 438
 — экзоэргические 490
 — эндоэргические 490
 Резольвента 172, 189
 Резонансы 227, 293, 329, 459
 — несимметричные 555
 — низкоэнергетические 295
 Релятивистская кинематика 124, 546
 Риманова поверхность многоканальной S -матрицы 481
 — — — жанр 483
 — — — физический лист 265, 482
 Ряд борновский 223
 — — для матрицы рассеяния 169
 — — сходимости 223
 — Неймана 223
 — Фредгольма 264
 Связанные состояния 234, 241, 349, 479
 — — влияние на унитарность 155
 — — уплотненные в непрерывном спектре 459, 480
 — уравнения 467
 Сдвиги фаз 282, 285, 421
 — — в методе ВКБ 523
 — — для рассеянной волны 53
 — — при низких энергиях 286
 Седловая точка 97
 Сеченные рассеяния вблизи порога 493
 — — в пределе нулевой энергии для частиц со спином 424
 — — дифференциальное 25, 206
 — — парциальное 284
 — — частиц дифференциальное 126, 210
 — — — полное 127
 — экстинкции 30
 Симметризация волновых функций 449
 Симметрия матрицы рассеяния 54
 — при рассеянии электромагнитных волн винтовая 37
 — — — — — вращательная 27
 — — — — — зеркальная 27
 Система отсчета лабораторная 132
 — — связанная с центром масс 132, 262
 — — рассеяния 148, 168
 Скользящие лучи 87
 Скорейшего спуска метод 97
 Собственные значения отгаликивательные 226, 266
 — — притягивательные 226, 266
 Состояние антисвязанное 332
 — виртуальное 291, 332
 — нестабильное 542
 — смешанное 215, 552
 — чистое 215
 Сохранение четности 419
 Спектральная теорема 196
 — функция 345, 562
 — — определение из S -матрицы 564
 Спектральное разложение единицы 196, 198
 Спектр распада 553
 Спин 217
 Спиральность 414
 Степень взаимной когерентности пучков 116
 — внутренней когерентности пучка 116
 — поляризации пучка 20, 26, 219
 — эллиптичности поляризации 18, 19, 20, 26
 Стокса векторы 20
 — — рассеянной волны 24
 — — параметры 16, 20
 — — для круговой поляризации 17
 — — — плоской поляризации 16
 Столкновение с перераспределением частиц 438
 Стоячие волны 176, 284
 Странность 263
 Сферическая волна расходящаяся 145
 — — сходящаяся 145
 Сферические гармоники 40
 — — векторные 41
 — — функции Бесселя 46
 Сходимость в гейзенберговском представлении 169
 — — представлении взаимодействия 168
 — — представлении Шредингера 166
 — произведений операторов 164
 — рядов в методе Ватсона 94
 Тензорные силы 436
 Теорема Герглотца 250
 — замкнутых графов 190

- Теорема Карлсона 378
 — Левинсона 291, 331, 350, 434
 — о характерах групп 516
 — Пуанкаре 310
 — Стоуна 199
 — Хиллерааса — Ундгейма 303, 305
 Теория возмущений 223
 Точки ветвления обратного оператора 248
 Точная верхняя грань 162
 — нижняя грань 196
 Траектории Редже 377, 398
 — — вблизи порога 381
 — — при отрицательных энергиях 381
 — — при положительных энергиях 381
 — собственных значений в комплексной плоскости 225
 Угловой момент комплексный 373
 Угол отклонения 124
 Унитарность 418, 455
 — матрицы рассеяния 52, 184
 Униформизация 482
 Упорядочивание операторов во времени 158
 Уравнение Гамильтона — Якоби 125
 — Гельфанда — Левитана 560
 — для траектории 123, 125
 — Липпмана — Швингера 173, 174, 223
 — — в импульсном представлении 259
 — — — матричной форме 425
 — Шредингера 144
 — — не зависящее от времени 175
 — — радиальное 285
 — — нерегулярное решение 312, 347
 — — регулярное решение 309, 346
 Уравнения Лоу 183
 Факторизация вычета 462
 Физическая волновая функция 319, 348
 Формула Брейта — Вигнера 293, 460
 — Лорентца — Лоренца 34
 — Резерфорда 127
 — Фруассара — Грибова 385
 Формфактор 503
 — рассеивателя 64
 Фотоэффект 498
 Функции Грина антиэрмитова часть 173
 — — эрмитова часть 173
 — из L^2 -пространства 190
 — Лагерра 396
 — Риккати — Бесселя 46
 — Риккати — Ганкеля 46
 — Риккати — Неймана 46
 — Уиттекера 397
 — целый порядок 337
 Функция Герглотца 250
 — Грина 103, 171, 319
 — — для кулоновского потенциала 393
 — — — потенциала Хюльтена 391
 — — — Юкавы 392
 — — — экспоненциального потенциала 389
 — — запаздывающая 146
 — — интегральное представление 318
 — — опережающая 146
 — — парциальная 280
 — — приведенная 262
 — Иоста 317, 347
 — — поведение при высоких энергиях 318
 Центробежный барьер 287
 Циклические соотношения для элементов S-матрицы 362
 Частицы со спином единица 220
 — — — половина 219
 Черное тело 74
 Ширина материнского уровня 552
 — резонанса 68, 295, 462, 550
 — — парциальная 463
 Экспоненциальный закон распада 543
 Экстинкции парадокс 72
 — сечение 30
 Эллиптические координаты 268
 Энергия отдачи 135
 Эргодическая теорема 465
 Эффект Оже 439
 — Рамзауэра — Таунсенда 329
 — складывания фотонов 113
 — Хенбери-Брауна и Твисса 112
 Эффективный гамильтониан 459
 — радиус действия потенциала 289
 Эффекты барьерного проникновения 532
 Юкавы потенциал 315
 — разрез 316
 Ядра вполне непрерывные 225
 — модифицированные 224
 — полярные 225, 250
 — разделяющиеся 565
 — треугольные 309

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов перевода	5
Предисловие	9

ЧАСТЬ I. РАССЕЙНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Глава 1. Математический аппарат и общие результаты	15
§ 1. Уравнения Максвелла	15
§ 2. Параметры Стокса и поляризация	16
1. Определение параметров Стокса	16
2. Физический смысл параметров Стокса	17
3. Частично поляризованные пучки	19
4. Векторы Стокса	20
5. Связь с матрицей плотности	21
§ 3. Рассеяние	22
1. Амплитуда рассеяния	22
2. Переход к плоскости отсчета, проходящей через фиксированное направление	23
3. Связь между амплитудами рассеяния, выраженными через компоненты, соответствующие круговой и линейной поляризации	24
4. Векторы Стокса рассеянной волны	24
5. Дифференциальное сечение рассеяния	25
6. Матрица плотности рассеянной волны	26
7. Зависимость рассеяния вперед и рассеяния назад от азимутального угла	27
8. Эффекты вращательной и зеркальной симметрии	27
9. Рассеяние вперед; оптическая теорема	29
§ 4. Двукратное рассеяние	31
§ 5. Рассеяние облаком, состоящим из большого числа частиц	34
1. Аддитивность сечений	34
2. Показатель преломления	34
3. Случай нескольких сортов частиц	37
Комментарии	37
Задачи	38
Глава 2. Сферически симметричные рассеиватели	39
§ 1. Сферические гармоники	39
1. Полиномы Лежандра	39
2. Присоединенные функции Лежандра	39
3. Сферические гармоники	40
4. Векторные сферические гармоники	41
5. Поперечные и продольные векторные сферические гармоники	42
6. Тензорные функции, инвариантные относительно вращений	43
7. Комплексное сопряжение	44
8. θ - и ϕ -компоненты векторных сферических гармоник	44
9. Случай, когда ось z направлена вдоль \mathbf{r}	45
§ 2. Разложение по мультиполям	45
1. Разложение плоской волны. Сферические функции Бесселя	45
2. Разложение электрического поля	47
3. Магнитное поле	48

4. \mathcal{H} -матрица	49
5. Амплитуда рассеяния	49
6. Случай, когда ось z направлена вдоль вектора \mathbf{k}	50
§ 3. Унитарность и обратимость	51
1. Сохранение энергии и унитарность	51
2. Сдвиги фаз	52
3. Инверсия времени и обратимость	53
4. Обобщенная оптическая теорема	54
5. Обобщение на случай отсутствия сферической симметрии	55
§ 4. Рассеяние на однородной сфере (теория Ми)	55
1. Вычисление \mathcal{H} -матрицы	55
2. Амплитуда рассеяния	57
Комментарии	58
Задачи	59
Глава 3. Предельные случаи и приближения	60
§ 1. Сферы малого радиуса не слишком большой оптической плотности (релеевское рассеяние)	60
§ 2. Сферы малой, но не слишком малой оптической плотности (приближение Релея — Ганса; борновское приближение)	62
§ 3. Сфера малой оптической плотности	66
1. Резонансное рассеяние	66
2. Полностью отражающая сфера	70
§ 4. Диффузные сферы большого радиуса (приближения Хюльста)	71
1. Рассеяние вперед	71
2. Рассеяние на малые углы	74
§ 5. Сферы большого радиуса (предельный случай геометрической оптики)	75
1. Дифракция Фраунгофера	76
2. Рассеяние вбок; действительный показатель преломления	77
3. Большие сферы малой оптической плотности	81
4. Большие оптически плотные сферы	81
5. Комплексный показатель преломления	82
§ 6. Радужное рассеяние	82
§ 7. Теория ореола (глории)	85
§ 8. Скользящие лучи (метод Ватсона)	87
1. Преобразование Ватсона	87
2. Вопросы сходимости	94
Приложение. Интегрирование по методу перевала (метод скорейшего спуска)	97
Комментарии	99
Задачи	100
Глава 4. Дополнительные вопросы	101
§ 1. Другие методы	101
1. Потенциалы Дебая	101
2. Метод функций Грина	102
§ 2. Причинность и дисперсионные соотношения	106
1. Введение	106
2. Дисперсионные соотношения для рассеяния вперед	107
3. Дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния на угол, отличный от нуля	110
4. Дисперсионные соотношения для парциальных волн	111
§ 3. Корреляция флуктуаций интенсивности (эффект Хэнбери-Брауна и Твисса)	112
Комментарии	119
Задачи	119

ЧАСТЬ II. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ ЧАСТИЦ

Глава 5. Рассеяние частиц в классической механике	123
§ 1. Уравнение траектории и угол отклонения	123
1. Нерелятивистский случай	123
2. Релятивистский случай	124
§ 2. Сечение рассеяния	126
§ 3. Формула Резерфорда	127
§ 4. Закручивание (рассеяние по спирали)	128
§ 5. Ореольное (глория) и радужное рассеяния	130

§ 6. Сингулярные потенциалы	130
§ 7. Переход от лабораторной системы отсчета к системе центра масс	132
§ 8. Тождественные частицы	136
§ 9. Обратная задача рассеяния	137
Комментарии	139
Задачи	140

ЧАСТЬ III. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

Глава 6. Временной формализм теории рассеяния	143
§ 1. Уравнение Шредингера	144
§ 2. Изменение векторов состояний во времени в шредингеровском представлении	145
§ 3. Меллеровский волновой оператор в шредингеровском представлении	151
§ 4. S-матрица	155
§ 5. Представление взаимодействия	157
§ 6. Гейзенберговское представление	159
§ 7. Математические вопросы	161
1. Сходимость векторов	162
2. Сходимость операторов	163
3. Сходимость в шредингеровском представлении	166
4. Предельные переходы в представлении взаимодействия	168
5. Предельные переходы в гейзенберговском представлении	169
Комментарии	169
Задачи	170
Глава 7. Стационарный формализм теории рассеяния	171
§ 1. Функции Грина и векторы состояний	171
1. Функции Грина	171
2. Векторы состояний	174
3. Разложение функций Грина	177
§ 2. Волновой оператор и S-матрица	178
1. Операторы Ω , S и S'	178
2. T-матрица	179
3. K-матрица	183
4. Унитарность и обратимость	184
5. Аддитивные взаимодействия	186
§ 3. Математические вопросы	189
1. Спектр	190
2. Вполне непрерывные операторы	193
3. Эрмитовость и унитарность операторов	195
4. Аналитичность резольвенты	199
Приложение. Доказательство леммы § 3, п. 2.	203
Комментарии	203
Задачи	204
Глава 8. Сечения рассеяния	206
§ 1. Общее определение дифференциальных сечений рассеяния	206
1. Скорость перехода	206
2. Произведение потока на плотность мишени	208
3. Дифференциальное сечение	210
§ 2. Лоренцевская инвариантность	211
§ 3. Рассеяние некогерентных пучков	213
1. Матрица плотности	213
2. Частицы со спином	217
3. Сечение и матрица плотности рассеянной волны	221
Комментарии	222
Задачи	222
Глава 9. Формальные методы решения и приближения	223
§ 1. Теория возмущений	223
1. Борновский ряд	223
2. Борновское приближение	232
3. Борновское приближение в методе искаженных волн	233
4. Связанные состояния и борновское приближение	234

§ 2. Метод Шмидта (метод квазичастиц)	235
§ 3. Метод Фредгольма	241
§ 4. Особенности обратного оператора	248
Комментарии	250
Задачи	251
Глава 10. Одноканальное рассеяние. Трехмерный случай в конкретных представлениях	252
§ 1. Уравнение для одночастичного рассеяния	252
1. Предварительные замечания	252
2. Координатное представление	253
3. Импульсное представление	258
4. Сепарабельные взаимодействия	259
§ 2. Уравнения рассеяния при столкновении двух частиц (исключение движения центра масс)	261
§ 3. Потенциальное рассеяние (трехмерный случай)	264
1. Борновский ряд и ряд Фредгольма	264
2. Аналитичность Т-матрицы (дисперсионные соотношения)	270
3. Пример (потенциал Юкавы)	274
Комментарии	278
Задачи	279
Глава 11. Одноканальное рассеяние бесспиновых частиц. I.	280
§ 1. Разложение по парциальным волнам	280
1. S-матрица и бегущие волны	280
2. K-матрица и стоячие волны	284
§ 2. Эвристическое рассмотрение фазовых сдвигов	285
1. Общие свойства	285
2. Анализ поведения фазовых сдвигов при низких энергиях	286
§ 3. Вариационные методы	297
1. Введение	297
2. Т-матрица, K-матрица и функция Грина	298
3. Вариационные формулы для фазового сдвига	300
4. Длина рассеяния s-волны	301
Приложение. Доказательство теоремы Хиллерааса — Ундгейма	305
Комментарии	305
Задачи	306
Глава 12. Одноканальное рассеяние бесспиновых частиц. II.	308
§ 1. Строгая теория s-рассеяния	308
1. Регулярные и нерегулярные решения	308
2. Функция Юста и полная функция Грина	317
3. S-матрица	326
4. Полюсы S-матрицы	332
5. Полнота	343
§ 2. Высшие угловые моменты	346
§ 3. Непрерывно изменяющиеся угловые моменты	354
§ 4. Сингулярные потенциалы	363
1. Трудности теории	363
2. Сингулярные потенциалы отталкивания	366
3. Пример	368
Комментарии	369
Задачи	371
Глава 13. Метод Ватсона — Редже (комплексный угловой момент)	373
§ 1. Преобразование Ватсона	373
§ 2. Единственность интерполяции	378
§ 3. Полюсы Редже	380
§ 4. Представление Мандельштама	382
Комментарии	385
Задачи	386
Глава 14. Частные виды потенциалов	387
§ 1. Потенциал с нулевым радиусом действия	387
§ 2. Отталкивательное ядро	388

§ 3. Экспоненциальный потенциал	389
§ 4. Потенциалы Хюльтена	391
§ 5. Потенциалы Юкавы	392
§ 6. Кулоновский потенциал	393
1. Чисто кулоновский потенциал	393
2. Суперпозиция кулоновского и добавочного потенциалов	399
§ 7. Потенциалы Бармана и их обобщения	401
1. Общий метод	401
2. Частные случаи	405
Комментарии	407
Задачи	408
Глава 15. Упругое рассеяние частиц со спином	410
§ 1. Метод парциальных волн	410
1. Разложение по собственным функциям полного углового момента j и спина s	410
2. Амплитуды рассеяния для отдельных спинов	416
3. Унитарность, взаимность, инвариантность по отношению к обращению времени и сохранение четности	418
4. Частные случаи	422
5. Сечения	424
6. Двукратное рассеяние	425
§ 2. Решение системы связанных уравнений Шредингера	425
1. Матричные уравнения	425
2. Решения	427
3. Матрица Иоста и S -матрица	429
4. Связанные состояния	433
5. Дополнительные замечания	435
Комментарии	436
Задачи	436
Глава 16. Неупругое рассеяние и реакции (многоканальная теория). I	438
§ 1. Введение	438
§ 2. Нестационарная теория рассеяния	440
1. Шредингеровское представление	440
2. Гейзенберговское представление	445
§ 3. Стационарная теория	446
1. Формальная теория	446
2. Метод искаженных волн в теории столкновений с перераспределением	448
3. Тожественные частицы	449
4. Поведение волновой функции на больших расстояниях	450
§ 4. Метод парциальных волн	452
1. Система уравнений	452
2. S -матрица	454
3. Столкновения с перераспределением	455
§ 5. Формальная теория резонансов	456
Приложение. Доказательство соотношения (16.19)	463
Комментарии	465
Задачи	466
Глава 17. Неупругое рассеяние и реакции (многоканальная теория). II	467
§ 1. Аналитичность в многоканальных задачах	467
1. Системы уравнений	467
2. Альтернативный метод	471
3. Аналитические свойства	474
4. Связанные состояния	479
5. Риманова поверхность многоканальной S -матрицы	481
§ 2. Пороговые явления	486
1. Пороговые точки ветвления	486
2. Физические пороговые явления; общие положения	490
3. Детальный характер пороговых аномалий	491
4. Пороговые аномалии в случае заряженных частиц	495
§ 3. Примеры	499
1. Прямоугольная яма	499
2. Потенциалы юкавского типа	501
3. Модель Вигнера — Вайскопфа	503

§ 4. Введение в проблему трех тел	505
1. Амплитуды	505
2. Несостоятельность многоканального метода	509
3. Метод Фаддеева	511
Комментарии	519
Задачи	520
Глава 18. Приближение коротких волн	521
§ 1. Введение	521
§ 2. Метод ВКБ	522
1. Фазовые сдвиги в методе ВКБ	523
2. Амплитуда рассеяния	526
3. Радужное рассеяние	529
4. Глория	530
5. Закручивание (спиральное рассеяние)	531
§ 3. Приближение эйконала	532
§ 4. Импульсное приближение	537
Комментарии	540
Задачи	540
Глава 19. Распад нестабильных состояний	542
§ 1. Качественное рассмотрение	542
§ 2. Экспоненциальный закон распада и условия его применимости	543
§ 3. Кратные полюсы S -матрицы	554
Комментарии	556
Задачи	556
Глава 20. Обратная задача рассеяния	557
§ 1. Введение	557
§ 2. Построение потенциала по известному сдвигу фаз	560
1. Уравнение Гельфанда — Левитана	560
2. Бесконечно малые вариации	566
§ 3. Построение потенциала по всем фазовым сдвигам при одной энергии	569
1. Метод расчета	569
2. Примеры	576
Комментарии	577
Задачи	578
Литература	579
Предметный указатель	597