



**METHODS BASED ON THE
WIENER—HOPF TECHNIQUE**
for the solution of partial
differential equations

by

B. NOBLE

*Senior Lecturer in Mathematics
The Royal College of Science and Technology
Glasgow*

PERGAMON PRESS

London • New York • Paris • Los Angeles

1958

Б. Нобл

ПРИМЕНЕНИЕ
МЕТОДА ВИНЕРА—ХОПФА
для решения
дифференциальных уравнений
в частных производных

Перевод с английского
Л. Н. БРЮХАТОВА

Под редакцией
В. И. ЛЕВИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1962

АННОТАЦИЯ

В этой книге известный метод Винера — Хопфа, разработанный для решения определенного класса интегральных уравнений, применяется к решению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Рассматриваются примеры из теории электромагнитных волн, акустики, гидродинамики, теории упругости и теории потенциала. В конце каждой главы приводится большое число упражнений и дополнительных результатов. На русском языке это первая монография по данному вопросу.

Книга предназначена для студентов старших курсов, инженеров и научных работников, имеющих дело с уравнениями математической физики. Она может быть использована в качестве практического руководства по применению метода Винера — Хопфа к конкретным задачам.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Б. Нобла представляет собой в основном отчет о работах последнего времени, в которых ряд задач математической физики решается методом, получившим название „метода факторизации“. Этот метод, впервые примененный к решению интегральных уравнений в одной работе Н. Винера и Э. Хопфа (1931 г.), дает возможность преодолеть аналитические трудности, возникающие при решении некоторых типов краевых задач, с помощью интегральных преобразований Фурье, Лапласа или Меллина искомого решения или с помощью сведения задачи к интегральным уравнениям. Задачи, о которых идет речь, относятся преимущественно к теории волноводов и дифракции волн.

В книге излагаются также теоретико-функциональные основы метода и некоторые общие сведения из теории аналитических функций, необходимые для его применения. Эта часть книги наименее ценна для нашего читателя, так как она написана весьма несистематично. Для понимания излагаемого материала необходимы элементарные сведения из теории функций комплексного переменного, знание основ операционного исчисления и математической физики (в части, относящейся к волновым процессам).

Ценность предлагаемой книги заключается в подробной разработке метода Винера — Хопфа при решении большого числа более или менее сложных и актуальных задач. Значительный интерес представляют также обобщения метода и его развитие в разных направлениях, в частности, приближенные методы решения, основанные на идее Винера и Хопфа. Решение ряда задач доводится до конца, другие задачи, приведенные в конце каждой главы, рассматриваются лишь кратко, их решение только намечается, и читатель отсылается к соответствующей литературе. Большое место уделено в книге сравнитель-

Предисловие редактора перевода

иому анализу различных методов решения с точки зрения их эффективности и общности. Автор намечает также возможные пути дальнейшего развития метода, так что многие читатели найдут в книге стимул для самостоятельной творческой работы.

Следует отметить, что стиль изложения автора далек от академического и часто не отвечает принятым в нашей литературе стандартам математического изложения. Многочисленные преобразования, которые приходится производить автору, не всегда ясно описываются, общие рассуждения, проводимые им, местами несколько туманны. При переводе это обстоятельство пришлось учесть, и мы стремились, не слишком удаляясь от подлинного текста, изложить соответствующие места более точно и ясно.

В. И. Левин

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге изложены методы решения некоторых практически важных краевых задач для уравнений в частных производных. Типичной задачей является следующая: найти решение стационарного волнового уравнения, удовлетворяющее определенным граничным условиям на полубесконечных границах. Рассматриваются примеры из теории электромагнитных волн, акустики, гидродинамики, теории упругости и теории потенциала.

Книга преследует двоякую цель: во-первых, ввести начинающих читателей в круг вопросов, связанных с применением метода Винера — Хопфа, и, во-вторых, дать исследователям представление о том, что можно и чего нельзя решить этим методом в настоящее время. Много места мы уделяем различным *приближенным* методам решения. Одним из достоинств метода является то, что он применим к большому кругу задач из совершенно различных областей. Можно надеяться, что ряд замечаний в тексте и в задачах помогут читателю в выборе направлений для дальнейших исследований.

Метод Винера — Хопфа был разработан приблизительно в 1931 г. для решения интегральных уравнений специального вида. В годы второй мировой войны Швингер (и независимо от него Копсон) заметили, что задачи о дифракции на полуплоскостях сводятся к интегральным уравнениям, которые можно решить методом Винера — Хопфа.

При решении с помощью преобразования Фурье получается функциональное уравнение с комплексным переменным, которое решается методом аналитического продолжения. В этой книге в большинстве случаев мы пользуемся несколько иным, но эквивалентным методом, предложенным Джонсом. Преобразование Фурье применяется здесь непосредственно к уравнению в частных производных, и для вывода функционального уравнения с комплексным переменным нет необходимости рассматривать интегральное уравнение. С этой точки зрения метод Винера — Хопфа дает естественное и важное обобщение круга задач, которые можно решить с помощью преобразований Фурье, Лапласа и Меллина. Приступая к созданию этой книги, я намеревался параллельно изложить метод интегральных уравнений и метод Джонса, однако в процессе работы я убедился, что нет смысла подробно излагать два эквивалентных метода и что это приведет к путанице. Так как метод Джонса мне кажется более простым, то я принял его за основу

и включил из метода интегральных уравнений лишь главные вопросы, необходимые читателю для понимания соответствующей литературы.

Материал этой книги доступен каждому, знакомому с преобразованием Лапласа, его комплексной формулой обращения и с интегрированием в комплексной плоскости. В первой главе мы излагаем вопросы, не входящие в обычный начальный курс теории функций комплексного переменного, и знакомим читателя с преобразованиями Фурье в комплексной области. Эта книга предназначена для лиц, интересующихся приложениями теории в большей степени, чем самой теорией; поэтому уровень строгости изложения может не удовлетворить математиков-теоретиков, но для практического применения этот уровень вполне достаточен.

Важно подчеркнуть, что с точки зрения, принятой в этой книге, сущность метода Винера — Хопфа заключается в том, что он может быть использован для получения численных значений различных физических величин. По ряду причин в книге не приводятся ни таблиц, ни графиков, но везде, где это возможно, ответы даются в форме, удобной для численных расчетов, и даются ссылки на существующие таблицы для табулированных величин. Физический смысл результатов практически нигде в книге не обсуждается. Для задач теории электромагнитных волн этот пробел будет заполнен книгой Джонса, выходящей в этой же серии.

Разбор примеров в тексте я доводил до получения хотя бы одного физически существенного результата в простом виде. Это делается также для пользы начинающих, которые склонны думать, что сложные формулы можно интерпретировать лишь при помощи электронных счетных машин.

Книга возникла из курса лекций для аспирантов, прочитанных по инициативе проф. Пака. Кроме того, я благодарен проф. Паку за предоставление мне идеальных условий для работы в отделе Королевского научно-технологического колледжа в Глазго. Я также благодарен проф. Снеддону за приглашение написать этот том в редактируемой им серии и за ценные указания при сокращении объема рукописи, который первоначально был значительно больше. Возможно, стоит упомянуть, что при этом была исключена глава, в которой парные интегральные уравнения применялись к задачам для диска. В свое время референт из *Proc. Camb. Philos. Soc.* (имя которого сейчас трудно установить) навел меня на мысль, что эти задачи наиболее эффективно решаются методом Винера — Хопфа. Работая над книгой, я не был полностью уверен, что это так, но все же заметка референта была одной из причин, побудивших меня написать эту книгу. Я также признателен проф. Джонсу за ряд библиографических сведений и д-ру Вильямсу, внимательно просмотревшему гл. V. Наконец, я хотел бы поблагодарить работников типографии за тщательную работу над трудной рукописью.

НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ГЛАВЫ I

Ниже приводятся результаты, которые могут оказаться полезными для справок. Везде в этой книге множитель, выражающий зависимость от времени, берется в виде $\exp(-i\omega t)$.

$$\alpha = \sigma + i\tau, \quad k = k_1 + ik_2, \quad (k_1 > 0, \quad k_2 > 0).$$

$$\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}. \quad [(1.14)]$$

$$(k - \alpha)^{1/2} = i(\alpha - k)^{1/2}, \quad (-k - \alpha)^{1/2} = -i(\alpha + k)^{1/2}. \quad [(1.12)]$$

$\gamma = -ik$, если $\alpha = 0$, $\gamma \approx |\alpha|$ при вещественном и большом α .

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx = \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y),$$

где

$$\Phi_+(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx,$$

$$\Phi_-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

Для того чтобы подчеркнуть зависимость функции от той или иной переменной, там, где это не может привести к недоразумениям, часто будет использоваться следующая запись:

$$\Phi_+(\alpha, y) \equiv \Phi_+(\alpha) \equiv \Phi_+(y) \equiv \Phi_+.$$

Если $ \varphi(x) < A \exp(\tau_- x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то $\Phi_+(\alpha)$ регулярна при $\tau > \tau_-$. Если $ \varphi(x) < B \exp(\tau_+ x)$ при $x \rightarrow -\infty$, то $\Phi_-(\alpha)$ регулярна при $\tau < \tau_+$.	}	[§ 1.3]
--	---	---------

Если $\varphi(x) \sim x^\tau$ при $x \rightarrow +0$, то $\Phi_+(\alpha) \sim \alpha^{-\tau-1}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\tau > \tau_-$. Если $\varphi(x) \sim x^\tau$ при $x \rightarrow -0$, то $\Phi_-(\alpha) \sim \alpha^{-\tau-1}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\tau < \tau_+$	}	[ср. с фор- мулами (1.74)]
--	---	----------------------------------

Запись $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow a$ означает, что $f(x) = g(x) + h(x)$, где $h/g \rightarrow 0$ при $x \rightarrow a$. Значение a может быть бесконечным. Иногда (см. последний параграф этой главы) мы будем писать $f \sim g$ и в тех случаях, когда $f = Cg + h$, где C — некоторая постоянная, значение которой не играет никакой роли.

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

§ 1.1. Введение

Математическое описание различных физических процессов уравнениями в частных производных обладает следующим примечательным свойством: метод разделения переменных сравнительно просто дает решение для некоторых областей, таких, как круг или бесконечная полоса; однако если форма области такова, что нельзя применить метод разделения переменных, то попытки найти решение обычно наталкиваются на непреодолимые трудности. Метод Винера — Хопфа позволяет значительно расширить класс задач, которые можно решить с помощью интегральных преобразований Фурье, Лапласа и Меллина.

Чтобы проиллюстрировать сказанное, а также напомнить читателю некоторые сведения о преобразовании Фурье для вещественного переменного, рассмотрим три задачи для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (1.1)$$

Предположим, что нам нужно найти в полубесконечной области $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$ решения этого уравнения, представляющие на бесконечности уходящие волны и удовлетворяющие при $y=0$ одному из трех следующих граничных условий:

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad \varphi &= f(x) \quad \text{при} \quad y=0, \quad -\infty < x < \infty; \\ (2) \quad \partial \varphi / \partial y &= g(x) \quad \text{при} \quad y=0, \quad -\infty < x < \infty; \\ (3) \quad \varphi &= f(x) \quad \text{при} \quad y=0, \quad 0 < x < \infty; \\ &\partial \varphi / \partial y = g(x) \quad \text{при} \quad y=0, \quad -\infty < x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Для уравнения (1.1) существуют решения, получаемые методом разделения переменных и имеющие вид $\varphi = X(x)Y(y)$, где

$$X(x) = e^{\pm i\alpha x}, \quad Y(y) = e^{\pm \gamma y}, \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2},$$

а α — произвольный параметр. Вид этих решений и то обстоятельство, что x изменяется в интервале $-\infty < x < \infty$, подсказывают применение преобразования Фурье. Действительно, мы увидим, что первые две задачи решаются с помощью преобразования Фурье, в то время

как третья задача сводится к уравнениям, для решения которых надо применить метод Винера — Хопфа.

Несмотря на то, что в дальнейшем нам придется иметь дело главным образом с преобразованиями Фурье в комплексной плоскости, в этом параграфе мы рассмотрим обычную форму преобразования Фурье

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\alpha, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx, \\ \varphi(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha, y) e^{-i\alpha x} d\alpha \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

с вещественным α . Применим это преобразование Фурье к сформулированным граничным задачам (Снеддон [1], Трантер [1] или Титчмарш [1], гл. 10, „формальные решения“). Для этого умножим уравнение (1.1) на $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\alpha x)$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ ; в результате мы получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx + \frac{d^2 \Phi}{dy^2} + k^2 \Phi = 0. \quad (1.4)$$

Интегрированием по частям найдем

$$\int_{-A}^A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} e^{i\alpha x} \right]_{-A}^A - i\alpha [\varphi e^{i\alpha x}]_{-A}^A - \alpha^2 \int_{-A}^A \varphi e^{i\alpha x} dx.$$

Предположим, что при $A \rightarrow \infty$ внеинтегральные члены стремятся к нулю. (Это предположение связано с условием, что φ представляет на бесконечности уходящие волны; оно будет подробнее рассмотрено в § 1.5.) Тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - \gamma^2 \Phi = 0, \quad (1.5)$$

где $\gamma^2 = (\alpha^2 - k^2)$ (на протяжении всего этого параграфа k считается вещественным). Определим при $\alpha > k$

$$\gamma = +(\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \quad \alpha > k,$$

где под $(\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ подразумевается абсолютное значение квадратного корня. При определении γ для $\alpha < k$ возникают затруднения, так как не ясно, какой надо выбрать знак в формуле $\gamma = \pm i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$ при $|\alpha| < k$. Этот вопрос будет рассмотрен в § 1.5 на основе понятия аналитического продолжения, сформулированного в § 1.2. Как мы увидим позже, γ должно быть определено таким образом, чтобы

при $\alpha < -k$ было $\gamma = +(\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, а поэтому в качестве решения уравнения (1.5) надо взять

$$\Phi = A(\alpha) e^{-\gamma y}, \quad (1.6)$$

так как оно ограничено при $y \rightarrow +\infty$ для всех α , в то время как решение $\exp(-\gamma y)$ экспоненциально возрастает при $y \rightarrow +\infty$ и $|\alpha| > k$. Функция $A(\alpha)$ пока произвольна и определяется из граничного условия при $y=0$.

Обратимся снова к задачам (1) — (3).

(1) Используя граничное условие первой задачи при $y=0$, получаем из соотношения (1.6)

$$(\Phi)_{y=0} = A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi.$$

Подставим это выражение для $A(\alpha)$ в решение (1.6) и применим формулу обращения (1.3) для преобразования Фурье. В результате получим решение задачи

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x - \gamma y} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi d\alpha.$$

(2) Точно таким же путем для второй задачи последовательно получим

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = -\gamma A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi,$$

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-1} e^{-i\alpha x - \gamma y} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi d\alpha. \quad (1.7)$$

(3) Для третьей задачи возможны три различные эквивалентные формулировки, служащие отправными пунктами трех методов решения этой задачи

А. Согласно условиям (1.2), обозначим (неизвестное) значение φ при $y=0$, $x < 0$ через $f(x)$, а (также неизвестное) значение $\partial\varphi/\partial y$ при $y=0$, $x > 0$ через $g(x)$. Введем также следующие обозначения:

$$\Phi_+(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx,$$

$$\Phi_-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

Таким образом, $\Phi_+(\alpha, 0)$ и $\Phi_-(\alpha, 0)$ будут обозначать соответствующие интегралы, в которых $\varphi(x, y)$ заменено на $\varphi(x, 0) = f(x)$. Дифференцирование по y будем обозначать штрихом, так что

$$\Phi'_+(\alpha, 0) = \left(\frac{\partial \Phi_+(\alpha, y)}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} g(x) e^{i\alpha x} dx,$$

и соответственно определим $\Phi'_-(\alpha, 0)$. Используя граничные условия и соотношение (1.6), получаем

$$\Phi_+(\alpha, 0) + \Phi_-(\alpha, 0) = A(\alpha), \quad \Phi'_+(\alpha, 0) + \Phi'_-(\alpha, 0) = -\gamma A(\alpha).$$

Исключив из этих уравнений $A(\alpha)$, приходим к уравнению

$$\Phi'_+(\alpha, 0) + \Phi'_-(\alpha, 0) = -\gamma \{ \Phi_+(\alpha, 0) + \Phi_-(\alpha, 0) \}. \quad (1.8)$$

Функции Φ'_- и Φ_+ известны, однако в этом уравнении содержатся и две неизвестные функции Φ'_+ и Φ_- . Как мы увидим далее, неизвестные функции в уравнении (1.8) можно найти, считая в преобразовании Фурье (1.3) параметр α комплексным и используя процесс аналитического продолжения и теорему Лиувилля. Этот метод называется методом Винера—Хопфа и будет рассмотрен в § 1.7.

Б. Рассмотрим теперь формулировку задачи (3) в виде интегрального уравнения. Изменим в формуле (1.7) порядок интегрирования, устремим y к нулю, используем граничное условие (1.2) при $x > 0$ и разобьем интервал интегрирования по ξ на две части $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Если мы теперь введем обозначение

$$K(x - \xi) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-1} e^{i\alpha(\xi - x)} d\alpha,$$

то получим для неизвестной при $\xi > 0$ функции $g(\xi)$ следующее интегральное уравнение:

$$\int_0^{\infty} K(x - \xi) g(\xi) d\xi = f(x) - \int_{-\infty}^0 g(\xi) K(x - \xi) d\xi, \quad x > 0,$$

в правую часть которого входят только известные функции. Важно отметить, что ядро уравнения $K(x - \xi)$ является функцией только разности переменных $x - \xi$. Интегральные уравнения такого типа можно решить методом Винера—Хопфа. Аналогичные задачи обычно решаются по следующей схеме: с помощью функции Грина выводится интегральное уравнение рассмотренного вида, а затем с помощью преобразования Фурье осуществляется переход от интегрального уравнения к функциональному уравнению (1.8). Более подробно эти вопросы будут рассмотрены в § 2.4 и 2.5.

В. Рассмотрим, наконец, формулировку задачи в виде парных интегральных уравнений. Из формулы (1.6) следует

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{-i\alpha x - \gamma y} d\alpha.$$

Используя граничные условия, получаем парные интегральные уравнения для неизвестной функции $A(\alpha)$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x), \quad x > 0, \quad (1.9a)$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = g(x), \quad x < 0. \quad (1.9b)$$

В § 2.2. будет показано, что эти уравнения можно решить непосредственно методом, по существу совпадающим с методом Винера — Хопфа.

На этом мы заканчиваем вводные замечания. Решение сформулированной выше задачи (3) любым из трех методов А, Б, В требует, таким образом, перехода в преобразовании Фурье к комплексным значениям параметра α . Поэтому мы начнем с рассмотрения некоторых вопросов из теории функций комплексного переменного и теории преобразований Фурье, что будет сделано в § 1.2—1.5. Ряд вопросов, на которые в этом параграфе не было дано ответа, будет рассмотрен в § 1.5 на основе материала, изложенного в § 1.2, 1.3 и 1.4.

В § 1.7 будет выведено уравнение, которое получается вместо уравнения (1.8) при переходе к комплексному α , и там же будет дано краткое изложение метода Винера — Хопфа для решения этого уравнения.

Читатель, который согласен по мере необходимости возвращаться для справок к гл. I, может сразу приступить к чтению гл. II, где будет детально разобрана задача, эквивалентная поставленной выше задаче (3).

§ 1.2. Некоторые сведения из теории функций комплексного переменного

Мы начнем с краткой сводки сведений из теории функций комплексного переменного, которые будут необходимы при дальнейшем изложении. Мы будем ссылаться на известные руководства: Копсона [1] и Титчмарша [2]¹⁾. Комплексные переменные будем обозначать греческими буквами, например $\zeta = \xi + i\eta$, $\alpha = \sigma + i\tau$.

¹⁾ См. также Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, Физматгиз, 1960. — *Прим. перев.*

Комплексный параметр в преобразовании Фурье всегда будет обозначаться через $\alpha = \sigma + i\tau$. Постоянные будут обозначаться латинскими буквами a, b, k и т. д.; из контекста будет ясно, являются ли они вещественными или комплексными. Напомним следующие основные определения и результаты.

Если каждой точке ζ некоторой области R сопоставлено одно или несколько комплексных чисел, которые будем обозначать через χ , то мы будем писать $\chi = f(\zeta)$ и говорить, что χ является функцией комплексного переменного ζ . Если эта функция имеет в каждой точке области R одно определенное значение, то говорят, что она однозначна в R . Важнейшим свойством, которым обладают встречающиеся в приложениях функции комплексного переменного, является их дифференцируемость в большинстве точек области R , т. е. существование для этих функций предела

$$f'(\zeta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(\zeta + \delta) - f(\zeta)}{\delta},$$

не зависящего от пути, по которому комплексное число δ стремится к нулю. Функция $\chi = f(\zeta)$ называется *аналитической* в точке ζ , если она однозначна и дифференцируема в этой точке. Функция называется *регулярной в области R* , если она является аналитической в каждой точке области R . Фраза « $f(\zeta)$ есть аналитическая функция в области R » означает, что эта функция является аналитической в каждой точке области, за исключением некоторых отдельных точек; позже, при рассмотрении вопроса об аналитическом продолжении, этот термин будет определен более точно. Точки, в которых эта функция не является аналитической, называются *особыми точками*. Знание особых точек функции очень важно, так как эти точки характеризуют данную функцию.

Нам также потребуется другое важное понятие: интеграл по комплексному переменному. Основной теоремой об интегралах по комплексному переменному является *теорема Коши*, которую мы сформулируем так (Копсон [1], стр. 61): если $f(\zeta)$ аналитическая функция, непрерывная на простой спрямляемой замкнутой кривой C и внутри области, ограниченной этой кривой, и если в каждой точке внутри области, ограниченной кривой C , существует $f'(\zeta)$, то

$$\int_C f(\zeta) d\zeta = 0.$$

Отсюда можно вывести *интегральную формулу Коши*: если $f(\zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши и если α — произвольная точка внутри области, ограниченной кривой C , то

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta.$$

Предполагается, что читатель знаком с применением этих теорем к вычислению контурных интегралов при помощи вычетов и с преобразованием путей интегрирования в комплексной плоскости, в частности в том случае, когда подинтегральная функция имеет точки ветвления.

Аналитическая функция, которая регулярна в любой конечной области плоскости ζ , называется *целой функцией*; например, любой полином от ζ есть целая функция, $\exp \zeta$ — также целая функция. Имеет место *теорема Лиувилля*, утверждающая, что если целая функция $f(\zeta)$ при любом ζ удовлетворяет условию $|f(\zeta)| \leq M$, где M — константа, то $f(\zeta)$ является постоянной. Этот результат легко обобщается: если целая функция $f(\zeta)$ удовлетворяет при $|\zeta| \rightarrow \infty$ условию $|f(\zeta)| \leq M|\zeta|^p$, где M и p — константы, то $f(\zeta)$ является полиномом, степень которого не превышает $[p]$, где $[p]$ — целая часть p .

Теорема Тейлора утверждает, что аналитическая функция $f(\zeta)$, регулярная в окрестности $|\zeta - a| < R$ точки $\zeta = a$, может быть представлена в этой окрестности сходящимся степенным рядом

$$f(\zeta) = f(a) + \sum_{r=1}^{\infty} a_r \frac{(\zeta - a)^r}{r!}, \quad a_r = \left[\frac{d^r f}{d\zeta^r} \right]_{\zeta=a}.$$

Нулем аналитической функции $f(\zeta)$ называется значение ζ , при котором $f(\zeta) = 0$. Из теоремы Тейлора можно вывести, что нули аналитической функции представляют собой изолированные точки, т. е. если $f(\zeta)$ регулярна в некоторой области, содержащей точку $\zeta = a$, то существует некоторая область $|\zeta - a| < \rho$ ($\rho > 0$), внутри которой $f(\zeta)$ не имеет нулей, кроме, быть может, самой точки $\zeta = a$.

Если особая точка является изолированной, то можно указать круговое кольцо, внутри которого функция регулярна и представима *рядом Лорана*. Если ряд Лорана имеет вид

$$f(\zeta) = \sum_{r=-n}^{\infty} a_r (\zeta - a)^r, \quad n > 0.$$

то говорят, что функция $f(\zeta)$ имеет в точке a *полюс порядка n* .

В остающейся части этого параграфа мы рассмотрим весьма важное для последующего изложения понятие аналитического продолжения. Так как аналитическое продолжение будет рассматриваться главным образом в связи с преобразованием Фурье, то для удобства обозначим независимое комплексное переменное через $\alpha = \sigma + i\tau$.

Часто оказывается, что то или иное представление функции комплексного переменного применимо только в некоторой области изменения α . Например, пусть функция $f(\alpha)$ определена рядом

$$f(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots$$

который, как нетрудно установить, сходится только при $|\alpha| < 1$, т. е. $f(\alpha)$ определена лишь при $|\alpha| < 1$. Но при $|\alpha| < 1$, очевидно, имеется также другое представление

$$f(\alpha) = (1 - \alpha)^{-1}.$$

Доопределение $f(\alpha)$ путем отождествления ее с $(1 - \alpha)^{-1}$ при $|\alpha| > 1$ называется *аналитическим продолжением*. Аналитическое продолжение можно получить, используя представление функции степенными рядами, однако мы не будем здесь углубляться в этот вопрос. Мы просто положим, что рассматриваемые функции $f(\alpha)$ тем или иным способом определены так, что при движении из некоторой точки $\alpha = a$ комплексной плоскости в другую точку, скажем $\alpha = b$, вдоль непрерывной линии, которая не проходит через особые точки функции, значения $f(\alpha)$ изменяются непрерывно и могут быть найдены из определения $f(\alpha)$. Таким образом, под выражением „аналитическая функция $f(\alpha)$ “ можно понимать всю совокупность значений $f(\alpha)$, которые можно получить при помощи только что описанного аналитического продолжения, отправляясь от заданной точки $\alpha = a$.

Возникает естественный вопрос: будет ли аналитическое продолжение из точки $\alpha = a$ в точку $\alpha = b$ по двум различным путям давать одно и то же значение функции в точке b . Частичный ответ на этот вопрос содержится в следующей теореме (Гитчмарш [2]): если при аналитическом продолжении функции $f(\alpha)$ из точки a в точку b по двум различным путям получаются два различных значения $f(b)$, то между этими путями должна находиться особая точка функции $f(\alpha)$. Обратное утверждение, конечно, неверно: из того, что между двумя путями аналитического продолжения находится особая точка, не следует, что результаты аналитического продолжения $f(b)$ будут различными; только наличие там особых точек специального типа, называемых *точками ветвления*, приводит к различным значениям аналитического продолжения функции.

Если результат аналитического продолжения некоторой функции будет единственным и не будет зависеть от выбора путей, вдоль которых производится продолжение, то такая функция называется *однозначной*. В противном случае функция называется *многозначной*. Точкой ветвления называется особая точка a , у которой не существует окрестности $|\alpha - a| < \epsilon$, в которой функция $f(\alpha)$ однозначна. Проводя в комплексной плоскости определенные линии, которые не должны пересекаться путями аналитического продолжения, можно выделить однозначные *ветви* многозначной функции. Такие линии называются *линиями ветвления*, или *разрезами*. Точки ветвления всегда существуют попарно, и линии ветвления соединяют точки ветвления.

Простым примером многозначной функции является функция $\chi = \alpha^{1/2}$. Одной точкой ветвления будет точка $\alpha = 0$. Другой точкой ветвления будет бесконечно удаленная точка, в чем убеждаемся, сде-

лав подстановку $\alpha = \zeta^{-1}$. Линией ветвления в данном случае может быть любая линия, соединяющая эти две точки. Проведем, например, линию ветвления вдоль отрицательной вещественной оси $-\infty < \sigma \leq 0$. Чтобы выделить однозначные ветви, рассмотрим значения функции в какой-нибудь одной точке, скажем в точке $\alpha = p$, где p — некоторое положительное вещественное число. Условимся обозначать через $p^{1/2}$ арифметическое, т. е. положительное, значение квадратного корня из p . Тогда две ветви функции $\chi = \alpha^{1/2}$ получатся в результате аналитического продолжения от двух значений $\chi = \pm p^{1/2}$ в точке $\alpha = p$. Рассмотрим, например, ветвь, получающуюся при продолжении от значения $\chi = p^{1/2}$; на верхнем берегу разреза вдоль отрицательной вещественной оси имеем $\alpha = r \exp(i\pi)$ и, следовательно, $\chi = ir^{1/2}$; на нижнем берегу имеем $\alpha = r \exp(-i\pi)$ и $\chi = -ir^{1/2}$ соответственно.

Рассмотрим другой выбор линии ветвления. Именно, проведем разрез плоскости α от начала координат до бесконечности по прямой линии, проходящей в верхней полуплоскости. Рассмотрим две функции $\chi = \alpha^{1/2}$ и $\psi = (-\alpha)^{1/2}$, ветви которых выберем следующим образом: у функции χ выберем ту ветвь, которая при $\alpha = p$, где p — положительное вещественное число, обращается в $\chi = +p^{1/2}$, а у функции ψ выберем ветвь, которая равна $\psi = +p^{1/2}$ при $\alpha = -p$. Выполняя аналитическое продолжение, найдем, что при $\alpha = -p$ будет $\chi = -ip^{1/2}$ и при $\alpha = p$ будет $\psi = +ip^{1/2}$. Следовательно, для выбранных таким образом ветвей на любом отрезке вещественной оси имеет место соотношение

$$\chi = -i\psi, \text{ или } \alpha^{1/2} = -i(-\alpha)^{1/2}. \quad (1.10)$$

В теории аналитических функций имеется важная теорема, утверждающая, что если две функции совпадают на какой-нибудь линии конечной длины в комплексной плоскости, то они совпадают в любой области, куда обе они могут быть продолжены вдоль общего пути, начиная из любой точки, в которой они имеют равные значения. Поэтому соотношения (1.10) справедливы для определенных выше ветвей функций χ и ψ в любой точке комплексной плоскости, разрезанной по лучу, проходящему в верхней полуплоскости. Необходимо помнить, что второе соотношение (1.10) имеет место лишь при определенном выборе ветвей правой и левой части и поэтому его нельзя понимать как обычное алгебраическое тождество; например, заменив в нем α на $-\alpha$, мы получим $(-\alpha)^{1/2} = -i\alpha^{1/2}$, что как бы противоречит первоначальному соотношению (1.10). Это кажущееся противоречие объясняется, конечно, тем, что при замене α на $-\alpha$ мы изменяем также положение линии разреза.

Рассмотрим теперь на плоскости α , разрезанной, как показано на рис. 1, следующие функции:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= (\alpha - k)^{1/2}, & \chi_2 &= (\alpha + k)^{1/2}, \\ \chi_3 &= (k - \alpha)^{1/2}, & \chi_4 &= (-k - \alpha)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где $k = k_1 + ik_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Ветви этих функций выберем следующим образом: у функций χ_1 и χ_2 выберем те ветви, которые при $\alpha \rightarrow +\infty$ вдоль положительной вещественной оси стремятся к $+\sigma^{1/2}$, а у функций χ_3 и χ_4 выберем ветви, которые при $\alpha \rightarrow -\infty$ вдоль отрицательной вещественной оси стремятся к $(-\sigma)^{1/2}$. Рассуждая так же, как в предыдущих двух примерах, легко найдем, что

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -ik^{1/2} & \text{при } \alpha = 0, \chi_1 &\rightarrow -l(-\sigma)^{1/2} & \text{при } \alpha = \sigma \rightarrow -\infty; \\ \chi_2 &= k^{1/2} & \text{при } \alpha = 0, \chi_2 &\rightarrow +l(-\sigma)^{1/2} & \text{при } \alpha = \sigma \rightarrow -\infty; \\ \chi_3 &= k^{1/2} & \text{при } \alpha = 0, \chi_3 &\rightarrow +l\sigma^{1/2} & \text{при } \alpha = \sigma \rightarrow +\infty; \\ \chi_4 &= -ik^{1/2} & \text{при } \alpha = 0, \chi_4 &\rightarrow -i\sigma^{1/2} & \text{при } \alpha = \sigma \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Осюда заключаем, что выбранные ветви функций на всей разрезанной плоскости удовлетворяют соотношениям $\chi_3 = i\chi_1$, $\chi_4 = -i\chi_2$, т. е.

$$(k - \alpha)^{1/2} = i(\alpha - k)^{1/2}, \quad (-k - \alpha)^{1/2} = -i(\alpha + k)^{1/2}. \quad (1.12)$$

В соотношении (1.10), как уже отмечалось, нельзя заменять α на $-\alpha$. Напротив, ветви функций χ_i выбраны так, что в любых соотношениях, связывающих χ_i , замена α на $-\alpha$ допустима. Действительно, замена α на $-\alpha$ в соотношениях (1.12) просто преобразует одно из этих соотношений в другое. Однако заменять в этих соотношениях k на $-k$ нельзя; кроме того, в них нельзя переходить к пределу при $k \rightarrow 0$, так как при этом получаются результаты, противоречащие одному другому:

$$\begin{aligned} (-\alpha)^{1/2} &= i\alpha^{1/2}, \\ (-\alpha)^{1/2} &= -i\alpha^{1/2}. \end{aligned}$$

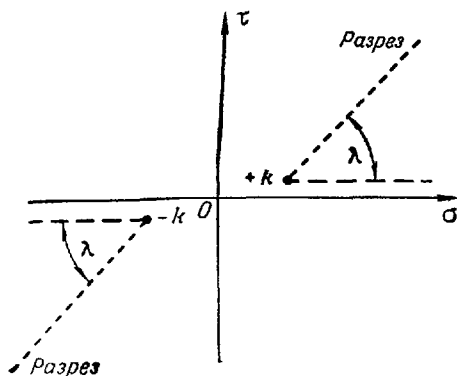


Рис. 1.

В дальнейшем нам придется иметь дело с выражением

$(k \cos \Theta - k)^{1/2}$, где $0 < \Theta < \pi$. Его можно получить из χ_1 , положив $\alpha = k \cos \Theta$, или из χ_4 , положив $\alpha = -k \cos \Theta$. Читатель может легко проверить, что при указанном выше выборе ветвей функций χ результаты получатся одинаковые и что

$$(k \cos \Theta - k)^{1/2} = -l(k - k \cos \Theta)^{1/2} = -l(2k)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \Theta. \quad (1.13a)$$

Аналогично,

$$(-k \cos \Theta - k)^{1/2} = -l(k + k \cos \Theta)^{1/2} = -l(2k)^{1/2} \cos \frac{1}{2} \Theta. \quad (1.136)$$

§ 1.3. Аналитические функции, определяемые интегралами

Наиболее важным примером для нас будет функция $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, причем мы выберем ту ветвь, для которой при $\alpha = \sigma \rightarrow +\infty$ будем иметь $\gamma \rightarrow \sigma$. Используя обозначения (1.11), можно записать

$$\gamma = (\alpha - k)^{1/2} (\alpha + k)^{1/2} = \chi_1 \chi_2 = \chi_3 \chi_4.$$

Тогда, согласно полученным выше результатам, найдем, что при $\alpha = 0$ будет $\gamma = -ik$ и при $\alpha = \sigma \rightarrow -\infty$ будет $\gamma \rightarrow |\sigma|$. Аналогично можно рассмотреть функцию $\kappa = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, причем выберем ветвь, для которой при $\alpha = 0$ будет $\kappa = k$. Соответственно можно записать $\kappa = \chi_2 \chi_3 = -\chi_1 \chi_4$, и если $\alpha = \sigma \rightarrow +\infty$, то $\kappa \rightarrow +i\sigma$, а если $\alpha = \sigma \rightarrow -\infty$, то $\kappa \rightarrow i|\sigma|$. Из равенств (1.12) следуют важные соотношения

$$\gamma = -i\kappa, \quad \kappa = i\gamma, \quad (1.14)$$

справедливые на всей комплексной плоскости, разрезанной так, как показано на рис. 1, причем выбор ветвей функций указан выше.

В частности, если k вещественно, то на вещественной оси плоскости α будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= +(\sigma^2 - k^2)^{1/2}, & \kappa &= +i(\sigma^2 - k^2)^{1/2} & \text{при } \sigma > k; \\ \gamma &= -i(k^2 - \sigma^2)^{1/2}, & \kappa &= +(k^2 - \sigma^2)^{1/2} & \text{при } -k < \sigma < k; \\ \gamma &= +(\sigma^2 - k^2)^{1/2}, & \kappa &= +i(\sigma^2 - k^2)^{1/2} & \text{при } \sigma < -k. \end{aligned} \right\} (1.15)$$

Если угол λ , показанный на рис. 1, устремить к нулю, то линии ветвления расположатся на вещественной оси. При этом соотношения (1.15) останутся справедливыми, если условиться, что вещественная ось при $\sigma < -k$ проходит по *верхнему* берегу разреза, а при $\sigma > k$ — по *нижнему* берегу разреза.

При чтении литературы по методу Винера — Хопфа весьма важно вначале разобраться в том, какие ветви упомянутых выше многозначных функций выбраны. Некоторые авторы используют k с отрицательной мнимой частью, $k = k_1 - ik_2$, ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$), что приводит к другому выбору линий ветвления. Другие используют вместо преобразования Фурье преобразование Лапласа, что соответствует замене α на (is) , а определенной выше функции γ — на функцию $(s^2 + k^2)^{1/2}$. Для разъяснения деталей в конце этой главы будет дано несколько соответствующих примеров.

§ 1.3. Аналитические функции, определяемые интегралами

Нам придется часто иметь дело с функциями, определяемыми интегралами вида

$$G(\alpha) = \int_C g(\alpha, \zeta) d\zeta, \quad (1.16)$$

где $g(\alpha, \zeta)$ — некоторая функция комплексных переменных α и ζ , а C — некоторый путь в комплексной плоскости ζ . Будем считать, что переменная α изменяется внутри некоторой области R , т. е. что граничные точки области R , если таковые имеются, из значений α исключаются. Предположим, что C — гладкий контур, т. е. что его можно представить в параметрическом виде $\zeta = \xi(t) + i\eta(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, причем $\xi'(t)$ и $\eta'(t)$ существуют и непрерывны.

Прежде чем рассматривать условия, при которых функция $G(\alpha)$ будет регулярной, сделаем несколько общих замечаний. Интеграл по комплексному переменному, подобный интегралу (1.16), сводится к вещественным интегралам, которые мы будем понимать в смысле Римана. Конечно, с некоторых точек зрения было бы удобнее предположить, что читатель знаком с интегралом Лебега; тогда теоремы формулировались бы короче и теория имела бы более стройный вид. Однако условия существования интеграла Римана более соответствуют нашим интуитивным представлениям о функциях, встречающихся в физике. Кроме того, почти во всех книгах по теории функций комплексного переменного и теории преобразования Лапласа используется интеграл Римана. В связи с этим в дальнейшем для простоты в условиях теорем обычно будут фигурировать условия только достаточные, но не необходимые.

Установим условия, при которых функция $G(\alpha)$ будет регулярной (см. например Титчмарш [2]).

ТЕОРЕМА А. Пусть функция $g(\alpha, \zeta) = f(\zeta)h(\alpha, \zeta)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Функция $h(\alpha, \zeta)$ — непрерывная функция комплексных переменных α и ζ , когда точка α находится внутри некоторой области R , а точка ζ находится на пути C .

2. Функция $h(\alpha, \zeta)$ как функция переменной α регулярна в R для каждого ζ на C .

3. Функция $f(\zeta)$ имеет на C лишь конечное число разрывов и на каждой конечной части C имеет конечное число максимумов и минимумов.

4. Функция $f(\zeta)$ ограничена, за исключением, быть может, конечного числа точек. Если ζ_0 — одна из этих точек, так что $g(\alpha, \zeta) \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow \zeta_0$, то существует

$$\int_C g(\alpha, \zeta) d\zeta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{C-\delta} g(\alpha, \zeta) d\zeta,$$

где $C - \delta$ означает путь C с исключенным промежутком длины δ , содержащим точку ζ_0 , а $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ означает предельный переход при

стремлении длины исключенного промежутка к нулю. Указанное стремление к пределу должно быть равномерным относительно α в любой замкнутой подобласти R' области R .

Б. Если путь C уходит в бесконечность, то любая конечная часть C должна быть гладкой и на любой конечной части C должны выполняться условия 1 и 2. Несобственный интеграл, определяющий $G(\alpha)$, должен равномерно сходиться относительно α в любой замкнутой подобласти R' области R .

При выполнении перечисленных условий $G(\alpha)$, определяемая интегралом (1.16), будет регулярной функцией α в R .

В частном случае ζ может быть вещественным, скажем $\zeta = \xi$, и путь интегрирования может быть отрезком вещественной оси $a \leq \xi \leq b$. Тогда интеграл (1.16) будет просто интегралом по вещественной переменной

$$G(\alpha) = \int_a^b g(\alpha, \xi) d\xi.$$

Равномерную сходимостъ мы будем обычно доказывать, строя мажорирующую функцию $M(t)$ следующим образом. Пусть t — параметр вдоль пути интегрирования C , $\zeta = \xi(t) + i\eta(t)$, $a \leq t \leq b$, и пусть функция $g(\alpha, \zeta)$ удовлетворяет условиям теоремы А; тогда, если существует функция $M(t)$, такая, что $|g(\alpha, \zeta)| \leq M(t)$ при любом α в R , и если интеграл

$$\int_a^b M(t) |\xi'(t) + i\eta'(t)| dt$$

сходится, то интеграл $\int_C g(\alpha, \zeta) d\zeta$ сходится абсолютно и равномерно в R' .

Теперь рассмотрим некоторые важные для нас следствия. Через σ_+ , σ_- , τ_+ , τ_- будем здесь обозначать вещественные константы.

(1) Если функция переменной $\alpha = \sigma + i\tau$ определена интегралом

$$F_+(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx,$$

причем функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 3 и 4 сформулированной выше теоремы А и $|f(x)| < A \exp(\tau_- x)$ при $x \rightarrow +\infty$, то она регулярна в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$. Аналогично, если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям 3 и 4 и $|f(x)| < B \exp(\tau_+ x)$ при $x \rightarrow -\infty$, то функция

$$F_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\alpha x} dx$$

будет регулярна в нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$. Эти утверждения сразу получаются из теоремы А, так как $\exp(i\alpha x)$ удовлетворяет

условиям 1 и 2, а условия при $x \rightarrow \pm \infty$ обеспечивают равномерную сходимость.

(2) Пусть

$$F_P(s) = \int_0^1 f(\rho) \rho^{s-1} d\rho, \quad F_N(s) = \int_1^\infty f(\rho) \rho^{s-1} d\rho, \quad s = \sigma + i\tau,$$

где функция $f(\rho)$ удовлетворяет условиям 3 и 4 и $|f(\rho)| < A\rho^{-\sigma_-}$ при $\rho \rightarrow 0$, $|f(\rho)| < B\rho^{-\sigma_+}$ при $\rho \rightarrow +\infty$; тогда функция $F_P(s)$ будет регулярна в правой полуплоскости $\sigma > \sigma_-$, а функция $F_N(s)$ будет регулярна в левой полуплоскости $\sigma < \sigma_+$.

(3) Пусть

$$F(\alpha) = \int_{-\infty + ic}^{\infty + ic} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi + ic)}{(\xi - \sigma) + i(c - \tau)} d\xi,$$

где $\alpha = \sigma + i\tau$, $\zeta = \xi + ic$, c — фиксированное число, $f(\xi + ic)$, рассматриваемая как функция ξ , удовлетворяет условиям 3 и 4, а также неравенству $|f(\xi + ic)| < C|\xi|^{-k}$, $k > 0$, при $|\xi| > M$, где M — некоторая постоянная. Тогда $F(\alpha)$ представляет, вообще говоря, разные регулярные функции α при $\tau > c$ и при $\tau < c$. Этот результат опять получается из теоремы А, так как функция $(\zeta - \alpha)^{-1}$ удовлетворяет условиям 1 и 2. Кроме того, если в качестве подобласти R' , упоминаемой в условии 5, мы возьмем замкнутую область $c + \varepsilon \leq \tau \leq K$, $a \leq \sigma \leq b$, то в ней будем иметь

$$|F(\alpha)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(\xi + ic)|}{\{(\xi - \sigma)^2 + (c - \tau)^2\}^{1/2}} d\xi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(u + \sigma + ic)|}{(u^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} du$$

здесь была использована замена $u = \xi - \sigma$. Разобьем интервал интегрирования по u на три участка $(-\infty, A)$, (A, B) , (B, ∞) , так чтобы все разрывы функции f , конечное число которых допускается условиями 3 и 4, находились на интервале (A, B) , а также чтобы выполнялись неравенства $A < -(M + b)$, $B > (M - a)$. Тогда на интервалах $(-\infty, A)$ и (B, ∞) будет выполняться неравенство $|f(u + \sigma + ic)| < C|u + \sigma|^{-k}$, $k > 0$, и интеграл будет абсолютно сходиться, независимо от положения точки α в области R' .

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА В. Пусть $f(\alpha)$ — аналитическая функция $\alpha = \sigma + i\tau$, регулярная в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ и такая, что $|f(\sigma + i\tau)| < C|\sigma|^{-p}$, $p > 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, причем это неравенство выполняется равно-

§ 1.3. Аналитические функции, определяемые интегралами

мерно для всех τ в полосе $\tau_- + \varepsilon \leq \tau \leq \tau_+ - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда при $\tau_- < \sigma < \tau < d < \tau_+$

$$f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha),$$

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ic}^{\infty + ic} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \quad f_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + id}^{\infty + id} \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \quad (1.17)$$

где функция $f_+(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а функция $f_-(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau < \tau_+$.

Утверждения теоремы, относящиеся к регулярности функций f_+ и f_- , доказываются аналогично разобранному выше следствию (3). Чтобы доказать справедливость равенства (1.17), применим интегральную формулу Коши к прямоугольнику с вершинами $\pm a + ic$, $\pm a + id$. В силу сделанного выше предположения о поведении функции $f(\alpha)$ в полосе при $|\sigma| \rightarrow \infty$ интегралы по сторонам $\sigma = \pm a$ стремятся к нулю при $a \rightarrow \infty$, и мы получаем требуемое равенство.

Рассмотрим, например,

$$f(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - k \cos \theta)(\alpha + k)^{1/2}}, \quad k = k_1 + ik_2 \quad (k_1 > 0, k_2 > 0)$$

$$\tau_- = -k_2, \quad \tau_+ = k_2 \cos \theta, \quad (1.18)$$

где $-\pi < \theta < \pi$. Функция $f(\alpha)$ имеет простой полюс при $\alpha = k \cos \theta$ и точку ветвления при $\alpha = -k$. Проведем разрез вдоль линии, идущей от $-k$ до бесконечности в нижней полуплоскости, выберем точку α так, чтобы $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta$, и замкнем пути интегрирования для функций $f_+(\alpha)$ и $f_-(\alpha)$ полуокружностями в верхней полуплоскости. Подинтегральное выражение для функции $f_+(\alpha)$ имеет два простых полюса при $\zeta = \alpha$, $\zeta = k \cos \theta$, так что

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{\alpha - k \cos \theta} \left[\frac{1}{(\alpha + k)^{1/2}} - \frac{1}{(k + k \cos \theta)^{1/2}} \right],$$

и эта функция, очевидно, регулярна при $\tau > -k_2$. Подинтегральное выражение для функции $f_-(\alpha)$ имеет только простой полюс при $\zeta = k \cos \theta$, что дает

$$f_-(\alpha) = \frac{1}{(\alpha - k \cos \theta)(k + k \cos \theta)^{1/2}},$$

функцию, регулярную при $\tau < k \cos \theta$. Эти результаты очевидны, и их можно было бы просто угадать без применения теоремы В. (Более общий результат см. в задаче 1.7.)

Теперь рассмотрим факторизацию произвольной функции $K(\alpha)$, т. е. представление этой функции в виде произведения $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$, где K_+ и K_- регулярны и не имеют нулей в верхней и нижней полуплоскостях $\tau > \tau_-$, $\tau < \tau_+$, соответственно,

причем $\tau_- < \tau_+$. Иногда такое представление удается угадать; например, если

$$K(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \quad k = k_1 + ik_2 \quad (k_1 > 0, k_2 > 0)$$

и плоскость α разрезана, как показано на рис. 1, то можно написать $K_+(\alpha) = (\alpha + k)^{1/2}$ (регулярна и не имеет нулей при $\tau > -k_2$) и $K_-(\alpha) = (\alpha - k)^{1/2}$ (регулярна и не имеет нулей при $\tau < k_2$). Такое представление, очевидно, не единственно, так как можно одновременно умножить K_+ и разделить K_- на любую целую функцию, не имеющую нулей. Это замечание пригодится нам позже, Другой пример, где ответ можно угадать, будет дан в задаче 1.11.

Если $K(\alpha)$ — целая функция, которую можно представить в виде бесконечного произведения (см. задачу 1.9 ниже), то факторизация получается сразу. Для нас, в частности, важен случай, когда $K(\alpha)$ — четная функция α . Тогда если $\alpha = \alpha_n$ — нуль функции, то нулем будет и $\alpha = -\alpha_n$, и, кроме того, $K'(0) = 0$. Согласно результатам задачи 1.9, четная функция $K(\alpha)$ может быть записана в виде

$$K(\alpha) = K(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_n} \right)^2 \right].$$

Отсюда находим

$$K_{\pm}(\alpha) = [K(0)]^{1/2} e^{\mp \chi(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 \pm \left(\frac{\alpha}{\alpha_n} \right) \right] e^{\mp (\alpha/\alpha_n)}; \quad (1.19)$$

здесь везде надо брать одновременно либо верхние знаки, либо нижние; все нули функции $K_+(\alpha)$ лежат при этом, очевидно, в нижней полуплоскости, а нули функции $K_-(\alpha)$ — в верхней. Поэтому функция $K_+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей в верхней полуплоскости, $\text{Im } \alpha > -\text{Im } \alpha_1$. Функция $\chi(\alpha)$ произвольна и может быть выбрана так, чтобы функции K_+ , K_- при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях вели себя должным образом. Бесконечные произведения для K_+ и K_- имеют, вообще говоря, экспоненциальный рост при $\alpha \rightarrow \infty$, в то время как нас будет интересовать факторизация функций, имеющих алгебраический рост на бесконечности благодаря наличию дополнительных множителей перед бесконечным произведением. Это обстоятельство облегчает выбор функции $\chi(\alpha)$, однако более подробное рассмотрение этого вопроса целесообразно отложить до конкретных примеров в § 3.2 (см. задачи 3.3 — 3.6). Следует подчеркнуть, что правильный выбор функции $\chi(\alpha)$ является решающим для успешного применения метода Винера — Хопфа.

Если функция, которую надо факторизовать, имеет точку ветвления, то использованный выше метод бесконечных произведений не годится. Мы приводим теорему, доказывающую возможность факторизации $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ для весьма общего класса функ-

ций $K(\alpha)$. Эта теорема дает также практический метод выполнения факторизации, если элементарные методы не применимы.

ТЕОРЕМА С. Если $\ln K(\alpha)$ удовлетворяет условиям теоремы В (а это означает, в частности, что функция $K(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$) и $K(\alpha) \rightarrow 1$ при $\sigma \rightarrow \pm \infty$ в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, то существует представление $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$, где $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ регулярные, ограниченные и не имеющие нулей функции при $\tau > \tau_-$, $\tau < \tau_+$ соответственно.

(Можно доказать аналогичную теорему при менее ограничительных условиях, но для целей этой книги данная формулировка вполне достаточна. Чтобы обратить внимание читателя на ряд вопросов, с которыми он может столкнуться в более сложных примерах, в задаче 1.12 будет сформулирована более общая теорема, которая, в частности, охватывает случаи, когда $K(\alpha)$ имеет нули внутри полосы, а также случаи, когда $K(\alpha) \rightarrow \exp(i\mu)$, $K(\alpha) \rightarrow \exp(i\nu)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, $\sigma \rightarrow -\infty$ соответственно, и наконец, когда $|K(\alpha)| \sim |\sigma|^p$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ в полосе.)

Для доказательства теоремы С применим теорему В к функции $f(\alpha) = \ln K(\alpha)$. Имеем

$$\ln K(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{\ln K(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta = f_+(\alpha) + f_-(\alpha), \quad (1.20)$$

где c и d — любые числа, удовлетворяющие неравенствам $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$. Интеграл для $f_+(\alpha)$ сходится при всех α в полуплоскости $\tau > c$. Так как c можно выбрать сколь угодно близким к τ_- , то функция $f_+(\alpha)$ ограничена и регулярна при $\tau > \tau_-$. Аналогично, функция $f_-(\alpha)$ ограничена и регулярна при $\tau < \tau_+$. Полагая

$$K_+(\alpha) = \exp\{f_+(\alpha)\}, \quad K_-(\alpha) = \exp\{f_-(\alpha)\}, \quad (1.21)$$

будем иметь

$$\ln K_+(\alpha) + \ln K_-(\alpha) = \ln K(\alpha),$$

или

$$K_+(\alpha)K_-(\alpha) = K(\alpha).$$

Из свойств $f_+(\alpha)$ следует, что функция $K_+(\alpha)$ регулярна, ограничена и не имеет нулей при $\tau > \tau_-$. Аналогично, функция $K_-(\alpha)$ регулярна, ограничена и не имеет нулей при $\tau < \tau_+$. Таким образом, построив функции $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$, обладающие требуемыми свойствами, мы доказали теорему С.

Наличие логарифмических функций в равенстве (1.20) часто затрудняет интегрирование. Более простые интегралы иногда можно получить следующим образом. Мы имеем

$$\ln K(\alpha) = \ln K_+(\alpha) + \ln K_-(\alpha).$$

Дифференцируя по α , получаем

$$\frac{K'(\alpha)}{K(\alpha)} = \frac{K'_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{K'_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}. \quad (1.22)$$

Разлагая левую часть по теореме В, можем положить

$$\frac{K'_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} = f_+(\alpha), \quad \frac{K'_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} = f_-(\alpha)$$

и после интегрирования по α найти $\ln K_+(\alpha)$ и $\ln K_-(\alpha)$. Пример такого рода будет дан в задаче 2.10.

Очевидно, что при практическом применении теорем В и С главная трудность заключается в вычислении комплексных интегралов (1.17) и (1.20). Если подинтегральные выражения имеют простые полюсы и не имеют точек ветвления, то положение сравнительно просто, так как интегралы можно вычислить с помощью вычетов. Однако в этих случаях разложение обычно можно выполнить непосредственно более элементарными методами; например, в случае теоремы В мы отмечали, что для функции (1.18) разложение можно угадать, а в случае теоремы С читатель легко убедится, что вычисление интеграла с помощью вычетов эквивалентно применению указанного выше метода бесконечных произведений.

Укажем теперь два результата, полезных при вычислении интегралов типа (1.17) и (1.20). Предположим, что $f(\alpha)$ — четная функция α , регулярная при $-k_2 < \tau < k_2$ и удовлетворяющая условиям теоремы В. Тогда для $-k_2 < d < k_2$

$$f_-(-\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta + \alpha} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-id-\infty}^{-id+\infty} \frac{f(-\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = f_+(\alpha),$$

или

$$f_-(-\alpha) = f_+(\alpha), \quad f_+(-\alpha) = f_- (+\alpha). \quad (1.23)$$

Вместо непосредственного вычисления интегралов в формуле (1.20) обычно удобно ввести функцию $g(\alpha)$ следующим образом. Предположим, что $K(\alpha)$ — четная функция, регулярная при $-k_2 < \tau < k_2$ и удовлетворяющая условиям теоремы С. Мы имеем

$$f_+(\alpha) + f_-(\alpha) = f(\alpha), \quad \text{где } f(\alpha) = \ln K(\alpha).$$

Положим

$$f_+(\alpha) - f_-(\alpha) = g(\alpha); \quad (1.24)$$

тогда

$$f_+(\alpha) = \frac{1}{2} f(\alpha) + \frac{1}{2} g(\alpha), \quad f_-(\alpha) = \frac{1}{2} f(\alpha) - \frac{1}{2} g(\alpha). \quad (1.25)$$

Так как $f_-(\alpha) = f_+(-\alpha)$, то $g(\alpha) = -g(-\alpha)$. Подставляя в равенство (1.25) выражения функций $f(\alpha)$ через функции $K(\alpha)$, получаем

$$\ln K_+(\alpha) = \frac{1}{2} \ln K(\alpha) + \frac{1}{2} g(\alpha), \quad \ln K_-(\alpha) = \frac{1}{2} \ln K(\alpha) - \frac{1}{2} g(\alpha),$$

или

$$K_+(\alpha) = [K(\alpha)]^{1/2} e^{1/2 g(\alpha)}, \quad K_-(\alpha) = [K(\alpha)]^{1/2} e^{-1/2 g(\alpha)}. \quad (1.26)$$

Иногда оказывается легче вычислить интеграл для $g(\alpha)$, чем интегралы для $f_+(\alpha)$ и $f_-(\alpha)$ по отдельности. Если α вещественно, скажем $\alpha = \xi$, и в качестве пути интегрирования в равенстве (1.20) можно выбрать веществен-

ную ось ($c \rightarrow -0$, $d \rightarrow +0$), то, используя результат задачи 1.24, получаем

$$f_+(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) + \frac{1}{2} g(\xi), \quad f_-(\xi) = \frac{1}{2} f(\xi) - \frac{1}{2} g(\xi), \quad (1.27a)$$

где

$$g(\xi) = \frac{1}{\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\xi} dx, \quad (1.27b)$$

причем символ V. P. означает, что интеграл берется в смысле главного значения по Коши

В наших приложениях наиболее важны те точки ветвления, которые возникают в случае, когда подынтегральные выражения являются функциями от $\gamma = (a^2 - k^2)^{1/2}$. Для иллюстрации рассмотрим случай, когда $f(a)$ в формулах (1.17) является функцией только от $\gamma a = a(a^2 - k^2)^{1/2}$, скажем $f(a) = F(\gamma a)$, где постоянная a введена для удобства. Обратимся к интегралу для $f_-(a)$ и рассмотрим последовательно три способа его вычисления. Мы имеем

$$f_-(a) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{F[(\zeta^2 - k^2)^{1/2} a]}{\zeta - a} d\zeta, \quad (1.28)$$

где $\tau < d$ и $-k_2 < d < k_2$. Предположим, что в случае надобности путь интегрирования можно деформировать так, что он будет лежать в верхней полуплоскости и в процессе деформации не пересечет ни одного из полюсов подынтегрального выражения (Если бы путь интегрирования при деформации проходил через полюсы, то их вклад можно было бы учесть обычным способом). Аналогично, мы не будем учитывать вклада в интеграл, обусловленного полюсами при $a = \pm k$, если таковые имеются. Три различных способа вычисления интеграла, которые будут рассмотрены ниже, соответствуют различным выборам линий разреза, как это показано на рис. 2. Предполагается, что a, k вещественны и что $-k < a < k$. Для определения того, каким образом путь интегрирования должен обходить особые точки, удобно сначала представить себе этот чертеж в общем случае $\text{Im } a < 0$, $\text{Im } k > 0$, а затем осуществить предельный переход при $\text{Im } a \rightarrow -0$, $\text{Im } k \rightarrow +0$. Если a расположено вне интервала $(0, k)$, то обходы особых точек и их вклады должны быть соответствующим образом изменены.

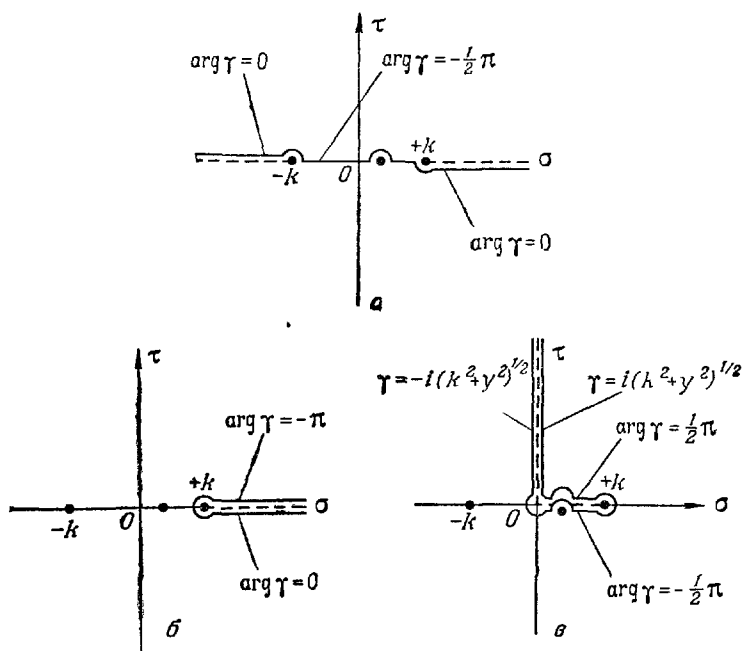
а) Рассмотрим прежде всего просто предельный случай равенства (1.28), когда $k_2 \rightarrow 0$, разрезы проведены вдоль вещественной оси от $+k$ до $+\infty$ и от $-k$ до $-\infty$, а путь интегрирования совпадает с вещественной осью и обходит точку ветвления $\zeta = -k$ сверху, точку ветвления $\zeta = +k$ снизу и точку $\zeta = a$ сверху. Значения $\arg \gamma$ показаны на рис. 2, а. Чтобы подчеркнуть, что a равно вещественному числу, будем писать $a = \xi$. Рассуждая так же, как и при выводе равенств (1.27), получаем

$$f_+(\xi) = \frac{1}{2} F[(\xi^2 - k^2)^{1/2}] + \frac{1}{2} g(\xi), \quad f_-(\xi) = \frac{1}{2} F[(\xi^2 - k^2)^{1/2} a] - \frac{1}{2} g(\xi), \quad (1.29)$$

где

$$g(\xi) = \frac{1}{\pi i} \text{V. P.} \int_{-k}^k F[(x^2 - k^2)^{1/2} a] \frac{dx}{x-\xi} + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{-k} F[(x^2 - k^2)^{1/2} a] \frac{dx}{x-\xi} + \frac{1}{\pi i} \int_k^{\infty} F[(x^2 - k^2)^{1/2} a] \frac{dx}{x-\xi}.$$

Заменяя во втором интеграле x на $-x$, объединяем его с третьим интегралом. Первый интеграл разбиваем на два интеграла по интервалам $(-k, 0)$ и $(0, k)$, а затем объединяем эти интегралы в один интеграл по интервалу $(0, k)$. Заменяя, наконец, переменную интегрирования в интервале (k, ∞) по



Р и с. 2. ----- линия разреза; ————— путь интегрирования.

формуле $(x^2 - k^2) a^2 = u^2$, а в интервале $(0, k)$ по формуле $(k^2 - x^2) a^2 = u^2$, получаем

$$g(\xi) = \frac{2\xi a}{\pi i} \text{V. P.} \int_0^{ka} \frac{F(-iu)}{a^2(k^2 - \xi^2) - u^2} \frac{u du}{(k^2 a^2 - u^2)^{1/2}} + \frac{2\xi a}{\pi i} \int_0^\infty \frac{E(u)}{u^2 + a^2(k^2 - \xi^2)} \frac{u du}{(k^2 a^2 + u^2)^{1/2}}. \quad (1.30)$$

б. На рис. 2, б путь интегрирования деформирован так, что он проходит по обоим берегам разреза вдоль вещественной оси от $+k$ до $+\infty$. Если ввести обозначение $\zeta = x + iy$, то на нижнем берегу разреза $(\zeta^2 - k^2)^{1/2} = +(x^2 - k^2)^{1/2}$, а на верхнем $(\zeta^2 - k^2)^{1/2} = -(x^2 - k^2)^{1/2}$. Следовательно, для $\xi < k$ получим

$$f_-(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_k^\infty \{F[(x^2 - k^2)^{1/2} a] - F[-(x^2 - k^2)^{1/2} a]\} \frac{dx}{x - \xi}. \quad (1.31)$$

Далее, $f_+(\xi) = f_-(-\xi)$, как и в первом из равенств (1.23), и так же, как в формулах (1.24), (1.25), удобно положить $g(\xi) = f_+(\xi) - f_-(-\xi)$. Вводя новую переменную интегрирования по формуле $u^2 = (x^2 - k^2)a^2$, найдем

$$g(\xi) = \frac{\xi a}{\pi i} \int_0^\infty \frac{F(u) - F(-u)}{u^2 + a^2(k^2 - \xi^2)} \frac{u du}{(u^2 + k^2 a^2)^{1/2}}. \quad (1.32)$$

в. Наконец, рассмотрим путь интегрирования, изображенный на рис. 2, в. Объединяя интегралы вдоль обоих берегов разреза на участках от 0 до k по x и от 0 до ∞ по y , получаем

$$\begin{aligned} f_-(\xi) &= \frac{1}{2} \{ F[-i(k^2 - \xi^2)^{1/2} a] - F[i(k^2 - \xi^2)^{1/2} a] \} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \{ F[i(k^2 + y^2)^{1/2} a] - F[-i(k^2 + y^2)^{1/2} a] \} \frac{dy}{iy - \xi} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_0^k \{ F[i(k^2 - x^2)^{1/2} a] - F[-i(k^2 - x^2)^{1/2} a] \} \frac{dx}{x - \xi}. \end{aligned}$$

Если $-k < \xi < 0$, то в правой части не будет первого члена, а перед вторым интегралом можно будет опустить символ V. P. Рассуждая далее так же, как в случае б, получаем

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{\xi}{|\xi|} \{ F[i(k^2 - \xi^2)^{1/2} a] - F[-i(k^2 - \xi^2)^{1/2} a] \} - \\ &- \frac{\xi}{\pi} \int_0^\infty \{ F[i(k^2 + y^2)^{1/2} a] - F[-i(k^2 + y^2)^{1/2} a] \} \frac{dy}{y^2 + \xi^2} - \\ &- \frac{\xi a}{\pi i} \text{V. P.} \int_0^{ka} \frac{F(iu) - F(-iu)}{a^2(k^2 - \xi^2) - u^2} \frac{u du}{(k^2 a^2 - u^2)^{1/2}}. \quad (1.33) \end{aligned}$$

Очевидно, что преобразование интеграла наиболее просто получится в случае а, в то время как в случаях б и в надо учесть возможность вклада от полюсов при деформации контура. Выражение, которое было получено в случае б, удобно, когда $F(u) - F(-u)$ (u вещественно) имеет простой вид; кроме того, в этом случае при $|\xi| < k$ никакие интегралы в смысле главного значения по Коши не появляются. Выражение, которое было получено в случае в, удобно, если простой вид имеет $F(iu) - F(-iu)$; кроме того, при $|\xi| > k$ оно не содержит интегралов в смысле главного значения по Коши. Поучительные примеры использования интегралов такого вида при факторизации можно найти в работах Г. Левина и Швингера [1], Л. А. Вайнштейна [1, 3] и Честера [1].

В общем случае $k = k_1 + ik_2$, $k_2 > 0$ возможны различные формы пути интегрирования, которые при $k_2 \rightarrow 0$ сводятся к уже рассмотренным. Например, путь интегрирования от $+k$ до ∞ можно провести: 1) вдоль прямой линии от $k = k_1 + ik_2$ до $\infty + ik_2$ параллельно оси x , 2) вдоль луча, проходящего из начала координат через точку k , 3) вдоль части гиперболы, проходящей через точку k и определяемой уравнением $\xi\eta = k_1 k_2$ ($\zeta = \xi + i\eta$), на которой $\gamma = (\zeta^2 - k^2)^{1/2}$ вещественна.

Рассмотрим пример на разобранный выше случай б):

$$K(\alpha) = e^{-\gamma d}, \quad \ln K(\alpha) = -\gamma d = -(\alpha^2 - k^2)^{1/2} d. \quad (1.34)$$

Теорему В нельзя применить непосредственно к функции $\ln K(\alpha)$, так как эта функция неограниченно возрастает при $\alpha \rightarrow \infty$, но можно записать

$$\ln K(\alpha) = d(k^2 - \alpha^2)(\alpha^2 - k^2)^{-1/2}.$$

Множитель $(k^2 - \alpha^2)$ — целая функция, а к функции $(\alpha^2 - k^2)^{-1/2} = \gamma^{-1}$ мы можем применить теорему В. По формуле (1.32), положив $F(u) = u^{-1}$, $a = 1$, найдем

$$g(\xi) = \frac{2\xi}{\pi i} \int_0^\infty \frac{1}{u^2 + k^2 - \xi^2} \frac{du}{(u^2 + k^2)^{1/2}}.$$

Используем интеграл

$$\int \frac{du}{(u^2 + p)(u^2 + q)^{1/2}} = \frac{1}{p^{1/2}(q-p)^{1/2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{u(q-p)^{1/2}}{p^{1/2}(u^2 + q)^{1/2}} \right], \quad q > p.$$

Отсюда при $0 \leq \xi \leq k$

$$g(\xi) = f_+(\xi) - f_-(\xi) = \frac{2}{\pi i (k^2 - \xi^2)^{1/2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\xi}{(k^2 - \xi^2)^{1/2}}.$$

Но так как

$$f_+(\xi) + f_-(\xi) = (\xi^2 - k^2)^{-1/2} \quad \text{и} \quad i(k^2 - \xi^2)^{1/2} = -(\xi^2 - k^2)^{1/2},$$

то

$$\begin{aligned} f_+(\xi) &= \pi^{-1} (\xi^2 - k^2)^{-1/2} \left\{ \frac{1}{2} \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(\xi^2 - \xi^2)^{-1/2}] \right\} = \\ &= \pi^{-1} (\xi^2 - k^2)^{-1/2} \operatorname{arc} \cos (\xi/k) = \\ &= \frac{2}{\pi} (\xi^2 - k^2)^{-1/2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{k - \xi}{k + \xi} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где выбрана та ветвь арккосинуса, для которой при $\xi = 0$ $\operatorname{arc} \cos 0 = \pi/2$. Заменяя в полученном выражении ξ на α , получаем аналитическое продолжение $f_+(\alpha)$, если взять ветви функций, принимающие найденные значения при $\alpha = \xi$ (ξ вещественно, $0 \leq \xi \leq k$). В этом случае

$$\operatorname{arc} \cos (\alpha/k) = +i \ln [(a + \gamma)/k], \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}.$$

Отсюда при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости аналитическое продолжение дает

$$\begin{aligned} \operatorname{arc} \cos (\alpha/k) &= -i \ln (2\alpha/k) + O(|\alpha|^{-2}), \\ (\alpha^2 - k^2)^{1/2} &= -\alpha + O(|\alpha|^{-2}). \end{aligned}$$

Таким образом, возвращаясь к равенству (1.34), мы получаем при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости факторизацию следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} K_+(\alpha) &= \exp \{-T_+(\alpha)\}; & K_-(\alpha) &= \exp \{-T_-(\alpha)\}; \\ T_+(\alpha) &= \pi^{-1} d (\alpha^2 - k^2)^{1/2} \operatorname{arc} \cos (\alpha/k), & T_-(\alpha) &= T_+(-\alpha); \\ T_+(\alpha) &= (i d \alpha / \pi) \ln (2\alpha/k) + O(|\alpha|^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

Другой метод, которым могут быть получены эти результаты, будет указан в задаче 1.25.

§ 1.4. Преобразование Фурье

С самого начала необходимо решить, следует ли пользоваться преобразованием Фурье или преобразованием Лапласа. В литературе по методу Винера — Холфа используются оба преобразования, и в комплексной плоскости они полностью эквивалентны, что будет ясно из дальнейшего. Исключительно в целях единообразия изложения в этой книге мы будем всюду использовать преобразование Фурье.

Прямое и обратное преобразование Фурье имеет вид

$$F(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.36)$$

где α обычно считается вещественным. Прямое и обратное преобразование Лапласа обычно определяют так:

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{F}(s) e^{sx} ds, \quad c > c_0, \quad (1.37)$$

где второй интеграл автоматически дает $f(x) = 0$ при $x < 0$. Преобразование Лапласа, соответствующее формулам (1.36), так называемое двустороннее преобразование Лапласа, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathcal{F}(s) e^{sx} ds, \quad c_1 < c < c_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.38)$$

Преобразование Фурье, соответствующее формулам (1.37), имеет вид

$$F(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.39)$$

где второй интеграл автоматически дает $f(x) = 0$ при $x < 0$. Эта форма преобразования Фурье используется редко.

Иногда утверждают, что использование преобразования Лапласа более предпочтительно, нежели использование преобразования Фурье, так как область применения преобразования Лапласа шире. При этом обычно ссылаются на пример $f(x) = 1$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$ при $x < 0$. Согласно формулам (1.37), преобразование Лапласа этой функции равно s^{-1} , в то время как при вещественном α интеграл в первой формуле (1.39) для этой функции расходится. Это верно лишь постольку, поскольку мы считаем α и s вещественными, но если α и s считать комплексными, то мы получим просто эквивалентные утверждения: если $f(x) = 1$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$ при

$x < 0$, то преобразование Лапласа $f(x)$ равно s^{-1} при $\text{Re } s > 0$, а преобразование Фурье $f(x)$ равно ta^{-1} при $\text{Im } a > 0$. Эта полная эквивалентность преобразований Фурье и Лапласа будет еще раз подчеркнута ниже в этом же параграфе. Некоторым преимуществом преобразования Лапласа может быть то, что мы уже привыкли считать параметр s комплексным, поэтому и пределы интегрирования и условие $c > c_0$ в формулах (1.37) автоматически подразумевают, что s комплексно.

Предположим сначала, что α в формулах (1.36) вещественно, и посмотрим, как надо изменить эти формулы, если допустить, что α может принимать комплексные значения. Для наших целей нет необходимости устанавливать точные условия, которые надо наложить на функцию $f(x)$. Мы ограничимся следующим: интегралы понимаются в смысле Римана, функция $f(x)$ может иметь лишь конечное число бесконечных разрывов и не должна быть обязательно абсолютно интегрируемой в бесконечном интервале; таким образом, можно рассматривать, например, следующие преобразования Фурье:

$$f(x) = \begin{cases} (a^2 - x^2)^{-1/2} & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases} \quad F(\alpha) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} J_0(a\alpha);$$

$$f(x) = \begin{cases} x^{\nu-1} \quad (0 < \nu < 1) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad F(\alpha) = (2\pi)^{-1/2} \Gamma(\nu) e^{1/2 i \pi \nu} \alpha^{-\nu}.$$

(Заметим, что в работе Винера и Хопфа используется интеграл Лебега. В силу стройности и общности получающихся результатов представляется весьма заманчивым положить в основу изложения теорию Планшереля; однако такое стремление к строгости не соответствовало бы духу остальной части этой книги.)

Предположим теперь, что α комплексное, $\alpha = \sigma + i\tau$, и покажем, что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. Пусть $f(x)$ — функция вещественного переменного x , такая, что $|f(x)| \leq A \exp(\tau_- x)$ при $x \rightarrow +\infty$, и $|f(x)| \leq B \exp(\tau_+ x)$ при $x \rightarrow -\infty$, причем $\tau_- < \tau_+$; пусть, кроме того, существует τ_0 , $\tau_- < \tau_0 < \tau_+$, такое, что к функции $f(x) \exp(-\tau_0 x)$ можно применить преобразование Фурье для вещественного переменного в виде (1.36). Тогда интеграл

$$F(\alpha) = \frac{1}{i(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx \quad (1.40)$$

определяет аналитическую функцию $F(\alpha)$ от $\alpha = \sigma + i\tau$, регулярную в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, и при любом τ , $\tau_- < \tau < \tau_+$, имеет место равенство

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha. \quad (1.41)$$

Утверждение об аналитичности $F(\alpha)$ получается сразу из следствия (1) теоремы А § 1.3. Чтобы доказать справедливость равенства (1.41), подставим в правую часть этого равенства значение (1.40) для $F(\alpha)$; результат будет таков:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Вводя здесь новую переменную интегрирования $\sigma = \alpha - i\tau$, $d\alpha = d\sigma$, получим

$$\frac{1}{2\pi} e^{\tau x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sigma x} \int_{-\infty}^{\infty} \{f(\xi) e^{-\tau\xi}\} e^{i\sigma\xi} d\xi d\sigma.$$

Применяя формулу преобразования Фурье (1.36), окончательно получаем

$$e^{\tau x} \{f(x) e^{-\tau x}\} = f(x).$$

Возможность применения преобразования Фурье к функции $f(x) \exp(-\tau x)$ при любом τ ($\tau_- < \tau < \tau_+$) вытекает из предположения о поведении функции $f(x)$ при $x \rightarrow \pm \infty$ и предположения о справедливости формул (1.36) при $\tau = \tau_0$.

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = 1$ при $x > 0$ и $f(x) = e^x$ при $x < 0$, для которой можно взять $\tau_- = 0$ и $\tau_+ = 1$; тогда $F(\alpha)$ должна быть регулярной при $0 < \tau < 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left[\int_0^{\infty} e^{i\alpha x} dx + \int_{-\infty}^0 e^{(1+i\alpha)x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(-\frac{1}{i\alpha} + \frac{1}{1+i\alpha} \right), \end{aligned} \quad (1.42)$$

причем первый интеграл сходится только при $\tau > 0$, а второй интеграл сходится только при $\tau < 1$. Функция $F(\alpha)$, как и следовало ожидать, имеет особенности на линиях $\tau = 0$ и $\tau = 1$.

Обращением теоремы А является следующая теорема.

ТЕОРЕМА В. Пусть функция $F(\alpha)$, $\alpha = \sigma + i\tau$, регулярна в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ и пусть $|F(\alpha)| \rightarrow 0$ равномерно, когда $|\sigma| \rightarrow \infty$ в полосе $\tau_- + \varepsilon \leq \tau \leq \tau_+ - \varepsilon$, где ε — произвольное положительное число. Тогда для функции $f(x)$, определенной интегралом

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{i\tau_-}^{i\tau_+} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (1.43)$$

где τ выбрано так, что $\tau_- < \tau < \tau_+$, а x — вещественно, имеет место соотношение

$$F(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx. \quad (1.44)$$

Кроме того, $|f(x)| < \exp(\tau_- + \delta)x$ при $x \rightarrow +\infty$ и $|f(x)| < \exp(\tau_+ - \delta)x$ при $x \rightarrow -\infty$, где δ — сколь угодно малое положительное число. Функцию $f(x)$, определенную формулой (1.43), можно рассматривать как решение интегрального уравнения (1.44).

Для доказательства этой теоремы выберем c и d так, чтобы они удовлетворяли неравенствам $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$, где τ — мнимая часть α в равенстве (1.43). Подставляя выражение (1.43) в правую часть равенства (1.44), находим

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} dx \int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} e^{-i\beta x} F(\beta) d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} dx \int_{id-\infty}^{id+\infty} e^{-i\beta x} F(\beta) d\beta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} dx \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} e^{-i\beta x} F(\beta) d\beta. \end{aligned}$$

При этом, после разбиения внешнего интеграла на два, мы сдвинули пути интегрирования во внутренних интегралах без изменения их значений так, чтобы после перемены порядка интегрирования внутренние интегралы сходились. Действительно, в первом интеграле $\text{Im}(\alpha - \beta) < 0$, $x < 0$, а во втором интеграле $\text{Im}(\alpha - \beta) > 0$, $x > 0$. После перемены порядка интегрирования и вычисления внутренних интегралов будем иметь

$$I = -\frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{F(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta + \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{F(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(\beta)}{\beta - \alpha} d\beta,$$

где C — замкнутый контур, получающийся в пределе из прямоугольника с вершинами $(\pm A, c)$, $(\pm A, d)$ при $A \rightarrow \infty$, причем этот прямоугольник обходится в положительном направлении. Так как по условию функция $F(\alpha)$ равномерно стремится к нулю при $|\sigma| \rightarrow \infty$ в полосе $c \leq \tau \leq d$, то интегралы по вертикальным сторонам прямоугольного контура в пределе обращаются в нуль. Используя, наконец, интегральную формулу Коши, найдем, что $I = F(\alpha)$, что и требовалось доказать. Далее, если $|f(x)| < \exp(px)$ при $x \rightarrow \infty$ и $|f(x)| < \exp(qx)$ при $x \rightarrow -\infty$, то из формулы (1.44) следует, что $F(\alpha)$ регулярна при $p < \tau < q$. Однако, по условию, $F(\alpha)$ регулярна при $\tau_- < \tau < \tau_+$. Следовательно, можно положить $p = \tau_- + \delta$, $q = \tau_+ - \delta$, где δ — произвольно малое положительное число.

§ 1.4. Преобразование Фурье

Частный случай этой теоремы, а именно случай, когда либо τ_+ , либо τ_- бесконечно, сформулируем, ввиду его важности, как отдельную теорему

ТЕОРЕМА С. Пусть функция $F(\alpha)$ от $\alpha = \sigma + i\tau$ регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$ и пусть $F(\alpha) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, где r определяется соотношением $\alpha - i\tau_- - i\varepsilon = r \exp(i\theta)$, в котором $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, причем стремление к пределу равномерное при $0 \leq \theta \leq \pi$. Тогда для функции $f(x)$, определенной для вещественных x интегралом (1.43), при любом фиксированном $\tau > \tau_-$ имеет место соотношение

$$F(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx, \quad (1.45)$$

и функцию $f(x)$, определенную интегралом (1.43), можно рассматривать как решение интегрального уравнения (1.45). Кроме того, $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $|f(x)| < \exp(\tau_- + \delta)x$ при $x \rightarrow +\infty$, где δ — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство этой теоремы предоставляется читателю. Схема доказательства совпадает с предыдущей, за исключением того, что контур, к которому применяется интегральная формула Коши, теперь дополняется полукругом бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости. Аналогично можно рассмотреть случай, когда $F(\alpha)$ регулярна в некоторой нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$. Тогда функция $f(x)$, определенная интегралом (1.43), при соответствующих условиях удовлетворяет интегральному уравнению (1.45), в котором пределы $(0, \infty)$ заменены пределами $(-\infty, 0)$.

Рассмотрим теперь связь теорем А и В с двусторонним преобразованием Лапласа. Произведем в интегралах (1.40) и (1.41) замену переменной $i\alpha = -s$, где $s = \sigma' + i\tau'$ — другая комплексная переменная. Так как $\alpha = \sigma + i\tau$, то $\sigma' = +\tau$, $\tau' = -\sigma$. Введем новую функцию $\mathcal{F}(s) \equiv (2\pi)^{-1/2} F(\alpha)$; тогда для некоторого постоянного σ' , которое мы обозначим через b , найдем

$$\mathcal{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathcal{F}(s) e^{sx} ds. \quad (1.46)$$

Это не что иное, как двустороннее преобразование Лапласа. Для большей наглядности на рис. 3 показаны пути интегрирования и полосы регулярности в плоскостях α и s .

Аналогично, преобразование, фигурирующее в теореме С, при той же замене переменной $i\alpha = -s$ превращается в обычное одно-стороннее преобразование Лапласа

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \mathcal{F}(s) e^{sx} ds. \quad (1.47)$$

Как уже отмечалось, в части работ, посвященных методу Винера — Хопфа, используется преобразование Лапласа, и, чтобы иметь возможность переходить к обозначениям, использованным в этой книге, и наоборот, читателю важно понимать полную эквивалентность преобразования Фурье и преобразования Лапласа в комплексной

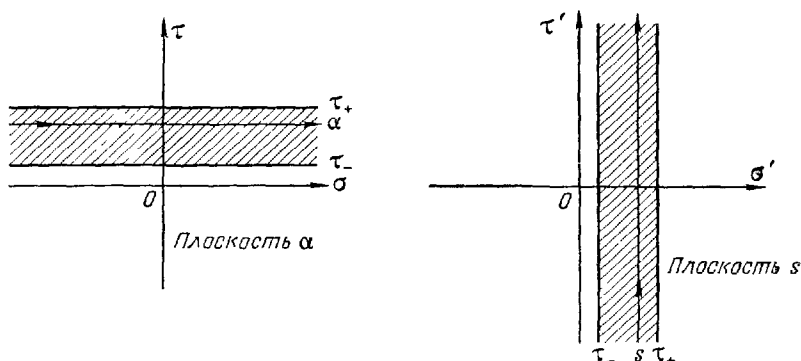


Рис. 3.

плоскости. Например, преобразование Лапласа, соответствующее преобразованию Фурье (1.42), будет

$$\mathcal{F}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}.$$

Утверждение, что формула (1.42) представляет функцию, регулярную при $0 < \tau < 1$, эквивалентно утверждению, что соответствующее преобразование Лапласа регулярно при $0 < \sigma' < 1$.

Много сведений по материалу, изложенному в этой главе, читатель найдет в книгах по преобразованию Лапласа, например у Дёча, в книге Ван дер Поля и Бреммера, а также у Уиддера. Элементарное изложение некоторых вопросов содержится в книге Черчилла (Churchill R. V., *Modern operational mathematics in engineering*, McGraw-Hill, 1944, гл. V, VI).

Наконец, рассмотрим связь полученных выше результатов с преобразованием Меллина. Введем подстановку

$$\rho = e^x, \quad dx = \frac{d\rho}{\rho}, \quad f(x) \equiv g(\rho).$$

Используя эту подстановку в формулах (1.40) и (1.41), найдем, что формулы преобразования примут вид

$$F(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} g(\rho) \rho^{i\alpha-1} d\rho, \quad g(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{i\tau-\infty}^{+\infty} F(\alpha) \rho^{-i\alpha} d\alpha. \quad (1.48)$$

§ 1.5. Волновое уравнение

Аналогично, используя в формуле (1.46) подстановку $\rho = \exp(-x)$, найдем

$$\mathcal{F}(s) = \int_0^{\infty} g(\rho) \rho^{s-1} d\rho, \quad g(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tau-i\infty}^{\tau+i\infty} \mathcal{F}(s) \rho^{-s} ds. \quad (1.49)$$

Эти две формы полностью эквивалентны. Вторая представляет собой известное преобразование Меллина и будет использована в этой книге. Несколько более последовательно было бы, возможно, использовать формулу (1.48), так как мы приняли за основу преобразование Фурье, а не преобразование Лапласа.

При использовании преобразования Меллина нам придется говорить о правой и левой полуплоскостях, вместо того чтобы говорить о верхней и нижней полуплоскостях, как это делается при использовании преобразования Фурье. Однако, как будет видно, это не приведет к путанице. Для преобразования Меллина, конечно, существует теорема, аналогичная приведенной выше теореме С (см. задачу 1.14).

Результаты, которые в дальнейшем будут установлены с помощью преобразования Меллина, можно было бы получить, сделав подстановку $\rho = \exp(-x)$ в исходном дифференциальном уравнении в частных производных и затем применив к полученному уравнению преобразование Фурье, так что теоретически вообще нет необходимости вводить преобразование Меллина. Однако практически гораздо удобнее сразу пользоваться преобразованием Меллина.

§ 1.5. Волновое уравнение

В этом параграфе мы рассмотрим ряд вопросов, связанных с волновым уравнением. Рассмотрим, для конкретности, двумерное уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.50)$$

По причинам, которые скоро будут ясны, удобнее рассматривать это уравнение как предельный случай уравнения с учетом рассеяния энергии

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (1.51)$$

в котором постоянная ϵ , характеризующая рассеяние энергии, больше нуля. Мы рассмотрим задачи двух типов:

1. Задачи о стационарных процессах, в которых $\psi(x, y, t) = \varphi(x, y) \exp(\pm i\omega t)$.
2. Задачи о неустановившихся процессах, где требуется применение преобразования Фурье по переменной, означающей время.

Здесь, в связи с преобразованием Фурье по времени, необходимо отметить обстоятельство, о котором мы еще ничего не говорили. Именно, в формулах

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi e^{\pm i\omega t} dt, \quad \psi = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi e^{\mp i\omega t} d\omega, \quad (1.52)$$

где ω предполагается вещественным, можно выбрать либо одновременно верхние знаки, либо одновременно нижние. В предыдущих параграфах мы выбирали верхние знаки, не оговаривая этого особо. Применяя обе формы преобразования к уравнению (1.51), обычным образом получаем

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \left\{ \frac{\omega^2 \pm i\varepsilon\omega}{c^2} \right\} \Psi = 0, \quad (1.53)$$

где верхний и нижний знаки соответствуют верхним и нижним знакам в формулах (1.52). Рассмотрим теперь задачу о стационарном процессе, в которой ψ пропорционально $\exp(\pm i\omega t)$. Подставляя это значение ψ в уравнение (1.51), найдем, что при множителе $\exp(+i\omega t)$ получается уравнение, соответствующее *нижним* знакам в формулах (1.52) и уравнении (1.53), а при множителе $\exp(-i\omega t)$ — уравнение, соответствующее *верхним* знакам в формулах (1.52) и уравнении (1.53).

Можно выбрать *любую* из этих двух форм зависимости от времени и тем самым *любой* знак в уравнении (1.53) и показателе экспоненты в преобразовании Фурье по времени (1.52); можно также совершенно независимо выбирать любой знак в показателе экспоненты в преобразовании Фурье по пространственным переменным, однако для удобства мы будем в формулах (1.52) использовать верхние знаки для всех преобразований Фурье. В предыдущих параграфах мы так и поступали; см., например, формулы (1.3). Соответственно этому мы используем в задачах о стационарных процессах множитель $\exp(-i\omega t)$ для выражения зависимости от времени. Это значит, что в стационарном волновом уравнении

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0 \quad (1.54a)$$

при учете рассеяния энергии k^2 имеет положительную мнимую часть [сравнить с уравнением (1.53), $k^2 = (\omega^2 + i\varepsilon\omega)/c^2$]. Следовательно, положив

$$k = k_1 + ik_2, \quad (1.54б)$$

где $k_1 > 0$ (как как при $k_2 \rightarrow 0$, $k_1 \rightarrow \omega/c > 0$), найдем, что $k_2 \geq 0$.

Теперь рассмотрим применение преобразования Фурье по пространственной переменной к уравнению (1.54a). Предположим, что $\text{Im } k = k_2 > 0$. Рассмотрим для конкретности задачу (1) из § 1.1:

требуется найти решение уравнения (1.54а) в полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$, обращающееся при $y=0$ в заданную функцию $f(x)$, $-\infty < x < \infty$. Для решения этой задачи применим преобразование Фурье по переменной x и положим

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) e^{i\alpha x} dx.$$

Рассуждая, как в § 1.1, из уравнения (1.54а) получаем

$$\frac{d^2\Phi(\alpha, y)}{dy^2} - (\alpha^2 - k^2)\Phi(\alpha, y) = 0, \quad (1.55а)$$

$$\Phi(\alpha, y) = A(\alpha) e^{-\lambda y} + B(\alpha) e^{\lambda y}, \quad \lambda = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}. \quad (1.55б)$$

Так как общее решение для $\Phi(\alpha, y)$ имеет при $\alpha = \pm k$ точки ветвления, то, как и в § 1.1, надо провести разрезы в плоскости α так, чтобы функция (1.55б) представляла то решение уравнения (1.55а), которое после обратного преобразования Фурье даст функцию $\varphi(x, y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи.

Мы уже молчаливо предположили, что

а) для любого заданного y функция $\Phi(\alpha, y)$ существует в некоторой полосе $c < \tau < d$, $-\infty < \sigma < \infty$ плоскости α .

Сделаем дальнейшее предположение:

б) функция $\Phi(\alpha, y)$ ограничена при $y \rightarrow \infty$ для всех α в полосе $c < \tau < d$. (В действительности, в рассматриваемых нами случаях $\Phi(\alpha, y)$ при $y \rightarrow \infty$ стремится к нулю экспоненциально, однако сделанное здесь более слабое предположение легче проверяется при заданных условиях для φ и достаточно для наших целей.)

Если линии ветвления в плоскости α провести вдоль прямых, идущих от $\alpha = \pm k$ к бесконечности в нижней полуплоскости, то в обратном преобразовании Фурье выражения (1.55б) надо использовать такое τ , скажем τ_0 , чтобы $\tau_0 > k_2$. Но легко показать с помощью аналитического продолжения, как в § 1.2, что если мы выберем ту ветвь λ , для которой $\lambda \rightarrow |\alpha|$ при $\sigma \rightarrow \infty$, где $\alpha = \sigma + i\tau_0$, то $\lambda \rightarrow -|\alpha|$ при $\sigma \rightarrow -\infty$. Таким образом, в выражении (1.55б) нельзя выбрать A и B , при которых функция Φ ограничена при $y \rightarrow \infty$ для всех α на линии $\alpha = \sigma + i\tau_0$. Аналогичный результат получим, если провести оба разреза уходящими в бесконечность в верхней полуплоскости или если провести разрез по прямой, соединяющей точки $+k$ и $-k$ (см., например, задачу 1.4). Итак, остается единственная возможность: провести разрез плоскости α от точки k к бесконечности в верхней полуплоскости и от точки $-k$ к бесконечности в нижней полуплоскости, как показано на рис. 1. Тогда с помощью аналитического продолжения мы найдем, что $\lambda \rightarrow +|\alpha|$ при $\sigma \rightarrow \pm \infty$ и, следовательно, решение (1.55б) будет удовлетворять условию б, если выбрать $B(\alpha) = 0$. Очевидно,

выбранная ветвь λ совпадает с ветвью γ , о которой шла речь в конце § 1.2, так что

$$\Phi(\alpha, y) = A(\alpha) e^{-iy}.$$

(Мы не будем снова повторять проведенные в § 1.2 рассуждения.) Для определения $A(\alpha)$ положим $y=0$ и используем граничное условие при $y=0$. Это дает

$$\Phi(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} du e^{-iy}.$$

Решение $\varphi(x, y)$ получается с помощью обратного преобразования. При этом, очевидно, необходимо выполнение еще третьего условия: в) полосы $c < \tau < d$ и $-k_2 < \tau < k_2$ должны перекрываться.

В каждом частном случае необходимо проверять, удовлетворяет ли найденное φ условиям а — в (см., например, § 2.2).

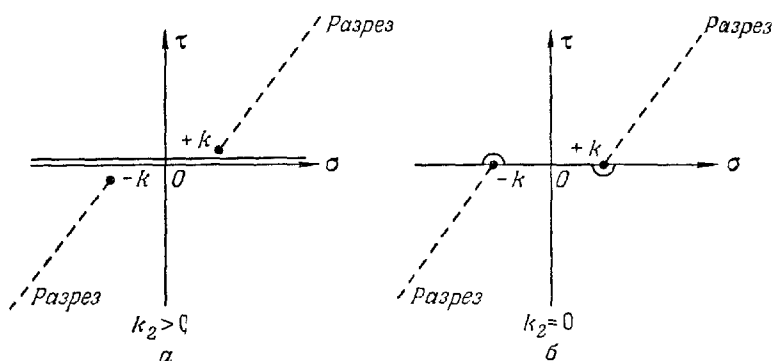


Рис. 4. ----- линия разреза, ————— путь интегрирования.

Рассмотрим, наконец, что произойдет при $k_2 \rightarrow 0$. Напомним, что k_2 появляется из-за присутствия в уравнении (1.51) параметра, описывающего рассеяние энергии, и $k_2=0$ означает, что такого рассеяния нет. На рис. 4, а показаны линии разреза и путь интегрирования в плоскости α при $k_2 > 0$.

При $k_2=0$ путь интегрирования проходит вдоль вещественной оси, и из предельного перехода $k_2 \rightarrow 0$ видно, что точка $\alpha = -k$ должна обходитьс \grave{a} сверху, а точка $\alpha = +k$ снизу, как показано на рис. 4, б. Если зависимость от времени выражалась бы множителем $\exp(+i\omega t)$ и использовался бы нижний знак в преобразовании Фурье (1.52), то k имело бы отрицательную мнимую часть и из рисунков, подобных рис. 4, следовало бы, что при $k_2 \rightarrow 0$

путь интегрирования должен был бы проходить по вещественной оси, обходя точку $\alpha = -k$ снизу, а точку $\alpha = +k$ — сверху.

Когда рассеяния энергии нет, введенные условия а — в надо несколько изменить. Из физических соображений следует, что при $k_2 > 0$ решение φ должно на бесконечности экспоненциально убывать, так как при конечном рассеянии энергии уходящие волны должны на бесконечности экспоненциально затухать. В среде, где рассеяния энергии нет, получается другой результат. Вместо экспоненциального убывания надо наложить условие типа „условий излучения на бесконечности“ Зоммерфельда. В двумерном случае эти условия имеют вид: если φ представляет на бесконечности уходящую волну и если зависимость от времени дается множителем $\exp(-i\omega t)$, то $r^{1/2}(\partial\varphi/\partial r - ik\varphi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$; если же зависимость от времени дается множителем $\exp(+i\omega t)$, то соответственно $r^{1/2}(\partial\varphi/\partial r + ik\varphi) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Указанные условия должны выполняться равномерно относительно θ .

В этой книге мы будем всегда полагать k_2 отличным от нуля и лишь в окончательном ответе переходить к пределу, устремляя k_2 к нулю. Условия излучения Зоммерфельда мы непосредственно не используем, хотя они всегда дают удобную проверку окончательного ответа.

§ 1.6. Некоторые типы контурных интегралов

В дальнейшем нам часто встретится интеграл вида

$$I = \int_{\alpha-\infty}^{\alpha+\infty} f(\alpha) e^{-i\alpha x - \gamma|y|} d\alpha, \quad (1.56)$$

где $\gamma = (a^2 - k^2)^{1/2}$, как было определено в конце § 1.2, и $-\text{Im } k < a < \text{Im } k$. Функция $f(\alpha)$ является аналитической функцией, такой, что этот интеграл сходится. Дальнейшие необходимые ограничения будут ясны из последующего текста.

Прежде всего рассмотрим преобразование пути интегрирования в плоскости α , при помощи которого можно вычислить интеграл в двух частных случаях. Введем r и θ по формулам $x = r \cos \theta$, $|y| = r \sin \theta$, причем без потери общности можно считать $0 \leq \theta \leq \pi$. Рассмотрим линию в плоскости α , заданную параметрически,

$$\sigma = -k \cos(\theta + it), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.57)$$

Легко проверить, что это ветвь гиперболы, проходящая через точку $\alpha = -k \cos \theta$ и симметричная относительно линии, проходящей через точки $-k$ и k (см. рис. 5). Из рисунка видно, что при малом k_2

$$\sigma \approx -k_1 \cos \theta \operatorname{ch} t, \quad \tau \approx k_1 \sin \theta \operatorname{sh} t.$$

При $0 < \theta < \pi/2$ уравнение (1.57) представляет ветвь гиперболы, расположенную в левой полуплоскости, а при $\pi/2 < \theta < \pi$ — ветвь, расположенную в правой полуплоскости. На рисунке стрелками показано направление обхода при изменении t от $-\infty$ до ∞ . Если линия, проходящая через точки $-k$

и k , образует с осью σ угол λ , то асимптоты гиперболы образуют с осью σ углы $\theta + \lambda$ и $\theta - \lambda$ соответственно. Мы имеем

$$\gamma = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2} = -ik \sin(\theta + it), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (1.58)$$

причем знак перед синусом выбран при помощи аналитического продолжения, так как при $\theta = \pi/2$, $t = 0$, т. е. при $\alpha = 0$, должно быть $\gamma = -ik$. Таким образом,

$$-i\alpha x - \gamma |y| = ikr [\cos \theta \cos(\theta + it) + \sin \theta \sin(\theta + it)] = ikr \operatorname{ch} t.$$

Предположим теперь, что путь интегрирования в формуле (1.56) можно деформировать в какую-нибудь из ветвей рассмотренной выше гиперболы.

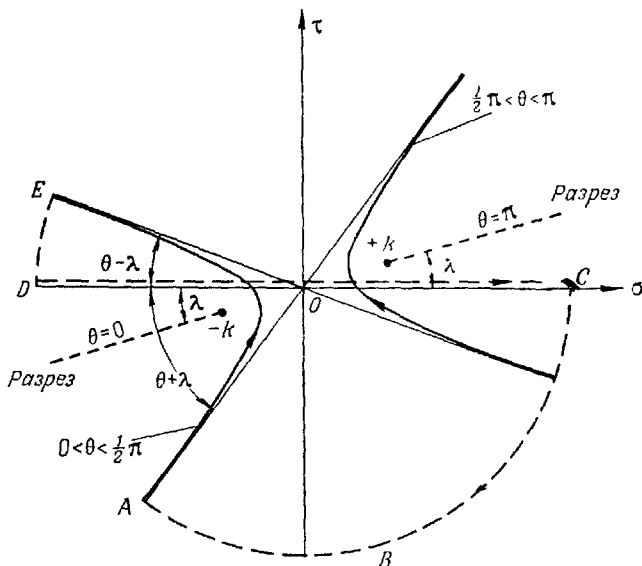


Рис. 5.

Для этого, как обычно, концы пути интегрирования и концы ветви гиперболы соединяем дугами окружности бесконечно большого радиуса. На рис. 5 эти дуги для $0 < \theta < \pi/2$ условно показаны в виде дуг DE и ABC . Для $\pi/2 < \theta < \pi$ надо использовать ветвь гиперболы в правой полуплоскости и соответственно другие дуги. Пусть подинтегральное выражение таково, что интегралы по соединяющим дугам бесконечно большого радиуса равны нулю (см. задачу 1.6). Предположим также, что внутри получающегося замкнутого контура функция $f(\alpha)$ не имеет особенностей. [В разбираемом ниже примере (2) будет показано, как надо поступать, если внутри контура имеются полюсы функции $f(\alpha)$.]

Таким образом, учитывая, что $d\alpha = ik \sin(\theta + it) dt$, получаем вместо формулы (1.56) следующую формулу:

$$I = -ik \int_{-\infty}^{\infty} f[-k \cos(\theta + it)] e^{ikr \operatorname{ch} t} \sin(\theta + it) dt, \quad (1.59)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Рассмотрим два примера

$$(1) \quad I = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \gamma^{-1} e^{-iax - \gamma|y|} d\alpha, \quad (-k_2 < a < k_2). \quad (1.60)$$

Внутри замкнутого контура полюсов нет. Этот интеграл вида (1.59) является хорошо известным представлением функции Ганкеля (Ватсон [1], стр. 199, (10))

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikr \operatorname{ch} t} dt = \pi i H_0^{(1)}(kr) = \pi i \{J_0(kr) + iY_0(kr)\}. \quad (1.61)$$

Заметим, что если полагать мнимую часть k отрицательной, то полученный интеграл дает представление функции $-\pi i H_0^{(2)}(kr)$.

$$(2) \quad I = (k \cos \theta - k)^{1/2} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{\exp(-iax - \gamma|y|)}{(\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)} d\alpha, \quad (1.62)$$

где θ — некоторый фиксированный угол, $0 < \theta < \pi$, $-k_2 < a < k_2 \cos \theta$, а под $(\alpha - k)^{1/2}$ понимается ветвь, обращающаяся в $-ik^{1/2}$, когда α стремится к нулю. Как и в формуле (1.13а), $(k \cos \theta - k)^{1/2} = -i(2k)^{1/2} \sin \frac{1}{2} \theta$.

Подинтегральное выражение имеет полюс при $\alpha = k \cos \theta$. Если исходный путь интегрирования преобразовать в кривую (1.57), то при $-1 < \cos \theta < -\cos \theta$ для любого θ , где $0 < \theta < \pi$, т. е. при $0 < \pi - \theta < \theta$, этот полюс будет расположен внутри замкнутого контура. Следовательно, мы получим, что

$$I = \begin{cases} J + 2\pi i \exp[-ikr \cos(\theta + \theta)] & \text{при } 0 < \pi - \theta < \theta < \pi, \\ J & \text{при } 0 < \theta < \pi - \theta < \pi, \end{cases} \quad (1.63)$$

где

$$J = 2i \sin \frac{1}{2} \theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikr \operatorname{ch} t) \sin^{1/2}(\theta + it)}{\cos(\theta + it) + \cos \theta} dt. \quad (1.64)$$

Исходя из результатов задачи 1.22, можно показать, что формулы (1.63) и (1.64) дают

$$I = 2\pi^{1/2} e^{t\pi/4} \left\{ -e^{-ikr \cos(\theta - \theta)} F[(2kr)^{1/2} \cos^{1/2}(\theta - \theta)] + e^{-ikr \cos(\theta + \theta)} F[(2kr)^{1/2} \cos^{1/2}(\theta + \theta)] \right\} \quad (1.65)$$

для любых θ и θ , таких, что $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 < \theta < \pi$, где

$$F(v) = \int_v^{\infty} e^{iu^2} dv. \quad (1.66)$$

Таким образом, рассмотренный интеграл выражается через подробно табулированный комплексный интеграл Френеля.

Теперь сделаем замену переменной, которая позволит рассмотреть интеграл (1.56) с более общей точки зрения. Предположим для простоты, что k вещественно и положительно. Подстановка $\alpha = -k \cos \beta$, где $\alpha = \sigma + i\tau$, $\beta = \mu + i\nu$, отображает разрезанную вдоль вещественной оси от $-\infty$ до $-k$

и от $+k$ до $+\infty$ комплексную плоскость α в полосу $0 \leq \mu \leq \pi$, $-\infty < \nu < \infty$ комплексной плоскости β , причем мы выбрали одну из бесконечного числа аналогичных полос в плоскости β . Это изображено на рис. 6, где соответствующие одна другой точки обозначены одними и теми же буквами. Путь $EBAD$ в плоскости α , проходящий вдоль вещественной оси над разрезом $(-\infty, -k)$ и под разрезом (k, ∞) , отображается в плоскости β в путь $E'B'A'D'$. Ветвь гиперболы, определяемой уравнением $\alpha = -k \cos(\theta + it)$, $-\infty < t < \infty$, при постоянном θ , таком, что $0 < \theta < \pi$

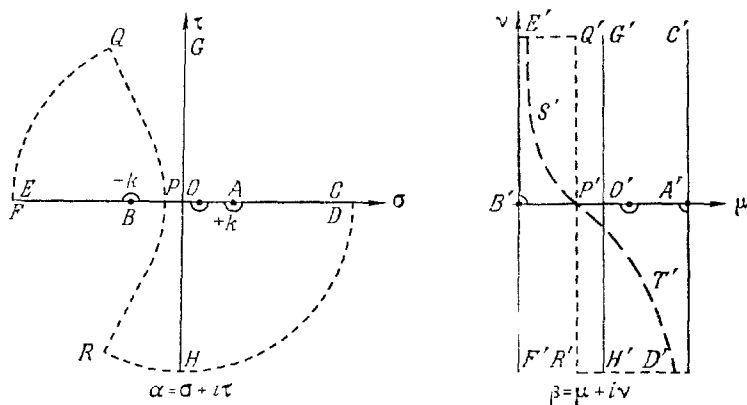


Рис. 6. $\alpha = -k \cos \beta$.

[сравнить с уравнением (1.57) выше], отображается в плоскости β в линию $\mu = \theta = \text{const}$ (линию $Q'P'R'$).

Так как $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -ik \sin \beta$, подстановка $\alpha = -k \cos \beta$ преобразует интеграл (1.56) к виду

$$I = k \int_C f(-k \cos \beta) e^{ikr \cos(\beta - \theta)} \sin \beta d\beta, \quad (1.67)$$

где путь C огибает соответствующие точки таким же образом, как их огибал первоначальный путь в плоскости α . Так, например, интеграл (1.60) принимает вид

$$I = i \int_C e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta = \pi i H_0^{(1)}(kr). \quad (1.68)$$

Применим теперь к интегралу (1.67) метод перевала. Суть этого метода приближенного вычисления интегралов вида

$$J = \int_C G(\beta) \exp[zg(\beta)] d\beta \quad (1.69)$$

состоит в деформации контура C так, чтобы он проходил через точку, скажем ζ , называемую седловой точкой, участок контура в окрестности которой дает основной вклад в интеграл, причем функция $G(\beta)$ медленно изменяется на этом участке. Приближенно можно написать

$$J \approx G(\zeta) \int_D \exp\{zg(\beta)\} d\beta, \quad (1.70)$$

где D — деформированный путь интегрирования, полученный из пути C , а потом попытаться вычислить точно или приближенно интеграл (1.70).

Оказывается, что точку ζ надо выбирать так, чтобы выполнялось условие $dg(\beta)/d\beta = 0$. Применительно к интегралу (1.67) это дает $\sin(\beta - \theta) = 0$, т. е. $\beta = \theta$. Если мы построим график вещественной части функции $g(\beta) = i \cos(\beta - \theta)$ в окрестности $\beta = \theta$, то найдем, что имеется проходящий через эту точку «путь быстреего убывания». Вдоль этого пути $\operatorname{Re} g(\beta)$ имеет максимум при $\beta = \theta$ и быстро убывает по обе стороны от этого максимума. На рис. 6 этот путь показан пунктирной линией $E'S'P'T'D'$, причем касательная к линии $S'P'T'$ в точке P' образует с осью μ угол 135° . Допустим, что путь интегрирования в формуле (1.67), а именно путь $E'B'A'D'$, изображенный на рис. 6, можно деформировать в путь $E'S'P'T'D'$, который мы обозначим через D . Вклады от пересекаемых при этом полюсов учитываются обычным образом и здесь не рассматриваются. Тогда, согласно формуле (1.70), интеграл (1.67) примет вид

$$I \approx kf(-k \cos \theta) \sin \theta \int_D e^{ikr \cos(\beta - \theta)} d\beta.$$

В этом интеграле путь D можно деформировать обратно в первоначальный путь C , что приведет к интегралу (1.68), т. е.

$$I \approx \pi k f(-k \cos \theta) \sin \theta H_0^{(1)}(kr).$$

Это приближение справедливо лишь при больших kr , так как только тогда существует резко выраженная седловая точка. Для того чтобы получить окончательный результат, применим асимптотическое разложение для функции Ганкеля при $r \rightarrow \infty$, что дает

$$I \sim (2k\pi)^{1/2} e^{-i\pi/4} f(-k \cos \theta) \sin \theta r^{-1/2} e^{ikr}. \quad (1.71)$$

(Общие сведения об асимптотических разложениях имеются в книге А. Эрдейи [1]. Часто полное асимптотическое разложение в виде ряда для интегралов рассмотренного выше типа удобно получить, используя описанный метод перевала и лемму Ватсона (Ватсон [1], стр. 263); см., например, задачу 1.23.)

Применим, например, формулу (1.71) к интегралу (1.62). Для $0 < \theta < \pi - \theta$ при $r \rightarrow \infty$ получим

$$I \sim -2 \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} r^{-1/2} e^{ikr} \frac{\sin^{1/2} \theta \sin^{1/2} \theta}{\cos \theta + \cos \theta}. \quad (1.72)$$

Очевидно, этот результат справедлив только в том случае, когда сумма $\cos \theta + \cos \theta$ не слишком близка к нулю. Если же сумма $\cos \theta + \cos \theta$ близка к нулю, то асимптотическая формула (1.71), полученная методом перевала, не применима, так как в исходном интеграле (1.62) полюс $\alpha = k \cos \theta$ почти совпадает с седловой точкой $\alpha = -k \cos \theta$.

Рассмотрим два метода преодоления возникающих при этом трудностей. Предположим, что интеграл (1.69) можно записать в виде

$$J = \int_C H(\beta) h(\beta) \exp[zg(\beta)] d\beta,$$

где $H(\beta)$ — медленно меняющаяся в окрестности точки $\beta = \zeta$ функция, а $h(\beta)$ имеет простой полюс в точке $\beta = \beta_0$, наличие которого не позволяет применить изложенный выше метод перевала. Допустим, что мы можем вычислить точно интеграл

$$L_r = \int_C (\beta - \zeta)^r h(\beta) \exp[zg(\beta)] d\beta.$$

Тогда можно поступить двояко.
а Во-первых, можно записать

$$J = \int_C [H(\beta) - H(\beta_0)] h(\beta) \exp [zg(\beta)] d\beta + H(\beta_0) L_0.$$

Если $[H(\beta) - H(\beta_0)] h(\beta)$ — медленно меняющаяся в окрестности седловой точки функция, то далее мы имеем

$$J = [H(\zeta) - H(\beta_0)] h(\zeta) \int_C \exp [zg(\beta)] d\beta + H(\beta_0) L_0, \quad (1.73)$$

где интеграл в первом слагаемом уже можно вычислить обычным методом перевала.

б Во-вторых, предположим, что функцию $H(\beta)$ можно разложить около точки $\beta = \zeta$ в ряд Тейлора. Тогда

$$J = H(\zeta) L_0 + H'(\zeta) L_1 + \dots$$

При определенных условиях полученный ряд является асимптотическим разложением по некоторым функциям от z , в отличие от обычных асимптотических рядов по отрицательным степеням z .

Первый из рассмотренных методов часто используется при применении метода Винера — Хопфа (см. также статью Оберхеттингера [Oberhettinger F., *J. Math. Phys.*, 34 (1955), 245—255]). Некоторые приложения будут даны в § 5.4. Второй метод подробно рассмотрел, например, Клеммов [Clemmow P. C., *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 3 (1950), 241—256].

В заключение этого параграфа приведем хорошо известные соотношения, связывающие асимптотику функции с асимптотикой ее преобразований Фурье и Лапласа. В дальнейшем мы будем часто применять эти результаты. Положим

$$F_+(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(x) e^{iaz} dx, \quad \mathcal{F}_+(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-sx} dx.$$

Тогда, если при $-1 < \eta < 0$

$$f(x) \sim Ax^\eta \quad \left. \begin{array}{l} (x \rightarrow +0) \\ (x \rightarrow \infty) \end{array} \right\},$$

то

$$F_+(z) \sim A(2\pi)^{-1/2} \Gamma(\eta + 1) e^{z\eta} e^{(\eta+1)/2} z^{-\eta-1} \quad \left. \begin{array}{l} (\alpha \rightarrow \infty) \\ (\alpha \rightarrow +0) \end{array} \right\}, \quad (1.74)$$

$$\mathcal{F}_+(s) \sim A\Gamma(\eta + 1) s^{-\eta-1} \quad \left. \begin{array}{l} (s \rightarrow \infty) \\ (s \rightarrow 0) \end{array} \right\},$$

где везде надо брать либо верхние, либо нижние предельные переходы. При этом считается, что α стремится как к нулю, так и к бесконечности, оставаясь в верхней полуплоскости $\text{Im } \alpha > 0$. Соответственно, s стремится к нулю или к бесконечности, оставаясь в правой полуплоскости $\text{Re } s > 0$ (См. теоремы в книгах Эрдейи [1], гл. II, Ватсона [1], стр. 256, 262, а также теоремы абелева типа, приводимые в большинстве руководств по преобразованию Лапласа, например у Деча, в книге Ван дер Поля и Бреммера, а также у Уиддера.)

§ 1.7. Метод Винера — Хопфа

В этом параграфе мы изложим теоретико-функциональную основу метода Винера — Хопфа, что целесообразно, так как в дальнейших примерах за практическими деталями, связанными с применением преобразования Фурье, эту, в сущности простую основу, разглядеть будет труднее. Применение преобразования Фурье к уравнению в частных производных приводит к следующей типичной задаче. Требуется найти неизвестные функции $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0, \quad (1.75)$$

которое должно выполняться в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ в комплексной плоскости α , причем $\Phi_+(\alpha)$ должна быть регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а $\Psi_-(\alpha)$ должна быть регулярна в полуплоскости $\tau < \tau_+$; кроме того, эти функции должны удовлетворять в соответствующих полуплоскостях определенным условиям на бесконечности (эти условия будут указаны позже). Функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ считаются заданными функциями α , регулярными в рассматриваемой полосе. Кроме того, для простоты предположим, что функции A и B не имеют в этой полосе нулей.

Основной шаг при решении этого уравнения методом Винера — Хопфа заключается в факторизации, т. е. определении функции $K_+(\alpha)$, регулярной и не имеющей нулей в полуплоскости $\tau > \tau_-$, и функции $K_-(\alpha)$, регулярной и не имеющей нулей в полуплоскости $\tau < \tau_+$, таких, что

$$\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}. \quad (1.76)$$

Иногда функции K_+ и K_- можно просто угадать, рассматривая левую часть этого равенства, в противном случае их можно найти, применив теорему С из § 1.3. (Более тонкие детали будут выяснены позже при рассмотрении конкретных примеров.) Используя равенство (1.76), перепишем уравнение (1.75) так:

$$K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) + \frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)} = 0. \quad (1.77)$$

Представим член $[K_-(\alpha)C(\alpha)]/B(\alpha)$ в виде

$$\frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)} = C_+(\alpha) + C_-(\alpha), \quad (1.78)$$

где функция $C_+(\alpha)$ регулярна при $\tau > \tau_-$, а функция $C_-(\alpha)$ регулярна при $\tau < \tau_+$. В общем случае это можно сделать, применив теорему В из § 1.3. Используя равенство (1.78), перегруппируем слагаемые в уравнении (1.77) и введем новую функцию $J(\alpha)$ равенствами

$$J(\alpha) = K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha) = -K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) - C_-(\alpha). \quad (1.79)$$

Пока что функция $J(\alpha)$ определена лишь в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$. Однако функция $K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha)$ определена и регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а функция $-K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) - C_-(\alpha)$ определена и регулярна в полуплоскости $\tau < \tau_+$. Таким образом, аналитическим продолжением функцию $J(\alpha)$ можно определить на всей плоскости α , причем $J(\alpha)$, очевидно, регулярна на всей плоскости α . Допустим теперь, что имеют место оценки

$$\left. \begin{aligned} |K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha)| < |\alpha|^p \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \tau > \tau_-, \\ |K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C_-(\alpha)| < |\alpha|^q \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \tau < \tau_+. \end{aligned} \right\} \quad (1.80)$$

Тогда по обобщенной теореме Лиувилля функция $J(\alpha)$ является полиномом $P(\alpha)$ степени не выше целой части $\min(p, q)$, т. е.

$$\left. \begin{aligned} K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + C_+(\alpha) &= P(\alpha), \\ K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C_-(\alpha) &= -P(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (1.81)$$

Из этих уравнений функции $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$ определяются с точностью до произвольного полинома $P(\alpha)$, т. е. с точностью до конечного числа произвольных постоянных, которые должны быть определены иным способом.

В качестве конкретного примера читатель может рассмотреть решение уравнения (2.24) следующей главы, которое дается формулами (2.28) и (2.30).

Основной шаг заключается в определении $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$, удовлетворяющих равенству (1.76). При решении уравнений в частных производных мы не будем всегда явно сводить задачу к уравнению вида (1.75). Однако если в процессе решения используется факторизация, т. е. разложение вида (1.76), то мы будем все же говорить, что решение основано на методе Винера — Хопфа.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ I

Если не оговорено противное, то, как и в § 1.2, полагается

$$\alpha = \sigma + i\tau, \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \quad k = k_1 + ik_2 \quad (k_1 > 0, k_2 > 0).$$

1.1. Пусть $\gamma_1 = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, $\alpha_1 = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, где $k = k_1 - ik_2$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$), и пусть разрезы в плоскости α уходят к бесконечности от точки $\alpha = -k$ в верхней полуплоскости и от точки $\alpha = k$ в нижней полуплоскости. Показать, что для ветвей, у которых $\gamma_1 = +ik$, $\alpha_1 = k$ при $\alpha = 0$, во всей разрезанной плоскости имеет место соотношение $\gamma_1 = +i\alpha_1$ [ср. равенства (1.14) и рис. 1]. Показать также, что если ветви четырех функций $(\pm \alpha \pm k)^{1/2}$ выбраны так, как это делалось для функций (1.11), то уравнения (1.12) заменятся следующими:

$$(k - \alpha)^{1/2} = -i(\alpha - k)^{1/2}, \quad (-k - \alpha)^{1/2} = +i(\alpha + k)^{1/2}.$$

1.2. Пусть $s = \sigma + i\tau$ — комплексное переменное и пусть $k = k_1 - ik_2$ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$). Разрежем плоскость s прямыми линиями от ik до бесконечности в правой полуплоскости ($\sigma > 0$) и от $-ik$ до бесконечности в ле-

вой полуплоскости ($\sigma < 0$). Пусть под $k^{1/2}$ понимается значение квадратного корня, стремящееся к $k_1^{1/2}$ при k_2 , стремящемся к нулю. Положим

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (k + is)^{1/2}, & \zeta_2 &= (k - is)^{1/2}, & \zeta_1, \zeta_2 &= +k^{1/2} \text{ при } s=0; \\ \zeta_3 &= (-k - is)^{1/2}, & \zeta_4 &= (-k + is)^{1/2}, & \zeta_3, \zeta_4 &= ik^{1/2} \text{ при } s=0. \end{aligned}$$

Показать, что на всей разрезанной плоскости имеют место соотношения $\zeta_2 = i\zeta_1$, $\zeta_4 = i\zeta_3$; кроме того, показать, что для ветви функции $(s^2 + k^2)^{1/2}$, которая при $s=0$ обращается в k , справедливы следующие соотношения:

$$(s^2 + k^2)^{1/2} = \zeta_1 \zeta_2 = -\zeta_3 \zeta_4 = -i\zeta_1 \zeta_4 = -i\zeta_2 \zeta_3.$$

Показать, что если $s = i\tau$ — чисто мнимое, а k — вещественное, то

$$\begin{aligned} (s^2 + k^2)^{1/2} &= (k^2 - \tau^2)^{1/2} \text{ при } |\tau| < k, \\ (s^2 + k^2)^{1/2} &= -i(\tau^2 - k^2)^{1/2} \text{ при } |\tau| > k. \end{aligned}$$

1.3. Доказать: 1) если α лежит в полосе $-k_2 < \tau < k_2$, то вещественная часть γ положительна; 2) если $(k^2 - \sigma^2)^{1/2} = p + iq$, то $|q| \geq k_2$, $|p| \leq k_1$.

1.4. Показать, что если $\gamma_2 = (a^2 - k^2)^{1/2}$, плоскость α разрезана по линии, соединяющей точки k и $-k$, и $\gamma_2 \rightarrow +\sigma$ при $\alpha = \sigma \rightarrow +\infty$, то $\gamma_2 \rightarrow -|\sigma|$ при $\alpha = \sigma \rightarrow -\infty$.

1.5. Выберем ветвь функции $f(\alpha) = \ln(\alpha - c)$, $c = a + ib$, для которой $f(\alpha) \rightarrow \ln \sigma$ при $\sigma \rightarrow +\infty$, $\tau = 0$. Разрежем плоскость α по линии $\alpha - c = = r \exp(i\theta)$, $0 \leq r < \infty$. Показать, что при $\sigma \rightarrow -\infty$ и $\tau = 0$ 1) $f(\alpha) \rightarrow -i\pi + \ln|\sigma|$ для $0 < \theta < \pi$, 2) $f(\alpha) \rightarrow i\pi + \ln|\sigma|$ при $-\pi < \theta < 0$.

1.6. В связи с исследованием интеграла (1.56) в начале § 1.6 предположим, что любая точка дуги ABC на рис. 5 определяется значением $\alpha = R \exp(i\theta)$, $0 \geq \theta > -\pi + \theta + \lambda$, $0 < \theta < \pi$. По определению $\gamma \rightarrow \alpha$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в этом секторе, т. е. при $R \rightarrow \infty$ имеем

$$-i\alpha x - \gamma|y| \rightarrow -Re^{i\theta}(ir \cos \theta + r \sin \theta) = Rr \sin(\theta - \theta) - iRr \cos(\theta - \theta).$$

Вещественная часть этого выражения отрицательна при указанных выше ограничениях для величины θ . Поэтому на дуге ABC при стремлении радиуса дуги к бесконечности экспоненциальный множитель в (1.56) стремится к нулю. Аналогичное утверждение справедливо для дуги DE , однако если $R \rightarrow \infty$ при $\lambda < \theta < \pi + \lambda$, то $\gamma \rightarrow R \exp i(\theta - \pi)$.

1.7. Пусть $f(\alpha)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ и имеющая в качестве особых точек в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$ только конечное число полюсов a_1, \dots, a_n . Показать, что

$$f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha),$$

где функция

$$f_-(\alpha) = \sum_{r=1}^n \frac{b_r}{\alpha - a_r}$$

регулярна при $\tau < \tau_+$, а функция $f_+(\alpha) = f(\alpha) - f_-(\alpha)$ регулярна при $\tau > \tau_-$. Показать также, что если единственной особой точкой функции $f(\alpha)$

в верхней полуплоскости является двойной полюс в точке $\alpha = a$, то

$$f(\alpha) = f_+(\alpha) + f_-(\alpha), \quad f_-(\alpha) = \frac{b}{\alpha - a} + \frac{c}{(\alpha - a)^2}.$$

Аналогичное представление можно найти для мероморфных функций (задача 1.8).

1.8. *Разложение мероморфной функции на простейшие дроби* (см. Титчмарш [2], стр. 130). Функция называется мероморфной в некоторой области, если она регулярна в этой области всюду, за возможным исключением конечного числа полюсов. Пусть $f(\alpha)$ — функция, у которой все особые точки, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки, являются полюсами. Для простоты предположим, что все эти полюсы простые. Пусть это будут точки $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, причем $0 < |\alpha_1| \leq |\alpha_2| \leq \dots$, и пусть вычты относительно этих полюсов равны a_1, a_2, \dots соответственно. Предположим, что существует возрастающая последовательность чисел R_m , таких, что $R_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, и что последовательность окружностей C_m , определяемых уравнениями $|\alpha| = R_m$, не проходит ни при каком m через полюсы функции $f(\alpha)$. Предположим также, что функция $f(\alpha)$ ограничена на C_m для всех m .

Тогда

$$f(\alpha) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\alpha - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right)$$

для всех точек α , кроме полюсов. Например,

$$\operatorname{cosec} \alpha - \frac{1}{\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{'} (-1)^n \left(\frac{1}{\alpha - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right),$$

где штрих у знака суммы означает, что член с $n = 0$ отсутствует.

1.9. *Разложение целой функции в бесконечное произведение* (см. Титчмарш [2], стр. 133). Если $f(\alpha)$ — целая функция от α , имеющая простые нули в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, то можно показать, что $f'(\alpha)/f(\alpha)$ будет мероморфной функцией от α , которую можно разложить на простейшие дроби, как в задаче 1.8. Проинтегрировав это разложение, получим разложение функции $f(\alpha)$ в бесконечное произведение

$$f(\alpha) = f(0) \exp \left[\alpha \frac{f'(0)}{f(0)} \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) e^{\alpha/\alpha_n}.$$

В рассматриваемых ниже примерах $\alpha_n \sim an + b$ при $n \rightarrow \infty$ и сходимость разложения обеспечивается экспоненциальными множителями.

Если $f(\alpha)$ — четная функция от α , то ее нули расположены в симметричных точках $\pm \alpha_n$ и $f'(0) = 0$; поэтому можно записать

$$f(\alpha) = f(0) \prod_{n=-\infty}^{\infty} \text{'} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) e^{\alpha/\alpha_n} = f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_n} \right)^2,$$

где $\alpha_{-n} = -\alpha_n$, а штрих у знака произведения означает, что член с $n = 0$ опущен.

В качестве примеров укажем следующие функции:

$$\begin{aligned} (\alpha a)^{-1} \sin \alpha a, \quad \alpha_n a = n\pi; \quad \cos \alpha a, \quad \alpha_n a = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi; \\ (\gamma a)^{-1} \operatorname{sh} \gamma a = (\chi a)^{-1} \sin \chi a, \quad \alpha_n a = (k^2 a^2 - n^2 \pi^2)^{1/2}; \\ \operatorname{ch} \gamma a = \cos \chi a, \quad \alpha_n a = \left[k^2 a^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

1.10. Гамма-функция. Мы будем часто использовать хорошо известные свойства гамма-функции, которые полезно привести здесь для справок. Функция $\Gamma(\alpha)$ является аналитической функцией, регулярной на всей плоскости, кроме точек $\alpha = 0, -1, -2, \dots$. В этих точках она имеет простые полюсы, причем вычет в точке $\alpha = -n$ равен $(-1)^n/(n!)$.

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha); \\ \pi \alpha / \operatorname{sh} \alpha &= \Gamma(1-i\alpha) \Gamma(1+i\alpha), \quad \pi / \operatorname{ch} \pi \alpha = \Gamma(1/2+i\alpha) \Gamma(1/2-i\alpha); \\ [\Gamma(\alpha)]^{-1} &= \alpha e^{C\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} [1 + (\alpha/n)] e^{-\alpha/n}, \end{aligned}$$

где $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Имеет место формула Стирлинга:

$$\Gamma(\alpha) \sim e^{-\alpha} \alpha^{\alpha-1/2} (2\pi)^{1/2} [1 + (12\alpha)^{-1} + \dots] \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \quad |\arg \alpha| < \pi;$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+b)}{\Gamma(\alpha)} \sim \alpha^b \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \quad |\arg \alpha| < \pi;$$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} &= 2e^{C\alpha} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n-1/2}\right) e^{-\alpha/(n-1/2)} = \\ &= \frac{\pi^{1/2} 2^{1-2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1/2)} \sim 2^{1/2-2\alpha} e^{\alpha+1/2} \alpha^{-\alpha} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{an+b}\right) e^{-\alpha/an} = e^{-C\alpha/a} \frac{\Gamma(b/a+1)}{\Gamma(\alpha/a+b/a+1)}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right) = C + \Psi(z+1), \quad \Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

$$\Gamma'(1) = -C, \quad \Gamma'(1/2) = -\pi^{1/2} (C + 2 \ln 2).$$

Во всех приведенных формулах $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера.

1.11. Факторизацию некоторых функций можно выразить через гамма-функции, например

$$K(x) = K_+(x) K_-(x) = (\pi x) \operatorname{cth} \pi x,$$

$$K_+(x) = \pi^{1/2} \frac{\Gamma(1-i\alpha)}{\Gamma(1/2-i\alpha)}, \quad K_-(x) = K_+(-\alpha).$$

Здесь функция $K_+(x)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im} \alpha > -1/2$, причем $|K_+(x)| \sim |\alpha|^{1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости.

1.12. Рассмотрим обобщение теоремы С из § 1.3, основанное на теореме, принадлежащей Винеру и Холфу [1] (см. также Титчмарш [1], стр. 429). Пусть $K(\alpha)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ и такая, что $K(\alpha) \rightarrow \exp(\mu\alpha)$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ и $K(\alpha) \rightarrow \exp(i\nu\alpha)$ при $\sigma \rightarrow -\infty$ в этой полосе (μ и ν вещественны); кроме того, в этой полосе $|1 - K(\alpha)| < C|\sigma|^{-p}$, $p > 0$, при $|\sigma| \rightarrow \infty$, причем это неравенство выполняется равномерно в любой внутренней полосе (c, d) при $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$. Тогда в любой такой внутренней полосе функция $K(\alpha)$ может иметь лишь конечное число нулей. Если эти нули расположены в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ то имеет место факторизация

$$K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha) (\alpha - \alpha_1) \dots (\alpha - \alpha_n), \quad (a)$$

где функции $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ регулярны, не имеют нулей в полуплоскостях $\tau \geq c$, $\tau \leq d$ соответственно, и в этих полуплоскостях

$$\begin{aligned} C_1 |\alpha|^{-1/2n-\lambda} < |K_+(\alpha)| < C_2 |\alpha|^{-1/2n-\lambda} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \tau > c, \\ C_3 |\alpha|^{-1/2n+\lambda} < |K_-(\alpha)| < C_4 |\alpha|^{-1/2n+\lambda} \quad \text{при } \alpha \rightarrow \infty, \tau < d, \end{aligned}$$

где C_1, \dots, C_4 — отличные от нуля постоянные и $\lambda = (2\pi)^{-1}(\mu - \nu)$.

Предоставляя доказательство этой теоремы читателю, ограничимся указанием: следует рассмотреть функцию

$$F(\alpha) = e^{-i\nu\alpha} K(\alpha) \frac{(\alpha - it_-)^{1/2n+\lambda} (\alpha - it_+)^{1/2n-\lambda}}{(\alpha - \alpha_1) \dots (\alpha - \alpha_n)},$$

где $t_- \leq \tau_-$, $t_+ \geq \tau_+$. Множитель при $K(\alpha)$ введен для того, чтобы функция $F(\alpha)$ не имела в рассматриваемой полосе нулей, а числа n в показателях введены, чтобы $|F(\alpha)| \rightarrow 1$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$ в этой полосе. Если плоскость α разрезана от it_+ до $i\infty$ и от it_- до $-i\infty$ и $\lambda = (2\pi)^{-1}(\mu - \nu)$, то можно выбрать ветвь, у которой $F(\alpha) \rightarrow 1 = \exp(i0)$ при $\sigma \rightarrow \pm\infty$ в указанной полосе (см. задачу 1.5).

Как в теореме С из § 1.3, так и в сформулированной выше теореме предполагается, что $|K(\alpha)| \rightarrow 1$ при $\sigma \rightarrow \pm\infty$ в заданной полосе. Если же в этой полосе $|K(\alpha)| \sim |\sigma|^\rho$ при $\sigma \rightarrow \pm\infty$, то проще всего применять эти теоремы к функции

$$L(\alpha) = K(\alpha) (\alpha - it_-)^{-p+\eta} (\alpha - it_+)^{-\eta},$$

где $t_- \leq \tau_-$, $t_+ \geq \tau_+$, а η — выбранная надлежащим образом постоянная. При четной функции $K(\alpha)$ удобно выбрать $\eta = 1/2p$, что даст $|K_+(\alpha)| \sim |\alpha|^{1/2p}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в полуплоскости $\tau > \tau_-$. Однако можно было бы применить сформулированные теоремы о факторизации и непосредственно к рассматриваемой функции $K(\alpha)$, если получающиеся интегралы понимать в смысле их главного значения

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_{i\alpha-A}^{i\alpha+A} \frac{-\ln K(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta.$$

(Ср. со статьей Левина и Швингера [1], § V и приложение B)

1.13. *Обобщенные интегралы Фурье.* Если условие $\tau_- < \tau_+$ теоремы А из § 1.4 не выполняется, то вместо этой теоремы справедлива следующая теорема (Титчмарш [1] стр. 11) Предположим, что первый из интегралов

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad F_-(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\alpha x} dx$$

существует при $\tau > \tau_-$, а второй — при $\tau < \tau_+$, где теперь предполагается только, что τ_- и τ_+ конечны. Тогда справедлива формула

$$f(x) = \frac{1}{i(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} F_+(a) e^{-iax} da + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} F_-(a) e^{-iax} da,$$

где $a > \tau_-$, $b < \tau_+$. Первый из входящих в правую часть интегралов равен $f(x)$ при $x > 0$ и равен нулю при $x < 0$; второй интеграл равен нулю при $x > 0$ и равен $f(x)$ при $x < 0$. Эту теорему можно рассматривать как суперпозицию двух случаев теоремы С из § 1.4.

1.14. Доказать следующий аналог теоремы С (§ 1.4) для преобразования Меллина. Пусть функция $F(s)$, $s = \sigma + i\tau$, регулярна при $\sigma > \sigma_-$ и $s^{-1}F(s) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, где r определено соотношением $s - \sigma_- - \varepsilon = r \exp(i\theta)$ при любом $\varepsilon > 0$, причем стремление к пределу равномерное для $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Тогда функция

$$f(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \rho^{-s} ds, \quad \sigma > \sigma_- \quad (a)$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(s) = \int_0^1 f(\rho) \rho^{s-1} d\rho$$

Аналогично, если $F(s)$ регулярна при $\sigma < \sigma_+$ и удовлетворяет соответствующим условиям на бесконечности, то функция $f(\rho)$, определенная соотношением (a), при $\sigma < \sigma_+$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$F(s) = \int_1^{\infty} f(\rho) \rho^{s-1} d\rho.$$

1.15. Если имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Phi(y)}{dy^2} - \gamma^2\Phi(y) = f(y), \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2},$$

то: 1) решение этого уравнения в интервале $-\infty < y < \infty$, такое, что $\Phi \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm\infty$, равно

$$\Phi(y) = -\frac{1}{2\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta) e^{-\gamma|y-\eta|} d\eta;$$

2) решения этого уравнения в интервале $0 \leq y < \infty$, такие, что $\Phi \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$, равны

$$\Phi(y) = -\frac{1}{2\gamma} \int_0^{\infty} f(\eta) [e^{-\gamma|\eta-y|} \pm e^{-\gamma|\eta+y|}] d\eta,$$

причем, выбрав верхний знак, получим решение, для которого $d\Phi/dy = 0$ при $y = 0$, а выбрав нижний знак, получим решение, для которого $\Phi = 0$ при $y = 0$.

1.16. Иногда удобно использовать дельта-функцию Дирака $\delta(x - \xi)$. Основное свойство этой функции записывается так.

$$\int_a^b f(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} f(\xi) & \text{при } a < \xi < b \\ 0 & \text{при } a > \xi, b > \xi \text{ или при } a < \xi, b < \xi. \end{cases}$$

В качестве примера найдем в неограниченной области такое решение неоднородного уравнения

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2\varphi = -4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

которое на бесконечности представляет уходящую волну. Член в правой части уравнения соответствует линейному источнику, находящемуся в точке (x_0, y_0) . Применяя преобразование Фурье по переменной x , получим

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - \gamma^2\Phi = -2(2\pi)^{1/2} e^{i\alpha x_0} \delta(y - y_0).$$

Как и в задаче 1.15, решением, удовлетворяющим условию $\Phi \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm \infty$, будет функция

$$\Phi = (2\pi)^{1/2} \gamma^{-1} e^{i\alpha x_0 - \gamma |y - y_0|}.$$

Применяя обратное преобразование и используя формулу (1.61), получаем

$$\varphi(x, y) = \pi i H_0^{(1)}(kR), \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

1.17. Показать, что, выбрав в задаче 1.16 мнимую часть k отрицательной, придем к решению

$$\varphi(x, y) = -\pi i H_0^{(2)}(kR) = -\pi i \{J_0(kR) - iY_0(kR)\}$$

1.18. Рассмотрим в бесконечной области уравнение

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - c^{-2}\psi_{tt} - \varepsilon c^{-2}\psi_t = -4\pi s(x, y, t),$$

в котором выражение в правой части представляет функцию распределения источников. Применив преобразование Фурье по трем переменным x, y, t (по всем трем переменным в пределах от $-\infty$ до ∞), получим

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int \psi e^{i(\alpha x - \beta y + \omega t)} dx dy dt.$$

Обычным путем находим

$$\psi = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int \int \int \frac{S(\alpha, \beta, \omega) e^{-i(\alpha x + \beta y + \omega t)}}{\alpha^2 + \beta^2 - c^{-2}(\omega^2 + i\varepsilon\omega)} d\alpha d\beta d\omega$$

Для вычисления интеграла по переменной α надо учесть полюсы в точках

$$\alpha = \pm c^{-1} [(\omega^2 - \beta^2 c^2) + i\varepsilon\omega]^{1/2}.$$

В предельном случае $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\omega^2 > \beta^2 c^2$ эти точки лежат на вещественной оси и путь интегрирования должен обходить их, как показано на рис. 4, б. Если вместо интеграла по α требуется вычислить интеграл по ω , то из условия

$$\omega^2 + i\varepsilon\omega - c^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

находим полюсы подинтегрального выражения

$$\omega = -\frac{1}{2}i\varepsilon \pm \left[c^2 (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{1}{4} \varepsilon^2 \right]^{1/2}.$$

При $\varepsilon > 0$ оба полюса расположены в нижней полуплоскости. Следовательно, при $\varepsilon \rightarrow 0$ путь интегрирования в плоскости ω проходит вдоль вещественной оси, обходя точки $\omega = \pm c (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ сверху.

1.19. Показать, что если в подинтегральном выражении в формуле (1.56) вместо $\exp(-i\alpha x)$ написать $\exp(i\alpha x)$, то вместо выражений (1.57) и (1.58) будем соответственно иметь

$$\alpha = k \cos(\theta + it), \quad \gamma = -ik \sin(\theta + it).$$

1.20. Показать, что если в формуле (1.56) положить $k = k_1 - ik_2$ ($k_2 > 0$), то вместо выражений (1.57) и (1.58) будем соответственно иметь

$$\alpha = k \cos(\theta + it), \quad \gamma = +ik \sin(\theta + it).$$

Разрезы на рис. 5 надо провести во втором и четвертом квадрантах и соответственно надо выбрать другие бесконечно удаленные дуги окружностей. Показать, что вместо приближения (1.71) получим приближение

$$I \sim (2k\pi)^{1/2} e^{1/2 i\pi} f(k \cos \theta) \sin \theta r^{-1/2} e^{ikr}.$$

1.21. Асимптотика функций Ганкеля при $r \rightarrow \infty$ имеет вид

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} e^{i(kr - \pi/4)}, \quad H_0^{(2)}(kr) \sim \left(\frac{2}{\pi kr} \right)^{1/2} e^{-i(kr - \pi/4)}.$$

Поэтому $H_0^{(1)}(kr) \exp(-i\omega t)$ и $H_0^{(2)}(kr) \exp(+i\omega t)$ представляют на бесконечности расходящиеся волны.

1.22. Для вычисления интеграла, входящего в формулу (1.64), заметим, что

$$\frac{\sin^{1/2}(\theta + it) \sin^{1/2} \theta}{\cos(\theta + it) + \cos \theta} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\cos^{1/2}(it + \theta + \Theta)} - \frac{1}{\cos^{1/2}(it + \theta - \Theta)} \right],$$

так что

$$J = -2iH(\theta - \Theta) + 2iH(\theta + \Theta), \quad (a)$$

где

$$H(\lambda) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikr \operatorname{ch} t)}{\cos^{1/2}(it + \lambda)} dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos^{1/2} \lambda \operatorname{ch}^{1/2} t \exp(ikr \operatorname{ch} t)}{\cos \lambda + \operatorname{ch} t} dt.$$

Сделаем подстановку $\tau = \operatorname{sh}^{1/2} t$, $\operatorname{ch} t = 1 + 2\tau^2$. Это даст

$$H(\lambda) = e^{-ikr \cos \lambda} \cos^{1/2} \lambda \int_0^{\infty} \frac{\exp[2ikr(\tau^2 + \cos^2^{1/2} \lambda)]}{\tau^2 + \cos^2^{1/2} \lambda} d\tau$$

Дифференцируя по r , найдем

$$\frac{d}{dr} \{ e^{ikr \cos \lambda} H(\lambda) \} = e^{3i\pi/4} \cos^{1/2} \lambda \left(\frac{\pi k}{2r} \right)^{1/2} \exp(2ikr \cos^2^{1/2} \lambda),$$

причем мы воспользовались хорошо известным результатом

$$\int_0^{\infty} e^{i a \tau^2} d\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1/2} e^{i\pi/4}.$$

Интегрируя, получаем

$$H(\lambda) = \pi^{1/2} e^{-i\tau/4} e^{-i k r \cos \lambda} G(\lambda),$$

где

$$G(\lambda) = \begin{cases} F[(2kr)^{1/2} \cos 1/2\lambda] & \text{при } \cos 1/2\lambda > 0, \text{ т. е. например при } -\pi < \lambda < \pi, \\ -F[-(2kr)^{1/2} \cos 1/2\lambda] & \text{при } \cos 1/2\lambda < 0, \text{ т. е. например при } \pi < \lambda < 2\pi. \end{cases}$$

$$F(v) = \int_v^{\infty} e^{i u^2} du$$

Постоянные интегрирования выбраны так, что $G \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Отметим что

$$F(v) + F(-v) = \pi^{1/2} e^{i\tau/4} \quad (6)$$

Далее, так как $0 \leq \eta \leq \pi$, $0 < \theta < \pi$, то для разности $\eta - \theta$ всегда будут выполняться неравенства $-\pi < \eta - \theta < \pi$. Сумма $\eta + \theta$ может быть больше π или меньше π , и в связи с этим надо рассматривать отдельно два случая. Если $\eta + \theta > \pi$, то, используя соотношение (6), можно показать, что

$$H(\eta + \theta) = -\tau e^{-i k r \cos(\eta + \theta)} + \pi^{1/2} e^{-i\tau/4} e^{-i k r \cos(\eta + \theta)} F\left[(2kr)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\eta + \theta)\right].$$

Используя эти результаты, а также формулу (1.63) и приведенное выше соотношение (а), можно получить формулу (1.65)

Используя известный результат $F(v) \sim i(2v)^{-1} \exp(iv^2)$ при $v \rightarrow \infty$, можно показать, что при $r \rightarrow \infty$

$$H(\lambda) \sim \frac{1}{2} (\pi/2kr)^{1/2} (\cos 1/2\lambda)^{-1} e^{i(kr + 1/4\tau)}.$$

Теперь формула (1.72) легко получается из формулы (1.65).

1.23. Иногда для получения асимптотики интеграла (1.56) можно применить два других метода. Мы изложим их в предположении, что $g(x) \sim Ax^{2\mu-1}$ при $x \rightarrow 0$

1) Можно использовать метод перевала, согласно которому при определенных условиях

$$\int_0^{\infty} g(x) e^{-px^2} dx \sim \frac{1}{2} \Gamma(\mu) p^{-\mu} \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Так можно поступить, например, с интегралом (1.67), сделав подстановку

$$\cos(\beta - \theta) = 1 + i\tau^2.$$

2) Можно применить метод стационарной фазы и лемму, согласно которой при определенных условиях

$$\int_0^{\infty} g(x) e^{iqx^2} dx \sim \frac{1}{2} \text{AG}(\mu) q^{-\mu} e^{i\mu\pi/2}.$$

Этот подход можно применить к интегралу (159), сделав подстановку $\text{sh } \frac{1}{2}t = \tau$.

Можно проверить, что в каждом случае асимптотика интеграла (156) выражается формулой (171). (См. также книги Эрдейи [1], гл II, и Ватсона [1], стр. 256, 262, и теоремы абелева типа, упомянутые в конце § 1.6.)

1.24. Показать, что

$$\int_C \frac{f(\alpha)}{\alpha - \xi} d\alpha = \pm \pi i f(\xi) + \text{V. P.} \int_a^b \frac{f(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma,$$

где a, b, ξ вещественны, $a < \xi < b$ и путь интегрирования C проходит вдоль вещественной оси от точки a до точки b , обходя полюс $\alpha = \xi$ снизу, если в формуле взят знак плюс, и обходя полюс $\alpha = \xi$ сверху, если в формуле взят знак минус. Интеграл в правой части формулы понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\text{V. P.} \int_a^b \frac{f(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\xi + \varepsilon}^b \frac{f(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma + \int_a^{\xi - \varepsilon} \frac{f(\sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma \right].$$

Этот результат является частным случаем формулы Племея.

1.25. Амен [1] предложил замечательный прием, который можно использовать для факторизации функции $K(\alpha)$ вида $K_+(\alpha)K_-(\alpha)$. В § 13 уже было указано, что если единственными особыми точками функции $K(\alpha)$ являются полюсы, то факторизация выполняется сравнительно просто, если же имеются точки ветвления, то приходится использовать общий метод, причем может потребоваться вычисление сложных интегралов. Однако если удастся найти преобразование плоскости α , скажем $\alpha = \chi(\beta)$, такое, что преобразованная функция не будет иметь в плоскости β точек ветвления, то в плоскости β факторизацию можно выполнить элементарными методами. Рассмотрим пример из § 13, а именно факторизацию функции $K(\alpha) = \exp(\gamma\alpha)$. Эту задачу мы свели к задаче о представлении функции $g(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}$ в виде суммы двух функций, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Предположим, что k вещественно, и используем преобразование $\alpha = -k \cos \beta$, рассмотренное в § 1.6 в связи с интегралом (167). Получим $g(\alpha) = +i(k \sin \beta)^{-1}$. Преобразованная плоскость показана на рис. 6, где путь интегрирования проходит под точкой $\alpha = k$, т. е. точкой $\beta = \pi$, и над точкой $\alpha = -k$, т. е. точкой $\beta = 0$. После преобразования функция имеет только простые полюсы в этих точках и разбиение легко угадать (ср. с задачей 1.7)

$$\frac{1}{\sin \beta} = \frac{\beta}{\pi \sin \beta} + \frac{\pi - \beta}{\pi \sin \beta}.$$

Положим $\beta = \mu + i\nu$; тогда второе слагаемое в правой части не имеет особенностей при $0 \leq \mu \leq \pi$, $\nu \geq 0$ на пути интегрирования и выше него.

Первое слагаемое не имеет особенностей при $0 \leq \mu \leq \pi$, $\nu \leq 0$ на пути интегрирования и ниже него. После обратного отображения на плоскость α получим

$$\gamma^{-1} = (\pi\gamma)^{-1} \operatorname{arccos}(-\alpha/k) + (\pi\gamma)^{-1} \operatorname{arccos}(\alpha/k),$$

что совпадает с результатом, приведенным в конце § 1.3.

В некоторых случаях удобно рассматривать полюсы во всей плоскости β , а не только в полосе, в которую отображается плоскость α . Амен [1] указал общий путь применения этого метода к функциям вида

$$K(\alpha) = \gamma^{-1} + a(b^2 - \alpha^2)^{-1}, \quad \text{где } a \text{ и } b \text{ — константы;}$$

$$K(\alpha) = c(\alpha^2 - k^2)^{1/2} + (\alpha^2 - l^2)^{1/2}, \quad \text{где } c, k \text{ и } l \text{ — константы.}$$

В последнем случае при отображении комплексной плоскости используются эллиптические функции.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§ 2.1. Введение

Как уже указывалось в конце § 1.7, мы говорим, что решение уравнения в частных производных „основано на методе Винера—Хопфа“, если процесс решения включает на некотором этапе задачу об отыскании определенного представления (факторизации) данной функции $K(\alpha)$, $\alpha = \sigma + i\tau$, которая регулярна и не имеет нулей в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ комплексной плоскости α . Именно, в данном методе требуется найти представление вида

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha), \quad (2.1)$$

где функция $K_+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\tau > \tau_-$, а функция $K_-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\tau < \tau_+$.

Чтобы показать, как применяется представление (2.1) к решению краевых задач для уравнений в частных производных, мы в начале этой главы подробно рассмотрим задачу Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости. Мы рассмотрим три различных подхода к решению задачи, основанные на методе Винера—Хопфа. В § 2.2 мы рассмотрим непосредственный подход, развитый Джонсом [3]. В § 2.3 будет рассмотрен метод парных интегральных уравнений. В § 2.4 задача формулируется в виде интегрального уравнения, которое будет решено в § 2.5.

Мы отдаем предпочтение методу Джонса из-за его простоты. Этот метод дает стандартные приемы для решения тех задач, которые можно точно решить методом Винера—Хопфа. Соответствующее преобразование применяется непосредственно к уравнению в частных производных. Интегральные уравнения при таком подходе не используются. В этой книге мы будем широко применять этот метод для получения как точных, так и приближенных решений различных задач.

В § 2.3 описан метод парных интегральных уравнений, который будет также использован ниже. Этот подход будет особенно полезен в задачах со смешанными неоднородными граничными условиями общего вида, а также в некоторых приближенных методах решения.

В § 2.4 и 2.5 рассмотрен часто используемый метод, основанный на решении интегрального уравнения. Метод Винера—Хопфа был

первоначально развит именно в связи с решением интегрального уравнения вида

$$\int_0^{\infty} f(\xi) K(x - \xi) d\xi = g(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (2.2)$$

где функции K и g заданы, а функция f неизвестна. Задачи, которые рассматриваются в этой и следующих главах, можно сформулировать в виде интегральных уравнений типа (2.2); фактически именно по этой причине Швингер и Копсон заметили, что эти задачи можно решить методом Винера—Хопфа. В литературе метод интегрального уравнения используется очень часто, причем интегральное уравнение выводится обычно с помощью функции Грина. Чтобы облегчить чтение соответствующей литературы, мы подробно рассмотрим все эти вопросы на примере задачи Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости. Мы покажем связь между методом интегральных преобразований и методом функции Грина. Однако в этой книге мы не будем часто пользоваться методом функции Грина и интегрального уравнения, а будем использовать эквивалентный ему и более стандартный подход Джонса.

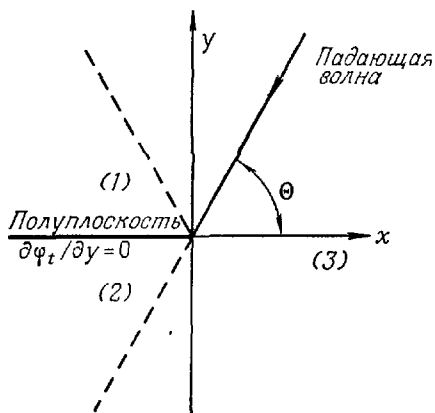


Рис. 7.

Эту книгу можно было бы написать по-разному. Можно было бы взять за основу метод функции Грина и интегрального уравнения; можно было бы, с другой стороны, взять за основу метод парных интегральных уравнений, как это сделано в работах Вайнштейна, Карпа и Клеммова (§ 4.3); наконец, можно было бы взять за основу не метод Винера—Хопфа, а „задачу Гильберта“, что тоже имеет свои преимущества (§ 4.2). Однако следует подчеркнуть, что в этой книге за основу принят подход Джонса, изложенный в § 2.2. Читатель, проработавший этот параграф, сможет разобраться в большинстве книг и статей по данному вопросу, если, конечно, он разобрался в соответствующих параграфах гл. I.

Обратимся теперь к задаче для полуплоскости, которую нам надлежит подробно изучить. Мы будем рассматривать стационарный волновой процесс в плоскости x, y , причем зависимость от времени выражается множителем $\exp(-i\omega t)$. Вдоль отрицательной оси x расположен жесткий экран (рис. 7), на который падает волна

$$\varphi_i = \exp(-ikx \cos \Theta - iky \sin \Theta), \quad 0 < \Theta < \pi. \quad (2.3)$$

§ 2.1. Введение

Обозначим полный потенциал скоростей через φ_t , а через φ обозначим потенциал скоростей вторичного поля, который определяется соотношением

$$\varphi_t = \varphi + \varphi_i. \quad (2.4)$$

Потенциал φ должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0, \quad (2.5)$$

в котором k имеет положительную мнимую часть (см. § 1.5). При этом должны выполняться следующие условия:

$$1. \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, \quad -\infty < x \leq 0, \text{ откуда}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = ik \sin \Theta \exp(-ikx \cos \Theta), \quad y = 0, \quad -\infty < x \leq 0. \quad (2.6)$$

$$2. \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} \text{ и, следовательно, } \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ непрерывны при } y = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$3. \quad \varphi_t \text{ и, следовательно, } \varphi \text{ непрерывны при } y = 0, \quad 0 < x < \infty.$$

Кроме того, необходимо сделать определенные предположения о поведении φ на бесконечности и около ребра экрана в начале координат. Чтобы получить φ , надо, согласно равенству (2.4), вычесть из полного поля поле падающей волны. Введем полярные координаты $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$; тогда плоскость x, y в зависимости от асимптотического поведения поля при $r \rightarrow \infty$ можно разделить на следующие три сектора (см. рис. 7):

1) область (1), в которой потенциал φ представляет собой сумму потенциалов дифрагированной волны и отраженной волны;

2) область (2), в которой потенциал φ представляет собой разность потенциалов дифрагированной волны и падающей волны;

3) область (3), в которой потенциал φ представляет собой потенциал одной дифрагированной волны.

Дифрагированную волну можно рассматривать как излучение линейных источников, распределенных вдоль экрана; поэтому при r , стремящемся к бесконечности, для любого θ ($-\pi < \theta < \pi$) она может быть представлена (см. задачу 1.21) так:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} C_1 H_0^{(1)}(kr) \sim C_2 r^{-1/2} e^{+ik_1 r} e^{-k_2 r},$$

$$(k = k_1 + ik_2, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0; \quad C_1, C_2 \text{ — постоянные}).$$

Отраженная волна в области (1) описывается функцией

$$\exp(-ikx \cos \Theta + iky \sin \Theta).$$

Отсюда получаем следующий результат.

4. При любом фиксированном y , $y \geq 0$ или $y \leq 0$,

а) $|\varphi| < C_3 \exp(k_2 x \cos \Theta - k_2 |y| \sin \Theta)$ при $-\infty < x < -|y| \operatorname{ctg} \Theta$;

б) $|\varphi| < C_4 \exp\{-k_2(x^2 + y^2)^{1/2}\}$ при $-|y| \operatorname{ctg} \Theta < x < \infty$.

Наконец, предположим, что около ребра экрана в начале координат выполняются следующие условия

$$\begin{aligned} 5. \quad (\partial\varphi_t/\partial y) &\rightarrow C_5 x^{-1/2} && \text{при } x \rightarrow +0, \quad y = 0, \\ \varphi_t &\rightarrow C_6 && \text{при } x \rightarrow +0, \quad y = 0, \\ \varphi_t &\rightarrow C_7 && \text{при } x \rightarrow -0, \quad y = +0, \\ \varphi_t &\rightarrow C_8 && \text{при } x \rightarrow -0, \quad y = -0. \end{aligned}$$

[Для удобства изложения мы наложили некоторые излишние условия, которые не являются независимыми от остальных (см. § 2.6).] Поясним некоторые обозначения. Запись $x \rightarrow -0$, $y = +0$ и т. п. означает, что точка стремится к нулю, пробегая отрицательные значения x и находясь на верхней стороне экрана. Числа C_i — константы, значения которых для нас несущественны. Можно считать, что сформулированные в пункте 5 „условия на ребре“ получаются из физических соображений. Они играют существенную роль, так как с ними связан вопрос о единственности решения данной краевой задачи. В общем виде этот вопрос будет рассмотрен в § 2.6.

Существует много методов решения сформулированной выше задачи. Одно из достоинств метода Винера — Хопфа состоит в том, что после его применения к этой простой задаче сразу видно, каким образом надо обобщить метод, чтобы решать задачи, содержащие более сложные граничные условия на полуплоскостях, и более сложные уравнения. (Этот метод можно также обобщить на случай системы параллельных полуплоскостей, см. гл. III.)

Рассмотрим следующие варианты и обобщения сформулированной выше задачи.

а) „Абсолютно мягкий“ (поглощающий) экран с граничным условием $\varphi_t = 0$ вместо $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ (см. задачу 2.3).

б) Полу жесткий (частично поглощающий) экран с граничным условием $p \partial\varphi_t/\partial y + q\varphi_t = 0$, где p и q — соответствующие постоянные (см. § 2.9).

в) Экран, расположенный на границе раздела двух сред. Пусть φ_1 означает потенциал при $y \geq 0$, а φ_2 означает потенциал при $y \leq 0$, причем функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению вида (2.5) и следующим граничным условиям:

$$\partial\varphi_1/\partial y = \partial\varphi_2/\partial y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2.7a)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 \partial\varphi_1/\partial y &= p_2 \partial\varphi_2/\partial y \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned} \right\} \text{при } y = 0, \quad -\infty < x < 0. \quad (2.7б)$$

Требуется найти потенциалы, удовлетворяющие этим условиям при падающей волне (2.3) (см. задачу 2.12, случай Б).

Другое обобщение задачи получается в том случае, когда вместо падающей плоской волны (2.3) берется поле некоторого распределения

источников. Например, первоначальная задача формулировалась бы тогда так: требуется найти решение уравнения

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2\varphi = s(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (2.8)$$

для которого $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 0$, $-\infty < x \leq 0$, причем на бесконечности φ представляет уходящую волну (см. задачу 2.2).

Будет показано, что подробно сформулированная выше задача Зоммерфельда эквивалентна следующей задаче: требуется найти решение двумерного стационарного волнового уравнения при $y \geq 0$, $-\infty < x < \infty$, такое, что

$$\left. \begin{aligned} \partial\varphi/\partial y &= ik \sin \theta \exp(-ikx \cos \theta), & y = 0, & \quad -\infty < x \leq 0 \\ \varphi &= 0, & y = 0, & \quad 0 < x < \infty \end{aligned} \right\},$$

причем на бесконечности φ представляет уходящую волну.

В связи с такой формулировкой возможны два обобщения: требуется найти решение уравнения (2.5) при $y \geq 0$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющее следующим граничным условиям.

А. Падающая волна отсутствует, но граничные условия неоднородны:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= f(x), & y = 0, & \quad 0 < x < \infty, \\ \partial\varphi/\partial y &= g(x), & y = 0, & \quad -\infty < x < 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Эта задача рассматривалась в § 1.1 и будет решена в § 2.8.

Б. Падающая волна дается формулой (2.3), граничные условия однородны:

$$\left. \begin{aligned} p(\partial\varphi/\partial y) - q\varphi &= 0, & y = 0, & \quad 0 < x < \infty, \\ r(\partial\varphi/\partial y) - s\varphi &= 0, & y = 0, & \quad -\infty < x < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

(см. задачу 2.12, случай А, и § 2.9).

Другие варианты задачи возникают в тех случаях, когда ищется решение дифференциального уравнения, отличного от двумерного стационарного волнового уравнения. Некоторые уравнения, сходные с уравнением (2.5), будут рассмотрены в задаче 2.12 (случаи В, Г и Д). Трехмерная задача о дифракции электромагнитной волны на полуплоскости будет рассмотрена в задаче 2.14. Дифракция на полуплоскости волны, распространяющейся в упругой среде, будет рассмотрена в задаче 2.15, а дифракция волны, распространяющейся в вязкой среде, — в задаче 2.16.

В этой главе мы рассматриваем исключительно задачи, связанные с полуплоскостями $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$ при $y = 0$. Различные обобщения на случай границ более сложной геометрической формы будут рассмотрены в гл. III.

§ 2.2. Метод Джонса

В этом параграфе мы решим сформулированную в § 2.1 задачу Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости, применив непосредственный подход, развитый Джонсом [3]. (Наши обозначения будут отличаться от обозначений Джонса, так как он использовал преобразование Лапласа и полагал мнимую часть k отрицательной. Кроме того, в работе [3] рассмотрена задача с граничным условием $\varphi_t = 0$ при $x > 0$, $y = 0$. Однако эти различия касаются лишь дегалей (см. задачи 2.1 и 2.3).

Введем в рассмотрение преобразования Фурье

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\alpha, y) &= \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{i\alpha x} dx, \\ \alpha &= \sigma + i\tau, \\ \Phi_+(\alpha, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \varphi e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi_-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \varphi e^{i\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} (2.11)$$

Из условия 4, указанного в § 2.1, при данном y имеем:

$$\begin{aligned} |\varphi| &< D_1 \exp(-k_2 x) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \text{ и} \\ |\varphi| &< D_2 \exp(k_2 \cos \Theta x) \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \end{aligned}$$

где D_1 и D_2 — постоянные. Поэтому, согласно следствию (1) из теоремы А § 1.3, функция Φ_+ аналитична при $\tau > -k_2$, функция Φ_-

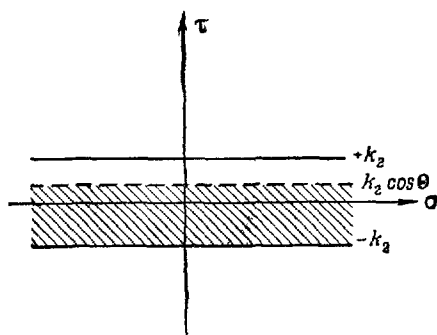


Рис. 8.

аналитична при $\tau < k_2 \cos \Theta$, а функция Φ аналитична в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \Theta$ (см. рис. 8). Далее имеем

$$|\Phi(\alpha, y)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi e^{-\tau x}| dx = |\Phi_1| + |\Phi_2|,$$

где, в силу условий 4.а и 4.б, указанных в § 2.1, имеют место оценки

$$\begin{aligned} |\Phi_1| &< K_1 \int_{-\infty}^{-|y| \operatorname{ctg} \Theta} \exp[(k_2 x \cos \Theta - k_2 |y| \sin \Theta) - \tau_1 x] dx, \\ |\Phi_2| &< K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-k_2 (x^2 + y^2)^{1/2} - \tau_2 x] dx. \end{aligned}$$

Легко показать, что $|\Phi_1|$ ограничен при $|y| \rightarrow \infty$, если $\tau_1 < k_2 \cos \Theta$, а $|\Phi_2|$ ограничен, если $-k_2 < \tau_2 < k_2$. Следовательно, функция $\Phi(\alpha, y)$ ограничена при $|y| \rightarrow \infty$, если α находится в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \Theta$.

Применяя к уравнению (2.5) преобразование Фурье по переменной x , так же как при выводе уравнения (1.55) в § 1.5, найдем, что

$$\frac{d^2\Phi(\alpha, y)}{dy^2} - \gamma^2\Phi(\alpha, y) = 0, \quad \gamma = (\alpha^2 - k_2^2)^{1/2}, \quad (2.12)$$

где ветвь γ определена в конце § 1.2. Это уравнение имеет решения

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\alpha, y) &= A_1(\alpha) e^{-\gamma y} + B_1(\alpha) e^{\gamma y} && \text{при } y \geq 0, \\ \Phi(\alpha, y) &= A_2(\alpha) e^{-\gamma y} + B_2(\alpha) e^{\gamma y} && \text{при } y \leq 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

в которых A_1, B_1, A_2, B_2 являются функциями только от α . То, что для Φ выбраны различные аналитические выражения при $y > 0$ и $y < 0$, представляется естественным, так как функция φ , а следовательно и функция Φ , претерпевает разрыв при $y = 0$.

В уравнении (2.12) ветвь γ выбрана так, что вещественная часть γ при $-k_2 < \tau < k_2$ всегда положительна (см. задачу 1.3), и таким образом в равенствах (2.13) необходимо положить $B_1 = A_2 = 0$. Из условия 2, указанного в § 2.1, следует, что производная $d\varphi/dy$ непрерывна при $y = 0$. Поэтому при $y = 0$ непрерывна и производная $d\Phi/dy$, и можно положить

$$A_1(\alpha) = -B_2(\alpha) = A(\alpha),$$

где $A(\alpha)$ — новое обозначение неизвестной функции. Следовательно,

$$\Phi(\alpha, y) = \begin{cases} A(\alpha) e^{-\gamma y} & \text{при } y \geq 0, \\ -A(\alpha) e^{\gamma y} & \text{при } y \leq 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Иногда для краткости мы будем писать вместо $\Phi(\alpha, y)$ просто $\Phi(\alpha)$ или $\Phi(y)$, если при этом не может возникнуть никаких недоразумений. Аналогично мы будем писать $\Phi_+(\alpha)$, $\Phi_-(\alpha)$ и т. д. Такие обозначения подчеркивают зависимость от той или иной переменной. Обозначения вида $\Phi_+(0)$ всегда будут использоваться для $\Phi_+(\alpha, y)$ при $y = 0$. Если преобразование Фурье претерпевает разрыв при $y = 0$, то нам понадобятся обозначения

$$\Phi_-(\pm 0) = \Phi_-(\alpha, \pm 0) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \varphi e^{i\alpha x} dx, \quad (2.15)$$

где, как обычно, $\lim_{y \rightarrow +0}$ означает переход к пределу, когда y стремится к нулю, пробегая положительные значения, и т. д. Возможны также обозначения $\Phi_+(\pm 0)$, хотя в рассматриваемом сейчас случае в силу условия 3, указанного в § 2.1, будут иметь место равенства

$$\Phi_+(+0) = \Phi_+(-0) = \Phi_+(0), \quad (2.16)$$

где $\Phi_+(0)$ — некоторая функция α . Аналогично введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_+(\alpha, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} e^{i\alpha x} dx, \\ \Phi'_-(\alpha, y) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} e^{i\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Согласно условию 2, указанному в § 2.1, имеем

$$\Phi'_+(\alpha, +0) = \Phi'_+(\alpha, -0) = \Phi'_+(\alpha)$$

и такие же соотношения для Φ'_- .

Используя введенные обозначения, из равенства (2.14) получаем

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(+0) = A(\alpha), \quad (2.18a)$$

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(-0) = -A(\alpha), \quad (2.18б)$$

$$\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_-(\alpha) = -\gamma A(\alpha). \quad (2.18в)$$

Последующие рассуждения применяются во всех методах решения задачи, поэтому важно понять их логическую основу. Желательно, чтобы наши уравнения содержали лишь функции, области регулярности которых известны. Поэтому из трех уравнений, приведенных выше, исключим $A(\alpha)$. Почленно складывая уравнения (2.18a) и (2.18б), получаем

$$2\Phi_+(0) = -\Phi_-(+0) - \Phi_-(-0). \quad (2.19)$$

Вычитая из уравнения (2.18a) уравнение (2.18б) и исключая из полученного результата и уравнения (2.18в) функцию $A(\alpha)$, находим

$$\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_-(\alpha) = -\frac{1}{2} \gamma [\Phi_-(+0) - \Phi_-(-0)]. \quad (2.20)$$

Функция $\Phi'_-(\alpha)$ в этом уравнении известна; согласно условию 1, указанному в § 2.1, она равна

$$\Phi'_-(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} (ik \sin \Theta e^{-ikx \cos \Theta}) dx = \frac{k \sin \Theta}{(2\pi)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)}. \quad (2.21)$$

Введем следующие сокращенные обозначения:

$$\Phi_-(+0) - \Phi_-(-0) = 2D_-, \quad \Phi_-(+0) + \Phi_-(-0) = 2S_-; \quad (2.22)$$

здесь D_- означает $D_-(\alpha)$, S_- означает $S_-(\alpha)$, а сами буквы D и S выбраны для напоминания того, что они равны соответственно полуразности и полусумме двух функций. Функции D_- и S_- регулярны при $\tau < k_2 \cos \Theta$.

Уравнения (2.19) и (2.20) теперь примут вид

$$\Phi_+(0) = -S_-, \quad (2.23)$$

$$\Phi'_+(0) + \frac{k \sin \theta}{(2\pi)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)} = -\gamma D_-. \quad (2.24)$$

Полученные два уравнения содержат четыре неизвестные функции Φ_+ , Φ'_+ , S_- , D_- . Оба уравнения справедливы в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta$

Оба полученных функциональных уравнения являются типичными для метода Винера — Хоуфа [ср. § 1.7, уравнение (1.75)]:

$$R(\alpha) \Phi_+(\alpha) + S(\alpha) \Psi_-(\alpha) + T(\alpha) = 0, \quad (2.25)$$

где R , S , T — заданные, а Φ_+ , Ψ_- — неизвестные функции, причем Φ_+ регулярна в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$, Φ_- регулярна в нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$, а функции R и S регулярны в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$. Исключая функцию $A(\alpha)$ из уравнений (2.18), мы стремились получить функциональные уравнения именно этого типа, и легко видеть, что использованная при этом комбинация уравнений является единственно правильной. Если, например, мы исключим $A(\alpha)$ из (2.18б) и (2.18в), то получим

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = \gamma [\Phi_+(0) + \Phi_-(0)]. \quad (2.26)$$

В этом уравнении обе неизвестные функции $\Phi'_+(0)$ и $\Phi_-(0)$ регулярны в верхней полуплоскости $\tau > -k_2$. Таким образом, уравнение (2.26) отличается по форме от уравнения (2.25). В уравнение (2.18в) входят известная функция $\Phi'_-(0)$ и неизвестная функция $\Phi'_+(0)$. Если $\Phi_+(0)$ также неизвестна, то попытка получить уравнение, содержащее Φ_+ и Φ'_+ , окажется бесполезной, так как это уравнение будет определено иметь такой же вид, как и уравнение (2.26). Поскольку функция $\Phi'_-(0)$ известна, то надо получить хотя бы одно уравнение, содержащее $\Phi'_+(0)$. Если для получения этого уравнения мы используем другие уравнения, содержащие функцию $\Phi_+(0)$, то сначала надо исключить из них эту функцию, что и было проделано нами выше.

Возвратимся к решению нашей задачи. Рассмотрим прежде всего уравнение (2.24). Мы имеем $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = (\alpha - k)^{1/2} (\alpha + k)^{1/2}$, причем ветви каждого множителя выбраны так, что $(\alpha \pm k)^{1/2} \rightarrow \alpha^{1/2}$ при $\sigma \rightarrow +\infty$ в полосе $-k_2 < \tau < k_2$ (см. § 1.2). Множитель $(\alpha + k)^{1/2}$ регулярен и не имеет нулей при $\tau > -k_2$. Разделив уравнение (2.24) на $(\alpha + k)^{1/2}$, получаем

$$\frac{\Phi'_+(0)}{(\alpha + k)^{1/2}} + \frac{k \sin \theta}{(2\pi)^{1/2} (\alpha + k)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)} = -(\alpha - k)^{1/2} D_-. \quad (2.27)$$

Первое слагаемое в левой части уравнения (2.27) регулярно при $\tau > -k_2$, правая часть регулярна при $\tau < k_2 \cos \theta$. Второе слагаемое в левой части регулярно лишь в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta$, но

его можно представить [см. формулу (1.18) и следующий за ней текст] в таком виде:

$$\begin{aligned} & \frac{k \sin \theta}{(2\pi)^{1/2} (x+k)^{1/2} (x-k \cos \theta)} = \\ & = \frac{k \sin \theta}{(2\pi)^{1/2} (x-k \cos \theta)} \left[\frac{1}{(x+k)^{1/2}} - \frac{1}{(k+k \cos \theta)^{1/2}} \right] + \\ & + \frac{k \sin \theta}{(2\pi)^{1/2} (k+k \cos \theta)^{1/2} (x-k \cos \theta)} = H_+(x) + H_-(x), \quad (2.28) \end{aligned}$$

где H_+ регулярна при $\tau > -k_2$, а H_- регулярна при $\tau < k_2 \cos \theta$. Подставляя в уравнение (2.27) выражение (2.28) и группируя члены, находим

$$J(x) = (x+k)^{-1/2} \Phi'_+(0) + H_+(x) = -(\alpha-k)^{1/2} D_- - H_-(\alpha). \quad (2.29)$$

Уравнения вида (2.29) определяют функцию $J(\alpha)$, регулярную в полуплоскости $\tau > -k_2$ и одновременно регулярную в полуплоскости $\tau < k_2 \cos \theta$; так как эти полуплоскости перекрываются, то функция $J(\alpha)$ регулярна на всей плоскости α .

Если нам удастся показать, что функция $J(\alpha)$ имеет на бесконечности алгебраический рост, то, используя обобщенную теорему Лиувилля (§ 1.2), можно определить вид $J(\alpha)$. Поэтому рассмотрим поведение функций, входящих в уравнение (2.29), при $\alpha \rightarrow \infty$.

Из условия 5, указанного в § 2.1, применяя теорему абелева типа, приведенную в конце § 1.6, находим

$$\begin{aligned} |\Phi_-(+0)| &< c_1 |\alpha|^{-1} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \tau < k_2 \cos \theta, \\ |\Phi'_+(0)| &< c_2 |\alpha|^{-1/2} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \tau > -k_2. \end{aligned}$$

Кроме того, из определения (2.28) имеем

$$\begin{aligned} |H_-(\alpha)| &< c_3 |\alpha|^{-1} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \tau < k_2 \cos \theta, \\ |H_+(\alpha)| &< c_4 |\alpha|^{-1} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \tau > -k_2. \end{aligned}$$

Используя эти оценки и уравнение (2.29), получаем

$$\begin{aligned} |J(\alpha)| &< c_5 |\alpha|^{-1/2} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \tau < k_2 \cos \theta, \\ |J(\alpha)| &< c_6 |\alpha|^{-1} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty \text{ в полуплоскости } \tau > -k_2. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $J(\alpha)$ регулярна на всей плоскости α и стремится к нулю, когда α стремится к бесконечности по любому направлению. Тогда в силу теоремы Лиувилля функция $J(\alpha)$ должна тождественно равняться нулю, т. е. должны выполняться равенства

$$\Phi'_+(0) = -(\alpha+k)^{1/2} H_+(x), \quad (2.30a)$$

$$D_- = -(\alpha-k)^{-1/2} H_-(x). \quad (2.30b)$$

Чтобы довести решение до конца, разрешим уравнение (2.18в) относительно $A(\alpha)$, используем формулы (2.21), (2.28) и (2.30а) и найдем

$$A(\alpha) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{k \sin \Theta}{(k + k \cos \Theta)^{1/2} (\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)}. \quad (2.31)$$

Используя (2.14) и выполняя обратное преобразование Фурье, получим

$$\varphi = \mp \frac{1}{2\pi} (k - k \cos \Theta)^{1/2} \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} \frac{e^{-i\alpha x \mp \gamma y}}{(\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)} d\alpha, \quad (2.32a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} (k - k \cos \Theta)^{1/2} \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} \frac{(\alpha + k)^{1/2} e^{-i\alpha x \mp \gamma y}}{\alpha - k \cos \Theta} d\alpha, \quad (2.32б)$$

где $-k_2 < a < k_2 \cos \Theta$ и верхний знак соответствует $y \geq 0$, а нижний знак соответствует $y \leq 0$. Анализ решения дан в § 2.6.

Заканчивая изложение метода Джонса, заметим, что не исследованное нами уравнение (2.23) можно было бы решить точно таким же способом, как и уравнение (2.24). Функции, входящие в правую и левую части уравнения (2.23), в совокупности определяют функцию, регулярную во всей плоскости α и тождественно равную нулю, что следует из поведения правой и левой частей уравнения при α , стремящемся к бесконечности. Таким образом, найдем $\Phi_+(0) = 0$. Также имеем $S_- = 0$, или, в силу второй из формул (2.22), $\Phi_-(+0) = -\Phi_-(-0)$. Из равенства $\Phi_+(0) = 0$ следует, что $\varphi = 0$, т. е. что $\varphi_t = \exp(-ikx \cos \Theta)$ при $y = 0$, $x > 0$.

С другой стороны, замыкая в формуле (2.32а) путь интегрирования дугой в нижней полуплоскости, сразу, получаем, что $\varphi = 0$ при $y = 0$, $x > 0$. Отсюда $\Phi_+(0) = 0$ и, согласно уравнениям (2.18а) и (2.18б), имеем $\Phi_-(+0) = -\Phi_-(-0)$, т. е. уравнение (2.23) по существу оказывается излишним и решение задачи можно получить из уравнения (2.24).

§ 2.3. Метод парных интегральных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим другой подход к задаче. Применим, как и в § 2.2, преобразование Фурье к волновому уравнению, в результате чего получим соотношения (2.14). Применяя затем обратное преобразование, получаем

$$\varphi_t = e^{-ikx \cos \Theta - iky \sin \Theta} \pm \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} A(\alpha) e^{\mp \gamma y - i\alpha x} d\alpha, \quad (2.33)$$

где $-k_2 < a < k_2 \cos \Theta$ и для $y \geq 0$ берутся верхние знаки, а для $y \leq 0$ — нижние. Из условия непрерывности φ_t при $y = 0$, $x > 0$

найдем

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, \quad x > 0. \quad (2.34)$$

(Отсюда сразу следует, что $\varphi_t = \exp(-ikx \cos \Theta)$ при $y = 0, x > 0$. В методе Джонса этот результат получался либо из окончательного решения, либо путем аналитического продолжения; см. конец § 2.2.). Далее, из условия $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ при $y = 0, x < 0$ найдем

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \gamma A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -ik \sin \Theta e^{-ikx \sin \Theta}, \quad x < 0 \quad (2.35)$$

Уравнения (2.34) и (2.35) являются парными интегральными уравнениями, из которых можно найти неизвестную функцию $A(\alpha)$. Для этого заменим в уравнении (2.34) x на $x + \xi, x > 0, \xi > 0$, умножим на пока не известную функцию $\mathcal{N}_1(\xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до ∞ . Предположив, что можно изменить порядок интегрирования, найдем

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_1(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, \quad x > 0. \quad (2.36)$$

Аналогично, заменим в уравнении (2.35) x на $x - \xi, x < 0, \xi > 0$, умножим результат на пока не известную функцию $\mathcal{N}_2(\xi)$ и проинтегрируем по ξ от 0 до ∞ . Изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_2(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \gamma A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = -ik \sin \Theta e^{-ikx \cos \Theta} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_2(\xi) e^{ik\xi \cos \Theta} d\xi, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Введем новые неизвестные функции $N_+(\alpha)$ и $N_-(\alpha)$, определенные формулами

$$\int_0^{\infty} \mathcal{N}_1(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi = N_-(\alpha), \quad \int_0^{\infty} \mathcal{N}_2(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi = N_+(\alpha). \quad (2.38)$$

Согласно теореме А из § 1.3 [см. следствие (1) из этой теоремы], функция N_- регулярна в некоторой нижней полуплоскости, а функция N_+ регулярна в некоторой верхней полуплоскости. Если бы удалось найти \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 , такие, что

$$N_-(\alpha) = N_+(\alpha) \gamma, \quad \gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \quad (2.39)$$

то левые части уравнений (2.36) и (2.37) стали бы одинаковыми. Обозначив $N(\alpha) = N_-(\alpha)$, мы бы нашли

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} N(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ -ik \sin \Theta e^{-ikhx \cos \Theta} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_2(\xi) e^{ikh\xi \cos \Theta} d\xi & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Отсюда, применяя обратное преобразование Фурье, мы могли бы найти $A(\alpha)$. Нетрудно было бы указать N_+ и N_- , удовлетворяющие уравнению (2.39); например, применяемое в методе Винера — Хопфа разложение функции $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ на множители, регулярные в нижней и верхней полуплоскостях соответственно, дало бы $N_+(\alpha) = (\alpha + k)^{-1/2}$, $N_-(\alpha) = (\alpha - k)^{1/2}$. Однако такой выбор N_- противоречил бы первому из соотношений (2.38), согласно которому функция N_- должна стремиться к нулю, когда α стремится к бесконечности в нижней полуплоскости. В дальнейшем мы увидим, что следует выбрать $N_- = (\alpha - k)^{-1/2}$ и $N_+ = (\alpha + k)^{-1/2}$ (см. также исследование общего случая в § 6.2)¹⁾. Выбрав N_+ и N_- , мы можем рассматривать уравнения (2.38) как интегральные уравнения для \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 , которые решаются в общем виде с помощью теоремы С § 1.4. В данном случае мы можем ограничиться использованием простых результатов задачи 2.4 и найти

$$\mathcal{N}_1(\xi) = \pi^{-1/2} \xi^{-1/2} e^{ik\xi + i\pi/4}, \quad \mathcal{N}_2(\xi) = \pi^{-1/2} \xi^{-1/2} e^{ik\xi - i\pi/4}. \quad (2.40)$$

При сделанном выборе N_+ и N_- уравнения (2.36) и (2.37) будут иметь вид

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} (\alpha - k)^{-1/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = 0, \quad x > 0, \quad (2.41a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} (\alpha - k)^{1/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -\pi^{-1/2} e^{i\tau/4} k \sin \Theta e^{-ikhx \cos \Theta} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{i\xi(k+k \cos \Theta)} d\xi, \quad x < 0. \quad (2.41b)$$

Интеграл в правой части можно вычислить (см. задачу 2.4). Кроме того, если уравнение (2.41a) умножить на $\exp(i k x)$ и продифферен-

¹⁾ То есть мы выбираем функции N_+ и N_- , удовлетворяющие не равенству (2.39), а соотношению $\gamma = 1/(N_+ N_-)$. — *Прим. перев.*

цировать по x , то левая часть полученного уравнения будет совпадать с левой частью уравнения (2.41б). В результате получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} (\alpha - k)^{1/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0. \\ -ik \sin \Theta (k + k \cos \Theta)^{-1/2} e^{-ikx \sin \Theta} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим

$$A(\alpha) = -\frac{ik \sin \Theta}{(2\pi)^{1/2} (k + k \cos \Theta)^{1/2} (\alpha - k)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 e^{i(\alpha - k \cos \Theta)x} dx =$$

$$= -\frac{k \sin \Theta}{(2\pi)^{1/2} (k + k \cos \Theta)^{1/2} (\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)},$$

что совпадает с выражением (2.31), полученным методом Джонса.

Как достоинство рассматриваемого метода решения отметим, что в него процесс аналитического продолжения непосредственно не входит. Но по-прежнему используется основной прием: факторизация функции вида $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$. Именно этот прием дает ключ к отысканию нужных N_+ , N_- и, следовательно, \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 . В рассмотренной задаче удалось сразу найти \mathcal{N}_1^r и \mathcal{N}_2^r в явном виде, и для ее решения техника факторизации Винера—Хопфа по существу не применялась. Мы увидим далее, что и в некоторых других важных случаях удается определить \mathcal{N}_1^r , \mathcal{N}_2^r в явном виде и тем самым избежать сложной техники метода Винера—Хопфа (см. гл. VI). Практическая полезность разобранного метода выявится лучше всего при рассмотрении конкретных задач.

Читателю может показаться, что в методе, изложенном в настоящем параграфе, требуется меньше дополнительного анализа, чем в методе Джонса. Это не совсем так: в данном параграфе в ходе решения мы сделали ряд предположений, в то время, как в методе Джонса в § 2.2 они были доказаны; как пример можно указать рассуждения, предшествующие формуле (2.33). Кроме того, некоторые условия, подробно рассмотренные в предыдущем параграфе, здесь использовались неявно; например, предполагая законность перемены порядков интегрирования и сходимости некоторых интегралов, мы молчаливо использовали условия на ребре, т. е. условия 5 из § 2.1. Ряд других замечаний мы сделаем в § 2.6.

§ 2.4. Метод интегрального уравнения

В этом параграфе мы рассмотрим несколько формулировок задачи Зоммерфельда (о дифракции на полуплоскости) в виде интегрального уравнения. Чтобы проиллюстрировать ряд моментов, имеющих само

стоятельный интерес, мы проведем рассуждения несколько более подробно, нежели это необходимо для общего изложения. Именно, мы сравним вывод интегральных уравнений с помощью функции Грина и вывод с помощью интегральных преобразований и выясним причины появления в некоторых случаях расходящихся интегралов. Сначала будет рассмотрен вывод с помощью функции Грина, а затем будет показано, что те же результаты получаются с помощью интегральных преобразований.

Функцией Грина $G(x, y; x_0, y_0)$ для двумерного стационарного волнового уравнения (2.5) называется решение, представляющее потенциал скоростей в точке (x, y) , создаваемый в некоторой области при заданных граничных условиях линейным источником единичной интенсивности, находящимся в точке (x_0, y_0) . Таким образом, функция G должна удовлетворять уравнению

$$G_{,xx} + G_{,yy} + k^2 G = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2.42)$$

Будем обозначать для краткости точку (x, y) через \mathbf{r} , а точку (x_0, y_0) через \mathbf{r}_0 . При выводе интегральных уравнений дифракционной задачи исходим из следующей интегральной формулы: если φ в некоторой области R удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} + k^2 \varphi = 0,$$

то

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} \left\{ G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_0)}{\partial n_0} - \frac{\partial G(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)}{\partial n_0} \varphi(\mathbf{r}_0) \right\} dS_0, \quad (2.43)$$

где точка \mathbf{r}_0 , т. е. точка (x_0, y_0) , лежит на границе S_0 области R , а интегрирование производится по этой границе. Производная $\partial/\partial n_0$ берется по внешней по отношению к R нормали к S_0 в точке (x_0, y_0) . Область R должна содержаться внутри области D , в которой определена функция Грина. Часто выбирают R и D совпадающими. На конечной части границы области D граничные условия обычно берутся однородными: $a \partial G/\partial n_0 + bG = 0$ на S_0 . Если область D бесконечна, то на бесконечности функция G должна представлять уходящую волну. Дальнейшие сведения читатель найдет в гл. VII книги Морса и Фешбаха [1].

Перейдем к выводу интегральных уравнений для задачи Зоммерфельда о полуплоскости из § 2.1.

1а. Метод функции Грина; неизвестная функция $\partial\varphi/\partial u = h(x)$ при $y=0$, $x > 0$. Рассмотрим решение в областях $y \geq 0$ и $y \leq 0$ отдельно. Для $y \geq 0$ применим формулу (2.43) к области, ограниченной осью x и полуокружностью бесконечно большого радиуса

Получим

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y; x_0, 0) \frac{\partial \varphi(x_0, 0)}{\partial y_0} dx_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x, y; x_0, 0)}{\partial y_0} \varphi(x_0, 0) dx_0, \quad (2.44)$$

где учтено, что $\partial/\partial n_0 = -\partial/\partial y_0$ и что интеграл по полуокружности бесконечно большого радиуса равен нулю, так как на бесконечности G представляет уходящие волны. Мы желаем получить интегральное уравнение для $\partial\varphi_t/\partial y$, а уравнение (2.44) содержит две неизвестные функции: $\partial\varphi/\partial y_0$ и φ . Если выбрать функцию G , которая удовлетворяет граничному условию $\partial G/\partial y_0 = 0$ при $y_0 = 0$, то член, содержащий φ , обратится в нуль. Легко видеть, что такая функция G равна [см. задачу 1.16 и уравнение (2.42)]

$$G(x, y; x_0, y_0) = \pi i [H_0^{(1)}(kR) + H_0^{(1)}(kR')], \quad (2.45)$$

где

$$R = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}, \quad R' = [(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2]^{1/2}.$$

Так как φ_t включают падающую из бесконечности волну, то нельзя применить формулу (2.44) непосредственно к функции φ_t . Поэтому выделим падающую и отраженную волны, определив φ так:

$$\varphi_t(x, y) = e^{-ikx \cos \theta - iky \sin \theta} + e^{-ikx \cos \theta + iky \sin \theta} + \varphi. \quad (2.46)$$

Мы выделили не только падающую, но и отраженную волну для того, чтобы при $y=0$ выполнялось равенство $\partial\varphi/\partial y = \partial\varphi_t/\partial y$. Подставив в формулу (2.44) выражения (2.45) и (2.46) при $y \geq 0$, получаем

$$\varphi_t(x, y) = e^{-ikx \cos \theta - iky \sin \theta} + \\ + e^{-ikx \cos \theta + iky \sin \theta} - \frac{1}{2} i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(kR_0) h(\xi) d\xi, \quad (2.47)$$

где

$$R_0 = [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2}.$$

Для области $y \leq 0$ формулу (2.44) можно применить непосредственно к φ_t . Если учесть, что теперь при $y=0$ $\partial/\partial n_0 = +\partial/\partial y_0$, то для $y \leq 0$ найдем

$$\varphi_t(x, y) = \frac{1}{2} i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(kR_0) h(\xi) d\xi. \quad (2.48)$$

Так как при $y=0$, $x > 0$ функция φ_t должна быть непрерывна, то, переходя в выражениях (2.47) и (2.48) к пределу при $y \rightarrow 0$ и приравнивая полученные результаты при $y=0$, $x > 0$, получаем интегральное уравнение

$$i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k|x-\xi|) h(\xi) d\xi = 2e^{-ikx \cos \theta}. \quad (2.49)$$

1.6. Метод функции Грина; неизвестная функция $2e(x) = \varphi_t(x, +0) - \varphi_t(x, -0)$ при $x < 0$. Рассуждаем так же, как и в случае 1.а, но из соотношения (2.44) вместо φ исключаем $\partial\varphi/\partial y_0$, для чего выбираем функцию G , которая удовлетворяет граничному условию $G=0$ при $y_0=0$, т. е. выбираем [ср. с формулой (2.45)]

$$G(x, y; x_0, y_0) = \pi i \{H_0^{(1)}(kR) - H_0^{(1)}(kR')\}. \quad (2.50)$$

В функции φ_t выделим падающую волну и волну типа отраженной¹⁾ по формуле [ср. с формулой (2.46)]

$$\varphi_t(x, y) = e^{-ikx \cos \theta - iky \sin \theta} - e^{-ikx \cos \theta + iky \sin \theta} + \varphi, \quad y \geq 0; \quad (2.51)$$

при этом при $y=0$ будем иметь $\varphi_t = \varphi$. Применим формулу (2.44) при $y \geq 0$ к φ , а при $y \leq 0$ к φ_t . Это даст

$$\begin{aligned} \varphi_t &= e^{-ikx \cos \theta - iky \sin \theta} - e^{-ikx \cos \theta + iky \sin \theta} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}\right)_0 f(x_0, +0) dx_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}\right)_0 f(x_0) dx_0, \quad y \geq 0, \quad (2.52a) \\ \varphi_t &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}\right)_0 f(x_0, -0) dx_0 - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial y_0}\right)_0 f(x_0) dx_0, \quad y \leq 0, \quad (2.52b) \end{aligned}$$

где $\partial G/\partial y_0$ берется при $y_0=0$, через $f(x)$ обозначены значения $\varphi_t = \varphi$ при $y=0$, $x > 0$, а через $f(x, \pm 0)$ — значение $\varphi_t = \varphi$ при $y = \pm 0$, $x < 0$ соответственно. Из условия $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ при $y=0$, $x < 0$ получим интегральное уравнение. Продифференцируем уравнения (2.52а) и (2.52б) по y и устремим y к $+0$ и к -0 соответственно. При этом учтем, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{\partial G}{\partial y_0} = \lim_{y_0 \rightarrow -0} \frac{\partial G}{\partial y_0} = 2\pi i \lim_{y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial y_0} [H_0^{(1)}(kR)].$$

¹⁾ Слагаемое $-\exp[-ikx \cos \theta + iky \sin \theta]$ соответствует отраженной волне для граничного условия $\varphi_t = 0$ при $y=0$, $-\infty < x < \infty$. — Прим. перев.

Исключим члены, содержащие функцию $f(x)$, почленно сложив два уравнения (2.52), и введем функцию $e(x)$, определенную соотношением

$$f(x, +0) - f(x, -0) = 2e(x); \quad (2.53)$$

тогда мы получим уравнение

$$\lim_{y, y_0 \rightarrow 0} i \int_{-\infty}^0 \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} [H_0^{(1)}(kR)] e(x_0) dx_0 = 2ik \sin \Theta e^{-ikx \cos \Theta}, \quad x < 0. \quad (2.54)$$

Мы не можем выполнить указанные в уравнении (2.54) дифференцирование и предельный переход под знаком интеграла, так как при этом получилось бы неинтегрируемое ядро. Мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{y, y_0 \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y \partial y_0} H_0^{(1)}(kR) &= - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(1)}(kR_0) = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) H_0^{(1)}(k|x - x_0|), \end{aligned}$$

где $R_0^2 = (x - x_0)^2 + y^2$. Вследствие этого уравнение (2.54) можно записать также в виде

$$\begin{aligned} - \lim_{y \rightarrow 0} i \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^0 H_0^{(1)} \{ k [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} \} e(\xi) d\xi = \\ = 2ik \sin \Theta e^{-ikx \cos \Theta}, \quad x < 0, \quad (2.55) \end{aligned}$$

или в виде

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^0 H_0^{(1)}(k|x - \xi|) e(\xi) d\xi = \\ = 2ik \sin \Theta e^{-ikx \cos \Theta}, \quad x < 0. \quad (2.56) \end{aligned}$$

В § 2.5 мы увидим, что оба эти уравнения можно решить методом Винера — Хопфа.

Если в уравнении (2.56) выполнить дифференцирование под знаком интеграла, то получится расходящийся интеграл. Расходимость обусловлена поведением подинтегральной функции в окрестности точки $x = \xi$, где

$$H_0^{(1)}(k|x - \xi|) \approx C \ln |x - \xi|, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(1)}(k|x - \xi|) \approx -C(x - \xi)^{-2}.$$

Таким образом получающийся расходящийся интеграл имеет вид

$$\int_{-\infty}^0 (x - \xi)^{-2} F(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < 0.$$

Интегралы такого вида рассматриваются в теории регуляризации расходящихся интегралов Адамара, развитой в связи с исследованием уравнений гиперболического типа. Однако нам нет надобности использовать эту теорию, так как в следующем параграфе мы увидим, что можно применить преобразование Фурье непосредственно к интегральным уравнениям вида (2.55) и (2.56).

В случаях 1а и 1б мы вывели два различных, но эквивалентных одно другому интегральных уравнения; одно из них было получено с помощью функции Грина, удовлетворяющей граничному условию $G=0$ на границе, расположенной в конечной части плоскости, а другое — с помощью функции Грина, удовлетворяющей граничному условию $\partial G/\partial n=0$. Можно получить бесконечное число промежуточных интегральных уравнений, если использовать функцию Грина, удовлетворяющую на границе, расположенной в конечной части плоскости, условию $p \partial G/\partial n + qG=0$. Несмотря на такой произвол в выборе функции Грина и получающихся с ее помощью интегральных уравнений, все интегральные уравнения приводят к одной и той же задаче факторизации, являющейся основой в методе Винера — Хопфа. Во всех случаях функция $K(\alpha)$, которую надо представить в виде $K_+(\alpha)K_-(\alpha)$, оказывается одной и той же.

Покажем теперь, что те же результаты можно получить методом интегральных преобразований. Рассмотренным выше случаям 1а и 1б будут соответствовать случаи 2а и 2б.

2а. Метод интегральных преобразований; неизвестная функция $\partial \varphi_t/\partial y = h(x)$ при $y=0, x>0$. С помощью определения (2.46) вводим, как и в случае 1а, функцию φ . Вводим в рассмотрение преобразование Фурье функции φ , причем обычным путем находим, что $\Phi(\alpha) = A(\alpha) \exp(-\gamma y)$. Используя граничные условия $\partial \varphi/\partial y = 0$ при $y=0, x<0, \partial \varphi/\partial y = h(x)$ при $y=0, x>0$, где функция $h(x)$ пока не известна, найдем

$$A(\alpha) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2} \gamma} \int_0^{\infty} h(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_t = e^{-ikx \cos \theta - iky \sin \theta} + e^{-ikx \cos \theta + iky \sin \theta} - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ib}^{\infty + ib} \gamma^{-1} e^{-i\alpha x - \gamma y} \int_0^{\infty} h(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi d\alpha, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Из рассмотрения поведения φ_t при $x \rightarrow \pm \infty$ находим, что это справедливо при $k_2 \cos \theta < b < k_2$. Для области $y \leq 0$, рассматривая преобразование Фурье непосредственно для φ_t , находим

$$\varphi_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty + ib}^{\infty + ib} \gamma^{-1} e^{-i\alpha x + \gamma y} \int_0^{\infty} h(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi d\alpha, \quad y \leq 0. \quad (2.58)$$

Так как функция φ_t должна быть непрерывна при $y = 0$, $x > 0$, то, осуществляя в уравнениях (2.57) и (2.58) предельный переход при $y \rightarrow 0$ и вычитая одно из этих уравнений из другого, получаем следующее интегральное уравнение для $h(\xi)$:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \gamma^{-1} e^{-iax} \int_0^{\infty} h(\xi) e^{i\xi\alpha} d\xi d\alpha = 2e^{-ikx \cos \theta}, \quad x > 0. \quad (2.59)$$

В этом уравнении можно изменить порядок интегрирования. Используя получающееся из формул (1.60) и (1.61) соотношение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \gamma^{-1} e^{i\alpha(\xi-x)} d\alpha = iH_0^{(1)}(k|x-\xi|), \quad -k_2 < \tau < k_2, \quad (2.60)$$

найдем, что уравнение (2.59) сводится к уравнению (2.49), полученному с помощью функции Грина.

26. Метод интегральных преобразований; неизвестная функция $\varphi_t(x, +0) - \varphi_t(x, -0)$ при $y = 0$, $x < 0$. Как и в случае 16, вводим функцию φ , определяемую равенством (2.51). Вводя в рассмотренное преобразование Фурье функции φ , найдем, что оно равно

$$\Phi = A(\alpha) \exp(-\gamma y),$$

где

$$A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 f(\xi, +0) e^{i\alpha\xi} d\xi + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi$$

и где $f(x, +0)$ означает φ при $y = +0$, $x < 0$, а $f(x)$ означает φ при $y = 0$, $x > 0$, как и в уравнениях (2.52). Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_t &= e^{-ikx \cos \theta - iky \sin \theta} - e^{-ikx \cos \theta + iky \sin \theta} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} e^{-iax - \gamma y} \left[\int_{-\infty}^0 f(\xi, +0) e^{i\alpha\xi} d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \right] d\alpha, \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

В области $y \leq 0$ рассматриваем преобразование Фурье непосредственно для функции φ_t . Это дает

$$\varphi_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} e^{-iax - \gamma y} \left[\int_{-\infty}^0 f(\xi, -0) e^{i\alpha\xi} d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \right] d\alpha, \quad y \leq 0. \quad (2.62)$$

Дифференцируя уравнения (2.61) и (2.62) и складывая полученные результаты, чтобы исключить функцию $f(\xi)$ при $\xi > 0$, в силу условия $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ при $x < 0$, $y = 0$, находим

$$- \int_{\infty+ib}^{\infty+ib} \gamma e^{-iax} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha\xi} d\xi d\alpha = -2ik \sin \theta e^{-ikx \cos \theta}, \quad x < 0, \quad (2.63)$$

где функция $e(\xi)$ определена формулой (2.53). Это и есть интегральное уравнение для $e(\xi)$. Важно отметить, что изменять порядок интегрирования

нельзя, так как получающийся внутренний интеграл будет расходящимся [ср. с уравнением (2.59)]. Можно либо применить метод Винера — Хопфа непосредственно к этому уравнению (см. ниже § 2.5), либо преобразовать это уравнение к виду (2.55) или (2.56) следующим образом. Запишем уравнение (2.63) в виде

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \gamma^{-1} e^{-i\alpha x - \gamma y} \int_{-\infty}^0 e(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi d\alpha =$$

$$= -2ik \sin \Theta e^{-ikhx \cos \Theta}, \quad x < 0, \quad (2.64)$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \gamma^{-1} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^0 e(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi d\alpha =$$

$$= 2ik \sin \Theta e^{-ikhx \cos \Theta}, \quad x < 0. \quad (2.65)$$

Теперь порядок интегрирования можно изменить. Вычисляя, согласно формулам (1.60) и (1.61), внутренний интеграл [ср. с равенством (2.60)], получаем уравнения (2.55) и (2.56).

Дальнейшие замечания по поводу формулировки задач в виде интегральных уравнений будут приведены в задачах 2.6, 2.7 и 2.8.

§ 2.5. Решение интегральных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим решение интегральных уравнений, выведенных в § 2.4. Основной результат, который в дальнейшем нам понадобится, это формула обращения для преобразования Фурье, определенного формулами (1.60) и (1.61), а именно

$$\frac{1}{2} t \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} [k(x^2 + y^2)^{1/2}] e^{i\alpha x} dx = \gamma^{-1} e^{-\gamma |y|},$$

$$-k_2 < \tau < k_2. \quad (2.66)$$

Рассмотрим сначала интегральное уравнение [ср. с уравнением (2.49)]

$$\int_0^{\infty} k(x - \xi) h(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2.67)$$

где k и f — заданные функции, а функция g неизвестна. Введем новую неизвестную функцию

$$e(x) = \int_0^{\infty} k(x - \xi) h(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < 0, \quad (2.68)$$

распространим это уравнение на весь интервал $-\infty < x < \infty$. Применим к уравнениям (2.67) и (2.68) преобразование Фурье, для чего

умножим их на $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\alpha x)$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ . Получим

$$\begin{aligned} F_+(x) + E_-(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \int_0^{\infty} k(x-\xi) h(\xi) d\xi dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} h(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\xi) e^{i\alpha x} dx d\xi, \end{aligned}$$

где

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad E_-(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 e(x) e^{i\alpha x} dx \quad (2.69)$$

Во внутреннем интеграле введем новую переменную $y = x - \xi$. Тогда двойной интеграл сводится к произведению двух интегралов, и мы получаем

$$F_+(\alpha) + E_-(\alpha) = H_+(\alpha) K(\alpha), \quad (2.70)$$

где

$$H_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} h(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi, \quad K(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} k(y) e^{i\alpha y} dy. \quad (2.71)$$

Заметим, что для упрощения формулы (2.70) в определении функции $K(\alpha)$ перед интегралом был опущен множитель $(2\pi)^{-1/2}$. Если уравнение (2.70) справедливо в некоторой полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$ плоскости α , то оно будет аналогично рассматриваемому в методе Винера — Хопфа функциональному уравнению (2.25). В нашей конкретной задаче, т. е. для уравнения (2.49), имеем:

$$\begin{aligned} F_+(\alpha) &= \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{x(\alpha - k \cos \theta)} dx = \\ &= \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{\alpha - k \cos \theta}, \quad \tau > k_2 \cos \theta, \quad (2.72a) \end{aligned}$$

$$K(\alpha) = i \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(k|x|) e^{i\alpha x} dx = 2\gamma^{-1}, \quad -k_2 < \tau < k_2. \quad (2.72b)$$

Таким образом, уравнение (2.70) принимает вид

$$\frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{\alpha - k \cos \theta} + E_-(\alpha) = \frac{2}{\gamma} H_+(\alpha). \quad (2.73)$$

Это уравнение соответствует уравнению (2.24) в методе Джонса. По определению, $h(x) = \partial \varphi_H / \partial y$ при $y = 0$, $x > 0$. Так как $|\varphi_H| <$

$\leq \exp(k_2 x \cos \Theta)$ при $x \rightarrow +\infty$, то функция H_+ регулярна при $\tau > k_2 \cos \Theta$. Кроме того, при $x \rightarrow -\infty$ справедлива оценка

$$e(x) = i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k|x-\xi|) h(\xi) d\xi \sim C_1 \int_0^{\infty} (\xi-x)^{-1/2} e^{ik(\xi-x)} h(\xi) d\xi;$$

$$|e(x)| < C_2 e^{k_2 x} \int_0^{\infty} e^{-k_2 \xi} h(\xi) d\xi \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (2.74)$$

Отсюда следует, что функция $E_-(\alpha)$ регулярна при $\tau < k_2$. Таким образом, уравнение (2.73) справедливо в полосе $k_2 \cos \Theta < \tau < k_2$. Уравнение (2.73) решается аналогично уравнению (2.24) в методе Джонса. Умножаем его на $(\alpha - k)^{1/2}$ и записываем в виде

$$P(\alpha) = \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{\alpha - k \cos \Theta} [(\alpha - k)^{1/2} - (k \cos \Theta - k)^{1/2}] + E_-(\alpha) =$$

$$= \frac{2}{(\alpha + k)^{1/2}} H_+(\alpha) - \frac{2}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i(k \cos \Theta - k)^{1/2}}{\alpha - k \cos \Theta}. \quad (2.75)$$

Это определяет некоторую функцию $P(\alpha)$, регулярную во всей плоскости α .

Из физических соображений следует, что $h(x) \sim x^{-1/2}$ при $x \rightarrow +0$. Отсюда получается, что $H_+(\alpha) \sim \alpha^{-1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости. Далее, из определения (2.74) имеем: $e(x) \sim C$ при $x \rightarrow -0$, где C — некоторая постоянная и, следовательно, $E_-(\alpha) \sim \alpha^{-1}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в нижней полуплоскости. Используя эти оценки в уравнении (2.75), найдем, что $P(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ по любому направлению, следовательно, в силу теоремы Лиувилля, функция $P(\alpha)$ тождественно равна нулю. Таким образом, получаем

$$H_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i(k \cos \Theta - k)^{1/2} (\alpha + k)^{1/2}}{\alpha - k \cos \Theta}, \quad k_2 \cos \Theta < \tau < k_2. \quad (2.76)$$

Чтобы вычислить потенциал скоростей в любой точке пространства вернемся к формулам (2.44), (2.45) и (2.46), согласно которым

$$\varphi_i = q(x, y) \mp \frac{1}{2} i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}\{k[(x-\xi)^2 + y^2]^{1/2}\} h(\xi) d\xi; \quad (2.77)$$

здесь для $y \geq 0$ надо брать верхний знак, а для $y \leq 0$ — нижний знак, и

$$q(x, y) = \begin{cases} e^{-ikx \cos \Theta - iky \sin \Theta} + e^{-ikx \cos \Theta + iky \sin \Theta} & \text{при } y \geq 0, \\ 0 & \text{при } y \leq 0. \end{cases}$$

Чтобы закончить решение, подставим в формулу (2.77) следующее выражение:

$$h(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i b}^{\infty+i b} H_+(a) e^{-i a \xi} da, \quad k_2 \cos \Theta < b < k_2;$$

интеграл в этом выражении автоматически обращается в нуль при $\xi < 0$. Пределы интегрирования в формуле (2.77) можно таким образом распространить на всю ось $(-\infty, \infty)$. Изменим порядок интегрирования и введем во внутреннем интеграле новую переменную $u = x - \xi$. Внутренний интеграл можно вычислить при помощи формулы (2.66). В результате получим

$$\varphi_t = q(x, y) \mp \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i b}^{\infty+i b} \gamma^{-1} e^{-i a x \mp \gamma y} H_+(a) da.$$

(Этот же результат можно получить, применяя к равенству (2.77) теорему о свертке.) Подставляя вместо $H_+(a)$ выражение (2.76) и используя формулу (1.13а), т. е. соотношение

$$(k \cos \Theta - k)^{1/2} = -i(k - k \cos \Theta)^{1/2},$$

найдем

$$\varphi_t = q(x, y) \mp \frac{1}{2\pi} (k - k \cos \Theta)^{1/2} \int_{-\infty+i b}^{\infty+i b} \frac{\exp(-i a x \mp \gamma y)}{(a - k)^{1/2} (a - k \cos \Theta)} da. \quad (2.78)$$

Произведем параллельный перенос пути интегрирования так, чтобы этот путь перешел в прямую $\tau = a$, где $-k_2 < a < k_2 \cos \Theta$; при этом мы пересечем полюс в точке $a = k \cos \Theta$. При $y \geq 0$ вычет в этом полюсе даст в выражении для φ_t слагаемое

$$- \exp(-i k x \cos \Theta + i k y \sin \Theta),$$

а при $y \leq 0$ — слагаемое

$$+ \exp(-i k x \cos \Theta - i k y \sin \Theta).$$

В результате приходим к решению задачи, совпадающему с решением, полученным методом Джонса, т. е. получаем $\varphi_t = \varphi_t \mp \varphi$, где

$$\varphi_t = \exp(-i k x \cos \Theta - i k y \sin \Theta)$$

представляет падающую волну, а φ определяется формулой (2.32а).

Дальнейшие подробности, относящиеся к решению интегральных уравнений данного типа, можно найти в работе Копсона [2] и в книге Бейкера и Копсона [1].

Остальные интегральные уравнения, полученные в § 2.4, мы будем исследовать столь подробно. Рассмотрим уравнение [ср. с уравнением (2.56)]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right) \int_{-\infty}^0 \bar{k}(x - \xi) e(\xi) d\xi = \begin{cases} g(x) & \text{при } x < 0, \\ h(x) & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (2.79)$$

где исходное интегральное уравнение записано в первой строке, функция $e(\xi)$ неизвестна, а функция $h(x)$ определяется как значение левой части уравнения, записанного во второй строке, при $x > 0$. Применим преобразование Фурье по переменной x : умножим уравнение (2.79) на $\exp(i\alpha x)$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до ∞ . Член в левой части, содержащий вторую производную по x , проинтегрируем дважды по частям. Затем, как и ранее, изменим порядок интегрирования и произведем замену переменной. В результате получим

$$G_-(\alpha) + H_+(\alpha) = (k^2 - \alpha^2) E_-(\alpha) K(\alpha). \quad (2.80)$$

В частности для уравнения (2.56) найдем, что

$$G_-(\alpha) = \frac{2ik \sin \theta}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha(x - k \cos \theta)} dx = \frac{2k \sin \theta}{(2\pi)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)},$$

а функция $K(\alpha)$ определяется равенством (2.72 б). Таким образом, получаем

$$k \sin \theta (2\pi)^{-1/2} (\alpha - k \cos \theta)^{-1} + \frac{1}{2} H_+(\alpha) = -(\alpha^2 - k^2)^{1/2} E_-(\alpha). \quad (2.81)$$

Рассуждая, как и выше, найдем, что это уравнение справедливо в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta$. Кроме того, это уравнение почти совпадает с уравнением (2.24), полученным методом Джонса: $E_-(\alpha)$ совпадает с $D_-(\alpha)$, а $h(x)$ пропорциональна $d\varphi/du$ при $y=0$. (См. вывод интегральных уравнений в § 2.4.) Таким образом, дальнейший анализ полученного уравнения не нужен. Между прочим, мы проиллюстрировали обстоятельство, на котором мы остановимся позже. В методе Джонса неизвестные функции [например, $H_+(\alpha)$ и $E_-(\alpha)$ в уравнении (2.81)] входят симметрично и их физический смысл очевиден из определения. В методе интегральных уравнений такая симметрия сразу не очевидна и выявляется лишь после применения интегральных преобразований.

Наконец, рассмотрим уравнение (2.55)

$$-\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^0 \bar{k}(x - \xi; y) e(\xi) d\xi = g(x), \quad x < 0, \quad (2.82)$$

где мы записали ядро в виде $\bar{k}(x - \xi, y)$ для того, чтобы подчеркнуть его зависимость от y , хотя в конце концов мы должны

устремить y к нулю. Как и ранее, введением новой неизвестной функции $h(x)$, $x > 0$, распространяем уравнение на всю ось x . Затем применяем преобразование Фурье и предполагаем, что порядок выполнения предельного перехода, дифференцирования и интегрирования можно изменить. Это вытекает из равномерной сходимости интеграла. Используя принятые нами обозначения, найдем

$$-\left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial^2 K(\alpha; y)}{\partial y^2} \right] E_-(\alpha) = G_-(\alpha) + H_+(\alpha). \quad (2.83)$$

В интересующих нас случаях в уравнении (2.83) можно выполнить дифференцирование и перейти к пределу; например, для уравнения (2.55) мы получим

$$K(\alpha; y) = K(\alpha) e^{-\alpha y}, \quad -\lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^2 K(\alpha; y)}{\partial y^2} \right] = (k^2 - \alpha^2) K(\alpha),$$

откуда видим, что уравнение (2.83) совпадает с уравнением (2.80).

Мы умышленно не рассматривали решения интегральных уравнений (2.59) и (2.63), полученных с помощью интегральных преобразований и эквивалентных интегральным уравнениям, решения которых были рассмотрены выше. Очевидно, что если мы применим к этим уравнениям преобразование Фурье, то вернемся к ранее полученным результатам. Этот процесс был бы просто „обращением“ процесса получения интегральных уравнений. Конечно, не имеет смысла сначала с помощью интегральных преобразований выводить интегральные уравнения, а затем снова, применяя интегральные преобразования, проводить обратный процесс. Суть метода Джонса состоит именно в том, что функциональные уравнения Винера — Хопфа составляются из функций, полученных применением интегральных преобразований непосредственно к уравнению в частных производных без использования в качестве промежуточного шага интегральных уравнений.

§ 2.6. Анализ решения

Рассуждения предыдущих параграфов можно было бы провести вполне строго. Тогда мы могли бы утверждать, что найденная функция есть *единственное* решение, удовлетворяющее всем условиям задачи. (Именно так и делали Винер и Хопф в своей работе о решении интегрального уравнения рассматриваемого типа.) В задачах для уравнений в частных производных часто проще получить решение более или менее формальным путем. В таком случае необходимо затем проверить, что это формальное решение действительно удовлетворяет всем условиям задачи. *Если, кроме того, известно, что задача имеет только одно решение*, то мы можем считать, что задача решена правильно.

В методе Винера—Хопфа решение обычно получается в виде интеграла по комплексному переменному и представить его в более простом виде бывает затруднительно. Чтобы показать, как можно проверить, что такое формальное решение действительно удовлетворяет всем условиям задачи, рассмотрим найденное решение задачи Зоммерфельда [см. формулу (2.32a)]

$$\begin{aligned} \varphi_t &= e^{-ikx \cos \Theta -iky \sin \Theta} \mp \\ &\mp \frac{1}{2\pi} (k - k \cos \Theta)^{1/2} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{e^{-iax - \gamma|y|} dx}{(\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)}, \quad (2.84a) \end{aligned}$$

где $-k_2 < a < k_2 \cos \Theta$. Докажем прежде всего, что эта функция удовлетворяет стационарному волновому уравнению. Для этого используем известные теоремы о равномерно сходящихся несобственных интегралах и условия, при которых законно дифференцирование под знаком интеграла [см., например, книгу Карслоу (Carslaw H. S., The theory of Fourier integrals and series, Macmillan, 1930, стр. 196—201)].

Если $|y| > 0$, то подинтегральное выражение в функции (2.84a) экспоненциально убывает при $\text{Re } \alpha \rightarrow \pm \infty$ в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \Theta$. Интегралы, получающиеся после применения к подинтегральному выражению операторов $\partial^2/\partial x^2$ и $\partial^2/\partial y^2$, сходятся равномерно при $|y| > 0$. Следовательно, для $|y| > 0$, $-\infty < x < \infty$ при вычислении вторых производных от функции, определяемой интегралом, допустимо дифференцирование под знаком интеграла.

Далее, пусть плоскость α разрезана вдоль прямых, параллельных оси u , одна из которых идет от точки $k = k_1 + ik_2$ до точки $k_1 + i\infty$, а другая — от точки $-k$ до точки $-k_1 - i\infty$. Если путь интегрирования деформировать так, чтобы он охватывал тот или другой разрез, в зависимости от того, о какой из полуплоскостей $x > 0$ или $x < 0$ идет речь, то, как и выше, легко показать, что при $|x| > 0$, $0 \leq y < \infty$, $-\infty < y \leq 0$ дифференцирование под знаком интеграла допустимо. Кроме того, можно показать, что $\partial^2\varphi/\partial x^2$, $\partial^2\varphi/\partial y^2$ непрерывны при $y=0$, $x > 0$. (В действительности в рассматриваемом частном случае интеграл и его производные четного порядка тождественно обращаются в нуль при $y=0$.) Таким образом, функция (2.84a) удовлетворяет стационарному волновому уравнению в любой конечной точке плоскости (x, y) , кроме точек линии $y=0$, $-\infty < x \leq 0$.

Рассмотрим теперь выражение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} (k - k \cos \Theta)^{1/2} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{(\alpha + k)^{1/2} e^{-iax - \gamma|y|}}{\alpha - k \cos \Theta} d\alpha, \quad (2.84b)$$

полученное дифференцированием функции (2.84a). Этот интеграл равномерно сходится для всех x и y , удовлетворяющих неравенству

$(x^2 + y^2)^{1/2} \gg \epsilon$, где ϵ сколь угодно мало. При $y=0$, $x < 0$ путь интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости полуокружностью бесконечно большого радиуса. Внутри образованного контура единственной особенностью подинтегрального выражения будет простой полюс в точке $\alpha = k \cos \Theta$, находя соответствующий вычет, получаем формулу (2.6) из условия 1, указанного в § 2.1. Точно так же проверяется выполнение условий 2 и 3, указанных в § 2.1. Далее, так как подинтегральное выражение в формуле (2.84а) является функцией, регулярной в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \Theta$, то, согласно теореме В § 1.4, имеем $|\varphi| < \exp(-k_2 + \delta)x$ при $x \rightarrow +\infty$ и $|\varphi| < \exp(k_2 \cos \Theta - \delta)x$ при $x \rightarrow -\infty$, где δ сколь угодно мало (ср. с условием 4, указанным в § 2.1).

Наконец, проверим выполнение условий 5, указанных в § 2.1. При $y=0$, $x > 0$ путь интегрирования в формуле (2.84б) можно деформировать так, чтобы он перешел в нижнюю полуплоскость. Разрез плоскости α проведем параллельно мнимой оси от точки $-k = -k_1 - ik_2$ до точки $-k_1 - i\infty$. Интеграл (2.84б) сведется к интегралу вокруг линии разреза, который можно привести к виду

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{-1}{\pi} (k - k \cos \Theta)^{1/2} e^{ikx - i\pi/4} \int_0^{\infty} \frac{u^{1/2} e^{-ux} du}{u - i(k + k \cos \Theta)}.$$

Отсюда в силу формул (1.74) находим, что $\partial \varphi / \partial y \sim Cx^{-1/2}$ при $x \rightarrow +0$. Аналогично убеждаемся, что и остальные условия 5, указанные в 2.1, также выполняются.

(Пример подробного анализа формального решения, найденного методом Винера — Хопфа, содержится в работе Базера и Карпа [1].)

Для полноты изложения заметим, что, используя результаты, изложенные в § 1б, можно представить решение (2.84а) через интегралы Френеля. Сравнивая формулы (2.84а) и (1.62) и вспоминая, что $(k - k \cos \Theta)^{1/2} = = i(k \cos \Theta - k)^{1/2}$, находим

$$\varphi_t = e^{-ikx \cos \Theta - iky \sin \Theta} \mp i(2\pi)^{-1} I, \quad (2.85)$$

где I выражается через интегралы Френеля по формуле (1.65), причем знак минус берется для $y \geq 0$, а знак плюс — для $y \leq 0$. Так как $F(v) + F(-v) = -\pi^{1/2} \exp(i\pi/4)$, то при $y \geq 0$, т. е. при $0 \leq \theta \leq \pi$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_t = \pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} \left\{ e^{-ikr \cos(\theta - \Theta)} F \left[-(2kr)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta - \Theta) \right] + \right. \\ \left. + e^{-ikr \cos(\theta + \Theta)} F \left[(2kr)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta + \Theta) \right] \right\}, \quad (2.86) \end{aligned}$$

где $F(v)$ — комплексный интеграл Френеля, определенный формулой (1.66)

При $y \leq 0$ следует помнить, что формулы (2.84а) и (1.62) содержат $|y|$, так что если под θ понимать направленный угол, который радиус-вектор составляет с лучом $y=0$, $x > 0$, то θ принимает отрицательные значения при $y < 0$, поэтому в формуле (1.65) при $y < 0$ нужно заменить θ на $-\theta$. Мы должны также взять нижний знак в формуле (2.85), тогда мы найдем,

что при $y \leq 0$, т. е. при $-\pi \leq \theta \leq 0$ функция φ_t по-прежнему выражается формулой (2.86). Таким образом, формула (2.86) дает поле во всем пространстве, если считать, что $-\pi \leq \theta \leq \pi$.

Обратимся теперь к условию на ребре (условию 5 из § 2.1), которое обеспечивает единственность найденного методом Винера — Хопфа решения нашей задачи. Рассмотрим решение функционального уравнения (2.29), а именно

$$J(x) = (\alpha + k)^{-1/2} \Phi'_+(0) + H_+(x) = -(\alpha - k)^{1/2} D_- - H_-(x), \quad (2.87)$$

где $H_+ \sim \alpha^{-1}$ и $H_- \sim \alpha^{-1}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Вместо условия 5 из § 2.1 наложим более общее условие: если $y=0$, то $\partial\varphi/\partial y \sim x^\mu$ при $x \rightarrow +0$ и $\varphi \sim x^\nu$ при $x \rightarrow -0$. Тогда

$$(\alpha + k)^{-1/2} \Phi'_+(0) \sim \alpha^{-3/2-\mu}, \quad (\alpha - k)^{1/2} D_- \sim \alpha^{-1/2-\nu}$$

при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Согласно обобщенной теореме Лиувилля (см. § 1.2), из формулы (2.87) следует, что $J(\alpha) = P_n(\alpha)$; здесь $P_n(\alpha)$ — полином степени, не превосходящей n , где n — целая часть *меньшего* из двух чисел $-3/2 - \mu$ и $-1/2 - \nu$, если только это число неотрицательно. ($P_0(\alpha) = C = \text{const.}$) Таким образом, для того чтобы выполнялось равенство $J(\alpha) = 0$, *достаточно* потребовать *либо* ограниченности ν и $\mu > -3/2$, т. е. $\partial\varphi/\partial y < C_1 x^{-3/2+\epsilon}$ при $x \rightarrow 0$, $y=0$, *либо* ограниченности μ и $\nu > -1/2$, т. е. $\varphi < C_2 x^{-1/2+\epsilon}$ при $x \rightarrow -0$, $y = \pm 0$ (ϵ — произвольно малое положительное число). При формулировке задачи мы потребовали $\mu = -1/2$, $\nu = 0$, т. е. мы наложили *оба* условия: и условие на φ и условие на $\partial\varphi/\partial y$, что в совокупности более чем достаточно для выполнения равенства $J(\alpha) = 0$. В то же время при $x \rightarrow -0$ мы потребовали $\varphi \sim C$ (так как $\varphi_t \sim C$, $\varphi_l \sim C$); однако, решив задачу, мы нашли, что $\varphi \sim x^{1/2}$. Такое ослабление этого одного условия при формулировке задачи не играет роли, если оно не столь велико, как в примере, который будет рассмотрен ниже. Можно было бы, наоборот, использовать при решении задачи более строгие оценки, например вместо $\varphi \sim C$ использовать неравенство $|\varphi| < C$, однако в этом нет необходимости.

Если ослабить наложенные на φ и $\partial\varphi/\partial y$ условия на ребре (условия 5 из § 2.1), то решение задачи Зоммерфельда будет не единственным. Например, можно построить решение такое, что $\partial\varphi/\partial y \sim C_1 x^{-1/2}$ при $x \rightarrow +0$, $y=0$ и $\varphi \sim C_2 x^{-1/2}$ при $x \rightarrow -0$, $y = \pm 0$. По теореме Лиувилля в этом случае найдем, что $J(\alpha) = C$, где C — постоянная. Рассуждая так же, как при выводе формулы (2.32а), получаем

$$\begin{aligned} \Phi'_+(0) &= -(\alpha + k)^{1/2} H_+(x) + C(\alpha + k)^{1/2}, \\ \varphi &= \varphi_0 \mp \frac{C}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} \frac{\exp(-i\alpha x - \gamma|y|)}{(\alpha - k)^{1/2}} d\alpha, \end{aligned}$$

где φ_0 определяется формулой (2.32а), а верхний и нижний знаки соответствуют $y \geq 0$ и $y \leq 0$. При $y = 0$, согласно результатам задачи 2.4, найдем

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_0 \mp C i \pi^{-1/2} (-x)^{-1/2} e^{ikx} & \text{при } x < 0, \\ \varphi_0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Для выполнения отброшенного условия $\varphi \sim \text{const}$ при $x \rightarrow -0$ пришлось бы, конечно, положить $C = 0$.

Койтер [2, стр. 369—370] исследовал другой случай нарушения единственности решения, встречающийся в одной задаче теории упругости, где дополнительный член соответствовал сосредоточенной силе, приложенной к ребру клина.

Может показаться, что другое решение задачи получится, если формулу (2.87) умножить на $\alpha + p$, где p — некоторая комплексная постоянная. По теореме Лиувилля находим, что $(\alpha + p)J(\alpha) = \text{const} = C$ и, следовательно,

$$\Phi'_+(0) = -(\alpha + k)^{1/2} H_+(\alpha) + C(\alpha + k)^{1/2}(\alpha + p)^{-1}.$$

Однако, так как функция $\Phi'_+(0)$ регулярна при $\tau > -k_2$, то надо положить $\text{Im } p \leq -k_2$. Аналогичное рассуждение показывает, что из свойств D_- следует $\text{Im } p \geq k_2 \cos \Theta$. Отсюда видно, что $C = 0$, и мы приходим к ранее найденному решению.

Проведенные рассуждения имели целью показать, какую роль играют условия на ребре 5, указанные в § 2.1, в установлении единственности решения, получаемого методом Винера — Хопфа. При более общем подходе вопрос об условиях на ребре, обеспечивающих единственность решения, оказывается связанным с теоремами существования. Этому вопросу посвящена значительная литература, из которой мы упомянем работы Баукампа [Bauckamp C. J., [1], стр. 45 (a summary); *Phillips Res. Rep.*, 5 (1950), 401], Джонса [Jones D. S., [1]; *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) 2 (1952), 440; *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 5 (1952), 363], Мауэ [Maue A. W., *Z. Phys.*, 126 (1949), 601] и Мейкснера [Meixner J., *Ann. Phys.*, 6 (1949), 2]. Попытка воспроизвести здесь все детали рассуждений каждого из этих авторов увела бы нас слишком далеко. Их результаты, хотя и получены разными путями, по существу совпадают.

В скалярных задачах при нашем подходе достаточно положить $k = 0$ в окрестности ребра и рассматривать задачу для уравнения Лапласа. В рассмотренной выше задаче мы имеем $\partial\varphi_i/\partial u = 0$ при $y = 0$, $x < 0$, и хорошо известно, что для соответствующей статической задачи $\partial\varphi_i/\partial u \sim x^{-1/2}$ при $y = 0$, $x \rightarrow +0$ и φ_i конечно в окрестности ребра. (С физической точки зрения такая задача соответствует исследованию течения несжимаемой жидкости в окрестности кромки пластины, на которой нормальная составляющая скорости равна нулю.) Аналогично, если $\varphi_i = 0$ при $y = 0$, $x < 0$, то для

статической задачи имеем $\varphi_z \sim x^{1/2}$ при $y = 0$, $x \rightarrow +0$ и $d\varphi_z/dy \sim (-x)^{-1/2}$ при $y = 0$, $x \rightarrow -0$. (С физической точки зрения данная задача соответствует определению электростатического поля и плотности заряда вблизи острого ребра идеально проводящей пластины, имеющей нулевой потенциал.)

В задачах электромагнетизма условие на ребре удобно применять в следующем виде: вблизи ребра нормальная к ребру составляющая плотности тока пропорциональна $r^{1/2}$, а касательная составляющая плотности тока пропорциональна $r^{-1/2}$, где r — расстояние от ребра. Плотность зарядов вблизи ребра пропорциональна $r^{-1/2}$. Скачки компонент поля связаны с плотностями тока и заряда следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_+ - \mathbf{B}_-) &= \Omega \mathbf{k}, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-) &= \omega, \end{aligned}$$

где Ω — величина плотности тока, \mathbf{k} — единичный вектор, определяющий его направление, ω — плотность зарядов. Эти условия на ребре чрезвычайно важны, так как можно построить решения граничной задачи, удовлетворяющие всем граничным условиям, но имеющие на ребре другие особенности.

§ 2.7. Сравнение различных методов

Сравним прежде всего метод Джонса и метод интегрального уравнения.

При методе интегрального уравнения надо найти функцию Грина, вывести интегральное уравнение, применить интегральное преобразование. Метод Джонса более прост, так как основное функциональное уравнение метода Винера — Хопфа получается сразу после применения интегрального преобразования к уравнению в частных производных.

Вывод интегрального уравнения с помощью функции Грина достаточно сложен. Иногда сразу не очевидно, какую функцию Грина надо выбрать; известны примеры, когда это приводило к недоразумениям и ненужным усложнениям. При этом могут потребоваться преобразования Фурье таких сложных функций, как функции Ганкеля (2.66); в методе Джонса эта трудность вообще обходится, так как необходимые преобразования получаются в процессе решения.

В каждое функциональное уравнение типа уравнения (2.25), фигурирующее в методе Винера — Хопфа, входят по две неизвестные функции. В методе Джонса эти уравнения выводятся совершенно одинаковым путем и физический смысл неизвестных функций очевиден. В методе интегрального уравнения такой симметрии в самом интегральном уравнении нет, хотя она и появляется после применения интегрального преобразования.

Пожалуй, основное достоинство метода интегрального уравнения состоит в простоте определения задач, которые можно решить методом Винера — Хопфа, именно: интегральное уравнение должно быть задано на полубесконечном интервале, и ядро должно иметь вид $k(x - \xi)$, т. е. зависеть только от $x - \xi$ [см. уравнения (2.49), (2.55) и (2.56)]. При использовании метода Джонса в сложных задачах сразу бывает не очевидно, можно ли решить методом Винера — Хопфа функциональные уравнения, получаемые после интегрального преобразования, или нет.

Возможно, существуют задачи, которые можно решить, применяя метод Винера — Хопфа к интегральному уравнению, выведенному с помощью

функции Грина, к которым нельзя применить метод Джонса. Однако, насколько мне известно, среди краевых задач для уравнений в частных производных такой случай не встречался.

Перечисленных соображений достаточно, чтобы показать читателю, почему мы в этой книге приняли за основу метод Джонса.

На первый взгляд может показаться, что метод Джонса совершенно отличен от метода парных интегральных уравнений (см. § 2.3), за исключением того, что в обоих методах используется факторизация (2.1). В методе Джонса для решения уравнения вида (2.25), справедливого в некоторой полосе плоскости α , используется аналитическое продолжение. В методе парных интегральных уравнений аналитическое продолжение не применяется, а используются только функции, определенные на некотором контуре в плоскости α . Связь между обоими этими методами будет выяснена позже (см., например, § 4.3, 6.1).

Здесь мы ограничимся перечислением относительных достоинств этих методов: метод Джонса дает нам возможность обычным образом исследовать области регулярности функций, определить свойства решения, вытекающие из условия на ребре, и т. д. Метод парных интегральных уравнений более удобен для решения задачи с граничными условиями общего вида, например если вместо условия $\partial\varphi_1/\partial u = 0$ при $u=0, x < 0$ имеет место условие $\partial\varphi_1/\partial u = f(x)$ (см. § 2.8), однако анализ вопросов единственности и ряд других доказательств проводится более сложно, нежели в методе Джонса.

§ 2.8. Смешанные неоднородные граничные условия общего вида

В предыдущих параграфах мы подробно рассмотрели применение метода Винера — Хопфа к задаче Зоммерфельда. В этом и следующем параграфах будут рассмотрены два обобщения задачи, указанные в § 2.1. Этого будет достаточно, чтобы дать нам возможность разобрать и другие упомянутые случаи; некоторые из них будут приведены в задачах в конце этой главы.

В конце § 2.2 мы показали, что в рассмотренной задаче Зоммерфельда $\varphi = 0$ при $u=0, x > 0$. Таким образом, рассмотренная в § 2.2 задача эквивалентна следующей: требуется найти решение уравнения $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$ в области $u \geq 0, -\infty < x < \infty$, такое, что на бесконечности φ представляет уходящие волны и при $u=0$ удовлетворяет граничному условию (ср. с условием 1, указанным в § 2.1)

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x > 0, \quad \partial\varphi/\partial u = ik \sin \Theta \exp(-ikx \cos \Theta) \quad \text{при } x < 0.$$

Естественно обобщить эту задачу так: в той же области требуется найти решение уравнения $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$, которое на бесконечности имеет вид уходящих волн и при $u=0$ удовлетворяет граничному условию

$$\varphi = f(x) \quad \text{при } x > 0, \quad \partial\varphi/\partial u = g(x) \quad \text{при } x < 0. \quad (2.88)$$

Предположим, что $|f(x)| < C_1 \exp(\tau_- x)$ при $x \rightarrow +\infty$ и $|g(x)| < C_2 \exp(\tau_+ x)$ при $x \rightarrow -\infty$, где $-k_2 \leq \tau_- < \tau_+ \leq k_2$. Кроме того, в области $u \geq 0$ нет ни источников, ни приходящих из бесконечности волн. Мы рассмотрим три метода решения задачи.

По-видимому, проще всего задача решается методом парных интегральных уравнений, изложенным в § 2.3. Применяя, как и в § 2.2 и 2.3, преобразование Фурье по переменной x , найдем для $y \geq 0$

$$\Phi = A(\alpha) e^{-\gamma y}, \quad \varphi = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} A(\alpha) e^{-i\alpha x - \gamma y} d\alpha, \quad (2.89)$$

где $\tau_- < \alpha < \tau_+$. Используя граничные условия при $y=0$, получим парные интегральные уравнения

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x) \quad \text{при } x > 0, \quad (2.90a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \gamma A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = -g(x) \quad \text{при } x < 0. \quad (2.90б)$$

Как и в § 2.3, заменим в первом уравнении x на $x + \xi$, а во втором — на $x - \xi$. Умножим эти уравнения соответственно на функции $\mathcal{N}_1(\xi)$ и $\mathcal{N}_2(\xi)$, определенные формулами (2.40), и проинтегрируем по ξ от нуля до бесконечности. Используя затем формулы (2.38), где, как и в § 2.3, положим

$$N_+(\alpha) = (\alpha + k)^{-1/2}, \quad N_-(\alpha) = (\alpha - k)^{-1/2},$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} (\alpha - k)^{-1/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \pi^{-1/2} e^{i\pi/4} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{i\xi k} f(x + \xi) d\xi \quad \text{при } x > 0, \end{aligned} \quad (2.91a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} (\alpha - k)^{1/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = -\pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{i\xi k} g(x - \xi) d\xi \quad \text{при } x < 0. \end{aligned} \quad (2.91б)$$

Умножим уравнение (2.91a) на $\exp(ikx)$ и продифференцируем по x . Это даст для $x > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} (\alpha - k)^{1/2} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \pi^{-1/2} i e^{i\pi/4} e^{-ikx} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{-ik(x+\xi)} f(x + \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.92)$$

В уравнениях (2.91б) и (2.92) левые части одинаковы. Применяя к ним обратное преобразование Фурье, получаем

$$A(x) = 2^{-1/2} \pi^{-1} (\alpha - k)^{-1/2} e^{3i\pi/4} \left[\int_0^{\infty} e^{t(\alpha-k)u} du \times \right. \\ \left. \times \frac{d}{du} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{ik(u+\xi)} f(u+\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{t\alpha u} du \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{ik\xi} g(u-\xi) d\xi \right]. \quad (2.93)$$

Подставив этот результат в формулу (2.89), найдем выражение для φ в произвольной точке

$$\varphi = \frac{1}{2} \pi^{-3/2} e^{3i\pi/4} \left[\int_0^{\infty} M(u, x, y) e^{-iku} du \frac{d}{du} \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{ik(u+\xi)} \times \right. \\ \left. \times f(u+\xi) d\xi + \int_{-\infty}^0 M(u, x, y) du \int_0^{\infty} \xi^{-1/2} e^{ik\xi} g(u-\xi) d\xi \right], \quad (2.94a)$$

где

$$M(u, x, y) = \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (\alpha - k)^{-1/2} e^{i\alpha(u-x) - \gamma y} d\alpha. \quad (2.94б)$$

Для $y=0$ выражение несколько упрощается, если учесть, что (см. задачу 2.4)

$$M(u, x, 0) = \begin{cases} 2\pi^{1/2} e^{i\pi/4} (u-x)^{-1/2} e^{ik(u-x)} & \text{при } u-x > 0, \\ 0 & \text{при } u-x < 0. \end{cases} \quad (2.95)$$

Анализ решения мы отложим до гл. VI, где он будет проведен сразу для уравнений более общего вида.

Получим теперь это же решение методом Джонса. Запишем, как и в § 2.2,

$$\Phi_+(0) + \Phi_-(0) = A(\alpha), \quad (2.96a)$$

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\gamma A(\alpha). \quad (2.96б)$$

Исключим отсюда $A(\alpha)$:

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\gamma [\Phi_+(0) + \Phi_-(0)]. \quad (2.97)$$

Здесь функции Φ'_+ , Φ_- неизвестны, а функции Φ'_- , Φ_+ известны; именно

$$\Phi_+(0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi, \quad \Phi'_-(0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 g(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi. \quad (2.98)$$

Преобразуем уравнение (2.97) к следующему виду [ср. с уравнением (2.29)]

$$J(\alpha) = (\alpha + k)^{-1/2} \Phi'_+(0) + H_+(\alpha) = -(\alpha - k)^{1/2} \Phi_-(0) - H_-(\alpha),$$

где H_+ и H_- определяются из соотношения

$$H_+(\alpha) + H_-(\alpha) = (\alpha + k)^{-1/2} \Phi'_-(0) + (\alpha - k)^{1/2} \Phi_+(0),$$

в котором правая часть представлена, согласно теореме В из § 1.3, в виде суммы двух функций, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. Например,

$$H_-(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} [(\zeta + k)^{-1/2} \Phi'_-(\zeta, 0) + (\zeta - k)^{1/2} \Phi_+(\zeta, 0)] \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha},$$

где $\tau_- < a < \tau_+$ и $\text{Im } \alpha = \tau < a$. Предположим, что, как и в § 2.2, из условий задачи следует, что аналитическая функция $J(\alpha)$, регулярная на всей плоскости α , обращается в нуль на бесконечности, откуда следует, что она тождественно равна нулю. Тогда мы имеем $\Phi_-(0) = -(\alpha - k)^{-1/2} H_-(\alpha)$ и

$$A(\alpha) = \Phi_+(0) + (2\pi i)^{-1} (\alpha - k)^{-1/2} \int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} [(\zeta + k)^{-1/2} \Phi'_-(\zeta, 0) + (\zeta - k)^{1/2} \Phi_+(\zeta, 0)] \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha}. \quad (2.99)$$

Так как $\text{Im}(\zeta - \alpha) > 0$, то интеграл от первого слагаемого можно представить в виде

$$-(2\pi)^{-3/2} (\alpha - k)^{-1/2} \int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} (\zeta + k)^{-1/2} d\zeta \int_{-\infty}^0 g(\xi) e^{i\zeta\xi} d\xi \int_0^{\infty} e^{i u(\zeta - \alpha)} du. \quad (2.100)$$

Интеграл по ζ равен (см. формулу (г) в задаче 2.4):

$$\int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} (\zeta + k)^{-1/2} e^{-i\zeta(\xi + u)} d\zeta = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi + u > 0, \\ 2\pi^{1/2} e^{-i\pi/4} (-\xi - u)^{-1/2} e^{-i(\xi + u)k} & \text{при } \xi + u < 0, \end{cases}$$

причем считается, что $\text{Im}(\zeta + k) > 0$, как и предполагалось выше. В результате выражение (2.100) сводится к выражению

$$-2^{-1/2} \pi^{-1} (\alpha - k)^{-1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^{\infty} e^{-i u(k + \alpha)} du \int_{-\infty}^{-u} g(\xi) e^{-i k \xi} (-\xi - u)^{-1/2} d\xi,$$

которое, как легко видеть, равно входящему в формулу (2.93) члену, содержащему функцию g . Интеграл от второго слагаемого в соотношении (2.99) вместе с внеинтегральным членом дают

$$\begin{aligned} & \Phi_+(0) + (2\pi i)^{-1} (\alpha - k)^{-1/2} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} (\zeta - k)^{1/2} \Phi_+(\zeta, 0) \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha} = \\ & = (2\pi i)^{-1} (\alpha - k)^{-1/2} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} (\zeta - k)^{1/2} \Phi_+(\zeta, 0) \frac{d\zeta}{\zeta - \alpha}, \quad b < \text{Im } \alpha < a. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Здесь мы произвели параллельный перенос пути интегрирования и учли, что при этом был пересечен полюс подинтегрального выражения в точке $\zeta = \alpha$. Таким образом, мы получаем [ср. с выражением (2.100)]

$$(2\pi)^{-3/2} (\alpha - k)^{-1/2} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} (\zeta - k)^{1/2} d\zeta \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi \int_0^{\infty} e^{-iu(\zeta - \alpha)} du.$$

С этим интегралом нельзя поступить так же, как с выражением (2.100), так как после изменения порядка интегрирования интеграл по ζ будет расходящимся. Поэтому запишем этот интеграл в виде

$$\begin{aligned} & i(2\pi)^{-3/2} (\alpha - k)^{-1/2} \times \\ & \times \int_0^{\infty} e^{i(\alpha - k)u} \frac{d}{du} e^{iku} \int_0^{\infty} f(\xi) \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} (\zeta - k)^{-1/2} e^{i\zeta(\xi - u)} d\zeta d\xi du. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Интеграл по ζ равен (см. задачу 2.4, в):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} (\zeta - k)^{-1/2} e^{i\zeta(\xi - u)} d\zeta = \\ & = \begin{cases} 2\pi^{1/2} e^{i\pi/4} (\xi - u)^{-1/2} e^{i\pi(\xi - u)} & \text{при } \xi - u > 0, \\ 0 & \text{при } \xi - u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставив это выражение в формулу (2.102), находим, что результат равен входящему в формулу (2.93) члену, содержащему функцию f .

Наконец решим ту же задачу „методом наложения“, который практически совпадает с только что рассмотренным методом, хотя

теорема В из § 1.3 здесь не используется явно. Мы имеем

$$\Phi_+(\zeta, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{i\zeta\xi} d\xi,$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \Phi_+(\zeta, 0) e^{-i\zeta x} d\zeta, \quad (2.103a)$$

$$\Phi'_-(\zeta, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 g(\xi) e^{i\zeta\xi} d\xi,$$

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \Phi'_-(\zeta, 0) e^{-i\zeta x} d\zeta, \quad (2.103б)$$

причем $b > \tau_-$ и $a < \tau_+$. Рассмотрим по отдельности две следующие задачи.

а. $\partial\varphi/\partial y = \exp(-i\zeta x)$ при $y=0$, $x < 0$ и $\varphi=0$ при $y=0$, $x > 0$. Используя, точно так же, как в § 2.2, метод Джонса, получаем

$$\Phi_-(0) = A_1(\alpha, \zeta), \quad \Phi'_+(0) = i(2\pi)^{-1/2} (\alpha - \zeta)^{-1} - \gamma A_1(\alpha, \zeta),$$

где

$$A_1(\alpha, \zeta) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\alpha - k)^{1/2} (\zeta + k)^{1/2} (\alpha - \zeta)}, \quad \text{Im}(\alpha - \zeta) < 0.$$

б. $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y=0$, $x < 0$ и $\varphi = \exp(-i\zeta x)$ при $y=0$, $x > 0$. Методом Джонса получим

$$\Phi'_+(0) = -\gamma A_2(\alpha, \zeta),$$

$$\Phi_-(0) = -i(2\pi)^{1/2} (\alpha - \zeta)^{-1} + A_2(\alpha, \zeta),$$

где

$$A_2(\alpha, \zeta) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{(\zeta - k)^{1/2}}{(\alpha - k)^{1/2} (\alpha - \zeta)}, \quad \text{Im}(\alpha - \zeta) < 0.$$

Используя формулы (2.103) и применяя метод наложения, получаем

$$A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \Phi'_+(\zeta, 0) A_1(\alpha, \zeta) d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \Phi_+(\zeta, 0) A_2(\alpha, \zeta) d\zeta,$$

где $\tau_- < b < \tau < a < \tau_+$. Подставляя сюда найденные выше выражения для A_1 и A_2 и учитывая равенство (2.101), убеждаемся, что результат совпадает с уравнением (2.99).

§ 2.9. Граничные условия импедансного типа

Рассмотрим кратко один пример, содержащий граничные условия импедансного типа. Аналогичные примеры со ссылками на литературу будут даны в задаче 2.12. Здесь мы рассмотрим задачу о дифракции электромагнитной волны на металлической полуплоскости с конечной проводимостью, подробно исследованную Синьором [1]. Примем обозначения, использованные в работе Синьора. (См. конец этого параграфа. Отметим, что теперь мы имеем дело с экраном $y=0$, $x > 0$, а не $y=0$, $x < 0$, как в предыдущих параграфах этой главы.)

Требуется решить уравнение $\nabla^2 \varphi_t + k^2 \varphi_t = 0$ в области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, если задана падающая волна

$$\varphi_t = \exp(-ikx \cos \Theta -iky \sin \Theta).$$

Предположим, что полуплоскость $y=0$, $x > 0$ занята частично поглощающим экраном, на котором должны выполняться следующие условия:

$$\varphi_t = \pm i\delta \frac{\partial \varphi_t}{\partial y}, \quad y = \pm 0, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (2.104)$$

Положим $\varphi_t = \varphi_+ + \varphi_-$. Введем в рассмотрение преобразование Фурье для функции φ . Как и в § 2.2, имеем $\Phi = A(\alpha) \exp(-\gamma y)$ при $y \geq 0$ и $\Phi = B(\alpha) \exp(\gamma y)$ при $y \leq 0$. Используя наши обозначения, будем иметь

$$\Phi_+(+0) + \Phi_-(0) = A(\alpha), \quad (2.105a)$$

$$\Phi'_+(+0) + \Phi'_-(0) = -\gamma A(\alpha), \quad (2.105b)$$

$$\Phi_+(-0) + \Phi_-(0) = B(\alpha), \quad (2.106a)$$

$$\Phi'_+(-0) + \Phi'_-(0) = \gamma B(\alpha). \quad (2.106b)$$

Исключая $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, получаем

$$\Phi'_+(+0) + \Phi'_-(0) = -\gamma [\Phi_+(+0) + \Phi_-(0)], \quad (2.107a)$$

$$\Phi'_+(-0) + \Phi'_-(0) = \gamma [\Phi_+(-0) + \Phi_-(0)]. \quad (2.107b)$$

Подставляя $\varphi_t = \varphi_+ + \varphi_-$ в граничные условия (2.104) и применяя преобразование Фурье, получаем

$$i(2\pi)^{-1/2} (1 - \delta k \sin \Theta) (\alpha - k \cos \Theta)^{-1} + \Phi_+(+0) - i\delta \Phi'_+(+0) = 0, \quad (2.108a)$$

$$i(2\pi)^{-1/2} (1 + \delta k \sin \Theta) (\alpha - k \cos \Theta)^{-1} + \Phi_+(-0) + i\delta \Phi'_+(-0) = 0. \quad (2.108b)$$

Из равенств (2.107а) и (2.108а) исключаем $\Phi_+(+0)$, а из равенств (2.107б) и (2.108б) исключаем $\Phi_+(-0)$. Это дает

$$\Phi'_-(0) + \gamma\Phi_-(0) = -(1 + i\delta\gamma)\Phi'_+(+0) + \\ + i(2\pi)^{-1/2}\gamma(1 - \delta k \sin \Theta)(\alpha - k \cos \Theta)^{-1},$$

$$\Phi'_-(0) - \gamma\Phi_-(0) = -(1 + i\delta\gamma)\Phi'_+(-0) - \\ - i(2\pi)^{-1/2}\gamma(1 + \delta k \sin \Theta)(\alpha - k \cos \Theta)^{-1}.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получаем два независимых функциональных уравнения типа уравнений, рассматриваемых в методе Винера — Хопфа:

$$2\Phi'_-(0) = -(1 + i\delta\gamma)[\Phi'_+(+0) + \Phi'_+(-0)] - \\ - 2i(2\pi)^{-1/2}\delta\gamma k \sin \Theta(\alpha - k \cos \Theta)^{-1}, \quad (2.109а)$$

$$2\gamma\Phi_-(0) = -(1 + i\delta\gamma)[\Phi'_+(+0) - \Phi'_+(-0)] + \\ + 2i(2\pi)^{-1/2}\gamma(\alpha - k \cos \Theta)^{-1}. \quad (2.109б)$$

Целесообразно вкратце повторить основные логические этапы вывода уравнений (2.109а) и (2.109б). Уравнения (2.105) и (2.106) получаются обычным стандартным путем. Так как мы желаем получить уравнения, содержащие только функции, у которых области регулярности известны, то мы исключаем $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$. Затем используем граничные условия, что приводит к уравнениям (2.108). Четыре уравнения (2.107) и (2.108) содержат шесть неизвестных функций: $\Phi_-(0)$, $\Phi'_-(0)$, $\Phi_+(\pm 0)$, $\Phi'_+(\pm 0)$. Уравнения (2.108) содержат только $\Phi_+(\pm 0)$, $\Phi'_+(\pm 0)$. Очевидно, надо попытаться получить два функциональных уравнения типа уравнений, рассматриваемых в методе Винера — Хопфа, содержащие либо $\Phi_-(0)$, либо $\Phi'_-(0)$ и по две „плюс“-функции; для этого нужно использовать уравнения (2.108) с тем, чтобы исключить две из четырех „плюс“-функций из уравнений (2.107). Это можно сделать многими способами, но читатель легко покажет, что получаемые в результате функциональные уравнения типа уравнений, рассматриваемых в методе Винера — Хопфа, всегда будут эквивалентны уравнениям (2.109).

В этом параграфе мы хотели прежде всего показать подробный вывод уравнений (2.109) типа уравнений, рассматриваемых в методе Винера — Хопфа. Дальнейший ход решения мы изложим более кратко. Оба уравнения (2.109) имеют вид

$$p(\alpha - k \cos \Theta)^{-1} + F_-(\alpha) = K(\alpha)G_+(\alpha), \quad (2.110)$$

где p — некоторая постоянная. Далее поступаем следующим образом.

а. Доказываем, что это уравнение справедливо в полосе $k_2 \cos \Theta \leq \alpha < \tau < k_2$. (В рассмотренной в § 2.1 задаче Зоммерфельда такой полосой была $-k_2 < \tau < k_2 \cos \Theta$, так как экраном была занята полуплоскость $y=0$, $x < 0$.)

б. Представляем функцию $K(\alpha) = 1 + i\delta\gamma$ в факторизованном виде $K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ (см. задачу 2.10).

в. Преобразуем уравнение (2.110) к виду

$$P(\alpha) = \frac{p}{\alpha - k \cos \theta} \left[\frac{1}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{K_-(k \cos \theta)} \right] + \frac{F_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} = \\ = K_+(\alpha)G_+(\alpha) - \frac{p}{\alpha - k \cos \theta} \frac{1}{K_-(k \cos \theta)}. \quad (2.111)$$

г. Исследуем поведение членов, входящих в уравнение (2.111), при α , стремящемся к бесконечности в соответствующих полуплоскостях, после чего, применяя теорему Лиувилля, находим вид $P(\alpha)$.

В отличие от задач, рассмотренных в этой главе ранее, где факторизация, указанная в пункте б, легко угадывалась [именно $(\alpha^2 - k^2)^{1/2} = (\alpha - k)^{1/2}(\alpha + k)^{1/2}$], выполнение факторизации в данном случае

$$K(\alpha) = 1 + i\delta(\alpha^2 - k^2)^{1/2} = K_+(\alpha)K_-(\alpha) \quad (2.112)$$

гораздо труднее. Эта факторизация подробно рассмотрена в задаче 2.10.

Здесь мы не будем излагать всю процедуру решения уравнений (2.109а) и (2.109б). Некоторые аналогичные случаи будут рассмотрены в гл. III, а решение настоящей задачи подробно изложено в работе Синьора [1], где имеется окончательное выражение для поля в дальней зоне. Используемый в этой работе метод интегрального уравнения, конечно, более громоздок, чем метод Джонса.

Наконец, несколько слов об обозначениях, используемых в работе Синьора, где рассматривается электромагнитная задача. Необходимые понятия из электромагнитной теории даны в задаче 2.11, результаты которой мы здесь используем. Рассмотренная нами выше задача соответствует электромагнитной задаче для E -поляризации. Обозначим через μ магнитную проницаемость, а через ε — диэлектрическую проницаемость. Тогда будем иметь $\varphi_t \equiv E_z$, $\partial\varphi_t/\partial y \equiv i\mu\omega H_x$. Граничным условиям (2.104) соответствуют в работе Синьора следующие: $E_z = \mp \eta Z H_x$ при $y = \pm 0$, где η — проводимость экрана, а $Z = \mu^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$. Следовательно, наши обозначения связаны с обозначениями Синьора так:

$$-\eta Z (i\mu\omega)^{-1} \equiv i\delta, \quad \text{т. е. } \delta = -\frac{\eta}{k},$$

где $k = \omega(\mu\varepsilon)^{1/2}$ — постоянная в волновом уравнении $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$. Далее Синьор обозначает

$$I_1(x) = (E_z)_{y=+0} - (E_z)_{y=-0}, \quad \text{т. е. } \bar{I}_1(\alpha) \equiv \Phi_+(+0) - \Phi_+(-0),$$

где \bar{I}_1 — преобразование Фурье от I_1 . Аналогично

$$I_2(x) = (H_x)_{y=+0} - (H_x)_{y=-0}$$

т. е.

$$\bar{I}_2(\alpha) \equiv \frac{1}{i\mu\omega} [\Phi'_+(+0) - \Phi'_+(-0)].$$

Учитывая, что $\alpha^S \equiv \Theta$ и $\zeta^S \equiv -\alpha$, где значком „S“ отмечены обозначения из работы Синьора, получаем, что наши формулы (2.108) и (2.109) совпадают с формулами (27) и (14) работы Синьора.

Несмотря на то что большинство рассмотренных в этой главе задач можно решить, не применяя метода Винера — Хопфа, уже теперь очевидны некоторые достоинства этого метода. Например, метод, которым была решена сравнительно простая задача Зоммерфельда, мы непосредственно применили к задачам для полуплоскости со смешанными неоднородными граничными условиями общего вида и с импедансными граничными условиями.

В следующей главе мы рассмотрим задачи в областях более сложной геометрической конфигурации.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ II

2.1. Формулировки рассматриваемых нами задач могут в известной степени варьироваться. В дальнейшем мы проиллюстрируем это на примере задачи Зоммерфельда о дифракции на полуплоскости. Посмотрим, как изменится при этом уравнения из § 2.2:

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\frac{1}{2} \gamma [\Phi_- (+0) - \Phi_- (-0)], \quad -k_2 < \tau < k_2 \cos \theta, \quad (2.20)$$

$$\Phi'_-(0) = (2\pi)^{-1/2} k \sin \theta (\alpha - k \cos \theta)^{-1}. \quad (2.21)$$

Детали вывода приводимых ниже результатов предоставляем читателю.

1) Если условие $\partial\varphi_i/\partial y = 0$ должно выполняться не на экране $-\infty < x \leq 0$, $y = 0$, а на экране $0 \leq x < \infty$, $y = 0$, то вместо уравнений (2.20) и (2.21) мы будем иметь следующие уравнения:

$$\Phi'_+(0) + \Phi'_-(0) = -\frac{1}{2} \gamma [\Phi_+ (+0) - \Phi_+ (-0)], \quad k_2 \cos \theta < \tau < k_2,$$

$$\Phi'_+(0) = -(2\pi)^{-1/2} k \sin \theta (\alpha - k \cos \theta)^{-1}.$$

2) Если граничное условие $\partial\varphi_i/\partial x = 0$ должно выполняться на экране $x = 0$, $-\infty < y \leq 0$, то применяем преобразование Фурье по переменной y . Падающая волна представляется формулой (2.3), где теперь полагается $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Уравнение (2.20) остается без изменения, однако область, где оно справедливо, теперь будет $-k_2 < \tau < k_2 \sin \theta$. Уравнение (2.21) записывается так:

$$\Phi'_-(0) = (2\pi)^{-1/2} k \cos \theta (\alpha - k \sin \theta)^{-1}.$$

3) Если зависимость от времени выражается множителем $\exp(i\omega t)$, то мнимую часть k надо считать отрицательной, так что $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = +i(k^2 - \alpha^2)^{1/2}$. Для случая, изображенного на рис. 7, падающая волна определяется выражением

$$\varphi_i = \exp(i k x \cos \theta + i k y \sin \theta), \quad 0 < \theta < \pi.$$

Уравнение (2.20) не изменяется, а вместо уравнения (2.21) получаем

$$\Phi'_-(0) = -(2\pi)^{-1/2} k \sin \theta (\alpha + k \cos \theta)^{-1}.$$

Таким образом, все в сущности свелось к перемене знака k (точнее, надо изменить знак лишь у k_1 и не надо изменять знак у k_2). При $k_2 \rightarrow 0$ путь интегрирования в формуле обратного преобразования Фурье проходит вдоль вещественной оси и обходит точки $\alpha = -k$ и $\alpha = -k \cos \theta$ снизу, а точку $\alpha = +k$ — сверху.

4) Если рассматривается случай, когда волна падает из нижней полуплоскости, то надо либо положить в формуле (2.3) $\pi < \theta < 2\pi$, либо использовать формулу

$$\varphi_I = \exp(ikx \cos \theta + iky \sin \theta)$$

и положить $0 < \theta < \pi$.

5) В формуле преобразования Фурье можно изменить знак перед α [это соответствует выбору нижнего знака в формуле (1.52), § 1.5] Положим

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{-i\alpha x} dx, \quad \Phi_-(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \varphi e^{-i\alpha x} dx,$$

и т. д. Далее рассуждения проводятся те же, что и ранее, но в них следует поменять местами термины „верхняя полуплоскость“ и „нижняя полуплоскость“ комплексной плоскости α .

6) Вместо преобразования Фурье можно использовать преобразование Лапласа. Определим

$$\Phi(s, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{-sx} dx, \quad \Phi_P(s) = \int_0^{\infty} \varphi e^{-sx} dx,$$

и аналогично определим Φ_N ; при этом Φ_P и Φ_N будут существовать в правой и левой полуплоскостях соответственно. Из волнового уравнения получим

$$\Phi = A(s) \exp(ixy) \text{ при } y \geq 0; \quad \Phi = -A(s) \exp(-ixy) \text{ при } y \leq 0,$$

где $\kappa = (s^2 + k^2)^{1/2}$, причем при $s = 0$ полагается $\kappa = k$. Функциональные уравнения, полученные с помощью преобразования Лапласа и преобразования Фурье, совпадают при замене $\alpha \equiv is$, $\gamma \equiv -ix$, $\text{Im } \alpha \equiv \text{Re } s$, $\Phi_+(\alpha) \equiv \equiv (2\pi)^{-1/2} \Phi_P(s)$ и т. д. при $k_2 > 0$.

2.2. Пусть требуется найти решение уравнения

$$(\varphi_I)_{xx} + (\varphi_I)_{yy} + k^2 \varphi_I = s(x, y),$$

удовлетворяющее граничному условию $\partial \varphi_I / \partial y = 0$ при $y = 0$, $-\infty < x \leq 0$. Правая часть этого уравнения $s(x, y)$ представляет заданное распределение источников, и волны, падающей из бесконечности, теперь нет. Используем метод наложения. Пусть

$$S(\beta, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x, y) e^{i(\beta x + \zeta y)} dx dy,$$

$$s(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \int_{ia-\infty}^{id+\infty} S(\beta, \zeta) e^{-i(\beta x + \zeta y)} d\beta d\zeta$$

Сначала решим вспомогательное уравнение с правой частью специального вида

$$(\psi_t)_{xx} + (\psi_t)_{yy} + k^2 \psi_t = \exp[-i(\beta x + \zeta y)]$$

Введем новую неизвестную функцию ψ по формуле

$$\psi_t = \psi + (k^2 - \beta^2 - \zeta^2)^{-1} \exp[-i(\beta x + \zeta y)].$$

Для определения ψ надо решить уравнение $\psi_{xx} + \psi_{yy} + k^2 \psi = 0$ при граничном условии

$$\partial\psi/\partial y = i\zeta(k^2 - \beta^2 - \zeta^2)^{-1} \exp(-i\beta x) \quad \text{при } y=0, x \leq 0.$$

Если $-k_2 < \text{Im } \alpha < \text{Im } \beta < k_2$ и $\lambda = 1$ при $y > 0$, $\lambda = -1$ при $y < 0$, то, согласно равенствам (2.6) и (2.31), получаем

$$\psi = \frac{-\lambda\zeta}{2\pi(k+\beta)^{1/2}(k^2 - \beta^2 - \zeta^2)} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-i\alpha x - \gamma|y|}}{(\alpha-k)^{1/2}(\alpha-\beta)} d\alpha.$$

В силу принципа наложения получим $\varphi_t = \varphi_l + \varphi$, где

$$\varphi_l = \frac{1}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} d\beta \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{S(\beta, \zeta)}{k^2 - \beta^2 - \zeta^2} e^{-i(\beta x + \zeta y)} d\zeta, \quad (a)$$

$$\varphi = \frac{-\lambda}{4\pi^2} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} d\beta \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{\zeta S(\beta, \zeta)}{(k+\beta)^{1/2}(k^2 - \beta^2 - \zeta^2)} d\zeta \times \\ \times \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-i\alpha x - \gamma|y|}}{(\alpha-k)^{1/2}(\alpha-\beta)} d\alpha. \quad (б)$$

Это дает решение поставленной задачи.

В частности для линейного источника

$$s(x, y) = -4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0).$$

Поэтому

$$S(\beta, \zeta) = -2 \exp(i\beta x_0 + i\zeta y_0)$$

и в формулах (а) и (б) можно вычислить интегралы по ζ при помощи вычетов, а затем применить для интеграла, получающегося в формуле (а), формулы (1.60) и (1.61). В результате получим

$$\varphi_l = \pi i H_0^{(1)}(kR), \quad R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \\ \varphi = -\frac{\lambda\lambda_0}{2\pi} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} d\beta \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} d\alpha \frac{e^{-i\alpha x - \gamma|y|} e^{-i\beta x_0 - \mu|y_0|}}{(\alpha-k)^{1/2}(\beta-k)^{1/2}(\alpha+\beta)},$$

где $-k_2 < a < -c < k_2$, $\mu = (\beta^2 - k^2)^{1/2}$ и при выводе знак перед β был изменен. Это выражение симметрично относительно (x, y) и (x_0, y_0) , а также относительно α и β , как и следовало ожидать.

Другие приложения аналогичных рассуждений встречаются у Клеммова [2], который рассматривает сведение двойного интеграла к одинарному и дает асимптотические выражения двойных интегралов более общего вида. Задачу о дифракции поля линейного источника на полуплоскости рассматривал также Харрингтон [1].

2.3. Пусть в задаче Зоммерфельда для полуплоскости (см. § 2.1) вместо граничного условия $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ при $y = 0$, $x < 0$, задано условие $\varphi_t = 0$. Положим

$$\varphi_t = \varphi_i + \varphi, \quad \Phi_-(0) = i(2\pi)^{-1/2}(\alpha - k \cos \theta)^{-1}.$$

Вместо уравнения (2.24) получаем следующее уравнение

$$\Phi_+(0) + i(2\pi)^{-1/2}(\alpha - k \cos \theta)^{-1} = -\gamma^{-1} S'_-(0), \quad -k_2 < \tau < k_2 \cos \theta,$$

где $S'_-(0) = \Phi'_-(+0) - \Phi'_-(-0)$. Соответственно решение (2.31) заменяется следующим:

$$A(\alpha) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}(\alpha - k \cos \theta)} \frac{(k + k \cos \theta)^{1/2}}{(\alpha + k)^{1/2}}, \quad -k_2 < \tau < k_2 \cos \theta.$$

$$2.4. \int_0^{\infty} t^{q-1} e^{\pm i\alpha t} dt = \Gamma(q) \alpha^{-q} e^{\pm i q \pi/2}, \quad 0 < \operatorname{Re} q < 1.$$

$$\int_{-\infty + i\alpha}^{\infty + i\alpha} \alpha^{-q} e^{\mp i\alpha t} d\alpha = \begin{cases} 2\pi [\Gamma(q)]^{-1} t^{q-1} e^{\mp i q \pi/2} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

где надо брать либо все верхние знаки и полагать $\operatorname{Im} \alpha > 0$, либо все нижние знаки и полагать $\operatorname{Im} \alpha < 0$. Первая формула является известным результатом, а вторая — ее обращением Фурье. Отметим следующие частные случаи:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^{-1/2} e^{\pm i\xi(\alpha \pm k)} d\xi = e^{\pm i\pi/4} \pi^{1/2} (\alpha \pm k)^{-1/2}, \quad \operatorname{Im}(k \pm \alpha) > 0, \quad (a)$$

$$\int_{-\infty}^0 (-\xi)^{-1/2} e^{\mp i\xi(\alpha \pm k)} d\xi = e^{\pm i\pi/4} \pi^{1/2} (\alpha \pm k)^{-1/2}, \quad \operatorname{Im}(k \pm \alpha) > 0, \quad (б)$$

$$\int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} (\alpha \pm k)^{-1/2} e^{\mp i\alpha\xi} d\alpha = \begin{cases} 2\pi^{1/2} e^{\mp i\pi/4} \xi^{-1/2} e^{i\xi k} & \text{при } \xi > 0 \\ 0 & \text{при } \xi < 0 \end{cases}, \quad \operatorname{Im}(k \pm \alpha) > 0, \quad (в)$$

$$\int_{i\alpha - \infty}^{i\alpha + \infty} (\alpha \pm k)^{-1/2} e^{\pm i\alpha\xi} d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } \xi > 0 \\ 2\pi^{1/2} e^{\mp i\pi/4} (-\xi)^{-1/2} e^{-i\xi k} & \text{при } \xi < 0 \end{cases}, \quad (г)$$

$$\operatorname{Im}(k \pm \alpha) > 0,$$

где надо везде брать либо верхние, либо нижние знаки.

2.5. Общее уравнение (2.97) можно решить также следующим способом. Умножим его на $(\alpha + k)^{-1/2}$ и применим обратное преобразование Фурье,

заменяя для удобства α на β . Получим

$$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} [(\beta+k)^{-1/2} \Phi'_-(0) + (\beta-k)^{1/2} \Phi_+(0)] e^{-i\beta x} d\beta =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (\beta+k)^{-1/2} \Phi'_+(0) e^{-i\beta x} d\beta & \text{при } x > 0, \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (\beta-k)^{1/2} \Phi_-(0) e^{-i\beta x} d\beta & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где интегралы, содержащие Φ'_+ и Φ_- , тождественно равны нулю при $x < 0$ и $x > 0$ соответственно. Если далее мы умножим полученное равенство на $(2\pi)^{-1/2} \exp(i\alpha x)$ и проинтегрируем по x от 0 до ∞ , то в правой части получим $(\alpha+k)^{-1/2} \Phi'_+(0)$, а если проинтегрируем от $-\infty$ до 0, то получим $(\alpha-k)^{1/2} \Phi_-(0)$. Отсюда вытекает решение, найденное в § 2.8.

Только что изложенный способ основан на следующем представлении функции $F(\alpha)$ в виде суммы $F_+(\alpha) + F_-(\alpha)$. Определим $f(x)$ формулой

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} F(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Тогда

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad F_-(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 f(x) e^{i\alpha x} dx.$$

2.6. В § 2.4 при выводе интегральных уравнений с помощью функции Грина мы разбивали плоскость на две области $0 \leq y < \infty$ и $-\infty < y \leq 0$. С другой стороны, можно применить теорему Грина ко всей плоскости, из которой удалена полупрямая $-\infty < x < 0$, $y = 0$, соответствующая экрану. Например, можно положить $\varphi_t = \varphi_t + \varphi$ и применить теорему Грина для определения φ в области, ограниченной линиями $R \exp(i\theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, где R велико, $-R < x < r$, $y = +0$ (т. е. $\theta = +\pi$); $r \exp(i\theta)$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$, где r мало; $-r > x > -R$, $y = -0$ (т. е. $\theta = -\pi$). Затем осуществим предельный переход $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$. В результате, очевидно, получим для задачи Зоммерфельда из § 2.1 интегральное уравнение для скачка функции φ при переходе через экран $y = 0$, $-\infty < x < 0$.

2.7. Интегральные уравнения задачи иногда можно получить непосредственно из физических соображений. Для этого рассмотрим поля двух типов источников, расположенных на полуплоскости $y = 0$, $-\infty < x \leq 0$.

(1) Обозначим через $u(x)$ плотность зарядов на экране $y = 0$, $x < 0$. Потенциал, наводимый в точке (x, y) единичным линейным зарядом, пересекающим плоскость (x, y) в точке $(\xi, 0)$, равен $\pi i H_0^{(1)}(kR)$, $R^2 = (x - \xi)^2 + y^2$. Наложением находим потенциал, наводимый в точке (x, y) всем слоем, а именно

$$\varphi(x, y) = \pi i \int_{-\infty}^0 H_0^{(1)}(kR) u(\xi) d\xi.$$

При $y = 0$, $x < 0$ это выражение непрерывно, но его производная по y разрывна.

(2) Обозначим через $v(x)$ плотность слоя ориентированных вдоль оси y диполей, расположенных на экране $y = 0$, $x < 0$. Наложением находим потенциал, наводимый этим слоем в точке (x, y) :

$$\varphi(x, y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \pi i \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^0 H_0^{(1)}(k, R) v(\xi) d\xi, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

При $y = 0$, $x < 0$ этот потенциал разрывен, но его производная по y непрерывна.

Для примера рассмотрим задачу Зоммерфельда из § 2.1. Положим $\varphi_t = \varphi_t + \varphi$; тогда $\partial\varphi/\partial y$ должна быть непрерывна при $y = 0$ и можно использовать потенциал вида (2). Получим следующее интегральное уравнение

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \pi i \frac{\partial^2}{\partial y \partial \eta} \int_{-\infty}^0 H_0^{(1)}(kR) v(\xi) d\xi = ik \sin \theta e^{-ikx \cos \theta}.$$

Оно с точностью до множителя совпадает с уравнением (2.54). Аналогично, если экран является поглощающим и, следовательно, на нем $\varphi_t = 0$, то надо использовать потенциал вида (1).

2.8. Интегральные уравнения § 2.4 можно также получить с помощью преобразования Фурье по переменной y , а не по x . Рассмотрим, например, случай 2б из § 2.4. Положим $\Phi_t = \varphi_t + \varphi$ и применим преобразование Фурье по y . Интегрируя по частям и учитывая, что φ имеет при $y = 0$ разрыв, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} e^{i\sigma y} dy = i\alpha (2\pi)^{-1/2} 2e(x) - \alpha^2 \Phi(x),$$

где $2e(x) = \varphi_t(x, +0) - \varphi_t(x, -0)$ при $-\infty < x < 0$ и, конечно, $e(x) = 0$ при $x > 0$. Решая, как и в задаче (1.15), обыкновенное дифференциальное уравнение для Φ и применяя затем обратное преобразование Фурье, получаем

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} i\alpha \gamma^{-1} e^{-i\alpha y} \int_{-\infty}^0 e(\xi) e^{-\gamma|x-\xi|} d\xi d\alpha$$

Наконец, из граничного условия

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = ik \sin \theta \exp(-ikx \cos \theta)$$

после несложных преобразований найдем

$$-ik \sin \theta e^{-ikx \cos \theta} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_{-\infty}^0 e(\xi) \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \gamma^{-1} e^{-\gamma|x-\xi|-i\alpha y} d\alpha d\xi$$

при $x < 0$.

Если учесть формулы (1.60) и (1.61), то легко видеть, что этот результат совпадает с уравнением (2.64).

2.9. Рассмотренные в этой главе задачи для полуплоскости (смешанные граничные условия при $y=0$, $-\infty < x < 0$, $0 < x < \infty$) можно также решать, вводя неизвестные функции при $x=0$, $-\infty < y < 0$, $0 < y < \infty$.

2.10. Для выполнения факторизации (2.112) положим

$$\ln K_+(\alpha) + \ln K_-(\alpha) = \ln [1 + i\delta (\alpha^2 - k^2)^{1/2}].$$

После несложных преобразований найдем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \ln K_+(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} \ln K_-(\alpha) &= i\delta \alpha [1 + i\delta (\alpha^2 - k^2)^{1/2}]^{-1} (\alpha^2 - k^2)^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{2(\alpha - i\delta)} + \frac{1}{2(\alpha + i\delta)} + \frac{i}{2\delta} \left(\frac{1}{\alpha - i\delta} + \frac{1}{\alpha + i\delta} \right) \frac{1}{(\alpha^2 - k^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (a)$$

где $d^2 = (\delta^2) - k^2$. Далее используем полученный в конце § 1.3 результат: если

$$f_{\pm}(\alpha) = \pi^{-1} (\alpha^2 - k^2)^{-1/2} \arccos(\pm \alpha/k),$$

то $f_+(\alpha)$ и $f_-(\alpha)$ регулярны при $\tau > -k_2$, $\tau < k_2$ соответственно и

$$f_+(\alpha) + f_-(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}.$$

Согласно этому имеем: пусть p — некоторое комплексное число и пусть

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{\alpha - p} [f_+(\alpha) \mp f_{\pm}(p)], \quad F_-(\alpha) = \frac{1}{\alpha - p} [f_-(\alpha) \pm f_{\pm}(p)],$$

где берется верхний знак, если точка p находится в верхней полуплоскости, и нижний знак, если она находится в нижней полуплоскости; тогда функции $F_+(\alpha)$ и $F_-(\alpha)$ регулярны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно и

$$F_+(\alpha) + F_-(\alpha) = (\alpha - p)^{-1} (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}.$$

Так как $(\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i\delta$ при $\alpha = -i\delta$, то из равенства (а) получаем

$$\frac{d}{d\alpha} \ln K_+(\alpha) = \frac{i}{2\delta} \left[\frac{f_+(\alpha) - f_+(i\delta)}{\alpha - i\delta} + \frac{f_+(\alpha) - f_+(-i\delta)}{\alpha + i\delta} \right]. \quad (б)$$

Аналогично выполняется факторизация функции

$$K(\alpha) = 1 + i\varepsilon (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}.$$

Используя предыдущий результат или проводя рассуждения независимо, получаем

$$\frac{d}{d\alpha} \ln K_+(\alpha) = -\frac{1}{2(\alpha + k)} - \frac{i\varepsilon}{2} \left[\frac{f_+(\alpha) - f_+(p)}{\alpha - p} + \frac{f_+(\alpha) - f_+(-p)}{\alpha + p} \right], \quad (в)$$

где $p = (k^2 - \varepsilon^2)^{1/2}$.

Для определения $K_+(\alpha)$ надо проинтегрировать соответственно выражения (б) или (в). В конечном виде интегралы не выражаются, но формулы для расчетов можно получить при помощи подстановки $\theta = \arccos(\alpha/k)$ которая дает, например,

$$\int \frac{f_+(\alpha)}{\alpha - i\delta} d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int \frac{\theta d\theta}{d + ik \cos \theta}, \quad d^2 = (\delta^2 - k^2). \quad (г)$$

При больших d знаменатель подинтегрального выражения можно разложить в ряд по $(ik/d) \cos \theta$.

Аналогичные формулы даны в работе Синьора [1] и работе Хейнса и Фешбаха [2]. Формулы из работы Синьора можно получить, положив

$$\frac{2}{\alpha^2 + d^2} = \delta^2 \left[\frac{1}{1 - \delta (k^2 - \alpha^2)^{1/2}} + \frac{1}{1 + \delta (k^2 - \alpha^2)^{1/2}} \right],$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{f_+(x) dx}{1 - \delta (k^2 - \alpha^2)^{1/2}} = \frac{1}{\pi i} \int_0^{\arccos(\alpha/k)} \frac{\theta d\theta}{1 - \delta k \sin \theta}.$$

2.11. Напомним связь между скалярным волновым уравнением и некоторыми двумерными задачами для уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\mu\omega \mathbf{H}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\varepsilon\omega \mathbf{E},$$

где ε — диэлектрическая, а μ — магнитная проницаемости. Поля, не зависящие от координаты z , можно разделить на следующие два класса.

а) Волны *TM*, или *поперечно-магнитные волны*, у которых $H_z = E_x = E_y = 0$ и

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = i\mu\omega H_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\mu\omega H_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\varepsilon\omega E_z.$$

В этом случае E_z удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k^2 E_z = 0, \quad k^2 = \varepsilon\mu\omega^2.$$

На поверхности идеально проводящего экрана, расположенного в плоскости, параллельной оси z , должно выполняться граничное условие $E_z = 0$. Если экран занимает часть плоскости $a < x < b$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$, то на нем наводятся токи, текущие параллельно оси z . Плотность этих токов равна

$$I_z = (H_x)_{+0} - (H_x)_{-0} = \frac{1}{i\mu\omega} \left[\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{+0} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right)_{-0} \right], \quad a < x < b,$$

где индексы ± 0 указывают, что величины берутся при $y = \pm 0$, т. е. на соответствующих сторонах экрана $y = 0$. О таких полях иногда говорят, что они имеют *параллельную поляризацию* или *E-поляризацию*.

б) Волны *TE*, или *поперечно-электрические волны*, у которых $E_z = H_x = H_y = 0$ и

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -i\varepsilon\omega E_x, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\varepsilon\omega E_y, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu\omega H_z.$$

Здесь H_z удовлетворяет двумерному стационарному волновому уравнению, в котором $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2$. Если, например, идеально проводящий экран расположен при $a < x < b$, $y = 0$, $-\infty < z < \infty$, то граничное условие будет таково: $E_x = 0$, т. е. $\partial H_z / \partial y = 0$.

На экране наводятся электрические токи, текущие параллельно оси x и равные

$$I_x = (H_z)_{+0} - (H_z)_{-0}.$$

В этом случае часто бывает удобно выразить поле через скалярную функцию φ , также удовлетворяющую волновому уравнению, по формулам

$$H_z = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad E_y = (i\varepsilon\omega)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right),$$

$$E_x = -\frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{1}{i\omega\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k^2 \varphi \right).$$

О таких полях иногда говорят, что они имеют *перпендикулярную поляризацию*, или *H-поляризацию*.

Следуя введенной здесь терминологии, видим, что задача для полуплоскости из § 2.1 соответствует дифракции *H-поляризованной* волны, падающей на идеально проводящую полуплоскость. Аналогично, задача 2.3 соответствует дифракции *E-поляризованной* волны, падающей на идеально проводящую полуплоскость.

2.12. Здесь мы кратко перечислим ряд задач, рассмотренных в литературе. Используем следующую систему: в пункте (1) указано решаемое уравнение, в пункте (2) — граничные условия, в пункте (3) — функция $K(\alpha)$, которая факторизуется, в пункте (4) — ссылки на работы.

Случай А.

(1) $\nabla^2 \varphi_t + k^2 \varphi_t = 0, \quad y \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$

(2) $p \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} - q \varphi_t = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty,$

$r \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} - s \varphi_t = 0, \quad y = 0, \quad -\infty < x < 0.$

$\varphi_t = \varphi_i + \varphi, \quad \varphi_i = \exp(-ikx \cos \theta -iky \sin \theta)$

(3) $K(\alpha) = (p\gamma + q)(r\gamma + s)^{-1}$. (См. задачу 2.10.)

(4) Частный случай $q=0$ или $s=0$ рассмотрел Синьор [1] (ср § 2.9). Клеммов [2] применил общий случай для изучения распространения радиоволн над берегом моря [см. замечание ниже в случае Б, пункт (4)]. Этому вопросу посвящена также работа Гринберга [1]. Хейнс и Фешбах [2] рассмотрели аналогичную акустическую задачу, в которой граничные условия соответствовали частично звукопоглощающим материалам.

Случай Б.

(1) $\nabla^2 \varphi_t + k^2 \varphi_t = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty;$

$\nabla^2 \varphi_t + K^2 \varphi_t = 0, \quad y < 0, \quad -\infty < x < \infty.$

(2) $\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty;$

$\left. \begin{aligned} (\partial \varphi_t / \partial y)_{+0} &= p (\partial \varphi_t / \partial y)_{-0} \\ \text{функция } \varphi_t &\text{ непрерывна,} \end{aligned} \right\} y = 0, \quad -\infty < x < 0.$

$\varphi_t = \exp(-ikx \cos \theta -iky \sin \theta).$

(3) $K(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} + p(\alpha^2 - K^2)^{1/2}.$

(4) Клеммов [2] применил эти результаты для изучения распространения радиоволн через береговую линию. Он показал, что поле излучения на

поверхности моря вдали от передатчика, расположенного на суше, можно выразить через одну лишь функцию $K(\alpha)$, так что нет надобности находить функции $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$. Если эту задачу о распространении радиоволн рассматривать как приведенный выше случай А, то получится тот же результат.

Случай В.

$$(1) \nabla^2 \varphi - k^2 \varphi = 0, \quad y \leq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$(2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad 0 < x < \infty;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = p\varphi, \quad y = 0, \quad -\infty < x < 0.$$

$$(3) K(\alpha) = 1 - p(\alpha^2 + k^2)^{-1/2}.$$

(4) В работах Грина и Хейнса [1], а также Хейнса [10] это решение применено к изучению поверхностных волн на воде.

Случай Г.

$$(1) \nabla^2 \varphi + i\varepsilon \varphi = 0, \quad y \leq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$(2) \varphi = 1, \quad y = 0, \quad x < 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} - i\varphi = 0 \quad (y = 0, \quad x > 0).$$

$$(3) K(\alpha) = 1 + i(\alpha^2 - i\varepsilon)^{1/2}.$$

(4) Каррьер и Мунк [1] изучали диффузию прилива в шхерах. При $y = 0$, $x < 0$ имеются периодические приливные колебания давления, и требуется найти колебания уровня свободной поверхности воды в шхерах относительно его среднего положения при $y = 0$, $x > 0$.

Случай Д.

$$(1) \nabla^2 \varphi - 2n \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad y \geq 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$(2) \varphi = 1, \quad y = 0, \quad x > 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad x < 0.$$

$$(3) K(\alpha) = \alpha^{1/2} (\alpha - 2in)^{1/2}.$$

(4) Эти уравнения описывают теплопередачу от поддерживаемой при постоянной температуре пластины $y = 0$, $x > 0$, обтекаемой потоком идеальной жидкости, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси x . Положив $\psi = \varphi \exp(-nx)$, найдем, что функция удовлетворяет уравнению $\psi_{xx} + \psi_{yy} - n^2 \psi = 0$.

2.13. Майлс [1] рассмотрел задачу о колеблющемся крыле, занимающем четверть плоскости, при сверхзвуковых скоростях. Эта задача сводится к следующей: для уравнения

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \varphi_{xx} + k^2 \varphi, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad z \geq 0$$

надо найти решение, удовлетворяющее при $z = 0$ граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = f(x, y) \quad (\text{задана}), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = ip\varphi, \quad x \geq 0, \quad y < 0;$$

$$\varphi = 0, \quad x < 0, \quad -\infty < y < \infty.$$

Вводим в рассмотрение преобразование Фурье

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi e^{i(\alpha x + \beta y)} dx dy.$$

Можно показать, что для выполнения условия $\Phi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ надо в плоскостях α и β провести разрезы, позволяющие выделить ветвь функции $\gamma = (\beta^2 + k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, имеющую положительную вещественную часть при всех рассматриваемых α и β . Таким образом, обозначив $\beta_0 = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, $\text{Im } \beta_0 > 0$, находим, согласно § 1.5 и задаче 1.18, что в плоскости β надо провести разрез в верхней полуплоскости от точки β_0 до бесконечности и в нижней полуплоскости от точки $-\beta_0$ до бесконечности. В плоскости α разрез надо провести в нижней полуплоскости от точек $\pm(\beta^2 + k^2)^{1/2}$ до бесконечности. Далее решение проводится уже известным методом. Эту частную задачу можно решить и проще, однако достоинство метода Винера — Хопфа состоит в том, что он допускает обобщения.

2.14. Рассмотрим трехмерную задачу о дифракции электромагнитной волны

$$E_i = (\lambda, \mu, \nu) \exp[-ik(ax + by + cz)]$$

на идеально проводящей полуплоскости $y = 0$, $x < 0$, $-\infty < z < \infty$. Здесь мы обозначили через λ, μ, ν множители, на которые надо умножить экспоненту, чтобы получить компоненты вектора E_i по осям x, y и z соответственно. Эти постоянные множители надо выбрать так, чтобы волна была плоской. Кроме того,

$$a = \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \quad b = \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \quad c = \cos \theta_0.$$

Все величины, как мы видим, пропорциональны $\exp(-ikcz)$, и этим их зависимость от z исчерпывается. Если

$$E_t = E_i + E, \quad E = (E_x, E_y, E_z) \exp(-ikcz),$$

то каждая компонента вектора E удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2 \sin^2 \theta_0 \varphi = 0.$$

Обозначим преобразование Фурье функции E_x по переменной x в интервале $(0, \infty)$ через \mathcal{E}_x^+ и т. д. Следуя методу, изложенному в § 2.2, получим систему функциональных уравнений Винера — Хопфа

$$\begin{aligned} \Gamma \mathcal{D}_x^- &= -\gamma^2 \mathcal{E}_z^+ + \alpha k c \mathcal{E}_x^+ + i(2\pi)^{-1/2} (\alpha - ka)^{-1} (\lambda \alpha k c - \nu \gamma^2), \\ -\Gamma \mathcal{D}_z^- &= k^2 (1 - c^2) \mathcal{E}_x^+ + \alpha k c \mathcal{E}_z^+ + i(2\pi)^{-1/2} (\alpha - ka)^{-1} [\lambda k^2 (1 - c^2) + \nu \alpha k c], \end{aligned}$$

где

$$\Gamma = (\alpha^2 - k^2 \sin^2 \theta_0)^{1/2}, \quad 2\mathcal{D}_u^- = i\mu\omega [(\mathcal{E}u)_{+0} - (\mathcal{E}u)_{-0}], \quad u = x, z.$$

Можно найти точные решения этих уравнений. По этому поводу следует обратиться к работам Джонса [1, 3] и Копсона [4].

2.15. Рассмотрим задачу о дифракции на полуплоскости волны, распространяющейся в упругой среде. Деформации и напряжения можно выразить через два потенциала φ и ψ , удовлетворяющие волновому уравнению (см., например, книгу Спеддона [1]):

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2 \varphi = 0, \quad k^2 = \omega^2/c^2; \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} + K^2 \psi = 0, \quad K^2 = \omega^2/C^2,$$

где $c^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$, $C^2 = \mu/\rho$; λ и μ константы Ламе, а ρ — плотность. Деформации и напряжения равны

$$\begin{aligned} u &= \varphi_x + \psi_y; & \sigma_{xx} &= -k^2\lambda\varphi + 2\mu(\varphi_{xx} + \psi_{xy}), \\ v &= \varphi_y - \psi_x; & \sigma_{yy} &= -k^2\lambda\varphi + 2\mu(\varphi_{yy} - \psi_{xy}), \\ & & \sigma_{xy} &= \mu(2\varphi_{xy} - \psi_{xx} + \psi_{yy}). \end{aligned}$$

Предположим, что плоская волна, распространяющаяся в бесконечной упругой среде, падает на полуплоскость $y = 0$, $-\infty < x < 0$, на которой $\sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0$. Положим

$$\varphi_i = \varphi_i + \varphi, \quad \psi_i = \psi_i + \psi,$$

где

$$\varphi_i = a \exp(-ikx \cos \theta -iky \sin \theta), \quad \psi_i = b \exp(-iKx \cos \theta -iKy \sin \theta).$$

Используя метод, изложенный в § 2.2, находим

$$\begin{aligned} \Sigma_{yy}^+(0) + \Sigma_{yy}^-(0) &= 2\mu(\gamma K^2)^{-1} \left[\left(\alpha^2 - \frac{1}{2} K^2 \right)^2 - \alpha^2 \gamma \Gamma \right] F_-, \\ \Sigma_{xy}^+(0) + \Sigma_{xy}^-(0) &= 2\mu(\Gamma K^2)^{-1} \left[\left(\alpha^2 - \frac{1}{2} K^2 \right)^2 - \alpha^2 \gamma \Gamma \right] E_-, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma &= (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, \quad \Gamma = (\alpha^2 - K^2)^{1/2}, \\ U_-(+0) - U_-(-0) &= E_-, \quad V_-(+0) - V_-(-0) = F_-. \end{aligned}$$

В этих уравнениях $\Sigma_{yy}^-(0)$ и $\Sigma_{xy}^-(0)$ известны. Наиболее трудным этапом решения является факторизация функции

$$K(\alpha) = \left(\alpha^2 - \frac{1}{2} K^2 \right)^2 - \alpha^2 (\alpha^2 - k^2)^{1/2} (\alpha^2 - K^2)^{1/2}. \quad (a)$$

Плоскость α может быть разрезана от точки $+k$ до $+K$ и от $-k$ до $-K$. Детали можно найти в работе Мауэ [1], который использовал метод интегрального уравнения (См. также работу Мауэ [Мауэ А. W., *Z. Angew. Math. und Mech.*, 34 (1954), 1—12], где нестационарная задача для полуплоскости методом конических течений сведена к задаче Гильберта. Функция, которую надо факторизовать для решения этой задачи Гильберта, совпадает с функцией (a).)

Аналогичным образом рассматривается задача о дифракции на полуплоскости с граничным условием $u = v = 0$.

2.16. Алблас [1], используя линеаризованные уравнения Навье — Стокса рассмотрел дифракцию на полуплоскости волн, распространяющихся в вязкой среде. Получающиеся при этом уравнения имеют четвертый порядок, но решение можно выразить через два потенциала, удовлетворяющие уравнениям второго порядка (ср. с задачей 2.15). При решении требуется факторизовать функцию

$$K(\alpha) = \alpha^2 + (\alpha^2 - k^2)^{1/2} (\alpha^2 - l^2)^{1/2},$$

где k — комплексное, а l — вещественное.

Алблас рассмотрел как поле в дальней зоне, так и поле вблизи полуплоскости (пограничный слой).

2.17. Льюис и Каррьер [1] рассмотрели задачу о пограничном слое для двумерного потока вязкой жидкости, обтекающей пластину $y = 0$, $x > 0$.

Предполагается, что при $x \rightarrow -\infty$ поток однороден и имеет скорость U в положительном направлении оси x . Из линеаризованных уравнений Озеена можно получить следующее уравнение для функции тока ψ

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0. \quad (a)$$

Это уравнение типа Лапласа, и для применения метода Винера — Хопфа удобно ввести параметр k (вещественный и положительный); тогда после применения к уравнению (a) преобразования Фурье будем иметь

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - \xi^2\right)\left(\frac{d^2}{dy^2} - \eta^2\right)\Psi = 0,$$

где

$$\xi^2 = (\alpha^2 + k^2)^{1/2}, \quad \eta^2 = (\alpha - i)(\alpha + ik).$$

В окончательном решении параметр k полагается равным нулю. Получаемые этим методом результаты корректны, но в окрестности полуплоскости отличаются постоянным множителем от решения Блаузиуса. В работе Льюиса и Каррьера указывается полуэмпирический множитель, который надо ввести для того, чтобы оба решения совпадали. В связи с этой задачей см. также работу Каррьера и Ди-Прима [1].

2.18. Во всех рассмотренных в этой главе задачах исследуются стационарные процессы и зависимость от времени выражается гармоническим множителем $\exp(-i\omega t)$. Теоретически отсюда легко получить решение нестационарных задач, так как применение преобразования Лапласа по времени t (с параметром s) к уравнению колебаний приводит к волновому уравнению с параметром $k^2 = -s^2/c^2$. Таким образом, решив стационарную задачу, заменив в решении k на is/c и применив обратное преобразование Лапласа, мы получим решение нестационарной задачи. Нам известна лишь одна работа, в которой решается такая задача. Это работа Джонса [5], где метод Винера — Хопфа применен для решения нестационарной задачи. Аналогичным путем можно решать и нестационарные задачи для уравнения теплопроводности.

ДАЛЬНЕЙШИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ВОЛН

§ 3.1. Введение

В предыдущей главе на сравнительно простых примерах мы подробно показали несколько схем применения метода Винера—Хопфа к решению уравнений в частных производных. В этой главе мы рассмотрим задачи в областях более сложной геометрической конфигурации.

Много внимания будет уделено освещению трудностей, возникающих при детальном исследовании конкретных задач. Численных результатов мы не приводим, однако везде, где это возможно, окончательные результаты представлены в удобном для численных расчетов виде.

Для простоты мы будем применять лишь один из трех описанных в гл. II методов, а именно метод Джонса. Таким образом, для понимания материала этой главы читателю достаточно предварительно прочесть § 2.1, 2.2 и некоторые начальные сведения из гл. I. Соответствующие решения, полученные методом интегрального уравнения, даны в некоторых задачах в конце главы; они могут быть также найдены в работах, указанных в списке литературы.

В большинстве задач этой главы рассматривается распространение волн в трубе или волноводе. Напомним основные результаты, связанные с решением волнового уравнения в области $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $-b \leq y \leq b$ при предположении, что поле не зависит от координаты z и представляет волну, бегущую в направлении оси x . Эта задача является двумерной, и волновая функция φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2\varphi = 0, \quad (3.1)$$

где сначала предполагается, что k вещественно. Если на граничных плоскостях $y = \pm b$ должно выполняться условие $\varphi = 0$, то решения с разделенными переменными должны иметь вид

$$\varphi = f_n(x) \sin \frac{n\pi}{2b}(y - b), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

Подставляя решения (3.2) в уравнение (3.1), находим, что

$$f_n(x) = A_n e^{i\gamma_n x} + B_n e^{-i\gamma_n x}, \quad (3.3)$$

где A_n, B_n — постоянные и

$$\gamma_n = \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}. \quad (3.4)$$

Если $(n\pi/2b) > k$, то γ_n вещественно и при возрастании x одна из волн в решениях (3.3) экспоненциально затухает, а другая — экспоненциально возрастает. Волны такого типа называются *нераспространяющимися*. Если $(n\pi/2b) < k$, то γ_n мнимо. Так как зависимость от времени мы условились задавать множителем $\exp(-i\omega t)$, то введем вещественную положительную величину

$$\kappa_n = -i\gamma_n = \left[k^2 - \left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.5)$$

Соответствующие волны называются *распространяющимися*:

$$\varphi = [A_n \exp(-i\kappa_n x) + B_n \exp(i\kappa_n x)] \sin \frac{n\pi}{2b} (y - b).$$

Член с коэффициентом B_n представляет волну, бегущую по волноводу вправо, член с коэффициентом A_n — волну, бегущую влево. Коэффициенты A_n и B_n называются амплитудами этих бегущих волн. Для фиксированного kb существует только конечное число распространяющихся волн. Если $0 \leq k \leq (\pi/2b)$, то распространяющихся волн вообще не существует, если $(\pi/2b) < k < (\pi/b)$, то существует только одна распространяющаяся волна, которой в наших обозначениях соответствует γ_1 и т. д.

Аналогично, если на граничных плоскостях задано условие $\partial\varphi/\partial y = 0$, $y = \pm b$, то решения с разделенными переменными должны иметь вид

$$\varphi = g_n(x) \cos \frac{n\pi}{2b} (y - b), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

В этом случае мы имеем при любом k распространяющуюся волну

$$g_0(x) = A_0 e^{-ikx} + B_0 e^{ikx}. \quad (3.7)$$

Другие решения в точности соответствуют выражениям (3.3) и (3.4) и могут представлять как распространяющиеся, так и нераспространяющиеся волны.

Рассмотрим теперь распространение волн в волноводе прямоугольного сечения $-c \leq z \leq c$, $-b \leq y \leq b$, $-\infty < x < \infty$. Рассмотрим волновую функцию φ , удовлетворяющую уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} + K^2\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Согласно формулам (3.2) и (3.6), будем иметь

$$\varphi = h_{np}(x) \frac{\sin \left(\frac{n\pi}{2b} \right) (y - b)}{\cos \left(\frac{n\pi}{2b} \right)} \frac{\sin \left(\frac{p\pi}{2c} \right) (z - c)}{\cos \left(\frac{p\pi}{2c} \right)}$$

Подставляя эти выражения в волновое уравнение, найдем

$$h_{np}(x) = A_{np} \exp(\gamma_{np} x) + B_{np} \exp(-\gamma_{np} x)$$

где теперь

$$\gamma_{np} = \left[\left(\frac{n\pi}{2b} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{2c} \right)^2 - K^2 \right]^{1/2}.$$

Как и в предыдущем случае, находим, что имеется лишь конечное число волн, которые могут быть распространяющимися, а остальные волны будут

нераспространяющимися. Пусть в какой-либо задаче известно, что зависимость от координаты z у всех полей выражается одинаковым множителем. Тогда задачу можно свести к двумерной, для чего надо отбросить множитель, дающий зависимость от z , и рассматривать вместо уравнения (38) уравнение (31), в котором положить $k^2 = K^2 - (p\pi/2c)^2$. Чтобы из решения этой двумерной задачи получить решение исходной задачи, надо первое умножить на отброшенный множитель и подставить вместо k его выражение через K .

Выше мы везде предполагали, что k и K вещественны. Позже нам придется считать, что k имеет малую положительную мнимую часть. В этом случае уже не будет четкого различия между распространяющимися и нераспространяющимися волнами, так как все волны будут иметь некоторое затухание. Все же если мнимая часть k очень мала и γ_n по-прежнему определено выражением (34), то затухание волн, начиная с некоторого значения n , резко возрастает и они практически не будут распространяться. Наоборот, волны, для которых n меньше этого значения, будут иметь малое затухание. Поэтому мы сохраним и здесь разделение волн на распространяющиеся и нераспространяющиеся. В связи с этим мы напомним результат задачи 13. Если $k = k_1 + ik_2$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, и ξ вещественно, то

$$\text{Im}(k^2 - \xi^2)^{1/2} \geq k_2. \quad (3.9)$$

Физический смысл этого условия заключается в том, что при комплексном k все волны затухают по крайней мере как $\exp(-k_2|x|)$ при распространении в соответствующем направлении вдоль оси x .

§ 3.2. Падение плоской волны на две параллельные полуплоскости

Пусть плоская волна

$$\varphi_t = \exp(-ikx \cos \Theta -iky \sin \Theta)$$

падает на две параллельные бесконечно тонкие полуплоскости $y = \pm b$, $x \leq 0$ (см. рис. 9). На этих полуплоскостях должны выполняться граничные условия $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ при $y = \pm b$, $x < 0$. Положив $\varphi_t = \varphi_i + \varphi_r$, мы найдем (ср. с § 2.1), что должны выполняться следующие условия:

1. $\partial\varphi/\partial y = ik \sin \Theta \exp(-ikx \cos \Theta \mp ikb \sin \Theta)$, $y = \pm b$, $x < 0$.
2. $\partial\varphi/\partial y$ непрерывна при $y = \pm b$, $-\infty < x < \infty$.
3. φ непрерывна при $y = \pm b$, $x > 0$.
4. $\varphi = O(1)$, $\partial\varphi/\partial y = O(r^{-1/2})$ при $r \rightarrow 0$, где r — расстояние от точки (x, b) до точки $(0, b)$ или от точки $(x, -b)$ до точки $(0, -b)$ при $x > 0$.

5. Для любого фиксированного y , $-\infty < y < \infty$, при $x \rightarrow +\infty$ должно быть $|\varphi| < C_1 \exp(-k_2 x)$, так как здесь имеется дифрагированная волна. Для любого фиксированного y при $x \rightarrow -\infty$ должно быть $|\varphi| < C_2 \exp(k_2 \cos \Theta x)$. При $y \geq b$ это соответствует наличию отраженной волны. При $y \leq -b$ в области тени имеется только дифрагированная волна, т. е. $|\varphi_t| < C_3 \exp(k_2 x)$ при $x \rightarrow -\infty$. Но так как $\varphi = \varphi_i - \varphi_r$, то асимптотика φ должна совпадать с асимптотикой $-\varphi_i$, что и утверждалось. Аналогично, при $-b \leq y \leq b$ должно быть $|\varphi_t| < C_4 \exp(k_2 x)$, так как в волноводе имеется рас-

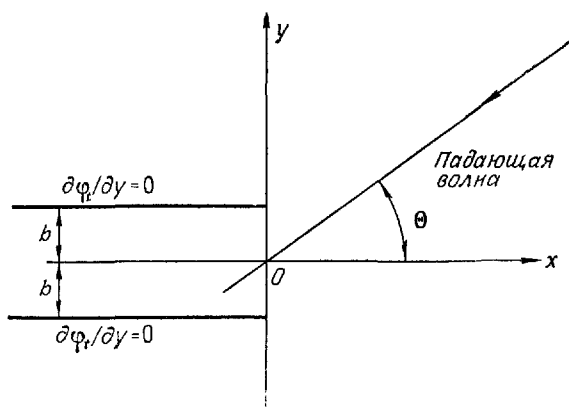
пространяющаяся волна $C_5 \exp(-ikx)$. Согласно соотношению (3.9), все остальные волны затухают более сильно и, так же как при $y \leq -b$, асимптотика φ определяется асимптотикой $-\varphi_1$.

Применяя к уравнению в частных производных преобразование Фурье по переменной x , получаем (ср. с § 2.2)

$$\Phi = \begin{cases} Ae^{-\gamma y} & \text{при } y \geq b, \\ De^{\gamma y} & \text{при } y \leq -b, \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$\Phi = Be^{-\gamma y} + Ce^{\gamma y} \quad \text{при } -b \leq y \leq b. \quad (3.10б)$$

Как и в § 2.2, существенным шагом является исключение неизвестных функций A, \dots, D и введение новых неизвестных функций, для



Р и с. 9.

которых известны области регулярности. В сложных задачах сразу не очевидно, как проще всего выполнить это исключение, в результате которого получаются функциональные уравнения типа Винера — Хопфа. Мы сделаем это двумя способами, хотя данная задача сравнительно проста. В первом способе сразу используются граничные условия, а затем исключаются функции A, \dots, D ; во втором способе сначала исключаются функции A, \dots, D , а затем используются граничные условия. Первый способ, который быстрее приводит к конечному результату, будет использован здесь; второй, более последовательный способ будет рассмотрен в задаче 3.1.

Так как $\partial\varphi/\partial y$ непрерывна при $y = \pm b$, то $d\Phi/dy$ будет здесь также непрерывна, и поэтому, согласно соотношениям (3.10), имеем

$$A = B - Ce^{2\gamma b}, \quad D = -Be^{2\gamma b} + C. \quad (3.11)$$

Используя обозначения (2.15), из уравнений (3.10) находим

$$\Phi_+(b+0) + \Phi_-(b+0) = Be^{-\gamma b} - Ce^{\gamma b}, \quad (3.12a)$$

$$\Phi_+(b-0) + \Phi_-(b-0) = Be^{-\gamma b} + Ce^{\gamma b}, \quad (3.12б)$$

$$\Phi_+(-b+0) + \Phi_-(-b+0) = Be^{\gamma b} + Ce^{-\gamma b}, \quad (3.12в)$$

$$\Phi_+(-b-0) + \Phi_-(-b-0) = -Be^{\gamma b} + Ce^{-\gamma b}. \quad (3.12г)$$

Из условия 3 вытекает, что

$$\Phi_+(b+0) = \Phi_+(b-0), \quad \Phi_+(-b+0) = \Phi_+(-b-0).$$

Вычтем равенство (3.12б) из равенства (3.12а) и равенство (3.12в) из равенства (3.12г). Положим

$$\Phi_-(b+0) - \Phi_-(b-0) = 2F_-(b), \quad (3.13a)$$

$$\Phi_-(-b-0) - \Phi_-(-b+0) = 2F_-(-b), \quad (3.13б)$$

где в силу условия 5 функции F_- регулярны при $\sigma < k_2 \cos \Theta$. Имеем

$$F_-(b) = -Ce^{\gamma b}, \quad F_-(-b) = -Be^{\gamma b}. \quad (3.14)$$

Кроме того, дифференцируя равенство (3.10б) и полагая $y = \pm b$, находим

$$\Phi'_+(b) + \Phi'_-(b) = \gamma(-Be^{-\gamma b} + Ce^{\gamma b}), \quad (3.15a)$$

$$\Phi'_+(-b) + \Phi'_-(-b) = \gamma(-Be^{\gamma b} + Ce^{-\gamma b}). \quad (3.15б)$$

Согласно условию 1,

$$\Phi'_-(\pm b) = k \sin \Theta e^{\mp i k b \sin \Theta} (2\pi)^{-1/2} (\alpha - k \cos \Theta)^{-1}. \quad (3.16)$$

Положим

$$\Phi'_+(b) + \Phi'_+(-b) = S'_+, \quad \Phi'_+(b) - \Phi'_+(-b) = D'_+, \quad (3.17a)$$

$$F_-(b) - F_-(-b) = D_-, \quad F_-(b) + F_-(-b) = S_-. \quad (3.17б)$$

Образует сумму и разность равенств (3.14) и проделаем то же с равенствами (3.15). Введем затем обозначения (3.17) и используем условия (3.16). Из получившихся соотношений исключим $B+C$ и $B-C$. В результате получим

$$S'_+ + \frac{2k \sin \Theta \cos(kb \sin \Theta)}{(2\pi)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)} = -\gamma(1 + e^{-2\gamma b}) D_-, \quad (3.18a)$$

$$D'_+ - \frac{2ik \sin \Theta \sin(kb \sin \Theta)}{(2\pi)^{1/2} (\alpha - k \cos \Theta)} = -\gamma(1 - e^{-2\gamma b}) S_-. \quad (3.18б)$$

к этим уравнениям можно применить стандартную процедуру Винера — Хопфа. Допустим, что нам известны представления

$$1/2(1 + e^{-2\gamma b}) = e^{-\gamma b} \operatorname{ch} \gamma b = K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha), \quad (3.19a)$$

$$(2\gamma b)^{-1}(1 - e^{-2\gamma b}) = (\gamma b)^{-1} e^{-\gamma b} \operatorname{sh} \gamma b = L(\alpha) = L_+(\alpha) L_-(\alpha), \quad (3.19б)$$

где функции K_+ и L_+ регулярны при $\tau > -k_2$, а функции K_- и L_- регулярны при $\tau < k_2$, причем $|K_+|$ и $|K_-|$ ограничены, а $|L_+|$ и $|L_-|$ при α , стремящемся к бесконечности в соответствующей полуплоскости, стремятся к нулю, как $|\alpha|^{-1/2}$. Ниже мы выполним эту факторизацию явно. Перепишем уравнение (3.18а) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{S'_+}{(\alpha+k)^{1/2} K_+(\alpha)} + \frac{2k \sin \theta \cos(kb \sin \theta)}{(2\pi)^{1/2} (x-k \cos \theta)} \times \\ & \times \left[\frac{1}{(\alpha+k)^{1/2} K_+(\alpha)} - \frac{1}{(k \cos \theta + k)^{1/2} K_+(k \cos \theta)} \right] = \\ & = -2(\alpha-k)^{1/2} K_-(\alpha) D_- - \\ & - \frac{2k \sin \theta \cos(kb \sin \theta)}{(2\pi)^{1/2} (\alpha-k \cos \theta) (k \cos \theta + k)^{1/2} K_+(k \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Согласно условию 4, $D_- = O(|\alpha|^{-1})$ и $S'_+ = O(|\alpha|^{-1/2})$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Таким образом, все члены в полученном уравнении стремятся к нулю, когда $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующей полуплоскости. Кроме того, в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta$ все члены уравнения регулярны. Отсюда по теореме Лиувилля обе части уравнения тождественно равны нулю, и мы имеем

$$D_- = - \frac{k \sin \theta \cos(kb \sin \theta)}{(2\pi)^{1/2} (k+k \cos \theta)^{1/2} K_+(k \cos \theta) (\alpha-k)^{1/2} K_-(\alpha) (\alpha-k \cos \theta)}. \quad (3.20)$$

Таким же путем из уравнения (3.18б) получаем

$$S_- = \frac{ik \sin \theta \sin(kb \sin \theta)}{(2\pi)^{1/2} b (k+k \cos \theta) L_+(k \cos \theta) (x-k) L_-(\alpha) (\alpha-k \cos \theta)}. \quad (3.21)$$

Обратимся теперь к выполнению факторизаций. (См. работы Карлсона и Хейнса [1], а также Хейнса [1].) Сначала найдем функции K_+ и K_- , входящие в уравнение (3.19а). К множителю $\text{ch } \gamma b$, который является целой функцией, можно применить метод разложения в бесконечное произведение, указанный в задаче 1.9 и § 1.3.

Из общей теории мы имеем (ср. с задачей 1.9)

$$\begin{aligned} \text{ch } \gamma b &= \cos kb \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_{n-1/2}} \right)^2 \right], \\ \cos kb &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - k^2 b^2 b_{n-1/2}^2), \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{n-1/2} = i \left\{ \frac{1}{b_{n-1/2}^2} - k^2 \right\}^{1/2}, \quad b_{n-1/2} = \frac{b}{\left(n - \frac{1}{2} \right) \pi}.$$

Комбинируя эти бесконечные произведения, получаем

$$\operatorname{ch} \gamma b = \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - k^2 b_{n-1/2}^2) + \alpha^2 b_{n-1/2}^2] = H(\alpha).$$

Таким образом, $\operatorname{ch} \gamma b$ разлагается на два множителя

$$H_{\pm}(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - k^2 b_{n-1/2}^2)^{1/2} \mp i \alpha b_{n-1/2}] e^{\pm i \alpha b_{n-1/2}}.$$

Факторизация функции $\exp(-\gamma b)$ выполняется, согласно формуле (1.35):

$$\exp(-\gamma b) = \{\exp[-T_+(\alpha)]\} \{\exp[-T_-(\alpha)]\},$$

$$T_+(\alpha) = \pi^{-1} b \gamma \arccos \frac{\alpha}{k}, \quad T_-(\alpha) = T_+(-\alpha),$$

причем

$$T_+(\alpha) = \frac{i b \alpha}{\pi} \ln \left(\frac{2\alpha}{k} \right) + O(\alpha^{-1}),$$

при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости. На основании этих результатов окончательно получаем

$$K_{\pm}(\alpha) = \exp[\pm \chi_1(\alpha) - T_{\pm}(\alpha)] \times \\ \times \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - k^2 b_{n-1/2}^2)^{1/2} \mp i \alpha b_{n-1/2}] e^{\pm i \alpha b_{n-1/2}}, \quad (3.22a)$$

где $\chi_1(\alpha)$ — произвольная функция, которую надо выбрать так, чтобы $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ вели себя на бесконечности, как многочлены. Согласно результатам задач 3.4 и 3.6, поведение функций K_+ и K_- при $|\alpha| \rightarrow \infty$ не зависит от члена $k^2 b_{n-1/2}^2$, входящего в бесконечное произведение. Поэтому, используя результаты задачи 1.10, найдем, что при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в нижней полуплоскости

$$K_-(\alpha) \sim \exp \left[\chi_1(\alpha) + i b \alpha \pi^{-1} \ln \left(-\frac{2\alpha}{k} \right) \right] \prod_{n=1}^{\infty} (1 + i \alpha b_{n-1/2}) e^{-i \alpha b_{n-1/2}} \sim \\ \sim A \exp \left\{ \chi_1(\alpha) + i b \alpha \pi^{-1} \left[1 - C + \ln \left(\frac{\pi}{2 k b} \right) + i \frac{1}{2} \pi \right] \right\},$$

где A — постоянная, не зависящая от α , а $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Если выбрать

$$\chi_1(\alpha) = -i b \alpha \pi^{-1} \left[1 - C + \ln \left(\frac{\pi}{2 k b} \right) \right] + \frac{1}{2} \alpha b, \quad (3.22b)$$

то функции K_+ и K_- будут асимптотически постоянны при $|\alpha| \rightarrow \infty$ соответственно в верхней и нижней полуплоскостях.

Точно так же разлагаем выражение (3.19б) на множители

$$L_{\pm}(\alpha) = \exp[\mp \chi_2(\alpha) - T_{\pm}(\alpha)] \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - k^2 b_n^2)^{1/2} \mp i \alpha b_n] e^{\pm i \alpha b_n}, \quad (3.23a)$$

где

$$b_n = \frac{b}{n\pi}, \quad \chi_2(\alpha) = -i b \alpha \pi^{-1} \left[1 - C + \ln \frac{2\pi}{b k} \right] + \frac{1}{2} \alpha b. \quad (3.23б)$$

В этом случае $|L_+| \sim |\alpha|^{-1/2}$, $|L_-| \sim |\alpha|^{-1/2}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в соответствующей полуплоскости. Отметим, что

$$K_+(-\alpha) = K_- (+\alpha), \quad L_+(-\alpha) = L_- (+\alpha). \quad (3.24)$$

Обратимся снова к решениям (3.20) и (3.21). Так как из формул (3.14) и (3.17б) следует, что

$$B = -\frac{1}{2}(S_- - D_-)e^{-\gamma b}, \quad C = -\frac{1}{2}(S_- + D_-)e^{-\gamma b},$$

то мы легко находим

$$\varphi = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} (S_- \operatorname{ch} \gamma y + D_- \operatorname{sh} \gamma y) e^{-\gamma b - i \alpha x} d\alpha \quad (3.25a)$$

при $-b \leq y \leq b$,

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} (S_- \operatorname{sh} \gamma b \pm D_- \operatorname{ch} \gamma b) e^{-\gamma |y| - i \alpha x} d\alpha \quad \text{при } |y| \geq b, \quad (3.25б)$$

где верхний знак берется для $y \geq b$, а нижний — для $y \leq -b$.

Для области $-b \leq y \leq b$, $x < 0$ путь интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости. Для простоты ограничимся случаем, когда $0 < k < \pi/2b$. Тогда функции S_- и D_- имеют полюсы в точке $\alpha = k \cos \Theta$ и, кроме того, функция S_- имеет полюс в точке $\alpha = k$. Других вещественных полюсов внутри контура нет. Вычисляя вычеты в этих полюсах, находим, что полюс в точке $\alpha = k \cos \Theta$ дает вклад

$$- \exp(-ikx \cos \Theta - iky \sin \Theta),$$

который уничтожает падающую волну. Полюс в точке $\alpha = k$ дает распространяющуюся в волноводе волну

$$\frac{\sin(kb \sin \Theta)}{kb \sin \Theta L_+ (k \cos \Theta) L_- (k)} e^{-ikx}. \quad (3.26)$$

Все остальные полюсы внутри контура дают члены, экспоненциально убывающие при $x \rightarrow -\infty$. Для этой области плоскости x , y подинтегральное выражение не имеет точек ветвления.

Обратимся к вычислению поля в дальней зоне, что можно сделать методом, данным в § 1.6. Введем цилиндрические координаты r, θ . Тогда, например, в области $0 \leq \theta < \pi - \Theta$, если θ не слишком близко к $\pi - \Theta$, мы используем формулу (1.71) и найдем, что поле при $r \rightarrow \infty$ равно

$$\varphi \sim 2^{1/2} (k\pi)^{-1/2} e^{i\pi/4} \sin \frac{1}{2} \Theta \sin \frac{1}{2} \theta (\cos \theta + \cos \Theta)^{-1} \times \\ \times \left[\frac{\cos(kb \sin \theta) \cos(kb \sin \theta)}{K_+(k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} + \right. \\ \left. + \frac{i \sin(kb \sin \theta) \sin(kb \sin \theta)}{2kb \cos \frac{1}{2} \Theta \cos \frac{1}{2} \theta L_+(k \cos \theta) L_+(k \cos \theta)} \right]. \quad (3.27)$$

Это выражение, как и следовало ожидать, симметрично относительно Θ и θ .

Формулы для практического вычисления функций K и L , входящих в выражения (3.26) и (3.27), даны в задаче 3.3.

§ 3.3. Излучение из двух параллельных полуплоскостей

В § 3.2 мы рассмотрели задачу о падении плоской волны на полубесконечный волновод, образованный двумя полуплоскостями, и исследовали распространяющуюся волну, возбужденную при этом в волноводе. В этом параграфе мы рассмотрим обратную задачу, а именно предположим, что внутри волновода к его открытому концу движется заданная распространяющаяся волна, и найдем волны, излученные из волновода. Как и в § 3.2, положим, что стенки волновода образуются полуплоскостями $y = \pm b$, $x \leq 0$. Будем одновременно рассматривать два случая, соответствующие двум типам граничных условий на стенках.

(а) $d\varphi_x/dx = 0$ на полуплоскостях. По волноводу набегают волна

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \exp(iKx) \cos \frac{N\pi}{2b} (y - b), \\ K &= \left[k^2 - \left(\frac{N\pi}{2b} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad k > \frac{N\pi}{2b} \text{ для некоторого заданного } N, \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

причем считается, что других волн, бегущих к открытому концу волновода, нет. Число N может быть одним из чисел $0, 1, 2, \dots$, таким, что $N < 2bk/\pi$.

(б) $\varphi_i = 0$ на полуплоскостях. По волноводу набегают к открытому концу только одна волна

$$\varphi_i = \exp(iKx) \sin \frac{N\pi}{2b} (y - b), \quad (3.29)$$

где K определяется тем же выражением, что и в предыдущем случае, а N одно из целых чисел $1, 2, 3, \dots$, такое, что $N < 2bk/\pi$, т. е. в этом случае нуль исключается.

В областях $y \geq b$ и $y \leq -b$ имеются только излученные волны, и поэтому можно положить

$$\Phi_i = Ae^{-\gamma y} \quad \text{при } y \geq b, \quad \Phi_i = De^{\gamma y} \quad \text{при } y \leq -b.$$

В области $-b \leq y \leq b$ положим $\Phi_i = \varphi_i + \varphi$, где φ имеет преобразование Фурье и

$$\Phi = Be^{-\gamma y} + Ce^{\gamma y}, \quad -b \leq y \leq b.$$

Таким образом, мы устранили падающую волну, которая является единственной экспоненциально возрастающей при $x \rightarrow -\infty$ волной внутри волновода. Остальные волны внутри волновода при $x \rightarrow -\infty$ затухают по крайней мере как $\exp(-k_2|x|)$ [ср. с неравенством (3.9)]. Вне волновода имеются только излученные волны, которые, как в § 2.2, затухают при $|x| \rightarrow \infty$ как $\exp(-k_2|x|)$. Следовательно, при $-k_2 < \tau < k_2$ мы имеем

$$\Phi_{i+}(b+0) + \Phi_{i-}(b+0) = Ae^{-\gamma b}, \quad (3.30a)$$

$$\Phi_+(b-0) + \Phi_-(b-0) = Be^{-\gamma b} + Ce^{\gamma b}, \quad (3.30б)$$

$$\Phi'_{i+}(b+0) + \Phi'_{i-}(b+0) = -\gamma Ae^{-\gamma b}, \quad (3.30в)$$

$$\Phi'_+(b-0) + \Phi'_-(b-0) = -\gamma (Be^{-\gamma b} - Ce^{\gamma b}) \quad (3.30г)$$

и аналогичные уравнения для $y = -b$. Рассмотрим отдельно случаи (а) и (б).

(а) Если на полуплоскостях $\partial\varphi_i/\partial y = 0$ и φ_i дается выражением (3.28), то при $y = \pm b$, $-\infty < x < \infty$ будет $\partial\varphi_i/\partial y = \partial\varphi/\partial y$ и $A = B - Ce^{2\gamma b}$, так что

$$\Phi'_{i+}(b+0) = \Phi'_+(b-0) = \Phi'_+(b),$$

$$\Phi'_{i-}(b+0) = \Phi'_-(b-0) = 0,$$

$$\Phi_{i+}(b+0) - \Phi_+(b-0) = i(2\pi)^{-1/2}(\alpha + K)^{-1}.$$

Введем неизвестную функцию

$$\Phi_{i-}(b+0) - \Phi_-(b-0) = 2F_-(b).$$

Вычтем уравнение (3.30б) из уравнения (3.30в) и запишем совпадающие теперь уравнения (3.30в) и (3.30г). Это даст следующие соотношения:

$$\frac{1}{2}i(2\pi)^{-1/2}(\alpha + K)^{-1} + F_-(b) = -Ce^{\gamma b}, \quad (3.31a)$$

$$\Phi'_+(b) = -\gamma(Be^{-\gamma b} - Ce^{\gamma b}). \quad (3.31б)$$

Аналогично, из условий для $y = -b$ найдем

$$\frac{1}{2}i \cos N\pi (2\pi)^{-1/2}(\alpha + K)^{-1} + F_-(-b) = -Be^{\gamma b}, \quad (3.31в)$$

$$\Phi'_+(-b) = -\gamma(Be^{\gamma b} - Ce^{-\gamma b}), \quad (3.31г)$$

где

$$2F_-(-b) = \Phi_{t-}(-b-0) - \Phi_-(-b+0).$$

Далее используем обозначения (3.17) и рассуждаем так же, как в § 3.2. Тогда из соотношений (3.31a) — (3.31г) найдем, что

$$S'_+ = -\gamma(1 + e^{-2\gamma b}) \left[D_- + \frac{1}{2} i(2\pi)^{-1/2} (\alpha + K)^{-1} (1 - \cos N\pi) \right], \quad (3.32a)$$

$$D'_+ = -\gamma(1 - e^{-2\gamma b}) \left[S_- + \frac{1}{2} i(2\pi)^{-1/2} (\alpha + K)^{-1} (1 + \cos N\pi) \right]. \quad (3.32б)$$

Таким образом, имеются две возможности.

1. Если N — четное число, то φ является четной относительно $y=0$ функцией и разность $1 - \cos N\pi$ равна нулю. Применяя теорему Лиувилля, из уравнения (3.32a) можно вывести, что S'_+ и D_- равны нулю. Уравнение (3.32б), положив, как и в § 3.2,

$$(2\gamma b)^{-1} \{1 - \exp(-2\gamma b)\} = L_+(\alpha) L_-(\alpha),$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} (\alpha + k)^{-1} [L_+(\alpha)]^{-1} D'_+(\alpha) - i2b(2\pi)^{-1/2} (\alpha + K)^{-1} (K + k) L_-(-K) = \\ = -2b(\alpha - k) L_-(\alpha) S_-(\alpha) - \\ - i2b(2\pi)^{-1/2} (\alpha + K)^{-1} [(\alpha - k) L_-(\alpha) + (K + k) L_-(-K)]. \end{aligned}$$

Рассуждая обычным образом, найдем, что обе части этого уравнения тождественно равны нулю, откуда

$$D'_+(\alpha) = i2b(2\pi)^{-1/2} (K + k) L_-(-K) (\alpha + k) (\alpha + K)^{-1} L_+(\alpha). \quad (3.33)$$

Как уже указано, $S'_+(\alpha) = 0$. Поэтому из определений (3.17a) мы имеем

$$\Phi'_+(b) = -\Phi'_+(-b) = \frac{1}{2} D'_+.$$

Из уравнений, выведенных в начале этого параграфа [например из уравнений (3.30в) и (3.30г) и соответствующих уравнений для $y = -b$], можно найти коэффициенты A, \dots, D . В результате получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{ib}{2\pi} (K + k) L_-(-K) \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} \frac{(\alpha + k) L_+(\alpha)}{\gamma(\alpha + K)} \frac{\operatorname{ch} \gamma y}{\operatorname{sh} \gamma b} e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &\quad \text{при } -b \leq y \leq b, \\ \varphi_t &= -\frac{ib}{2\pi} (K + k) L_-(-K) \int_{-\infty + i\tau}^{\infty + i\tau} \frac{(\alpha + k) L_+(\alpha)}{\gamma(\alpha + K)} e^{\gamma(b-|y|) - i\alpha x} d\alpha \\ &\quad \text{при } |y| \geq b. \end{aligned} \right\} (3.34)$$

2. Если N — нечетное число, то φ является нечетной относительно $y=0$ функцией и $1 + \cos N\pi = 0$. Соответственно, вместо формул (3.33) и (3.34) мы будем иметь

$$S'_+(\alpha) = -2(2\pi)^{-1/2} (K+k)^{1/2} K_-(-K) (\alpha+k)^{1/2} K_+(\alpha) (\alpha+K)^{-1}, \quad (3.35a)$$

$$D'_+(\alpha) = 0, \quad (3.35b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2\pi} (K+k)^{1/2} K_-(-K) \times \\ &\times \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{(\alpha+k)^{1/2} K_+(\alpha)}{\gamma(\alpha+K)} \frac{\operatorname{sh} \gamma y}{\operatorname{ch} \gamma b} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad \text{при } -b \leq y \leq b, \\ \varphi_t &= \pm \frac{1}{2\pi} (K+k)^{1/2} K_-(-K) \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{(\alpha+k)^{1/2} K_+(\alpha)}{\gamma(\alpha+K)} e^{i(b \mp y) - i\alpha x} d\alpha, \end{aligned} \right\} (3.36)$$

где для $y \geq b$ берется верхний знак, а для $y \leq -b$ — нижний.

(б) Рассуждения в этом случае весьма схожи с предыдущими. Вместо формул (3.32) получаем следующие формулы

$$S_+ = -\gamma^{-1} (1 + e^{-2\gamma b}) \times \\ \times \left[D'_- + \frac{N\pi}{4b} (2\pi)^{-1/2} (\alpha+K)^{-1} i (1 - \cos N\pi) \right], \quad (3.37a)$$

$$D_+ = -\gamma^{-1} (1 - e^{-2\gamma b}) \times \\ \times \left[S'_- + \frac{N\pi}{4b} (2\pi)^{-1/2} (\alpha+K)^{-1} i (1 + \cos N\pi) \right]. \quad (3.37b)$$

Здесь также имеются две возможности.

1. Если N — четное число, то φ является нечетной относительно $y=0$ функцией, и мы находим

$$D_+(\alpha) = -iN\pi (2\pi)^{-1/2} L_-(-K) L_+(\alpha) (\alpha+K)^{-1}, \quad (3.38a)$$

$$S_+(\alpha) = 0, \quad (3.38b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{N}{4i} L_-(-K) \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{L_+(\alpha)}{\alpha+K} \frac{\operatorname{sh} \gamma y}{\operatorname{sh} \gamma b} e^{-i\alpha x} d\alpha \quad \text{при } -b \leq y \leq b, \\ \varphi_t &= \pm \frac{N}{4i} L_-(-K) \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{L_+(\alpha)}{\alpha+K} e^{i(b-|y|) - i\alpha x} d\alpha, \end{aligned} \right\} (3.39)$$

где при $y \geq b$ берется верхний знак, а при $y \leq -b$ — нижний.

2. Если N — нечетное число, то φ является четной относительно $y=0$ функцией, и мы находим

$$S_+(\alpha) = \frac{N\pi}{b} \frac{K_-(-K)}{(2\pi)^{1/2} (K+k)^{1/2}} \frac{K_+(\alpha)}{(\alpha+K)(\alpha+k)^{1/2}}, \quad (3.40a)$$

$$D_+(\alpha) = 0, \quad (3.40b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{N}{4b} \frac{K_-(-K)}{(K+k)^{1/2}} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{K_+(\alpha)}{(\alpha+K)(\alpha+k)^{1/2}} \frac{\operatorname{ch} \gamma y}{\operatorname{ch} \gamma b} e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &\quad \text{при } -b \leq y \leq b, \\ \varphi_t &= \frac{N}{4b} \frac{K_-(-K)}{(K+k)^{1/2}} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \frac{K_+(\alpha)}{(\alpha+K)(\alpha+k)^{1/2}} e^{\gamma(b-|y|)-i\alpha x} d\alpha \\ &\quad \text{при } |y| > b. \end{aligned} \right\} (3.41)$$

Аналогичные преобразования могут быть проведены во всех четырех случаях, т. е. для выражений (3.34), (3.36), (3.39) и (3.41), причем они проводятся совершенно одинаково. Эти выражения имеют вид

$$\varphi_t \text{ или } \varphi = \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} f(\alpha) e^{-i\alpha z - i\alpha x} d\alpha,$$

где $-k_2 < \tau < k_2$, а z — некоторая постоянная, $z \geq 0$.

(А) Для области $|y| \geq b$ мы используем результаты, полученные в § 1.6. Прежде всего отметим, что в точке $\alpha = -K$ в подинтегральном выражении обращается в нуль как знаменатель, так и числитель, так как $L_+(-K) = 0$ при четном N , а $K_+(-K) = 0$ при нечетном N . Поэтому точка $\alpha = -K$ не является полюсом. Вводя полярные координаты r, θ с началом в точке $(0, b)$, получаем [согласно формуле (1.71)] для дальнего поля в области $y > b$, т. е. при $r \rightarrow \infty$ в направлении θ , следующее выражение:

$$\varphi_t \sim 2(k\pi)^{1/2} e^{-i\pi/4} r^{-1/2} e^{ikr} f(-k \cos \theta) \sin \theta. \quad (3.42)$$

(Б) Для области $-b \leq y \leq b$, $x \rightarrow +\infty$ путь интегрирования замыкаем в нижней полуплоскости. Легко проверить, что полюс в точке $\alpha = -K$ во всех случаях дает член

$$-\exp(iKx) [\sin \text{ или } \cos](n\pi/2b)(y-b),$$

который гасит падающую волну. В оставшемся интеграле подинтегральное выражение имеет точку ветвления $\alpha = -k$, и дальнейшее поле можно вычислить, применяя результаты из § 1.6, хотя практически в этом нет необходимости, так как при $x \rightarrow +\infty$ это поле должно непрерывно смыкаться с полем, найденным для области (А).

(В) Для области $-b \leq y \leq b$, $x < 0$ путь интегрирования замыкаем в верхней полуплоскости. В этом случае внутри контура точек

ветвления подинтегральной функции нет, но имеется бесконечное число полюсов в точках, являющихся корнями уравнения $L_-(\alpha) = 0$ или $K_-(\alpha) = 0$

$$(L_+(\alpha)(\operatorname{sh} \gamma b)^{-1} = [\gamma b L_-(\alpha)]^{-1} \exp(-\gamma b) \text{ и т. д.});$$

в случае (а) при четном N имеется также полюс в точке $\alpha = k$. Обозначим эти полюсы через $\alpha = \alpha_n$. Тогда

$$\varphi = 2\pi i \sum_n \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_n} (\alpha - \alpha_n) f(\alpha) e^{-i\alpha x}. \quad (3.43)$$

При $k_2 \rightarrow 0$ найдем, что из всех α_n лишь конечное число будет вещественным, а остальные мнимыми. Таким образом, в волноводе будут возбуждены конечное число распространяющихся волн и бесконечное число нераспространяющихся волн. Все эти распространяющиеся волны, конечно, бегут по волноводу от открытого конца влево, а нераспространяющиеся волны экспоненциально затухают при $x \rightarrow -\infty$.

Рассмотрим один частный случай подробнее, а именно рассмотрим случай с граничным условием $\partial\varphi_t/\partial y = 0$ на стенках волновода, причем положим, что единственной распространяющейся волной будет волна $\exp(\pm ikx)$. Это соответствует разобранному случаю (а) при $N=0$, $K=k$. Решение дается формулой (3.34). Применяя формулу (3.43), получаем отраженную волну

$$\varphi_r = -[L_+(k)]^2 e^{-ikx} \text{ при } -b \leq y \leq b, \quad x < 0.$$

Коэффициент при $\exp(-ikx)$ является коэффициентом отражения, который мы обозначим через R и который равен (см. задачу 3.3)

$$R = -|R| e^{2ikl}, \quad |R| = e^{-bk}, \quad (3.44a)$$

$$\frac{l}{b} = \frac{1}{\pi} \left[1 - C + \operatorname{In} \frac{2\pi}{bk} \right] - \frac{1}{bk} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{arc} \sin \frac{bk}{n\pi} - \frac{bk}{n\pi} \right]. \quad (3.44b)$$

Из формулы (3.42) находим поле в дальней зоне

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &\sim (2k\pi)^{-1/2} e^{-1/4i\pi} 2kb L_+(k) L_+(-k \cos \theta) r^{-1/2} e^{ikr}, \\ x &= r \cos \theta, \quad |y| - b = r \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.45)$$

§ 3.4. Излучение из круглой цилиндрической трубы

Пусть при $\rho = a$, $-\infty < z \leq 0$, где ρ, z — цилиндрические координаты, расположена полубесконечная круглая жесткая труба. Рассмотрим функцию φ_t , удовлетворяющую стационарному волновому уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi_t}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial z^2} + k^2 \varphi_t = 0, \quad (3.46)$$

причем для простоты мы ограничились симметричным относительно оси z случаем, когда все величины не зависят от азимутального угла. Найдем сначала волны, которые могут существовать в отрезке трубы $0 \leq \rho \leq a$, $z < 0$. Для этого, как и в § 3.1, рассмотрим волны в бесконечной трубе $-\infty < z < \infty$, $0 \leq \rho \leq a$. Разделим переменные, положив $\varphi_t = f(\rho)g(z)$, и получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} - (\xi^2 - k^2)g(z) = 0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{df(\rho)}{d\rho} + \xi^2 f(\rho) = 0 \\ \text{или} \\ g(z) = \exp[\pm (\xi^2 - k^2)^{1/2} z], \quad f(\rho) = AJ_0(\xi\rho) + BY_0(\xi\rho). \end{aligned} \right\} \quad (3.47)$$

Здесь ξ — параметр разделения. Так как труба является жесткой, то на ее поверхности $\rho = a$ должно выполняться граничное условие $\partial\varphi_t/\partial\rho = 0$. Кроме того, φ_t должно быть конечно на оси $\rho = 0$. Отсюда следует, что $B = 0$ и

$$\left[\frac{dJ_0(\xi\rho)}{d\rho} \right]_{\rho=a} = -\xi J_1(\xi a) = 0. \quad (3.48)$$

Пусть μ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) — расположенные в порядке возрастания корни уравнения $J_1(\mu) = 0$, за исключением корня $\mu = 0$, так что $\mu_1 = 3,832$, $\mu_2 = 7,016$, ... и т. д. Тогда произвольное (осесимметричное) поле внутри трубы можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi_t = a_0 e^{ikz} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0\left(\mu_i \frac{\rho}{a}\right) \exp\left[-(\mu_i^2 - k^2 a^2)^{1/2} \frac{z}{a}\right] + \\ + b_0 e^{-ikz} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_0\left(\mu_i \frac{\rho}{a}\right) \exp\left[+(\mu_i^2 - k^2 a^2)^{1/2} \frac{z}{a}\right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Вернемся к задаче о полубесконечной трубе. Пусть волна $\varphi_t = \exp(ikz)$ набежит из $z = -\infty$ к открытому концу трубы, причем $0 < ka < \mu_1 = 3,832 \dots$, так что распространяющейся является только основная волна. Полное поле внутри трубы следует, очевидно, искать в виде [ср. с формулой (3.49)]

$$\varphi_t = e^{ikz} + R e^{-ikz} + \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_0\left(\mu_i \frac{\rho}{a}\right) \exp\left[(\mu_i^2 - k^2 a^2)^{1/2} \frac{z}{a}\right]. \quad (3.50)$$

Кроме того, при $z \rightarrow +\infty$, $0 \leq \rho \leq a$ должно быть $\varphi_t \sim z^{-1} \exp(ikz)$. Поэтому, если при $0 \leq \rho \leq a$ положить $\varphi_t = \varphi_t + \varphi$, то преобразование Фурье по z от φ , которое мы обозначили через $\Phi(\rho, \alpha)$, должно быть при $0 \leq \rho \leq a$ регулярно в полосе $-\kappa_2 < \tau < \kappa_2$. В области $\rho \geq a$, используя сферические координаты, имеем

$$\varphi_t \sim f(\theta) r^{-1} e^{ikr} \quad \text{при } r \rightarrow \infty \text{ вне трубы.} \quad (3.51)$$

Поэтому преобразование Фурье по z от φ_t при $\rho \geq a$, которое мы обозначим через $\Phi_t(\rho, \alpha)$, должно быть регулярно в полосе $-k_2 < \tau < k_2$. Другое необходимое нам граничное условие имеет вид

$$\partial\varphi_t/\partial\rho = \partial\Phi_t/\partial\rho = 0, \quad \rho = a, \quad -\infty < z \leq 0. \quad (3.52)$$

Функция φ удовлетворяет тому же уравнению, что и функция φ_t , а именно уравнению (3.46). Применяя преобразование Фурье по переменной z , обычным путем находим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d\Phi_t}{d\rho} - \gamma^2 \Phi_t &= 0 \quad \text{при} \quad \rho \geq a, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d\Phi}{d\rho} - \gamma^2 \Phi &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \rho \leq a, \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

где $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$. В качестве решений этих уравнений следует взять

$$\Phi_t = A(\alpha) K_0(\gamma\rho) \quad \text{при} \quad \rho \geq a, \quad (3.54a)$$

$$\Phi = B(\alpha) I_0(\gamma\rho) \quad \text{при} \quad 0 \leq \rho \leq a. \quad (3.54b)$$

Эти решения выбраны таким образом, что решение (3.54b) при $\rho \rightarrow 0$ конечно, а решение (3.54a) на бесконечности стремится к нулю, т. е. представляет уходящую волну. Заметим, что имеют место следующие равенства

$$K_0(-i\kappa\rho) = \frac{1}{2} \pi i H_0^{(1)}(\kappa\rho), \quad I_0(-i\kappa\rho) = J_0(\kappa\rho), \quad (3.55)$$

где, согласно нашим обычным обозначениям,

$$\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i(k^2 - \alpha^2)^{1/2} = -i\kappa$$

Следуя методу Джонса, из формул (3.54) найдем

$$\Phi_{t+}(a) + \Phi_{t-}(a) = A(\alpha) K_0(\gamma a), \quad (3.56a)$$

$$\Phi_+(a) + \Phi_-(a) = B(\alpha) I_0(\gamma a), \quad (3.56b)$$

$$\Phi'_+(a) + \Phi'_-(a) = \gamma A(\alpha) K'_0(\gamma a) = \gamma B(\alpha) I'_0(\gamma a), \quad (3.56b)$$

причем при выводе формулы (3.56b) мы учли, что $\partial\varphi_t/\partial\rho = \partial\Phi_t/\partial\rho$ при $\rho = a$, $-\infty < z < \infty$ и

$$K'_0(u) = dK_0(u)/du = -K_1(u), \quad I'_0(u) = dI_0(u)/du = I_1(u).$$

Отметим, что

$$K_1(-i\kappa\rho) = -\frac{1}{2} \pi H_1^{(1)}(\kappa\rho), \quad I_1(-i\kappa\rho) = -iJ_1(\kappa\rho), \quad (3.57a)$$

$$I_\nu(u) K'_\nu(u) - K_\nu(u) I'_\nu(u) = -u^{-1}. \quad (3.57b)$$

После исключения из уравнений (3.56) $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ получим два уравнения

$$\begin{aligned}\Phi_{t+}(a) + \Phi_{t-}(a) &= K_0(\gamma a) \gamma^{-1} [K'_0(\gamma a)]^{-1} [\Phi'_+(a) + \Phi'_-(a)], \\ \Phi_+(a) + \Phi_-(a) &= I_0(\gamma a) \gamma^{-1} [I'_0(\gamma a)]^{-1} [\Phi'_+(a) + \Phi'_-(a)].\end{aligned}$$

Вычтем одно уравнение из другого. Учтем, что $\Phi'_-(a) = 0$,

$$\Phi_{t+}(a) - \Phi_+(a) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{i(\sigma+k)x} dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{\alpha+k}$$

и положим

$$\Phi_{t-}(a) - \Phi_-(a) = F_-.$$

В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{\alpha+k} + F_- &= \frac{1}{\gamma} \left[\frac{K_0(\gamma a) I'_0(\gamma a) - I_0(\gamma a) K'_0(\gamma a)}{I'_0(\gamma a) K'_0(\gamma a)} \right] \Phi'_+(a) = \\ &= [\gamma^2 a K'_0(\gamma a) I'_0(\gamma a)]^{-1} \Phi'_+(a).\end{aligned}\quad (3.58)$$

Положим также

$$K(\alpha) = -2K'_0(\gamma a) I'_0(\gamma a) = 2K_1(\gamma a) I_1(\gamma a) = \pi i H_1^{(1)}(\alpha a) J_1(\alpha a), \quad (3.59)$$

причем постоянный множитель введен для удобства. Нам потребуется факторизация этой функции вида $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$, что можно выполнить по теореме С из § 1.3:

$$\begin{aligned}\ln K_+(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{\ln [2K_1(\gamma a) I_1(\gamma a)]}{\zeta - \alpha} d\zeta, & \operatorname{Im} \alpha > c, \\ \ln K_-(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \frac{\ln [2K_1(\gamma a) I_1(\gamma a)]}{\zeta - \alpha} d\zeta, & \operatorname{Im} \alpha < c,\end{aligned}$$

где $\gamma = (\zeta^2 - k^2)^{1/2}$, $-k_2 < c < k_2$.

Имеют место соотношения, которые мы используем позже:

$$K_-(\alpha) = K_+(-\alpha), \quad K_+(k) K_-(k) = 1. \quad (3.60)$$

Отметим, что, хотя

$$\ln [2K_1(\gamma a) I_1(\gamma a)] \sim -\ln |\alpha|$$

при $\alpha \rightarrow \infty$ в полосе $|\tau| < k_2$, приведенные выше интегралы сходятся, если их понимать в смысле

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T+i\tau}^{T+i\tau} \left\{ \right\} d\alpha.$$

Можно было бы ввести дополнительный множитель γ , такой, чтобы при $\alpha \rightarrow \infty$ логарифм стремился к нулю, однако в этом нет необходимости.

Устремим k_2 к нулю, а α к некоторому вещественному числу ξ , $-k \leq \xi \leq k$ (именно этот случай понадобится в дальнейшем). Тогда интегралы можно привести к более удобному виду, как это сделано в примере (а) после теоремы С из § 1.3. Полагая $(k^2 - \xi^2)^{1/2} = x$ и подставляя в формулы (1.29) и (1.30) функции

$$F(z) = \ln [2K_1(z)I_1(z)], \quad F(-iz) = \ln [\pi i H_1^{(1)}(z)I_1(z)],$$

находим

$$\ln K_+(x) = \frac{1}{2} \ln [\pi i H_1^{(1)}(x\alpha)J_1(x\alpha)] + \frac{1}{2} g(\xi), \quad (3.61a)$$

$$\ln K_-(x) = \frac{1}{2} \ln [\pi i H_1^{(1)}(x\alpha)J_1(x\alpha)] - \frac{1}{2} g(\xi), \quad (3.61b)$$

где

$$g(\xi) = \frac{2\xi a}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln [2K_1(z)I_1(z)]}{a^2(k^2 - \xi^2) + z^2} \frac{z dz}{(k^2 a^2 + z^2)^{1/2}} + \\ + \frac{2\xi a}{\pi i} \text{V. P.} \int_0^{ka} \frac{\ln [\pi i H_1^{(1)}(z)J_1(z)]}{a^2(k^2 - \xi^2) - z^2} \frac{z dz}{(k^2 a^2 - z^2)^{1/2}}.$$

Положим также для удобства $\xi = k \cos \theta$. Окончательно получим

$$g(k \cos \theta) = p(k \cos \theta) + iq(k \cos \theta), \quad (3.62)$$

где p и q вещественны и

$$p(k \cos \theta) = \frac{-2ka \cos \theta}{\pi} \text{V. P.} \int_0^{ka} \frac{\text{arc tg} [-J_1(z)Y_1(z)]}{z^2 - k^2 a^2 \sin^2 \theta} \frac{z dz}{(k^2 a^2 - z^2)^{1/2}}, \quad (3.63a)$$

$$q(k \cos \theta) = \frac{2ka \cos \theta}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln [1/2 K_1(z)I_1(z)]}{z^2 + k^2 a^2 \sin^2 \theta} \frac{z dz}{(k^2 a^2 + z^2)^{1/2}} + \\ + \frac{2ka \cos \theta}{\pi} \text{V. P.} \int_0^{ka} \frac{\ln \{ \pi J_1(z) [J_1^2(z) + Y_1^2(z)]^{1/2} \}}{z^2 - k^2 a^2 \sin^2 \theta} \frac{z dz}{(k^2 a^2 - z^2)^{1/2}}. \quad (3.63b)$$

Вернемся к решению уравнения (3.58), которое запишем в виде

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{i}{\alpha + k} + F_- = - \frac{2}{(\alpha^2 - k^2) a K_+(\alpha) K_-(\alpha)} \Phi'_+(a).$$

Проделав обычные преобразования, запишем его в следующем виде:

$$(2\pi)^{-1/2} i(\alpha + k)^{-1} [(\alpha - k)K_-(\alpha) + 2kK_-(-k)] + (\alpha - k)K_-(\alpha)F_- = \\ = -\frac{2}{(\alpha + k)aK_+(\alpha)} \Phi'_+(a) + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2kK_-(-k)}{\alpha + k}.$$

Из общей теории [см. задачу (1.12)] имеем: $|K_{\pm}(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2}$, когда α стремится к бесконечности в соответствующей полуплоскости. Кроме того, считая, что должны выполняться обычные условия на ребре, найдем, что $|F_-| \sim |\alpha|^{-1}$ и $|\Phi'_+| \sim |\alpha|^{-1/2}$, когда α стремится к бесконечности в соответствующих полуплоскостях. Таким образом, написанное уравнение определяет целую функцию, которая по теореме Лиувилля тождественно равна нулю. Следовательно

$$\Phi'_+(a) = ika(2\pi)^{-1/2} K_+(\alpha) K_-(-k).$$

Используя формулы (3.54) и (3.56в), окончательно получаем

$$\varphi_t = -\frac{ika}{2\pi} K_-(-k) \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} K_+(\alpha) \frac{K_0(\gamma\rho)}{\gamma K_1(\gamma a)} e^{-iaz} d\alpha, \text{ при } \rho \geq a, \quad (3.64a)$$

$$\varphi = \frac{ika}{2\pi} K_-(-k) \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} K_+(\alpha) \frac{I_0(\gamma\rho)}{\gamma I_1(\gamma a)} e^{-iaz} d\alpha, \text{ при } 0 \leq \rho \leq a. \quad (3.64б)$$

Рассмотрим поля в дальней зоне, причем будем различать три области.

(а) $0 \leq \rho \leq a$, $z \rightarrow +\infty$. Деформируем контур так, чтобы он проходил в нижней полуплоскости. Там имеется точка ветвления $\alpha = -k$. Интеграл по малой полуокружности вокруг этой точки в пределе дает $-\exp(ikx)$, что точно гасит падающую волну. Однако асимптотическое поведение функции φ_t в этой области проще всего получить как предельное ее поведение в области (в), которая будет рассмотрена ниже.

(б) $0 \leq \rho \leq a$, $z \rightarrow -\infty$. Замыкаем путь интегрирования в верхней полуплоскости. Внутри контура точек ветвления нет, а есть лишь простые полюсы в нулях функции $\gamma I_1(\gamma a)$. Ноль в точке $\alpha = k$ дает

$$-K_-(-k)K_+(k)e^{-ikz} = -[K_+(k)]^2 e^{-ikz} = Re^{-ikz}, \quad (3.65)$$

где R — коэффициент при $\exp(-ikz)$, $z \rightarrow -\infty$, $0 \leq \rho \leq a$, т. е. входящий в формулу (3.50) коэффициент отражения. Положим $R = -|R| \exp(2ikl)$, где $|R|$ — модуль коэффициента отражения, а l — так называемая „поправка на открытый конец“. При $\xi \rightarrow k$ первое слагаемое в правой части равенства (3.61а) стремится к нулю, так что мы получим

$$K_+(k) = \exp[1/2g(k)] = \exp[1/2p(k) + 1/2iq(k)],$$

где p и q вещественны и даются формулами (3.63) при $\Theta = 0$. Поэтому знак главного значения перед интегралом уже не нужен, и

$$\left. \begin{aligned} |R| &= \exp \left\{ -\frac{2ka}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\arctg [-J_1(z)/Y_1(z)]}{z(k^2a^2 - z^2)^{1/2}} dz \right\}, \\ \frac{I}{a} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln [1/2 K_1(z) I_1(z)]}{z(k^2a^2 + z^2)^{1/2}} dz + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{ka} \frac{\ln \{ \pi J_1(z) [J_1^2(z) + Y_1^2(z)]^{1/2} \}}{z(k^2a^2 - z^2)^{1/2}} dz. \end{aligned} \right\} \quad (3.66)$$

(в) $\rho > a$. Рассмотрим поле в дальней зоне, т. е. при $(\rho^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Положим $\rho = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$, где r , θ — сферические координаты. Перейдем в формуле (3.64а) к пределу при $r \rightarrow \infty$ и используем асимптотическую формулу

$$K_0(\gamma\rho) \sim (\pi/2\gamma\rho)^{1/2} \exp(-\gamma\rho),$$

справедливую при $r \rightarrow \infty$ и любом фиксированном θ . Интеграл (3.64а) принимает вид интеграла (1.56) из § 1.6. Согласно формуле (1.71), будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_t &\sim -\frac{aK_-(-k)K_+(-k\cos\theta)}{\pi\sin\theta H_1^{(1)}(ka\sin\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} = \\ &= -\frac{aiJ_1(ka\sin\theta)}{\sin\theta} \frac{K_+(k)}{K_+(k\cos\theta)} \frac{e^{ikr}}{r} = f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}; \end{aligned} \quad (3.67)$$

при этом мы использовали формулы (3.59) и (3.60). Входящая в эту формулу функция $f(\theta)$ определена соотношением (3.51); она дает зависимость поля в дальней зоне от угла θ . Вспоминая формулы (3.59) и (3.65), легко находим

$$f(0) = -\frac{1}{2}ika^2, \quad f(\pi) = \frac{1}{2}ika^2R. \quad (3.68)$$

Эти формулы отличаются знаком от соответствующих формул Г. Левина и Швингера ([1], уравнение (III, 12, 13)) и Морса и Фешбаха ([1], уравнение (11.4.33)), где, по-видимому, имеется ошибка в знаке.

На этом мы закончим рассмотрение задачи об излучении из круглой полубесконечной трубы. Случай $k > 3,832$, т. е. случай, когда в трубе имеется более одной распространяющейся волны, а также случаи волн, не обладающих осевой симметрией, можно рассмотреть аналогично, сделав некоторые обобщения (сравнить с общим случаем двух полубесконечных пластин, рассмотренным в § 3.3, и с работами Л. А. Вайнштейна [3, 4, 5]).

Рассмотрим теперь задачу о падении из бесконечности плоской волны

$$\varphi_i = \exp \{ -ikr [\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos (\psi - \psi_0)] \} \quad (3.69)$$

в направлении (θ_0, ψ_0) на круглую трубу $\rho = a, z \leq 0$; здесь через (r, θ, ψ) обозначены сферические координаты, а через (ρ, ψ, z) — цилиндрические координаты; в этом случае осевой симметрии полей уже не будет. Используя хорошо известное разложение

$$e^{-iv \cos \theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{-im\theta} J_m(v), \quad (3.70)$$

запишем выражение (3.69) в виде

$$\varphi_i = e^{-ikz \cos \theta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{-im(\psi - \psi_0)} J_m(k\rho \sin \theta_0). \quad (3.71)$$

Положим $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$; при этом функция φ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + k^2 \varphi = 0. \quad (3.72)$$

Из граничного условия $\partial \varphi_t / \partial \rho = 0$ на стенке трубы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} &= - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} = \\ &= -k \sin \theta_0 e^{-ikz \cos \theta_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{-im(\psi - \psi_0)} J'_m(k\rho \sin \theta_0) \end{aligned}$$

при $\rho = a, -\infty < z \leq 0$. Введем в рассмотрение преобразования Фурье: по переменной ψ — конечное, т. е. на интервале $(0, 2\pi)$, а по переменной z — на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(n) &= \int_0^{2\pi} \varphi e^{in\psi} d\psi, \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(n) e^{-in\psi}; \\ \Phi(n, \alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}(n) e^{i\alpha z} dz, \quad \bar{\varphi}(n) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \Phi(n, \alpha) e^{-i\alpha z} d\alpha. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Легко найти уравнение для $\Phi(n, \alpha)$:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d\Phi(n, \alpha)}{d\rho} - \left(\frac{n^2}{\rho^2} + \gamma^2 \right) \Phi(n, \alpha) = 0.$$

Следовательно,

$$\Phi(n, \alpha) = A_n(\alpha) K_n(\gamma\rho) \quad \text{при} \quad \rho \geq a, \quad (3.74a)$$

$$\Phi(n, \alpha) = B_n(\alpha) I_n(\gamma\rho) \quad \text{при} \quad 0 \leq \rho \leq a. \quad (3.74b)$$

Из граничного условия при $\rho = a$ находим

$$\Phi_+(n, a+0) + \Phi_-(n, a+0) = A_n(\alpha) K_n(\gamma a), \quad (3.75a)$$

$$\Phi_+(n, a-0) + \Phi_-(n, a-0) = B_n(\alpha) I_n(\gamma a), \quad (3.75б)$$

$$\Phi'_+(n) + \Phi'_-(n) = \gamma A_n(\alpha) K'_n(\gamma a) = \gamma B_n(\alpha) I'_n(\gamma a). \quad (3.75в)$$

Положим

$$\Phi_-(n, a+0) - \Phi_-(n, a-0) = D_-(n)$$

и учтем, что

$$\begin{aligned} \Phi'_-(n) &= -\frac{k \sin \theta_0}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{2\pi} e^{in\psi} d\psi \int_{-\infty}^0 e^{iz(\alpha - k \cos \theta_0)} dz \times \\ &\times \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{-im(\psi - \psi_0)} J'_m(ka \sin \theta_0) = \\ &= (-1)^n i^{n+1} (2\pi)^{1/2} k \sin \theta_0 J'_n(ka \sin \theta_0) (\alpha - k \cos \theta_0)^{-1} e^{in\psi_0}. \end{aligned}$$

Вычитая равенство (3.75б) из равенства (3.75а) и используя равенство (3.75в), получаем

$$\begin{aligned} D_-(n) &= \frac{1}{\gamma^2 a I'_n(\gamma a) K'_n(\gamma a)} \times \\ &\times \left[\Phi'_+(n) + (-1)^n i^{n+1} (2\pi)^{1/2} \frac{k \sin \theta_0 J'_n(ka \sin \theta_0)}{\alpha - k \cos \theta_0} e^{in\psi_0} \right]. \end{aligned}$$

Это уравнение можно решить обычным путем, применяемым в методе Винера — Хопфа. Рассмотрим подробно случай $n=0$. Уравнение справедливо при $-k_2 < \tau < k_2 \cos \theta_0$. Введем обозначение $K'(\alpha)$ согласно определению (3.59). Сделав обычные преобразования, приведем уравнение к виду

$$D_-(0) = \frac{2i (2\pi)^{1/2} k \sin \theta_0 J_1(ka \sin \theta_0)}{a(k + k \cos \theta_0) K_+(k \cos \theta_0)} \frac{1}{(\alpha - k \cos \theta_0)(\alpha - k) K_-(\alpha)}. \quad (3.76)$$

Согласно формулам (3.73) и (3.74), имеем

$$\varphi_t = \varphi_i + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-im\psi} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} e^{-iaz} B_n(\alpha) I_n(\gamma \rho) d\alpha \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq a, \quad (3.77)$$

где $-k_2 < b < k_2 \cos \theta_0$. Для того чтобы выразить $B_n(\alpha)$ через $D_-(n)$, используем формулы (3.75а) и (3.75б). Член ряда, соответствующий

$n = 0$, равен

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \gamma a K_1(\gamma a) I_0(\gamma \rho) D_-(0) e^{-i\alpha z} d\alpha = \\
 & = - \frac{i}{\pi} \frac{k \sin \theta_0 J_1(ka \sin \theta_0)}{(k + k \cos \theta_0) K_+(k \cos \theta_0)} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} \frac{\gamma K_1(\gamma a) I_0(\gamma \rho) e^{-i\alpha z}}{(\alpha - k \cos \theta_0)(\alpha - k) K_-(\alpha)} d\alpha,
 \end{aligned}$$

что может быть получено при помощи равенства (3.76). Для $0 \leq \rho \leq a$, $z \rightarrow -\infty$ путь интегрирования можно замкнуть в верхней полуплоскости. Полюс в точке $\alpha = k \cos \theta_0$ дает слагаемое

$$- J_0(ka \sin \theta_0) \exp(-ikz \cos \theta_0),$$

которое равно по величине и обратно по знаку члену, соответствующему $n = 0$ в падающей волне. Полюс в точке $\alpha = k$ дает слагаемое

$$\frac{2J_1(ka \sin \theta_0) K_+(k)}{ka \sin \theta_0 K_+(k \cos \theta_0)} e^{-ikz} = \frac{f(\theta_0)}{f(0)} e^{-ikz},$$

где $f(\theta)$ — характеристика направленности, которая определена уравнением (3.51) и явное выражение которой дано в формуле (3.67). Полученные соотношения удовлетворяют принципу взаимности: амплитуда распространяющейся в волноводе волны, возбужденной плоской волной единичной амплитуды, падающей под углом θ к оси волновода, пропорциональна амплитуде волны, излученной в направлении θ при набегании к открытому концу волновода распространяющейся волны единичной амплитуды.

Аналогично можно вычислить и остальные члены ряда (3.77), однако здесь мы этого делать не будем.

§ 3.5. Полубесконечная полоса, параллельная стенкам волновода

Задачи, рассматриваемые в этом и следующем параграфах, в отличие от предыдущих связаны с полями *внутри* бесконечного волновода $0 \leq y \leq 2b$, $-\infty < z < \infty$. Важной особенностью таких задач является то, что подинтегральные выражения в интегралах, представляющих поле в произвольной точке, имеют лишь полюсы и не имеют точек ветвления.

Пусть в волноводе $0 \leq y \leq 2b$, $-\infty < z < \infty$, на стенках которого при $y = 0$ и $y = 2b$ должно выполняться условие $\partial \varphi_t / \partial y = 0$, помещена полоса $y = c$, $0 \leq z < \infty$, на которой должно выполняться условие $\varphi_t = 0$. Пусть также из $z = -\infty$ падает волна $\varphi_t = \exp(ikz)$. Положим $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$. Применим к уравнению в частных производных для φ преобразование Фурье по переменной z , учитывая условия

$d\Phi/du = 0$ при $y = 0$ и $y = 2b$. В результате обычным путем получим выражения

$$\Phi(y) = A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma y \quad \text{при } 0 \leq y \leq c,$$

$$\Phi(y) = B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma (2b - y) \quad \text{при } c \leq y \leq b.$$

Очевидно, что функции $\Phi_{\pm}(y)$ и $\Phi'_{\pm}(y)$ должны быть при $y = c$ непрерывны, а функция $\Phi'_{+}(y)$ будет при $y = c$ разрывна. Кроме того, из граничного условия на полосе $y = c$, $0 \leq z < \infty$ следует, что

$$\Phi_{+}(c) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} e^{iz(\alpha+k)} dz = -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\alpha + k}.$$

Таким образом, находим равенства

$$-i(2\pi)^{-1/2}(\alpha+k)^{-1} + \Phi_{-}(c) = A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma c = B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma (2b-c), \quad (3.78a)$$

$$\Phi'_{+}(c-0) + \Phi'_{-}(c) = \gamma A(\alpha) \operatorname{sh} \gamma c, \quad (3.78б)$$

$$\Phi'_{+}(c+0) + \Phi'_{-}(c) = -\gamma B(\alpha) \operatorname{sh} \gamma (2b-c). \quad (3.78в)$$

Положим

$$\Phi'_{+}(c+0) - \Phi'_{+}(c-0) = D'_{+}. \quad (3.79a)$$

Вычтем равенство (3.78б) из равенства (3.78в) и затем с помощью равенства (3.78a) исключим A и B . Получим

$$D'_{+} = -\frac{\gamma \operatorname{sh} 2\gamma b}{\operatorname{ch} \gamma c \operatorname{ch} \gamma (2b-c)} \left[\Phi_{-}(c) - \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\alpha+k} \right]. \quad (3.79б)$$

Положим также

$$K(\alpha) = 2\gamma b \operatorname{ch} \gamma c \operatorname{ch} \gamma (2b-c) [\operatorname{sh} 2\gamma b]^{-1} = K_{+}(\alpha) K_{-}(\alpha), \quad (3.79в)$$

где $|K_{+}| \sim |\alpha|^{1/2}$, $|K_{-}| \sim |\alpha|^{1/2}$, когда $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Явные выражения для K_{+} и K_{-} легко получаются методом бесконечных произведений, изложенным в § 1.3. [Для случая $b = c$ см. ниже формулы (3.96).] Преобразуем равенство (3.79б) к виду

$$\begin{aligned} & \frac{K_{+}(\alpha) D'_{+}}{2b(\alpha+k)} + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2k}{(\alpha+k) K_{-}(-k)} = \\ & = -\frac{(\alpha-k) \Phi_{-}(c)}{K_{-}(\alpha)} + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\alpha+k)} \left[\frac{\alpha-k}{K_{-}(\alpha)} + \frac{2k}{K_{-}(-k)} \right]. \end{aligned}$$

Далее, проводя стандартные преобразования по методу Винера — Хопфа, найдем

$$\Phi_{-}(c) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\alpha+k)} + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2k}{(\alpha^2 - k^2)} \frac{K_{-}(\alpha)}{K_{-}(-k)}.$$

Поэтому, согласно равенству (3.78а),

$$A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma c = B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma (2b - c) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2k}{\alpha^2 - k^2} \frac{K_-(\alpha)}{K_-(-k)}, \quad (3.80a)$$

или

$$\begin{aligned} A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma c &= B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma (2b - c) = \\ &= \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{4kb}{\gamma} \frac{\operatorname{ch} \gamma c \operatorname{ch} \gamma (2b - c)}{\operatorname{sh} 2\gamma b} \frac{1}{K_+(\alpha) K_-(-k)}. \end{aligned} \quad (3.80б)$$

Отсюда можно найти потенциал в произвольной точке по формулам

$$\left. \begin{aligned} \varphi_t &= e^{ikz} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma y e^{-i\alpha z} d\alpha \quad \text{при } 0 \leq y \leq c, \\ \varphi_t &= e^{ikz} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma (2b - y) e^{-i\alpha z} d\alpha \quad \text{при } c \leq y \leq 2b. \end{aligned} \right\} \quad (3.81)$$

Для области $z < 0$ замыкаем путь интегрирования в верхней полуплоскости, причем A и B выражаем по формуле (3.80б). Единственными особенностями подинтегральных выражений будут простые полюсы в точке $\alpha = k$ и в точках, определяемых лежащими в верхней полуплоскости корнями уравнения $2\gamma b = m\pi i$ ($m = 1, 2, 3 \dots$), т. е. в точках

$$\alpha = i \left[\left(\frac{m\pi}{2b} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2} = i\gamma_m, \quad (3.82)$$

причем мы полагаем $k < \pi/2b$, так что γ_m вещественны и положительны. Вычислив вычеты, найдем, что при $z < 0$ обе формулы (3.81) можно записать в виде единого выражения, справедливого при $0 \leq y \leq 2b$, $z < 0$, а именно

$$\begin{aligned} \varphi_t &= e^{ikz} - \frac{1}{[K_+(k)]^2} e^{-ikz} - \\ &- \frac{2k}{K_+(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n K_+(i\gamma_n)} \cos \frac{n\pi c}{2b} \cos \frac{n\pi y}{2b} e^{\gamma_n z}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Для области $z > 0$ замыкаем пути интегрирования в нижней полуплоскости, причем A и B выражаем по формулам (3.80а). Подинтегральные выражения для областей $0 \leq y \leq c$ и $c \leq y \leq 2b$ имеют простые полюсы в точке $\alpha = -k$ и в точках, соответственно определяемых лежащими в нижней полуплоскости корнями уравнений $\gamma c = i\pi(n + 1/2)$ и $\gamma(2b - c) = i\pi(n + 1/2)$. Вычет в точке $\alpha = -k$ дает член, погашающий падающую волну, а вычеты в остальных

полюсах дают соответственно разложения поля по собственным функциям

$$\cos(n + 1/2)\pi y/c \quad \text{и} \quad \cos(n + 1/2)\pi(2b - y)/(2b - c),$$

которые удовлетворяют граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = 2b \quad \text{и} \quad \varphi_t = 0 \quad \text{при} \quad y = c.$$

Предположим теперь, что полоса обладает сопротивлением, так что на ней вместо условия $\varphi_t = 0$ должно выполняться условие $\varphi_t = \pm i\delta \partial \varphi_t / \partial y$ при $y = c \pm 0$ соответственно. Положив, как и ранее, $\varphi_t = \varphi_+ + \varphi_-$, получим

$$\Phi_+(c \pm 0) \mp i\delta \Phi'_+(c \pm 0) = -i(2\pi)^{-1/2}(\alpha + k)^{-1}. \quad (3.84)$$

Вместо равенств (3.78) будем иметь следующие равенства:

$$\begin{aligned} \Phi_+(c - 0) + \Phi_-(c) &= A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma c, \\ \Phi'_+(c - 0) + \Phi'_-(c) &= \gamma A(\alpha) \operatorname{sh} \gamma c, \\ \Phi_+(c + 0) + \Phi_-(c) &= B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma(2b - c), \\ \Phi'_+(c + 0) + \Phi'_-(c) &= -\gamma B(\alpha) \operatorname{sh} \gamma(2b - c). \end{aligned}$$

Исключение A и B и использование соотношений (3.84) (ср. с § 2.9) дает

$$\begin{aligned} \Phi_-(c) - \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma c \Phi'_-(c) &= i(2\pi)^{-1/2}(\alpha + k)^{-1} + \\ &+ L(\alpha; c) [\gamma \operatorname{sh} \gamma c]^{-1} \Phi'_+(c - 0), \end{aligned} \quad (3.85a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_-(c) + \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma(2b - c) \Phi'_-(c) &= i(2\pi)^{-1/2}(\alpha + k)^{-1} - \\ &- L(\alpha; 2b - c) [\gamma \operatorname{sh} \gamma(2b - c)]^{-1} \Phi'_+(c + 0), \end{aligned} \quad (3.85b)$$

где

$$L(\alpha; d) = \operatorname{ch} \gamma d + i\delta \gamma \operatorname{sh} \gamma d.$$

Мы получили систему функциональных уравнений Винера—Хопфа, которая не может быть точно решена нашим стандартным методом (см. § 4.4). Однако в частном случае $c = b$ систему (3.85) можно свести к двум независимым уравнениям Винера—Хопфа. Вычитая уравнение (3.85б) из уравнения (3.85а), легко показать, что в этом случае

$$\Phi'_-(b) = 0, \quad \Phi'_+(b + 0) = -\Phi'_+(b - 0).$$

Этот результат очевиден из симметрии задачи. Далее, почленно складывая уравнения (3.85), положив предварительно $c = b$ и используя обозначения (3.79а), находим, что

$$D'_+ = -\frac{2\gamma \operatorname{sh} \gamma b}{\operatorname{ch} \gamma b + i\delta \gamma \operatorname{sh} \gamma b} \left[\Phi_-(b) - \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\alpha + k} \right]. \quad (3.86)$$

Такое же уравнение, только в других обозначениях, рассмотрено в задаче 3.13. При $\delta=0$ уравнение (3.86) сводится к частному случаю уравнения (3.796), а именно к случаю $c=b$.

Аналогичным методом решается задача о бесконечном круглом волноводе, внутри которого расположена полубесконечная цилиндрическая перегородка. Ограничимся задачей с простым граничным условием на разделяющей перегородке (перегородка без потерь). Рассмотрим бесконечный круглый волновод $0 \leq \rho \leq a$, $-\infty < z < \infty$ с граничным условием $\partial\varphi_z/\partial\rho=0$ при $\rho=a$ и будем считать, что на полубесконечном цилиндре $\rho=b < a$, $0 \leq z < \infty$, должно выполняться условие $\varphi_z=0$. Пусть слева из $z=-\infty$ падает волна $\varphi_i = \exp(ikz)$; положим, как всегда, $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$. Применяя преобразование Фурье по переменной z , находим (ср. с § 3.4), что

$$\Phi(\alpha) = A(\alpha) I_0(\gamma\rho) \quad \text{при } 0 \leq \rho \leq b,$$

$$\Phi(\alpha) = B(\alpha) [I_0(\gamma\rho) K'_0(\gamma a) - K_0(\gamma\rho) I'_0(\gamma a)] \quad \text{при } b \leq \rho \leq a,$$

причем мы учли граничные условия: функция Φ конечна при $\rho=0$ и $d\Phi/d\rho=0$ при $\rho=a$. Из граничного условия при $\rho=b$ находим

$$\begin{aligned} -i(2\pi)^{-1/2}(\alpha+k)^{-1} + \Phi_-(\alpha) &= A(\alpha) I_0(\gamma b) = \\ &= B(\alpha) [I_0(\gamma b) K'_0(\gamma a) - K_0(\gamma b) I'_0(\gamma a)], \end{aligned}$$

$$\Phi'_+(b+0) + \Phi'_-(b) = \gamma B(\alpha) [I'_0(\gamma b) K'_0(\gamma a) - K'_0(\gamma b) I'_0(\gamma a)],$$

$$\Phi'_+(b-0) + \Phi'_-(b) = \gamma A(\alpha) I'_0(\gamma b).$$

Образовав разность двух последних уравнений, исключим $\Phi'_-(b)$ и положим

$$\Phi'_+(b+0) - \Phi'_+(b-0) = D'_+(\alpha).$$

Далее, исключим A и B и учтем равенство (3.576). Это даст

$$K(\alpha) D'_+(\alpha) = [\Phi_-(\alpha) - i(2\pi)^{-1/2}(\alpha+k)^{-1}], \quad (3.87)$$

где

$$K(\alpha) = b I_0(\gamma b) [I'_0(\gamma a)]^{-1} [I_0(\gamma b) K'_0(\gamma a) - K_0(\gamma b) I'_0(\gamma a)].$$

Уравнение (3.87) имеет стандартную форму [ср. с уравнением (3.796)] и решается известным способом. На первый взгляд может показаться, что функция $K(\alpha)$ имеет точки ветвления при $\alpha = \pm k$, так как в нее входят функции $K'_0(\gamma a)$ и $K_0(\gamma b)$; однако это не так, потому что

$$\gamma K_1(\gamma a) = \gamma I_1(\gamma a) \ln(1/2 \gamma) + \text{функция без точек ветвления,}$$

$$K_0(\gamma b) = -I_0(\gamma b) \ln(1/2 \gamma) + \text{функция без точек ветвления.}$$

Таким образом, члены в $K(\alpha)$, содержащие логарифм, взаимно уничтожаются и $K(\alpha)$ имеет только простые нули и полюсы. Фактори-

зацию функции $K(\alpha)$ можно найти разложением в бесконечные произведения. (См. работы Бейлина [1] и Маркувица [1], в которых приводятся таблицы соответствующих численных результатов.)

§ 3.6. Поперечная полоса в волноводе

Рассмотрим волновод $0 \leq y \leq 2b$, $-\infty < z < \infty$ с поперечной полосой $0 \leq y \leq b$, $z = 0$. (Если размер волновода вдоль оси x ограничен, то методом, указанным в § 3.1, задача сводится к рассматриваемой.) Пусть на стенках волновода и на полосе должно выполняться условие $\partial\varphi_i/\partial n = 0$, а возбуждающая волна $\varphi_i = \exp(ikz)$ падает из $z = -\infty$. Положим $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$. Из граничного условия на полосе имеем $\partial\varphi/\partial z = -ik$ при $z = 0$, $0 \leq y \leq b$.

Рассмотрим преобразование Фурье по переменной z уравнения для φ в области $b \leq y \leq 2b$. Согласно граничному условию $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 2b$, находим, что

$$\Phi(y, \alpha) = A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma(2b - y).$$

Поэтому при $y = b$ в обычных обозначениях будем иметь

$$\Phi_+(b, \alpha) + \Phi_-(b, \alpha) = A(\alpha) \operatorname{ch} \gamma b, \quad (3.88a)$$

$$\Phi'_+(b, \alpha) + \Phi'_-(b, \alpha) = -\gamma A(\alpha) \operatorname{sh} \gamma b. \quad (3.88b)$$

Исключив отсюда $A(\alpha)$, найдем

$$\Phi_+(\alpha) + \Phi_-(\alpha) = -\gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b [\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_-(\alpha)] \quad (3.89)$$

(здесь мы несколько упрощаем обозначения, опуская для краткости аргумент b).

Рассмотрим теперь преобразование Фурье по z в области $0 \leq y \leq b$, $z \geq 0$ и при этом учтем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} e^{i\alpha z} dz = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_0 + \frac{i\alpha}{(2\pi)^{1/2}} (\varphi)_0 - \alpha^2 \Phi_+(y, \alpha),$$

где индекс нуль указывает, что величины берутся при $z = 0$. Величина $(\partial\varphi/\partial z)_0$ известна: она равна $-ik$; однако величина $(\varphi)_0$ неизвестна. Обозначим $(\varphi)_0$ через $f(y)$. Тогда дифференциальное уравнение в частных производных принимает вид

$$\frac{d^2 \Phi_+(y, \alpha)}{dy^2} - \gamma^2 \Phi_+(y, \alpha) = -\frac{ik}{(2\pi)^{1/2}} - \frac{iaf(y)}{(2\pi)^{1/2}}. \quad (3.90)$$

Чтобы исключить неизвестную функцию $f(y)$, изменим в уравнении (3.90) знак перед α и сложим результат с уравнением (3.90); это дает

$$\frac{d^2 [\Phi_+(y, \alpha) + \Phi_+(y, -\alpha)]}{dy^2} - \gamma^2 [\Phi_+(y, \alpha) + \Phi_+(y, -\alpha)] = - (2\pi)^{-1/2} 2ik.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $d\Phi_+/dy = 0$ при $y = 0$, равно

$$\Phi_+(y, \alpha) + \Phi_+(y, -\alpha) = B(\alpha) \operatorname{ch} \gamma y + (2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2}. \quad (3.91)$$

Из уравнения (3.91) и уравнения, получающегося после дифференцирования уравнения (3.91) по y , исключаем $B(\alpha)$. Положив $y = b$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b [\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_+(-\alpha)] + \\ + (2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Совершенно аналогично для области $0 \leq y \leq b$, $-\infty < z \leq 0$ найдем

$$\begin{aligned} \Phi_-(\alpha) + \Phi_-(-\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b [\Phi'_-(\alpha) + \Phi'_-(-\alpha)] - \\ - (2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Таким образом, исходная задача сведена к функциональным уравнениям (3.89), (3.92), (3.93).

Образуем сумму уравнений (3.92) и (3.93):

$$\begin{aligned} [\Phi_+(\alpha) + \Phi_-(\alpha)] + [\Phi_+(-\alpha) + \Phi_-(-\alpha)] = \\ = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b \{[\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_-(\alpha)] + [\Phi'_+(-\alpha) + \Phi'_-(-\alpha)]\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из уравнения (3.89) имеем

$$\begin{aligned} [\Phi_+(\alpha) + \Phi_-(\alpha)] + [\Phi_+(-\alpha) + \Phi_-(-\alpha)] = \\ = -\gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b \{[\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_-(\alpha)] + [\Phi'_+(-\alpha) + \Phi'_-(-\alpha)]\}. \end{aligned}$$

Образова сумму и разность этих двух уравнений, получаем два других уравнения и решаем их методом Винера — Хопфа. Находим

$$\Phi_+(\alpha) = -\Phi_-(-\alpha), \quad \Phi'_+(\alpha) = -\Phi'_-(-\alpha). \quad (3.94)$$

Вычитая уравнение (3.92) из уравнения (3.89), исключаем $\Phi_+(\alpha)$, а затем используем равенства (3.94). Это дает

$$\Phi_+(-\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b \Phi'_+(\alpha) + (2\pi)^{-1/2} ik\gamma^{-2} \quad \text{при} \quad -k_2 < \tau < k_2. \quad (3.95)$$

Это уравнение можно сравнить с уравнением (3.796) при $b = c$. Положим

$$\gamma b \operatorname{cth} \gamma b = K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha), \quad (3.96a)$$

где

$$K_{\pm}(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - k^2 b_{n-1/2}^2)^{1/2} \mp i\alpha b_{n-1/2}}{(1 - k^2 b_n^2)^{1/2} \mp i\alpha b_n}, \quad b_p = \frac{b}{p\pi}. \quad (3.96b)$$

Эта факторизация взята из задачи 3.6. Перепишем формулу (3.95) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - k}{K_-(\alpha)} \Phi_+(-\alpha) - \frac{ik}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\alpha + k} \left[\frac{1}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{K_-(-k)} \right] = \\ = \frac{\Phi'_+(\alpha) K_+(\alpha)}{b(\alpha + k)} + \frac{ik}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\alpha + k) K_-(-k)}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя метод Винера — Хопфа и учитывая, что $K_+(\alpha) = = K_-(-\alpha)$, находим

$$\Phi'_+(\alpha) = -(2\pi)^{-1/2} ikb [K_+(k) K_+(\alpha)]^{-1}.$$

Определим поле в области $b \leq y \leq 2b$. Согласно равенствам (3.88б) и (3.94), имеем

$$A(\alpha) = -[\gamma \operatorname{sh} \gamma b]^{-1} [\Phi'_+(\alpha) - \Phi'_+(-\alpha)].$$

Отсюда

$$\varphi(y, z) = \frac{ikb}{2\pi K_+(k)} \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\frac{1}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{K_+(-\alpha)} \right] \frac{\operatorname{ch} \gamma(2b - y)}{\gamma \operatorname{sh} \gamma b} e^{-iaz} d\alpha. \quad (3.97)$$

Изменяя знаки перед z и перед α и учитывая первое уравнение (3.94), получаем

$$\varphi(y, -z) = -\varphi(y, z). \quad (3.98)$$

Для того чтобы найти φ при $z \geq 0$, $b \leq y \leq 2b$, замыкаем путь интегрирования в формуле (3.97) в нижней полуплоскости и вычисляем вычеты. Здесь удобно сначала преобразовать формулу (3.97), используя равенство (3.96а) и соотношение $K_+(-\alpha) = K_-(\alpha)$, к следующему виду:

$$\begin{aligned} \varphi(y, z) = \frac{ik}{2\pi K_+(k)} \times \\ \times \int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} \left[\frac{K_-(\alpha)}{\gamma^2 \operatorname{ch} \gamma b} - \frac{b}{\gamma \operatorname{sh} \gamma b K_-(\alpha)} \right] \operatorname{ch} \gamma(2b - y) e^{-iaz} d\alpha. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$ и что $\varphi(y, -z) = -\varphi(y, z)$, получаем

$$\varphi_t = P_0 e^{ikz} + S(y, z) \quad \text{при } z \geq 0, \quad (3.99a)$$

$$\varphi_t = e^{ikz} + (1 - P_0) e^{-ikz} - S(y, z) \quad \text{при } z \leq 0, \quad (3.99б)$$

где, если положить $\gamma_p = [(p\pi/b)^2 - k^2]^{1/2}$, то

$$S(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P_{n-1/2} \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{b} \right] e^{-\gamma_{n-1/2} |z|} + \right. \\ \left. + P_n \cos \left[n \frac{\pi y}{b} \right] e^{-\gamma_n |z|} \right\}, \\ P_0 = \frac{1}{2} \{ 1 + [K_+(k)]^{-2} \}, \\ P_n = (-1)^{n+1} \frac{ik}{\gamma_n K_+(k) K_+(i\gamma_n)}, \\ P_{n-1/2} = (-1)^{n+1} \frac{ik K_+(i\gamma_{n-1/2})}{(n-1/2) \pi \gamma_{n-1/2} K_+(k)}. \quad (3.100)$$

Мы вывели формулы (3.99) для области $b \leq y \leq 2b$. Можно убедиться в том, что поле при $0 \leq y \leq b$ определяется точно такими же выражениями.

Результаты этого параграфа основаны на работах Болдуина и Хейнса [1]. Мы уже отметили сходство уравнений (3.95) и (3.796) при $b = c$. Карп и Вильямс [1], не применяя метода Винера — Хопфа, непосредственно показали эквивалентность рассмотренных задач, приводящих к этим уравнениям. В задаче 4.12 будет показано, как можно свести рассмотренную выше задачу к системе линейных алгебраических уравнений.

Для задач рассмотренного в этой главе типа имеются различные приближенные методы решения. Полученные здесь строгие решения позволяют оценить и, возможно, улучшить точность приближенных методов. Для дифракционных задач ряд интересных аналогичных исследований проведен Л. А. Вайнштейном [1, 2, 6].

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ III

3.1. В ряде сложных задач целесообразно вместо рассуждений, проведенных в § 3.2, применять следующий способ, который мы продемонстрируем на примере вывода уравнений (3.18). Введем наши обычные обозначения. Если функция φ непрерывна при $y = \pm b$, $x > 0$, то полагаем

$$S_+ = \Phi_+(b) + \Phi_+(-b), \quad D_+ = \Phi_+(b) - \Phi_+(-b); \quad (a)$$

если же функция φ при $y = \pm b$, $x > 0$ разрывна, то полагаем

$$S_+^{(o)} = \Phi_+(b+0) + \Phi_+(-b-0), \quad D_+^{(o)} = \Phi_+(b+0) - \Phi_+(-b-0), \\ S_+^{(i)} = \Phi_+(b-0) + \Phi_+(-b+0), \quad D_+^{(i)} = \Phi_+(b-0) - \Phi_+(-b+0), \\ S_+ = \frac{1}{2} (S_+^{(o)} - S_+^{(i)}), \quad -D_+ = \frac{1}{2} (D_+^{(o)} - D_+^{(i)}). \quad (б)$$

Верхний индекс o указывает, что соответствующие величины берутся на „внешних“ сторонах полуплоскостей, а индекс i указывает, что они берутся на „внутренних“ сторонах. Аналогичные обозначения будем применять для

величин, отмеченных штрихами (производных). Если величины берутся при $y = \pm b$, $x < 0$, то нижний индекс $+$ заменяется на $-$.

Из равенства (3.10а), используя обозначения (2.11) и (2.15) и учитывая, что функция φ разрывна при $y = \pm b$, $x < 0$, а все остальные функции непрерывны, получаем

$$\begin{aligned} \Phi_+(b) + \Phi_-(b+0) &= Ae^{-\gamma b}, & \Phi_+(-b) + \Phi_-(-b-0) &= De^{-\gamma b}, \\ \Phi'_+(b) + \Phi'_-(b) &= -\gamma Ae^{-\gamma b}, & \Phi'_+(-b) + \Phi'_-(-b) &= \gamma De^{-\gamma b}. \end{aligned}$$

Исключим A и D :

$$\begin{aligned} \Phi'_+(b) + \Phi'_-(b) &= -\gamma [\Phi_+(b) + \Phi_-(b+0)] = -\gamma Ae^{-\gamma b}, \\ \Phi'_+(-b) + \Phi'_-(-b) &= \gamma [\Phi_+(-b) + \Phi_-(-b-0)] = \gamma De^{-\gamma b}. \end{aligned}$$

Образую сумму и разность этих равенств и используя введенные выше обозначения, приходим к следующим уравнениям:

$$S'_+ + S'_- = -\gamma (D_+ + D_-^{(o)}) = -\gamma (A - D) e^{-\gamma b}, \quad (в)$$

$$D'_+ + D'_- = -\gamma (S_+ + S_-^{(o)}) = -\gamma (A + D) e^{-\gamma b}. \quad (г)$$

Аналогично из равенства (3.10б) выводим два других уравнения, а именно

$$\begin{aligned} \Phi_+(\pm b) + \Phi_-(\pm b \mp 0) &= Be^{\mp \gamma b} + Ce^{\pm \gamma b}, \\ \Phi'_+(\pm b) + \Phi'_-(\pm b) &= -\gamma Be^{\mp \gamma b} + \gamma Ce^{\pm \gamma b}, \end{aligned}$$

в которых надо везде брать одновременно верхние или нижние знаки. Образую сумму и разность этих уравнений и исключим затем $B + C$ и $B - C$. Используя введенные стандартные обозначения, находим

$$S'_+ + S'_- = \gamma \operatorname{cth} \gamma b (D_+ + D_-^{(l)}) = 2\gamma (C - B) \operatorname{ch} \gamma b, \quad (д)$$

$$D'_+ + D'_- = \gamma \operatorname{th} \gamma b (S_+ + S_-^{(l)}) = 2\gamma (C + B) \operatorname{sh} \gamma b. \quad (е)$$

Теперь уже ясно, что уравнения (в) и (д) следует рассматривать совместно. Функции S'_+ , D_+ , $D_-^{(o)}$, $D_-^{(l)}$ неизвестны, а функция S'_- известна. В подобных случаях надо, как правило, исключать функцию D_+ , так как в функциональные уравнения, которые решаются методом Винера — Хопфа, должны входить одна „плюс“-функция и одна „минус“-функция, а уравнение, содержащее как D_+ , так и D_- , не принадлежит к этому типу. Действительно, исключив D_+ из уравнений (в) и (д), мы получим уравнение (3.18а), а исключив S_+ из уравнений (г) и (е), получим уравнение (3.18б).

Отличие рассмотренного здесь подхода от предыдущего состоит в том, что сначала исключаются величины A , ..., D , а затем уже используются граничные условия

3.2. Рассмотрим, как и в § 3.2, задачу о падении плоской волны на две параллельные полуплоскости (см. рис. 9), но, в отличие от ранее принятого на полуплоскостях условия $\partial \varphi_i / \partial y = 0$, будем рассматривать условие $\varphi_t = 0$. Показать, что в этом случае вместо уравнений (3.18) получаются следующие уравнения.

$$S_+ + (2\pi)^{-1/2} 2i \cos(kb \sin \theta) (\alpha - k \cos \theta)^{-1} = -\gamma^{-1} (1 + e^{-2\gamma b}) D'_-,$$

$$D_+ + (2\pi)^{-1/2} 2 \sin(kb \sin \theta) (\alpha - k \cos \theta)^{-1} = -\gamma^{-1} (1 - e^{-2\gamma b}) S'_-.$$

Отсюда [см. формулы (3.20) и (3.21)]

$$D'_- = -(2\pi)^{-1/2} i \cos(kb \sin \theta) (k + k \cos \theta)^{1/2} (\alpha - k)^{1/2} \times \\ \times [K_+(k \cos \theta) K_-(\alpha) (\alpha - k \cos \theta)]^{-1}, \\ S'_- = -(2\pi)^{-1/2} b^{-1} \sin(kb \sin \theta) [L_+(k \cos \theta) L_-(\alpha) (\alpha - k \cos \theta)]^{-1}.$$

Поле в дальней зоне и распространяющаяся волна в волноводе находятся так же, как в § 3.2. Предположим, например, что $1/2\pi < kb < \pi$ и введем обозначение $\kappa = [k^2 - (\pi/2b)^2]^{1/2}$. При $-b \leq y \leq b$, $x < 0$ замыкаем путь интегрирования в выражении для φ в верхней полуплоскости. Подинтегральное выражение имеет два полюса в точках $\alpha = k \cos \theta$ и $\alpha = \kappa$. Вычет в первом полюсе дает слагаемое, компенсирующее падающую волну, а вычет во втором дает распространяющуюся волну:

$$\frac{2b \cos(kb \sin \theta) (k + k \cos \theta)^{1/2} (\alpha - k)^{1/2}}{\pi K_+(k \cos \theta)} \lim_{\alpha \rightarrow \kappa} \left[\frac{\alpha - \kappa}{K_-(\alpha)} \right] e^{-i\kappa x} \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right).$$

Коэффициент при $\exp(-i\kappa x)$ в этом выражении можно назвать „коэффициентом передачи“. Входящий сюда предел легко вычислить, а именно

$$\lim_{\alpha \rightarrow \kappa} \left[\frac{\alpha - \kappa}{K_-(\alpha)} \right] = K_+(\kappa) \lim_{\alpha \rightarrow \kappa} \left[\frac{\alpha - \kappa}{K(\alpha)} \right] = \frac{K_+(\kappa)}{K'(\kappa)} = \frac{K_+(\kappa) \pi}{2\kappa b^2 i},$$

при этом мы учли, что $\gamma = -1/2 i \pi b^{-1}$ при $\alpha = \kappa$.

Решение этой задачи методом интегрального уравнения дано Хейнсом [1].

3.3. Выражения (3.22) и (3.23) можно преобразовать к виду, удобному для численных расчетов. Если $0 < kd < 1$, то положим

$$(1 - k^2 d^2)^{1/2} - iad = \{1 - (k^2 - a^2) d^2\}^{1/2} \exp(-i\psi).$$

где $\operatorname{tg} \psi = ad/(1 - k^2 d^2)^{1/2}$, или, что то же самое,

$$\sin \psi = \frac{ad}{[1 - (k^2 - a^2) d^2]^{1/2}};$$

последнее соотношение удобно использовать при $\alpha = k$.

Если $0 < kb < \pi$, т. е. $kb_n = kb/n\pi < 1$ для всех n , то из формул (3.23) следует, что

$$L_+(\alpha) = [(\gamma b)^{-1} \operatorname{sh} \gamma b]^{1/2} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} ab + \frac{iab}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{bk} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\gamma b}{\pi} \operatorname{arc} \cos \frac{\alpha}{k} + i \sum_{n=1}^{\infty} (ab_n - \psi_n) \right\},$$

где

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{\alpha}{\left[\left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}}, \quad b_n = \frac{b}{n\pi}.$$

Если α и k вещественны, причем $-k < \alpha < k$ и, следовательно, можно положить $\alpha = k \cos \lambda$ (λ — вещественно), так что $\gamma = -ik \sin \lambda$, $\operatorname{arc} \cos(\alpha/k) = \lambda$,

то для функции $L_+(k \cos \lambda)$ получается удобное выражение. В частности,

$$L_+(k) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} kb + i \frac{kb}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{2\pi}{bk} \right) \right] + \right. \\ \left. + i \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{bk}{n\pi} - \arcsin \left(\frac{bk}{n\pi} \right) \right] \right\}.$$

Согласно формулам (3.22), при $0 < kb < \pi/2$ найдем, что

$$K_+(a) = [\operatorname{ch} \gamma b]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} ab + \frac{iab}{\pi} \left[1 - C + \ln \left(\frac{\pi}{2kb} \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\gamma b}{\pi} \arccos \frac{a}{k} + i \sum_{n=1}^{\infty} (ab_{n-1/2} - \psi_{n-1/2}) \right\},$$

где $b_{n-1/2}$ и $\psi_{n-1/2}$ определяются, как b_n и ψ_n при замене n на $n-1/2$. Если $1/2\pi < kb < 3/2\pi$, то, положив $x = \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \right]^{1/2}$, удобно записать первый член бесконечного произведения (3.22а) в следующем виде:

$$(1 - k^2 b_{1/2}^2)^{1/2} - iab_{1/2} = -i(a+x)(2b/\pi).$$

В результате мы получим

$$K_+(a) = -i \left[\frac{\operatorname{ch} \gamma b}{a^2 - x^2} \right]^{1/2} (a+x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} ab - \frac{\gamma b}{\pi} \arccos \frac{a}{k} + \right. \\ \left. + \frac{iab}{\pi} \left[3 - C + \ln \frac{\pi}{2kb} \right] + i \sum_{n=2}^{\infty} (ab_{n-1/2} - \psi_{n-1/2}) \right\}.$$

Здесь выражение, стоящее под знаком квадратного корня, положительно для всех a в интервале $0 < a < k$ (a и k — вещественны).

Соответствующие формулы для решения задачи с помощью преобразования Лапласа были получены Джонсом [4].

3.4. Рассмотрим асимптотику выражения

$$K_+(a) = [K(0)]^{1/2} e^{-\chi(a)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{\alpha_n} \right) e^{-\alpha/\beta_n} \quad (a)$$

при $a \rightarrow \infty$ [ср. с формулой (1.19)]. Допустим, что при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n = an + b + O(n^{-1}), \quad \beta_n = an + c + O(n^{-1}). \quad (б)$$

Сравним поведение $K_+(a)$ при $a \rightarrow \infty$ с поведением следующего выражения:

$$J(a) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{an+b} \right) e^{-\alpha/an} = e^{-C\alpha/a} \frac{\Gamma(b/a+1)}{\Gamma(\alpha/a+b/a+1)}, \quad (в)$$

т. е. рассмотрим отношение

$$\frac{K_+(\alpha)}{J(\alpha)} = [K(0)]^{1/2} e^{-\chi(\alpha)} \times \\ \times \exp \left[\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha n} - \frac{1}{\beta n} \right) \right] \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n + b}{\alpha n} \right) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n + \alpha}{\alpha n + b + \alpha} \right). \quad (г)$$

Обозначим последнее бесконечное произведение в формуле (г) через $Q(\alpha)$. После несложных преобразований получим

$$Q(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha_n - \alpha n - b}{\alpha n + b + \alpha} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(\alpha)],$$

где

$$f_n(\alpha) = \frac{\alpha_n - \alpha n - b}{\alpha n + b + \alpha}.$$

Предположим, что сумма $\alpha n + b + \alpha$ отлична от нуля для всех рассматриваемых α , $\text{Im } \alpha > -\text{Im } \alpha_1$, где α_1 — наименьший корень функции $K(\alpha)$. Тогда, согласно предположениям (б), получаем, что $|f_n(\alpha)| < Cn^{-2}$, где C — постоянная, не зависящая от α для всех α , таких, что $\text{Im } \alpha \geq -\text{Im } \alpha_1 + \varepsilon$. Следовательно, бесконечное произведение в выражении $Q(\alpha)$ сходится равномерно и

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} Q(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [1 + f_n(\alpha)] = 1, \quad \text{Im } \alpha > -\text{Im } \alpha_1 + \varepsilon.$$

(Можно показать, следуя Базеру и Карпу [1], что если α_n — мнимые, то полученный результат справедлив при $-\frac{1}{2}\pi + \varepsilon' < \arg \alpha < \frac{3}{2}\pi - \varepsilon'$, но здесь нам это не потребуется.)

Теперь вернемся к формуле (в). Используя асимптотическое выражение для $J(\alpha)$, находим

$$K_+(\alpha) \sim \exp \left[-\chi(\alpha) + \frac{\alpha}{a} (1 - C) - \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \right) \ln \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{b}{a} + 1 \right) + \right. \\ \left. + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha n} - \frac{1}{\beta n} \right) \right].$$

3.5. Приведем бесконечное произведение (а) из задачи 3.4 к виду, удобному для вычислений в частном случае

$$\alpha_n = (k^2 - \delta_n^2)^{1/2} = i(\delta_n^2 - k^2)^{1/2}, \quad \beta_n = i\varepsilon_n,$$

где δ_n, ε_n — последовательности вещественных чисел. Пусть k и α вещественны. Величины α_n будут вещественны для $1 \leq n \leq N$, где N — некоторое число, и мнимы для $n > N$. Положим $\alpha_n = \varkappa_n$ для вещественных α_n и $\alpha_n = i\gamma_n$ для мнимых α_n . Как и при выводе формулы (1.27), удобно сначала рассмотреть выражение

$$\frac{K_+(\alpha)}{K_-(\alpha)} = e^{-2\chi(\alpha)} \prod_{n=1}^N \frac{\varkappa_n + \alpha}{\varkappa_n - \alpha} \exp \left[+2i \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha}{\varepsilon_n} \right) - 2i\Psi \right],$$

где

$$\Psi = \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\psi_n - \frac{\alpha}{\varepsilon_n} \right), \quad \operatorname{tg} \psi_n = \frac{\alpha}{\gamma_n}, \quad \text{или} \quad \sin \psi_n = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \gamma_n^2)^{1/2}}.$$

Умножая это выражение на $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$, получаем

$$K_+(\alpha) = e^{-\chi(\alpha)} \left[\frac{K(\alpha)}{\prod_{n=1}^N (\alpha_n^2 - \alpha^2)} \right]^{1/2} \prod_{n=1}^N (\alpha_n + \alpha) \exp \left[i \sum_{n=1}^N \left(\frac{\alpha}{\varepsilon_n} \right) - i\Psi \right].$$

В частности, для $|K_+(\alpha)|$ получается весьма простое выражение.

3.6. Рассмотрим факторизацию функций

$$K(\alpha) = (cd/a) \gamma \operatorname{sh} \gamma a [\sin \gamma c \operatorname{sh} \gamma d]^{-1} = K_+(\alpha) K_-(\alpha),$$

где $c + d = a$. Как в задаче 1.9 и в § 3.2, имеем

$$(\gamma b)^{-1} \operatorname{sh} \gamma b = \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - k^2 b_n^2) + \alpha^2 b_n^2], \quad b_n = b/n\pi.$$

Положим

$$G_+(\alpha, b) = \prod_{n=1}^{\infty} [(1 - k^2 b_n^2)^{1/2} - iab_n] e^{i\alpha b_n};$$

тогда

$$K_+(\alpha) = G_+(\alpha, a) [G_+(\alpha, c) G_+(\alpha, d)]^{-1} \exp[-\chi_1(\alpha)].$$

Объединяя три бесконечные произведения, получаем

$$K_+(\alpha) = e^{-\chi_1(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - k^2 a_n^2)^{1/2} - i\alpha a_n}{[(1 - k^2 c_n^2)^{1/2} - i\alpha c_n][(1 - k^2 d_n^2)^{1/2} - i\alpha d_n]}. \quad (a)$$

Выберем пока неопределенную функцию $\chi_1(\alpha)$, так чтобы функция $K_+(\alpha)$ имела алгебраический рост при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости. Для этого рассмотрим асимптотическое поведение $K_+(\alpha)$ при больших α . Пренебрегая членами $k^2 a_n^2$ и т. д. (см. задачу 3.4), получаем

$$K_+(\alpha) \sim [\Gamma(1 - i\alpha a\pi^{-1})]^{-1} \Gamma(1 - i\alpha c\pi^{-1}) \Gamma(1 - i\alpha d\pi^{-1}) \exp[-\chi_1(\alpha)].$$

Используя затем формулу Стирлинга и выбирая

$$\chi_1(\alpha) = i\alpha\pi^{-1} (a \ln a - c \ln c - d \ln d),$$

находим, что $K_+(\alpha) \sim \alpha^{1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости.

Несколько отличное, хотя и эквивалентное этому выражение получается, если вместо (a) положить

$$K_+(\alpha) = e^{-\chi_2(\alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{[(1 - k^2 a_{2n-1}^2)^{1/2} - i\alpha a_{2n-1}][1 - k^2 a_{2n}^2 - i\alpha a_{2n}]}{[(1 - k^2 c_n^2)^{1/2} - i\alpha c_n][(1 - k^2 d_n^2) - i\alpha d_n]}.$$

Легко установить, что в этом случае следует взять

$$\chi_2(\alpha) = i\alpha\pi^{-1} (a \ln^{1/2} a - c \ln c - d \ln d).$$

Это выражение удобно использовать при $c = d = a/2$, так как тогда $\chi_2(\alpha) = 0$. В этом случае

$$K(\alpha) = \gamma b \operatorname{cth} \gamma b = K_+(\alpha) K_-(\alpha),$$

где

$$K_+(\alpha) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - k^2 b^2_{n-1/2})^{1/2} - iab_{n-1/2}}{(1 - k^2 b^2_n)^{1/2} - iab_n}.$$

Если мы положим здесь $\alpha = k$ и устремим k к 0, то найдем, что

$$K_+(k) = 1 - (ikb/\pi) 2 \ln 2 + O(k^2). \quad (6)$$

Посже мы используем этот результат.

3.7. Факторизация функции

$$K(\alpha) = 2I_1(\gamma a) K_1(\gamma a) = \pi i H_1^{(1)}(\gamma a) J_1(\gamma a),$$

где $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2} = -i\alpha$, рассмотрена рядом авторов. Г. Левин и Швингер [1] использовали для этого метод, сходный с методами (а) и (б), указанными в конце § 1.3; Джонс [5] использовал вариант метода (б), а Л. А. Вайнштейн [3] использовал метод (в). В этих работах, как и в методах (б) и (в), при деформации пути интегрирования приходилось учитывать нули функции $I_1(\gamma a)$, что усложняло выкладки. По-видимому, следующий вывод будет несколько проще. Пусть

$$K(\alpha) = 2e^{-\gamma a} [(\gamma a)^{-1} I_1(\gamma a)] [\gamma a e^{\gamma a} K_1(\gamma a)].$$

Множитель $\exp(-\gamma a)$ факторизуется просто по формуле (1.35). Множитель $(\gamma a)^{-1} I_1(\gamma a)$ можно факторизовать уже рассмотренным методом бесконечных произведений. Таким образом, единственным множителем, который придется факторизовать с помощью интегральной формулы, будет функция $\gamma a \exp(\gamma a) K_1(\gamma a)$, которая не имеет нулей во всей плоскости α . Чтобы проанализировать подинтегральное выражение в формулах факторизации (1.32) и (1.33), рассмотрим функцию

$$F(z) = \ln K_1(z).$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} K_1(-z) &= K_1(e^{-i\pi} z) = -K_1(z) + \pi i I_1(z), \\ K_1(iz) &= -\frac{1}{2} \pi H_1^{(2)}(z), \quad K_1(-iz) = -\frac{1}{2} \pi H_1^{(1)}(z). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F(z) - F(-z) &= \frac{1}{2} \ln \left[\frac{K_1^2(z)}{K_1^2(z) + \pi^2 I_1^2(z)} \right] - \frac{1}{2} i\pi - i \operatorname{arctg} \left[\frac{K_1(z)}{\pi I_1(z)} \right], \\ F(iz) - F(-iz) &= -2i \operatorname{arctg} \left[\frac{Y_1(z)}{J_1(z)} \right]. \end{aligned}$$

Простота второго из этих результатов наводит на мысль об использовании метода (в) из § 1.3, и, действительно, Л. А. Вайнштейном [3] были получены изящные формулы соответствующего вида.

Во всех трех упомянутых выше работах даются приближенные формулы. Однако таблицы значений $K_+(a)$ содержатся только в работе Джонса [5] для $a = k$, $a = \kappa_1$ и $a = \kappa_2$, где $\kappa_i = (k^2 - r_i)^{1/2}$, а r_i — i -й корень уравнения $J_0(r_i a) = 0$. Эти таблицы даны для $ka = 0 (0,25) 10$.

3.8. *Выводы интегральных уравнений.* Интегральные уравнения можно вывести, вообще говоря, тремя различными способами, рассмотренными в основном в гл. II. Здесь мы дадим краткую сводку результатов для лучшей ориентировки в литературе. Основными источниками данных по этому вопросу могут служить книга Морса и Фешбаха [1] и статья Хейнса [10]. Как подчеркивалось выше, в методе Джонса можно обойтись без рассмотрения интегральных уравнений.

1. В ряде случаев при выводе проще всего следовать, как в задаче 2.7, наводящим физическим соображениям. Рассмотрим, например, задачу о падении волны φ_i на две полуплоскости, $y = \pm b$, $-\infty < x \leq 0$, на которых должно выполняться условие $\varphi_i = 0$. Положим $\varphi_i = \varphi_i + \varphi$ и допустим, что φ можно представить в виде излучения некоторых распределений линейных источников $f_1(x)$ и $f_2(x)$, расположенных на полуплоскостях $y = +b$ и $y = -b$ соответственно. Тогда полное поле в точке (x, y) будет таким:

$$\varphi_i(x, y) = \varphi_i(x, y) + \pi i \int_{-\infty}^0 [H_0^{(1)}(kR_1) f_1(\xi) + H_0^{(1)}(kR_2) f_2(\xi)] d\xi,$$

где

$$R_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - b)^2, \quad R_2^2 = (x - \xi)^2 + (y + b)^2.$$

Устремляя точку (x, y) к точкам $(x, \pm b)$, получаем систему двух интегральных уравнений

$$\pi i \int_{-\infty}^0 [H_0^{(1)}(k|x - \xi|) f_1(\xi) + H_0^{(1)}(kR) f_2(\xi)] d\xi + \varphi_i(x, b) = 0$$

при $-\infty < x \leq 0$,

$$\pi i \int_{-\infty}^0 [H_0^{(1)}(kR) f_1(\xi) + H_0^{(1)}(k|x - \xi|) f_2(\xi)] d\xi + \varphi_i(x, -b) = 0$$

при $-\infty < x \leq 0$,

где $R^2 = (x - \xi)^2 + 4b^2$. Образовав сумму и разность этих уравнений и полагая

$$f_1(\xi) + f_2(\xi) = s(\xi), \quad f_1(\xi) - f_2(\xi) = d(\xi),$$

придем к двум независимым интегральным уравнениям, справедливым для $-\infty < x \leq 0$, а именно к уравнениям

$$\pi i \int_{-\infty}^0 [H_0^{(1)}(k|x - \xi|) \pm H_0^{(1)}(kR)]_{d(\xi)}^{s(\xi)} d\xi + \varphi_i(x, b) \pm \varphi_i(x, -b) = 0.$$

Оба уравнения относятся к типу интегральных уравнений Винера — Холфа и решаются известным способом, причем следует использовать соотношение

[см. формулы (1.60) и (1.61)]

$$i \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)} [k(a^2 + x^2)^{1/2}] e^{iax} dx = 2\gamma^{-1} e^{-\gamma|a|}.$$

Такой подход использовал для решения задачи 3.2 Хейнс [1], часть I; см. также работы Л. Левина [1] и Л. А. Вайнштейна [1].

2. Интегральные уравнения легко вывести, если применить формулу Грина к области, состоящей из всего пространства, за исключением полуплоскостей, являющихся стенками волновода (ср. с задачей 2.6). Такой подход использовали Г. Левин и Швингер [1] в задаче об излучении из круглой трубы и Честер [1] в задаче об излучении из параллельных пластин.

3. Можно, наконец, разделить все пространство на несколько областей и применить к каждой из них формулу Грина. Такой подход был использован в § 2.4. В задаче о двух параллельных полуплоскостях $y = \pm b$, $-\infty < x \leq 0$ с граничным условием $\varphi_t = 0$ следует разделить все пространство на три области: а) $y \geq b$, б) $-b \leq y \leq b$, в) $y \leq -b$. Для областей (а) и (в) определение функции Грина не вызывает затруднений. Для области (б) следует выбрать функцию Грина, удовлетворяющую при $y = \pm b$ граничному условию $\varphi = 0$; она имеет вид

$$\varphi = \frac{2\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{-1} \sin \frac{n\pi}{2b} (y - b) \sin \frac{n\pi}{2b} (y_0 - b) e^{-\gamma_n |x - x_0|},$$

где $\gamma_n = [(n\pi/2b)^2 - k^2]^{1/2}$. Однако это известное представление нужной нам функции Грина неудобно, так как в конечном счете нас интересует ее преобразование Фурье по переменной x , а чтобы вычислить его в замкнутом виде, надо просуммировать ряд. Гораздо удобнее найти преобразование Фурье функции Грина, применив преобразование Фурье по x непосредственно к уравнению, которому должна удовлетворять функция Грина, а именно к уравнению

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2\varphi = -4\pi\delta(x - x_0)\delta(y - y_0),$$

в результате чего получаем

$$\frac{d^2\Phi(\alpha)}{d\alpha^2} - \gamma^2\Phi(\alpha) = -4\pi(2\pi)^{-1/2}\delta(y - y_0)e^{i\alpha x_0}.$$

Искомое преобразование Фурье функции Грина будет решением этого уравнения, удовлетворяющим граничным условиям $\Phi = 0$ при $y = \pm b$. В дальнейшем мы этот подход применять не будем.

3.9. Иидзума [1], Пирсон [1] и Л. А. Вайнштейн [5] обобщили задачи, рассмотренные в § 3.4, на случай излучения и дифракции электромагнитных волн на открытом конце круглого волновода. Единственное новое обстоятельство, возникающее при этом, будет нами разъяснено далее в общем виде. Рассмотрим систему функциональных уравнений Винера — Хопфа

$$2\alpha(\alpha^2 - k^2)^{-1}\Psi_1^-(\alpha) + p\Psi_2^-(\alpha) = K(\alpha)\Phi_2^+(\alpha) + F(\alpha),$$

$$q\Phi_1^+(\alpha) + 2\alpha(\alpha^2 - k^2)^{-1}\Phi_1^+(\alpha) = L(\alpha)\Psi_1^-(\alpha) + G(\alpha),$$

где p и q — заданные постоянные. Положим $K(\alpha) = K_+(\alpha)/K_-(\alpha)$ и

$$F(\alpha) K_-(\alpha) = E_+(\alpha) + E_-(\alpha),$$

$$\frac{K_-(\alpha) \Psi_1^-(\alpha)}{\alpha + k} = \frac{K_-(\alpha) \Psi_1^-(\alpha) - K_1(-k) \Psi_1^-(-k)}{\alpha + k} + \frac{K_1(-k) \Psi_1^-(-k)}{\alpha + k}.$$

Тогда первое уравнение решается обычным путем по методу Винера — Хопфа, что дает

$$K_+(\alpha) \Phi_2^+(\alpha) - K_-(-k) \Psi_1^-(-k) (\alpha + k)^{-1} + E_+(\alpha) = 0. \quad (a)$$

Аналогично решается второе уравнение:

$$L_-(\alpha) \Psi_1^-(\alpha) - L_+(k) \Phi_2^+(k) (\alpha - k)^{-1} + H_-(\alpha) = 0, \quad (б)$$

где $L(\alpha) = L_-(\alpha)/L_+(\alpha)$. Полагая в формуле (a) $\alpha = k$, а в формуле (б) $\alpha = -k$, получим систему двух линейных алгебраических уравнений, из которых определяем неизвестные постоянные $\Phi_2^+(k)$ и $\Psi_1^-(-k)$. Теперь уже нетрудно завершить решение задачи.

3.10. 1. Рассмотреть задачу об излучении из коаксиального цилиндрического волновода с бесконечным внутренним проводником и полубесконечным внешним проводником, т. е. найти решение волнового уравнения в области $\rho \geq a$, $-\infty < z < \infty$, в которой расположен полубесконечный цилиндр при $\rho = b > a$, $-\infty < z \leq 0$, причем возбуждающая волна набегаёт из $z = -\infty$ при $a \leq \rho \leq b$ (ср. с работой Маркувица [1], стр. 213).

3.11. Рассмотреть задачу об излучении из полубесконечного плоского волновода $y = \pm b$, $-\infty < x \leq 0$, помещенного внутри бесконечного-плоского волновода $y = \pm B$, $-\infty < x < \infty$ ($B \gg b$).

2. Рассмотреть задачу об излучении из полубесконечного круглого волновода $\rho = a$, $-\infty < z \leq 0$, помещенного внутри бесконечного круглого волновода $\rho = A$, $-\infty < z < \infty$ ($A \gg a$).

В пределе при $A \rightarrow \infty$, $B \rightarrow \infty$ получаются задачи, рассмотренные в § 3.3 и 3.4. Задачи для бесконечно больших A и B значительно сложнее, чем задачи для конечных A и B , так как в первых подинтегральные выражения имеют точки ветвления. Интересно выяснить, при каких условиях решение для конечных (но больших) A и B можно использовать для аппроксимации решения задачи об излучении в свободное пространство, например для аппроксимации поля около открытого конца волновода. [С иной точки зрения переход от функции, имеющей полюсы, к функции, имеющей точки ветвления, рассмотрен в книге Курганова [1], § 27, где имеются ссылки на исходную работу Чандрасекхара (S. Chandrasekhar).]

3.12. Карлсон и Хейнс (Карлсон и Хейнс [1], Хейнс и Карлсон [1], Хейнс [11]), а также Берз [1] рассмотрели задачу о падении электромагнитных волн на систему проводящих полуплоскостей $y = na$, $na \operatorname{ctg} \lambda \leq x < \infty$ ($n = \dots -2, -1, 0, +1, +2, \dots$). При решении методом Джонса естественно использовать периодичность структуры по y и свести исходную задачу к задаче внутри полосы $0 \leq y \leq a$, $-\infty < x < \infty$ (ср. с работой Хейнса [12]). Требуемую при решении факторизацию функции

$$\operatorname{ch} \gamma a - \cos(k\rho - \alpha b) \quad (a, k, \rho, b \text{ — заданные постоянные})$$

можно найти методом бесконечных произведений.

3.13. Распространение звука в плоском волноводе с импедансной ступенькой. Рассмотрим распространение звука в волноводе $0 \leq y \leq b$, $-\infty < x < \infty$, на стенках которого при $y=0$, $-\infty < z < \infty$ и при $y=b$, $-\infty < z \leq 0$ задано условие $\partial\varphi_t/\partial y = 0$, а при $y=b$, $0 < z < \infty$ задано условие $\partial\varphi_t/\partial y = ik\eta\varphi_t$, где η — комплексная постоянная. Пусть из $z = -\infty$ набегают волна $\varphi_t = \exp(ikz)$. Положим $\varphi_t = \varphi_+ + \varphi_-$. Применяя метод Винера — Хопфа, приходим к функциональному уравнению

$$-(2\pi)^{-1/2}k\eta(\alpha+k)^{-1} - ik\eta\Phi_-(b) = \frac{\Phi'_+(b)}{K(\alpha)},$$

где

$$K(\alpha) = \gamma \operatorname{sh} \gamma b [\gamma \operatorname{sh} \gamma b - ik\eta \operatorname{ch} \gamma b]^{-1}.$$

Обозначим через μ_m корни уравнения

$$\pi\mu_m \operatorname{tg} \pi\mu_m = -ikb\eta;$$

тогда при $\eta \rightarrow 0$

$$\mu_0 \approx \pi^{-1}(-ik\eta b)^{1/2}, \quad \mu_m \sim m - ikb\eta(\pi^2 m)^{-1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Используя для факторизации функции $K(\alpha)$ метод бесконечных произведений, получаем

$$K_+(\alpha) = -\pi^2 \mu_0^2 (ik\eta b)^{-1} L_+(\alpha), \quad K_-(\alpha) = L_-(\alpha), \quad L_-(\alpha) = L_+(-\alpha).$$

$$L_+(\alpha) = (\alpha + k)(\alpha + k_0)^{-1} \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - k^2 A_m^2)^{1/2} - i\alpha A_m] [(1 - k^2 B_m^2)^{1/2} - i\alpha B_m]^{-1},$$

$$\text{где } A_m = b/(\mu_m \pi), \quad B_m = b/(\mu_m \pi), \quad k_0^2 = k^2 - (\pi\mu_0/b)^2.$$

Решение функционального уравнения Винера — Хопфа будет иметь вид

$$\Phi'_+(b) = -(2\pi)^{-1/2}k\eta \frac{K_-(-k)K_+(\alpha)}{\alpha+k}.$$

При $z \rightarrow -\infty$ полный потенциал $\varphi_t \sim \exp(ikz) + R \exp(-ikz)$, где коэффициент отражения R равен

$$R = -ik\eta(4k^2b)^{-1} K_-(-k)K_+(k) =$$

$$= \frac{k - k_0}{k + k_0} \prod_{m=1}^{\infty} [(1 - k^2 A_m^2)^{1/2} - ikA_m]^2 [(1 - k^2 B_m^2)^{1/2} - ikB_m]^{-2}.$$

Подробное решение этой задачи методом интегрального уравнения дано Хейнсом и Фешбахом [1]; см. также книгу Морса и Фешбаха [1], т. 2, стр. 484.

Задача о бесконечном волноводе, в котором параллельно стенкам на одинаковом расстоянии от них расположена полубесконечная поглощающая полоса [§ 3.5, (3.86)], сводится к рассмотренной задаче, хотя в данном случае обычно интересен случай малых $\delta = \eta^{-1}$, а не малых η . Сходную задачу о поглощающей полосе рассмотрел Пападопулос [1], однако решение полученного им функционального уравнения Винера — Хопфа [уравнение (17) в работе Пападопулоса] излишне усложнено.

3.14. Рассмотреть задачу о распространении звука по круглому волноводу $0 \leq \rho \leq a$, $-\infty < z < \infty$, на границе которого при $\rho = a$, $z < 0$ задано условие $\partial\varphi_t/\partial\rho = 0$, а при $\rho = a$, $z > 0$ условие $\partial\varphi_t/\partial\rho = ik\eta\varphi_t$; падающую волну взять в виде $\varphi_t = \exp(ikz)$.

3.15. Целесообразно дать сводку некоторых стандартных обозначений для граничных условий импедансного типа. Для звуковых волн, падающих на поверхность из частично поглощающего материала, имеем $\partial\varphi/\partial n = i\delta\varphi$, где $\text{Re } \delta$ положительна, а $\text{Im } \delta$ может быть как положительной, так и отрицательной (Морс и Фешбах [1], т. 2, стр. 484). За положительное направление нормали взято направление *внутрь* материала. Для электромагнитных волн в общем случае имеем условие $\partial\varphi/\partial n = i\delta_1\varphi$ для E -поляризации и $\varphi = -i\delta_2 \partial\varphi/\partial n$ для H -поляризации, где δ_1 и δ_2 — постоянные с положительными вещественными и мнимыми частями (терминология указана в задаче 2.11; ссылки на литературу даны в работе Синьора [1]). Если зависимость от времени выражается множителем $\exp(+i\omega t)$, то следует везде изменить знак перед i .

3.16. Хейнс [2—4], а также Уэйц и Келлер [1] рассмотрели различные случаи отражения волн на воде в бесконечном бассейне конечной глубины $-b \leq y \leq 0$, $-\infty < x < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Функция φ удовлетворяет уравнению $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} - k^2\varphi = 0$ с вещественным k . Типичные задачи таковы:

- 1) $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = -b$, $-\infty < x < \infty$,
 $\partial\varphi/\partial y = p\varphi$ при $y = 0$, $x \leq 0$,
 $\partial\varphi/\partial y = q\varphi$ при $y = 0$, $x > 0$;
- 2) $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = -b$, $-\infty < x < \infty$,
 $\partial\varphi/\partial y = p\varphi$ при $y = 0$, $-\infty < x < \infty$,
 $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = -a$, $0 \leq x < \infty$ ($-b < -a < 0$).

В обоих случаях требуется факторизация функции

$$\mu \text{sh } \mu a - A \text{ch } \mu a, \quad \mu = (\alpha^2 + k^2)^{1/2},$$

которую можно осуществить методом бесконечных произведений.

3.17. *Задачи для уравнения Лапласа.* Применим метод Винера — Хопфа для решения уравнения $\nabla^2\varphi = 0$. Двумерные задачи, которые будут рассмотрены ниже, можно также решить с помощью конформных отображений. Однако метод Винера — Хопфа полезно рассмотреть здесь по двум причинам. Во-первых, этот метод можно затем применить для задач с осевой симметрией, во-вторых, этот метод можно применить к более сложным уравнениям, которые не так легко решить с помощью конформных отображений.

1. В некоторых случаях можно непосредственно решать уравнение Лапласа, а не рассматривать предельный случай уравнения $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$ при $k \rightarrow 0$. Например, рассмотрим решение уравнения $\nabla^2\varphi = 0$ в области $0 \leq y \leq b$, $-\infty < x < \infty$, удовлетворяющее условиям $\varphi = 0$ при $y = b$, $-\infty < z < \infty$, $\varphi = V$ при $y = 0$, $0 < z < \infty$, $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 0$, $-\infty < z < 0$. Для того чтобы применить метод Винера — Хопфа, заменим $\varphi = V$ на

$$\varphi = V \exp(-\varepsilon z) \quad \text{при } y = 0, \quad 0 < z < \infty \quad (\varepsilon > 0)$$

и в окончательном результате устремим ε к 0. Решением функционального уравнения по методу Винера — Хопфа будет

$$\varphi'_+(a) = -(2\pi)^{-1/2} V b^{-1} K_-(-i\varepsilon) K_+(a) (\varepsilon - ia)^{-1},$$

где

$$K(a) = ab \text{cth } ab = K_+(a) K_-(a).$$

Факторизация этой функции была рассмотрена в задаче 1.11. Контурный интеграл в выражении для φ можно вычислить с помощью вычетов. Для $z > 0$ получим

$$\varphi = V \left[\frac{\sin \varepsilon (b-y)}{\sin \varepsilon b} e^{-\varepsilon z} + K_- (-i\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin (n\pi/b) (b-y)}{K_- (-n\pi i/b) (n\pi - \varepsilon b)} e^{-n\pi z/b} \right].$$

Осуществив предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем

$$\varphi = V \left[1 - \frac{y}{b} - \frac{1}{\pi^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n\Gamma(n+1)} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-n\pi z/b} \right], \quad z > 0.$$

2. Рассмотрим решение уравнения $\nabla^2 \varphi_t = 0$ в области $0 \leq y \leq b$, $-\infty < z < \infty$, удовлетворяющее при $y = b$, $-\infty < z < \infty$ и при $y = 0$, $0 < z < \infty$ условию $\partial \varphi_t / \partial y = 0$, а при $y = 0$, $-\infty < z < 0$ — условию $\varphi_t = 0$, и такое, что $\varphi_t \rightarrow Az + B$ при $z \rightarrow +\infty$, где A задано, а B надо определить. Сначала решим соответствующую задачу для уравнения $\nabla^2 \varphi_t + k^2 \varphi_t = 0$, причем $\varphi_t = \varphi_l + \varphi$, где $\varphi_l = C \exp(-ikz)$ — волна, набегающая из $z = +\infty$. Применяя метод Винера — Хопфа, находим

$$\varphi_t = C e^{-ikz} - \frac{2kbC}{2\pi i K_+(k)} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} \frac{\operatorname{ch} \gamma (b-y)}{K_-(\alpha) \gamma \operatorname{sh} \gamma b} e^{-\alpha z} d\alpha.$$

Если теперь $k \rightarrow 0$, то $\gamma \rightarrow |\alpha|$ и интеграл расходится. Для того чтобы найти правильный путь для перехода к решению уравнения Лапласа, вычислим интеграл по теореме о вычетах. Для $z > 0$ получим

$$\varphi_t = C e^{-ikz} - \frac{C}{[K_+(k)]^2} e^{ikz} + \frac{2ikC}{K_+(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi y/b)}{\gamma_n K_-(i\gamma_n)} e^{-\gamma_n z},$$

где $\gamma_n = [(n\pi/b)^2 - k^2]^{1/2}$. Положим $2kC = iA$ и перейдем к пределу одновременно при $k \rightarrow 0$ и $C \rightarrow \infty$ так, чтобы величина A оставалась постоянной. Тогда, учитывая формулу (б) из задачи 3.6, получаем для $z > 0$

$$\varphi_t = A \left[z + \frac{2b}{\pi} \ln 2 - \frac{b}{\pi^{1/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{n\Gamma(n+1)} \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{-n\pi z/b} \right].$$

3. Рассмотрим предельный случай при $k \rightarrow 0$ задачи о распространении волн в волноводе с поперечной перегородкой (§ 3.6). Как и в пункте 2, затруднения возникают только с членами, представляющими распространяющиеся волны. Из формул (3.99) и (3.100) мы получаем

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \frac{1}{2} \{ 1 + [K_+(k)]^{-2} \} e^{ikz} + ik \{ \dots \} && \text{при } z \geq 0, \\ \varphi_t &= e^{ikz} + \frac{1}{2} \{ 1 - [K_+(k)]^{-2} \} e^{-ikz} + ik \{ \dots \} && \text{при } z \leq 0, \end{aligned}$$

где через $\{ \dots \}$ обозначены экспоненциально убывающие члены. Умножим эти выражения на C , введем обозначение $ikC = A$ и перейдем к пределу

одновременно при $k \rightarrow 0$ и $C \rightarrow \infty$ так, чтобы величина A оставалась постоянной. Используя формулу (б) из задачи 3.6, находим

$$\begin{aligned} \varphi_t &= (ik)^{-1} A \cos kz + A \left[k^{-1} \sin kz + \frac{2b}{\pi} \ln 2 \cos kz \right] + \\ &\quad + A \{ \dots \} + O(k) \quad \text{при } z \geq 0, \\ \varphi_t &= (ik)^{-1} A \cos kz + A \left[k^{-1} \sin kz - \frac{2b}{\pi} \ln 2 \cos kz \right] + \\ &\quad + A \{ \dots \} + O(k) \quad \text{при } z \leq 0. \end{aligned}$$

Первый член при $k \rightarrow 0$ неограниченно возрастает. Однако если вычесть функцию $(ik)^{-1} A \cos kz$ (которая удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ и заданным в задаче граничным условиям при $y = \pm b, z = 0$), то получается решение с требуемым поведением на бесконечности, а именно

$$\varphi_t = A \left(z \pm \frac{2b}{\pi} \ln 2 + \{ \dots \} \right), \quad z \geq 0.$$

4. Найти решение уравнения Лапласа в области $0 \leq \rho \leq a, -\infty < z < \infty$, удовлетворяющее граничным условиям $\varphi = 0$ при $\rho = a, z < 0$ и $\partial \varphi / \partial \rho = 0$ при $\rho = a, z > 0$, которое при $z \rightarrow +\infty$ имеет асимптотику $\varphi \rightarrow Az + B$, где A задано, а B надо определить.

5. Решить уравнение Лапласа в области $0 \leq \rho \leq a, -\infty < z < \infty$ при граничном условии $\varphi = 0$ на границе $\rho = a, -\infty < z < \infty$ и при условии, что на полубесконечном проводящем цилиндре $\rho = b < a, 0 < z < \infty$ задан постоянный потенциал V .

6. Рассмотрим двумерную задачу, в которой в статическом случае потенциал имеет на бесконечности логарифмическое поведение, а именно рассмотрим задачу об излучении из двух полуплоскостей $y = \pm b, x \leq 0$, на которых задано граничное условие $\partial \varphi_t / \partial y = 0$ [см. § 3.3, формулы (3.34)]. Предположим для определенности, что

$$\varphi_t = B \left[e^{ikx} + R e^{-ikx} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) e^{\gamma_n x} \right] \quad \text{при } |y| < b, x < 0, \quad (a)$$

$$\varphi_t = B \int_{-\infty + ia}^{\infty + ia} f(\alpha) e^{-i\alpha x - \gamma |y|} d\alpha \quad \text{при } |y| > b,$$

$$\varphi_t \sim B (2k\pi)^{1/2} e^{-i\pi/4} r^{-1/2} e^{ikr} f(-k \cos \theta) \sin \theta \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (б)$$

причем при выводе последнего выражения использовано асимптотическое разложение (1.71) для функции (1.56). В частных случаях для $k \rightarrow 0$ получим

$$R = -1 + ik(p \ln k + q) + O(k^2), \quad R_n = ik T_n + O(k^2), \quad (в)$$

$$f(-k \cos \theta) \sin \theta = f_0 + O(k), \quad (г)$$

где f_0 не зависит от θ . Например, согласно формулам (3.34), (3.44), (3.45), получим

$$f_0 = \frac{b}{\pi}, \quad R = -1 - \frac{2ikb}{\pi} \left[1 - C + \ln \frac{2\pi}{bk} + \frac{1}{2} \pi i \right], \quad (д)$$

где $C = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Если в формулах (а) и (б) положить $2ikB = A$, перейти к пределу при $k \rightarrow 0, B \rightarrow \infty$ так, чтобы величина A

оставалась постоянной, и учесть соотношения (в) и (г), то для малых k получаются следующие результаты:

$$\varphi_t = A \left[x + \frac{1}{2} (p \ln k + q) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} T_n \cos \frac{n\pi y}{b} e^{n\pi x/b} + O(k^2) \right]$$

при $|y| < b, x < 0,$ (е)

$$\varphi_t \sim -i A f_0 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} (kr)^{-1/2} e^{ikr} e^{-i\pi/4} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Поле в дальней зоне можно выразить с помощью функций Ганкеля (см. задачу 121)

$$\varphi_t \sim -i A f_0 \left(\frac{\pi}{2} \right) H_0^{(1)}(kr) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Зафиксируем теперь некоторое большое r и перейдем к пределу при $k \rightarrow 0$. Используя асимптотику для функции $H_0^{(1)}(kr)$ при малых kr , получаем

$$\varphi_t \sim A f_0 \left\{ \ln \left(\frac{1}{2} kr \right) + C - \frac{1}{2} \pi i \right\}. \quad (\text{ж})$$

Скорость потока при $r \rightarrow \infty$ равна $\partial \varphi_t / \partial r = A f_0 / r$. Скорость потока при $x \rightarrow -\infty$ внутри волновода равна $\partial \varphi_t / \partial x = A$. Поэтому из уравнения неразрывности следует, что $\pi f_0 = b$. Если потребовать, чтобы при $r \rightarrow \infty$ было $\varphi_t \sim (Ab/\pi) \ln r + o(1)$, то из выражений (е) и (ж) следует вычесть функцию

$$\frac{Ab}{\pi} \left(\ln \frac{1}{2} k + C - \frac{1}{2} \pi i \right).$$

Приравняв нулю коэффициент при $\ln k$ в выражении, получающемся после вычитания указанной функции из выражения (е), находим $p = 2f_0 = (2b/\pi)$. Таким образом, окончательно имеем

$$\varphi_t \rightarrow A \left\{ x + \left[\frac{1}{2} q + \frac{b}{\pi} \left(\ln 2 - C + \frac{1}{2} \pi i \right) \right] \right\} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, |y| < b.$$

В частности, если выполняются равенства (д), то

$$\varphi_t \sim \frac{Ab}{\pi} \ln r \quad \text{при } r \rightarrow \infty \text{ вне волновода,}$$

$$\varphi_t \rightarrow A \left\{ x - \frac{b}{\pi} \left[1 + \ln \left(\frac{\pi}{b} \right) \right] \right\} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, |y| < b.$$

7. В отличие от двумерных задач, рассмотренных в пункте 6, переход $k \rightarrow 0$ в задачах с осевой симметрией в бесконечном пространстве не вызывает затруднений. Например, в задаче об излучении из круглого волновода (§ 3.4) мы используем формулы (3.64) — (3.67), умножим φ_t на C , положим $ikCa^2 = 2A$ и перейдем к пределу при $k \rightarrow 0$; тогда мы получим

$$\varphi_t \sim -\frac{A}{r} \quad \text{при } r \rightarrow \infty \text{ вне волновода,}$$

$$\varphi_t \rightarrow \frac{4A}{a^2} (z - l) \quad \text{при } z \rightarrow -\infty \text{ внутри волновода,}$$

где l определяется по формуле (3.66) при $k = 0$, т. е.

$$\frac{l}{a} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} u^{-2} \ln \left[\frac{1}{2} K_1(u) I_1(u) \right] du = 0,6133 \dots$$

3.18. Слагаемые, стремящиеся при $k \rightarrow 0$ к бесконечности, которые приходилось вычитать из решений в задаче 3.17, б, никак не связаны с методом решения, т. е. с методом Винера — Хопфа. Это обычное явление при переходе в двумерных задачах от решения стационарного волнового уравнения к решению уравнения Лапласа. Например, решение стационарного волнового уравнения, представляющее поле линейного источника, расположенного в начале координат, для двумерной задачи равно

$$\varphi = \pi i H_0^{(1)}(kr) \approx \pi i - 2 \ln \left(\frac{1}{2} kr \right) - 2C \quad \text{при } k \rightarrow 0, \quad (a)$$

где C — постоянная Эйлера, а $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$. Соответствующее решение уравнения Лапласа для линейного источника равно

$$\varphi = -2 \ln r. \quad (б)$$

Для того чтобы перейти при $k \rightarrow 0$ от решения (а) к решению (б), надо вычесть из первого решения $\pi i - 2 \ln \frac{1}{2} k - 2C$, что соответствует процедуре, примененной в задаче 3.17, б. Для обхода подобных трудностей иногда удобно оперировать не с потенциалом φ , а с его производными $u = \partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\varphi/\partial y$.

3.19. *Бигармоническое уравнение.* 1. Рассмотрим задачу об определении напряжения в двумерной упругой полосе $-b \leq y \leq b$, $-\infty < x < \infty$ при граничных условиях

$$\sigma_{xy} = 0, \quad y = \pm b, \quad -\infty < x < \infty; \quad (a)$$

$$\sigma_{yy} = -p, \quad -\infty < x < 0, \quad v = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad y = \pm b. \quad (б)$$

Введем функцию напряжения Эри φ , такую, что

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y};$$

эта функция удовлетворяет уравнению $\nabla^4 \varphi = 0$. Применяя преобразование Фурье по переменной x и учитывая симметрию задачи и граничное условие (а), получаем

$$\Phi(\alpha, y) = B(\alpha) [\alpha y \operatorname{sh} \alpha y - (1 + ab \operatorname{cth} ab) \operatorname{ch} \alpha y]$$

Применяя преобразование Фурье по переменной x также к соотношениям, связывающим напряжение и деформацию, найдем, что преобразование V можно выразить через преобразование функции φ следующим образом:

$$\alpha^2 EV(\alpha) = (1 - \nu^2) \frac{d^3 \Phi(y)}{dy^3} + \alpha^2 (\nu^2 - \nu - 2) \frac{d\Phi(y)}{dy},$$

где E и ν постоянные. Положив $\sigma_{yy} = -p \exp(\varepsilon x)$ при $y = \pm b$, $-\infty < x < 0$, получим функциональное уравнение Винера — Хопфа:

$$F_+(x) + \frac{P}{(2\pi)^{1/2} (\varepsilon + i\alpha)} = \frac{\alpha (\operatorname{sh} ab \operatorname{ch} ab + ab)}{2 \operatorname{sh}^2 ab} G_-(x),$$

где $F_+(\alpha)$ — преобразование Фурье функции σ_{yy} на полуоси $(0, \infty)$, а

$$G_-(\alpha) = E(1 - \nu^2)^{-1} V_-(\alpha).$$

Функция, которую надо представить в виде $K_+(\alpha)K_-(\alpha)$, не имеет точек ветвления, так что можно применить метод факторизации с помощью бесконечных произведений, хотя нули числителя являются комплексными числами (ср. с приближенным методом из § 4.5). Для потенциала ψ получается выражение в виде контурного интеграла, который можно вычислить с помощью вычетов. В окончательном результате надо положить $\epsilon \rightarrow 0$. Аналогичный пример рассмотрел Койтер [2].

2. Рассмотрим задачу о течении вязкой жидкости в области $-b \leq y \leq b$, $-\infty < x < \infty$ около полубесконечной пластины $y = 0$, $0 < x < \infty$. Составляющие скорости можно выразить через функцию тока ψ_t , которая удовлетворяет бигармоническому уравнению; именно $u = -\partial\psi_t/\partial y$, $v = \partial\psi_t/\partial x$. Положим $\psi_t = \psi_t + \psi$, где

$$\psi_t = \frac{3}{2} B \left[(y/b) - \frac{1}{3} (y/b)^3 \right]$$

и $\psi_t = 0$ при $y = 0$, $\psi_t = B$ при $y = b$. Тогда функция ψ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\psi = 0 \text{ при } y = 0, \quad \psi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = b, \quad -\infty < z < \infty.$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < z < 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{3}{2} \left(\frac{B}{b} \right), \quad 0 < z < \infty \text{ при } y = 0.$$

Задачу можно решить методом Винера — Хопфа, причем требуется факторизовать функцию

$$K(\alpha) = \alpha (\operatorname{sh} 2\alpha - 2\alpha) (\operatorname{sh}^2\alpha - \alpha^2)^{-1}.$$

Приближенное решение этой задачи и двух аналогичных ей задач об изгибе пластин дано Койтером [1].

3.20. *Сверхзвуковая струя в дозвуковом потоке.* [Возможность применения к этой задаче метода Винера — Хопфа была указана проф. Паком (Королевский научно-технологический колледж, Глазго), а изложенный ниже анализ проведен совместно с Ленноксом (колледж Хериот — Уатт, Эдинбург). Эта задача без применения метода Винера — Хопфа рассмотрена в статье Бай Ши-и [Pai S. I., Supersonic flow of a two-dimensional jet, *J. Aeronaut. Sci.*, 19 (1952), 61—65] и в заметке Кланкера и Хардера Klunker E. B., Harder K. C.) к этой статье (стр. 427 в том же выпуске)] Рассмотрим двумерную сверхзвуковую струю в области $-b \leq y \leq b$, $-\infty < x < \infty$, движущуюся в дозвуковом потоке, занимающем область $|y| > b$. Предположим, что струя испускается из пространства между жесткими стенками $y = \pm b$, $-\infty < x < 0$ и взаимодействует с окружающим дозвуковым потоком на полуплоскостях $y = \pm b$, $x > 0$. На этих полуплоскостях должны выполняться граничные условия: $\partial\varphi/\partial y$ должно быть непрерывно, а давление $\partial\varphi/\partial x$ разрывно. Точнее, предположим, что

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{y=b+0} - m \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)_{y=b-0} = \delta e^{-\epsilon x}, \quad x > 0,$$

где m и δ — постоянные, а ϵ — положительная постоянная, которую в окончательном результате мы устремим к нулю. В области $-b \leq y \leq b$ потенциал удовлетворяет уравнению $\varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$, а в области $|y| > b$ сначала положим, что потенциал удовлетворяет уравнению $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2\varphi = 0$ и

в окончательном результате устремим $k \rightarrow 0$. Чтобы обойти трудности, связанные с логарифмическим поведением потенциала на бесконечности, будем рассматривать составляющие скорости $u = \partial\varphi/\partial x$, $v = \partial\varphi/\partial y$ и соответственно их преобразования Фурье U , V по переменной x . Имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{т. е.} \quad V = \frac{i}{\alpha} \frac{dU}{dy}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_+(a, y) + U_-(a, y) &= Ae^{-\gamma y}, & V_+(a, y) + V_-(a, y) &= -i\gamma\alpha^{-1}Ae^{-\gamma y} \\ & & & \text{при } y \geq b; \\ U_+(a, y) + U_-(a, y) &= C \cos \alpha y, & V_+(a, y) + V_-(a, y) &= -iC \sin \alpha y \\ & & & \text{при } 0 \leq y \leq b, \end{aligned}$$

где $\gamma = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$. Из граничных условий находим

$$\begin{aligned} V_-(a, b+0) = V_-(a, b-0) = 0, & \quad V_+(a, b+0) = V_+(a, b-0), \\ U_+(a, b+0) - mU_+(a, b-0) &= \delta(\varepsilon - i\alpha)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда находим функциональное уравнение Винера — Хопфа

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon - i\alpha)^{-1} + [U_-(a, b+0) - mU_-(a, b-0)] = \\ = i(\alpha\gamma^{-1} - m \operatorname{ctg} ab) V_+(a, b). \end{aligned}$$

При $k \rightarrow 0$ получается типичный при переходе к уравнению Лапласа результат $(\alpha/\gamma) \rightarrow (\alpha/|\alpha|)$.

На этом мы остановимся. Применив преобразование Фурье по переменной x , читатель может показать, что полученное Кланкером и Хардером в указанной выше работе интегральное уравнение

$$v(x) + v(x+2p) = -\frac{q}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{v(\xi)}{x-\xi} - \frac{v(\xi)}{x+2p-\xi} \right] d\xi, \quad x \geq 0,$$

можно свести к написанному выше функциональному уравнению Винера — Хопфа при $\delta = 0$.

Если дополнительно предположить, что при $y = \pm B$, $B > b$ имеются жесткие стенки, на которых $\partial\varphi/\partial y = v = 0$, то приведенное выше функциональное уравнение Винера — Хопфа примет вид

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon - i\alpha)^{-1} + [U_-(a, b+0) - mU_-(a, b-0)] = \\ = i(\alpha\gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma B - m \operatorname{ctg} ab) V_+(a, b). \end{aligned}$$

При конечном B функция, подлежащая факторизации, не имеет точек ветвления и можно применить метод бесконечных произведений.

По-видимому, аналогично можно рассмотреть плоские задачи о дозвуковой струе в дозвуковом или сверхзвуковом потоке, а также рассмотреть случай осесимметричных струй.

ОБОБЩЕНИЯ МЕТОДА И ГРАНИЦЫ ЕГО ПРИМЕНИМОСТИ

§ 4.1. Введение

В предыдущих двух главах мы занимались в основном решением конкретных задач. В этой главе мы рассмотрим несколько более общих вопросов.

В § 4.2 будет показано, что функциональное уравнение в комплексной плоскости, которое мы решали методом Винера—Хопфа, является частным случаем задачи Гильберта. В § 4.3 мы выясним, какие задачи со смешанными граничными условиями в произвольной координатной системе, допускающей разделение переменных, целесообразно сводить к задаче Гильберта (или решать методом Винера—Хопфа).

В § 4.4 мы рассмотрим обобщение основного уравнения Винера—Хопфа, а именно систему функциональных уравнений Винера—Хопфа для нескольких неизвестных функций.

При решении задач методом Винера—Хопфа главная трудность часто бывает связана с проведением основной факторизации $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$. В § 4.5 рассматриваются случаи, когда можно подобрать функцию $K^*(\alpha)$, для которой факторизация известна и которая приближенно равна функции $K(\alpha)$ в полосе, где имеет место уравнение Винера—Хопфа.

В § 4.6 будет показано, что ряд задач для уравнения Лапласа в сферических координатах после применения преобразования Меллина можно решить методом Винера—Хопфа.

Различные вопросы, связанные с решением систем линейных алгебраических уравнений, будут рассмотрены в задачах 4.10—4.13 в конце главы.

§ 4.2. Задача Гильберта¹⁾

Основное функциональное уравнение, которое рассматривается в методе Винера—Хопфа, имеет вид

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0, \quad (4.1)$$

¹⁾ Эту задачу называют также задачей Римана или задачей Римана—Гильберта.

где A , B и C — известные аналитические функции, $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$ не известны и уравнение справедливо в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ комплексной плоскости α . В этом параграфе мы покажем, что решение уравнения (4.1) можно рассматривать как решение частного случая следующей задачи Гильберта: требуется найти систему аналитических функций, у которых граничные значения на заданной системе гладких контуров и дуг удовлетворяют уравнению

$$a(t)\Phi_+(t) + b(t)\Psi_-(t) + c(t) = 0, \quad (4.2)$$

где t означает комплексное число, соответствующее произвольной точке контура. В этом уравнении $\Phi_+(t)$ и $\Psi_-(t)$ являются (неизвестными) граничными значениями подлежащих определению аналитических функций $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$. Функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ заданы и, вообще говоря, могут не быть граничными значениями аналитических функций на заданных контурах.

Сначала сформулируем более точно неоднородную задачу Гильберта (см. книгу Н. И. Мусхелишвили [1], стр. 86, 92, 235). Рассмотрим комплексную плоскость α . Пусть S^+ означает связную область, ограниченную гладкими контурами и дугами C_0, C_1, \dots, C_p , не пересекающимися друг друга, причем контур C_0 охватывает все остальные контуры и дуги (см. рис. 10). Контур C_0 может отсутствовать; тогда область S^+ неограничена. Вообще говоря, контуры и дуги могут уходить в бесконечность, в этом случае сформулированные ниже утверждения требуют некоторого видоизменения. Обозначим через C совокупность контуров и дуг C_0, C_1, \dots, C_p . Через S^- обозначим часть плоскости, дополнительную к $S^+ + C$, а через S' — часть плоскости, не принадлежащую к C (т. е. $S' = S^+ + S^-$). Пусть $E(\alpha)$ — функция комплексного переменного α , обладающая следующими свойствами.

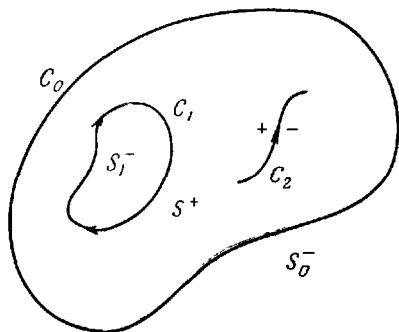


Рис. 10.

1. $E(\alpha)$ регулярна в S' и $E(\alpha) \sim \alpha^m$ при $\alpha \rightarrow \infty$, где m — целое число.

2. $E(\alpha)$ стремится к конечному пределу, когда α стремится к любой точке C , за исключением концов дуг с любой стороны C .

3. В окрестности концевой точки любой дуги, скажем точки $\alpha = d$, должно быть

$$|E(\alpha)| < A|\alpha - d|^{-\mu}, \quad 0 < \mu < 1.$$

На каждой части C выберем положительную и отрицательную сторону. Для дуг этот выбор произволен. Для контуров положительной

стороной назовем сторону, обращенную к S^+ . Для того чтобы подчеркнуть, что точка α находится на C , будем писать в этом случае t вместо α . Обозначим через $E^+(t)$ и $E^-(t)$ граничные значения функции $E(\alpha)$, когда α стремится к точке t на C с положительной и отрицательной стороны соответственно. Неоднородная задача Гильберта формулируется так: требуется найти функцию $E(\alpha)$, удовлетворяющую перечисленным выше условиям, и такую, что

$$E^+(t) = G(t)E^-(t) + g(t), \quad (4.3)$$

где $G(t)$ и $g(t)$ заданные на C функции, причем функция $G(t)$ не обращается на C в нуль и в любой точке C удовлетворяет условию Гельдера

$$|G(t_2) - G(t_1)| \leq A |t_2 - t_1|^\nu,$$

где A и ν — положительные постоянные.

Покажем, что решение функционального уравнения Винера — Хопфа (4.1) можно свести к решению задачи Гильберта. Сделаем относительно уравнения (4.1) следующие предположения:

а) Уравнение справедливо в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$. В этой полосе функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ суть регулярные функции α .

б) $\Phi_+(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$ и $|\Phi_+| < C_1 |\alpha|^p$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости. $\Psi_-(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau < \tau_+$ и $|\Psi_-| < C_2 |\alpha|^q$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости.

Выберем некоторое τ_1 , $\tau_- < \tau_1 < \tau_+$ так, чтобы на прямой $\tau = \tau_1$, $-\infty < \sigma < \infty$ не было нулей функций $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$. Назовем эту прямую контуром C , а точки, лежащие на ней, будем обозначать через t . Тогда уравнение (4.1) на C принимает следующий вид:

$$A(t)\Phi_+(t) + B(t)\Psi_-(t) + C(t) = 0; \quad (4.4)$$

здесь $\Phi_+(t)$ обозначает предельные значения при $\alpha \rightarrow t$ аналитической функции $\Phi_+(\alpha)$, регулярной при $\tau \geq \tau_1$; аналогичный смысл имеет $\Psi_-(t)$. Функции $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны, дифференцируемы и не обращаются в нуль на C .

Таким образом, мы пришли к частному случаю задачи Гильберта. Функции $\Phi_+(\alpha)$ и $\Psi_-(\alpha)$ в совокупности позволяют построить функцию $E(\alpha)$, определенную выше. Контур C , упоминаемый в общей формулировке задачи Гильберта, имеет в данном случае очень простой вид — это бесконечная прямая, параллельная вещественной оси. Сопоставляя задачи Винера — Хопфа и Гильберта, следует при рассмотрении условий на бесконечности соблюдать известную осторожность. Применим некоторое преобразование, скажем $\alpha = (\omega - a)^{-1}$, переводящее бесконечно удаленную точку в конечную точку плоскости, в данном случае в точку $\omega = a$. В задаче Винера — Хопфа в плоскости ω можно провести контур через точку $\omega = a$, причем при $\omega \rightarrow a$ с одной стороны контура будет $|\Phi_+| < C_1 |\omega - a|^{-p}$, а с дру-

гой стороны при $w \rightarrow a$ будет $|\Psi_-| < C_2 |w - a|^{-q}$. Наоборот, в рассмотренной в начале этого параграфа задаче Гильберта нет контура, проходящего через точку $w = a$ в плоскости w , но функция $E(\alpha)$ имеет полюс порядка m в этой точке.

Однако главное различие между уравнениями (4.3) и (4.4) состоит в том, что в уравнении (4.3) функция $G(t)$ должна удовлетворять лишь условию Гёльдера, а в уравнении (4.4) на функции $A(t)$ и $B(t)$ накладываются гораздо большие ограничения. В уравнении (4.4) $A(t)$ и $B(t)$ являются граничными значениями некоторых функций, регулярных в полосе плоскости α , что и является основой метода Винера — Хопфа решения исходного уравнения (4.1). В уравнении (4.3) функция $G(t)$, вообще говоря, не совпадает со значением какой-либо аналитической функции на S . Если $G(t)$ из уравнения (4.3) совпадает со значениями аналитической функции, регулярной в полосе, содержащей контур S , то задача Гильберта может быть решена методом Винера — Хопфа. В общем случае необходимо применять иной метод.

Здесь мы кратко рассмотрим решение задачи Гильберта для контуров и покажем его связь с методом Винера — Хопфа. Подробное и строгое рассмотрение вопроса читатель найдет в книге Н. И. Мусхелишвили [1].

Основная трудность при решении уравнения (4.3) состоит в определении надлежащих функций $K^+(t)$ и $K^-(t)$, таких, что

$$K^+(t)G(t) = K^-(t), \quad (4.5)$$

где $K^+(t)$ и $K^-(t)$ — предельные значения аналитических функций, регулярных в S^+ и S^- соответственно. Эту задачу Мусхелишвили назвал однородной задачей Гильберта. Первые шаги при решении этой задачи напоминают теорему из задачи 1.12. Если функция $G(t)$ обращается на каком-нибудь из замкнутых контуров C_k в нуль, то $\ln G(t)$ будет изменяться при обходе контура на величину, кратную $2\pi i$ (ср. с задачей 1.5).^{*} Образует функцию $G_0(t) = H^-(t)G(t)/H^+(t)$, где $H^\pm(t)$ — предельные значения функций $H^\pm(\alpha)$, регулярных соответственно в S^\pm , выбранных так, чтобы функция $\ln G_0(t)$ была на S однозначна и удовлетворяла условию Гёльдера. Явный вид функций $H^\pm(\alpha)$ дан в книге Н. И. Мусхелишвили [1], стр. 92. Введем обозначение $K_0^\pm(t) = H^\pm(t)K^\pm(t)$, в котором всюду надо брать либо верхние, либо нижние знаки. Тогда соотношение (4.5) примет вид

$$K_0^+(t)G_0(t) = K_0^-(t), \quad (4.6)$$

где $K_0^\pm(t)$ не известны, а $G_0(t)$ известна. Логарифмируя, получаем

$$\ln K_0^-(t) - \ln K_0^+(t) = \ln G_0(t). \quad (4.7)$$

Здесь нельзя, следуя методу Винера — Хопфа, применять для определения $K_0^\pm(t)$ теорему В из § 1.3. Вместо этого, следуя Мухелишвили, применим формулы Племея, которые получаются следующим образом. Пусть дана задача Гильберта для контуров. Рассмотрим интеграл

$$Q(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(s)}{s-\alpha} ds \quad (4.8)$$

для любого комплексного α , не принадлежащего C . Предположим, что функция $\varphi(s)$ удовлетворяет на C условию Гёльдера. Тогда функция $Q(\alpha)$ регулярна во всей плоскости α , за исключением C . Обозначим предельные значения $Q(\alpha)$, когда α стремится к точке t на C из S^+ , через $Q^+(t)$ и аналогично определим $Q^-(t)$. Будем обходить контур C так, чтобы область S^+ оставалась слева. Устремим в равенстве (4.8) точку α к точке t на C сначала из S^+ , а затем из S^- . Учитывая различный в обоих случаях обход особой точки при интегрировании, находим, что

$$Q^+(t) = \frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_C \frac{\varphi(s)}{s-t} ds, \quad (4.9a)$$

$$Q^-(t) = -\frac{1}{2} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_C \frac{\varphi(s)}{s-t} ds, \quad (4.9b)$$

где знак V.P. перед интегралом указывает, что интеграл берется в смысле главного значения по Коши (ср. с задачей 1.24). Это и есть формулы Племея. Вычитая равенство (4.9b) из равенства (4.9a), получаем

$$Q^+(t) - Q^-(t) = \varphi(t). \quad (4.10)$$

Таким образом, мы имеем следующую теорему. Пусть $\varphi(t)$ — функция, заданная на C и удовлетворяющая условиям Гёльдера; тогда функция $Q(\alpha)$, предельные значения которой на C удовлетворяют равенству (4.10), дается выражением (4.8). Эту теорему можно использовать для решения задачи Гильберта [уравнение (4.3)] аналогично тому, как теорема В из § 1.3 использовалась для решения функционального уравнения Винера — Хопфа. Прежде всего решим вспомогательное уравнение (4.6). В простых случаях его решение можно угадать. В общем случае применяем полученную теорему. Определим $K_0(\alpha)$ соотношением

$$\ln K_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\ln G_0(s)}{s-\alpha} ds. \quad (4.11)$$

Предельные значения интеграла при α , стремящемся к точкам на C с разных сторон C , определяют $\ln K_0^-(t)$ и $\ln K_0^+(t)$. Отсюда можно

найти $K^+(t)$ и $K^-(t)$. Обратимся теперь к уравнению (4.3). Умножив его на $K^+(t)$, получим

$$K^+(t)E^+(t) - K^-(t)E^-(t) = K^+(t)g(t).$$

Это уравнение, как и предыдущее, решается с помощью формул (4.8)—(4.10), хотя в ряде случаев решение легко угадывается. Пусть

$$K(\alpha)E(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{K^+(s)g(s)}{s-\alpha} ds. \quad (4.12)$$

Тогда $K^+(t)E^+(t)$ и $K^-(t)E^-(t)$ будут предельными значениями интеграла при α , стремящемся к C с положительной и отрицательной стороны соответственно. На этом решение уравнения (4.3) заканчивается.

Формально этот же результат получается в том случае, когда в решении, полученном методом Винера—Хопфа для уравнения в полосе конечной ширины, ширина полосы устремляется к нулю.

Отметим также, что в книге Н. И. Мухелишвили [1] решение задачи Гильберта применяется иначе, нежели в этой книге. Мухелишвили рассматривает случаи, когда решение уравнения в частных производных с двумя независимыми переменными x и y можно выразить как функцию комплексного переменного $z = x + iy$

$$\varphi(x, y) = F(z)$$

и задача Гильберта формулируется в плоскости комплексного переменного z . В этой книге рассматриваются случаи, когда решение уравнения в частных производных можно представить в виде

$$\varphi(x, y) = \int_C f(\alpha)K(x, y; \alpha) d\alpha,$$

и задача Гильберта формулируется для контура C в комплексной плоскости α .

Задача Гильберта является более общей, чем задача Винера—Хопфа, в связи со следующими тремя обстоятельствами.

(а) В задаче Гильберта уравнение должно выполняться на контуре, а не в полосе конечной ширины. Поэтому решение задачи Гильберта можно непосредственно использовать в задачах, включающих функции, у которых полоса регулярности интегральных преобразований в плоскости α вырождена в контур. Строго говоря, почти все задачи, рассмотренные в этой книге, именно такого типа. Для того чтобы полоса регулярности интегральных преобразований имела конечную ширину, мы полагали в предыдущих главах $k = k_1 + ik_2$ с конечным k_2 , но в окончательном решении устремляли k_2 к нулю,

т. е. получали решение для $k_2 = 0$, когда интегральные преобразования обычно существуют лишь на контуре. Применяя решение задачи Гильберта, можно рассмотреть непосредственно случай $k_2 = 0$.

(б) Функция $G(t)$, фигурирующая в задаче Гильберта, должна быть определена лишь на контуре и должна удовлетворять лишь условию Гельдера. Совсем не обязательно, чтобы функция $G(t)$ получалась из значений функции комплексного переменного, аналитической в некоторой полосе, содержащей контур.

(в) Задача Гильберта может решаться для любого числа контуров и дуг произвольной формы.

Мы остановились достаточно подробно на задаче Гильберта по той причине, что она почти наверное будет использована в будущих исследованиях. Однако, несмотря на общность решения задачи Гильберта, мы не будем им пользоваться в основной части этой книги. Для интегральных преобразований, связанных с рассмотренными в этой книге задачами, как правило, до сих пор применяется метод Винера—Хопфа, и поэтому мы предпочли его. Анализ в комплексной плоскости в этом методе весьма прост: линии ветвления легко определяются и сразу видно, как должны обходиться особые точки на пути интегрирования в предельном случае $k_2 \rightarrow 0$.

§ 4.3. Некоторые общие соображения

Задачи, решенные в предыдущих главах, убеждают в плодотворности метода Винера—Хопфа, особенно если учесть, что лишь немногие из них можно решить другими методами. С другой стороны, класс задач, решаемых этим методом, ограничен. До сих пор мы рассматривали в основном задачи со смешанными граничными условиями, задаваемыми на границе, состоящей из двух полубесконечных частей, причем уравнение в частных производных имело решения с разделенными переменными, содержащие множитель $\exp(iax)$, где a —комплексный параметр разделения. На частях границы $-\infty < x < 0$ и $0 < x < \infty$ задавались различные условия, содержащие φ и $d\varphi/dn$. (Случай, в котором используется преобразование Меллина, существенно не отличается от рассмотренного и может быть получен из него заменой переменной. Решение с разделенными переменными будет содержать множитель ρ^{-s} , и смешанные граничные условия будут задаваться для $0 \leq \rho < a$ и $a < \rho < \infty$.)

В идеале было бы желательно уметь решать задачи со смешанными граничными условиями, заданными на границе, состоящей из двух частей, для *любой* координаты в *любой* координатной системе, допускающей разделение переменных. В этом параграфе мы попытаемся изучить, что можно сделать в этом направлении методом Винера—Хопфа. К сожалению, обнаружится, что метод Винера—Хопфа в произвольной координатной системе не применим.

Рассмотрим сначала конкретный пример. Пусть

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 \leq y < \infty,$$

$$\varphi = 1 \quad \text{при } y = 0, \quad 0 \leq x < a, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad a < x < \infty.$$

(Соответствующей физической задачей является двумерная задача о дифракции волны, нормально падающей на полосу $y = 0, -a \leq x \leq a$.) Здесь естественно применить косинус-преобразование Фурье

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\alpha, y) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \varphi(x, y) \cos \alpha x \, dx, \\ \varphi(x, y) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha, y) \cos \alpha x \, d\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Опуская детали (см. § 5.2 и 5.6), находим, что задача сводится к решению следующего функционального уравнения, которое можно рассматривать как обобщение уравнения (4.1):

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \alpha^{-1} \sin \alpha a + \Phi_2(\alpha) = -\gamma^{-1} \Phi_1'(\alpha), \quad (4.14)$$

где

$$\Phi_1'(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \alpha x \, dx, \quad \Phi_2(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_a^{\infty} \varphi \cos \alpha x \, dx. \quad (4.15a)$$

Здесь φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ в подынтегральных выражениях берутся при $y = 0$. Функция $\Phi_1'(\alpha)$ является целой функцией α , а $\Phi_2(\alpha)$ можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi_2(\alpha) &= e^{i\alpha a} \Phi_+(\alpha) + e^{-i\alpha a} \Phi_+(-\alpha), \\ \Phi_+(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_a^{\infty} \varphi e^{i\alpha(x-a)} \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (4.15b)$$

Так как $\Phi_+(-\alpha)$ связана с $\Phi_+(\alpha)$, то уравнение (4.14) оказывается более сложного вида, чем уравнение (4.1), и не может быть точно решено методом Винера—Хопфа. При больших ka приближенное решение можно найти методом, аналогичным методу, который будет изложен в § 5.5 и 5.6.

Рассмотрим другой подход, в котором используются полярные координаты. Уравнение имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 r^2 \varphi = 0. \quad (4.16)$$

Задачи рассматриваемого типа, связанные с этим уравнением при $k = 0$, т. е. с уравнением Лапласа, могут быть решены при помощи преобразования Меллина (§ 4.6). Однако если применить преобразование Меллина к уравнению (4.16) при $k \neq 0$, то получим

$$\frac{\partial^2 \Phi(s)}{\partial \theta^2} + s^2 \Phi(s) + k^2 \Phi(s+2) = 0. \quad (4.17)$$

В этом случае причина затруднения лежит уже в самом решении с разделенными переменными, так как преобразование не соответствует дифференциальному уравнению в частных производных. Можно было бы продвинуться дальше, если было бы возможно решить уравнение (4.17), но простота этого уравнения обманчива.

Выясним, далее, существует ли такое обобщение преобразования Меллина, которое *соответствует* данному дифференциальному уравнению в частных производных. Такое обобщение существует; это — преобразование Лебедева — Конторовича (см. Эрдейи и др. [1], т. II):

$$\Phi(\mu) = \int_0^{\infty} \varphi K_{\mu}(\lambda r) \frac{dr}{r}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu \Phi(\mu) I_{\mu}(\lambda r) d\mu, \quad (4.18)$$

где $\lambda = -ik$. Применением преобразования (4.18) к уравнению (4.16) задача сводится к решению функционального уравнения, аналогичного уравнению (4.14), с той лишь разницей, что неизвестные функции теперь имеют вид (ср. с задачей 5.12)

$$\Phi_1'(\mu) = \int_0^a \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) K_{\mu}(\lambda r) \frac{dr}{r}, \quad \Phi_2(\mu) = \int_a^{\infty} \varphi K_{\mu}(\lambda r) \frac{dr}{r}, \quad (4.19)$$

причем φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ под интегралами берутся при $\theta = 0$. В этом случае функция $\Phi_2(\mu)$ является целой функцией μ , а $\Phi_1(\mu)$ можно представить в виде двух слагаемых, одно из которых содержит $\Phi_+(\mu)$, а другое содержит $\Phi_+(-\mu)$. Таким образом, опять получается функциональное уравнение, которое нельзя решить методом Винера — Хопфа. При малых ka приближенное решение можно найти методом, аналогичным методу, который будет изложен в § 5.4 (ср. с задачей 5.12).

Из этого примера видно, что если метод Винера — Хопфа не применим к задаче в одной системе координат, то он не применим и при формулировке задачи в другой системе координат; в обоих случаях получают лишь различные обобщения основного функционального уравнения (4.1), не решаемые методом Винера — Хопфа. Некоторые из этих обобщений будут рассмотрены в гл. V. Здесь мы займемся другой стороной вопроса. Рассмотрим произвольную систему координат, допускающую разделение переменных. Пусть на одной из граничных координатных поверхностей заданы смешанные

граничные условия; спрашивается, при каких условиях граничную задачу можно решить методом Винера—Хопфа. Рассмотрим этот вопрос для задачи Гильберта, а соответствующие рассуждения для метода Винера—Хопфа предоставим провести читателю. Мы ограничимся лишь формальными рассуждениями: не будем доказывать законность перемен порядков интегрирования, не будем исследовать поведение функций на бесконечности и будем считать, что пути интегрирования лежат в конечной части плоскости.

Пусть заданное уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными x, y имеет решения в разделенными переменными вида $K(t, x)L(t, y)$, где t —параметр разделения, в общем случае комплексный. Образум методом наложения новое решение этого дифференциального уравнения, а именно решение

$$\varphi = \int_C \mu(t) K(t, x) L(t, y) dt, \quad (4.20)$$

где $\mu(t)$ —произвольная функция, а C —некоторый путь интегрирования в комплексной плоскости α . Отметим с самого начала, что μ, K и L не обязаны быть аналитическими функциями t . Они должны быть определены лишь для частных значений α , именно для значений α , соответствующих точкам контура C , и, чтобы подчеркнуть это, мы обозначаем такие значения α буквой t .

Предположим, что можно выбрать K и L так, чтобы удовлетворялись все граничные условия, кроме условий на линии $y = y_0$, где должно быть

$$\varphi = f(x) \text{ при } p < x \leq b, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = g(x) \text{ при } a \leq x < p.$$

Положим

$$\chi(t) = \mu(t) L'(t, y_0), \quad K(t) = \frac{L(t, y_0)}{L'(t, y_0)},$$

где

$$L'(t, y_0) = \left[\frac{\partial L(t, y)}{\partial y} \right]_{y=y_0}.$$

Подставляя решение (4.20) в граничные условия при $y = y_0$, получаем парные интегральные уравнения

$$\int_C K(t) \chi(t) K(t, x) dt = f(x) \text{ при } p < x \leq b, \quad (4.21a)$$

$$\int_C \chi(t) K(t, x) dt = g(x) \text{ при } a \leq x < p. \quad (4.21б)$$

Далее предположим, что для [интегрального преобразования

$$\int_C K(t, x) P(t) dt = p(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (4.22a)$$

имеет место формула обращения

$$\int_a^b k(t, x) p(x) dx = P(t) \quad \text{при } t \text{ на } C. \quad (4.226)$$

Обозначим через $e(x)$ значения левой части равенства (4.21а) при $a \leq x < p$, а через $h(x)$ — значения левой части равенства (4.21б) при $p < x \leq b$. Применяя формулу обращения (4.22), получаем

$$K(t)\chi(t) = F(t) + E(t), \quad \chi(t) = G(t) + H(t) \quad \text{при } t \text{ на } C, \quad (4.23)$$

где

$$E(t) = \int_a^p k(t, x) e(x) dx, \quad H(t) = \int_p^b k(t, x) h(x) dx, \quad (4.24)$$

и аналогично определяются $F(t)$ и $G(t)$. Исключая $\chi(t)$, находим

$$\left. \begin{aligned} E(t) &= K(t)H(t) + M(t), \\ M(t) &= K(t)G(t) - F(t). \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

Здесь функции E и H неизвестны, а все остальные функции известны. Полученное уравнение формально очень похоже на уравнение (4.2) задачи Гильберта или на соответствующее уравнение (4.1) метода Винера — Хопфа.

Прежде чем переходить к анализу уравнения (4.25), покажем, что это уравнение можно получить сразу из интегральных преобразований по методу Джонса. Положим [ср. с формулами (4.22)]

$$\Phi(t, y) = \int_a^b k(t, x) \varphi(x, y) dx \quad \text{при } t \text{ на } C.$$

Применим это интегральное преобразование к уравнению в частных производных, затем решим получающееся обыкновенное дифференциальное уравнение и, наконец, подставим результат в граничные условия везде, кроме линии $y = y_0$. Так как произведение KL удовлетворяет всем граничным условиям, кроме условия при $y = y_0$, то получим

$$\Phi(t, y) = \mu(t)L(t, y),$$

где μ — произвольная функция, L известна. Вычислим $\partial\Phi/\partial y$ и положим $y = y_0$ в выражениях для Φ и $\partial\Phi/\partial y$. Подставим их в смешанные граничные условия и используем введенные выше выражения для E, F, G и H . Исключая из получившихся двух уравнений $\mu(t)$, получаем уравнение (4.25).

Перейдем к анализу уравнения (4.25). В это уравнение входят две неизвестные функции $E(t)$ и $H(t)$, но их интегральные представления (4.24) дают добавочную информацию, так что оказывается

возможным однозначно определить $e(x)$ и $h(x)$. Если попытаться применить метод Винера — Хопфа, то надо определить функции $E(\alpha)$ и $H(\alpha)$ в комплексной плоскости α следующими формулами [ср. с формулами (4.24)]:

$$E(\alpha) = \int_a^p k(\alpha, x) e(x) dx, \quad H(\alpha) = \int_p^b k(\alpha, x) h(x) dx. \quad (4.26)$$

Предположим, что путь интегрирования C (на котором $\alpha = t$) делит плоскость α на две части — S^+ и S^- . Тогда, если функция $E(\alpha)$ регулярна, например, в S^- , а функция $H(\alpha)$ регулярна в S^+ , то уравнение (4.25) можно записать в виде

$$E_-(t) = K(t) H_+(t) + M(t),$$

где $E_-(t)$ и $H_+(t)$ — (неизвестные) граничные значения аналитических функций $E_-(\alpha)$ и $H_+(\alpha)$, регулярных соответственно в S^- и S^+ . Задача заключается в определении аналитических функций $E_-(\alpha)$ и $H_+(\alpha)$, т. е. мы пришли к задаче Гильберта (4.2).

Однако наше предположение, что функция $E(\alpha)$ регулярна, например, в S^- , будет выполняться лишь в весьма частных случаях. Действительно, пусть $E(t) = E_1(t) + iE_2(t)$, где E_1 и E_2 вещественны. Хорошо известно, что задание *только* E_1 определяет функции $E_-(\alpha)$ и $E_+(\alpha)$, регулярные в S^- и S^+ , с точностью до произвольной постоянной. Это следует из того, что задание $E_1(t)$ приводит к задаче Дирихле в области S^- . Так как задача двумерная, то из решения задачи Дирихле — обозначим его через $U(\sigma, \tau)$ — можно определить сопряженную функцию $V(\sigma, \tau)$, так что $U(\sigma, \tau) + iV(\sigma, \tau)$ будет функцией $\sigma + i\tau$. Если точка (σ, τ) стремится к точке границы области S^- , то $U(\sigma, \tau)$ будет стремиться к $E_1(t)$, но $V(\sigma, \tau)$, вообще говоря, не будет стремиться к $E_2(t)$. Это означает, что при заданной $E_1(t)$ и при условии, что $E_-(\alpha)$ должна существовать, функцию $E_2(t)$ нельзя задавать произвольно.

Таким образом, функции $E(\alpha)$ и $H(\alpha)$, определенные формулами (4.26), вообще говоря, не будут функциями $E_-(\alpha)$ и $H_+(\alpha)$, регулярными соответственно в S^- и S^+ ; таким образом, необходимо подробно исследовать структуру функций $E(\alpha)$ и $H(\alpha)$. Некоторые примеры будут рассмотрены в гл. V.

Все вышесказанное является иллюстрацией следующих двух положений.

1. Любую задачу со смешанными граничными условиями, заданными на участке границы, состоящем из двух связанных частей, можно свести к функциональному уравнению типа (4.25). Эквивалентно ли полученное уравнение задаче Гильберта или нет — это зависит от

поведения интегралов (4.26), рассматриваемых как функции комплексного переменного α .

2. Если задача рассматривается как задача Гильберта, то функция $K(t)$ не обязательно совпадает с граничными значениями какой-либо аналитической функции комплексного переменного; она должна быть определена только на некотором контуре в комплексной плоскости и должна удовлетворять только условию Гёльдера. Если используется метод Винера — Хопфа, то функция $K(\alpha)$ должна быть аналитической в некоторой полосе комплексной плоскости α , хотя с общей точки зрения аналитичность функции $K(\alpha)$ несущественна.

В ряде случаев решение парных интегральных уравнений удается найти непосредственно, не сводя их к задаче Гильберта или к задаче Винера — Хопфа. Рассмотрим, например, решение следующих уравнений:

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_C A(t) e^{-itx} dt = 0 \quad \text{при } x > 0, \quad (4.27a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_C (t^2 - k^2)^{1/2} A(t) e^{-itx} dt = -ik \sin \Theta e^{-ikx \cos \Theta} \quad \text{при } x < 0, \quad (4.27b)$$

где путь интегрирования C проходит вдоль вещественной оси, обходя точку $t = -k$ сверху, а точки $t = k$ и $t = k \cos \Theta$ снизу. [См. § 2.3, формулы (2.34) и (2.35); ср. с результатами Клеммова [1], стр. 296. Отметим, что у Клеммова использован временной множитель $\exp(i\omega t)$, поэтому путь интегрирования обходит особые точки иначе.]

Предположим, что существует аналитическая функция $A(\alpha)$, граничные значения которой на C совпадают с функцией $A(t)$, удовлетворяющей интегральным уравнениям (4.27). Уже отмечалось, что существование такой функции $A(\alpha)$ отнюдь не очевидно, поэтому надо либо доказать существование $A(\alpha)$, исходя из общих соображений, разобранных выше, либо просто найти $A(\alpha)$ и затем а posteriori показать, что найденная функция удовлетворяет всем заданным условиям¹⁾. В уравнении (4.27a) замкнем путь интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в нижней полуплоскости. Тогда очевидно, что это уравнение будет удовлетворено, если

$$A(\alpha) = \Psi_-(\alpha), \quad \tau < 0, \quad (4.28)$$

где функция $\Psi_-(\alpha)$ регулярна везде ниже пути интегрирования C и имеет в этой полуплоскости алгебраический рост на бесконечности. В уравнении (4.27b) замкнем путь интегрирования полуокружностью

¹⁾ Второй способ оправдан лишь при условии, что имеет место теорема единственности. — *Прим. перев.*

бесконечно большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости. Это уравнение будет удовлетворено, если

$$A(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (\alpha^2 - k^2)^{1/2}} \frac{\Phi_+(\alpha)}{\Phi_+(k \cos \theta)} \frac{-k \sin \theta}{\alpha - k \cos \theta}. \quad (4.29)$$

Действительно, вычет в полюсе в точке $\alpha = k \cos \theta$ (которую путь интегрирования C обходит снизу) равен правой части уравнения (4.276); других полюсов или точек ветвления функция $(\alpha^2 - k^2) A(\alpha)$ нигде выше C не имеет. Предельное значение при $\tau \rightarrow -0$ функции $A(\alpha)$, определенной выражением (4.28), должно совпадать с предельным значением при $\tau \rightarrow +0$ функции $A(\alpha)$, определенной выражением (4.29). Записав $(\alpha^2 - k^2)^{1/2}$ в виде $(\alpha - k)^{1/2} (\alpha + k)^{1/2}$, нетрудно сообразить, что следует выбрать $\Phi_+(\alpha) = (\alpha + k)^{1/2}$. Таким образом, получаем

$$A(\alpha) = - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(k + k \cos \theta)^{1/2}} \frac{1}{(\alpha - k)^{1/2}} \frac{k \sin \theta}{\alpha - k \cos \theta},$$

что согласуется с результатом (2.31).

Отметим, что методы, развитые Л. А. Вайнштейном [1, 3, 4, 5], Карпом [1] и Клеммовым [1], по существу сходны с только что изложенным методом. Все эти методы сходны в том отношении, что в каждом из них отправным пунктом служат парные интегральные уравнения, полученные либо после разделения переменных, либо из интегрального уравнения, либо из физических соображений. Далее, вместо сведения к задаче Гильберта или задаче Винера — Хопфа, эти парные уравнения решаются непосредственно „функционально-теоретическими“ методами, основанными на изучении областей регулярности и особых точек подинтегральных выражений. Правые части уравнений авторы берут не в общем виде, а выписывают явно, что позволяет найти полюсы неизвестных функций, как это было сделано в разобранным примере. Полученные результаты обосновываются, в сущности, лишь а posteriori (см. работу Базера и Карпа [1]). Методы Вайнштейна, Карпа и Клеммова удобно использовать в некоторых частных случаях, когда они дают изящное решение задачи без сведения ее к задаче Гильберта или к задаче Винера — Хопфа, однако они существенно не отличаются от методов, использованных в этой книге, и мы не будем рассматривать их более детально.

§ 4.4. Системы функциональных уравнений Винера — Хопфа

В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда вместо одного функционального уравнения Винера — Хопфа (4.1) для двух неизвестных функций задана система из n уравнений, содержащая $2n$ неизвестных функций.

В большинстве примеров из гл. III фактически получалась система функциональных уравнений Винера — Хопфа с $n = 2$, но во

всех случаях, кроме одного, пара уравнений распадалась на два независимых уравнения типа Винера — Хопфа. Исключением была система (3.85а), (3.85б). Эта система имела вид

$$\Psi_1^-(\alpha) - M(\alpha)\Psi_2^-(\alpha) = [M(\alpha) + i\delta]\Phi_1^+(\alpha) + F_1(\alpha), \quad (4.30a)$$

$$\Psi_1^-(\alpha) + N(\alpha)\Psi_2^-(\alpha) = -[N(\alpha) + i\delta]\Phi_2^+(\alpha) + G(\alpha), \quad (4.30b)$$

где δ — постоянная (малая), а функции $M(\alpha)$ и $N(\alpha)$ имеют только простые полюсы и не имеют точек ветвления. В общем случае решить эту систему не удастся, точное решение можно найти, если $M(\alpha) = N(\alpha)$ или если $\delta = 0$.

В гл. III мы умышленно ограничились задачами, которые сводятся к одному функциональному уравнению Винера — Хопфа (кроме только что упомянутого случая). Легко обобщить эти задачи так, что они будут сводиться к системе из двух функциональных уравнений Винера — Хопфа. Например, рассмотрим падение плоской волны на две частично отражающие полуплоскости (ср. § 2.2). Предположим для конкретности, что волна $\exp(-ikx)$ падает на две полуплоскости $y = \pm b$, $-\infty < x < 0$, на которых должны выполняться условия

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial y} = \mp i\delta \varphi_t \quad \text{при } y = b \pm 0, \quad \frac{\partial \varphi_t}{\partial y} = \mp i\delta \varphi_t \quad \text{при } y = -b \pm 0,$$

при $-\infty < x < 0$. Из симметрии следует, что $\partial \varphi_t / \partial y = 0$ при $y = 0$. Предоставляем читателю показать, что получающаяся система функциональных уравнений Винера — Хопфа имеет вид

$$\Phi_+'(b) + \delta(\alpha - k)^{-1} = [\gamma \operatorname{th} \gamma b - i\delta] \Phi_-(b - 0) + \gamma \operatorname{th} \gamma b \Phi_+'(b),$$

$$\Phi_+'(b) - \delta(\alpha - k)^{-1} = (-\gamma + i\delta) \Phi_-(b + 0) - \gamma \Phi_+(b).$$

Эта система аналогична системе (4.30), но в данном случае функция, соответствующая функции $N(\alpha)$, имеет точки ветвления.

Аналогично, обобщениями рассмотренных в § 3.2 и 3.4 задач, сводящимися к системе функциональных уравнений Винера — Хопфа, будут: 1) задача о падении плоской волны на две параллельные сдвинутые пластины $y = b$, $-\infty < z < -h$ и $y = -b$, $-\infty < z < +h$; 2) задача о падении плоской волны на три параллельные пластины $y = 0$, $y = \pm b$, $-\infty < z < 0$; 3) задача об излучении из коаксиального волновода $a \leq \rho \leq b$, $-\infty < z < 0$.

Прежде чем переходить к общей теории, рассмотрим решение следующего функционального уравнения:

$$K(\alpha)\Phi_1^+(\alpha) + \epsilon_1 L(\alpha)\Psi_1^-(\alpha) + M(\alpha)\Psi_2^-(\alpha) = N(\alpha), \quad (4.31)$$

где ϵ_1 — параметр, введенный для удобства, что станет ясно позже. Предположим, что у функций $M(\alpha)$ и $L(\alpha)$ единственные особые точки суть полюсы, а функция $K(\alpha)$ может иметь и точки ветвления.

Как обычно, предположим, что уравнение справедливо в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ и что все функции в этой полосе регулярны и имеют заданное поведение при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Положим, что известны факторизации

$$K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha), \quad L(\alpha) = L_+(\alpha)L_-(\alpha), \quad M(\alpha) = M_+(\alpha)M_-(\alpha).$$

Разделим уравнение (4.31) на $K_-(\alpha)M_+(\alpha)$ и допустим, что

$$\frac{L(\alpha)}{M_+(\alpha)} = l_-(\alpha) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{l_s}{\alpha - \beta_s},$$

где β_s — корни функции $M_+(\alpha)$ и полюсы функции $L(\alpha)$, расположенные в нижней полуплоскости. Тогда

$$\frac{L(\alpha)}{M_+(\alpha)} \frac{\Psi_1^-(\alpha)}{K_-(\alpha)} = A_+(\alpha) + A_-(\alpha), \quad (4.32a)$$

где

$$A_+(\alpha) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{l_s}{\alpha - \beta_s} \frac{\Psi_1^-(\beta_s)}{K_-(\beta_s)}, \quad (4.32б)$$

$$A_-(\alpha) = l_-(\alpha) \frac{\Psi_1^-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{l_s}{\alpha - \beta_s} \left\{ \frac{\Psi_1^-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{\Psi_1^-(\beta_s)}{K_-(\beta_s)} \right\}. \quad (4.32в)$$

Положим, далее,

$$N(\alpha) [M_+(\alpha)K_-(\alpha)]^{-1} = G_+(\alpha) + G_-(\alpha).$$

Обычная группировка по методу Винера — Хопфа членов в уравнении (4.31) дает

$$K_+(\alpha) \Phi_1^+(\alpha) + \varepsilon_1 M_+(\alpha) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{l_s}{\alpha - \beta_s} \frac{\Psi_1^-(\beta_s)}{K_-(\beta_s)} = M_+(\alpha) G_+(\alpha). \quad (4.33)$$

Если, наряду с уравнением (4.31), задано второе уравнение вида

$$P(\alpha) \Psi_1^-(\alpha) + \varepsilon_2 Q(\alpha) \Phi_1^+(\alpha) + R(\alpha) \Phi_2^+(\alpha) = S(\alpha), \quad (4.34)$$

то точно таким же путем находим

$$P_-(\alpha) \Psi_1^-(\alpha) + \varepsilon_2 R_-(\alpha) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s}{\alpha - \theta_s} \frac{\Phi_1^+(\theta_s)}{P_+(\theta_s)} = R_-(\alpha) T_-(\alpha), \quad (4.35)$$

где

$$\frac{Q(\alpha)}{R_-(\alpha)} = q_+(\alpha) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{q_s}{\alpha - \theta_s},$$

$$S(\alpha) [R_-(\alpha)P_+(\alpha)]^{-1} = T_+(\alpha) + T_-(\alpha).$$

Следовательно, функции $\Phi_1^+(\alpha)$ и $\Psi_1^-(\alpha)$, удовлетворяющие системе функциональных уравнений Винера — Хопфа (4.31) и (4.34), даются выражениями (4.33) и (4.35), в которых постоянные $\Psi_1^-(\beta_s)$ и $\Phi_1^+(\theta_s)$ пока неизвестны. Эти постоянные соответственно удовлетворяют бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, которые получаются, если положить $\alpha = \theta_r$ в выражении (4.33) и $\alpha = \beta_r$ в выражении (4.35), $r = 1, 2, \dots$. Эти системы имеют вид

$$a_r x_r + \varepsilon_1 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{y_s}{\theta_r + \eta_s} = A_r, \quad r = 1, 2, \dots,$$

$$b_r y_r - \varepsilon_2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x_s}{\theta_s + \eta_r} = B_r, \quad r = 1, 2, \dots,$$

где

$$q_s \frac{\Phi_1^+(\theta_s)}{P_+(\theta_s)} = x_s, \quad l_s \frac{\Psi_1^-(\beta_s)}{K_-(\beta_s)} = y_s,$$

а a_r, b_r, A_r, B_r определены соответствующим образом. Кроме того, мы положили $\eta_s = -\beta_s$, так что и θ_s и η_s расположены в верхней полуплоскости. В общем случае эти алгебраические системы приходится решать численно. Если ε_1 или ε_2 мало (или если обе эти величины малы), то можно применить метод последовательных приближений.

Так как мы сделали предположение, что функции L, M, Q и R не имеют точек ветвления, то применимость изложенного метода решения системы двух функциональных уравнений Винера — Хопфа сильно ограничена. Когда метод применим, следует уравнения записать в виде, в котором ε_1 и ε_2 будут иметь наименьшие значения. Например, в случае системы (4.30) мы делим уравнение (4.30а) на $M(\alpha)$, а уравнение (4.30б) на $N(\alpha)$ и затем складываем, что дает

$$2U(\alpha)\Psi_1^-(\alpha) = i\delta V(\alpha)S^+(\alpha) + [1 + i\delta U(\alpha)]D^+(\alpha) + \frac{F(\alpha)}{M(\alpha)} + \frac{G(\alpha)}{N(\alpha)},$$

где

$$S^+(\alpha) = \Phi_1^+(\alpha) + \Phi_2^+(\alpha), \quad D^+(\alpha) = \Phi_1^+(\alpha) - \Phi_2^+(\alpha),$$

$$2U(\alpha) = [M(\alpha)]^{-1} + [N_1^*(\alpha)]^{-1}, \quad 2V(\alpha) = [M(\alpha)]^{-1} - [N(\alpha)]^{-1}.$$

Этот вид удобен при малых δ . Согласно уравнениям (4.31) и (4.34), второе уравнение должно содержать только $S^+(\alpha)$, $\Phi_1^-(\alpha)$ и $\Psi_2^-(\alpha)$ и поэтому выводится из системы (4.30) единственным способом.

Рассмотрим теперь более общую теорию. Предположим, что вместо функционального уравнения (4.1) нам задана система из n

уравнений

$$\sum_{s=1}^n A_{rs}(\alpha) \Phi_s^+(\alpha) + \sum_{s=1}^n B_{rs}(\alpha) \Psi_s^-(\alpha) + C_r(\alpha) = 0, \quad r=1, 2, \dots, n, \quad (4.36)$$

содержащая $2n$ неизвестных функций $\Phi_s^+(\alpha)$ и $\Psi_s^-(\alpha)$, регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\tau > \tau_+$, $\tau < \tau_+$, причем $\tau_- < \tau_+$. Все уравнения справедливы в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$. Эту систему уравнений можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\mathbf{A}\Phi^+ + \mathbf{B}\Psi^- + \mathbf{C} = 0, \quad (4.37)$$

где \mathbf{A} и \mathbf{B} — квадратные $(n \times n)$ матрицы, а Φ^+ , Ψ^- и \mathbf{C} — столбцовые $(n \times 1)$ матрицы. Предполагается, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} не особенные, когда α находится в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$.

Мы можем точно решить следующий частный случай матричного уравнения (4.37):

$$\mathbf{K}^+ \Phi^+ + \mathbf{K}^- \Psi^- + \mathbf{L} = 0, \quad (4.38)$$

причем предполагается, что соответствующая система уравнений справедлива в общей полосе и все элементы K_{rs}^+ и K_{rs}^- матриц \mathbf{K}^+ и \mathbf{K}^- регулярны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно. В этом случае обычным методом Винера — Хопфа можно точно решить каждое из n уравнений системы и функции Φ_s^+ и Ψ_s^- находятся решением двух систем n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

Может оказаться возможным привести систему (4.37) к виду (4.38), умножив ее на некоторую квадратную $(n \times n)$ матрицу \mathbf{D} с элементами, зависящими от α (т. е. составив линейные комбинации уравнений, входящих в систему (4.37), с соответственно подобранными коэффициентами, зависящими от α). Уравнение (4.37) после умножения на \mathbf{D} примет вид

$$\mathbf{D}\mathbf{A}\Phi^+ + \mathbf{D}\mathbf{B}\Psi^- + \mathbf{D}\mathbf{C} = 0;$$

сравнивая его с уравнением (4.38), видим, что \mathbf{D} надо выбрать так, чтобы

$$\mathbf{D}\mathbf{A} = \mathbf{K}^+, \quad \mathbf{D}\mathbf{B} = \mathbf{K}^-. \quad (4.39)$$

Так как мы предположили, что \mathbf{A} — не особенная матрица, то существует обратная ей матрица, и можно записать $\mathbf{D} = \mathbf{K}^+ \mathbf{A}^{-1}$. Подставляя полученное выражение для \mathbf{D} во второе уравнение (4.39), находим

$$\mathbf{K}^+ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{K}^-. \quad (4.40)$$

Существование матриц \mathbf{K}^+ и \mathbf{K}^- , удовлетворяющих равенству (4.40), является, очевидно, достаточным условием для того, чтобы

уравнение (4.37) можно было решить, разумеется, при выполнении соответствующих условий на бесконечности и т. д. Наоборот, отнюдь не очевидно, что для произвольного уравнения (4.37) с произвольными A, B , причем A — не особенная матрица, всегда можно найти матрицы K^+ и K^- , удовлетворяющие равенству (4.40), т. е. что уравнение (4.37) всегда может быть решено таким способом. Однако, как функциональное уравнение Винера — Хопфа является частным случаем задачи Гильберта (см. § 4.2), так и система функциональных уравнений Винера — Хопфа является частным случаем задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций. Относительно последней в книге Н. И. Мусхелишвили [1], гл. 18, доказано, что матрицы K^+ и K^- существуют при весьма общих условиях. (Библиографические ссылки в книге Мусхелишвили восходят к Племею.) При доказательстве существования K^+ и K^- Мусхелишвили дает теоретический метод их построения, но для конкретных задач этот метод, по-видимому, не применялся.

Интересная попытка была предпринята Хейнсом [6]. Если известны собственные числа матрицы K , то в общем случае можно построить матрицу L , такую, что

$$K = \exp \{L\}.$$

Элементы матриц K и L зависят от α . Если мы представим каждый элемент матрицы L в виде суммы

$$l_{ij}(\alpha) = l_{ij}^+(\alpha) + l_{ij}^-(\alpha),$$

то в наших обычных обозначениях получим

$$K^+ = \exp \{L^+\}, \quad K^- = \exp \{L^-\},$$

Однако получить этим методом конкретные результаты для каких-либо задач, по-видимому, затруднительно.

В оставшейся части этого параграфа мы покажем два способа сведения уравнения (4.37) к системе уравнений Фредгольма. Не теряя общности, вместо уравнения (4.37) будем рассматривать уравнение

$$\Phi^+ + K\Psi^- + M = 0. \quad (4.41)$$

Для простоты предположим, что это уравнение справедливо в полосу $\tau_- < \tau < \tau_+$. Как и в § 5.3 [см. формулу (5.28)], для вещественного t имеем

$$\frac{1}{2} \Phi_i^+(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i^+(s) \frac{ds}{s-t},$$

$$\frac{1}{2} \Psi_i^-(t) = -\frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_i^-(s) \frac{ds}{s-t}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В матричном обозначении эти формулы выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(s) \frac{ds}{s-t}, \\ \frac{1}{2} \Psi^-(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^-(s) \frac{ds}{s-t}. \end{aligned} \right\} \quad (4.42)$$

В первое уравнение (4.42) подставим $\Phi^+(t)$ из уравнения (4.41) для точек α , лежащих на прямой $\tau=0$, т. е. для $\alpha=t$,

$$\frac{1}{2} [\mathbf{K}(t) \Psi^-(t) + \mathbf{M}(t)] = \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{K}(s) \Psi^-(s) + \mathbf{M}(s)] \frac{ds}{s-t}.$$

Умножим это уравнение на $[\mathbf{K}(t)]^{-1}$ и сложим со вторым уравнением (4.42). Получим

$$\begin{aligned} \Psi^-(t) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \{[\mathbf{K}(t)]^{-1} \mathbf{K}(s) - \mathbf{I}\} \Psi^-(s) \frac{ds}{s-t} = \\ = [\mathbf{K}(t)]^{-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(s) \frac{ds}{s-t} - \frac{1}{2} \mathbf{M}(t) \right], \end{aligned} \quad (4.43)$$

Где интеграл в левой части — собственный, так как подынтегральное выражение уже не имеет особенности в точке $s=t$. Таким образом, мы пришли к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Изложенный метод основан на исследовании Племеля одно-родной задачи Гильберта (см. книгу Н. И. Мусхелишвили [1], стр. 388).

Можно применить и другой метод. Мы имеем

$$\Phi_r^+(\alpha) + \sum_{s=1}^n K_{rs}(\alpha) \Psi_s^-(\alpha) + M_r(\alpha) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть известны факторизации $K_{rr}(\alpha) = K_{rr}^-(\alpha)/K_{rr}^+(\alpha)$. Умножив r -е уравнение на $K_{rr}^+(\alpha)$, получим

$$K_{rr}^+ \Phi_r^+ + K_{rr}^- \Psi_r^- + K_{rr}^+ \sum_{s=1}^n K_{rs} \Psi_s^- + K_{rr}^+ M_r = 0, \quad (4.44)$$

где штрих у суммы означает, что член с $r=s$ опущен. В дальнейшем мы не будем указывать пределы суммирования $s=1$ и $s=n$.

Пусть

$$K_{rr}^+(\alpha) \sum' K_{rs}(\alpha) \Psi_s^-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} K_{rr}^+(\zeta) \sum' K_{rs}(\zeta) \Psi_s^-(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha} - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} K_{rr}^+(\zeta) \sum' K_{rs}(\zeta) \Psi_s^-(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha}, \quad (4.45)$$

где первый интеграл в правой части есть функция α , регулярная в верхней полуплоскости, а второй — в нижней полуплоскости. Применяя далее обычные для метода Винера — Хопфа преобразования, из уравнения (4.44) получаем

$$K_{rr}^- \Psi_r^- - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} K_{rr}^+(\zeta) \sum' K_{rs}(\zeta) \Psi_s^-(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha} + N_r^-(\alpha) = P_r(\alpha), \quad (4.46a)$$

$$K_{rr}^+ \Phi_r^+ + \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} K_{rr}^+(\zeta) \sum' K_{rs}(\zeta) \Psi_s^-(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha} + N_r^+(\alpha) = -P_r(\alpha), \quad (4.46b)$$

где $K_{rr}^+ M_r = N_r^+ + N_r^-$, а $P_r(\alpha)$ — произвольные полиномы, определяемые из условий на бесконечности. Индекс r в уравнении (4.46a) пробегает значения от 1 до n , так что мы имеем систему из n интегральных уравнений для Ψ_r^- . Затем из системы (4.46b) можно найти Φ_r^+ .

Как и при выводе уравнения (4.43), положим $d=0$; тогда, обозначив вещественную часть ζ через s и устремив α к вещественному числу t , можно свести систему (4.46a) к следующей системе:

$$K_{rr}^-(t) \Psi_r^-(t) - \frac{1}{2} K_{rr}^+(t) \sum' K_{rs}(t) \Psi_s^-(t) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} K_{rr}^+(s) \sum' [K_{rs}(s) \Psi_s^-(s) - K_{rs}(t) \Psi_s^-(t)] \frac{ds}{s-t} + \\ + N_r^-(t) = P_r(t), \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Если матрица K является диагональной, то точное решение может быть непосредственно получено из этих уравнений, и поэтому следует ожидать, что этот путь может оказаться полезным при итерационном решении в ζ том случае, когда диагональные элементы матрицы доминируют.

§ 4.5. Приближенная факторизация

Во всех задачах, разбираемых в этой книге, приходится выполнять основную факторизацию вида $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$. Если для ее проведения использовать интегральную формулу из теоремы С § 1.3,

§ 4.5. Приближенная факторизация

то практическое нахождение численных решений часто оказывается весьма затруднительным. Рассмотрим для конкретности функциональное уравнение

$$K(\alpha)\Phi_+(\alpha) = \Psi_-(\alpha) + F(\alpha), \quad (4.47)$$

справедливое в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$.

Иногда $K(\alpha)$ можно представить в виде

$$K(\alpha) = K^*(\alpha) + Q(\alpha), \quad (4.48)$$

где $K^*(\alpha)$ просто факторизуется и $K(\alpha)$ мало отличается от $K^*(\alpha)$ в полосе, где справедливо уравнение (4.47). Таким образом, можно найти решение уравнения

$$K^*(\alpha)\Phi_+^*(\alpha) = \Psi_-^*(\alpha) + F(\alpha). \quad (4.49)$$

Естественно попытаться сравнить Φ_+ с Φ_+^* и Ψ_- с Ψ_-^* . При этом могут возникнуть две, несколько отличные одна от другой постановки вопроса.

(а) Нас может интересовать вопрос о том, можно ли рассматривать решение уравнения (4.49) как приближение к решению уравнения (4.47).

(б) Мы можем интересоваться возмущенным решением уравнения (4.49), соответствующим малому параметру ε в следующей форме уравнения (4.48):

$$K(\alpha) = K^*(\alpha) + \varepsilon q(\alpha). \quad (4.50)$$

Остановимся сначала на вопросе (а). Выяснить, будут ли функции $K(\alpha)$ и $K^*(\alpha)$ приближенно равны, нетрудно; для этого достаточно сравнить численные значения этих функций на некоторой прямой $\tau = \tau_1$, $-\infty < \sigma < \infty$, где $\tau_- < \tau_1 < \tau_+$. Множители $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ и окончательное решение задачи выражаются через интегралы вдоль этой прямой. Если на этой прямой $K(\alpha)$ и $K^*(\alpha)$ приближенно равны, то и окончательные решения будут приближенно равны. Важно отметить, что нет необходимости в том, чтобы функции $K(\alpha)$ и $K^*(\alpha)$ вели себя одинаковым образом в комплексной плоскости вне линии $\tau = \tau_1$, $-\infty < \sigma < \infty$. (Кроме приведенных соображений вспомним, что, как показано в § 4.2, аналитическая природа $K(\alpha)$ в некотором смысле случайна. Если рассматривать нашу задачу как задачу Гильберта, то $K(\alpha)$ достаточно определить лишь на некотором контуре в плоскости α , а в точках, не принадлежащих этому контуру, функция вообще может быть не определена.)

Почувствительный пример рассмотрел Койгер ([1], часть II, b). Он сравнил задачи, в которых приходится факторизовать две следующие функции:

$$K(\alpha) = \alpha^{-1} \operatorname{th} \alpha, \quad K^*(\alpha) = (\alpha^2 + 1)^{-1/2},$$

обе факторизации находятся просто.

Эти функции приближенно равны в узкой полосе $-a < \tau < a$, $-\infty < \sigma < \infty$. При $a \rightarrow 0$ обе стремятся к единице, а при $a \rightarrow \infty$ имеют порядок $|\alpha|^{-1}$. Сравнение численных значений показывает, что на вещественной оси они отличаются одна от другой не более чем на 9%. Однако их поведение вне вещественной оси совершенно различно. Функция $K(\alpha)$ имеет бесконечное число полюсов и нулей, а функция $K^*(\alpha)$ их не имеет, но имеет две точки ветвления.

Рассмотрим два уравнения:

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \operatorname{th} \alpha \Phi_+(\alpha) &= l(2\pi)^{-1/2} \alpha^{-1} + \Psi_-(\alpha) && \text{при } 0 < \tau < \pi/2, \\ (\alpha^2 + 1)^{-1/2} \Phi_+(\alpha) &= l(2\pi)^{-1/2} \alpha^{-1} + \Psi_*(\alpha) && \text{при } 0 < \tau < 1. \end{aligned}$$

Их решение не вызывает затруднений, и мы предоставляем читателю проверить, что (см. работу Койтера [1]):

$$\psi(x) = - \int_{-\infty}^x e^{1/2\pi\xi} (1 - e^{\pi\xi})^{-1/2} d\xi = \frac{2}{\pi} \arcsin(e^{1/2\pi x}) \quad \text{при } x < 0, \quad (4.51a)$$

$$\varphi(x) = [1 - \exp(-\pi x)]^{-1/2} \quad \text{при } x > 0, \quad (4.51b)$$

$$\psi^*(x) = 1 - E[\sqrt{-x}] \quad \text{при } x < 0, \quad (4.52a)$$

$$\varphi^*(x) = (\pi x)^{-1/2} \exp(-x) + E[\sqrt{x}] \quad \text{при } x > 0, \quad (4.52b)$$

где

$$E(s) = 2\pi^{-1/2} \int_0^s e^{-t^2} dt$$

интеграл вероятности.

Сравнивая эти результаты, находим, что $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ при $x \rightarrow 0$ стремятся к $(\pi x)^{-1/2}$, а при $x \rightarrow \infty$ стремятся к единице. Различие между их численными значениями при любом x не превосходит 3%. Функции $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ при $x \rightarrow -0$ асимптотически равны $-2(-x)^{1/2} \pi^{-1/2}$, но при $x \rightarrow -\infty$ мы имеем

$$\psi(x) \sim 2\pi^{-1} \exp\left(\frac{1}{2} \pi x\right), \quad \psi^*(x) \sim (-\pi x)^{-1/2} \exp(x).$$

В интервале $0 > x > -1/2$ численные значения ψ и ψ^* расходятся не более, чем на 5%, но при $x \rightarrow -\infty$ расхождение быстро увеличивается (хотя и $\psi(x)$ и $\psi^*(x)$ малы по величине).

Не лишено интереса то обстоятельство, что ядра интегральных уравнений, приводящих к рассмотренным функциональным уравнениям,

можно найти в явном виде, а именно

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^{-1} \operatorname{th} \alpha e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1 + \exp\left(-\frac{1}{2} \pi |x|\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \pi |x|\right)},$$

$$k^*(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha^2 + 1)^{-1/2} e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{\pi} K_0(|x|).$$

При $|x| \rightarrow \infty$

$$k(x) \sim 2\pi^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \pi |x|\right) \text{ и } k^*(x) \sim (2\pi |x|)^{-1/2} \exp(-|x|).$$

Для проверки решения, полученного заменой $K(\alpha)$ на $K^*(\alpha)$, и для повышения точности этого решения Койтер предложил использовать другую аппроксимирующую функцию

$$K^{**}(\alpha) = K^*(\alpha) \frac{\alpha^4 + C\alpha^2 + D}{\alpha^4 + E\alpha^2 + D}, \quad (4.53)$$

где постоянные C , D и E выбраны так, чтобы функции $K^{**}(\alpha)$ и $K(\alpha)$ были возможно более близки. Предполагается что $K(\alpha)$ — четная функция α и что при $\alpha \rightarrow 0$ и $\alpha \rightarrow \infty$ функции $K^*(\alpha)$ и $K(\alpha)$ ведут себя одинаково; из этого уже вытекает, что указанная дробно-рациональная функция является простейшим из всех возможных поправочным множителем. Этот множитель выбирается в виде рациональной функции потому, что такую функцию легко факторизовать. Таким образом Койтеру удалось свести отклонение решения для функции $K^{**}(\alpha)$ от решения для функции $K(\alpha)$ до величины, меньшей 1%.

Койтер [1] применил эти соображения и к приближенной факторизации функций, которые фигурируют в задачах, содержащих бигармоническое уравнение, а именно функций

$$K_1(\alpha) = \frac{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha}{2\alpha \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad K_2(\alpha) = \frac{\operatorname{sh}^2 \alpha - \alpha^2}{2\alpha (\operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \alpha - \alpha)}.$$

Их можно аппроксимировать с точностью до 10% функциями $A(\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$ или $a\alpha^{-1} \operatorname{th}(b\alpha)$ и с точностью до 1% более сложными выражениями вида (4.53). Аппроксимируемые функции K_1 и K_2 точно факторизуются методом бесконечных произведений, хотя корни оказываются комплексными. Нам кажется, что в этом случае грубая аппроксимация очень удобна для получения приближенного ответа. Если же требуется более точный результат, то преимущества улучшенной аппроксимации типа (4.53) перед строгим, хотя и несколько трудным, решением с помощью бесконечных произведений становятся сомнительными.

Перейдем к вопросу (б), поставленному в начале этого параграфа. Пусть для уравнения

$$[K^*(\alpha) + \varepsilon q(\alpha)] \Phi_+(\alpha) = \Psi_-(\alpha) + A(\alpha + k \cos \Theta)^{-1}, \quad (4.54)$$

где ε мало, требуется найти решение, зависящее от ε , причем $k_2 \cos \Theta < \tau < k_2$ и решение для $\varepsilon = 0$ известно. Факторизация $K^*(\alpha) = K_+^* K_-^*(\alpha)$ нам известна. Разделив уравнение (4.54) на $K_-^*(\alpha)$ и применив теорему В из § 1.3, получим для функции $q(\alpha) \Phi_+(\alpha)/K_-^*(\alpha)$ разбиение на сумму „плюс“- и „минус“-функций. Обычная в методе Винера — Холфа группировка членов дает

$$K_+^*(\alpha) \Phi_+(\alpha) + \frac{\varepsilon}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{q(\zeta) \Phi_+(\zeta)}{K_-^*(\zeta) (\zeta - \alpha)} d\zeta = \\ = \frac{A}{(\alpha + k \cos \Theta) K_+^*(k \cos \Theta)}.$$

Это — интегральное уравнение для $\Phi_+(\alpha)$, справедливое для любого τ_1 , $-\infty < \sigma < \infty$, такого, что $k_2 \cos \Theta < c < \tau_1 < k_2$. Решение методом последовательных приближений дает

$$\Phi_+^{(1)}(\alpha) = A [(\alpha + k \cos \Theta) K_+^*(k \cos \Theta) K_+^*(\alpha)]^{-1}, \\ \Phi_+^{(2)}(\alpha) = \Phi_+^{(1)}(\alpha) - \\ - \frac{A\varepsilon}{2\pi i K_+^*(k \cos \Theta) K_+^*(\alpha)} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{q(\zeta) d\zeta}{K^*(\zeta) (\zeta - \alpha) (\zeta + k \cos \Theta)}. \quad (4.55)$$

Рассмотрим два примера.

1. Пусть $K^*(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{1/2}$, $q(\alpha) = 1$. Тогда интеграл, входящий во вторую формулу (4.55), сходится и процесс последовательных приближений также очевидно сходится.

2. Пусть $K^*(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}$, $q(\alpha) = 1$. Тогда подинтегральное выражение во второй формуле (4.55) при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в рассматриваемой полосе имеет порядок $|\alpha|^{-1}$ и интеграл расходится. В этом случае метод последовательных приближений *не применим*.

Сделаем несколько замечаний, которые помогут разъяснить затруднения, возникающие в этом втором случае.

А. Для разобранных выше примеров точная факторизация дана в задаче 2.10. В случае 2 оказывается, что

$$K_+^*(\alpha) = K_+^*(\alpha) + \varepsilon \ln \varepsilon S_+(\alpha) + \dots, \quad (4.56)$$

т. е. первый поправочный член имеет порядок $\varepsilon \ln \varepsilon$, а не ε .

Б. Применяя к равенству (4.50) теорему С из § 1.3 о факторизации методом бесконечных произведений, получаем

$$\ln K_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\ln [K^*(\zeta) + \varepsilon q(\zeta)]}{\zeta - \alpha} d\zeta.$$

§ 4.6. Уравнение Лапласа в полярных координатах

В примере 2 для конечных значений ϵ и больших значений ζ в под-интегральном выражении член $\epsilon q(\zeta)$ превалирует над $K_+^*(\zeta)$, что указывает на наличие членов, содержащих $\ln \epsilon$.

В. Допустим, что для малых δ можно записать

$$K(\alpha) = K_+^*(\alpha) [1 + \delta s_+(\alpha)] K_-^*(\alpha) [1 + \delta s_-(\alpha)] = \\ = K^*(\alpha) \{1 + \delta [s_+(\alpha) + s_-(\alpha)] + \delta^2 s_+(\alpha) s_-(\alpha)\}. \quad (4.57)$$

Сравнивая это выражение с выражением (4.50), естественно положить δ равным ϵ , пренебречь членом, содержащим δ^2 , и выбрать $s_+(\alpha)$ и $s_-(\alpha)$ так, чтобы

$$s_+(\alpha) + s_-(\alpha) = \frac{q(\alpha)}{K^*(\alpha)}.$$

Используя формулы (1.35), можно проделать эти выкладки для обоих разобранных примеров. В частности для примера 2 найдем

$$K_+(\alpha) \approx (\alpha + k)^{-1/2} \left[1 + \epsilon \pi^{-1} (\alpha^2 - k^2)^{1/2} \arccos \frac{\alpha}{k} \right]. \quad (4.58)$$

Но этот результат очевидно неправилен, так как из точного решения нам известно, что первый поправочный член должен иметь порядок $\epsilon \ln \epsilon$. Таким образом, нельзя полагать, что если $K(\alpha)$ можно разложить по степеням ϵ , то и $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ также можно разложить по степеням ϵ . Если умножить соотношение (4.58) на соответствующее выражение для $K_-(\alpha)$, то результат при фиксированном конечном значении ϵ не будет аппроксимацией $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в заданной полосе. Это обстоятельство не имело места в примерах, рассмотренных в первой половине параграфа, где аппроксимирующая функция $K^*(\alpha)$ мало отличалась от функции $K(\alpha)$ при всех значениях α в полосе.

Вопрос о нахождении удовлетворительной аппроксимации сравнительно простого вида для задач, в которых функция $K(\alpha)$ имеет такой же вид, как функция $K(\alpha)$ в примере 2, требует, по-видимому, дальнейшего исследования. Отметим, что некоторые из функций $K(\alpha)$ в задачах, рассмотренных в предыдущих главах, имеют именно такой вид.

§ 4.6. Уравнение Лапласа в полярных координатах

Решения различных задач для уравнения Лапласа в полярных и сферических координатах могут быть получены методом Винера — Хопфа в сочетании с преобразованием Меллина

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \varphi r^{s-1} dr, \quad \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \Phi(s) r^{-s} ds, \quad (4.59)$$

где s — комплексный параметр, $s = \sigma + i\tau$. Уравнение Лапласа имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (\text{полярные координаты}), \quad (4.60a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{сферические координаты};$$

функция φ не зависит от азимутального угла). (4.60б)

Можно было бы обойтись и без преобразования Меллина, сделав подстановку $r = \exp(u)$, приводящую написанные уравнения, соответственно, к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0,$$

и затем применив преобразования Фурье или Лапласа по переменной u . [Это соответствует тому обстоятельству, что преобразование Меллина получается из преобразования Лапласа экспоненциальной подстановкой; см. формулы (1.49).] Однако мы рассмотрим применение преобразования Меллина, так как этот подход оказывается более удобным на практике.

Положим

$$\left. \begin{aligned} \Phi_P(s, \theta) &= \int_0^1 \varphi(r, \theta) r^{s-1} dr, \\ \Phi_N(s, \theta) &= \int_1^\infty \varphi(r, \theta) r^{s-1} dr, \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

где индексы P и N использованы вместо индексов $+$ и $-$ для того, чтобы подчеркнуть, что функции Φ_P и Φ_N регулярны соответственно в правой и левой полуплоскостях, а не в верхней и нижней, как в случае преобразования Фурье. Нам понадобятся следующие результаты, получающиеся на основании следствия (2) из теоремы А в § 1.3 и на основании теоремы абелева типа, упомянутой в конце § 1.6 ($\ln r \approx r - 1$ при $r \approx 1$).

Если $|\varphi| < Ar^{-\sigma}$ при $r \rightarrow 0$, то $\Phi_P(s)$ регулярна при $\sigma > \sigma_-$.

Если $|\varphi| < Br^{-\sigma}$ при $r \rightarrow \infty$, то $\Phi_N(s)$ регулярна при $\sigma < \sigma_+$.

Если $\varphi \sim (1-r)^\xi$ при $r \rightarrow 1-0$, то $|\Phi_P(s)| \sim |s|^{-\xi-1}$ при $s \rightarrow \infty$.

Если $\varphi \sim (1-r)^\eta$ при $r \rightarrow 1+0$, то $|\Phi_N(s)| \sim |s|^{-\eta-1}$ при $s \rightarrow \infty$.

В двух последних строках $s \rightarrow \infty$ в правой и левой полуплоскостях соответственно.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть требуется найти электростатическое поле конуса $0 \leq r \leq 1$, $\theta = \Theta$, заряженного до потенциала V . Применяя к уравнению (4.60б) преобразование Меллина, получаем

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Phi(s)}{d\theta} + s(s-1)\Phi(s) = 0,$$

$$\Phi(s) = A(s)P_{s-1}(\cos \theta) + B(s)P_{s-1}(-\cos \theta).$$

Функции $P_{s-1}(\cos \theta)$ и $P_{s-1}(-\cos \theta)$ имеют особенности в точках $\theta = \pi$ и $\theta = 0$ соответственно. Поэтому полагаем

$$\Phi(s) = A(s)P_{s-1}(\cos \theta) \text{ при } 0 \leq \theta \leq \Theta, \quad (4.62a)$$

$$\Phi(s) = B(s)P_{s-1}(-\cos \theta) \text{ при } \Theta \leq \theta \leq \pi. \quad (4.62b)$$

Используем граничные условия при $\theta = \Theta$. Примем обозначения (4.61), а преобразования Меллина для $\partial\varphi/\partial\theta$ будем обозначать через $\Phi'_P(s, \theta)$ и $\Phi'_N(s, \theta)$. Через $\Phi'_P(s, \Theta + 0)$ будем обозначать предел $\Phi'_P(s, \theta)$ при $\theta \rightarrow \Theta$ со стороны $\theta > \Theta$ и т. д. Так как функция $\Phi(s)$ должна быть непрерывна при $\theta = \Theta$, то, согласно формулам (4.62), мы имеем

$$A(s)P_{s-1}(\cos \Theta) = B(s)P_{s-1}(-\cos \Theta) = C(s),$$

где $C(s)$ — новая неизвестная функция.

Далее,

$$\Phi_P(s, \Theta) + \Phi_N(s, \Theta) = C(s), \quad (4.63)$$

$$\Phi'_P(s, \Theta + 0) + \Phi'_N(s, \Theta) = C(s)P'_{s-1}(-\cos \Theta)/P_{s-1}(-\cos \Theta), \quad (4.64a)$$

$$\Phi'_P(s, \Theta - 0) + \Phi'_N(s, \Theta) = C(s)P'_{s-1}(\cos \Theta)/P_{s-1}(\cos \Theta). \quad (4.64b)$$

Отсюда обычным путем (см. § 2.2) можно получить функциональное уравнение Винера — Хопфа

$$-F_P(s, \Theta) = K(s) \left[\Phi_N(s, \Theta) + \frac{V}{s} \right], \quad (4.65)$$

где

$$\left. \begin{aligned} K(s) &= \sin \pi s [\pi \sin \Theta P_{s-1}(\cos \Theta) P_{s-1}(-\cos \Theta)]^{-1}, \\ 2F_P(s, \Theta) &= \Phi'_P(s, \Theta + 0) - \Phi'_P(s, \Theta - 0), \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

причем мы использовали следующие соотношения:

$$P_{s-1}(-\cos \Theta) P'_{s-1}(\cos \Theta) - P_{s-1}(\cos \Theta) P'_{s-1}(-\cos \Theta) = \frac{2 \sin \pi s}{\pi \sin \Theta},$$

$$\Phi_P(s, \Theta) = V \int_0^1 r^{s-1} dr = \frac{V}{s}.$$

Функция $K(s)$ является целой функцией s , и ее можно факторизовать методом бесконечных произведений. Подробности даны в работе

Карпа [2]. Далее решение завершается обычным путем. Аналогичный пример рассмотрен в работе Базера и Карпа [1].

Для иллюстрации рассмотрим частный случай, а именно диск $0 \leq r \leq 1$, $\theta = \pi/2$. Так как

$$P_{s-1}(0) = \pi^{1/2} [\Gamma(1/2 + 1/2s) \Gamma(1 - 1/2s)]^{-1},$$

то выражение (4.66) приводится к виду

$$K(s) = 2\Gamma(1/2 + 1/2s) \Gamma(1 - 1/2s) [\Gamma(1/2s) \Gamma(1/2 - 1/2s)]^{-1}. \quad (4.67)$$

Кроме того, мы располагаем следующими сведениями.

1. При $r \rightarrow 0$ плотность заряда на диске должна быть конечна. Поэтому $F_P(s, 0)$ должна быть регулярна при $\sigma > -1$.

2. Функция $\Phi_P(s, 0)$ существует и регулярна при $\sigma > 0$.

3. При $r \rightarrow \infty$ должно быть $|\varphi| < Cr^{-1}$. Поэтому $\Phi_N(s, 0)$ должна быть регулярна при $\sigma < 1$.

4. При $r \rightarrow 1 + 0$ должно быть $\varphi \sim \text{const}$. Поэтому при $s \rightarrow \infty$ в левой полуплоскости должно быть $|\Phi_N(s, 0)| \sim |s|^{-1}$.

Из результатов 1—4 и соотношения (4.67) заключаем, что уравнение (4.65) справедливо в полосе $0 < \sigma < 1$. Факторизация функции $K(s)$, определяемой выражением (4.67), имеет вид $K(s) = K_P(s) K_N(s)$, где

$$K_P(s) = 2^{1/2} \frac{\Gamma(1/2 + 1/2s)}{\Gamma(1/2s)},$$

$$K_N(s) = 2^{1/2} \frac{\Gamma(1 - 1/2s)}{\Gamma(1/2 - 1/2s)}.$$

Применяя метод Винера — Хопфа, мы получаем решение уравнения (4.65) в следующем виде:

$$\Phi_N(s, 0) = \frac{V}{s} \left[\frac{\Gamma(1/2 - 1/2s)}{\pi^{1/2} \Gamma(1 - 1/2s)} - 1 \right].$$

Отсюда

$$\varphi = \frac{V}{2\pi i \pi^{1/2}} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1/2 - 1/2s) P_{s-1}(|\cos \theta|)}{s \Gamma(1 - 1/2s) P_{s-1}(0)} r^{-s} ds.$$

Для того чтобы найти распределение плотности заряда на диске, вычислим $r^{-1} \partial \varphi / \partial \theta$ при $\theta = +0$. Учитывая, что

$$P'_{s-1}(0) = -2\pi^{1/2} [\Gamma(1/2s) \Gamma(1/2 - 1/2s)]^{-1},$$

получаем

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{\theta=1/2\pi-0} = \frac{V}{2\pi i \pi^{1/2} r} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(1/2 + 1/2s)}{\Gamma(1 + 1/2s)} r^{-s} ds = \frac{2}{\pi} (1 - r^2)^{-1/2}.$$

Более подробно применение метода Винера — Хопфа к уравнению Лапласа в полярных координатах изложено в работах Базера и Карпа [1], Карпа [1, 2] и Джонса [7, 8].

Различные задачи и результаты IV

4.1. Эта книга посвящена решению уравнений в частных производных, и, вообще говоря, нет необходимости рассматривать формулировку задач с помощью интегральных уравнений. Однако много работ посвящено непосредственно решению интегральных уравнений методом Винера—Хопфа, поэтому мы упомянем классический пример, рассмотренный Винером и Хопфом [1]. Требуется решить интегральное уравнение Милна, к которому сводится задача о лучистом равновесии и задача о диффузии нейтронов:

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(\xi) k(x - \xi) d\xi \text{ при } x > 0, \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (a)$$

$$k(\xi) = \frac{1}{2} \int_{|\xi|}^{\infty} \lambda^{-1} e^{-\lambda} d\lambda.$$

где

Пусть правая часть этого уравнения при $x < 0$ равна $g(x)$; тогда, применяя двустороннее преобразование Лапласа, находим

$$F_P(s) K(s) = G_N(s), \quad (б)$$

где

$$K(s) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{-sx} dx = 1 - \frac{1}{2} s^{-1} \ln \frac{1+s}{1-s}.$$

Функция $K(s)$ имеет нуль второго порядка в начале координат и $\ln K(s)$ имеет две точки ветвления $s = \pm 1$. Уравнение (а) обычно выводится из уравнения

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi = \frac{1}{2} \psi_0, \quad \psi = \psi(z, \mu), \quad (в)$$

где функция

$$\psi_0 = \int_{-1}^{+1} \psi(z, \mu) d\mu \equiv f(z)$$

совпадает с функцией $f(z)$, входящей в уравнение (а). Метод Винера—Хопфа часто применяется к другому уравнению, которое также можно вывести из уравнения (в), а именно к уравнению

$$F_P(s) K(s) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{F_P(-1/\zeta)}{1+s\zeta} d\zeta. \quad (г)$$

Сравнивая уравнения (г) и (б), мы видим, что правая часть уравнения (г) является одним из представлений $G_N(s)$. Действительно, уравнение (г) можно получить, применив к уравнению (а) преобразование Лапласа в интервале $(0, \infty)$, что дает

$$F(s) K(s) = \int_0^{\infty} f(\xi) \int_{\xi}^{\infty} e^{s\eta} k(\eta) d\eta d\xi.$$

Предоставляем читателю показать, что выражение, стоящее в правой части этого уравнения, сводится к правой части уравнения (г).

По данному вопросу имеется обширная литература, например: Винер и Хопф [1], Хопф [1], Плачек [1], Плачек и Зейдель [1], Марк [1], Маршак [1]. Краткое изложение дано в книгах Титчмарша [1] и Снеддона [1]. В книгах Курганова [1] и Дейвисона [1], кроме метода Винера—Хопфа, указаны также и другие методы решения рассмотренного уравнения. ;

4.2. Дадим краткую сводку [условий, [обеспечивающих единственность решения интегрального уравнения

$$rf(x) = \int_0^{\infty} k(|x-y|)f(y)dy + g(x), \quad 0 \leq x < \infty,$$

где f — неизвестная функция, а функции g и k заданы. Для однородного уравнения, т. е. для $g(x) = 0$, этот вопрос был исследован Винером и Хопфом [1] (см. также книгу Титчмарша [1], стр. 429). Более общая теория для неоднородного уравнения дана В. А. Фоком [1, 2]. В следующих примерах все интегралы понимаются в смысле Лебега. Предположим, что функция $k_1(x) = k(x) \exp(cx)$ для некоторого $c > 0$ есть функция ограниченной вариации и абсолютно интегрируема на полуоси $(0, \infty)$. Введем в рассмотрение функцию

$$K(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} k(|x|) dx,$$

четную и регулярную в полосе $-c < \text{Im } \alpha < c$; $|\alpha K(\alpha)|$ ограничен на бесконечности в этой полосе; $\text{Im}[1 - K(\alpha)]$ стремится к нулю как $|\alpha|^{-1}$, когда α стремится к бесконечности в этой полосе.

1. *Однородное уравнение*, т. е. $g(x) = 0$.

(а) Если уравнение $1 - K(\alpha) = 0$ не имеет вещественных корней или функция $K(\alpha)$ не имеет вещественных особых точек и если τ_0 — мнимая часть ближайшего к вещественной оси корня или ближайшей к вещественной оси особой точки, то однородное интегральное уравнение не имеет решений, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| < C \exp(\tau_0 x), \quad (A)$$

где C — некоторая постоянная.!

(б) Если уравнение $1 - K(\alpha) = 0$ имеет $2n$ вещественных корней, то однородное интегральное уравнение имеет точно n линейно независимых решений $f_r(x)$ ($r = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющих условию (A).

2. *Неоднородное уравнение*, т. е. $g(x) \neq 0$, причем $g(x)$ — функция ограниченной вариации, абсолютно интегрируемая на полуоси $(0, \infty)$.

(а) Если уравнение $1 - K(\alpha) = 0$ не имеет вещественных корней, то интегральное уравнение имеет одно и только одно решение, которое ограничено и стремится к нулю на бесконечности.

(б) Если уравнение $1 - K(\alpha) = 0$ имеет $2n$ вещественных корней, кратность которых не превышает s , и если $g(x)$ удовлетворяет двум дополнительным условиям, а именно: функция $x^{s-1}g(x)$ абсолютно интегрируема и

$$\int_0^{\infty} g(x) f_r(x) dx = 0, \quad r = 1, 2, \dots, n,$$

где функции $f_r(x)$ — решения однородного уравнения, определенные в случае 1 (б), то неоднородное интегральное уравнение имеет одно и только одно решение, которое стремится к нулю на бесконечности.

4.3. При решении интегральных уравнений обычным методом Винера — Хопфа предполагается, что в комплексной плоскости существует общая полоса регулярности для интегральных преобразований всех входящих в рассмотрение функций. Если задачу рассматривать как задачу Гильберта, то эту теорию можно распространить на случай, когда преобразования Фурье в комплексной плоскости существуют только на некоторой общей линии, параллельной вещественной оси. Обычная теория Винера — Хопфа применяется в том случае, когда ядро интегрального уравнения $k(x)$ убывает экспоненциально, $|k(x)| < C \exp(-\epsilon|x|)$, $\epsilon > 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. В данном примере рассматривается случай, когда $k(x)$ убывает алгебраически, $|k(x)| < C|x|^{-p}$, $p > 0$, при $|x| \rightarrow \infty$. Дальнейшее изложение основано на работах Спаренберга [1], [2]; см. также работу Латта [1]. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = \mu \int_0^{\infty} \frac{f(\xi)}{a^2 + (x - \xi)^2} d\xi + g(x), \quad x > 0, \quad \mu a < a. \quad (a)$$

Введем функцию $h(x)$, которая равна правой части этого уравнения при $x < 0$, и предположим, что $f(x) = g(x) = 0$ при $x < 0$. Применяя преобразование Фурье по x , $-\infty < x < \infty$, получаем

$$F_+(a)K(a) + H_-(a) = G_+(a), \quad (б)$$

где

$$K(a) = 1 - \mu\pi a^{-1} \exp(-a|a|).$$

Так как преобразование Фурье ядра существует только для вещественных a , то и полученное уравнение (б) справедливо только для вещественных a . Уравнение (б) можно рассматривать как задачу Гильберта. Положим

$$\ln K_+(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln K(x)}{x - a} dx, \quad \text{Im } a > 0, \quad (в)$$

причем при $\text{Im } a \rightarrow 0$ точка $x = a$ обходится соответствующим образом. Аналогичной формулой, но с обратным знаком, определим $K_-(a)$ при $\text{Im } a < 0$. Тогда

$$F_+(a) = \frac{1}{2\pi i K_+(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_+(x)}{K_-(x)(x - a)} dx.$$

Затруднения возникают при $\mu a > a$, так как тогда $K(a)$ имеет на вещественной оси два нуля, скажем $x = \pm p$. Это означает, что функция $f(x)$, не стремясь к нулю при $x \rightarrow +\infty$, остается ограниченной благодаря наличию членов вида $\exp(\pm ipx)$. Поэтому положим

$$v(x) = f(x) - Ae^{-ipx} - Be^{ipx}, \quad x > 0,$$

где A и B — постоянные, определяемые из условия $v(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Подставим в уравнение (а) выражение $f(x)$ через $v(x)$. Для простоты ограничимся случаем однородного уравнения $g(x) = 0$. Тогда мы при $x > 0$ будем иметь

$$v(x) + Ae^{-ipx} + Be^{ipx} = \mu \int_0^{\infty} \frac{v(\xi) d\xi}{a^2 + (x - \xi)^2} + \mu \int_0^{\infty} \frac{Ae^{-ip\xi} + Be^{ip\xi}}{a^2 + (x - \xi)^2} d\xi.$$

Члены, содержащие A и B , должны при $x \rightarrow +\infty$ взаимно уничтожаться. Обозначим через $h(x)$ значения правой части при $x < 0$. Применение преобразования Фурье дает

$$V_+(\alpha)K(\alpha) + H_-(\alpha) = -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \left[\frac{A}{\alpha-p} + \frac{B}{\alpha+p} \right] K(\alpha).$$

Чтобы избежать трудностей, связанных с нулями функции $K(\alpha)$, положим

$$L(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{\alpha^2 - p^2}, \quad \ln L_+(\alpha) = \frac{\alpha}{\pi i} \int_0^\infty \frac{\ln L(x)}{x^2 - \alpha^2} dx, \quad \text{Im } \alpha > 0.$$

Предположим далее, что произвольный полином, возникающий при решении функционального уравнения, равен константе C . В результате получим

$$V_+(\alpha) = \frac{C}{(\alpha^2 - p^2)L_+(\alpha)} - \frac{Ai}{(2\pi)^{1/2}(\alpha - p)} - \frac{Bi}{(2\pi)^{1/2}(\alpha + p)}.$$

Для того чтобы функция $V_+(\alpha)$ не имела полюсов в точках $\alpha = \pm p$, надо положить

$$A = -\frac{(2\pi)^{1/2} Ci}{2pL_+(p)}, \quad B = \frac{(2\pi)^{1/2} Ci}{2pL_+(-p)}.$$

Таким образом, решение определяется полностью.

4.4. В работе Спаренберга [2] рассмотрено следующее интегральное уравнение

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) = \int_0^\infty [b_0 f(\xi) + b_1 f'(\xi)] k(x - \xi) d\xi.$$

4.5. Показать, что интегральное уравнение

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \lambda \int_0^\infty \frac{\varphi(\eta)}{\text{ch}^{1/2}(\xi - \eta)} d\eta, \quad \xi > 0,$$

сводится к функциональному уравнению Винера — Хопфа

$$\Phi_+(\alpha) + \Psi_-(\alpha) = \lambda \pi [\text{ch } \pi \alpha]^{-1} \Phi_+(\alpha).$$

Нужная здесь факторизация выражается через гамма-функции. Более подробные указания даны в работе Хейнса [5], где исправлены неточности, допущенные в книге Титчмарша [1], стр. 432.

4.6. Показать, что интегральные уравнения вида

$$f(x) + g(x) = \lambda \int_0^1 \frac{f(\xi)}{x + \xi} d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

или

$$f(x) + g(x) = \lambda \int_1^\infty \frac{f(\xi)}{x + \xi} d\xi, \quad 1 \leq x < \infty,$$

относятся к уравнениям типа Винера — Хопфа. (Положить $x = \exp(-y)$, $\xi = \exp(-\eta)$; ср. с задачей 4.5; см. книгу Титчмарша [1], стр. 432.)

4.7. Титчмарш [1], стр. 423, решил парные интегральные уравнения частного вида методом, связанным с рассматриваемыми в этой книге. Применим этот метод к решению парных интегральных уравнений общего вида

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} K(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x), \quad x > 0, \quad (a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = g(x), \quad x < 0, \quad (б)$$

где c — некоторое вещественное число, $\tau_- < c < \tau_+$. В этой полосе функция $A(x)$ регулярна, а функция $K(\alpha)$ регулярна и не обращается в нуль. Пусть нам известна факторизация $K(\alpha) = K_-(\alpha)/K_+(\alpha)$; введем обозначение $B(\alpha) = A(\alpha)/K_+(\alpha)$. Умножим уравнение (а) на $\exp(i\omega_1 x)$, $\text{Im } \omega_1 > c$, и проинтегрируем по x от 0 до ∞ . Аналогично, уравнение (б) умножим на $\exp(i\omega_2 x)$, $\text{Im } \omega_2 > c$, и проинтегрируем по x от $-\infty$ до 0. В результате получим

$$-\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} K_-(\alpha) B(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - \omega_1} = F_+(\omega_1), \quad (в)$$

$$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} K_+(\alpha) B(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - \omega_2} = G_-(\omega_2), \quad (г)$$

где

$$F_+(\omega_1) = \int_0^{\infty} e^{i\omega_1 x} f(x) dx, \quad G_-(\omega_2) = \int_{-\infty}^0 e^{i\omega_2 x} g(x) dx.$$

Выберем некоторую постоянную b , такую, что

$$c < \text{Im } \omega_1 < b < \tau_+,$$

и сместим путь интегрирования в формуле (в) так, чтобы он совпал с прямой $\tau = b$. Получим

$$-\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ib}^{\infty+ib} K_-(\alpha) B(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - \omega_1} = -(2\pi)^{1/2} K_-(\omega_1) B(\omega_1) + F_+(\omega_1). \quad (д)$$

Левая часть уравнения (д) есть функция от ω_1 , регулярная в нижней полуплоскости $\text{Im } \omega_1 < b$. Аналогично, выберем a так, чтобы

$$\tau_- < a < \text{Im } \omega_2 < c,$$

и сдвинем путь интегрирования в формуле (г) так, чтобы он совпадал с прямой $\tau = a$. Тогда

$$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty+ia}^{\infty+ia} K_+(\alpha) B(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - \omega_2} = -(2\pi)^{1/2} K_+(\omega_2) B(\omega_2) + G_-(\omega_2). \quad (е)$$

Левая часть уравнения (е), а следовательно, и правая его часть есть функция от ω_2 , регулярная в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega_2 > a$.

С той точки зрения, которая принята в этой книге, наиболее прямым ходом дальнейшего решения представляется следующий. Надо заменить переменные ω_1 и ω_2 на α , обозначить левую часть уравнения (д) через $\Psi_-(\alpha)$, а левую часть уравнения (е) через $\Phi_+(\alpha)$ и, исключив функцию $B(\alpha)$, получить функциональное уравнение Винера — Хопфа. Титчмарш же рассуждает следующим образом. Так как правая часть уравнения (е) представляет собой функцию, регулярную в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$, то такой же, очевидно, будет и функция

$$B(\alpha) - (2\pi)^{-1/2} [K_+(\alpha)]^{-1} G_-(\alpha).$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left[B(\alpha) - \frac{G_-(\alpha)}{(2\pi)^{1/2} K_+(\alpha)} \right] \frac{d\alpha}{\alpha - \omega} = 0, \quad \text{Im } \omega < \epsilon. \quad (\text{ж})$$

Аналогично из уравнения (д) можно получить, что

$$\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \left[B(\alpha) - \frac{F_+(\alpha)}{(2\pi)^{1/2} K_-(\alpha)} \right] \frac{d\alpha}{\alpha - \omega} = -2\pi i \left[B(\omega) - \frac{F_+(\omega)}{(2\pi)^{1/2} K_-(\omega)} \right], \quad \text{Im } \omega < \epsilon. \quad (\text{з})$$

Справедливость равенства (з) легко проверить, если замкнуть путь интегрирования в нижней полуплоскости и учесть, что внутри контура имеется единственный полюс подынтегрального выражения в точке $\alpha = \omega$. Из формул (ж) и (з) можно найти функцию $B(\omega)$, если исключить интегралы, содержащие $B(\alpha)$. Это и есть требуемое решение; оно может быть приведено к виду общего решения, которое будет рассмотрено в § 6.2 (ср. с задачей 6.1). На практике может случиться, что нельзя строго следовать только что описанному методу из-за трудностей, связанных с обеспечением сходимости. Возможные пути обхода этих трудностей будут указаны в § 6.2.

4.8. Джонс [7] применил метод, изложенный в § 4.6, к задаче об обтекании тонкого крыла стационарным потоком несжимаемой жидкости. В другой работе Джонс [8] использовал обобщение этого метода для решения задачи об обтекании колеблющегося крыла. Весьма интересен способ, которым вводится условие Кутта — Жуковского на задней кромке.

4.9. Метод, изложенный в § 4.6, можно применить для решения задач, связанных с исследованием напряжений в упругом клине при смешанных граничных условиях на его плоскостях; см. работу Койтера [2] и задачу 3.19.

4.10. Метод Винера — Хопфа можно применить для решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_{n-m} x_m = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{а})$$

где известные коэффициенты k_{n-m} зависят только от разности $n - m$. Дополним эту систему уравнений, обозначив значения суммы в левой части при $n = -1, -2, \dots$ через пока неизвестные величины c_n . Умножим уравнение

для любого n на a^n , просуммируем результаты по n от $-\infty$ до $+\infty$ и изменим порядок суммирования в левой части. Получим

$$\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} k_r a^r \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} x_m a^m \right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n a^n,$$

или

$$K(\alpha) X_+(\alpha) = B_+(\alpha) + C_-(\alpha), \quad (6)$$

где индексы $+$ и $-$ указывают, что функции $B_+(\alpha)$ и $X_+(\alpha)$ регулярны внутри некоторого круга сходимости, а функция $C_-(\alpha)$ регулярна вне некоторого круга в плоскости α . Предположим, что функция $K(\alpha)$ регулярна в кольце $r_+ < |\alpha| < r_-$, поскольку „плюс“-функции регулярны при $|\alpha| < r_-$, а „минус“-функции регулярны при $|\alpha| > r_+$. Таким образом, уравнение (6) справедливо в кольце комплексной плоскости и может быть решено методом Винера — Хопфа. Факторизуем функцию $K(\alpha)$; положив $K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$. Разделим уравнение (6) на $K_-(\alpha)$ и положим

$$\frac{B_+(\alpha)}{K_-(\alpha)} = H_+(\alpha) + H_-(\alpha).$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$J(\alpha) = K_+(\alpha) X_+(\alpha) - H_+(\alpha) = \frac{C_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + H_-(\alpha).$$

Таким образом, определена функция $J(\alpha)$, регулярная на всей плоскости α , и функцию $X_+(\alpha)$ можно определить обычным путем по теореме Лиувилля. Затем можно найти неизвестные x_n , разлагая $X_+(\alpha)$ по степеням α .

Это решение было получено несколько иным путем Я. Н. Фельдом [1]. В качестве приложения он рассмотрел распространение волн в волноводе $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-\infty < z < \infty$ с цилиндрическими штырями малого радиуса r , длины a и осями $y = d$, $z = 0$, D , $2D$, ...

(Решение этого примера можно найти довольно просто, так как сразу видно, что решение имеет вид $x_m = P p^m$, где P и p — постоянные, легко определяемые прямой подстановкой в систему исходных уравнений. Тем не менее этот пример дает поучительное применение теории.)

4.11. Ряд задач, которые мы решили методом Винера — Хопфа, можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В таких случаях часто оказывается, что вывод системы алгебраических уравнений является наиболее естественной математической формулировкой задачи. Сначала рассмотрим сведение типичной задачи Винера — Хопфа к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исходим из функционального уравнения Винера — Хопфа

$$F_-(\sigma) = K(\alpha) G_+(\alpha) + H(\alpha), \quad (a)$$

причем это уравнение справедливо в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$, в которой функция $K(\alpha)$ регулярна и не обращается в нуль. Необходимо предположить, что $K(\alpha)$ не имеет точек ветвления в верхней полуплоскости. Допустим, кроме того, что функция $K(\alpha)$ имеет в верхней полуплоскости лишь простые полюсы $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ и простые нули β_1, β_2, \dots , причем полюсы и нули чередуются:

$$|\alpha_1| < |\beta_1| < |\alpha_2| < |\beta_2| < \dots$$

Функцию $K(\alpha)$ можно представить в виде

$$K(\alpha) = k_+(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{\alpha - \alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \right]. \quad (6)$$

Подставляя это выражение в уравнение (а) и полагая $H(\alpha) = H_+(\alpha) + H_-(\alpha)$, после группировки членов получаем

$$F_-(\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n G_+(\alpha_n)}{\alpha - \alpha_n} - H_-(\alpha) = k_+(\alpha) G_+(\alpha) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left\{ [G_+(\alpha) - G_+(\alpha_n)] \frac{1}{\alpha - \alpha_n} + G_+(\alpha) \frac{1}{\alpha_n} \right\} + H_+(\alpha).$$

Обе части этого равенства в совокупности определяют целую функцию; предположим, что она равна нулю. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n G_+(\alpha_n) \frac{1}{\alpha - \alpha_n} = F_-(\alpha) - H_-(\alpha). \quad (в)$$

Положим в уравнении (а) $\alpha = \beta_n$ и заметим, что $K(\beta_n) = 0$ по определению, а $G_+(\beta_n)$ конечны, так как точки β_n лежат в верхней полуплоскости. Следовательно

$$F_-(\beta_n) = H(\beta_n),$$

или

$$F_-(\beta_n) - H_-(\beta_n) = H_+(\beta_n).$$

Полагая в уравнении (в) $\alpha = \beta_m$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для $G_+(\alpha_n)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m - \alpha_n} a_n G_+(\alpha_n) = H_+(\beta_m), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Очевидно, что эти рассуждения можно обратить. Чтобы решить систему

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m - \alpha_n} x_n = c_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (г)$$

надо найти функцию $K(\alpha)$, которую можно представить в виде (б), и такую, что $K(\beta_m) = 0$. Тогда, если $H(\alpha)$ — такая функция, что $H(\beta_m) = c_m$, и мы можем решить функциональное уравнение Винера — Хопфа (а), то решением системы (г) будет $x_n = a_n G_+(\alpha_n)$.

4.12. В плоском волноводе $0 \leq y \leq b$, $-\infty < z < \infty$ из $z = -\infty$ набегают волна $\exp(ikz)$; на стенках волновода заданы следующие граничные условия: при $y = 0$, $-\infty < z < \infty$ и при $y = b$, $-\infty < z < 0$ задано условие $\partial \varphi / \partial y = 0$, а при $y = b$, $0 < z < \infty$ — условие $\varphi = 0$.

Применяя при $z \leq 0$ разложение по собственным функциям $\cos(n\pi y/b)$, а при $z \geq 0$ — по собственным функциям $\cos(n - 1/2)\pi y/b$ и записывая усло-

вие непрерывности φ_t и $\partial\varphi_t/\partial z$ при $z=0$, $0 \leq y \leq b$, получаем

$$1 + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos (n - 1/2) \frac{\pi y}{b},$$

$$ik(1 - A_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n A_n \cos \frac{n\pi y}{b} = - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n-1/2} B_n \cos (n - 1/2) \frac{\pi y}{b},$$

где A_n и B_n — неизвестные коэффициенты, а $\gamma_p = [(p\pi/b)^2 - k^2]^{1/2}$. Исключая из этих уравнений A_n , получим для B_n систему уравнений типа системы (г) из задачи 4.11. Решая ее, определяем B_n .

$$(\alpha_n = i\gamma_{n-1/2}; \quad n = 1, 2, \dots; \quad \beta_1 = k, \quad \beta_m = t\gamma_{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots;$$

$$K(\alpha) = \gamma \operatorname{th} \gamma b, \quad H(\alpha) = 4kb\gamma^{-1} \operatorname{th} \gamma b)$$

Данная система уравнений является обобщением системы, рассмотренной Линфутом и Шепердом [Linfoot E. H., Shepherd W. M., *Quart. J. Math.* (Oxford). **10** (1939), 84—98], см. также статью Магнуса и Оберхеттингера [Magnus W., Oberhettinger F., *Comm. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 393—410].

Тем же методом можно рассмотреть задачу о диафрагме в волноводе, решение которой было дано формулами (3.99) и (3.100) в § 3.6.

4.13. Магнус [Magnus W., *Z. Phys.*, **177** (1941), 168—179] показал, что интегральное уравнение

$$\int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k|x-\xi|) f(\xi) d\xi = g(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (a)$$

можно решить, положив

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m J_m(kx) a_m, \\ f(x) &= \frac{1}{2} \pi e^{i\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m (2m+1) x^{-1} J_{m+1/2}(kx) C_m. \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Неизвестные коэффициенты C_m связаны с известными коэффициентами a_m уравнениями

$$\epsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} C_m \left[\frac{1}{-n+m+1/2} + \frac{1}{n+m+1/2} \right] = a_n, \quad \text{где } \epsilon_0 = 1, \quad \epsilon_n = 2 \text{ при } n \geq 1. \quad (в)$$

Уравнения (в) и их решение можно получить из уравнения (а) и равенства (б) методом, близким к методу Винера — Хопфа. Применяя к уравнению (а) преобразование Фурье, получаем

$$-2i\gamma^{-1}F_+(x) = G_+(x) + H_-(x), \quad (г)$$

где $F_+(x)$ и $H_-(x)$ неизвестны. Положим $\alpha = -k \cos \beta$ и $\gamma = -ik \sin \beta$ (ср. с § 1.6). Будем писать $G_+(\beta)$ вместо $G_+(x)$ и т. д. Так как $H_-(\beta)$ не имеет особенностей в точке $\beta = 0$ ($\alpha = -k$), то, исследуя разрезы и учитывая

симметрию в плоскости β , найдем, что $H_-(\beta) = H_-(-\beta)$. В плоскости β уравнение (г) принимает вид

$$2(k \sin \beta)^{-1} F_+(\beta) = G_+(\beta) + H_-(\beta). \quad (д)$$

Изменим знак перед β и вычтем полученное уравнение из уравнения (д). В результате получим

$$2(k \sin \beta)^{-1} [F_+(\beta) + F_+(-\beta)] = G_+(\beta) - G_+(-\beta). \quad (е)$$

Применяя к уравнению (б) преобразование Фурье, находим (см. книгу Эрдейи и др. [1]), что

$$\left. \begin{aligned} G_+(\alpha) &= \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} \gamma^{-1} (\alpha + \gamma)^{-m} k^m a_m, \\ F_+(\alpha) &= \frac{\pi i}{(2\pi)^{1/2}} \sum_{m=0}^{\infty} k^{m+1/2} (\alpha + \gamma)^{-m-1/2} C_m. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Заменим α на $-k \cos \beta$, учитывая, что согласно аналитическому продолжению $(\alpha + \gamma)^{1/2} = -ik^{1/2} \exp(i/2\beta)$. Подставляя все эти результаты в уравнение (е), получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos m\beta a_m = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)\beta C_m.$$

Умножая это уравнение на $\cos n\beta$ и интегрируя от 0 до π , находим систему (в). Если это же уравнение умножить на $\cos(n + 1/2)\beta$ и проинтегрировать от 0 до π , то непосредственно получается решение Магнуса

$$C_m = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{-n + m + 1/2} + \frac{1}{n + m + 1/2} \right].$$

В проведенном выше рассуждении есть один дефект: мы заранее предположили виды разложений для $f(x)$ и $g(x)$ [см. формулы (ж)]. Было бы весьма интересно обобщить метод на случай, когда входящие в функциональное уравнение Винера — Хопфа функции имеют точки ветвления.

4.14. Рассмотрим двумерную задачу определения поля идеально проводящей полосы $0 \leq x \leq a$, заряженной до потенциала V . Обозначим плотность заряда на полосе через $f(x)$. Согласно принципу наложения, потенциал в произвольной точке (x, y) будет равен

$$\varphi = - \int_0^a f(\xi) \ln [(x - \xi)^2 + y^2] d\xi.$$

Отсюда находим для $f(\xi)$ следующее интегральное уравнение

$$-2 \int_0^a f(\xi) \ln(|x - \xi|) d\xi = V, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Продифференцировав его по x , найдем

$$\int_0^a \frac{f(\xi)}{\xi - x} d\xi = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (a)$$

Чтобы решить это уравнение, обозначим через $g(x)$ значение левой части при $x > a$. Применяв преобразование Меллина, изменив в левой части порядок интегрирования и положив $x = \xi\eta$, получаем

$$\int_0^a f(\xi) \xi^{s-1} d\xi \int_0^\infty \eta^{s-1} (1-\eta)^{-1} d\eta = \int_a^\infty g(x) x^{s-1} dx,$$

или

$$F_p(s) \pi \operatorname{ctg} \pi s = G_N(s).$$

Это уравнение является функциональным уравнением Винера — Хопфа, решаемым обычным путем. Если действовать в духе методов, излагаемых в этой книге, то промежуточный шаг в виде интегрального уравнения (a) не нужен. Задача может быть решена применением преобразования Меллина непосредственно к уравнению в частных производных в полярных координатах (см. § 4.6).

НЕКОТОРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ

§ 5.1. Введение

Все рассмотренные в предыдущих главах задачи являются далеко идущей идеализацией практических задач. Например, в задачах для двумерного волнового уравнения мы рассматривали только полубесконечные, параллельные, бесконечно тонкие пластины. В этой главе мы изложим несколько приближенных методов, которые позволят рассмотреть задачи для пластин конечной толщины и конечной длины.

С математической точки зрения рассматривавшиеся до сих пор задачи для двумерного волнового уравнения характеризовались тем, что смешанные граничные условия задавались на двух связанных частях бесконечных параллельных плоскостей, например на каждой из плоскостей $y = \pm b$, $-\infty < x < \infty$ мы имели различные условия, содержащие значения φ и $d\varphi/du$ при $-\infty < x < 0$ и при $0 < x < \infty$. Было бы желательно уметь решать краевые задачи для двумерного волнового уравнения при следующих условиях.

1. Граничные поверхности расположены как при $x = \text{const}$, так и при $y = \text{const}$, т. е. граничные поверхности могут быть не только параллельны, но и перпендикулярны.

2. Смешанные граничные условия задаются на m частях, т. е. граничная координатная поверхность делится на m связанных частей и на каждой из них задается свое условие, содержащее значения φ и $d\varphi/du$. Мы ограничимся лишь задачами с $m = 3$.

В этой главе мы сможем сделать лишь некоторые шаги в обоих указанных направлениях. В точных решениях задач, рассматриваемых в предыдущих главах, мы имели дело с функциональным уравнением Винера — Холфа

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)\Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0,$$

где A, B, C — заданные аналитические функции, Φ_+ и Ψ_- — неизвестные функции, регулярные в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, а само уравнение выполнялось в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ комплексной плоскости α . Задачи, рассматриваемые в настоящей главе, приводятся к функциональному уравнению вида

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + E(\alpha)\Phi_+(-\alpha) + B(\alpha)\Psi_-(\alpha) + D(\alpha)\Phi_1(\alpha) + C(\alpha) = 0, \quad (5.1)$$

где A, \dots, E известны, Φ_+ и Ψ_- — неизвестны, а Φ_1 — некоторая неизвестная целая функция. Уравнение (5.1) нельзя точно решить методом Винера — Хопфа. В некоторых случаях удобно положить $E(\alpha) = B(\alpha)b(\alpha)$ и записать уравнение (5.1) в следующем виде:

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)[\Psi_-(\alpha) + b(\alpha)\Phi_+(-\alpha)] + D(\alpha)\Phi_1(\alpha) + C(\alpha) = 0. \quad (5.2)$$

При получении приближенного решения существенную роль будет играть удачный выбор функции $b(\alpha)$.

В § 5.2 мы выведем уравнения типа (5.1) для ряда конкретных задач. Остальные параграфы этой главы можно разделить на две части. В одной части рассматриваются задачи с „перпендикулярными границами“ (упомянутый выше случай 1), в другой — задачи со смешанными граничными условиями, задаваемыми на граничной координатной поверхности, разбитой на три части (упомянутый выше случай 2). Читатель, интересующийся в основном приложениями, при первом чтении может пропустить § 5.3 и 5.5, читатель же, интересующийся математической стороной вопроса, может предпочесть начать чтение именно с них. Для чтения § 5.3 и 5.5 нужно как следует уяснить себе основную теорему о разбиении (теорему В из § 1.3): если $f(\alpha)$ регулярна в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ и ведет себя должным образом при $|\sigma| \rightarrow \infty$ в этой полосе, то ее можно представить в виде

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta = f_+(\alpha) + f_-(\alpha), \quad (5.3)$$

где $\tau_- < c < \tau < d < \tau_+$, функция $f_+(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau > \tau_-$, а функция $f_-(\alpha)$ регулярна в полуплоскости $\tau < \tau_+$.

В книге такого объема мы не имеем возможности, не уклоняясь от нашей главной темы, воздать должное всем методам решения. Метод Винера — Хопфа является одним из многих методов, применяемых для решения задач теории поля, или, с несколько иной точки зрения, одним из многих методов решения сингулярных интегральных уравнений. Задачи, точно решаемые методом Винера — Хопфа, в ряде случаев с достаточной степенью точности также можно решить каким-либо другим методом, причем решение иногда оказывается более простым. Это замечание относится, в частности, к приближенным методам, рассматриваемым в этой главе.

Обсуждение различных методов решения задач интересующего нас типа можно найти в книге Морса и Фешбаха [1]. Из более специальных работ укажем работы Маркувица [1] и Л. Левина [1] по теории волноводов и работу Баукампа [1] по теории дифракции. Отметим, что в настоящее время метод Винера — Хопфа, по-видимому,

дает единственный подход к задаче о толстой пластине (§ 5.4); он также удобен при рассмотрении задач, связанных с широкими полосами или щелями (§ 5.6). В задачах об излучении из волновода с фланцем [§ 5.2, (5.14)], о соединении волноводов различной ширины (задача 5.1), о дифракции на узкой щели и узкой полосе, где надо определить поле в отверстии конечной ширины или распределение токов на конечном препятствии, метод Винера — Хопфа, приспособленный для полубесконечных отверстий и препятствий, естественно, не является наиболее удобным. Однако для этих задач при определенных значениях параметров могут оказаться удобными приближенные методы, рассматриваемые в настоящей главе.

Следует также пояснить смысл термина „приближенные методы“. Задачу, рассматриваемую в § 5.4, можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Для ее решения придется численно решать систему из конечного числа этих уравнений, так что решение бесконечной системы, а следовательно, и решение задачи известны только приближенно. Для достаточно малых волновых чисел, т. е. для длинных волн, можно определить решение с любой степенью точности, решая достаточное число уравнений. Если же волновое число превосходит некоторое значение, то может оказаться, что решение системы n уравнений для некоторых n неизвестных, выбранной из бесконечной системы, не сходится при $n \rightarrow \infty$, т. е. в этом случае приближенное решение получить таким путем нельзя. Решения, найденные в § 5.5 и 5.6, являются приближенными в другом смысле. Здесь уже в начале решения делается замена интеграла первым членом его асимптотического разложения, и поэтому решение получается заведомо приближенным. Иногда удается оценить порядок ошибки. Эту ошибку нельзя сделать меньше некоторого минимума, и ее величина растет при уменьшении волнового числа. Эти два типа аппроксимации соответствуют различной природе функций комплексного переменного, входящих в функциональное уравнение Винера — Хопфа. В первом случае функции имеют только простые полюсы, во втором — точки ветвления. К этому вопросу мы еще вернемся в конце главы.

§ 5.2. Некоторые задачи, которые нельзя точно решить методом Винера — Хопфа

В этом параграфе мы рассмотрим формулировку ряда задач, которые нельзя точно решить методом Винера — Хопфа. Мы ограничимся лишь очень простыми примерами, причем рассмотрим их с различных точек зрения, чтобы показать возможные пути, приводящие к уравнениям типа (5.2).

В этом параграфе через $\Phi(x)$, $\Phi_+(x)$ и т. д. мы будем обозначать преобразование Фурье как по переменной x , так и по переменной y . Штрихом иногда обозначается дифференцирование по x ,

а иногда — дифференцирование по y . Из контекста будет ясно, какой случай имеется в виду.

Пусть плоская волна $\exp(-ikx)$, набегающая из $x = +\infty$, нормально падает на торец пластины конечной толщины $-b \leq y \leq b$, $-\infty < x \leq 0$, так что поле симметрично относительно линии $y = 0$. Положим $\varphi_i = \varphi_i + \varphi$. Применяя к двумерному волновому уравнению преобразование Фурье по переменной x , обычным путем получаем

$$\Phi(\alpha) = A(\alpha) \exp(-\gamma y) \quad \text{при } y \geq b. \quad (5.4)$$

При $-b \leq y \leq b$, $x \geq 0$, интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + i\alpha(\varphi)_0 - (2\pi)^{1/2} \alpha^2 \Phi_+(\alpha).$$

Таким образом, для этой области уравнение в частных производных принимает вид

$$\frac{d^2 \Phi_+(\alpha)}{dy^2} - \gamma^2 \Phi_+(\alpha) = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 - (2\pi)^{-1/2} i\alpha(\varphi)_0. \quad (5.5)$$

Предположим, что на поверхности пластины должно выполняться условие $\partial \varphi_i / \partial n = 0$, так что при $x = 0$, $-b \leq y \leq b$ имеем $\partial \varphi / \partial x = ik$. Функция $(\varphi)_0$ нам неизвестна. Для того чтобы исключить ее из уравнения (5.5), изменим в этом уравнении знак перед α и сложим результат с уравнением (5.5). Получим

$$\frac{d^2 [\Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha)]}{dy^2} - \gamma^2 [\Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha)] = (2\pi)^{-1/2} 2ik.$$

Решая это уравнение с учетом симметрии относительно линии $y = 0$, находим

$$\Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha) = -(2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2} + B \operatorname{ch} \gamma y \quad \text{при } 0 \leq y \leq b. \quad (5.6)$$

Подставим в соотношение (5.4) $\Phi = \Phi_+ + \Phi_-$ при $y = b$, а затем продифференцируем соотношение (5.4) по y и подставим $\Phi' = \Phi'_+ + \Phi'_-$ при $y = b$. Исключая A и учитывая, что $\Phi'_- = 0$, получаем

$$\Phi_+(\alpha) + \Phi_-(\alpha) = -\gamma^{-1} \Phi'_+(\alpha). \quad (5.7a)$$

Аналогично из равенства (5.6) при $y = b$ находим

$$\begin{aligned} \Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha) = & -(2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2} + \\ & + \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b [\Phi'_+(\alpha) + \Phi'_+(-\alpha)]. \end{aligned} \quad (5.7b)$$

Исключение $\Phi_+(\alpha)$ из уравнений (5.7a) и (5.7b) дает

$$\begin{aligned} 2\gamma^{-1} (1 - e^{-2\gamma b})^{-1} \Phi'_+(\alpha) + \\ + [(\Phi_-(\alpha) - \Phi_+(-\alpha)) + \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b \Phi'_+(-\alpha)] - (2\pi)^{-1/2} ik\gamma^{-2} = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Это уравнение вида (5.2) с $b(\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b$, т. е. $b(\alpha)$ имеет только простые полюсы и не имеет точек ветвления. Решение функционального уравнения (5.8) завершает решение задачи.

Другой ход решения задачи получится при использовании преобразования Фурье по переменной y и граничного условия при $x = 0$. Обычным путем находим

$$\Phi(\alpha) = A(\alpha) \exp(-\gamma x) \quad \text{при } x \geq 0. \quad (5.9)$$

Обозначим преобразования Фурье при $x = 0$ через

$$\Phi_+(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_b^{\infty} \varphi e^{i\alpha(y-b)} dy, \quad \Phi_1(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-b}^b \varphi e^{i\alpha y} dy. \quad (5.10a)$$

Функция $\Phi_1(\alpha)$ есть целая функция α , а функция $\Phi_+(\alpha)$ имеет алгебраический рост при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости. Из симметрии относительно линии $y = 0$ заключаем, что

$$\Phi(\alpha) = e^{iab} \Phi_+(\alpha) + \Phi_1(\alpha) + e^{-iab} \Phi_+(-\alpha). \quad (5.10b)$$

Так как $\partial\varphi/\partial x = ik$ при $x = 0$, $-b \leq y \leq b$, то

$$\Phi_1'(\alpha) = \frac{ik}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-b}^b e^{i\alpha y} dy = \frac{2ik}{(2\pi)^{1/2} \alpha} \sin \alpha b.$$

Продифференцируем соотношение (5.9) и исключим A из результата и соотношения (5.9). При $x = 0$, согласно введенным выше обозначениям, будем иметь

$$\begin{aligned} -\gamma [e^{iab} \Phi_+(\alpha) + \Phi_1(\alpha) + e^{-iab} \Phi_+(-\alpha)] = \\ = e^{iab} \Phi_+'(\alpha) + 2ik(2\pi)^{1/2} \alpha^{-1} \sin \alpha b + e^{-iab} \Phi_+'(-\alpha). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Рассмотрим теперь область $x \leq 0$, $y \geq b$. Как и при выводе формулы (5.6), применяем преобразование Фурье по переменной y и исключаем неизвестные значения φ при $y = b$. Получаем

$$\Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha) = B \exp(\gamma x) \quad \text{при } x \leq 0,$$

где функция Φ_+ определена первой из формул (5.10a). Вычисляя производную по x при $x = 0$ и исключая B , находим

$$\gamma [\Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha)] = \Phi_+'(\alpha) + \Phi_+'(-\alpha). \quad (5.12)$$

Для того чтобы исключить функцию $\Phi_+(\alpha)$, умножим уравнение (5.11) на $\exp(-i\alpha b)$ и сложим результат с уравнением (5.12); это дает

$$\begin{aligned} 2\Phi_+'(\alpha) - \gamma(1 - e^{-2iab}) [\Phi_+(-\alpha) + i\gamma^{-1} \operatorname{ctg} \alpha b \Phi_+'(-\alpha)] + \\ + \gamma e^{-iab} \Phi_1(\alpha) + (2\pi)^{-1/2} 2ik\alpha^{-1} \sin \alpha b e^{-iab} = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Полученное уравнение имеет вид (5.2) с $b(\alpha) = i\gamma^{-1} \operatorname{ctg} \alpha b$, т. е. в этом случае $b(\alpha)$ имеет точки ветвления $\alpha = \pm k$.

То обстоятельство, что коэффициент при $\Phi'_+(-\alpha)$ в уравнении (5.8) будет иметь только полюсы, а в уравнении (5.13) имеет также и точки ветвления, можно было бы предвидеть и на основании общих соображений. Действительно, уравнение (5.8) для $\Phi'_+(-\alpha)$ составлено для границы конечной длины, тогда как уравнение (5.13) для $\Phi'_+(-\alpha)$ составлено для границы, простирающейся до бесконечности.

Перейдем к задаче о полубесконечном волноводе $-b \leq y \leq b$, $-\infty < x \leq 0$ с фланцем $x=0$, $|y| \geq b$. Из правой полуплоскости $x \geq 0$, $-\infty < y < \infty$ на открытый конец волновода падает плоская волна $\exp(-ikx)$. Предположим, что на стенках волновода и на фланце соответственно должны выполняться условия $\partial\varphi_i/\partial y = 0$ и $\partial\varphi_i/\partial x = 0$. Рассуждая, как и выше, находим

$$\begin{aligned} \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_+(-\alpha, y) &= -(2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2} + A \exp(-\gamma y) \text{ при } y \gg b, \\ \Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y) &= B \operatorname{ch} \gamma y \text{ при } 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти уравнения по y при $y=b$, исключая A, B и $\Phi_+(\alpha)$ и учитывая, что $\Phi'_-(\alpha, b) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} 2\gamma^{-1}(1 - e^{-2\gamma b})^{-1} \Phi'_+(\alpha) + [\Phi_+(-\alpha) - \Phi_-(\alpha)] + \\ + \gamma^{-1} \Phi'_+(-\alpha) + (2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2} = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Это опять уравнение типа (5.2) с $b(\alpha) = \gamma^{-1}$. Так как это уравнение для $\Phi'_+(-\alpha)$ составлено для границы, простирающейся до бесконечности, то $b(\alpha)$ имеет, как и следовало ожидать, точки ветвления.

В заключение этого параграфа рассмотрим типичную задачу со смешанными граничными условиями, задаваемыми на трех частях координатной граничной поверхности. Пусть требуется найти решение уравнения $\nabla^2\varphi + k^2\varphi = 0$ в области $-\infty < y < \infty$, $x \geq 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 \text{ при } x=0, \quad -b < y < b; \\ \varphi = 0 \text{ при } x=0, \quad -\infty < y < -b, \quad b < y < \infty. \end{aligned}$$

Применяя преобразование Фурье по переменной y , обычным путем находим $\Phi(\alpha) = A(\alpha) \exp(-\gamma x)$, т. е. выражение (5.9). Продифференцируем по x , исключим $A(\alpha)$ и положим $x=0$. Так как функция φ симметрична относительно $y=0$, то можно использовать обозначения (5.10а) и (5.10б). Подстановка в граничные условия при $x=0$ дает

$$e^{iab} \Phi'_+(\alpha) + \gamma \Phi_1(\alpha) + e^{-iab} \Phi'_+(-\alpha) = -(2\pi)^{-1/2} 2\alpha^{-1} \sin ab. \quad (5.15)$$

Это уравнение типа (5.12) с $b(\alpha) = 0$.

Наконец, рассмотрим эту же задачу, применяя преобразование Фурье по переменной x . Рассуждая так же, как при выводе уравнения (5.6), после исключения неизвестных функций при $x=0$ находим

$$\Phi_+(\alpha, y) - \Phi_+(-\alpha, y) = Ae^{-\gamma y} \quad \text{при } y \geq b,$$

$$\Phi_+(\alpha, y) + \Phi_+(-\alpha, y) = -(2\pi)^{-1/2} 2\gamma^{-2} + B \operatorname{ch} \gamma y \quad \text{при } 0 \leq y \leq b$$

Дифференцируем оба уравнения по y при $y=b$ и исключаем затем A , B и $\Phi_+(\alpha, b)$. Вместо $\Phi_+(\alpha, b)$ будем писать $\Phi_+(\alpha)$ и т. д. Получим

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}(1 + \operatorname{cth} \gamma b) \Phi'_+(\alpha) - 2\Phi_+(-\alpha) - \\ - \gamma^{-1}(1 - \operatorname{cth} \gamma b) \Phi'_+(-\alpha) - (2\pi)^{-1/2} 2\gamma^{-2} = 0. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Это опять уравнение типа (5.2), причем функция $b(\alpha)$ имеет точки ветвления $\alpha = \pm k$.

В настоящее время из пяти функциональных уравнений, которые мы вывели в этом параграфе, а именно уравнений (5.8), (5.13), (5.14), (5.15) и (5.16), удается удовлетворительно решить методом Винера — Хопфа лишь уравнение (5.8) при малых b и уравнение (5.15) при больших b . В оставшейся части этой главы мы рассмотрим соответствующие частные случаи уравнения (5.2). Вместе с тем, в этом параграфе мы хотели показать, сколь ценно было бы найти общий метод решения уравнения (5.2).

§ 5.3. Общая теория для функционального уравнения одного частного вида

В этом параграфе мы изучим тот специальный вид функционального уравнения (5.2), когда в нем отсутствует член с целой функцией $\Phi_1(\alpha)$, а именно рассмотрим уравнение

$$A(\alpha)\Phi_+(\alpha) + B(\alpha)[\Psi_-(\alpha) + b(\alpha)\Phi_+(-\alpha)] + C(\alpha) = 0, \quad (5.17)$$

справедливое в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ комплексной плоскости α . Положим

$$\frac{A(\alpha)}{B(\alpha)} = \frac{K_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}, \quad \frac{K_-(\alpha)C(\alpha)}{B(\alpha)} = E_+(\alpha) + E_-(\alpha). \quad (5.18)$$

Подставив эти результаты в уравнение (5.17) и перегруппировав члены, получим

$$\begin{aligned} K_+(\alpha)\Phi_+(\alpha) + E_+(\alpha) = \\ = -K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) - E_-(\alpha) - b(\alpha)K_-(\alpha)\Phi_+(-\alpha). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Последний член в правой части в общем случае не регулярен ни в верхней, ни в нижней полуплоскости.

Во многих задачах единственными особенностями функции $b(\alpha)$ являются простые полюсы в нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$, и мы

рассмотрим прежде всего этот случай. Тогда функцию $b(\alpha)$ можно записать в виде

$$b(\alpha) = b_-(\alpha) + \sum_{s=1}^n \frac{b_s}{\alpha - \beta_s}, \quad (5.20)$$

где b_s — вычет функции $b(\alpha)$ в точке $\alpha = \beta_s$ и сумма берется по всем полюсам в нижней полуплоскости (число полюсов может быть бесконечно). Подставим выражение (5.20) в уравнение (5.19) и прибавим к обеим частям одинаковые слагаемые

$$\begin{aligned} K_+(\alpha) \Phi_+(\alpha) + E_+(\alpha) + \sum_{s=1}^n \frac{b_s}{\alpha - \beta_s} K_-(\beta_s) \Phi_+(-\beta_s) = \\ = -K_-(\alpha) \Psi_-(\alpha) - E_-(\alpha) - b_-(\alpha) K_-(\alpha) \Phi_+(-\alpha) - \\ - \sum_{s=1}^n \frac{b_s}{\alpha - \beta_s} [K_-(\alpha) \Phi_+(-\alpha) - K_-(\beta_s) \Phi_+(-\beta_s)]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Эти дополнительные слагаемые выбраны так, чтобы правая и левая части уравнения (5.21) были соответственно регулярны в верхней и нижней полуплоскости. Далее применяем, как обычно, метод Винера — Хопфа. В частности, предположим, что поведение на бесконечности обеих частей уравнения (5.12) таково, что каждая из них должна тождественно равняться нулю. Имеем

$$K_+(\alpha) \Phi_+(\alpha) + E_+(\alpha) + \sum_{s=1}^n \frac{b_s}{\alpha - \beta_s} K_-(\beta_s) \Phi_+(-\beta_s) = 0. \quad (5.22a)$$

Это уравнение справедливо для всех α . Положим $\alpha = -\beta_r$, ($r = 1, 2, \dots, n$). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных постоянных $\Phi_+(-\beta_s)$, которые мы обозначим через x_s , а именно систему

$$\begin{aligned} K_+(-\beta_r) x_r + E_+(-\beta_r) - \sum_{s=1}^n \frac{b_s}{\beta_r + \beta_s} K_-(\beta_s) x_s = 0 \quad (5.22b) \\ (r = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Определением x_s решение уравнения (5.17) заканчивается.

Отметим также (этот результат будет использован ниже), что аналогичное решение функционального уравнения

$$A(\alpha) [\Phi_+(\alpha) + a(\alpha) \Psi_+(-\alpha)] + B(\alpha) \Psi_-(\alpha) + C(\alpha) = 0, \quad (5.23a)$$

где

$$a(\alpha) = a_+(\alpha) + \sum_{s=1}^m \frac{a_s}{\alpha - \alpha_s}, \quad \text{Im } \alpha_s > \tau_-, \quad (5.23b)$$

может быть получено из уравнения

$$K_-(\alpha)\Psi_-(\alpha) + E_-(\alpha) + \sum_{s=1}^m \frac{a_s}{\alpha - a_s} K_+(\alpha_s) y_s = 0, \quad (5.23в)$$

в котором постоянные $y_s = \Psi_-(-\alpha_s)$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$K_-(-\alpha_r) y_r + E_-(-\alpha_r) - \sum_{s=1}^m \frac{a_s}{\alpha_r + a_s} K_+(\alpha_s) y_s = 0. \quad (5.23г)$$

Когда эти результаты используются для решения конкретных задач, постоянным x_r, y_r можно приписать определенный физический смысл (см. задачу 5.2).

Рассмотрим теперь уравнение (5.17) с $b(\alpha)$ общего вида. Применяя формулу (5.3), получаем

$$\begin{aligned} & b(\alpha) K_-(\alpha) \Phi_+(-\alpha) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{b(\zeta) K_-(\zeta) \Phi_+(-\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{b(\zeta) K_-(\zeta) \Phi_+(-\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $\tau_- \leq c < \text{Im } \alpha < d \leq \tau_+$, первый интеграл регулярен в верхней полуплоскости $\tau > \tau_-$, а второй регулярен в нижней полуплоскости $\tau < \tau_+$. Предполагается, конечно, что эти интегралы сходятся. Подставим выражение (5.24) в уравнение (5.19) и произведем обычную в методе Винера — Хопфа перегруппировку. Если целая функция оказывается равной нулю, то получим

$$K_+(\alpha) \Phi_+(\alpha) + E_+(\alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{b(\zeta) K_-(\zeta) \Phi_+(-\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = 0, \quad (5.25а)$$

$$K_-(\alpha) \Psi_-(\alpha) + E_-(\alpha) - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{b(\zeta) K_-(\zeta) \Phi_+(-\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = 0, \quad (5.25б)$$

Первое уравнение является интегральным уравнением для $\Phi_+(\alpha)$. Определив из него $\Phi_+(\alpha)$, из второго уравнения можно найти $\Psi_-(\alpha)$.

Если единственными особенностями функций $b(\alpha)$ в нижней полуплоскости являются простые полюсы, то путь интегрирования в уравнении (5.25а) можно замкнуть в нижней полуплоскости и вычислить интеграл с помощью вычетов. Если $b(\alpha)$ записать в виде (5.20), то после вычисления интеграла получим точно (5.22а), так что в этом случае метод интегрального уравнения только повторяет результат, полученный более прямым путем в начале этого параграфа.

В общем случае уравнение (5.25а) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма следующим образом. Положим для простоты $c=0$, а значения ζ на вещественной оси будем обозначать через s . Пусть α стремится к некоторой точке t вещественной оси. Путь интегрирования должен обходить эту точку снизу. Используя результат задачи 1.24, находим, что уравнение (5.25а) принимает вид

$$K_+(t)\Phi_+(t) + E_+(t) + \frac{1}{2}b(t)K_-(t)\Phi_+(-t) + \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)K_-(s)\Phi_+(-s)}{s-t} ds = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad (5.26)$$

где символ V. P. показывает, что интеграл берется в смысле главного значения по Коши. Особенность ядра может быть устранена следующим образом. По теореме Коши

$$\Phi_+(-\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_+(-s)}{s-\alpha} ds, \quad \alpha \text{ в нижней полуплоскости,} \quad (5.27)$$

причем мы полагаем, что $\Phi_+(+\alpha)$ равномерно стремится к нулю, когда $(+\alpha)$ стремится к бесконечности в верхней полуплоскости, и, следовательно, путь интегрирования можно замкнуть в нижней полуплоскости. Устремим α к вещественному числу t при соответствующем обходе этой точки при интегрировании. Вместо формулы (5.27) получим

$$\Phi_+(-t) = \frac{1}{2}\Phi_+(-t) - \frac{1}{2\pi i} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_+(-s)}{s-t} ds, \quad -\infty < t < \infty. \quad (5.28)$$

Подставляя выражение для $\frac{1}{2}\Phi_+(-t)$ из формулы (5.28) в уравнение (5.26), получаем следующее интегральное уравнение

$$K_+(t)\Phi_+(t) + E_+(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(s)K_-(s) - b(t)K_-(t)}{s-t} \Phi_+(-s) ds = 0, \quad -\infty < t < \infty, \quad (5.29)$$

где теперь ядро в точке $s=t$ конечно и поэтому символ V. P. перед знаком интеграла опущен.

Все изложенное в этом параграфе после равенства (5.24) в дальнейшем использовано не будет, однако мы включили этот материал для того, чтобы показать возможные пути решения более сложных задач.

§ 5.4. Дифракция на толстой полубесконечной пластине

Рассмотрим подробно пример, иллюстрирующий применение теории, изложенной в начале предыдущего параграфа. Пусть плоская волна

$$\varphi_i = \exp(-ikx \cos \Theta - lky \sin \Theta)$$

падает на пластину $x \leq 0$, $-b \leq y \leq b$, на поверхности которой должно выполняться условие $\partial\varphi_i/\partial n = 0$. Нижеследующее решение основано на работе Джонса [4], который рассмотрел также случай с граничным условием $\varphi_i = 0$ на поверхности пластины. Наш вывод основных уравнений несколько отличается от вывода Джонса. Положим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i &= \varphi + e^{-ikx \cos \Theta - lky \sin \Theta} + e^{-ikx \cos \Theta + lk(y-2b) \sin \Theta} \\ &\quad \text{при } y \geq b, \\ \varphi_i &= \varphi \quad \text{при } -b \leq y \leq b, \cdot x \geq 0 \text{ и при } y \leq b, \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

так что при $|x| \rightarrow \infty$, $|y| \rightarrow \infty$ имеем $\varphi \rightarrow 0$, а также $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности пластины. Как обычно, вводим преобразования Фурье

$$\Phi_+(\alpha, y) = \frac{-i}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \varphi e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi_-(\alpha, y) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 \varphi e^{i\alpha x} dx.$$

Функция $\Phi_+(\alpha, y)$ регулярна в полуплоскости $\tau > k_2 \cos \Theta$, а функция Φ_- регулярна при $\tau < k_2$; обе эти функции регулярны в полосе $k_2 \cos \Theta < \tau < k_2$.

Согласно формулам (5.30), функция Φ'_+ непрерывна при $y = \pm b$, а функция Φ_+ непрерывна при $y = -b$. Если $\varphi(x, b+0)$ — это значения $\varphi(x, y)$ при $y \rightarrow b$ со стороны $y > b$ и т. д., то, согласно формулам (5.30), для $y = +b$ можно записать

$$\varphi(x, b+0) + 2e^{-ikx \cos \Theta - ikb \sin \Theta} = \varphi(x, b-0) \quad \text{при } x > 0,$$

или

$$\Phi_+(x, b+0) + \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \cdot \frac{\exp(-ikb \sin \Theta)}{\alpha - k \cos \Theta} = \Phi_+(x, b-0). \quad (5.31)$$

Применим к двумерному стационарному волновому уравнению преобразование Фурье по x . В области $-b \leq y \leq b$, $x \geq 0$ можно записать

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx = \frac{i\alpha}{(2\pi)^{1/2}} (\varphi)_0 - \alpha^2 \Phi_+(\alpha, y),$$

где $(\varphi)_0$ — это значения φ при $x=0$, $-b \leq y \leq b$. Таким образом, после применения преобразования Фурье к уравнению в част-

ных производных в области $x \geq 0$, $-b \leq y \leq b$ мы получим

$$\frac{d^2 \Phi_+(\alpha, y)}{dy^2} - \gamma^2 \Phi_+(\alpha, y) = -i\alpha (2\pi)^{-1/2} (\varphi)_0. \quad (5.32)$$

Для исключения $(\varphi)_0$ изменим в этом уравнении знак перед α и сложим результат с исходным уравнением. Найдем

$$\frac{d^2}{dy^2} [\Phi_+(\alpha, y) + \Phi_+(-\alpha, y)] - \gamma^2 [\Phi_+(\alpha, y) + \Phi_+(-\alpha, y)] = 0.$$

или

$$\Phi_+(\alpha, y) + \Phi_+(-\alpha, y) = Ae^{-\gamma y} + Be^{\gamma y}, \quad -b \leq y \leq b.$$

Отсюда имеем

$$\Phi_+(\alpha, b-0) + \Phi_+(-\alpha, b-0) = Ae^{-\gamma b} + Be^{\gamma b}, \quad (5.33a)$$

$$\Phi'_+(\alpha, b) + \Phi'_+(-\alpha, b) = -\gamma Ae^{-\gamma b} + \gamma Be^{\gamma b}, \quad (5.33b)$$

$$\Phi_+(\alpha, -b) + \Phi_+(-\alpha, -b) = Ae^{\gamma b} + Be^{-\gamma b}, \quad (5.34a)$$

$$\Phi'_+(\alpha, -b) + \Phi'_+(-\alpha, -b) = -\gamma Ae^{\gamma b} + \gamma Be^{-\gamma b}. \quad (5.34b)$$

Введем обозначения

$$\left. \begin{aligned} \Phi_+(\alpha, b-0) + \Phi_+(\alpha, -b) &= S_+(\alpha), \\ \Phi_+(\alpha, b-0) - \Phi_+(\alpha, -b) &= D_+(\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

и аналогичные обозначения для продифференцированных величин. Из уравнений (5.33) и (5.34) исключим A и B ; в результате получим

$$S'_+(\alpha) + S'_+(-\alpha) = \gamma \operatorname{cth} \gamma b [D_+(\alpha) + D_+(-\alpha)], \quad (5.36a)$$

$$D'_+(\alpha) + D'_+(-\alpha) = \gamma \operatorname{th} \gamma b [S_+(\alpha) + S_+(-\alpha)]. \quad (5.36b)$$

Теперь применим преобразования Фурье в областях $y \geq b$, $y \leq -b$; это дает

$$\Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y) = Ce^{-\gamma y} \quad \text{при } y \geq b, \quad (5.37a)$$

$$\Phi_+(\alpha, y) + \Phi_-(\alpha, y) = De^{\gamma y} \quad \text{при } y \leq -b. \quad (5.37b)$$

Продифференцируем эти уравнения по y и исключим из результата и уравнений (5.37) C и D ; затем положим в соответствующих уравнениях $y = b+0$ и $y = -b$. Поскольку $\Phi'_-(\alpha, b) = \Phi'_-(\alpha, -b) = 0$, найдем

$$\Phi'_+(\alpha, b) = -\gamma [\Phi_+(\alpha, b+0) + \Phi_-(\alpha, b)], \quad (5.38a)$$

$$\Phi'_+(\alpha, -b) = \gamma [\Phi_+(\alpha, -b) + \Phi_-(\alpha, -b)]. \quad (5.38b)$$

Образум сумму и разность этих уравнений, используем уравнение (5.31) и введем обозначения (5.35). Получим

$$S'_+(\alpha) = -\gamma \left[D_+(\alpha) + D_-(\alpha) - \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-ikb \sin \theta)}{\alpha - k \cos \theta} \right], \quad (5.39a)$$

$$D'_+(\alpha) = -\gamma \left[S_+(\alpha) + S_-(\alpha) - \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-ikb \sin \theta)}{\alpha - \cos \theta} \right]. \quad (5.39b)$$

Решив уравнения (5.36) и (5.39), мы найдем решение задачи. Покажем, что полученная система распадается на две независимые пары уравнений. Исключая $D_+(\alpha)$ из уравнений (5.36a) и (5.39a), получаем

$$S'_+(\alpha) + S'_+(-\alpha) = \gamma \operatorname{cth} \gamma b \left[D_+(-\alpha) - D_-(\alpha) - \gamma^{-1} S'_+(\alpha) + \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-ikb \sin \theta)}{\alpha - k \cos \theta} \right]. \quad (5.40)$$

Положим

$$e^{-\gamma b} \operatorname{ch} \gamma b = K_+(\alpha) K_-(\alpha), \quad (5.41)$$

где функции K_+ и K_- определены формулами (3.19a) и (3.22). Тогда уравнение (5.40) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{S'_+(\alpha)}{(\alpha + k)^{1/2} K_+(\alpha)} &= \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-ikb \sin \theta)}{\alpha - k \cos \theta} (\alpha - k)^{1/2} K_-(\alpha) + \\ &+ (\alpha - k)^{1/2} K_-(\alpha) [D_+(-\alpha) - D_-(\alpha)] - \\ &- \gamma^{-1} \operatorname{th} \gamma b (\alpha - k)^{1/2} K_-(\alpha) S'_+(-\alpha). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Это уравнение имеет вид уравнения (5.19), в котором $K_-(\alpha)$ заменено на $(\alpha - k)^{1/2} K_-(\alpha)$ и $b(\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{th} \gamma b$. Введем обозначения

$$\gamma_r = \left[\left(\frac{r\pi}{2b} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}, \quad \gamma_0 = -ik. \quad (5.43)$$

Функцию $\gamma^{-1} \operatorname{th} \gamma b$, у которой единственными особыми точками в нижней полуплоскости являются простые полюсы, можно представить в виде (5.20), где надо положить

$$\beta_r = -i\gamma_{2r+1}, \quad b_r = i(\gamma_{2r+1} b)^{-1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

Теперь можно либо сразу написать решение уравнения (5.42) по формуле (5.22), либо, что также не представляет трудности, получить это решение обычным для метода Винера — Хопфа путем. Мы предоставляем читателю убедиться, что из условий в окрестности ребер пластины $(0, \pm b)$, а именно из условий $|\varphi| \sim \operatorname{const}$, $|\operatorname{grad} \varphi| \sim r^{-1/2}$, следует, что целая функция, фигурирующая в ме-

тоде Винера — Хопфа, тождественно равна нулю. Мы найдем

$$\frac{S'_+(\alpha)}{(\alpha + k)^{1/2} K_+(\alpha)} - \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-ikb \sin \theta) (k \cos \theta - k)^{1/2} K_-(k \cos \theta)}{\alpha - k \cos \theta} +$$

$$+ \frac{i}{b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-i\gamma_{2s+1} - k)^{1/2} K_-(-i\gamma_{2s+1}) S'_+(i\gamma_{2s+1})}{\gamma_{2s+1}(\alpha + i\gamma_{2s+1})} = 0. \quad (5.44)$$

Введем упрощенные обозначения, что позволит сопоставить полученные нами результаты с результатами Джонса [4]. Положим

$$\lambda_{2s+1} = \pi(2b)^{-1/2} (2s+1) (\gamma_{2s+1} - ik)^{-1/2} [K_+(i\gamma_{2s+1})]^{-1}, \quad (5.45a)$$

$$x_{2s+1} = \frac{1}{2} \pi^{1/2} b^{-1/2} e^{ikb \sin \theta} e^{-i\pi/4} (k \cos \theta - k)^{-1/2} \times$$

$$\times [K_-(k \cos \theta)]^{-1} (2s+1)^{-1} S'_+(i\gamma_{2s+1}). \quad (5.45b)$$

После этого уравнение (5.44) примет вид

$$S'_+(\alpha) = A(\alpha) \left[\frac{i}{\alpha - k \cos \theta} - \frac{i\pi}{b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)^2 x_{2s+1}}{\gamma_{2s+1} (\alpha + i\gamma_{2s+1}) \lambda_{2s+1}} \right], \quad (5.46a)$$

где

$$A(\alpha) = (2/\pi)^{1/2} e^{-ikb \sin \theta} (k \cos \theta - k)^{1/2} K_-(k \cos \theta) (\alpha + k)^{1/2} K_+(\alpha). \quad (5.46b)$$

Если в этом уравнении положить $\alpha = i\gamma_{2r+1}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), то получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения x_{2s+1}

$$\frac{2b}{\pi} \lambda_{2r+1} x_{2r+1} = \frac{1}{\gamma_{2r+1} + ik \cos \theta} - \frac{\pi}{b} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)^2 x_{2s+1}}{\gamma_{2s+1} (\gamma_{2s} + \gamma_{2r+1}) \lambda_{2s+1}}. \quad (5.47a)$$

В дальнейшем мы будем пренебрегать малыми высших порядков относительно kb . Согласно формулам (5.43), имеем

$$\gamma_{2s+1} = (2s+1) (\pi/2b) [1 + O(k^2 b^2)]. \quad (5.47b)$$

Поэтому при малых kb систему (5.47a) можно приближенно заменить системой

$$\lambda_{2r+1} x_{2r+1} = \frac{1}{2r+1} - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1) x_{2s+1}}{(r+s+1) \lambda_{2s+1}}. \quad (5.47b)$$

Точно так же решаются и уравнения (5.36б), (5.39б). Исключаем $S_+(\alpha)$ и вводим факторизацию согласно формулам (3.19б) и (3.23):

$$(\gamma b)^{-1} e^{-\gamma b} \operatorname{sh} \gamma b = L_+(\alpha) L_-(\alpha).$$

В этом случае функция $b(\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b$ также имеет в нижней полуплоскости лишь простые полюсы и представима в виде (5.20), где надо положить

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -k = -i\gamma_0, & b_0 &= -(2bk)^{-1}, \\ \beta_s &= -i\gamma_{2s}, & b_s &= i(\gamma_{2s}b)^{-1}. \end{aligned}$$

Решение определяется соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{D'_+(\alpha)}{b(\alpha+k)L_+(\alpha)} - \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\exp(-ikb \sin \theta) (k \cos \theta - k) L_-(k \cos \theta)}{\alpha - k \cos \theta} + \\ & + \frac{L_-(-k) D'_+(k)}{b(\alpha+k)} - i \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(i\gamma_{2s} + k) L_-(-i\gamma_{2s}) D'_+(i\gamma_{2s})}{\gamma_{2s} b (\alpha + i\gamma_{2s})} = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Опять вводим упрощенные обозначения

$$\begin{aligned} \mu_{2s} &= i2^{1/2} \pi s b^{-1} (i\gamma_{2s} + k)^{-1} [L_+(i\gamma_{2s})]^{-1}, & (5.49a) \\ y_{2s} &= -i(4bs)^{-1} \pi^{1/2} e^{ikb \sin \theta} (k \cos \theta - k)^{-1} [L_-(k \cos \theta)]^{-1} D'_+(i\gamma_{2s}). & (5.49b) \end{aligned}$$

После этого соотношение (5.48) принимает вид

$$\begin{aligned} D'_+(\alpha) = B(\alpha) \left[\frac{i}{\alpha - k \cos \theta} + \frac{2bQ}{\pi} \frac{D'_+(k)}{\alpha + k} - \right. \\ \left. - \frac{i}{b} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4\pi s^2 y_{2s}}{\gamma_{2s} (\alpha + i\gamma_{2s}) \mu_{2s}} \right], \end{aligned} \quad (5.50a)$$

где

$$B(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-ikb \sin \theta} (k \cos \theta - k) L_-(k \cos \theta) b(\alpha+k) L_+(\alpha), \quad (5.50b)$$

$$Q = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2b^2}\right) L_-(-k) e^{ikb \sin \theta} (k - k \cos \theta)^{-1} [L_-(k \cos \theta)]^{-1}. \quad (5.50b)$$

Полагая в уравнении (5.50a) $\alpha = i\gamma_{2r}$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения y_{2s} . Так как

$$\gamma_{2r} = \frac{r\pi}{b} [1 + O(k^2 b^2)] \quad \text{при } r \gg 1, \quad (5.51a)$$

то после пренебрежения малыми высших порядков относительно kb уравнение (5.50a) принимает вид

$$y_{2r} \mu_{2r} = \frac{1}{2r} - \frac{iQb}{r\pi} D'_+(k) - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2s y_{2s}}{(r+s) \mu_{2s}} \quad \text{при } r \gg 1, \quad (5.51b)$$

$$\begin{aligned} QD'_+(k) \{1 + [L_+(k)]^{-2}\} = \\ = -\frac{i\pi k}{b} \frac{1}{k - k \cos \theta} + 4k \sum_{s=1}^{\infty} \frac{y_{2s}}{\mu_{2s}} \quad \text{при } r = 0. \end{aligned} \quad (5.51b)$$

Для определения поля, например в области $y \gg b$, используем уравнение (5.37а). Чтобы определить C в этом уравнении (учитывая, что $S'_+(\alpha)$ и $D'_+(\alpha)$ мы уже нашли), дифференцируем уравнение (5.37а) по y и полагаем $y = b$. Затем применяем обратное преобразование Фурье, что дает

$$\varphi = -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \gamma^{-1} [S'_+(\alpha) + D'_+(\alpha)] e^{-\gamma(y-b)-i\alpha x} d\alpha. \quad (5.52)$$

Поле в дальней зоне можно найти при помощи методов асимптотического разложения, указанных в § 1.6. Функции S'_+ и D'_+ определены выражениями (5.46а) и (5.50а). Положив $x = r \cos \theta$, $y - b = r \sin \theta$, найдем, что имеется седловая точка при $\alpha = -k \cos \theta$, однако стандартную формулу (1.71) здесь применить нельзя, так как вблизи этой седловой точки может оказаться полюс в точке $\alpha = k \cos \theta$ [см. формулу (1.72)]. Для обхода этой трудности применим асимптотическое разложение типа разложения (1.73), для чего запишем равенство (5.52) в виде

$$\varphi = -\frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} \{\gamma^{-1} [S'_+(\alpha) + D'_+(\alpha)] - f(\alpha)\} e^{-\gamma(y-b)-i\alpha x} d\alpha - \frac{1}{2(2\pi)^{1/2}} \int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} f(\alpha) e^{-\gamma(y-b)-i\alpha x} d\alpha,$$

где

$$f(\alpha) = \frac{2i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{(k \cos \theta - k)^{1/2} e^{-ikb \sin \theta}}{(\alpha - k)^{1/2} (\alpha - k \cos \theta)}.$$

Первый интеграл не имеет полюса вблизи седловой точки и потому допускает применение асимптотической формулы (1.71). Второй интеграл вычисляется по формулам (1.62) и (1.65). Таким образом, при $r \rightarrow \infty$, $0 < \theta < \pi - \theta$ получаем

$$\varphi \sim -e^{i/4\pi} \left\{ \frac{1}{2} [S'_+(-k \cos \theta) + D'_+(-k \cos \theta)] + \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{(k \cos \theta - k)^{1/2} \sin \theta e^{-ikb \sin \theta}}{(k \cos \theta + k)^{1/2} (\cos \theta + \cos \theta)} \right\} (kr)^{-1/2} e^{ikr} + G(r, \theta), \quad (5.53а)$$

где

$$G(r, \theta) = -\pi^{-1/2} e^{3i\pi/4} e^{-ikb \sin \theta} \left\{ -e^{-ikr \cos(\theta-\theta)} F[(2kr)^{1/2} \cos^{1/2}(\theta-\theta)] + e^{-ikr \cos(\theta+\theta)} F[(2kr)^{1/2} \cos^{1/2}(\theta+\theta)] \right\}, \quad (5.53б)$$

$$F(v) = \int_v^{\infty} \exp(iu^2) du. \quad (5.53в)$$

Запишем результат в виде

$$\varphi = G(r, \theta) + \varphi_1 + \varphi_2, \quad (5.54)$$

где $G(r, \theta)$ пропорционально дифракционному полю для бесконечно тонкой полуплоскости, φ_1 — поправка, которую надо добавить к G , чтобы получить поле в дальней зоне при дифракции на полубесконечном плоском волноводе, и, наконец, φ_2 — поправка на торцовую стенку. Поправка φ_2 получается от частей S'_+ и D'_+ , не содержащих $(\alpha - k \cos \theta)^{-1}$, т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \left[-\pi (2b)^{-1} e^{-i\pi/4} A(-k \cos \theta) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s+1)^2 x_{2s+1}}{\gamma_{2s+1} (i\gamma_{2s+1} - k \cos \theta) \lambda_{2s+1}} - \right. \\ & - (2b)^{-1} e^{-i\pi/4} B(-k \cos \theta) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{4\pi s^2 y_{2s}}{\gamma_{2s} (i\gamma_{2s} - k \cos \theta) \mu_{2s}} - \\ & \left. - (b/\pi) e^{+i\pi/4} B(-k \cos \theta) QD'_+(k) (k - k \cos \theta)^{-1} \right] (kr)^{-1/2} e^{ikr}. \quad (5.55) \end{aligned}$$

Будем теперь считать kb малым и пренебрежем членами высшего порядка малости. Кроме приближений (5.47б) и (5.51а), надо учесть, что для малых kb

$$L_{\pm}(\alpha) = 1 + O(kb \ln kb), \quad K_{\pm}(\alpha) = 1 + O(kb \ln kb).$$

Таким образом, при малых kb уравнения (5.46б), (5.50б), (5.50в), (5.51в) дают

$$\begin{aligned} A(-k \cos \theta) &= -i(2/\pi)^{1/2} 2k \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta, \\ B(-k \cos \theta) &= -(2/\pi)^{1/2} k^2 b (1 - \cos \theta) (1 - \cos \theta), \\ Q &= (\pi/2)^{1/2} (\pi/2b^2) (k - k \cos \theta)^{-1}, \\ D'_+(k) &= -ikb (2/\pi)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как величины x_{2s+1} , y_{2s} , λ_{2s+1} , μ_{2s} в нашем приближении имеют нулевой порядок малости, то в формуле (5.55) первый и последний члены имеют порядок kb , а второй член имеет порядок $(kb)^2$ и потому должен быть отброшен. В суммах можно пренебречь $k \cos \theta$ по сравнению с $i\gamma_{2s+1}$. В результате для малых kb выражение (5.55) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \left[e^{-i\pi/4} (2/\pi)^{1/2} k p \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta + \right. \\ & \left. + e^{-i\pi/4} \frac{1}{2} (2/\pi)^{1/2} kb \right] (kr)^{-1/2} e^{ikr}, \quad (5.56a) \end{aligned}$$

где

$$p = (4/\pi) b \sum_{s=0}^{\infty} x_{2s+1} \lambda_{2s+1}^{-1}. \quad (5.56б)$$

Ряд, входящий в формулу (5.56б), в принятом приближении равен постоянной; займемся ее вычислением. Из формул (3.22а), (3.22б) и (5.45а) следует, что при малых kb

$$\lambda_m = 2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}m + \frac{1}{2}\right) m^{1/2} \exp\left[\frac{1}{2}m(1 - \ln 2m)\right], \quad (5.57a)$$

так что

$$\lambda_1 = 2,33; \quad \lambda_3 = 4,22; \quad \lambda_5 = 5,51; \quad \lambda_7 = 6,55. \quad (5.57б)$$

Рассмотрим теперь систему (5.47в). Взяв в ней первые четыре уравнения и положив $x_{2s+1} = 0$ для $s \geq 3$, получим систему

$$2,759x_1 + 0,355x_3 + 0,302x_5 + 0,267x_7 = 1,0000,$$

$$0,214x_1 + 4,457x_3 + 0,227x_5 + 0,214x_7 = 0,3333,$$

$$0,143x_1 + 0,178x_3 + 5,691x_5 + 0,178x_7 = 0,2000,$$

$$0,107x_1 + 0,142x_3 + 0,151x_5 + 6,703x_7 = 0,1429.$$

Решая первые n уравнений для n неизвестных и полагая $x_{2r+1} = 0$ для $r \geq n$, получаем приближенное решение бесконечной системы. Обозначим корни n -го приближения через $x_{2r+1}^{(n)}$. Вычисления дают

$$x_1^{(1)} = 0,3624,$$

$$x_1^{(2)} = 0,3550, \quad x_3^{(2)} = 0,0577,$$

$$x_1^{(3)} = 0,3524, \quad x_3^{(3)} = 0,0566, \quad x_5^{(3)} = 0,0246,$$

$$x_1^{(4)} = 0,3512, \quad x_3^{(4)} = 0,0560, \quad x_5^{(4)} = 0,0242, \quad x_7^{(4)} = 0,0140.$$

При дальнейших приближениях значения выписанных корней изменяются в пределах всего нескольких процентов. Первый корень значительно превосходит остальные. Из условия на ребре пластины $\partial\varphi/\partial y \sim r^{-1/2}$ следует, что $|\Phi'_+(\alpha, d)| \sim |\alpha|^{-1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях, т. е. согласно формулам (5.45б), должно быть

$$x_{2r+1} \sim A(2r+1)^{-1/2} \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Это подтверждается полученными численными результатами:

$$\frac{x_3^{(4)}}{x_5^{(4)}} = 2,31, \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{5/3} = 2,34;$$

$$\frac{x_5^{(4)}}{x_7^{(4)}} = 1,73, \quad \left(\frac{7}{5}\right)^{5/3} = 1,75.$$

Используя асимптотическое выражение гамма-функции при больших m , из формулы (5.57а) получаем $\lambda_m \approx (2\pi m)^{1/2}$. В частности, $\lambda_5 \approx 5,60$.

$\lambda_7 \approx 6,63$, что согласуется с результатами (5.576). Теперь можно вычислить ряд (5.566). Введем обозначения

$$S_n = \sum_{s=0}^{n-1} x_{2s+1}^{(n)} \lambda_{2s+1}^{-1}, \quad S = S_\infty.$$

Используя найденные выше численные результаты, найдем

$$S_1 = 0,155_5, \quad S_2 = 0,166_1, \quad S_3 = 0,169_1, \quad S_4 = 0,170_5.$$

Отсюда разумно предположить, что S_4 дает значение $S = S_\infty$ с недостатком. Для S можно, используя ранее сделанные приближения, получить и другую оценку:

$$S'_n = \sum_{s=0}^{n-2} x_{2s+1}^{(n)} \lambda_{2s+1}^{-1} + x_{2n-1}^{(n)} \lambda_{2n-1}^{-1} \sum_{s=n-1}^{\infty} (2n-1)^{1/6} (2s+1)^{-1/6}.$$

Второй ряд суммируется по формуле

$$\sum_{s=0}^{\infty} (2s+1)^{-z} = \zeta(z) (1 - 2^{-z}),$$

где $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана. Численные расчеты дают

$$S'_1 = 0,183_0, \quad S'_2 = 0,178_6, \quad S'_3 = 0,177_0, \quad S'_4 = 0,176_3.$$

Здесь разумно предположить, что S'_n дает значение $S = S_\infty$ с избытком. Таким образом, можно с большой уверенностью утверждать, хотя мы не доказали это строго, что

$$0,171 < S < 0,176.$$

Джонс [4] строго показал, что $S = 0,175 \pm 0,014$. Если взять $S = 0,175$, то формула (5.566) дает

$$p = 0,22 \text{ } b. \tag{5.58}$$

Теперь можно дать физическую интерпретацию φ_2 . В выражении (5.536) для $G(r, \theta)$ сделаем подстановку (которая соответствует переносу начала отсчета):

$$r = r' + q \cos \theta', \quad \theta = \theta' - (q/r') \sin \theta'.$$

При больших r' и малых kb в принятом приближении имеем

$$r \cos(\theta \pm \Theta) = r' \cos(\theta' \pm \Theta) + q \cos \Theta,$$

$$(2kr)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta \pm \Theta) = (2kr')^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta' \pm \Theta) + \\ + \frac{1}{2} q (2k/r')^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta' \mp \Theta),$$

$$F(z + \delta z) = F(z) - \delta z \exp(iz^2).$$

С той же степенью точности получим

$$G(r, \theta) = e^{ikq \cos \theta} G(r', \theta') - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} kq \sin \frac{1}{2} \theta' \sin \frac{1}{2} \Theta (kr')^{-1/2} e^{ikr'}. \quad (5.59)$$

Согласно формуле (5.54), полное поле φ равно $G(r, \theta) + \varphi_1 + \varphi_2$. При $q = p = 0,22b$ последний член в выражении (5.59) равен по величине и противоположен по знаку первому члену в выражении (5.56а) для φ_2 , и мы получим

$$\varphi = e^{ikp \cos \theta} G(r', \theta') + \varphi_1(r, \theta) + e^{-i\pi/4} \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} kb (kr')^{-1/2} e^{ikr'}.$$

Слагаемое φ_1 мало, и в принятом приближении $\varphi_1(r, \theta) = \varphi_1(r', \theta')$. Первые два члена представляют поле полубесконечного волновода, простирающегося от $x = -\infty$ до $x = p = 0,22b$. Последний член можно истолковать как поле линейного источника интенсивности $-i(2\pi)^{-1} kb$, если считать поле источника единичной интенсивности равным $\pi i H_0^{(1)}(kr')$. Этот линейный источник возникает из-за того, что в соответствующем полубесконечном волноводе существует распространяющаяся волна основного типа. Если на поверхности пластины задано условие $\varphi_z = 0$ и толщина пластины достаточно мала, то этот член будет отсутствовать, так как в соответствующем полубесконечном волноводе уже не может быть распространяющейся волны. Эти выводы не зависят от угла падения возбуждающей плоской волны Θ и поэтому остаются справедливыми и для произвольного возбуждающего поля, которое может быть получено наложением плоских волн.

Аналогичный метод Джонс [5] применил к акустической задаче для полубесконечного твердого цилиндрического стержня. Вильямс [2] рассмотрел задачу о распространении волн в двумерном волноводе со скачкообразно меняющейся шириной (см. задачи 5.1—5.4). Соответствующую задачу для круглого цилиндрического волновода рассмотрел Пападопулос [2]. (Вместо метода, использованного в этом параграфе, читатель может использовать методы, примененные в цитированных работах. См. задачу 5.2.)

С точки зрения вычислителя полезность метода определяется возможностью практического выполнения факторизации и решения системы линейных алгебраических уравнений. Одной из основных причин подробного обсуждения численных результатов в приведенном выше примере являлось стремление показать, что в данном частном случае можно получить достаточно точное решение, решая систему из сравнительно малого числа линейных алгебраических уравнений. При этом оказывается, что первое неизвестное значительно больше остальных, и для получения грубого качественного результата можно

ограничиться решением лишь одного уравнения, положив все неизвестные, за исключением первого, равными нулю. По-видимому, эти замечания часто оказываются справедливыми и в других случаях.

§ 5.5. Общая теория для функционального уравнения другого частного вида

В этом параграфе мы рассмотрим другой частный случай функционального уравнения (5.2), а именно рассмотрим уравнение

$$e^{iaq} \Phi_+(\alpha) + K(\alpha) \Phi_1(\alpha) + e^{iap} \Phi_-(\alpha) = \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{i(\alpha - k \cos \theta)q} - e^{i(\alpha - k \cos \theta)p}}{\alpha - k \cos \theta}, \quad (5.60)$$

где A — постоянная, а область, в которой это уравнение справедливо, представляет собой полосу $-k_2 < \tau < k_2$. В следующем параграфе мы покажем на примерах, что уравнения такого типа появляются в задачах со смешанными граничными условиями, задаваемыми на трех частях граничной координатной поверхности. Функции $\Phi_+(\alpha)$, $\Phi_-(\alpha)$, $\Phi_1(\alpha)$ неизвестны и представляемы в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi_+(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_q^\infty \varphi(x) e^{i\alpha(x-q)} dx, \\ \Phi_-(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^p \varphi(x) e^{i\alpha(x-p)} dx, \\ \Phi_1(\alpha) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_p^q \varphi(x) e^{i\alpha x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (5.61)$$

Предполагается, что функция $\Phi_+(\alpha)$ регулярна при $\tau > -k_2$, функция $\Phi_-(\alpha)$ регулярна при $\tau < k_2$, а $\Phi_1(\alpha)$ — целая функция. Из представления

$$e^{-iaq} \Phi_1(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_p^q \varphi(x) e^{i\alpha(x-q)} dx = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{p-q}^0 \varphi(u+q) e^{i\alpha u} du$$

видим, что $\exp(-iaq) \Phi_1(\alpha)$ регулярна в нижней полуплоскости $\tau < k_2$ и при $\alpha \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости имеет алгебраический рост. Аналогично, функция $\exp(-iap) \Phi_1(\alpha)$ регулярна в верхней полуплоскости $\tau > -k_2$ и имеет алгебраический рост при $\alpha \rightarrow \infty$ в этой полуплоскости. Мы будем также полагать, что функция $K(\alpha)$ регулярна в полосе $-k_2 < \tau < k_2$ и имеет точки ветвления при $\alpha = \pm k$. Допустим, что имеет место факторизация

$$K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha),$$

причем

$$K_+(-\alpha) = K_-(+\alpha).$$

Допустим также, что $0 < \Theta < \frac{1}{2}\pi$, т. е. что $k_2 \cos \Theta > 0$. В этом случае уравнение (5.60) следует преобразовать к виду, удобному для применения метода Винера — Хопфа в полосе $-k_2 < \tau < k_2 \cos \Theta$. (Если $\frac{1}{2}\pi < \Theta < \pi$, то $k_2 \cos \Theta < 0$, и следует применять метод Винера — Хопфа в полосе $k_2 \cos \Theta < \tau < k_2$. В обоих случаях желательно получить соотношения, справедливые в симметричной полосе $-k_2 |\cos \Theta| < \tau < k_2 |\cos \Theta|$. Причина этого выяснится позже.)

Умножим уравнение (5.60) на $\exp(-i\alpha q) [K_+(\alpha)]^{-1}$ и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \Theta q}}{\alpha - k \cos \Theta} \left[\frac{1}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{K_+(k \cos \Theta)} \right] + \\ + U_+(\alpha) + V_+(\alpha) = -e^{-i\alpha q} K_-(\alpha) \Phi_1(\alpha) - U_-(\alpha) - V_-(\alpha) + \\ + \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \Theta q}}{(\alpha - k \cos \Theta) K_+(k \cos \Theta)}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Здесь мы положили

$$\begin{aligned} U_+(\alpha) + U_-(\alpha) &= e^{i\alpha(p-q)} \frac{\Phi_-(\alpha)}{K_+(\alpha)}, \\ V_+(\alpha) + V_-(\alpha) &= \frac{A(2\pi)^{-1/2} e^{i\alpha(p-q) - ik \cos \Theta p}}{(\alpha - k \cos \Theta) K_+(\alpha)}. \end{aligned}$$

Разбиение такого вида трудно угадать, и необходимо обратиться к теореме В из § 1.3 [см. формулу (5.3)]. Теперь умножим уравнение (5.60) на $\exp(-i\alpha p) [K_-(\alpha)]^{-1}$ и приведем результат к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + R_-(\alpha) + \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \Theta p}}{(\alpha - k \cos \Theta) K_-(\alpha)} - S_-(\alpha) = \\ = -e^{-i\alpha p} K_+(\alpha) \Phi_1(\alpha) - R_+(\alpha) + S_+(\alpha), \end{aligned} \quad (5.63)$$

где

$$\begin{aligned} R_+(\alpha) + R_-(\alpha) &= e^{i\alpha(q-p)} \frac{\Phi_+(\alpha)}{K_-(\alpha)}, \\ S_+(\alpha) + S_-(\alpha) &= \frac{A(2\pi)^{-1/2} e^{i\alpha(q-p) - ik \cos \Theta q}}{(\alpha - k \cos \Theta) K_-(\alpha)}. \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (5.62) и правая часть уравнения (5.63) регулярны при $\tau > -k_2$; правая часть уравнения (5.62) и левая часть уравнения (5.63) регулярны при $\tau < k_2 \cos \Theta$. Пусть поведение соответствующих функций на бесконечности таково, что из теоремы Лиувилля следует равенство нулю выражений, стоящих в каждой части обоих

уравнений. Нас интересуют левые части этих уравнений. Введем для краткости следующие обозначения:

$$\Phi_+(\alpha) - (2\pi)^{-1/2} A e^{-ik \cos \theta q} (\alpha - k \cos \theta)^{-1} = \Psi_+(\alpha), \quad (5.64a)$$

$$\Phi_-(\alpha) + (2\pi)^{-1/2} A e^{-ik \cos \theta p} (\alpha - k \cos \theta)^{-1} = \Psi_-(\alpha), \quad (5.64b)$$

причем звездочка указывает, что функция Ψ_+ регулярна не во всей полуплоскости $\tau > -k_2$, а в этой полуплоскости с исключенной точкой $\alpha = k \cos \theta$, где эта функция имеет простой полюс. Функция Ψ_- регулярна при $\tau < k_2 \cos \theta$. Приравнивая нулю левые части уравнений (5.62) и (5.63) и используя явные выражения для U_+ , V_+ , R_+ , S_+ , полученные с помощью общей теоремы о разбегии [см., например, формулу (5.3)], в обозначениях (5.64) находим

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{e^{i\zeta(p-q)} \Psi_-(\zeta)}{(\zeta-\alpha) K_+(\zeta)} d\zeta + \\ + \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta q}}{(\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} = 0, \\ \frac{\Psi_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{id-\infty}^{id+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} \Psi_+(\zeta)}{(\zeta-\alpha) K_-(\zeta)} d\zeta = 0. \end{aligned}$$

В этих уравнениях полагается $-k_2 < d < k_2 \cos \theta$, $-k_2 < c < k_2 \cos \theta$. В первом уравнении $\tau > c$, во втором $\tau < d$. Пусть $0 < \theta < \pi/2$. Тогда a можно выбрать так, что $-k_2 \cos \theta < a < k_2 \cos \theta$, и положить $d = -c = a$. В первом уравнении заменим ζ на $-\zeta$, а во втором уравнении заменим α на $-\alpha$. Учитывая, что $K_+(-\alpha) = K_- (+\alpha)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} \Psi_-(-\zeta)}{(\zeta+\alpha) K_-(\zeta)} d\zeta + \\ + \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta q}}{(\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} = 0, \\ \frac{\Psi_-(-\alpha)}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} \Psi_+(\zeta)}{(\zeta+\alpha) K_-(\zeta)} d\zeta = 0, \end{aligned}$$

где теперь в обоих уравнениях $\tau > -a$. Введем обозначения

$$S_+(\alpha) = \Psi_+(\alpha) + \Psi_-(-\alpha), \quad D_+(\alpha) = \Psi_+(\alpha) - \Psi_-(-\alpha), \quad (5.65)$$

причем звездочкой теперь отмечены функции, регулярные не во всей полуплоскости $\text{Im } \alpha > -k_2 \cos \theta$, а в полуплоскости с исключен-

ной точкой $\alpha = k \cos \theta$, где они имеют простой полюс. Образуя сумму и разность написанных выше уравнений, получаем

$$\frac{S_+^*(z)}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} S_+^*(\zeta)}{(\zeta + \alpha) K_-(\zeta)} d\zeta +$$

$$+ \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta q}}{(\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} = 0, \quad (5.66a)$$

$$\frac{D_+^*(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} D_+^*(\zeta)}{(\zeta + \alpha) K_-(\zeta)} d\zeta +$$

$$+ \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta q}}{(\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)} = 0. \quad (5.66b)$$

Оба уравнения (5.66) имеют одинаковый вид. Мы найдем их приближенное решение, следуя работе Джонса [2]. Для этого нам потребуется асимптотика следующего интеграла:

$$I = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{1}{\zeta + \beta} H(\zeta) e^{i\zeta t} d\zeta, \quad (5.67a)$$

где $-\text{Im } \beta < a < k_2$. Относительно функции $H(\zeta)$ предположим, что ее можно представить в виде

$$H(\zeta) = (\zeta - k)^{r+1/2} f(\zeta), \quad (5.67b)$$

где r — одно из чисел $-1, 0, +1, +2, \dots$, а $f(\zeta)$ разлагается в окрестности некоторой точки p в ряд Тейлора, так что

$$H(\zeta) = (\zeta - k)^{r+1/2} [f(p) + (\zeta - p) f'(p) + \dots]. \quad (5.67b)$$

Выбор точки p мы сделаем позже, пока же будем считать, что $f(p)$ отлично от нуля и конечно. Так как $-\text{Im } \beta < a$, то полюс подынтегрального выражения в точке $\zeta = -\beta$ находится ниже пути интегрирования. Однако точка β может быть расположена вблизи от точки $\zeta = -k$, и именно по этой причине мы выделили в подынтегральном выражении множитель $(\zeta + \beta)^{-1}$; в противном случае нам было бы достаточно представить в виде (5.67b) функцию $(\zeta + \beta)^{-1} H(\zeta)$. Относительно интеграла (5.67a) предположим также, что $H(\zeta)$ не имеет в полуплоскости $\text{Im } \zeta \geq a$ других точек ветвления, кроме $\zeta = k$, и что l — большое положительное число; тогда путь интегрирования можно деформировать так, чтобы он находился в верхней полуплоскости. Проведем в плоскости ζ разрез от точки $k = k_1 + ik_2$ по прямой, параллельной мнимой оси, до $k_1 + i\infty$ и деформируем путь интегрирования так, чтобы он шел по обоим берегам этого разреза. Предположим, что при деформации путь интегрирования не пересе-

кает полюсов подинтегрального выражения (в противном случае вычисление вычетов производится обычным способом). После деформации пути интегрирования сделаем замену переменной, положив $\zeta - k = iu$. На правом берегу разреза

$$(\zeta - k)^{1/2} = u^{1/2} \exp(i\pi/4)$$

и u изменяется от 0 до ∞ . Соответственно на левом берегу $(\zeta - k)^{1/2} = u^{1/2} \exp(-3i\pi/4)$ и u изменяется от $+\infty$ до 0. Таким образом, для интеграла (5.67а) получаем

$$I \sim 2e^{i\pi/4} e^{ikl} l^r \{ f(p) W_r(z) + f'(p) [il^{-1} W_{r+1}(z) + (k-p) W_r(z)] + \dots \}, \quad (5.68a)$$

где $z = -i(k + \beta)l$,

$$W_{j-1/2}(z) = \int_0^{\infty} \frac{u^j e^{-u}}{u+z} du = \Gamma(j+1) e^{1/2} z^{1/2} j^{-1/2} W_{-1/2}(j+1, 1/2, j)(z), \quad (5.68b)$$

а $W_{k,m}$ — функция Уиттекера (см. задачу 5.9).

Асимптотическое разложение, использованное Джонсом, соответствует формуле (5.68а) при $p = k$. В этом случае, ограничиваясь первым членом, получаем

$$I \sim D_r W_r[-i(k + \beta)l], \quad D_r = 2e^{i\pi/4} e^{ikl} l^{-r-1/2} i^r f(k). \quad (5.69)$$

Далее (до конца параграфа) мы будем пользоваться этой асимптотикой.

Отметим, что из соотношения (5.68а) можно получить более точную асимптотику, выбрав p таким образом, чтобы коэффициент при $f'(p)$ обратился в нуль, т. е. выбрав

$$p = k + il^{-1} \frac{W_{r+1}(z)}{W_r(z)}, \quad z = -i(k + \beta)l.$$

Эта асимптотика имеет вид асимптотики (5.69) с тем лишь отличием, что вместо $f(k)$ берется $f(p)$. [Целесообразны дальнейшие попытки улучшения асимптотики (5.69), так как именно точность этой асимптотической формулы ограничивает точность метода решения, рассматриваемого в этом параграфе. Укажем кратко другой возможный подход, а именно преобразуем подинтегральную функцию в формуле (5.67а) и используем обозначения (5.67б), что дает

$$\frac{1}{\zeta + \beta} H(\zeta) = \frac{(\zeta - k)^{r+1/2}}{\zeta + \beta} f(-\beta) + \frac{(\zeta - k)^{r+1/2}}{\zeta + \beta} [f(\zeta) - f(-\beta)].$$

Второй член в правой части регулярен в точке $\zeta = -\beta$, а первый член приводится к интегралу, который можно выразить через функции W_r . Возможно также, что имеет смысл использовать не один, а несколько членов асимптотического разложения.]

Вернемся к нашей задаче, в которой требуется найти асимптотическое решение уравнений вида

$$\frac{F_+^i(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{F_{++}^i(\zeta) e^{i\zeta(q-p)}}{(\zeta+\alpha)K_-(\zeta)} d\zeta = -\frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta q}}{(\alpha - k \cos \theta) K_+(k \cos \theta)}, \quad (5.70)$$

где под F_{\pm}^* подразумевается либо S_{\pm}^* , либо D_{\pm}^* , так что, согласно уравнениям (5.64) — (5.66), F_+^* имеет вид

$$F_+^*(\alpha) = F_+(\alpha) - \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta q}}{\alpha - k \cos \theta} + \frac{\lambda A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{e^{-ik \cos \theta p}}{\alpha + k \cos \theta}. \quad (5.71)$$

Введенную в формулах (5.70) и (5.71) постоянную λ мы соответственно положим равной либо $+1$, либо -1 . Функция $F_+(\alpha)$ регулярна при $\tau > -k_2$. Вообще говоря, следует ожидать, что функция $F_+(\alpha)$ будет иметь точку ветвления при $\alpha = -k$, но при больших l эта точка будет настолько удалена от точки $\alpha = +k$, что в приведенном выше асимптотическом разложении мы можем принять

$$\frac{F_+(\zeta)}{K_-(\zeta)} \sim F_+(k) h_r(\zeta - k)^{r+1/2} \text{ при } \zeta \rightarrow k,$$

если

$$[K_-(\zeta)]^{-1} \sim h_r(\zeta - k)^{r+1/2} \text{ при } \zeta \rightarrow k. \quad (5.72a)$$

Положим

$$E_r = 2e^{i\pi/4} e^{ikh_2 l} r^{-1/2} i^r h_r. \quad (5.72b)$$

Тогда формулы (5.67a) и (5.69) дают

$$\left. \begin{aligned} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{F_+(\zeta) e^{i\zeta(q-p)}}{(\zeta+\alpha)K_-(\zeta)} d\zeta &\sim 2\pi i T(\alpha) F_+(k), \\ T(\alpha) &= \frac{E_r W_r[-i(k+\alpha)l]}{2\pi i}, \end{aligned} \right\} \quad (5.72b)$$

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} d\zeta}{(\zeta+\alpha)(\zeta - k \cos \theta) K_-(\zeta)} \sim 2\pi i \frac{e^{ik \cos \theta q}}{(\alpha + k \cos \theta) K_-(k \cos \theta)} + 2\pi i R_2(\alpha),$$

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i\zeta(q-p)} d\zeta}{(\zeta+\alpha)(\zeta + k \cos \theta) K_-(\zeta)} \sim 2\pi i R_1(\alpha),$$

где $l = q - p$ и

$$R_{1,2}(\alpha) = \frac{E_r \{W_r[-i(k + k \cos \theta)l] - W_r[-i(k + \alpha)l]\}}{2\pi i (\alpha \mp k \cos \theta)}, \quad (5.73)$$

верхние знаки берутся для R_1 , а нижние — для R_2 . При получении двух последних формул мы применили разложение подинтегрального выражения на простейшие дроби. Таким образом, после подстановки выражения (5.71) в уравнение (5.70) мы будем иметь

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} = (2\pi)^{-1/2} A e^{-ik \cos \theta q} [P_1(\alpha) + \lambda R_2(\alpha)] - \\ - (2\pi)^{-1/2} \lambda A e^{-ik \cos \theta p} [P_2(\alpha) + \lambda R_1(\alpha)] - \lambda T(\alpha) F_+(k), \quad (5.74)$$

где

$$P_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{\alpha \mp k \cos \theta} \left[\frac{1}{K_+(\alpha)} - \frac{1}{K_+(\pm k \cos \theta)} \right], \quad (5.75)$$

причем верхний знак берется для P_1 , а нижний — для P_2 . Значение $F_+(k)$ можно найти, положив в уравнении (5.74) $\alpha = k$. Подставляя найденное таким образом $F_+(k)$ снова в уравнение (5.74) и учитывая, что $\lambda^2 = 1$, получаем

$$\frac{F_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} = \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} [G_1(\alpha) - \lambda G_2(\alpha)] - \\ - \frac{\lambda A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(k) T(\alpha)}{1 + \lambda T(k) K_+(k)} [G_1(k) - \lambda G_2(k)], \quad (5.76a)$$

где

$$G_1(\alpha) = e^{-ik \cos \theta q} P_1(\alpha) - e^{-ik \cos \theta p} R_1(\alpha), \quad (5.76b)$$

$$G_2(\alpha) = e^{-ik \cos \theta p} P_2(\alpha) - e^{-ik \cos \theta q} R_2(\alpha). \quad (5.76b)$$

Теперь вернемся к уравнениям (5.66). Согласно формулам (5.64) и (5.65) в уравнении для $S_+(\alpha)$ полагаем $\lambda = -1$, $F_+(\alpha) = \Phi_+(\alpha) + \Phi_-(-\alpha)$, а в уравнении для $D_+(\alpha)$ полагаем $\lambda = +1$, $F_+(\alpha) = \Phi_+(\alpha) - \Phi_-(-\alpha)$. Подставим эти значения в уравнение (5.76a) и образуем сумму полученных результатов. Это дает

$$\Phi_+(\alpha) = (2\pi)^{-1/2} A G_1(\alpha) K_+(\alpha) + \\ + \frac{A}{(2\pi)^{1/2}} \frac{K_+(k) T(\alpha) K_+(\alpha)}{[1 - T^2(k) K_+^2(k)]} [G_2(k) + T(k) K_+(k) G_1(k)]. \quad (5.77)$$

Если в этой формуле заменить G_1 на G_2 и G_2 на G_1 , а также изменить знак α , то получится выражение, определяющее функцию $\Phi_-(\alpha)$.

В конкретных задачах это выражение можно упростить, отбрасывая малые слагаемые и используя в остальных слагаемых асимптотическое представление функций W_r . Во всех практически интересных случаях функции W_r можно выразить через табулированные функции (задача 5.9). В следующем параграфе мы применим полученный здесь результат к конкретной задаче.

§ 5.6. Дифракция на полосе и щели конечной ширины

Рассмотрим задачи о дифракции плоской волны

$$\varphi_i = \exp(-ikx \cos \Theta - lky \sin \Theta)$$

в следующих четырех случаях.

1. На полосе $p \leq x \leq q$, $y=0$ с граничным условием $\partial\varphi_i/\partial y=0$.
2. На полосе $p \leq x \leq q$, $y=0$ с граничным условием $\varphi_i=0$.
3. На щели $p \leq x \leq q$, $y=0$ с граничным условием $\partial\varphi_i/\partial y=0$ на экране $y=0$ вне щели.
4. На щели $p \leq x \leq q$, $y=0$ с граничным условием $\varphi_i=0$ на экране $y=0$ вне щели.

В случаях 1 и 2 полагаем $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$. В случаях 3 и 4 полагаем

$$\begin{aligned} \varphi_t &= e^{-ikx \cos \Theta - lky \sin \Theta} \pm e^{-ikx \cos \Theta + lky \sin \Theta} + \varphi & \text{при } y \geq 0, \\ \varphi_t &= \varphi & \text{при } y \leq 0, \end{aligned}$$

причем верхний знак берется для случая 3, а нижний — для случая 4. При таких определениях φ соответствующие преобразования Фурье этой функции будут регулярны в полосе $-k_2 < \tau < k_2$, так как φ при $|x| \rightarrow \infty$ стремится к нулю, как $\exp(-k_2|x|)$.

Применяя к уравнению в частных производных для φ преобразование Фурье по переменной x , обычным путем находим

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= A \exp(-\gamma y) & \text{при } y \geq 0, \\ \Phi(y) &= B \exp(\gamma y) & \text{при } y \leq 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем эти выражения по y , исключим A и B и устремим y к $+0$ и к -0 соответственно. Получим

$$\Phi'(+0) = -\gamma\Phi(+0), \quad \Phi'(-0) = \gamma\Phi(-0).$$

Введем обозначения (5.61), где для удобства вместо $\Phi_+(x)$ будем писать $\Phi_+(y)$. Штрихами, как обычно, будем обозначать дифференцирование по y . Тогда написанные выше уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{iaq}\Phi'_+(+0) + \Phi'_1(+0) + e^{iap}\Phi'_-(-0) &= \\ = -\gamma[e^{iaq}\Phi_+(+0) + \Phi_1(+0) + e^{iap}\Phi_-(-0)], & \quad (5.78a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{iaq}\Phi'_+(-0) + \Phi'_1(-0) + e^{iap}\Phi'_-(-0) &= \\ = \gamma[e^{iaq}\Phi_+(-0) + \Phi_1(-0) + e^{iap}\Phi_-(-0)]. & \quad (5.78c) \end{aligned}$$

В случае 1 $\partial\varphi/\partial y$ непрерывна при $y=0$, а φ претерпевает разрыв при $y=0$ вне интервала $p \leq x \leq q$. Кроме того,

$$\Phi'_1(+0) + \Phi'_1(-0) = 2k \sin \Theta G(x),$$

где

$$G(x) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_p^q e^{i(\alpha - k \cos \theta)x} dx = \\ = (2\pi)^{-1/2} (\alpha - k \cos \theta)^{-1} (e^{i(\alpha - k \cos \theta)q} - e^{i(\alpha - k \cos \theta)p}).$$

Почленно складывая уравнения (5.78) и полагая

$$\Phi_1(+0) - \Phi_1(-0) = 2\Psi_1(0),$$

получаем функциональное уравнение вида (5.60), а именно уравнение

$$e^{i\alpha q} \Phi'_+(0) + \gamma \Psi_1(0) + e^{i\alpha p} \Phi'_-(0) = -k \sin \theta G(x). \quad (5.79)$$

Аналогично, в случае 2 φ непрерывна при $y=0$, $\partial\varphi/\partial y$ претерпевает разрыв при $y=0$ и $p \leq x \leq q$. Кроме того,

$$\Phi_1(+0) + \Phi_1(-0) = 2iG(x).$$

Образуя разность уравнений (5.78) и полагая

$$\Phi'_1(+0) - \Phi'_1(-0) = 2\Psi'_1(0),$$

получаем

$$e^{i\alpha q} \Phi_+(0) + \gamma^{-1} \Psi'_1(0) + e^{i\alpha p} \Phi_-(0) = -iG(x). \quad (5.80)$$

В случае 3 $\partial\varphi/\partial y$ непрерывна при $y=0$ и

$$\Phi'_+(+0) = \Phi'_+(-0) = 0, \quad \Phi'_- (+0) = \Phi'_- (-0) = 0.$$

Кроме того,

$$\Phi_1(+0) - \Phi_1(-0) = 2iG(x).$$

Почленно складывая уравнения (5.78) и полагая

$$\Phi_+(+0) - \Phi_+(-0) = 2\Psi_+(0) \text{ и т. д.,}$$

получаем

$$e^{i\alpha q} \Psi_+(0) + \gamma^{-1} \Phi'_1(0) + e^{i\alpha p} \Psi_-(0) = -iG(x). \quad (5.81)$$

Наконец, в случае 4 φ непрерывна при $y=0$ и

$$\Phi_+(+0) = \Phi_+(-0) = 0, \quad \Phi_- (+0) = \Phi_- (-0) = 0.$$

Кроме того,

$$\Phi'_1(+0) - \Phi'_1(-0) = 2k \sin \theta G(x).$$

Образуя разность уравнений (5.78) и полагая

$$\Phi'_+(+0) - \Phi'_+(-0) = 2\Psi'_+(0) \text{ и т. д.,}$$

получаем

$$e^{i\alpha q} \Psi'_+(0) + \gamma \Phi_1(0) + e^{i\alpha p} \Psi'_-(0) = -k \sin \theta G(x). \quad (5.82)$$

Во всех четырех случаях получились функциональные уравнения вида (5.60). Отметим, что в соответствии с принципом Бабинне урав-

нение (5.79) для случая 1 сходно с уравнением (5.82) для случая 4, а уравнение (5.80) для случая 2 сходно с уравнением (5.81) для случая 3.

Применяя теорию, развитую в § 5.5, можно получить приближенное решение для каждого из четырех случаев. Рассмотрим, например, случай 4. Сравнивая обозначения, принятые в уравнениях (5.60) и (5.82), находим

$$\begin{aligned} \Phi_+(x) &\equiv \Psi'_+(0), & \Phi_-(x) &\equiv \Psi'_-(0), \\ K(x) &= (\alpha^2 - k^2)^{1/2}, & A &= -k \sin \theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_+(x) &= e^{-i\pi/4} (k + \alpha)^{1/2}, \\ K_-(x) &= e^{-i\pi/4} (k - \alpha)^{1/2} = e^{i\pi/4} (\alpha - k)^{1/2}. \end{aligned}$$

Согласно формулам (5.72а) и (5.72б), имеем

$$r = -1, \quad h_{-1} = e^{-i\pi/4}, \quad E_{-1} = 2^{1/2} e^{ikl} e^{-i\pi/2}.$$

Найдем поле при $y \leq 0$. В обозначениях, соответствующих уравнению (5.82), преобразование Фурье функции φ при $y \leq 0$ имеет вид

$$\Phi(y) = B \exp(\gamma y) = -\gamma^{-1} [e^{iaq} \Psi'_+(0) + \Psi'_1(0) + e^{iap} \Psi'_-(0)] e^{\gamma y},$$

откуда

$$\varphi(x, y) = -\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \gamma^{-1} [e^{iaq} \Psi'_+(0) + \Psi'_1(0) + e^{iap} \Psi'_-(0)] e^{\gamma y - i\alpha x} d\alpha.$$

В этом выражении $\Psi'_1(0) = -AG(x)$. Значения $\Psi'_+(0)$ и $\Psi'_-(0)$ можно найти из уравнения (5.77), используя формулы (5.72)–(5.76). Для удобства положим $q = d$, $p = -d$, т. е. будем считать, что щель расположена при $-d \leq x \leq d$.

Вычислив приближенно интегралы, найдем, что поле φ можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$\varphi_{\text{полн.}} = \varphi_{\text{отл.}} + \varphi_{\text{взаим.}}$$

Слагаемое $\varphi_{\text{отл.}}$ равно сумме дифрагированных волн, получающихся от каждой полуплоскости в отдельности, т. е. в случае, когда вторая полуплоскость отсутствует. Это слагаемое можно рассматривать как первое приближение

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{отл.}} &= \frac{-ik \sin \theta}{2\pi (k + k \cos \theta)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{i(\alpha - k \cos \theta) d}}{(\alpha - k \cos \theta) (k - \alpha)^{1/2}} e^{-i\alpha x - \gamma |y|} d\alpha + \\ &+ \frac{ik \sin \theta}{2\pi (k - k \cos \theta)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-i(\alpha - k \cos \theta) d}}{(\alpha - k \cos \theta) (k + \alpha)^{1/2}} e^{-i\alpha x - \gamma |y|} d\alpha. \end{aligned}$$

Точное значение $\varphi_{\text{отд.}}$ выражается через интегралы Френеля по формулам (1.62), (1.65) и по формулам, получающимся из формул (1.62), (1.65) при изменении в них знака перед α и x и при замене Θ на $\pi - \Theta$.

Слагаемое $\varphi_{\text{взаим.}}$ дает поправку, учитывающую взаимодействие между полуплоскостями. В обозначениях (5.72) — (5.76) она равна

$$\varphi_{\text{взаим.}} = \frac{A}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \left[e^{ikd \cos \Theta} R_1(\alpha) \frac{e^{iad}}{K_-(\alpha)} + e^{-ikd \cos \Theta} R_2(-\alpha) \frac{e^{-iad}}{K_+(\alpha)} - C_1 T(\alpha) \frac{e^{iad}}{K_-(\alpha)} - C_2 T(-\alpha) \frac{e^{-iad}}{K_+(\alpha)} \right] e^{-i\alpha x - \gamma|y|} d\alpha,$$

где

$$C_1 = \frac{K_+(k)}{1 - T^2(k) K_+^2(k)} [G_2(k) + T(k) K_+(k) G_1(k)],$$

а C_2 получается из C_1 заменой мест G_1 и G_2 . Исследуя вид выражений для $R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$ и $T(\alpha)$, находим, что для вычисления $\varphi_{\text{взаим.}}$ в дальней зоне можно применить асимптотическую формулу (1.71) из § 1.6. Введем полярные координаты (r, θ) по формулам $x = r \cos \theta$, $|y| = r \sin \theta$, так что угол θ отсчитывается от положительного направления оси x по часовой стрелке. (Напомним, что угол Θ отсчитывается от положительного направления оси x против часовой стрелки.) Применяя формулу (1.71), находим, что при $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{взаим.}} \sim & -k^2 (2\pi)^{-1/2} \sin \Theta \sin \theta e^{-i\pi/4} (kr)^{-1/2} e^{ikr} \times \\ & \times \{ [K_+(k \cos \theta)]^{-1} [e^{ikd(\cos \Theta - \cos \theta)} R_1(-k \cos \theta) - \\ & - C_1 e^{-ikd \cos \theta} T(-k \cos \theta)] + \\ & + [K_-(k \cos \theta)]^{-1} [e^{-ikd(\cos \Theta - \cos \theta)} R_2(k \cos \theta) - \\ & - C_2 e^{ikd \cos \theta} T(k \cos \theta)] \}. \end{aligned}$$

При подстановке в эту формулу явных выражений можно заменить функции W_{-1} их асимптотическими выражениями для больших kd , если только θ и Θ не слишком близки к 0 или π , т. е. можно использовать асимптотику

$$W_{-1}[-2i(k \pm k \cos \delta) d] \sim \pi^{1/2} [-2i(k \pm k \cos \delta) d]^{-1}, \quad kd \rightarrow \infty,$$

при условии, что δ не слишком близко к 0 или π . Тогда мы найдем, что возможны существенные упрощения, и после ряда преоб-

разований получим для $\varphi_{\text{взаим.}}$ при $r \rightarrow \infty$ следующее выражение:

$$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{1 + (4\pi i k d)^{-1} e^{4ikd}} \frac{e^{2ikd}}{(4\pi k d)^{1/2}} \frac{e^{ikr}}{(kr)^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \left[\left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \right)^{-1} e^{-ikd(\cos \theta - \cos \Theta)} + \left(\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \right)^{-1} e^{ikd(\cos \theta - \cos \Theta)} \right] - \right. \\ \left. - e^{i\pi/4} (4\pi k d)^{-1/2} e^{2ikd} \left[\left(\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} \right)^{-1} e^{-ikd(\cos \theta + \cos \Theta)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} \right)^{-1} e^{ikd(\cos \theta + \cos \Theta)} \right] \right\}.$$

Оно совпадает с полученным иным путем результатом Карпа и Рассека [1]. (Заметим, что эти авторы использовали зависимость от времени в виде $\exp(+i\omega t)$, поэтому при сравнении формул знак перед i надо изменить. Кроме того, их угловые переменные φ , φ_0 связаны с нашими θ , Θ следующим образом: $\theta + \varphi = \pi/2$, $\Theta - \varphi_0 = \pi/2$.) Рассуждения Карпа и Рассека основаны на физических соображениях. При рассмотрении действия дифракционного поля от одной полуплоскости на другую, скажем, от левой полуплоскости на правую, они предположили, что это поле можно считать излучением линейного источника, расположенного на ребре левой полуплоскости. В работе Карпа и Рассека [1] дается анализ этого предположения и обсуждаются численные результаты.

Метод, изложенный в настоящем параграфе, и метод Карпа и Рассека связаны с работами Шварцшильда (K. Schwartzschild) и Фокса (E. N. Fox). Обсуждение этих работ имеется в книге Бейкера и Копсона [1] и в статье Карпа и Рассека [1].

Метод Карпа и Рассека достаточно элементарен и легко обозрим, в то время как метод, изложенный нами, не обладает этими достоинствами. С другой стороны, применяемый нами метод Винера — Хопфа можно легко обобщить на ряд других задач. Было бы интересно исследовать, можно ли применить метод Карпа и Рассека к более сложным задачам, предполагая, что решения для соответствующих полубесконечных препятствий известны.

Можно указать три статьи, в которых метод, изложенный в двух последних параграфах, применяется к более сложным задачам. Джонс [2] и Вильямс [1] рассмотрели задачу о дифракции на плоском волноводе конечной длины при граничном условии на его стенках $\varphi_l = 0$ и $\partial\varphi_l/\partial n = 0$ соответственно. При стремлении ширины волновода к нулю эта задача сводится к задаче о дифракции на полосе, рассмотренной в данном параграфе. Вильямс [3] рассмотрел также дифракцию на круглом волноводе конечной длины. В таких задачах возникают дополнительные осложнения. Внутри волновода может иметь место резонанс, причем знаменатель выражения (5.77) $[1 - T^2(k)K_+^2(k)]$ оказывается малым. Кроме полюсов в точках $\alpha = \pm k \cos \Theta$ возможны полюсы при $\alpha = k$ или около $\alpha = k$;

в разложениях $K_+(a)$ и $K_-(a)$ могут содержаться члены вида $(a-k)^s \ln(a-k)$; в любом из перечисленных случаев требуется видоизменение общей формулы (5.77).

Дальнейшее повышение точности метода, изложенного в настоящем параграфе, можно, по-видимому, получить, либо учитывая следующие члены асимптотического разложения, либо применяя асимптотическое разложение какого-нибудь другого вида. Однако общим для всех приближенных методов этой главы является следующее: если соотвествующие функции не имеют других особенностей, кроме простых полюсов, то можно указать метод отыскания приближенного решения, пригодного для малых волновых чисел; если же эти функции имеют точки ветвления, то метод асимптотических разложений дает приближенное решение, пригодное для больших волновых чисел. Таким образом, чтобы найти решение как для больших, так и для малых волновых чисел, в настоящее время приходится либо применять, следуя § 5.2, два различных подхода, либо использовать совершенно иной метод (для дифракции на полосе см. задачу 5.12).

Большинство из рассмотренных в этой главе вопросов представляет широкое поле деятельности для дальнейших исследований.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ V

5.1. Внутри жесткостенного акустического волновода со ступенькой

$$0 \leq y \leq D, \quad -\infty < z \leq 0 \quad \text{и} \quad d \leq y \leq D, \quad 0 \leq z < \infty, \quad D > d > 0,$$

из $z = -\infty$ набегают волна $\varphi_i = \exp(ikz)$. Положим $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$, так что на стенках $y = \text{const.}$ будет $\partial\varphi/\partial y = 0$, а на стенке $z = 0$, $0 \leq y \leq d$ будет $\partial\varphi/\partial z = -ik$.

Этот пример мы подробно рассмотрим в задачах 5.1—5.4, чтобы показать, что с теоретической точки зрения анализ, данный в § 5.4, отнюдь не является исчерпывающим: во-первых, возможны другие выводы основных уравнений для задач такого типа, во-вторых, задачу можно свести к другой, дополнительной, системе уравнений. Вильямс [2] получил уравнение (д) и систему (ж), приведенные ниже, с помощью преобразования Лапласа и одного из вариантов метода, примененного при решении задачи 5.2. В этой работе дана физическая интерпретация результатов и численные значения коэффициента отражения для различных kD/π и kd/π , в том числе для случаев, когда в волноводе имеется несколько распространяющихся волн.

Используем преобразование Фурье по переменной z . Применение преобразования к уравнению в частных производных в области $0 \leq y \leq d$, $z \leq 0$ дает

$$\frac{d^2\Phi_-(a, y)}{dy^2} - \gamma^2\Phi_-(a, y) = (2\pi)^{-1/2} ik + (2\pi)^{-1/2} i\alpha(\varphi)_0. \quad (a)$$

Исключая, как и в § 5.4, $(\varphi)_0$, получаем

$$\Phi_-(a) + \Phi_-(-a) = -(2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2} + \gamma^{-1} \text{cth } \gamma d \{ \Phi'_-(a) + \Phi'_-(-a) \}. \quad (б)$$

При $d \leq y \leq D$ находим

$$\Phi_+(a) + \Phi_-(a) = -\gamma^{-1} \text{cth } \gamma(D-d) \Phi'_-(a). \quad (в)$$

Исключим $\Phi_-(\alpha)$ и положим

$$-\gamma^{-1} \operatorname{sh} \gamma D [\operatorname{sh} \gamma d \operatorname{sh} \gamma (D-d)]^{-1} = M_+(\alpha) M_-(\alpha). \quad (г)$$

Группировка членов в получающихся уравнениях, как и в § 5.4, дает

$$M_-(\alpha) \Phi'_-(\alpha) = -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{(\alpha-k) M_+(k)} + \frac{1}{2kd(\alpha-k)} \frac{\Phi'_-(-k)}{M_+(k)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i\gamma_n d (\alpha - i\gamma_n)} \frac{\Phi'_-(-i\gamma_n)}{M_+(i\gamma_n)}, \quad (д)$$

где

$$\gamma_n = \left[\left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 - k^2 \right]^{1/2}, \quad \gamma_0 = -ik.$$

Введем обозначения

$$x_n = -i(2\pi)^{1/2} \Phi'_-(-i\gamma_n) M_+(k) \quad (е)$$

и положим в уравнении (д) $\alpha = -i\gamma_m$. Тогда мы получим

$$M_+(i\gamma_m) x_m = \frac{1}{k+i\gamma_m} - \frac{1}{2kd(k+i\gamma_m)} \frac{x_0}{M_+(k)} + \\ + \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n(\gamma_m+\gamma_n)} \frac{x_n}{M_+(i\gamma_n)}, \quad m=0, 1, 2, \dots \quad (ж)$$

В случае, когда в волноводе только одна волна является распространяющейся, полученную систему можно свести к системе вещественных уравнений. Введем функцию $J_+(\alpha) = (k+\alpha) M_+(\alpha)$, где $J_+(i\gamma_n)$ теперь вещественно, умножим на $k+i\gamma_m$ и отделим вещественную и мнимую части. Можно показать, что мнимая часть представляет собой ряд, не зависящий от m . Первое уравнение системы (при $m=0$) можно использовать для того, чтобы исключить эту мнимую часть из остальных уравнений. Решая получившиеся (вещественные) уравнения для $m=1, 2, 3, \dots$, выражаем x_1, x_2, \dots через x_0 . Подставляя эти значения в первое уравнение, находим x_0 (см. работу Вильямса [2]).

5.2. Получим результаты предыдущей задачи иным методом, который показывает физический смысл величин $\Phi'_-(-i\gamma_n)$. Как и в задаче 5.1, получаем уравнение (а). Допустим, что $(\varphi)_0$ можно разложить в ряд по косинусам:

$$(\varphi)_0 = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon'_n f_n \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right), \quad f_n = \int_0^d (\varphi)_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) dy, \quad (з)$$

где $\epsilon'_0 = 1/2$, $\epsilon'_n = 1$, $n \geq 1$.

Подставим это разложение в уравнение (а) и решим полученное уравнение при условии $\Phi'_-(\alpha, 0) = 0$. Дифференцируя по y и исключая неизвестную функцию от α , находим, что при $y=d$

$$\Phi_-(\alpha) = -\frac{ik}{(2\pi)^{1/2} \gamma^2} - \frac{i\alpha}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon'_n f_n \frac{\cos n\pi}{\alpha^2 + \gamma_n^2} + \frac{1}{\gamma} \operatorname{cth} \gamma d \Phi'_-(\alpha). \quad (и)$$

Это соотношение заменяет соотношение (б). Из уравнений (и) и (в) исключим $\Phi_-(\alpha)$ и перегруппируем, как обычно, члены; это дает

$$M_-(\alpha) \Phi'_-(\alpha) = - \frac{i}{(2\pi)^{1/2} 2(\alpha - k) M_+(k)} - \frac{i}{(2\pi)^{1/2} d} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon'_n f_n \frac{\cos n\pi}{(\alpha - i\gamma_n) M_+(i\gamma_n)}. \quad (\kappa)$$

Теперь осталось только найти соотношение между $\Phi'_-(\alpha)$ и f_n , что можно сделать различными способами, используя, например, следующие соображения.

1. Левая часть уравнения (и) регулярна в нижней полуплоскости. Следовательно, вычеты в полюсах $\alpha = -k$, $\alpha = -i\gamma_n$ должны взаимно уничтожаться, т. е.

$$\left. \begin{aligned} f_n &= (2\pi)^{1/2} \gamma_n^{-1} \cos n\pi \Phi'_-(-i\gamma_n), \quad n > 0; \\ f_0 &= (2\pi)^{1/2} ik^{-1} \Phi'_-(-k) + d. \end{aligned} \right\} \quad (\lambda)$$

2. Решение уравнения (а), удовлетворяющее условию $\Phi'_-(\alpha, 0) = 0$, равно

$$\Phi_-(\alpha, y) = -(2\pi)^{-1/2} ik\gamma^{-2} + (2\pi)^{-1/2} \gamma^{-1} i\alpha \int_0^y (\varphi)_0 \operatorname{sh} \gamma(y - \xi) d\xi + A \operatorname{ch} \gamma y. \quad (\mu)$$

Продифференцируем его по y при $y = d$ и подставим получающееся значение A в уравнение (м). Правая часть получающегося при этом уравнения для Φ_- должна быть регулярна в нижней полуплоскости, и условие, что вычеты в полюсах $\alpha = -k$, $\alpha = -i\gamma_n$ взаимно уничтожаются, дает опять равенство (л).

3. Применим к уравнению для φ в области $0 \leq y \leq d$, $z \leq 0$ конечное косинус-преобразование Фурье и решим получающееся обыкновенное дифференциальное уравнение при условии $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 0$ и известном значении $\partial\varphi/\partial y$ при $y = d$. В результате получим для $n \geq 1$ при $\partial\varphi/\partial z = 0$ на $z = 0$

$$\int_0^d (\varphi)_0 \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right) dy = \frac{\cos n\pi}{2\gamma_n} \int_{-\infty}^0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_d [e^{-\gamma_n|z-\xi|} + e^{-\gamma_n|z+\xi|}] d\xi.$$

Положив $z = 0$, получим равенство (л) для $n \geq 1$. Аналогично можно поступить при $n = 0$.

Если теперь в уравнении (к) положить $\alpha = -i\gamma_m$ и использовать равенство (л), то получатся уравнения для f_n , эквивалентные системе (ж). Отметим, что преимущество этого способа вывода уравнений состоит в том, что выясняется смысл $\Phi'_-(-i\gamma_n)$, а именно эти величины оказываются пропорциональными коэффициентам Фурье в разложении по косинусам функции φ в сечении $z = 0$, $0 \leq y \leq d$.

5.3. В задаче 5.2 функция $(\varphi)_0$ разлагалась в ряд по функциям, удовлетворяющим условию $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 0$ и при $y = d$. Естественно

попытаться применить разложение по функциям, удовлетворяющим условиям $\partial\varphi/\partial y = 0$ при $y = 0$ и $\varphi = 0$ при $y = d$, т. е. разложение

$$(\varphi)_0 = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} g_n \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{d} \right], \quad g_n = \int_0^d (\varphi)_0 \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi y}{d} \right] dy. \quad (и)$$

Вместо уравнения (и) получим

$$\Phi'_-(\alpha) = \frac{i\alpha}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2\pi}{d^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{1}{2} \right) g_n \frac{\cos n\pi}{\alpha^2 + \gamma_{n+1/2}^2} + \gamma \operatorname{th} \gamma d \left[\Phi_-(\alpha) + \frac{ik}{(2\pi)^{1/2} \gamma^2} \right]. \quad (о)$$

Условие регулярности в точках $\alpha = -i\gamma_{n+1/2}$ дает [ср. с равенством (л)]

$$(-1)^n g_n = (2\pi)^{1/2} \gamma_{n+1/2}^{-1} \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{d} \Phi_-(-i\gamma_{n+1/2}) - \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{d} \gamma_{n+1/2} \right]^{-1} ik. \quad (п)$$

Исключим из уравнений (о) и (в) функцию $\Phi'_-(\alpha)$. В полученном уравнении обычным образом группируем члены, что дает [ср. с равенством (к)]

$$N_-(\alpha) \Phi_-(\alpha) = -\frac{ik}{(2\pi)^{1/2}} G_-(\alpha) - \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \frac{2\pi}{d^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2} \right) g_n H_-^{(n)}(\alpha), \quad (р)$$

где

$$\begin{aligned} H_+^{(n)}(\alpha) + H_-^{(n)}(\alpha) &= -\alpha (a^2 + \gamma_{n+1/2}^2)^{-1} [\gamma \operatorname{th} \gamma (D-d)]^{-1} N_+(\alpha), \\ G_+(\alpha) + G_-(\alpha) &= -\gamma^{-2} \operatorname{th} \gamma d [\operatorname{th} \gamma (D-d)]^{-1} N_+(\alpha), \\ \frac{N_+(\alpha)}{N_-(\alpha)} &= -\operatorname{sh} \gamma D [\operatorname{ch} \gamma d \operatorname{sh} \gamma (D-d)]^{-1}. \end{aligned}$$

Полагая в уравнении (р) $\alpha = -i\gamma_{m+1/2}$ и используя равенство (п), получаем систему уравнений для g_n .

С практической точки зрения этот подход гораздо сложнее предыдущего, так как здесь требуется определение функций $H_-^{(n)}$ и G_- . Мы привели его главным образом для того, чтобы показать теоретическую возможность двух подходов к данной задаче.

5.4. Оба подхода, упомянутые в конце предыдущей задачи, могут быть непосредственно и единообразно осуществлены следующим образом. Начало вывода повторяет рассуждения, использованные в задаче 5.1 до уравнения (б) включительно. Далее возможны два пути рассуждения.

1. Перепишем уравнение (б) в виде

$$\begin{aligned} \Phi_-(\alpha) - A_-(\alpha) + (2\pi)^{-1/2} i(\alpha - k)^{-1} = \\ = -\Phi_-(-\alpha) + A_+(\alpha) + (2\pi)^{-1/2} i(\alpha + k)^{-1}, \quad (с) \end{aligned}$$

где

$$A_+(\alpha) + A_-(\alpha) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma d [\Phi'_-(\alpha) + \Phi'_-(-\alpha)].$$

Положим

$$\gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma d \Phi'_-(-\alpha) = a_+(\alpha) + a_-(\alpha),$$

где

$$a_-(\alpha) = \frac{1}{2kd(\alpha - k)} \Phi'_-(-k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{i\gamma_n d(\alpha - i\gamma_n)} \Phi'_-(-i\gamma_n).$$

Тогда

$$A_-(\alpha) = a_-(\alpha) + a_+(-\alpha).$$

Группируя члены в уравнении (с) и подставляя выражение для $A_-(\alpha)$, получаем уравнение (и).

2. Перепишем уравнение (б) в виде

$$\Phi'_-(\alpha) - B_-(\alpha) = -\Phi'_-(-\alpha) + B_+(\alpha), \quad (\tau)$$

где

$$B_+(\alpha) + B_-(\alpha) = \gamma \operatorname{th} \gamma d [\Phi_-(\alpha) + \Phi_-(-\alpha) + (2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2}].$$

Положим

$$\gamma \operatorname{th} \gamma d [\Phi_-(\alpha) + (2\pi)^{-1/2} ik\gamma^{-2}] = b_+(\alpha) + b_-(\alpha).$$

Тогда

$$B_-(\alpha) = b_-(\alpha) + b_+(-\alpha).$$

Группируя члены в уравнении (т) и подставляя выражение для $B_-(\alpha)$, получаем уравнение (о).

5.5. Жесткостенный волновод $0 \leq y \leq D$, $-\infty < z < \infty$ наполнен средой (1), в которой волновая функция удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi_1^t + k^2 \varphi_1^t = 0$, за исключением области $0 \leq y \leq d$, $z \geq 0$, заполненной средой (2), в которой волновая функция удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \varphi_2^t + K^2 \varphi_2^t = 0$. На поверхности раздела сред должны выполняться условия $\varphi_1^t = \varphi_2^t$ и $c \partial \varphi_1^t / \partial n = \partial \varphi_2^t / \partial n$. Пусть из $z = -\infty$ набегают волна $\varphi^i = \exp(ikz)$. Положим $\varphi_1^t = \varphi^i + \varphi_1$, $\varphi_2^t = \varphi^i + \varphi_2$, так что при $z = 0$, $0 \leq y \leq d$ имеем $\varphi_2 = \varphi_1$, $\partial \varphi_2 / \partial n = c \partial \varphi_1 / \partial n + (c-1)ik$. Разложим значения φ_1 и $\partial \varphi_1 / \partial z$ при $z = 0$, $0 \leq y \leq d$ в ряд по косинусам (ср. с задачей 5.2)

$$(\varphi_1)_0 = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon'_n f_n \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right), \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right)_0 = \frac{2}{d} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon'_n g_n \cos\left(\frac{n\pi y}{d}\right).$$

Оказывается, что рассуждения, аналогичные рассуждениям, проведенным при решении задачи 5.2, приводят к двум системам уравнений для f_n и g_n , соответствующим уравнениям (и) и (л). Линейные комбинации f_n и g_n связаны с $\Phi'_{1-}(-i\gamma_n)$ и $\Phi'_{2+}(i\Gamma_n)$, где $\Gamma_n^2 = \left[\left(\frac{n\pi}{d}\right)^2 - K^2\right]$. Уравнение (в) остается справедливым; из полученных уравнений вытекают два соотношения, соответствующие уравнению (к). Отсюда можно вывести системы линейных алгебраических уравнений для f_n и g_n . Однако требующиеся при этом разбиения функций будут более сложными (ср. с задачей 5.3).

5.6. В плоском волноводе $0 \leq y \leq 2b$, $-\infty < z < \infty$ волна $\exp(ikz)$ набегают на пластину конечной толщины $c \leq y \leq d$, $0 \leq z < \infty$, причем $0 < c < d < 2b$. На всех граничных поверхностях должно выполняться усло-

вие $\partial\varphi_t/\partial n = 0$. Исследовать влияние толщины пластины на коэффициент отражения при $(d - c) \ll 2b$ (ср. с § 3.5).

5.7. Рассмотрим два обобщения задачи о поперечной полосе в волноводе (§ 3.6), приводящие к уравнениям типа (5.17), а именно: 1) задачу о полосе произвольной ширины и 2) задачу о полосе, имеющей конечную проводимость. Для простоты вместо задачи из § 3.6 рассмотрим следующую задачу. Требуется найти решение волнового уравнения в области $0 \leq y \leq 2b$, $0 \leq z < \infty$ при возбуждающей волне $\varphi_i = \exp(-ikz)$, которое при $y = 0$ и $y = 2b$, $0 \leq z < \infty$, удовлетворяет условию $\partial\varphi_t/\partial y = 0$, а при $z = 0$, $0 \leq y \leq 2b$ удовлетворяет смешанному граничному условию. Положим $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$.

1. Полоса произвольной ширины. При $z = 0$, $0 \leq y < c$ имеем $\partial\varphi_t/\partial x = 0$, при $z = 0$, $c < y \leq 2b$ имеем $\varphi_t = 0$. Рассуждения, приведенные в § 5.2, дают

$$\Phi_+(a, y) - \Phi_+(-a, y) = A(a) \operatorname{ch} \gamma(2b - y) - (2\pi)^{-1/2} 2i\alpha\gamma^{-2} \quad \text{при } c < y \leq 2b, \quad (a)$$

$$\Phi_+(a, y) + \Phi_+(-a, y) = B(a) \operatorname{ch} \gamma y - (2\pi)^{-1/2} 2ik\gamma^{-2} \quad \text{при } 0 \leq y < c. \quad (b)$$

Как обычно, исключим $A(a)$, $B(a)$, $\Phi_+(-a, c)$ и положим $2b - c = d$. Тогда [ср. с уравнением (5.17)]

$$2\Phi_+(a, c) = K(a) [k(a)\Phi'_+(a, c) + \Phi'_+(-a, c)] - (2\pi)^{-1/2} 2i(\alpha - k)^{-1},$$

где

$$K(a) = \operatorname{sh} 2\gamma b [\gamma \operatorname{sh} \gamma c \operatorname{sh} \gamma d]^{-1}, \quad k(a) = \operatorname{sh} 2\gamma(b - c) [\operatorname{sh} 2\gamma b]^{-1}.$$

Если $b = c$, то $k(a) = 0$, и получающееся уравнение можно решить точно.

2. Полоса с конечной проводимостью, занимающая половину ширины волновода. При $z = 0$, $b < y \leq 2b$ имеем $\varphi_t = 0$; при $z = 0$, $0 \leq y < b$ имеем $\partial\varphi_t/\partial z = -i\delta\varphi_t$. При $b < y \leq 2b$ рассуждения, проведенные в § 5.2, опять дают уравнение (a). При $0 \leq y < b$ находим

$$\frac{d^2\Phi_+(a, y)}{dy^2} - \gamma^2\Phi_+(a, y) = (2\pi)^{-1/2} i(k - \delta) - (2\pi)^{-1/2} i(\alpha + \delta)(\varphi)_0.$$

Чтобы исключить неизвестное $(\varphi)_0$, умножим полученное уравнение на $(\alpha - \delta)$, изменим знак перед α и результат вычтем из этого уравнения.

Решением полученного дифференциального уравнения будет

$$(\alpha - \delta)\Phi_+(a, y) + (\alpha + \delta)\Phi_+(-a, y) = B(a) \operatorname{ch} \gamma y - (2\pi)^{-1/2} 2i\alpha(k - \delta)\gamma^{-2}. \quad (в)$$

Из уравнений (a) и (в) обычным путем находим [ср. с уравнением (5.17)]

$$\Phi_+(a, b) = \gamma^{-1} \operatorname{cth} \gamma b \left[-\delta z^{-1} \Phi'_+(a, b) + (1 + \delta\alpha^{-1}) \Phi'_+(-a, b) \right] - (2\pi)^{-1/2} i(\alpha - k)^{-1}.$$

5.8. В задачах с перпендикулярными границами иногда удобно применять синус- или косинус-преобразование Фурье. Рассмотрим задачу, приводящую

к результату (5.6). Положим

$$\Psi(\alpha) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \varphi \cos \alpha x \, dx = \Phi_+(\alpha) + \Phi_+(-\alpha).$$

Тогда

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cos \alpha x \, dx = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} ik - \alpha^2 \Psi(\alpha).$$

Применяя косинус-преобразование к этому дифференциальному уравнению в частных производных, получаем для $\Psi(\alpha)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого сразу дает формулу (5.6).

5.9. Можно показать, что в обозначениях (5.686)

$$\begin{aligned} W_{j-1/2}(z) &\sim \Gamma(j+1) z^{-1} \text{ при } z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi \\ W_{-1}(-iy) &= 2\pi^{1/2} e^{-iy} y^{-1/2} F(\sqrt{y}), \\ W_0(-iy) &= \pi^{1/2} + 2\pi^{1/2} i e^{-iy} y^{1/2} F(\sqrt{y}), \end{aligned}$$

где

$$F(v) = \int_v^{\infty} e^{iu^2} du.$$

5.10. Методы, изложенные в настоящей главе, можно обобщить для задачи о дифракции на двумерном препятствии конечной длины и конечной ширины при большой длине и малой ширине (обсуждение этого вопроса см. в работе Джонса [4], стр. 169). Аналогичной задачей будет задача о дифракции плоской волны, падающей под произвольным углом на твердый цилиндрический стержень большой длины и малого диаметра. Таким путем можно рассмотреть задачи из теории антенн.

5.11. Рассмотреть задачу о падении плоской электромагнитной волны на полубесконечный диэлектрический слой $-\infty < x \leq 0$, $-b \leq y \leq b$ (см. § 5.4 и задачу 5.5).

5.12. Различные задачи о дифракции волн на дисках и полосах можно свести к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, если использовать преобразование Конторовича — Лебедева (см. книгу Эрдейи и др. [1], т. II):

$$\left. \begin{aligned} \Psi(\mu) &= \int_0^{\infty} \psi(r) K_{\mu}(\lambda r) \frac{dr}{r}, \\ \psi(r) &= \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu \Psi(\mu) I_{\mu}(\lambda r) d\mu. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для простоты мы будем считать, что λ имеет положительную вещественную часть, хотя в конечном результате мы положим $\lambda = -ik$, k вещественно, что соответствует зависимости от времени, выражаемой множителем $\exp(-i\omega t)$. В задачах для дисков мы будем следовать работе Лейтнера и Уэлса [1]; они использовали подход, развитый Вайнштейном, Карпом и

Клеммовым. Мы используем метод, сходный с методом, использованным в § 5.4. Эту задачу мы рассмотрим подробно, так как она, по-видимому, представляет собой пока единственный приведший к существенным результатам пример, где метод Винера — Хопфа применен в сочетании с интегральными преобразованиями, отличными от преобразований Фурье, Лапласа и Меллина.

Прежде всего надо рассмотреть свойства $I_\mu(\lambda r)$ $K_\mu(\lambda r)$ как функций μ при фиксированном λr . Имеет место асимптотическое выражение

$$I_\mu(\lambda r) \sim [\Gamma(1 + \mu)]^{-1} \left(\frac{1}{2} \lambda r\right)^\mu [1 + O(\mu^{-1})], \quad \left|\frac{\mu}{\lambda r}\right| \gg 1. \quad (б)$$

Функция $I_\mu(\lambda r)$ быстро убывает при $\text{Re } \mu \rightarrow +\infty$ и возрастает при $\text{Re } \mu \rightarrow -\infty$. Кроме того,

$$K_\mu(\lambda r) = \frac{1}{2} \pi \frac{I_{-\mu}(\lambda r) - I_\mu(\lambda r)}{\sin \pi \mu} \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \lambda r\right)^{\mp \mu} \Gamma(\pm \mu), \quad \text{Re } \mu \rightarrow \pm \infty. \quad (в)$$

Таким образом, $K_\mu(\lambda r)$ быстро возрастает при $|\text{Re } \mu| \rightarrow \infty$ как в правой так и в левой полуплоскостях. На мнимой оси, $\mu = i\tau$, имеем

$$K_\mu(\lambda r) \sim |\tau|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \pi |\tau|\right), \quad \tau \rightarrow \pm \infty.$$

Пусть

$$\Phi_p(\mu) = \Gamma(1 + \mu) \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^{-\mu} \int_0^a f(r) I_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r}; \quad (г)$$

тогда

$$\Phi_p(\mu) \sim \int_0^a f(r) \left(\frac{r}{a}\right)^{\mu-1} dr \quad \text{при } \mu \rightarrow \infty, \quad \text{Re } \mu > 0; \quad (д)$$

таким образом, если $f(r) \sim \text{const}$ при $r \rightarrow 0$, то интеграл сходится при $\text{Re } \mu > 0$. Функция $\Phi_p(\mu)$ регулярна и ограничена в правой полуплоскости $\text{Re } \mu > 0$. В тех же обозначениях

$$\begin{aligned} \int_0^a f(r) K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r} = \\ = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^{-\mu} \Gamma(\mu) \Phi_p(-\mu) + \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^\mu \Gamma(-\mu) \Phi_p(\mu) \right]. \end{aligned} \quad (е)$$

Рассмотрим далее интеграл

$$I = \int_a^\infty g(r) K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r}. \quad (ж)$$

Пусть $g(r)$ — таково, что I сходится при любом μ . В этом случае интеграл I является целой функцией μ и, согласно формулам (б) и (в), можно записать

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^\infty g(r) K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r} = \Psi_p(\mu), \\ \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^{-\mu} \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_a^\infty g(r) K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r} = \Psi_N(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (з)$$

где Ψ_P и Ψ_N регулярны и стремятся к нулю в правой и левой полуплоскостях соответственно.

В задачах для круглых дисков удобно использовать сферические координаты r, θ, φ . Для осесимметричного случая стационарное волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + k^2 r^2 \varphi = 0.$$

Положим $r^{1/2} \varphi = \psi$. Для ψ получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{4} \psi + k^2 r^2 \psi = 0.$$

Применение к этому уравнению преобразования (а) дает

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Psi}{d\theta} \right) + \left(\mu^2 - \frac{1}{4} \right) \Psi = 0,$$

$$\Psi(\mu) = AP_{\mu-1/2}(\cos \theta) + BP_{\mu-1/2}(-\cos \theta). \quad (\text{и})$$

Рассмотрим подробно один пример. Пусть волна $\varphi_i = \exp(-ikz)$ падает под прямым углом на жесткий диск $\theta = \pi/2$, $0 \leq r \leq a$. Положим $\varphi_t = \varphi_i + \varphi$, $\psi = r^{1/2} \varphi$, так что на диске имеем $\partial \psi / \partial \theta = ikr^{3/2}$. Так как $\partial \psi / \partial \theta$ непрерывна при $\theta = \pi/2$ и конечна при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, то, согласно формуле (и), должно быть

$$\Psi(\mu) = \begin{cases} AP_{\mu-1/2}(\cos \theta) & \text{при } 0 \leq \theta \leq \pi/2, \\ -AP_{\mu-1/2}(-\cos \theta) & \text{при } \pi/2 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (\text{к})$$

Продифференцируем это выражение по θ , исключим A и используем граничное условие при $\theta = \pi/2$. Обозначая индексом нуль величины, взятые при $\theta = \pi/2$, получаем

$$\begin{aligned} ik \int_0^a r^{1/2} K_\mu(\lambda r) dr + \int_a^\infty \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_0 K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r} = \\ = -2K(\mu) \int_0^a f(r) K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r}, \quad (\text{л}) \end{aligned}$$

где

$$2f(r) = (\psi)_{+0} - (\psi)_{-0}$$

так что

$$A = [P_{\mu-1/2}(0)]^{-1} \int_0^a f(r) K_\mu(\lambda r) \frac{dr}{r}.$$

Кроме того,

$$K(\mu) = \frac{-\frac{1}{2} P'_{\mu-1/2}(0)}{P_{\mu-1/2}(0)} = \frac{L_P(\mu)}{L_N(\mu)},$$

$$[P_{\mu-1/2}(0)]^{-1} = \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\mu\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\mu\right), \quad (м)$$

$$[P'_{\mu-1/2}(0)]^{-1} = -\frac{1}{2} \pi^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu\right),$$

$$L_P(\mu) = \frac{\Gamma(3/4 + 1/2\mu)}{\Gamma(1/4 + 1/2\mu)}, \quad L_N(\mu) = \frac{\Gamma(1/4 - 1/2\mu)}{\Gamma(3/4 - 1/2\mu)}, \quad (н)$$

причем L_P и L_N регулярны и не обращаются в нуль соответственно при $\text{Re } \mu > -1/2$ и $\text{Re } \mu < 1/2$. Далее нам потребуются следующие соотношения:

$$\lim_{\mu \rightarrow m} (m - \mu) \Gamma(-\mu) = \frac{(-1)^m}{m!}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 2m} (2m - \mu) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\mu\right) = 2 \frac{(-1)^m}{m!}.$$

Используя формулы (е) и (з), соотношение (л) удобно переписать в виде [ср. с уравнением (5.17)]

$$\begin{aligned} ikL_N(\mu) \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{-\mu} [\Gamma(-\mu)]^{-1} \int_0^a r^{1/2} K_\mu(\lambda r) dr + L_N(\mu) \Psi'_N(\mu) = \\ = -L_P(\mu) \left\{ \Phi_P(\mu) + \Gamma(\mu) [\Gamma(-\mu)]^{-1} \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{-2\mu} \Phi_P(-\mu) \right\}. \quad (о) \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} L_P(\mu) \Gamma(\mu) [\Gamma(-\mu)]^{-1} \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{-2\mu} \Phi_P(-\mu) = \\ = \left\{ L_P(\mu) \Gamma(\mu) [\Gamma(-\mu)]^{-1} \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{-2\mu} \Phi_P(-\mu) - U - V \right\} + [U + V], \quad (п) \end{aligned}$$

где

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{2n} \Phi_P(n) \frac{U_n}{\mu + n}, \quad U_n = \frac{n}{(n!)^2} \frac{\Gamma(1/2n + 3/4)}{\Gamma(1/2n + 1/4)},$$

$$V = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda a\right)^{4n+3} \Phi_P\left(2n + \frac{3}{2}\right) \frac{V_n}{\mu + 2n + 3/2},$$

$$V_n = \frac{2n + 3/2}{[\Gamma(2n + 5/2)]^2} \frac{\Gamma(n + 3/2)}{n!}.$$

Функция $[U + V]$ регулярна при $\text{Re } \mu > -1$, а слагаемое в фигурных скобках в правой части соотношения (п) регулярно при $\text{Re } \mu < 1/2$, если $\varphi \sim \text{const}$,

т. е. $f(r) \sim r^{1/2}$ при $r \rightarrow 0$. Теперь рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^a r^{1/2} K_\mu(\lambda r) dr = \\ = \frac{2^{1/2}}{\lambda^{3/2}} \frac{\pi}{\sin \mu\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{(1/2\lambda a)^{-\mu+2n+3/2}}{\Gamma(-\mu+n+1) \Gamma(-\mu+2n+3/2)} - \frac{(1/2\lambda a)^{\mu+2n+3/2}}{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(\mu+2n+3/2)} \right],$$

причем правая часть равенства получается почленным интегрированием после подстановки в подынтегральное выражение соотношения (в) и ряда для I_μ . Интеграл сходится при $-\operatorname{Re} \mu < 3/2 < \operatorname{Re} \mu$. Ряд дает аналитическое продолжение интеграла на всю плоскость μ . На первый взгляд может показаться, что члены ряда имеют в точках $\mu = \pm n$ полюсы; однако легко видеть, что это не так. Полюсы имеются только в точках $\mu = \pm (2n + 3/2)$; вычеты в них равны

$$-2^{1/2} \lambda^{-3/2} (-1)^n (n!)^{-1} \Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right).$$

В тождестве

$$L_N(\mu) \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^{-\mu} [\Gamma(-\mu)]^{-1} J = \\ = \left\{ L_N(\mu) \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^{-\mu} [\Gamma(-\mu)]^{-1} J - W \right\} + W \quad (p)$$

положим

$$W = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^{2n+3/2} \frac{W_n}{\mu + 2n + 3/2}, \quad W_n = (-1)^n \frac{2^{1/2}}{\lambda^{3/2}} \frac{1}{\Gamma(2n + 3/2)},$$

так что W регулярна при $\operatorname{Re} \mu > -3/2$. Теперь мы можем в уравнении (о) сгруппировать члены и провести дальнейшие рассуждения по методу Винера—Хопфа; в результате, учитывая, что $\Phi_p(\mu) \sim \mu^{-1}$ при $\operatorname{Re} \mu \rightarrow +\infty$, получаем

$$L_p(\mu) \Phi_p(\mu) + U + V + ikW = 0. \quad (c)$$

Это согласуется с результатом Лейтнера и Уэлса ([1], стр. 28). Введем функцию $X(\mu)$ соотношением

$$ik\pi^{-1/2} a^{3/2} X(\mu) = L_p(\mu) \Phi_p(\mu). \quad (r)$$

Из уравнения (с) будем тогда иметь

$$X(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n!)^2} \frac{(1/2\lambda a)^{2n}}{\mu + n} X(n) - \\ - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 3/2}{[\Gamma(2n + 5/2)]^2} \frac{(1/2\lambda a)^{4n+3}}{\mu + 2n + 3/2} X(2n + 3/2) = \\ = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2\lambda a)^{2n}}{\Gamma(2n + 3/2) (\mu + 2n + 3/2)}. \quad (y)$$

Отсюда ясно, что $X(\mu)$ можно представить в виде ряда

$$X(\mu) = \frac{1}{\mu + 3/2} + \sum_{m=2}^{\infty} X_m(\mu) \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^m. \quad (\Phi)$$

Подставляя это выражение в уравнение (у) и приравнявая коэффициенты при степенях $(1/2 \lambda a)$, можно получить рекуррентные формулы для X_m , из которых найдем

$$X_2(\mu) = -\frac{2}{5(\mu + 1)} - \frac{4}{15(\mu + 7/2)}, \quad X_3(\mu) = \frac{16}{9\pi(\mu + 3/2)},$$

$$X_4(\mu) = \frac{7}{27(\mu + 1)} - \frac{1}{7(\mu + 2)} + \frac{16}{945(\mu + 11/2)} \text{ и т. д.}$$

Согласно формулам (а) и (к), при $0 \leq \theta \leq \pi/2$

$$r^{1/2} \varphi = \psi = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu \int_0^a f(\rho) K_\mu(\lambda \rho) \frac{d\rho}{\rho} \frac{P_{\mu-1/2}(\cos \theta)}{P_{\mu-1/2}(0)} I_\mu(\lambda r) d\mu.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл при $r > a$, подставим для $K_\mu(\lambda \rho)$ выражение (в) и изменим знак перед μ в слагаемом, содержащем $I_{-\mu}(\lambda \rho)$, учитывая, что $P_{\mu-1/2}$ — четная функция μ . В результате получим

$$r^{1/2} \varphi = \frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mu \int_0^a f(\rho) I_\mu(\lambda \rho) \frac{d\rho}{\rho} \frac{P_{\mu-1/2}(\cos \theta)}{P_{\mu-1/2}(0)} K_\mu(\lambda r) d\mu =$$

$$= \pi^{-2} k a^{3/2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{1}{2} \lambda a\right)^\mu [\Gamma(\mu)]^{-1} \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \mu\right) \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \mu\right) \times$$

$$\times P_{\mu-1/2}(\cos \theta) K_\mu(\lambda r) X(\mu) d\mu,$$

причем были использованы равенства (г) и (т). Теперь путь интегрирования можно замкнуть в правой полуплоскости. Единственными особенностями внутри контура будут полюсы в точках $\mu = 2n + 3/2$, так что

$$\varphi = 2\pi^{-1} k^2 a^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda a)^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4n+1)} X\left(2n + \frac{3}{2}\right) P_{2n+1}(\cos \theta) \left(\frac{2\lambda}{\pi r}\right)^{1/2} K_{2n+3/2}(\lambda r).$$

Для того чтобы найти поле в дальней зоне, применим асимптотику

$$\left[\frac{2\lambda}{\pi r}\right]^{1/2} K_{2n+3/2}(\lambda r) \sim r^{-1} e^{-\lambda r}$$

и вынесем этот множитель за знак суммы. Таким образом, для определения поля остается найти $X\left(2n + \frac{3}{2}\right)$, что можно сделать при помощи формулы (ф). Например, для вычисления поля с точностью до $(\lambda a)^4$ имеем

$$X\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{4}{75} (\lambda a)^2 + \frac{2}{27\pi} (\lambda a)^3 + \frac{1}{5 \cdot 7^2} (\lambda a)^4 + \dots,$$

$$X\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{5} - \frac{2}{3^2 \cdot 7} (\lambda a)^2 + \dots, \quad X\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{1}{7} + \dots$$

Поперечное сечение рассеяния определяется выражением

$$\frac{2\pi}{k} \int_{-1}^{+1} \operatorname{Re} \left[i\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \right] r^2 d(\cos \theta),$$

которое после подстановки в него найденного выше φ оказывается равным

$$\frac{16}{27} \frac{k^4 a^6}{\pi} \left[1 + \frac{8}{25} (ka)^2 + \frac{311}{6125} (ka)^4 + \dots \right].$$

Этот результат согласуется с имеющимися в литературе (см., например, статью Баукампа [1]) На этом мы закончим рассмотрение задачи.

Точно таким же путем можно найти решение в том случае, когда на диске задано граничное условие $\varphi_t = 0$, а не $\partial \varphi / \partial n = 0$. Как показали Мейер и Лейтнер [1], данный метод можно также использовать в задаче о биконической антенне.

Сходный метод решения можно применить в двумерной задаче о дифракции на полосе. Волновое уравнение в этом случае имеет вид

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + k^2 r^2 \varphi = 0.$$

Применив к нему преобразование (а), получим

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} + \mu^2 \Phi = 0, \quad \Phi = A \sin \mu \theta + B \cos \mu \theta.$$

Дальнейший ход решения такой же, как в предыдущей задаче. Факторизацию, соответствующую формулам (н), опять можно выразить через гамма-функцию, однако в разложении (п) появляются полюсы второго порядка. При разбиении выражений, содержащих полюсы второго порядка, в формулы входят производные вида

$$\frac{d}{d\mu} [\Gamma(-\mu)] \quad \frac{d}{d\mu} [(\lambda a)^{-2\mu}].$$

В связи с этим в решении появляется хорошо известный параметр

$$p = C + \ln \left(\frac{1}{4} kb \right) - i\pi/2, \quad C = 0,5772 \dots$$

Дальнейший анализ мы здесь проводить не будем.

Имеющиеся в литературе решения этих задач обычно содержат сложные, трудно вычисляемые интегралы. Интересной особенностью данного метода является то, что если применяемый в нем аппарат уже разработан, то дополнительно требуется лишь весьма несложный анализ, основанный на нескольких элементарных свойствах гамма-функции.

5.13. Рассмотреть задачу о падении волны $\exp(-ikz)$ на круглый диск $z=0$, $0 \leq \rho \leq a$. Применяя преобразование Фурье по переменной z и выбирая в качестве неизвестных функций значения при $\rho = a$, $-\infty < z < \infty$, свести задачу к функциональному уравнению типа уравнения (5.17). Такой подход должен быть удобен при больших k . Аналогичный подход возможен и к задаче о дифракции на полосе.

5.14. Если попытаться применить метод, изложенный в § 5.6, к задаче о круглом диске радиуса a , то окажется, что вместо преобразования Фурье по переменной x следует использовать преобразование Ганкеля по радиаль-

ной координате ρ . Чтобы получить разбиение, соответствующее формулам (5.10), следует воспользоваться соотношением

$$J_0(a\rho) = \frac{1}{2} [H_0^{(1)}(a\rho) + H_0^{(2)}(a\rho)], \quad a < \rho < \infty.$$

5.15. Соответствующая формулам (1.60) и (1.61) формула обратного преобразования Фурье будет иметь вид

$$\frac{1}{2} i \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[k(x^2 + y^2)^{1/2}] e^{i\alpha x} dx = \gamma^{-1} e^{-\gamma|y|}.$$

Заменим здесь x на $x - X$ и положим $X = \xi \cos \nu$, $|y| = \xi \sin \nu$; это даст

$$\frac{1}{2} i \int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}[k(x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \nu)^{1/2}] e^{i\alpha x} dx = \gamma^{-1} e^{i\xi(\alpha \cos \nu + i\gamma \sin \nu)}.$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{2} i \int_0^{\infty} f(\xi) \{H_0^{(1)}[k|x - \xi|] + p H_0^{(1)}[k(x^2 + \xi^2 - 2x\xi \cos \nu)^{1/2}]\} d\xi = g(x), \quad x > 0,$$

где p — постоянная. Применяя к нему преобразование Фурье, получаем

$$\gamma^{-1} [F_-(\alpha) + pF_+(\alpha \cos \nu + i\gamma \sin \nu)] = G_+(\alpha) + H_-(\alpha).$$

Это уравнение можно рассматривать как обобщение уравнения (5.17), получающегося при $\nu = \pi$. Случай $\nu = \pi/2$ был рассмотрен Иослом [1] в связи с одной из задач квантовой механики, но при этом решение в явном виде, удобном для численных расчетов, не было получено. Аналогичные интегральные уравнения возникают в связи с задачами о дифракции на клине. В таких задачах, как и в § 1.6, естественно сделать подстановку $\alpha = -k \cos \beta$.

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВИНЕРА — ХОПФА

§ 6.1. Введение

До сих пор мы уделяли главное внимание решению конкретных задач. В § 6.2 мы получим общее решение основной задачи Винера — Хопфа, которая в том или ином виде составляла основу всех примеров, точно решенных в предыдущих главах.

Как было показано в гл. II, задачи, которые можно точно решить методом Винера — Хопфа, сводятся к одной из следующих трех эквивалентных вспомогательных задач.

(1) Найти решение функционального уравнения

$$K(\alpha) [H_+(\alpha) + G_-(\alpha)] = F_+(\alpha) + E_-(\alpha), \quad (6.1)$$

справедливого в полосе $\tau_- < \tau < \tau_+$, $-\infty < \sigma < \infty$ комплексной плоскости α , причем $h(x)$ и $e(x)$ — преобразования функций $H_+(\alpha)$ и $E_-(\alpha)$ — неизвестны.

(2) Найти решение интегрального уравнения определенного вида, например

$$\int_0^{\infty} k(x-\xi) h(\xi) d\xi = f(x), \quad x > 0, \quad (6.2)$$

или

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + k^2 \right] \int_0^{\infty} l(x-\xi) h(\xi) d\xi = f(x), \quad x > 0. \quad (6.3)$$

В этих уравнениях функция $h(\xi)$ неизвестна.

(3) Найти решение парных интегральных уравнений

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = f(x), \quad x > 0, \quad (6.4a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = g(x), \quad x < 0, \quad (6.4b)$$

где функция $A(\alpha)$ неизвестна.

При определенных условиях задачи (1) — (3) эквивалентны, и обозначения выбраны так, чтобы подчеркнуть связь между различными функциями, фигурирующими в этих трех задачах. Так, например,

$$F_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} f(x) e^{iax} dx, \quad G_-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^0 g(x) e^{iax} dx. \quad (6.5)$$

Однако для удобства мы полагаем

$$K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{iax} dx, \quad (6.6)$$

т. е. опускаем множитель $(2\pi)^{-1/2}$ перед интегралом.

Для того чтобы показать эквивалентность задач (3) и (1), обозначим левую часть уравнения (6.4а) при $x < 0$ через $e(x)$, а левую часть уравнения (6.4б) при $x > 0$ через $k(x)$. Тогда, применив преобразование Фурье, получим

$$K(x) A(x) = F_+(x) + E_-(x), \quad A(x) = G_-(x) + H_+(x). \quad (6.7)$$

Исключив отсюда $A(x)$, придем к уравнению (6.1). Наоборот, положив в уравнении (6.1)

$$A(x) = H_+(x) + G_-(x), \quad (6.8a)$$

получим

$$K(x) A(x) = F_+(x) + E_-(x). \quad (6.8б)$$

Применяя к уравнениям (6.8a) и (6.8б) обратное преобразование Фурье, приходим при $x < 0$ к уравнению (6.4б), а при $x > 0$ к уравнению (6.4а). При этом, конечно, предполагается, что соответствующие преобразования Фурье существуют.

В § 6.2 мы решим парные интегральные уравнения (6.4) „методом преобразующего множителя“, использованным в § 2.3. Это, по-видимому, наиболее простой формальный метод получения общего решения трех сформулированных выше задач. Непосредственное решение задачи (1) кратко изложено в задаче 6.1. В связи с § 6.2 заметим также, что любое интегральное уравнение типа Винера — Хопфа (6.2) можно свести к двум повторным интегральным уравнениям Вольтерра (задача 6.4).

В задачах 6.5 и 6.8 результаты, полученные в § 6.2 и в задаче 6.4, используются для того, чтобы свести некоторые сингулярные интегральные уравнения первого рода (или им родственные) к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Эти методы можно применить для приближенного решения задач со смешанными граничными условиями, задаваемыми на трех частях граничной координатной поверхности (см. § 5.5 и 5.6), однако, по-видимому, этот подход менее эффективен, чем методы теории функций комплексного

переменного, изложенные в гл. V. Все же можно указать ряд интересных и полезных применений аналогичной идеи к содержащим бесселевы функции парным интегральным уравнениям для краевой задачи с диксами. Эти приложения будут рассмотрены в другом месте.

§ 6.2. Точное решение некоторых парных интегральных уравнений

В этом параграфе мы решим парные интегральные уравнения (6.4) методом, изложенным в § 2.3 и 2.8. Как и в § 2.3, заменяем в уравнении (6.4а) x на $x + \xi$, а в уравнении (6.4б) — на $x - \xi$, причем в обоих случаях $\xi > 0$. Умножим уравнения (6.4а) и (6.4б) соответственно на пока произвольные функции $\mathcal{N}_-(\xi)$ и $\mathcal{N}_+(\xi)$. Оба уравнения проинтегрируем по ξ от 0 до ∞ . Введем в рассмотрение функции $N_-(\alpha)$ и $N_+(\alpha)$, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_-(\xi) e^{-i\alpha\xi} d\xi &= N_-(\alpha), \\ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_+(\xi) e^{i\alpha\xi} d\xi &= N_+(\alpha). \end{aligned} \right\} \quad (6.9a)$$

Согласно формулам обращения, имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_-(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} N_-(\alpha) e^{i\alpha\xi} d\alpha, \\ \mathcal{N}_+(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} N_+(\alpha) e^{-i\alpha\xi} d\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (6.9b)$$

причем интегралы в правых частях равенств (6.9б) равны нулю при $\xi < 0$. Используя эти результаты, приводим уравнения (6.4) к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} N_-(\alpha) K(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_-(\xi) f(x + \xi) d\xi, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (6.10a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} N_+(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_+(\xi) g(x - \xi) d\xi, \quad x < 0, \end{aligned} \quad (6.10b)$$

Далее было бы естественно выбрать в этих уравнениях функции N_+ , N_- так, чтобы имело место равенство

$$N_+(\alpha) = N_-(\alpha)K(\alpha); \quad (6.11)$$

однако, как показано на частном примере в § 2.3, трудности, связанные со сходимостью, подсказывают несколько иной выбор. Рассмотрим по отдельности два случая: 1) $|K(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ внутри полосы и 2) $|K(\alpha)| \sim |\alpha|$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ внутри полосы.

1) В этом случае предположим, что имеет место факторизация $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$, причем $|K_+(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2}$, $|K_-(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2}$ при $\alpha \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие функции:

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) e^{-\alpha u} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}_+(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.12a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_-(\alpha) e^{\alpha u} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}_-(u) & \text{при } u > 0 \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.12б)$$

$$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{1}{K_+(\alpha)(\alpha - \alpha_1)} e^{-\alpha u} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{M}_+(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.12в)$$

$$-\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{1}{K_-(\alpha)(\alpha - \alpha_2)} e^{\alpha u} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{M}_-(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.12г)$$

где α_1 и α_2 — произвольные комплексные постоянные, расположенные соответственно в нижней и в верхней полуплоскостях. Для каждого из этих уравнений имеется формула обращения вида одного из уравнений (6.9а). Положим для краткости

$$\mathcal{D}_1^\pm \equiv \pm e^{\mp i\alpha_1 y} \frac{d}{dy} e^{\pm i\alpha_1 y}, \quad \mathcal{D}_2^\pm \equiv \pm e^{\pm i\alpha_2 y} \frac{d}{dy} e^{\mp i\alpha_2 y}, \quad (6.13)$$

причем здесь всюду надо брать либо верхние, либо нижние знаки; такие же обозначения мы будем применять и в тех случаях, когда вместо y используется другая переменная (либо x , либо η), что будет ясно из контекста.

Сравнивая соотношение $K(\alpha) = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ с равенством (6.11) и учитывая, что $|K_+(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2}$, $|K_-(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях, видим, что надлежащими выражениями для N_+ и N_- , конечно, не удовлетворяющими равенству (6.11), будут выражения

$$N_+(\alpha) = K_+(\alpha), \quad N_-(\alpha) = [K_-(\alpha)(\alpha - \alpha_2)]^{-1}, \quad (6.14)$$

где α_2 — произвольное постоянное число, расположенное в верхней полуплоскости и введенное для обеспечения сходимости. Сравнивая выражения (6.9б) с выражениями (6.12а) и (6.12г), видим, что

$$\mathcal{M}_-(\xi) = i\mathcal{M}_-(\xi), \quad \mathcal{M}_+(\xi) = \mathcal{L}_+(\xi),$$

так что уравнения (6.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (\alpha - \alpha_2)^{-1} K_+(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_-(\xi) f(x + \xi) d\xi, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (6.15a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_+(\xi) g(x - \xi) d\xi, \quad x < 0. \quad (6.15б)$$

Умножив первое уравнение на $\exp(i\alpha_2 x)$ и продифференцировав результат по x , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \mathcal{D}_2^- \int_0^{\infty} \mathcal{M}_-(\xi) f(x + \xi) d\xi, \quad x > 0; \end{aligned} \quad (6.16)$$

здесь использованы обозначения (6.13). Левые части уравнений (6.15б) и (6.16) совпадают. Применяя формулу обращения, получаем искомого решение парных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} K_+(\alpha) A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\alpha\eta} \mathcal{D}_2^- \int_0^{\infty} \mathcal{M}_-(\xi) f(\eta + \xi) d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha\eta} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_+(\xi) g(\eta - \xi) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Интересующими нас величинами являются левые части уравнений (6.4а) и (6.4б) при $x < 0$ и при $x > 0$ соответственно. Подставляя решение (6.17) в уравнение (6.4а) и используя обозначения (6.12), получаем при $x < 0$

$$\begin{aligned} e(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_-(\eta - x) \mathcal{D}_2^- \int_{\eta}^{\infty} \mathcal{M}_-(\xi - \eta) f(\xi) d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_x^0 \mathcal{L}_-(\eta - x) \int_{-\infty}^{\eta} \mathcal{L}_+(\eta - \xi) g(\xi) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

После подстановки решения (6.17) в уравнение (6.46) изменять порядок интегрирования сразу нельзя. Для того чтобы избежать возникновения расходящихся интегралов, используем следующий прием, который мы продемонстрируем на таком типичном примере:

$$\begin{aligned} & \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iax} \frac{d\alpha}{K_+(\alpha)} \int_0^\infty F(\eta) e^{ia\eta} d\eta = \\ & = ie^{-ia_1x} \frac{d}{dx} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{-i(\alpha-\alpha_1)x}}{K_+(\alpha)(\alpha-\alpha_1)} \int_0^\infty F(\eta) e^{ia\eta} d\eta d\alpha = \\ & = (2\pi)^{1/2} e^{-ia_1x} \frac{d}{dx} e^{ia_1x} \int_0^x F(\eta) \mathcal{M}_+(x-\eta) d\eta; \quad (6.19) \end{aligned}$$

здесь мы изменили порядок интегрирования и использовали обозначение (6.12в). Теперь после подстановки решения (6.17) в уравнение (6.46) получим при $x > 0$

$$\begin{aligned} h(x) = & \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_1^+ \int_0^x \mathcal{M}_+(x-\eta) \mathcal{D}_2^- \int_\eta^\infty M_-(\xi-\eta) f(\xi) d\xi d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_1^+ \int_{-\infty}^0 \mathcal{M}_+(x-\eta) \int_{-\infty}^\eta \mathcal{L}_+(\eta-\xi) g(\xi) d\xi d\eta. \quad (6.20) \end{aligned}$$

2) В этом случае $|K(\alpha)| \sim |\alpha|$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в полосе, и мы предположим, что $|K_+(\alpha)| \sim |\alpha|^{1/2}$, $|K_-(\alpha)| \sim |\alpha|^{1/2}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в соответствующих полуплоскостях. Здесь мы положим

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{1}{K_+(\alpha)} e^{-ia\alpha} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}_+(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.21a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{1}{K_-(\alpha)} e^{ia\alpha} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{L}_-(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.21б)$$

$$\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{K_+(\alpha)}{\alpha-\alpha_1} e^{-ia\alpha} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{M}_+(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0, \end{cases} \quad (6.21в)$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{K_-(\alpha)}{\alpha-\alpha_2} e^{ia\alpha} d\alpha = \begin{cases} \mathcal{M}_-(u) & \text{при } u > 0, \\ 0 & \text{при } u < 0. \end{cases} \quad (6.21г)$$

Далее положим [ср. с соотношениями (6.14)]

$$N_+(\alpha) = (\alpha - \alpha_1)^{-1} K_+(\alpha), \quad N_-(\alpha) = [K_-(\alpha)]^{-1}.$$

Тогда вместо уравнений (6.15) мы получим

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_-(\xi) f(x+\xi) d\xi, \quad x > 0, \quad (6.22a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{K_+(\alpha)}{\alpha-\alpha_1} A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{M}_+(\xi) g(x-\xi) d\xi, \quad x < 0. \quad (6.22b)$$

Умножив второе уравнение на $\exp(i\alpha_1 x)$ и продифференцировав результат по x , найдем

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) A(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \mathcal{D}_1^+ \int_0^{\infty} \mathcal{M}_+(\xi) g(x-\xi) d\xi, \quad x < 0. \quad (6.23)$$

Теперь можно применить формулу обращения к уравнениям (6.22a) и (6.23). В результате мы получим [ср. с формулами (6.17), (6.18) и (6.20)]:

$$K_+(\alpha) A(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i\alpha\eta} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_-(\xi) f(\eta+\xi) d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha\eta} \mathcal{D}_1^+ \int_0^{\infty} \mathcal{M}_+(\xi) g(\eta-\xi) d\xi d\eta, \quad (6.24a)$$

$$e(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_2^- \int_0^{\infty} \mathcal{M}_-(\eta-x) \int_{\eta}^{\infty} \mathcal{L}_-(\xi-\eta) f(\xi) d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_2^- \int_x^0 \mathcal{M}_-(\eta-x) \mathcal{D}_1^+ \int_{-\infty}^{\eta} \mathcal{M}_+(\eta-\xi) g(\xi) d\xi d\eta, \quad x < 0, \quad (6.24b)$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^x \mathcal{L}_+(x-\eta) \int_{\eta}^{\infty} \mathcal{L}_-(\xi-\eta) f(\xi) d\xi d\eta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \mathcal{L}_+(x-\eta) \mathcal{D}_1^+ \int_{-\infty}^{\eta} \mathcal{M}_+(\eta-\xi) g(\xi) d\xi d\eta, \quad x > 0. \quad (6.24b)$$

На этом мы заканчиваем обсуждение случая 2).

Полученные общие решения по различным причинам нигде в предыдущих главах не использовались. Они весьма громоздки, так как содержат четырехкратные интегралы. Как правило, известные функции $F_+(x)$ и $G_-(x)$, входящие в уравнение (6.1), или функции $f(x)$ и $g(x)$, входящие в уравнения (6.4), даны в явном виде и достаточно просты; в конкретных примерах обычно нетрудно решить уравнение Винера — Хопфа, как это показано в начале книги. Однако в некоторых важных случаях функции $\mathcal{L}_\pm(u)$ и $\mathcal{M}_\pm(u)$, входящие в общее решение, можно вычислить в замкнутом виде, так что в общем решении будут входить только двойные интегралы. Например, в задаче Зоммерфельда о полуплоскости из гл. II, где $K(x) = (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}$, можно положить

$$K_+(x) = (\alpha + k)^{-1/2}, \quad K_-(x) = (\alpha - k)^{-1/2}, \quad \alpha_1 = -k, \quad \alpha_2 = +k.$$

Отсюда находим (см. задачу 2.4)

$$\mathcal{M}_+(u) = \frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (\alpha + k)^{-1/2} e^{-i\alpha u} d\alpha = 2^{1/2} e^{i\pi/4} u^{-1/2} e^{iku}, \quad u > 0, \quad (6.25a)$$

$$\mathcal{M}_-(u) = -\frac{i}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (\alpha - k)^{-1/2} e^{+i\alpha u} d\alpha = 2^{1/2} e^{-i\pi/4} u^{-1/2} e^{iku}, \quad u > 0. \quad (6.25b)$$

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрим решение интегрального уравнения

$$\frac{1}{2} i \int_0^\infty H_0^{(1)}(k|x - \xi|) h(\xi) d\xi = f(x), \quad x > 0. \quad (6.26)$$

Положим левую часть этого уравнения при $x < 0$ равной (пока неизвестной) функции $e(x)$. После применения, как и в § 2.5, преобразования Фурье получим уравнение (6.1), где $G_-(\alpha) = 0$, $K(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}$. Таким образом, решение уравнения (6.26) дается формулой (6.20) при $g(\xi) = 0$. Используя обозначения (6.13) и формулы (6.25), получаем

$$h(x) = -\frac{1}{\pi} e^{ikx} \frac{d}{dx} \int_0^x (x - \eta)^{-1/2} e^{-2ik\eta} \times \\ \times \frac{d}{d\eta} \int_\eta^\infty f(\xi) (\xi - \eta)^{-1/2} e^{ik\xi} d\xi d\eta. \quad (6.27)$$

В § 2.5 было решено уравнение (2.49), представляющее частный случай уравнения (6.26) при $f(x) = \exp(-ikx \cos \Theta)$. Подставляя это выражение для $f(x)$ в формулу (6.27), находим, что внутренний

интеграл вычисляется и дифференцирование под знаком внешнего интеграла может быть выполнено. После этого мы получим

$$h(x) = 2\pi^{-1/2} e^{-i\pi/4} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{ikx} \frac{d}{dx} \left[e^{-l(k+k \cos \theta)x} \int_0^{(2kx)^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}} \exp(iy^2) dy \right].$$

Предоставляем читателю доказать, что решение, указанное в гл. II и полученное после применения обратного преобразования Фурье к уравнению (2.76), совпадает с этим результатом.

РАЗЛИЧНЫЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ VI

6.1. Используя теорему В из § 1.3, показать, что функция $H_+(x)$, входящая в уравнение (6.1), определяется выражением

$$H_+(x) K_+(x) = U_+(x) - V_+(x),$$

где

$$U_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{F_+(\zeta)}{K_-(\zeta)(\zeta-\alpha)} d\zeta, \quad V_+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{K_+(\zeta) G(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta,$$

причем в этих интегралах $\tau_- < c < \tau < \tau_+$. Получить аналогичную формулу для $E_-(x)$.

Используя соотношения

$$(\zeta - \alpha)^{-1} = -i \int_0^{\infty} e^{i(\zeta - \alpha)\eta} d\eta \quad \text{при } \operatorname{Im}(\zeta - \alpha) > 0,$$

$$(\zeta - \alpha)^{-1} = i \int_0^{\infty} e^{-i(\zeta - \alpha)\eta} d\eta \quad \text{при } \operatorname{Im}(\zeta - \alpha) < 0$$

и подставляя вместо $F_+(\zeta)$, $G_-(\zeta)$ их выражения через $f(x)$, $g(x)$, показать, что обращения найденных выше функций $H_+(x)$, $E_-(x)$ сводятся к формулам (6.18), (6.20), (6.24) для $h(x)$, $e(x)$.

6.2. Используя преобразование Фурье на полуоси $(0, \infty)$, показать, что решение уравнения

$$\int_0^x \mathcal{L}_+(x-\xi) g(\xi) d\xi = f(x), \quad x > 0, \quad (a)$$

имеет вид

$$g(x) = + \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_1^+ \int_0^x \mathcal{M}_+(x-\xi) f(\xi) d\xi,$$

где использованы обозначения (6.12) и (6.13), т. е. $\mathcal{M}_+(u)$ определяется формулой (6.12в), а $K_+(x)$ получается путем обращения формулы (6.12а), т. е.

$$K_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_+(u) e^{i\alpha u} du.$$

Показать, что решением уравнения

$$\int_x^{\infty} \mathcal{L}_-(\xi - x) g(\xi) d\xi = f(x), \quad x > 0, \quad (б)$$

является

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_2^- \int_x^{\infty} \mathcal{M}_-(\xi - x) f(\xi) d\xi,$$

где $\mathcal{M}_-(u)$ определяется формулой (6.12г), а $K_-(\alpha)$ получается путем обращения формулы (6.12б), т. е.

$$K_-(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \mathcal{L}_-(u) e^{-i\alpha u} du.$$

[Пусть

$$\int_0^{\infty} \mathcal{L}_-(\xi - x) g(\xi) d\xi = e(x), \quad x < 0, \quad (в)$$

где функция $e(x)$ неизвестна. Применим преобразование Фурье в интервале $(-\infty, \infty)$ к уравнениям (б) и (в). Получим

$$G_+(\alpha) = \frac{F_+(\alpha)}{K_-(\alpha)} + \frac{E_-(\alpha)}{K_-(\alpha)}.$$

Если к этому выражению применить формулу обращения, то в выражении для $g(x)$ при $x > 0$ второй член в правой части даст нуль.]

6.3. В случае 1) из § 6.2 в обозначениях (6.12а) и (6.12б) после обращения равенства (6.6) получим

$$\begin{aligned} k(x - \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) K_-(\alpha) e^{-i\alpha(x-\xi)} d\alpha = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K_+(\alpha) \int_0^{\infty} \mathcal{L}_-(y) e^{-i\alpha y} dy e^{-i\alpha(x-\xi)} d\alpha = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\max(x, \xi)}^{\infty} \mathcal{L}_-(u-x) \mathcal{L}_+(u-\xi) du. \end{aligned} \quad (а)$$

В качестве частного случая показать, что

$$\frac{1}{2} \pi i H_0^{(1)}(k|x-\xi|) = e^{-ik(x+\xi)} \int_{\max(x, \xi)}^{\infty} \frac{e^{2iku}}{(u-x)^{1/2} (u-\xi)^{1/2}} du.$$

6.4. Используя результат, полученный в задаче 6.3, можно показать, что любое интегральное уравнение типа Винера—Хопфа можно свести к двум

повторным уравнениям Вольтерра. Подставив выражение (а) из задачи 6.3 в уравнение (6.2), получим

$$\int_0^x h(\xi) \int_x^\infty \mathcal{L}_-(u-x) \mathcal{L}_+(u-\xi) du d\xi + \\ + \int_x^\infty h(\xi) \int_\xi^\infty \mathcal{L}_-(u-x) \mathcal{L}_+(u-\xi) du d\xi = 2\pi f(x), \quad x > 0.$$

Изменив в каждом из повторных интегралов порядок интегрирования, найдем

$$\int_x^\infty \mathcal{L}_-(u-x) \int_0^u \mathcal{L}_+(u-\xi) h(\xi) d\xi du = 2\pi f(x), \quad x > 0,$$

что эквивалентно двум повторным уравнениям Вольтерра

$$\int_0^u \mathcal{L}_+(u-\xi) h(\xi) d\xi = p(u), \quad u > 0,$$

$$\int_x^\infty \mathcal{L}_-(u-x) p(u) du = 2\pi f(x), \quad x > 0.$$

Решив их, как в задаче 6.2, можно убедиться, что выражение для $h(x)$, удовлетворяющее уравнению (6.2), совпадает с выражением, найденным в § 6.2, а именно с выражением (6.20) при $g(\xi) = 0$.

Следует упомянуть, что к изложенному выше анализу меня привела статья Копсона [5], посвященная задаче о наэлектризованном диске. Данная задача решается методом Винера—Хопфа, хотя Копсон и не использовал этот метод. Другая близкая статья принадлежит Джонсу [6]. Мне удалось применить данный метод к задачам о параллельных дисках, дисках в трубах и т. д. Явно метод Винера—Хопфа здесь не используется. Следовало бы метод перемены порядка интегрирования для получения двух повторных интегральных уравнений Вольтерра назвать „методом Копсона“ [см. книгу Снеддона (Sneddon I. N., Elements of partial differential equations, McGraw-Hill, 1957, стр. 179)].

6.5. Рассмотрим задачу со смешанными граничными условиями, задаваемыми на трех частях границы:

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K(a) A(a) e^{-iax} da = u(x) \quad \text{при } x > q, \quad (a)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} A(a) e^{-iax} da = s(x) \quad \text{при } p < x < q, \quad (б)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K(a) A(a) e^{-iax} da = v(x) \quad \text{при } x < p. \quad (в)$$

Обозначим значения левой части уравнения (б) при $x < p$ через $\varphi(x)$, а при $x > q$ — через $\psi(x)$, где φ и ψ — неизвестные функции. Рассмотрим совместно

уравнения (б) и (в) и заменим x на $X+q$. Полагая $B(\alpha) = A(\alpha) \cdot \exp(-i\alpha q)$, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} K(\alpha) B(\alpha) e^{-i\alpha X} d\alpha = u(X+q) \quad \text{при } X > 0, \quad (\text{г})$$

$$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} B(\alpha) e^{-i\alpha X} d\alpha = \begin{cases} s(X+q) & \text{при } p-q < X < 0 \\ \varphi(X+q) & \text{при } X < p-q. \end{cases} \quad (\text{д})$$

Рассмотрим случай 1) из § 6.2, где $|K(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ в полосе. Из формулы (б.20) после перемены порядка интегрирования во втором повторном интеграле и после несложных преобразований найдем

$$\psi(X+q) + \int_0^{\infty} \varphi(p-Z) N(X, Z) dZ = G(X), \quad X > 0, \quad (\text{е})$$

где $G(X)$ — известная функция, а

$$N(X, Z) = -\frac{1}{2\pi} \mathcal{D}_1^+ \int_{-d-Z}^0 \mathcal{M}_+(X-\eta) \mathcal{L}_+(\eta+Z+d) d\eta, \quad d = q-p. \quad (\text{ж})$$

Точно таким же путем из уравнений (а) и (б) можно получить аналогичное соотношение, в котором φ стоит на месте ψ , а ψ — на месте φ . В результате получаем для неизвестных функций φ и ψ два интегральных уравнения типа Фредгольма. Их можно решить методом последовательных приближений, однако здесь мы не будем касаться этого вопроса.

Проведенные выше рассуждения можно рассматривать как обобщение результатов, полученных иным путем Фоксом [Fох E. N., *Philos. Trans. Roy. Soc. (A)*, 241 (1948), 71—103]. Для того чтобы показать связь нашего метода с методом Фокса, обратим уравнение (д), что при $X > 0$ даст $\psi(X+q)$, и подставим получившееся для $B(\alpha)$ выражение в уравнение (г). Получим

$$\int_0^{\infty} [\psi(X+q) k(Y-X) + \varphi(p-X) k(Y+X+d)] dX = F(Y), \quad Y > 0, \quad (\text{з})$$

где $F(Y)$ — известная функция. Положим

$$k(Y+X+d) = \int_0^{\infty} k(Y-Z) M(Z, X) dZ. \quad (\text{и})$$

Подстановка этого выражения в уравнение (з) и перемена порядка интегрирования дает

$$\int_0^{\infty} k(Y-X) \left[\psi(X+q) + \int_0^{\infty} \varphi(p-Z) M(X, Z) dZ \right] dX = F(Y).$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Винера — Хопфа для выражения в квадратных скобках, которое при $M(X, Z) \equiv N(X, Z)$ совпадает

с левой частью уравнения (е). Отсюда

$$k(Y + X + d) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k(Y - Z) \mathcal{D}_1^+ \int_0^{d+X} \mathcal{M}_+(Z + \eta) \mathcal{L}_+(X + d - \eta) d\eta dZ. \quad (\kappa)$$

Для рассмотренного Фоксом частного случая

$$K(\alpha) = (\alpha^2 - k^2)^{-1/2}, \quad k(x) = \frac{1}{2} i H_0^{(1)}(k|x|),$$

$$\mathcal{M}_+(u) = i \mathcal{L}_+(u) = 2^{1/2} e^{i\pi/4} u^{-1/2} e^{iku}.$$

Интеграл в формуле (ж) берется элементарно, и формула (к) сводится к результату Фокса:

$$H_0^{(1)}[k(X + Y + d)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k|X - Z|) \frac{e^{ik(Z + Y + d)}}{Z + Y + d} \left[\frac{d + Y}{Z} \right]^{1/2} dZ$$

Рассмотренная выше задача сходна с задачей, рассмотренной в § 5.5 (ср. с задачей 6.6). Возможно, что для задач о дифракции на щелях и полосах метод, изложенный в § 5.5 и 5.6, более удобен, чем только что рассмотренный. (Оба метода, конечно, связаны между собой.)

6.6. Показать, что решение интегральных уравнений (а) — (в) из задачи (6.5) эквивалентно решению следующего обобщенного функционального уравнения Винера — Хопфа [в обозначениях, аналогичных обозначениям (5.61)]:

$$e^{iaq} U_+(x) + W(x) + e^{iap} V_-(x) = K(x) [e^{iaq} R_+(x) + S(x) + e^{iap} T_-(x)],$$

где $R_+(x)$, $T_-(x)$ и $W(x)$ — неизвестные функции.

6.7. Показать, что следующие две задачи эквивалентны.

1. Найти решение интегрального уравнения

$$\int_0^{\infty} [k(x - \xi) + l(x + \xi)] h(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{при } x > 0.$$

2. Найти решение следующего обобщенного функционального уравнения Винера — Хопфа

$$K(\alpha) H_+(\alpha) + L(\alpha) H_+(-\alpha) = F_+(\alpha) + E_-(\alpha).$$

6.8. Сведем интегральное уравнение

$$\int_0^1 k(x - \xi) h(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{при } 0 < x < 1 \quad (\alpha)$$

к интегральному уравнению типа Фредгольма. Для простоты предположим, что преобразование Фурье функции $k(x)$, т. е. функция $K(\alpha)$, является чет-

ной функцией, $|K(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1}$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $K_-(\alpha) = K_+(-\alpha)$. Тогда в обозначениях (6.12) при $\alpha_2 = -\alpha_1$ будем иметь

$$\mathcal{L}_+(u) = \mathcal{L}_-(u) = \mathcal{L}(u), \quad \mathcal{M}_+(u) = \mathcal{M}_-(u) = \mathcal{M}(u);$$

здесь введены новые обозначения $\mathcal{L}(u)$ и $\mathcal{M}(u)$. Согласно задаче 6.2, имеем следующие взаимно обратные формулы

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \mathcal{L}(x-\xi) g(\xi) d\xi, \\ g(x) &= \frac{1}{2\pi} e^{i\beta x} \frac{d}{dx} \left[e^{-i\beta x} \int_0^x \mathcal{M}(x-\xi) f(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где β — некоторое комплексное число, расположенное в верхней полуплоскости. Простой заменой переменной получим

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \int_x^1 \mathcal{L}(\xi-x) g(\xi) d\xi, \\ g(x) &= -\frac{1}{2\pi} e^{-i\beta x} \frac{d}{dx} \left[e^{i\beta x} \int_x^1 \mathcal{M}(\xi-x) f(\xi) d\xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Обратимся теперь к уравнению (а). Согласно результатам, полученным в задаче 6.3, можно положить

$$\begin{aligned} h(x-\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\max(x, \xi)}^1 \mathcal{L}(u-x) \mathcal{L}(u-\xi) du + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_1^\infty \mathcal{L}(u-x) \mathcal{L}(u-\xi) du. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (а), получаем при $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} &\int_x^1 \mathcal{L}(u-x) \int_0^u \mathcal{L}(u-\xi) h(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^1 h(\xi) \int_1^\infty \mathcal{L}(u-x) \mathcal{L}(u-\xi) du d\xi = 2\pi f(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$\int_0^u \mathcal{L}(u-\xi) h(\xi) d\xi = \chi(u). \quad (8)$$

Применим к уравнению (7) формулу обращения (в). Во втором интеграле в уравнении (7) заменим $h(\xi)$ ее выражением через $\chi(u)$, получающимся

после применения к уравнению (л) формулы обращения (б). Получим

$$\begin{aligned} \chi(x) - \frac{1}{4\pi^2} e^{-i\beta x} \frac{d}{dx} \left[e^{i\beta x} \int_x^1 \mathcal{M}(u-x) \int_1^\infty \mathcal{L}(\zeta-u) N(\zeta) d\zeta du \right] = \\ = -e^{-i\beta x} \frac{d}{dx} \left[e^{i\beta x} \int_x^1 \mathcal{M}(u-x) f(u) du \right]; \end{aligned} \quad (e)$$

здесь

$$\begin{aligned} N(\zeta) = \int_0^1 e^{i\beta v} \frac{d}{dv} \left[e^{-i\beta v} \int_0^v \mathcal{M}(v-\xi) \chi(\xi) d\xi \right] \mathcal{L}(\zeta-v) dv = \\ = \mathcal{L}(\zeta-1) \int_0^1 \mathcal{M}(1-\xi) \chi(\xi) d\xi - \int_0^1 \chi(\xi) I(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (ж)$$

причем

$$\begin{aligned} I(\xi) = \int_\xi^1 \mathcal{M}(v-\xi) e^{-i\beta v} \frac{d}{dv} [e^{i\beta v} \mathcal{L}(\zeta-v)] dv = \\ = \int_0^{1-\xi} \mathcal{M}(u) e^{-i\beta(u+\xi)} \frac{d}{du} [e^{i\beta(u+\xi)} \mathcal{L}(\zeta-u-\xi)] du. \end{aligned}$$

В силу симметрии выражения в квадратных скобках можно d/du заменить на $d/d\xi$. Далее, легко проверить, что

$$e^{-i\beta\xi} \frac{d}{d\xi} e^{i\beta\xi} \int_0^{1-\xi} \mathcal{M}(u) \mathcal{L}(\zeta-u-\xi) du = -\mathcal{M}(1-\xi) \mathcal{L}(\zeta-1) + I(\xi). \quad (з)$$

Подставляя найденное отсюда значение $I(\xi)$ в формулу (ж) и полагая $v = \xi + u$, получаем

$$N(\zeta) = - \int_0^1 \chi(\xi) e^{-i\beta\xi} \frac{d}{d\xi} \left[e^{i\beta\xi} \int_\xi^1 \mathcal{M}(v-\xi) \mathcal{L}(\zeta-v) dv \right].$$

Подставив этот результат в уравнение (е), найдем при $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \chi(x) + \int_0^1 \chi(\xi) K(x, \xi) d\xi = \\ = -e^{-i\beta x} \frac{d}{dx} \left[e^{i\beta x} \int_x^1 \mathcal{M}(\xi-x) f(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (и)$$

где

$$K(x, \xi) = \int_1^\infty k(x, \zeta) k(\xi, \zeta) d\zeta, \quad (к)$$

$$k(x, \zeta) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\beta x} \frac{d}{dx} \left[e^{i\beta x} \int_x^1 \mathcal{M}(u-x) \mathcal{L}(\zeta-u) du \right]. \quad (л)$$

Очевидно, что, с другой стороны, можно было бы получить уравнение Фредгольма для $h(\xi)$, применяя к уравнению (г) формулу обращения (б) и формулу обращения (в). Однако ядро получающегося при этом интегрального уравнения было бы более громоздким, нежели выражение (к).

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2} i \int_0^1 H_0^{(1)}(k|x-\xi|) h(\xi) d\xi = f(x), \quad 0 < x < 1;$$

при этом,

$$K_+(\alpha) = e^{i\pi/4} (k + \alpha)^{-1/2}, \quad K_-(\alpha) = e^{i\pi/4} (k - \alpha)^{-1/2} = e^{-i\pi/4} (\alpha - k)^{-1/2}.$$

Положим $\alpha_2 = -\alpha_1 = k$. Тогда [см. формулы (6.12), (6.25)]

$$\mathcal{L}(u) = \mathcal{M}(u) = 2^{1/2} u^{-1/2} e^{iku}.$$

Интеграл в формуле (л) берется элементарно, и, согласно формулам (к) и (л), при $\beta = k$, мы найдем

$$k(x, \zeta) = -\frac{1}{\pi} e^{ik(\zeta-x)} \frac{(\zeta-1)^{1/2}}{(1-x)^{1/2}(\zeta-x)},$$

$$K(x, \xi) = \frac{1}{\pi^2 (1-x)^{1/2} (1-\xi)^{1/2} (x-\xi)} [e^{ik(\xi-x)} F(\xi) - e^{ik(x-\xi)} F(x)],$$

где

$$F(\xi) = (1-\xi) \int_{2k(1-\xi)}^{\infty} u^{-1} e^{iu} du.$$

6.9. Показать, что задачи 6.5 и 6.8 эквивалентны, так как уравнения (а) — (в) задачи 6.5 можно свести к одному интегральному уравнению типа (а) из задачи 6.8, и наоборот. Показать также, что решение интегрального уравнения (а) в задаче 6.8 эквивалентно решению функционального уравнения, приведенного в задаче 6.6 и являющегося обобщенным функциональным уравнением Винера — Хопфа (см. статью Латтера [1]).

ПРИМЕЧАНИЕ АВТОРА, СДЕЛАННОЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

С точки зрения приближенных методов, основанных на методе Винера — Хопфа, можно рассматривать следующие три группы задач.

1. Задачи, которые строго формулируются в виде обобщенного функционального уравнения Винера — Хопфа в комплексной области (стр. 202); к приближениям переходят при решении этих функциональных уравнений. Задачи именно такого типа приведены в гл. V. Из имеющихся в литературе примеров, разобранных методом интегрального уравнения, укажем работы Албласа [2] и Г. Левина [2], [3]. Выводы функционального уравнения методом интегрального уравнения и методом Джонса эквивалентны, и большая часть рассуждений, проведенных в § 2.7, стр. 91, остается в силе (хотя рассуждения проводились для задач, которые точно решаются методом Винера — Хопфа).

2. Задачи, которые обычно формулируются в виде интегральных уравнений или парных интегральных уравнений; эти формулировки можно свести к интегральным уравнениям более удобного вида, например к уравнениям Фредгольма второго рода. Такого рода примеры даны в этой книге (задачи 6.5 и 6.8), однако их можно отнести и к группе 1 и решать методами, изложенными в гл. V, что, по нашему мнению, более удобно (ср. с задачами 6.6 и 6.9). Однако это справедливо не всегда (см. стр. 249).

3. Задачи, к которым метод Винера — Хопфа непосредственно не применим, но которые путем приближений или преобразований приводятся к виду, допускающему применение этого метода. Здесь имеются весьма широкие возможности, см., например, статьи Г. Левина [1], а также Г. Левина и У Тай-те [1, 2]. В этой книге подобные задачи не рассматриваются.

Задачи вида 2 и 3 будут, по-видимому, включены в книгу, подготовляемую проф. Снеддоном и мною, посвященную, главным образом, решению задач со смешанными граничными условиями без привлечения метода Винера — Хопфа.

Сделанные выше замечания возникли в результате интересной дискуссии с д-ром Г. Левиным на Международном математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 г.

ЛИТЕРАТУРА,

Звездочками отмечены работы, которые непосредственно не связаны с методом Винера — Хопфа или в которых этот метод явно не упоминается. Ссылки вида EM-35, 1951, означают: Reports of the Institute of Mathematical Sciences, Division of Electromagnetic Research, New York University. Я весьма благодарен библиотеке этого института за предоставление мне отписок упомянутых отчетов.

А л б л а с (Alblas J. B.)

1. On the diffraction of sound waves in a viscous medium, *Appl. Sci. Res.*, A6 (1957), 237—262.
2. On the generation of water waves by a vibrating strip, *Appl. Sci. Res.*, A7 (1958), 224—236.

А м е н (Ament W. S.)

1. Application of a Wiener — Hopf technique to certain diffraction problems, U. S. Naval Res. Lab. Report № 4334, Washington, D. C., 1954.

Б а з е р, К а р п (Bazer J., Carp S. N.)

1. On a steady-state potential flow through a conical pipe with a circular aperture, *J. Rat. Mech. and Analysis*, 5 (1956), 277—322; см. также EM-66, 1954.

Б а у к а м п (Bouwkamp C. J.)

1. Diffraction theory, *Rep. Progr. Phys.*, 17 (1954), 35—100; см. также EM-50, 1953.

Б е й к е р, К о п с о н (Baker B. B., Copson E. T.)

1. The mathematical theory of Huyghens' principle, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1950.

Б е й л и н (Baillin L. L.)

1. An analysis of the effect of the discontinuity in a bifurcated circular guide upon plane longitudinal waves, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 47 (1951), 315—335.

Б л а с (Blas J.)

1. The extension of the Wiener-Hopf technique to radiation problems involving boundaries of elliptic cross-section, Dissertation, Polytech. Inst. Brooklyn, 1951.

Б е р з (Berz F.)

- 1*. Reflection and refraction of microwaves at a set of parallel metallic plates, *Proc. Inst. Elect. Engrs.*, 98, p. III (1951), 47—55.

Б о л д у н, Х е й н с (Baldwin G. L., Heins A. E.)

1. On the diffraction of a plane wave by an infinite plane grating, *Math. Scand.*, 2 (1954), 103—118.

В а й н ш т е й н Л. А.

1. Строгое решение задачи о плоском волноводе с открытым концом, *Изв. АН СССР*, сер. физ., 12 (1948), 144—165.
2. О теории дифракции на двух параллельных полуплоскостях, *Изв. АН СССР*, сер. физ., 12 (1948), 166—180.

3. Теория симметричных волн в круглом волноводе с открытым концом, *ЖТФ*, 18 (1948), 1543—1564.
 4. Теория звуковых колебаний в открытых трубах, *ЖТФ*, 19 (1949), 910—930.
 5. Излучение несимметричных волн из открытого конца круглого волновода, *ДАН СССР*, 74 (1950), 485—488.
 6. О дифракции электромагнитных волн на открытом конце круглого волновода, диаметр которого значительно больше длины волны, *ДАН СССР*, 74 (1950), 909—912.
 7. Диафрагмы в волноводах, *ЖТФ*, 25 (1955), 841—846.
 8. Дифракция электромагнитных волн на решетке из параллельных проводящих полос, *ЖТФ*, 25 (1955), 847—852.
- Ватсон (Watson G. N.)
1. Bessel functions, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1944; русский перевод: Ватсон Г., Теория бесселевых функций, ИЛ, 1949.
- Вильямс (Williams W. E.)
1. Diffraction by two parallel planes of finite length, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 50 (1954), 309—318.
 2. Step discontinuities in waveguides, EM-77, 1955.
 3. Diffraction by a cylinder of finite length, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 52 (1956), 322—335.
- Винер (Wiener N.)
1. The extrapolation, interpolation, and smoothing of stationary time series, Wiley, 1949.
- Винер, Хопф (Wiener N., Hopf E.)
1. Über eine Klasse singularer Integralgleichungen, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* (1931), 696—706.
- Гаст (Gast R. C.)
1. Diffraction by two parallel half-planes with source excitation, Tech. Rep. № 25, Mathematics Department, Carnegie Inst. Technol., 1956.
- Грин, Хейнс (Greene T. R., Heins A. E.)
1. Water waves over a channel of infinite depth, *Quart. Appl. Math.*, 11 (1953), 201—214.
- Гринберг Г. А.
- 1*. К теории так называемой береговой рефракции электромагнитных волн, *ЖЭТФ*, 14 (1944), 84—111.
- Дейвисон (Davison B.)
1. Neutron transport theory, Oxford Univ. Press, 1957.
- Джонс (Jones D. S.)
1. Note on diffraction by an edge, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, 3 (1950), 420—434.
 2. Diffraction by a waveguide of finite length, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 48 (1952), 118—134.
 3. A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems *Quart. J. Math.*, (2) 3 (1952), 189—196.
 4. Diffraction by a thick semi-infinite plate, *Proc. Roy. Soc.*, A217 (1953), 153—175.
 5. The scattering of a scalar wave by a semi-infinite rod of circular cross-section, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, A247 (1955), 499—528.
 - 6*. A new method for calculating scattering with particular reference to the circular disk, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 9 (1956), 713—746; см. также EM-87, 1955.
 7. Note on the steady flow of a fluid past a thin aerofoil, *Quart. J. Math.* (2) 6 (1955), 4—8.
 8. The unsteady motion of a thin aerofoil in an incompressible fluid, *Communs. Pure and Appl. Math.*, 10 (1957), 1—21.

Ди-Прима (DiPrima R. C.)

1. On the diffusion of tides into permeable rock of finite depth, *Quart. Appl. Math.*, 15 (1957), 329—339.

Иидзима (Iijima T.)

1. On the electromagnetic fields in case of existence of a semi-infinite hollow conductive cylinder II (in Japanese), Electrotechnical Laboratory, Tokyo, Rep. № 531, 1952.

Йост (Res Jost)

1. Mathematical analysis of a simple model for the stripping reaction, *Z. angew. Math. und Phys.*, 6 (1955), 316—326.

Карлсон, Хейнс (Carlson J. F., Heins A. E.)

1. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates I, *Quart. Appl. Math.*, 4 (1946), 313—329.

Карп (Karp S. N.)

1. Wiener — Hopf techniques and mixed boundary value problems, *Commun. Pure and Appl. Math.*, 3 (1950), 411—426; см. также EM-25, 1950; Symposium on Electromagnetic Waves, Interscience, 1951, 57—72.
2. The natural charge distribution and capacitance of a finite conical shell, EM-35, 1951.

- 3*. An application of Sturm — Liouville theory to a class of two-part boundary value problems, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 53 (1957), 368—381.

Карп, Вильямс (Karp S. N., Williams W. E.)

- 1*. Equivalence relations in diffraction theory, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 53 (1957), 683—690; см. также EM-83, 1955.

Карп, Рассек (Karp S. N., Russek A.)

- 1*. Diffraction by a wide slit, *J. Appl. Phys.*, 27 (1956), 886—894; см. также EM-75, 1955.

Каррьер (Carrier G. F.)

1. A generalization of the Wiener — Hopf technique, *Quart. Appl. Math.*, 7 (1949), 105—109.
2. The mechanics of the Rijke tube, *Quart. Appl. Math.*, 12 (1954), 383—395.
3. Sound transmission from a tube with flow, *Quart. Appl. Math.*, 13 (1956), 457—461.

Каррьер, Ди-Прима (Carrier G. F., DiPrima R. C.)

1. On the unsteady motion of a viscous fluid past a semi-infinite flat plate, *J. Math. Phys.*, 35 (1956), 359—383.

Каррьер, Мунк (Carrier G. F., Munk W. H.)

1. On the diffusion of tides into permeable rock, *Proc. of Symposia in Applied Math.*, V, McGraw-Hill, 1954, 89—96.

Клеммов (Clemmow P. C.)

1. A method for the exact solution of a class of two-dimensional diffraction problems, *Proc. Roy. Soc.*, A205 (1951), 286—308.
2. Radio propagation over a flat earth across a boundary separating two different media, *Philos. Trans. Roy. Soc.*, 246 (1953), 1—55.

Койтер (Koiter W. T.)

1. Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications, parts I—III, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.*, B57 (1954), 558—579.
2. On the flexural rigidity of a beam weakened by saw-cuts, parts I—II, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.*, B59 (1956), 354—374.

Копсон (Copson E. T.)

- 1*. Theory of functions of a complex variable, Oxford Univ. Press, 1935.
2. On an integral equation arising in the theory of diffraction, *Quart. J. Math.*, 17 (1946), 19—34.
- 3*. An integral equation method of solving plane diffraction problems, *Proc. Roy. Soc.*, A186 (1946), 100—118.

- 4*. Diffraction by a plane screen, *Proc. Roy. Soc.*, A202 (1950), 277—284.
 5*. The electrified disk, *Proc. Edin. Math. Soc.*, (3) 8 (1947), 14—19.
- Крис (Crease J.)
 1. Long waves on a rotating earth in the presence of a semi-infinite barrier, *J. Fluid Mech.*, 1 (1956), 86—96.
- Курганов (Kourganoff V.)
 1. Basic methods in transfer problems, Oxford Univ. Press, 1952.
- Латта (Latta G. E.)
 1. A note on the Wiener—Hopf technique for solving integral equations, Tech. Rep. № 56, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford Univ., 1956.
- Латтер (Latter R.)
 1. Approximate solutions for a class of integral equations, *Quart. Appl. Math.*, 16 (1958), 21—31.
- Лафлёр, Намиас (Lafleur C., Namias V.)
 1. Sur la résolution de l'équation de Wiener—Hopf basée sur l'utilisation des propriétés formelles des fonctions δ_+ et δ_- , *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, (5) 40 (1954), 787—790.
- Левин (Levine H.)
 1. On the theory of sound reflection in an open-ended cylindrical tube *J. Acoust. Soc. Amer.*, 26 (1954), 200—211.
 2. Diffraction by an infinite slit, Tech. Rep. № 61, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford Univ., 1957.
 3. Skin friction on a strip of finite width moving parallel to its length, *J. Fluid Mech.*, 3 (1957), 145—158.
- Левин, У Тай-те (Levine H.; Wu T. T.)
 1. Diffraction by an aperture at high frequencies, Tech. Rep. № 71, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford Univ., 1957.
 2. The scattering cross-section of a row of circular cylinders, Tech. Rep. № 73, Applied Mathematics and Statistics Laboratory, Stanford Univ., 1958.
- Левин, Швингер (Levine H., Schwinger J.)
 1. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe, *Phys. Rev.*, 73 (1948), 383—406.
- Левин (Lewin L.)
 1. Advanced theory of waveguides, Iliffe and Sons, 1951; русский перевод: Левин Л., Современная теория волноводов, ИЛ, 1954.
- Левинсон (Levinson N.)
 1. A heuristic exposition of Wiener's mathematical theory of prediction and filtering, *J. Math. Phys.*, 26 (1947), 110—119.
- Лейтнер, Уэлс (Leitner A., Wells C. P.)
 1. On the radiation by disks and conical structures, Interim Tech. Rep. No. 1, Departments of Mathematics and Physics, Michigan State Univ., 1955.
- Льюис, Каррьер (Lewis J. A., Carrier G. F.)
 1. Some remarks on the flat plate boundary layer, *Quart. Appl. Math.*, 7 (1949), 228—234.
- Майлс (Miles J. W.)
 1. The oscillating rectangular airfoil at supersonic speeds, *Quart. Appl. Math.*, 9 (1951), 47—65.
- Марк (Mark C.)
 1. The neutron density near a plane surface, *Phys. Rev.*, 72 (1947), 558—564.
- Маркувиц (Marcuvitz N.)
 1. Waveguide Handbook, McGraw-Hill, 1951; русский перевод: Справочник по волноводам, Сов. радио, 1952.
- Маршак (Marshak R. E.)
 1. The Milne problem for a plane slab, etc., *Phys. Rev.*, 72 (1947), 47—50.

- Мауэ (Maue A. W.)
1. Die Beugung elastischer Wellen an der Halbebene, *Z. angew. Math. Mech.*, **33** (1953), 1—10.
- Мейер, Лейтнер (Meier J. A., Leitner A.)
1. Biconical antenna, Interim Tech. Rep. № 6, Departments of Mathematics and Physics, Michigan State Univ., 1957.
- Морс, Фешбах (Morse P. M., Feshbach H.)
1. Methods of theoretical physics, McGraw-Hill, 1953; русский перевод: Морс Ф. М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, ИЛ, 1958.
- Мусхелишвили Н. И.
1*. Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, 1946.
2. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 2 изд., АН СССР, 1935.
- Намиас (Namiias V.)
1. Utilisation des propriétés formelles des fonctions impulsives δ_+ et δ_- pour la discussion de l'équation de Wiener — Hopf, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, (5) **41** (1955), 435—440.
- Пападопулос (Papadopoulos V. M.)
1. Scattering by a semi-infinite strip, of dominant-mode propagation in an infinite rectangular waveguide, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **52** (1956), 553—563.
2. The scattering effect of a junction between two circular waveguides, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, **10** (1957), 191—209.
- Пирсон (Pearson J. D.)
1. Diffraction of electromagnetic waves by a semi-infinite circular waveguide, *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **49** (1953), 659—667.
- Плачек (Placzek G.)
1. The angular distribution of neutrons emerging from a plane surface, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 556—558.
- Плачек, Зейдель (Placzek G., Seidel W.)
1. Milne's problem in transport theory, *Phys. Rev.*, **72** (1947), 550—555.
- Пэли, Винер (Paley R. E. A. C., Wiener N.)
1. The Fourier transform in the complex domain, Amer. Math. Soc. Colloquium Publication, New York, v. 19, 1934.
- Рейснер (Reissner E.)
1. On a class of singular integral equations, *J. Math. Phys.*, **20** (1941), 219—223.
- Рейтер, Сондхеймер (Reuter G. E. H., Sondheimer E. H.)
1. The theory of the anomalous skin effect on metals, *Proc. Roy. Soc.*, **A195** (1948), 336—364.
- Синьор (Senior T. B. A.)
1. Diffraction by a semi-infinite metallic sheet, *Proc. Roy. Soc.*, **A213** (1952), 436—458.
- Смитис (Smithies F.)
1. Singular integral equations, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2) **43** (1940), 409—466.
- Снеддон (Sneddon I. N.)
1. Fourier transforms, McGraw-Hill, 1951; русский перевод: Снеддон И., Преобразования Фурье, ИЛ, 1955.
- Спаренберг (Sparenberg J. A.)
1. Application of the theory of sectionally holomorphic functions to Wiener — Hopf type integral equations, *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap.*, **A59** (1956), 29—34.
2. The homogeneous first order integro-differential equation of the Wiener — Hopf type, Rep. № 13, Technische Hogeschool, Delft, 1956.
3. On a shrink-fit problem, *Appl. Sci. Res.*, **A7** (1958), 109—120.
- Спаренберг, Бракман, Бентхем (Sparenberg J. A., Braakman T. C., Benthem C. W.)

1. Discussion of a Wiener — Hopf type integro-differential equation, *Appl. Sci. Res.*, **В6** (1957), 312—322.
- Титчмарш (Titchmarsh E. C.)
1. Theory of Fourier integrals, Oxford Univ. Press, 1937; русский перевод: Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
 - 2*. Theory of functions, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1939; русский перевод: Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, 1951.
- Трантер (Tranter C. J.)
- 1*. Integral transforms in mathematical physics, Methuen, 1951; русский перевод: Трантер, Интегральные преобразования в математической физике, Гостехиздат, 1956.
- Уэйц, Келлер (Weitz M., Keller J. B.)
1. Reflection of water waves from floating ice in water of finite depth, *Communs. Pure and Appl. Math.*, **3** (1950), 305—318.
- Фельд Я. Н.
1. О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах, *ДАН СССР*, **102** (1955), 257—260.
 2. Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами, *ДАН СССР*, **106** (1956), 215—218.
- Фок В. А.
1. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, *ДАН СССР*, **36**, № 4—5 (1942), 147—151.
 2. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, *Мат. сборник*, **14** (1944), 3—50.
- Харрингтон (Harrington R. F.)
1. A current element near the edge of a conducting half-plane, *J. Appl. Phys.*, **24** (1953), 547—550.
- Хейнс (Heins A. E.)
1. The radiation and transmission properties of a pair of semi-infinite parallel plates, I, *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948), 157—166; II, там же, 215—220.
 2. Water waves over a channel of finite depth with a dock, *Amer. J. Math.*, **70** (1948), 730—748.
 3. Water waves over a channel of finite depth with a submerged plane barrier, *Canad. J. Math.*, **2** (1950), 210—222.
 4. Some remarks on the coupling of two ducts, *J. Math. Phys.*, **30** (1951), 164—169.
 5. A note on a singular integral equation, *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, **46** (1950), 268—271.
 6. Systems of Wiener — Hopf equations, Proc. of Symposia in Applied Math., II, McGraw-Hill, 1950, 76—81.
 7. A note on a pair of dual integral equations (short summary only), *Bull. Amer. Math. Soc.*, **56** (1950), 172.
 8. Sur les couples d'équations intégrales, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **230** (1950), 1732—1734.
 9. On gravity waves, Proc. of Symposia in Applied Math., IV, McGraw-Hill, 1953, 75—86.
 10. The scope and limitations of the method of Wiener and Hopf, *Communs Pure and Appl. Math.*, **9** (1956), 447—466.
 11. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates III, *Quart. Appl. Math.*, **8** (1950), 281—291.
 12. The Green's function for periodic structures in diffraction theory with an application to parallel plate media I, *J. Math. and Mech.*, **6** (1957), 401—426.

Литература

- Хейнс, Винер (Heins A. E., Wiener N.)
1. A generalization of the Wiener — Hopf integral equation. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **32** (1946), 98—101.
- Хейнс, Карлсон (Heins A. E., Carlson J. F.)
1. The reflection of electromagnetic waves by an infinite set of plates II, *Quart. Appl. Math.*, **5** (1947), 82—88.
- Хейнс, Мак-Камп (Heins A. E., MacCamy R. C.)
1*. A function-theoretic solution of certain integral equations I, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **9** (1958), 132—143.
- Хейнс, Фешбах (Heins A. E., Feshbach H.)
1. The coupling of two acoustical ducts, *J. Math. Phys.*, **26** (1947), 143—155.
2. On the coupling of two half-planes, *Proc. of Symposia in Applied Math.*, **V**, McGraw-Hill, 1954, 75—87.
- Хопф (Hopf E.)
1. Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Tract, № 31, Cambridge Univ. Press, 1934.
- Честер (Chester W.)
1. The propagation of sound waves in an open-ended channel, *Philos. Mag.*, (7) **41** (1950), 11—33.
- Эллиотт (Elliott J. P.)
1. Milne's problem with a point source, *Proc. Roy. Soc.*, **A228** (1955), 424—433.
- Эрдейи (Erdelyi A.)
1*. Asymptotic expansions, Dover, 1956.
- Эрдейи и др. (Erdelyi A. et. al.)
1*. Tables of integral transforms, v. I, II, McGraw-Hill, 1954.

УКАЗАТЕЛЬ

- Абелевы теоремы 48, 59, 70
 Алблас (Alblas J. B.) 112, 263
 Амен (Ament W. S.) 59
 Аналитическое продолжение 17, 50
 Антенна биконическая 246
 — цилиндрический стержень 240
 Асимптотические разложения в приближенных решениях 225 (см. также Поле в дальней зоне)
 — — контурных интегралов 45, 58
 — — преобразований 48
- Базер (Bazer J.) 88, 148, 173, 190
 Бай Ши-и (Pai S. I.) 160
 Баукамп (Bouwkamp C. J.) 90, 203, 246
 Бейкер (Baker B. B.) 84, 233
 Бейлин (Bailin L. L.) 141
 Берз (Berz F.) 153
 Бесконечное произведение 26, 52, 119, 149, 150
 — — асимптотическое поведение 120, 147, 148
 — — вычисление 146, 147
 — — для гамма-функции 53
 Бигармоническое уравнение (см. также Упругая среда) напряжения в полосе 159
 — — приближенная факторизация 185
 Болдуин (Baldwin G. L.) 144
 Бреммер (Bremmer H.) 38, 48
- Вайнштейн Л. А. 31, 133, 144, 150, 152, 175
 Вайнштейна — Карна — Клеммова метод 62, 175, 240
 Ван дер Поля (Van der Pol) 38, 48
 Ватсон (Watson G. N.) 48, 59
 Ветвления линии 18
- Ветвления линии специальные случаи 19, 31, 50, 51
 Ветвления точки и полюсы (см. Полюсы и точки ветвления)
 Вильямс (Williams W. E.) 54, 144, 191, 192
 Винер (Wiener N.) 54, 144, 191, 192
 Винера — Хопфа уравнение (от комплексной переменной для точных решений), основы метода 49
 — — вывод методом Джонса 69, 74, 99, 116, 144, 172
 — — — из интегрального уравнения 82, 191
 — — — — парных интегральных уравнений 171, 172, 249
 — — — обобщенное (от комплексной переменной для приближенных решений) 202
 — — — формулировки задач 204, 212, 229, 260, 263
 — — — решения 208, 222
 — — — общие решения 94, 104, 251, 256
 — — — решение для простых случаев 69, 82
 — — — сведение к линейным алгебраическим уравнениям 197
 — — уравнения, общее рассмотрение 173
 — — — интегральные, вывод с помощью функции Грина 75, 105, 152
 — — — вывод из физических соображений 105, 151, 200
 — — — — методом преобразований 14, 79
 — — — — единственность решения 83, 192
 — — — — Милна интегральное уравнение 191
 — — — — решение методом Винера — Хопфа 81, 191, 255

- Винера — Хопфа уравнения интегральные, решение с помощью задачи Гильберта 193
 — — — — сведение более общих случаев к уравнениям Фредгольма второго рода 259, 260
 — — — — к повторным уравнениям Вольтерра 257
 — — — — специальные уравнения 194, 200
- Волновод плоский, бесконечной длины со ступенькой 221, 234
 — — — — с полубесконечной диэлектрической пластиной 238
 — — — — поперечной полосой 141, 239
 — — конечной длины 233
 — — полубесконечный (см. Плоскости, две параллельные)
 — — распространяющиеся и нераспространяющиеся типы волн 114
 — — решение с помощью системы линейных алгебраических уравнений 197
 — — с неидеальными стенками 154
 — — полосой конечной толщины, параллельной стенкам 238
 — — — — параллельной стенкам 136
 — — — — системой штырей 197
 — — цилиндрический, бесконечной длины с неидеальными стенками 155
 — — излучение 127
 — — — — из коаксиала 153, 176
 — — — — конечной длины 233
 — — — — падение волны на 134
 — — полубесконечный электромагнитный 152
 — — распространяющиеся и нераспространяющиеся типы волн 128
 — — содержащий полубесконечную трубу 140
- Волновое уравнение 39
 Волны на воде 110, 155
 Вольтерра интегральные уравнения 256, 257, 260
- Вычисление бесконечных произведений 146, 147
 Вязкая среда 112, 160
- Гамма-функция 53
 — — выражающиеся через нее факторизации 53, 190, 194, 243
- Ганкеля функции, асимптотическое поведение 57
 Ганкеля функции, интегральное представление 45
- Гильберта задача 62, 162
 — — применение к интегральному уравнению 193
- Граничные условия, содержащие произвольные функции 92 (см. также импедансные границы)
 Грин (Greene T. R.) 110
 Грина функция 75
- Дейвисон (Davison B.) 192
 Дёч (Doetsch G.) 38, 48
 Джонс (Jones D. S.) 7, 8, 61, 65, 90, 111, 113, 147, 150, 151, 190, 196, 212, 215, 220, 221, 225, 226, 233, 258
- Джонса метод, общие замечания 7, 61, 86, 91, 114
 — — подробное рассмотрение на конкретном примере 65
 — — приближенные решения 202, 263
 — — применение 116
 — — произвольные граничные условия 94
- Дирака дельта-функция 56
 Диск, волновое уравнение, высокие частоты 246
 — — — — низкие частоты 240, 258
 — — уравнение Лапласа 190, 258
- Дифракция (см. Диск, Волновод, Плоскости, Полосы и щели)
 — методы, отличные от метода Винера — Хопфа 144, 203
- Диэлектрическая пластина 238, 240
- Единственность 86
 — и условие на ребре 64, 89
 — решения интегральных уравнений 83, 192
- Звуковые волны (см. Волновод, Плоскость и т. д.)
 Зейдель (Seidel W.) 192
 Заммерфельда задача о полуплоскости 61
 — условия излучения 43
- Излучения условия на бесконечности 12, 43
 Иидзима (Iijima T.) 152
 Импедансного типа границы, обозначения 155

- Импедансного типа границы, полоса, параллельная стенкам волновода 139
 — — — — поперечная в волноводе 239
 — — — — полуплоскость 98
 — — граничные условия (см. Импедансного типа границы)
 Институт математических наук, Нью-Йорк, отчеты 265
 Интегрального уравнения метод, общие замечания 7, 59, 86, 91, 263
 Интегральные уравнения (см. Фредгольма, Вольтерра, Винера — Хопфа)
 Иост (Jost Res) 247
 Источников распределения 56, 65, 102
- Карлсон (Carlson J. F.) 119, 153
 Карп (Karp S. N.) 190 (см. также Вайнштейна — Карпа — Клеммова метод)
 Каррьер (Carrier G. F.) 110, 113
 Карслу (Carslaw H. S.) 87
 Квантовомеханическая задача 247
 Келлер (Keller J. B.) 155
 Кланкер (Klunker E. B.) 160
 Клеммов (Clemmow P. C.) 48, 103, 109, 174 (см. также Вайнштейна — Карпа — Клеммова метод)
 Клин, дифракция 247
 — из упругого материала 196
 Койтер (Koiter W. T.) 90, 160, 183, 184, 196
 Конвекция тепла из плоской пластины 110
 Контурные интегралы для разбиений на сумму и произведение 29
 — — специального вида 43
 Конус, уравнение волновое 246
 — — Лапласа 189
 Копсон (Copson E. T.) 7, 15, 16, 84, 111, 233, 258
 Копсона метод 258
 Косинус-преобразование 169, 239
 Круглый волновод (см. Волновод цилиндрический)
 Крыло, занимающее четверть плоскости 110
 — двумерное 196
 Курганов (Kourganoff V.) 153, 192
- Лапласа преобразование 21, 33, 65, 102
 — — полная эквивалентность преобразованию Фурье 33, 37
- Лапласа типа уравнения 155 (см. также Бигармоническое уравнение)
 — — — уравнение Озеена 112
 — уравнение в задаче о струе 160
 — — — полярных координатах 187, 200
 — — как предел волнового уравнения 155
 Латтер (Latter R.) 263
 Лебега интеграл 34
 Лебедева — Конторовича преобразование 170, 240
 Левин Г. (Levine H.) 31, 54, 133, 150, 152, 263, 264
 Левин Л. (Lewin L.) 152, 203
 Лейтнер (Leitner A.) 240, 244, 246
 Леннокс (Lennox S. C.) 160
 Линфут (Linfoot E. H.) 199
 Лиувилля теорема 17, 50, 70, 83, 119, 132
 Льюис (Lewis J. A.) 113
- Магнус (Magnus W.) 199
 Майлс (Miles J. W.) 110
 Марк (Mark C.) 192
 Маркувиц (Marcuvitz N.) 141, 153, 203
 Маршак (Marshak R. E.) 192
 Мауэ (Maue A. W.) 90, 112
 Мейер (Meier J. A.) 246
 Мейкснер (Meixner J.) 90
 Мероморфные функции 52
 Милна интегральное уравнение 191
 Множитель $\exp(-i\omega t)$ 40
 Морс (Morse P. M.) 75, 133, 151, 154, 203
 Мунк (Munk W. H.) 110
 Мухомелишвили Н. И. 163, 165, 167, 180, 181
- Навье — Стокса уравнение линейризованное 112
 Наложения метод 96, 103
 Неидеальная проводимость (см. Импедансного типа границы)
- Оберхеттингер (Oberhettinger F.) 48, 199
 Обозначения 9, 21, 40, 67, 101
 — в некоторых приближенных методах 206, 222
 Обход особых точек контуром интегрирования 42, 56, 102

- Обход особых точек контуром интегрирования для преобразования по времени 57
- Озеена уравнения 113
- Отражения коэффициент в волноводе 127, 132, 138, 143
- Пак (Pack D. C.) 8, 160
- Пападопулос (Papadopoulos V. M.) 154, 221
- Параметр $k = k_1 \pm ik_2$ 21, 41, 50, 56, 57, 101
- Парные интегральные уравнения для границ из трех частей 258
- — — — — задач о полуплоскости 71
- — — — — произвольно заданных граничных условий 93
- — — — — общие соображения 61, 92, 249, 263
- — — — — решение методом преобразующего множителя 72, 93, 250
- — — — — сведение к уравнению от комплексной переменной 171, 173, 249
- — — — — содержащие бесселевы функции 8, 250
- — — — — точное решение общего случая 93, 250
- — — — — формулировка задач 15, 71, 171
- Перевала метод 46
- Переходные процессы 39, 113
- Перпендикулярные границы 202, 205, 212, 234
- Пирсон (Pearson J. D.) 152
- Плачек (Placzek G.) 192
- Племя формулы 59, 166
- Поглощающие границы (см. Импедансного типа границы)
- Пограничный слой на плоской пластине 112
- Поле в дальней зоне, примеры вычисления 122, 127, 133, 217, 232
- Полосы и щели конечной толщины, волновое уравнение, высокие частоты 207, 229, 246
- — — — — — — — — — — низкие частоты 246
- — — — — — — — — — — в волноводе 239
- — — — — — — — — — — и конечной длины
- — — — — — — — — — — полубесконечной длины 205, 212
- Полубесконечная плоскость (см. Полуплоскость)
- Полуплоскости, бесконечная система, сдвинутые 153
- Полуплоскости две параллельные сдвинутые 176
- — — — — три параллельные 176
- Полуплоскость в упругой или вязкой среде 111
- — — — — дифракция электромагнитной волны на 111
- — — — — из диэлектрика 240
- — — — — излучение из двух параллельных 122
- — — — — обобщения основной задачи дифракции 64
- — — — — одиночная, бесконечно тонкая, основная задача дифракции (Зоммерфельда) 61
- — — — — конечной толщины 205, 212
- — — — — падение волны на 116, 144, 145
- — — — — решение с помощью системы линейных алгебраических уравнений 198
- — — — — с конечной проводимостью 98
- — — — — фланцем 207
- Полюсы и точки ветвления 59, 153, 233
- Полярные координаты в задаче об упругом клине 196
- — — — — уравнении стационарном волновом 169, 242
- — — — — Лапласа 187, 200
- Поперечное сечение рассеяния диска 246
- Поправка на конец, толстая полубесконечная пластина 220
- — — — — цилиндрическая труба 132
- Преобразование $\alpha = -k \cos \beta$, применение для вычисления интегралов 45
- — — — — разбиения на сумму 59
- — — — — к задаче о дифракции на полуплоскости 199
- — — — — — — — — — — клине 247
- Преобразующего множителя метод 72, 93, 249
- Приближенная факторизация 182
- Приближенные методы 202, 263 (см. также Винера — Хопфа обобщенное уравнение в комплексной плоскости)
- — — — — для интегральных уравнений 258, 260
- — — — — — — — — — — полос и щелей 229
- — — — — — — — — — — толстых пластин 212
- — — — — — — — — — — различные формулировки 205
- Приливы в шхерах 110
- Проверка решения 86
- Радиоволн распространение над морской береговой линией 109

- Разбиение на сумму в приближенных решениях 203, 212
 — — — общие теоремы 24
 — — — формулы для конкретных случаев 29
 — — — применения 95, 203, 212, 224, 256
 — — — с применением преобразования $\alpha = -k \cos \beta$ 59
 — — — функции $(a^2 - k^2)^{1/2}$ 32, 59
 — — — с полюсами 51
 Разделение переменных 11, 168, 170
 Рассек (Russek A.) 233
 Расходящиеся интегралы 78
 Регулярность преобразований в комплексной плоскости 23
 — функций, определенных интегралами 21
- Синьор (Senior T. B. A.) 98, 100, 108, 109, 155
 Системы уравнений Винера — Хопфа в двумерных волноводных задачах 140, 176
 — — — задаче для электромагнитного цилиндрического волновода 152
 — — — — электромагнитной задаче для полуплоскости 111
 — — — — общая теория 175
 — — линейных алгебраических в волноводной задаче 198
 — — — задаче о полуплоскости 199
 — — — — приближенных решениях 209, 215, 234, 244
 — — — — получающиеся из систем уравнений Винера — Хопфа 177
 — — — — решение частных случаев 196, 197
 Смешанные граничные условия 11
 — — — для границы из двух частей, общая теория 168
 — — — — — трех частей 207, 229, 258
 — — — — решение типичного примера 92
 Снеддон (Sneddon I. N.) 8, 12, 111, 192, 258, 264
 Спаренберг (Sparenberg J. A.) 193, 194
 Стационарное волновое уравнение 39
 Стержень полубесконечный 221
 — твердый, цилиндрический, конечной длины 240
 Струи 160
- Таблицы для вычислений 8, 141, 151
 Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 12, 15, 18, 22, 52, 54, 192, 194
 Титчмарша метод 195
 Трантер (Tranter C. J.) 12
- У Тай-те (Wu T. T.) 264
 Уэйц (Weitz M.) 155
 Уиддер (Widder D. V.) 38, 48
 Уиттекера функции 226, 240
 Упругая среда (см. также Бигармоническое уравнение), дифракция из полуплоскости, расположенной в упругой среде 111
 — — — и напряжения на клине со смешанными граничными условиями 196
 Условия на ребре 64, 89
 — — — литература 90
 Уэлс (Wells C. P.) 240, 244
- Факторизация на множители 25
 — — — общие теоремы 26, 53
 — — — приближенная 182
 — — — применение преобразования $\alpha = -k \cos \beta$ 59.
 — — — содержащая гамма-функции 53, 190, 194, 243
 — — — функции $\exp(-\gamma d)$ 32
 — — — — $K_1(\gamma a) I_1(\gamma a)$ 130, 150
 — — — функций $1 + i\delta\gamma^{\pm 1}$ 107, 186
 — — — — $1 \pm \exp(-2\gamma b)$ 119
 Фельд Я. Н. 197
 Фешбах (Feshbach H.) 75, 108, 109, 133, 151, 154, 203
 Фок В. А. 192
 Фокс (Fox E. N.) 259
 Фокса интегральное тождество 260
 Фредгольма интегральные уравнения первого рода (см. Винера — Хопфа интегральные уравнения)
 — — — второго рода 249, 259, 260, 263
 Френеля функции 45, 58, 88, 240
 Функционально-теоретические методы 175
 Фурье интеграл 11, 33
 — — в комплексной плоскости 34
 — — обобщенный 54
 — — преобразования 12
 — — основные примеры 66
- Хардер (Harder K. C.) 160
 Харрингтон (Harrington R. F.) 103

Указатель

- Хейнс (Heins A. E.) 110, 119, 144,
146, 152, 153, 155, 180, 194
Хопф (Hopf E.) 54, 191, 192
- Целые функции** 17, 203, 222
Цилиндрическая труба (см. Волно-
вод цилиндрический)
- Черчилл (Churchill R. V.) 38
Честер (Chester W.) 31, 152
Четверть плоскости занимающее кры-
ло 110
- Швангер** (Schwinger J.) 7, 31, 54,
133, 150, 152
Шеперд (Shepherd W. M.) 199
- Щели** (см. Полосы и щели)
- Электромагнитные волны, граничные условия** 155
— — дифракция на полубесконечном
цилиндре 152
— — — — полуплоскости 111
— — терминология 100, 108
— — условия на ребре 91
Эрдейи (Erdelyi A.) 48, 59 170, 200,
240

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	7
Некоторые основные обозначения и результаты из главы I	9
Глава I. Функции комплексного переменного и преобразования Фурье	11
§ 1.1. Введение	11
§ 1.2. Некоторые сведения из теории функций комплексного переменного	15
§ 1.3. Аналитические функции, определяемые интегралами	21
§ 1.4. Преобразование Фурье	33
§ 1.5. Волновое уравнение	39
§ 1.6. Некоторые типы контурных интегралов	43
§ 1.7. Метод Винера — Хопфа	49
Различные задачи и результаты I	50
Глава II. Основные методы. Задачи для полуплоскости	61
§ 2.1. Введение	61
§ 2.2. Метод Джонса	65
§ 2.3. Метод парных интегральных уравнений	71
§ 2.4. Метод интегрального уравнения	74
§ 2.5. Решение интегральных уравнений	81
§ 2.6. Анализ решения	86
§ 2.7. Сравнение различных методов	91
§ 2.8. Смешанные неоднородные граничные условия общего вида	92
§ 2.9. Граничные условия импедансного типа	98
Различные задачи и результаты II	101
Глава III. Дальнейшие задачи теории волн	114
§ 3.1. Введение	114
§ 3.2. Падение плоской волны на две параллельные полуплоскости	116
§ 3.3. Излучение из двух параллельных полуплоскостей	122
§ 3.4. Излучение из круглой цилиндрической трубы	127
§ 3.5. Полубесконечная полоса, параллельная стенкам волновода	136
§ 3.6. Поперечная полоса в волноводе	141
Различные задачи и результаты III	144

Оглавление

Глава IV. Обобщения метода и границы его применимости	162
§ 4.1. Введение	162
§ 4.2. Задача Гильберта	162
§ 4.3. Некоторые общие соображения	168
§ 4.4. Системы функциональных уравнений Винера — Хопфа	175
§ 4.5. Приближенная факторизация	182
§ 4.6. Уравнение Лапласа в полярных координатах	187
Различные задачи и результаты IV	191
Глава V. Некоторые приближенные методы	202
§ 5.1. Введение	202
§ 5.2. Некоторые задачи, которые нельзя точно решить методом Винера — Хопфа	204
§ 5.3. Общая теория для функционального уравнения одного частного вида	208
§ 5.4. Дифракция на толстой полубесконечной пластине	212
§ 5.5. Общая теория для функционального уравнения другого частного вида	222
§ 5.6. Дифракция на полосе и щели конечной ширины	229
Различные задачи и результаты V	234
Глава VI. Общее решение основной задачи Винера — Хопфа	248
§ 6.1. Введение	248
§ 6.2. Точное решение некоторых парных интегральных уравнений	250
Различные задачи и результаты VI	256
Литература	265
Указатель	272

Б. Нобя
МЕТОД ВИНЕРА—ХОПФА

Редакторы *Р. М. Ильичева, Н. И. Плужникова*
Художник *И. Н. Вахлин*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *З. Л. Горькова*
Корректор *Р. Я. Новак*

Сдано в производство 17/V-1961 г.
Подписано к печати 19/II-1962 г.
Бумага 60×90^{1/16}=8,8 бум. л.
17,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 18,2. Изд. № 1/099
Цена 1 р. 47 к. Зак. 2558.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, 1-й Рижский пер., д. 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.