LIE GROUPS AND DIFFERENTIAL GEOMETRY

by

K. Nomizu

THE MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN
1956

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА"

К. НОМИДЗУ

ГРУППЫ ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Перевод с английского
Ю. А. ШУБ-СИЗОНЕНКО

Под редакцией
Г. Ф. ЛАПТЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1960

АННОТАЦИЯ

Книга Номидзу является введением в современную дифференциальную геометрию. Написана она строго, четко и сжато.

Книга будет интересна математикам различных специальностей, в особенности начинающим геометрам и алгебраистам. Весь необходимый вспомогательный материал содержится в главе I и в примечаниях переводчика и редактора.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу этой книги, задуманной как введение в современную дифференциальную геометрию, положена рукопись, содержащая изложение курса теории связностей, который я читал в университете в Нагое зимой 1955 г.

Я выражаю свою искреннюю признательность профессорам И. Кавада и К. Яно, любезно посоветовавшим мне переработать мои рукописные заметки и издать их в виде книги. Я считаю своим приятным долгом отметить многочисленные замечания г. Н. Ивахори, послужившие улучшению окончательной редакции книги. Благодарю также г. Х. Одзеки, неоднократно обсуждавшего со мной содержание книги и оказавшего мне любезную помощь в чтении корректур.

Кацуми Номидзу

Декабрь 1955 г.
Нагоя

ВВЕДЕНИЕ

С тех пор, как теория групп Ли и дифференцируемых многообразий получила строгое обоснование с современной глобальной точки зрения, стало желательным и в то же время возможным рассмотреть в том же духе основания дифференциальной геометрии. В последние годы появились многочисленные обзоры и статьи, посвященные этим вопросам; можно предвидеть дальнейшую перестройку как классической дифференциальной геометрии, так и теории бесконечных групп Ли.

Эти тесно связанные между собой темы занимали центральное место в математическом творчестве Э. Картана, которому мы обязаны понятием связностей в расслоенных многообразиях, являющимся главным предметом рассмотрения в этой книге. Современное определение этого понятия было впервые дано Эресманом. Связности в расслоенных многообразиях нашли применения в работах Чжень Шэн-шеня и других авторов. Мы можем с уверенностью утверждать, что теория связностей занимает в настоящее время существенное место в дифференциальной геометрии.

Эта книга предназначена для аспирантов, желающих изучать дифференциальную геометрию и предварительно овладевших элементами теории групп Ли и теории расслоенных многообразий. Материал был заимствован главным образом из работ Амброза и Сингера [1], Чжень Шэн-шеня [5], Эресмана [7], Кобаяси [11], [12] и автора [14], [16]. При изложении я использовал многочисленные советы профессоров Шевалле, Косуля, Лихнеровича, а также Яно.

В главе I дается краткое резюме основных определений и теорем теории *дифференцируемых многообразий, групп Ли и расслоенных многообразий*. Содержание этой главы, конечно, ограничено материалом, действительно необходимым для понимания глав II и III, и изложение ведется в форме, наиболее удобной для наших целей. При этом, говоря о дифференцируемых многообразиях и группах Ли, мы в основном следовали книге Шевалле [6]. По вопросам, связанным с теорией расслоенных многообразий, мы отсылаем читателя к книге Стинрода [19]. Возможно, главной особенностью нашего изложения является упор, который мы с начала и до конца делаем на постоянном использовании векторных полей (или инфинитезимальных преобразований).

В главе II рассматривается общая теория связностей в расслоенных многообразиях (в основном в главных расслоенных многообразиях). Построение *параллелизма*, присоединенного к данной *связности*, сводится к вопросу о существовании кривых в некоторой группе Ли, удовлетворяющих определенным дифференциальным уравнениям, обобщающим уравнения однопараметрических групп. Далее определяются *группа голономии* и *суженная группа голономии*; доказывается, что они являются группами Ли. *Структурное уравнение*, связанное с *формой кривизны*, выявляет в одном специальном случае роль формы кривизны с точки зрения теории векторных полей, которая оказывается существенной при доказательстве *теоремы о голономии* (Картан — Амброз — Сингер). Перед доказательством этой основной теоремы мы устанавливаем *теорему о приведении связностей*, которая в своих существенных чертах принадлежит Э. Картану; эта теорема не только упрощает доказательство теоремы о голономии, но находит также собственные многочисленные применения. Далее мы рассматриваем локально плоскую связность, существование связностей и понятие связностей в присоединенных расслоенных многообразиях. В последнем параграфе главы II дается несколько примеров. Теория „связностей Картана“, введенных Эресманом [7], прекрасно изложена в недавно появившейся работе Кобаяси [12]. Однако эта теория выходит за рамки нашей книги.

В главе III дается введение в теорию линейных связностей как одно из приложений общей теории к классической дифференциальной геометрии. Хотя термины *линейная связность* и *аффинная связность* употреблялись до сих пор в одном и том же смысле, теперь имеется тенденция делать логическое (и, возможно, по существу математическое) различие между этими двумя понятиями. *Линейная связность* на дифференцируемом многообразии B есть связность (в смысле главы II) в расслоенном многообразии реперов $P(B)$, в то время как *аффинная связность* есть связность в аффинном расслоенном многообразии $\widetilde{P}(B)$. Как показано в последнем параграфе главы III, линейная связность на B порождает естественную аффинную связность на B. Соответствующие группы голономии являются тем, что принято называть *однородной группой голономии* и соответственно (*неоднородной*) *группой голономии*. Многое еще остается сделать в теории аффинных связностей, не обязательно возникающих из линейных связностей.

Сделав это замечание, перейдем к характеристике главы III, посвященной основам теории линейных связностей. Определив понятие линейной связности, мы вводим *форму кручения* и получаем дополнительное структурное уравнение. Поведение векторных полей в $P(B)$ описывается структурными уравнениями более детально, чем это было в случае общих связностей. Мы вводим далее *базисные векторные поля*, не имеющие места в общей теории, рассмотренной в главе II; их поведение тесно связано со многими важными понятиями теории линейных связностей, такими, как *геодезические*, *нормальные координаты*, *векторные поля Киллинга* и т. д. Этим способом мы можем ввести и доказать практически все, не применяя координат, „Γ^k_{ij}“ и „многих индексов“. Однако в таком введении в дифференциальную геометрию, каким является эта книга, полезно, вероятно, записать в координатной форме те же фундаментальные понятия и уравнения, которые были введены естественным, „внутренним“ образом. С этой целью мы доказываем эквивалентность различных определений линейной связности — определения с помощью расслоенных многообразий, классической записи с помощью Γ^k_{ij} и еще одного определения, в котором используются векторные поля на базисном многообразии. Это последнее определение приводит к таким выражениям для полей тензоров кручения, кривизны и т. д., благодаря которым, например, становится ясным, что так называемое *тождество Бьянки* есть непосредственное следствие тождества Якоби для векторных полей.

Далее с помощью векторных полей на расслоенном многообразии реперов изучаются *линейные связности простых типов*. Наконец, рассматривается вопрос о существовании и свойствах *аффинной связности*, канонически присоединенной к данной линейной связности.

Мы старались все изложение построить так, чтобы сделать как можно яснее то, что, с одной стороны, теория групп Ли необходима для понимания дифференциальной геометрии, а с другой стороны, дифференциальная геометрия будет всегда вызывать к жизни все новые и новые аспекты теории групп Ли.

Дополнительные замечания и новейшие результаты приведены в примечаниях к главам II и III. Ссылки на библиографию, приведенную в конце книги, даются номерами в квадратных скобках. В библиографию включены, кроме немногих основных книг, лишь статьи, прямо связанные с вопросами, которым посвящена эта книга, а именно с теорией общих и линейных связностей.

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

§ 1. Дифференцируемые многообразия

Под дифференцируемостью мы будем всюду в дальнейшем подразумевать дифференцируемость класса C^{∞}[29]. Хаусдорфово пространство[1]) V называется *дифференцируемым многообразием* размерности n, если на V задано семейство $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(V)$ вещественнозначных функций, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\mathfrak{F}$ *локально полно*: если f — функция, заданная на V, такая, что для любой точки $p \in V$ найдется функция $g \in \mathfrak{F}$, совпадающая с f в некоторой окрестности точки p, то $f \in \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{F}$ *полно относительно суперпозиции дифференцируемых функций*: если $f_1, \ldots, f_k \in \mathfrak{F}$ и F — произвольная дифференцируемая функция на евклидовом пространстве R^k[15]), то функция $F(f_1, \ldots, f_k)$, заданная на V, принадлежит $\mathfrak{F}$;

3) для каждой точки $p \in V$ можно найти n функций $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{F}$, таких, что отображение $q \to (f_1(q), \ldots, f_n(q))$ будет гомеоморфизмом[3]) некоторой окрестности U точки p на некоторое открытое подмножество в R^n. Каждая функция $f \in \mathfrak{F}$ совпадает в U с $F(f_1, \ldots, f_n)$, где F — некоторая дифференцируемая функция на R^n.

Каждую из функций семейства $\mathfrak{F}$ мы будем называть *дифференцируемой функцией* на V.

Как нетрудно видеть, в условии 3) можно считать, что функции $f_1, \ldots, f_n$ определяют гомеоморфизм некоторой открытой окрестности U точки p на подмножество в R^n, состоящее из таких точек $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых

$$|x_1 - f_1(p)| < \alpha, \ \ldots, \ |x_n - f_n(p)| < \alpha$$

при некотором $\alpha > 0$. В этом случае U называется кубической окрестностью точки p с локальными координатами $(f_1, \ldots, f_n)$. Из условия 2) следует, что при желании можно считать $f_1(p) = \ldots = f_n(p) = 0$

Принятое нами определение дифференцируемого многообразия совпадает с обычным определением с помощью открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ пространства V, для каждого элемента U_α которого определен такой гомеоморфизм f на некоторое открытое[4]) подмножество из R^n, что в любом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ мы имеем „дифференцируемое преобразование координат".

Пусть задано дифференцируемое многообразие V; тогда множество $\mathfrak{F}$ дифференцируемых функций на V образует алгебру[26]) над полем вещественных чисел R с обычными правилами действий $f+g$, fg и αf $(f, g \in \mathfrak{F}; \alpha \in R)$.

Рассмотрим два дифференцируемых многообразия V и V' и отображение φ многообразия V в многообразие V'. Это отображение называется *дифференцируемым*, если для любой дифференцируемой функции f', заданной на V', функция $f' \cdot \varphi$[30]) есть дифференцируемая функция на V. На языке локальных координат это означает следующее. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — локальные координаты в окрестности точки $p \in V$, а $(v^1, \ldots, v^n)$ — локальные координаты в окрестности точки $\varphi(p) \in V'$. Отображение φ дифференцируемо в том и только в том случае, если $v^i(\varphi(u)) = v^i(u^1, \ldots, u^n)$ представляют собой дифференцируемые функции от $u^1, \ldots, u^n$.

Касательным вектором в точке $p \in V$ называется всякое линейное отображение X множества $\mathfrak{F}$ в R^1, обладающее свойством $X(fg) = Xf \cdot g(p) + f(p) \cdot Xg$ для любых $f, g \in \mathfrak{F}$.

Множество всех касательных векторов в точке p образует линейное пространство T_p[23]), называемое *касательным пространством в точке* p; правила действий в нем определяются равенствами

$$(X+Y) \cdot f = Xf + Yf; \qquad (\alpha X) \cdot f = \alpha(Xf).$$

Векторным полем называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $p \in V$ некоторый касательный вектор X_p. Мы будем часто обозначать векторное поле так: $X : p \to X_p \in T_p$.

Эти определения на языке локальных координат означают следующее. Пусть $(u^1, \ldots, u^n)$ — локальные координаты в некоторой окрестности U точки p. Каждая функция $f \in \mathfrak{F}$ в U есть функция локальных координат: $f(u^1, \ldots, u^n)$. Тогда отображение $f \to (\partial f/\partial u^i)_p$ при каждом i представляет собой некоторый касательный вектор в точке p. Можно показать, что отображения $(\partial/\partial u^i)_p$, $i=1, \ldots, n$, образуют базис[24]) касательного пространства T_p; таким образом, T_p есть векторное пространство размерности n.

Векторное поле X можно рассматривать как линейное отображение множества $\mathfrak{F}$ в алгебру *всех* вещественнозначных функций на V, обладающее свойством

$$X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg;$$

функция Xf определяется при этом равенством $(Xf)(p) = X_p \cdot f$. Векторное поле X называется *дифференцируемым*, если для любой дифференцируемой функции f функция Xf оказывается дифференцируемой.

Многообразие размерности n называется *вполне параллелизуемым*, если существует n дифференцируемых векторных полей $X_1, \ldots, X_n$, линейно независимых в каждой точке.

Рассмотрим дифференцируемое отображение φ многообразия V в многообразие V'. Мы определяем *дифференциал* отображения φ *в точке* $p \in V$ следующим образом. Пусть $X \in T_p$. Тогда отображение

$$f' \to X' \cdot f' = X(f' \cdot \varphi)$$

есть касательный вектор в точке $\varphi(p)$. Сопоставляя каждому $X \in T_p$ его образ $X' \in T_{\varphi(p)}$, мы получаем линейное отображение T_p в $T_{\varphi(p)}$, порожденное отображением φ и называемое дифференциалом отображения φ в точке p. Мы обозначаем дифференциал отображения φ символом $d\varphi_p$ или φ'_p. В дальнейшем мы будем часто обозначать дифференциал отображения φ той же буквой φ в случаях, когда не может возникнуть недоразумений.

Дифференцируемое отображение называется *регулярным в точке* p, если его дифференциал φ'_p есть взаимно однозначное отображение. Дифференцируемое отображение называется *регулярным*, если оно регулярно в любой точке $p \in V$.

Подмножество V' данного дифференцируемого многообразия V называется *подмногообразием* многообразия V, если оно само обладает структурой дифференцируемого многообразия и если вложение V' в V есть регулярное дифференцируемое отображение. В этом случае $\dim V' \leqslant \dim V$. Топология пространства V' не обязательно совпадает с той топологией, которая порождена в нем топологией пространства V. Если V' есть некоторое открытое подмножество дифференцируемого многообразия V, то V' может быть естественным образом наделено индуцированной дифференцируемой структурой; тогда V' будет подмногообразием многообразия V, называемым *открытым подмногообразием* многообразия V.

Дифференцируемым преобразованием дифференцируемого многообразия V мы будем называть дифференцируемое отображение многообразия V на себя, обладающее обратным отображением, которое также дифференцируемо.

Дифференцируемое преобразование φ многообразия V порождает следующий автоморфизм[28]) φ^* алгебры $\mathfrak{F}$:

$$(\varphi^* \cdot f)(p) = f(\varphi^{-1}(p)) \quad \text{для любой функции} \quad f \in \mathfrak{F}.$$

Дифференцируемое преобразование φ порождает также преобразование одного дифференцируемого векторного поля в другое, определяемое равенством

$$(\varphi' \cdot X)_p = \varphi'_{\varphi^{-1}(p)} \cdot X_{\varphi^{-1}(p)}.$$

Очевидна справедливость формулы

$$(\varphi' \cdot X) \cdot (\varphi^* \cdot f) = \varphi^*(Xf)$$

для любых $f \in \mathfrak{F}$ и X.

Рассмотрим более общий случай. Пусть φ есть дифференцируемое отображение многообразия V на многообразие V'. Если X и X' — векторные поля соответственно на V и V', причем $\varphi'_p \cdot X_p = X'_{\varphi(p)}$ для всех $p \in V$, то X и X' называются *φ-согласованными*.

Распределением Δ на V размерности r называется закон, ставящий в соответствие каждой точке $p \in V$ подпространство Δ_p размерности r касательного пространства T_p. Распределение Δ называется *дифференцируемым*, если выполняется следующее условие: каждая точка $p \in V$ обладает окрестностью U и r дифференцируемыми векторными полями $X_1, \ldots, X_r$ на U, такими, что $(X_1)_q, \ldots, (X_r)_q$ образуют базис подпространства Δ_q в каждой точке $q \in U$. Множество $\{X_1, \ldots, X_r\}$ называется в этом случае *локальным базисом* распределения Δ в окрестности точки p.

Дифференцируемое векторное поле X, определенное на открытом множестве U, мы будем называть принадлежащим распределению Δ, если $X_p \in \Delta_p$ для всех $p \in U$.

Распределение Δ называется ***инволютивным***, если выполнено следующее условие: если X и Y принадлежат Δ, то $[X, Y]$ также принадлежит Δ. Здесь *скобка* $[X, Y]$ обозначает дифференцируемое векторное поле, определенное для всех $f \in \mathfrak{F}$ равенством

$$[X, Y] \cdot f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Дифференцируемое распределение Δ инволютивно тогда (и только тогда), когда скобки $[X_i, X_j]$ для любого локального базиса $\{X_1, \ldots, X_r\}$ принадлежат Δ.

Связное подмногообразие V' называется ***интегральным многообразием*** распределения Δ, если Δ_p совпадает с касательным пространством многообразия V' в точке p для всех $p \in V'$.

V' называется ***максимальным интегральным многообразием***, если всякое интегральное многообразие распределения Δ, содержащее V', совпадает с V'.

Теорема. *Пусть Δ есть инволютивное дифференцируемое распределение на V. Тогда через каждую точку $p \in V$ проходит некоторое максимальное интегральное многообразие $V(p)$ распределения Δ. Любое интегральное многообразие, содержащее p, является открытым*[4]) *подмногообразием многообразия $V(p)$* ([6], стр. 138—140).

§ 2. Векторные поля

Пусть задано дифференцируемое многообразие V. Множество всех дифференцируемых векторных полей на V мы будем обозначать $\mathfrak{X}(V)$ или просто $\mathfrak{X}$. Множество $\mathfrak{X}$ обладает следующими свойствами:

a) $\mathfrak{X}$ представляет собой векторное пространство[23]) над R: если $X, Y \in \mathfrak{X}$, то $X+Y$ и $\alpha X (\alpha \in R)$ определяются соответственно равенствами $(X+Y)f = Xf + Yf$ и $(\alpha X) \cdot f = \alpha(Xf)$ для любой функции $f \in \mathfrak{F}$.

b) $\mathfrak{X}$ есть $\mathfrak{F}$-модуль[23]): если $X \in \mathfrak{X}$ и $f \in \mathfrak{F}$, то fX определяется равенством $(fX) \cdot g = f(Xg)$ для любой функции $g \in \mathfrak{F}$.

c) $\mathfrak{X}$ есть алгебра Ли над R; это означает, что в дополнение к тому, что $\mathfrak{X}$ есть векторное пространство, на $\mathfrak{X}$

определена билинейная операция $[X, Y]$ [26]), удовлетворяющая условиям

$$[X, Y] = -[Y, X],$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \text{ (тождество Якоби).}$$

В самом деле, скобка $[X, Y]$ была определена выше равенством $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ для любой функции $f \in \mathfrak{F}$. Опираясь на свойства $\mathfrak{X}$ как $\mathfrak{F}$-модуля и алгебры Ли, мы получаем формулу

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X,$$

где $X, Y \in \mathfrak{X}$ и $f, g \in \mathfrak{F}$.

Мы замечаем, что отображение φ' пространства $\mathfrak{X}$ на себя, порождаемое дифференцируемым преобразованием φ многообразия V, находится в согласии с рассмотренными выше свойствами $\mathfrak{X}$. Именно, мы видим, что

a) φ' есть линейное преобразование векторного пространства $\mathfrak{X}$;

b) для любых $f \in \mathfrak{F}$ и $X \in \mathfrak{X}$

$$\varphi' \cdot (fX) = (\varphi^* f) \cdot (\varphi' X);$$

c) φ' представляет собой автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{X}$:

$$[\varphi' X, \varphi' Y] = \varphi' [X, Y].$$

Теперь мы дадим понятию векторного поля геометрическую интерпретацию, которой будем часто пользоваться в дальнейшем.

Множество φ_t $(-\infty < t < \infty)$ называется *однопараметрической группой дифференцируемых преобразований* многообразия V, если выполнены следующие условия:

1) φ_t есть дифференцируемое преобразование многообразия V при каждом значении t;

2) отображение $(t, p) \in R \times V \to \varphi_t(p)$ есть дифференцируемое отображение $R \times V$ в V;

3) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \cdot \varphi_s$ для любых t и s.

Пусть задана однопараметрическая группа дифференцируемых преобразований φ_t; тогда можно следующим образом определить дифференцируемое векторное поле X. Пусть для любой функции $f \in \mathfrak{F}$ функция Xf определяется равенством

$$(Xf)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t \cdot p) - f(p)}{t},$$

где предел существует по условию 2). Легко проверить, что X представляет собой дифференцируемое векторное поле. Мы будем говорить, что φ_t *индуцирует* векторное поле X, и записывать это символически так:

$$X_p = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t \cdot p - p}{t}.$$

Функция $f \in \mathfrak{F}$ инвариантна относительно φ_t (т. е. постоянна на любой траектории [31]) группы φ_t) тогда и только тогда, когда $Xf = 0$.

Обратно, пусть дано векторное поле $X \in \mathfrak{X}$. Вообще говоря, может не существовать однопараметрической группы преобразований φ_t многообразия V, которая индуцировала бы данное X. Но в некоторой окрестности любой точки $p \in V$ всегда существует *локальная однопараметрическая группа локальных преобразований*, индуцирующая X. Точнее, для любой точки $p \in V$ найдутся такая ее окрестность U, такая константа $\varepsilon > 0$ и такое множество локальных преобразований φ_t, $|t| < \varepsilon$, для которых выполняются следующие условия:

1′) φ_t есть дифференцируемое преобразование U в $\varphi_t(U)$ для каждого t ($|t| < \varepsilon$);

2′) отображение $(t, p) \to \varphi_t \cdot p$ дифференцируемо;

3′) если $|t|$, $|s|$, $|t+s| < \varepsilon$ и $\varphi_t \cdot q \in U$, $q \in U$, то $\varphi_s \cdot \varphi_t \cdot q = \varphi_{s+t} \cdot q$; при этом φ_t индуцирует данное векторное поле X в том смысле, что

$$X_q = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t \cdot q - q}{t}$$

для любого $q \in U$.

Докажем существование и единственность группы φ_t.

Пусть $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$ — локальные координаты в окрестности W точки p; мы положим

$$X = \sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial u^i},$$

где, в силу дифференцируемости X, функции f^i дифференцируемы. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$(1) \qquad \frac{d\phi^i}{dt} = f^i(\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t)$ — неизвестные функции переменной t. Согласно основной теореме существования теории дифференциальных уравнений, можно указать такие $\delta_1 > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, что система (1) будет обладать единственным решением $\phi^1(t;\ u), \ldots, \phi^n(t;\ u)$, определенным для $|t| < \varepsilon_1$ и удовлетворяющим начальным условиям

$$\phi^i(0;\ u) = u^i, \ .$$

каково бы ни было $u = (u^1, \ldots, u^n)$, если только $|u^i| < \delta_1$.

Таким образом, локальные преобразования φ_t, $|t| < \varepsilon_1$, оказываются определенными на $U_1 = \{(u^1, \ldots, u^n);\ |u^i| < \delta_1\}$ формулой

$$\varphi_t(u^1, \ldots, u^n) = (\phi^1(t;\ u), \ldots, \phi^n(t;\ u)).$$

Так как функции $\phi^i(t;\ u^1, \ldots, u^n)$ дифференцируемы по t и $u^1, \ldots, u^n$, то условие 2′) выполняется. Пусть

$$\varphi_s(q) = (\phi^1(s;\ u), \ldots, \phi^n(s;\ u));$$

где $q(u^1, \ldots, u^n) \in U_1$; тогда, как легко видеть, набор функций

$$\psi^i(t) = \phi^i(t+s;\ u), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

есть решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi^i(0) = \phi^i(s;\ u).$$

Мы имеем, в силу единственности решения,

$$\psi^i(t) = \phi^i(t;\ \phi^1(s;\ u), \ldots, \phi^n(s;\ u)).$$

Это означает, что выполняется равенство $\varphi_t \cdot \varphi_s \cdot q = \varphi_{t+s} \cdot q$, т. е. условие 3′). При этом ясно, что φ_0 является тождественным преобразованием на U_1. Далее, существуют такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для окрестности $U = \{(u^1, \ldots, u^n);\ |u^i| < \delta\}$ мы имеем $\varphi_t(U) \subset U_1$, если только $|t| < \varepsilon$. Используя доказанное условие 3′), мы заключаем, что при $|t| < \varepsilon$ выполняется равенство

$$\varphi_{-t}(\varphi_t(q)) = \varphi_t(\varphi_{-t}(q)) = q$$

для любой точки $q \in U$; это означает, что φ_t есть дифференцируемое преобразование U в $\varphi_t(U)$.

Таким образом, мы видим, что локальные преобразования φ_t, $|t| < \varepsilon$, определенные на U, удовлетворяют условиям 1′)—3′). По построению ясно, что группа φ_t индуцирует в окрестности U заданное векторное поле X. Единственность группы локальных преобразований φ_t, индуцирующей X, следует из того факта, что преобразования φ_t должны удовлетворять системе (1). Итак, наше утверждение доказано.

Мы будем говорить, что X порождает *локальную* однопараметрическую группу локальных преобразований φ_t в некоторой окрестности точки p. Если, в частности, X индуцируется некоторой однопараметрической группой преобразований многообразия V, то мы будем говорить, что X порождает *глобальную* однопараметрическую группу преобразований. В этом случае мы будем называть векторное поле X *полным*.

Векторное поле X является полным, если локальные преобразования φ_t, порожденные полем X, таковы, что $\varphi_t \cdot p$ определены для всех $p \in V$ и всех таких t, что $|t| \leqslant \varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ одно и то же для всех $p \in V$. Нетрудно доказать, что каждое векторное поле $X \in \mathfrak{X}$ является полным, если V компактно.

Во всяком случае, рассмотрение локальных преобразований, порожденных векторным полем X, оказывается очень полезным при изучении свойств X и наоборот. Часто в дальнейшем мы будем говорить просто, что X порождает φ_t или что φ_t индуцирует X, не указывая явно областей существования φ_t и X. Это устранит ненужные усложнения в наших утверждениях и доказательствах.

Теперь мы докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть φ есть некоторое дифференцируемое преобразование. Если $X \in \mathfrak{X}$ порождает φ_t, то $\varphi' \cdot X$ порождает $\varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}$.*

Доказательство. Мы имеем

$$(\varphi' \cdot X) \cdot f = (X(f \cdot \varphi)) \cdot \varphi^{-1} = \left[\lim_{t \to 0} \frac{f \cdot \varphi \cdot \varphi_t - f \cdot \varphi}{t}\right] \cdot \varphi^{-1} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f \cdot \varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1} - f \cdot \varphi \cdot \varphi^{-1}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f \cdot (\varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}) - f}{t}.$$

Таким образом, векторное поле $\varphi' \cdot X$ порождает группу преобразований $\varphi \cdot \varphi_t \cdot \varphi^{-1}$.

Векторное поле $X \in \mathfrak{X}$ мы будем называть *инвариантным относительно* φ, если $\varphi' \cdot X = X$. Полученный нами результат можно теперь сформулировать так: *X инвариантно относительно φ тогда и только тогда, когда φ коммутирует с каждым φ_t.*

Лемма 2. *Если $f(t)$ есть функция, дифференцируемая в окрестности 0 в R, причем $f(0) = 0$, то существует дифференцируемая функция $g(t)$, определенная в той же окрестности и такая, что $f(t) = t \cdot g(t)$ и $g(0) = f'(0)$, где $f' = df/dt$.*

Доказательство. Достаточно взять

$$g(t) = \int_0^1 f'(ts)\, ds.$$

Эта лемма может быть обобщена следующим образом.

Лемма 3. *Если $f(t, p)$ — дифференцируемая функция, определенная на $U \times V$, где U — окрестность 0 в R, а V — некоторое дифференцируемое многообразие, такая, что $f(0, p) = 0$ для любой точки $p \in V$, то существует дифференцируемая функция $g(t, p)$, определенная на $U \times V$, такая, что $f(t, p) = tg(t, p)$ и $\partial f(0, p)/\partial t = g(0, p)$ для любой точки $p \in V$.*

С помощью леммы 3 доказывается

Лемма 4. *Пусть $X \in \mathfrak{X}(V)$ порождает φ_t. Тогда для любой функции $f \in \mathfrak{F}$ найдется такая дифференцируемая функция $g_t(p) = g(t, p)$, определенная на $U \times V$, что $f \cdot \varphi_t = f + tg_t$ и $g_0 = Xf$ на V.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть на $U \times V$ функцию $f(t, p) = f(\varphi_t \cdot p) - f(p)$ и применить лемму 3.

Дадим теперь скобке $[X, Y]$ следующую интерпретацию.

Теорема. *Пусть φ_t и ψ_t — локальные однопараметрические группы локальных преобразований, порожденные соответственно векторными полями X и $Y (\in \mathfrak{X})$. Тогда*

$$[X, Y] = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \varphi_t' \cdot Y}{t}.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{F}$. В силу леммы 4 существует семейство дифференцируемых функций g_t на V, таких, что $f \cdot \varphi_t = f + t g_t$ и $g_0 = Xf$. Мы имеем, следовательно,

$$(\varphi_t' \cdot Y)_p \cdot f = \left(Y(f \cdot \varphi_t)\right)(\varphi_t^{-1} \cdot p) =$$
$$= (Yf)(\varphi_t^{-1} \cdot p) + t(Yg_t)(\varphi_t^{-1} \cdot p),$$

откуда

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left[Y - \varphi_t' \cdot Y\right]_p f}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(Yf)(p) - (Yf)(\varphi_t^{-1} \cdot p)}{t} -$$
$$- \lim_{t \to 0} (Yg_t)(\varphi_t^{-1} \cdot p) = X_p(Yf) - Y_p \cdot g_0 = [X, Y]_p \cdot f,$$

что и доказывает наше утверждение.

Следствие. *Пусть функции* φ_t *и* ψ_t *— те же, что и в условии теоремы. Тогда* $[X, Y] = 0$ *в том и только том случае, если* φ_t *и* ψ_s *коммутируют при любых значениях* s *и* t.

Доказательство. Если φ_t и ψ_s коммутируют, то Y инвариантно относительно любого φ_t и, следовательно, $[X, Y] = 0$. Обратно, если $[X, Y] = 0$, то легко убедиться, что Y инвариантно относительно φ_t.

§ 3. Дифференциальные формы

Рассмотрим дифференцируемое многообразие V размерности n. Прежде всего определим *дифференциальную форму* ω *порядка* 1 (или, проще, 1-*форму*) как отображение пространства $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(V)$ в $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(V)$, обладающее свойством

$$\omega(fX + gY) = f \cdot \omega(X) + g \cdot \omega(Y)$$

для любых $X, Y \in \mathfrak{X}$ и $f, g \in \mathfrak{F}$.

Сумма двух 1-форм ω_1 и ω_2 определяется формулой

$$(\omega_1 + \omega_2)(X) = \omega_1(X) + \omega_2(X)$$

для любого $X \in \mathfrak{X}$. Если ω есть 1-форма и $f \in \mathfrak{F}$, то $f\omega$ определяется как такая 1-форма, для которой $(f\omega)(X) = f\omega(X)$ при любом $X \in \mathfrak{X}$. Таким образом, множество всех 1-форм на V оказывается $\mathfrak{F}$-модулем.

Пусть ω есть 1-форма на V. Если $X \in \mathfrak{X}$ равна нулю на некотором открытом множестве U многообразия V, то функция $\omega(X)$ равна нулю на U. В самом деле, пусть p — некоторая точка из U. Рассмотрим функцию $f \in \mathfrak{F}$, равную нулю в точке p и равную 1 вне U. Тогда, очевидно, $X = fX$ и, следовательно, функция $\omega(X) = \omega(fX) = f\omega(X)$ обращается в нуль в точке p.

Пусть U — координатная окрестность с локальными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$. Определим n 1-форм $du^1, \ldots, du^n$ на U равенствами

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \delta^i_j, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

где δ^i_j — символ Кронекера[32]), который при каждой паре значений i и j рассматривается как функция, постоянная на U. Каждая 1-форма ω на U может быть единственным образом представлена в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \phi_i (du^i),$$

где $\phi_i = \omega(\partial/\partial u^i)$ — некоторые дифференцируемые функции на U.

Используя два сделанных выше замечания, мы можем легко доказать, что любая 1-форма ω на V может быть представлена в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \phi_i (du^i)$$

в любой координатной окрестности U. Отсюда следует, что наше определение 1-формы совпадает с определением, данным в [6]. Для данной формы ω значение функции $\omega(X)$ в точке p зависит от X_p; следовательно, мы можем говорить о значении ω_p формы ω, которое является элементом пространства, сопряженного к касательному пространству T_p.

Дифференцируемые функции можно условиться рассматривать как дифференциальные формы порядка 0. Для каждой функции $f \in \mathfrak{F}$ мы определяем ее *дифференциал* df как 1-форму ω, такую, что $\omega(X) = Xf$ для любого $X \in \mathfrak{X}$.

Определим теперь дифференциальные формы произвольного порядка r. r-формой на многообразии V называется отображение множества $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (r раз)[21]) в $\mathfrak{F}$, которое удовлетворяет следующим двум условиям:

1) отображение $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ является альтернирующим; это означает, что если s есть перестановка, переводящая $(1, \ldots, r)$ в $(s(1), \ldots, s(r))$, то

$$\omega(X_{s(1)}, \ldots, X_{s(r)}) = \operatorname{sign} s \cdot \omega(X_1, \ldots, X_r)\text{[33]};$$

2) $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ *полилинейно* в следующем смысле: если зафиксировать $r-1$ аргументов, то мы получим отображение $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{F}$, являющееся 1-формой.

На множестве $\mathfrak{D}^r$ всех r-форм на многообразии V мы можем совершенно так же, как выше, определить $\omega_1 + \omega_2$ и $f\omega$, где $f \in \mathfrak{F}$. Множество $\mathfrak{D}^r$ состоит из одного 0, если $r > n$.

Определим теперь *внешнее произведение* в $\mathfrak{D} = \sum\limits_{r=0}^{n} \mathfrak{D}^r$ (прямая сумма, которую можно рассматривать как векторное пространство[34])). Если $\omega_1 \in \mathfrak{D}^r$ и $\omega_2 \in \mathfrak{D}^s$, то мы определяем $(r+s)$-форму $\omega_1 \wedge \omega_2$ (внешнее произведение) как отображение, возникающее при альтернировании[35]) отображения

$$(X_1, \ldots, X_r, X_{r+1}, \ldots, X_{r+s}) \to \\ \to \omega_1(X_1, \ldots, X_r)\, \omega_2(X_{r+1}, \ldots, X_{r+s}).$$

Любая r-форма ω на V может быть представлена в любой координатной окрестности U в виде

$$\omega = \sum_{(i_1, \ldots, i_r)} \phi_{i_1 \ldots i_r}\, du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r},$$

где $\phi_{i_1 \ldots i_r}$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n)$ — дифференцируемые функции, определенные в U.

Внешний дифференциал d в $\mathfrak{D}$ определяется следующим образом:

1) для $f \in \mathfrak{D}^0 = \mathfrak{F}$ df есть определенный выше дифференциал функции f;

2) d есть линейное отображение, для которого $d(\mathfrak{D}^r) \subset \subset \mathfrak{D}^{r+1}$;

3) для любых $\omega_1 \in \mathfrak{D}^r$ и $\omega_2 \in \mathfrak{D}^r$ имеет место равенство

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^r \omega_1 \wedge d\omega_2;$$

4) $dd = 0$.

Перечисленные свойства фактически определяют оператор d единственным образом: если форма $\omega \in \mathfrak{D}^r$ выражена в некоторой окрестности в виде

$$\omega = \sum_{(i_1, \ldots, i_r)} \phi_{i_1 \ldots i_r} du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r},$$

то

$$d\omega = \sum_{(i_1, \ldots, i_r)} d\phi_{i_1 \ldots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r}.$$

Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть* ω — *некоторая* 1-*форма на* V. *Для любых* X *и* $Y \in \mathfrak{X}$ *мы имеем*

$$2(d\omega)(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]),$$

где $X \cdot \omega(Y)$ *обозначает функцию, которая является образом функции* $\omega(Y)$ *при отображении* X; *аналогичный смысл имеет* $Y \cdot \omega(X)$.

Доказательство. Правую и левую части написанного равенства можно рассматривать как некоторые 2-формы. Поэтому достаточно доказать справедливость этого равенства для $X = \partial/\partial u^i$ и $Y = \partial/\partial u^j$ в некоторой координатной окрестности U с локальными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$. Если теорема верна для форм ω_1 и ω_2, то она верна и для форм $\omega_1 + \omega_2$ и $f\omega_1$, где f — любая дифференцируемая функция на U. Поэтому мы можем считать $\omega = du^k$. Тогда рассматриваемое равенство сведется к следующему:

$$2d(du^k)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^i}(\delta_j^k) - \frac{\partial}{\partial u^j}(\delta_i^k).$$

Но это равенство тривиально, поскольку обе его части равны 0.

Пусть φ — некоторое дифференцируемое преобразование многообразия V. Тогда φ порождает автоморфизм φ^* пространства $\mathfrak{D}$, коммутирующий с оператором d. В самом деле, φ^* есть отображение, переводящее $\omega \in \mathfrak{D}^r$ в $\varphi^*\omega$, определенное формулой

$$(\varphi^*\omega)(X_1, \ldots, X_r) = \omega(\varphi' X_1, \ldots, \varphi' X_r),$$

где φ' есть автоморфизм $\mathfrak{F}$-модуля $\mathfrak{X}$, порожденный преобразованием φ. Легко проверить коммутативность:

$$d\varphi^* = \varphi^* d.$$

Сделаем еще одно замечание относительно дифференциальных форм. Формы, рассматривавшиеся до сих пор, были вещественнозначными. Пусть дано произвольное векторное пространство F размерности s. Определим F-значные формы следующим образом. Прежде всего определим F-значную 0-форму (или F-значную дифференцируемую функцию) как дифференцируемое отображение многообразия V в пространство F, наделенное естественной дифференцируемой структурой. Далее, для любого r мы определим F-значную r-форму как отображение, ставящее в соответствие каждому $(X_1, \ldots, X_r)$ из $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (r раз) некоторую F-значную дифференцируемую функцию $\omega(X_1, \ldots, X_r)$, формально удовлетворяющую тем же условиям 1) и 2), которые были сформулированы ранее для вещественнозначных форм.

Если выбрать в F фиксированный базис $\xi_1, \ldots, \xi_s$, то любая F-значная r-форма ω будет единственным образом выражаться в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{s} \omega^i \cdot \xi_i,$$

где $\omega^1, \ldots, \omega^s$ — вещественнозначные r-формы. Внешний дифференциал $d\omega$ определяется как F-значная $(r+1)$-форма, имеющая вид

$$d\omega = \sum_{i=1}^{s} (d\omega^i)\,\xi_i.$$

Формула, доказанная в теореме этого параграфа, легко распространяется на F-значные 1-формы.

§ 4. Тензорные поля

Читателя, интересующегося наиболее общим построением теории тензорных полей на дифференцируемых многообразиях, мы отсылаем к [19]. Здесь мы ограничимся лишь следующими замечаниями.

Пусть F — векторное пространство размерности n над полем вещественных чисел R и F^* — сопряженное к нему пространство[25]). Тензор типа (s, r) на F, s раз контравариантный и r раз ковариантный, определяется как полилинейное отображение прямого произведения

$$F \times F \times \ldots \times F \times F^* \times F^* \times \ldots \times F^*$$

(F берется r раз и F^* — s раз) в R. Множество всех тензоров типа (s, r) образует векторное пространство над R относительно определенных для полилинейных отображений действий обычного сложения и умножения на числа из R. Это векторное пространство мы будем обозначать T_r^s.

В частности, принимая во внимание взаимную сопряженность F и F^*, мы видим, что тензоры типа $(1,0)$ могут быть отождествлены с элементами пространства F, а тензоры типа $(0,1)$ — с элементами пространства F^*. Таким образом, мы можем написать $T_0^1 \cong F$; $T_1^0 \cong F^*$.

Тензорное пространство T_r^1 можно рассматривать как векторное пространство, состоящее из всех полилинейных отображений пространства $F \times \ldots \times F$ (r раз) в F. Именно. данному элементу $f \in T_r^1$ мы ставим в соответствие полилинейное отображение K пространства $F \times \ldots \times F$ в F, определенное соотношением

$$\langle K(x_1, \ldots, x_r), x^* \rangle = f(x_1, \ldots, x_r, x^*)$$

для всех $x_1, \ldots, x_r \in F$ и $x^* \in F^*$, где левая часть обозначает значение, которое $x^* \in F^*$ принимает на элементе $K(x_1, \ldots, x_r) \in F$. Нетрудно видеть, что этим самым установлен канонический изоморфизм пространства T_r^1 и векторного пространства всех полилинейных отображений $F \times \ldots \times F$ в F. В частности, T_1^1 можно отождествить с векторным пространством всех линейных эндоморфизмов F в себя. Кроме того, T_r^1 может быть следующим образом отождествлено с векторным пространством, образованным всеми полилинейными отображениями $F \times \ldots \times F$ ($(r-1)$ раз) в T_1^1. Именно, полилинейное отображение K пространства $F \times \ldots \times F$ (r раз) в F мы отождествляем с полилинейным отображением K_1 пространства $F \times \ldots \times F$ ($(r-1)$ раз) в T_1^1, которое определяется соотношением

$$K_1(x_1, \ldots, x_{r-1}) \cdot x = K(x_1, \ldots, x_{r-1}, x)$$

для всех $x_1, \ldots, x_{r-1}, x \in F$.

Рассмотрим дифференцируемое многообразие V. *Тензорным полем типа* (s, r) на многообразии V называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $p \in V$ некоторый тензор типа (s, r), определенный на касательном пространстве T_p; требование дифференцируемости будет налагаться в той или иной подходящей форме. Так, например, можно требовать дифференцируемости коэффициентов данного тензорного поля по любым локальным координатам в V. Однако тензорные поля типов $(1, r)$ (и $(0, r)$) мы можем рассматривать иначе, а именно следующим образом, достаточным для наших целей в главе III.

Рассмотрим $\mathfrak{F}$-модуль $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(V)$. (*Дифференцируемое*) *тензорное поле типа* $(1, r)$ на V есть $\mathfrak{F}$-полилинейное отображение прямого произведения $\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}$ (r раз) в $\mathfrak{X}$. В частности, тензорные поля типа $(1,0)$ (или $(0,1)$) представляют собой не что иное, как элементы $\mathfrak{X}$ (соответственно 1-формы на V). Среди тензорных полей типа $(1,1)$ имеется одно, канонически присоединенное к V, именно, тензорное поле K, такое, что $K(X) = X$ для любого $X \in \mathfrak{X}$. Если взять за исходное это новое определение, то можно доказать, как и в случае дифференциальных форм, его эквивалентность определению, данному ранее.

В заключение мы определим *риманову метрику* на многообразии V. Она представляет собой тензорное поле типа $(0,2)$, удовлетворяющее двум следующим условиям:

1) Симметричность: $g(X, Y) = g(Y, X)$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}$.

2) Положительная определенность: $g(X, X) \geqslant 0$ для любого $X \in \mathfrak{X}$, и $g(X, X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$.

Риманова метрика порождает внутреннее произведение в каждом касательном пространстве T_p, $p \in V$. Относительно существования римановых метрик на произвольном дифференцируемом многообразии, удовлетворяющем второй аксиоме счетности[2]), мы отсылаем читателя к [19].

§ 5. Группы Ли

Группой Ли называется группа G[16]), являющаяся в то же время дифференцируемым многообразием, таким, что групповая операция, определяемая отображением

$$(a, b) \in G \times G \to ab^{-1} \in G,$$

представляет собой дифференцируемое отображение произведения $G \times G$ в G [36]. В силу того, что G как многообразие локально связно [8], связная компонента [7] G_0 единичного элемента e является открытым множеством в G.

Известно [18], что группа Ли допускает структуру аналитического многообразия, такую, что групповые операции оказываются аналитическими. Наше определение группы Ли совпадает с определением в [6].

Рассмотрим некоторую группу Ли G. Компонента G_0 единичного элемента этой группы представляет собой связную топологическую группу [6] и, следовательно, порождается некоторой окрестностью единичного элемента e. В частности, G_0 представляет собой не более чем счетную сумму компактных множеств [5] и удовлетворяет второй аксиоме счетности [2]. С другой стороны, G удовлетворяет второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда ее фактор-группа G/G_0 [1] состоит не более чем из счетного числа элементов.

Мы будем обозначать символом L_a (соответственно R_a) левый (соответственно правый) сдвиг группы G, порожденный элементом $a \in G : L_a \cdot x = ax$ (соответственно $R_a \cdot x = xa$), где $x \in G$. Векторное поле X, определенное на G, называется *левоинвариантным*, если $L'_a \cdot X = X$ для любого $a \in G$. Можно доказать, что каждое левоинвариантное векторное поле дифференцируемо. То же верно и для правоинвариантных векторных полей. Множество всех левоинвариантных векторных полей на группе G мы будем обозначать $\mathfrak{g}$.

Множество $\mathfrak{g}$ есть векторное пространство, изоморфное касательному пространству T_e к G в точке e. Для данного элемента $A \in T_e$ векторное поле X, определяемое равенством $X_a = L'_a \cdot A$ $(a \in G)$, принадлежит $\mathfrak{g}$; это соответствие является изоморфизмом T_e на $\mathfrak{g}$. Если X и Y принадлежат $\mathfrak{g}$, то $[X, Y]$ также принадлежит $\mathfrak{g}$. В самом деле,

$$L'_a [X, Y] = [L'_a X, L'_a Y] = [XY].$$

Следовательно, $\mathfrak{g}$ оказывается подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{X}(G)$.

Таким образом, $\mathfrak{g}$ есть конечномерная алгебра Ли, называемая ***алгеброй Ли группы*** G. Элементы этой алгебры мы будем в дальнейшем обозначать A, B и т. д.

Пусть $A \in \mathfrak{g}$; обозначим символом φ_t локальную однопараметрическую группу локальных преобразований, порожденную векторным полем A в окрестности единичного элемента e. Так как A инвариантно относительно L_x $(x \in G)$, то φ_t коммутирует с любым левым сдвигом L_x. Отсюда следует, что A порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований φ_t группы G, коммутирующих с любым L_x, и что $\varphi_t(x) = R_{a_t} \cdot x$ для любого $x \in G$, где a_t обозначает траекторию элемента e, порожденную группой φ_t. Поэтому имеет место формула $a_{t+s} = a_t a_s$. Мы будем называть a_t однопараметрической подгруппой группы G, порожденной векторным полем A. Другое характеристическое свойство a_t состоит в том, что a_t есть (единственная) кривая в G, такая, что ее касательный вектор a'_t равен $a_t \cdot a'_0$, причем выполняется начальное условие: $a_0 = e$.

Дадим теперь более общее определение. *Подгруппой Ли G'* группы G мы будем называть такую подгруппу группы G, которая в то же время является подмногообразием многообразия G, представляющим собой группу Ли относительно его дифференцируемой структуры.

Подпространство $\mathfrak{g}'$ пространства $\mathfrak{g}$, состоящее из всех левоинвариантных векторных полей, соответствующих касательным векторам в точке e к G', является, как легко видеть, подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Мы можем рассматривать $\mathfrak{g}'$ как алгебру Ли подгруппы G'. Обратно, пусть $\mathfrak{g}'$ есть некоторая подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Сопоставляя каждому $x \in G$ касательное подпространство $\mathfrak{g}'_x = \{A_x;\ A \in \mathfrak{g}'\}$, мы получаем дифференцируемое инволютивное распределение. Максимальное интегральное многообразие этого распределения, проходящее через e, является, как легко усмотреть, связной подгруппой Ли группы G; мы будем называть его подгруппой Ли, порожденной подалгеброй $\mathfrak{g}'$.

Пусть задан автоморфизм [18]) φ группы Ли G; он порождает некоторый автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Действительно, если $A \in \mathfrak{g}$, то $\varphi' A$ есть снова левоинвариантное векторное поле и мы имеем $[\varphi' A, \varphi' B] = [A, B]$. Далее, если мы отождествляем $\mathfrak{g}$ с касательным пространством T_e, то дифференциал $d\varphi_e$ порождает некоторый автоморфизм касательного пространства T_e в силу равенства $\varphi(e) = e$. В частности, если φ есть внутренний автоморфизм [18]) $x \to axa^{-1}$, порожденный элементом $a \in G$, то соответствующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обозначается $\mathrm{ad}(a)$ [37]). Отображение $a \to \mathrm{ad}(a)$ есть представление группы Ли G, называемое *присоединенным представлением* G *в* $\mathfrak{g}$.

Так как $axa^{-1} = L_a \cdot R_{a^{-1}} \cdot x = R_{a^{-1}} \cdot L_a \cdot x$, то мы имеем $\mathrm{ad}(a) \cdot B = R_{a^{-1}} \cdot B$ для любого $B \in \mathfrak{g}$. В силу теоремы § 2, мы усматриваем, что если a_t есть однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная элементом $A \in \mathfrak{g}$, то

$$[B, A] = \lim_{t \to 0} \frac{\mathrm{ad}\left(a_t^{-1}\right) \cdot B - B}{t}$$

для любого $B \in \mathfrak{g}$.

Если G' есть инвариантная подгруппа Ли группы G, то соответствующая подалгебра $\mathfrak{g}'$ инвариантна относительно отображения $B \to [B, A]$ для любого $A \in \mathfrak{g}$. Подалгебра $\mathfrak{g}'$ есть идеал [27]) алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Обратно, если группа G связна, некоторый идеал $\mathfrak{g}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ порождает связную подгруппу Ли G', являющуюся инвариантной подгруппой [17]) группы G.

В заключение сделаем несколько замечаний относительно дифференциальных форм на группе Ли G. Форма называется левоинвариантной, если она инвариантна относительно любого левого сдвига L_a, $a \in G$. Линейное пространство $\mathfrak{g}^*$, состоящее из всех левоинвариантных форм порядка 1, представляет собой пространство, сопряженное к $\mathfrak{g}$; если $A \in \mathfrak{g}$ и $\omega \in \mathfrak{g}^*$, то функция $\omega(A)$ постоянна на G. Если $\omega \in \mathfrak{g}^*$, то внешний дифференциал $d\omega$ также левоинвариантен. Имеет место *уравнение Маурера — Картана*

$$d\omega(A, B) = -\frac{1}{2}\omega([A, B]), \quad A, B \in \mathfrak{g},$$

немедленно следующее из теоремы § 3.

§ 6. Группы преобразований

Рассмотрим группу Ли G и дифференцируемое многообразие V. Мы будем говорить, что G есть *группа Ли преобразований многообразия* V (или что G *действует на многообразии* V *дифференцируемым образом*), если выполняются следующие условия:

1) каждому элементу $a \in G$ соответствует некоторое дифференцируемое преобразование многообразия V, обозначаемое $p \in V \to p \cdot a \in V$;

2) $(a, p) \in G \times V \to p \cdot a \in V$ есть дифференцируемое отображение;

3) для любых $a, b \in G$ и любой точки $p \in V$ имеет место равенство $p \cdot (ab) = (p \cdot a) \cdot b$.

Мы будем писать также $p \cdot a = R_a \cdot p$ и говорить, что группа G действует на многообразии V *правосторонним образом*. Из условия 3) следует, что R_e (e — единичный элемент группы G) есть тождественное преобразование многообразия V.

Мы будем называть группу G *эффективной на* V, если e является единственным элементом этой группы, для которого R_e есть тождественное преобразование. Говорят, что группа G *не имеет неподвижных точек на многообразии* V (или что G *действует без неподвижных точек на многообразии* V), если выполняется следующее более сильное условие: если $p \cdot a = p$ для некоторой точки $p \in V$, то $a = e$.

Пусть G есть связная группа Ли, действующая на многообразии V дифференцируемым образом. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Мы покажем, что возникает естественный гомоморфизм[19]) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{X}(V)$ векторных полей на V ([18], стр. 431).

Пусть $A \in \mathfrak{g}$; рассмотрим однопараметрическую подгруппу a_t группы G, порожденную векторным полем A. Однопараметрическая группа преобразований R_{a_t} многообразия V индуцирует дифференцируемое векторное поле A^* на V. Обозначим буквой σ определенное таким образом отображение $A \in \mathfrak{g} \to A^* \in \mathfrak{X}(V)$. Чтобы доказать, что σ есть гомоморфизм, заметим, что это отображение может быть определено также и следующим образом. Пусть σ_p обозначает отображение $x \in G \to p \cdot x \in V$, определенное для всех $p \in V$. Тогда мы будем иметь

$$(d\sigma_p)_e \cdot A = (\sigma A)_p,$$

где $(d\sigma_p)_e$ — дифференциал отображения σ_p в e, т. е. отображение касательного пространства T_e в T_p. Благодаря этому замечанию становится ясным, что σ есть линейное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{X}(V)$. Пусть теперь $A, B \in \mathfrak{g}$, и пусть a_t — однопараметрическая группа, порожденная векторным полем A. Положим $\sigma(A) = A^*$ и $\sigma(B) = B^*$. В силу теоремы § 2, мы имеем

$$[A^*, B^*] = \lim_{t \to 0} \frac{B^* - R_{a_t} \cdot B^*}{t}.$$

Используя тот факт, что $R_{a_t} \cdot \sigma_{pa_t^{-1}} x = pa_t^{-1} x a_t$ для $x \in G$, и обозначая дифференциал отображения той же буквой, что и отображение, мы получаем

$$(R_{a_t} \cdot B^*)_p = R_{a_t} \cdot \sigma_{pa_t^{-1}} \cdot B_e = \sigma_p \cdot \mathrm{ad}\left(a_t^{-1}\right) B_e.$$

Следовательно, в силу формулы, выражающей $[A, B]$ в $\mathfrak{g}$ через $\mathrm{ad}(G)$, мы будем иметь

$$[A^*, B^*]_p = \lim_{t \to 0} \frac{\sigma_p \cdot B_e - \sigma_p \cdot \mathrm{ad}\left(a_t^{-1}\right) B_e}{t} =$$

$$= \sigma_p \cdot \lim_{t \to 0} \frac{B_e - \mathrm{ad}\left(a_t^{-1}\right) B_e}{t} = \sigma_p \cdot [A, B]_e = (\sigma [A, B])_p.$$

Тем самым доказано, что σ есть гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{X}(V)$.

Отображение σ есть изоморфизм, если группа G эффективна на V. Действительно, если $\sigma(A) = 0$, то это означает, что однопараметрическая группа преобразований R_{a_t} тривиальна, т. е. любое преобразование R_{a_t} является тождественным преобразованием многообразия V. Так как G эффективна, то мы имеем $a_t = e$ и, следовательно, $A = 0$.

Если G действует без неподвижных точек, то ни одно из отображений $\sigma(A)$, $A \in \mathfrak{g}$, $A \neq 0$, не имеет нулей.

Действительно, если $\sigma(A)$ равно нулю в точке $p \in V$, то R_{a_t} оставляет точку p неподвижной и, следовательно, $a_t = e$ для всех t.

§ 7. Главные расслоенные многообразия

Рассмотрим дифференцируемое многообразие B и группу Ли G. Дифференцируемое многообразие P называется *главным расслоенным многообразием* [38]), если выполняются следующие условия:

1) группа G действует на многообразии P дифференцируемым правосторонним образом и не имеет на P неподвижных точек:

$$(x,\ a) \in P \times G \to xa = R_a \cdot x \in P;$$

2) многообразие B есть фактор-пространство [39]) многообразия P по отношению к соотношению эквивалентности, порожденному группой G, причем каноническая проекция π: $P \to B$ есть дифференцируемое отображение;

3) P *локально тривиально*, т. е. для любой точки $u \in B$ существует такая окрестность U, что ее полный прообраз $\pi^{-1}(U)$ изоморфен произведению $U \times G$ в следующем смысле: отображение

$$x \in \pi^{-1}(U) \to (\pi(x),\ \varphi(x)) \in U \times G$$

представляет собой дифференцируемый изоморфизм со свойством

$$\varphi(xa) = \varphi(x)\, a \quad \text{для любого} \quad a \in G.$$

В случае если эти условия выполняются, многообразие B называется *базой* многообразия P; группа G называется *структурной группой* многообразия P. Мы будем обозначать главное расслоенное многообразие символом $P(B,\ G)$.

Пусть заданы группа Ли G и дифференцируемое многообразие B. Прямое произведение $B \times G$ мы можем рассматривать как главное расслоенное многообразие, если будем считать, что группа G действует на $B \times G$ по правилу, выражаемому формулой $(u,\ a)\, b = (u,\ ab)$. Это главное расслоенное многообразие называется *тривиальным*.

Рассмотрим произвольное главное расслоенное многообразие $P(B,\ G)$. Для каждой точки $u \in B$ ее полный прообраз $\pi^{-1}(u)$ есть замкнутое подмногообразие многообразия P, дифференцируемо изоморфное G. Оно называется *слоем над* u. Определим также для любой точки $x \in P$ *слой, проходящий через точку* x, как слой над $u = \pi(x)$. Для данного открытого подмногообразия V многообразия B его полный прообраз $\pi^{-1}(V)$ является открытым подмногообразием многообразия P, на котором группа G действует без неподвижных точек и которое является дифференцируемым главным расслоенным многообразием с базой V.

В силу условия 3), мы можем выбрать некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы B, такое, что для каждого $\pi^{-1}(U_\alpha)$ будет существовать изоморфизм $x \to (\pi(x), \varphi_\alpha(x))$ на $U_\alpha \times G$. Если $x \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, то мы получаем

$$\varphi_\beta(xa)(\varphi_\alpha(xa))^{-1} = \varphi_\beta(x)(\varphi_\alpha(x))^{-1}.$$

Это равенство показывает, что отображение

$$x \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(x)(\varphi_\alpha(x))^{-1} \in G$$

постоянно на каждом слое. Таким образом, оно порождает дифференцируемое отображение $\psi_{\beta\alpha}$ пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$ в G. Отображения $\psi_{\beta\alpha}$, определенные для таких α и β, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$, называются *переходными функциями*, соответствующими покрытию $\{U_\alpha\}$. Они обладают свойством

(*) $\psi_{\gamma\alpha}(u) = \psi_{\gamma\beta}(u) \cdot \psi_{\beta\alpha}(u)$ для любой точки $u \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Пусть, обратно, задано открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия B и множество дифференцируемых отображений $\psi_{\beta\alpha}$ всевозможных пересечений $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ в группу Ли G, причем выполняются соотношения (*). Тогда мы можем построить дифференцируемое главное расслоенное многообразие $P(B, G)$ с переходными функциями $\psi_{\beta\alpha}$. Заметим прежде всего, что $\psi_{\alpha\alpha}(u) = e$ и $\psi_{\alpha\beta}(u)\psi_{\beta\alpha}(u) = e$ для любых α и β, таких, что $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$. Рассмотрим для каждого α пространство X_α, являющееся прямым произведением $U_\alpha \times G$; пусть $X = \bigcup\limits_\alpha X_\alpha$ есть топологическая сумма всех X_α. Объявим открытые множества каждого X_α открытыми множествами в X; тогда X станет дифференцируемым многообразием. Мы вводим в X соотношение эквивалентности ρ следующим образом: $(u, a) \in U_\alpha \times G \subset X$ эквивалентно $(u, b) \in U_\beta \times G \subset X$ тогда и только тогда, когда $b = \psi_{\beta\alpha}(u)a$ в G. Из условия (*) и его следствий вытекает, что мы действительно получили соотношение эквивалентности. Теперь мы определим P как фактор-пространство X/ρ. Мы утверждаем, что P есть искомое главное расслоенное многообразие $P(B, G)$.

Чтобы доказать это, заметим прежде всего, что G действует на P правосторонним образом по следующему правилу: если $x \in P$ есть класс эквивалентности элемента $(u, a) \in U_\alpha \times G$, то мы определяем $x \cdot b$ как класс эквивалентности элемента

$(u, ab) \in U_\alpha \times G$. Как легко видеть, G не имеет неподвижных точек. Ниже мы увидим, что P допускает структуру дифференцируемого многообразия и что G действует на этом многообразии дифференцируемым образом. Во всяком случае, фактор-множество множества P по отношению к соотношению эквивалентности, порождаемому группой G (две точки из P эквивалентны тогда и только тогда, когда одна отображается в другую некоторым преобразованием группы), определяет проекцию π множества P на B. Далее, заметим, что проекция ρ многообразия X на P взаимно однозначна на множестве X_α, так что $\pi^{-1}(U_\alpha)$ есть множество ρ-классов элементов (u, a), где $u \in U_\alpha$ и $a \in G$, которое, таким образом, находится во взаимно однозначном соответствии с произведением $U_\alpha \times G$. Теперь мы введем в P структуру дифференцируемого многообразия, потребовав, чтобы $\pi^{-1}(U_\alpha)$ было открытым подмногообразием в P, дифференцируемо гомеоморфным произведению $U_\alpha \times G$. Это оказывается возможным, так как $x \in P$ содержится в $\pi^{-1}(U_\alpha)$ при некотором α и так как, кроме того, отождествление $(u, a) \in U_\alpha \times G$ с $(u, \psi_{\beta\alpha}(u)a) \in U_\beta \times G$ осуществляется с помощью дифференцируемых отображений $\psi_{\beta\alpha}$.

Введя в P эту дифференцируемую структуру, мы без труда проверяем выполнение всех требуемых условий; таким образом, P действительно оказывается главным расслоенным многообразием $P(B, G)$. Кроме того, переходные функции этого многообразия, соответствующие покрытию $\{U_\alpha\}$, оказываются в точности заданными отображениями $\psi_{\beta\alpha}$.

Определим теперь так называемые фундаментальные векторные поля на данном главном расслоенном многообразии $P(B, G)$. Так как G действует на P, то существует гомоморфизм σ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли $\mathfrak{X}(P)$ векторных полей на P. Образ $A^* = \sigma(A)$ элемента $A \in \mathfrak{g}$ называется *фундаментальным векторным полем* на P, соответствующим A. Множество всех A^*, соответствующих всем $A \in \mathfrak{g}$, мы обозначаем $\mathfrak{g}^*$. Так как G не имеет неподвижных точек, то σ является изоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$, подалгебру алгебры $\mathfrak{X}(P)$.

Из определения гомоморфизма σ следует, что каждое фундаментальное векторное поле A^* индуцируется группой R_{a_t}, где a_t — однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная элементом $A \in \mathfrak{g}$. Отсюда следует, что для любой точки $x \in P$ касательный вектор $(A^*)_x$ является касательным к слою, проходящему через точку x. Так как слой дифференцируемо изоморфен с G, мы заключаем, что касательное пространство G_x в точке x к слою совпадает с совокупностью всех $(A^*)_x$, где $A \in \mathfrak{g}$. Отображение $A \in \mathfrak{g} \to (A^*)_x$ представляет собой линейный изоморфизм пространства $\mathfrak{g}$ на G_x.

Теперь мы докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть A^* есть фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу $A \in \mathfrak{g}$. Тогда $R_a \cdot A^*$ является для любого $a \in G$ фундаментальным векторным полем, соответствующим* $\mathrm{ad}(a^{-1})A$.

Доказательство. Так как A^* индуцировано группой R_{a_t}, где a_t есть однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная элементом $A \in \mathfrak{g}$, то $R_a \cdot A^*$ индуцируется группой $R_a \cdot R_{a_t} \cdot R_{a^{-1}} = R_{a^{-1}a_t a}$, где $a^{-1}a_t a$ есть однопараметрическая подгруппа, порожденная элементом $\mathrm{ad}(a^{-1})A \in \mathfrak{g}$.

§ 8. Приведение структурных групп

Рассмотрим два главных расслоенных многообразия $P(B, G)$ и $P'(B, G')$ над одной и той же базой B со структурными группами соответственно G и G'.

Дифференцируемое отображение f многообразия P' в многообразие P называется *гомоморфизмом*, если имеет место гомоморфизм [19]), обозначаемый нами той же буквой f, группы G' в группу G, такой, что

$$f(x'a') = f(x')f(a') \quad \text{для любых } x' \in P' \quad \text{и} \quad a' \in G',$$

и если порожденное им отображение f базы B в себя является дифференцируемым преобразованием базы B. Если отображение f взаимно однозначно, оно называется *изоморфизмом*. В том случае, когда G' есть подгруппа Ли группы G, изоморфизм f многообразия P' в P, соответствующий вложению G' в G, мы будем называть *вложением* многообразия P' в P, если порожденное им отображение f является тождественным преобразованием базы B.

Пусть нам дано некоторое главное расслоенное многообразие $P(B, G)$. Мы будем говорить, что структурная группа G *приводима* к подгруппе Ли G', если существует главное расслоенное многообразие $P'(B, G')$ над базой B со структурной группой G', допускающее вложение в многообразие P. Обозначим это вложение буквой f. В этом случае $P'(B, G')$ вместе с f называется *приведенным расслоенным многообразием*.

Теорема. *Структурная группа G главного расслоенного многообразия $P(B, G)$ приводима к подгруппе Ли G', если*

1) *существует открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы B, такое, что соответствующие переходные функции $\psi_{\beta\alpha}$ принимают значения из подгруппы Ли G';*

2) *G' удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

При этом первое условие является необходимым.

Доказательство. Предположим сначала, что группа G приводима к подгруппе G'. Пусть $P'(B, G')$ есть приведенное расслоенное многообразие с вложением f. Возьмем некоторое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ базы B, такое, что для каждого полного прообраза $\pi'^{-1}(U_\alpha)$ (где π' есть проекция P' на B) определен изоморфизм

$$x' \in \pi'^{-1}(U_\alpha) \to \left(\pi'(x'),\ \varphi'_\alpha(x')\right) \in U_\alpha \times G'.$$

Соответствующие переходные функции $\psi'_{\beta\alpha}$ принимают значения из G'. Теперь мы можем определить изоморфизм множества $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset P$ на $U_\alpha \times G$ для того же самого покрытия $\{U_\alpha\}$ с помощью естественного расширения отображения φ'_α с $\pi'^{-1}(U_\alpha)$ до $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Именно, мы поступим следующим образом. Каждая точка $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ может быть представлена в виде $x = f(x') \cdot a$ при соответствующим образом подобранных $x' \in \pi'^{-1}(U_\alpha)$ и $a \in G$. Мы полагаем $\varphi_\alpha(x) = \varphi'_\alpha(x') \cdot a$; легко проверить, что $\varphi_\alpha(x)$ не зависит от выбора представления точки x в виде $f(x') \cdot a$. Соответствующие переходные функции $\psi_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta(x)(\varphi_\alpha(x))^{-1}$ принимают значения из G', в чем мы убеждаемся, беря $f(x') \in P$ над точкой u.

Обратно, предположим, что существует покрытие $\{U_\alpha\}$ с соответствующими переходными функциями $\psi_{\beta\alpha}$, принимающими значения из некоторой подгруппы Ли G' группы G. Заметим прежде всего, что в таком случае каждая переходная функция $\psi_{\beta\alpha}$ является дифференцируемым отображением пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$ в G' по отношению к дифференцируемой структуре подгруппы G'. Это может быть доказано совершенно так же, как это делается в предложении I в [6] (стр. 142), где аналитичность следует заменить дифференцируемостью. После этого мы можем построить, как это сделано в § 7, главное расслоенное многообразие $P'(B, G')$, отправляясь от базы B, ее покрытия $\{U_\alpha\}$ и соответствующих переходных функций $\psi_{\beta\alpha}$. Многообразие $P'(B, G')$ допускает естественное вложение f в $P(B, G)$, как это ясно из самого построения P'. Это и доказывает, что группа G приводима к подгруппе G'.

§ 9. Присоединенные расслоенные многообразия

Рассмотрим главное расслоенное многообразие $P(B, G)$. Пусть F есть некоторое многообразие, на котором группа G действует дифференцируемым *левосторонним* образом:

$$(a, \xi) \in G \times F \to a \cdot \xi \in F.$$

Мы построим расслоенное многообразие $E(B, F, G, P)$ со стандартным слоем F, присоединенное к P.

Группа G действует на $P \times F$ дифференцируемым правосторонним образом по правилу

$$(x, \xi) \in P \times F \to (x, \xi)\, a = (xa, a^{-1}\xi).$$

Рассмотрим фактор-пространство $E = (P \times F)/G$. Обозначим символом π_p каноническую проекцию многообразия P на B. Отображение, переводящее точку из E, соответствующую классу (x, ξ), в точку $\pi_P(x)$, определяет проекцию π_E фактор-пространства E на B. Слой $\pi_E^{-1}(u)$, $u \in B$, определяется в E как множество точек, соответствующих классу (x, ξ), где x есть любая такая точка многообразия P, для которой $\pi_p(x) = u$, а ξ пробегает все F.

Каждая точка $u \in B$ обладает некоторой окрестностью U, полный прообраз которой $\pi_p^{-1}(U)$ в P изоморфен прямому произведению $U \times G$ (тривиальному главному расслоенному многообразию). Отсюда следует, что $\pi_E^{-1}(U)$ также представляет собой прямое произведение $U \times F$. Поэтому пространство E может быть наделено структурой дифференцируемого многообразия, если потребовать, чтобы $\pi_E^{-1}(U)$ было открытым подмногообразием многообразия E, изоморфным произведению $U \times F$. Тогда проекция π_E многообразия E на B будет дифференцируемым отображением. Многообразие E называется расслоенным многообразием над базой B со стандартным слоем F и структурной группой G, *присоединенным к* P.

Любую точку $x \in P$ можно рассматривать как взаимно однозначное отображение многообразия F на слой $F_u = \pi_E^{-1}(u)$ из E, где $u = \pi_P(x) \in B$. Именно, x отображает точку $\xi \in F$ в точку многообразия P, соответствующую классу (x, ξ). Отображение x есть дифференцируемое отображение F в E. Справедливо равенство $x(a\xi) = (xa)\xi$ для любых $a \in G$ и $\xi \in F$.

Под изоморфизмом слоя F_u в другой слой $F_{u'}$ мы будем понимать дифференцируемое отображение f слоя F_u на $F_{u'}$, которое может быть представлено в виде

$$(x \cdot \xi) \in F_u \, (\xi \in F) \to \varphi(x) \cdot \xi \in F_{u'},$$

где φ есть изоморфизм слоя G_u из P в $G_{u'}$, т. е. дифференцируемое отображение G_u на $G_{u'}$, для которого $\varphi(xa) = \varphi(x)a$ при любых $x \in G_u$ и $a \in G$.

§ 10. Примеры

1) Общая линейная группа $\mathrm{GL}(n, R)$. Рассмотрим вещественное векторное пространство F размерности n; пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — его базис. Группу всех линейных автоморфизмов a пространства F можно рассматривать как группу всех неособенных матриц (a_j^i); при этом линейный автоморфизм определяется равенствами

$$a\xi_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \xi_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эта группа называется *общей линейной группой* и обозначается $\mathrm{GL}(n, R)$. Правило умножения в ней выражается формулой

$$(ab)_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k.$$

Группу $\mathrm{GL}(n, R)$ можно рассматривать как открытое множество и, следовательно, как открытое подмногообразие n^2-мерного евклидова пространства R^{n^2}. Будучи наделено такой структурой дифференцируемого многообразия, группа $\mathrm{GL}(n, R)$ становится группой Ли.

2) Однородное пространство G/H [6]. Рассмотрим группу Ли G и ее замкнутую подгруппу H. Можио всегда считать, что подгруппа H действует на G дифференцируемым правосторонним образом:

$$(x, a) \in G \times H \to xa \in G.$$

Мы получаем таким образом дифференцируемое главное расслоенное многообразие $G(B, H)$ над базой $B = G/H$ со структурной группой H. Так как левые сдвиги группы G, порожденные самой этой группой, коммутируют с преобразоваииями группы G, порождаемыми подгруппой H, мы видим, что G действует естественным образом на базе G/H. Группа G представляет собой транзитивную [40]) группу Ли преобразоваиий базы G/H.

Группа G будет эффективной в том и только том случае, если H не содержит никакой инвариантной подгруппы группы G, отлнчиой от еднничного элемента e.

3) Расслоенное многообразие реперов. Рассмотрим дифференцируемое многообразие B. *Репером* x в точке $u \in B$ называется набор линейно независимых касательных векторов $(X_1, \ldots, X_n)$ в точке u. Обозначим буквой P множество всех реперов x во всех точках многообразия B. Каждый элемент $a \in \mathrm{GL}(n, R)$ действует на P правосторонним образом: если $a = \left(a_j^i\right)$ и $x = (X_1, \ldots, X_n)$, то

$$xa = \left(\sum_{j=1}^{n} a_1^j X_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{n} a_n^j X_j\right),$$

т. е. xa представляет собой новый репер в той же точке, что и репер x. Если x есть репер в точке u, то отображение $\pi(x) = u$ определяет проекцию множества P на B. Введем локальиые координаты $(u^1, \ldots, u^n)$ в некоторой координатной окрестиости U многообразия B. Тогда каждый репер $x \in \pi^{-1}(U)$ можно записать в виде

$$x = (X_1, \ldots, X_n), \qquad X_i = \sum_{k=1}^{n} X_i^k \frac{\partial}{\partial u^k},$$

где $\left(X_i^k\right)$ — некоторая неособенная матрица. Обратно, каждая неособенная матрица $\left(X_i^k\right)$ определяет репер x, имеющий указанный выше вид. Взяв в качестве локальных координат в $\pi^{-1}(U)$ переменные $u^1, \ldots, u^n$ и X_i^k, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, мы превращаем P в дифференцируемое многообразие. Легко проверить, что P становится тогда дифференцируемым главным расслоенным многообразием над базой B со структурной группой $G = \mathrm{GL}(n, R)$.

Рассмотрим n-мерное векторное пространство F с фиксированным базисом $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$. Группа G действует на F по закону

$$a \cdot \xi_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i \xi_i \quad \text{для} \quad a = \left(a_j^i\right) \in G.$$

Присоединенное к P расслоенное многообразие со стандартным слоем F называется касательным расслоенным многообразием $T(B)$ многообразия B. Мы можем рассматривать каждый репер $x = (X_1, \ldots, X_n)$ как такое линейное отображение пространства F на T_u, $u = \pi(x)$, для которого $x \cdot \xi_i = X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Глава II

СВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

§ 1. Связность в главном расслоенном многообразии

Рассмотрим дифференцируемое главное расслоенное многообразие P над базой B со структурной группой Ли G (гл. I, § 7). Обозначим символом P_x касательное пространство к P в точке $x \in P$ и символом G_x подпространство подпространства P_x, касательное к слою, проходящему через точку x.

Определение. *Связностью* Γ в P называется соответствие, сопоставляющее каждой точке $x \in P$ некоторое касательное подпространство Q_x, если выполнены следующие условия:

1) P_x есть прямая сумма подпространств G_x и Q_x;

2) каковы бы ни были $a \in G$ и $x \in P$ подпространство Q_{xa} представляет собой образ подпространства Q_x при отображении R_a;

3) Q_x зависит от x дифференцируемым образом. Поясним последнее условие. Для данного произвольного (не обязательно дифференцируемого) векторного поля X на P (или на некотором открытом подмножестве многообразия P) мы имеем в каждой точке $x \in P$ по условию 1) следующее разложение:

$$X_x = Y_x + Z_x, \quad \text{где} \quad Y_x \in G_x \quad \text{и} \quad Z_x \in Q_x.$$

Поставив в соответствие каждой точке x касательный вектор Y_x, мы получаем векторное поле Y, называемое *вертикальной составляющей* векторного поля X. Подобным же образом касательные векторы Z_x, определенные в каждой точке $x \in P$, образуют векторное поле Z, называемое *горизонтальной составляющей* векторного поля X. Теперь условие 3) означает, что если данное векторное поле X дифференцируемо, то дифференцируема также его горизонтальная составляющая Z. В этом случае, конечно, вертикальная составляющая Y также оказывается дифференцируемой.

Если связность задана, мы называем Q_x *горизонтальным подпространством* в точке x. Вертикальную составляющую данного векторного поля X мы будем обозначать символом vX; горизонтальную составляющую — символом hX. Векторное поле X называется вертикальным, если $vX = X$; оно называется горизонтальным, если $hX = X$.

Пусть задана некоторая связность Γ в P; мы можем следующим образом определить на P 1-форму ω, принимающую значения из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Как мы видели в § 7 главы I, для любой точки $x \in P$ касательное подпространство G_x представляет собой множество всех касательных векторов вида $(A^*)_x$, $A \in \mathfrak{g}$, где A^* есть фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу $A \in \mathfrak{g}$. Форму ω_x мы определяем как линейное отображение, при котором образом элемента $(A^*)_x \in G_x$ служит соответствующий элемент $A \in \mathfrak{g}$ и образом каждого $Z \in Q_x$ является 0 в $\mathfrak{g}$. Из этого определения следует, что если X есть дифференцируемое векторное поле на P, то $\omega(X) = \omega(vX)$. Используя условие 3), можно доказать дифференцируемость формы ω. Форма ω называется *формой связности* данной связности.

Форма ω удовлетворяет следующим условиям:

1′) $\omega(A^*) = A$ для каждого $A \in \mathfrak{g}$;

2′) каков бы ни был элемент $a \in G$, R_a преобразует ω в $\operatorname{ad}(a^{-1})\,\omega$; последнее означает, что имеет место равенство

$$\left(R_a^* \cdot \omega\right)(X) = \operatorname{ad}(a^{-1}) \cdot (\omega(X))$$

для любого векторного поля X, где $\operatorname{ad}(a^{-1})$ обозначает присоединенное представление группы G, действующее в $\mathfrak{g}$.

Условие 1′) тривиальным образом следует из определения формы ω. Докажем 2′). Если векторное поле X горизонтально, то $R_a \cdot X$ также горизонтально по условию 2). Следовательно, $\omega(X)$ равно нулю, так же как и $\left(R_a^* \cdot \omega\right)(X) = \omega(R_a \cdot X)$. Если X есть фундаментальное векторное поле A^*, то $R_a \cdot X$ есть фундаментальное векторное поле, соответствующее $\operatorname{ad}(a^{-1}) \cdot A$ (лемма § 7 главы I). Поэтому мы имеем

$$\left(R_a^* \cdot \omega\right)(X) = \omega(R_a \cdot X) = \operatorname{ad}(a^{-1})\,A = \operatorname{ad}(a^{-1}) \cdot (\omega(X)).$$

Теперь нетрудно рассмотреть и общий случай.

Обратно, пусть на P задана дифференцируемая 1-форма ω, принимающая значения из $\mathfrak{g}$ и удовлетворяющая условиям 1′)

и 2′). Тогда мы можем определить такую связность **Г**, для которой заданная форма ω будет являться формой связности. Для этого нам достаточно определить Q_x как множество касательных векторов в точке x, образами которых при отображении ω_x служит 0 в $\mathfrak{g}$. Проверка не представляет труда.

Каноническая проекция π многообразия P на базу B порождает линейное отображение π подпространства P_x (для каждой точки $x \in P$) на касательное пространство T_u базы B в точке $u = \pi(x)$. Мы немедленно усматриваем, что при заданной связности отображение π есть изоморфизм Q_x на T_u.

Определение. *Лифтом* данного векторного поля X на базе B (или на ее некотором открытом подмножестве V) называется единственное горизонтальное векторное поле X^* на P (или соответственно на $\pi^{-1}(V)$), накрывающее X; последнее означает, что X^* и X π-согласованы: $\pi X^* = X$.

Существование и единственность лифта следуют из того факта, что отображение π есть линейный изоморфизм Q_x на T_u. Чтобы доказать дифференцируемость лифта X^* данного дифференцируемого векторного поля X на B, мы действуем следующим образом. Выберем такую окрестность U точки u, для которой $\pi^{-1}(U)$ изоморфно прямому произведению $U \times G$. Используя это разложение, мы выбираем в $\pi^{-1}(U)$ такое дифференцируемое векторное поле Y^*, что $\pi Y^* = X$. Тогда дифференцируемая горизонтальная составляющая hY^* векторного поля Y^*, как легко видеть, совпадает в $\pi^{-1}(U)$ с X^*.

Лемма 1. *Лифт X^* инвариантен относительно отображения R_a для любого $a \in G$. Обратно, если X^* есть горизонтальное векторное поле на P, инвариантное относительно любого R_a, то оно представляет собой лифт некоторого определенного векторного поля X на B.*

Доказательство. Прежде всего, если X^* есть лифт векторного поля X, то $R_a \cdot X^*$ также есть лифт того же векторного поля X в силу горизонтальности $R_a \cdot X^*$ и очевидного равенства $\pi \cdot R_a X^* = \pi X^* = X$. Отсюда в силу единственности следует, что $R_a \cdot X^* = X^*$, т. е. X^* инвариантно относительно R_a.

Если X^* есть горизонтальное векторное поле, инвариантное относительно R_a, то мы можем определить векторное поле X на B с помощью равенства $X_u = \pi \cdot (X^*)_x$. Векторное поле X не зависит от выбора точки $x \in P$, если только $\pi(x) = u$. Действительно, если взять вместо x точку $y = R_a \cdot x$, то мы будем иметь

$$\pi \cdot (X^*)_y = \pi \cdot R_a \cdot (X^*)_x = \pi \cdot (X^*)_x.$$

Легко проверить, что X^* есть лифт векторного поля X.

Лемма 2. *Пусть X^* и Y^* — лифты векторных полей X и Y соответственно. Тогда $X^* + Y^*$ есть лифт векторного поля $X + Y$, а $h[X^*, Y^*]$ — лифт векторного поля $[X, Y]$.*

Доказательство. Первое утверждение тривиально. Чтобы доказать второе, достаточно заметить, что

$$\pi \cdot h[X^*, Y^*] = \pi [X^*, Y^*] = [X, Y].$$

Теорема. *Пусть в P задана некоторая связность. Тогда распределение $x \to Q_x$ (Q_x — горизонтальное подпространство в точке x) есть дифференцируемое распределение.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in P$; пусть $\pi(x) = u$. Для некоторой окрестности U точки u с локальными координатами $u^1, \ldots, u^n$ рассмотрим в U векторные поля $X_i = \partial/\partial u^i$ и в $\pi^{-1}(U)$ их лифты $\overset{*}{X}_i$. Мы немедленно усматриваем, что $\overset{*}{X}_1, \ldots, \overset{*}{X}_n$ образуют в $\pi^{-1}(U)$ локальный базис распределения $x \to Q_x$.

Как нетрудно проверить, условие 3) в определении связности может быть в действительности заменено условием дифференцируемости распределения $x \to Q_x$.

§ 2. Параллелизм

Рассмотрим связность Γ в главном расслоенном многообразии P. Введем некоторые понятия, которые нам понадобятся, чтобы определить далее так называемое параллельное перенесение элементов слоя вдоль некоторой кривой в B. Термин *параллельное перенесение* мы применяем по аналогии с соответствующим понятием в теории линейных связностей.

Рассмотрим некоторую (кусочно-дифференцируемую) кривую $\tau = \{u_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ в базе B. *Лифтом* кривой τ мы назовем горизонтальную кривую $\tau^* = \{x_t\}$ в P, такую, что $\pi(x_t) = u_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ (кривая в P называется *горизонтальной*, если все ее касательные векторы горизонтальны).

Чтобы составить себе первоначальное грубое представление о существовании лифтов кривой u_t в B, мы рассмотрим случай, когда множество касательных векторов u'_t данной кривой может быть расширено до векторного поля X, определенного в некотором открытом множестве U, содержащем кривую u_t. Пусть X^* есть лифт векторного поля X, определенный в $\pi^{-1}(U)$. Тогда каждая интегральная кривая лифта X^*, проходящая через некоторую точку слоя над u_0, есть горизонтальная кривая, проектирующаяся на u_t. Обратно, каждый лифт кривой u_t необходимо является интегральной кривой лифта X^*. Это рассуждение показывает локальные существование и единственность лифта кривой τ, проходящего через данную точку слоя над u_0 многообразия P. Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Пусть $\tau = \{u_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$—некоторая кривая в B, а x_0—такая точка из P, что $\pi(x_0) = u_0$. Тогда существует один и только один лифт $\tau^* = \{x_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ с начальной точкой x_0.*

Доказательство. Прежде всего мы возьмем в P такую кривую y_t, для которой $y_0 = x_0$ и $\pi(y_t) = u_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Такая кривая в P существует в силу теоремы о накрывающей гомотопии[11]). Если лифт x_t существует, то он должен иметь вид $x_t = y_t \cdot a_t$, где a_t — некоторая кривая в G, такая, что $a_0 = e$. Если кривая x_t окажется горизонтальной при некотором подходящем выборе a_t, то теорема будет доказана. Поэтому мы вычислим $\omega(x'_t)$, где x'_t — касательные векторы к кривой x_t, а ω — форма связности.

Из равенства $x_t = y_t \cdot a_t$ мы получаем $x'_t = y'_t \cdot a_t + y_t \cdot a'_t$, где y'_t и a'_t обозначают касательные векторы соответственно кривых y_t и a_t. В написанном равенстве $y'_t \cdot a_t$ имеет смысл образа касательного вектора y'_t при отображении

$$y \in P \to y \cdot a_t = R_{a_t} \cdot y.$$

Таким образом, по свойству 2′) формы связности ω (§ 1) мы получаем

$$\omega\left(y'_t \cdot a_t\right) = \mathrm{ad}\left(a_t^{-1}\right) \cdot \omega\left(y'_t\right).$$

С другой стороны, $y_t \cdot a'_t$ обозначает образ касательного вектора a'_t при отображении $a \in G \to y_t \cdot a \in P$. Он совпадает со значением в точке $y_t \cdot a_t$ фундаментального векторного поля A^*, соответствующего элементу $A = a_t^{-1} \cdot a'_t \in \mathfrak{g}$. Мы получаем, следовательно, $\omega\left(y_t \cdot a'_t\right) = a_t^{-1} \cdot a'_t \in \mathfrak{g}$. Таким образом, мы имеем

$$\omega\left(x'_t\right) = \mathrm{ad}\left(a_t^{-1}\right) \cdot \omega\left(y'_t\right) + a_t^{-1} \cdot a'_t.$$

Чтобы кривая x_t оказалась горизонтальной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\omega\left(x'_t\right) = 0$, т. е.

$$a'_t \cdot a_t^{-1} = -\,\omega\left(y'_t\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Вопрос о существовании лифта x_t сведен, таким образом, к вопросу о существовании в G кривой $\{a_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, удовлетворяющей написанному выше уравнению. Существование такой кривой следует из леммы, доказываемой ниже. Предполагая существование лифта с начальной точкой x_0 уже доказанным, мы докажем теперь его единственность. Если z_t — некоторый другой лифт кривой u_t, начинающийся в точке x_0, то должно выполняться равенство $z_t = x_t \cdot b_t$, где b_t — некоторая кривая в G, начинающаяся в e. Проделав те же выкладки, что и выше, мы получим

$$\omega\left(z'_t\right) = \mathrm{ad}\left(b_t^{-1}\right) \cdot \omega\left(x'_t\right) + b_t^{-1} \cdot b'_t,$$

где $\omega\left(z'_t\right) = \omega\left(x'_t\right) = 0$, так как обе кривые z_t и x_t горизонтальны по предположению. Следовательно, мы имеем $b_t^{-1} \cdot b'_t = 0$, что означает, что кривая b_t состоит из единственной точки e. Поэтому $z_t = x_t$ для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Этим доказана единственность лифта, проходящего через точку x_0.

Теперь мы установим следующую лемму:

Лемма. *Пусть G есть некоторая группа Ли и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, рассматриваемая как касательное пространство к G в точке e. Пусть Y_t — некоторая кусочно-*

дифференцируемая кривая в $\mathfrak{g}$, *определенная для* $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Тогда в* G *существует такая кривая* $\{a_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, *что* $a_0 = e$ *и* $a'_t \cdot a_t^{-1} = Y_t$ *для* $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Прежде чем приступить к доказательству этой леммы, заметим, что если кривая Y_t в $\mathfrak{g}$ тривиальна, т. е. состоит из одного элемента $Y \in \mathfrak{g}$, то кривая a_t представляет собой не что иное, как однопараметрическую подгруппу группы G, порожденную элементом Y (ср. [6], гл. 1). Таким образом, наше дифференциальное уравнение $a'_t \cdot a_t^{-1} = Y_t$ есть обобщение дифференциального уравнения однопараметрической подгруппы.

Доказательство. Возьмем базис $(X_1, \ldots, X_n)$ касательного пространства в точке e и соответствующие канонические координаты $(x^1, \ldots, x^n)$, $|x^i| < \delta$, в некоторой окрестности U единичного элемента e группы G. Правоинвариантное векторное поле, соответствующее X_i, может быть представлено в U в виде

$$(X_i)_a = R_a \cdot X_i = \sum_{k=1}^{n} u_i^k(a) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

где u_i^k — такие дифференцируемые функции в U, что матрица $\left(u_i^k(a)\right)$ обладает обратной в любой точке $a \in U$. Заданную кривую Y_t в $\mathfrak{g}$ мы можем теперь записать в виде

$$Y_t = \sum_{i=1}^{n} \phi^i(t) \cdot X_i,$$

где $\phi^i(t)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, — кусочно-дифференцируемые функции переменной t, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Мы будем разыскивать кривую $a_t = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, удовлетворяющую системе дифференциальных уравнений

$$(1) \qquad \frac{dx^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} u_k^i(x^1(t), \ldots, x^n(t))\, \phi^k(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

и начальным условиям

$$(2) \qquad x^i(0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Функции $u_k^i(x^1, \ldots, x^n)$ в (1) определены для $|x^i| < \delta$.

Мы применяем здесь основную теорему существования теории дифференциальных уравнений: найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что система дифференциальных уравнений (1) будет иметь единственное решение $x^1(t), \ldots, x^n(t)$, определенное и дифференцируемое по t при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ и удовлетворяющее начальным условиям (2). Более того, число ε_0 может быть выбрано общим для всех наборов функций $(\phi^1(t), \ldots, \phi^n(t))$, если только $|\phi^i(t)| \leqslant C$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где C — фиксированная константа *).

Вернемся к нашей задаче. Кривая Y_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, кусочно-дифференцируема; следовательно, существует такая константа $C > 0$, что $|\phi^i(t)| \leqslant C$ при любом t. Прежде всего найдем решение $(x^1(t), \ldots, x^n(t))$ системы (1), определенное для $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ и удовлетворяющее начальным условиям (2). Кривая $a_t = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ в G, определенная при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$, удовлетворяет условиям $a'_t \cdot a_t^{-1} = Y_t$ и $a_0 = e$. Чтобы продолжить кривую a_t, определив ее на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, мы поступим следующим образом. Найдем решение $(y^1(t), \ldots, y^n(t))$ системы

$$(1') \qquad \frac{dy^i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} u_k^i(y^1(t), \ldots, y^n(t))\,\phi^k(t+\varepsilon_0), \quad i = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$(2') \qquad y^i(0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда кривая $b_t = (y^1(t), \ldots, y^n(t))$ будет также определена при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ (заметим, что $|\phi^k(t+\varepsilon_0)| \leqslant C$ для всех t; кривая Y_t может быть продолжена: чтобы определить ее при всех $t \geqslant 0$, достаточно положить $Y_t = Y_1$ для $t \geqslant 1$).

Кривая b_t удовлетворяет условиям $b_0 = e$ и $b'_t \cdot b_t^{-1} = Y_{t+\varepsilon_0}$ при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$. Теперь мы определим кривую a_t, $\varepsilon_0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon_0$, положив

$$a_{t+\varepsilon_0} = b_t \cdot a_{\varepsilon_0} \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0.$$

Тогда мы будем иметь

$$(a_{t+\varepsilon_0})' \cdot (a_{t+\varepsilon_0})^{-1} = b'_t \cdot a_{\varepsilon_0} \cdot (b_t \cdot a_{\varepsilon_0})^{-1} = b'_t \cdot b_t^{-1} = Y_{t+\varepsilon_0}.$$

*) См., например, Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, ГИТТЛ 1950, гл. IV, § 1. — *Прим. перев.*

Итак, мы получили кривую a_t, $0 \leqslant t \leqslant 2\varepsilon_0$, обладающую желаемыми свойствами. Повторяя описанные шаги достаточное число раз, мы продолжим кривую a_t, определив ее в конце концов на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$. Полученная кривая будет удовлетворять условиям $a_0 = e$ и $a'_t \cdot a_t^{-1} = Y_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тем самым лемма доказана.

Теперь мы определим с помощью теоремы этого параграфа *параллельное перенесение вдоль кривой* $\tau = \{u_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ в B. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in P$; пусть $\pi(x_0) = u_0$. Единственный лифт кривой τ, начинающийся в точке x_0, мы обозначим символом $\tau^*(x_0)$. Конечная точка этого лифта x_1 такова, что $\pi(x_1) = u_1$. Мы определим параллельное перенесение, обозначаемое той же буквой, что и кривая τ, как отображение, при котором образом x_0 служит x_1. Следовательно, τ есть отображение слоя над u_0 в слой над u_1. Так как $R_a \cdot \tau^*(x_0)$ есть лифт кривой τ, начинающийся в точке $x_0 a$, то мы имеем $\tau(xa) = \tau(x)a$ для всех $a \in G$ и всех таких x, что $\pi(x) = u_0$. Отсюда следует, что τ представляет собой дифференцируемый изоморфизм слоя над u_0 в слой над u_1.

Более подробное рассмотрение свойств лифтов приводит к следующему выводу: если τ_s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, есть дифференцируемая гомотопия кривых, соединяющих u_0 и u_1, то в G существует для любой такой точки x_0, что $\pi(x_0) = u_0$, непрерывная кривая [9] $\{a_s;\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ со свойством: $\tau_s(x_0) = \tau_0(x_0)a_s$ для любого s. Мы коротко выражаем этот факт, говоря, что *параллельное перенесение непрерывно зависит от дифференцируемой гомотопии кривых в* B (о понятии дифференцируемой гомотопии см. следующий параграф).

§ 3. Группы голономии

С помощью понятия присоединенного к данной связности параллельного перенесения мы определим так называемую группу голономии данной связности. Рассмотрим произвольную точку $u \in B$. Пусть C_u есть множество всех (кусочно-дифференцируемых) замкнутых кривых, проходящих через u. Для каждой кривой $\tau \in C_u$ соответствующее параллельное перенесение τ представляет собой автоморфизм слоя G_u над точкой u, т. е. такое дифференцируемое преобразование слоя G_u, что выполняется равенство $\tau(xa) = \tau(x)a$ для любых $x \in G_u$ и $a \in G$. Множество всех таких автоморфизмов, соответствующих кривым $\tau \in C_u$, образует группу, которую мы будем называть *группой голономии* Φ_u данной связности в точке $u \in B$.

Если зафиксировать некоторый элемент x слоя G_u, то можно отождествить Φ_u с некоторой подгруппой структурной группы G. Именно, каждому элементу $\tau \in \Phi_u$ мы сопоставляем (единственный) элемент $a \in G$, такой, что $\tau(x) = R_a \cdot x$. Если мы имеем $\tau'(x) = R_{a'} \cdot x$ для $\tau' \in \Phi_u$, то получаем

$$(\tau\tau')(x) = \tau(R_{a'} \cdot x) = R_{a'} \cdot \tau(x) = R_{a'} \cdot R_a x = R_{aa'} \cdot x.$$

Это означает, что элемент $aa' \in G$ сопоставляется элементу $\tau\tau' \in \Phi_u$. Итак, мы получаем гомоморфизм группы голономии Φ_u в группу G; нетрудно проверить, что он оказывается изоморфизмом. Образ группы Φ_u при этом изоморфизме называется *группой голономии* Φ_x *с опорной точкой* x. Мы можем определить группу Φ_x непосредственно, именно, следующим образом: группа Φ_x есть подгруппа группы G, состоящая из всех таких элементов $a \in G$, для которых точки x и $x \cdot a$ могут быть соединены горизонтальной кривой в P.

В самом деле, если точка xa соединена с точкой x горизонтальной кривой τ^*, то проекция τ кривой τ^* есть замкнутая кривая, проходящая через $u \in B$, лифт которой есть τ^*; но тогда $\tau(x) = x \cdot a$ и, следовательно, $a \in \Phi_x$. Обратно, если $a \in \Phi_x$, то существует такая кривая $\tau \in C_u$, что выполняется равенство $\tau(x) = xa$. Это означает, что лифт τ^* кривой τ, проходящий через x, есть горизонтальная кривая, соединяющая точки x и xa.

Введем следующее обозначение, которым будем пользоваться в дальнейшем. Если существует горизонтальная кривая, соединяющая точки x и y многообразия P, то мы будем писать $x \sim y$. Ясно, что мы получаем таким образом соотношение эквивалентности. Более того, если $x \sim y$, то $xa \sim ya$ для любого элемента $a \in G$.

Если мы возьмем другую опорную точку $y = xb \in G_u$, то Φ_y окажется подгруппой группы G, сопряженной с Φ_x. В самом деле, если $a \in \Phi_x$, т. е. $x \sim xa$, то мы имеем

$$xb \sim xab \sim xb(b^{-1}ab), \quad \text{т. е.} \quad y \sim yb^{-1}ab.$$

Следовательно, $b^{-1}ab \in \Phi_y$. Таким образом, $b^{-1}\Phi_x b = \Phi_y$, если $y = xb$.

С другой стороны, если мы возьмем другую точку v в базе B и рассмотрим группу голономии Φ_v в точке v, то она будет изоморфна группе голономии Φ_u. В самом деле, возьмем произвольную точку x над u и кривую μ, соединяющую u и v. Рассмотрим Φ_x и Φ_y, где $y = \mu \cdot x$; мы легко усматриваем, что они изоморфны. С подобной ситуацией мы сталкиваемся, определяя фундаментальную группу [13]) пространства.

Перейдем теперь к определению суженной группы голономии [41]). Пусть C_u^0 есть множество всех замкнутых кривых, проходящих через точку u и гомотопных 0 [14]). Этому множеству кривых будет соответствовать подгруппа группы голономии Φ_u; эту подгруппу мы будем называть *суженной группой голономии в точке u* и обозначать символом Φ_u^0. Для каждой опорной точки x мы получаем подобным же образом суженную группу голономии Φ_x^0, подгруппу группы Φ_x.

Теорема. *Пусть B удовлетворяет второй аксиоме счетности. Суженная группа голономии Φ^0 представляет собой тогда связную группу Ли, совпадающую с линейно связной* [10]) *компонентой единичного элемента группы голономии Φ; при этом Φ/Φ^0 не более чем счетно.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, мы сделаем несколько замечаний относительно кривых и гомотопии в B. Гомотопия [12]) τ_s между двумя непрерывными кривыми τ_0 и τ_1 определяется с помощью непрерывного отображения (с обычными свойствами) произведения $I \times I$ в B, где I — замкнутый интервал $[0, 1]$. *Дифференцируемая гомотопия* определяется для кусочно-дифференцируемых кривых как кусочно-дифференцируемое гомотопическое отображение. Мы предоставляем читателю доказательство следующих двух предложений:

(1) *Две гомотопные друг другу кусочно-дифференцируемые кривые дифференцируемо гомотопны.*

(2) *Для каждой непрерывной кривой в B найдется гомотопная ей кусочно-дифференцируемая кривая.*

Из этих предложений следует, что фундаментальная группа $\pi^1(B)$ [13]) многообразия B может быть определена с помощью кусочно-дифференцируемых замкнутых кривых и дифференцируемой гомотопии. Если B удовлетворяет второй аксиоме счетности, то $\pi^1(B)$ содержит не более чем счетное число элементов.

Переходим к доказательству теоремы. Пусть Φ и Φ^0 будут соответственно группа голономии и суженная группа голономии с опорной точкой x. Так как каждая кривая $\tau \in C_u^0$, определяющая некоторый элемент группы Φ^0, дифференцируемо гомотопна 0 и так как параллельное перенесение непрерывно зависит от дифференцируемой гомотопии (§ 2), то мы видим, что любой элемент суженной группы голономии Φ^0 может быть соединен с единичным элементом непрерывной кривой, лежащей в Φ^0. По теореме Курaниси — Ямабе (On an arc-wise connected subgroup of a Lie group, *Osaka Math. J.*, **2** (1950), 13—14) суженная группа голономии Φ^0 оказывается связной подгруппой Ли группы G.

Пусть, с другой стороны, Φ_0 есть линейно связная компонента единичного элемента группы Φ. Ясно, что $\Phi^0 \subset \Phi_0 \cdot \Phi_0$ оказывается связной группой Ли в силу тех же причин, что и Φ^0. Отобразим каждую кривую $\tau \in C_u$ в соответствующий элемент группы Φ. Мы получаем, таким образом, отображение $\pi^1(B)$ на Φ/Φ^0. Так как $\pi^1(B)$ не более чем счетно, то Φ/Φ^0 и (тем более) Φ_0/Φ^0 не более чем счетны. Это означает, что Φ^0 есть открытая подгруппа группы Φ_0 и, следовательно, совпадает с Φ_0. Теорема доказана.

§ 4. Форма кривизны и структурное уравнение

Пусть ω — форма связности данной связности Γ в P. *Ковариантный дифференциал* дифференциальной формы α порядка p на P (со значениями в любом векторном пространстве) определяется равенством

$$(D\alpha)(X_1, X_2, \ldots, X_{p+1}) = (d\alpha)(hX_1, hX_2, \ldots, hX_{p+1})$$

для любых векторных полей X_i, $i = 1, 2, \ldots, p+1$, на P, где d обозначает обычный внешний дифференциал, а h — горизонтальную компоненту.

Определение. $\Omega = D\omega$ называется *формой кривизны* связности Γ.

Ω представляет собой, таким образом, $\mathfrak{g}$-значную 2-форму на P. Форма кривизны обладает свойством:

$$R_a^* \cdot \Omega = \mathrm{ad}(a^{-1})\,\Omega \text{ для любого } a \in G.$$

Форма с подобным свойством называется ($\mathfrak{g}$-значной) формой типа $\operatorname{ad}(G)$. Форма кривизны Ω есть форма типа $\operatorname{ad}(G)$, так же как и сама форма связности ω. Это можно доказать, применяя к этим формам формулу $R_a^* \cdot d = d \cdot R_a^*$ и используя тот факт, что $R_a \cdot h \cdot X = h \cdot R_a \cdot X$ для любого векторного поля X на P.

Прежде чем устанавливать структурное уравнение, докажем предварительно следующую лемму:

Лемма. *Если A^* — фундаментальное векторное поле, а X^* — горизонтальное векторное поле, то векторное поле $[X^*, A^*]$ горизонтально.*

Доказательство. Фундаментальное векторное поле A^* индуцируется группой R_{a_t}, где a_t — однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная соответствующим элементом $A \in \mathfrak{g}$. В силу теоремы § 2 главы I, мы имеем

$$[X^*, A^*] = \lim_{t \to 0} \frac{R_{a_t} \cdot X^* - X^*}{t},$$

где при всяком t векторное поле $R_{a_t} \cdot X^*$ горизонтально вместе с X^*. Следовательно, $[X^*, A^*]$ горизонтально.

Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема (*структурное уравнение*). *Имеет место уравнение*

$$(d\omega)(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y)$$

для любых векторных полей X и Y на P; скобка в правой части обозначает скобочную операцию в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Каждый член уравнения представляет собой $\mathfrak{g}$-значную 2-форму на P. Поэтому достаточно доказать уравнение в следующих трех случаях:

1) X и Y горизонтальны; в этом случае $\omega(X) = \omega(Y) = 0$ и уравнение сводится к определению формы Ω.

2) X и Y оба фундаментальны, $X = A^*$ и $Y = B^*$, где $A, B \in \mathfrak{g}$; в этом случае мы применяем формулу

$$2\, d\omega(X, Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y])$$

(теорема из § 3 главы I). Мы видим, что функция $\omega(B^*) = B$ оказывается постоянной, и поэтому $A^* \cdot \omega(B^*) = 0$. Аналогично $B^* \cdot \omega(A^*) = 0$. Следовательно, мы получаем

$$2\,d\omega(A^*,\ B^*) = -\omega([A^*,\ B^*]) = -\omega([A,\ B]^*) = -[A,\ B].$$

Это и доказывает структурное уравнение, ибо, с другой стороны, $\Omega(A^*,\ B^*) = 0$.

3) X горизонтально, а $Y = A^*$ фундаментально. Применяя снова прежнюю формулу, мы получаем

$$2\,d\omega(X,\ A^*) = X \cdot \omega(A^*) - A^* \cdot \omega(X) - \omega([X,\ A^*]).$$

Функция $\omega(A^*) = A$ постоянна; следовательно, $X \cdot \omega(A^*) = 0$. Член $\omega(X)$ равен 0 в силу горизонтальности X, $[X,\ A^*]$ горизонтально в силу предыдущей леммы; следовательно, $\omega([X,\ A^*]) = 0$. Поэтому $d\omega(X,\ A^*) = 0$. С другой стороны, правая часть структурного уравнения также равна 0. Этим структурное уравнение полностью доказано. Если применить формулу

$$2\,d\omega(X,\ Y) = X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X,\ Y])$$

в случае, когда X и Y оба горизонтальны, из структурного уравнения будет следовать, что $\omega([X,\ Y]) = -2\Omega(X,\ Y)$. Это значит, что если вертикальная компонента поля $[X,\ Y]_x$ в точке $x \in P$ есть $(A^*)_x$, $A \in \mathfrak{g}$, то $A = -2\Omega_x(X,\ Y)$.

Следствие. *Если X и Y — горизонтальные векторные поля, то вертикальная компонента скобки $[X,\ Y]$ равна $-2\Omega(X,\ Y)$.*

Это следствие выясняет важное свойство формы кривизны, которое окажется существенным при доказательстве теоремы о голономии в § 7.

§ 5. Гомоморфизм связностей

Напомним понятие гомоморфизма f одного главного расслоенного многообразия $P(B,\ G)$ в другое главное расслоенное многообразие $P'(B,\ G')$ над той же самой базой B: имеется такой гомоморфизм, обозначаемый той же буквой f, группы G в группу G', что для любых $x \in P$ и $a \in G$ имеет место равенство $f(xa) = f(x)f(a)$ и индуцированное отображение f базы B в себя является дифференцируемым преобразованием базы B (§ 8 главы I).

Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Гомоморфизм f главного расслоенного многообразия $P(B, G)$ в главное расслоенное многообразие $P'(B, G')$ отображает связность Γ, заданную в P, в связность Γ', заданную в P'; при этом f отображает горизонтальные подпространства связности Γ в горизонтальные подпространства связности Γ'.*

Доказательство. Определим прежде всего горизонтальное подпространство $Q_{x'}$ в каждой точке x' из $f(P)$. Возьмем произвольную точку x из P, такую, что $f(x)=x'$; мы определим $Q_{x'}$ как образ горизонтального подпространства Q_x многообразия P при отображении f. Покажем, что $Q_{x''}$ не зависит от выбора точки x со свойством $f(x)=x'$. Пусть y — некоторая другая точка, для которой $f(y)=x'$. Так как отображение f есть гомоморфизм, то точки x и y должны лежать в одном и том же слое многообразия P; найдется поэтому такой элемент $a \in G$, что будет иметь место равенство $y=xa$. Тогда мы получим $f(y)=f(x)\cdot f(a)=f(x)$; следовательно, $f(a)$ есть единичный элемент e' группы G'. Так как $Q_y=R_a\cdot Q_x$, то мы получаем

$$f\cdot Q_y=f\cdot R_a\cdot Q_x=R_{f(a)}\cdot f\cdot Q_x=f\cdot Q_x,$$

что и требовалось доказать. Заметим попутно следующий факт. Если $y=xc$, то $Q_{y'}=R_{c'}\cdot Q_{x'}$, где $x'=f(x)$, $y'=f(y)$ и $c'=f(c)$.

Теперь мы определим горизонтальное подпространство в любой точке многообразия P'. Произвольная точка x'' из P'' может быть представлена в виде $x''=x'\cdot a'$, где $x'=f(x)$ есть некоторая точка из $f(P)$ и $a' \in G'$. Мы определяем $Q_{x''}$ как $R_{a'}\cdot Q_{x'}$, где $Q_{x'}$ было определено выше. Мы должны показать, что $Q_{x''}$ не зависит от выбора представления $x''=x'\cdot a'$, $x' \in f(P)$; это нетрудно сделать, используя сделанное выше замечание. Итак, мы определили горизонтальное подпространство в каждой точке многообразия P'. Проверим, что построенное горизонтальное подпространство определяет некоторую связность в многообразии P'; тогда свойство, сформулированное в теореме, будет очевидным по построению.

Покажем, что в каждой точке x' из P' касательное пространство $P'_{x'}$ есть прямая сумма касательного подпространства $Q_{x'}$ и касательного к слою подпространства $G'_{x'}$. Мы можем написать $x' = f(x)$, где x — некоторая точка из P. Обозначим буквами π и π' канонические проекции соответственно многообразий P и P' на базу B. Эти проекции связаны с отображением f соотношением $f \cdot \pi = \pi' \cdot f$. В силу того, что f порождает линейный изоморфизм касательного пространства T_u, $u = \pi(x)$ на $T_{u'}$, $u' = f(u) = \pi'(x')$, мы видим, что π' отображает $Q_{x'}$ на $T_{u'}$ и, следовательно, $\dim Q_{x'} = n$, где n есть размерность многообразия B. С другой стороны, пересечение $Q_{x'}$ и $G'_{x'}$ состоит только из 0. В самом деле, если $X' = f(X)$, $X \in Q_x$, и в то же время X' принадлежит $G'_{u'}$, то мы имеем $\pi' \cdot X' = f \cdot \pi(X) = 0$ в $T_{u'}$, откуда следует, что $\pi(X) = 0$ в T_u. Но это означает, что $X = 0$ и, следовательно, $X' = 0$ в силу того, что π отображает Q_x на T_u изоморфно. Тем самым доказано, что $P'_{x'}$ есть прямая сумма $Q_{x'}$ и $G'_{x'}$. Остальные условия проверяются без труда. Теорема доказана.

Обратно, если на P и P' заданы соответственно связности Γ и Γ' и если некоторый гомоморфизм f отображает Γ в Γ' так, как это описано в заключении доказанной теоремы, то мы будем называть гомоморфизм f *сохраняющим связность* (по отношению к Γ и Γ').

В случае, когда f есть вложение P в P', мы будем говорить, что заданная в P' связность Γ' *приводима* к некоторой связности Γ в P, если f отображает Γ в Γ'. В случае, когда f есть автоморфизм расслоенного многообразия P на себя, отображающий данную связность Γ в себя, мы будем называть f *автоморфизмом связности* Γ в P.

В условиях доказанной теоремы гомоморфизм f порождает естественный гомоморфизм группы голономии Φ связности Γ в группу голономии Φ' связности Γ'. В самом деле, рассмотрим горизонтальную кривую, соединяющую точки x_0 и $x_0 a$, где $a \in \Phi$; образ этой кривой при отображении f есть горизонтальная кривая, определяющая элемент $f(a) \in \Phi'$. Легко проверить, что мы получаем таким образом гомоморфизм группы голономии Φ *на* Φ'.

§ 6. Теорема о приведении связностей

Мы докажем следующую теорему, называемую *теоремой о приведении связностей.*

Теорема. *Пусть $P(B, G)$ есть главное расслоенное многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, и Φ — группа голономии заданной в P связности* Γ. *Тогда структурная группа G приводима к своей подгруппе Φ, а связность Γ приводима к связности в приведенном расслоенном многообразии $P'(B, \Phi)$, группа голономии которого совпадает с Φ.*

Доказательство. Если P удовлетворяет второй аксиоме счетности, то тем же свойством будут обладать B и G. Следовательно, применима теорема из § 3. Зафиксируем произвольно точку x_0 многообразия P, которую мы выберем в качестве опорной точки группы голономии Φ; положим $\pi(x_0) = u_0$. Прежде всего мы покажем, что G приводима к Φ. Построим покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия B и множество соответствующих переходных функций, принимающих значения из Φ (теорема из § 8 главы I). С этой целью мы возьмем произвольное покрытие $\{U_\alpha\}$ многообразия B, каждый элемент U_α которого представляет собой некоторую кубическую окрестность $|u^i| < \delta$ с центром $u_\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$ относительно некоторой системы локальных координат $(u^1, \ldots, u^n)$. Выберем в B раз и навсегда семейство кривых τ_α, каждая из которых начинается в точке u_0 и кончается в соответствующей точке u_α. Пусть $x_\alpha = \tau_\alpha \cdot x_0$ есть образ точки x_0 при параллельном перенесении вдоль τ_α.

Теперь мы определим для каждого α изоморфизм множеств $\pi^{-1}(U_\alpha)$ и $U_\alpha \times G$. Пусть x — произвольная точка из $\pi^{-1}(U_\alpha)$; мы обозначим символом ρ_α луч (относительно локальных координат в U_α) из точки u_α в точку $u = \pi(x) \in U_\alpha$.

Параллельное перенесение точки x вдоль ρ_α^{-1} дает точку $\rho_\alpha^{-1}(x) = x_\alpha \cdot a$, где a есть некоторый элемент группы G; мы полагаем $\varphi_\alpha(x) = a$. Теперь нетрудно видеть, что отображение $x \to (\pi(x), \varphi_\alpha(x))$ есть изоморфизм множества $\pi^{-1}(U_\alpha)$ на $U_\alpha \times G$. Соответствующие переходные функции $\psi_{\beta\alpha}(u)$, $u \in U_\alpha \cap U_\beta$ принимают значения из Φ. Действительно, если $x \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta$, то пусть $\varphi_\alpha(x) = a$ и $\varphi_\beta\, x) = b$, откуда $x \sim x_\alpha a \sim x_\beta b$. Из этих соотношений и из $x_0 \sim x_\alpha \sim x_\beta$ мы легко заключаем, что $x_0 \sim x_0 \cdot ba^{-1}$; но это значит, что ba^{-1} принадлежит группе голономии Ф. Следовательно,

$$\psi_{\beta\alpha}(u) = \varphi_\beta(x)(\varphi_\alpha(x))^{-1}$$

лежит в Ф.

Тем самым показано, что G приводима к Ф. В самом деле, мы можем построить in abstracto дифференцируемое расслоенное многообразие $P'(B, \Phi)$, как мы это делали в § 8 главы I. В нашем случае можно следующим образом построить $P'(B, \Phi)$ как расслоенное подмногообразие многообразия $P(B, G)$. Точка многообразия $P'(B, \Phi)$, соответствующая классу (u, a), где $u \in U_\alpha$ и $a \in \Phi$, отображается в точку $x = \rho_\alpha \cdot (x_\alpha a)$. Ясно, что это отображение f есть вложение P' в P. Покажем, что $f(P')$, расслоенное подмногообразие многообразия P, совпадает с множеством всех таких точек из P, каждая из которых может быть соединена с x_0 некоторой горизонтальной кривой. Если $a \in \Phi$, то мы имеем $x_0 \sim x_0 a$. В силу соотношения $x_\alpha \sim x_0$ мы получаем $x \sim x_\alpha a \sim x_0 a \sim x_0$, откуда следует, что каждая точка из $f(P')$ может быть соединена с точкой x_0 некоторой горизонтальной кривой. Столь же легко устанавливается и обратное утверждение.

Используя доказанный факт, мы убедимся теперь, что связность Г в P приводима к некоторой связности Г$'$ в P'. Действительно, пусть точка x принадлежит многообразию $f(P')$, которое мы теперь отождествляем с P'; тогда горизонтальное подпространство Q_x связности Г полностью лежит в касательном пространстве многообразия P', так как каждый горизонтальный вектор в точке x представляет собой касательный вектор некоторой горизонтальной кривой с начальной точкой x; эта кривая должна лежать в P'. После этих замечаний несложно проверить, что отображение $x \in P' \to Q_x \subset P'_x$ определяет некоторую связность Г$'$ в P' и что вложение f отображает Г$'$ в Г. Этим доказано, что связность Г приводима к связности Г$'$. Справедливость последнего утверждения теоремы очевидна, так как P' состоит из точек, каждая из которых может быть соединена с точкой x_0 некоторой кривой, горизонтальной относительно Г, а следовательно и относительно Г$'$. Теорема доказана.

Теорема о приведении связностей будет использована в следующем параграфе для сравнительно простого доказательства теоремы о голономии; она находит и другие многочисленные применения.

§ 7. Теорема о голономии

Рассмотрим группу голономии Φ с базисной точкой x_0 связности Γ в $P(B, G)$. Мы видели в § 3, что группа голономии Φ представляет собой группу Ли с линейно связной компонентой, являющейся суженной группой голономии Φ^0. Следующая теорема, впервые строго доказанная Амброзом и Сингером [1], устанавливает, как *алгебра голономии*, т. е. алгебра Ли суженной группы голономии Φ^0, определяется формой кривизны.

Теорема о голономии. *Алгебра голономии $\mathfrak{k}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$, порожденной всеми элементами вида $\Omega_x(X^*, Y^*)$, где x пробегает множество точек, каждая из которых может быть соединена с x_0 некоторой горизонтальной кривой, а X^* и Y^* — произвольные горизонтальные векторы в точке x.*

Доказательство. Для начала мы докажем теорему в том частном случае, когда любая точка из P может быть соединена с точкой x_0 некоторой горизонтальной кривой. В этом случае группа голономии совпадает с G. Рассмотрим два произвольных векторных поля X и Y в B; обозначим их лифты соответственно X^* и Y^*. Множество векторных полей

$$A = \omega_x([X^*, Y^*]) = -2\Omega_x(X^*, Y^*)$$

(см. § 4, следствие), соответствующих всем $x \in P$ и всем X, Y, порождает подалгебру $\mathfrak{g}'$ алгебры $\mathfrak{g}$. Мы докажем, что $\mathfrak{g}'$ совпадает с $\mathfrak{g}$ и представляет собой алгебру голономии.

Построим в каждой точке $x \in P$ подпространство Δ_x касательного пространства P_x, натянутое на горизонтальное подпространство Q_x и подпространство $\mathfrak{g}'_x = \{A^*_x;\ A \in \mathfrak{g}'\}$, где A^* есть фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу $A \in \mathfrak{g}'$. Если

$$\dim B = n, \quad \dim \mathfrak{g} = r \quad \text{и} \quad \dim \mathfrak{g}' = s,$$

то Δ_x представляет собой касательное подпространство размерности $n+s$. Мы докажем несколько позднее, что распределение $x \to \Delta_x$ дифференцируемо и инволютивно. Примем на минуту, что это утверждение доказано. Пусть $P(x_0)$ есть максимальное интегральное многообразие рассматриваемого распределения, проходящее через точку x_0. Как мы сейчас увидим, $P(x_0)=P$, откуда следует, что

$$\dim P(x_0)=n+s=\dim P=n+r,$$

т. е. $r=s$; следовательно, $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}$. Чтобы показать, что $P(x_0)=P$, достаточно просто заметить, что каждая точка из P по предположению лежит на некоторой горизонтальной кривой, проходящей через x_0; эта кривая должна лежать в $P(x_0)$, так как распределение содержит любое горизонтальное подпространство Q_x.

Чтобы доказать, что Δ дифференцируемо, возьмем в $\mathfrak{g}'$ базис $A_1, \ldots, A_s$. Пусть A_i^* — фундаментальные векторные поля, соответствующие элементам выбранного базиса. В любой окрестности U в B, для которой $\pi^{-1}(U)$ изоморфно произведению $U \times G$, мы можем выбрать n векторных полей $X_1, \ldots, X_n$ в многообразии B, на которые натянуто касательное пространство T_u в каждой точке $u \in U$. Тогда горизонтальное подпространство Q_x оказывается натянутым в каждой точке $x \in \pi^{-1}(U)$ на лифты $X_1^*, \ldots, X_n^*$. С другой стороны, в каждой точке $x \in \pi^{-1}(U)$ пространство $\{(A^*)_x;\ A \in \mathfrak{g}'\}$ натянуто на $A_1^*, \ldots, A_s^*$. Тем самым показано, что распределение Δ допускает локальный базис

$$A_i^*,\ X_j^*, \qquad i=1, 2, \ldots, s, \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

везде в $\pi^{-1}(U)$. Чтобы доказать инволютивность распределения Δ, достаточно убедиться в том, что скобки

$$[A_i^*, A_j^*],\ [A_i^*, X_j^*] \text{ и } [X_i^*, X_j^*]$$

принадлежат Δ. Первая из скобок принадлежит Δ в силу того, что $\mathfrak{g}'$ есть подалгебра. Вторая скобка горизонтальна (§ 4, лемма) и потому принадлежит Δ. Вертикальная составляющая третьей скобки в точке x равна A_x^*, где

$$A=\omega_x([X_i^*, X_j^*])=-2\Omega_x(X_i^*, X_j^*)\in \mathfrak{g}'.$$

Поэтому $v[X_i^*, X_j^*]$ принадлежит Δ, а следовательно, и $[X_i^*, X_j^*]$. Итак, доказано, что распределение Δ дифференцируемо и инволютивно.

Переходим к общему случаю. Рассмотрим приведенное расслоенное многообразие $P'(B, \Phi)$ с приведенной связностью Γ' (§ 6). Нам уже известно, что теорема верна для связности Γ' в P'. Чтобы доказать теорему для многообразия P, достаточно заметить, что группа голономии и, следовательно, алгебра голономии связности Γ совпадают соответственно с группой и алгеброй голономии связности Γ' и что множество $\Omega_x(X^*, Y^*)$, о котором идет речь в формулировке теоремы, совпадает с множеством $\Omega'_x(X^*, Y^*)$ для P', где Ω' есть форма кривизны связности Γ'. Первый из упомянутых фактов уже доказан. Второй же следует из того, что

$$\Omega'_x(X^*, Y^*) = \Omega_x(X^*, Y^*)$$

для любой точки $x \in P'$ и для лифтов X^*, Y^* любых двух векторных полей X, Y в B.

Замечание. В действительности линейное подпространство $\mathfrak{m}$ пространства $\mathfrak{g}$, натянутое на всевозможные $\Omega_x(X^*, Y^*)$, образует подалгебру; в силу доказанной теоремы она представляет собой алгебру голономии. Это было замечено Лихнеровичем и доказано независимо от него Одзеки. Действительно, из свойства $R_a^* \cdot \Omega = \mathrm{ad}(a^{-1})\,\Omega$ для $a \in G$ вытекает, что линейное подпространство $\mathfrak{m}$ инвариантно относительно отображения $\mathrm{ad}(\Phi)$. Следовательно, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, поэтому и подавно $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$; таким образом, $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}$.

§ 8. Локально плоская связность

Рассмотрим тривиальное главное расслоенное многообразие

$$P(B, G) = B \times G.$$

Тогда

$$P = \bigcup_{a \in G} Q_a,$$

где Q_a есть подмногообразие многообразия P, состоящее из всех точек вида (u, a), $u \in B$. Связность в P называется *плоской*, если в качестве горизонтального подпространства в точке $x = (u, a) \in P$ взято касательное пространство подмногообразия Q_a. В этом случае, очевидно, форма кривизны равна 0.

Связность в произвольном расслоенном многообразии $P(B, G)$ называется *локально плоской*, если для каждой точки $u \in B$ найдется такая окрестность U, что индуцированная связность в $\pi^{-1}(U)$ будет изоморфна плоской связности в $U \times G$.

Теорема. *Для того чтобы связность в $P(B, G)$ была локально плоской, необходимо и достаточно, чтобы форма кривизны равнялась* 0.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Чтобы доказать достаточность, предположим, что форма кривизны равна 0. Для любой точки $u \in B$ мы выбираем односвязную окрестность U и рассматриваем индуцированную связность в $\pi^{-1}(U)$. По теореме о голономии, § 7, группа голономии этой связности состоит только из единичного элемента. В силу теоремы о приведении, § 6, мы заключаем, что эта связность тривиальна. Теорема доказана.

Следствие. Пусть $P(B, G)$ есть главное расслоенное многообразие с односвязной базой B. Если P допускает локально плоскую связность, то P есть прямое произведение $B \times G$.

§ 9. Существование связностей

Вероятно, можно многими способами доказать существование связностей в произвольном главном расслоенном многообразии $P(B, G)$, удовлетворяющем второй аксиоме счетности. Мы изберем такой путь: предположив, что структурная группа G связна, мы выведем существование некоторой связности в $P(B, G)$ из теоремы о существовании римановой метрики на дифференцируемом многообразии.

Пусть K есть максимальная компактная подгруппа группы G. Тогда, как известно, структурная группа G многообразия $P(B, G)$ может быть приведена к K ([19], стр. 74). Пусть $P'(B, K)$ обозначает приведенное расслоенное многообразие. Если существует связность в $P'(B, K)$, она, как мы видели выше (теорема § 5), индуцирует связность в $P(B, G)$. Следовательно, достаточно доказать существование связностей в $P(B, G)$, где группа G компактна.

Так как мы предположили, что P удовлетворяет второй аксиоме счетности, на P может быть введена риманова метрика (§ 4 главы I). Внутреннее произведение двух касательных векторов X и Y относительно этой римановой метрики мы обозначим символом $g(X, Y)$. Теперь мы определим новую риманову метрику, инвариантную относительно отображения R_a, $a \in G$, положив

$$g^*(X, Y) = \int_G g(R_a \cdot X, R_a \cdot Y)\, da,$$

где интеграл берется относительно биинвариантной меры Хаара [42]) на компакте G, удовлетворяющей условию $\int_G da = 1$.

Теперь в каждой точке $x \in P$ мы введем ортогональное дополнение Q_x касательного к слою подпространства G_x относительно римановой метрики $g^*(X, Y)$. Очевидно, $P_x = G_x + Q_x$ (прямая сумма) [21]). Так как $g^*(X, Y)$ R_a-инвариантно при любом $a \in G$, мы заключаем, что $Q_{xa} = R_a \cdot Q_x$. Легко проверить дифференцируемость отображения $x \to Q_x$. Следовательно, отображение $x \to Q_x$ определяет связность в $P(B, G)$.

Известный интерес может представить тот факт, что в случае компактности G всякая связность в $P(B, G)$ может быть получена описанным путем. Пусть в P задана некоторая связность $\Gamma : x \to Q_x$. Выберем в базе B произвольную риманову метрику g и определим внутреннее произведение в каждом Q_x с помощью равенства

$$g^*(X, Y) = g(\pi X, \pi Y).$$

Если $a \in G$, то

$$g^*(R_a \cdot X, R_a \cdot Y) = g(\pi \cdot R_a \cdot X, \pi \cdot R_a \cdot Y) = \\ = g(\pi X, \pi Y) = g^*(X, Y).$$

С другой стороны, пусть (A, B) есть некоторое $\mathrm{ad}(G)$—инвариантное внутреннее произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, существование которого следует из компактности группы G. Мы определим теперь внутреннее произведение в каждом касательном к слою подпространстве G_x с помощью метрики, определенной на $\mathfrak{g}$; именно, положив

$g^*\left(A^*_x, B^*_x\right) = (A, B)$ для любой точки $x \in P$. Для любого элемента $a \in G$ мы получаем

$$R_a \cdot A^*_x = (\mathrm{ad}(a^{-1}) A)^*_{xa}$$

(§ 7 главы I) и, следовательно,

$$g^*\left(R_a \cdot A^*_x, R_a \cdot B^*_x\right) = (\mathrm{ad}(a^{-1}) A, \mathrm{ad}(a^{-1}) B) = \\ = (A, B) = g^*\left(A^*_x, B^*_x\right).$$

Теперь мы определим непосредственно внутреннее произведение g^* в каждом касательном пространстве $P_x = G_x + Q_x$ при помощи внутренних произведений в G_x и Q_x, потребовав, чтобы G_x и Q_x были взаимно ортогональны. Построенная таким образом риманова метрика на P, очевидно, инвариантна относительно отображения R_a, $a \in G$. Тем самым наше утверждение доказано.

§ 10. Связности в присоединенных расслоенных многообразиях

Рассмотрим дифференцируемое главное расслоенное многообразие $P(B, G)$ и присоединенное расслоенное многообразие со стандартным слоем F, которое мы обозначим символом $E(B, F, G, P)$; мы предполагаем, что на присоединенном расслоенном многообразии группа G эффективна. Как мы видели выше (§ 9 главы I), точку $x \in P$ можно рассматривать как такое отображение многообразия F на слой F_u над $u = \pi(x)$, для которого $(xa) \cdot \xi = x \cdot (a\xi)$ при любых $a \in G$ и $\xi \in F$.

Связность в присоединенном расслоенном многообразии E определяется как распределение Q: $e \to Q_e$ размерности n ($= \dim B$) на E, удовлетворяющее следующим трем условиям:

1) $E_e = F_e + Q_e$ в каждой точке $e \in E$, где E_e есть касательное пространство в точке e к E, а F_e — подпространство, касательное к слою F_e, проходящему через точку e;

2) для каждой кривой u_t в B, соединяющей точки u_0 и u_1, найдется некоторая интегральная кривая e_t распределения Q, начинающаяся в произвольно заданной точке слоя F_{u_0} и накрывающая кривую u_t; кроме того, e_t

определяет изоморфизм слоя F_{u_0} на слой F_{u_1}, зависящий кусочно-дифференцируемым образом от t;

3) отображение $e \to Q_e$ дифференцируемо.

Мы видим, что в случае, когда E само есть главное расслоенное многообразие P, условие 2) оказывается следствием определения связности в P, данного в § 1. Мы увидим, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех связностей в P и множеством всех связностей в E; поэтому оказывается возможным ограничиться изучением связностей только в главном расслоенном многообразии. Определение связности в общих расслоенных многообразиях довольно сложно, так как оно включает сильное условие 2). Однако в приложениях оказывается удобным ввести понятие параллельного перенесения слоев, так как присоединенное расслоенное многообразие часто имеет в приложениях более прозрачный геометрический смысл, чем само главное расслоенное многообразие.

Теорема. *Существует естественное взаимно однозначное соответствие между множеством всех связностей в P и множеством всех связностей в E* (смысл термина *естественное соответствие* станет ясным из доказательства).

Доказательство. 1) Пусть задана связность в P; исходя из нее, мы построим связность в E. Рассмотрим произвольную точку e_0 из E; пусть $\pi(e_0) = u_0$. Выберем такую точку $x_0 \in P$, что $\pi(x_0) = u_0$. Найдется такая точка $\xi_0 \in F$, что $x_0 \cdot \xi_0 = e_0$, где x_0 рассматривается как отображение многообразия F на слой F_{u_0}. Зафиксировав этот элемент $\xi_0 \in F$, мы рассматриваем дифференцируемое отображение $x \in P \to x \cdot \xi_0$ многообразия P в E; при этом отображении слой G_{x_0} отображается в слой F_{u_0}. Определим касательное подпространство Q_{e_0} как образ горизонтального подпространства Q_{x_0} при построенном отображении. Покажем, что Q_{e_0} не зависит от выбора x_0 и ξ_0. Действительно, если вместо x_0 взять $x_0 a$ $(a \in G)$, мы получим $(x_0 a)(a^{-1}\xi_0) = e_0$. Теперь, в силу условия $R_a \cdot Q_x = Q_{xa}$, мы усматриваем, что отображение $x \in P \to x(a^{-1}\xi_0)$ переводит Q_{x_0} в Q_{e_0}.

Определив таким образом подпространство Q_{e_0} в каждой точке $e_0 \in E$, мы немедленно замечаем, что все касательное пространство E_{e_0} есть прямая сумма Q_{e_0} и подпространства, касательного к слою, проходящему через точку e_0. Проверим теперь условие 2) для связности в E. Для любой заданной в B кривой u_t, соединяющей точки u_0 и u_1, найдется горизонтальная кривая x_t в P с начальной точкой x_0, накрывающая u_t. Тогда кривая e_t в E, определенная равенством $e_t = x_t \cdot \xi_0$, будет, очевидно, представлять собой интегральную кривую распределения $e \to Q_e$, накрывающую u_t. Далее, e_t порождает изоморфизм слоя F_{u_0} на слой F_{u_1}, определяемый отображением

$$x_0 \cdot \xi \in F_{u_0} \to x_1 \cdot \xi \in F_{u_1},$$

где $x_1 = \tau(x_0)$, а τ — параллельное перенесение многообразия P вдоль кривой u_t. Условие 3) следует из теоремы § 1. Итак, отображение $e \to Q_e$ определяет связность в E.

2) Обратно, пусть задана связность в E; мы построим соответствующую ей связность в P. Возьмем в B произвольную кривую $\tau = \{u_t;\ 0 < t \leqslant 1\}$. Она определяет, по условию 2), семейство изоморфизмов слоя F_{u_0} на слой F_{u_t}, которое мы обозначим символом C_t. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in P$, для которой $\pi(x_0) = u_0$. Поскольку C_t есть семейство изоморфизмов, найдется такая кривая x_t в P, что $C_t(x_0 \cdot \xi) = x_t \cdot \xi$ для каждого элемента $\xi \in F$. Кривая x_t однозначно определяется кривой u_t и точкой x_0. Действительно, если y_t — другая кривая в P, для которой $y_0 = x_0$ и $C_t(x_0 \cdot \xi) = y_t \cdot \xi$ при всяком $\xi \in F$, то мы имеем $x_t \cdot \xi = y_t \cdot \xi$ для всякого $\xi \in F$. В силу предположенной эффективности группы G на F, последнее означает, что $x_t = y_t$. Кривая x_t представляет собой лифт кривой u_t по отношению к той связности в P, которую мы сейчас определим.

Именно, зафиксируем некоторую точку $x_0 \in P$ и положим $\pi(x_0) = u_0$. Определим Q_{x_0} как множество касательных векторов к кривым x_t, соответствующих вышеописанным образом всем кривым u_t с начальной точкой u_0 в B. Для любого элемента $a \in G$ мы имеем

$$C_t((x_0 a) \cdot \xi) = C_t(x_0 \cdot a\xi) = x_t \cdot (a\xi) = (x_t a) \cdot \xi.$$

Но это означает, что кривая, соответствующая u_t и проходящая через точку $x_0 a$, как раз есть $R_a \cdot x_t$. Отсюда следует, что $R_a \cdot Q_{x_0} = Q_{x_0 a}$. Теперь нетрудно показать, что $x \to Q_x$ есть связность в P, отправляясь от которой, можно получить исходную связность в E.

Полученное соответствие между связностями в P и E, очевидно, взаимно однозначно. Теорема доказана.

Если в E задана связность, мы можем определить ее группу голономии и суженную группу голономии точно так же, как это делалось для связностей в P. Каждой замкнутой кривой τ, проходящей через точку u_0 в B, соответствует некоторый автоморфизм τ слоя F_{u_0}. Множество всех таких автоморфизмов образует группу, которая является группой голономии данной связности в E. Выберем такую точку $x_0 \in P$, что $\pi(x_0) = u_0$; тогда любой элемент τ группы голономии определится равенством

$$\tau(x_0 \cdot \xi) = (x_0 a) \cdot \xi, \qquad \xi \in F,$$

где a — элемент группы G. Если мы положим $\varphi(\tau) = a$, то φ определит изоморфизм группы голономии в структурную группу G и т. д.

Группы голономии связностей в P и в E, соответствующих друг другу описанным образом, оказываются изоморфными.

§ 11. Примеры

1) Связности в $G(G/H, H)$. Рассмотрим связную группу Ли G и ее замкнутую подгруппу H. Мы знаем, что группу G можно рассматривать как главное расслоенное многообразие над базой G/H со структурной группой H, действующей на G правосторонним образом (§ 10 главы I). Обозначим символом L_a, $a \in G$, левый сдвиг группы G, порожденный элементом a. Так как L_a коммутирует с R_h, $h \in H$, мы обнаруживаем, что каждый левый сдвиг L_a представляет собой автоморфизм расслоенного многообразия $G(G/H, H)$. Сформулируем условия существования в $G(G/H, H)$ связностей, инвариантных относительно любого L_a, $a \in G$.

Для того чтобы в $G(G/H, H)$ существовала связность, инвариантная относительно левых сдвигов группы G, необходимо и достаточно, чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G обладала таким подпространством $\mathfrak{m}$, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ (прямая сумма) и $\operatorname{ad}(H)\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$, *где $\mathfrak{h}$ — подалгебра, определяемая подгруппой H а* $\operatorname{ad}(H)$ *обозначает присоединенное представление H в $\mathfrak{g}$. Точнее, мы можем определить инвариантную связность, взяв указанное подпространство $\mathfrak{m}$ в качестве горизонтального подпространства в единичном элементе группы G, и наоборот.*

По поводу доказательства и приложений см. [16]. Форма кривизны Ω инвариантной связности в $G(G/H, H)$ также инвариантна относительно левых сдвигов группы G; таким образом, она определяется своим значением в e: $\Omega_e(X, Y) \in \mathfrak{h}$, $X, Y \in \mathfrak{m}$. Читателю предоставляется в качестве упражнения установить вид $\Omega_e(X, Y)$.

2) Линейные связности. *Линейной связностью* на дифференцируемом многообразии B называется связность в расслоенном многообразии реперов $P(B, G)$, где $G = \mathrm{GL}(n, R)$. Так как структурная группа $\mathrm{GL}(n, R)$ может быть приведена к ортогональной группе ([19], стр. 72), то доказательство, проведенное в § 9, устанавливает существование линейных связностей на любом дифференцируемом многообразии, удовлетворяющем второй аксиоме счетности.

3) Аффинные связности. *Аффинной связностью* на дифференцируемом многообразии B называется связность в аффинном расслоенном многообразии $P(B, \widetilde{G})$ над B; понятие аффинного расслоенного многообразия мы сейчас определим.

Рассмотрим расслоенное многообразие реперов $P(B, G)$, где $G = \mathrm{GL}(n, R)$. Пусть $\widetilde{G}$ обозначает группу всех аффинных преобразований обычного аффинного пространства размерности n. Можно рассматривать группу G как подгруппу группы $\widetilde{G}$, состоящую из всех центроаффинных преобразований; группа $\widetilde{G}$ представляет собой полупрямое произведение [22]) G и абелевой инвариантной подгруппы F группы $\widetilde{G}$, состоящей из всех переносов. Каждый элемент $\widetilde{a} \in \widetilde{G}$ может быть записан единственным образом в виде $\widetilde{a} = s \cdot a$, где $s \in F$ и $a \in G$. Мы будем называть $s = \varphi(\widetilde{a})$ и $a = \psi(\widetilde{a})$ соответственно *трансляционной частью* и *однородной частью элемента* $\widetilde{a}$. ψ есть гомоморфизм $\widetilde{G}$ на G.

Теперь мы определим *аффинное расслоенное многообразие* $\widetilde{P}(B, \widetilde{G})$ как главное расслоенное многообразие над B, получающееся из $P(B, G)$ расширением структурной группы G до $\widetilde{G}$. Или подробнее, мы считаем, что G действует на $\widetilde{G}$ левосторонним образом, и строим расслоеииое многообразие со стандартным слоем $\widetilde{G}$, присоединенное к $P(B, G)$ (§ 9 главы I).

Так как G есть замкнутая подгруппа группы $\widetilde{G}$, то мы имеем вложение ι расслоенного многообразия P в $\widetilde{P}$. С другой стороны, гомоморфизм $\psi\colon \widetilde{G} \to G$ может быть расширен до гомоморфизма ψ расслоенного многообразия $\widetilde{P}$ на P. Заметим, что мы можем рассматривать многообразие $\widetilde{P}$ как прямое произведение P и F. В самом деле, при построении многообразия $\widetilde{P}$ как расслоенного многообразия со стандартным слоем $\widetilde{G}$, присоединенного к P, каждая точка $\widetilde{x} \in \widetilde{P}$ есть класс (при должным образом выбранном соотношении эквивалентности) элементов $(x, \widetilde{a}) \in P \times \widetilde{G}$; мы определяем f как отображение, переводящее $\widetilde{x}$ в $(x \cdot \psi(\widetilde{a}), \varphi(\widetilde{a})) \in P \times F$. Нетрудно проверить, что f есть изоморфизм многообразия $\widetilde{P}$ на прямое произведение $P \times F$.

Можно дать интерпретацию, геометрически более прозрачную. Именно, мы можем рассматривать аффинное расслоенное многообразие $\tilde{P}$ как главное расслоенное многообразие, присоединенное к касательному расслоенному многообразию $T(B)$, каждый слой которого (касательное пространство в каждой точке $u \in B$) наделен естественной аффинной структурой.

Примечания к главе II

1) Общее изложение теории связностей см. в [1], [2], [5], [7]. Удобная терминология (например, *горизонтальные векторы, кривые* и т. д.) заимствована нами из [1]. Теорема § 3 была впервые строго доказана в случае римановых связностей Борелем и Лихнеровичем (Borel-Lichnerowicz, Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes, C. R., Paris, **234** (1952), 1835—1837).

2) Понятие связностей использовалось также в когомологической теории главных расслоенных многообразий; см., например, [4] и [5].

3) Множество связностей в $P(B, G)$ есть *выпуклое множество* в следующем смысле: если $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(r)}$ — формы связности в P, то их выпуклая комбинация

$$\omega = \sum_{k=1}^{r} a_k \omega^{(k)}, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{r} a_k = 1, \quad a_k \geqslant 0,$$

есть также форма связности в P. Применяя понятие горизонтального подпространства, этому утверждению можно придать следующую форму. Пусть $Q_x^{(k)}$ — горизонтальное подпространство в точке $x \in P$ связности, определяемой формой $\omega^{(k)}$. Горизонтальное подпространство, определяемое формой ω, представляет собой множество всех касательных векторов в точке x вида

$$\sum_{k=1}^{r} a_k X^{(k)},$$

где $X^{(k)} \in Q_x^{(k)}$ и $\pi(X^{(k)}) = X$, причем X пробегает касательное пространство в точке $\pi(x) \in B$.

4) Имеет место теорема, обратная теореме о приведении связностей (§ 6):

Пусть $P(B, G)$ есть главное расслоенное многообразие; предположим, что структурная группа G приводима к связной подгруппе Ли H группы G. Тогда в P существует связность, суженная группа голономии которой совпадает с H.

Доказательство и подробности см. в [15], [9].

5) Теорема о существовании связностей (§ 9) может быть сформулирована как теорема о расширении данной локальной связности (см. [15]).

6) Относительно второй аксиомы счетности, выполнение которой предполагалось при доказательстве существования связностей, равно как и при доказательстве других важных теорем, приведем следующее предложение, принадлежащее Хано и Одзеки:

Если связное многообразие допускает линейную связность, то оно удовлетворяет второй аксиоме счетности.

7) Локальные и инфинитезимальные группы голономии связности в главном расслоенном многообразии были определены и исследованы в недавней работе Одзеки [17], обобщающей работу [13] в случае линейных связностей (см. примечание 4 к главе III).

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ

§ 1. Линейная связность

Пусть B — дифференцируемое многообразие размерности n и P — расслоенное многообразие реперов многообразия B; пусть структурная группа G расслоенного многообразия P представляет собой главную линейную группу $\mathrm{GL}(n, R)$ (§ 10 главы I). Мы помним, что каждая точка $x \in P$ порождает линейный изоморфизм некоторого n-мерного векторного пространства F на касательное пространство T_u многообразия B в точке $u = \pi(x)$. Расслоенное многообразие реперов представляет собой главное расслоенное многообразие со стандартным слоем F и структурной группой $G = \mathrm{GL}(n, R)$, присоединенное к касательному расслоенному многообразию $T(B)$ многообразия B.

Прежде всего мы определим на P 1-форму θ, принимающую значения из векторного пространства F. В каждой точке $x \in P$ положим $\theta_x(X) = x^{-1} \cdot \pi(X)$ для любого касательного вектора X, где x^{-1} — отображение, обратное линейному изоморфизму x пространства F на T_u, $u = \pi(x)$. $\pi(X)$ есть элемент касательного пространства T_u, а $\theta_x(X)$ есть элемент пространства F. Мы без труда усматриваем, что θ действительно представляет собой 1-форму, принимающую значения из F.

Форма θ удовлетворяет следующему условию:

$$R_a^* \cdot \theta = a^{-1} \cdot \theta$$

для любого элемента $a \in G$, т. е.

$$(R_a^* \cdot \theta)(X) = a^{-1} \cdot (\theta(X))$$

для любого касательного вектора X в P, где a^{-1} в правой части равенства обозначает преобразование пространства F, соответствующее элементу $a^{-1} \in G$. Справедливость этого утверждения следует из равенств

$$(R_a^* \cdot \theta)_x(X) = \theta_{xa}(R_a \cdot X) = (xa)^{-1} \cdot \pi(R_a \cdot X) = \\ = a^{-1} \cdot x^{-1} \cdot \pi(X) = a^{-1} \cdot \theta_x(X).$$

Определение. *Линейной связностью* на B называется связность в главном расслоенном многообразии P (или, что то же самое, связность в касательном расслоенном многообразии $T(B)$).

Пусть в P задана некоторая связность; теперь мы следующим образом введем определение *базисного векторного поля*. Рассмотрим произвольный элемент ξ из F. Определим в каждой точке $x \in P$ (единственный) горизонтальный вектор $(B(\xi))_x$, проектирующийся на $x \cdot \xi \in T_u$, $u = \pi(x)$. Сопоставляя каждой точке x соответствующий горизонтальный вектор, мы получаем векторное поле $B(\xi)$, которое будем называть *базисным векторным полем*, присоединенным к $\xi \in F$.

С помощью построенной выше формы θ мы получаем $\theta(B(\xi)) = \xi$ на P. Обратно, базисное векторное поле $B(\xi)$ может быть определено как (единственное) горизонтальное векторное поле на P, такое, что $\theta(B(\xi)) = \xi$ в каждой точке многообразия P. В силу свойства формы θ, выражаемого равенством $R_a^* \cdot \theta = a^{-1} \cdot \theta$, мы имеем

$$R_a \cdot B(\xi) = B(a^{-1} \cdot \xi)$$

для любых $a \in G$ и $\xi \in F$.

Другое важное свойство базисного векторного поля $B(\xi)$ состоит в том, что оно не имеет нулей при $\xi \neq 0$. Действительно, если $B(\xi)$ обращается в нуль в некоторой точке x из P, то

$$x \cdot \xi = \pi \cdot (B(\xi))_x = 0,$$

откуда следует, что $\xi = 0$, так как x представляет собой линейный изоморфизм.

Рассмотрим в векторном пространстве F фиксированный базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в котором G представляется группой матриц (a_j^i). Тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G также получает представление в виде алгебры Ли, образованной матрицами. Пусть A_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, есть базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Мы сейчас покажем, что фундаментальные векторные поля $\overset{*}{A}_{ij}$, i, $j = 1, 2, \ldots, n$, и базисные векторные поля $B(\xi_1)$, $B(\xi_2), \ldots, B(\xi_n)$ линейно независимы в каждой точке многообразия P. Прежде всего, фундаментальные векторные поля $\overset{*}{A}_{ij}$ линейно независимы между собой в любой точке, так как отображение

$$A \in \mathfrak{g} \to (A^*)_x$$

представляет собой линейный изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на вертикальное подпространство в этой точке. Множество фундаментальных векторных полей и множество базисных векторных полей линейно независимы между собой, так как все векторы первого множества вертикальны, а второго — горизонтальны. Наконец, базисные векторные поля $B(\xi_1)$, $B(\xi_2), \ldots, B(\xi_n)$ в любой точке линейно независимы по той причине, что если в некоторой точке равна нулю линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^{n} c_i B(\xi_i) = B\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i\right),$$

то

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_i = 0$$

и, следовательно, все c_i равны нулю. Заметим, что размерность многообразия P равна $n + n^2$. Таким образом, нами доказана

Теорема 1. *Существование связности в P имеет следствием полную параллелизуемость многообразия P.*

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 2. *Если векторное поле A^* фундаментальное, а $B(\xi)$ — базисное, то скобка $[A^*, B(\xi)]$ представляет собой базисное векторное поле $B(A \cdot \xi)$, где $A \cdot \xi$ обозначает образ точки ξ при отображении $A \in \mathfrak{g}$, действующем в пространстве F.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что если a_t есть однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная элементом $A \in \mathfrak{g}$, то мы имеем

$$A \cdot \xi = \lim_{t \to 0} \frac{a_t \cdot \xi - \xi}{t}.$$

Теперь мы применяем к $[A^*, B(\xi)]$ теорему § 2 главы I и получаем

$$[A^*, B(\xi)] = \lim_{t \to 0} \frac{B(\xi) - R_{a_t} \cdot B(\xi)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{B(\xi) - B\left(a_t^{-1} \cdot \xi\right)}{t}.$$

Так как отображение $\xi \to (B(\xi))_x$ представляет собой линейное и, следовательно, дифференцируемое отображение пространства F на горизонтальное подпространство Q_x, то написанное выше выражение равно

$$B\left(\lim_{t \to 0} \frac{\xi - a_t^{-1} \cdot \xi}{t}\right) = B(A \cdot \xi).$$

Но в этом и состоит утверждение теоремы.

Теорема 2 будет использована в следующем параграфе при выводе структурного уравнения; кроме того, она играет важную роль при изучении векторных полей на P.

§ 2. Форма кручения и структурные уравнения

В дополнение к введенной в § 4 главы II форме кривизны $\Omega = D\omega$, где ω есть форма связности, мы определим так называемую *форму кручения* линейной связности.

Определение. Форма $\Theta = D\theta$ называется ***формой кручения*** данной линейной связности.

Форма кручения Θ представляет собой 2-форму на P, принимающую значения из F и обладающую свойством

$$R_a^* \cdot \Theta = a^{-1}\Theta.$$

Последнее свойство легко проверяется непосредственно. В случае, если один из касательных векторов X и Y вертикален, $\Theta(X, Y) = 0$.

Мы имели связанное с формой кривизны структурное уравнение

$$(d\omega)(X, Y) = -\frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)] + \Omega(X, Y),$$

установленное нами в § 4 главы II. Теперь мы получим структурное уравнение, связанное с формой кручения. Именно, мы докажем следующее предложение:

Теорема (*дополнительное структурное уравнение*).

$$d\theta(X, Y) = \frac{1}{2}\{\omega(Y)\cdot\theta(X) - \omega(X)\cdot\theta(Y)\} + \Theta(X, Y)$$

для любых векторных полей на P, где $\omega(X)\cdot\theta(Y)$ обозначает результат применения $\omega(X)\in\mathfrak{g}$ к $\theta(Y)\in F$; аналогичный смысл имеет $\omega(Y)\cdot\theta(X)$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть следующие три случая.

1) Векторные поля X и Y фундаментальны: $X = A^*$, $Y = B^*$. Тогда правая часть структурного уравнения, очевидно, равна 0. Левая часть принимает вид

$$\frac{1}{2}\{A^*\cdot\theta(B^*) - B^*\cdot\theta(A^*) - \theta([A^*, B^*])\},$$

т. е. также оказывается равной 0.

2) X и Y горизонтальны; в этом случае структурное уравнение сводится к определению формы Θ.

3) $X = A^*$ фундаментально, а Y горизонтально; мы можем, кроме того, предположить, что $Y = B(\xi)$ есть базисное векторное поле. Правая часть структурного уравнения оказывается равной

$$-\frac{1}{2}\omega(A^*)\cdot\theta(B(\xi)) = -\frac{1}{2}A\cdot\xi.$$

Левая часть получает вид

$$\frac{1}{2}\{A^*\cdot\theta(B(\xi)) - B(\xi)\cdot\theta(A^*) - \theta([A^*, B(\xi)])\} = -\frac{1}{2}\theta([A^*, B(\xi)]);$$

но полученное выражение равно $-\frac{1}{2}A\cdot\xi$ в силу теоремы 2 (§ 1). Теорема доказана.

Рассмотрим два базисных векторных поля B_1 и B_2. Как мы уже видели, вертикальная составляющая скобки $[B_1, B_2]$ равна

$$\omega([B_1, B_2]) = -2\Omega(B_1, B_2).$$

Если теперь горизонтальная составляющая скобки $[B_1, B_2]$ в точке x оказывается равной $(B(\xi))_x$ для некоторого $\xi\in F$, то полученное структурное уравнение (второй случай) дает

$$\Theta(B_1, B_2) = d\theta(B_1, B_2) = \\ = \frac{1}{2}\{B_1 \cdot \theta(B_2) - B_2 \cdot \theta(B_1) - \theta([B_1, B_2])\},$$

т. е.

$$2\Theta_x(B_1, B_2) = -\theta_x(B(\xi)) = -\xi.$$

Следствие. *Если B_1 и B_2 — два произвольных базисных векторных поля, то горизонтальная составляющая скобки $[B_1, B_2]$ равна $-2\Theta(B_1, B_2)$.*

§ 3. Ковариантное дифференцирование

Как было показано в § 10 главы II, связность в главном расслоенном многообразии $P(B, G)$ порождает связность в любом присоединенном расслоенном многообразии и, следовательно, определяет параллельное перенесение слоев вдоль кривых в B. В силу этого, рассматривая линейную связность, мы приходим к понятию параллельного перенесения касательных векторов многообразия B вдоль кривых в B. Рассмотрим любую кривую τ, соединяющую в B точки u_0 и u_1. Параллельное перенесение вдоль τ представляет собой линейный изоморфизм касательных пространств T_{u_0} и T_{u_1}. Понятие линейной связности получает, таким образом, геометрическое истолкование.

Рассмотрим на многообразии B два векторных поля X и Y. Мы определим сейчас так называемую *ковариантную производную*, обозначаемую символом $\nabla_Y \cdot X$, векторного поля X относительно векторного поля Y. Рассмотрим произвольную точку $p \in B$; пусть u_t обозначает интегральную кривую векторного поля Y с начальным условием $u_0 = p$. Параллельное перенесение τ_t^{-1} вдоль этой кривой из точки u_t в точку u_0 (в направлении, соответствующем убыванию t) отображает X_{u_t} (значение векторного поля X в точке u_t) в касательный вектор $\tau_t^{-1} \cdot X_{u_t}$. Мы определяем $(\nabla_Y \cdot X)_p$ как касательный вектор в точке p, равный

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tau_t^{-1} \cdot X_{u_t} - X_p}{t}.$$

Ставя в соответствие каждой точке p касательный вектор $(\nabla_Y \cdot X)_p$, мы получаем векторное поле $\nabla_Y \cdot X$, которое мы будем называть ***ковариантной производной*** векторного поля X относительно векторного поля Y.

Воспользуемся теперь понятием расслоенного многообразия реперов P. Пусть y_0 — некоторая точка из P, для которой $\pi(y_0) = p$; пусть y_t обозначает горизонтальную кривую, накрывающую u_t. Тогда $\tau_t^{-1} \cdot X_{u_t}$ можно записать как $y_0 \cdot y_t^{-1} \cdot X_{u_t}$, где y_t^{-1} — отображение касательного пространства T_{u_t} на F, а y_0 — отображение F на T_p (см. § 10 главы II). Таким образом, мы получаем

$$(\nabla_Y \cdot X)_p = \lim_{t \to 0} \frac{y_0 \cdot y_t^{-1} X_{u_t} - X_p}{t}.$$

Получим теперь другое выражение для ковариантной производной $\nabla_Y \cdot X$. Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма. *Можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством векторных полей X на B и множеством дифференцируемых функций f на P, принимающих значения из F, таких, что*

$$f(xa) = a^{-1} \cdot f(x) \quad \textit{для любых} \quad x \in P \ \textit{и} \ a \in G.$$

Для этого достаточно положить

$$f(x) = \theta_x(X^*),$$

где X^* есть лифт векторного поля X относительно произвольной линейной связности.

Доказательство. Если X^* — лифт данного векторного поля X на B относительно какой-либо линейной связности, то в силу определения формы θ мы получаем

$$\theta_x(X^*) = x^{-1} \cdot \pi(X^*) = x^{-1} \cdot X_{\pi(x)}.$$

Следовательно, $f(x) = x^{-1} \cdot X_{\pi(x)}$ представляет собой дифференцируемую функцию на P, принимающую значения из F. Из равенств $R_a^* \cdot \theta = a^{-1} \cdot \theta$ и $R_a \cdot X^* = X^*$ следует, что $f(x)$ обладает свойством $f(xa) = a^{-1} \cdot f(x)$.

Обратно, любая функция $f: P \to F$, для которой $f(xa) = a^{-1} \cdot f(x)$, порождает векторное поле X, определяемое равенством $X_u = x \cdot f(x)$ и не зависящее от выбора точки x, если только $\pi(x) = u$. Ясно, что полученное соответствие взаимно однозначно.

С помощью доказанной леммы мы дадим другое определение ковариантной производной $\nabla_Y \cdot X$, эквивалентное первому. Пусть f — функция $P \to F$, соответствующая векторному полю X. Если Y^* — лифт векторного поля Y, то функция $Y^*f : P \to F$ снова того же типа, что и функция f. Действительно, мы имеем

$$(Y^*f)(xa) = (Y^*)_{xa} \cdot f = \left(R_a \cdot Y^*_x\right) f = Y^*_x\left(f \cdot R_a\right) = \\ = Y^*_x(a^{-1} \cdot f) = a^{-1} \cdot (Y^*f)(x).$$

В силу доказанной леммы функция Y^*f порождает векторное поле на B, которое, как мы сейчас убедимся, совпадает с $\nabla_Y \cdot X$. Имеем

$$\lim_{t \to 0} \frac{y_0 \cdot y_t^{-1} \cdot X_{u_t} - X_{u_0}}{t} = y_0 \cdot \lim_{t \to 0} \frac{y_t^{-1} \cdot X_{u_t} - y_0^{-1} \cdot X_{u_0}}{t} = \\ = y_0 \cdot \lim_{t \to 0} \frac{f(y_t) - f(y_0)}{t} = y_0 \cdot (Y^*f)(y_0),$$

где мы использовали тот факт, что y_t — интегральная кривая лифта Y^*, проходящая через y_0. Из написанных равенств следует, что

$$(\nabla_Y \cdot X)_{u_0} = y_0 \cdot (Y^*f)(y_0).$$

Так как u_0 — произвольная точка многообразия B, то тем самым доказано, что $\nabla_Y \cdot X$ представляет собой векторное поле на B, соответствующее функции $Y^*f : P \to F$.

Приведенное рассуждение показывает, что, грубо говоря, ковариантное дифференцирование в B соответствует дифференцированию Ли в P. Нетрудно также доказать следующие свойства ковариантной производной $\nabla_Y \cdot X$:

Теорема. 1) $\nabla_{Y_1+Y_2} \cdot X = \nabla_{Y_1} \cdot X + \nabla_{Y_2} \cdot X$,

2) $\nabla_Y \cdot (X_1 + X_2) = \nabla_Y \cdot X_1 + \nabla_Y \cdot X_2$,

3) $\nabla_{\phi Y} \cdot X = \phi \nabla_Y \cdot X$,

4) $\nabla_Y \cdot (\phi X) = \phi \nabla_Y \cdot X + Y\phi \cdot X$,

где X, Y и т. д. — векторные поля на B, а ϕ — произвольная дифференцируемая функция на B.

Доказательство. Свойство 1) очевидно в силу того факта, что лифт суммы Y_1+Y_2 равен сумме лифтов векторных полей Y_1 и Y_2. Аналогично свойство 3) следует из того, что лифт векторного поля ϕY равен $\phi^* Y^*$, где Y^* — лифт векторного поля Y, а ϕ^* — функция $\phi\cdot\pi$. Свойство 2) следует из того, что функция $P\to F$, соответствующая векторному полю X_1+X_2, равна

$$\theta\left(X_1^*+X_2^*\right)=\theta\left(X_1^*\right)+\theta\left(X_2^*\right),$$

т. е. сумме функций, соответствующих векторным полям X_1 и X_2. Наконец, если $f=\theta(X^*)$, то $\phi^* f$ представляет собой функцию $P\to F$, соответствующую векторному полю ϕX, где $\phi^*=\phi\cdot\pi$. Пусть Y^* обозначает лифт векторного поля Y; тогда мы получаем

$$Y^*(\phi^* f)=\phi^*(Y^* f)+(Y^*\phi^*)f,$$

где $Y^*\phi^*=(Y\phi)\cdot\pi$. Тем самым свойство 4) доказано.

Если ковариантную производную $\nabla_Y\cdot X$ записать в виде

$$\nabla_Y\cdot X=t(X)\cdot Y,$$

то в силу доказанной теоремы $t(X)$ будет представлять собой $\mathfrak{F}$-эндоморфизм $\mathfrak{F}$-модуля X (§ 2 главы I), такой, что

$$t(X_1+X_2)=t(X_1)+t(X_2) \quad \text{и} \quad t(\phi X)\cdot Y=\phi t(X)\cdot Y+Y\phi\cdot X.$$

Попутно заметим, что формулу для ковариантной производной можно записать в виде

$$(\nabla_Y\cdot X)_u=x\cdot\left(Y_x^*\cdot\theta(X^*)\right),\qquad u=\pi(x),$$

где X^* и Y^* обозначают соответственно лифты векторных полей X и Y.

Ковариантное дифференцирование ∇_Y относительно векторного поля Y можно применять к произвольным тензорным полям на B. Выражаясь геометрически, параллельное перенесение τ вдоль некоторой кривой из u_0 в u_1, являющееся линейным изоморфизмом касательного пространства T_{u_0} на T_{u_1}, порождает линейный изоморфизм между тензорными пространствами в точках u_0 и u_1: мы будем обозначать последний той же буквой τ. Рассмотрим произвольное тензорное поле K

на B. Мы определяем ковариантную производную $(\nabla_Y \cdot K)_p$ совершенно так же, как мы определили $(\nabla_Y \cdot X)_p$ в начале этого параграфа. Тогда $\nabla_Y \cdot K$ оказывается тензорным полем того же самого типа, что и K.

Теперь мы введем так называемый *ковариантный дифференциал* ∇K произвольного тензорного поля K. Ковариантная производная $\nabla_X K$ была выше определена для любого векторного поля X как тензорное поле того же типа, что и K. Если K есть тензорное поле типа (r, s), т. е. r раз контравариантное и s раз ковариантное, то K можно определить как такое правило, которое сопоставляет любой данной последовательности s векторных полей $X_1, \ldots, X_s$ тензорное поле $K(X_1, \ldots, X_s)$ типа $(r, 0)$. Мы определяем *ковариантный дифференциал* ∇K как тензорное поле типа $(r, s+1)$, ставящее в соответствие последовательности $(X_1, \ldots, X_s, X)$ тензорное поле $(\nabla_X K)(X_1, \ldots, X_s)$. В частности, равенство $\nabla K = 0$ означает, что тензорное поле $\nabla_X K$ равно 0, каково бы ни было векторное поле X.

Для дальнейших приложений важен частный случай $r = 1$. Если K — тензорное поле типа $(1, s)$, то $K(X_1, \ldots, X_s)$ представляет собой векторное поле. Для таких тензорных полей — а к ним, как мы увидим в § 5, принадлежат определяемые там поля тензоров кривизны и кручения — имеет место формула

$$(\nabla K)(X_1, \ldots, X_s, X) =$$

$$= \nabla_X \cdot K(X_1, \ldots, X_s) - \sum_{i=1}^{s} K(X_1, \ldots, \nabla_X \cdot X_i, \ldots, X_s).$$

Проверка справедливости этой формулы предоставляется читателю.

§ 4. Γ_{ij}^k и эквивалентность определений

В предыдущем параграфе было показано, что заданная на B линейная связность порождает операцию ковариантного дифференцирования одного векторного поля X относительно другого векторного поля Y:

$$\nabla_Y \cdot X = t(X) \cdot Y.$$

Теперь мы введем так называемые *компоненты линейной связности* Γ^k_{ij}.

Возьмем в B какую-нибудь координатную окрестность U с локальными координатами $u^1, \ldots, u^n$. Как нам известно, векторные поля

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \ \ldots, \ X_n = \frac{\partial}{\partial u^n}$$

образуют базис $\mathfrak{F}$-модуля векторных полей в U. Рассмотрим индуцированную в U линейную связность и положим

$$t(X_i) X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ji} X_k, \tag{1}$$

где символы $\Gamma^k_{i,j}$ обозначают n^3 дифференцируемых функций, заданных в U и называемых *компонентами данной линейной связности в локальных координатах* $(u^1, \ldots, u^n)$. В окрестности, в которой введены две системы координат (u^i) и (v^i), векторные поля $Y_i = \partial/\partial v^i$ и $X_i = \partial/\partial u^i$ преобразуются одно в другое по формулам

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u^j}{\partial v^i} X_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Компоненты Γ'^k_{ij} данной связности в локальных координатах $(v^1, \ldots, v^n)$ получаются из Γ^k_{ij} простой подстановкой (2) в равенство

$$t(Y_i) Y_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma'^k_{ji} Y_k \tag{3}$$

и сравнением полученного результата с (1). Мы приходим к следующей классической формуле:

$$\Gamma'^k_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial v^i \partial v^j} \frac{\partial v^k}{\partial u^\alpha} + \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^{n} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial v^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial v^j} \frac{\partial v^k}{\partial u^\gamma}. \tag{4}$$

Обратно, если для каждой системы координат $(u^1, \ldots, u^n)$ в B задана система компонент Γ^k_{ij}, подчиняющихся закону преобразования (4), то формула (1) и формальные свойства оператора t (теорема § 3) определяют $t_U(X) Y$ в некоторой координатной окрестности U для любых векторных полей X

и Y. Для любых двух векторных полей X и Y на B мы можем определить векторное поле $t(X)Y$ на B, полагая

$$(t(X)Y)_p = (t_U(X_U)Y_U)_p,$$

где X_U и Y_U представляют собой сужения векторных полей X и Y на некоторую окрестность U точки p. Действительно, правая часть не зависит от выбора окрестности U, содержащей p, что легко проверяется с помощью (4).

Тем самым установлено, что существование линейной связности, введенной классическим способом с помощью компонент Γ^k_{ij}, эквивалентно существованию некоторого оператора t, удовлетворяющего условиям теоремы § 3.

Остается показать, что заданный набор компонент Γ^k_{ij} определяет связность в расслоенном многообразии реперов P.

С этой целью мы используем локальные координаты в P, введенные нами в § 10 главы I. Рассмотрим некоторую окрестность U в B с локальными координатами $(u^1, \ldots, u^n)$. Любая точка $x \in P$, представляющая собой репер в точке $u = \pi(x) \in U$, может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n} X^k_i \left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $\det(X^k_i) \neq 0$, а (u^j, X^k_i) — локальные координаты в $\pi^{-1}(U)$. Введем матрицу (Y^k_i), обратную к (X^k_i), так что

$$\sum_{j=1}^{n} X^j_i Y^k_j = \sum_{j=1}^{n} Y^j_i X^k_j = \delta^k_i.$$

Если выбрать в U другую систему координат (u'^j), то соответствующими координатами в $\pi^{-1}(U)$ будут (u'^j, X'^k_i), где X'^k_i и Y'^i_k связаны с X^k_i и соответственно Y^i_k при помощи соотношений

$$X'^k_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u'^k}{\partial u^j} X^j_i, \tag{1}$$

$$Y'^i_k = \sum_{j=1}^{n} Y^i_j \frac{\partial u^j}{\partial u'^k}, \tag{2}$$

из которых, в частности, следует

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} Y'^i_j\, du'^j = \sum_{j=1}^{n} Y^i_j\, du^j.$$

Таким образом, выражение (3) определяет на всем расслоенном многообразии P совокупность 1-форм θ^i $(i = 1, \ldots, n)$.

Зафиксируем некоторый базис $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ векторного пространства F, являющегося стандартным слоем касательного расслоенного многообразия $T(B)$. Нам известно, что мы можем рассматривать точку x как такое линейное отображение пространства F на T_u, при котором образом любого элемента ξ_i является

$$\sum_{k=1}^{n} X_i^k\, (\partial/\partial u^k).$$

Отсюда следует, что F-значная форма

$$\sum_{i=1}^{n} \theta^i \xi_i$$

совпадает в действительности с той самой формой θ, которая была естественным, „внутренним“ образом определена в § 1.

Мы определим теперь форму связности ω с помощью данных компонент Γ^k_{ij}. Введем совокупность форм

$$(4) \qquad \omega^k_i = \sum_{j=1}^{n} Y^k_j \left(dX^j_i + \sum_{\alpha, \beta=1}^{n} \Gamma^j_{\alpha\beta} X^\beta_i\, du^\alpha \right).$$

Каждая из них представляет собой 1-форму на P, определенную независимо от выбора локальных координат (u^i). Теперь положим

$$\omega = \sum_{i, k=1}^{n} \omega^k_i A^i_k,$$

где A^i_k, $i, k = 1, \ldots, n$, образуют такой базис пространства $\mathfrak{gl}(n, R)$, являющегося алгеброй Ли группы $\mathrm{GL}(n, R)$, что имеют место равенства $A^i_k \cdot \xi_j = \delta^i_j \xi_k$. Мы предоставляем читателю в качестве упражнения доказать, что ω оказывается формой связности в P, причем компоненты этой связности в локальных координатах $u^1, \ldots, u^n$ совпадают с заданными функциями Γ^k_{ij}.

§ 5. Поля тензоров кручения и кривизны

Мы введем в B поля так называемых тензоров кручения и кривизны, исходя из построенных выше форм кручения и кривизны в P. Для этого мы прежде всего заметим, что существует взаимно однозначное соответствие между тензорными полями некоторых типов на B, с одной стороны, и некоторыми формами на P, принимающими значения из F или из $\mathfrak{g}$, с другой стороны. Вспомним, кстати, что имеется взаимно однозначное соответствие между векторными полями на B и такими F-значными функциями на P, которые обладают свойством $f(xa) = a^{-1} \cdot f(x)$ (лемма § 3).

Форму α на P мы будем называть *горизонтальной*, если она исчезает в том случае, когда одна из независимых переменных является вертикальным векторным полем. Это понятие вводится без всякой связи с существованием некоторой линейной связности. Никаких предположений о существовании линейной связности не делается и в следующих ниже трех леммах. Лишь для упрощения доказательств мы воспользуемся произвольной линейной связностью; во всех случаях при этом наши рассуждения не будут зависеть от выбора линейной связности в силу горизонтальности формы α. Это замечание мы больше не будем повторять.

Лемма 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством тензорных полей K на B типа* (1.1) *и множеством таких F-значных горизонтальных 1-форм α на P, которые обладают свойством*

$$R_a^* \cdot \alpha = a^{-1} \cdot \alpha$$

для всякого элемента $a \in G$.

Доказательство. Идея доказательства та же, что и в лемме § 3. Пусть задано тензорное поле K типа (1,1); тогда K_u ($u \in B$) есть линейный эндоморфизм касательного пространства T_u. Определим на P F-значную 1-форму α равенством

$$\alpha_x(X^*) = x^{-1} \cdot K(\pi X^*),$$

где X^* — произвольный касательный вектор в точке $x \in P$. Непосредственно проверяется свойство формы α, сформулированное в лемме 1. Обратно, любая обладающая этим свойством форма α порождает тензорное поле K типа (1, 1), определяемое формулой

$$K_u(X) = x \cdot \alpha_x(X^*),$$

где $\pi(x) = u$ и X^* есть лифт векторного поля X; при этом правая часть не зависит от выбора точки x над u.

Заметим, что форма θ, введенная в § 1, как раз является формой со свойством, указанным в лемме 1. Соответствующее тензорное поле на B определяется равенством

$$K(X) = x \cdot \theta_x(X^*) = x \cdot (x^{-1} \cdot \pi(X^*)) = X,$$

т. е. представляет собой тензорное поле тождественных преобразований касательного пространства в каждой точке многообразия B.

Лемма 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством тензорных полей K на B типа* (1, 2), *таких, что* $K(X, Y) = -K(Y, X)$, *и множеством таких F-значных горизонтальных 2-форм α на P, которые обладают свойством*

$$R_a^* \cdot \alpha = a^{-1} \cdot \alpha$$

для любого элемента $a \in G$.

Доказательство. Рассмотрим некоторую форму α указанного типа и определим тензорное поле K равенством

$$K_u(X, Y) = x \cdot \alpha_x(X^*, Y^*),$$

где $\pi(x) = u$ и X^*, Y^* обозначают лифты векторных полей соответственно X и Y. В силу того, что α есть форма, мы получаем

$$K(X, Y) = -K(Y, X).$$

Детали доказательства мы оставляем читателю.

Определение. Тензорное поле T на B, соответствующее форме 2Θ, где Θ есть форма кручения, называется *полем тензора кручения*. Оно представляет собой тензорное поле типа (1, 2) со свойством $T(X, Y) = -T(Y, X)$.

Лемма 3. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством тензорных полей K типа* (1, 3), таких, что

$$K(X, Y) = -K(Y, X),$$

где $K(X, Y)$ есть тензорное поле типа $(1, 1)$, *определенное для любых двух векторных полей X и Y, и множеством $\mathfrak{g}$-значных горизонтальных 2-форм α на P, обладающих свойством*

$$R_a^* \cdot \alpha = \operatorname{ad}(a^{-1}) \cdot \alpha,$$

т. е. принадлежащих типу $\operatorname{ad}(G)$.

Доказательство. Мы ограничимся указанием соответствия. Если α представляет собой форму указанного типа, мы определяем тензорное поле K равенством

$$K_u(X, Y) \cdot Z = x \cdot \alpha_x(X^*, Y^*) \cdot x^{-1}Z,$$

где X, Y и Z — касательные векторы в точке u, X^* и Y^* — лифты X и Y соответственно и $\pi(x) = u$.

Определение. Тензорное поле R на B, соответствующее форме 2Ω, где Ω есть форма кривизны, называется *полем тензора кривизны*. Оно представляет собой тензорное поле типа $(1, 3)$ со свойством $R(X, Y) = -R(Y, X)$.

Теорема. *Поля тензоров кручения и кривизны выражаются следующим образом с помощью операции ковариантного дифференцирования, определяемой данной линейной связностью*:

$$T(X, Y) = \nabla_X \cdot Y - \nabla_Y \cdot X - [X, Y],$$
$$R(X, Y) = [\nabla_X \cdot \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

где X и Y — произвольные векторные поля на многообразии B.

Доказательство. Пусть X^* и Y^* обозначают лифты векторных полей X и Y соответственно. Воспользуемся формулой

$$(\nabla_X \cdot Y)_u = x \cdot \left(X_x^*(\theta(Y^*))\right), \quad \pi(x) = u,$$

и вспомним, что $h[X^*, Y^*]$ есть лифт скобки $[X, Y]$ (лемма 2 из § 1 главы II). Тогда мы получим

$$\begin{aligned} T_u(X, Y) &= x \cdot 2\Theta_x(X^*, Y^*) = \\ &= x \cdot \left[X_x^* \cdot \theta(Y^*) - Y_x^* \cdot \theta(X^*) - \theta_x([X^*, Y^*])\right] = \\ &\qquad = (\nabla_X \cdot Y)_u - (\nabla_Y \cdot X)_u - [X, Y]_u, \end{aligned}$$

что и доказывает первую формулу. Докажем теперь формулу для поля тензора кривизны. Пусть Z — произвольное векторное поле на B; рассмотрим функцию $f=\theta(Z^*)$, где Z^* — лифт векторного поля Z. В силу того, что

$$[X^*, Y^*]=h[X^*, Y^*]+v[X^*, Y^*],$$

мы получаем

$$([\nabla_X, \nabla_Y]Z-\nabla_{[X,Y]}\cdot Z)_u=$$
$$=x\cdot\left(\overset{*}{X_x}\cdot Y^*f-\overset{*}{Y_x}\cdot X^*f-(h[X^*, Y^*])_x\cdot f\right)=$$
$$=x\cdot(v[X^*, Y^*])_x\cdot f.$$

Возьмем теперь такой элемент $A\in\mathfrak{g}$, для которого

$$\overset{*}{A_x}=(v[X^*, Y^*])_x.$$

Так как

$$2\Omega_x(X^*, Y^*)=-\omega_x([X^*, Y^*])=-A,$$

то вторая формула теоремы получается в силу следующей леммы:

Лемма. *Пусть f — такая F-значная функция на P, для которой*

$$f(xa)=a^{-1}\cdot f(x);$$

тогда для любых $A\in\mathfrak{g}$ и $x\in P$ имеет место равенство

$$\overset{*}{A_x}\cdot f=-A\cdot f(x),$$

где левая часть есть результат применения касательного вектора $\overset{*}{A_x}$ к функции f, а правая часть — результат применения элемента $A\in\mathfrak{g}$ к $f(x)\in F$.

Доказательство. Если a_t есть однопараметрическая подгруппа группы G, порожденная элементом $A\in\mathfrak{g}$, то

$$\overset{*}{A_x}\cdot f=\lim_{t\to 0}\frac{f(xa_t)-f(x)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{a_t^{-1}\cdot f(x)-f(x)}{t}=-A\cdot f(x).$$

Тем самым закончено и доказательство теоремы.

Воспользуемся выражением тензорных полей T и R с помощью операции $\nabla_X\cdot Y=t(Y)\cdot X$ и компонентами Γ_{ij}^k в локальных координатах $(u^1, \ldots, u^n)$, определяемыми равенством

$$t\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)=\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^k\left(\frac{\partial}{\partial u^k}\right).$$

Тогда мы получим следующие выражения для коэффициентов T_{ij}^k поля тензора кручения T и коэффициентов R_{mjk}^i поля тензора кривизны R:

$$T\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \quad \frac{\partial}{\partial u^j}\right)=\sum_{k=1}^{n} T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial u^k}, \qquad T_{ij}^k=\Gamma_{ij}^k-\Gamma_{ji}^k;$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \quad \frac{\partial}{\partial u^k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial u^m}\right)=\sum_{i=1}^{n} R_{mjk}^i \frac{\partial}{\partial u^i};$$

$$R_{mjk}^i=\frac{\partial\Gamma_{km}^i}{\partial u^j}-\frac{\partial\Gamma_{jm}^i}{\partial u^k}+\sum_{s=1}^{n}\left(\Gamma_{js}^i\Gamma_{km}^s-\Gamma_{ks}^i\Gamma_{jm}^s\right).$$

§ 6. Тождество Бьянки

Воспользовавшись выражениями для тензорных полей T и R, полученными в § 5, и последним замечанием в § 3, мы немедленно получаем следующие выражения для ковариантных дифференциалов этих тензорных полей:

$$(\nabla_Z\cdot T)(X,Y)=\nabla_Z\cdot T(X, Y)-T(\nabla_Z\cdot X, Y)-T(X, \nabla_Z\cdot Y),$$

$$(\nabla_Z\cdot R)(X, Y)=[\nabla_Z, R(X, Y)]-R(\nabla_Z\cdot X, Y)-R(X, \nabla_Z\cdot Y)$$

для любых векторных полей X, Y и Z на B.

Мы докажем некоторые классические тождества, содержащие T, R и их ковариантные дифференциалы.

В последующем изложении мы будем обозначать символом $\mathfrak{S}K(X, Y, Z)$ циклическую сумму данной формы $K(X, Y, Z)$, принимающей значения из любого векторного пространства, т. е.

$$K(X, Y, Z)+K(Y, Z, X)+K(Z, X, Y).$$

Теорема 1. *Для любых векторных полей X, Y и Z имеет место равенство*

$$(1)\quad \mathfrak{S}\{R(X, Y)\cdot Z\}=\mathfrak{S}\{T(T(X, Y), Z)\}+\mathfrak{S}\{(\nabla_X T)(Y, Z)\}.$$

В частности, если тензор кручения T равен 0, *имеет место равенство*

$$\mathfrak{S}\{R(X, Y)\cdot Z\}=0,$$

Доказательство. В силу формул

$$T(X, Y) = \nabla_X \cdot Y - \nabla_Y \cdot X - [X, Y]$$

и

$$T(X, Y) = -T(Y, X),$$

мы получаем

$$T(T(X, Y), Z) = T(\nabla_X \cdot Y, Z) + T(Z, \nabla_Y \cdot X) - T([X, Y], Z).$$

Из полученного тождества и из выражения для $\nabla_Z \cdot T$ следует, что

$$\mathfrak{S}\{T(T(X, Y), Z)\} = -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z \cdot T)(X, Y)\} + \\ + \mathfrak{S}\{\nabla_Z \cdot T(X, Y) - T([X, Y], Z)\}.$$

В силу тождества Якоби

$$\mathfrak{S}\{[[X, Y], Z]\} = 0,$$

второе слагаемое правой части предыдущего равенства оказывается равным

$$\mathfrak{S}\{\nabla_X \cdot \nabla_Y \cdot Z - \nabla_Y \cdot \nabla_X \cdot Z - \nabla_{[X, Y]} \cdot Z\} + \mathfrak{S}\{[[X, Y], Z]\} = \\ = \mathfrak{S}\{R(X, Y) \cdot Z\}.$$

Тем самым тождество (1) доказано.

Теорема 2. *Для любых векторных полей X, Y и Z имеет место равенство*

(2) $$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z \cdot R)(X, Y)\} + \mathfrak{S}\{R(T(X, Y), Z)\} = 0.$$

В частности, если $T = 0$, то имеет место равенство

$$\mathfrak{S}\{(\nabla_Z \cdot R)(X, Y)\} = 0$$

(*тождество Бьянки*).

Доказательство. Воспользовавшись выражением для $(\nabla_Z \cdot R)(X, Y)$ и формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X \cdot Y - \nabla_Y \cdot X - [X, Y],$$

мы получаем

$$\mathfrak{S}\{R(T(X, Y), Z)\} = \\ = \mathfrak{S}\{R(\nabla_X \cdot Y, Z) + R(Z, \nabla_Y \cdot X) - R([X, Y], Z)\} = \\ = \mathfrak{S}\{R(\nabla_Z \cdot X, Y) + R(X, \nabla_Z \cdot Y)\} - \mathfrak{S}\{R([X, Y], Z)\} = \\ = -\mathfrak{S}\{(\nabla_Z \cdot R)(X, Y)\} + \mathfrak{S}\{[\nabla_Z, R(X, Y)] - R([X, Y], Z)\}.$$

Далее, воспользовавшись формулой

$$R(X,\ Y)=[\nabla_X,\ \nabla_Y]-\nabla_{[X,\,Y]},$$

мы получим

$$[\nabla_Z,\ R(X,\ Y)]-R([X,\ Y],\ Z)=$$
$$=-\nabla_{[X,\,Y]}\cdot\nabla_Z+\nabla_Z\cdot\nabla_{[X,\,Y]}+\nabla_{[[X,\,Y],\,Z]}+$$
$$+\nabla_Z\cdot[\nabla_X,\ \nabla_Y]-\nabla_Z\cdot\nabla_{[X,\,Y]}-[\nabla_X,\ \nabla_Y]\cdot\nabla_Z+\nabla_{[X,\,Y]}\cdot\nabla_Z.$$

Циклическая сумма этого выражения равна 0 в силу тождеств Якоби

$$\mathfrak{S}\{[[X,\ Y],\ Z]\}=0 \quad \text{и} \quad \mathfrak{S}\{[\nabla_Z,\ [\nabla_X,\ \nabla_Y]]\}=0.$$

Теорема доказана.

§ 7. Геодезические кривые и полнота линейной связности

Пусть на многообразии B задана линейная связность. Мы будем называть *геодезической* в B такую дифференцируемую кривую, касательные векторы которой получаются один из другого параллельным перенесением вдоль этой кривой. Введем расслоенное многообразие реперов P; имеет место следующая теорема:

Теорема. *Проекция любой интегральной кривой произвольного базисного векторного поля, заданного на P, является геодезической в B. И наоборот, произвольная геодезическая в B может быть получена описанным образом.*

Доказательство. Пусть $B(\xi)$ — базисное векторное поле на P, соответствующее элементу $\xi\in F$, а b_t — некоторая интегральная кривая поля $B(\xi)$, проходящая через произвольную точку $x_0\in P$. Мы предполагаем, что каждая кривая, которую нам придется рассматривать в ходе доказательства, определена в некотором открытом интервале, содержащем 0. Проекция u_t кривой b_t на многообразие B есть кривая в B, проходящая через точку $u_0=\pi(x_0)$. Покажем, что кривая u_t является геодезической. Касательные векторы кривой u_t, обозначаемые символом U_t, можно записать в виде $U_t=\pi\cdot B(\xi)_{b_t}$, что равно $b_t\cdot\xi\in T_{u_t}$, как это следует из определения базисного векторного поля $B(\xi)$. В частности, $U_0 = x_0 \cdot \xi$. Поскольку кривая b_t является лифтом кривой u_t, проходящим через x_0, мы усматриваем из определения параллельного перенесения (§ 3), что U_t получается из U_0 параллельным перенесением вдоль кривой u_t. Но это и означает, что u_t есть геодезическая.

Обратно, пусть u_t — некоторая геодезическая с начальной точкой u_0. Выберем такую точку $x_0 \in P$, для которой $\pi(x_0) = u_0$; пусть $\xi = x_0^{-1} \cdot U_0 \in F$. Если x_t обозначает лифт кривой u_t с начальной точкой x_0, а U_t — касательные векторы кривой u_t, то мы имеем $U_t = x_t \cdot \xi$, поскольку u_t — геодезическая. С другой стороны, $U_t = \pi(X_t)$, где X_t обозначает касательные векторы кривой x_t. Таким образом, мы получаем

$$\theta(X_t) = x_t^{-1} \cdot \pi(X_t) = x_t^{-1} \cdot U_t = \xi,$$

что и означает, что x_t есть некоторая интегральная кривая базисного векторного поля $B(\xi)$. Теорема доказана.

Введенный в ходе этого доказательства параметр t геодезической u_t называется ее *каноническим параметром*.

Следствие. *Для произвольной точки $p \in B$ и произвольного касательного вектора X в этой точке существует одна и только одна геодезическая с начальными данными (p, X), т. е. такая геодезическая u_t, что*

$$u_0 = p \quad \text{и} \quad (du_t/dt)_{t=0} = X.$$

При этом канонический параметр t однозначно определяется начальными данными.

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку x_0 многообразия P, такую, что $\pi(x_0) = p$. Пусть $\xi = x_0^{-1} \cdot X \in F$. Если x_t — интегральная кривая базисного векторного поля $B(\xi)$, проходящая через точку x_0, то ее проекция u_t представляет собой геодезическую с начальными данными $u_0 = p$ и $(du_t/dt)_{t=0} = X$. Пусть v_t — другая геодезическая с теми же самыми начальными данными, соответствующая интегральной кривой y_t базисного векторного поля $B(\eta)$, $\eta \in F$, проходящей через точку y_0; тогда мы должны иметь $y_0 = x_0 a$ для некоторого элемента $a \in G$ и $\eta = (x_0 \cdot a)^{-1} \cdot X = a^{-1} \cdot \xi$. Поскольку $B(a^{-1} \cdot \xi) = R_a \cdot B(\xi)$, мы видим, что $y_t = R_a \cdot x_t$ и, следовательно, $v_t = u_t$ для всех t. Этим доказана единственность геодезической u_t. Из этого рассуждения следует также, что канонический параметр геодезической u_t не зависит от выбора лифта x_t и, стало быть, определяется единственным образом.

Пусть имеется некоторая окрестность точки $p \in B$ с локальными координатами $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, в которой определены компоненты Γ^k_{ij} линейной связности. Тогда геодезическая определится решением следующей системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{d^2u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Если ввести расслоенное многообразие реперов, то задача сведется к определению некоторого векторного поля, т. е. к решению системы первого порядка [43]).

Определение. Линейная связность называется *полной*, если любая геодезическая u_t может быть продолжена до неограниченно больших значений ее канонического параметра.

Имеет место следующее предложение [12]: *линейная связность полна тогда и только тогда, когда каждое базисное векторное поле в P является полным, т. е. когда каждое базисное векторное поле порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований многообразия P.*

§ 8. Нормальные координаты

Мы докажем существование так называемых *нормальных координат* в окрестности любой точки из B.

Теорема. *Каждая точка p из B обладает некоторой окрестностью N, такой, что любая точка этой окрестности может быть соединена с p одной и только одной геодезической, лежащей в N. Существует такая система локальных координат $(u^1, \ldots, u^n)$, для которой:*

1) $u^1(p) = u^2(p) = \ldots = u^n(p) = 0$;

2) *любая геодезическая, проходящая через точку p, записывается с помощью системы уравнений вида $u^i = a^i t$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $(a^1, \ldots, a^n)$ — некоторая последовательность постоянных, а t — канонический параметр.*

Подобная окрестность N точки p называется *нормальной окрестностью* этой точки; координаты $(u^1, \ldots, u^n)$, обладающие описанными свойствами, называются *нормальными координатами*.

Доказательство. Зафиксируем базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ пространства F и рассмотрим n соответствующих базисных векторных полей $B_1, B_2, \ldots, B_n$ на P. Пусть $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^n) \in R^n$; векторное поле $\sum_{i=1}^{n} \alpha^i B_i$ мы обозначим символом αB; оно представляет собой базисное векторное поле, соответствующее элементу $\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \xi_i$. Выберем любую точку x_0, для которой $\pi(x_0) = p$. Векторное поле αB порождает локальную однопараметрическую группу локальных преобразований некоторой окрестности точки x_0. Именно, мы имеем множество локальных преобразований $\varphi_\alpha(t)$, определенных для $|t| < \delta$ при некотором $\delta > 0$ в некоторой окрестности точки x_0 и таких, что $\varphi_\alpha(t)\varphi_\alpha(t') = \varphi_\alpha(t+t')$. Предположив, что α принадлежит некоторой малой окрестности C начала координат в R^n, мы можем считать, что образы $\varphi_\alpha(t)x_0$ определены для $|t| < 1 + \delta'$ при некотором $\delta' > 0$ и для всех $\alpha \in C$. Образ точки x_0 при преобразовании $\varphi_\alpha(1)$ мы будем обозначать символом $\varphi(\alpha)$. Теперь мы определим дифференцируемое отображение ψ окрестности начала координат C в многообразие B равенством $\psi = \pi \cdot \varphi$. Тогда дифференциал этого отображения будет представлять собой композицию дифференциалов отображений φ и π. Дифференциал отображения φ есть линейное отображение пространства R^n, рассматриваемого теперь как касательное пространство пространства R^n в начале координат, в горизонтальное подпространство Q в точке x_0. Ранг этого линейного отображения равен n, так как $(B_i)_{x_0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, образуют базис горизонтального подпространства Q. С другой стороны, ясно, что ранг проекции π горизонтального подпространства Q на T_p равен n. Таким образом, ранг преобразования ψ в точке $0 \in R^n$ равен n. Мы заключаем поэтому, что существует некоторая окрестность C_0 точки $0 \in R^n$, на которой отображение ψ является топологическим и образом которой служит окрестность N точки p из B.

Это означает, что мы можем рассматривать $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ как систему локальных координат в N. Проекция проходядящей через точку x_0 интегральной кривой любого базисного векторного поля $\sum_{i=1}^{n} \alpha^i B_i$ может быть записана с помощью системы уравнений $u^i = \alpha^i t$; эта проекция является геодезической в силу теоремы § 7. Тем самым доказательство теоремы завершено.

§ 9. Автоморфизмы и векторные поля Киллинга

Любое дифференцируемое преобразование φ многообразия B индуцирует естественное дифференцируемое преобразование расслоенного многообразия реперов P многообразия B; это последнее преобразование мы будем обозначать символом $\tilde{\varphi}$. Именно, мы определим $\tilde{\varphi}$ как преобразование, ставящее в соответствие реперу

$$x = (X_1, \ldots, X_n) \in P$$

в точке $u = \pi(x)$ новый репер

$$\tilde{\varphi}(x) = (\varphi X_1, \ldots, \varphi X_n) \in P.$$

Индуцированное преобразование $\tilde{\varphi}$ является, очевидно, автоморфизмом главного расслоенного многообразия $P(B, G)$; это означает, что выполняются следующие условия:

$$\pi \cdot \tilde{\varphi} = \varphi \cdot \pi \quad \text{и} \quad \tilde{\varphi}(xa) = \tilde{\varphi}(x) \cdot a$$

для любых $x \in P$ и $a \in G$. Мы замечаем также, что $\varphi(x \cdot \xi) = \tilde{\varphi}(x) \cdot \xi$ для любого элемента $\xi \in F$, где x и $\tilde{\varphi}(x)$ рассматриваются как линейные отображения пространства F соответственно на T_u и $T_{\varphi(u)}$.

Пусть задана некоторая линейная связность в B; тогда преобразование φ многообразия B называется *автоморфизмом* этой связности (или, иногда, *аффинным преобразованием*), если $\tilde{\varphi}$ сохраняет соответствующую связность в P (§ 4 главы II). В этом случае любое фундаментальное и любое базисное векторное поле оказываются инвариантными относительно преобразования $\tilde{\varphi}$. В самом деле, очевидно, что любое фундаментальное векторное поле инвариантно относительно $\tilde{\varphi}$ в силу того, что $\tilde{\varphi}$ является автоморфизмом расслоенного многообразия $P(B, G)$. С другой стороны, возьмем произвольное базисное векторное поле $B = B(\xi)$. Для любой точки $x \in P$ вектор $\tilde{\varphi} \cdot B_x$ представляет собой некоторый горизонтальный вектор в точке $\tilde{\varphi}(x)$, причем выполняется условие

$$\pi(\tilde{\varphi} \cdot B_x) = \varphi \cdot \pi(B_x) = \varphi(x \cdot \xi) = \tilde{\varphi}(x) \cdot \xi,$$

откуда следует равенство

$$\tilde{\varphi} \cdot B_x = B_{\tilde{\varphi}(x)},$$

но это и означает инвариантность базисного векторного поля B относительно преобразования $\tilde{\varphi}$.

Обратимся теперь к дифференциальным формам. Мы без труда замечаем, что если φ есть некоторый автоморфизм заданной линейной связности, то форма θ и форма связности ω оказываются инвариантными относительно преобразования $\tilde{\varphi}$.

Нетрудно показать, что и обратно, если формы θ и ω инвариантны относительно некоторого преобразования расслоенного многообразия P, то это преобразование индуцируется некоторым преобразованием φ базы B, причем преобразование φ является автоморфизмом заданной связности. Чтобы проверить это утверждение, заметим прежде всего, что любое дифференцируемое преобразование $\tilde{\varphi}$ многообразия P, оставляющее инвариантной форму θ, индуцируется некоторым дифференцируемым преобразованием базы B. Это можно показать прямым вычислением, если воспользоваться выражениями для θ^i из § 4. Если, кроме того, преобразование $\tilde{\varphi}$ оставляет инвариантной и форму ω, то оно оказывается в этом случае автоморфизмом заданной линейной связности. Мы приходим, таким образом, к тому выводу, что группа всех автоморфизмов данной связности естественно изоморфна группе всех преобразований многообразия P, оставляющих инвариантными формы θ и ω. Иначе говоря, указанная группа совпадает с группой всех преобразований многообразия P, сохраняющих полную параллелизуемость, порождаемую данной линейной связностью (§ 1).

Рассмотрим некоторое векторное поле X на B. Для любых $x \in P$ и $u = \pi(x) \in B$ определена локальная однопараметрическая группа локальных преобразований φ_t, действующих в окрестности U точки u. Каждое преобразование φ_t этой группы индуцирует, как мы в этом убедились выше, некоторое преобразование $\tilde{\varphi}_t$ окрестности $\pi^{-1}(U)$ точки x. Отсюда немедленно следует, что преобразования $\tilde{\varphi}_t$ образуют локальную однопараметрическую группу преобразований окрестности $\pi^{-1}(U)$ точки x и, следовательно, индуцируют векторное поле $\tilde{X}$ на $\pi^{-1}(U)$. Итак, мы показали, что каждое векторное поле X на B индуцирует естественным образом векторное поле $\tilde{X}$ на P.

Теперь мы дадим следующее определение. Назовем векторное поле X на B *векторным полем Киллинга* (или *инфинитезимальным аффинным преобразованием*) относительно данной линейной связности, если все локальные преобразования φ_t, порожденные этим векторным полем, являются локальными автоморфизмами данной связности. В этом случае, поскольку любое фундаментальное и любое базисное векторное поле инвариантно относительно $\tilde{\varphi}_t$, имеют место равенства

$$[\tilde{X}, A^*] = 0 \quad \text{и} \quad [\tilde{X}, B(\xi)] = 0$$

для любых $A \in \mathfrak{g}$ и $\xi \in F$ (ср. § 2 главы I). Можно показать, что обратно, если какое-либо векторное поле $\tilde{X}$ на P удовлетворяет этим условиям, то оно индуцировано некоторым векторным полем Киллинга X на B.

Множество всех векторных полей Киллинга на B образует алгебру Ли, являющуюся подалгеброй алгебры $\mathfrak{X}(B)$. Чтобы доказать это, рассмотрим два векторных поля Киллинга X и Y и индуцированные ими векторные поля на P, которые мы обозначим соответственно $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$. Из равенств

$$[\tilde{X}, A^*] = 0 \quad \text{и} \quad [\tilde{Y}, A^*] = 0$$

в силу тождества Якоби мы получаем

$$[[\tilde{X}, \tilde{Y}], A^*] = [[A^*, \tilde{Y}], \tilde{X}] + [[\tilde{X}, A^*], \tilde{Y}] = 0,$$

где, как легко видеть, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ представляет собой векторное поле на P, индуцированное векторным полем $[X, Y]$. Совершенно так же проверяется, что

$$[[\tilde{X}, \tilde{Y}], B(\xi)] = 0.$$

Теперь мы докажем следующую теорему:

Теорема. *Если данная линейная связность полна, то любое векторное поле Киллинга X на B порождает некоторую глобальную однопараметрическую группу преобразований многообразия B.*

Доказательство ([12]). Мы воспользуемся тем, что любое базисное векторное поле $B(\xi)$, $\xi \in F$, является полным; это означает, что оно порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований многообразия P (§ 7). Рассмотрим векторное поле $\widetilde{X}$ на P, индуцированное данным векторным полем Киллинга X на B. Нам достаточно показать, что $\widetilde{X}$ порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований многообразия P. Для этого мы возьмем произвольную точку $x_0 \in P$ и предположим, что $\widetilde{X}$ порождает некоторую локальную однопараметрическую группу локальных преобразований $\widetilde{\varphi}_t$, определенных в некоторой окрестности O точки x_0 для всех t, $|t| \leqslant \alpha$. Мы покажем сейчас, что в этом случае $\widetilde{X}$ порождает группу локальных преобразований $\widetilde{\varphi}_t$ в некоторой окрестности любой другой точки из P, определенных для тех же значений t: $|t| \leqslant \alpha$. Из этого будет следовать, что $\widetilde{X}$ порождает глобальную однопараметрическую группу преобразований многообразия P.

Прежде всего, взяв любую точку $y_0 = x_0 a$ ($a \in G$), лежащую в том же слое, что и x_0, мы полагаем

$$\widetilde{\varphi}'_t(xa) = \widetilde{\varphi}_t(x)\, a$$

для любой точки $x \in O$ и любого t, $|t| \leqslant \alpha$. Так определенные преобразования $\widetilde{\varphi}'_t$ совпадают с локальными преобразованиями, порожденными полем $\widetilde{X}$ в некоторой окрестности точки y_0; именно, $\widetilde{X}$ порождает $\widetilde{\varphi}'_t$ в окрестности $R_a \cdot O$ точки y_0 при любом t, $|t| \leqslant \alpha$. Действительно, векторное поле в $R_a \cdot O$, индуцированное группой $\widetilde{\varphi}'_t$, совпадает с $\widetilde{X}$, так как $\widetilde{X}$ инвариантно относительно R_a.

Далее мы рассматриваем однопараметрическую группу преобразований b_s, $-\infty < s < \infty$, порожденную базисным векторным полем $B(\xi)$. Для любой точки y_0 вида $y_0 = b_s \cdot x_0$ мы полагаем

$$\widetilde{\varphi}'_t(b_s \cdot x) = b_s(\widetilde{\varphi}_t \cdot x),$$

где x — любая точка из O и $|t| \leqslant \alpha$. Так как $\tilde{X}$ инвариантно относительно преобразований b_s, как это следует из равенства $[\tilde{X}, B(\xi)] = 0$, то мы видим, что $\tilde{\varphi}'_t$ действительно представляет собой группу локальных преобразований, порожденных векторным полем $\tilde{X}$ в некоторой окрестности точки y_0.

Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что любая точка $y_0 \in P$ может быть записана в виде

$$y_0 = \left(b_{1, s_1} \cdot b_{2, s_2} \ldots b_{k, s_k} \cdot x_0\right) a,$$

где $a \in G$ и каждое b_{i, s_i} представляет собой преобразование, соответствующее значению s_i параметра и принадлежащее однопараметрической группе преобразований, порожденной некоторым базисным векторным полем $B(\xi_i)$. Это утверждение можно доказать следующим образом. Пусть $\pi(x_0) = u_0$ и $\pi(y_0) = v_0$. В силу существования нормальных окрестностей и связности многообразия B, которую мы можем предположить, отсюда следует, что v_0 можно соединить с u_0 кривой, состоящей из конечного числа отрезков геодезических, из которых первый начинается в точке u_0, а последний оканчивается в точке v_0. Каждая геодезическая есть проекция некоторой интегральной кривой некоторого базисного векторного поля; мы получаем, таким образом, точку z_0 вида

$$z_0 = b_{1, s_1} \cdot b_{2, s_2} \ldots b_{k, s_k} \cdot x_0,$$

лежащую в том же слое, что и точка y_0. Но тогда $y_0 = z_0 a$ для некоторого элемента $a \in G$. Тем самым теорема доказана.

Теорема перестает быть верной, если не предполагать, что связность является полной. Рассмотрим, например, плоскость R^2 с плоской линейной связностью. Пусть X обозначает векторное поле, индуцированное какой-либо однопараметрической группой сдвигов

$$\varphi_t((a, b)) = (a + ct, b + ct), \quad (a, b) \in R^2,$$

где c — некоторая фиксированная постоянная. Ясно, что X — векторное поле Киллинга. Теперь рассмотрим многообразие $B = R^2 - (0, 0)$ с порожденной плоской связностью, которая уже не является полной. Сужение векторного поля X на B есть векторное поле Киллинга, но оно не порождает глобальной однопараметрической группы преобразований многообразия B.

§ 10. Линейные связности с $\nabla T = 0$, $\nabla R = 0$

Как мы уже видели, при заданной линейной связности на B формы кручения и кривизны позволяют найти горизонтальную и вертикальную составляющие скобки, составленной из любых двух базисных векторных полей. Именно, если $B = B(\xi)$ и $B' = B(\xi')$ — два базисных векторных поля, то

$$\theta(h[B, B'])_x = -2\Theta_x(B, B')$$

и

$$\omega(v[B, B'])_x = -2\Omega_x(B, B').$$

Отсюда следует, что если $\Theta = 0$ (или, что то же, если поле тензора кручения равно 0), то скобка $[B, B']$ вертикальна, каковы бы ни были базисные векторные поля B и B'. Аналогично, если $\Omega = 0$ (или, что то же, если поле тензора кривизны равно 0), то скобка $[B, B']$ горизонтальна.

Чтобы изучить подробнее поведение базисных векторных полей, мы докажем две следующих теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — базис пространства F и $B_1, \ldots, B_n$ — соответствующие базисные векторные поля. Напишем разложение*

$$h[B_i, B_j] = 2\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k B_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

где f_{ij}^k — совокупность n^3 дифференцируемых функций на P, таких, что

$$\Theta_x(B_i, B_j) = -\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k(x)\xi_k.$$

Если $\nabla T = 0$, то каждая из функций f_{ij}^k постоянна на множестве $P_0 = \{x \in P;\ x \sim x_0\}$, где x_0 — произвольная точка из P.

Доказательство. Рассмотрим произвольные векторные поля X, Y и Z на B; пусть их лифтами будут соответственно X^*, Y^* и Z^*. Напишем разложения

$$X^* = \sum_{i=1}^{n} \phi^i B_i \quad \text{и} \quad Y^* = \sum_{j=1}^{n} \psi^j B_j$$

и вычислим $Z^* \cdot \Theta(X^*, Y^*)$, т. е. функцию, получаемую применением векторного поля Z^* к F-значной функции $\Theta(X^*, Y^*)$ на P. Мы получаем

$$Z^* \cdot \Theta(X^*, Y^*) = Z^* \left\{ \sum_{l, j=1}^{n} \phi^l \psi^j \Theta(B_l, B_j) \right\} =$$

$$= -Z^* \left\{ \sum_{l, j, k=1}^{n} \phi^l \psi^j f_{lj}^k \xi_k \right\} =$$

$$= - \sum_{l, j, k=1}^{n} \left\{ (Z^* \phi^l) \psi^j f_{lj}^k \xi_k + \phi^l (Z^* \psi^j) f_{lj}^k \xi_k + \phi^l \psi^j (Z^* f_{lj}^k) \xi_k \right\} =$$

$$= \Theta\left(\sum_{l=1}^{n} (Z^* \phi^l) B_l, \sum_{j=1}^{n} \psi^j B_j \right) + \Theta\left(\sum_{l=1}^{n} \phi^l B_l, \sum_{j=1}^{n} (Z^* \psi^j) B_j \right) -$$

$$- \sum_{l, j, k=1}^{n} (Z^* f_{lj}^k) \phi^l \psi^j \xi_k = \Theta((\nabla_Z \cdot X)^*, Y^*) + \Theta(X^*, (\nabla_Z \cdot Y)^*) -$$

$$- \sum_{l, j, k=1}^{n} (Z^* f_{lj}^k) \phi^l \psi^j \xi_k,$$

где мы использовали формулу, определяющую $\nabla_Z \cdot X$ (§ 3):

$$(\nabla_Z \cdot X)_u = x \cdot (Z_x^* \theta(X^*)), \quad \pi(x) = u.$$

Итак, $\sum_{l=1}^{n} (Z^* \phi^l) B_l$ представляет собой лифт векторного поля $\nabla_Z \cdot X$.

Теперь мы видим, что $Z^* \cdot \Theta(X^*, Y^*)$ есть не что иное, как функция $P \to F$, соответствующая векторному полю $\frac{1}{2} \nabla_Z \cdot T(X, Y)$ в смысле леммы § 3. Действительно, $\Theta(X^*, Y^*)$ есть функция $P \to F$, соответствующая векторному полю $\frac{1}{2} T(X, Y)$, что непосредственно следует из определения тензора кручения T.

Аналогично $\Theta((\nabla_Z \cdot X)^*, Y^*)$ есть функция $P \to F$, соответствующая векторному полю $\frac{1}{2} T(\Delta_Z X, Y)$, а $\Theta(X^*, (\nabla_Z \cdot Y)^*)$ — векторному полю $\frac{1}{2} T(X, \nabla_Z \cdot Y)$. Из написанного выше тождества следует, что функция

$$\sum_{l, j, k=1}^{n} (Z^* f_{lj}^k) \phi^l \psi^j \xi_k$$

соответствует векторному полю

$$\frac{1}{2}\{\nabla_Z \cdot T(X, Y) - T(\nabla_Z \cdot X, Y) - T(X, \nabla_Z \cdot Y)\},$$

которое равно $\frac{1}{2}(\nabla_Z T)(X, Y)$ (§ 6).

Если $\nabla T = 0$, то

$$(\nabla_Z T)(X, Y) = 0$$

для любых векторных полей X, Y и Z. Следовательно, в этом случае $Z^* f_{ij}^k$ должно равняться 0 для любого горизонтального вектора Z^* в любой точке $x \in P$.

Возьмем произвольную точку $x_0 \in P$; пусть

$$P_0 = \{x;\ x \sim x_0\}.$$

Мы знаем, что P_0 представляет собой приведенное расслоенное многообразие со структурной группой Φ, которая является группой голономии с базисной точкой x_0 (§ 6 главы II). Так как каждая из функций f_{ij}^k отображается в 0 любым горизонтальным вектором, то каждая из них постоянна на P_0. Тем самым доказательство теоремы 1 завершено.

Рассмотрим сужения базисных векторных полей на расслоенное подмногообразие P_0; мы получим

$$h[B_i, B_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k B_k = B\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k \xi_k\right) \text{ на } P_0,$$

где c_{ij}^k — некоторые постоянные. Мы доказали

Следствие. *Если $\nabla T = 0$, то горизонтальная составляющая скобки, составленной из любых двух базисных векторных полей на P_0, снова является базисным векторным полем. Обратное утверждение также справедливо.*

После приведенного доказательства справедливость обратного утверждения почти очевидна.

Теорема 2. *Пусть $B_1, \ldots, B_n$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1. Пусть $A_1, \ldots, A_{n^2}$ — базис пространства $\mathfrak{g}$, а $A_1^*, \ldots, A_{n^2}^*$ — соответствующие фундаментальные векторные поля. Напишем разложение*

$$v[B_i, B_j] = 2\sum_{k=1}^{n^2} g_{ij}^k A_k^* \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

где g_{ij}^k — такие дифференцируемые функции на P, для которых

$$\Omega_x[B_i, B_j] = -\sum_{k=1}^{n^2} g_{ij}^k(x) A_k.$$

Если $\nabla R = 0$, то каждая из функций g_{ij}^k постоянна на P_0.

Доказательство. Пусть X^*, Y^* и Z^* обозначают то же, что и при доказательстве теоремы 1; как и раньше, пусть

$$X^* = \sum_{i=1}^{n} \phi^i B_i, \qquad Y^* = \sum_{j=1}^{n} \psi^j B_j.$$

Мы получим выражение для $Z^* \cdot \Omega(X^*, Y^*)$, т. е. для функции, получаемой применением векторного поля Z^* к $\mathfrak{g}$-значной функции $\Omega(X^*, Y^*)$ на P. Как и прежде, получаем

$$(1) \quad Z^* \cdot \Omega(X^*, Y^*) = \Omega((\nabla_Z \cdot X)^*, Y^*) + \Omega(X^*, (\nabla_Z \cdot Y)^*) - \\ - \sum_{k=1}^{n^2} \sum_{i, j=1}^{n} (Z^* g_{ij}^k) \phi^i \psi^j A_k.$$

Рассмотрим новое векторное поле W на B с лифтом W^*. Мы докажем, что имеет место равенство

$$(2) \quad (Z^* \cdot \Omega(X^*, Y^*)) \theta(W^*) = \\ = Z^*(\Omega(X^*, Y^*) \cdot \theta(W^*)) - \Omega(X^*, Y^*)(Z^* \cdot \theta(W^*)),$$

где левая часть есть результат применения $\mathfrak{g}$-значной функции $Z^* \cdot \Omega(X^*, Y^*)$ к F-значной функции $\theta(W^*)$; заметим, что вообще, если A_x есть $\mathfrak{g}$-значная функция на P и f_x есть F-значная функция на P, то Af есть F-значная функция, определяемая равенством $(Af)_x = A_x \cdot f_x$. Остальные члены в (2) имеют аналогичный смысл.

Действительно, пусть

$$\Omega_x(X^*, Y^*) = \sum_{k=1}^{n^2} h^k(x) A_k \quad \text{и} \quad f(x) = \theta_{x'}(W^*).$$

Мы получаем

$$Z_x^*(\Omega(X^*, Y^*)\cdot\theta(W^*)) = Z_x^*\left\{\sum_{k=1}^{n^2} h^k\left(A_k\cdot f\right)\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n^2}\left(Z_x^* h^k\right)\left(A_k\cdot f(x)\right) + \sum_{k=1}^{n^2} h^k(x)\,A_k\cdot\left(Z_x^* f\right) =$$

$$= (Z^*\cdot\Omega(X^*, Y^*))_x\cdot f(x) + \Omega_x(X^* Y^*)\cdot Z_x^* f =$$

$$= \left(Z_x^*\cdot\Omega(X^*, Y^*)\right)\cdot\theta_x(W^*) + \Omega_x(X^*, Y^*)\cdot\left(Z_x^*\cdot\theta(W^*)\right),$$

что и доказывает (2).

Нам известно из определений R и $\nabla_X\cdot Y$, что

$$Z^*(\Omega(X^*, Y^*)\,\theta(W^*))$$

есть функция $P\to F$, определяющая векторное поле

$$\frac{1}{2}\nabla_Z\cdot(R(X, Y)\cdot W);$$

аналогично

$$\Omega(X^* Y^*)\cdot(Z^*\cdot\theta(W^*))$$

есть функция, определяющая векторное поле

$$\frac{1}{2}R(X, Y)\cdot(\nabla_Z\cdot W).$$

Следовательно, левая часть равенства (2) определяет векторное поле

$$\frac{1}{2}[\nabla_Z,\ R(X, Y)]\cdot W.$$

Из (1) и формулы для $\nabla_Z R$ (§ 6) вытекает, что функция

$$-\sum_{k=1}^{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(Z^* g_{ij}^k\right)\phi^i\psi^j\left(A_k f\right)$$

определяет векторное поле

$$\frac{1}{2}(\nabla_Z\cdot R)(X, Y)\cdot W.$$

Пусть теперь $\nabla R = 0$; это означает, что

$$(\nabla_Z R)(X, Y)\cdot W = 0$$

для любых X, Y, Z и W. Следовательно, $Z^* g_{ij}^k$ равно 0, каковы бы ни были горизонтальный вектор и точка $x\in P$. Тем самым теорема 2 доказана.

Возьмем базис A_i, $i = 1, \ldots, r$, алгебры голономии $\mathfrak{h}$, которая является алгеброй Ли структурной группы приведенного расслоенного многообразия P_0. Соответствующие фундаментальные векторные поля A_i^*, $i = 1, \ldots, r$, определены на P_0. Таким образом,

$$v\left[B_i, B_j\right] = \sum_{k=1}^{r} d_{ij}^k A_k^*$$

оказывается фундаментальным векторным полем, соответствующим элементу

$$\sum_{k=1}^{r} d_{ij}^k A_k \in \mathfrak{h},$$

где d_{ij}^k — некоторые постоянные.

Следствие. *Если $\nabla R = 0$, то вертикальная составляющая скобки, составленной из любых двух векторных полей на P_0, представляет собой фундаментальное векторное поле. Обратное утверждение также верно.*

Из двух рассмотренных следствий и теоремы 2 § 1 вытекает

Теорема 3. *Пусть $\nabla T = 0$ и $\nabla R = 0$. Тогда конечномерная алгебра Ли оказывается натянутой на фундаментальные и базисные векторные поля приведенного расслоенного многообразия P_0.*

Резюмируя результаты этого параграфа, составим следующую таблицу, характеризующую линейные связности простых типов:

$T = 0 \rightleftarrows h\left[B_1, B_2\right] = 0;$

$R = 0 \rightleftarrows v\left[B_1, B_2\right] = 0;$

$\nabla T = 0 \rightleftarrows h\left[B_1, B_2\right]$ есть базисное векторное поле (на P_0);

$\nabla R = 0 \rightleftarrows v\left[B_1, B_2\right]$ есть фундаментальное векторное поле (на P_0);

здесь B_1, B_2 — два произвольных базисных векторных поля на P.

§ 11. Аффинные связиости

Рассмотрим дифференцируемое многообразие B. Пусть $P(B, G)$ и $\tilde{P}(B, \tilde{G})$ обозначают соответственно расслоенное многообразие реперов и аффинное расслоенное многообразие многообразия B; мы употребляем символику, введенную в § 11 главы II.

Аффинной связностью (в обобщенном смысле) называется связность в $\tilde{P}(B, \tilde{G})$.

Пусть $\tilde{\omega}$ — форма связности некоторой аффинной связности $\tilde{\Gamma}$. Форма $\tilde{\omega}$, определенная на $\tilde{P}$, принимает значения из алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{g}}$ группы $\tilde{G}$. Так как $\tilde{G}$ представляет собой полупрямое произведение $F \times G$, мы получаем полупрямую сумму[22])

$$\tilde{\mathfrak{g}} = F + \mathfrak{g},$$

где F — алгебра Ли, отождествляемая с группой F (и с векторным пространством размерности n, которое является стандартным слоем касательного расслоенного многообразия многообразия B). С помощью вложения ι многообразия P в $\tilde{P}$ мы получаем однозначное разложение

$$\iota^*\tilde{\omega} = \omega + \alpha \text{ на } P, \tag{1}$$

где α есть некоторая F-значная 1-форма на P, а ω — некоторая $\mathfrak{g}$-значная 1-форма на P. Так как $\tilde{\omega}$ есть форма типа $\mathrm{ad}(\tilde{G})$, то ω есть форма типа $\mathrm{ad}(G)$. Нетрудно проверить, что ω представляет собой форму связности на P и, следовательно, определяет некоторую линейную связность Γ на B. С другой стороны, α является горизонтальной 1-формой, принимающей значения из F, такой, что

$$R_a^* \cdot \alpha = a^{-1} \cdot \alpha.$$

Но это означает, что α есть форма, соответствующая, согласно лемме 1 § 5, некоторому тензорному полю типа (1, 1) на B.

Обратно, мы покажем сейчас, что *если заданы некоторая линейная связность* Γ *на* B *и тензорное поле* K *типа* (1, 1) *на* B, *то существует одна и только одна аффинная связность, такая, что форма* ω *в* (1) *совпадает* *с формой связности связности* Г, *а форма* α *в* (1) *совпадает с формой, соответствующей данному тензорному полю* K.

Для доказательства мы используем разложение

$$\tilde{P} = P \times F.$$

Прежде всего определим $\tilde{\omega}$ в произвольной точке $\iota(x)$, $x \in P$. Любой касательный вектор $\tilde{X}$ многообразия $\tilde{P}$ в точке $\iota(x)$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\tilde{X} = X + A,$$

где $A \in F$ и X — касательный вектор многообразия P в точке x. С помощью формы связности ω связности Г на P и формы α на P, соответствующей тензорному полю K, можно написать

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}) = \omega(X) + \alpha(X + A).$$

Теперь мы определим $\tilde{\omega}$ на всем многообразии $\tilde{P}$ с помощью формулы

$$R^*_{\tilde{a}} \cdot \tilde{\omega} = \mathrm{ad}\left(\tilde{a}^{-1}\right) \cdot \tilde{\omega}.$$

Легко проверить, что $\tilde{\omega}$ оказывается формой связности на $\tilde{P}$ и, следовательно, определяет некоторую аффинную связность $\tilde{\Gamma}$. Из построения ясно, что имеет место разложение (1) формы $\tilde{\omega}$. Единственность почти очевидна.

Сказанное означает, что аффинная связность определяется некоторой линейной связностью и тензорным полем типа (1, 1) на B. В частности, каждая линейная связность Г на B индуцирует единственную аффинную связность $\tilde{\Gamma}$, такую, что форма α в (1) оказывается равной θ. Такая связность $\tilde{\Gamma}$ называется *аффинной связностью, канонически присоединенной к данной линейной связности* Г.

Мы будем рассматривать далее лишь аффинную связность $\tilde{\Gamma}$, канонически присоединенную к данной линейной связности Г. Группа голономии связности $\tilde{\Gamma}$, которая является подгруппой аффинной группы $\tilde{G}$, называется просто *группой голономии* (или, чаще, *неоднородной группой голономии*) и обозначается символом Φ, в то время как группа голономии линейной связности, являющаяся подгруппой группы $G = \mathrm{GL}(n, R)$, будет называться в дальнейшем *однородной группой голономии* и обозначаться символом Ψ.

Теорема 1. *Ψ представляет собой образ группы голономии Φ при гомоморфизме ψ: $\tilde{G} \to G$ (можно сказать иначе, что Ψ есть однородная часть группы голономии Φ).*

Доказательство. Возьмем опорную точку $x \in P$ для Ψ и $\iota(x) \in P$ для Φ. Пусть $\tilde{\tau}$ — горизонтальная кривая в $\tilde{P}$, соответствующая элементу $\tilde{a} \in \Phi$, т. е. соединяющая точки $\iota(x)$ и $\iota(x)\tilde{a}$; нам нужно показать, что $\psi(\tilde{\tau})$ есть горизонтальная кривая в P, соединяющая точки x и $x\psi(a)$. Достаточно доказать, что отображение ψ: $\tilde{P} \to P$ переводит $\tilde{\Gamma}$ в Γ так, как это описано в теореме § 5 главы II. Но это следует из построения формы $\tilde{\omega}$. Действительно, пусть $\tilde{X}$ — касательный вектор в точке $\iota(y)$, $y \in P$, горизонтальный относительно связности $\tilde{\Gamma}$. Тогда

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}) = \omega(X) + \theta(X) + A,$$

где $\tilde{X} = X + A$, $X = \psi(\tilde{X})$, есть разложение, соответствующее $\tilde{P} = P \times F$. Так как $\tilde{\omega}(\tilde{X})$ равно 0, то и $\mathfrak{g}$-часть значения $\omega(X)$ формы ω также равна 0, т. е. $X = \psi(\tilde{X})$ есть векторное поле, горизонтальное относительно Γ. Для любого горизонтального вектора $\tilde{X}$ в произвольной точке $\tilde{x} \in \tilde{P}$ мы можем найти такой элемент $\tilde{a} \in \tilde{G}$, что $\tilde{x}\tilde{a} \in \iota(P)$. Тогда

$$\psi(\tilde{X}) = \psi\left(R_{\tilde{a}}^{-1} \cdot R_{\tilde{a}}\tilde{X}\right) = R_{\psi(a)}^{-1} \cdot \psi\left(R_{a} \cdot \tilde{X}\right),$$

где $R_{\tilde{a}} \cdot \tilde{X}$ горизонтально в $\tilde{P}$ и, следовательно, $\psi\left(R_{\tilde{a}} \cdot \tilde{X}\right)$ горизонтально относительно Γ. Таким образом, $\psi(\tilde{X})$ есть горизонтальный вектор в P.

Любой элемент $\tilde{a} \in \Phi$ можно записать в виде $\tilde{a} = s \cdot a$, где $a = \psi(\tilde{a}) \in \Psi$. Здесь s называется *трансляционной частью* элемента $\tilde{a}$. Мы докажем теперь теорему 2:

Теорема 2. *Пусть $\tau = \{u_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ — замкнутая кривая, проходящая через точку $u \in B$. Трансляционная* *часть голономии* $\tilde{a} \in \Phi$, *соответствующей* τ, *может быть получена следующим образом. Пусть* Y_t — *касательный вектор в точке* u_0, *получившийся в результате параллельного перенесения* u'_t (*касательного вектора к* u_t) *вдоль* τ *из точки* u_t *в точку* u_0. *Мы находим кривую* $\{c_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ *в касательном аффинном пространстве* T_{u_0}, *такую, что* $c_0 = 0$ *и ее касательные векторы* c'_t *параллельны векторам* $-Y_t$. *Тогда трансляционная часть элемента* $\tilde{a}$ *равна* c_1.

Доказательство. Пусть x_0 — опорная точка для Ψ и Φ. Мы можем рассматривать T_{u_0} как стандартный слой F касательного расслоенного многообразия $T(B)$ и x_0 — как тождественное отображение F на себя.

Возьмем лифт x_t кривой u_t, проходящий через x_0, относительно связности Γ. Он является горизонтальной кривой в P, накрывающей u_t. Чтобы получить лифт $\tilde{x}_t$ относительно $\tilde{\Gamma}$ в $\tilde{P}$, мы напишем

$$\tilde{x}_t = x_t \cdot c_t,$$

где c_t — некоторая кривая с $c_0 = 0$ в группе F. Вычислим $\tilde{\omega}(\tilde{x}'_t)$. Те же выкладки, что и в § 2 главы II, дают такой результат:

$$c_t^{-1} \cdot c'_t + \operatorname{ad}(c_t^{-1}) \cdot \tilde{\omega}(x'_t) = 0.$$

Так как x'_t — горизонтальные векторы в P, то мы получаем

$$\tilde{\omega}(x'_t) = \omega(x'_t) + \theta(x'_t) = \theta(x'_t).$$

Следовательно,

$$c_t^{-1} \cdot c'_t = -\theta(x'_t).$$

$\theta(x'_t)$ равно $x_t^{-1} \cdot \pi(x'_t)$, т. е. $x_t^{-1} \cdot u'_t$, но это не что иное, как вектор Y_t нашей теоремы. Предыдущее равенство означает, что c_t есть кривая, касательные векторы c'_t которой параллельны $-Y_t$.

Теорема 3. *Пусть* x_t — *кривая в* P, *горизонтальная относительно связности* Γ, *и* $u_t = \pi(x_t)$ — *ее проекция в* B. *Лифт кривой* u_t, *определенный в* $\tilde{P}$ *относительно* $\tilde{\Gamma}$, *может быть записан в форме*

$$\tilde{x}_t = x_t \cdot c_t,$$

где c_t — некоторая кривая в F. Кривая u_t является геодезической в том и только в том случае, если c_t — прямая в F.

Доказательство. Те же выкладки, что и в доказательстве теоремы 2, дают

$$c'_t \cdot c_t^{-1} = -\theta(x'_t).$$

Если u_t — геодезическая, то x_t — интегральная кривая некоторого базисного векторного поля $B(\xi)$ в P (теорема § 7) и, следовательно, $\theta(x'_t) = \xi$ для всех t. Но это означает, что $c'_t \cdot c_t^{-1} = -\xi$, т. е. c_t — прямая в F. Столь же очевидна справедливость и обратного утверждения.

Примечания к главе III

1) Определение линейной связности с помощью $\nabla_X \cdot Y$ (§§ 3, 4) впервые было дано Косулем; затем оно использовалось К. Номидзу [14].

2) Если линейная связность Γ задана с помощью $\nabla_X \cdot Y$, то, как легко показать, операция

$$\nabla'_Y \cdot X = \nabla_X \cdot Y - [X, Y]$$

определяет новую связность Γ'. Если связность Γ определена с помощью компонент Γ^k_{ij}, то Γ' определяется с помощью $\Gamma'^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$. Далее, $\frac{1}{2}(\Gamma + \Gamma')$ есть также линейная связность; она определяется компонентами $\frac{1}{2}\left(\Gamma^k_{ij} + \Gamma^k_{ji}\right)$; поле тензора кручения этой связности является нулевым.

3) *Пусть на многообразии B задана риманова метрика; тогда существует одна и только одна линейная связность, удовлетворяющая следующим условиям:* a) *поле тензора кручения является нулевым;* b) *параллельное перенесение является изометрическим линейным отображением одного касательного пространства на другое.*

Такая линейная связность называется *римановой связностью* (или *связностью Леви-Чивита*), присоединенной к данной римановой метрике. Если обозначить риманову метрику символом $g(X, Y)$, то риманову связность можно задать с помощью ковариантной производной $\nabla_X \cdot Y$ (§§ 3, 4), которая определяется единственным образом из следующего уравнения:

$$2g(\nabla_X \cdot Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) + Y \cdot g(X, Z) - Z \cdot g(X, Y) + \\ + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y]),$$

где X, Y и Z — произвольные векторные поля. Свойство a) проверяется непосредственно; свойство b) следует из уравнения

$$X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X \cdot Y, Z) + g(Y, \nabla_X \cdot Z),$$

которое может быть легко получено. Дальнейшие сведения о римановых связностях см. в статье Бореля и Лихнеровича (цит. в примечании 1 к главе II).

4) Группы голономии линейных связностей были детально изучены Нийенхёйсом [13]. Часть I работы [13] может быть значительно упрощена применением теоремы о голономии из § 7 главы II.

5) Группа всех автоморфизмов некоторой линейной связности (§ 9) является группой Ли [8]. Геометрическое доказательство было дано С. Кобаяси [10], использовавшим полную параллелизуемость многообразия P, возникающую как результат задания линейной связности.

6) С помощью результатов § 10 была доказана следующая теорема [11]: *Односвязное дифференцируемое многообразие M с заданной на нем полной линейной связностью, такой, что $\nabla T = 0$ и $\nabla R = 0$, можно рассматривать как однородное пространство G/H, где G — наибольшая связная группа Ли автоморфизмов данной связности.*

Линейные связности этого типа были изучены в [14] с различных точек зрения. В частности, линейные связности с $T = 0$ и $\nabla R = 0$ называются *симметричными* (в смысле Э. Картана).

7) Способ рассмотрения, примененный в § 11, принадлежит С. Кобаяси и автору.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА И РЕДАКТОРА

Книга отличается сжатостью и точностью изложения и одновременно некоторым своеобразием терминологии. Стремясь сохранить лаконичный стиль автора и в то же время правильно передать содержание понятий, мы местами были вынуждены ввести не употреблявшиеся в русских книгах термины. Так, мы переводим lift of a vector field — *лифт векторного поля*; differentiably complete family — *полное относительно суперпозиции дифференцируемых функций семейство*; local family — *локально полное семейство*; the group acts differentiably — *группа действует дифференцируемым образом*; the group acts to the right — *группа действует правосторонним образом*.

Далее, мы обращаем внимание читателей на то обстоятельство, что автор широко пользуется понятиями теории топологических пространств, алгебраической теории групп и теории векторных пространств, но в то же время по существу не опирается на теоремы этих теорий. Поэтому мы сочли целесообразным снабдить текст сравнительно небольшим числом примечаний, чтобы дать читателю возможность обойтись без поисков определений тех или иных понятий в книгах по топологии и алгебре. Примечания, относящиеся к теории хаусдорфовых пространств, теории групп и теории векторных пространств, объединены под соответствующими заголовками.

Хаусдорфовы пространства

[1]) Множество S элементов x, y, z, ... называется *хаусдорфовым пространством*, если для любого $x \in S$ определены некоторые множества $U_x \subset S$, называемые *окрестностями* элемента x, которые удовлетворяют следующим требованиям.

1. Для любого $x \in S$ существует по крайней мере одна окрестность U_x; $x \in U_x$ для любого U_x.

2. Если $U_x^{(1)}$ и $U_x^{(2)}$ — окрестности элемента x, то существует такая окрестность $U_x^{(3)}$ этого элемента, что

$$U_x^{(3)} \subset U_x^{(1)} \cap U_x^{(2)}.$$

3. Пусть заданы x, U_x и $y \in U_x$; тогда существует окрестность U_y элемента y, такая, что $U_y \subset U_x$.

4. Пусть заданы произвольные x, $y \in S$ $(x \neq y)$; тогда существуют окрестности U_x, U_y, такие, что $U_x \cap U_y = 0$.

Совокупность введенных таким образом окрестностей называется *базисом* хаусдорфова пространства.

[2]) Говорят, что хаусдорфово пространство удовлетворяет ***второй аксиоме счетности***, если оно обладает счетным базисом.

[3]) Говорят, что на некотором множестве задана *топология*, если в нем определена система окрестностей, удовлетворяющих перечисленным выше аксиомам хаусдорфова пространства (или другой, несколько ослабленной системе аксиом).

Каждое подмножество хаусдорфова пространства можно снабдить ***индуцированной*** топологией, если за окрестность его точки принять пересечение ее окрестности в исходном пространстве с рассматриваемым подмножеством. Снабженное этой ***естественной топологией*** подмножество можно рассматривать как новое хаусдорфово пространство.

Однозначное отображение множества S хаусдорфова пространства на другое множество $\bar{S}$ этого же или другого хаусдорфова пространства называется ***непрерывным***, если для каждого элемента $x \in S$ и любой окрестности $\bar{U} \subset \bar{S}$ образа $\bar{x}$ этого элемента можно указать окрестность $U \subset S$ этого элемента x, отображающуюся в $\bar{U}$.

Гомеоморфизмом (*топологическим отображением*) называется взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение.

[4]) Множество в хаусдорфовом пространстве называется ***открытым***, если каждый его элемент обладает окрестностью, принадлежащей этому множеству. В частности, каждая окрестность является открытым множеством.

Множество хаусдорфова пространства называется *замкнутым*, если его дополнение до всего пространства открыто.

[5]) Множество хаусдорфова пространства называется *компактным*, если из всякого его счетного покрытия открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.

[6]) Хаусдорфово пространство называется *связным*, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся замкнутых множества. Множество в хаусдорфовом пространстве называется *связным*, если оно связно, будучи рассматриваемо как подпространство.

[7]) *Компонентой* (связной) элемента хаусдорфова пространства называется максимальное связное множество, содержащее этот элемент.

[8]) Хаусдорфово пространство называется *локально связным*, если любая открытая окрестность любой точки содержит область (открытое связное множество), содержащую эту точку.

Множество в хаусдорфовом пространстве называется локально связным, если оно является таковым, будучи рассматриваемо как хаусдорфово пространство.

[9]) *Непрерывной кривой* в хаусдорфовом пространстве называется образ отрезка $[0, 1]$, при его непрерывном отображении x_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в это пространство. *Путем* называется непрерывная кривая, на которой указаны начальная точка x_0 и конечная точка x_1, или, как говорят, указано *направление обхода*.

[10]) Множество хаусдорфова пространства называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

[11]) *Гомотопией* отображений одного хаусдорфова пространства L в другое S называется непрерывное отображение

$$f: L \times I \to S,$$

где $I = [0, 1]$, т. е. функция $f(l, t)$ со значениями из S, непрерывная по совокупности двух аргументов $l \in L$ и $t \in I$.

Пусть задана гомотопия f отображений некоторого хаусдорфова пространства L в базу B расслоенного многообразия P. Некоторая гомотопия F отображений L в P называется гомотопией, *накрывающей* исходную гомотопию f, если ее проекция является исходной гомотопией, т. е.

$$\pi[F(l, t)] = f(l, t).$$

Теорема о накрывающей гомотопии (см. [19], стр. 67) утверждает следующее. Пусть задано непрерывное отображение F_0 хаусдорфова пространства L в расслоенное многообразие P и гомотопия $f(l, t)$ отображений этого пространства в базу B, такая, что $\pi F_0(l) = f(l, 0)$. Тогда существует накрывающая гомотопия $F(l, t)$ для $f(l, t)$. При этом, если $f[\pi(x), t]$ постоянно при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, то и $F(x, t)$ также постоянно.

Пусть L состоит из одной точки l, а $x_0 = F_0(l)$ — ее образ в P. Пусть $f(l, t)$ — гомотопия отображений точки l в базу B, такая, что $f(l, 0) = \pi(x_0)$. Эта гомотопия будет кривой u_t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ в базе с начальной точкой $\pi(x_0)$. По теореме о накрывающей гомотопии, в P существует кривая y_t, проектирующаяся в u_t.

[12]) *Гомотопией* между двумя непрерывными кривыми (путями) τ_0 и τ_1 в хаусдорфовом пространстве B, имеющими общие начала и общие концы, называется непрерывное отображение $\varphi(t, s)$ прямого произведения $I \times I$ двух единичных отрезков $I = [0, 1]$ в пространство B, такое, что множество точек $\varphi(t, 0) \in B$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ совпадает с τ_0, а множество точек $\varphi(t, 1) \in B$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ совпадает с τ_1. Если между двумя путями существует гомотопия, то говорят, что один из них может быть переведен в другой непрерывной деформацией внутри пространства.

[13]) Два замкнутых пути, начала и концы которых совпадают с точкой u (называемой *опорной* для этих путей) хаусдорфова пространства, называются *гомотопными* между собой, если один из них можно перевести в другой непрерывной деформацией внутри пространства. *Композицией* $\mu\nu$ двух путей μ, ν с опорной точкой u называется новый путь с той же опорной точкой, получающейся при последовательном прохождении сначала μ, а затем ν.

Множество всех гомотопных между собой путей с опорной точкой u называется *гомотопическим классом*. Определим композицию двух гомотопических классов C_1 и C_2 как новый класс C_1C_2, состоящий из всех путей, гомотопных $\mu\nu$, где μ и ν — произвольные пути из C_1 и C_2 соответственно. Тогда множество всех гомотопических классов образует так называемую *фундаментальную группу* пространства.

[14]) Замкнутый путь с опорной точкой u называется *гомотопным нулю*, если он может быть стянут в точку непрерывной деформацией внутри пространства.

[15]) *k-мерным евклидовым пространством* R^k (отнесенным к декартовой системе координат) называется множество всех упорядоченных систем k вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_k)$, называемых *точками* этого пространства, в котором расстояние между двумя точками $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ определяется формулой

$$\rho = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_k - y_k)^2} \equiv \rho(x, y).$$

Открытым шаром в евклидовом пространстве R^k радиуса a с центром в точке x называется множество всех точек $y \in R^k$, для которых $\rho(x, y) < a$.

Евклидово пространство можно рассматривать как хаусдорфово пространство, если множество всех открытых шаров считать базисной системой окрестностей.

Группы

[16]) *Группой* G называется множество элементов $a, b, c, \ldots$, в котором определена групповая композиция, сопоставляющая каждой упорядоченной паре (a, b) элементов из G единственный элемент $c = ab$ из G и обладающая следующими свойствами:

1. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность).

2. Существует единичный элемент e, такой, что $ae = ea = a$ для любого $a \in G$.

3. Для всякого $a \in G$ существует единственный обратный элемент $a^{-1} \in G$, такой, что $aa^{-1} = a^{-1}a = e$.

Заметим, что пара элементов (a, b) из группы G в книге рассматривается как элемент прямого произведения $G \times G$.

Подгруппой H группы G называется множество элементов из G, образующих группу относительно групповой композиции исходной группы.

[17]) *Левым смежным классом* группы G по подгруппе H, порожденным элементом $a \in G$, называется множество aH всех элементов вида ax, где $x \in H$. Левые

смежные классы, порожденные различными элементами, либо совпадают, либо не имеют общих элементов.

Аналогично определяется правый смежный класс Ha.

Если $Ha = aH$ при любом $a \in G$, то подгруппа H называется *инвариантной*.

Внутренним автоморфизмом группы G, определяемым элементом a, называется отображение

$$x \to a^{-1}xa, \quad x \in G,$$

группы G в себя.

Инвариантная подгруппа H инвариантна относительно внутренних автоморфизмов группы: $a^{-1}Ha = H$ при любом $a \in G$.

Множество всех смежных классов по инвариантной подгруппе H образует так называемую *фактор-группу* G/H, в которой композиция классов aH и bH определяется как класс abH. Можно показать, что $abH = a_1b_1H$, где a_1 и b_1 — любые элементы из aH и bH соответственно.

[18]) Отображение φ группы G на группу G' называется *изоморфным* отображением (изоморфизмом), если оно взаимно однозначно и сохраняет групповую композицию:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad a, b \in G.$$

Изоморфное отображение группы на себя называется *автоморфизмом*. В частности, автоморфизмом является отображение

$$x \to a^{-1}xa,$$

где x — текущий, а a — произвольно фиксированный элемент группы. Такой автоморфизм называется *внутренним автоморфизмом*, порожденным элементом a (ср. примечание [16]).

[19]) Однозначное (но не обязательно взаимно однозначное) отображение f группы G' в группу G называется *гомоморфизмом*, если оно сохраняет групповую композицию:

$$f(ab) = f(a)f(b), \quad a, b \in G'.$$

Множество всех элементов из G', которые отображаются в единичный элемент из G, называется *ядром* гомоморфизма. Аналогично определяется гомоморфизм алгебры в алгебру.

[20]) Эндоморфизмом группы называется гомоморфное отображение группы в эту же группу.

[21]) *Прямым произведением* или *прямой суммой* r множеств $A_1, \ldots, A_r$, взятых в этом порядке, называется множество всех упорядоченных совокупностей $(a_1, \ldots, a_r)$, где a_j — элемент из A_j $(j = 1, \ldots, r)$. Прямое произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_r$ обозначается $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_r$. Прямая сумма этих множеств обозначается $A_1 + A_2 + \ldots \ldots + A_r$.

[22]) Если в группе G, обладающей инвариантной подгруппой N, имеется подгруппа H, изоморфная фактор-группе G/N, то любой элемент из G можно представить как произведение некоторых элементов из H и N. В этом случае говорят, что G есть *полупрямое произведение* H и N.

В частности, прямое произведение двух групп H и N является полупрямым произведением. В нем и H и N будут инвариантными подгруппами.

Аналогично определяется *полупрямая сумма* в случае, когда групповая композиция называется сложением.

Векторные пространства

[23]) *Линейным пространством*, или *векторным пространством*, или *модулем линейных форм* над полем R вещественных чисел (т. е. над множеством всех вещественных чисел, обозначаемых далее через $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$) называется множество элементов (векторов) $X, Y, Z, \ldots$, в котором:

1. Определена операция сложения, однозначно сопоставляющая каждой паре векторов X, Y новый вектор $X + Y$, называемый их *суммой*, причем

$$X + Y = Y + X, \quad (X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

2. Определена операция умножения числа на вектор, сопоставляющая каждому числу α и каждому вектору X новый вектор αX, причем

$$X\alpha = \alpha X, \quad 1 \cdot X = X, \quad (\alpha + \beta) X = \alpha X + \beta X,$$
$$\alpha (X + Y) = \alpha X + \alpha Y, \quad \alpha (\beta X) = (\alpha\beta) X.$$

Операция вычитания возникает автоматически:

$$X - Y = X + (-1) Y.$$

Векторное пространство можно строить не только над полем R вещественных чисел, но и, например, над множеством $\mathfrak{F}$ функций, при помощи которых определяется дифференцируемая структура многообразия V.

24) Векторное пространство называется *n-мерным*, если в нем имеется система n векторов $X_1, \ldots, X_n$ (*базис пространства*), через которые линейно выражается любой вектор X пространства:

$$X = \alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_n X_n,$$

причем сами векторы $X_1, \ldots, X_n$ линейно независимы, т. е. не связаны соотношением вида

$$\beta_1 X_1 + \ldots + \beta_n X_n = 0,$$

где не все $\beta_1, \ldots, \beta_n$ равны 0.

25) Векторным пространством, *сопряженным* к данному, называется пространство линейных отображений исходного пространства на поле R вещественных чисел.

26) *Алгеброй* называется векторное пространство, в котором определена еще операция умножения векторов (билинейная операция), сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов X, Y новый вектор $[X, Y]$ — их произведение, причем

$$[X, Y+Z] = [X, Y] + [X, Z], \quad [X+Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z],$$
$$[\alpha X, \beta Y] = \alpha\beta [X, Y].$$

Такой алгеброй над полем R вещественных чисел является множество $\mathfrak{F}$ функций на многообразии V, при помощи которых определяется дифференцируемая структура этого многообразия.

27) *Идеалом* $\mathfrak{g}'$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется подалгебра, которая „выдерживает“ умножение на любой элемент объемлющей алгебры:

$$a\mathfrak{g}' \in \mathfrak{g}' \text{ при любом } a \in \mathfrak{g}.$$

28) *Автоморфизмом* алгебры называется ее отображение на себя, при котором сохраняются алгебраические операции.

Дополнительные примечания

29) Т. е. существование в рассматриваемой области производных любого порядка.

[30]) Знак $\cdot$ обозначает здесь композицию двух отображений (функций).

[31]) *Траекторией* однопараметрической группы φ_t, проходящей через точку $x \in V$, называется множество точек $\varphi_t x$ $(-\infty < t < +\infty)$.

[32]) $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

[33]) sign $s = +1$ для четных перестановок и $= -1$ для нечетных.

[34]) Под элементом множества $\mathfrak{D} = \sum_{r=0}^{n} \mathfrak{D}^r$ понимаются формально записанные „суммы" форм различных порядков:

$$\sum_i \omega(X_i) + \sum_{i,j} \omega(X_i, X_j) + \ldots + \omega(X_1, \ldots, X_n).$$

Действия над этими элементами (сложение элементов и их умножение на функции) определяются по обычным правилам действий над многочленами с учетом того, что для форм одного порядка они уже определены.

[35]) *Альтернированием* отображения называется его замена новым отображением, сопоставляющим прежнему прообразу результат *альтернирования* прежнего образа. Операция альтернирования многоиндексной величины определяется так:

$$a_{[i_1, \ldots, i_p]} = \frac{1}{p!} \sum_s (\text{sign } s)\, a_{s(i_1) \ldots s(i_p)},$$

где знак $\sum_s$ обозначает суммирование по всевозможным перестановкам индексов $i_1, \ldots, i_p$.

[36]) Это требование обеспечивает дифференцируемость отображений

$$a \to a^{-1}, \qquad (a, b) \to ab.$$

[37]) Символ ad есть сокращение слов adjoint representation (присоединенное представление).

[38]) В тексте дается определение лишь главного расслоенного многообразия. Более общим понятием является понятие *расслоенного многообразия* (не обязательно главного). Из определения, данного в тексте, следует, что в главном рас-

слоенном многообразии слой, соответствующий произвольной точке $u \in B$, т. е. ее полный прообраз $\pi^{-1}(u)$, изоморфен группе G. В общем случае слой расслоенного многообразия представляет собой дифференцируемое многообразие, в котором группа G транзитивно действует правосторонним образом, но которое не обязательно изоморфно самой группе.

[39]) Две точки многообразия P называются *эквивалентными* по отношению к группе G, если существует преобразование, являющееся элементом группы G, переводящее одну из этих точек в другую. *Классом эквивалентности* называется множество всех эквивалентных между собой точек. Множество, элементами которого являются такие классы, называется *фактор-пространством многообразия P по отношению к соотношению эквивалентности, порожденному группой G*. Соответствие π, относящее каждой точке $x \in P$ содержащий ее класс эквивалентности, называется *канонической проекцией*.

[40]) Группа Ли преобразований многообразия V называется *транзитивной*, если для любых двух точек многообразия существует преобразование из этой группы, переводящее одну точку в другую.

[41]) Суженную (restricted) группу голономии называют также ограниченной группой голономии.

[42]) Мера Хаара μ определяется на множествах достаточно широкого класса (борелевские множества), замкнутого относительно счетных теоретико-множественных операций (объединение, вычитание, пересечение). Отличительным свойством меры Хаара является ее *инвариантность* относительно левых сдвигов группы L_a или правых сдвигов R_a. Мера Хаара $\mu(A)$ множества A, являющаяся и лево- и правоинвариантной,

$$\mu(R_a A) = \mu(L_a A) = \mu(A),$$

называется биинвариантной.

Относительно этой меры определяется операция интегрирования функций по борелевским множествам. В частности, благодаря компактности группы, можно рассматривать интегралы, распространенные по всей группе G.

[43]) Речь идет о поле $v^i = du^i/dt$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ambrose W., Singer I. (Амброз и Сингер)
A theorem on holonomy, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 428—443.

Cartan E. (Картан Э.)

[2] Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, *Acta Math.*, **48** (1926), 1—42.

[3] Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *Ann. Ec. Norm.*, **41** (1924), 1—25.

[4] Cartan H. (Картан А.)
Notions d'algèbre différentielle; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie; La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal. Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, 15—27, 57—71.

[5] Chern Shiing-shen (Чжень Шэн-шень)
Topics in differential geometry, Institute for Advanced Study, 1951.

[6] Chevalley C. (Шевалле)
Theory of Lie groups, I, Princeton, 1946. [Русский перевод: Теория групп Ли, т. I, М., ИЛ, 1948.]

[7] Ehresmann C. (Эресман)
Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable, Colloque de Topologie, Bruxelles, 1950, 29—55.

[8] Hano J., Morimoto A. (Хано, Моримото)
Note on the group of affine transformations of an affinely connected manifold, *Nagoya Math. J.*, **8** (1955), 85—95.

[9] Hano J., Ozeki H. (Хано, Одзеки)
On the holonomy groups of linear connections, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956).

Kobayashi S. (Кобаяси)

[10] Le groupe des transformations qui laissent invariant le parallelisme, Colloque de Topologie de Strasbourg (mai 1954).

[11] Espaces à connections affines et riemanniennes symétriques *Nagoya Math. J.*, 9 (1955), 25—37.

[12] Theory of Connections, Part I, Mimeographed notes, University of Washington, 1955.

[13] Nijenhuis A. (Нийенхёйс)
On the holonomy groups of linear connections I, II, Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Proc., Series A, **56** (1953), 233—249, **57** (1954), 17—25.

Nomizu K. (Номидзу)

[14] Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. Journ. Math.*, **76** (1954), 33—65.

[15] Un théorème sur les groupes d'holonomie, *Nagoya Math. J.*, **10** (1956).

[16] Reduction theorem for connections and its application to the problem of isotopy and holonomy groups of a Riemannian manifold, *Nagoya Math. J.*, **9** (1955), 57—66.

[17] Ozeki H. (Одзеки)
Infinitesimal holonomy groups of bundle connections, *Nagoya Math. J.*, 10 (1956).

[18] Понтрягин Л. С.
Непрерывные группы, 2-е изд., М., Гостехиздат, 1954.

[19] Steenrod N. (Стинрод)
The topology of fiber bundles, Princeton, 1951. [Русский перевод: Топология косых произведений, М., ИЛ, 1953.]

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

К. Номидзу

ГРУППЫ ЛИ и ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *М. С. Агранович*
Художественный редактор *Е. И. Подмарькова*
Технический редактор *Е. С. Потапенкова*
Корректор *Т. С. Бухтина*

Сдано в производство 26/XII 1959 г. Подписано к печати 7/V 1960 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$=2,0 бум. л. 6,6 печ. л. Уч.-изд. л. 6,0. Изд. № 1/5259.
Цена 4 р. 20 к. Зак. 996.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, Ново-Алексеевская, 52

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

выпускает серию брошюр
под общим названием

«БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА"»

Вышли из печати

Микусинский Я., Сикорский Р., **Элементарная теория обобщенных функций,** 1. Варшава, 1957, перевод с английского, 3,5 изд. л., ИЛ, 1959.

Хёрмандер Л., **К теории общих дифференциальных операторов с частными производными.** Уппсала, 1955, перевод с английского, 6 изд. л., ИЛ, 1959.

Халмош П. Р., **Лекции по эргодической теории.** Токио, 1956, перевод с английского, 7 изд. л., ИЛ, 1959.

Капланский И., **Введение в дифференциальную алгебру.** Париж, 1957, перевод с английского, 4 изд. л., ИЛ, 1959.

Карлеман Т., **Математические задачи кинетической теории газов.** Уппсала, 1957, перевод с французского, 6 изд. л., ИЛ, 1960.

Хейман В. К., **Многолистные функции.** Кембридж, 1958, перевод с английского, 8,4 изд. л., ИЛ, 1960.

Находятся в печати

Судзуки М., **Строение группы и строение структуры ее подгрупп.** Берлин, Гёттинген, Гейдельберг, 1956, перевод с английского, 6 изд. л.

Ито К., **Вероятностные процессы,** вып. I. Токио, 1957, перевод с японского, 6 изд. л.

Гудстейн Р. Л. **Математическая логика.** Лейчестер, 1957, перевод с английского, 5 изд. л.

Рутисхаузер Г., **Алгоритмы частных и разностей.** Базель, Штутгарт, 1957, перевод с немецкого, 4 изд. л.

Гренандер У., **Случайные процессы и статистические выводы.** Стокгольм, 1950, перевод с английского, 7 изд. л.